Mathematik in der Biologie*

vorläufige Version

Annika Eickhoff-Schachtebeck Anita Schöbel

21. April 2009

*Die Erstellung dieses Skriptes wird aus Studienbeiträgen finanziert. Als studentische Hilfskräfte sind beteiligt: Till Baumann, Barbara Brandfass, Sabine Fritsch, Stefanie Mühlhausen, Marie Schmidt, Kirstin Strokorb.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Die Schulmathematik unterscheidet sich von der Mathematik für Biologinnen und Biologen in einem ganz entscheidenden Punkt. In der Schule haben Sie Mathematik wahrscheinlich losgelöst von realen Problemen kennen gelernt. Zum Beispiel können Sie die Funktion $f(x) = x^2$ ableiten und ihre Null- und Extremstellen bestimmen. Ihnen wurden Aufgaben gestellt, die Sie mit den im Unterricht erlernten Methoden direkt lösen konnten. In der Biologie werden Ihnen nur selten solche Aufgaben begegnen. Im „wirklichen Leben“ und auch in Ihrem Studienfach sind mathematische Aufgaben nicht immer sofort als solche zu erkennen. Niemand wird Sie dazu auffordern, ein bestimmtes Gleichungssystem zu lösen. Trotzdem werden Sie in der Biochemie genau das wollen!

Sie sollen mit diesem Text nicht zur Mathematikerin oder zum Mathematiker werden. Aber um biologische Prozesse zu verstehen und mathematisch modellieren zu können, ist es von Vorteil, wenn Sie die Sprache der Mathematik lernen. Das Lösen von komplizierten mathematischen Problemen können Sie Mathematikern überlassen. Aber um zu erkennen, wo man die Mathematik in der Biologie sinnvoll anwenden kann und um die Antworten aus der Mathematik zu verstehen, müssen Sie die Grundbegriffe der Mathematik lernen.

Der vorliegende Text führt daher wie ein normales Lehrbuch die Grundbegriffe der Mathematik ein. Um Ihnen die Anwendung in der Biologie zu erleichtern versuchen wir dabei aber von Anfang an, Zusammenhänge zur Biologie darzustellen und biologische Anwendungen der mathematischen Resultate zu erarbeiten. Auf die verwendeten biologischen Begriffe können wir meistens nur kurz eingehen; in den angegebenen Referenzen können Sie Details selber nachlesen.

Vielleicht fällt Ihnen im Laufe der Erarbeitung dieses Textes das Lösen der rein mathematischen Aufgaben leichter als das Lösen der Anwendungsaufgaben. Das ist ganz normal und der erste Schritt zum Anwenden der Mathematik. Nur wenn Sie routiniert mit der Mathematik umgehen, können Sie Ihre ganze Aufmerksamkeit dem biologischen Problem widmen und müssen nicht mehr über die Korrektheit der Formeln oder Algorithmen nachdenken. Sehen Sie die Mathematik, die Sie hier lernen, wie eine Sprache, die man lernt, indem man sie spricht. Und nach einiger Übung kann man sich dann sogar in ihr unterhalten.

1 Grundbegriffe

Problem 1 Die Herzschlagfrequenz ist die Anzahl der Herzschläge pro Minute. Um Zeit zu sparen messen gängige Herzfrequenzmesser die Anzahl der Herzschläge in 15 Sekunden. Wie berechnet man daraus die Herzschlagfrequenz?

Problem 2 Berechnen Sie den Blutalkoholgehalt in Promille bei einem 80 kg schweren jungen Mann, wenn er 50 g reinen Alkohol getrunken hat und sich dieser gleichmäßig im Blut und in der übrigen Körperflüssigkeit verteilt hat.

Problem 3 Die Phyllotaxis beschäftigt sich mit der Untersuchung von Blattstellungen. Bei vielen Pflanzen wachsen Blätter regelmäßig, d. h. der Winkel zwischen aufeinanderfolgenden Blättern ist gleich. Welche Winkel zwischen Blättern sind besonders günstig, so dass jedes einzelne Blatt möglichst viel Sonnenlicht bekommt?

Die Lösungen dieser Probleme sind Zahlen, wobei für die verschiedenen Fragestellungen verschiedene Zahlenmengen erlaubt sind. Diese wollen wir in diesem Kapitel genauer definieren.

Ziele: Einführung der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$, der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ und der reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Formulierung von Rechenregeln für Zahlen. Definition des mehrdimensionalen reellen Raums $\mathbb{R}^n$. Definition von Abbildungen.

1.1 Erste mathematische Symbole

In diesem Abschnitt definieren wir einige mathematische Symbole. Ein komplettes Symbolverzeichnis finden Sie in Kapitel 9:

$\in$	„ist Element von“
$\{\ \}$	geschweifte Klammern begrenzen eine Menge
$:=$	„ist definiert durch“
$\Longrightarrow$	„daraus folgt“
$\Longleftrightarrow$	„genau dann, wenn“
$\mid$	„mit“, „so dass gilt“
$\subset$	„ist eine Teilmenge von“

1.2 Zahlen

1.2.1 Die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$

Beginnen wir mit Problem 1. Wir suchen die Herzschlagfrequenz, d. h. die Anzahl der Herzschläge pro Minute. Dazu verwenden wir den Namen x für die Herzschlagfrequenz. Angenommen, wir haben in 15 Sekunden 16 Herzschläge gezählt. Dann kann man von $2 \cdot 16$ Herzschlägen in $2 \cdot 15 = 30$ Sekunden ausgehen. In einer Minute sollte das Herz also $4 \cdot 16 = 64$ mal schlagen, d. h. $x = 4 \cdot 16 = 64$. Natürlich sind keine „halben“ Herzschläge zulässig, oder gar negative Herzschläge. Alle möglichen Werte von x sind aus der folgenden Menge:

Definition. Die Menge der *natürlichen Zahlen* ist definiert durch

$$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}.$$

Wir können auch eine allgemeine Formel für die Berechnung der Herzfrequenz aus der Anzahl der Herzschläge in 15 Sekunden angeben. Bezeichnen wir die gesuchte Herzfrequenz mit x und die Anzahl der in 15 Sekunden gezählten Herzschläge mit q, dann gilt $x = 4 \cdot q$. Hierbei ist $q \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{N}$.

1.2.2 Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$

Für natürliche Zahlen haben wir die bekannten Rechenoperationen der Addition und Multiplikation, d. h. sind $n, m \in \mathbb{N}$, so ist auch die Summe $n + m$ beziehungsweise das Produkt $n \cdot m$ eine natürliche Zahl. Zum Beispiel ist mit $n := 10 \in \mathbb{N}$ und $m := 5 \in \mathbb{N}$ auch $n + m = 10 + 5 = 15 \in \mathbb{N}$. Für dieses Beispiel ist sogar $n - m = 10 - 5 = 5$ eine natürliche Zahl. Die Differenz zweier natürlicher Zahlen ist jedoch nicht immer eine natürliche Zahl, wie wir schon am Beispiel $1 - 2 = -1$ sehen. Wir vergrößern nun die Menge $\mathbb{N}$ wie folgt:

Definition. Die Menge der *ganzen Zahlen* ist definiert durch

$$\mathbb{Z} := \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

Für ganze Zahlen gelten die folgenden Rechenregeln:

1. **Multiplikation:** Das Produkt zweier positiver Zahlen ist positiv. Das Produkt einer negativen und einer positiven Zahl ist negativ. Zum Beispiel ist $7 \cdot (-2) = -14$. Das Produkt zweier negativer Zahlen ist positiv, d. h. es gilt $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$ für ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$. Zum Beispiel ist $(-1) \cdot (-1) = (-1)^2 = 1$.

2. **Addition und Subtraktion:** Eine ganze Zahl $-a \in \mathbb{Z}$ kann man immer schreiben als $-a = (-1) \cdot a$. Dadurch überträgt sich die Rechenregel für die Multiplikation auf die Addition und Subtraktion: es ist $-a + (-b) = -a - b$ und $-a - (-b) = -a + b = b - a$ für ganze Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$.
   Zum Beispiel ist $-1 + (-1) = -2$, aber $-1 - (-1) = -1 + 1 = 0$.

Ungleichungen

Genauso wie natürliche Zahlen lassen sich auch ganze Zahlen *ordnen*. Für zwei gegebene Zahlen kann man immer entscheiden, welche Zahl größer oder gleich der anderen ist. Zum Beispiel ist minus siebzehn kleiner als neun, $-17 < 9$, oder $44 \geq 44 > 3 > -1$. Genauso wie bei Gleichungen kann man auch Ungleichungen manipulieren:

- Addiert man zu beiden Seiten einer Ungleichung dieselbe Zahl, so erfüllen die Summen ebenfalls eine Ungleichung: Ist zum Beispiel $a < b$ mit ganzen Zahlen a und $b \in \mathbb{Z}$ und $c \in \mathbb{Z}$ eine weitere ganze Zahl, so gilt $a + c < b + c$.
- Multipliziert man eine Ungleichung mit einer positiven Zahl, so verändert sich das Ungleichheitszeichen nicht. Zum Beispiel ist $-4 \geq -7$ und damit auch $-8 = -4 \cdot 2 \geq -7 \cdot 2 = -14$.
- Multipliziert man eine Ungleichung mit einer negativen Zahl, so wird das Ungleichheitszeichen umgekehrt. Zum Beispiel ist $-3 \leq 5$, aber $(-3)\cdot(-2) = 6 \geq 5\cdot(-2) = -10$.

Betrag

Manchmal lässt man bei (negativen) ganzen Zahlen das Vorzeichen weg und spricht dann vom *Betrag* einer ganzen Zahl $a \in \mathbb{Z}$, dies schreibt man als $|a|$. Der Betrag ist für positive und negative ganze Zahlen unterschiedlich definiert.

Definition. Ist eine Zahl $a \in \mathbb{Z}$ positiv, so ist ihr Betrag gleich der Zahl selbst, $|a| = a$. Ist eine ganze Zahl $a \in \mathbb{Z}$ negativ, so ist ihr Betrag gleich der Zahl multipliziert mit minus eins, $|a| = (-1) \cdot a = -a$. Wir schreiben

$$|a| := \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0. \end{cases}$$

Zum Beispiel ist $|-53| = 53 = |53|$.

1.2.3 Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$

Wir lösen nun Problem 2. Wir wollen den Blutalkoholgehalt in Promille berechnen. Diese Unbekannte nennen wir wieder x. Der Blutalkoholgehalt gibt an, wieviel Alkohol im Blut enthalten ist. Wir suchen also eine Zahl x mit

$$\frac{x}{1000} \cdot (\text{Gesamtmenge Flüssigkeit im Körper in Gramm}) = 50g.$$

Dass wir die Zahl x durch 1000 teilen liegt hierbei daran, dass wir den Blutalkoholgehalt in Promille, d. h. „Pro Tausendstel“ angeben. Zur Bestimmung der Gesamtmenge an Flüssigkeit brauchen wir eine weitere Information: Im Durchschnitt besteht die Körpermasse eines Mannes zu 70 Prozent aus Wasser. Für einen 80 kg schweren Mann sind somit sind ca. $80 \cdot 0,7 = 56$ kg und damit 56000 g Wasser. Wir setzen diesen Wert in die Gleichung oben ein und erhalten

$$\frac{x}{1000} \cdot 56000g = 50g.$$

Um diese Gleichung nach x aufzulösen multiplizieren wir sie erst mit 1000 und teilen dann durch 56000:

$$\begin{aligned} \frac{x}{1000} \cdot 56000g &= 50g && | \cdot 1000 \\ x \cdot 56000g &= 50000g && | : 56000g \\ x &= \frac{50000}{56000} = \frac{50}{56} = \frac{25}{28} \approx 0,89 \end{aligned}$$

Die Lösung x gibt den Blutalkoholgehalt in Promille an. Sie ist in diesem Beispiel keine natürliche Zahl mehr, sie lässt sich jedoch als Bruch zweier natürlicher Zahlen schreiben.

Definition. Die Menge der *rationalen Zahlen* ist definiert durch

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}.$$

Die Menge $\mathbb{Q}$ ist also die Menge aller Brüche, wobei jede ganze Zahl $z \in \mathbb{Z}$ auch eine rationale Zahl $\frac{z}{1}$ ist. Die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ ist also eine Teilmenge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$.
Ist $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ eine rationale Zahl, so heißt a der *Zähler* von $\frac{a}{b}$ und b der *Nenner* von $\frac{a}{b}$.

Für rationale Zahlen wiederholen wir die folgenden Regeln:

1. **Erweitern und Kürzen:** Ist $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ eine rationale Zahl, so gilt für jede ganze Zahl $d \in \mathbb{Z}$ die ungleich Null ist

   $$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d},$$

   d. h. man kann $\frac{a}{b}$ mit d *erweitern*. Die Darstellung einer rationalen Zahl als Bruch ist also nicht eindeutig. Zum Beispiel ist

   $$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= \frac{2}{4}, && \text{hier ist } d \text{ gleich } 2 \\ \frac{1}{2} &= \frac{5}{10}, && \text{hier ist } d \text{ gleich } 5 \\ \frac{1}{2} &= \frac{-17}{-34}, && \text{hier ist } d \text{ gleich } -17 \\ \frac{1}{2} &= \frac{-100000}{-200000}, && \text{hier ist } d \text{ gleich } -100000 \end{aligned}$$

   Oft versucht man im Gegensatz zum Erweitern Brüche zur Vereinfachung von Rechnungen so weit es geht zu *kürzen*. Hierzu dividiert man sowohl den Zähler a

als auch den Nenner b einer rationalen Zahl $\frac{a}{b}$ durch einen gemeinsamen Teiler t, im Idealfall durch den größten gemeinsamen Teiler. Zum Beispiel ist

$$\frac{1155}{6006} = \frac{3 \cdot 385}{3 \cdot 2002} = \frac{385}{2002}, \qquad \text{hier ist } t \text{ gleich } 3$$

$$\frac{1155}{6006} = \frac{21 \cdot 55}{21 \cdot 286} = \frac{55}{286}, \qquad \text{hier ist } t \text{ gleich } 21$$

$$\frac{1155}{6006} = \frac{231 \cdot 5}{231 \cdot 26} = \frac{5}{26}, \qquad \text{hier ist } t \text{ gleich } 231 \text{ und das ist der größte gemeinsame Teiler von } 1155 \text{ und } 6006.$$

2. **Addition:** Um zwei rationale Zahlen addieren zu können, müssen sie den gleichen Nenner besitzen.
   Die Summe zweier rationaler Zahlen $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{b}$ mit gleichem Nenner b ist definiert durch
   $$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}.$$
   Es werden also die Zähler addiert, während der Nenner unverändert bleibt.
   Um zwei rationale Zahlen $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ mit verschiedenen Nennern $b \neq d$ zu addieren, muss man sie zuerst durch Kürzen oder Erweitern auf einen *gemeinsamen Nenner* bringen.
   Als gemeinsamen Nenner kann man immer das Produkt der beiden Nenner b und d wählen. Damit ergibt sich
   $$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} + \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}.$$
   Zum Beispiel ist
   $$\frac{1}{6} + \frac{2}{9} = \frac{1 \cdot 9}{6 \cdot 9} + \frac{2 \cdot 6}{9 \cdot 6} = \frac{9}{54} + \frac{12}{54} = \frac{21}{54} = \frac{7}{18}.$$
   Oft ist es aber besser, das kleinste gemeinsame Vielfache der beiden Nenner b und d zu wählen anstatt b und d einfach miteinander zu multiplizieren:
   $$\frac{7}{12} + \frac{1}{6} = \frac{7}{12} + \frac{1 \cdot 2}{6 \cdot 2} = \frac{7}{12} + \frac{2}{12} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}.$$

3. **Subtraktion:** Für die Subtraktion gelten die selben Regeln wie für die Addition.
   Die Differenz zweier rationaler Zahlen $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{b}$ mit gleichem Nenner b ist definiert durch
   $$\frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}.$$
   Um die Differenz zweier rationaler Zahlen $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ mit verschiedenen Nennern $b \neq d$ zu bilden, müssen diese wie bei der Addition zuerst auf einen gemeinsamen Nenner gebracht werden, zum Beispiel durch
   $$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot d} - \frac{c \cdot b}{d \cdot b} = \frac{a \cdot d - c \cdot b}{b \cdot d}.$$

Zum Beispiel ist

$$\frac{9}{10} - \frac{2}{3} = \frac{9 \cdot 3}{10 \cdot 3} - \frac{2 \cdot 10}{3 \cdot 10} = \frac{27}{30} - \frac{20}{30} = \frac{27-20}{30} = \frac{7}{30}.$$

Auch hier führt das kleinste gemeinsame Vielfache von b und c oft zu einem kleineren Nenner als $b \cdot d$.

4. **Multiplikation:** Das Multiplizieren von rationalen Zahlen ist einfacher: Sind $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ rationale Zahlen, so ist ihr Produkt definiert durch

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Man erhält also das Produkt von rationalen Zahlen, indem man die beiden Zähler sowie die beiden Nenner miteinander multipliziert. Um mit möglichst kleinen Zahlen rechnen zu können, bietet es sich an vorher zu kürzen. Zum Beispiel ist

$$\frac{5}{6} \cdot \frac{2}{15} = \frac{\cancel{5}^{\,1}}{\cancel{6}_{\,3}} \cdot \frac{\cancel{2}^{\,1}}{\cancel{15}_{\,3}} = \frac{1 \cdot 1}{3 \cdot 3} = \frac{1}{9}$$

oder

$$\frac{-7}{3} \cdot \frac{-333}{49} = \frac{-\cancel{7}^{\,1}}{\cancel{3}_{\,1}} \cdot \frac{-\cancel{333}^{\,111}}{\cancel{49}_{\,7}} = \frac{(-1) \cdot (-111)}{1 \cdot 7} = \frac{111}{7}.$$

5. **Division:** Für den Quotienten zweier rationaler Zahlen $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ mit $\frac{c}{d}$ ungleich Null gilt die Regel

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}.$$

Man dividiert also durch einen Bruch, indem man mit seinem Kehrwert multipliziert. Zum Beispiel ist

$$\frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 5} = \frac{14}{15}$$

oder

$$\frac{7}{12} : \frac{7}{24} = \frac{7}{12} \cdot \frac{24}{7} = \frac{\cancel{7}^{\,1}}{\cancel{12}_{\,1}} \cdot \frac{\cancel{24}^{\,2}}{\cancel{7}_{\,1}} = \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 1} = 2.$$

Beispiel. Auch wenn man die genauen Werte von rationalen Zahlen nicht kennt und stattdessen $a, b \in \mathbb{Q}$ schreibt, kann man auf diese Zahlen die Rechenregeln anwenden. Zum Beispiel ist

$$\frac{1}{a} - \frac{7}{ab} + b = \frac{b}{ab} - \frac{7}{ab} + \frac{ab^2}{ab} = \frac{ab^2 - 7 + b}{ab}$$

und

$$\frac{\frac{3a}{7b}}{\frac{9a}{21b^2}} = \frac{3a}{7b} : \frac{9a}{21b^2} = \frac{3a \cdot 21b^2}{7b \cdot 9a} = b.$$

1.2.4 Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$

Wir beschäftigen uns nun mit Problem 3. Dazu betrachten wir eine (fiktive) Pflanze (siehe Abbildung 1.1), bestehend aus einem Stiel und daran wachsenden Blättern.

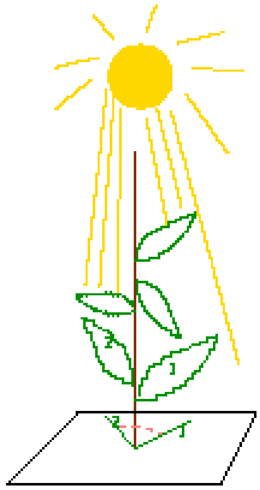


Abbildung 1.1 Fiktive Pflanze mit Sonne: Liegen Blätter übereinander, so wird nicht jedes Blatt mit Sonnenlicht versorgt.

Nehmen wir an, dass der Winkel zwischen zwei aufeinanderfolgenden Blättern je 90° beträgt. Das Verhältnis zwischen diesem Winkel und dem sogenannten „Vollwinkel“ oder „Vollkreis“ von 360° ist $\frac{90°}{360°} = \frac{1}{4}$. Dann liegen alle vierten Blätter übereinander, d. h. das fünfte Blatt liegt über dem ersten, das sechste über dem zweiten usw. Für die Pflanze ist das nicht optimal, weil (bei einem Lichteinfall genau von oben) nur die obersten vier Blätter Licht bekommen während alle anderen Blätter darunter im Schatten liegen.

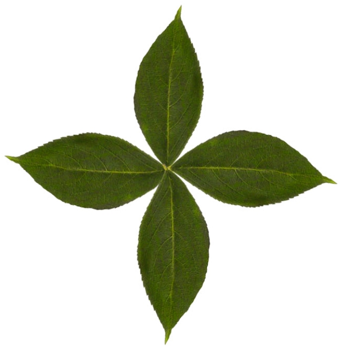


Abbildung 1.2 Sicht von oben auf die Pflanze: Hier beträgt der Winkel zwischen zwei aufeinanderfolgenden Blättern 90°.

Versuchen wir nun einen Winkel von 144°. Das erste Blatt liegt also beim Winkel 144° und das zweite bei 288°. Das dritte Blatt fängt wieder “von vorne” an und liegt bei 72°, das vierte bei 216°, das fünfte bei 360° und das sechste dann wieder bei 144°, also genau

über dem ersten. Ab jetzt wiederholen sich die Winkel. Das siebte Blatt liegt also über dem zweiten, das achte über dem dritten und so weiter.
Der eben untersuchte Winkel von 144° teilt den „Vollwinkel“ von 360° im Verhältnis $\frac{144°}{360°} = \frac{2}{5}$.

Abbildung 1.3 Hier beträgt der Winkel zwischen zwei aufeinanderfolgenden Blättern 144°. Ein Beispiel für eine solche Blattanordnung gibt der Zweig einer Kirsche (Prunus).

Die Zahl, die wir in beiden Beispielen berechnet haben, nämlich der Winkel zwischen zwei aufeinanderfolgenden Blättern dividiert durch 360°, nennt man *Divergenz*. Ist die Divergenz einer Pflanze gleich einem Bruch $\frac{z}{n}$, der sich nicht weiter kürzen lässt, liegen immer alle n-ten Blätter übereinander, das heißt das $n+1$-te Blatt liegt über dem ersten, das $n+2$-te über dem zweiten und so weiter. Wie oben schon bemerkt ist es für Pflanzen günstiger, wenn möglichst wenige, besser noch gar keine, Blätter übereinander liegen, da nur so jedes Blatt möglichst viel Sonnenlicht abbekommt. Ist die Divergenz einer Pflanze eine rationale Zahl, ist dies nicht der Fall.
Dies scheint ein Grund dafür zu sein, dass in der Natur der sogenannte „Goldene Schnitt“ häufig als Divergenz beobachtet wird[1]. Der genaue Wert des goldenen Schnittes ist

$$\Phi := \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61803.$$

Zum Beispiel hat man beobachtet, dass die Divergenz von Dikotylen ungefähr gleich $\frac{1}{\Phi}$ mit Divergenzwinkel $360° - 360° \cdot \frac{1}{\Phi} \approx 137,5°$ ist.[2]
Diese Zahl kann nicht als Quotient zweier ganzer Zahlen geschrieben werden, ist also keine rationale Zahl. Ein Grund hierfür ist, dass $\sqrt{5}$ kein Element aus $\mathbb{Q}$ ist. Um alle Zahlen darstellen zu können, müssen wir also unsere Menge von rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ erneut vergrößern!

[1] Literatur: Beutelspacher, A., Petri, B.: *Der Goldene Schnitt*
[2] Literatur zur Phyllotaxis: Munk (Hrsg.), K., *Grundstudium Biologie, Botanik*

Exkurs: $\sqrt{5}$ ist keine rationale Zahl.

Beweis: Wir führen einen sogenannten *Beweis durch Widerspruch* durch. Das Prinzip hierbei ist das folgende: Wir nehmen zunächst das Gegenteil der Aussage, die wir zeigen wollen, an. Dann nutzen wir alle Rechenregeln, von denen wir schon wissen, dass sie stimmen, und versuchen durch "Herumspielen" mit unserer Annahme etwas zu folgern, das nicht sein kann, also einen Widerspruch herbeizuführen. Das bedeutet dann, dass die ursprüngliche Annahme falsch sein muss. Damit ist das Gegenteil der Annahme, also genau dass, was wir beweisen wollen, richtig.
Hier bedeutet das:
Wir nehmen an, dass $\sqrt{5}$ eine rationale Zahl ist. Dann gibt es ganze Zahlen a und b mit b ungleich Null, so dass $\sqrt{5} = \frac{a}{b}$ gilt. Die Zahlen a und b sind nicht eindeutig, wir können a und b durch jeden gemeinsamen Teiler d von a und b teilen, d. h. $\frac{a}{b}$ kürzen (siehe Rechenregel 1). Wir nehmen also an, dass der Bruch $\frac{a}{b}$ schon soweit wie möglich gekürzt ist und sich nicht weiter kürzen lässt. Weil $\frac{a}{b} = \sqrt{5}$ ist, gilt

$$\frac{a^2}{b^2} = 5$$
$$\Rightarrow a^2 = 5b^2$$

5 ist also ein Teiler der rechten Seite der Gleichung. Damit ist 5 auch ein Teiler der linken Seite, also ein Teiler von a^2. 5 ist eine Primzahl, ist also nicht „zerlegbar“. Dann folgt daraus, dass 5 das Produkt $a \cdot a$ teilt, dass 5 die ganze Zahl a teilt. Der Teiler 5 steckt also einmal in der Zahl a, d. h. im Produkt $a \cdot a$ zweimal. Die linke Seite der Gleichung $a^2 = 5b^2$ ist folglich durch 25 teilbar, somit auch die rechte Seite $5b^2$. Da 5 nur durch 5 und nicht durch $25 = 5 \cdot 5$ teilbar ist, muss also b^2 und damit b durch 5 teilbar sein. Also sind sowohl a als auch b durch 5 teilbar. Damit würde sich unser Bruch $\frac{a}{b}$ durch 5 kürzen lassen. Dies ist aber ein Widerspruch, denn wir haben ja angenommen, dass sich $\frac{a}{b}$ nicht weiter kürzen lässst! Unsere Annahme, dass $\sqrt{5}$ eine rationale Zahl ist, muss also falsch sein. Damit gilt das Gegenteil, nämlich dass $\sqrt{5}$ keine rationale Zahl ist. $\square$

Jede rationale Zahl kann als Punkt auf einer Zahlengerade aufgefasst werden. Auf der Zahlengerade liegen jedoch deutlich mehr Punkte als nur die rationale Zahlen. Zum Beispiel wissen wir bereits, dass $\sqrt{5}$ keine rationale Zahl ist. Mithilfe des Satzes von Pythagoras können wir jedoch einen Punkt $\sqrt{5}$ auf der Zahlengerade konstruieren. Dies wird in Abbildung 1.4 dargestellt. Zur Erinnerung: der Satz von Pythagoras besagt, dass in einem rechtwinkligen Dreieck die Summe der Quadrate der Kathetenlängen gleich dem Quadrat der Hypothenusenlänge ist. Ist in einem rechtwinkligen Dreieck eine Kathetenlänge 1, die andere Kathetenlänge 2, so ist die Länge der Hypothenuse folglich gleich $\sqrt{5}$.

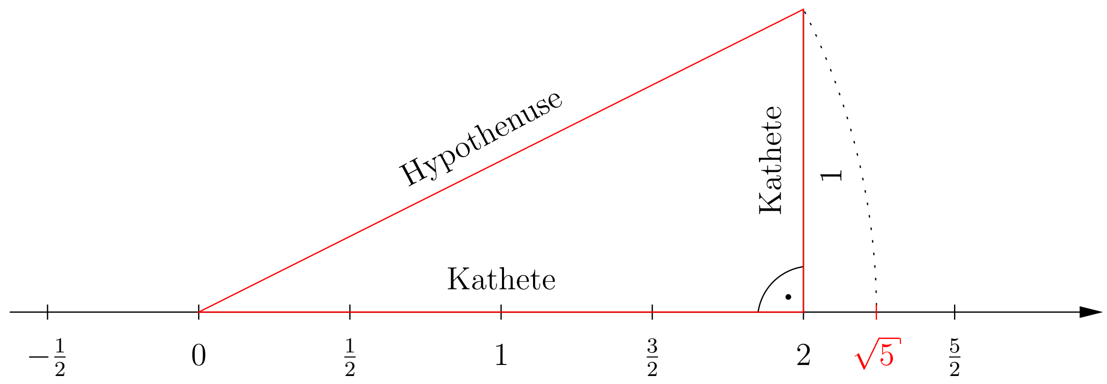


Abbildung 1.4 Konstruktion der Länge $\sqrt{5}$ mithilfe des Satzes von Pythagoras

Die Menge **aller** Punkte der Zahlengerade repräsentiert nun die Menge $\mathbb{R}$ der *reellen Zahlen*. Diese werden in Abbildung 1.5 dargestellt.

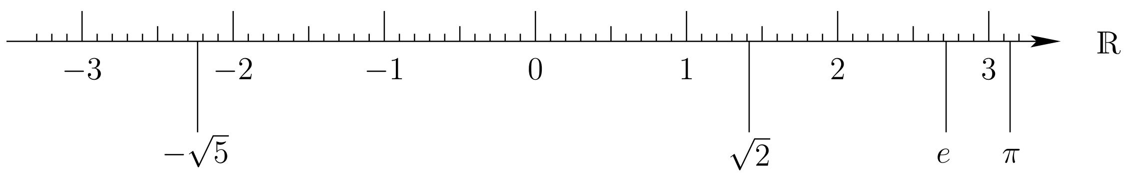


Abbildung 1.5 Die reelle Zahlengerade

Manchmal interessiert man sich auch nur für zusammenhängende Teilmengen der reellen Zahlen, sogenannte *Intervalle*. Zum Beispiel bezeichnet $[-3, 0]$ die Menge aller reellen Zahlen, die größer oder gleich -3 und kleiner oder gleich 0 sind. Allgemein gilt

Definition. Angenommen a und b sind zwei reelle Zahlen mit $a < b$. Dann definiert man

$$
\begin{aligned}
[a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} \\
[a, b[&:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} \\
]a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} \\
]a, b[&:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} .
\end{aligned}
$$

1.3 Nützliche Rechenregeln für reelle Zahlen

Für reelle Zahlen gelten die folgenden Rechenregeln:

1. **(Vertauschen)** Sind a und b beliebige reelle Zahlen, so gilt $a + b = b + a$ und $a \cdot b = b \cdot a$. Diese Rechenregeln heißen auch *Kommutativgesetze*.

2. **(Punkt-vor-Strich-Regel)** Multiplikationen und Divisionen haben Vorrang vor Additionen und Subtraktionen. Zum Beispiel ist

$$2 + 2 \cdot 2 = 6 \neq (2 + 2) \cdot 2 = 8.$$

3. **(Ausmultiplizieren, Ausklammern)** Sind a, b und c reelle Zahlen, so gilt

$$\begin{aligned} a(b \pm c) &= ab \pm ac \\ (b \pm c)a &= ba \pm ca. \end{aligned}$$

   Diese Rechenregeln werden auch *Distributivgesetze* genannt. Ohne es zu wissen wendet man diese oft schon in der Grundschule an, wenn man im Kopf größere Zahlen multipliziert. Zum Beispiel ist

$$7 \cdot 17 = 7 \cdot (10 + 7) = 7 \cdot 10 + 7 \cdot 7 = 70 + 49 = 119.$$

1.3.1 Die binomischen Formeln

Sind p und q zwei reelle Zahlen, so können wir auf $(p+q)$ ebenfalls die Distributivgesetze und die Kommutativgesetze anwenden. Es gilt

$$\begin{aligned} (p + q)^2 &= (p + q) \cdot (p + q) \\ &= p \cdot (p + q) + q \cdot (p + q) \\ &= p \cdot p + p \cdot q + q \cdot p + q \cdot q \\ &= p^2 + pq + pq + q^2 \\ &= p^2 + 2pq + q^2. \end{aligned}$$

Genauso gilt

$$\begin{aligned} (p - q)^2 &= (p - q) \cdot (p - q) \\ &= p \cdot (p - q) - q \cdot (p - q) \\ &= p \cdot p - p \cdot q - q \cdot q + q \cdot q \\ &= p^2 - 2pq + q^2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} (p - q) \cdot (p + q) &= (p + q) \cdot (p - q) \\ &= p \cdot (p - q) + q \cdot (p - q) \\ &= p \cdot p - p \cdot q + q \cdot p - q \cdot q \\ &= p^2 - q^2. \end{aligned}$$

Insgesamt fassen wir zusammen:

Satz. *1. Sind p und q zwei reelle Zahlen, so gilt für das Quadrat ihrer Summe*

$$(p+q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$$

die sogenannte erste binomische Formel.

2. *Sind p und q zwei reelle Zahlen, so gilt für das Quadrat ihrer Differenz die* zweite binomische Formel
$$(p-q)^2 = p^2 - 2pq + q^2.$$

3. *Außerdem gilt die* dritte binomische Formel

$$(p-q)(p+q) = p^2 - q^2.$$

Beispiel. Die binomischen Formeln sind zum Kopfrechnen sehr praktisch. Will man zum Beispiel das Quadrat von 499 berechnen, so bietet sich hierzu die zweite binomische Formel an:

$$(499)^2 = (500-1)^2 = 500^2 - 2 \cdot 500 + 1 = 250000 - 1000 + 1 = 249001$$

Genauso kann man zum Berechnen von $207 \cdot 193$ die dritte binomische Formel verwenden:

$$207 \cdot 193 = (200+7) \cdot (200-7) = 200^2 - 7^2 = 40000 - 49 = 39951$$

Anwendung der binomischen Formeln in der Biologie

Auch in der Biologie finden die binomischen Formeln Anwendung: Treten in einem Genort einer Population zwei verschiedene Allele auf (z. B. im Genort für die Blütenfarbe einer Wildblume die Allele w für weiß und r für rot), so können unter Annahme eines Hardy-Weinberg-Gleichgewichts aus den Allelfrequenzen die Frequenzen (d. h. Häufigkeiten) der Genotypen in der nächsten Generation berechnet werden.

	w	r
w	ww	wr
r	wr	rr

Sind in einer Generation zum Beispiel ein Drittel der Allele w und zwei Drittel der Allele r, so treten in der nachfolgenden Generation die Genotypen ww mit der Frequenz $\frac{1}{9} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$, wr mit der Frequenz $\frac{4}{9} = 2 \cdot (\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3})$ und rr mit der Frequenz $\frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$ auf:

	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$

Kennen wir allgemein den Anteil p eines Allels w für einen Genort, in dem innerhalb der Population nur zwei Allele auftreten, so ist der Anteil q des anderen Allels r dadurch eindeutig bestimmt, da beide Allelanteile zusammen eins ergeben müssen. Es gilt $p + q = 1$ und damit $q = 1 - p$. Weiter gilt: Der Anteil des Genotyps ww ist p^2, der Anteil des Genotyps wr ist $2pq$ (da der Genotyp als wr und als rw vorkommen kann) und der Anteil des Genotyps rr ist q^2. Weil sich diese Anteile der nächsten Generation wieder zu Eins aufsummieren, folgt die erste binomische Formel

$$\begin{aligned} p^2 + 2pq + q^2 &= 1 \\ &= 1^2 \\ &= (p+q)^2. \end{aligned}$$

1.3.2 Potenzgesetze

Satz. *Sind a und b zwei reelle Zahlen und n, m zwei natürliche Zahlen, so gelten die folgenden* Potenzgesetze

$$\begin{aligned} (ab)^n &= a^n b^n \\ a^n a^m &= a^{n+m} \\ (a^n)^m &= a^{n \cdot m} \\ a^{-n} &= \left(\frac{1}{a^n}\right) \end{aligned}$$

Man kann Potenzen auch mit rationalen Exponenten bilden: Ist a positiv und $\frac{z}{n}$ eine rationale Zahl, dann gilt $a^{\frac{z}{n}} = \sqrt[n]{a^z}$.

Allgemein gilt für jede reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$, dass $a^0 = 1$ ist. Daher definiert man auch $0^0 = 1$. Allerdings ist hier Vorsicht geboten: Es gilt $0^n = 0$, falls n nicht null ist.

Beim Potenzgesetz $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$ sind die Klammern wichtig. Zum Beispiel ist $2^{(2^3)} = 2^8 = 256$, jedoch ist $(2^2)^3 = 2^{2 \cdot 3} = 2^6 = 64$.

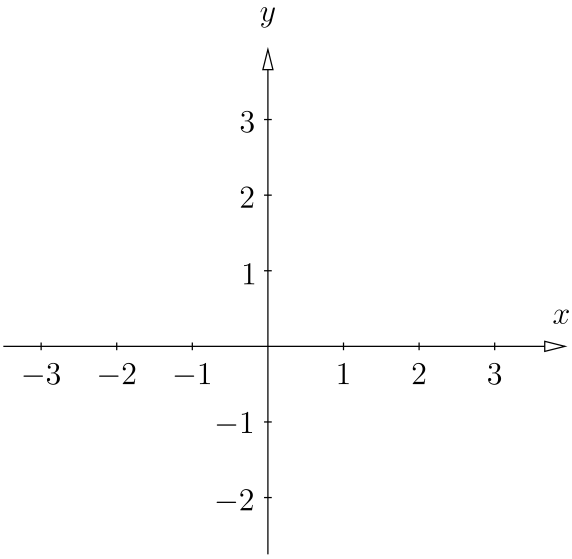
Beispiel. Genauso wie bei rationalen kann man mit Ausdrücken von reellen Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ rechnen, ohne ihre genauen Werte zu kennen. Zum Beispiel gilt

$$(a-b)^3 \cdot (a^2 - b^2)^{-3} = \frac{(a-b)^3}{(a^2-b^2)^3} = \frac{(a-b)^3}{((a-b)(a+b))^3} = \frac{(a-b)^3}{(a-b)^3(a+b)^3} = \frac{1}{(a+b)^3}.$$

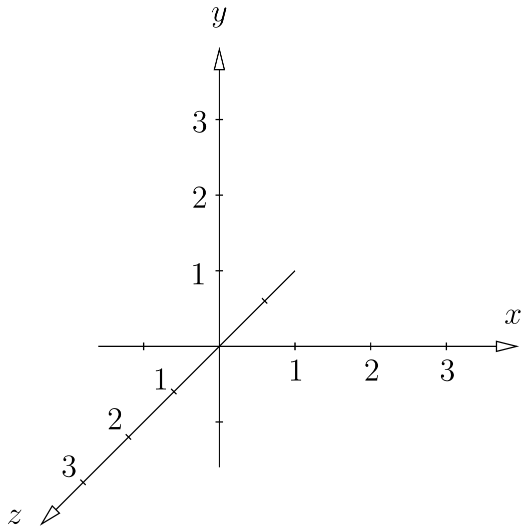
Bemerkung. Ist n nicht mehr nur eine rationale Zahl, sondern eine reelle Zahl, so kann man, zumindest für positive reelle Zahlen $a \in \mathbb{R}$, die Potenz a^n ebenfalls definieren. Darauf gehen wir in Kapitel 4 in Abschnitt 4.7 ein.

1.4 Der n-dimensionale Raum

Reelle Zahlen kann man sich als Punkte auf der reellen Zahlengerade vorstellen. Statt einzelner reeller Zahlen können wir auch Paare, Tripel oder sogar noch größere Tupel von reellen Zahlen betrachten. Die Menge aller Paare von reellen Zahlen wird mit $\mathbb{R}^2$ bezeichnet. Ähnlich wie $\mathbb{R}$ können wir $\mathbb{R}^2$ geometrisch als Punkte der „reellen Ebene“ darstellen. Die Menge aller Tripel von reellen Zahlen bezeichnen wir analog mit $\mathbb{R}^3$ und allgemein die Menge aller Tupel $(r_1, \ldots, r_n)$ bestehend aus $n \in \mathbb{N}$ reellen Zahlen mit $\mathbb{R}^n$. Hierbei können wir uns jedoch nur noch den $\mathbb{R}^3$ anschaulich vorstellen.



$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$



$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

$\mathbb{R}^n$ nennt man den *n-dimensionalen reellen Raum*. Elemente von $\mathbb{R}^n$ können komponentenweise addiert und subtrahiert werden:

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$
$$(x_1, \ldots, x_n) - (y_1, \ldots, y_n) := (x_1 - y_1, \ldots, x_n - y_n)$$

Zusätzlich kann ein Element aus $\mathbb{R}^n$ mit einer reellen Zahl $r \in \mathbb{R}$ multipliziert werden:

$$r \cdot (x_1, \ldots, x_n) := (rx_1, \ldots, rx_n).$$

1.5 Abbildungen

Im letzten Abschnitt dieses Kapitels geht es um den mathematischen Begriff der *Abbildung*.

Definition. Für zwei Mengen $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$ ist eine *Abbildung* $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ eine Vorschrift, die jedem Element x aus der Menge $\mathcal{X}$ ein Element $\varphi(x)$ aus der Menge $\mathcal{Y}$ zuordnet.

Definition. Sei $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ eine Abbildung. Die Menge $\{\varphi(x) \mid x \in \mathcal{X}\}$ nennt man das *Bild von* $\mathcal{X}$ unter der Abbildung φ. Für ein einzelnes Element $x \in \mathcal{X}$ bezeichnet $y = \varphi(x) \in \mathcal{Y}$ analog das *Bild von* x unter der Abbildung φ. Ist $y \in \mathcal{Y}$, so nennt man die Menge $\{x \in \mathcal{X} \mid \varphi(x) = y\}$ das *Urbild von* y unter der Abbildung φ.

Beispiele.

1. Standardbeispiele für Abbildungen sind die aus der Schule bekannten Funktionen. Beispielsweise ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die jeder reellen Zahl ihr Quadrat zuordnet, d. h. $f(x) = x^2$, eine Abbildung. Das Bild der Abbildung f ist die Menge der positiven reellen Zahlen. Das Urbild einer negativen Zahl, zum Beispiel das Urbild von -1, ist die leere Menge.

2. Ist $\mathcal{X}$ die Menge bestehend aus Paaren (x, y) von positiven reellen Zahlen, so definiert die Zuordnung $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, mit $f(x, y) = \frac{x}{y^2}$ eine Abbildung. Biologisch spiegelt sie den sogenannten *Body Mass Index* wider: Ist x das Gewicht eines Menschen in Kilogramm und y seine Körpergröße in Metern, so ist $f(x, y)$ sein Body Mass Index. Wir haben hierbei die Menge $\mathcal{X}$ unrealistisch gewählt, da wir alle positiven reellen Zahlen als mögliche Gewichte x bzw. Größen y zugelassen haben.

3. Wählen wir als Menge $\mathcal{X}$ die Menge aller Studierenden der Biologie im ersten Semester und als Menge $\mathcal{Y}$ die Menge der Geschlechter, also $\mathcal{Y} = \{\text{weiblich, männlich}\}$, so ist die Zuordnung $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, die jedem Studierenden sein Geschlecht zuordnet, eine Abbildung.

   Das Bild der Menge $\mathcal{X}$ ist gleich der gesamten Menge $\mathcal{Y}$ (zumindest wenn das erste Semester nicht ausschließlich aus Studentinnen oder ausschließlich aus Studenten besteht!). Das Urbild des Elementes „männlich“ unter der Abbildung φ ist in diesem Beispiel die Menge aller männlichen Studierenden der Biologie im ersten Semester. Sollten sich wirklich nur Studentinnen eingeschrieben haben, ist das Urbild des Elementes „männlich“ die leere Menge.

4. Ist wieder $\mathcal{X}$ die Menge aller Studierenden der Biologie im ersten Semester an der Universität Göttingen und $\mathcal{Y}$ die Menge aller an der Universität Göttingen vergebenen Matrikelnummern, so ist die Zuordnung $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, die jedem Studierenden seine Matrikelnummer zuordnet, erneut eine Abbildung.

   Das Bild eines Elementes der Menge $\mathcal{X}$, d. h. in diesem Beispiel eines einzelnen Studierenden, ist in diesem Fall seine Matrikelnummer. Das Bild der gesamten Menge $\mathcal{X}$ ist also die Menge aller Matrikelnummern aller Studierenden der Biologie im ersten Semester. In diesem Beispiel ist das Bild ungleich der gesamten Menge $\mathcal{Y}$, da jeder Studierende eine eindeutige Matrikelnummer besitzt und die Studierenden an der Universität Göttingen nicht nur Studierende der Biologie im ersten Semester sind.

   Das Urbild eines Elements der Menge $\mathcal{Y}$, d. h. einer Matrikelnummer, unter der Abbildung φ, besteht in diesem Beispiel maximal aus einem einzigen Element der Menge $\mathcal{X}$. Ist die Matrikelnummer y die eines Studierenden der Biologie im ersten Semester, so ist das Urbild dieser Studierende. Gehört die Matrikelnummer y zum Beispiel einem Studierenden der Mathematik im zehnten Semester, so ist das Urbild von y unter der Abbildung φ leer.

5. Ein anderes Beispiel erhalten wir, wenn wir für $\mathcal{X}$ die Menge aller Laubbäume wählen und für $\mathcal{Y}$ die Menge aller Staaten. Eine mögliche Abbildung wäre hier, jedem einzelnen Laubbaum den Staat zuzuordnen, in dem er wächst. Hierbei ist die Menge $\mathcal{X}$ sehr groß, zum Beispiel will allein die Schülerinitiative „Plant for the Planet" bis 2009 in Deutschland eine Million neue Bäume pflanzen.

   Das Bild der Menge $\mathcal{X}$ ist in diesem Fall die Menge aller Staaten, in denen Laubbäume wachsen. Das Urbild des Elementes „Deutschland" unter dieser Abbildung ist die Menge aller in Deuschland lebenden Laubbäume.

Bisher hat man sich jedoch zum Beispiel noch auf keine Abbildung von einer Menge aller Organismen in eine Menge aller „Arten" einigen können.
Der Begriff der Abbildung ist sehr allgemein. Gerade deswegen ist er sehr nützlich und spielt zum Beispiel bei Klassifizierungen eine Rolle. Will man beispielsweise alle Bakterienarten katalogisieren (wobei man vorher definieren muss, was man genau unter einer Art versteht), sucht man eine Abbildung von der Menge aller Bakterienarten $\mathcal{X}$, in eine andere Menge $\mathcal{Y}$, die verschiedene Bakterien auf verschiedene Elemente aus $\mathcal{Y}$ abbildet. $\mathcal{Y}$ könnte hierbei so aussehen, dass die einzelnen Elemente alle eine Art beschreibenden Eigenschaften enthalten, z. B. Stoffwechseleigenschaften, Lebensraum, spezifische DNA-Sequenzen und so weiter. (Eine Klassifizierung aller Bakterien ist bis heute nicht bekannt, man geht im Gegenteil sogar davon aus, dass man zur Zeit nur einen Bruchteil aller auf der Erde vorkommenden Bakterien kennt.)

Eine weitere wichtige Klasse spezieller Funktionen erhalten wir durch die folgende Definition.

Definition. Eine Abbildung $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ heißt *injektiv*, wenn für jedes $y \in \mathcal{Y}$ höchstens ein Urbild $x \in \mathcal{X}$ mit $\varphi(x) = y$ existiert.

Eine Abbildung $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ ist also genau dann injektiv, wenn aus $\varphi(x) = \varphi(z)$ folgt $x = z$.

Definition. Eine Abbildung $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ heißt *surjektiv*, wenn für jedes $y \in \mathcal{Y}$ ein $x \in \mathcal{X}$ existiert mit $\varphi(x) = y$.

Beispiele.

1. Die oben definierte Abbildung

$$\varphi : \{\text{Studierende der Biologie im ersten Semester}\} \to \{\text{männlich, weiblich}\}$$

   ist also höchstwahrscheinlich surjektiv. Sie ist jedoch, wenn es mehr als zwei Studierende gibt, nicht injektiv.

2. Im Gegensatz dazu ist die oben definierte Abbildung

$$\varphi : \{\text{Studierende der Biologie im ersten Semester}\} \to \{\text{Matrikelnummern}\}$$

injektiv, aber nicht surjektiv. Die Matrikelnummern sind nämlich gerade so definiert, dass verschiedene Studierende unterschiedliche Matrikelnummern besitzen, daher ist die Abbildung injektiv. Sie ist jedoch nicht surjektiv, da nicht jeder Studierende der Universität Göttingen Biologie studiert.

