Mathematische Methoden in Medizin und Technik

Inverse Probleme und Tomographie

Rainer Kreß

Minendetektoren und Impedanztomographie

Etwa 100 Millionen zumeist oberflächennah vergrabene Landminen gefährden als Hinterlassenschaften bewaffneter Konflikte in vielen Ländern die Bevölkerung. Ihre rasche und vollständige Beseitigung ist eine große Herausforderung. Eines der am häufigsten zum Minenräumen eingesetzten Geräte ist gegenwärtig der Metalldetektor. Diese Geräteklasse weist jedoch, bedingt durch allgegenwärtig im Boden befindliche Metallteile, eine hohe Fehlalarmrate auf. Auf Anregung des Auswärtigen Amtes wurde ab 2004 zur Erbringung eines relevanten deutschen Beitrags zur Technologie der Minendetektion vom Bundesministerium für Bildung und Forschung (BMBF) über drei Jahre ein Projektverbund *Metalldetektoren für Humanitäres Minenräumen* gefördert. Zwölf Institute aus den Bereichen Mathematik, Elektrotechnik, Geophysik und zerstörungsfreie Materialprüfverfahren sollten prüfen, ob die hohen Fehlalarmraten beim Einsatz von tragbaren Metalldetektoren konventioneller Bauart durch nachgeschaltete mathematische Methoden reduziert werden können. Zu den beteiligten Forschungseinrichtungen gehörte auch das Institut für Numerische und Angewandte Mathematik an der Universität Göttingen.

Um zu erfahren, warum Mathematik die Fehlerrate bei Metalldetektoren reduzieren kann, muss man zuerst die Funktionsweise der Geräte kennen. Der über den Boden geführte Metalldetektor sendet eine elektromagnetische Welle aus, die von im Boden befindlichen Metallteilen gestreut wird (vgl. Abb. 1). Die gestreute sekundäre Welle induziert in einer Empfängerspule im Detektor eine elektrische Spannung. Falls letztere als Folge von vorhandenen Metallteilen einen Schwellwert überschreitet, gibt der Detektor ein akustisches Signal. Durch eine Messung und Aufzeichnung des Verlaufs dieser Spannung während der Bewegung über den Boden lässt sich jedoch die Minendetektion quantitativ als ein inverses Problem für elektromagnetische Felder interpretieren: Aus dem gemessenen Spannungsverlauf sollen geometrische Parameter zu Form, Größe und Position des entdeckten metallischen Objekts ermittelt werden. Weiter unten werden Göttinger Forschungsergebnisse vorgestellt, die das Potenzial von mathematischen Methoden der Streutheorie zur Reduzierung von Fehlalarmquoten bei der Minendetektion bestätigen.

Die elektrische Impedanztomographie als unser zweites Beispiel ist ein neues nichtinvasives Bildgebungsverfahren in der Medizin und Technik. Es basiert auf einer Visualisierung ortsabhängiger elektrischer Leitfähigkeiten. Der elektrische Widerstand als Reziprokes der Leitfähigkeit wird auch Impedanz