3. Die Abbildung

$$\varphi : \{\text{Laubbäume}\} \to \{\text{Staaten}\}$$

ist weder injektiv noch surjektiv. Wenn in einem Land ein Laubbaum wächst, kann man davon ausgehen, dass auch mehr als ein Laubbaum in diesem Land gedeiht, dies erklärt die nicht vorhandene Injektivität. In Grönland z. B. wachsen keine Laubbäume, die Abbildung ist damit nicht surjektiv.

Definition. Eine Abbildung $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ heißt *bijektiv*, wenn sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

1.6 Zusammenfassung

- Die *natürlichen Zahlen* $\mathbb{N}$ sind definiert als die Menge $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$.
- Die *ganzen Zahlen* $\mathbb{Z}$ sind definiert als die Menge aller natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ zusammen mit der Null und den negativen Zahlen $-\mathbb{N}$, d. h. als $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$.
- Die rationalen Zahlen sind definiert als die Menge aller Brüche $\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0\}$. Für ganze Zahlen $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ mit $b, d \neq 0$ gilt
  - $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$
  - $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$
  - $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad-bc}{bd}$
  - $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$
  - $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$ falls $c \neq 0$.
- Die *reellen Zahlen* $\mathbb{R}$ können durch die Punkte der Zahlengerade dargestellt werden.
- Jede natürliche Zahl ist eine ganze Zahl, jede ganze Zahl ist eine rationale Zahl und jede rationale Zahl ist eine reelle Zahl. Mathematisch schreibt man hierfür: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
- Nützliche Rechenregeln in $\mathbb{R}$ sind zum Beispiel die *binomischen Formeln*: Sind $p, q \in \mathbb{R}$, so gilt

  - $(p+q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$ (Erste binomische Formel)
  - $(p-q)^2 = p^2 - 2pq + q^2$ (Zweite binomische Formel)
  - $(p+q)(p-q) = p^2 - q^2$ (Dritte binomische Formel)

- Ist $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl, so ist der *n-dimensionale Raum* $\mathbb{R}^n$ definiert als die Menge aller n-Tupel von reellen Zahlen, $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$. Elemente in $\mathbb{R}^n$ werden komponentenweise addiert beziehungsweise subtrahiert.

- Für zwei Mengen $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$ ist eine *Abbildung* $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ eine Vorschrift, die jedem Element x aus der Menge $\mathcal{X}$ ein Element $\varphi(x)$ aus der Menge $\mathcal{Y}$ zuordnet.

- Eine Abbildung $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ heißt *injektiv*, wenn für jedes $y \in \mathcal{Y}$ höchstens ein Urbild $x \in \mathcal{X}$ mit $\varphi(x) = y$ existiert.

- Eine Abbildung $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ heißt *surjektiv*, wenn für jedes $y \in \mathcal{Y}$ (mindestens) ein $x \in \mathcal{X}$ existiert mit $\varphi(x) = y$.

- Eine Abbildung $\varphi : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ heißt *bijektiv*, wenn sie sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

1.7 Ausblick

Bemerkung, keine Definition der reellen Zahlen.... Literaturangaben zu Hardy-Weinberg, etc. phylogenetische Bäume: gesucht Abbildung, Klassifizierung - Stichwort Clusteralgorithmen, mathematisch...?

1.8 Aufgaben

Rechenaufgaben

1. Berechnen Sie ohne Taschenrechner

   (a) $\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ (b) $\frac{3}{2} + \frac{3}{5}$ (c) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$

   (d) $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ (e) $\frac{3}{2} - \frac{2}{3} + \frac{2}{5} - \frac{5}{2}$ (f) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} - \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{12}}$

   (g) $\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{8}}$ (h) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}$ (i) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}}$

2. Vereinfachen Sie so weit wie möglich.

   (a) $\frac{a-5}{5-a}$ (b) $\frac{4xy-20}{30-6xy}$ (c) $\frac{3x+3}{2x^2-2}$

(d) $\frac{9x^2-12xy+3y^2}{12x^2-16xy+4y^2}$ (e) $\frac{2(a^4-b^4)}{a^2+b^2}$ (f) $\frac{a^2+8a+2}{a^2x+8ax+2x+a^2+8a+2}$

3. Erweitern Sie die folgenden Brüche.

   (a) $\frac{2a}{3b} = \frac{?}{15ab}$ (b) $\frac{9x}{7y} = \frac{?}{7ay-7by}$ (c) $\frac{a-3b}{3x-1} = \frac{?}{2-6x}$

   (d) $\frac{2a}{x+1} = \frac{?}{x^2+2x+1}$ (e) $\frac{a}{x-2} = \frac{?}{x^2-4}$ (f) $\frac{8y}{xy} = \frac{?}{x}$

   (g) $\frac{a+1}{y-2} = \frac{?}{y^2-4y+4}$ (h) $\frac{12x}{12x+4} = \frac{?}{3x^2+x}$ (i) $\frac{1}{xy-ab} = \frac{?}{(xy)^2-(ab)^2}$

4. Vereinfachen Sie die Mehrfachbrüche.

   (a) $\dfrac{\dfrac{a}{2(a+1)}}{2+1}$ (b) $\dfrac{\dfrac{3a}{4x}}{\dfrac{6a}{8ax}}$ (c) $\dfrac{\dfrac{a+1}{a^2-1}}{a-1}$

   (d) $\dfrac{(x+2)^{-1}}{\dfrac{x-2}{x+2}\cdot(x-2)^{-1}}$ (e) $\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{a}}{\dfrac{9a}{\sqrt[4]{9}}}$ (f) $\left(\dfrac{(x+1)^{-1}}{(x-1)^{-1}}\right)^{-1}(x-1)$

5. Kleiner, größer oder gleich? Ersetzen sie das Zeichen ? durch das passende Zeichen $<$, $>$ oder $=$.

   a) $\frac{2}{3}\ ?\ \frac{7}{11}$ b) $\frac{1000}{10000}\ ?\ \frac{10}{100}$ c) $\frac{3}{11}\ ?\ \frac{5}{12}$ d) $\frac{1}{7}\ ?\ \frac{1}{2}$
   e) $\frac{1}{10}\ ?\ \frac{100}{10000}$ f) $-\frac{1}{2}\ ?\ -\frac{3}{8}$ g) $\frac{2}{2}\ ?\ \frac{2}{3}$ h) $\frac{100}{250}\ ?\ \frac{2}{5}$
   i) $-\frac{3}{5}\ ?\ -\frac{4}{12}$ j) $\frac{13}{7}\ ?\ \frac{52}{28}$ k) $\frac{6}{7}\ ?\ \frac{7}{6}$ l) $-\frac{1}{6}\ ?\ -\frac{2}{9}$

6. Wenden Sie die Potenzgesetze an und vereinfachen Sie.

   (a) $a^2 \cdot a^3$ (b) $a^4 : a^3 \cdot a^5$ (c) $x^{(-1^3)}(x^{-1})^{-2}$

   (d) $(y^{\frac{3}{2}} + y^{\frac{1}{2}})^2 - (\sqrt{y})^6$ (e) $(a^3+b^2)(a^3-b^2)(a^6+b^4)$ (f) $\dfrac{\sqrt[5]{x^2}}{x^{(\frac{1}{5})}}$

   (g) $\dfrac{2x^2+4xy+2y}{(x+y)^{-3}}$ (h) $\left((b+y)^{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{(b-y)}\right)^2$

7. Geben Sie die Lösungsmenge an.

(a) $2x - 4 + (-((x \cdot 2) + x)) = 5x + 2$

(b) $\frac{1}{x+1} \cdot 2(x+2) = 3$

(c) $2 + (4 - 2x) - (3 - 5x) = 2$

(d) $x^2 - 2x = -1$

(e) $-2(3x - 4) - (-2 + 3x - (2 + x)) = 4$

(f) $x^2 - 6x + 4 = 0$

(g) $-x^2 + 2x + 1 = 0$

(h) $x^2 - 4ax = -x^2 - 2a^2$

8. Welche der folgenden Abbildungen sind injektiv, surjektiv oder bijektiv?

a) $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \varphi(x) = x - 1$
b) $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \varphi(x) = 2 \cdot x$
c) $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ \varphi(x) = 2 \cdot x$
d) $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R},\ \varphi(x) = x$
e) $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \varphi(x) = x^2$

Weitere mathematische Aufgaben

1. Zeigen Sie mit Hilfe einer binomischen Formel, dass

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right)$$

eine natürliche Zahl ist.

Kurztest

Kreuzen Sie die richtigen Antworten an.

1. Sei x eine beliebige ganze Zahl,

a) ☐ dann ist x auch immer eine natürliche Zahl.
b) ☐ dann ist x auch immer eine reelle Zahl.
c) ☐ dann ist x auch immer eine rationale Zahl.

2. Sei $x \in \mathbb{N}$ und sei $y \in \mathbb{Q}$ jedoch nicht in $\mathbb{Z}$. Dann ist die Summe $x + y$

a) ☐ eine natürliche Zahl.
b) ☐ eine ganze Zahl.
c) ☐ eine rationale Zahl.

3. Eine Abbildung $\varphi : X \to Y$ ist surjektiv wenn gilt;

a) ☐ Alle $x \in X$ werden auf ein $y \in Y$ abgebildet.
b) ☐ Für jedes $y \in Y$ gibt es ein $x \in X$ mit $\varphi(x) = y$.
c) ☐ Für alle $y \in Y$ gibt es jeweils höchstens ein $x \in X$ mit $\varphi(x) = y$.

4. Eine Abbildung $\varphi : X \to Y$ ist injektiv wenn gilt;
   a) ☐ Für alle $x \in X$ gibt es ein $y \in Y$ mit $\varphi(x) = y$.
   b) ☐ Für alle $y \in Y$ gibt es mindestens ein $x \in X$ mit $\varphi(x) = y$.
   c) ☐ Für alle $y \in Y$ gibt es höchstens ein $x \in X$ mit $\varphi(x) = y$.

Anwendungsaufgaben

1. In der Physik wird die Temperatur oft in Kelvin angegeben, wobei 0 Kelvin $-273,15$ Grad Celsius entsprechen. Ein Temperaturunterschied von 1 K ist dabei gleich einem Unterschied von 1 °C. Die Umrechnung von Celsius in Fahrenheit, der Temperaturskala, die z. B. in den USA üblich ist, ist etwas komplizierter. 0 °C entsprechen hier 32 °F und 100 °C entsprechen 212 °F, insbesondere ist Fahrenheit anders skaliert als Celsius (ein Grad Celsius entspricht nicht einem Grad Fahrenheit).
   (a) Wieviel Kelvin sind 32 °C?
   (b) Wieviel Grad Celsius sind 280 K?
   (c) Wieviel Grad Fahrenheit sind 50 °C?
   (d) Wieviel Grad Celsius sind 77 °F?
   (e) Können Sie jeweils eine allgemeine Formel für die Berechnung von Fahrenheit nach Celsius und von Celsius nach Fahrenheit angeben?

2. Phenylketonurie ist eine Stoffwechselkrankheit, die durch ein rezessives Allel verursacht wird. Es ist bekannt, dass bei ungefähr 10000 Geburten eine Erkrankung auftritt. Können Sie mit dieser Information bereits eine Näherung für die Häufigkeit der Träger dieser Krankheit, d. h. der heterozygoten Menschen, die das Allel für die Phenylketonurie vererben können, selbst aber nicht erkrankt sind, berechnen? Hierbei können Sie wie bei der Einführung der binomischen Formel annehmen, dass ein Hardy-Weinberg-Gleichgewicht vorliegt.

3. Albinismus ist eine Erbkrankheit, die durch ein rezessives Allel verursacht wird. Von 20.000 Menschen ist ungefähr eine Person daran erkrankt. Berechnen Sie damit eine Näherung für die Häufigkeit der Träger des Albinismus, d. h. der heterozygoten Menschen, die das Allel für Albinismus vererben könne, selbst aber nicht erkrankt sind. Hierbei können Sie wie bei der Einführung der binomischen Formel annehmen, dass ein Hardy-Weinberg-Gleichgewicht vorliegt.

4. Die spezifische Wärmekapazität eines Stoffes ist definiert als die Wärmemenge, die aufgenommen werden muss, um die Temperatur von einem Gramm dieses Stoffes um ein Grad Celsius zu erhöhen. Zum Beispiel ist die spezifische Wärmekapazität

von Wasser $4,187$ Joule pro Gramm und Grad Celsius. Eine Kalorie entspricht $4,187$ Joule. Im Gegensatz zu Wasser ist zum Beispiel die spezifische Wärmekapazität von Eisen nur ca. $0,42\frac{J}{g\cdot{}^\circ C}$.

(a) Eine Tafel Vollmilchschokolade hat ungefähr 500 kcal. Dies entspricht ungefähr $2039,5$ kJ. Wenn wir eine Tafel Schokolade verbrennen und die gesamte dadurch erzeugte Wärme zum Erhitzen von 50 l kaltem Wasser nutzen, um wieviel steigt dann die Temperatur des Wassers? (Nehmen Sie hierbei an, dass ein Liter Wasser ein Kilogramm schwer ist.)

(b) Die spezifische Wärmekapazität von Milch beträgt $0,93\frac{\text{kcal}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$. Können Sie diese in Joule pro Gramm und Grad Celsius umrechnen?

(c) Eine Aufgabe der ersten Runde der Internationalen Biologieolympiade 2009 (Abgabe September 2008) lautete „Erklären Sie, warum Milch im Gegensatz zu Wasser so leicht überkocht“. Können Sie mit den beiden ersten Teilaufgaben erklären, ob Milch oder Wasser bei gleicher Energiezufuhr schneller kocht?

5. Zwei Studentinnen trinken gemeinsam eine Flasche Wein, die sie gerecht aufteilen (d. h. jede der beiden trinkt 375 ml Wein). Der Wein hat einen Alkoholgehalt von 12 Prozent, Alkohol eine Dichte von ungefähr $0,8\ \frac{g}{ml}$. Eine der beiden Studentinnen wiegt 70 kg, die andere 65 kg. Gehen wir davon aus, dass sich der Alkohol gleichmäßig im Blut verteilt hat und noch nichts abgebaut wurde, wie hoch ist dann jeweils die Blutalkoholkonzentration der beiden Frauen? Im Durchschnitt besteht die Körpermasse einer Frau zu 60 Prozent aus Wasser.

6. In der schriftlichen Abiturprüfung 2006 in Thüringen im Leistungsfach Biologie handelte eine Aufgabe von der Gewinnung von Biogas[3]. Dabei wurden verschiedene Materialien zur Verfügung gestellt, unter anderem folgendes:

   Das Biogas aus 1 t organischer Reststoffe oder 3 t Gülle/Festmist ersetzt ca. 60 l Heizöl oder 120 kWh Strom-Netto und vermindert den Schadstoffausstoß von Kohlenstoffdioxid um 200 kg. Eine Kuh produziert pro Tag etwa 10-20 kg Mist. Daraus können 1-2 Kubikmeter Biogas hergestellt werden. Die Biomasse, welche eine Kuh in einem Jahr erzeugt, entspricht der Energie von 300 Liter Heizöl[4].

   Eine Kuh produziert tatsächlich etwa $10-20$ kg Mist pro Tag. Können die anderen Daten auch alle zutreffen?

7. In der Medizin verwendet man isotonische Kochsalzlösung zum Beispiel für Infusionen. Sie enthält $0,9\%$ Kochsalz (Natriumchlorid $NaCl$). Wieviel Natrium und wieviel Chlor sind in isotonischer Kochsalzlösung ungefähr enthalten? Dabei können Sie davon ausgehen, dass ein Liter Wasser ein Kilogramm schwer ist, und dass die relativen Massezahlen von Natrium $22,990$u und von Chlor $35,453$u betragen.

[3] http://www.thueringen.de/de/tkm/pruefungsaufgaben/pruefung2006/abi/bio_lf_06.pdf?year=2006&sf=Abitur
[4] Nach: http://www.seilnacht.tuttlingen.com/referate/biogas01.htm

8. Ethanol hat eine Dichte von $789,4\frac{g}{l}$ und die chemische Summenformel C_2H_6O. Die relativen Atommassen betragen für Kohlenstoff $12,011$, für Sauerstoff $15,999$ und für Wasserstoff $1,008$. Können Sie berechnen, wieviel Kohlendioxid und wieviel Wasser bei der Verbrennung von einem Liter Ethanol entsteht? (Der hierfür benötigte Sauerstoff stammt sowohl aus dem Ethanol als auch aus der Luft).

9. (a) Auf einem Quadratzentimeter Haut eines Menschen leben ungefähr vier Millionen Mikroorganismen. Die menschliche Haut umfasst ungefähr 2 Quadratmeter. Wieviele Mikroorganismen leben insgesamt auf der gesamten Haut eines Menschen?

   (b) Angenommen, Bakterien auf der Haut haben ungefähr eine Länge von einem Mikrometer und sind ungefähr $0,5$ Mikrometer breit. Wieviele Bakterien passen dann maximal auf einen Quadratzentimeter Haut? (Tatsächlich findet man deutlich weniger Bakterien auf der menschlichen Haut.)

2 Gleichungen lösen

Problem 1 Zu den meisten Lebensmitteln gibt es Nährwertangaben, unter denen man zum Beispiel Werte zu Brennwert, Eiweiß-, Kohlenhydrat-, Fett-, aber auch zu Vitamin- und Mineraliengehalt findet. Gibt es ein einfaches Schema, mit dem man die Gesamtaufnahme an Kalorien, Eiweiß usw. eines Menschen berechnen kann, wenn man weiß, wieviel er von welchen Lebensmitteln pro Tag konsumiert hat?

Problem 2 Bei der Photosynthese wird die Energie des Sonnenlichts genutzt, um zum Beispiel aus Kohlendioxid und Wasser Kohlenhydrate zu gewinnen. Die jeweiligen chemischen Formeln lauten in diesem Fall CO_2 für Kohlendioxid, H_2O für Wasser und $C_6H_{12}O_6$ für Traubenzucker. Wie sehen die stöchiometrischen Koeffizienten der Reaktionsgleichung aus, d. h. die Koeffizienten in der Reaktionsgleichung, die gewährleisten, dass bei den Edukten und Produkten der Gleichung die Anzahlen der jeweiligen Atome gleich sind?

Problem 3 Zweijährige Pflanzen sind Pflanzen, die insgesamt nur zwei Jahre bzw. Lebenszyklen leben. In Abhängigkeit von den äußeren Umständen jeder einzelnen Pflanze blühen manche Exemplare der gleichen Gattung nur im zweiten Jahr, andere jedoch auch schon im ersten Jahr. Wir betrachten nun eine feste zweijährige Pflanzenart (und nehmen in unserem Modell zur Vereinfachung an, dass diese unbegrenzt wachsen kann und auch die Sterberate nicht durch die Gesamtzahl aller Pflanzen beeinflusst wird). Beispielhaft sollen Pflanzen im ersten Lebensjahr im Durchschnitt fünf Nachkommen erzeugen und Pflanzen im zweiten (und damit letzten) Lebensjahr durchschnittlich 10 Nachkommen erzeugen. Das bedeutet, dass pro Pflanze, die maximal ein Jahr alt ist, im nächsten Jahr im Durchschnitt fünf neue Pflanzen entstehen. Zusätzlich nehmen wir an, dass $\frac{39}{40}$, d. h. $97,5$ Prozent der Pflanzen im ersten Lebensjahr eines Jahrgangs ein Jahr älter werden (und alle mindestens ein Jahr alten Pflanzen am Ende des Jahres sterben). Wie sieht dann das Verhältnis der Anzahl von über ein Jahr alten Pflanzen zur Anzahl von weniger als ein Jahr alten Pflanzen aus, wenn wir davon ausgehen, dass dieses immer konstant ist?

Bild Stiefmütterchen
evtl. ist das Beispiel zur p-q-formel zu aufwendig

Das erste Problem führt zur Definition von *Matrizen*. Im zweiten Problem suchen wir die Lösung eines sogenannten *linearen Gleichungssystems*, im dritten Problem die Lösung einer *quadratischen Gleichung*.

Ziele: Rechnen mit Matrizen. Lösen von einfachen Gleichungen und Gleichungssystemen. Lösen von quadratischen Gleichungen. Lösen von Gleichungen höheren Grades

2.1 Matrizen

Im Alltag begegnen uns täglich Tabellen. Eine Matrix ist im Prinzip eine Tabelle, in der lauter Zahlen stehen:

Definition. Eine *reelle* $n \times m$ *- Matrix* A ist eine Anordnung von $n \cdot m$ reellen Zahlen $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1m}, \ldots, a_{nm} \in \mathbb{R}$ nach dem Schema

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & \ldots & & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & & a_{im} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & & & & & a_{nm} \end{pmatrix}.$$

Man schreibt $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,m}}$ oder nur $A = (a_{ij})$. Für den Eintrag in der i-ten Zeile und j-ten Spalte schreibt man a_{ij}. Um zu verdeutlichen, dass die Einträge einer Matrix A reelle Zahlen sind und A aus n Zeilen und m Spalten besteht, schreibt man $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$.

Beispiel. Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

besteht aus drei Zeilen und vier Spalten. Die einzelnen Einträge sind reelle Zahlen, A ist also ein Element aus $M_{3\times 4}(\mathbb{R})$. Für den Eintrag a_{23} gilt zum Beispiel $a_{23} = 7$.

2.1.1 Matrizen in der Biologie

Ein Ziel der Evolutionsbiologie ist es, die sogenannte *Phylogenie*, d. h. die Stammesgeschichte einer Art oder einer Gruppe von Arten, zu untersuchen. Die Methoden in diesem Gebiet sind vielfältig und liegen zum Teil an der Schnittstelle von Biologie und Informatik, der Bioinformatik. Zum Beispiel untersucht man Unterschiede in Aminosäuresequenzen von verschiedenen Arten, um Aussagen über ihren Verwandschaftsgrad machen zu können. Gesucht ist ein geeignetes Schema, mit dem man diese darstellen kann.
In der folgenden Tabelle sind Ausschnitte von Aminosäuresequenzen für die Kodierung von Insulin von Schaf, Rind, Schwein und Pferd dargestellt[1]:

Schaf	Cys	Cys	Ala	Gly	Val	Cys
Rind	Cys	Cys	Ala	Ser	Val	Cys
Schwein	Cys	Cys	Thr	Ser	Ile	Cys
Pferd	Cys	Cys	Thr	Gly	Ile	Cys

[1]D. Dossing, V. Liebscher , H. Wagner, S. Walcher: *Evolution, Bäume und Algorithmen*

In diesem Beispiel unterscheidet sich die Insulinsequenz vom Schaf von der vom Rind in einer Aminosäure, die vom Schaf von der vom Schwein in drei Aminosäuren, die vom Schaf von der vom Pferd in zwei Aminosäuren und so weiter. Diese Unterschiede der Insulinsequenzen können mithilfe der folgenden Matrix vereinfacht dargestellt werden:

$$\begin{array}{lc} & \begin{array}{cccc} \text{Schaf} & \text{Rind} & \text{Schwein} & \text{Pferd} \end{array} \\ \begin{array}{l} \text{Schaf} \\ \text{Rind} \\ \text{Schwein} \\ \text{Pferd} \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Hier bedeutet der Eintrag 2 in der dritten Zeile und zweiten Spalte, dass die Insulinsequenz des Schweins (Zeile drei) sich von der des Rinds (Spalte zwei) an 2 (der entsprechende Eintrag) Stellen unterscheidet. Die obige Matrix ist sowohl ein Element von $M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ als auch ein Element von $M_{4\times 4}(\mathbb{Q})$, $M_{4\times 4}(\mathbb{Z})$ sowie $M_{4\times 4}(\mathbb{N})$.

2.1.2 Rechnen mit Matrizen

Mit Matrizen kann nun ähnlich wie mit Elementen aus dem n-dimensionalen Raum $\mathbb{R}^n$ gerechnet werden.

1. **Matrixaddition:** Matrizen mit der gleichen Anzahl von Zeilen und Spalten können addiert werden:

   Sind $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ und $B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ zwei Matrizen mit n Zeilen und m Spalten, so ist ihre Summe definiert als Summe der einzelnen Einträge:

$$\begin{aligned} A + B &:= (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} + (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} \\ &= (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & \dots & & a_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & \dots & & b_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1m} + b_{1m} \\ a_{21} + b_{21} & & & a_{2m} + b_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \dots & a_{nm} + b_{nm} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Beispiel.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ -4 & -5 & -6 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 5 \end{pmatrix}$$

2. **Multiplikation mit einer reellen Zahl:** Ist $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ mit $A = (a_{ij})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl, so definieren wir

$$\begin{aligned} \lambda \cdot A &:= (\lambda a_{ij}) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1m} \\ \lambda a_{21} & & & \lambda a_{2m} \\ \vdots & & & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \dots & \lambda a_{nm} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Beispiel.

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} \\ 2 & \frac{7}{2} & \frac{3}{4} \\ 1 & 0 & -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \frac{3}{2} \\ 4 & 7 & \frac{3}{2} \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

3. **Matrixmultiplikation:** Ist die Anzahl der Spalten einer Matrix A gleich der Anzahl der Zeilen einer Matrix B, so können die Matrizen A und B multipliziert werden. Ist $A = (a_{ij}) \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ und $B = (b_{jk}) \in M_{m\times l}(\mathbb{R})$, so besitzt die Produktmatrix $C := A \cdot B$ genau n Zeilen und l Spalten. Der Eintrag c_{ik} der Matrix C in der i-ten Zeile und k-ten Spalte ist dann definiert durch

$$c_{ik} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{im} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{mk} \end{pmatrix} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \dots + a_{im} \cdot b_{mk}.$$

Beispiel.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1\cdot 3 + 2\cdot 0 + 3\cdot(-3) & 1\cdot 2 + 2\cdot(-1) + 3\cdot(-4) \\ 5\cdot 3 + 6\cdot 0 + 7\cdot(-3) & 5\cdot 2 + 5\cdot(-1) + 7\cdot(-4) \\ 9\cdot 3 + 10\cdot 0 + 11\cdot(-3) & 9\cdot 2 + 10\cdot(-1) + 11\cdot(-4) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -6 & -12 \\ -6 & -24 \\ -6 & -36 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Das Produkt

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{pmatrix}$$

ist dagegen nicht definiert, da

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$$

zwei Spalten hat, die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{pmatrix} \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

jedoch drei Zeilen besitzt.

Biologisches Beispiel

Die Rechenregeln für Matrizen können wir auf Problem 1 anwenden. Beispielhaft schauen wir uns hierzu die folgende Nährwerttabelle an:

pro 100 g	Müsli	Milch	Spaghetti	Saft	Ketchup
Brennwert	421 kcal	47 kcal	350 kcal	43 kcal	100 kcal
Eiweiß	9,6 g	3,5 g	11,5 g	0,7 g	1,5 g
Kohlenhydrate	62 g	4,9 g	72,5 g	9,0 g	22,5 g
Fett	15 g	1,5 g	1,6 g	0,2 g	0,4 g

Jedes Nahrungsmittel steht für eine Spalte, der Brennwert und die Nähstoffe für je eine Zeile. Damit können wir diese Informationen auch als 4×5-Matrix

$$\begin{pmatrix} 421 & 47 & 350 & 43 & 100 \\ 9,6 & 3,5 & 11,5 & 0,7 & 1,5 \\ 62 & 4,9 & 72,5 & 9 & 22,5 \\ 15 & 1,5 & 1,6 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$$

darstellen. Angenommen, jemand konsumiert an einem Tag 50 g Müsli, 300 g Milch, 250 g Spaghetti, 250 g Saft und 100 g Ketchup:

Müsli	$50 \text{ g} = (0,5 \cdot 100) \text{ g}$
Milch	$300 \text{ g} = (3 \cdot 100) \text{ g}$
Spaghetti	$250 \text{ g} = (2,5 \cdot 100) \text{ g}$
Saft	$250 \text{ g} = (2,5 \cdot 100) \text{ g}$
Ketchup	100 g

Auch diese Information können wir als Matrix darstellen. Jede Zeile entspricht hier jedoch einem Nahrungsmittel. Hierbei ist es für die spätere Matrixmultiplikation wichtig, die Reihenfolge der Nahrungsmittel beizubehalten.

$$\begin{pmatrix} 0,5 \\ 3 \\ 2,5 \\ 2,5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dies ist eine 5×1-Matrix. Wir können also die 4×5-Matrix, die für die einzelnen Nährwerte von Müsli, Milch, Spaghetti, Saft und Ketchup steht, mit der 5×1-Matrix, die für den Konsum der entsprechenden Produkte eines Menschen an einem Tag steht, multiplizieren:

$$\begin{pmatrix} 421 & 47 & 350 & 43 & 100 \\ 9,6 & 3,5 & 11,5 & 0,7 & 1,5 \\ 62 & 4,9 & 72,5 & 9 & 22,5 \\ 15 & 1,5 & 1,6 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ 3 \\ 2,5 \\ 2,5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1434 \\ 47,3 \\ 271,95 \\ 16,9 \end{pmatrix}$$

Das Ergebnis können wir wie folgt interpretieren: Insgesamt hat der Konsument

Brennwert	1434 kcal
Eiweiß	47,3 g
Kohlenhydrate	271,95 g
Fett	16,9 g

zu sich genommen.

2.2 Gleichungssysteme

Im ersten Kapitel haben wir bereits die Lösung von Gleichungen der Form $ax + b = 0$ gesucht, wobei a und b reelle Zahlen waren. Eine solche Gleichung heißt *linear*. Der Grund hierfür ist, dass die zu bestimmende Variable nur linear, das heißt als Term x, in der Gleichung vorkommt. Führt man auf beiden Seiten einer Gleichung dieselbe Rechenoperation durch, so erhält man erneut eine Gleichung mit derselben Lösungsmenge. Dieses Prinzip haben wir genutzt, um Gleichungen zu lösen:

Beispiel. Gesucht sei eine Lösung x von $2x + 4 = 0$:

$$\begin{aligned} 2x + 4 &= 0 \quad && | -4 \qquad && \text{(d. h. im nächsten Schritt ziehen wir auf beiden Seiten 4 ab)} \\ 2x &= -4 && | : 2 && \text{(bei der neuen Gleichung dividieren wir beide Seiten durch 2)} \\ x &= -2 && && (x = -2 \text{ ist die gesuchte Lösung}) \end{aligned}$$

Anstelle von einer linearen Gleichung können wir ein ganzes lineares Gleichungs*system* untersuchen:

Definition. Ein *lineares Gleichungssystem* ist eine Menge von linearen Gleichungen

$$\begin{array}{llllll} a_{11}\cdot x_1 & +\, a_{12}\cdot x_2 & + \ \dots & +\, a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 & +\, a_{22}\cdot x_2 & + \ \dots & +\, a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1}\cdot x_1 & +\, a_{m2}\cdot x_2 & + \ \dots & +\, a_{mn}x_n & = b_n \end{array}$$

in n Unbekannten $x_1, \dots, x_n$ mit reellen Zahlen $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$.

Lösungen eines solchen linearen Gleichungssystems sind also Zahlentupel $x_1, \dots, x_n$, die alle im System auftauchenden Gleichungen gleichzeitig erfüllen.

Beispiele.

1.

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ x - y &= 2 \end{aligned}$$

ist ein lineares Gleichungssystem bestehend aus zwei Gleichungen und zwei Unbekannten. Es gibt viele Möglichkeiten, dieses zu lösen. Beispielsweise kann man die beiden Zeilen addieren und erhält so die Bedingungen

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ 2x &= 3 \end{aligned}$$

an die Lösungen x und y des linearen Gleichungssystems. Damit muss $x = \frac{3}{2}$ gelten. Dies eingesetzt in die erste Zeile ergibt die Gleichung $\frac{3}{2} + y = 1$ für y und damit $y = -\frac{1}{2}$. Die Lösungsmenge dieses Gleichungssystems ist also $x = \frac{3}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$.

2. Ein weiteres Beispiel ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ x - y - z &= -1 \\ 2x + 2y - 2z &= 1 \end{aligned}$$

Hier widersprechen sich die erste und die dritte Zeile: Gilt

$$x + y - z = 1,$$

so muss auch

$$2x + 2y - 2z = 2$$

gelten (hier haben wir beide Seiten der Gleichung mit 2 multipliziert). Jedoch ist $2 \neq 1$. Die Lösungsmenge dieses linearen Gleichungssystems ist also leer.

3. Auch

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ x - y + z &= 1 \end{aligned}$$

ist ein lineares Gleichungssystem, dieses Mal bestehend aus zwei Gleichungen und drei Unbekannten. Addieren wir die beiden Zeilen, so erhalten wir die Gleichung

$$2x + 2z = 2.$$

Für jede Wahl von z ist $x = 1 - z$ eine Lösung dieser Gleichung, setzen wir diese in die erste Gleichung des Gleichungssystems ein, erhalten wir die Gleichung

$$1 - z + y + z = 1$$

und damit $y = 0$. Die Lösungsmenge dieses Gleichungssystems besteht also aus unendlich vielen Lösungen der Form $(x, y, z) = (1 - z, 0, z)$.

Lineare Gleichungssysteme kann man auch verkürzt mit der Matrixschreibweise darstellen. Ist

$$\begin{array}{cccccc} a_{11} \cdot x_1 & + a_{12} \cdot x_2 & + \ldots & + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 & + a_{22} \cdot x_2 & + \ldots & + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 & + a_{m2} \cdot x_2 & + \ldots & + a_{mn}x_n & = b_n \end{array}$$

ein lineares Gleichungssystem bestehend aus m Zeilen mit n Unbekannten $x_1, \ldots, x_n$ mit reellen Zahlen $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$, so suchen wir Vektoren $(x_1, \ldots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Damit haben unsere Beispiele die Gestalt

Beispiele.

1.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diese drei Beispiele spiegeln alle Möglichkeiten für Lösungsmengen von linearen Gleichungssystemen wider: Die Lösungsmenge besteht entweder aus genau einem Element, aus gar keinem Element (der leeren Menge), oder aus unendlich vielen Lösungen. Widersprechen sich beispielsweise einzelne Gleichungen eines linearen Gleichungssystems, so kann dieses keine Lösung besitzen. Gibt es mehr Unbekannte als Gleichungen in einem linearen Gleichungssystem und widersprechen sich diese nicht, so hat ein solches Gleichungssystem unendlich viele Lösungen. Welcher Fall vorliegt, kann man an der Matrix ablesen. Wie das genau geht, kann man zum Beispiel in [F 05] nachlesen.

2.3 Der Gauß-Algorithmus

Durch geschickte Rechenoperationen haben wir im vorigen Abschnitt die Lösungsmengen von linearen Gleichungssystemen bestimmt. Je mehr Gleichungen und Unbekannte in einem Gleichungssystem vorkommen, desto mehr Operationen muss man durchführen, wobei manchmal nicht so klar ersichtlich ist, welche Rechnungen am geschicktesten sind. Hier schafft der *Gaußsche Algorithmus* Abhilfe. Mithilfe dieses Algorithmus kann die Lösungsmenge eines beliebigen linearen Gleichungssystems bestimmt werden. Ist das Gleichungssystem in Matrixform durch

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

gegeben, so geht man im Gaußschen Algorithmus so vor, dass man zunächst durch Zeilenoperationen das Gleichungssystem in ein neues System

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}(\text{neu}) & \dots & a_{2n}(\text{neu}) \\ 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{m2}(\text{neu}) & \dots & a_{mn}(\text{neu}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2(\text{neu}) \\ \vdots \\ b_n(\text{neu}) \end{pmatrix}$$

und nach und nach das System in die Form

$$\begin{pmatrix} * & * & \dots & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & 0 & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ * \\ \vdots \\ * \end{pmatrix}$$

bringt. Diese Form nennt man *Zeilenstufenform*. Mögliche Zeilenoperationen sind das Vertauschen ganzer Zeilen sowie das Addieren eines Vielfachen einer Zeile zu einem Vielfachen einer anderen Zeile.

Beispiele.

1. Betrachten wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 1 \\ -x + y &= 1 \\ 2x + y + z &= 0. \end{aligned}$$

In Matrixschreibweise ist es von der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	Zeile 1 Zeile 2 Zeile 3
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$	(Zeile 1) (Zeile 2)' = (Zeile 1) + (Zeile 2) (Zeile 3)' = (Zeile 3) − 2 · (Zeile 1)
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$	(Zeile 1) (Zeile 2)' (Zeile 3)" = (Zeile 2)' + (Zeile 3)'

Damit ist die gesuchte Lösungsmenge gleich der Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z &= 1 \\ 3y + 3z &= 2 \\ -2z &= 0 \end{aligned}$$

Aus $-2z = 0$ folgt $z = 0$. Aus $3y + 3z = 3y = 2$ folgt $y = \frac{2}{3}$ und aus $x + 2y + 3z = x + \frac{4}{3} = 1$ folgt $x = -\frac{1}{3}$. Damit besteht die Lösungsmenge aus dem einzelnen Element $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0)$.

2. Wir verwenden nun den Gaußschen Algorithmus, um das folgende lineare Gleichungssystem zu lösen:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 &= 7 \\ x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 2 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 &= 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Dieses können wir auch schreiben als

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir haben im vorhergehenden Beispiel gesehen, dass bei den Zeilenoperationen (bis auf der Vertauschung) die x, y und z nicht verändert werden. Daher lassen wir diesen Vektor im Folgenden einfach weg und untersuchen stattdessen eine sogenannte *erweiterte Matrix*. Die erweiterte Matrix ist von der Form

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & -4 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

$\left(\begin{array}{cccc\|c} 1 & 1 & -3 & -4 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 3 & 1 & 0 \end{array}\right)$	$\begin{array}{rll} x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 & = 7 & \text{Zeile 1} \\ x_2 + 3x_3 + 2x_4 & = 2 & \text{Zeile 2} \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & = 2 & \text{Zeile 3} \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 & = 0 & \text{Zeile 4} \end{array}$
$\left(\begin{array}{cccc\|c} 1 & 1 & -3 & -4 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & -3 & 9 \\ 0 & -5 & 12 & 13 & -21 \end{array}\right)$	$\begin{array}{rcll} x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 & = & 7 & \text{(Z1)= Zeile 1} \\ x_2 + 3x_3 + 2x_4 & = & 2 & \text{(Z2)=Zeile 2} \\ 3x_2 - 2x_3 - 3x_4 & = & 9 & \text{(Z3)'=(Z1) + (Z3)} \\ -5x_2 + 12x_3 + 13x_4 & = & -21 & \text{(Z4)'=(-3)(Z1) + (Z4)} \end{array}$
$\left(\begin{array}{cccc\|c} 1 & 1 & -3 & -4 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -11 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 27 & 23 & -11 \end{array}\right)$	$\begin{array}{rcll} x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 & = & 7 & \text{Z 1} \\ x_2 + 3x_3 + 2x_4 & = & 2 & \text{Z 2} \\ -11x_3 - 9x_4 & = & 3 & \text{(Z3)''=(-3)Z2+(Z3)'} \\ 27x_3 + 23x_4 & = & -11 & \text{(Z4)''=5Z2+(Z4)'} \end{array}$
$\left(\begin{array}{cccc\|c} 1 & 1 & -3 & -4 & 7 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -11 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & -40 \end{array}\right)$	$\begin{array}{rll} x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 & = 7 & \text{Z1} \\ x_2 + 3x_3 + 2x_4 & = 2 & \text{Z2} \\ -11x_3 - 9x_4 & = 3 & \text{(Z3)''} \\ 10x_4 & = -40 & \text{27(Z3)''+11(Z4)''} \end{array}$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} & & x_4 &= -4 \\ -11x_3 - 9x_4 &= 3 & \Longrightarrow x_3 &= 3 \\ x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 2 & \Longrightarrow x_2 &= 1 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - 4x_4 &= 7 & \Longrightarrow x_1 &= -1 \end{aligned}$$

Auch hier besteht die Lösungsmenge nur aus einem Element.

Biologisches Beispiel

Betrachten wir nun Problem 2. Wir suchen Zahlen $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{N}$ mit

$$x_1\ CO_2 + x_2\ H_2O \longrightarrow x_3\ C_6H_{12}O_6 + x_4O_2.$$

Kohlenstoff C kommt auf der linken Seite der Reaktionsgleichung nur in Kohlendioxid vor. Folglich muss die Menge CO_2 ausreichen, um den Kohlenstoff auf der rechten Seite der Reaktionsgleichung, also im Traubenzucker $C_6H_{12}O_6$, zu erzeugen. Kohlenstoff

C kommt im Kohlendioxid einmal, und im Traubenzucker sechs mal vor, d. h. es gilt $x_1 = 6x_3$. Analog argumentieren wir für Sauerstoff und Wasserstoff. Ein Sauerstoffatom kommt in Kohlendioxid zweimal, in Wasser einmal, im Kohlenhydrat sechs mal und im Sauerstoff zweimal vor, d. h. $2x_1 + x_2 = 6x_3 + 2x_4$. Ein Wasserstoffatom kommt in Wasser zweimal und im Kohlenhydrat zwölf mal vor, d. h. $x_2 = 12x_3$. Insgesamt erhalten wir das folgende Gleichungssystem

$$\begin{array}{cccccc} & \text{Kohlendioxid} & \text{Wasser} & \text{Kohlenhydrat} & \text{Sauerstoff} & \\ C & 1x_1 & & -\ 6x_3 & & = 0 \\ O & 2x_1 & +\ x_2 & -\ 6x_3 & -2x_4 & = 0 \\ H & & 2x_2 & -\ 12x_3 & & = 0 \end{array}$$

Dies können wir schreiben als

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -6 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -12 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -12 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -24 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

Diese erweiterte Matrix steht für das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 - 6x_3 &= 0 \\ x_2 + 6x_3 - 2x_4 &= 0 \\ -24x_3 + 4x_4 &= 0. \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem besteht aus drei Gleichungen mit vier Unbekannten, wobei sich die einzelnen Gleichungen nicht widersprechen. Damit besitzt es unendlich viele Lösungen, eine der Variablen $x_1, \ldots, x_4$ ist frei wählbar, die anderen können in Abhängigkeit davon berechnet werden:

Ist $x_4 := t \in \mathbb{R}$ frei wählbar, so folgt

$$\begin{aligned} -24x_3 &= -4t & &\Longrightarrow x_3 = \frac{1}{6}t \\ x_2 + 6 \cdot \frac{1}{6}t - 2t &= 0 & &\Longrightarrow x_2 = t \\ x_1 - 6 \cdot \frac{1}{6}t &= 0 & &\Longrightarrow x_1 = t. \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem besitzt unendlich viele Lösungen, da für t unendlich viele reelle Zahlen eingesetzt werden können. Chemisch sind diese natürlich nicht alle sinnvoll:
Für $t = 1$ erhalten wir

$$CO_2 + H_2O \longrightarrow \frac{1}{6}\, C_6H_{12}O_6 + O_2,$$

jedoch gibt es keine sechstel - Traubenzucker - Atome.
Es sind also nur ganzzahlige stöchiometrische Koeffizienten sinnvoll. Für $t = 6$ erhalten wir

$$6\ CO_2 + 6\ H_2O \longrightarrow C_6H_{12}O_6 + 6\ O_2.$$

2.4 Quadratische Gleichungen

Bisher haben wir lineare Gleichungen betrachtet. In diesem Abschnitt geht es um Lösungen von Gleichungen der Form

$$x^2 + px + q = 0$$

mit reellen Zahlen p und q. Eine solche Gleichung heißt *quadratisch*, da die gesuchte Variable x maximal als Quadrat in der Gleichung auftaucht. Auch hier gilt wieder das Prinzip, dass wir, wenn wir auf beiden Seiten der Gleichung die selbe Rechenoperation durchführen, erneut eine Gleichung erhalten. Es gilt

$$\begin{aligned} & 0 = x^2 + px + q \\ \Longleftrightarrow\ & 0 = x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q \qquad \text{quadratische Ergänzung} \\ \Longleftrightarrow\ & 0 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p^2}{4}\right) + q \\ \Longleftrightarrow\ & \left(\frac{p^2}{4}\right) - q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Hier haben wir eine sogenannte *quadratische Ergänzung* durchgeführt. Wir haben $0 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2$ addiert, damit wir im nächsten Schritt die erste binomische Formel $(x+\frac{p}{2})^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$ anwenden können.
Eine Lösung x der quadratischen Gleichung $x^2 + px + q = 0$ muss also die beiden Gleichungen

$$x + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(\frac{p^2}{4}\right) - q}$$

und

$$x + \frac{p}{2} = -\sqrt{\left(\frac{p^2}{4}\right) - q}$$

erfüllen, d. h. es folgt

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p^2}{4}\right) - q}\,.$$

Diese Formel nennt man auch p-q-Formel:

Satz. *Sind p und q zwei reelle Zahlen, für die die Differenz $\frac{p^2}{4} - q$ positiv ist, so hat die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ die Lösungen $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$.*

Zum Lösen einer quadratischen Gleichung können Sie also entweder das Verfahren mit der quadratischen Ergänzung durchführen oder wir merken uns die p-q-Formel und wenden diese direkt an.

Bemerkung. Allgemein sind quadratische Gleichungen von der Form

$$ax^2 + bx + c = 0$$

mit $a \neq 0$. Diese löst man durch Ausklammern von a: Es gilt

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0 \text{ genau dann wenn } x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Beispiele.

1. Wir wollen

   $$2x^2 - 12x + 16 = 0$$

   mithilfe einer quadratischen Ergänzung lösen: Es gilt

   $$\begin{aligned} & 0 = 2x^2 - 12x + 16 & \\ \iff\ & 0 = x^2 - 6x + 8 & \text{Division durch 2} \\ \iff\ & 0 = x^2 - 6x + 3^2 - 3^2 + 8 & \text{quadratische Ergänzung mit } 3^2 \\ \iff\ & 0 = (x-3)^2 - 1 & \\ \iff\ & 1 = (x-3)^2 & \end{aligned}$$

   Es folgt $x - 3 = \pm 1$ und damit $x = 3 \pm 1$. Lösungen sind also $x = 2$ und $x = 4$.

   Dieses Ergebnis erhalten wir auch mit der p-q-Formel: Hier ist $p = -6$ und $q = 8$, also

   $$x_{1,2} = -\frac{(-6)}{2} \pm \sqrt{\frac{(-6)^2}{4} - 8} = 3 \pm \sqrt{1}.$$

   In diesem Fall gibt es also genau zwei Lösungen der quadratischen Gleichung.

2. Schauen wir uns nun die quadratische Gleichung

   $$x^2 + 6x + 9 = 0$$

   an. Hier ist $p = 6$ und $q = 9$. Für Lösungen x_1 und x_2 dieser Gleichung folgt $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9 - 9} = 3$. Da der Term $\frac{p^2}{4} - q$ unter der Wurzel verschwindet, gibt es in diesem Beispiel nur eine Lösung, nämlich $x = -3$.

3. Schließlich betrachten wir noch die quadratische Gleichung
$$x^2 - 4x + 5 = 0.$$
Eine Lösung ist in diesem Fall von der Form $2 \pm \sqrt{4-5} = 2 \pm \sqrt{-1}$. Die Wurzel einer negativen reellen Zahl ist jedoch nicht definiert (‚da das Quadrat jeder reellen Zahl positiv ist, gibt es keine reelle Zahl, deren Quadrat negativ ist). Für dieses Beispiel gibt es folglich keine Lösungen.

Biologisches Beispiel

Wir untersuchen nun Problem 3. In diesem Fall ist die Modellierung des Problems nicht sofort ersichtlich. Wir werden jedoch sehen, dass, sobald diese biologische Fragestellung mathematisch formuliert ist, wir nur noch eine einfache quadratische Gleichung lösen müssen. Zur Vereinfachung nennen wir Pflanzen, die noch nicht ein Jahr als sind, null-Jahre-alt, und Pflanzen, die schon länger als ein Jahr leben, ein-Jahr-alt. Wir wissen nicht, wieviele null-Jahre-alte und wieviele ein-Jahr-alte Pflanzen nach j Jahren vorhanden sind. (Wir erinnern uns: die Variable j ist eine natürliche Zahl und steht für eine Unbekannte, in diesem Fall die Anzahl der vergangenen Jahre.) Das stört uns jedoch nicht weiter. Wir nennen die Anzahl der null-Jahre-alten Pflanzen nach j Jahren $p_0(j)$ und die Anzahl der ein-Jahre-alten Pflanzen nach j Jahren $p_1(j)$.

Die null-Jahre-alten Pflanzen erzeugen jeweils fünf Nachkommen, und die ein-Jahr-alten jeweils zehn Nachkommen, d. h. im darauffolgenden Jahr $j+1$ gibt es insgesamt $5 \cdot p_0(j) + 10 \cdot p_1(j)$ null-Jahre-alte Pflanzen. Mathematisch bedeutet das
$$p_0(j+1) = 5 \cdot p_0(j) + 10 \cdot p_1(j).$$
Alle ein-Jahr-alten Pflanzen sterben, von den null-Jahre-alten überleben $97,5\%$, d. h. im Jahr $j+1$ gibt es insgesamt $\frac{39}{40} p_0(j)$ ein-Jahr-alte Pflanzen. Mathematisch erhalten wir
$$p_1(j+1) = \frac{39}{40} p_0(j).$$
Gesucht ist nun das Verhältnis der Anzahl der ein-Jahr-alten Pflanzen zur Anzahl der null-Jahre-alten Pflanzen, d. h. $\frac{p_1(j)}{p_0(j)}$. Wir tun auch in diesem Fall so, als ob wir es schon kennen, und nennen es c. Wir haben angenommen, dass dieses Verhältnis immer gleich bleibt (dies wird häufig in der Natur beobachtet). Es gilt also auch im darauffolgenden Jahr $j+1$, dass $c = \frac{p_1(j+1)}{p_0(j+1)}$. Wir wollen also mathematisch die Zahl c bestimmen, für die gilt $c = \frac{p_1(j)}{p_0(j)} = \frac{p_1(j+1)}{p_0(j+1)}$. Insgesamt erhalten wir mehrere Gleichungen:

$$p_0(j+1) = 5 \cdot p_0(j) + 10 \cdot p_1(j) \tag{2.1}$$
$$p_1(j+1) = \frac{39}{40} p_0(j) \tag{2.2}$$
$$c = \frac{p_1(j)}{p_0(j)} = \frac{p_1(j+1)}{p_0(j+1)}. \tag{2.3}$$

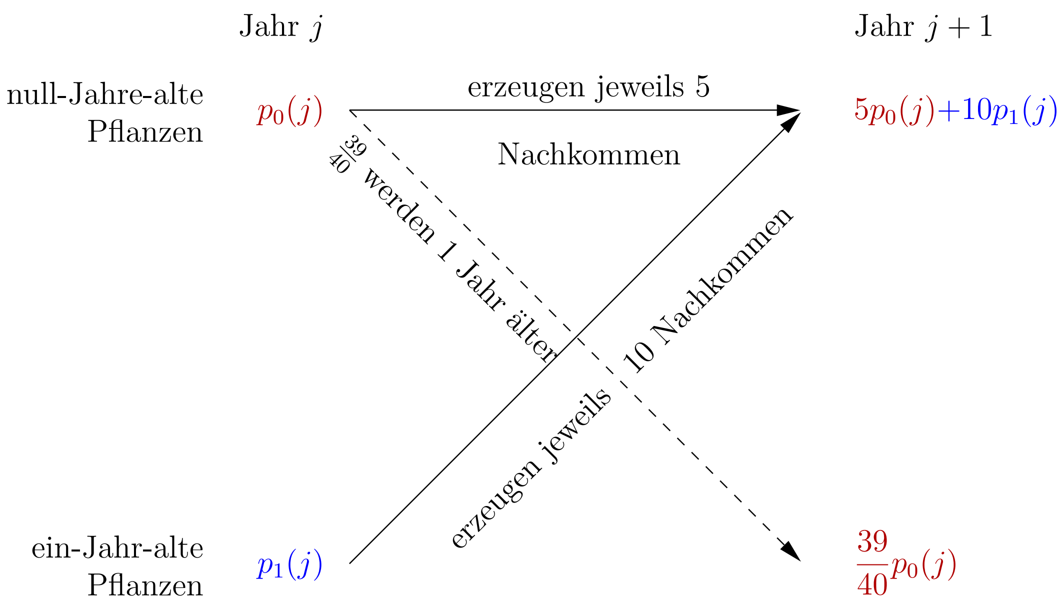


Abbildung 2.1

Gleichung (2.3) können wir umschreiben zu $p_1(j+1) = c \cdot p_0(j+1)$ bzw. zu $p_1(j) = c \cdot p_0(j)$. Gleichung (2.2) können wir dann umschreiben in $c \cdot p_0(j+1) = \frac{39}{40}p_0(j)$ und damit (indem wir durch c dividieren) zu $p_0(j+1) = \frac{1}{c}\left(\frac{39}{40}p_0(j)\right)$. Schließlich setzen wir den so berechneten Wert von $p_0(j+1)$ sowie für $p_1(j)$ den Wert $c \cdot p_0(j)$ in die Gleichung (2.1) ein und erhalten

$$\frac{1}{c} \cdot \left(\frac{39}{40}p_0(j)\right) = 5 \cdot p_0(j) + 10 \cdot c \cdot p_0(j).$$

Durch Multiplizieren mit c und Subtrahieren von $\frac{39}{40}p_0(j)$ ergibt sich

$$0 = 10(p_0(j))c^2 + 5p_0(j)c - \frac{39}{40}p_0(j),$$

eine quadratische Gleichung mit der Unbekannten c. Diese lösen wir nun:

$$\begin{aligned} 0 &= 10(p_0(j))c^2 + 5p_0(j)c - \frac{39}{40}p_0(j) \\ &= \underbrace{10p_0(j)\left(c^2 + \frac{1}{2}c - \frac{39}{400}\right)}_{\text{ist } p_0(j) \text{ nicht null, verschwindet dieser Term nur, wenn } c^2+\frac{1}{2}c-\frac{39}{400} \text{ gleich 0 ist.}} \end{aligned}$$

Es muss also gelten:

$$\begin{aligned}
0 &= c^2 + \frac{1}{2}c - \frac{39}{400} \\
&= \left(c^2 + \frac{1}{2}c\right) - \frac{39}{400} \\
&= \left(c^2 + \frac{1}{2}c + \underbrace{(\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}))^2 - (\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}))^2}_{\text{dieser Term ist gleich 0}}\right) - \frac{39}{400} \\
&= \left(c^2 + \frac{1}{2}c + \left(\frac{1}{4}\right)^2\right) - \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{39}{400} \\
&= \left(c + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} - \frac{39}{400} \\
&= \left(c + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{4}{25}
\end{aligned}$$

Wir erhalten als Bedingung an c, dass

$$\frac{4}{25} = \left(c + \frac{1}{4}\right)^2$$

gilt, und damit

$$c = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{4}{25}} = -\frac{1}{4} \pm \frac{2}{5}.$$

Bemerkung. Das gleiche Resultat bekommt man natürlich auch mit der p-q-Formel: Lösungen von $c^2 + \frac{1}{2}c - \frac{39}{400}$ sind

$$x_{1,2} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{39}{400}} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{25+39}{400}} = -\frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{4}{25}}.$$

Damit ist das Verhältnis von ein-Jahr-alten Pflanzen zu null-Jahre-alten Pflanzen, da es positiv sein muss, gleich $\frac{3}{20} = 0,15$.

2.5 Gleichungen höherer Ordnung

Wir haben im vorigen Abschnitt gesehen, dass eine quadratische Gleichung höchstens zwei verschiedene Lösungen besitzt. Ein Satz in der Mathematik besagt, dass für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ eine Gleichung der Form $x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$ mit reellen Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ höchstens n reelle Lösungen $x_1, \ldots, x_n$ besitzt. Diese sind jedoch nicht immer so leicht zu bestimmen.

2.5.1 Kubische Gleichungen

Für spezielle Gleichungen der Form $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ mit einer ganzen Zahl $c \in \mathbb{Z}$ gibt es einen Trick, mit dem man eine Nullstelle raten kann und damit alle Lösungen bestimmen kann. Dazu geben wir hier nur zwei Beispiele:

Beispiele.

1. Wir wollen die kubische Gleichung

$$x^3 - 8x^2 + 19x - 12 = 0$$

lösen. Dazu prüfen wir, ob der Teiler 1 von 12 eine Nullstelle der Gleichung ist: es gilt $1-8+19-12 = 0$, also ist $x_1 = 1$ eine Lösung der Gleichung. Auch die Teiler 3 und 4 von 12 sind Nullstellen der kubischen Gleichung. Damit haben wir diese komplett gelöst.

2. Schauen wir uns nun die kubische Gleichung

$$x^3 - \frac{11}{3}x^2 + \frac{5}{3}x + 1 = 0$$

an. Auch hier ist 1 ein Teiler von 1, und es gilt $1-\frac{11}{3}+\frac{5}{3}+1 = 0$, das heißt $x_1 = 1$ ist eine Lösung der Gleichung. Die Zahl 1 hat jedoch keine weiteren Teiler, so dass wir nicht wie im vorhergehenden Beispiel alle Lösungen der Gleichung raten können. Um die beiden anderen Lösungen zu berechnen, führen wir eine *Polynomdivision* durch. Da wir bereits eine Nullstelle, nämlich $x_1 = 1$, des Polynoms $x^3 - \frac{11}{3}x^3 + \frac{5}{3}x + 1$ kennen, wissen wir, dass dieses Polynom gleich $(x-1)$ mal einem Polynom vom Grad 2 ist, d. h. $x^3-\frac{11}{3}x^2+\frac{5}{3}x+1 = (x-1)\cdot(...)$. Anstelle der drei Punkte steht ein Polynom vom Grad 2. Das bedeutet, dass wir das Polynom $x^3 - \frac{11}{3}x^2 + \frac{5}{3}x + 1$ durch das lineare Polynom $x-1$ dividieren, denn für $x = 1$ gilt $(x-1) = 0$, also ist 1 eine Nullstelle:

$$\begin{array}{l}
\Big(\quad x^3 - \tfrac{11}{3}x^2 + \tfrac{5}{3}x + 1\Big) : \Big(x-1\Big) = x^2 - \tfrac{8}{3}x - 1 \\
\underline{-\,x^3 \quad + x^2} \\
\qquad\quad -\tfrac{8}{3}x^2 + \tfrac{5}{3}x \\
\qquad\quad \underline{\quad\tfrac{8}{3}x^2 - \tfrac{8}{3}x} \\
\qquad\qquad\qquad -x+1 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{\quad x-1} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\ \ 0
\end{array}$$

Eine Polynomdivision funktioniert ähnlich wie die „normale“ schrifliche Division zweier Zahlen. Wichtig hierbei ist, dass das Ausgangspolynom und auch das Polynom, durch das geteilt wird, nach den höchsten Potenzen sortiert sind. Schauen wir uns die ersten Schritte der obigen Polynomdivision an:

$$
\begin{array}{l}
\Big(\quad x^3 - \tfrac{11}{3}x^2 + \tfrac{5}{3}x + 1\Big) : \Big(x-1\Big) = x^2 \\
\underline{-\, x^3 \quad + x^2} \\
\qquad\quad - \tfrac{8}{3}x^2 + \tfrac{5}{3}x
\end{array}
$$

Man beginnt, indem man x^3 durch x dividiert und das Ergebnis x^2 hinter das =-Zeichen schreibt. Nun muss man, wie bei der schriftlichen Division normaler Zahlen, „rückwärts" rechnen, indem man das x^2 mit $(x-1)$ multipliziert. Dieses Ergebnis $x^3 - x^2$ schreibt man so unter das gegebene Polynom, dass x^3 wieder unter x^3 steht. Diese neue Zeile subtrahiert man nun von der oberen, d. h. man setzt die Zeile in Klammern mit einem Minus davor und erhält die entsprechend anderen Vorzeichen. Die Differenz $-\frac{8}{3}x^2$ kommt unter einen Strich und zum weiterrechnen zieht man den folgenden Summanden $\frac{5}{3}x$ des Ausgangspolynoms mit hessrunter. Nun würde man entsprechend weiterrechnen, indem man $-\frac{8}{3}x^2$ durch x dividiert und dann analog zu oben vorgeht.

Für das Ergebnis $x^2 - \frac{8}{3}x - 1$ können wir nun zum Beispiel mit der p-q-Formel die Nullstellen bestimmen:

$$x_{2,3} = \frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{9}{9}} = \frac{4}{3} \pm \frac{5}{3}.$$

Damit sind $x_2 = 3$ und $x_3 = -\frac{1}{3}$ zwei weitere Lösungen der kubischen Gleichung. Es gilt

$$x^3 - \frac{11}{3}x^2 + \frac{5}{3}x + 1 = (x-1)(x-3)(x+\frac{1}{3}).$$

2.5.2 Biquadratische Gleichungen

Eine andere Klasse von Gleichungen sind sogenannte *biquadratische Gleichungen*. Sie sind von der Form $x^4 + ax^2 + b = 0$ mit reellen Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$. Diese kann man lösen, indem man zweimal eine quadratische Gleichung löst.

Beispiel. Wir wollen die biquadratische Gleichung

$$x^4 - 8x^2 + 16 = 0$$

lösen. Ersetzen wir in dieser Gleichung x^2 durch die Unbekannte $z := x^2$, so erhalten wir die quadratische Gleichung

$$z^2 - 8z + 16 = 0.$$

Nur die reelle Zahl $z = 4$ löst diese quadratische Gleichung, wie man leicht mit der p-q-Formel nachrechnen kann. Damit sind alle Lösungen der biquadratischen Gleichung

$$x^4 - 8x^2 + 16 = 0$$

gleich $x = \pm\sqrt{z} = \pm 2$.

2.6 Zusammenfassung

- Eine *Matrix* $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ ist eine Anordnung von $n \cdot m$ reellen Zahlen $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1m}, \dots, a_{nm} \in \mathbb{R}$ nach dem Schema
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & & a_{im} \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & & & & & a_{nm} \end{pmatrix}.$$
Man schreibt $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,m}}$ oder nur $A = (a_{ij})$. Für den Eintrag in der i-ten Zeile und j-ten Spalte schreibt man a_{ij}.

- *Matrixaddition:* Sind $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,m}} \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ und $B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,m}} \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ zwei Matrizen mit n Zeilen und m Spalten, so ist ihre Summe definiert als Summe der einzelnen Einträge:
$$A + B := (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,m}} + (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,m}}$$

- *Multiplikation mit einem Skalar:* Ist $A \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ mit $A = (a_{ij})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl, so definieren wir
$$\lambda \cdot A := (\lambda a_{ij})$$

- *Matrixmultiplikation:* Ist $A = (a_{ij}) \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ eine reelle $n \times m$-Matrix und $B = (b_{jk}) \in M_{m\times l}(\mathbb{R})$ eine reelle $m \times l$-Matrix, so besitzt die Produktmatrix $C := A \cdot B$ genau n Zeilen und l Spalten. Der Eintrag c_{ik} der Matrix C in der i-ten Zeile und k-ten Spalte ist dann definiert durch
$$c_{ik} = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{im} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{mk} \end{pmatrix} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \dots + a_{im} \cdot b_{mk}.$$

- Ein *lineares Gleichungssystem* ist eine Menge von linearen Gleichungen
$$\begin{array}{cccccc} a_{11} \cdot x_1 & + a_{12} \cdot x_2 & + & \dots & + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 & + a_{22} \cdot x_2 & + & \dots & + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 & + a_{m2} \cdot x_2 & + & \dots & + a_{mn}x_n & = b_n \end{array}$$

in n Unbekannten $x_1, \dots, x_n$ mit reellen Zahlen $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$.

- Lineare Gleichungssysteme kann man auch in Matrixschreibweise darstellen.
- Ein lineares Gleichungssystem hat entweder eine eindeutige Lösung, unendlich viele Lösungen, oder gar keine Lösung.
- Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems kann mit dem *Gaußschen Algorithmus* bestimmt werden. Hierbei bringt man die erweiterte Matrix durch Zeilenoperationen wie Vertauschen oder Addition von Vielfachen einer Zeile zu Vielfachen einer anderen Zeile auf Zeilenstufenform, indem man unter der Hauptdiagonalen Nullen erzeugt.
- Eine quadratische Gleichung ist von der Form $ax^2 + bx + c = 0$ mit reellen Zahlen $a, b, c \in \mathbb{R}$, wobei a ungleich null ist. Diese kann durch *quadratische Ergänzung* oder die *p-q-Formel* gelöst werden.
- Die p-q-Formel hat die Gestalt: Sind p und q zwei reelle Zahlen, für die die Differenz $\frac{p^2}{4} - q$ positiv ist, so hat die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ die Lösungen $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$.
- Quadratische Gleichungen haben maximal zwei reelle Lösungen.
- Lösungen von kubischen Gleichungen kann man häufig durch Raten einer Nullstelle und anschließender Polynomdivison berechnen.
- Biquadratische Gleichungen können mit Hilfe einer Substitution auf quadratische Gleichungen zurückgeführt werden.
- Für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ besitzt eine höhere Gleichung der Form
$$x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$
mit reellen Zahlen $a_1, \dots, a_n$ höchstens n reelle Lösungen $x_1, \dots, x_n$.

2.7 Aufgaben

Trainingsaufgaben

1. Bilden Sie, sofern möglich, die Summe $A + B$ und das Produkt $A \cdot B$ der Matrizen A und B.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ d) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

e) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$ f) $A = \begin{pmatrix} -3 & 7 & 2 \\ 8 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & -4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

g) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ h) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$

i) $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ j) $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

2. Bestimmen Sie die Unbekannten x und y.

a) $\begin{aligned} 2x - 5y &= 0 \\ 7x + 3y &= 0 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} x + 2y &= 0 \\ 3x + 4y &= 2 \end{aligned}$ c) $\begin{aligned} x + y &= a + b \\ x - y &= a - b \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} ax + by &= a \\ bx - ay &= b \end{aligned}$ e) $\begin{aligned} ax - by &= a^2 + b^2 \\ bx + ay &= a^2 + b^2 \end{aligned}$

3. Bestimmen Sie die Unbekannten w, x, y und z.

a) $\begin{aligned} x + 2y + z &= 3 \\ x - y - z &= 1 \\ 3x + 3y + z &= 8 \end{aligned}$ b) $\begin{aligned} 7 - 2z &= x \\ -5x &= 2y - 9 \\ y + z &= 5 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 6 &= -10y - 4z \\ 12z - 4x &= 10 + 6w \\ 0 &= 30 + 2w - 4z \\ -11y &= 4z + 11 \end{aligned}$ d) $\begin{aligned} \frac{2}{x} + \frac{3}{y} + \frac{5}{z} &= 2 \\ \frac{4}{x} + \frac{6}{y} - \frac{5}{z} &= 1 \\ \frac{6}{x} - \frac{9}{y} + \frac{10}{z} &= 2 \end{aligned}$

4. Bestimmen Sie den Lösungsvektor $\vec{x}$.

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

5. Bestimmen Sie die Lösungen der quadratischen Gleichungen.

a) $x^2 - 3x - 4 = 0$	b) $x^2 + 7x - 18 = 0$	c) $x^2 + 3x - 28 = 0$
d) $x^2 - 15x + 54 = 0$	e) $x^2 - 7x = 0$	f) $x^2 + 5x + 4 = 0$
g) $(x + 6)^2 = 16$	h) $(x - 7)^2 = 49$	i) $(x - 5)^2 = 4$
j) $(x + 4)^2 = 25$	k) $\frac{1}{2}x^2 + x - 4 = 0$	l) $2x^2 + 8x + 6 = 0$
m) $2x^2 - 14x + 24 = 0$	n) $\frac{1}{5}x^2 - \frac{2}{5}x = 0$	o) $-3x^2 + 15x - 18 = 0$
p) $6x^2 + 6x - 12 = 0$	q) $\frac{2}{3}x^2 + \frac{2}{3}x - 4 = 0$	r) $-2x^2 + 24x + 90 = 0$

6. Bestimmen Sie die Lösungen der biquadratischen Gleichungen.

a) $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$	b) $3x^4 - 51x^2 + 48 = 0$	c) $x^4 - 30x^2 + 125 = 0$
d) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$	e) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$	f) $x^4 - 18x^2 + 81 = 0$

7. Bestimmen Sie die Lösungen der kubischen Gleichungen.

a) $-x^3 + x = 0$	b) $x^3 + 7x^2 - 14x - 48 = 0$
c) $x^3 - 4x^2 - 3x + 18 = 0$	d) $2x^3 - 6x^2 + 6x - 2 = 0$
e) $x^3 - x^2 - x + 1 = 0$	f) $3x^3 - 6x^2 - 3x + 6 = 0$
g) $2x^3 + 4x^2 - 26x + 20 = 0$	h) $x^3 + 4x^2 - 11x - 30 = 0$

Kurztest

Kreuzen Sie die richtigen Antworten an:

1. Seien A und B zwei reelle Matrizen. Diese Matrizen kann man addieren,
   a) ☐ wenn die Anzahl der Zeilen beiden Matrizen identisch ist.
   b) ☐ wenn die Anzahl der Spalten beiden Matrizen identisch ist.
   c) ☐ wenn die Anzahl der Zeilen und Spalten beiden Matrizen identisch ist.

2. Seien A und B zwei reelle Matrizen. Diese Matrizen kann man miteinander multiplizieren$(A \cdot B)$,
   a) ☐ wenn die Anzahl der Zeilen und Spalten beiden Matrizen identisch ist.
   b) ☐ wenn die Anzahl der Spalten der Matrix A gleich der Anzahl der Zeilen von B ist.
   c) ☐ wenn die Anzahl der Spalten der Matrix A gleich der Anzahl der Zeilen von B und die Anzahl der Zeilen der Matrix A gleich der Anzahl der Spalten von B ist.

3. Ein lineares Gleichungssytem hat wieviele Lösungen?
   a) ☐ Immer eine eindeutige Lösung.
   b) ☐ Eine eindeutige Lösung oder unendlich viele.
   c) ☐ Entweder eine eindeutige, keine oder unendlich viele Lösungen.

4. Quadratische Gleichungen haben im Reellen wieviele Lösungen?
   a) ☐ Immer zwei eindeutige Lösungen.
   b) ☐ Eine,keine oder zwei Lösungen.
   c) ☐ Zwei Lösungen oder keine Löung.

Anwendungsaufgaben

1. Als *respiratorischer Quotient* wird das Verhältnis des Volumens des ausgeatmeten Kohlenstoffdioxids zum verbrauchten Sauerstoff bezeichnet. Mit ihm kann man bestimmen, aus welchen Stoffen der Körper hauptsächlich Energie gewinnt. Werden zum Beispiel nur Kohlenhydrate ($C_6H_{12}O_6$) zur Energiegewinnung genutzt, so läuft die Reaktion
$$C_6H_{12}O_6 + 6O_2 \longrightarrow 6CO_2 + 6H_2O$$
ab. Der respiratorische Quotient ist das Verhältnis der stöchiometrischen Koeffizienten von CO_2 zu O_2, in diesem Fall also 1.
   (a) Palmitinsäure ist eine gesättigte Fettsäure mit der Summenformel $C_{16}H_{32}O_2$. Wie sehen die stöchiometrischen Koeffizienten der Oxidation von Palmitinsäure aus? (Anmerkung: Sie erhalten auch hier ein Gleichungssystem mit unendlich vielen Lösungen. Deswegen ist es einfacher, zunächst von nur einem Produktmolekül Wasser auszugehen.)
   (b) Können Sie den respiratorischen Quotienten von Palmitinsäure berechnen?
   (c) Ein anderes Fett (Stearinsäureglycerinester) hat die Summenformel $C_{57}H_{110}O_6$. Was ist hier der respiratorische Quotient?

2. Wir haben zwei Lösungen des gleichen Stoffes, einmal mit der Konzentration 5 Prozent, einmal mit der Konzentration 10 Prozent. Wieviel müssen Sie von beiden Stoffen mischen, damit Sie einen Liter einer achtprozentigen Lösung erhalten?

3. Schwefelpurpurbakterien verwenden bei der Photosynthese neben Kohlendioxid (CO_2) nicht Wasser (H_2O), sondern Schwefelwasserstoff (H_2S) als Edukte. Produkte der Reaktion sind Kohlenhydrate ($C_6H_{12}O_6$), Wasser (H_2O) und Schwefel (S). Können Sie die stöchiometrischen Koeffizienten dieser Reaktion berechnen?

4. Methanbildner sind Mikroorganismen, die man zum Beispiel häufig in Kläranlagen findet. Sie leben in sauerstofffreien Lebensräumen und gewinnen ihre Energie durch Reduktion. Die Edukte dieser Reaktionsgleichung sind Wasserstoff (H_2) und Kohlendioxid (CO_2), die Produkte Methangas (CH_4) und Wasser. Diese Mikroorganismen spielen zum Beispiel bei der Gewinnung von Biogas eine Rolle. Können

Sie die genaue Reaktionsgleichung, d. h. die stöchiometrischen Koeffizienten, berechnen?

5. Angenommen, eine Population mit x_0 Individuen würde sich jedes Jahr verdoppeln, wenn sie in einer Umgebung ohne Räuber existieren würde. Nehmen wir nun an, dass y_0 Räuber im gleichen Lebensraum wie die Ausgangspopulation leben, und jeder dieser Räuber pro Jahr fünf Beuteexemplare frißt. Ohne diese eine Beutepopulation würde ein Teil der Räuber pro Jahr sterben: hier nehmen wir ein Schrumpfen der Räuberpopulation um 90 Prozent an. Durch die Beute wächst die Räuberpopulation pro Jahr abhängig von der Anzahl der Beutetiere, hier nehmen wir ein Wachstum um 20 Prozent der Anzahl x_0 der Beutetiere an.
   a) Aus diesen Daten lässt sich nun eine Formel für die Anzahl x_1 der Beutetiere nach einem Jahr sowie die Anzahl y_1 der Räuber nach einem Jahr aufstellen. Gesucht ist also ein mathematisches Modell, dass die Entwicklung der Beute- und Räubertiere pro Jahr beschreibt.
   b) Gibt es Startwerte x_0, y_0, für die die Anzahlen der Beute- und der Räubertiere konstant bleiben?

6. Mischungsaufgabe, Gleichungssystem

3 Folgen und Reihen

Problem 1 In der Medizin verwendet man für einige bildgebende Verfahren radioaktive Substanzen. Diese werden zum Beispiel in eine Vene gespritzt. Dabei sind sie so gewählt, dass sie vom zu untersuchenden Organ besonders gut aufgenommen werden. Dort sammeln sie sich an; mittels einer Strahlenkamera wird ihre Verteilung im Organ dargestellt. Das erlaubt dann Rückschlüsse auf mögliche Erkrankungen. Dabei ist die Strahlung der radioaktiven Substanzen sehr gering und für den Menschen ungefährlich. Ein Beispiel für eine solche Substanz ist ein Isotop von Technetium, welches eine Halbwertszeit von ungefähr sechs Stunden hat. Das bedeutet, dass nach sechs Stunden die Hälfte des Technetiums zerfallen ist. Nach weiteren sechs Stunden zerfällt dann natürlich wiederum die Hälfte des verbliebenen Technetiums, so dass nach der zweiten Halbwertszeit nur noch $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ der Ausgangsatome vorhanden sind. Nach drei Halbwertszeiten gibt es nur noch $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ der anfangs vorhandenen Atome usw. Wieviel radioaktive Substanz bleibt langfristig im Körper?

Problem 2 Nach dem vorangeganenen Beispiel zerfallen innerhalb von einer Halbwertzeit, also innerhalb von sechs Stunden, die Hälfte aller Technetiumatome. Innerhalb der zweiten Halbwertzeit zerfällt von den verbliebenen Atomen wieder die Hälfte. Insgesamt sind somit innerhalb von 12 Stunden $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ der anfänglich im Körper vorhandenen Atome zerfallen. Innerhalb von drei Halbwertzeiten sind dann $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$, innerhalb von vier Halbwertszeiten $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$ der Ausgangsatome zerfallen. Wie sieht die langfristige Prognose aus?

Das erste Problem definiert eine *Folge*, nämlich die Zahlenfolge $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots$, das zweite eine *Reihe*, nämlich $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$ Wir wollen in diesem Kapitel das Verhalten von Folgen und Reihen untersuchen.

Ziel: Einführung von Folgen und Reihen. Konvergenzkriterien. Bestimmung von Grenzwerten

3.1 Folgen

Definition. Eine *Folge reeller Zahlen* ist eine Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Da man sich bei Folgen eigentlich nur für die Bilder $\varphi(n)$ interessiert, bezeichnet man eine solche Folge oft mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $a_n = \varphi(n)$ ist. Ein einzelnes a_n nennt man das *n-te Folgenglied*.

Bemerkung. Aus rein rechnerischen Gründen ist es manchmal vorteilhafter, in dieser Definition anstelle von $\mathbb{N}$ die Menge $\mathbb{N} \cup \{0\}$ zu verwenden, also ein *nulltes Folgenglied* a_0

zuzulassen. Für das weitere Vorgehen spielt es keine Rolle, mit welcher dieser Definitionen wir arbeiten.

Beispiele.
Beispiele für Folgen sind

1. $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$
2. $\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}} = 0, \frac{3}{4}, \frac{8}{9}, \frac{15}{16}, \ldots$
3. $(n)_{n\in\mathbb{N}} = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$
4. $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}} = -1, 1, -1, 1, -1 \ldots$
5. $\left(\frac{3n+4n^2}{2n+2n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \frac{7}{4}, \frac{11}{6}, \frac{15}{8}, \frac{19}{10}, \ldots$

Die Beispielfolgen sind alle *explizit*. Das bedeutet, dass wir für jede dieser Folge eine genaue Abbildungsvorschrift $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ kennen, die jeder natürlichen Zahl ein Folgenglied zuordnen. Zum Beispiel wissen wir für die Folge $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sofort, dass das 157. Folgenglied gleich $(-1)^{157} = -1$ ist.

3.1.1 Wachstum und Zerfall

Viele Wachstums- und Zerfallsvorgänge lassen sich durch Folgen ausdrücken. Hier unterscheidet man zwischen *linearem Wachstum* und *exponentiellem Wachstum* bzw. zwischen *linearem Zerfall* und *exponentiellem Zerfall*:
Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, für die gilt $a_{n+1} = a_n + c$ mit einer konstanten reellen Zahl c, so spricht man von *linearem Wachstum* für $c > 0$ und von *linearem Zerfall* für $c < 0$. Zum Beispiel wachsen die Folgenglieder der Folge $(a_n) = n$ linear mit der Konstanten $c = 1$.
Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, für die gilt $a_{n+1} = a_n \cdot c$ mit einer konstanten reellen Zahl $c > 0$, so spricht man von *exponentiellem Wachstum* für $c > 0$ und von *exponentiellem Zerfall* für $c < 1$. Zum Beispiel wachsen die Folgenglieder der Folge $(a_n) = 2^n$ exponentiell mit einer Konstanten $c = 2$.
Beide Arten von Wachstum und Zerfall treten in der Natur auf.

Beispiele.

1. Der Durchmesser eines Baumstammes wächst ungefähr linear. Dies kann man zum Beispiel daran erkennen, dass die Jahresringe im Stamm ungefähr den gleichen Abstand zueinander haben.
2. Menschliche Kopfhaare wachsen ungefähr linear, nämlich ungefähr einen Zentimeter pro Monat.
3. Bakterien vermehren sich exponentiell.
4. Radioaktiver Zerfall wie in Problem 1 ist exponentiell.

Oft sind die Folgen, die ein Wachstum oder einen Zerfall beschreiben, nicht explizit gegeben.

Beispiel. Wir wollen die durschnittliche Population einer Bakterienkultur in einem Experiment durch eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ modellieren, und zwar so, dass a_n die (ungefähre) Anzahl an Bakterien nach n Tagen darstellt. Wir nehmen an, dass anfänglich 5000 Bakterien vorhanden sind, die sich mit einer täglichen Rate von 4% vermehren, d. h. jeden Tag kommen 4% der Population vom Vortag hinzu. Außerdem sterben durch äußere Einflüsse täglich 100 Bakterien. Damit ergibt sich für die Anzahl a_{n+1} an Bakterien nach $n+1$ Tagen der folgende Zusammenhang mit der Anzahl a_n an Bakterien am Vortag:

$$a_{n+1} = 1,04 \cdot a_n - 100$$

Diese Folge ist nicht explizit gegeben, sondern *rekursiv*. Wir haben nicht wie in den obigen Beispielen eine explizite Formel für das n-te Folgenglied, sondern können ein Folgenglied immer nur aus den vorhergehenden Gliedern berechnen. Der Begriff *rekursiv* stammt vom lateinischen Begriff *recurrere*, was soviel heißt wie „zurücklaufen".
Die Formel $a_{n+1} = 1,04 \cdot a_n - 100$ gibt uns eine Vorschrift, wie wir aus a_n das nächste Folgenglied a_{n+1} berechnen können. Aus der Kenntnis von $a_0 = 5000$ lässt sich so jedes beliebige Folgenglied berechnen. Für diese Folge können wir aber auch eine explizite Darstellung ermitteln: Es gilt

$$\begin{aligned}
a_0 &= 5000\\
a_1 &= 1,04 \cdot 5000 - 100\\
a_2 &= 1,04 \cdot (1,04 \cdot 5000 - 100) - 100 = 1,04^2 \cdot 5000 - 100 \cdot (1 + 1,04)\\
a_3 &= 1,04 \cdot (1,04^2 \cdot 5000 - 100 \cdot (1 + 1,04)) - 100 = 1,04^3 \cdot 5000 - 100 \cdot (1 + 1,04 + 1,04^2)\\
&\vdots\\
a_n &= 1,04^n \cdot 5000 - 100 \cdot (1 + 1,04 + \ldots + 1,04^{n-1}).
\end{aligned}$$

Diese explizite Formel erfüllt tatsächlich die Rekursionsbedingung

$$a_{n+1} = 1,04 \cdot a_n - 100$$

(Nachrechnen!) sowie die Anfangsbedingung $a_0 = 5000$ und beschreibt damit die gesuchte Folge. Später werden wir sehen, dass sich auch diese explizite Formel noch einmal vereinfachen lässt. Es gilt nämlich

$$a_n = 1,04^n \cdot 5000 - 100 \cdot \frac{1,04^n - 1}{1,04 - 1} = 2500 \cdot (1,04^n + 1).$$

3.1.2 Konvergenz von Folgen

Für Folgen untersuchen wir oft, wie sich die Folgenglieder langfristig verhalten, das heißt, ob sie einen *Grenzwert* haben. Zum Beispiel werden die Folgenglieder der Folge $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$

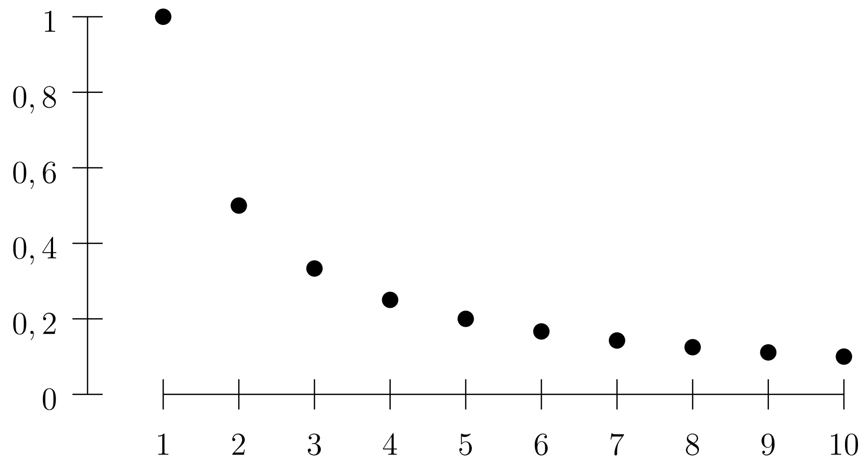


Abbildung 3.1 Die ersten zehn Folgenglieder der Folge $(\frac{1}{n})$

immer kleiner. Wir sagen, dass eine Folge reeller Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *gegen einen Grenzwert a konvergiert*, wenn wir für jeden beliebigen Abstand $\varepsilon > 0$ ein Folgenglied finden, so dass alle höheren Folgenglieder maximal diesen Abstand ε zu a haben:

Definition. Eine Folge reeller Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert gegen einen Grenzwert a*, wenn für jede positive reelle Zahl $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n \geq N(\varepsilon)$ gilt $|a_n - a| < \varepsilon$. Konvergiert eine Folge reeller Zahlen (a_n) gegen einen Grenzwert a, so schreiben wir $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Hierbei steht das Zeichen „∞" für „Unendlich". Das Zeichen lim steht für den Begriff Limes, der Grenzwert bedeutet.

Natürlich konvergiert nicht jede Folge.

Definition. Eine Folge, die nicht konvergiert, heißt *divergent*. Eine Folge (a_n) reeller Zahlen heißt *bestimmt divergent gegen* $+\infty$, wenn es für jede Zahl $c \in \mathbb{R}$ eine Zahl $N(c) \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $n \geq N(c)$ gilt $a_n > c$. Man schreibt in diesem Fall $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$. Analog heißt eine Folge (a_n) reeller Zahlen *bestimmt divergent gegen* $-\infty$, wenn es für jede Zahl $c \in \mathbb{R}$ eine Zahl $N(c) \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $n \geq N(c)$ gilt $a_n < c$. In diesem Fall schreibt man auch $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Beispiele.

1. Schauen wir uns die Folge $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ an. Wir haben bereits gesehen, dass die Folgenglieder immer kleiner werden, das heißt ihr Abstand zu 0 immer kleiner wird. Für diese Beispielfolge gibt es für jeden beliebigen Abstand $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $N(\varepsilon)$, die größer ist als $\frac{1}{\varepsilon}$. Das bedeutet, dass das $N(\varepsilon)$-te Folgenglied $\frac{1}{N(\varepsilon)}$ kleiner als ε ist und damit einen Abstand zu 0 hat, der kleiner als ε ist. Für alle weiteren Folgenglieder a_n, $n \geq N(\varepsilon)$ gilt ebenfalls die Ungleichung
$$|a_n - 0| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N(\varepsilon)} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon.$$

Damit konvergiert die Folge $\frac{1}{n}$ gegen den Grenzwert 0.

Ist $\varepsilon > 0$, so nennt man die Menge aller reeller Zahlen, die einen Abstand kleiner als ε zu 0 haben, auch *ε-Umgebung von 0*. Wir haben gerade gezeigt, dass für jedes $\varepsilon > 0$ fast alle Folgenglieder der Folge $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$, nämlich alle Folgenglieder mit $n \geq N(\varepsilon)$, in einer ε-Umgebung von 0 liegen.

2. Auch die Folge $(a_n) = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent, es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$. Dies können wir ebenfalls mithilfe der Definition der Konvergenz zeigen: Ist $\varepsilon > 0$, so gibt es eine natürliche Zahl $N(\varepsilon)$, die größer ist als $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Damit folgt für $n \geq N(\varepsilon)$

$$\left|\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) - 1\right| = \left|\frac{1}{n^2}\right| = \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{N(\varepsilon)^2} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon.$$

3. Die Folge $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist bestimmt divergent gegen ∞. Das liegt am linearen Wachstum der Folgenglieder: Für jede reelle Zahl c gibt es eine natürliche Zahl $N(c)$, die gößer als c ist. Damit gilt für alle $n \geq N(c)$ auch $n > c$.

4. Die Folge $a_n = (-1)^n$ ist weder konvergent noch bestimmt divergent gegen $+\infty$ oder $-\infty$. Unendlich viele Folgenglieder sind gleich 1, genauso sind unendlich viele Folgenglieder gleich -1. Es gibt keine ε-Umgebung um 1 oder -1, in der fast alle Folgenglieder sind und die Folge wird nie größer als 1 und nie kleiner als -1.

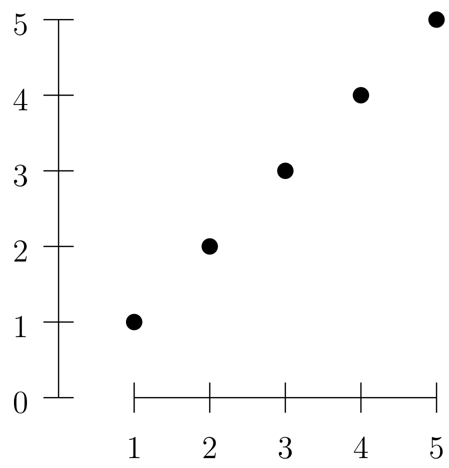


Abbildung 3.2 Die ersten fünf Folgenglieder der Folge n

Bemerkung. Folgen, die gegen den Grenzwert 0 konvergieren, heißen auch *Nullfolgen.*

Biologisches Beispiel

Beginnen wir mit Problem 1. Nach einer Halbwertszeit ist nur noch die Hälfte des Stoffes Technetium vorhanden. Nach zwei Halbwertszeiten hat sich die Stoffmenge erneut

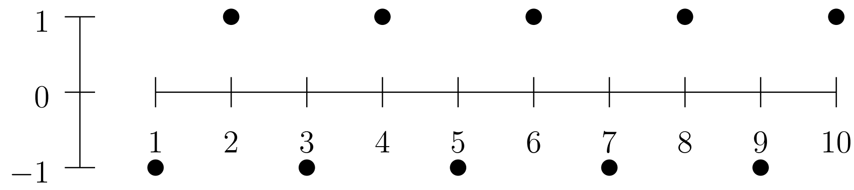


Abbildung 3.3 Die ersten zehn Folgenglieder der Folge $(-1)^n$

halbiert, d. h. insgesamt ist nur noch $\frac{1}{4}$ des Stoffes vorhanden. Die Tabelle zeigt diesen Zusammenhang:

Halbwertszeiten	1	2	3	4	...	n	...
Stoffmenge	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	...	$\frac{1}{2^n}$	...

Diese Tabelle stellt eine Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ mit $\varphi(n) = \frac{1}{2^n}$ und damit die Folge $(\frac{1}{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ dar.
Unsere ursprüngliche Frage war, wieviel radioaktive Substanz langfristig im Körper bleibt. Wir wollen also klären, wie der Grenzwert der Folge ist. Auch bei dieser Folge werden die Folgenglieder in jedem Schritt kleiner, ihr Abstand zu 0 also immer kleiner. Zum Beispiel sind ab dem zweiten Folgenglied alle Folgenglieder $a_n = \frac{1}{2^n}$ mit $n \geq 2$ kleiner als $\frac{1}{3}$. Ab dem fünften Folgenglied sind alle Folgenglieder a_n mit $n \geq 5$ kleiner als $\frac{1}{20}$, und ab dem zehnten Folgenglied sind alle Folgenglieder a_n mit $n \geq 10$ kleiner als $\frac{1}{1000}$. Um zu zeigen, dass diese tatsächlich gegen den Grenzwert 0 konvergiert, müsste man theoretisch aber für jedes $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $N(\varepsilon)$ finden, so dass für alle $n \geq N(\varepsilon)$ die Folgenglieder a_n einen Abstand kleiner als ε zu 0 haben. Der Vollständigkeit halber geben wir dieses hier an:
Ist $\varepsilon > 0$ beliebig, so gibt es immer ein $N(\varepsilon)$ mit $1 < \varepsilon \cdot 2^N(\epsilon)$ (nämlich zum Beispiel die kleinste natürliche Zahl größer als $\frac{\ln(\frac{1}{\varepsilon})}{\ln 2}$). Damit gilt in diesem Fall für $n \geq N(\varepsilon)$

$$|a_n - a| = \left|\frac{1}{2^n} - 0\right| = \left|\frac{1}{2^n}\right| = \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^{N(\varepsilon)}} < \frac{\varepsilon \cdot 2^{N(\varepsilon)}}{2^{N(\varepsilon)}} = \varepsilon.$$

Deswegen können wir davon ausgehen, dass langfristig keine radioaktive Substanz mehr im Körper verbleibt. (Wir können natürlich nicht davon ausgehen, dass ein Mensch unendlich lange lebt. Radioaktive Strahlung ist jedoch nur ab einer bestimmten Konzentration messbar, die sehr schnell unterschritten wird.)

Bemerkung. Wir haben eben gezeigt, dass die Folge $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. Ganz ähnlich lässt sich zeigen, dass die Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, falls $|q| < 1$.

3.1.3 Grenzwertsätze

Oft ist es aufwendig, für eine konkrete Folge den Grenzwert allein mithilfe der Definition der Konvergenz zu bestimmen und die Konvergenz nachzuweisen. Hilfreich sind deswegen die folgenden *Grenzwertsätze*:

Satz. *Seien (a_n), (b_n) konvergente Folgen reeller Zahlen mit Grenzwerten $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Sei außerdem $c \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl. Dann gilt*

- *Die Summe $(a_n + b_n)$ ist konvergent mit Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$.*
- *Die Differenz $(a_n - b_n)$ ist konvergent mit Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b$.*
- *Die Folge (ca_n) ist konvergent mit Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty}(ca_n) = ca$.*
- *Das Produkt $(a_n \cdot b_n)$ ist konvergent mit Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$.*
- *Sind alle Folgenglieder b_n der Folge (b_n) ungleich null und gilt zusätzlich $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n) \neq 0$, so ist auch der Quotient $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ konvergent mit Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$.*

Beispiel. Schauen wir uns die Folge $\left(\frac{3n+4n^2}{2n+2n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ an. Mithilfe der Grenzwertsätze gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+4n^2}{2n+2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+4n}{2+2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3}{n}+4}{\frac{2}{n}+2} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n}+4\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}+2\right)}$$
$$= \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} 4}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} 2} = \frac{0+4}{0+2} = 2$$

3.1.4 Monotonie und Beschränktheit von Folgen

Gerade in der Biologie interessiert man sich oft auch für das Verhalten der einzelnen Folgenglieder. Werden sie in jedem Schritt größer? Oder verringern sie sich in jedem Schritt? Gibt es Grenzen, die die Folgenglieder nicht überschreiten? Die mathematischen Begriffe hierfür sind wie folgt defininiert:

Definition. Eine Folge reeller Zahlen (a_n) heißt *monoton wachsend*, wenn die einzelnen Folgenglieder in jedem Schritt gleich bleiben oder größer werden, das heißt, wenn $a_{n+1} \geq a_n$ für alle Folgenglieder und damit für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Analog heißt eine Folge reeller Zahlen (a_n) *monoton fallend*, wenn die einzelnen Folgenglieder in jedem Schritt gleich bleiben oder kleiner werden, das heißt wenn $a_{n+1} \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Ist jedes Folgenglied a_{n+1} echt größer als sein Vorgänger, d. h. $a_{n+1} > a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so heißt diese Folge *streng monoton wachsend*. Analog heißt (a_n) *streng monoton fallend*, falls $a_{n+1} < a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Eine Folge heißt *monoton*, wenn sie monoton wachsend oder monoton fallend ist.

Bemerkung. Beachte, dass $a_{n+1} \leq a_n$ äquivalent zu $a_{n+1} - a_n \leq 0$ ist etc.

Beispiele.

- Die Folge $a_n := \frac{1}{n}$ ist streng monoton fallend. Es gilt nämlich $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n-(n+1)}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0$, d. h. $a_{n+1} < a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

- Die Folge $a_n = \begin{cases} n & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ n-1 & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$

  ist von der Form $1, 1, 3, 3, 5, 5, \ldots$. Sie ist monoton steigend, aber nicht streng monoton steigend.

- Die Folge $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ ist weder montonon steigend noch monoton fallend.

Definition. Eine Folge reeller Zahlen (a_n) heißt *nach oben beschränkt*, falls es eine reelle Zahl $C \in \mathbb{R}$ gibt, die größer als alle Folgenglieder ist, d. h. falls $a_n \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Analog heißt eine Folge reeller Zahlen *nach unten beschränkt*, falls es eine reelle Zahl $c \in \mathbb{R}$ gibt, die kleiner ist als alle Folgenglieder, d. h. falls $a_n \geq c$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Eine Folge heißt *beschränkt*, wenn sie nach oben und nach unten beschränkt ist.

Beispiele.

- Die Folge $a_n = \frac{1}{n}$ ist nach oben beschränkt. Eine mögliche Schranke ist $C = 1$. Das erste Folgenglied a_1 ist gleich 1, da die Folge streng monoton fallend ist, sind alle weiteren Folgenglieder kleiner als $C = 1$. Sie ist ebenfalls nach unten beschränkt. Eine untere Schranke ist hier z. B. 0, denn alle Folgenglieder sind positiv.

- Die Folge $a_n = n$ ist ebenfalls nach unten beschränkt. Eine mögliche untere Schranke ist hier ebenfalls 0, da alle Folgenglieder positiv sind. Sie ist jedoch nicht nach oben beschränkt, da sie bestimmt gegen ∞ divergiert.