Mit MInendetektoren identifizierte
Landminen in Mexiko

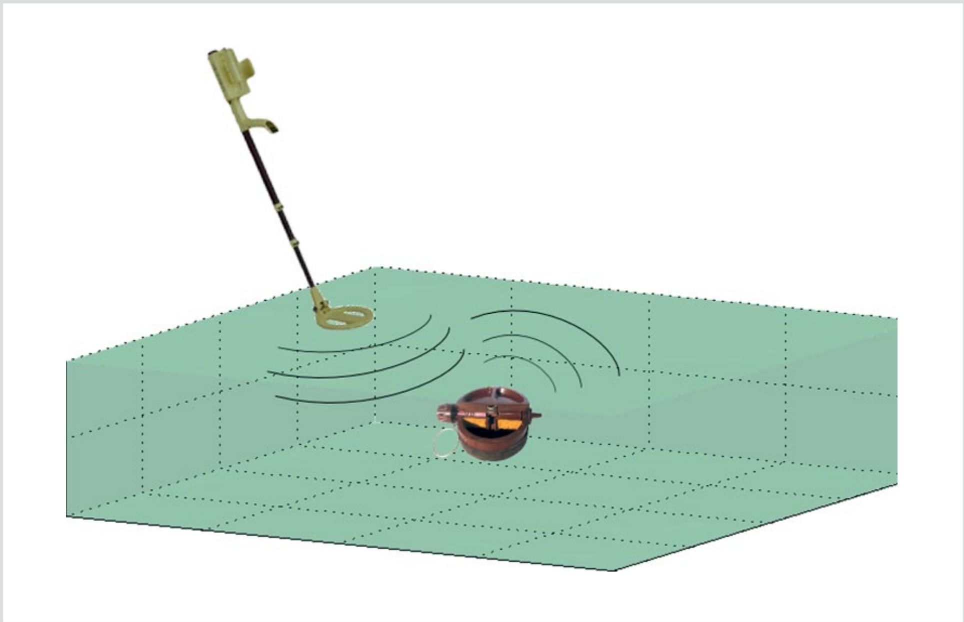

Abb. 1:
Schematische Darstellung der Funktionsweise eines handgehaltenen Metalldetektors
Abbildung: Verfasser

genannt, und dies erklärt den ersten Teil der Namensgebung. (Der zweite Teil der Namensgebung wird weiter unten erläutert werden.) In der Medizin wird die Impedanztomographie eingesetzt, um beispielsweise Querschnittbilder des menschlichen Thorax zur Überwachung der Lungenfunktion zu erhalten. Dabei nutzt das Verfahren die unterschiedlichen Leitfähigkeiten der Lunge im beatmeten und unbeatmeten Zustand und des umgebenden Körpergewebes (vgl. Abb. 2) aus.

Nach demselben Prinzip funktionieren technische Anwendungen beispielsweise bei der Überwachung der Verteilung von Öl und Wasser in Pipelines und der Strömung von verschiedenen Substanzen in Mischkesseln in der chemischen Industrie. In der Denkmalpflege lassen sich mit Impedanztomographie Bruchstellen in Gebäudeteilen aufspüren, und sogar in der Forstwirtschaft kann Impedanztomographie als Instrument zur Qualitätsüberprüfung von Bäumen eingesetzt werden.

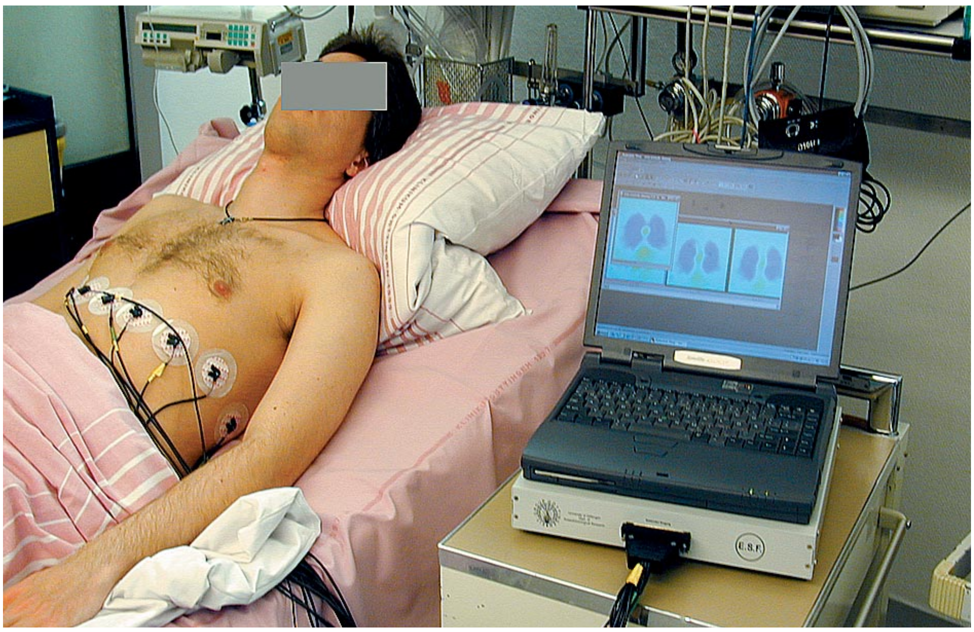

Abb. 2:
Impedanztomographie des Brustkorbs eines Patienten des Universitätsklinikums Göttingen
Abbildung:Verfasser

Im Vergleich mit der weiter unten betrachteten Röntgentomographie ist die Impedanztomographie um Größenordnungen billiger und vermeidet die gesundheitlichen Gefahren durch Röntgenstrahlen. Nachteil des Verfahrens ist die vergleichsweise niedrige räumliche Bildauflösung (vgl. Abb. 3).

Zur Bestimmung der Leitfähigkeitsverteilung in einem elektrisch leitfähigen Objekt werden an auf dem Rand angebrachten Elektroden niederfrequente Ströme eingeprägt. Die von diesen Strömen hervorgerufenen Spannungen zwischen den Elektroden sind abhängig von der Leitfähigkeitsverteilung im Innern des Objekts. Die Ermittlung dieser Verteilung aus den eingeprägten Strommustern und den dazu gehörenden gemessenen Spannungen stellt ein inverses Problem aus der Elektromagnetik dar.

Unter einem Schwerpunkt Mathematik für Innovationen in Industrie- und Dienstleistungen fördert das BMBF seit Beginn dieses Jahres einen Projektverbund »Regularisierungsverfahren für die elektrische Impedanztomographie in Medizin und Geowissenschaften«. Dieser Verbund besteht aus sechs Instituten aus den Bereichen Mathematik, Physik und Medizin und hat unter anderem als Ziel, die mathematischen Verfahren der Impedanztomographie im Hinblick auf ihre praktische Einsatzfähigkeit in der medizinischen Anwendung weiterzuentwickeln. Von der Universität Göttingen sind an diesem Verbund aus der Mathematik das Institut für Numerische und Angewandte Mathematik und aus der Medizin die Abteilung Anaesthesiologische Forschung am Zentrum für Anaesthesiologie beteiligt. Ein Teil der Göttinger mathematischen Forschungsansätze zu einem effizienten Rekonstruktionsverfahren bei Leitfähigkeitsverteilungen mit starken Kontrasten wird weiter unten dargestellt werden.

Die Göttinger Beiträge in den beiden Projektverbünden zur Minendetektion und zur Impedanztomographie stehen in enger thematischer Verbindung mit einer Forschernachwuchsgruppe »Neue numerische Verfahren zur Lösung inverser Probleme«, die im Jahre 2002 vom Land Niedersachsen auf Antrag des Verfassers am Institut für Numerische und Angewandte Mathematik eingerichtet wurde und unter Leitung von Professor Roland Potthast über fünf Jahre erfolgreich gearbeitet hat. Bevor diese Arbeiten etwas genauer beschrieben werden und allgemein verdeutlicht wird, warum und wie Mathematik von Nutzen in der Minendetektion und der Impedanztomographie ist, soll zunächst geklärt werden, warum diese Aufgaben zu der Klasse der inversen Probleme zählen.

Inverse Probleme

In der Mathematik werden zwei Probleme zueinander invers genannt, wenn die Formulierung des ersten Problems teilweise oder vollständig die Lösung des zweiten Problems enthält und umgekehrt. Multiplikation und Division sind zueinander invers: die Multiplikationsaufgabe 4 x 5 enthält in der Formulierung das Ergebnis 5 der Divisionsaufgabe 20 : 4, und umgekehrt enthält die Formulierung der Division das Ergebnis 20 der Multiplikation. Nach dieser Definition erscheint es zunächst willkürlich, nur eines der beiden Probleme als inverses Problem zu bezeichnen. Häufig ist jedoch eines der beiden Probleme einfacher zu behandeln und intensiver untersucht, während das zweite Problem schwieriger und in der mathematischen Literatur noch nicht so ausführlich behandelt ist. Dann wird das erste das direkte und das zweite das inverse Problem genannt.

Inverse Probleme treten in vielfältiger Weise bei der mathematischen Modellierung von nichtinvasiven Evaluierungs- und Bildgebungsverfahren in Naturwissenschaften, Medizin und Technik auf. Vereinfacht gesprochen ist hier bei den entsprechenden direkten Problemen die Ursache bekannt, und es wird nach der Wirkung gefragt, während umgekehrt bei den zugeordneten inversen Problemen aus der Wirkung auf die Ursache zurückgeschlossen werden soll. Ein typisches Beispiel bildet die inverse Streutheorie für akustische, elektromagnetische und elastische Wellen.

Allgemein befasst sich die Streutheorie mit den Auswirkungen von Objekten auf die Ausbreitung von Wellen. Bei einem direkten Streuproblem sind die ungestört einfallende Welle und das streuende Objekt bekannt, und gefragt ist nach der resultierenden gestreuten Welle. Beim zugehörenden inversen Streuproblem sollen aus Messungen der gestreuten Welle an geeigneten Detektoren geometrische und physikalische Parameter des streuenden Objekts ermittelt werden. Zur Veranschaulichung kann an Wasserwellen gedacht werden. Die auf einem See durch Einwerfen eines Gegenstandes erzeugten Wellen hängen von der Gestalt des eingeworfenen Körpers ab. Am Seeufer soll aus der Form der am Ufer eintreffenden Wasserwellen erschlossen werden, ob in der Seemitte ein kugelförmiger Stein, ein langer zylindrischer Stock oder irgendein anderes Objekt ins Wasser geworfen wurde.