Jede konvergente Folge ist beschränkt. Das ist eine *notwendige Bedingung für die Konvergenz einer Folge.* Zum Beispiel kann die Folge $a_n = n$ nicht konvergieren, da sie nicht beschränkt ist. Andererseits gilt der folgende

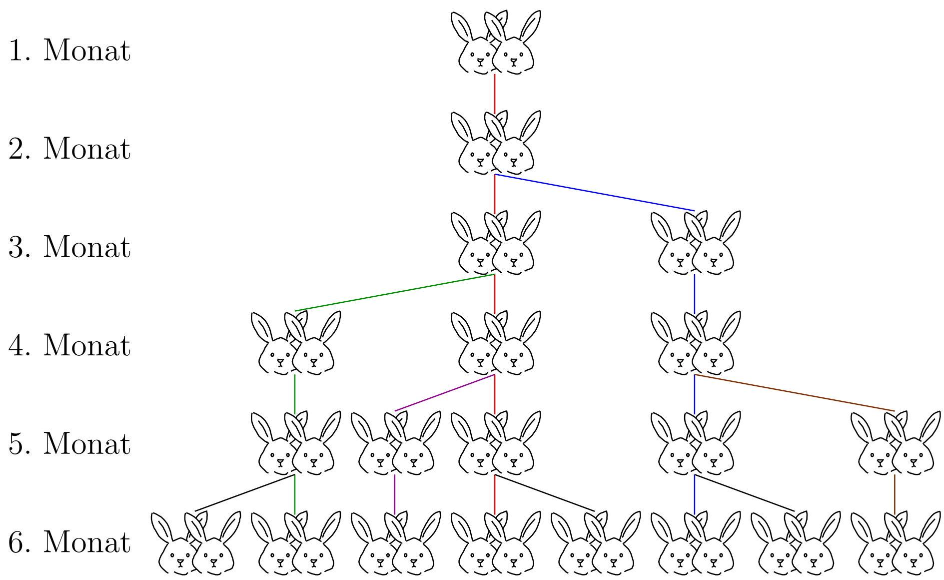
Satz. *Eine beschränkte monotone Folge ist konvergent.*

Daraus folgt zum Beispiel auch sofort, dass die monoton fallende, beschränkte Folge $a_n = \frac{1}{n}$ konvergiert.

Bemerkung. An dieser Stelle ist es wichtig, zwischen *notwendigen* und *hinreichenden* Bedingungen für die Konvergenz zu unterscheiden. Wir haben schon gesehen, dass die Beschränktheit einer Folge eine notwendige Bedingung für die Konvergenz ist. Wenn eine Folge nicht beschränkt ist, kann sie auch nicht konvergieren. Ist von einer Folge bekannt, dass sie beschränkt und monoton ist, dann wissen wir auch sofort, dass diese Folge konvergiert. Beschränktheit und Monotonie einer Folge sind im Zusammenspiel eine hinreichende Bedingung für die Konvergenz. Es gibt jedoch beschränkte Folgen, die nicht monoton sind, aber trotzdem konvergieren. Ein Beispiel hierfür ist die Folge $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$, ihr Grenzwert ist 0. Damit eine Folge konvergiert, ist es nicht notwendig, dass sie beschränkt und monoton ist.

Exkurs: Fibonacci-Zahlen

Die *Fibonacci-Folge* ist eine berühmte Zahlenfolge. Ihre einzelnen Folgenglieder heißen *Fibonacci-Zahlen*. Sie kommen häufig in der Natur vor; und doch ist ihre genaue Rolle in vielen Bereichen noch nicht geklärt. Am folgenden klassischen Gedankenexperiment erklären wir deren Definition:
Angenommen wir setzen ein einzelnes frisch geworfenes Kaninchenpaar, also ein Männchen und ein Weibchen, in einen geschlossenen Raum. Wir gehen davon aus, dass ein Kaninchenpaar immer erst zwei Monate nach seiner Geburt geschlechtsreif ist und dass es ab dann jeden Monat ein neues Kaninchenpaar wirft. Zu guter Letzt nehmen wir an, dass Kaninchen nie sterben. Das sind die Annahmen unseres Modells, biologisch ist das natürlich unsinnig. Wir interessieren uns nun für die Anzahl der Kaninchenpaare im n-ten Monat. Diese Anzahl ist per Definition die *n-te Fibonacci-Zahl* f_n. Die erste Fibonaccizahl f_1 ist 1, denn im ersten Monat gibt es erst ein Kaninchenpaar, das gerade erst geboren wurde und deshalb auch noch nicht geschlechtsreif ist, die zweite Fibonacci-Zahl f_2 ist ebenfalls 1 (das Paar ist immer noch nicht geschlechtsreif). Die dritte Fibonaccizahl f_3 ist $1+1=2$, da unser Ausgangskaninchenpaar nach zwei Monaten Existenz geschlechtsreif ist und ein zweites Kaninchenpaar geworfen hat. Die vierte Fibonacci-Zahl f_4 ist nun $2+1=3$ (das Ausgangskaninchenpaar hat wieder ein neues Paar geworfen, das andere Paar muss noch einen Monat warten, bis es geschlechtsreif ist), die fünfte Fibonacci-Zahl f_5 ist $3+2=5$ (das Ausgangskaninchenpaar wirft ein neues Paar und das im dritten Monat geworfene Paar ist auch schon geschlechtsreif), die sechste Fibonacci-Zahl f_6 ist $5+3=8$ usw. Grafisch können wir das Verhalten der Kaninchen folgendermaßen darstellen:



Es handelt sich hier wiederum um eine *rekursiv definierte Folge*. Wir können das n-te Folgenglied immer nur aus den vorhergehenden Gliedern berechnen. Die rekursive

Angabe der Fibonacci-Zahlen lautet

$$f_1 = 1,\ f_2 = 1,\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \text{ für alle } n \in \mathbb{N}. \qquad (*)$$

Man beachte, dass wir hier nicht nur das erste Folgenglied f_1 mitangegeben haben, sondern auch f_2. Die rekursive Formel $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ greift schließlich auf die letzten beiden vorangegangenen Folgenglieder zurück. Wie sollte man sonst f_2 ermitteln?
Genau genommen müssen wir diese Aussage $(*)$ noch beweisen, denn wir haben die n-te Fibonacci-Zahl f_n ja als die Anzahl der Kaninchenpaare im n-ten Monat definiert und nicht etwa durch $(*)$.

Beweis: Wir haben schon gesehen, dass im ersten Monat ein Kaninchenpaar lebt und im zweiten Monat ebenfalls nur ein Paar vorhanden ist. D. h. $f_1 = 1$ und $f_2 = 1$. Sei nun $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl. Wir schauen uns an, wieviele Kaninchenpaare im $(n+1)$-ten Monat leben: Nach Definition sind dies f_{n+1} Kaninchenpaare. Davon sind die Paare geschlechtsreif, die schon im Monat davor, also im n-ten Monat, gelebt haben. Nach Definition sind dies genau f_n Kaninchenpaare. Jedes dieser Paare wirft also im $n+2$-ten Monat ein weiteres Paar, außerdem überleben alle f_{n+1} Kaninchenpaare aus dem $n+1$-ten Monat. Insgesamt gibt es somit im $n+2$-ten Monat $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ Kaninchenpaare. □

Fibonacci-Zahlen treten häufig in der Natur auf.

Abbildung 3.4 Die Anzahl der Blüten einer Rose ist häufig eine Fibonacci-Zahl.

Abbildung 3.5 Die Anzahl der Blätter eines Kleeblattes ist meistens drei, eine Fibonacci-Zahl.

Die Spelzen am Stamm einer Ananas sind in Spiralen angeordnet. Sie bilden sowohl Links- als auch Rechtsspiralen. Greifen wir uns eine Rechts- und eine Linksspirale heraus und verfolgen deren Verlauf, so können wir feststellen, dass sie sich nach jeweils 5 bzw. 13 Spelzen wieder treffen, je nachdem ob wir in der Links- oder Rechtsspirale zählen. Beides sind Fibonacci-Zahlen. Dieses Phänomen tritt nicht nur bei der Ananas auf, sondern auch bei vielen anderen spiralförmigen Anordnungen in der Pflanzenwelt. Auch bei den Röhrenblüten einer Sonnenblume oder den Schuppen eines Kiefernzapfens ist es spannend, selbst nachzuzählen. Die Wissenschaft, die sich damit beschäftigt, ist die Phyllotaxis.

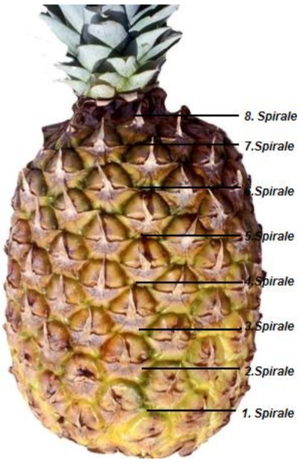


Abbildung 3.6

Abbildung 3.7

3.2 Reihen

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit *Reihen*. Reihen sind Folgen von Summen, wobei jedes Folgenglied aus einem Summanden mehr besteht als das vorangegangene Folgenglied. Für diese Summen benutzen wir die folgende verkürzende Schreibweise:
Wir schreiben

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

für die Summe $a_1 + \ldots + a_n$, wobei die Summanden a_i vom Index i abhängige reelle Zahlen sind. Diese Schreibweise nennt man *Reihenschreibweise*.

Beispiel. Es ist

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{1}{2^i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n}.$$

Definition. Sei a_i eine Folge reeller Zahlen. Eine *Reihe* ist eine Folge s_n von Summen der Form

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i.$$

Oft schreiben wir auch $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i$ für die Reihe, obwohl wir tatsächlich die Partialsummenfolge $\left(\sum\limits_{i=0}^{n} a_i\right)_{n\in\mathbb{N}} = (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ meinen. Die Zahlen a_i heißen *Reihenglieder*. Es ist a_i das *i-te Reihenglied* der Reihe $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i$.
Eine Reihe heißt *konvergent*, wenn die Folge der *Partialsummen* s_n konvergiert. In diesem Fall schreibt man

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i := \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right) = \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Beispiel. Für die Reihe $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i}$ erhalten wir die folgenden Partialsummen:

$$\begin{array}{lclclclcl}
s_0 & = & 1 & & & & & & \\
s_1 & = & 1+\frac{1}{2} & = & s_0+\frac{1}{2} & = & 1 + \frac{1}{2} & = & 2-\frac{1}{2} \\
s_2 & = & 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4} & = & s_1+\frac{1}{4} & = & \left(2-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4} & = & 2-\frac{1}{4} \\
s_3 & = & 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8} & = & s_2+\frac{1}{8} & = & \left(2-\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{8} & = & 2-\frac{1}{8} \\
s_4 & = & 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16} & = & s_3+\frac{1}{16} & = & \left(2-\frac{1}{8}\right) + \frac{1}{16} & = & 2-\frac{1}{16} \\
\vdots & & & & & & & & \\
s_n & = & 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n} & = & s_{n-1}+\frac{1}{2^n} & = & \left(2-\frac{1}{2^{n-1}}\right) + \frac{1}{2^n} & = & 2-\frac{1}{2^n}
\end{array}$$

Für den Grenzwert der Partialsummen gilt

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(2 - \frac{1}{2^n}\right) = 2.$$

Die Reihe $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ konvergiert folglich und es gilt $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 2$.

Bemerkung. Damit eine Reihe $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i$ überhaupt konvergieren kann, ist notwendig, dass die Folge a_i der Reihenglieder eine Nullfolge ist.

Aus den Grenzwertsätzen für Folgen folgt weiterhin folgender

Satz. *Seien $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i$, $\sum\limits_{i=0}^{\infty} b_i$ konvergente Reihen mit Grenzwerten $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i = a$ und $\sum\limits_{i=0}^{\infty} b_i = b$. Sei außerdem $c \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl. Dann gilt*

- *Die Reihe $\sum\limits_{i=0}^{\infty}(a_i + b_i)$ ist konvergent mit Grenzwert $\sum\limits_{i=0}^{\infty}(a_i + b_i) = a + b$.*
- *Die Reihe $\sum\limits_{i=0}^{\infty}(a_i - b_i)$ ist konvergent mit Grenzwert $\sum\limits_{i=0}^{\infty}(a_i - b_i) = a - b$.*
- *Die Reihe $\sum\limits_{i=0}^{\infty} ca_i$ ist konvergent mit Grenzwert $\sum\limits_{i=0}^{\infty} ca_i = ca$.*

Biologisches Beispiel

Widmen wir uns nun Problem 2. Wir erinnern uns, dass innerhalb einer Halbwertzeit die Hälfte aller Technetiumatome zerfallen ist. Innerhalb von zwei Halbwertszeiten sind dann $\frac{1}{2} + \frac{1}{4}$ der Technetiumatome zerfallen, innerhalb von drei Halbwertszeiten $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$

usw. Der Anteil der zerfallenen Technetiumatome nach n Halbwertzeiten stellt also eine Folge von Partialsummen

$$s_n := \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}}_{n \text{ Summanden}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2^i}$$

dar; wir erhalten erneut eine Reihe. Der Grenzwert dieser Reihe ist gleich 1, denn wir haben im obigen Beispiel bereits den Grenzwert der Reihe $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 2$ berechnet, unsere Reihe hier ist die gleiche Reihe ohne den ersten Summanden 1. Dass der Grenzwert dieser Folge gleich 1 ist, bedeutet für den Sachverhalt, dass auf lange Sicht alle Technetiumatome zerfallen.

3.2.1 Geometrische Reihe

Unsere Beispielreihe war ein Spezialfall der sogenannten *geometrischen Reihe*. Allgemein definieren wir für eine beliebige reelle Zahl q die geometrische Reihe

$$\sum_{i=0}^{\infty} q^i = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \ldots$$

Damit meinen wir natürlich wiederum tatsächlich die zugehörige Partialsummenfolge

$$\left(\sum_{i=0}^{n} q^i\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

In unserem Beispiel war $q = \frac{1}{2}$ und die Reihe war konvergent. Im Allgemeinen ist die geometrische Reihe nicht immer konvergent. Schon $q = 1$ liefert ein Gegenbeispiel, denn für $q = 1$ erhalten wir als Partialsummenfolge

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} 1^i = \underbrace{1 + 1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ Summanden}} = n.$$

Dass die Folge $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergiert, sondern gegen ∞ divergiert, haben wir schon gesehen.
Um für ein allgemeines $q \in \mathbb{R}$ das Verhalten der Reihe $\sum\limits_{i=0}^{\infty} q^i$ zu untersuchen, schauen wir uns die Partialsummen $s_n = \sum\limits_{i=0}^{n} q^i$ noch einmal genauer an. Den Fall $q = 1$ haben wir schon behandelt. Wir lassen ihn hier außer Acht, um durch $1 - q$ teilen zu dürfen. Es gilt für $q \neq 1$

$$\begin{array}{rrcl}
 & s_n & = & 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-1} + q^n \\
 & q \cdot s_n & = & q + q^2 + q^3 + q^4 + \cdots + q^n + q^{n+1} \\
\Rightarrow & s_n - q \cdot s_n & = & 1 - q^{n+1} \\
\Rightarrow & (1-q) \cdot s_n & = & 1 - q^{n+1} \\
\Rightarrow & s_n & = & \frac{1-q^{n+1}}{1-q}
\end{array}$$

Unter Beachtung von $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$ für $|q| < 1$ erhalten wir den folgenden

Satz. *Die geometrische Reihe* $\sum\limits_{i=0}^{\infty} q^i$ *konvergiert für* $|q| < 1$ *gegen den Grenzwert* $\frac{1}{1-q}$. *Für* $|q| \geq 1$ *ist die Reihe divergent.*

Beispiel.

1. Die Reihe $\sum\limits_{i=0}^{\infty} (\frac{1}{3})^i$ konvergiert mit dem Grenzwert $\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$.
2. Die Reihe $\sum\limits_{i=0}^{\infty} (-\frac{1}{3})^i$ konvergiert mit dem Grenzwert $\frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$.
3. Die Reihe $\sum\limits_{i=0}^{\infty} (3)^i$ konvergiert nicht.
4. Die Reihe $\sum\limits_{i=0}^{\infty} (-3)^i$ konvergiert nicht.

Bemerkung. Die Zusammenfassung von $1 + q + q^2 + \cdots + q^n$ zu $\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ ist nicht nur hier ein nützlicher Trick. Wir haben ihn auch schon genutzt, um eine explizite Formel für eine Folge mit Rekursionsgleichung $a_{n+1} = a \cdot a_n + b$ herzuleiten. In den Aufgaben werden wir das noch einmal üben.

3.2.2 Konvergenzsätze für Reihen

Oft ist es nicht so einfach, für eine gegebene Reihe die Konvergenz und gegebenenfalls den Grenzwert mithilfe der Partialsummen zu bestimmen. Hilfreich sind hier *Konvergenzsätze für Reihen.* Zum Beispiel gilt das

Satz. *(Majorantenkriterium) Sei* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ *eine konvergente Reihe mit Summanden* $c_n > 0$. *Ist* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *eine Reihe, so dass für die Beträge* $|a_n|$ *gilt:* $|a_n| < c_n$ *für alle* n, *so konvergiert* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *ebenfalls.*

Beispiel.

1. Die Reihe $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{1}{3^i \cdot (i+1)}$ konvergiert, da $\left|\frac{1}{3^i \cdot (i+1)}\right| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^i$ für alle $i \geq 0$ und die geometrische Reihe $\sum\limits_{i=0}^{\infty} (\frac{1}{3})^i$ konvergiert.
2. Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{3n^2+4}\right)^n$ konvergiert, da $\left|\left(\frac{2n}{3n^2+4}\right)^n\right| = \left(\frac{2}{3n+\frac{4}{n}}\right)^n \leq \left(\frac{2}{3n}\right)^n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und die geometrische Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (\frac{2}{3})^n$ konvergiert.

Das Majorantenkriterium erlaubt den Schluss auf die Konvergenz einer Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$, wenn wir eine konvergente Vergleichsreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ finden, deren Glieder c_n jeweils mindestens genauso groß sind wie die Beträge $|a_n|$ der Glieder der Reihe, die wir untersuchen

wollen. Es handelt sich hierbei um ein hinreichendes Kriterium für die Konvergenz einer Reihe.
Wir wissen bereits, dass die geometrische Reihe $\sum\limits_{i=0}^{\infty} q^i$ für $|q| < 1$ konvergiert. Mithilfe des Majorantenkriteriums kann man daraus ein weiteres sehr nützliches Kriterium herleiten:

Satz. *(Quotientenkriterium) Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe, wobei $a_n \neq 0$ für alle n.*
Wenn es eine Zahl $q < 1$ gibt, so dass

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q < 1$$

für alle n gilt, so konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.
Gilt hingegen

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$$

für alle n, so divergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.

Beispiel.
1. Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{4n}{3^n}$ konvergiert, da $\left|\frac{\frac{4(n+1)}{3^{n+1}}}{\frac{4n}{3^n}}\right| = \frac{n+1}{3n} \leq \frac{2}{3} < 1$ für alle $n \geq 0$.

2. Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{4n}$ divergiert, da $\left|\frac{\frac{3^{n+1}}{4(n+1)}}{\frac{3^n}{4n}}\right| = \frac{3n}{n+1} \geq \frac{3}{2} > 1$ für alle $n \geq 0$.

Das Quotientenkriterium liefert sowohl ein hinreichendes Kriterium für die Konvergenz als auch ein hinreichendes Kriterium für die Divergenz einer Reihe mit von Null verschiedenen Gliedern a_n. Es reicht zu wissen, dass eine Zahl $q < 1$ existiert, so dass für die aufeinanderfolgenden Reihenglieder $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q < 1$ gilt, um auf die Konvergenz der Reihe zu schließen. Andererseits reicht es zu wissen, dass für aufeinanderfolgende Reihenglieder $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ gilt, um auf die Divergenz der Reihe zu schließen.
Tatsächlich gilt in beiden Fällen ein noch stärkeres Kriterium. Ob eine Reihe konvergiert oder nicht, hängt nicht von den ersten Reihengliedern ab. Es genügt die Reihenglieder a_n erst ab einem gewissen Index n_0 zu untersuchen. Sind die oben genannten Bedingungen erst ab einem Index $n_0 \in \mathbb{N}$ erfüllt, dürfen wir trotzdem auf Konvergenz bzw. Divergenz schließen.

Beispiel.
1. Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{6}{7}\right)^n \cdot 4n$ konvergiert, da $\left|\frac{\left(\frac{6}{7}\right)^{n+1} \cdot 4(n+1)}{\left(\frac{6}{7}\right)^n \cdot 4n}\right| = \frac{6}{7} \cdot \frac{n+1}{n} \leq \frac{48}{49} < 1$ für alle $n \geq 7$.

2. Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{7}{6}\right)^n \cdot \frac{1}{4n}$ divergiert, da $\left|\frac{\left(\frac{7}{6}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{4(n+1)}}{\left(\frac{7}{6}\right)^n \cdot \frac{1}{4n}}\right| = \frac{7}{6} \cdot \frac{n}{n+1} \geq \frac{48}{49} > 1$ für alle $n \geq 7$.

Bemerkung. (Warnung) Wenn wir über eine Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ nur $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ für alle n wissen, können wir keine Aussage zum Konvergenzverhalten der Reihe machen. Die Reihe kann konvergieren oder divergieren. Ein Beispiel für eine solche divergente Reihe ist die sogenannte *harmonische Reihe* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Sie erfüllt zwar $\left|\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}\right| = \frac{n}{n+1} < 1$ für alle n, aber konvergiert nicht. Die Divergenz ergibt sich aus folgender Abschätzung für die Partialsummen $s_m = \sum\limits_{n=1}^{m} \frac{1}{n}$:

$$\begin{aligned} s_{2^n} - 1 = \sum_{n=2}^{2^n} \frac{1}{n} &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \\ &> \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \\ &= 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \cdots + 2^{n-1}\frac{1}{2^n} = n \cdot \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Das zeigt, dass die Partialsummen s_{2^n} beliebig groß werden. Die Folge der Partialsummen ist also nicht beschränkt und kann nicht konvergieren.

3.3 Zusammenfassung

Folgen

- Eine *Folge reeller Zahlen* ist eine Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ oder eine Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{R}$. Da man sich bei Folgen eigentlich nur für die Bilder $\varphi(n)$ interessiert, bezeichnet man eine solche Folge oft mit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wobei $a_n = \varphi(n)$ ist. Ein einzelnes a_n nennt man das *n-te Folgenglied.*

- Eine Folge reeller Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert gegen einen Grenzwert* a, wenn für jede positive reelle Zahl $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für alle $n \geq N(\varepsilon)$ gilt $|a_n - a| < \varepsilon$.

- Konvergiert eine Folge reeller Zahlen (a_n) gegen einen Grenzwert a, so schreiben wir $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

- Folgen, die gegen den Grenzwert 0 konvergieren, heißen auch *Nullfolgen.*

- Falls $|q| < 1$, so ist die Folge $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

- Eine Folge, die nicht konvergiert, heißt *divergent.*

- Eine Folge (a_n) reeller Zahlen heißt *bestimmt divergent gegen* $+\infty$, wenn es für jede Zahl $c \in \mathbb{R}$ eine Zahl $N(c) \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $n \geq N(c)$ gilt $a_n > c$. Man schreibt in diesem Fall $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

- Analog heißt eine Folge (a_n) reeller Zahlen *bestimmt divergent gegen* $-\infty$, wenn es für jede Zahl $c \in \mathbb{R}$ eine Zahl $N(c) \in \mathbb{R}$ gibt, so dass für alle $n \geq N(c)$ gilt $a_n < c$. In diesem Fall schreibt man auch $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

- Es seien (a_n), (b_n) zwei konvergente Folgen reeller Zahlen mit Grenzwerten $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Sei außerdem $c \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl. Dann gilt
  - Die Summe $(a_n + b_n)$ ist konvergent mit Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$.
  - Die Differenz $(a_n - b_n)$ ist konvergent mit Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = a - b$.
  - Die Folge (ca_n) ist konvergent mit Grenzwert $\lim_{n\to\infty}(ca_n) = ca$.
  - Das Produkt $(a_n \cdot b_n)$ ist konvergent mit Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$.
  - Sind alle Folgenglieder b_n der Folge (b_n) ungleich null und gilt zusätzlich $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n) \neq 0$, so ist auch der Quotient $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ konvergent mit Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$.

- Eine Folge reeller Zahlen (a_n) heißt *monoton wachsend*, wenn $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

- Eine Folge reeller Zahlen (a_n) heißt *monoton fallend*, wenn $a_{n+1} \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

- Ist jedes Folgenglied a_{n+1} echt größer als sein Vorgänger, d. h. $a_{n+1} > a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so heißt diese Folge *streng monoton wachsend*.

- Analog heißt (a_n) *streng monoton fallend*, falls $a_{n+1} < a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

- Eine Folge heißt *monoton*, wenn sie monoton wachsend oder monoton fallend ist.

- Eine Folge reeller Zahlen (a_n) heißt *nach oben beschränkt*, falls es eine reelle Zahl $C \in \mathbb{R}$ gibt, die größer als alle Folgenglieder ist, d. h. falls $a_n \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

- Analog heißt eine Folge reeller Zahlen *nach unten beschränkt*, falls es eine reelle Zahl $c \in \mathbb{R}$ gibt, die kleiner ist als alle Folgenglieder, d. h. falls $a_n \geq c$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

- Eine Folge heißt *beschränkt*, wenn sie nach oben *und* nach unten beschränkt ist.

- Jede konvergente Folge ist beschränkt.

- Jede beschränkte monotone Folge konvergiert.

Reihen

- Eine *Reihe* ist eine Folge s_n der Form $s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$ mit einer Folge a_i.
- Eine Reihe heißt *konvergent*, wenn die Folge der *Partialsummen* s_n konvergiert. In diesem Fall schreibt man
$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i := \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \right) = \lim_{n\to\infty} s_n.$$
- Damit eine Reihe $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i$ konvergieren kann, ist notwendig, dass die Folge a_i der Reihenglieder eine Nullfolge ist.
- Es seien $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i$, $\sum\limits_{i=0}^{\infty} b_i$ zwei konvergente Reihen mit Grenzwerten $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i = a$ und $\sum\limits_{i=0}^{\infty} b_i = b$. Es sei außerdem $c \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl. Dann gilt
  - Die Reihe $\sum\limits_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i)$ ist konvergent mit Grenzwert $\sum\limits_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) = a + b$.
  - Die Reihe $\sum\limits_{i=0}^{\infty} (a_i - b_i)$ ist konvergent mit Grenzwert $\sum\limits_{i=0}^{\infty} (a_i - b_i) = a - b$.
  - Die Reihe $\sum\limits_{i=0}^{\infty} ca_i$ ist konvergent mit Grenzwert $\sum\limits_{i=0}^{\infty} ca_i = ca$.
- Die geometrische Reihe $\sum\limits_{i=0}^{\infty} q^i$ konvergiert für $|q| < 1$ gegen den Grenzwert $\frac{1}{1-q}$. Für $|q| > 1$ ist die Reihe divergent.
- (Majorantenkriterium) Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ eine konvergente Reihe mit Summanden $c_n > 0$. Ist $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe, so dass für die Beträge $|a_n|$ gilt: $|a_n| < c_n$ für alle n, so konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ ebenfalls.
- (Quotientenkriterium) Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe, wobei $a_n \neq 0$ für alle n.
Wenn es eine Zahl $q < 1$ und ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass
$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq q < 1$$
für alle $n \geq n_0$ gilt, so konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.
Gibt es hingegen ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass
$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geq 1$$
für alle $n \geq n_0$, so divergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$.

3.4 Aufgaben

Rechenaufgaben

1. Untersuchen Sie die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Monotonie und Beschränktheit und entscheiden Sie, ob die Folgen konvergieren.

   (a) $x_n = \frac{1}{n}$ (b) $x_n = \frac{n}{n^3+4}$ (c) $x_n = \frac{4n}{2n^2-1}$

   (d) $x_n = \frac{4n}{2n^2-3}$ (e) $x_n = 200\frac{(-1)^n}{n^4}$ (f) $x_n = n^2 - 5$

   (g) $x_n = n^2 - 4n$ (h) $x_n = n^2 - 2n$ (i) $x_n = \frac{2^n}{n}$

   (j) $x_n = \frac{1}{2^n} + 4$ (k) $x_n = \frac{1}{(-2)^n}$ (l) $x_n = \frac{(-2)^n-7n}{n}$

2. Bestimmen Sie die Grenzwerte der Folgen. Finden Sie außerdem zu jeder Folge eine natürliche Zahl n_0, so dass ab dem n_0-ten Folgenglied alle Folgenglieder einen Abstand zum Grenzwert haben, der kleiner als 10^{-3} ist.

   (a) $a_n = \frac{1}{n^2}$ (b) $b_n = \frac{4n^2+8n-4}{n^2+7}$ (c) $c_n = \frac{2^n+7}{3^n+4}$

3. Die folgenden Folgen sind rekursiv gegeben. Bestimmen Sie eine explizite Darstellung.

   (a) $\begin{aligned} a_1 &= 30 \\ a_{n+1} &= 5a_n \end{aligned}$ (b) $\begin{aligned} a_1 &= 0 \\ a_{n+1} &= 5a_n \end{aligned}$ (c) $\begin{aligned} a_1 &= 4 \\ a_{n+1} &= a_n + \tfrac{1}{3} \end{aligned}$

   (d) $\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_{n+1} &= 5a_n + \tfrac{1}{3} \end{aligned}$ (e) $\begin{aligned} a_0 &= 10^6 \\ a_{n+1} &= 75\% \cdot a_n + 8 \cdot 10^4 \end{aligned}$

   (f) $\begin{aligned} a_1 &= 7 \\ a_{n+1} &= (a_n)^2 \end{aligned}$ (g) $\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_{n+1} &= a_n \tfrac{n}{n+1} \end{aligned}$ (h) $\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_{n+1} &= a_n + 3^n \end{aligned}$

   (i) $\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_{n+1} &= a_n(n+1) \end{aligned}$ (j) $\begin{aligned} a_1 &= a_2 = 2 \\ a_{n+2} &= a_n \cdot a_{n+1} \end{aligned}$ (Tipp: Denken Sie an eine berühmte Zahlenfolge.)

4. Wir betrachten die Zahlenfolge, die durch $a_{n+1} = |a_n - 1|$ gegeben ist, für verschiedene Startwerte a_0. Ermitteln Sie eine explizite Darstellung der Folge und entscheiden Sie, ob die Folge konvergiert. (Zusatz: Für welche Startwerte a_0 konvergiert die Folge?)

(a) $a_0 = 0$ (b) $a_0 = 1$ (c) $a_0 = 7$ (d) $a_0 = -4$

(e) $a_0 = 0,3$ (f) $a_0 = -0,6$ (g) $a_0 = 4,3$ (h) $a_0 = -2,6$

(i) $a_0 = 0,5$ (j) $a_0 = -0,5$ (k) $a_0 = 3,5$ (l) $a_0 = -2,5$

5. Die folgenden Folgen beschreiben Wachstums- bzw. Zerfallsprozesse. Entscheiden Sie, ob es sich um einen Wachstums- oder Zerfallsprozess handelt. Wenn ja, ist das Wachstum bzw. der Zerfall linear oder exponentiell?

(a) $a_n = 7\left(\frac{5}{3}\right)^n$ (b) $a_n = 20\left(\frac{4}{13}\right)^{n+1}$ (c) $a_n = 7\left(-\frac{5}{3}\right)^n$

(d) $a_n = 12\left(\frac{2}{25}\right)^{n^2}$ (e) $a_n = 28\left(-\frac{15}{94}\right)^{2n}$ (f) $a_n = 17\left(-\frac{3}{5}\right)^{3n+4}$

(g) $a_n = 12n^2 + 4$ (h) $a_n = 12(n+3) + 8$ (i) $a_n = \frac{n^2-1}{n+1}$

Wie sieht die Antwort für diese rekursiv gegebenen Folgen aus?

(j) $\begin{aligned} a_1 &= 12 \\ a_{n+1} &= a_n + 4 \end{aligned}$ (k) $\begin{aligned} a_1 &= 5 \\ a_{n+1} &= a_n - 4 \end{aligned}$ (l) $\begin{aligned} a_0 &= 0 \\ a_{n+1} &= a_n + \frac{1}{4} \end{aligned}$

(m) $\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_{n+1} &= a_n - \frac{1}{4} \end{aligned}$ (n) $\begin{aligned} a_1 &= 2 \cdot 10^3 \\ a_{n+1} &= 4a_n \end{aligned}$ (o) $\begin{aligned} a_1 &= 11 \\ a_{n+1} &= -4a_n \end{aligned}$

(p) $\begin{aligned} a_1 &= 256 \\ a_{n+1} &= \frac{1}{4}a_n \end{aligned}$ (q) $\begin{aligned} a_1 &= 256 \\ a_{n+1} &= \left(-\frac{1}{4}\right) a_n \end{aligned}$

6. Untersuchen Sie die Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenfalls den Grenzwert.

(a) $x_n = \frac{1}{n+1}$ (b) $y_n = \frac{n+1}{n}$ (c) $z_n = \frac{4n^2+n+1}{n^2-1}$

(d) $a_n = \frac{7n}{2n-1} - \frac{4n^2-1}{5-3n^2}$ (e) $b_n = \frac{2n^2}{n+2} - \frac{n^2(2n-1)}{n^2+1}$ (f) $c_n = \frac{2n^3+1}{n^2-5}$

(g) $d_n = \frac{n^2-5}{2n^3+1}$ (h) $h_n = \frac{(-1)^n}{n+1}$ (i) $f_n = (-1)^n \frac{n+2}{n+3}$

(j) $u_n = \frac{6n^2+(-1)^n \cdot 3n-1}{(n+4)^2}$ (k) $v_n = \frac{(-1)^n \cdot 6n^2+3n-1}{(n+4)^2}$ (l) $w_n = \frac{5 \cdot 8^n+2^n+4}{3 \cdot 8^n+5 \cdot (-6)^n}$

7. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

(a) $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^i$ (b) $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^i$ (c) $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\left(\frac{5}{3}\right)^i$

(d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-4}{7}\right)^n$ (e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-7}{4}\right)^n$ (f) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{7\cdot 3^n}{5^n\cdot 8}$

(g) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{3^n}{5^{n+1}}$ (h) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)$ (i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

8. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$ (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3n^2}\right)^n$ (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\cdot\frac{1}{n}$

(d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}$ (e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ (f) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n}{100}$

(g) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n}{100}\right)^n$ (h) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2^n}\right)^n$ (i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{n}\right)^n$

(j) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{n}\right)^n$ (k) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2-3n}{5n^2}\right)^n$ (l) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+4n}{5n^2}$

9. Wir wollen zeigen, dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ konvergiert. Lösen Sie dazu die folgenden Teilaufgaben:

(a) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$ konvergiert.

(b) Stellen Sie fest, dass diese Reihe mit $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n}$ übereinstimmt.

(c) Folgern Sie daraus die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}$. Warum sind wir fertig?

10. Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+4n+1}{5^n}$ (b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+4n+1}{(\frac{1}{5})^n}$ (c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{5^n}{n^2+4n+1}$

(d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(\frac{1}{5})^n}{n^2+4n+1}$ (e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+4n+1}{(-5)^n}$ (f) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+4n+1}{(-\frac{1}{5})^n}$

(g) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-5)^n}{n^2+4n+1}$ (h) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-\frac{1}{5})^n}{n^2+4n+1}$

11. (a) Finden Sie zwei verschiedene Wege, die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n+5}{3^n}$ nachzuweisen.

(b) Bestimmen Sie den Grenzwert der Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+5}{3^n}$.

(c) Konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{3^n+5}{2^n}$?

12. Wir definieren für $n \in \mathbb{N}$ den Wert $n!$ (sprich: n *Fakultät*) als das Produkt

$$n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n.$$

Zeigen Sie

(a) Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$ konvergiert.

(b) Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!}$ konvergiert für jede reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$.

Bemerkung: Diese Reihe definiert die *Exponentialfunktion* an der Stelle $a \in \mathbb{R}$.

Kurztest

Kreuzen Sie die richtigen Antworten an:

1. In welchen Fällen konvergiert die Folge $(\frac{1}{a^n})_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a \in \mathbb{R}$?
   a) ☐ Wenn $a \geq 1$.
   b) ☐ Wenn $|a| = 1$.
   c) ☐ Wenn $|a| < 1$.
   d) ☐ Wenn $a < -2$.
   e) ☐ Wenn $a > 2$.
   f) ☐ Wenn $a = 1$.
   g) ☐ Wenn $|a| < \frac{1}{2}$.

2. „Eine Folge reeller Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen einen Wert a.“ ist gleichbedeutend mit der Aussage:
   a) ☐ Es existiert eine reelle Zahl $\epsilon > 0$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n < \epsilon$.
   b) ☐ Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $m > n_0$ gilt $|a_m - a| < \epsilon$.
   c) ☐ Für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n > N(\epsilon)$ gilt $|a_n - a| > \epsilon$.
   d) ☐ Es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $a_{n_0} = a$.
   e) ☐ Es existiert ein $\epsilon > 0$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \epsilon$ gilt $|a_n - a| < \epsilon$.

3. Eine Folge, die bestimmt gegen $+\infty$ divergiert, ist
   a) ☐ monoton fallend.
   b) ☐ nicht beschränkt.
   c) ☐ konvergent.
   d) ☐ monoton wachsend.

4. Eine Folge ist beschränkt, wenn sie
   a) ☐ nach oben beschränkt und nach unten beschränkt ist.
   b) ☐ nach oben beschränkt oder nach unten beschränkt ist.

5. Eine Folge heißt monoton, wenn sie
   a) ☐ monoton fallend und monoton wachsend ist.
   b) ☐ monoton fallend oder monoton wachsend ist.

6. Die Folge $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist
   a) ☐ beschränkt.
   b) ☐ monoton.
   c) ☐ konvergent.

7. Die Folge $\left((-1)^n \frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist
   a) ☐ beschränkt.
   b) ☐ monoton.
   c) ☐ konvergent.

8. Welche der Aussagen ist richtig?
   a) ☐ Jede beschränkte Folge ist konvergent.
   b) ☐ Jede konvergente Folge ist beschränkt.
   c) ☐ Jede konvergente Folge ist monoton und beschränkt.
   d) ☐ Jede beschränkte monoton wachsende Folge ist konvergent.
   e) ☐ Jede beschränkte monoton fallende Folge ist konvergent.

9. In welchen Fällen konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n$?
   a) ☐ Wenn $a > 1$.
   b) ☐ Wenn $|a| > 1$.
   c) ☐ Wenn $a > 2$.
   d) ☐ Wenn $a = 1$.
   e) ☐ Wenn $a < \frac{1}{2}$.
   f) ☐ Wenn $a \leq 1$.
   g) ☐ Wenn $a < \frac{3}{4}$ und $a > -\frac{1}{2}$.
   h) ☐ Wenn $a < 1$ und $a > -1$.
   i) ☐ Wenn $a < \frac{3}{4}$ und $a > -2$.
   j) ☐ Wenn $a = -1$.
   k) ☐ Wenn $|a| \geq 1$.
   l) ☐ Wenn $|a| \leq 1$.

m) ☐ Wenn $|a| < 1$.

10. Es sei $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe. Was können Sie folgern?
    a) ☐ Die Folge (a_n) ist beschränkt.
    b) ☐ Die Folge (a_n) ist monoton.
    c) ☐ Es gibt ein $q \in \mathbb{R}$ mit $0 < q < 1$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < q < 1$.
    d) ☐ Es gibt eine konvergente Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $|a_n| < c_n$.
    e) ☐ Die Folge (a_n) konvergiert gegen 0.
    f) ☐ Die Folge (a_n) konvergiert gegen 1.
    g) ☐ Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n + a_n)$ konvergiert auch.
    h) ☐ Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 5a_n$ konvergiert auch.
    i) ☐ Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5}a_n$ konvergiert auch.
    j) ☐ Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{5}a_n$ konvergiert auch.
    k) ☐ Die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}a_n$ konvergiert auch.

11. Entscheiden Sie, aus welchen Aussagen sie folgern können, dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert:
    a) ☐ Es gibt eine divergente Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $|a_n| < d_n$.
    b) ☐ Es gibt eine konvergente Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 5$ gilt $|a_n| \leq c_n$.
    c) ☐ Es gibt eine konvergente Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} k_n$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \leq 100$ gilt $|a_n| < k_n$.
    d) ☐ Es gibt eine divergente Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 223$ gilt $|a_n| \leq d_n$.
    e) ☐ Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n < \frac{1}{10}$.
    f) ☐ Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1}{10}$.
    g) ☐ Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1}{10}$ und alle a_n sind negativ.
    h) ☐ Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $|a_n| \leq \frac{1}{10}$.
    i) ☐ Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$ gilt $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| < \frac{1}{10}$.
    j) ☐ Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1000$ gilt $\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| > 10$.
    k) ☐ Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \leq 4$ gilt $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \frac{1}{10}$.

l) ☐ Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$ gilt $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \frac{1}{10}$.
m) ☐ Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $|a_{n+1}| > 10|a_n|$.
n) ☐ Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $|a_n| \geq \frac{1}{10^n}$.
o) ☐ Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $|a_n| \leq \left(\frac{1}{5}\right)^n$.
p) ☐ Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq \left(\frac{1}{5}\right)^n$.
q) ☐ Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n < \frac{1}{3^n}$ und $a_n \geq -\frac{1}{20^n}$.
r) ☐ Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n < \frac{1}{3^n}$ und $a_n \geq \frac{1}{20^n}$.
s) ☐ Es ist $a_n = \frac{3^n}{4^n}$.

Anwendungsaufgaben

1. In einem Experiment bestimmen Sie in regelmäßigen Zeitabständen die Masse einer Bakterienpopulation.
   (a) In der ersten Messung erhalten Sie eine Masse a_1 von 0 Gramm, in der zweiten Messung eine Masse a_2 von $\frac{1}{3}$ Gramm, in der dritten Messung eine Masse a_3 von $\frac{2}{4}$ Gramm, in der vierten Messung eine Masse von $\frac{3}{5}$ Gramm, in der fünften Messung eine Masse a_5 von $\frac{4}{6}$ Gramm, in der sechsten $a_6 = \frac{5}{7}$ Gramm usw. Können Sie eine Hypothese für die zu erwartende Masse in der n-ten Messung für eine beliebige Zahl $n \in \mathbb{N}$ aufstellen?
   (b) Angenommen, Ihr Experiment bestätigt Ihre Hypothese, wie sieht langfristig die Masse der Bakterienpopulation aus? Wird sie in jedem Schritt wachsen? Gibt es mathematisch eine Obergrenze für ihr Wachstum?
2. (a) In einem Experiment bestimmen Sie erneut in regelmäßigen Zeitabständen die Masse einer weiteren Bakterienpopulation und finden näherungsweise die Formel $a_n = \frac{n-3}{n+2}$ Gramm für die Masse der Bakterienpopulation in der n-ten Messung. Wie verhält sich diese Population langfristig? Wird sie in jedem Schritt wachsen? Gibt es hier eine Obergrenze?
   (b) Durch Ändern der Rahmenbedingungen ihres Experimentes stellen Sie fest, dass sich dadurch sowohl die Zahl -3 im Zähler als auch die Zahl 2 im Nenner der Formel $a_n = \frac{n-3}{n+2}$ verändern, d. h. die neue Formel ist $a_n = \frac{n+r}{n+s}$ mit reellen Zahlen $r, s \in \mathbb{R}$. Wie müssen r und s gewählt sein, damit die Masse der Bakterienpopulation in jedem Schritt wächst?
3. In einem Ameisenstaat mit einer Ausgangspopulation von 30.000 Ameisen sterben pro Woche ungefähr 5 Prozent, jedoch kommen im gleichen Zeitraum ungefähr 1000 junge Ameisen hinzu.
   (a) Wie groß ist der Ameisenstaat ungefähr nach einer Woche?
   (b) Aus wievielen Individuen besteht die Ameisenpopulation ungefähr nach 2, 3 bzw. 5 Wochen?
   (c) Stellen Sie eine Hypothese für die zu erwartende Anzahl von Ameisen in der Population nach $n \in \mathbb{N}$ Wochen auf.

   (d) Wie sieht (zumindest rein mathematisch gesehen) die langfristige Entwicklung der Ameisenpopulation aus? Wächst sie? Stirbt sie aus? Bleibt die Anzahl der Ameisen konstant?

4. Es liege eine Kultur von anfänglich 10^6 Bakterien vor. Von diesen sterben ständig so viele, dass nach jeweils einem Tag nur noch ein Anteil von $\frac{7}{10}$ der ursprünglichen Bakterien vorhanden ist.
   (a) Ermitteln Sie eine Formel für die Anzahl a_n der vorhandenen Bakterien nach n Tagen (mit $n \in \mathbb{N}$).
   (b) Um die Verluste auszugleichen, werden jeweils nach einem Tag b neue Bakterien hinzugefügt, wobei hier b eine positive reelle Zahl ist. Ermitteln Sie auch hier eine Formel für die Anzahl a_n der vorhandenen Bakterien nach n Tagen.
   (c) Wie muss man b wählen, damit die Anzahl der Bakterien nach zwei Wochen $5 \cdot 10^6$ beträgt?
   (d) Was verändert sich in der Formel, die in a) ermittelt wurde, wenn man davon ausgeht, dass am Anfang eine Kultur von a_0 Bakterien vorliegt?
   (e) Wie muss in der allgemeinen Formel b gewählt werden, damit die Anzahl der Bakterien nach einer Woche $k \cdot a_0$ für ein $k \in \mathbb{N}$ beträgt?

5. Angenommen, die Erdölvorräte würden bei konstantem Verbrauch noch 50 Jahre reichen. Ein Mathematiker schlägt vor, im aktuellen Jahr genauso viel Erdöl zu verbrauchen wie bereits eingeplant und ab dann den Verbrauch an Erdöl jedes Jahr auf einen konstanten Prozentsatz des Vorjahresverbrauchs herunterzufahren. Um wieviel Prozent müsste man den jährlichen Verbrauch pro Jahr verringern, damit die Erdölvorräte für immer reichen?

4 Funktionen

Problem 1 Eine Biologin fertigt Messreihen zu folgenden Themen an:

1. Wachstum der Baldachinspinne Linyphia triangularis[1]
2. Anzahl an Paaren des Weißkopfnoddis (Anous minutus, einer Vogelart) auf Heron Island zwischen 1880 und 2000[2]

Um einen genaueren Einblick in ihre Untersuchungsergebnisse zu bekommen, stellt sie diese grafisch dar:

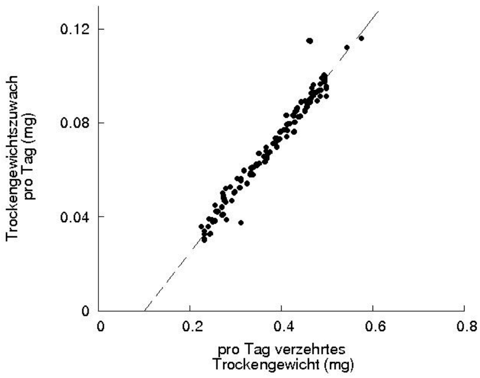


Abbildung 4.1 1. Wachstum der Baldachinspinne Linyphia triangularis

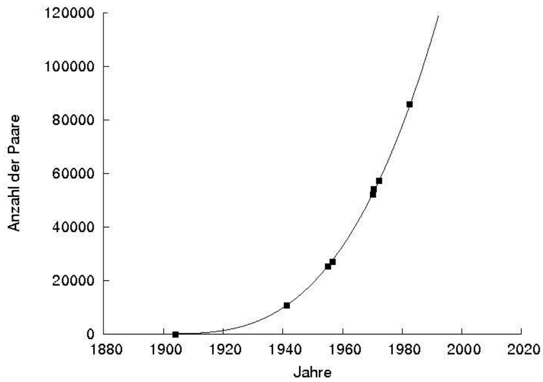


Abbildung 4.2 2. Anstieg der Anzahl an Paaren des Weißkopfnoddis auf Heron Island

Mithilfe der grafischen Darstellung ist für jedes Beispiel ein mathematisches Modell gesucht, das die gemessenen Ergebnisse widerspiegelt. Dieses Modell gibt jeweils Aufschluss über weitere, nicht gemessene Daten. Diese können durch Versuche überprüft werden, wodurch nach und nach das mathematische Modell verbessert werden kann.

Problem 2 Nach neueren Erkenntnissen haben viele Pflanzen, wie Menschen auch, eine sogenannte innere Uhr. Durch sogenannte Photorezeptoren registrieren sie täglich, wie lang der Tag hell ist, und können anhand dessen bestimmen, in welcher Jahreszeit sie sich befinden und wann der günstigste Zeitpunkt für ihre Blüte ist[3].