Anwendungen findet die inverse Streutheorie in der medizinischen Diagnostik (Ultraschalltomographie), der zerstörungsfreien Materialprüfung (zum Beispiel bei der Erkennung von defekten ICE-Radreifen und -Achsen), der seismischen Erdöl- und Mineralexploration, bei Radar usw. Dabei werden vereinfacht gesagt die Unterschiede in der Streuung von Schallwellen an gesundem oder krankem Körpergewebe ausgenutzt oder von elastischen Wellen an Metallkörpern mit oder ohne Defekt oder an Erdschichten mit oder ohne Öl- oder Erzeinschlüssen Man nutzt auch die Abhängigkeit der Streuung von elektromagnetischen Wellen an metallischen und nichtmetallischen Objekten von deren Position, Größe und Gestalt. Grundsätzlich ließe sich das obige Modellproblem für Wasserwellen dadurch lösen, dass für eine möglichst große Zahl von Objekten vorab experimentell die am Seeufer eintreffenden Wellen registriert und katalogisiert werden. In der konkreten Anwendung kann dann durch den Vergleich der tatsächlich beobachteten Wellen mit den katalogisierten Fällen der eingeworfene Körper identifiziert werden.

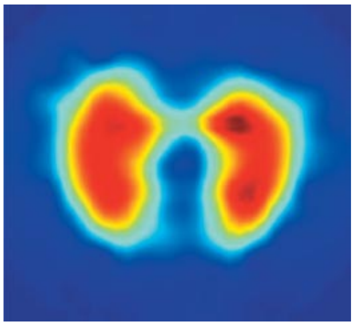

Abb. 3: Tomographische Aufname von zwei Lungenflügeln
Abbildung: Verfasser

Dieses Verfahren und analoge Vorgehensweisen bei den inversen Streuproblemen sind in der Praxis völlig ungeeignet und müssen durch eine effiziente mathematische Modellierung als inverse Probleme für Differentialgleichungen ersetzt werden. Sowohl für die Anwendungen als auch als anspruchsvolle mathematische Aufgabe stellt sich bei inversen Streuproblemen, und grundsätzlich bei allen inversen Problemen, als Erstes die Frage nach der eindeutigen Rekonstruierbarkeit, das heißt, die Frage, ob zur Identifizierung der gesuchten geometrischen und physikalischen Parameter ausreichend Information vorliegt. Die zweite wichtige Aufgabe bildet die Entwicklung, Implementierung und Analyse von in der Praxis einsetzbaren numerischen Rekonstruktionsalgorithmen, die dann in entsprechenden Chips in die Meß- und Visualisierungsgeräte eingebaut werden. Für den aktuellen mathematischen Forschungsstand zu inversen Streuproblemen sei verwiesen auf [2, 3].

Graduiertenkolleg »Identifikation in mathematischen Modellen: Synergie stochastischer und numerischer Methoden«

(red.) Inverse Probleme sind ein wesentliches Element des Graduiertenkollegs 1023 »Identifikation in mathematischen Modellen: Synergie stochastischer und numerischer Methoden«, das von den beiden Instituten für Mathematische Stochastik und für Numerische und Angewandte Mathematik an der Universität Göttingen getragen wird. Mit dieser Thematik ist es Ziel des Graduiertenkollegs, die Kollegiatinnen und Kollegiaten an Identifikation als einen der grundlegenden Aspekte wissenschaftlicher mathematischer Arbeit in den Anwendungen heranzuführen. Dies ist in der ersten Bewilligungsphase seit Juli 2004 vor allem bei inversen Problemen für partielle Differentialgleichungen und bei Parameter- und Modellidentifikationen in der Statistik mit Erfolg durchgeführt worden. Die Forschungsprojekte umfassen dabei neben inversen Streuproblemen und der elektrischen Impedanztomographie unter anderem die Identifizierung von Modellparametern bei turbulenten Strömungen, stochastische inverse Probleme, Lernverfahren mit Kernfunktionen, die Identifizierung von Fingerabdrücken, Sequenziermethoden zur Erkennung von Fremdgenen und Identifizierung von Interdependenzen von Verspätungen in Verkehrsverbünden. Als eine zentrale Forschungsidee sind dabei entsprechend dem Untertitel des Graduiertenkollegs stochastische und deterministische Methoden effizient zusammengeführt und gemeinsam weiterentwickelt worden. Bislang wurden 18 Promotionen erfolgreich abgeschlossen. Die Absolventen haben Arbeitsplätze in Wissenschaft und Industrie gefunden, zum Teil als Postdoktoranden in Göttingen und außerhalb Göttingens und zum Teil in Industrie und Wirtschaft mit engen Bezügen zur Thematik des Kollegs. Ein Teil der ausländischen Kollegiaten sind auf Positionen in ihre Herkunftsländer zurückgekehrt und bieten auch für die Göttinger Mathematik auf diese Weise Perspektiven für nachhaltige internationale wissenschaftliche Kontakte. Mit mehr als 40 Veröffentlichungen in internationalen Journalen und mehr als 30 Vorträgen durch die Kollegiaten auf internationalen Tagungen ist das Graduiertenkolleg sichtbar geworden. Darüberhinaus hat das Graduiertenkolleg in Göttingen vier Tagungen mit breiter internationaler Beteiligung zu Teilbereichen seiner Forschungsthematik durchgeführt. Nach einem erfolgreichen Berichtskolloquium im Juni 2008 bewilligte die Deutsche Forschungsgemeinschaft im November 2,77 Millionen Euro an Fördermitteln zur Weiterführung des Kollegs. Sprecher ist Prof. Dr. Rainer Kreß vom Institut für Numerische und Angewandte Mathematik.

Inkorrekt gestellte Probleme

Die inversen Streuprobleme und grundsätzlich eine weite Klasse von inversen Problem sind schlecht beziehungsweise inkorrekt gestellt. Die Definition der Inkorrektheit eines mathematischen Problems geht zurück auf den französischen Mathematiker Jacques Solomon Hadamard (1865 – 1963), der für Modellbildungen bei Problemen aus den Naturwissenschaften um 1900 die folgenden drei Postulate formulierte: 1. Das mathematische Modell besitzt eine Lösung. 2. Das mathematische Modell besitzt höchstens eine Lösung. 3. Die Lösung des mathematischen Modells hängt stetig von den Daten ab, das heißt, das Problem ist stabil in dem Sinne, dass kleine Änderungen der Daten nur zu kleinen Änderungen der resultierenden Lösung führen. Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung sind unmittelbar evident als Forderungen an die mathematische Modellierung von deterministischen Naturvorgängen. Das dritte Postulat ist motiviert durch den Umstand, dass in den Anwendungen die Daten in aller Regel aus Messungen stammen und folglich stets mit Fehlern behaftet sind. Daher soll sichergestellt werden, dass kleine Messfehler in den Daten nur zu kleinen Abweichungen in der resultierenden Lösung führen. Nach Hadamard nennt man ein mathematisches Problem, insbesondere ein Differentialgleichungsproblem, korrekt gestellt oder gut gestellt, wenn alle drei Forderungen erfüllt sind. Anderenfalls heißt das Problem inkorrekt gestellt oder schlecht gestellt.

Der rigorose Nachweis für die inkorrekte Problemstellung im Sinne von Hadamard für die hier betrachteten inversen Streuprobleme bedarf tiefer liegender mathematischer Hilfsmittel, so dass wir hier in einer Plausibilitätsbetrachtung wieder die Wasserwellen heranziehen. Es erscheint unmittelbar einleuchtend, dass die durch Einwerfen einer Kugel und einer mit sehr vielen dünnen, aus der Oberfläche ragenden langen Nadeln versehenen gleich großen Kugel verursachten Wasserwellen sich am Seeufer nur wenig unterscheiden, d.h. zwei sehr voneinander verschiedene Objekte rufen die gleichen Wellenmuster am Ufer hervor und sind daher an Hand dieser Daten nicht signifikant unterscheidbar.