[1]Begon, M., Harper, J., Townsend, C.: *Ökologie* S. 219
[2]Begon, M., Harper, J., Townsend, C.: *Ökologie* S. 93
[3]D. Staiger: „Am Puls des Lebens“, BIOforum 28, S.53-55

Abbildung 4.3 Arabidopsis

Die Langtagpflanze Arabidopsis (Ackerschmalwand, siehe Abbildung 4.3) beginnt genau dann im Jahr zu blühen, sobald die Tage länger als 16 Stunden sind. Allgemein ist die Länge eines Tages periodisch. Am 21. Juni ist der längste und am 21. Dezember der kürzeste Tag eines Jahres. Nach dem 21. Juni werden die Tage immer kürzer, nach dem 21. Dezemer dann wieder immer länger. Der ungefähre Zeitpunkt der Blüte der Pflanze kann mithilfe dieser Beobachtung mathematisch berechnet werden.

Problem 3 In einem Nährmedium vermehrt sich eine Bakterienart pro Stunde um 50 Prozent. Am Anfang sind es 1000 Bakterien. Wieviele Bakterien sind es nach 4,7 Stunden? Ab wann sind es ungefähr über eine Million Bakterien?

Ziel: Einführung von Funktionen und ihren Eigenschaften.

4.1 Der Begriff der Funktion

Schauen wir uns die Messreihen genauer an. Gesucht ist für jede Messreihe ein mathematisches Modell, mit dessen Hilfe wir das genaue Verhalten der Messdaten vorhersagen können. Ein solches Modell ist eine *Funktion*:

Definition. Eine *Funktion* ist eine Abbildung $f : X \to Y$, für die die Mengen X und Y Teilmengen der reellen Zahlen sind. Die Menge X heißt *Definitionsbereich* der Funktion f. Die Menge X muss also so gewählt sein, dass für jede Zahl aus X der Funktionswert $f(x) \in Y$ definiert ist. Die Menge Y heißt *Wertebereich* der Funktion f.

Es muss jedoch nicht jeder Wert aus Y tatsächlich als Funktionswert vorkommen. Im Gegensatz dazu nennt man das Bild der Menge X unter der Abbildung f, die Menge $f(X)$, den *Bildbereich* der Funktion f. Dies sind alle Werte aus dem Wertebereich Y, die tatsächlich als Funktionswerte $f(x)$ vorkommen. s

Der Wertebereich einer Funktion muss nicht eindeutig sein. Ist nämlich der Bildbereich einer Funktion $f : X \to Y$ eine echte Teilmenge Y' von Y, so definiert zum Beispiel $f : X \to Y'$ die gleiche Funktion.
Unsere Messreihen haben wir in den Abbildungen 4.1 und 4.2 grafisch dargestellt. Allgemein definiert man:

Definition. Der *Graph einer Funktion* $f : X \to Y$ ist definiert als die Menge

$$\{(x, f(x)) \mid x \in X, f(x) \in Y\}.$$

Wie für Abbildungen (siehe 1.5) heißt eine Funktion $f : X \to Y$ *injektiv*, wenn für $x, x' \in X$ mit $x \neq x'$ folgt, dass die Funktionswerte $f(x)$ und $f(x')$ ebenfalls verschieden sind. f heißt *surjektiv*, falls es für jedes $y \in Y$ ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt. f heißt *bijektiv*, falls f sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

4.2 Beispiele für Funktionen

4.2.1 Konstante Funktionen

Die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 5$ ist eine sogenannte *konstante Funktion*, da jede reelle Zahl x auf die Konstante 5 abgebildet wird. Der Definitionsbereich von f ist in diesem Fall gleich der gesamten Menge $\mathbb{R}$. Genauso ist ein Wertebereich die gesamte Menge $\mathbb{R}$. Der Bildbereich der Funktion f ist jedoch in diesem Fall nur die Zahl 5.
Wir könnten in diesem Beispiel den Wertebereich verkleinern. Zum Beispiel definiert $f : \mathbb{R} \to [0, 10]$ mit $f(x) = 5$ die gleiche Funktion.
Ein Ausschnitt des Graphen dieser konstanten Beispielfunktion ist in Abbildung 4.4 dargestellt.

4.2.2 Lineare Funktionen

Allgemein nennt man für reelle Zahlen $m, b \in \mathbb{R}$ mit $m \neq 0$ jede Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = mx+b$ eine *lineare Funktion*. Hierbei ist m die *Steigung* der Funktion, b bezeichnet den *y-Achsenabschnitt*.

Beispiel. Die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x + 1$ ist eine lineare Funktion. Der Definitionsbereich ist in diesem Fall gleich dem Wertebereich, gleich dem Bildbereich, gleich der gesamten Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen. Der Graph der Funktion $f(x) = x + 1$ kann dargestellt werden wie in Abbildung 4.5.

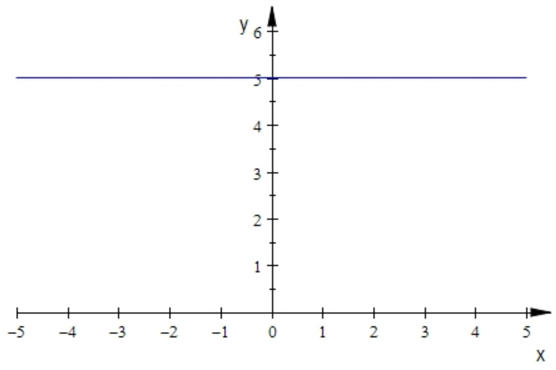


Abbildung 4.4 Graph der konstanten Funktion $f(x) = 5$

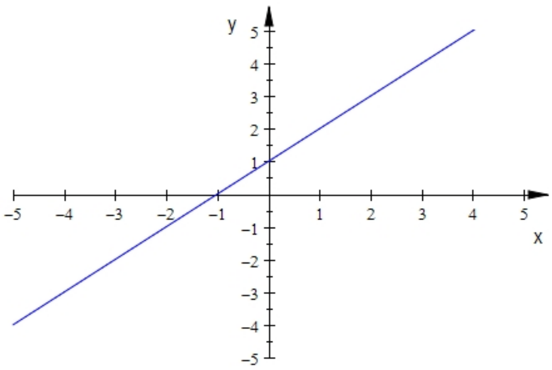


Abbildung 4.5 Graph der linearen Funktion $f(x) = x + 1$

4.2.3 Polynomfunktionen

Allgemein nennt man eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Form

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$$

eine *Polynomfunktion vom Grad n*.

Beispiel. Die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 + 2x$ ist eine Polynomfunktion vom Grad 2. Der Definitionsbereich dieser Funktion ist die Menge aller reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Den Bildbereich können wir zum Beispiel am in Abbildung 4.6 dargestellten Graphen der Funktion ablesen: Er besteht aus allen reellen Zahlen, die größer oder gleich -1

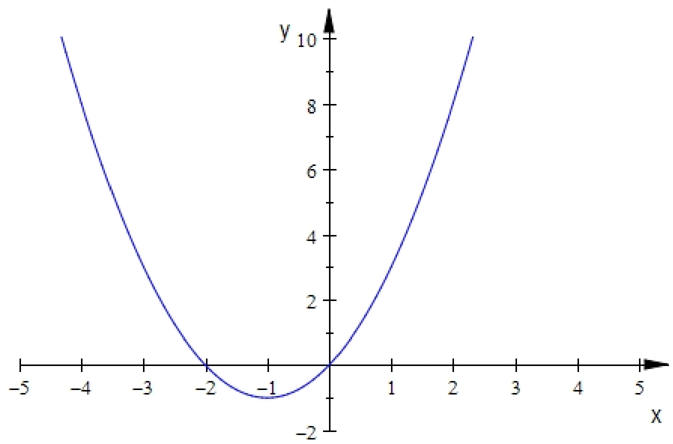


Abbildung 4.6 Graph der Polynomfunktion $f(x) = x^2 + 2x$

sind. Wir können dies auch mathematisch begründen: Die Funktionswerte der Funktion $f(x) = x^2 + 2x = x(x + 2)$ sind positiv, wenn sowohl x als auch $x + 2$ positiv sind, oder beide Werte negativ sind. Dies ist der Fall, wenn $x \geq 0$ ist oder $x \leq -2$ gilt.

Dadurch kommen bereits alle positiven Zahlen als Bildpunkte der Funktion f vor. Liegt x zwischen -2 und 0, so ist $-1 \leq f(x) \leq 0$.
Wir werden später mithilfe der Kurvendiskussion eine einfache Methode kennenlernen, mit deren Hilfe der Bildbereich einer Funktion berechnet werden kann.

4.2.4 Zusammengesetzte Funktionen

Funktionen können auch abschnittsweise definiert werden. Zum Beispiel ist die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{falls } x < 0 \\ -1 & \text{falls } x \geq 0 \end{cases}$$

auch eine Funktion, ihr Graph ist in Abbildung 4.7 dargestellt. Der Definitionsbereich ist $\mathbb{R}$, der Bildbereich die Menge $\{-1, 2\}$.

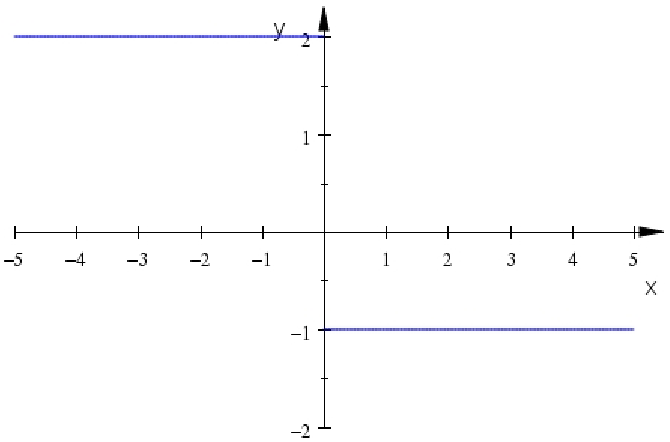


Abbildung 4.7 Graph einer abschnittsweise definierten Funktion

4.2.5 Rationale Funktionen

Sind allgemein $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei Polynomfunktionen, so ist der Quotient $\frac{P}{Q}$ ebenfalls eine Funktion. Eine solche Funktion nennt man eine *rationale Funktion*. Der Definitionsbereich dieser Funktion ist die Menge aller reellen Zahlen außer den Nullstellen des Polynoms Q im Nenner.

Beispiel. Die Abbildung $f : \mathbb{R} \backslash \{1, -1\} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ ist eine rationale Funktion. Der Definitionsbereich dieser Funktion ist die Menge aller reellen Zahlen außer der 1 und der -1, d. h. außer den Nullstellen des Nenners $x^2 - 1$.

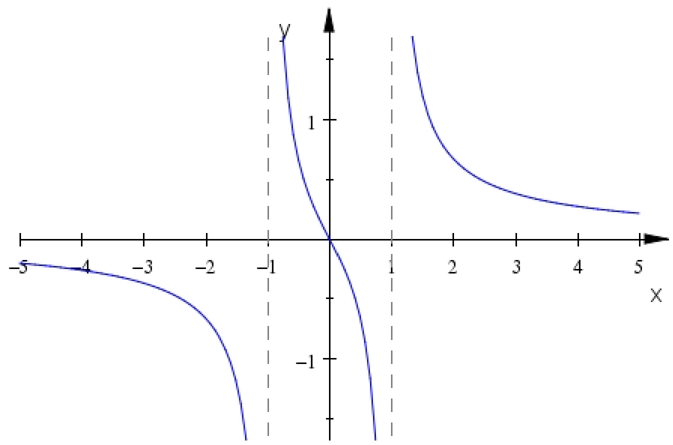


Abbildung 4.8 Graph der rationalen Funktion $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$

4.2.6 Biologische Beispiele

Kommen wir nun zu unserem Ausgangsproblem. Ein mathematisches Modell für die gemessenen Daten und ihre grafische Darstellung ist hier eine Funktion. Die jeweiligen Abbildungen 4.1 und 4.2 geben ihre Funktionsgraphen wieder.

1. In Abbildung 4.1 befinden sich die Messdaten annähernd auf einer Gerade. Das bedeutet, dass die Funktion, die einem pro Tag verzehrten Trockengewicht in mg den zugehörigen Trockengewichtszuwachs in mg einer Baldachinspinne pro Tag zuordnet, eine lineare Funktion ist. Der Definitionsbereich dieser Funktion liegt ungefähr zwischen $0,1$ und $0,6$. Würde eine Spinne deutlich weniger als $0,1$ mg oder deutlich mehr als $0,6$ mg Trockengewicht pro Tag fressen, würde sie sterben. Weniger als 0 mg kann sie nicht fressen, so dass der Definitionsbereich in jedem Fall nur reelle Zahlen größer oder gleich null enthalten kann. Ähnlich verhält es sich mit dem Bildbereich: Der Trockengewichtszuwachs pro Tag kann zwar negativ, jedoch nicht kleiner als das Gewicht der Spinne selbst sein.

   Eine mögliche Funktion, die das Wachstum der Baldachinspinne in Abhängigkeit der pro Tag verzehrten Trockengewichtsmenge darstellt, ist die lineare Funktion

   $$f : [0,1] \to [-1,1]$$

   mit

   $$f(x) = 0,25x - 0,03.$$

   In diesem Beispiel haben wir diese Funktion am Funktionsgraphen abgelesen: Der Funktionswert von $0,2$ ist ungefähr $0,02$, der Funktionswert von $0,4$ ist ungefähr $0,07$, damit ist die Steigung der Geraden gleich

   $$\frac{\text{y-Wert}}{\text{x-Wert}} = \frac{0,07 - 0,02}{0,4 - 0,2} = 0,25.$$

Die Gerade schneidet die y-Achse ungefähr im Wert $0,03$, so dass wir insgesamt die Geradengleichung $f(x) = 0,25x - 0,03$ erhalten.

2. Eine Funktion für den in Abbildung 4.2 dargestellten Graphen zu finden ist etwas schwieriger. Eine erste Näherung könnte hier eine Polynomfunktion vom Grad vier, zum Beispiel die Funktion $f(x) = (x - 1880)^4$ sein. Das Vorgehen ist hier oft so, dass man von bekannten Funktionsgraphen, in diesem Beispiel dem Graphen der Funktion $g(x) = x^4$, ausgeht und diese so verändert, dass der neue Graph mit dem gesuchten Graphen ungefähr übereinstimmt. Anhand der gemessenen Daten kann man dann die so erhaltene Funktion überprüfen und gegebenenfalls noch weiter verbessern.

Ob die (geratenen) Funktionen tatsächlich jeweils ein gutes mathematisches Modell für die biologischen Daten sind, kann nur durch weitere Messreihen überprüft werden. Der Vorteil eines mathematischen Modells ist, dass man mit diesem Prognosen berechnen kann, wie eine Messreihe sich allgemein verhält.

Störungen mathematisch, Anwendung Medizin

4.3 Umkehrfunktionen

Beobachtungen aus der Natur ... Erkenntnisse zum Beispiel über Außentemperatur, Tageszeit oder ähnliches....
„Geeignete“ Funktionen $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ können direkt nacheinander ausgeführt werden und damit eine neue Funktion $h : X \to Z$ definieren. Diese Hintereinanderausführung wird Komposition genannt. Die genaue Definition hierzu ist

Definition. Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ zwei Funktionen, wobei der Wertebereich der Funktion f gleich dem Definitionsbereich der Funktion g sei. Dann ist die *Komposition* $h := g \circ f$ definiert als die Funktion $h : X \to Z$ mit $h(x) = g(f(x))$ für alle $x \in X$.

Beispiele.

1. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben mit $f(x) = x + 1$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = x^2 + 2x$. Dann ist die Komposition $h = g \circ f$ definiert als die Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $h(x) = x^2+4x+3$, denn es gilt $g(f(x)) = g(x+1) = (x+1)^2+2(x+1) = x^2+4x+3$. Der Graph der Funktion h ist in diesem Fall, da wir in g lediglich x durch $x + 1$ ersetzt haben, der um 1 entlang der x- Achse nach links verschobene Graph der Funktion g

2. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{falls } x < 0 \\ -3 & \text{falls } x \geq 0 \end{cases}$$

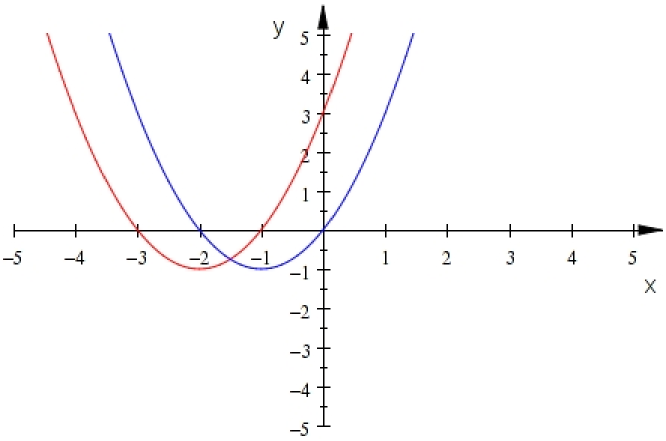


Abbildung 4.9 Graph der Kompositionsabbildung $h(x) = g(f(x))$ mit $g(x) = x^2 + 2x$ und $f(x) = x + 1$. Der Graph von h ist hierbei rot gekennzeichnet, der Graph von g blau.

und $g : \mathbb{R}\setminus\{-1, 1\} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = \dfrac{x}{x+1}$. Dann ist die zusammengesetzte Funktion $h = g \circ f$ definiert als

$$h(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} & \text{falls } x < 0 \\ \frac{3}{2} & \text{falls } x \geq 0 \end{cases}.$$

Ist eine Funktion $f : X \to Y$ bijektiv, so können wir die sogenannte *Umkehrfunktion* zu f definieren.

Definition. Sei $f : X \to Y$ eine bijektive Funktion. Dann ist die *Umkehrfunktion* $g : Y \to X$ definiert als die Funktion g, für die die Kompositionsabbildungen $h := g \circ f$ und $\tilde{h} := f \circ g$ jeweils die Identität sind. Es muss also

$$h(x) = g(f(x)) = x$$

und

$$\tilde{h}(x) = f(g(x)) = x$$

gelten.

Beispiele.

1. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x + 1$ ist bijektiv. Die Umkehrfunktion findet man, indem man die Gleichung $y = x + 1$ nach x auflöst. Dadurch erhält man dann eine Funktion $g(y)$, die gerade die geforderte Eigenschaft $g(y) = g(f(x)) = x$ erfüllt. In diesem Fall ist die Funktion $g(x) = x - 1$ die Umkehrfunktion der Funktion f, denn es gilt $g(f(x)) = g(x + 1) = (x + 1) - 1 = x$ und $f(g(x)) = f(x - 1) = (x - 1) + 1 = 1$.

2. Die Funktion $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\tilde{f}(x) = x^2$ ist nicht bijektiv. Schränken wir jedoch den Definitionsbereich auf das Intervall $[0, \infty)$ oder das Intervall $(-\infty, 0]$ ein, so sind die entsprechenden Funktionen f bijektiv, es gibt also eine Umkehrfunktion. Die Funktion $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ mit $f(x) = x^2$ ist bijektiv. Ihre Umkehrfunktion lautet $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ mit $g(x) = \sqrt{x}$, denn $f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = x$ und $g(f(x)) = g(x^2) = x$

3. Die Funktion $f : (-\infty, 0] \to [0, \infty)$ mit $f(x) = x^2$ ist bijektiv. Ihre Umkehrfunktion lautet $g : [0, \infty) \to (-\infty, 0]$ mit $g(x) = -\sqrt{x}$, denn $f(g(x)) = f(-\sqrt{x}) = x$ und $g(f(x)) = g(x^2) = -|x| = x$ (x ist in diesem Fall eine negative Zahl und damit ist $x = -|x|$).

4.4 Stetige Funktionen

Funktionen können verschiedene Eigenschaften haben. Eine dieser Eigenschaften ist die sogenannte *Stetigkeit*. Anschaulich geht es dabei darum zu untersuchen, ob der Graph einer Funktion Sprünge enthält. Ist dies nicht der Fall, so heißt eine Funktion *stetig*.

4.4.1 Grenzwerte von Funktionen

Um mathematisch exakt definieren zu können, was eine stetige Funktion ist, brauchen wir zunächst den Begriff eines Grenzwertes einer Funktion. In Definition 14 haben wir bereits definiert, wann eine Folge x_n von reellen Zahlen gegen einen Grenzwert a konvergiert.
Wir wollen nun den Grenzwert einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ an einer Stelle $a \in \mathbb{R}$ definieren, wobei hier $D \subset \mathbb{R}$ den Definitionsbereich der Funktion f bezeichnet. Ist x_n eine konvergente Folge von reellen Zahlen x_n, die alle im Definitionsbereich D der Funktion f liegen, so könnten wir theoretisch den Grenzwert der Funktion f im Punkt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in \mathbb{R}$ als Grenzwert der Funktionswerte $f(x_n)$ definieren.
Hierbei müssen wir jedoch aufpassen: Hat eine andere Folge von reellen Zahlen y_n in D ebenfalls den Grenzwert a, so kann der Grenzwert der Funktionswerte $f(y_n)$ trotzdem ungleich dem Grenzwert der Funktionswerte $f(x_n)$ sein:

Beispiele.
Schauen wir uns hierzu die zusammengesetzte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{falls } x < 0 \\ -1 & \text{falls } x \geq 0 \end{cases}$$

an. Wir wollen den Grenzwert der Funktion an der Stelle 0 untersuchen.

- Die Folge $x_n = \frac{1}{n}$ konvergiert gegen 0. Die Folge der Funktionswerte $f(x_n) = -1$ ist hier konstant und konvergiert gegen -1.

- Die Folge $y_n = -\frac{1}{n}$ konvergiert ebenfalls gegen 0. Hier ist die Folge der Funktionswerte gegeben durch $f(y_n) = 2$ mit Grenzwert 2.

- Die Folge $z_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ konvergiert auch gegen 0. Für diese Folge ist die Folge der Funktionswerte jedoch nicht konstant. Es gilt $f(z_n) = \begin{cases} 2 & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ -1 & \text{falls } n \text{ gerade} \end{cases}$, diese Folge der Funktionswerte divergiert folglich.

Je nachdem, welche konvergente Folge mit Grenzwert $a = 0$ wir in diesem Beispiel betrachten, erhalten wir verschiedene Grenzwerte der Folgen der Funktionswerte, beziehungsweise unter Umständen sogar eine Folge von Funktionswerten, die gar nicht konvergiert. Der Begriff des Grenzwertes einer Funktion an einer Stelle a soll aber natürlich eindeutig definiert sein und nicht von irgendwelchen Wahlen abhängen. Deswegen definieren wir:

Definition. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$. Sei a eine beliebige reelle Zahl. Angenommen, es gibt eine konvergente Folge von reellen Zahlen $x_n \in D$, die gegen a konvergiert. Dann *konvergiert f für $x \to a$ gegen den Grenzwert y*, falls für jede konvergente Folge von reellen Zahlen $x_n \in D$ mit Grenzwert a die Folge $f(x_n)$ konvergiert mit Grenzwert y. Wir schreiben dann $\lim_{x \to a} f(x) = y$.

Hierbei ist folgendes zu beachten:

- Die reelle Zahl a muss nicht unbedingt Element der Menge D sein.
- Ist a ein Element der Menge D und konvergiert f für $x \to a$ gegen einen Grenzwert y, so muss $y = f(a)$ gelten. Kann man dies mithilfe von Definition 23 begründen?
- Aus der Schule kennt man vielleicht schon den Begriff des *linksseitigen* und *rechtsseitigen* Grenzwert. Hierzu betrachtet man für eine reelle Zahl a nur Folgen $x_n \in D$ mit $x_n \leq a$ bzw. für den rechtsseitigen Grenzwert nur Folgen $x_n \in D$ mit $x_n \geq a$ und untersucht, ob die Folgen $f(x_n)$ jeweils alle gegen den gleichen Wert konvergieren. Wir schreiben $\lim_{x \nearrow a} f(x)$ für den linksseitigen und $\lim_{x \searrow a} f(x)$ für den rechtsseitigen Grenzwert.

Um den Grenzwert einer Funktion an einer Stelle a zu untersuchen, ist der Begriff des linksseitigen und des rechtsseitigen Grenzwert sehr hilfreich. Es gilt nämlich:

Satz. *Ist $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in \mathbb{R}$, so konvergiert f an der Stelle a gegen ein $y \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn sowohl der linksseitige Grenzwert $\lim_{x \nearrow a} f(x)$ als auch der rechtsseitige Grenzwert $\lim_{x \searrow a} f(x)$ existieren und gleich y sind.*

Beispiele.

1. Für die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = -x^3 + x$ gilt an der Stelle $a = 1$:

$$\lim_{x \nearrow 1}(-x^3 + x) = \lim_{x \searrow 1}(-x^3 + x) = 0$$

und damit $\lim_{x \to 1}(-x^3 + x) = 0$.

2. Für die Funktion $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+3x+2}$ gilt an der Stelle $a = 2$:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-1}{x^2+3x+2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-1)(x+1)}{(x+2)(x+1)} = \lim_{x\to 2} \frac{x-1}{x+2} = \frac{1}{4}.$$

3. Für die zusammengesetzte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{falls } x < 0 \\ -1 & \text{falls } x \geq 0 \end{cases}$$

gilt an der Stelle $a = 0$

$$\lim_{x \nearrow 0} f(x) = 2,$$

aber

$$\lim_{x \searrow 0} f(x) = -1.$$

Da hier der linksseitige und der rechtsseitige Grenzwert zwar jeweils existiert, die beiden Grenzwerte jedoch verschieden sind, existiert kein Grenzwert der Funktion f an der Stelle $a = 0$.

4.4.2 Definition von Stetigkeit

Definition. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit Definitionsbereich D. Sei $a \in D$. Dann heißt die Funktion f *stetig im Punkt* a, wenn der Grenzwert $\lim_{x\to a} f(x)$ existiert und gleich $f(a)$ ist. Ist die Funktion f in jedem Punkt von D stetig, so sprechen wir von einer *stetigen Funktion*.

Weiß man von einer Funktion, dass sie stetig ist, so kann man daraus eine Vielzahl neuer stetiger Funktionen konstruieren. Es gilt:

Satz. *Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ zwei in einem Punkt $a \in D$ stetige Funktionen. Dann gilt:*

1. *Die Summe $f + g$ ist stetig in a. Hierbei ist die Funktion $f + g : D \to \mathbb{R}$ definiert durch $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.*

2. *Das Produkt $f \cdot g$ ist stetig in a. Hierbei ist die Funktion $f \cdot g : D \to \mathbb{R}$ definiert durch $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.*

3. *Ist $g(a)$ ungleich null, so ist auch der Quotient $\frac{f}{g}$ stetig in a. Hierbei ist die Funktion $\frac{f}{g}$ definiert durch $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.*

4. *Sind $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : D' \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen und $f(D) \subset D'$, so können wir die sogenannte* Komposition *dieser Abbildungen definieren als die Abbildung $f \circ g : D \to \mathbb{R}$ mit $(f \circ g)(x) := f(g(x))$. Ist nun f stetig in a und g stetig in $f(a)$, so ist die Komposition $f \circ g$ stetig in a.*

Beispiele.

1. Jede konstante Funktion ist stetig. Genauso ist jede lineare Funktion und jede Polynomfunktion stetig.

2. Zusammengesetzte Funktionen sind normalerweise nicht überall stetig. Ein Beispiel hierfür ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{falls } x < 0 \\ -1 & \text{falls } x \geq 0 \end{cases},$$

   die in $a = 0$ nicht stetig ist und dort einen *Sprung* macht. In allen anderen Punkten $a \neq 0$ ist diese Funktion weiterhin stetig.

3. Rationale Funktionen sind häufig auch nicht überall stetig. Zum Beispiel hat die rationale Funktion $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ in $a = 1$ einen Pol und ist in diesem Punkt nicht stetig. Im Gegensatz dazu ist jedoch die rationale Funktion $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ überall stetig.

4.5 Trigonometrische Funktionen

Widmen wir uns nun Problem 2. In Abbildung 4.10 ist der Graph einer Funktion $f(t)$ gezeichnet, die die Tageslänge abhängig vom Tag des Jahres ausdrückt. Der Tag, an

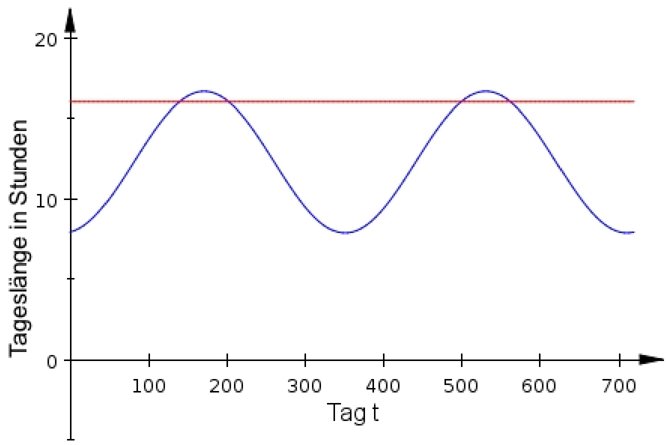


Abbildung 4.10 Graph der Tageslängenfunktion f (in Blau) und Graph der konstanten Funktion $g(t) = 10,3$ (in Rot)

dem die Ackerschmalwand das erste Mal blüht, ist dann gegeben durch die kleinste Zahl t, für die sich die Graphen der Tageslängenfunktion $f(t)$ und der konstanten Funktion $g(t) = 16$ schneiden. Die Tageslängenfunktion ist periodisch. Um die Eigenschaften solcher periodischer Funktionen geht es im folgenden Kapitel.

4.5.1 Bogenmaß

Für einen Winkel α gibt es verschiedene Maße. Eine Möglichkeit ist die Angabe des Winkels in Grad (von 0° bis 360°). Eine andere Möglichkeit, einen Winkel eindeutig zu beschreiben, ist das sogenannte Bogenmaß.
Gibt man einen Winkel in Grad an, meint man damit, um wieviel Grad man eine Strecke entgegen der Uhrzeigerrichtung um einen festen Endpunkt der Strecke gedreht hat. Eine volle Umdrehung ist hierbei 360°, eine halbe Umdrehung 180°, eine viertel Umdrehung 90°. Bei diesen Drehungen ist die Länge der zu drehenden Strecke unerheblich. Durch das Drehen der Strecke beschreibt der Endpunkt (um den nicht gedreht wird) einen Kreis beziehungsweise einen Kreisausschnitt, die Streckenlänge ist hierbei der Radius dieses Kreises.
Legen wir nun die Streckenlänge auf $r = 1$ fest, so können wir, wenn wir die Strecke entgegen der Uhrzeigerrichtung um eine bestimmte Gradzahl drehen, die Länge des Weges, die der Endpunkt zurückgelegt hat, messen. Diese Länge ist das sogenannte Bogenmaß. Das Bogenmaß ist eine reelle Zahl zwischen 0 und 2π, wobei 2π die Länge des gesamten Umfanges eines Kreises vom Radius 1 ist. Bei einer halben Umdrehung, also einer Drehung von 180°, erhalten wir ein Bogenmaß von

$$\frac{1}{2} \cdot \text{ (volle Umdrehung) } = \frac{1}{2} \cdot (2\pi) = \pi.$$

Bei einer viertel Umdrehung erhalten wir ein Bogenmaß von $\frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2} =$ und so weiter. Jede Gradzahl definiert folglich eindeutig ein Bogenmaß. Umgekehrt definiert auch jedes Bogenmaß eindeutig eine Gradzahl. Es gilt zum Beispiel die folgende Umrechnungstabelle:

Winkel in Grad	45	60	90	180	270	360
Winkel in Bogenmaß	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

4.5.2 Elementargeometrische Definition

In der Schule führt man die Winkelfunktionen Sinus und Kosinus elementargeometrisch am rechtwinkligen Dreieck ein, siehe hierzu Abbildung 4.11. Der Sinus eines Winkels α in einem rechtwinkligen Dreieck ist hier definiert als die Länge der Gegenkathete dividiert durch die Länge der Hypothenuse. Der Kosinus von α ist definiert als die Länge der Ankathete dividiert durch die Länge der Hypothenuse.

Beispiele.

1. Zeichnen Sie ein rechtwinkliges Dreieck mit Hypothenuse der Länge 5 und jeweils zwei Katheten der Längen 3 und 4 cm. Messen Sie die beiden (vom rechten Winkel verschiedenen) Winkel α und β in Grad. Da

$$\sin(36,87°) \approx \frac{3}{5} \text{ sowie } \cos(36,87°) \approx \frac{4}{5}$$

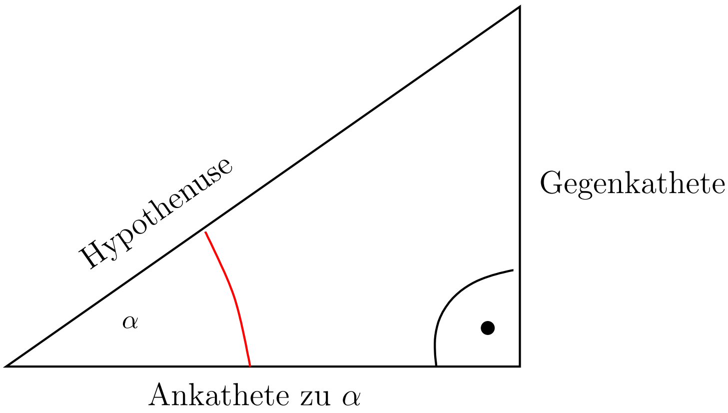


Abbildung 4.11 Rechtwinkliges Dreieck

und

$$\sin(53,13°) \approx \frac{4}{5} \text{ sowie } \cos(53,13°) \approx \frac{3}{5}$$

gilt, sollte einer der beiden Winkel α beziehungsweise β ungefähr gleich $36,87°$ und der andere ungefähr gleich $53,13°$ sein.

2. Betrachten wir nun ein gleichschenkliges, rechtwinkliges Dreieck mit Hypothenusenlänge 1. Nach dem Satz von Pythagoras ist dann jede Kathete von der Länge $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Jeder der beiden möglichen Winkel α bzw. β ungleich dem rechten Winkel ist gleich 45° beziehungsweise in Bogenmaß gleich $\frac{\pi}{4}$. Damit gilt

$$\sin(45°) = \sin(\frac{\pi}{4}) = \cos(45°) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

3. Wird der Winkel α in Abbildung 4.11 immer kleiner und irgendwann gleich 0, so ist das „rechtwinklige" Dreieck nur noch eine Doppel-Strecke bestehend aus der Ankathete und der Hypothenuse, die Gegenkathete hat also die Länge 0. Wir erhalten damit $\sin(0) = 0$ und $\cos(0) = 1$.

4. Wird der Winkel α in Abbildung 4.11 immer größer und irgendwann gleich 90° beziehungsweise in Bogenmaß gleich $\frac{\pi}{2}$, so ist das „rechtwinklige" Dreieck ebenfalls nur noch eine Doppel-Strecke, in diesem Fall bestehend aus der Gegenkathete und der Hypothenuse. Die Ankathete hat hier die Länge 0. Wir erhalten damit $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ und $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$.

Unsere bisherige Definition von Sinus und Cosinus gilt nur für Winkel, die kleiner als 90° beziehungsweise $\frac{\pi}{2}$ sind, denn die Winkelsumme in einem Dreieck ist immer gleich 180°. Wir können die Definition der Sinus- und Kosinusfunktion jedoch verallgemeinern: Schauen wir uns in einem Koordinatensystem den Einheitskreis an (siehe Abbildung 4.12).

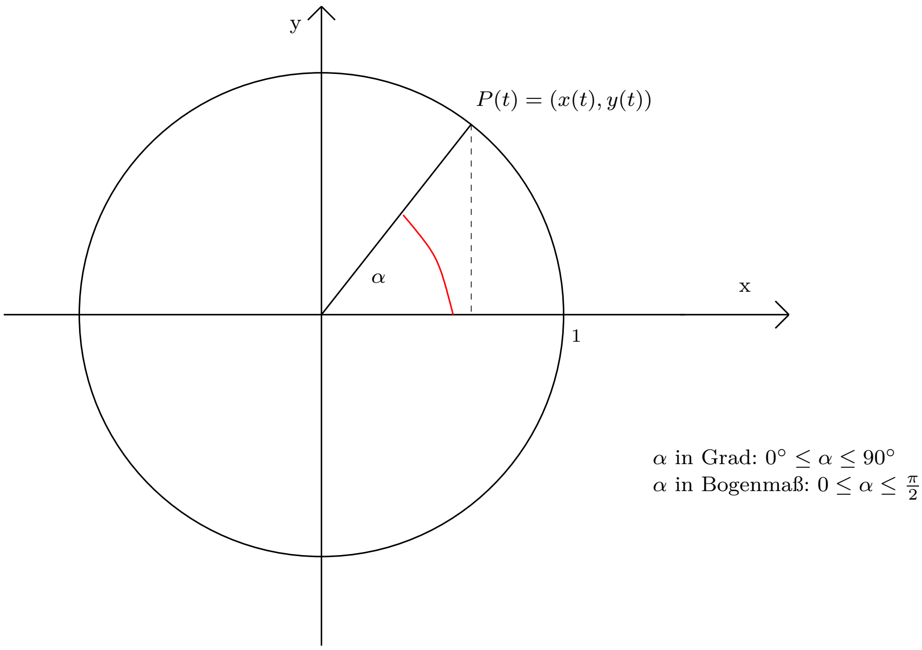


Abbildung 4.12 Einheitskreis in einem reellen Koordinatensystem

Der Einfachheit halber nennen wir den Winkel α ab sofort t, das heißt, wir setzen $t := \alpha$. Angenommen, $P(t)$ ist wie in Abbildung 4.12 ein Punkt auf dem Einheitskreis im ersten Quadranten. Dann wird durch die Punkte $(0, 0)$, $(x(t), 0)$ und $P(t) = (x(t), y(t))$ ein rechtwinkliges Dreieck aufgespannt. Der Punkt $P(t)$ ist eindeutig durch den Winkel $t = \alpha$ gegeben. Um diese Abhängigkeit zu kennzeichnen, haben wir ihn statt einfach nur mit P mit $P(t)$ bezeichnet. Die Bedingung, dass $P(t)$ im ersten Quadranten liegt, bedeutet mathematisch nun nichts anderes, als dass $0° \leq t \leq 90°$ beziehungsweise in Bogenmaß $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ gilt. Für diese Winkel gilt unsere Definition von Sinus und Kosinus. Die Koordinaten des Punktes $P(t)$ sind gegeben durch

$$x(t) = \frac{x(t)}{1} = \cos(t) = \frac{|\text{Ankathete}|}{|\text{Hypothenuse}|}$$

und

$$y(t) = \frac{y(t)}{1} = \sin(t) = \frac{|\text{Gegenkathete}|}{|\text{Hypothenuse}|}$$

. Wir definieren nun für ein allgemeines $t \in [0, 2\pi]$ die Funktionen $\sin(t) := y(t)$ als die y-Koordinate und $\cos(t) := x(t)$ als die x-Koordinate des Punktes $P(t)$.
Wir haben dadurch Funktionen

$$\begin{aligned} \sin : [0, 2\pi] &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \sin(t) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \cos : [0, 2\pi] &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \cos(t) \end{aligned}$$

definiert. Ihre Funktionsgraphen sind in den Abbildungen 4.13 und 4.14 dargestellt. Der Wertebereich der Sinus- und Kosinusfunktion ist zwar jeweils die Menge aller reellen Zahlen, der Bildbereich ist in diesen beiden Fällen jedoch jeweils nur das Intervall $[-1, 1]$.

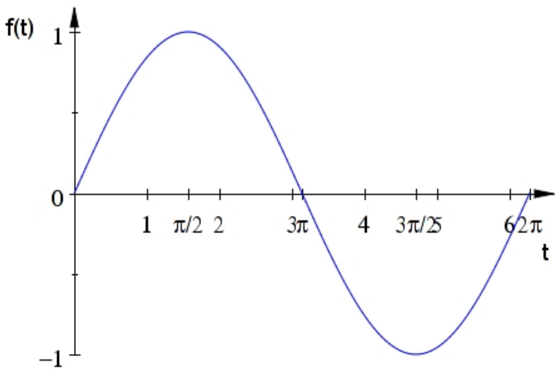


Abbildung 4.13 Graph von $\sin(x)$

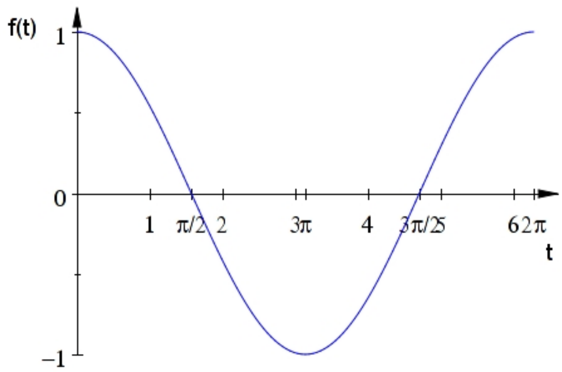


Abbildung 4.14 Graph von $\cos(x)$

Wir können nun den Definitionsbereich von Sinus und Kosinus sogar auf ganz $\mathbb{R}$ ausdehnen, indem wir die Funktionen anschaulich immer „aneinanderkleben“: Wir definieren einfach für alle $t \in [0, 2\pi]$ und alle ganzen Zahlen $n \in \mathbb{Z}$

$$\cos(t + 2\pi n) = \cos(t)$$

und

$$\sin(t + 2\pi n) = \sin(t).$$

Da sich die Werte von Sinus und Kosinus regelmäßig wiederholen, nennt man diese Funktionen *periodisch* mit der Periode 2π.

4.5.3 Eigenschaften der Sinus- und Kosinusfunktion

- Die Funktionswerte der Sinus- und der Kosinusfunktion liegen alle zwischen -1 und 1. Dies liegt daran, dass wir Sinus und Kosinus als Koordinaten von Punkten des Einheitskreises definiert haben, und diese nur zwischen -1 und 1 liegen können. Insbesondere gilt aufgrund des Satzes von Pythagoras immer $\sin^2(t) + \cos^2(t) = 1$.
- Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt: $-\sin(t) = \sin(-t)$ und $\cos(t) = \cos(-t)$.
- Es gelten die *Additionstheoreme*:

$$\begin{aligned} \sin(x \pm y) &= \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y) \\ \cos(x \pm y) &= \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y) \end{aligned}$$

Die Sinusfunktion ist zum Beispiel auf dem Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ streng monoton wachsend und bildet dieses Intervall auf das Intervall $[-1, 1]$ ab. Damit existiert auf diesen Intervallen die Umkehrfunktion der Sinusfunktion. Dies ist die sogenannte Arcus-Sinus-Funktion:

$$\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],$$

ihr Graph ist in Abbildung 4.15 dargestellt.

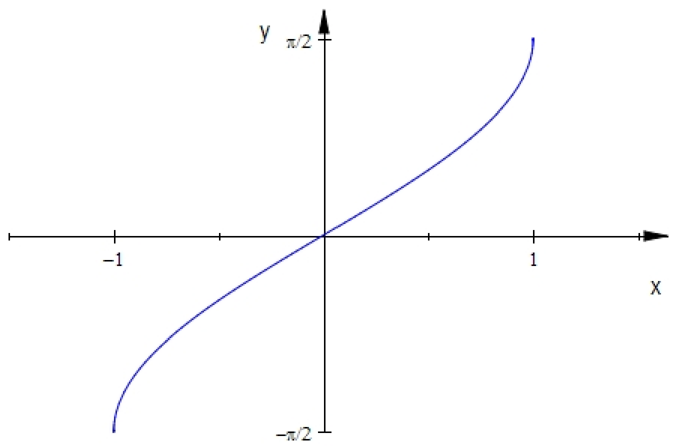


Abbildung 4.15 Graph der Arcus-Sinus-Funktion

Genauso ist die Kosinusfunktion auf dem Intervall $[0, \pi]$ streng monoton fallend und besitzt damit eine Umkehrfunktion:

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi],$$

ihr Graph ist in Abbildung 4.16 dargestellt.

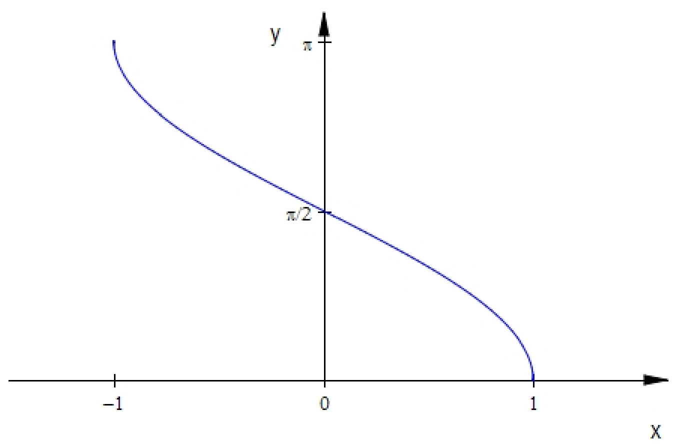


Abbildung 4.16 Graph der Arcus-Kosinus-Funktion

4.5.4 Biologisches Beispiel

Widmen wir uns nun der konkreten Lösung von Problem 2. In Abbildung 4.10 ist der Graph der Funktion $f(t)$ gezeichnet, die die Tageslänge abhängig vom Tag des Jahres ausdrückt. In einer Anwendungsaufgabe bestimmen Sie diese exakt, sie lautet

$$f(t) = 12,24 + 4,41\sin(\frac{2\pi}{360}\cdot t - \frac{9}{20}\pi).$$

In dieser Lösung ist der Parameter für die Sinusfunktion in Bogenmaß angegeben. In (Winkel-)Grad wäre die Lösung

$$\tilde{f}(t) = 12,24 + 4,41\sin(t - 81).$$

Da die Ackerschmalwand genau dann blüht, sobald ein Tag länger als 16 Stunden hell ist, ist der Zeitpunkt ihrer Blüte gleich dem kleinsten positiven Wert t, für den $f(t) = 16$ gilt. Wir erhalten damit die Gleichungen

$$\begin{aligned} 12,24 + 4,41\sin(\frac{2\pi}{360}\cdot t - \frac{9}{20}\pi) &= 16 \\ \Longleftrightarrow \sin(\frac{2\pi}{360}\cdot t - \frac{9}{20}\pi) &= \frac{3,76}{4,41} \\ \Rightarrow \frac{2\pi}{360}\cdot t - \frac{9}{20}\pi &= \arcsin(\frac{3,76}{4,41}) \\ \Rightarrow t &\approx 139 \end{aligned}$$

Damit blüht die Ackerschmalwand ungefähr am 139. Tag des Jahres, wobei wir hier zur Vereinfachung der Rechnungen von einem Jahr bestehend aus zwölf Monaten je 30 Tagen ausgegangen sind. Die Pflanze würde also ungefähr ab dem 19. Mai blühen.

4.6 Exponentialfunktion und natürlicher Logarithmus

Bevor wir die Exponentialfunktion definieren können, machen wir zunächst die folgende Beobachtung. Ist x eine beliebige Zahl, so konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

absolut. Dies können wir sofort mit dem Quotientenkriterium nachrechnen: Es ist

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1} n!}{(n+1)! x^n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x}{n+1} \right| = 0 < 1.$$

Damit ist also für jede reelle Zahl $x \in \mathbb{R}$ der Wert $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ definiert.

Definition. Die Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ mit

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

heißt *Exponentialfunktion*.

Genauso wie $\sin(x)$ und $\cos(x)$ für beliebige reelle Zahlen x mit dem Taschenrechner berechnet werden können, kann auch $\exp(x)$ berechnet werden. Häufig wird $\exp(x)$ auch mit e^x bezeichnet.