Die Hadamardschen Postulate führten dazu, dass in der Mathematik die Forschung über inkorrekt gestellte Probleme lange Zeit vernachlässigt wurde, da solche Probleme als nicht geeignet angesehen wurden für die Modellierung angewandter Problemstellungen. Erst seit etwa vierzig Jahren setzt sich die Erkenntnis durch, dass eine wachsende Zahl von aus den Anwendungen stammenden mathematischen Fragestellungen, darunter alle hier betrachteten inversen Probleme, zu inkorrekt gestellten Problemen führt, und zwar typischerweise unter Verletzung der dritten Bedingung der Stabilität. Entsprechend hat dies zu einer Intensivierung der Forschung auf diesem Gebiet geführt. Ein unerlässlicher Aspekt ist dabei die Notwendigkeit der Stabilisierung von Algorithmen zur Lösung von inkorrekt gestellten Problemen durch so genannte Regularisierungsverfahren.

Tomographie

In der Röntgentomographie werden zweidimensionale Bilder von übereinanderliegenden parallelen zweidimensionalen Schichten erzeugt; die Schichten entsprechen der griechischen Vokabel τομος. Die Bilder einer Schicht werden aufgebaut aus Messungen von Intensitätsverlusten beim Durchgang von Röntgenstrahlen unterschiedlicher Richtungen. Da die Absorption eines Röntgenstrahls lokal proportional zur Dichte f des durchleuchteten Objekts ist, ergibt sich der Intensitätsverlust des Röntgenstrahls entlang einer Geraden L durch Aufsummieren der Dichte in dem Linienintegral $\int_L f\,ds$ über die Gerade L. Das direkte Problem ist, bei bekannter Dichte f die Linienintegrale $\int_L f\,ds$ für alle die Schicht durchlaufenden Geraden L zu berechnen. Das inverse Problem der Röntgentomographie besteht dagegen in der Ermittlung der unbekannten Dichte f aus den gemessenen Intensitätsverlusten, d.h. Linienintegralen über eine endliche Anzahl von Geraden L. In den medizinischen Anwendungen entspricht f der Gewebedichte der durchleuchteten Körperorgane, in technischen Anwendungen ist f die Materialdichte des evaluierten Objekts.

Grundsätzlich ist die Aufgabe, eine Funktion aus ihren Linienintegralen zu ermitteln, schon 1917 vom österreichischen Mathematiker Johann Radon (1887 – 1956) gelöst worden durch Angabe einer expliziten Inversionsformel. Für medizinische Anwendungen wurde die Tomographie erstmals 1963 von dem amerikanischen Physiker südafrikanischer Herkunft Allan McLeod Cormack (1924 – 1998) vorgeschlagen und ab 1970, insbesondere durch die Bemühungen des englischen Elektrotechnikers Godfrey Newbold Hounsfield (1919 – 2004), in die medizinische Praxis eingeführt. Im Jahr 1979 erhielten Cormack und Hounsfield den Nobelpreis in Medizin für ihre Arbeiten zur Röntgentomographie. In der Folgezeit wurde die Bezeichnung Tomographie in nicht völlig korrekter Weise auch für die Benennung von auf anderen Methoden aufbauenden Evaluierungs- und Bildgebungsverfahren benutzt. Unter elektromagnetischen Tomographieverfahren werden dabei Methoden zusammengefasst, die elektromagnetische Wellen beziehungsweise Felder benutzen, einschließlich der Grenzfälle elektrostatischer oder magnetostatischer Felder.

Zu diesem Bereich gehören die Minendetektion mit elektromagnetischen Wellen und die Impe-

Räumung von Minenfeldern in Chile. Ein Soldat sucht mithilfe eines Detektors nach Landminen. Zwischen 1974 und 1978 wurde das Grenzgebiet zu Bolivien, Peru und Argentinien mit Minenfeldern abgesichert.
Foto: Ullstein

danztomographie, bei denen zu der Beschreibung Göttinger Forschungsergebnisse am Ende diese Aufsatzes etwas mehr mathematische Terminologie unvermeidbar ist. Die Minendetektion wird modelliert als inverses Streuproblem für die Maxwellschen Differentialgleichungen

$$curl\ E - i\omega\mu H = 0$$
$$curl\ H + i\omega\varepsilon E = \sigma E$$

für das elektrische Feld E und das magnetische Feld H. Die physikalischen Größen Dielektrizität ϵ, magnetische Suszeptibilität μ und elektrische Leitfähigkeit σ haben dabei für die beteiligten Medien Luft, Erde und Metall unterschiedliche Werte. Die Frequenz ω bewegt sich bei den gebräuchlichen Minendetektoren im Kilohertz-Bereich. Wie weiter oben schon beschrieben, sendet der über den Boden geführte Detektor ein elektromagnetisches Feld aus, das von der Grenzfläche zwischen Luft und Erde und von im Boden befindlichen Metallteilen gestreut wird. Die gestreute sekundäre Welle induziert in einer Empfängerspule des Metalldetektors eine Spannung U, deren Verlauf bei der Bewegung in einem Bereich oberhalb einer vermuteten Mine grundsätzlich nach entsprechender Modifikation des Detektoraufbaus gemessen werden kann. In dem inversen Streuproblem zur Minendetektion sollen aus dem gemessenen Spannungsverlauf geometrische Parameter zu Form, Größe und Position eines entdeckten metallischen Objekts ermittelt werden. Auf diese Weise lassen sich durch Vergleich mit der bekannten Gestalt von Minen etwa zu kleine, zu große oder zu dünne Objekte als Fehlalarme charakterisieren. Die Göttinger Arbeitsgruppe im Projektverbund hat hierzu das inverse Problem im Sinne der im Folgenden beschriebenen Least Squares Minimierung interpretiert und gelöst [4]. Hierzu wurden die Gestalt und die Lage der Mine durch eine n-parametrige Schar von Flächen Γ_α modelliert, beispielsweise durch Ellipsoide, bei denen insgesamt neun Parameter erforderlich sind zur Beschreibung von Position, Größe und Orientierung. Es wird dann diejenige Fläche bestimmt, für die die Abweichung des zugehörenden simulierten Spannungsverlaufs $U(\Gamma_\alpha)$ möglichst wenig vom gemessenen Spannungsverlauf U_{mess} abweicht in dem Sinne, dass das Integral

$$\int_M |U(\Gamma_\alpha) - U_{mess}|^2 ds$$

über den Messbereich M des Detektors bezüglich des Parametervektors $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ minimiert wird. Unter Verwendung eines numerischen Lösungsverfahrens für das direkte Streuproblem an Metallkörpern in dem geschichteten Boden-Luft Medium mit Randintegralgleichungsmethoden zur Simulation der Spannung $U(\Gamma_\alpha)$ und einer ableitungsfreien Simplex-Methode nach Nelder und Mead für die Minimierungsaufgabe konnte demonstriert werden, dass auf diese Weise eine befriedigende Bestimmung von Orts- und Formparametern des Streuobjekts möglich ist. Damit wurde der Nachweis erbracht, dass unter Einsatz von Methoden der inversen Streutheorie das oben beschriebene Ziel der Reduzierung der Fehlalarmraten beim Einsatz von Metalldetektoren zum Minenräumen grundsätzlich erreichbar ist, nach einer entsprechenden messtechnischen Umgestaltung der Detektoren.

Das inverse Problem der Impedanztomographie zur Ermittlung der Leitfähigkeitsverteilung aus am Rand eines elektrisch leitfähigen Objekts an Elektroden gemessenen Strom- und Spannungsverteilungen wird für die verwendeten niederfrequenten Ströme durch die Potenzialgleichung

$$div\ \sigma\ grad\ u = 0$$

für das elektrische Potenzial u modelliert. Das direkte Problem besteht bei vorgegebener Leitfähigkeit σ darin, für verschiedene Stromeinprägungen auf dem Rand die zugehörenden Spannungen zu ermitteln, d.h. für u ein lineares Randwertproblem zu lösen. Das zugehörige inverse Problem besteht in der Ermittlung der ortsabhängigen Leitfähigkeit σ im Innern des Objekts aus der so genannten Strom-nach-Spannung Abbildung, die jeder auf dem Rand vorgegebenen Stromverteilung die resultierende Spannnungsverteilung zuordnet. Für eine detaillierte Beschreibung der Vielfalt der in der mathematischen Literatur und von den Anwendern entwickelten Rekonstruktionsalgorithmen sei verwiesen auf die Übersichtsarbeit von L. Borcea aus dem Jahr 2002 [1].

Bei Leitfähigkeiten mit hohen Kontrasten, wie sie zum Beispiel bei der nichtinvasiven Überwachung der Atmung von Lungenpatienten auftreten, erscheint es sinnvoll, die Leitfähigkeiten durch stückweise konstante Leitfähigkeiten zu approximieren. Dieses vereinfacht das inverse Problem zu einem inversen Randwertproblem zur Laplace Gleichung $\Delta u = 0$ für die Bestimmung der Gestalt der Ränder zwischen den Teilbereichen unterschiedlicher konstanter Leitfähigkeit sowie den Werten der Leitfähigkeiten in den Teilbereichen. Dieses inverse Randwertproblem ist dann nichtlinearen Randintegralgleichungsmethoden zugänglich.