Satz. *Für die Exponentialfunktion* $\exp(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ *mit*

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

gilt:

- $\exp(0) = 1$
- $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$, *die sogenannte* Funktionalgleichung der Exponentialfunktion.
- *Man definiert die Eulersche Zahl* e *durch* $e := \exp(1)$.
- *Der Graph der Exponentialfunktion ist in Abbildung 4.17 dargestellt.*

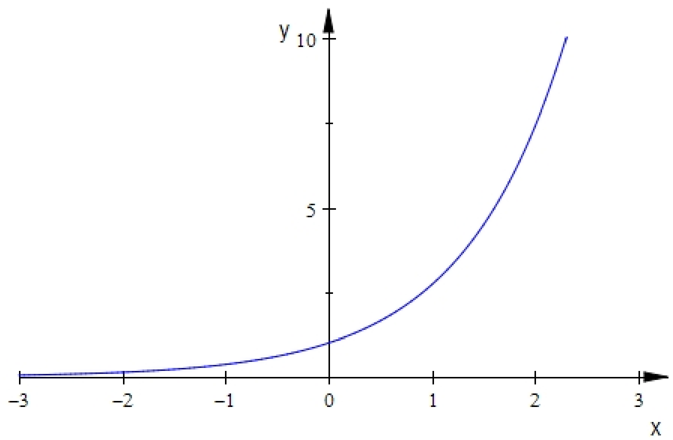


Abbildung 4.17 Graph der Exponentialfunktion

- *Die Exponentialfunktion ist injektiv.*
- *Die Exponentialfunktion ist streng monoton steigend.*

Der natürliche Logarithmus ist nun nichts anderes als die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion:

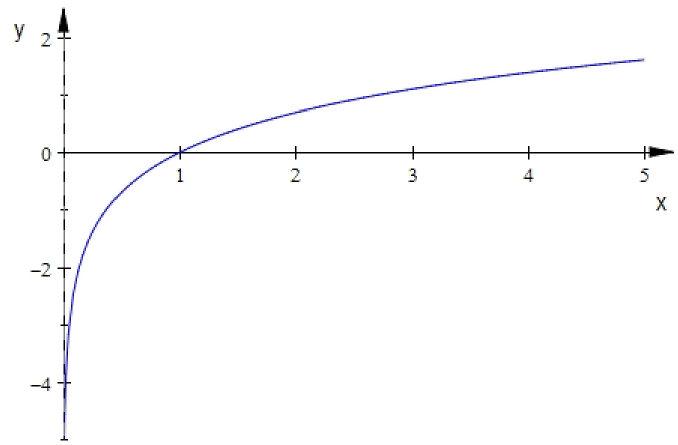


Abbildung 4.18 Graph des natürlichen Logarithmus

Definition. Die Umkehrfunktion $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ der Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ heißt *natürlicher Logarithmus*.

Der Graph des natürlichen Logarithmus ist in Abbildung 4.18 dargestellt. Der natürliche Logarithmus erfüllt aufgrund seiner Definition die Bedingungen

$$\exp(\ln(x)) = x$$

für $x \in (0, \infty)$ und

$$\ln(\exp(x)) = x$$

für $x \in \mathbb{R}$.
Mithilfe der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion erhalten wir die *Funktionalgleichung des natürlichen Logarithmus:*

$$\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$$

für $x, y \in (0, \infty)$.

4.7 Allgemeine Potenz und allgemeine Logarithmusfunktion

Bisher kennen wir nur Potenzen mit rationalen Exponenten. In Abschnitt 1.3.2 haben wir für jede reelle positive Zahl a und jede rationale Zahl $\frac{z}{n}$ mit ganzzahligem Zähler z und Nenner n die Potenz $a^{\frac{z}{n}}$ definiert als $\sqrt[n]{a^z}$.
Mithilfe der Exponentialfunktion und ihrer Umkehrfunktion, dem natürlichen Logarithmus, können wir nun allgemein die Potenz a^x für beliebige positive reelle Zahlen a und beliebiges $x \in \mathbb{R}$ definieren:

Definition. Sei $x \in \mathbb{R}$ und a eine positive reelle Zahl. Dann definieren wir

$$a^x := \exp(x \ln a).$$

Ist a eine positive reelle Zahl, so definiert sie eine Funktion

$$f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$$

durch

$$f(x) = a^x.$$

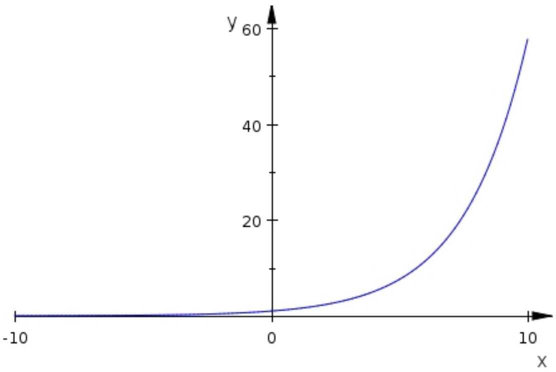


Abbildung 4.19 Graph der Funktion $f(x) = 1,5^x$.

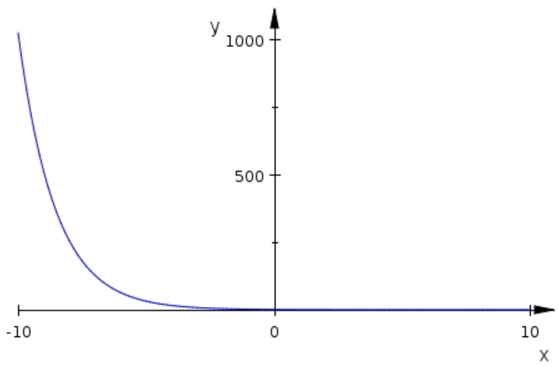


Abbildung 4.20 Graph der Funktion $f(x) = 0,5^x$.

Wir werden in Kapitel 5 sehen, dass diese Funktionen, abhängig von a stets entweder streng monoton steigend oder streng monoton fallend sind. Insbesondere ist jede solche Potenzfunktion damit bijektiv, wir können also ihre Umkehrfunktion definieren.

Definition. $\log_a : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ sei die Umkehrfunktion der Funkion $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ mit $f(x) = a^x$. Sie ordnet jedem $y \in [0, \infty)$ die (eindeutige) Zahl $x \in \mathbb{R}$ zu, für die gilt

$$a^x = y,$$

d. h.

$$\log_a(y) = x.$$

Man bezeichnet $\log_a(y)$ mit dem *Logarithmus von y zur Basis a.*

Bemerkung. Um den allgemeinen Logarithmus $\log_a(y)$ mit dem Taschenrechner zu berechnen, greift man zu einem Trick. Es gilt nämlich

$$\log_a(y) = \frac{\ln(y)}{\ln(a)},$$

d. h. der Logarithmus von y zur Basis a ist der Quotient des natürlichen Logarithmus von y durch den natürlichen Logarithmus von a.

Dies können wir sofort nachrechnen, wir müssen nur überprüfen, ob tatsächlich $a^{\frac{\ln(y)}{\ln(a)}}$ gleich y ist: Es gilt

$$\begin{aligned} a^{\frac{\ln(y)}{\ln(a)}} &= \exp\left(\frac{\ln(y)}{\ln(a)} \cdot \ln(a)\right) \\ &= \exp(\ln(y)) \\ &= y. \end{aligned}$$

Biologisches Beispiel

Kommen wir nun zu Problem 3. Viele Wachstumsvorgänge lassen sich mithilfe einer allgemeinen Potenzfunktion näherungsweise beschreiben. In unserem Beispiel vermehren sich Bakterien in einem Nährmedium jede Stunde um 50 Prozent, wobei wir eine Ausgangspopulation von 1000 Bakterien haben. Nach einer Stunde sind es also bereits $1000 \cdot (1 + \frac{50}{100}) = 1000 \cdot 1,5$ Bakterien, nach zwei Stunden $1000 \cdot 1,5^2$ Bakterien usw. Allgemein beschreibt dann die Funktion

$$f(x) = 1000 \cdot 1,5^x$$

die ungefähre Anzahl an Bakterien nach x Stunden, wobei x jetzt eine beliebige reelle Zahl sein kann.
Damit sind es nach $4,7$ Stunden $f(4,7) = 1000 \cdot 1,5^{4,7} \approx 6724$ Bakterien. Um die Frage zu beantworten, ab wann es ungefähr eine Million Bakterien sind, suchen wir ein $x \in \mathbb{R}$, für dass gilt

$$\begin{aligned} 1000 \cdot 1,5^x &= 1.000.000 \qquad |:1.000 \\ \Rightarrow 1,5^x &= 1.000 \\ \Rightarrow x &= \log_{1,5}(1.000) \end{aligned}$$

Nach $\frac{\ln(1.000)}{\ln(1,5)} \approx 17,04$ Stunden sind es über eine Million Bakterien.

4.8 Zusammenfassung

- Eine *Funktion* ist eine Abbildung $f : X \to Y$, für die die Mengen X und Y Teilmengen der reellen Zahlen sind. Die Menge X heißt *Definitionsbereich* der Funktion f. Die Menge Y heißt *Wertebereich* der Funktion f. Die Menge $f(X) = \{y \in Y \mid \exists x \in X \text{ mit } f(x) = y\}$ aller Werte aus Y, die tatsächlich angenommen werden, heißt *Bildbereich* der Funktion f.

- Der *Graph einer Funktion* $f : X \to Y$ ist definiert als die Menge

$$\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in X\}.$$

- Beispiele für Funktionen sind konstante, lineare, Polynom-, rationale und zusammengesetzte Funktionen

- Sei $f : X \to Y$ eine bijektive Funktion. Dann ist die *Umkehrfunktion* $g : Y \to X$ definiert als die Funktion g, für die die Kompositionsabbildungen $h := g \circ f$ und $\tilde{h} := f \circ g$ jeweils die Identität sind. Es muss also
$$h(x) = g(f(x)) = x$$
und
$$\tilde{h}(x) = f(g(x)) = x$$
gelten.

- Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}$. Sei a eine beliebige reelle Zahl. Angenommen, es gibt eine konvergente Folge von reellen Zahlen $x_n \in D$, die gegen a konvergiert. Dann *konvergiert f für $x \to a$ gegen den Grenzwert y*, falls für jede konvergente Folge von reellen Zahlen $x_n \in D$ mit Grenzwert a die Folge $f(x_n)$ konvergiert mit Grenzwert y, wir schreiben dann $\lim\limits_{x \to a} f(x) = y$.

- Ist $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $a \in \mathbb{R}$, so konvergiert f an der Stelle a gegen ein $y \in \mathbb{R}$ genau dann, wenn sowohl der linksseitige Grenzwert $\lim\limits_{x \nearrow a} f(x)$ als auch der rechtsseitige Grenzwert $\lim\limits_{x \searrow a} f(x)$ existieren und gleich y sind.

- Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit Definitionsbereich D. Sei $a \in D$. Dann heißt die Funktion f *stetig im Punkt a*, wenn der Grenzwert $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ existiert und gleich $f(a)$ ist. Ist die Funktion f in jedem Punkt von D stetig, so sprechen wir von einer *stetigen Funktion*.

- Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ zwei in einem Punkt $a \in D$ stetige Funktionen. Dann gilt:
  - Die Summe $f + g$ ist stetig in a. Hierbei ist die Funktion $f + g : D \to \mathbb{R}$ definiert durch $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.
  - Das Produkt $f \cdot g$ ist stetig in a. Hierbei ist die Funktion $f \cdot g : D \to \mathbb{R}$ definiert durch $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.
  - Ist $g(a)$ ungleich null, so ist auch der Quotient $\frac{f}{g}$ stetig in a. Hierbei ist die Funktion $\frac{f}{g}$ definiert durch $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ für alle $x \in D$ mit $g(x) \neq 0$.
  - Sind $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : D' \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen und $f(D) \subset D'$, so können wir die sogenannte *Komposition* dieser Abbildungen definieren als die Abbildung $f \circ g : D \to \mathbb{R}$ mit $(f \circ g)(x) := f(g(x))$. Ist nun f stetig in a und g stetig in $f(a)$, so ist die Komposition $f \circ g$ stetig in a.

- Für einen Winkel α gibt es verschiedene Maße. Eine Möglichkeit ist die Angabe des Winkels in Grad (von 0° bis 360°). Eine andere Möglichkeit, einen Winkel eindeutig zu beschreiben, ist das sogenannte Bogenmaß.

- Wir haben Funktionen

$$\begin{aligned}\sin : [0, 2\pi] &\to [-1, 1]\\ t &\mapsto \sin(t)\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\cos : [0, 2\pi] &\to [-1, 1]\\ t &\mapsto \cos(t)\end{aligned}$$

definiert.

- Für alle $t \in [0, 2\pi]$ und alle ganzen Zahlen $n \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\cos(t + 2\pi n) = \cos(t)$$

und

$$\sin(t + 2\pi n) = \sin(t).$$

Sinus und Kosinus sind periodische Funktionen mit Periode 2π. Dadurch erhalten wir Funktionen $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ und $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$.

- Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt: $-\sin(t) = \sin(-t)$ und $\cos(t) = \cos(-t)$.
- Es gelten die *Additionstheoreme*:
- Umkehrfunktionen zur Sinus- und Kosinusfunktion sind

$$\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

bzw.

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi].$$

$$\begin{aligned}\sin(x \pm y) &= \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)\\ \cos(x \pm y) &= \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)\end{aligned}$$

- Die Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ mit

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

heißt *Exponentialfunktion.*

- Für die Exponentialfunktion $\exp(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ mit

$$\exp(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

gilt:

- $\exp(0) = 1$
- $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$, die sogenannte *Funktionalgleichung der Exponentialfunktion.*
- Man definiert die Eulersche Zahl e durch $e := \exp(1)$.
- Der Graph der Exponentialfunktion ist in Abbildung 4.17 dargestellt.
- Die Exponentialfunktion ist injektiv.
- Die Exponentialfunktion ist streng monoton steigend.

- Die Umkehrfunktion $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ der Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ heißt *natürlicher Logarithmus.*

- Die Funktionalgleichung des natürlichen Logarithmus lautet

$$\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y).$$

- Sei $x \in \mathbb{R}$ und a eine positive reelle Zahl. Dann definieren wir

$$a^x := \exp(x \ln a).$$

- $\log_a : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ sei die Umkehrfunktion der Funkion $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ mit $f(x) = a^x$. Sie ordnet jedem $y \in [0, \infty)$ die (eindeutige) Zahl $x \in \mathbb{R}$ zu, für die gilt

$$a^x = y,$$

d. h.

$$\log_a(y) = x.$$

Man bezeichnet $\log_a(y)$ mit dem *Logarithmus von y zur Basis a.*

- Es gilt $\log_a(y) = \frac{\ln(y)}{\ln(a)}$.

4.9 Aufgaben

Rechenaufgaben

1. Geben Sie den gültigen Definitionsbereich der Funktionen auf $\mathbb{R}$ an.

(a) $f(x) = \frac{1}{x+1}$	(b) $f(x) = \frac{x}{(x+1)^2-4}$	(c) $f(x) = \frac{1}{e^x-1}$
(d) $f(x) = \frac{1}{\log(x-1)}$	(e) $f(x) = \frac{1}{x^3+3x^2+2x}$	(f) $f(x) = \frac{x}{x}$
(g) $f(x) = \dfrac{1}{e^{x \cdot \log x}}$	(h) $f(x) = \frac{1}{\sin(x)\cos(x)}$	(i) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

2. Bestimmen Sie die Grenzwerte der Funktionen

   (a) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x+1}$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3-x}{x}$ (c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4+x^3}{x^2}$

   (d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^4-x^2}{x-1}$ (e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}$ (f) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt{x}}{x^{\frac{3}{2}}}$

3. Sei $f : X \to Y$ eine Funktion. Bestimmen Sie den Bildbereich von f. Ist die Funktion surjektiv?

   a) $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$
   b) $X = [-4, 1]$, $Y = [-4, 5]$, $f(x) = x + 2x - 3$
   c) $X = [0, 2\pi]$, $Y = [-10, 10]$, $f(x) = \cos(x)$

4. Sei $f : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Bestimmen Sie den Bildbereich von f. Ist die Funktion injektiv? Wenn ja, berechnen Sie eine Umkehrfunktion zu f.

   a) $X = \mathbb{R}$, $f(x) = \exp(x^2)$
   b) $X = (0, \infty)$, $f(x) = \ln(2x + 3)$
   c) $X = \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 9x^2 + 27x - 27$
   d) $X = [-10, -1]$, $f(x) = \ln(x^4)$
   e) $X = [0, \infty]$, $f(x) = \frac{x^4}{x^2+1}$
   f) $X = [0, 2\pi]$, $f(x) = 5\sin(x)$

5. Sei $f : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Ist f injektiv? Wenn nicht, schränken Sie den Definitionsbereich so ein, dass f injektiv ist. Berechnen Sie dann die Umkehrfunktion.

   a) $X = \mathbb{R}$, $f(x) = -x^2 + 6x$
   b) $X = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $f(x) = (\sin(x))^2$
   c) $X = \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^3 & x \le 2 \\ x + 36 & x > 2 \end{cases}$

6. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Ist f stetig auf $\mathbb{R}$?

   a) $f(x) = x^2 + \frac{4}{3}x^3$ b) $f(x) = \frac{x^7}{x+1}$ c) $f(x) = \ln(x^2)$

   d) $f(x) = 2^x$ e) $f(x) = \frac{x^2-2}{x+2}$ f) $f(x) = \begin{cases} 3x & x < 1 \\ 4 & x \ge 1 \end{cases}$

   g) $f(x) = |x|$ h) $f(x) = \frac{|x|}{x}$ i) $f(x) = \begin{cases} x^3 & x \le 0 \\ x^2 & x > 0 \end{cases}$

j) $f(x) = e^x \cdot x^2$ k) $f(x) = \frac{x^2+x}{x}$ l) $f(x) = \begin{cases} a^{\frac{3x^3+2x+2}{x^3-8}} & x \leq 1 \\ (-\cos(\pi x)) \cdot \frac{2x^2-1}{ax^2} & x > 1 \end{cases}$

7. Sei $f : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Ist f stetig auf X?

   a) $X = [1,2]$ b) $X = [0,\infty)$ c) $X = [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$

   $f(x) = \exp(\frac{7}{6x})$ $f(x) = 3^{x^2+\frac{2}{x-1}}$ $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

8. Rechnen Sie nach, dass für jede reelle Zahl x gilt: $\sin(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2})$ und $\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$.

9. Zeigen Sie, dass für alle reellen Zahlen x und y gilt:

$$\sin(x) - \sin(y) = 2\cos(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{x-y}{2}),$$

   indem Sie

$$\begin{aligned} & 2\cos(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{x-y}{2}) \\ &= \sin(\frac{x-y}{2})\cos(\frac{x+y}{2}) + \cos(\frac{x-y}{2})\sin(\frac{x+y}{2}) \\ &- \cos(\frac{x-y}{2})\sin(\frac{x+y}{2}) + \sin(\frac{x-y}{2})\cos(\frac{x+y}{2}) \end{aligned}$$

   und ein Additionstheorem benutzen.

Kurztest

Kreuzen Sie die richtigen Antworten an:

1. Eine Funktion $f : X \to Y$ ist injektiv,
   a) ☐ wenn sie bijektiv ist.
   b) ☐ wenn für $x, x' \in X$ mit $x \neq x'$ folgt, dass auch $f(x) \neq f(x')$ gilt.
   c) ☐ wenn für jedes $y \in Y$ ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ existiert.
   d) ☐ wenn für $x, x' \in X$ mit $x \neq x'$ folgt, dass gilt $f(x) = f(x')$.
   e) ☐ wenn der Definitionsbereich gleich dem Wertebereich ist.

2. Eine konstante Funktion (z. B. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 5$) ist im Koordinatensystem
   a) ☐ eine Senkrechte.
   b) ☐ eine Waagerechte.
   c) ☐ weder waagerecht noch senkrecht.
   d) ☐ eine Parabel.

3. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x(x-3)$ ist
   a) ☐ eine lineare Funktion.
   b) ☐ eine Polynomfunktion.
   c) ☐ eine konstante Funktion.
   d) ☐ eine Funktion mit dem y-Achsenabschnitt -3.

4. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 3x$ ist
   a) ☐ eine Funktion mit Steigung -3.
   b) ☐ eine Funktion mit Steigung 3.
   c) ☐ eine Funktion mit y-Achsenabschnitt 3.
   d) ☐ eine Funktion mit y-Achsenabschnitt 0.
   e) ☐ im Koordinatensystem eine Gerade.
   f) ☐ im Koordinatensystem eine Polynomfunktion.
   g) ☐ im Koordinatensystem eine lineare Funktion.

5. Welche Funktionen erfüllen die Bedingung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$
   a) ☐
   b) ☐
   c) ☐

6. Gegeben sei folgende Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x > 5 \\ 4 & \text{falls } x \leq 5 \end{cases}$$

   Welche Antwort enthält den korrekten Bildbereich?
   a) ☐ Das Intervall $]0, 4[$.
   b) ☐ Das Intervall $[0, 4]$.
   c) ☐ Die Menge $\mathbb{R}_0^+$.
   d) ☐ Die Menge $\{-1, 0, 4, 7\}$.
   e) ☐ Die Menge $\mathbb{R} \setminus \{0, 4\}$.

7. Es seinen $P, Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Polynomfunktionen. $\dfrac{P}{Q}$ ist ebenfalls eine Funktion und es gilt
   a) ☐ für den Definitionsbereich keine Einschränkung.
   b) ☐ für den Wertebereich keine Einschränkung.
   c) ☐ für den Definitionsbereich die Einschränkung, dass er die Nullstellen des Polynoms P nicht enthält.
   d) ☐ für den Definitionsbereich die Einschränkung, dass er die Nullstellen des Polynoms Q nicht enthält.

e) ☐ für den Wertebereich die Einschränkung, dass er die Nullstellen des Polynoms P nicht enthält.

f) ☐ für den Wertebereich die Einschränkung, dass er die Nullstellen des Polynoms Q nicht enthält.

8. Kreuzen Sie die richtigen Antworten an!

   a) ☐ Seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen in D mit $\lim_{n\to\infty} x_n = c$ bzw. $\lim_{n\to\infty} y_n = c$, dann gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(y_n)$.

   b) ☐ Sei $a \in D$ und es gelte $\lim_{x\to a} f(x) = y$, dann gilt $f(a) = y$.

   c) ☐ Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in D mit Grenzwert b, dann folgt $b \in D$.

9. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \dfrac{x^2-9}{x^2+x-6}$ hat für $x \to 4$ den Grenzwert

   a) ☐ $\dfrac{5}{12}$

   b) ☐ $\dfrac{2}{3}$

   c) ☐ $\dfrac{1}{2}$

   d) ☐ Die Funktion besitzt keinen Grenzwert.

10. Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ zwei in a stetige Funktionen, dann gilt:

    a) ☐ $f \cdot g$ ist stetig in a.

    b) ☐ $\dfrac{f}{g}$ ist stetig in a.

    c) ☐ $f + g$ ist stetig in 2a.

11. Welche der folgenden Funktionen sind stetig?

    a) ☐ $f(x) = \dfrac{7}{8}$.

    b) ☐ $f(x) = mx + b$, wobei $m, b \in \mathbb{R}$.

    c) ☐ $f(x) = 4x^3 - 7x^2 - 3$.

    d) ☐ $f(x) = 2x$.

12. Es gilt:

    a) ☐ Der Kosinus eines Winkels α in einem beliebigen Dreieck ist die Länge der Ankathete dividiert durch die Länge der Hypothenuse.

    b) ☐ Der Sinus eines Winkels α in einem rechtwinkligen Dreieck ist die Länge der Gegenkathete dividiert durch die Länge der Hypothenuse.

13. Ein Winkel von 180° entspricht im Bogenmaß

    a) ☐ $\dfrac{\pi}{2}$.

b) ☐ 2π.
c) ☐ π.
d) ☐ $\frac{\pi}{4}$.

14. Kreuzen Sie die richtigen Antworten an!
   a) ☐ Der Graph von $\sin(x)$ hat Nullstellen bei $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{5}{2}\pi$, ...
   b) ☐ Der Graph von $\cos(x)$ hat Nullstellen bei $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{5}{2}\pi$, ...
   c) ☐ Der Graph von $\sin(x)$ hat Nullstellen bei 0, π, 2π, 3π, ...
   d) ☐ Der Graph von $\cos(x)$ hat Nullstellen bei 0, π, 2π, 3π, ...

15. Kreuzen Sie die richtigen Antworten an!
   a) ☐ Es gilt $\sin(x) + \cos(x) = 1$.
   b) ☐ Es gilt $\sin^2(x) - \cos^2(x) = 1$.
   c) ☐ Es gilt $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.
   d) ☐ Es gilt $-\sin(x) = \sin(x)$.
   e) ☐ Es gilt $\cos(-x) = \cos(x)$.

16. Kreuzen Sie die richtigen Antworten an!
   a) ☐ Es gilt $\exp(3 + 7) = \exp(3) + \exp(7)$.
   b) ☐ Es gilt $\exp(3 + 7) = \exp(3) \cdot \exp(7)$.
   c) ☐ Es gilt $\exp(3 + 7) = \frac{\exp(3}{\exp(7)}$.
   d) ☐ Es gilt $\exp(3 + 7) = \exp(3) - \exp(7)$.

17. Kreuzen Sie die richtigen Antworten an!
   a) ☐ Es gilt $\log_a(\sqrt{x}) = \log_a(x) \cdot \log_a(\frac{1}{2})$.
   b) ☐ Es gilt $\log_a(\sqrt{x}) = \sqrt{\log_a(x)}$.
   c) ☐ Es gilt $\log_a(\sqrt{x}) = \log_a(\frac{x}{2})$.
   d) ☐ Es gilt $\log_a(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \cdot \log_a(x)$.

18. Kreuzen Sie die richtigen Antworten an!
   a) ☐ Es gilt $\ln(-7) = \ln(-1) + \ln(7)$.
   b) ☐ Es gilt $\ln(-7) = -1 \cdot \ln(7)$.
   c) ☐ Es gilt $\ln(-7)$ ist nicht definiert.
   d) ☐ Es gilt $\ln(-7) = \ln(-1) \cdot \ln(7)$.

Anwendungsaufgaben

1. a) Eine Biologin untersucht das Verhalten von Grillen bei unterschiedlichen Umgebungstemperaturen. Dabei macht sie die folgenden Beobachtungen

Temperatur in Grad Fahrenheit	50	60	70	80
Anzahl an Zirpen in 15 Sekunden	10	20	30	40

Anscheinend zirpt diese Grillenart häufiger, je wärmer es wird. Können Sie die Daten als Funktion ausdrücken und eine These aufstellen, wie häufig Grillen ungefähr zum Beispiel bei 55 Grad Fahrenheit zirpen?

b) Angenommen, Ihre Funktion aus dem ersten Aufgabenteil ist richtig. Können Sie daraus eine Funktion herleiten, die die Temperatur in Grad Celsius abhängig von der Anzahl der Zirpen in 15 Sekunden angibt?(Hinweis: in der ersten Anwendungsaufgabe in 1.8 haben Sie evtl. schon eine Formel für die Umrechnung von Celsius in Fahrenheit und umgekehrt berechnet.)

2. Ein Biologe untersucht das Wachstum von Amaryllis. Er beobachtet, dass Pflanzen dieser Gattung innerhalb einiger Wochen von der Knolle zur vollen Pflanze mit Blüten auswachsen. Dazu stellt er die folgende Messtabelle auf:

Zeit in Tagen	0	2	4	6	8	10
Höhe in Zentimeter	4	6	8	10	12	14

a) Stellen Sie diese Daten grafisch dar.

b) Können Sie eine Formel für Ihren Funktionsgrafen angeben?

c) Angenommen, die Amaryllis wächst mit der gleichen Wachstumsrate weiter. Wie groß wäre sie nach 20 Tagen?

d) Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse. Beschreibt Ihre Funktionsformel, zumindest teilweise, das Wachstum von Pflanzen der Gattung Amaryllis? Begründen Sie Ihre Antwort.

3. Der Luftstrom L beim Aus- und Einatmen wird in „bewegter Luftmenge pro Zeiteinheit“ gemessen. Er ändert sich in Abhängigkeit von der Zeit näherungsweise nach einer Sinusfunktion.

a) Können Sie den Luftstrom L eines Menschen als Funktion in Abhängigkeit von der Zeit darstellen, wenn Sie davon ausgehen, dass der maximale Luftstrom (sowohl beim Ein- als auch beim Ausatmen) $0,5$ Liter pro Sekunde ist und ein Atemzyklus (das heißt einmal ein- und einmal ausatmen) ungefähr fünf Sekunden beträgt? Gehen Sie dabei davon aus, dass zum Zeitpunkt $t = 0$ die Lungen leer sind, das heißt zunächst eingeatmet wird. Zeichnen Sie den Graphen Ihrer Funktion und geben Sie sowohl den Definitions- als auch den Wertebereich an.

b) Drücken Sie die Funktion L näherungsweise durch eine Kosinusfunktion aus (anstatt wie im ersten Aufgabenteil die Funktion L näherungsweise durch eine Sinusfunktion auszudrücken).

4. Eine Bakterienkultur vermehrt sich in jeder Stunde um 50 Prozent. Zu Beginn des Experimentes sind es 1000 Bakterien. Wieviele Bakterien sind es nach 10,3 Stunden?

5. In dieser Aufgabe geht es um das Finden geeigneter Funktionen, die biologische Zusammenhänge beschreiben.

   (a) Angenommen wir betrachten eine kugelförmige Zelle vom Radius r mit Volumen $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ und Oberfläche $S = 4\pi r^2$. Drücken Sie das Volumen V als Funktion von S aus. Wie ändert sich das Volumen V, wenn die Oberfläche S verdoppelt wird?

   fussnote ergaenzen

   (b) Die Bergmannsche Regel[4] beschreibt die Beobachtung, dass bei endothermen Tieren die Individuen einer Art in kälteren Regionen größer sind als in wärmeren Regionen. Können Sie dieses Phänomen mathematisch erklären? Wird das Verhältnis Oberfläche/Volumen mit steigender Körpergröße größer oder kleiner?

   (c) Bei den Weibchen der Schlange *Lampropeltis polyzona* ist die Gesamtlänge l eine Funktion der Schwanzlänge s von der Form $l = as + b$ mit reellen Zahlen a und b. Die folgenden Messdaten sind gegeben:

s (in mm)	60	140
l (in mm)	455	1050

   Können Sie aus diesen Messdaten eine Funktion $l(s)$ von obiger Form $l = as+b$ mit reellen Zahlen a und b bestimmen? Welche Gesamtlänge hat eine Schlange bei einer Schwanzlänge von 100 mm?

6. Für unsere geographische Breite ist der kürzeste Tag $7,83$ Stunden lang, der längste $16,65$ Stunden. Wir wollen die in Problem 2 verwendete und in Abbildung 4.10 dargestellte Funktion f herleiten. $f(t)$ ist eine Funktion (t in Tagen, $t = 0$ entspreche 0 Uhr am 1. Januar), mit deren Hilfe man für jeden Tag des Jahres dessen Länge in Stunden genähert berechnen kann.

   (a) Zunächst ist es sinnvoll, den Graphen der Sinusfunktion auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ zu zeichnen. Zeichnen Sie ebenfalls den Graphen der Funktion $f(x) = 4 \cdot \sin(x)$.

   (b) Wie müssen Sie die Funktion $f(x)$ verändern, damit die neue Funktion g als Funktionsgraph den um 5 nach rechts verschobenen Graphen der ursprünglichen Funktion f besitzt? Geben Sie außerdem eine Funktion h an, deren Funktionsgraph gleich dem um 3 nach oben verschobenen Funktionsgraph der Funktion g ist.

   (c) Wir machen nun den Ansatz

$$f(t) = m + A(sin(wt + p))$$

   mit Konstanten m, A, w, p. Wir gehen davon aus, dass der längste Tag des Jahres auf den 21. Juni und der kürzeste Tag auf den 21. Dezember fällt.

[4]Begon, M., Harper, J., Townsend, C.: *Ökologie* S.

Weiter nehmen wir zur Vereinfachung an, dass ein Jahr 360 Tage lang ist und jeder Monat aus 30 Tagen besteht (damit ist der 21. Juni der 171. Tag des Jahres). Mit den oben angegebenen Daten sollen nun die Größen m, A,w und p in unserem Ansatz bestimmt werden. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

- Bestimmen Sie zunächst die reelle Zahl A, indem Sie den Unterschied zwischen dem kürzesten und dem längsten Tag des Jahres berücksichtigen. Evtl. ist hier der Aufgabenteil (a) hilfreich.
- Bestimmen Sie w: Wie müssen Sie in einer Sinusfunktion den Faktor w ändern, um anstatt einer Periode von 2π eine Periode von 360 zu erhalten?
- Bestimmen Sie anschließend die reellen Zahlen m und p. Evtl. ist es hierzu hilfreich, den Graphen der Funktion f zu zeichnen und den Aufgabenteil (b) zu benutzen.

(d) Angenommen, wir betrachten eine weitere Pflanze, die genau dann im Jahr (in der Nacht) blüht, sobald die Nacht das erste Mal 9,4 Stunden lang ist. Wie können Sie hier das Datum der Nacht der Blüte bestimmen?

7. Eine Population von Bakterien besteht zum Zeitpunkt $t = 0$ aus 25000 Mitgliedern. Die Anzahl der Bakterien wächst exponentiell, so dass sich nach drei Stunden die Anzahl jeweils verdreifacht.
   (a) Geben Sie eine allgemeine Funktion $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ an, für die $f(t)$ die Größe der Bakterienpopulation nach t Stunden beschreibt.
   (b) Aus wie vielen Bakterien besteht die Population nach einer halben Stunde?
   (c) Nach welcher Zeit hat die Population die Größe von 100000 überschritten?
   (d) Wie sieht das langfristige Verhalten der Population aus. Berechnen Sie hierzu $\lim_{t\to\infty} f(t)$. Ist dieses Ergebnis realistisch?

8. In einer biochemischen Reaktion, die durch ein Enzym gesteuert wird, ist die Umwandlungsgeschwindigkeit $y = f(x)$ näherungsweise von der Konzentration x des Substrats gemäß folgender Funktion abhängig:

$$f(x) := \frac{Bx}{x + K},$$

wobei B und K konstante reelle Zahlen sind. Diese Funktion wird nach Leonor Michaelis und Maud Leonora Menten als *Michaelis-Menten-Funktion* bezeichnet. Umkehrt kann man mithilfe der Funktion f von der Umwandlungsgeschwindigkeit auf die Substratkonzentration x schließen. Bestimmen Sie hierzu die Umkehrfunktion der Michaelis-Mentenfunktion $f(x)$ für $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ und positive $B, K \in \mathbb{R}$.

5 Kurvendiskussion

Problem 1 Populationswachstum in Bezug auf die momentanen Wachstumsraten. Differentialgleichung, Campbell S. 1385 -> Motivation Ableitung

Problem 2 Temperaturoptimum von Enzymen, Campbell S. 118 ->Motivation lokale Extrema...

Ziel: Definition der Ableitung einer Funktion. Berechnung von lokalen Extrema und Wendepunkten. Motivation von Differentialgleichungen.

5.1 Differenzieren

5.1.1 Tangenten

Bevor wir die Definition einer differenzierbaren Funktion geben, wiederholen wir zunächst etwas Geometrie zur Veranschaulichung. Eine Gerade im zweidimensionalen reellen Raum $\mathbb{R}^2$ ist eindeutig gegeben durch zwei verschiedene Punkte. Sind zum Beispiel

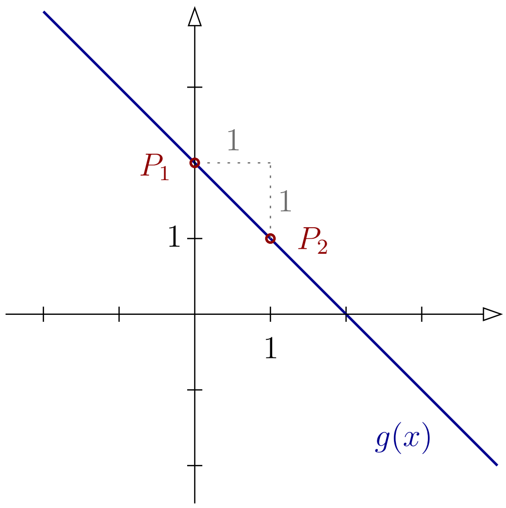


Abbildung 5.1

$P_1 = (0, 2)$ und $P_2 = (1, 1)$ wie in Abbildung 5.1 zwei Punkte einer Geraden g, also $g(0) = 2$ und $g(1) = 1$, so ist eine Geradengleichung, die diese Gerade beschreibt, gegeben durch die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = -x + 2$. Der y-Achsenabschnitt dieser

Geraden ist hier gleich 2, da $(0, 2)$ ein Punkt der Geraden ist. Ihre Steigung ist gleich

$$\frac{g(0) - g(1)}{0 - 1} = -1.$$

Ist nun $f : D \to \mathbb{R}$ eine beliebige Funktion und $x_0 \in D$ ein beliebiger Punkt des Definitionsbereiches D, so ist eine *Tangente* g an den Graphen der Funktion f durch den Punkt $(x_0, f(x_0))$ eine Gerade, die den Graphen der Funktion f im Punkt $(x_0, f(x_0))$ berührt, jedoch nicht schneidet.

Beispiele.

1. Ist $x_0 \in \mathbb{R}$ ein beliebiger Punkt und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = -x + 2$, so beschreibt die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = -x + 2 = f(x)$ eine Tangente an den Graphen der Funktion f im Punkt $(x_0, f(x_0))$. Die Steigung dieser Tangente ist in diesem Fall gleich -1. Es gibt keine weiteren Tangenten an f durch x_0, denn jede andere Gerade im reellen Raum durch den Punkt x_0 würde den Graphen von f schneiden, siehe auch Abbildung 5.2.

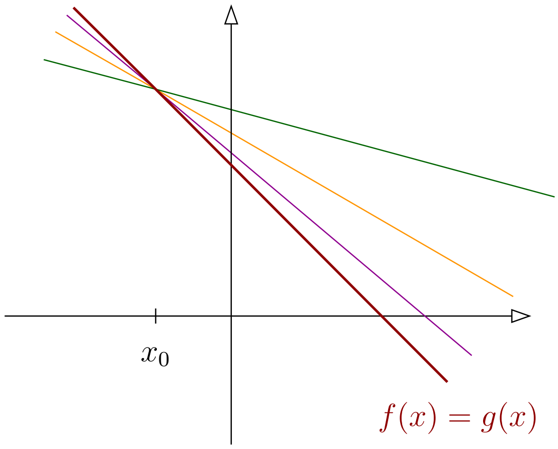


Abbildung 5.2

2. Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ und $x_0 = 0$, so ist $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = 0$ eine Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$. Die Steigung dieser Tangenten ist gleich 0. Auch hier gibt es keine weiteren Tangenten an f durch $(x_0, f(x_0))$, siehe Abbildung 5.3

3. Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|$ und $x_0 = 0$, so ist nach unserer Definition ebenfalls $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = 0$ eine Tangente an f im Punkt $(x_0, f(x_0))$. Genauso ist hier jedoch auch $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = -\frac{1}{2}x$, $g(x) = x$ oder $g(x) = \frac{3}{4}x$ eine Tangente an f im Punkt $(x_0, f(x_0))$. In diesem Beispiel gibt es also mehrere mögliche Tangenten an den Graphen der Funktion f durch den festen Punkt $(x_0, f(x_0))$, siehe hierzu auch Abbildung 5.4

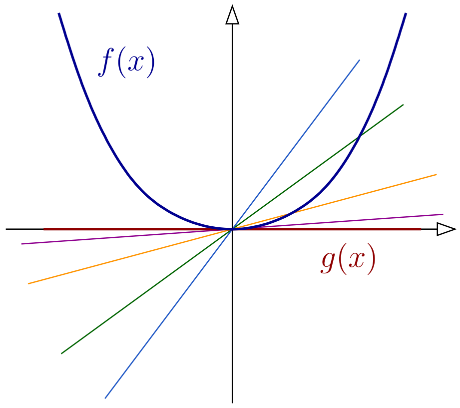


Abbildung 5.3

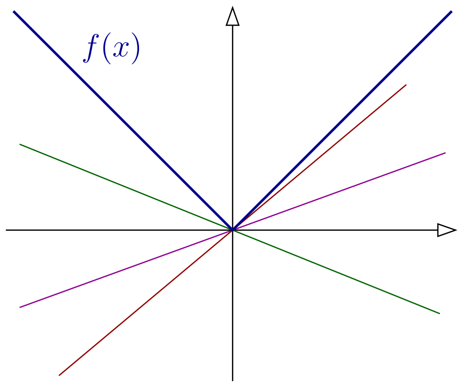


Abbildung 5.4

5.1.2 Differenzierbare Funktionen

Wir haben im vorigen Abschnitt gesehen, dass man die Steigung einer Gerade, d. h. einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ der Form $f(x) = mx + b$, in jedem Punkt sehr einfach bestimmen kann. Den Begriff der Steigung wollen wir nun für sogenannte differenzierbare Funktionen verallgemeinern. Die Steigung wird in diesen Fällen die Ableitung der Funktion in den gesuchten Stellen sein.
Anschaulich ist eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar an einer Stelle $P_0 = (x_0, f(x_0))$ mit $x_0 \in D$, wenn man an den Graphen der Funkion f **eindeutig** eine Tangente durch den Punkt P_0 zeichnen kann. Dabei haben wir jedoch gar nicht genau definiert, was eine Tangente an den Graphen sein soll, sondern nur anschaulich argumentiert, dass eine Tangente den Funktionsgraphen „berührt“. Aber ist zum Beispiel die Gerade gegeben durch $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = 0$ eine Tangente im Punkt $(0, 0)$ an den Graphen der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3$, siehe Abbildung 5.11?
Man kann auf einfache Art und Weise überprüfen, ob tatsächlich eine Tangente an f durch P_0 existiert und die Steigung dieser Tangente berechnen:

Definition. Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *differenzierbar im Punkt* $x_0 \in D$, wenn der

Grenzwert
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$
existiert. Ist dies der Fall, so heißt
$$f'(x_0) := \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$
Ableitung von f im Punkt x_0. Ist die Funktion f in jedem Punkt des Definitionsbereiches D differenzierbar, so heißt die gesamte Funktion f differenzierbar.

Hierbei ist
$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$
nichts anderes als die Steigung der sogenannten *Sekante* durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x_0+h, f(x_0+h))$. Durch den Grenzprozess
$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$
nähern wir den Punkt $(x_0+h, f(x_0+h))$ immer weiter an den Punkt $(x_0, f(x_0))$ an und drehen die entsprechende Sekante immer näher an die gesuchte Tangente. Dies wird in Abbildung 5.5 dargestellt.

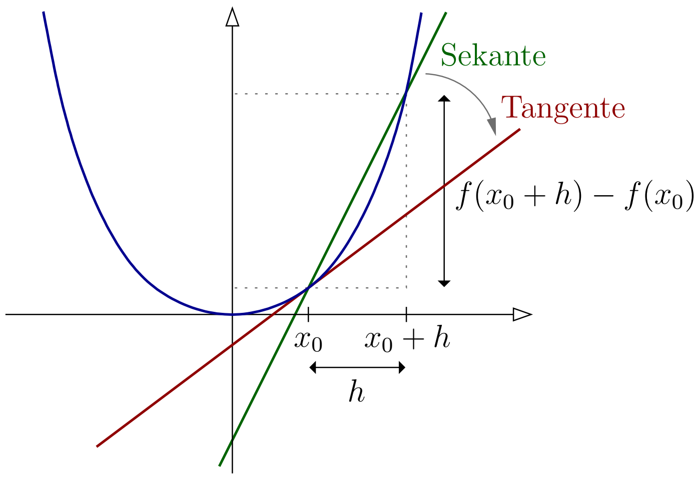


Abbildung 5.5

Beispiele.

1. Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ mit $f(x) = -x+2$. Sei $x_0\in\mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt
$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{-(x_0+h)+2-(-x_0+2)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{-x_0-h+2+x_0-2}{h}\\ &= \lim_{h\to 0} -1\\ &= -1.\end{aligned}$$

Die Ableitung der Funktion f ist also an jeder Stelle x_0 gleich -1. Dies stimmt mit unserer obigen Beobachtung, dass die Tangente an den Graphen der Funktion f in jedem Punkt gleich dem Graph der Funktion f selbst ist, überein.

2. Sei nun $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ und erneut $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0 h + h^2 - x_0^2}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 2x_0 h}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} (h + 2x_0) \\ &= 2x_0. \end{aligned}$$

Die Ableitung $f'(x_0)$ der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ an einer Stelle x_0 ist also gleich $2x_0$. Dies stimmt mit unserer obigen Beobachtung, dass die Tangente an den Graphen der Funktion f im Punkt $x_0 = 0$ gleich dem Graphen der Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = 0$ ist, überein.

3. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|$ und $x_0 = 0$. Für die Folge (h_n) mit $h_n := \frac{1}{n}$ gilt $\lim n \to \infty h_n = 0$. Genauso konvergiert die Folge $\widetilde{h_n}$ mit $\widetilde{h_n} := -\frac{1}{n}$ gegen 0. Es ist jedoch

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} \frac{|x_0 + h_n| - |x_0|}{h_n} &= \lim_{n \to \infty} \frac{h_n}{h_n} \\ &= \lim_{n \to \infty} \frac{|\frac{1}{n}|}{\frac{1}{n}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} \frac{|x_0 + \widetilde{h_n}| - |x_0|}{\widetilde{h_n}} &= \lim_{n \to \infty} \frac{|\widetilde{h_n}|}{\widetilde{h_n}} \\ &= \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n}}{-\frac{1}{n}} \\ &= -1 \end{aligned}$$

Somit existiert für $x_0 = 0$ kein Grenzwert

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

die Funktion f ist also in diesem Punkt nicht differenzierbar. Dies stimmt ebenfalls mit unseren vorherigen Beobachtungen überein: wir hatten gesehen, dass es keine eindeutige Tangente an den Graphen der Funktion f im Punkt $(0, 0)$ gibt.

5.2 Beispiele für differenzierbare Funktionen

Im vorigen Abschnitt haben wir gesehen, dass die Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = -x + 2$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = x^2$ differenzierbar sind.
Allgemein gilt

Beispiele.

1. Polynome sind differenzierbar: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0,$$

wobei $a_n, \ldots, a_0$ reelle Zahlen sind. Dann ist f an jeder Stelle x differenzierbar mit Ableitung

$$f'(x) = a_n n x^{n-1} + \ldots + a_1.$$

Es gilt nämlich für jede natürliche Zahl j

$$(x+h)^j = x^j + j x^{j-1} h + h^2 \cdot (\text{Rest abhängig von x})$$

und deswegen

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{a_n(x+h)^n + \ldots + a_0 - a_n x^n - \ldots - a_0}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{a_n n x^{n-1} h + a_{n-1}(n-1)x^{n-2} h \ldots + a_1 h + h^2(\ldots)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \Big((a_n n x^{n-1} + \ldots + a_1) + h(\ldots) \Big) \\
&= a_n n x^{n-1} + \ldots + a_1.
\end{aligned}$$

2. Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ ist differenzierbar mit Ableitung $\exp'(x) = \exp(x)$: Es gilt nämlich

$$\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{\exp(x+h) - \exp(x)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+h)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{x^n}{n!} + \frac{n x^{n-1} h}{n!} + h^2(\ldots) \Big) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n!} + h(\ldots) \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\
&= \exp(x).
\end{aligned}$$

3. Die Sinusfunktion $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar mit Ableitung
$$\sin(x)' = \cos(x).$$
Dies folgt mithilfe des Additionstheorems
$$\sin(x) - \sin(y) = 2\cos(\frac{x+y}{2})\sin(\frac{x-y}{2})$$
(siehe Aufgabe 9 in Kapitel 4) und $\lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$:
$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \left(2\cos\left(\frac{2x+h}{h}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right)\right) \\
&= \cos(x) \lim_{h\to 0} \frac{2}{h}\sin(\frac{h}{2}) \\
&= \cos(x) \lim_{h\to 0} \frac{\sin(\frac{h}{2})}{\frac{h}{2}} \\
&= \cos(x).
\end{aligned}$$

5.3 Ableitungsregeln

Allgemein ist es mühsam, für jede Funktion einzeln mithilfe der Definition der Differenzierbarkeit nachzuprüfen, ob sie differenzierbar ist, und ihre Ableitung zu berechnen. In der Praxis sind daher die folgenden Ableitungsregeln sehr nützlich:

Satz. *Angenommen, $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : D \to \mathbb{R}$ sind zwei differenzierbare Funktionen. Dann gilt*

Summenregel *Die Summe $f + g : D \to \mathbb{R}$ der Funktionen f und g ist differenzierbar. Für ihre Ableitung $(f + g)'$ gilt*
$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$
für alle $x \in D$.

Produktregel *Die Produktfunktion $f \cdot g : D \to \mathbb{R}$ mit $(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$ ist differenzierbar mit der Ableitung*
$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$
für alle $x \in D$.

Quotientenregel *Ist $g(x) \neq 0$ für alle x aus dem Definitionsbereich D, so ist die Quotientenfunktion $\frac{f}{g} : D \to \mathbb{R}$ mit $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ differenzierbar mit der Ableitung*
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$
für alle $x \in D$.

Kettenregel *Sind $f : D \to E$ und $g : E \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so ist die Kompositionsabbildung $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ mit $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ differenzierbar mit der Ableitung*

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

für alle $x \in D$, die Ableitung der Komposition ist also gleich dem Produkt der äußeren Ableitung mit der inneren Ableitung.