In Kooperation mit der Abteilung Anaesthesiologische Forschung (Direktor Prof. Dr. Gerhard Hellige) und der Arbeitsgruppe Impedanztomographie [6] (Leiter Dr. Günter Hahn) am Zentrum für Anaesthesiologie, Rettungs- und Intensivmedizin der Universitätsmedizin Göttingen ist in zwei vom Verfasser betreuten Dissertationen [5, 7] die theoretische Fundierung und eine numerische Implementierung für diesen Zugang zur Impedanztomographie erarbeitet worden. Dazu gehörte auch eine vorläufige Erprobung der Algorithmen an realen Daten aus der Medizin. Diese Zusammenarbeit wird in dem Projektverbund zur Impedanztomographie weiter fortgesetzt.

Die Darstellung dieser Forschungsaktivitäten macht deutlich, dass Mathematik ein unerlässlicher und bedeutender Bestandteil von nichtinvasiven Bildgebungs- und Evaluierungsverfahren in Medizin und Technik ist. Sie veranschaulicht auch eine wesentliche Stärke der Mathematik: Ihre Methoden sind universell in zunächst völlig verschieden erscheinenden Problemstellungen einsetzbar.

Over the last two decades, inverse problems, in general, and inverse scattering problems, in particular, have developed into an important branch of mathematics. Scattering theory is concerned with the effect of objects or inhomogeneities on the propagation of acoustic, electromagnetic or elastic waves. For direct scattering problems, the objects or inhomogeneities produce a scattered wave and the latter has to be computed. Conversely, in inverse scattering problems from a knowledge on the scattered wave the unknown scattering object has to be retrieved. Inverse scattering has applications in biomedicine, geophysical exploration, environmental pollution, radar imaging and nondestructive testing among others. In addition to theoretical foundations to inverse scattering, the research at the Institute for Numerical and Applied Mathematics at the University of Göttingen has been concerned with the application of tools from inverse scattering both in the area of humanitarian mine detection by metal detectors and in impedance tomography (which is a newly developed imaging technique with applications in science, medicine and engineering).

Literatur:

[1] Borcea, L.: Electrical impedance tomography. Inverse Problems 18, R99–R136 (2002).

[2] Colton, D. and Kress, R.: Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory. 2nd. ed. Springer, Berlin 1998.

[3] Colton, D. and Kress, R.: Using fundamental solutions in inverse scattering. Inverse Problems 22, R49–R66 (2006).

[4] Delbary, F., Erhard, K., Kress, R., Potthast, R. and Schulz, J.: Inverse electromagnetic scattering in a two-layered medium with an application to mine detection. Inverse Problems 24, 015002 (2008).

[5] Eckel, H. and Kress, R.: Nonlinear integral equations for the inverse electrical impedance problem. Inverse Problems 23, 475–491 (2007).

[6] Hahn G, Just, A., Dudykevych, T., Frerichs, I., Hinz, J., Quintel, M. and Hellige, G.: Imaging pathologic pulmonary air and fluid accumulation by functional and absolute EIT. Physiological measurement 27, 187 – 198, (2006).

[7] Hofmann, B.: Approximation of the inverse electrical impedance tomography problem by an inverse transmission problem. Inverse Problems 14, 1171–1187 (1998).

Prof. Dr. Rainer Kreß, Jahrgang 1941, studierte Mathematik und Physik an der Technischen Hochschule Darmstadt, an der er 1968 promoviert wurde und sich 1969 für das Fach Mathematik habilitierte. Nach einer zweijährigen Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Max-Planck-Institut für Physik and Astrophysik in München folgte er 1971 einem Ruf auf einen Lehrstuhl für Numerische und Angewandte Mathematik an die Universität Göttingen. Als Gastprofessor war er für längere Zeit an der University of Strathclyde in Schottland, der University of Delaware in den Vereinigten Staaten und an der University of New South Wales in Australien. Von 1993 bis 1995 war Professor Kreß Vizepräsident der Universität Göttingen, und seit 1995 ist er Mitglied der Göttinger Akademie der Wissenschaften. Sein Hauptforschungsgebiet sind Integralgleichungen mit Schwerpunkt auf deren numerischer Lösung und direkte und inverse Probleme aus der Streutheorie. Er ist Autor von vier Monographien aus diesem Gebiet, von denen eine in russischer und zwei weitere in chinesischer Übersetzung Verbreitung finden.