Umkehrregel *Ist $f : D \to \mathbb{R}$ injektiv, so existiert eine Umkehrfunktion $g : f(D) \to D$ mit $g(f(x)) = x$. Dann ist die Ableitung g' der Umkehrfunktion gleich*

$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

für alle $x \in D$.

Exkurs: Formal kann man alle diese Ableitungsregeln mithilfe der Definition der Differenzierbarkeit beweisen. Wir führen dies an der Produktregel vor:

Beweis: Die Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : D \to \mathbb{R}$ sind differenzierbar, und es gilt

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

sowie

$$g'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) \overbrace{-f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x)}^{=0} - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(f(x+h)\frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x) \right) \\
&= f(x)g'(x) + f'(x)g(x).
\end{aligned}$$

□

Beispiele.
Mithilfe obiger Ableitungsregeln können wir nun weitere Ableitungen von Funktionen bestimmen:

1. Wir wollen die Ableitung der Kosinusfunktion bestimmen. Dabei benutzen wir, dass wir bereits die Ableitung der Sinusfunktion kennen, es gilt $\sin'(x) = \cos(x)$.

Außerdem wissen wir aufgrund von Aufgabe 8 aus Kapitel 4, dass

$$\cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$$

gilt. Hier können wir die Kettenregel verwenden. $\cos(x)$ ist nämlich gerade die Komposition der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x + \frac{\pi}{2}$ mit der Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = \sin(x)$, denn $g(f(x)) = g(x + \frac{\pi}{2}) = \sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x)$. Damit folgt

$$\begin{aligned} \cos'(x) &= (g \circ f)'(x) \\ &= g'(f(x))f'(x) \\ &= \cos(x + \frac{\pi}{2}) \cdot 1 \\ &= \cos(-x - \frac{pi}{2}) \\ &= \sin(-x) \\ &= -\sin(x), \end{aligned}$$

d. h. die Ableitung der Kosinusfunktion ist gleich

$$\cos'(x) = -\sin(x).$$

2. Der natürliche Logarithmus $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion. Die Ableitung der Exponentialfunktion ist die Exponentialfunktion selbst. Damit können wir die Ableitung des natürlichen Logarithmus mit der Umkehrregel berechnen:

$$\ln'(\exp(x)) = \frac{1}{\exp(x)}.$$

Ist also $y = \exp(x)$, so ist $x = \ln(y)$, und wir erhalten

$$\begin{aligned} \ln'(y) &= \ln'(\exp(x)) \\ &= \frac{1}{\exp(x)} \\ &= \frac{1}{\exp(\ln(y))} \\ &= \frac{1}{y}. \end{aligned}$$

5.4 Lokale Extrema

Für viele Funktionen ist es wichtig zu wissen, ob die Funktion, zumindest lokal, Maxima beziehungsweise Minima besitzt.

Definition. Angenommen, $f : D \to \mathbb{R}$ ist eine differenzierbare Funktion. Dann heißt ein Punkt x des Definitionsbereiches D *lokales Maximum*, falls es ein Teilintervall $E \subset D$ mit $x \in E$ gibt, so dass alle Funktionswerte $f(y)$ von Punkten $y \neq x$ aus E kleiner als $f(x)$ sind.
Analog heißt ein Punkt x des Definitionsbereiches D *lokales Minimum*, falls es ein Teilintervall $E \subset D$ mit $x \in E$ gibt, so dass alle Funktionswerte $f(y)$ von Punkten $y \neq x$ aus E größer als $f(x)$ sind.

Beispiel. Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x.$$

Der Graph der Funktion ist in Abbildung 5.6 dargestellt.

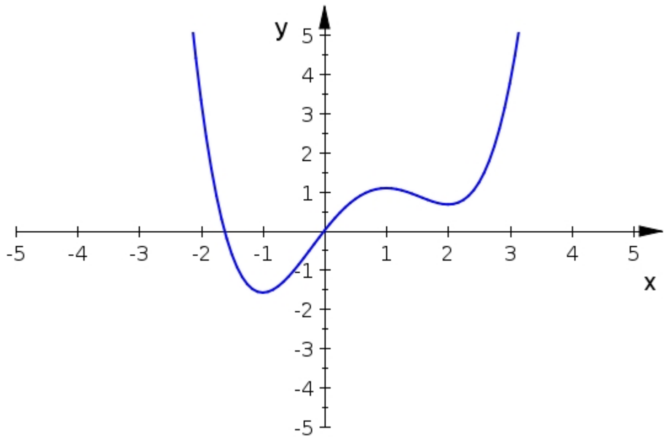


Abbildung 5.6 Graph der Funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 2x$

Anhand der Zeichnung des Funktionsgraphen sieht man hier, dass an der Stelle $x = 1$ ein lokales Maximum vorliegt: Im Intervall $[0, 2]$ sind alle Funktionswerte $f(y)$ von Punkten $y \in [0, 2]$ für $y \neq 1$ kleiner als dem Funktionswert $f(1) = \frac{13}{12}$. Dieses Maximum ist nur lokal, denn insgesamt gibt es sogar unendlich viele Punkte x im Definitionsbereich $\mathbb{R}$ der Funktion f, deren Funktionswerte $f(x)$ größer als $f(1)$ sind.
Ebenfalls kann man anhand der Zeichnung erkennen, dass an den Stellen $x = -1$ und $x = 2$ lokale Minima vorliegen: Auch hier gibt es Teilintervalle von $\mathbb{R}$, in denen alle übrigen Funktionswerte größer als $f(-1)$ beziehungsweise $f(2)$ sind. Der Punkt $x = -1$ ist in diesem Fall sogar ein sogenanntes *globales* Minimum, denn alle anderen Funktionswerte der Funktion f sind größer als $f(-1)$.

5.4.1 Notwendige und hinreichende Bedingungen für lokale Extrema

Im Beispiel haben wir die (lokalen) Extrema am Graphen der Funktion abgelesen. Dies ist zum einen ungenau, zum anderen für kompliziertere Funktionen mühselig. Außerdem

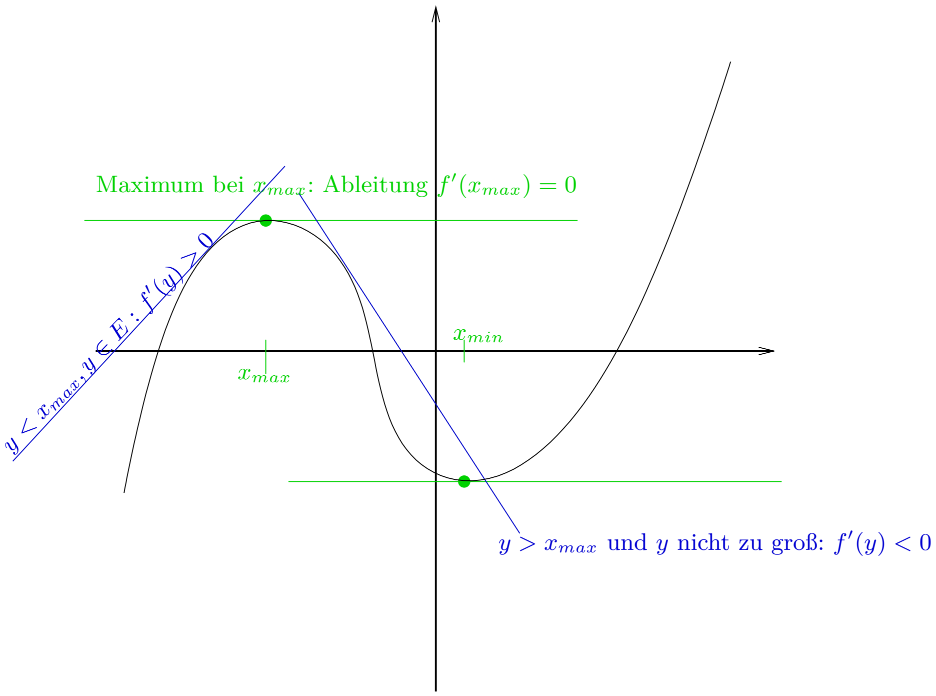


Abbildung 5.7 Graph einer differenzierbaren Funktion mit lokalem Maximum bei x_{max} und lokalem Minimum bei x_{min}, in diesen Punkten ist die Ableitung $f'(x_{max}) = 0 = f'(x_{min})$.

wissen wir so zunächst nicht, ob es nicht unter Umständen noch weitere lokale Extrema gibt und ob unsere Vermutung, dass bei $x = -1$ ein globales Minimum vorliegt, tatsächlich richtig ist - wir haben hier ja nur den Funktionsgraphen für $x \in [-5, 5]$ betrachtet.

Mathematisch gibt es nun ganz einfache (notwendige und hinreichende) Bedingungen an einen Punkt $x \in D$ dafür, dass x eine lokale Extremstelle einer differenzierbaren Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ ist.

Angenommen, $x_{max} \in D$ ist ein lokales Maximum einer Funktion f. Dies bedeutet, dass für ein Intervalle $E \subset D$ mit $x_{max} \in E$ für alle Punkte $y \in E$, die kleiner als x_{max} sind, die zugehörigen Funktionswerte $f(y)$ kleiner als $f(x_{max})$ sind, für $y = x_{max}$ aber den Wert $f(x_{max})$ erreichen - die Funktionswerte $f(y)$ werden also zunächst immer größer. Auf dem Abschnitt $\{y \in E | y < x_{max}\}$ muss die Funktion f also (streng) monoton steigend sein und damit $f'(y) > 0$ gelten. Ist umgekehrt $y \in E$ und y größer als x_{max}, so muss, da wir ja angenommen haben, dass in x ein lokales Maximum vorliegt, $f(y)$ kleiner als $f(x)$ sein. Auf diesem Abschnitt werden die Funktionswerte $f(y)$ zunächst also immer kleiner, je größer y wird - die Funktion f ist hier (streng) monoton fallend und $f'(y) < 0$. Im Punkt x_{max} gilt dann $f'(x_{max}) = 0$, dies wird in Abbildung 5.7 dargestellt. Genauso gilt für ein lokales Minimum $x_{min} \in D$, dass $f'(x_{min}) = 0$: hier ist für $y < x_{min}$ und $y \in E$ (das heißt y ist zwar kleiner als x_{min}, aber nicht „zu klein“) $f(y) > x_{min}$ und die Funktion (streng) monoton fallend und für $y > x_{min}$ und $y \in E$ die Funktion (streng) monoton steigend.

Zusammenfassend gilt

Satz. *Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Ist D gleich einem Intervall $[a, b]$ und liegt in $x \in D$ mit $x \neq a, b$ eine lokale Extremstelle vor, so gilt $f'(x) = 0$.*

Bemerkung. Wir haben in obigen Satz die Intervallgrenzen ausgeschlossen. Diese können auch mit nichtverschwindender Ableitung lokale Extrema sein. Ein Beispiel ist hier die Funktion $f : [1, 3] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 + 2$. Der Graph der Funktion ist zusammen mit dem Graphen der Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = x^2 + 2$ in Abbildung 5.8 dargestellt, der Unterschied der beiden Funktionen ist lediglich ihr Definitionsbereich. Für

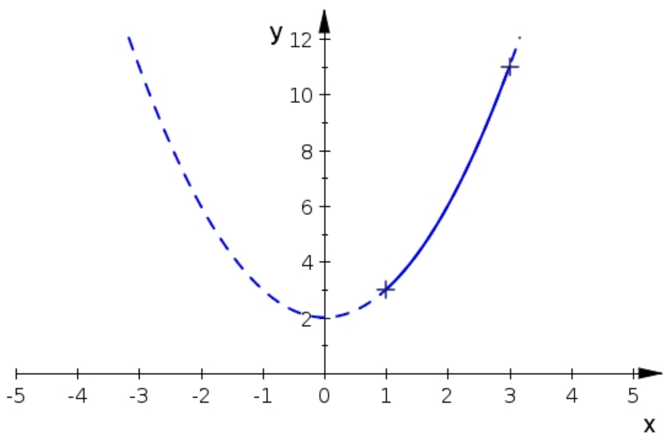


Abbildung 5.8 Graph der Funktionen $f : [1, 3] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 + 2$ (durchgezogene Linie) und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = x^2 + 2$ (gestrichelte Linie)

die Ableitungen der Funktionen gilt $f' : [1, 3] \to \mathbb{R}$ mit $f'(x) = 2x$ und $g' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g'(x) = 2x$. Die einzige Nullstelle der Ableitung g' ist im Punkt $x = 0$, der nicht im Definitionsbereich der Funktion f' beziehungsweise der Funktion f liegt. Trotzdem hat die Funktion f ein Mininum und ein Maximum. Im Punkt $x = 1$ ist $f(x)$ kleiner als alle anderen Funktionswerte der Funktion f, also ein Minimum. Im Punkt $x = 3$ ist $f(x)$ größer als alle Funktionswerte der Funktion f, hier liegt folglich ein Maximum der Funktion f vor. Die Intervallgrenzen sind in diesen Fällen also ebenfalls Extremstellen.

Die Bedingung $f'(x)$ an eine lokale Extremstelle $x \in D = (a, b)$ mit reellen Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ ist eine *notwendige* Bedingung. Dies bedeutet, dass diese Bedingung auf jeden Fall erfüllt sein muss, damit im Punkt x eine Extremstelle vorliegen kann. Sie bedeutet jedoch nicht, dass dies auch tatsächlich der Fall ist. Ein Gegenbeispiel ist hier die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3$, ihr Graph ist in Abbildung 5.9 dargestellt. Die Ableitung der Funktion f ist die Funktion $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f'(x) = 3x^2$. Hier verschwindet zwar die erste Ableitung an der Stelle 0, d. h. $f'(0) = 0$, jedoch liegt in $x = 0$ trotzdem weder ein lokales Minimum noch ein lokales Maximum vor, denn jedes Intervall E mit $0 \in E$

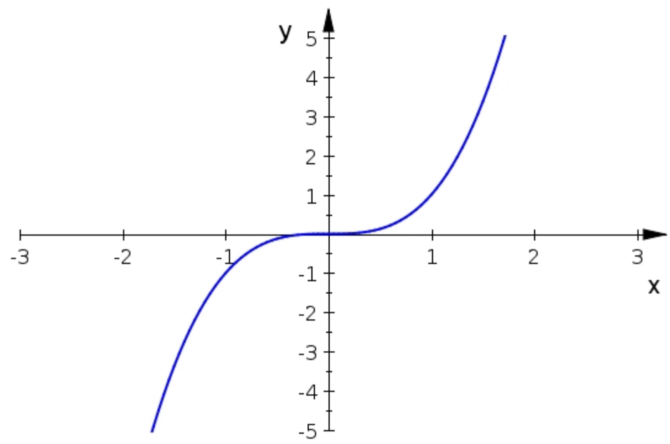


Abbildung 5.9 Graph der Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3$

enthält Punkte y deren Funktionswerte größer als Null sind und weitere Punkte z deren Funktionswerte kleiner als Null sind.
Um also tatsächlich entscheiden zu können, ob in einem Punkt $x \in D$ ein lokales Extremum vorliegt, benötigen wir noch eine sogenannte *hinreichende* Bedingung. Dies ist eine Bedingung, die „reicht“, um zu klären, ob tatsächlich eine lokale Extremstelle vorliegt.

Satz. *Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und ihre Ableitung $f'(a, b) \to \mathbb{R}$ ebenfalls differenzierbar. Sei zusätzlich $x \in (a, b)$ mit $f'(x) = 0$, dies bedeutet, dass die* notwendige *Bedingung dafür, dass x ein lokales Extremum ist, erfüllt sein muss. Dann ist x ein lokales Maximum, wenn $f''(x) < 0$ gilt. Ist $f''(x) > 0$, so ist x ein lokales Minimum.*

Anschaulich kann man die hinreichende Bedingung so erklären:
Ist $f''(x) > 0$, so heißt das nach der Definition der Ableitung, dass

$$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} > 0$$

gelten muss. Den Grenzwert einer Funktion an der Stelle 0 haben wir in Kapitel 4 in Abschnitt 4.4.1 definiert - es genügt hier, sowohl den linksseitigen als auch den rechtsseitigen Grenzwert zu betrachten. Für unsere Funktion

$$\begin{aligned} f''(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - \overbrace{f'(x)}^{\text{nach Voraussetzung}=0}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h)}{h} \\ &> 0 \end{aligned}$$

folgt damit für den linksseitigen Grenzwert, d. h. nicht zu kleines $h < 0$, dass

$$\frac{f'(x+h)}{h} > 0$$

gilt. Für solche negativen h muss also die Ableitung $f'(x+h)$ negativ sein, die Funktion f damit für $y = x + h < x$ streng monoton fallend. Für den rechtsseitigen Grenzwert, d. h. nicht zu kleine $h > 0$, gilt ebenfalls

$$\frac{f'(x+h)}{h} > 0.$$

Für $y = x+h > x$ ist die Ableitung $f'(y) = f'(x+h)$ positiv, die Funktion f also streng monoton steigend. Wir haben damit gesehen, dass wenn die Voraussetzung $f'(x) = 0$ erfüllt ist und $f''(x) > 0$ gilt, wir ein Intervall $E \in D$ finden, so dass die Funktion f für $y \in E$ mit $y < x$ streng monoton fallend ist und für $y > x$ streng monoton steigend ist.

Bemerkung. Wir weisen an dieser Stelle noch einmal auf den Unterschied zwischen notwendigen und hinreichenden Bedingungen hin. Ist $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und ist $x \in (a, b)$ ein lokales Minimum der Funktion f, so folgt daraus, dass $f'(x) = 0$ gelten muss. Dies ist eine notwendige Bedingung - damit eine lokale Extremstelle vorliegt, muss notwendigerweise die Ableitung in diesem Punkt verschwinden. Umgekehrt reicht das aber nicht, wie wir am Beispiel der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3$ gesehen haben. Ist die notwendige Bedingung $f'(x) = 0$ für ein x erfüllt, so reicht die Tatsache $f''(x) > 0$ als Begründung dafür, dass im Punkt x ein lokales Minimum vorliegt, diese Bedingung wird hinreichend genannt. Es kann aber auch ein lokales Minimum vorliegen, wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist. Dies sieht man zum Beispiel an der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^4$ im Punkt $x = 0$, ihr Graph ist in Abbildung 5.10 dargestellt. Es gilt $f'(x) = 4x^3$ und $f''(x) = 12x^2$. Die notwendige

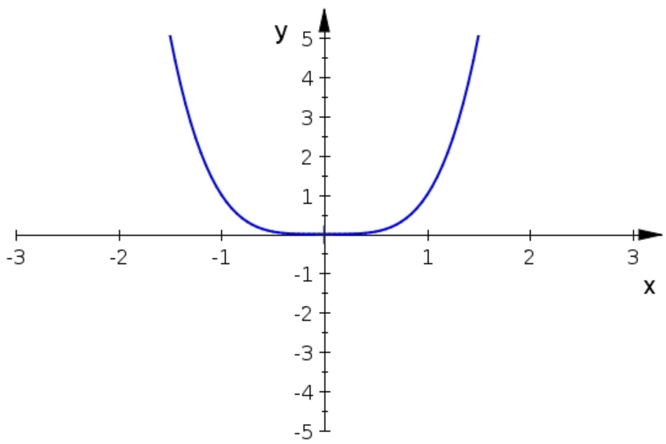


Abbildung 5.10 Graph der Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^4$

Bedingung $f'(0) = 0$ ist für $x = 0$ erfüllt, die hinreichende Bedingung für ein lokales Minimum jedoch nicht, denn es gilt $f''(0) = 0$. Trotzdem liegt in $x = 0$ ein lokales Minimum vor.

5.5 Wendestellen

In Abbildung 5.11 ist erneut der Graph der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3$ dargestellt. Die Ableitungen dieser Funktion sind jeweils auch wieder differenzierbar und es gilt

$$f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f'(x) = 3x^2$$
$$f'' : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f''(x) = 6x$$
$$f''' : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f'''(x) = 6.$$

Wir haben bereits gesehen, dass an der Stelle $x = 0$ die erste Ableitung $f'(0)$ verschwindet, in 0 jedoch kein lokales Extremum vorliegt. Es gilt

$$f''(0) = 0$$
$$f'''(0) = 6 \neq 0$$

Ein solcher Punkt wird *Wendestelle* genannt. Anschaulich verhält sich der Graph einer Funktion f in einer Wendestelle so, dass in diesen Stellen beim Durchlaufen des Graphen ein Wechsel von „Links-“ zu „Rechts-“ Kurven oder umgekehrt von „Rechts-“ zu „Links-“Kurven erfolgt. Die genaue Definition einer Wendestelle lautet

Definition. Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und x ein Punkt des Intervalles (a, b). Angenommen, die Ableitungen f' und f'' sind ebenfalls differenzierbar. Dann ist x eine Wendestelle der Funktion f, wenn die Ableitung $f' : (a, b) \to \mathbb{R}$ im Punkt x eine lokale Extremstelle besitzt.

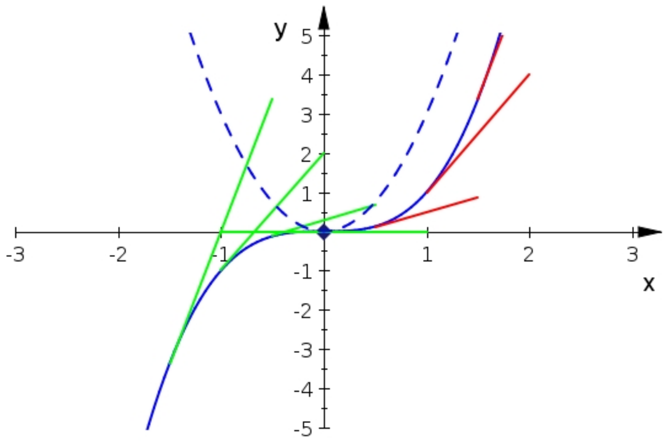


Abbildung 5.11 Graph der Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3$. Beginnen wir z. B. mit $x = -1,5$ und vergrößern x, so fällt zunächst die Steigung der Funktion f, bis sie im Punkt $x = 0$ ganz verschwindet und anschließend wieder steigt. Die Ableitung f' hat demnach im Punkt $x = 0$ ein lokales Extremum

Aus der Definition einer Wendestelle folgt sofort eine notwendige Bedingung an eine Stelle x im Definitionsbereich einer Funktion f: Da die Ableitung f' in x eine lokale Extremstelle haben muss, muss für x gelten $(f')'(x) = 0$. Insgesamt gilt

Satz. *Ist $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, deren (höhere) Ableitungen auch jeweils differenzierbar sind, und gilt für ein $x \in (a, b)$*

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0, \\ \textit{und } f'''(x) &\neq 0, \end{aligned}$$

so liegt an der Stelle x eine Wendestelle *vor.*

5.6 Kurvendiskussion

Wir haben nun das Rüstzeug für eine allgemeine Kurvendiskussion. Hier diskutiert man, wie der Name schon sagt, alle wichtigen Eigenschaften einer Funktion f:
Ist $f : D \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, so gehört zu einer vollständigen Kurvendiskussion

1. Die Untersuchung der Funktion f auf Stetigkeit. Lässt sich die Funktion f unter Umständen stetig fortsetzten, d. h. gibt es eine Funktion $g : \widetilde{D} \to \mathbb{R}$ mit einem größeren Definitionsbereich $\widetilde{D} \supset D$ und $f(x) = g(x)$ für alle Elemente aus D?

2. Die Bestimmung aller Nullstellen der Funktion f.

3. Die Bestimmung aller lokalen Minima und Maxima der Funktion f.

4. Die Bestimmung aller Wendestellen der Funktion f.

5. Die Untersuchung des Verhaltens der Funktion f am Rand des Definitionsbereiches D. Ist $D = \mathbb{R}$, die Bestimmung der Grenzwerte $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$.

6. Die Darstellung des Funktionsgraphen.

Beispiel. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = xe^x$. Dann gilt

1. Da sowohl die lineare Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) = x$ als auch die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\exp(x) = e^x$ stetig sind, ist auch die Produktfunktion $f = g \cdot \exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig.

2. Wir suchen alle Nullstellen x_n der Funktion f. Dazu lösen wir die Gleichung

$$f(x_n) = x_n e^{x_n} = 0.$$

   Da die Exponentialfunktion keine Nullstellen hat, ist die einzige Nullstelle der Funktion f der Punkt $x_n = 0$.

3. Die erste Ableitung der Funktion f bestimmen wir mit der Produktregel. Es gilt

$$\begin{aligned} f' &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit} \\ f'(x) &= 1 \cdot e^x + x \cdot (e^x)' \\ &= e^x + xe^x \\ &= (1 + x)e^x. \end{aligned}$$

Ist x_m eine Extremstelle der Funktion f, so muss x_m die notwendige Bedingung $f'(x_m) = 0$ erfüllen. Wir bestimmen also alle Nullstellen der Ableitung f'. Da die Exponentialfunktion keine Nullstellen hat, ist die einzige Nullstelle der Funktion f' der Punkt x_m mit $x_m = 1 + x_m$, also

$$x_m = -1.$$

Die zweite Ableitung der Funktion f bestimmen wir erneut mit der Produktregel. Es gilt

$$\begin{aligned} f'' &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit} \\ f''(x) &= 1 \cdot e^x + (1+x) \cdot e^x \\ &= (2+x)e^x. \end{aligned}$$

Da

$$f''(x_m) = f''(-1) = e > 0$$

gilt, liegt im Punkt $x_m = -1$ ein lokales Minimum vor. Die Funktion f besitzt keine weiteren lokalen Extremstellen.

4. Die notwendige Bedingung an eine Wendestelle x_w lautet $f''(x_w) = 0$. Die einzige Nullstelle der zweiten Ableitung $f''(x) = (2+x)e^x$ ist $x_w = -2$. Für die dritte Ableitung der Funktion f gilt

$$\begin{aligned} f''' &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit} \\ f'''(x) &= e^x + (2+x)e^x \\ &= (3+x)e^x. \end{aligned}$$

Da

$$f'''(x_w) = f'''(-2) = e \neq 0$$

gilt, liegt in $x_w = -2$ eine Wendestelle der Funktion f vor. Dies ist die einzige Wendestelle.

5. Wir untersuchen nun das Verhalten der Funktion f am Rand des Definitionbereiches. Es gilt

$$\lim_{x\to\infty} xe^x = \infty$$

und

$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$$

(der zweite Grenzwert ist hierbei nicht so leicht zu sehen).

6. Der Funktionsgraph der Funktion f ist in Abbildung 5.12 dargestellt.

5.7 Zusammenfassung

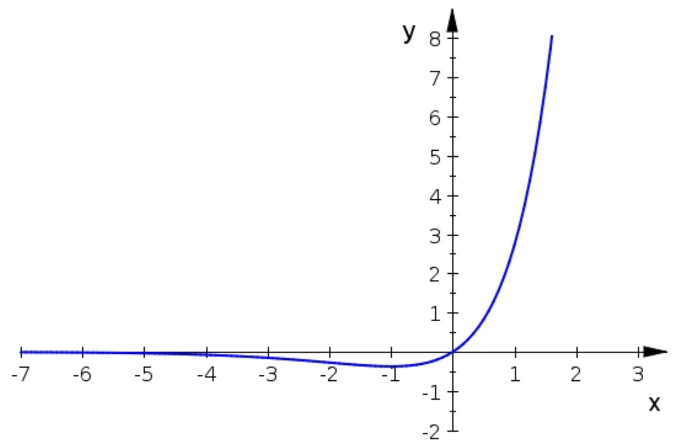


Abbildung 5.12 Graph der Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = xe^x$.

- Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt *differenzierbar im Punkt* $x_0 \in D$, wenn der Grenzwert
$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$
existiert. Ist dies der Fall, so heißt
$$f'(x_0) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$
Ableitung von f im Punkt x_0. Ist die Funktion f in jedem Punkt des Definitionsbereiches D differenzierbar, so heißt die gesamte Funktion f differenzierbar.

- Polynome sind differenzierbar: Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit
$$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0,$$
wobei $a_n, \ldots, a_0$ reelle Zahlen sind. Dann ist f an jeder Stelle x differenzierbar mit Ableitung
$$f'(x) = a_n n x^{n-1} + \ldots + a_1.$$

- Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\exp(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ ist differenzierbar mit Ableitung $\exp'(x) = \exp(x)$

- Die Sinusfunktion $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar mit Ableitung
$$\sin(x)' = \cos(x).$$

- Angenommen, $f : D \to \mathbb{R}$ und $g : D \to \mathbb{R}$ sind zwei differenzierbare Funktionen. Dann gilt

Summenregel Die Summe $f + g : D \to \mathbb{R}$ der Funktionen f und g ist differenzierbar. Für ihre Ableitung $(f+g)'$ gilt

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

für alle $x \in D$.

Produktregel Die Produktfunktion $f \cdot g : D \to \mathbb{R}$ mit $(fg)(x) = f(x) \cdot g(x)$ ist differenzierbar mit der Ableitung

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

für alle $x \in D$.

Quotientenregel Ist $g(x) \neq 0$ für alle x aus dem Definitionsbereich D, so ist die Quotientenfunktion $\frac{f}{g} : D \to \mathbb{R}$ mit $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ differenzierbar mit der Ableitung

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

für alle $x \in D$.

Kettenregel Sind $f : D \to E$ und $g : E \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so ist die Kompositionsabbildung $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ mit $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ differenzierbar mit der Ableitung

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

für alle $x \in D$, die Ableitung der Komposition ist also gleich dem Produkt der äußeren Ableitung mit der inneren Ableitung.

Umkehrregel Ist $f : D \to \mathbb{R}$ injektiv, so existiert eine Umkehrfunktion $g : f(D) \to D$ mit $g(f(x)) = x$. Dann ist die Ableitung g' der Umkehrfunktion gleich

$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

für alle $x \in D$.

- Die Ableitung der Kosinusfunktion ist gleich

$$\cos'(x) = -\sin(x).$$

- Der natürliche Logarithmus $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion. Damit folgt $\ln(x)' = \frac{1}{x}$.

- Angenommen, $f : D \to \mathbb{R}$ ist eine differenzierbare Funktion. Dann heißt ein Punkt x des Definitionsbereiches D *lokales Maximum*, falls es ein Teilintervall $E \subset D$ mit $x \in E$ gibt, so dass alle Funktionswerte $f(y)$ von Punkten $y \neq x$ aus E kleiner als $f(x)$ sind.

  Analog heißt ein Punkt x des Definitionsbereiches D *lokales Minimum*, falls es ein Teilintervall $E \subset D$ mit $x \in E$ gibt, so dass alle Funktionswerte $f(y)$ von Punkten $y \neq x$ aus E größer als $f(x)$ sind.

- Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Ist D gleich einem Intervall $[a, b]$ und liegt in $x \in D$ mit $x \neq a, b$ eine lokale Extremstelle vor, so gilt $f'(x) = 0$.

- Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und ihre Ableitung $f'(a, b) \to \mathbb{R}$ ebenfalls differenzierbar. Sei zusätzlich $x \in (a, b)$ mit $f'(x) = 0$, dies bedeutet, dass die *notwendige* Bedingung dafür, dass x ein lokales Extremum ist, erfüllt sein muss. Dann ist x ein lokales Maximum, wenn $f''(x) < 0$ gilt. Ist $f''(x) > 0$, so ist x ein lokales Minimum.

- Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion und x ein Punkt des Intervalles (a, b). Angenommen, die Ableitungen f' und f'' sind ebenfalls differenzierbar. Dann ist x eine Wendestelle der Funktion f, wenn die Ableitung $f' : (a, b) \to \mathbb{R}$ im Punkt x eine lokale Extremstelle besitzt.

- Ist $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, deren (höhere) Ableitungen auch jeweils differenzierbar sind, und gilt für ein $x \in (a, b)$

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0, \\ \text{und } f'''(x) &\neq 0, \end{aligned}$$

so liegt an der Stelle x eine *Wendestelle* vor.

- Ist $f : D \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion, so gehört zu einer vollständigen Kurvendiskussion
  1. Die Untersuchung der Funktion f auf Stetigkeit. Lässt sich die Funktion f unter Umständen stetig fortsetzten, d. h. gibt es eine Funktion $g : \widetilde{D} \to \mathbb{R}$ mit einem größeren Definitionsbereich $\widetilde{D} \supset D$ und $f(x) = g(x)$ für alle Elemente aus D?
  2. Die Bestimmung aller Nullstellen der Funktion f.
  3. Die Bestimmung aller lokalen Minima und Maxima der Funktion f.
  4. Die Bestimmung aller Wendestellen der Funktion f.
  5. Die Untersuchung des Verhaltens der Funktion f am Rand des Definitionsbereiches D. Ist $D = \mathbb{R}$, die Bestimmung der Grenzwerte $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$.
  6. Die Darstellung des Funktionsgraphen.

5.8 Aufgaben

1. Bestimmen Sie die erste, zweite und dritte Ableitung der folgenden Funktionen.

   a) $f(x) = x \cdot e^x$ b) $f(x) = (2x + 1)^3$ c) $f(x) = (a^2 + x^2)(a^2 - x^2)$

   d) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$ e) $f(x) = \dfrac{2}{3x^6}$ f) $f(x) = ax^4 + bx^4 + cx^2 - 2x^2 + a + 2c$

g) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ h) $f(x) = \sqrt{x^3}$ i) $f(x) = x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{6} - \frac{4}{x}$

j) $f(x) = x \cdot \ln x$ k) $f(x) = \sin x \cdot \cos x$ l) $f(x) = \frac{1}{x+2}$

2. Bestimmen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen.

a) $f(x) = \frac{1}{x(x^2+1)}$ b) $f(x) = \sin^4 x$ c) $f(x) = x \cdot \sin x + \cos x$

d) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ e) $f(x) = \sin(\cos x)$ f) $f(x) = (x^2 + \cos x)^2$

g) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2+x+1}{x-2}}$ h) $f(x) = e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$ i) $f(x) = \left((x+x^2)^3 + x^4\right)^5$

3. Untersuchen Sie die folgenden Funktionen auf Nullstellen, Maxima, Minima und Wendepunkte und fertigen Sie eine Skizze an.

a) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-4x+4}$ b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ c) $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 27$

d) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ e) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4$ f) $f(x) = x^3 - 3x - 2$

g) $f(x) = x + 2 + \frac{1}{x}$ h) $f(x) = x^2 - 4x + 3$ i) $f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x$

Anwendungsaufgaben

1. Angenommen, die Anzahl $K(t)$ von Graugänsen in einem fest vorgegebenen Gebiet zum Zeitpunkt t wird durch die folgende Funktion

$$K(t) = \frac{120}{1 + 2e^{-0,2t}}$$

für positives t gegeben, wobei t die Zeit in Jahren seit der ersten Zählung angibt.

(a) Bestimmen Sie den Anfangsbestand ($t = 0$) und den Endbestand ($t \to \infty$).

(b) Steigt die Anzahl der Graugänse, fällt sie? Geben Sie einen geeigneten mathematischen Begriff an, der das Verhalten der Anzahl der Graugänse mit steigender Jahreszahl t beschreibt. Begründen Sie mathematisch, warum sich die Funktion K so verhält.

2. Von einer Stelle A geht eine Luftverunreinigung aus, die als durchschnittliche Zahl von SO_2-Molekülen pro cm^3 gemessen wird. Sie nimmt mit der Entfernung x von A nach der Formel $U(x) = 4 \cdot 10^4 e^{-bx}$ ab, wobei b eine positive Konstante ist. Der Verunreinigung $U(x)$ überlagert sich eine zweite, die von der Stelle B kommt und mit der Entfernung y von B nach der Formel $V(y) = 10^4 e^{-by}$ abnimmt. Die Distanz zwischen den Punkten A und B sei d. Es ist also $y = d - x$. Es sei $U(d) < V(0)$, also die von A kommende Verunreinigung sei in B kleiner als die dort von B erzeugte.

Zeigen Sie, dass die Gesamtverunreinigung $G(x) = U(x)+V(y) = U(x)+V(d-x)$ auf der Verbindungsstrecke von A nach B dort extremal ist, wo $U(x) = V(y)$ gilt.

3. In einer biochemischen Reaktion, die durch ein Enzym gesteuert wird, ist die Umwandlungsgeschwindigkeit $y = f(x)$ näherungsweise von der Konzentration x des Substrats gemäß folgender Funktion abhängig:

$$f(x) := \frac{Bx}{x+K},$$

wobei B und K konstante reelle Zahlen sind. Diese Funktion wird nach Leonor Michaelis und Maud Leonora Menten als *Michaelis-Menten-Funktion* bezeichnet.

Zeigen Sie, dass die Michaelis-Menten-Funtion $f(x)$ die Differentialgleichung

$$y(x)' = \frac{K}{B}\frac{1}{x^2}\left(y(x)\right)^2$$

erfüllt.

4. In der Natur sind wenige Wachstumsvorgänge ungehemmt. Äußere Umstände schränken das Wachstum ein. Logistische Funktionen sind Wachstumsfunktionen, die diese äußeren Umstände mit berücksichtigen. Ist $f(t)$ eine Funktion, die die Größe einer Population in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt, so ist in diesen Fällen die Wachstumsrate $f'(t)$ proportional zum aktuellen Bestand $f(t)$ und der noch vorhandenen Kapazität $B - f(t)$ mit einer konstanten $B \in \mathbb{R}$. Wir erhalten damit die Differentialgleichung

$$f'(t) = af(t)(B - f(t))$$

mit einer konstanten reellen Zahl a.

(a) Geben Sie alle konstanten Funktionen $f(t)$ an, die die Differentialgleichung lösen. Interpretieren Sie diese Funktionen biologisch.

(b) Zeigen Sie, dass für festes $k \in \mathbb{R}$ die sogenannte logistische Funktion

$$f(t) = \frac{B}{1 - k\exp(-aBt)}$$

die Differentialgleichung erfüllt. Was ist der Definitionsbereich der Funktion f?

(c) Angenommen, die Anzahl der Feldsperlinge in einem fest vorgegebenem Gebiet wird durch die Funktion

$$f(t) = \frac{200}{1 + 3\exp(-\frac{t}{2})}$$

gegeben, wobei t die Zeit in Jahren seit der ersten Zählung angibt. Wie groß ist die (momentane) Wachstumsrate nach zehn Jahren?

6 Integralrechnung

Problem 1 Man geht davon aus, dass die Abbaurate von Alkohol im Blut eines Menschen konstant ist, und bei Männern ungefähr bei $0,1$ Promille pro Stunde liegt. Alkohol wird damit linear abgebaut. Angenommen, ein Studierender fährt Fahrrad und wird von Polizisten angehalten. Diese nehmen einen starken Alkoholgeruch wahr und veranlassen vorsichtshalber eine Blutentnahme zur Bestimmung der Blutalkoholkonzentration. Diese findet zwei Stunden nach der „Tatzeit“ statt und ergibt eine Blutalkoholkonzentration von $0,5$ Promille. Welche Blutalkoholkonzentration hatte der Studierende höchstwahrscheinlich zum Zeitpunkt der Polizeikontrolle?

Problem 2 Angenommen, wir kennen den Körpertemperaturverlauf einer (fiktiven) Krankheit Influenza Mathematicae. Dieser sei durch die Funktion

$$f : [0,7] \to [35,42]$$

mit

$$f(x) = -\frac{8}{49}x(x-7) + 37$$

gegeben. Dies bedeutet, dass die Körpertemperatur eines Kranken bei Ausbruch der Krankheit (zum Zeitpunkt $x = 0$) $37°$ betrage, nach dreieinhalb Tagen bei $39°$ am höchsten sei, und zum Zeitpunkt, in dem die schlimmsten Symptome abgeklungen sind, erneut auf $37°$ abgesunken sei (siehe Abbildung 6.1). Wie ist die

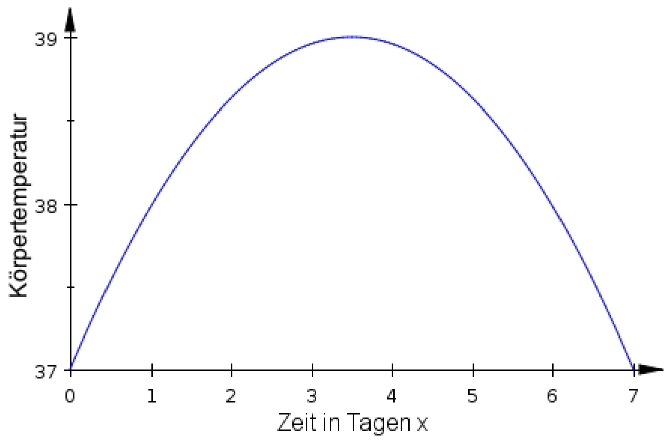


Abbildung 6.1 Verlauf der Körpertemperatur bei der fiktiven Krankheit Influenza Mathematica

durchschnittliche Körpertemperatur während der Krankheit?

Problem 3 „Die Zellen einer exponentiell sich vermehrenden Population mögen in der Zeit $T > 0$ jeweils einen Zellzyklus durchlaufen. Der mittlere RNA-Gehalt aller Zellen während des Zeitintervalls $[0, T]$ ist bis auf einen konstanten Faktor gegeben durch das Integral

$$I := \int_0^T \left(\frac{x}{T} + 1\right) \cdot \exp(-kx)dx$$

mit der gemäß

$$kT = \ln(2)$$

definierten Konstanten k"[1]

Ziel: Einführung des Integralbegriffs. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Uneigentliche Integrale.

6.1 Unbestimmte Integrale

In Kapitel 5 haben wir differenzierbare Funktionen und die Berechnung ihrer Ableitungen kennengelernt. In vielen Fällen lässt sich dieser Prozess umkehren.

Definition. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine (stetige) Funktion auf einem reellen Intervall I. Gibt es eine Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ mit $F' = f$ über I, so heißt die Funktion F *Stammfunktion von f auf dem Intervall I*.

Wichtig hierbei ist, dass Stammfunktionen nicht eindeutig sind. Dies liegt daran, dass die Ableitung einer konstanten Funktion $g(x) = c$ mit einer reellen Zahl c immer verschwindet, $g'(x) = 0$. Ein unbestimmtes Integral einer Funktion f steht nun für nichts anderes als eine (bis auf eine Konstante unbestimmte) Stammfunktion f:

Definition. Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann bezeichnet

$$\int f(x)dx$$

das sogenannte *unbestimmte Integral der Funktion f über dem Intervall I*. Dies ist definiert durch eine beliebige (d. h. bis auf eine Konstante eindeutig bestimmte) Stammfunktion von f.

Die unbestimme Integration ist damit eine Umkehrung der Differentiation. Es gilt immer

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right) = \left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

und
(6.1)

$$\int \frac{d}{dx} f(x)dx = \int f'(x)dx = f(x) + c$$

mit $c \in \mathbb{R}$.

[1] Erich Bohl: Mathematik in der Biologie, Springer Verlag Heidelberg, 2006. Beginn Abschnitt 3.5.2

6.1.1 Beispiele

Wir können nun eine einfache Tabelle von Funktionen und ihren unbestimmten Integralen angeben.

$f(x)$	$\int f(x)dx$
$c,\ c \in \mathbb{R}$	cx
$x^n,\ n \in \mathbb{N}$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$\exp(x)$	$\exp(x)$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
$x^{-n} = \frac{1}{x^n},\ n \in \mathbb{N},\ n \neq 1$	$\frac{1}{-n+1}x^{-n+1}$
$x^\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq -1$	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$

6.1.2 Partielle Integration und Substitution

Aufgrund von Gleichung (6.1) ergeben Ableitungsregeln Regeln für unbestimmte Integrale. Seien im Folgenden $f : I \to \mathbb{R}$ und $g : I \to \mathbb{R}$ sind zwei differenzierbare Funktionen.

Summenregel Die Summenableitungsregel

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

für alle $x \in I$ ergibt die *Summenregel für unbestimmte Integrale*:

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

Produktregel - partielle Integration Mithilfe der Produktableitungsregel

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

für alle $x \in I$ erhalten wir

$$\begin{aligned} f(x) \cdot g(x) &= \int (f(x) \cdot g(x))' dx \\ &= \int f'(x)g(x) + f(x)g'(x)dx \\ &= \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx \end{aligned}$$

und damit die sogenannte *partielle Integrationsregel*:

$$\int f'(x)g(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x)g'(x)dx.$$

Beispiel. Wir wollen das unbestimmte Integral $\int x \ln(x) dx$ berechnen. Der Integrand $x \ln(x)$ besteht aus dem Produkt zweier Funktionen, x und $\ln(x)$. Deshalb bietet sich zur Berechnung die partielle Integrationsregel an. Hierbei ist es immer sinnvoll, vorher genau zu überlegen, welche der beiden Funktionen die Rolle der Funktion „f' “ und welche die Rolle der Funktion g spielt, d.h. für welche der beiden Funktionen man bereits eine (einfache) Stammfunktion kennt. Dies ist in diesem Beispiel für die Funktion x der Fall, d.h. wir setzen $f'(x) = x$ und damit $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, sowie $g(x) = \ln(x)$ und damit $g'(x) = \frac{1}{x}$. Mit diesen Wahlen erhalten wir

$$\begin{aligned}\int x \ln(x) dx &= \int f'(x) g(x) dx \\ &= f(x) \cdot g(x) - \int f(x) g'(x) dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x) - \int \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x) - \int \frac{1}{2} x dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 \ln(x) - \frac{1}{4}x^2.\end{aligned}$$

Probe: Zur Probe leiten wir $\frac{1}{2}x^2 \ln(x) - \frac{1}{4}x^2$ ab. Es gilt

$$\left(\frac{1}{2}x^2 \ln(x) - \frac{1}{4}x^2\right)' = x \ln(x) + \frac{1}{2}x^2 \frac{1}{x} - \frac{1}{2}x = x \ln(x).$$

Kettenregel - Substitutionsregel Mithilfe der Kettenregel

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) g'(x)$$

für alle $x \in I$ erhalten wir

$$f(g(x)) = \int f'(g(x)) g'(x) dx.$$

Ist $F : I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f, so können wir die Substitutionsregel auch umschreiben zu

$$F(g(x)) = \int f(g(x)) g'(x) dx.$$

Beispiel. Wir wollen das unbestimmte Integral $\int \exp(\sin(x)) \cos(x) dx$ berechnen. Im Integranden $\exp(\sin(x)) \cos(x) dx$ taucht eine verkettete Funktion, nämlich $\exp(\sin(x))$ auf. Deswegen bietet sich hier die Substitutionsregel zur Berechnung des unbestimmten Integrals an. In diesem Fall ist $f(x) = \exp(x)$ mit Stammfunktion $F(x) = \exp(x)$ und $g(x) = \sin(x)$ mit $g'(x) = \cos(x)$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\int \exp(\sin(x)) \cos(x) dx &= \int f(g(x)) g'(x) dx \\ &= F(g(x)) \\ &= \exp(\sin(x)).\end{aligned}$$

Probe: Zur Probe leiten wir $\exp(\sin(x))$ ab. Es gilt

$$(\exp(\sin(x)))' = \exp(\sin(x)) \cos(x).$$

6.1.3 Biologisches Beispiel

Widmen wir uns nun Problem 1. Wir suchen also eine Funktion f von einem Intervall $[0, C] \to \mathbb{R}$, die die Blutalkoholkonzentration des Studierenden in Abhängigkeit von der Zeit widergibt. Wir wissen, dass die Abbaurate konstant ist und bei $0,1$ Promille pro Stunde liegt. Das bedeutet, dass die Steigung der gesuchten Funktion f konstant immer bei $0,1$ liegt, d.h. $f'(x) = -0,1$. Wir suchen also in diesem Fall nichts anderes als das unbestimmte Integral $f(x) = \int -0,1dx$. Wie der Name schon sagt ist das Integral $\int 0,1dx$ unbestimmt, d. h. nur bis auf eine Konstante b eindeutig bestimmt. Wir erhalten damit

$$f(x) = -0,1x + b.$$

Mit der zusätzlichen Bedingung $f(2) = 0,5$ erhalten wir folglich

$$f(2) = -0,1 \cdot 2 + b = 0,5$$

und damit $b = 0,7$. Der Graph der Funktion f ist in Abbildung 6.2 gegeben. Insbesondere war die Blutalkoholkonzentration des Studierenden zum „Tatzeitpunkt“ wahrscheinlich $f(0) = 0,7$ Promille.

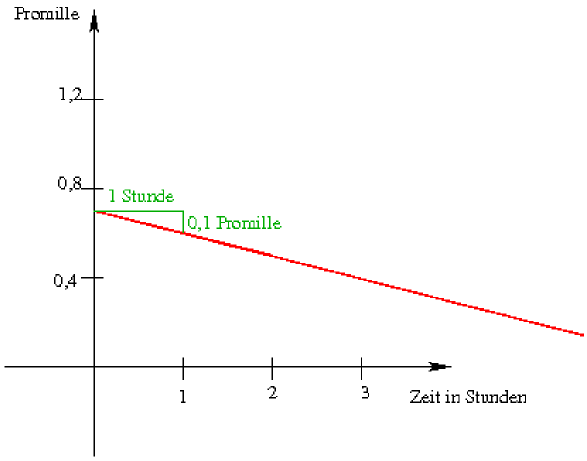


Abbildung 6.2 Blutalkoholabbau von $0,1$ Promille pro Stunde, bei einer gemessenen Blutalkoholmenge von $0,5$ Promille nach zwei Stunden.

6.2 Bestimmte Integrale und ihre geometrische Bedeutung

In diesem Abschnitt definieren wir integrierbare Funktionen und entsprechend Integrale integrierbarer Funktionen. Sie werden diese Definitionen in der Praxis höchstwahrscheinlich nicht benötigen. Die Funktionen, die Sie untersuchen werden, sind sicherlich immer integrierbar. Auch werden Sie Integrale nicht durch Grenzprozesse berechnen, sondern Integralsätze benutzen und Ihre gesuchten Integrale auf bekannte Integrale zurückführen.

Trotzdem sollten Sie wissen, was anschaulich überhaupt mit einem Integral berechnet wird.

6.2.1 Riemann-Integral

Der Flächeninhalt eines Rechtecks ist gegeben durch das Produkt der Grundseite mit der Höhe. Zum Beispiel ist der Flächeninhalt des in Abbildung 6.3 gegebenen Rechtecks gleich $4 \cdot 1 = 4$.

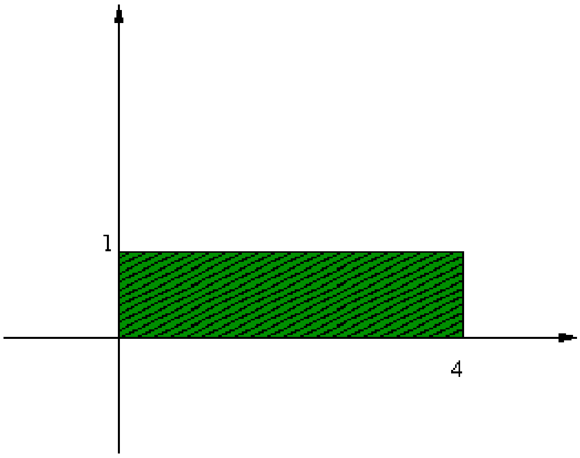


Abbildung 6.3 Flächeninhalt eines Rechtecks

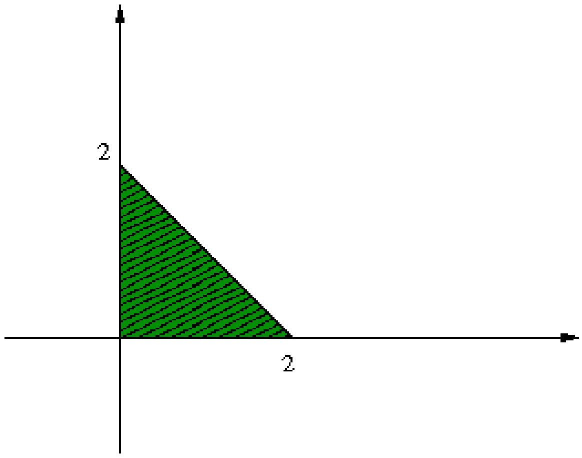


Abbildung 6.4 Flächeninhalt eines Dreiecks

Elementargeometrisch können wir auch komplexere Flächeninhalte berechnen. Zum Beispiel ist der Flächeninhalt des in Abbildung 6.4 gegebenen Dreiecks gleich $\frac{1}{2}\cdot$ Grundseite $\cdot$ Höhe und damit in diesem Fall gleich $\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 2$. Oder der Flächeninhalt eines Viertelkreises ist allgemein $\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot (\text{Radius})^2$, d. h. der Flächeninhalt des Viertelkreises in Abbildung 6.5 ist $\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot 4 = \pi$.
Die elementargeometrische Berechnung von Flächen stößt jedoch schnell an ihre Grenzen. Wie kann man zum Beispiel den Flächeninhalt der von der x-Achse und dem Graphen der Funktion $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 + 2$ (siehe Abbildung 6.6) eingeschlossenen Fläche berechnen?
Eine erste Näherung an die Fläche erhalten wir, indem wir die Fläche durch zwei Rechtecke überdecken, siehe Abbildung 6.7. Hierzu unterteilen wir das Grundintervall $[0, 2]$ in zwei Teilintervalle $[0, 1]$ und $[1, 2]$, wählen zwei beliebige x-Werte aus diesen Intervallen (in diesem Beispiel $0,5$ und $1,7$), deren Funktionswerte dann die Höhen der entsprechenden Rechtecke bilden. Je mehr wir unser Ausgangsintervall unterteilen, desto genauer wird unsere Näherung an die gesamte Fläche, siehe Abbildung 6.8 und Abbildung 6.9.
Dies führt zu folgender

Definition. Seien $a < b$ zwei reelle Zahlen und $[a, b] \subset \mathbb{R}^2$ ein Intervall. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Eine *Unterteilung* U_n *der Ordnung* n des Intervalls $[a, b]$ ist gegeben

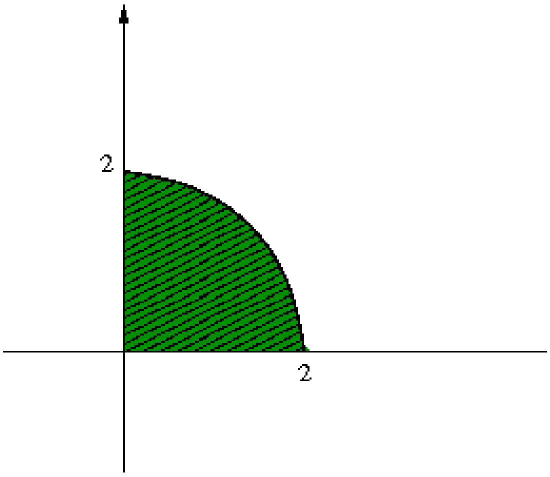


Abbildung 6.5 Flächeninhalt eines Viertelkreises

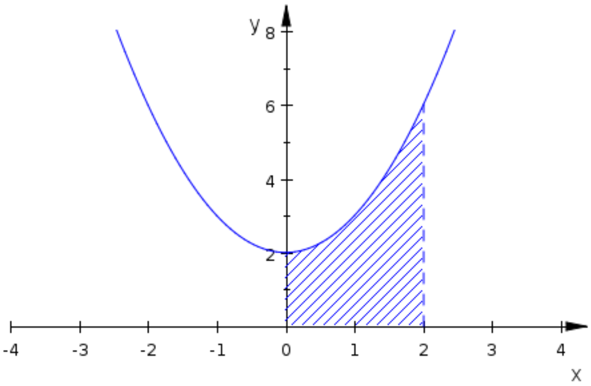


Abbildung 6.6 Flächeninhalt unter einer Parabel

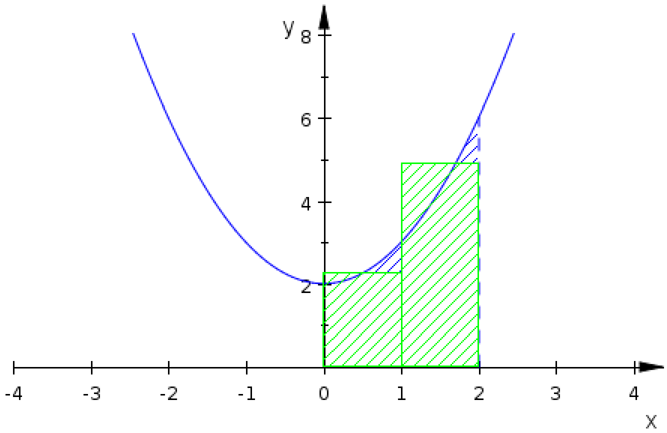


Abbildung 6.7 Näherung durch zwei Stützstellen

durch $n+1$ Punkte x_i mit $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < x_{n-1} < b = x_n$, die eine Unterteilung des Intervalls $[a,b]$ in n Teilintervalle $[a,x_1],[x_1,x_2],\ldots,[x_{n-1},b]$ definieren. Sind c_i für $i = 1,\ldots,n$ jeweils Punkte des Intervalls $[x_{i-1},x_i]$, so definieren wir die *Riemannsche Summe* $R(U_n,f)$ der Unterteilung U_n der Ordnung n durch

$$R(U_n,f) := \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Beispiele.
Sei $a := 0$ und $b := 2$. Wir betrachten das Intervall $[a,b] = [0,2]$ und die Funktion $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 + 2$.

- In Abbildung 6.7 ist eine Unterteilung von $[0,2]$ der Ordnung 2 durch die drei Punkte $0 < 1 < 2$ skizziert. Wir haben dort zwei Punkte $c_1 = 0,5 \in [0,1]$ und

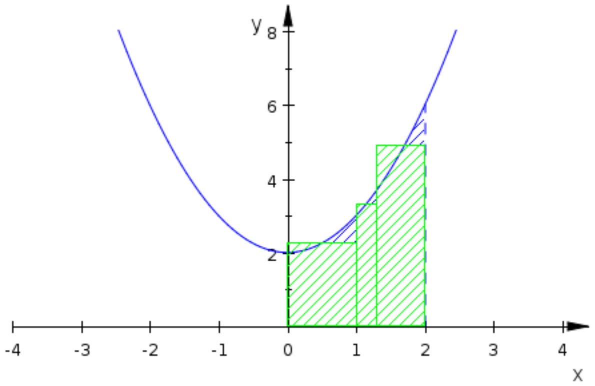


Abbildung 6.8 Näherung durch drei Stützstellen

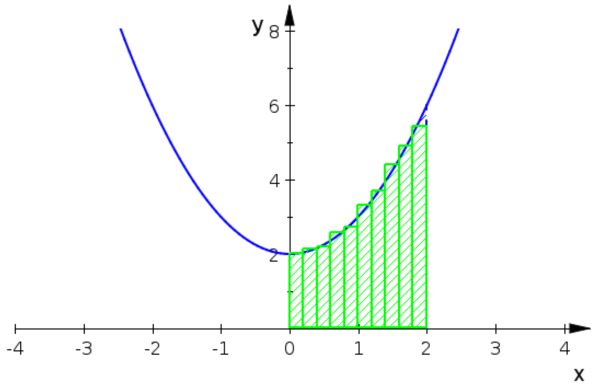


Abbildung 6.9 Näherung durch 10 Stütstellen

$c_2 = 1,7 \in [1,2]$ gewählt. Die zugehörgie Riemannsche Summe

$$R(U_2, f) = f(0,5)(1-0) + f(1,7)(2-1) = 7,14$$

ist dann gerade gleich dem Flächeninhalt der beiden Rechtecke.

- In Abbildung 6.8 ist eine Unterteilung von $[0,2]$ der Ordnung 3 durch die vier Punkte $0 < 1 < 1,3 < 2$ gegeben. Außerdem haben wir dort drei Punkte $c_1 = 0,5$, $c_2 = 1,15$ und $c_3 = 1,7$ gewählt. Die zugehörige Riemannsche Summe

$$R(U_3, f) = f(0,5)(1-0) + f(1,15)(1,3-1) + f(1,7)(2-1,3) = 6,66975$$

der Unterteilung U_3 ist dann gleich der Summe der Flächeninhalte der drei Rechtecke.

- Schließlich haben wir in Abbildung 6.9 eine Unterteilung von $[0,2]$ der Ordnung 10 skizziert. Nach Wahl von Punkten $c_1 \in [0;0,2], \ldots, c_{10} \in [1,8;2]$ erhalten wir eine zugehörige Riemannsche Summe

$$R(U_{10}, f) = 6,66758.$$

Wir sehen an diesem Beispiel, dass wir, indem wir das Ausgangsintervall $[a,b]$ immer weiter unterteilen, jeweils Punkte c_i in den kleineren Teilintervallen wählen und die zugehörigen Riemannschen Summen berechnen, den vom Funktionsgraphen der Funktion f definierten Flächeninhalt immer genauer annähern. Hierbei haben wir das Ausgangsintervall **vollständig** immer weiter unterteilt, d. h. die Länge eines größten Teilintervalls in der nächsthöheren Unterteilung erneut verkleinert. Flächen, die unterhalb der x-Achse verlaufen, werten wir hierbei negativ. Dies führt zu folgenden Definitionen:

Definition. Sei U_n eine Unterteilung des Intervalls $[a,b]$. Dann definieren wir die *Länge $L(U_n)$ der Unterteilung U_n* als die Länge eines größten Teilintervalls der Unterteilung U_n.

Definition. Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt *(Riemann-)integrierbar*, wenn für jede Folge von Unterteilungen U_n, deren zugehörige Folge der Längen $L(U_n)$ eine Nullfolge ist, die Folge der Riemannschen Summen $R(U_n, f)$ gegen einen festen Grenzwert konvergiert. Wir bezeichnen dann diesen Grenzwert mit

$$\int_a^b f(x)dx$$

und nennen ihn *bestimmtes Integral der Funktion f über dem Intervall* $[a, b]$.

6.2.2 Eigenschaften bestimmter Integrale

Die Funktionen, mit denen wir uns beschäftigen, sind stets Riemann-integrierbar. Allgemein gilt

Satz. *Jede stetige Funktion ist integrierbar. Genauso ist jede monotone Funktion integrierbar.*

Aufgrund der Definition eines bestimmten Integrals erhalten wir

Satz. *Ist $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine konstante Funktion, d. h. $f(x) = c$ für alle $x \in [a, b]$, so ist*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b cdx = c(b - a).$$

Ist $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, so gilt $\int\limits_a^a (x)dx = 0$.

Die Summe zweier integrierbarer Funktionen ist erneut integrierbar. Es gilt

Satz. *Seien f und g zwei integrierbare Funktionen $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl. Dann sind die Funktionen $f + g$ und λf ebenfalls integrierbar und es gilt*

- $\int\limits_a^b (f + g)(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx$
- $\int\limits_a^b (\lambda f)(x)dx = \lambda \int\limits_a^b f(x)dx$
- *Ist für alle $x \in [a, b]$ der Funktionswert $f(x)$ kleiner oder gleich dem Funktionswert $g(x)$, d. h. $f \leq g$, so gilt $\int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b g(x)dx$.*

Ist $h : [a, c] \to \mathbb{R}$ integrierbar und gilt $a < b < c$, so gilt $\int\limits_a^c h(x)dx = \int\limits_a^b h(x)dx + \int\limits_b^c h(x)dx$.

Diese Sätze sind sehr nützlich bei der Berechnung von bestimmten Integralen.
Angenommen, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist eine stetige Funktion. Bezeichnen wir mit m das Minimum der Funktionswerte $f(x)$ mit $x \in [a,b]$ und mit M das Maximum der Funktionswerte $f(x)$ mit $x \in [a,b]$, so ist die konstante Funktion $m : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $m(x) := m$ immer kleiner oder gleich der Funktion f, d.h. $m \leq f$. Analog erhalten wir $f \leq M$. Nun können wir obige Sätze anwenden und erhalten

$$m(b-a) = \int\limits_a^b m dx \leq \int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b M dx = M(b-a).$$

Die Zahl $\int\limits_a^b f(x)dx$ ist demnach gleich einer Zahl $C(b-a)$ mit einem geeigneten $C \in [m,M]$.
Wir haben vorausgesetzt, dass f eine stetige Funktion ist. Deswegen können wir den zugehörigen Funktionsgraphen von $f(a)$ nach $f(b)$ „ohne Absetzen des Stiftes in einem Stück bis zu $f(b)$ durchzeichnen". Anschaulich ist deswegen sofort klar, dass jeder Funktionswert C zwischen dem Minimum m und dem Maximum M der Funktionswerte $f(x)$ auch wirklich von der Funktion f angenommen wird, d. h. zu jedem solchen C gibt es ein $t \in [a,b]$ mit $f(t) = C$. Somit gilt der folgende

Satz. ***(Mittelwertsatz der Integralrechnung)***
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gibt es ein $t \in [a,b]$, für das gilt

$$\int\limits_a^b f(x)dx = f(t)(b-a).$$

6.3 Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Wir haben bisher nur die Berechnung bestimmter Integrale von konstanten Funktionen behandelt. Wie aber berechnet man nun beliebige bestimmte Integrale? Gibt es einen Zusammenhang zwischen bestimmten und unbestimmten Integralen? Hier ist der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ein wichtiges Resultat:

Satz. ***(Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)***
Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt für jede Stammfunktion F von f:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Als Abkürzung schreiben wir im Folgenden $[F(x)]_a^b := F(b) - F(a)$.

Exkurs:

- Wir wollen als Exkurs den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung beweisen. Hierzu zeigen wir zunächst, dass die Funktion

$$G(x) := \int_a^x f(y)dy$$

eine Stammfunktion der Funktion f ist. Dazu müssen wir lediglich die Ableitung der Funktion G berechnen und nachweisen, dass $G' = f$ gilt. Die Ableitung einer Funktion haben wir über den Grenzwert des Differenzenquotienten definiert, siehe Kapitel 5. Hier gilt

$$\begin{aligned} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} &= \frac{\int_a^{x+h} f(y)dy - \int_a^x f(y)dy}{h} \\ &= \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(y)dy. \end{aligned}$$

Mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung erhalten wir

$$\frac{G(x+h) - G(x)}{h} = \frac{1}{h} f(t_h)h = f(t_h)$$

für ein geeignetes $t_h \in [x, x+h]$.

Wenn wir jetzt h gegen Null laufen lassen, ist $\lim\limits_{h \to 0} t_h = x$ und es folgt

$$\begin{aligned} G'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} f(t_h) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

- Nun zeigen wir $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. Wir haben ja bereits gesehen, dass die Funktion $G(x) = \int_a^x f(y)dy$ eine Stammfunktion von f ist. Insbesondere gilt

$$G(a) = 0 \text{ und } G(b) = \int_a^b f(y)dy.$$

Unsere Funktion F ist nach Voraussetzung ebenfalls eine Stammfunktion der Funktion f. Sie unterscheidet sich also von der Funktion G höchstens um eine

Konstante c, d. h. es gilt $F = G + c$. Damit folgt

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= G(b) + c - (G(a) + c) \\ &= G(b) - G(a) \\ &= \int_a^b f(y)dy - 0 \\ &= \int_a^b f(y)dy. \end{aligned}$$

Mithilfe des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung können wir nun praktisch bestimmte Integrale berechnen.

Beispiele.
Wir berechen die Flächeninhalte der in Abbildungen 6.3, 6.4 und 6.6 gegebenen Flächen dargestellt durch bestimmte Integrale:

- Abbildung (6.3): $\int_0^4 1dx = [x]_0^4 = 4 - 0 = 4.$
- Abbildung (6.4): $\int_0^2 -x + 2dx = [-\frac{1}{2}x^2 + 2x]_0^2 = -\frac{1}{2} \cdot 4 + 4 - (-\frac{1}{2} \cdot 0^2 + 2 \cdot 0) = 2.$
- Abbildung (6.6): $\int_0^2 x^2 + 2xdx = [\frac{1}{3}x^3 + 2x]_0^2 = \frac{1}{3} \cdot 8 + 2 \cdot 2 - 0 = \frac{20}{3}.$

Bemerkung. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung liefert einen Zusammenhang zwischen bestimmten und unbestimmten Integralen. Eine Funktion kann aber auch auf einem Intervall integrierbar sein, ohne dass sie eine Stammfunktion besitzt, d. h. ohne dass das unbestimmte Integral existiert. Ein Beispiel hierfür ist die Funktion $f : [0, 4] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in [0, 2] \\ 5 & \text{falls } x \in [2, 4] \end{cases}$$

Diese Funktion ist noch nicht einmal stetig und besitzt keine Stammfunktion. Trotzdem ist die Funktion integrierbar und es gilt

$$\begin{aligned} \int_0^4 f(x)dx &= \int_0^2 1dx + \int_2^4 5dx \\ &= [x]_0^2 + [5x]_2^4 \\ &= 12. \end{aligned}$$

6.3.1 Biologisches Beispiel

Widmen wir uns nun Problem 2. Der Körpertemperaturverlauf unserer fiktiven Krankheit wird durch die Funktion $f : [0, 7] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = -\frac{8}{49}x(x-7)+37$ beschrieben. Wir interessieren uns für die durchschnittliche Körpertemperatur während dieser Zeit. Eine Möglichkeit, diese näherungsweise zu berechnen, erhalten wir, indem wir zu festen Zeitpunkten, z. B. jeweils nach einem Tag, die Temperatur messen und den Durchschnitt dieser Temperaturen berechnen. In diesem Fall wäre die Näherung der Durchschnittstemperatur gegeben durch

$$\frac{1}{7}\sum_{i=1}^{7} f(i) \approx 38,3.$$

Stattdessen können wir nach einer beliebigen gleichbleibenden Zeit die Körpertemperatur messen und einen entsprechenden Durchschnitt berechnen. Wir unterteilen also unsere Zeit, d. h. das Ausgangsintervall $[0, 7]$, in $n + 1$ gleich große Teilintervalle und erhalten so eine Unterteilung des Intervalls $[0, 7]$ der Ordnung n. Der Durchschnitt der entsprechenden Temperaturen am Ende t_i eines Teilintervalls wird dann durch die Summe

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(t_i)$$

berechnet. Je häufiger wir messen, d. h. je größer n wird, desto genauer wird unsere Näherung der Durchschnittstemperatur. Die so berechneten Summen sind ganz ähnlich zu den Riemannschen Summen, siehe Abbildung (). Unsere Unterteilungen U_n der Ordnung n sind in diesem Fall alle „äquidistant“, d. h. jedes Teilintervall hat die Länge $\frac{7}{n}$, und die frei wählbaren Punkte der Teilintervalle sind in diesem Beispiel jeweils die Endpunkte t_i der Intervalle. Die zugehörigen Riemannschen Summen sind also durch

$$R(f, U_n) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i) \cdot \frac{7}{n}$$

gegeben. Auch hier gilt, je größer unser n ist, desto genauer ist die Riemannsche Summe $R(U_n, f)$ eine Näherung des Integrals $\int\limits_0^7 f(x)dx$. Insgesamt ist die genaue durchschnittliche Körpertemperatur folglich gegeben durch

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(t_i) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{7} R(f, U_n) \\
&= \frac{1}{7}\int_0^7 f(x)dx \\
&= \frac{1}{7}\int_0^7 -\frac{8}{49}x(x-7)+37dx \\
&= \frac{1}{7}\int_0^7 -\frac{8}{49}x^2+\frac{8}{7}x+37dx \\
&= \frac{1}{7}[-\frac{8}{147}x^3+\frac{4}{7}x^2+37x]_0^7 \\
&= \frac{1}{7}\left(-\frac{56}{3}+28+259\right) \\
&= \frac{115}{3} \\
&\approx 38,3.
\end{aligned}$$

Bemerkung. Allgemein kann man den Mittelwert von Funktionswerten einer stetigen Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ innerhalb eines Intervalls $[a,b]\subset\mathbb{R}$ durch das Integral

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

berechnen.

6.4 Berechnung einiger Integrale

In diesem Abschnitt übertragen wir die Rechenregeln für unbestimmte Integrale auf bestimmte Integrale.
Die einfachste Rechenregel in diesem Zusammenhang ist die **Summenregel** Ist $a<b<c$ und $f:[a,c]\to\mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion, so gilt

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx.$$

6.4.1 Partielle Integration und Substitution

Partielle Integration Sei $a<b$ und $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen, deren Ableitungen stetig sind. Dann gilt die partielle Integrationsregel

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Beispiel. Wir berechnen nun das Integral

$$\int_0^1 xe^x dx.$$

Der Integrand xe^x ist das Produkt zweier Funktionen, x und e^x. Hier bietet sich die Verwendung der partiellen Integrationsregel an. Wir kennen zu beiden Funktionen eine Stammfunktion, zunächst kann also sowohl x als auch e^x die Rolle der Funktion $f'(x)$ spielen. Es gilt also sowohl

$$\int_0^1 xe^x dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx$$

als auch

$$\int_0^1 xe^x dx = [\frac{1}{2}x^2 e^x]_0^1 - \int \frac{1}{2}x^2 e^x dx$$

Wir sehen hier, dass es ungünstig ist, die Funktion x aufzuleiten. Deswegen setzen wir $f'(x) = e^x$ und berechnen

$$\begin{aligned}\int_0^1 xe^x dx &= [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx \\ &= [xe^x]_0^1 - [e^x]_0^1 \\ &= -e - 1 + e \\ &= -1.\end{aligned}$$

Substitution Sei $a < b$ und $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit Ableitung g'. Sei $f : g([a, b]) \to \mathbb{R}$ integrierbar mit Stammfunktion F. Dann erhalten wir mit der Substitutionsregel

$$F(g(x)) = \int f(g(x))g'(x)dx.$$

und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung die Substitutionsregel für bestimmte Integrale

$$\begin{aligned}\int_a^b f(g(x))g'(x)dx &= F(g(b)) - F(g(a)) \\ &= \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx.\end{aligned}$$

Beispiel. Wir wollen nun das Integral

$$\int_0^2 2xe^{x^2} dx$$

berechnen. Auch hier besteht der Integrand aus dem Produkt zweier Funktionen, nämlich $2x$ und e^{x^2}. Hier gilt jedoch die Besonderheit, dass einer der beiden Faktoren, nämlich die Funktion e^{x^2}, eine Verkettung der Funktionen e^x und x^2 ist, und der zweite Faktor $2x$ gerade die Ableitung von x^2 ist. Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = e^x$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g(x) = x^2$, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\int\limits_0^2 2xe^{x^2}dx &= \int\limits_0^2 f(g(x))g'(x)dx \\ &= \int\limits_{g(0)}^{g(2)} f(x)dx \\ &= \int\limits_0^4 e^x dx \\ &= [e^x]_0^4 \\ &= 1 - e^4.\end{aligned}$$

6.4.2 Biologisches Beispiel

Widmen wir uns nun Problem 3. Die Zellen einer exponentiell sich vermehrenden Population mögen in der Zeit $T > 0$ jeweils einen Zellzyklus durchlaufen. Der mittlere RNA-Gehalt aller Zellen während des Zeitintervalls $[0, T]$ ist bis auf einen konstanten Faktor gegeben durch das Integral

$$I := \int\limits_0^T \left(\frac{x}{T} + 1\right) \cdot \exp(-kx)dx$$

mit der gemäß

$$kT = \ln(2)$$

definierten Konstanten k. Dieses wollen wir nun berechnen. Hierzu verwenden wir die partielle Integration, wobei wir wie im Beispiel zur partiellen Integration $g(x) = (\frac{x}{T} + 1)$ und $f'(x) = e^{-kx}$ setzen. Dann ist $f(x) = -\frac{k}{e}^{-kx}$ und es gilt

$$\begin{aligned}\int\limits_0^T \left(\frac{x}{T} + 1\right) \cdot \exp(-kx)dx &= \left[-\frac{1}{k}(\frac{x}{T} + 1)e^{-kx}\right]_0^T + \int\limits_0^T \frac{1}{k}e^{-kx}dx \\ &= \left[-\frac{1}{k}(\frac{x}{T} + 1)e^{-kx}\right]_0^T + \left[-\frac{1}{k^2}e^{-kx}\right]_0^T \\ &= -\frac{2}{k}e^{-kT} + \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}e^{-kT} + \frac{1}{k^2} \\ &= -\frac{2}{k}\frac{1}{2} + \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}\frac{1}{2} + \frac{1}{k^2} \\ &= \frac{1}{2k^2}.\end{aligned}$$

6.4.3 Partialbruchzerlegung

Mithilfe obiger Integrationsregeln können wir schon viele bestimmte und unbestimmte Integrale berechnen. Ist $a < b$ und c eine beliebige reelle Zahl, so wissen wir, dass

$$\int_a^b \frac{1}{x+c}dx = \ln(b+c) - \ln(a+c)$$

gilt. In diesem Abschnitt geben wir ein Verfahren an, mit dessen Hilfe allgemeinere Integrale von rationalen Funktionen berechnet werden können. Dieses Verfahren führen wir an einem Beispiel vor:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2-1}.$$

Der Trick ist, dass nach der dritten binomischen Formel $(x^2-1) = (x-1)(x+1)$ gilt, und wir die Stammfunktionen von $(x-1)$ bzw. $(x+1)$ kennen. Wenn wir also den Integranden $\frac{1}{x^2-1}$ als Summe $\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$ mit reellen Zahlen A und B darstellen könnten, könnten wir die Summenregel anwenden und $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2-1}$ berechnen. Wir suchen also reelle Zahlen A und B, für die gilt

$$\begin{aligned}
& & \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} &= \frac{1}{x^2-1} \\
&\Longleftrightarrow & \frac{A(x+1)}{x-1} + \frac{B(x-1)}{x+1} &= \frac{1}{x^2-1} \\
&\Longleftrightarrow & \frac{Ax+A+Bx-B}{(x-1)(x+1)} &= \frac{1}{x^2-1} \\
&\Longleftrightarrow & \frac{(A+B)x+(A-B)}{x^2-1} &= \frac{1}{x^2-1} \\
&\Longleftrightarrow & A+B=0 \text{ und } A-B&=1.
\end{aligned}$$

Wegen $A+B=0$ muss $A=-B$ gelten. Dies können wir in $A-B=1$ einsetzen und erhalten so $A+A=1 \to A=\frac{1}{2},\ B=-\frac{1}{2}$. Insgesamt gilt

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x^2-1}dx &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\frac{1}{2}}{x-1} + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-\frac{1}{2}}{x+1} \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x-1} - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x+1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left([\ln|x-1|]_0^{\frac{1}{2}} - [\ln|x+1|]_0^{\frac{1}{2}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln\left(\frac{3}{2}\right)\right).
\end{aligned}$$

6.5 Uneigentliche Integrale

Bei der Berechnung von bestimmten Integralen $\int\limits_a^b f(x)dx$ haben wir immer vorausgesetzt, dass $[a,b]$ ein geschlossenes reelles Intervall ist und $f[a,b] \to \mathbb{R}$ eine auf dem ganzen Intervall definierte stetige Funktion ist. Dies wollen wir in diesem Abschnitt verallgemeinern.

Integrale über halboffenen Intervallen

Angenommen, $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ ist eine stetige Funktion auf einem halboffenen Intervall $[a,\infty)$. ∞ ist hier keine Zahl, sondern steht stellvertretend für einen Grenzwert, nämlich $\lim\limits_{b\to\infty} b$. Wir können also untersuchen, ob der Grenzwert

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$$

existiert. Ist dies der Fall und der Grenzwert gleich einer reellen Zahl G, so schreiben wir $\int\limits_a^\infty f(x)dx = G$ und nennen dieses Integral ein *uneigentliches Integral.*

Beispiel. Wir wollen untersuchen, ob der Grenzwert

$$\lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{1}{x^2}dx$$

existiert und gegebenenfalls berechnen. Dazu berechnen wir

$$\begin{aligned}
\lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}dx &= \lim_{b\to\infty} \int_1^b x^{-2}dx \\
&= \lim_{b\to\infty} \left[-x^{-1}\right]_1^b \\
&= \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{b}+1\right) \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Damit folgt $\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = 1$.

Integrale über Definitionslücken

Angenommen, $f\,(a,b\,] \to \mathbb{R}$ sei eine stetige Funktion, die nur auf dem halboffenen Intervall $(a,b\,]$ definiert ist (d.h. sie hat z. B. in a eine Polstelle). Auch hier können wir untersuchen, ob trotzdem der Grenzwert

$$\lim_{r\to a} \int_r^b f(x)dx$$

existiert. Ist dies der Fall, sprechen wir wie oben von einem uneigentlichen Integral.

Beispiel. Wir wollen untersuchen, ob der Grenzwert

$$\lim_{r\to 0}\int_r^4 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

existiert und gegebenenfalls berechnen. Es gilt

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0}\int_r^4 \frac{1}{\sqrt{x}}dx \\ &= \lim_{r\to 0}\left[2\sqrt{x}\right]_r^4 \\ &= \lim_{r\to 0}\left(4-2\sqrt{r}\right) \\ &= 4.\end{aligned}$$

Damit folgt $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 4$.

6.6 Zusammenfassung

- Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine (stetige) Funktion auf einem reellen Intervall I. Gibt es eine Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ mit $F' = f$ über I, so heißt die Funktion F *Stammfunktion von f auf dem Intervall I.*
- Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann bezeichnet

  $$\int f(x)dx$$

  das sogenannte *unbestimmte Integral der Funktion f über dem Intervall I.* Dies ist definiert durch eine beliebige (d. h. bis auf eine Konstante eindeutig bestimmte) Stammfunktion von f.
- Die unbestimme Integration ist eine Umkehrung der Differentiation. Es gilt immer

  $$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)dx\right) = \left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

  und
  (6.2)

  $$\int \frac{d}{dx}f(x)dx = \int f'(x)dx = f(x) + c$$

  mit $c \in \mathbb{R}$.

- Die Summenableitungsregel
$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$
für alle $x \in I$ ergibt die *Summenregel für unbestimmte Integrale*:
$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

- Mithilfe der Produktableitungsregel
$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$
für alle $x \in I$ erhalten wir die sogenannte *partielle Integrationsregel*:
$$\int f'(x)g(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x)g'(x)dx.$$

- Mithilfe der Kettenregel
$$(f(g(x)))' = f'(g(x))g'(x)$$
für alle $x \in I$ erhalten wir
$$f(g(x)) = \int f'(g(x))g'(x)dx.$$
Ist $F : I \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f, so können wir die Substitutionsregel auch umschreiben zu
$$F(g(x)) = \int f(g(x))g'(x)dx.$$

- Seien $a < b$ zwei reelle Zahlen und $[a, b] \subset \mathbb{R}^2$ ein Intervall. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Eine *Unterteilung U_n der Ordnung n* des Intervalls $[a, b]$ ist gegeben durch $n + 1$ Punkte x_i mit $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < x_{n-1} < b = x_n$, die eine Unterteilung des Intervalls $[a, b]$ in n Teilintervalle $[a, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{n-1}, b]$ definieren.

  Sind c_i für $i = 1, \ldots, n$ Punkte des Intervalls $[x_{i-1}, x_i]$, so definieren wir die *Riemannsche Summe* $R(U_n, f)$ der Unterteilung U_n der Ordnung n durch
$$R(U_n, f) := \sum_{i=1}^{n} f(c_i)(x_i - x_{i-1}).$$

- Sei U_n eine Unterteilung des Intervalls $[a, b]$. Dann definieren wir die *Länge $L(U_n)$ der Unterteilung U_n* als die Länge eines größten Teilintervalls der Unterteilung U_n.

- Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt *(Riemann-)integrierbar*, wenn für jede Folge von Unterteilungen U_n, deren zugeörige Folge der Längen $L(U_n)$ eine Nullfolge ist, die Folge der Riemannschen Summen $R(U_n, f)$ gegen einen festen Grenzwert konvergiert. Wir bezeichnen dann diesen Grenzwert mit
$$\int_a^b f(x)dx$$
und nennen ihn *bestimmtes Integral der Funktion f über dem Intervall $[a, b]$*.

6.7 Aufgaben

1. Bestimmen Sie eine Stammfunktionen folgender Funktionen.

   a) $f(x) = 4x + 7x^2$ b) $f(x) = (e^x + 1)^2$ c) $f(x) = \cos(x) - \sin(x)$

   d) $f(x) = 3^{-x}$ e) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{t}$ f) $f(x) = ax^4 + bx^4 - 2x^{-2} + a + 2c$

   g) $f(x) = \sqrt[3]{x+4}$ h) $f(x) = \sqrt{x^{-3}}$ i) $f(x) = x^2 + \dfrac{2}{3}x - \dfrac{1}{6} - \dfrac{4}{x}$

   j) $f(x) = \ln(2x)$ k)$f(x) = (\frac{1}{2})^{x+2}$ l) $f(x) = \dfrac{1}{5x+7}$

2. Bestimmen Sie folgende unbestimmte Integrale.

   a) $\int (x^{\frac{2}{3}} + 7) \cdot (x^3 + x^{-\frac{1}{6}})$ dx b) $\int e^x \cdot x dx$ c) $\int x^4 e^{7x^5+2} dx$

   d) $\int e^{2x} x^2 dx$ e) $\int e^{\sqrt{2s}} ds$ f)$\int \dfrac{3}{(x-2)^2} dx$

   g) $\int \frac{1}{2+2x^2} dx$ h) $\int \cos(x)^2 dx$ i) $\int \sqrt{1-x^2} dx$

3. Berechnen Sie folgende Integrale.

   a)$\int\limits_0^5 e^{ax} dx$ b) $\int\limits_0^1 0 dx$ c) $\int\limits_2^4 2x^2 + 5x + 3x^{-2} dx$

   d) $\int\limits_{-1}^{1} |x| dx$ e) $\int\limits_a^3 \sqrt{bx} dx$ f) $\int\limits_{t_0}^{t_1} (x^3 + e^{x^2}) \cdot 100t dt$

   g) $\int\limits_1^2 \frac{1}{5x-2} dx$ h) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^{1} \dfrac{1}{101x} dx$ i) $\int\limits_0^{\pi} \cos(2x) \cdot \sin(3x) dx$

   j) $\int\limits_0^1 e^{3t} \cos(t) dt$ k) $\int\limits_1^4 \frac{dx}{(ax+b)^3}$ l) $\int\limits_{-\frac{b}{a}}^{\pi-\frac{b}{a}} 7\cos(ax+b) dx$

   m) $\int\limits_{-2}^{0} \frac{1}{\sqrt{-x^2-2x}} dx$ n) $\int\limits_{-1}^{1} \dfrac{e^x}{e^x+1} dx$ o)$\int\limits_0^{\frac{1}{5}} \frac{1}{5} \cdot e^{5x} dx$

   s) $\int\limits_0^7 f(x) dx$ mit $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < 2 \\ x-1 & \text{für } 2 \leq x \leq 4 \\ 3 & \text{für } 4 \leq x \end{cases}$

   t) $\int\limits_1^4 f(t) dt$ mit $f(t) = \begin{cases} e^t - 1 & \text{für } t < 2 \\ e^{6-2t} - 1 & \text{für } t \geq 2 \end{cases}$

4. Berechnen Sie, wenn möglich, folgende uneigentliche Integrale.

a) $\int\limits_{1}^{\infty} x^{-2} dx$ b) $\int\limits_{0}^{2} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ c) $\int\limits_{100}^{\infty} \frac{1}{x} dx$ d) $\int\limits_{-\infty}^{z} e^{x} dx$

5. Berechnen Sie den Flächeninhalt der von folgenden Funktionen eingeschlossenen Flächen.

   a) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 1,$ $g(x) = 1$

   b) $f(x) = x^2 - 1,$ $g(x) = 1 - x^2$

   c) $f(x) = \cos(x),$ $g(x) = |\frac{2}{\pi}x| - 1$

Anwendungsaufgaben

1. Eine Bakterienkultur $P(t)$ wächst mit einer Rate von

$$P'(t) = \frac{1000}{1 + 0,5t},$$

wobei t die Zeit in Tagen ist. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist der Bestand der Kultur gleich 400. Bestimmen Sie den Bestand P als eine Funktion abhängig von t.

7 Differentialgleichungen

Problem 1 Fruchtfliegen vermehren sich im Sommer unter idealen Bedingungen besonders schnell. Ein Biologe stellt fest, dass für die Wachstumsrate $f'(t) = \frac{df}{dt}$ von Fruchtfliegen zum Zeitpunkt t

$$f'(t) = \frac{df}{dt} = 1,5f(t)$$

gilt. Hierbei bezeichnet $f(t)$ die Anzahl der Fruchtfliegen nach t Tagen. Am ersten Tag (zum Zeitpunkt $t = 0$) zählt er 20 Fruchtfliegen. Mit wievielen Fruchtfliegen muss er nach einer Woche rechnen?

Problem 2 Eine Biologin stellt einige plausible Annahmen zur Wachstumsgeschwindigkeit y' einer bestimmten Population y auf. Sie nimmt an, dass die Geschwindigkeit proportional zum Bestand y ist. Außerdem geht sie aufgrund zunehmend schlechter Umwelteinflüsse davon aus, dass die Wachstumsgeschwindigkeit y' antiproportional zur Zeit t ist. Gesucht ist eine mathematische Modellierung dieses Sachverhaltes und eine Funktion $y(t)$, die den Bestand der Population näherungsweise beschreibt.

Problem 3 In Abbildung 7.1 ist das Wachstum einer Pantoffeltierchenpopulation in einer kleinen Laborkultur mit konstanten Umweltbedingungen grafisch dargestellt[1]. Die Population wird durch die Gleichung

$$p' = 1,1 \cdot p \cdot \left(\frac{900 - p}{900}\right)$$

beschrieben. Welche Funktion p beschreibt die Anzahl der Pantoffeltierchen annähernd genau?

Ziel: Differentialgleichungen - Lösungsverfahren und Modellierung.

7.1 Lösungsverfahren für Differentialgleichungen 1. Ordnung

Wir haben bereits in Kapitel 5 sogenannte Differentialgleichungen kennengelernt. In diesem Abschnitt definieren wir, was genau eine Differentialgleichung erster Ordnung ist, und geben Lösungsverfahren hierzu an.

[1]Campbell N. A., Reece, J. B.: *Biologie* S. 1388

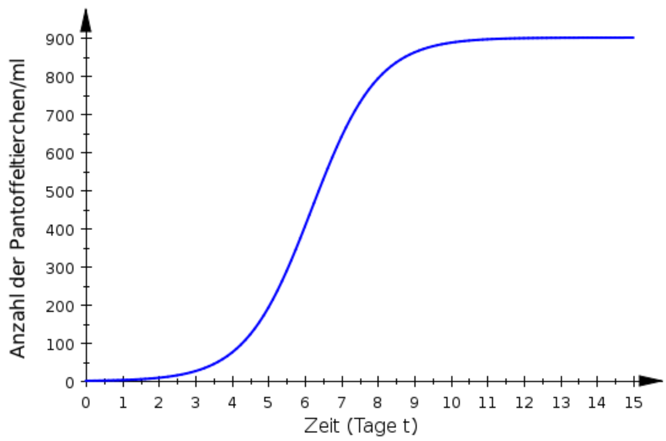


Abbildung 7.1 Eine Pantoffeltierchenpopulation im Labor

Definition von Differentialgleichungen 1. Ordnung

Eine *Differentialgleichung* ist eine Gleichung, in der eine (noch unbekannte) Funktion y und (unter Umständen auch höhere) Ableitungen von y vorkommen. Eine *Differentialgleichung 1. Ordnung* ist eine Gleichung, in der eine (noch unbekannte) Funktion y und ihre erste Ableitung vorkommen.

Bemerkung. Anstatt von einer Differentialgleichung zu sprechen verwendet man häufig auch den Begriff *DGL*.

Beispiele.

1. Die Gleichung
$$y' = y$$
ist eine Differentialgleichung. Sie ist sogar eine Differentialgleichung 1. Ordnung, da in ihr nur die unbekannte Funktion y und ihre erste Ableitung vorkommen.

2. Die Gleichung
$$y' = yx^2$$
ist ebenfalls eine Differentialgleichung 1. Ordnung.

3. Die Gleichung
$$y'' - 3y' + 2y = 0$$
ist eine Differentialgleichung. Sie ist im Gegensatz zum ersten Beispiel jedoch keine Differentialgleichung 1. Ordnung. Die höchste Ableitung in der Gleichung ist hier y'', wir sprechen damit von einer Differentialgleichung 2. Ordnung.

Trennung der Variablen

Eine Lösung der DGL $y' = y$ ist die Exponentialfunktion $\exp(x)$. Für sie gilt stets $\exp(x)' = \exp(x)$.

Für eine gegebenen Funktion y lässt sich immer leicht überprüfen, ob sie tatsächlich eine Differentialgleichung erfüllt. Dieses Prinzip haben wir in den Aufgaben zu Kapitel 5 benutzt. Allgemein sieht man einer Differentialgleichung jedoch oft nicht so einfach eine Lösung an.

Eine Methode zur Lösung einer Differentialgleichung 1. Ordnung ist die sogenannte *Trennung der Variablen*. Sei hierzu eine Differentialgleichung

$$y' = f(x)g(y)$$

mit stetigen Funktionen f und g gegeben. Für die Ableitung y' gilt

$$y' = \frac{dy}{dx},$$

d. h. die (gesuchte) Funktion y ist nach der Variablen x abgeleitet worden. dy und dx sind hierbei sogenannte *Differentialformen*, mit denen man wie mit Variablen rechnen kann. Wir können folglich die gesamte Differentialgleichung mit der Differentialform dx multiplizieren und erhalten somit die Gleichung

$$dy = f(x)g(y)dx.$$

Suchen wir nun eine Lösung der Differentialgleichung, für die $g(y)$ nirgends verschwindet, so können wir die Gleichung $dy = f(x)g(y)dy$ durch $g(y)$ dividieren und erhalten die Gleichheit

$$\frac{1}{g(y)}dy = f(x)dx$$

von Differentialen. Dann muss auch für die unbestimmten Integrale jeweils gelten

$$\int \frac{1}{g(y)}dy = \int f(x)dx.$$

Durch Berechnung der entsprechenden unbestimmten Integrale und anschließender Auflösung der Gleichung nach der Unbestimmten y erhält man die gesuchte Funktion y.

Beispiele

1. Wir wollen die Differentialgleichung

$$y' = yx^2$$

lösen. Hierzu nehmen wir an, dass die gesuchte Funktion y nirgends verschwindet. Mittels der Methode der Trennung der Variablen erhalten wir

$$\begin{aligned}
&& \frac{dy}{dx} &= yx^2 \\
\Longrightarrow && dy &= yx^2 dx \\
\Longrightarrow && \frac{1}{y} dy &= x^2 dx \\
\Longrightarrow && \int \frac{1}{y} dy &= \int x^2 dx \\
\Longrightarrow && \ln(y) &= \frac{1}{3}x^3 + C \qquad \text{mit einer Konstanten } C
\end{aligned}$$

Diese Gleichung lösen wir nun nach y auf:

$$\begin{aligned}
&& \ln(y) &= \frac{1}{3}x^3 + C \\
\Longrightarrow && y &= \exp(\frac{1}{3}x^3 + C) \\
&& &= \exp(\frac{1}{3}x^3)C \qquad \text{mit einer neuen Konstanten } C > 0.
\end{aligned}$$

Die neue Konstante C ist eine andere als die ursprüngliche Konstante (eigentlich müsste hier $\exp(C)$ für die alte Konstante C stehen - da wir C aber noch bestimmen wollen und wir uns nur für die Funktion y interessieren, können wir $\exp(C)$ auch C nennen und an dieses C die Bedingung stellen, dass es positiv sein muss.). C ist zunächst beliebig. Nur, wenn wir eine sogenannte *Anfangsbedingung*, wie zum Beispiel $y(0) = 2$ an die Funktion y vorgegeben haben, können wir C explizit bestimmen.

In unserem Beispiel würde aus der Anfangsbedingung $y(0) = 2$ folgen, dass $\exp(\frac{1}{3} \cdot 0)C = 2$ gilt. Damit wäre $C = 2$ (denn $\exp(\frac{1}{3} \cdot 0)$ ist gleich 1).

Biologische Beispiele

7.2 Differentialgleichungen höherer Ordnung

7.3 Systeme von Differentialgleichungen

7.4 Aufgaben

Anwendungsaufgaben

1. Bei der Populationsdynamik nach Verhulst wird angenommen, dass die Geburtenrate proportional zur vorhandenen Population p und die Sterberate proportional

zum Quadrat von p ist, also die Differentialgleichung

$$p' = ap - bp^2$$

mit reellen konstanten Zahlen $a, b > 0$ gilt. Berechnen Sie die Bevölkung $p(t)$ für $a = 1$ und $b = 0,001$, ausgehend von dem Anfangswert $p(0) = 10$. Berechnen Sie insbesondere auch die langfristige Entwicklung der Bevölkerung.

2. r - und K-Strategie
3. Gompertz-Wachstumsfunktion
4. Grenzen der logistischen Funktionen
5. Reaktionskinetik: Reaktionen erster, zweiter Ordnung etc.

Formelsammlung

Kapitel 1

- $\mathbb{N} := \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$, die natürlichen Zahlen (Definition 1)
- $\mathbb{Z} := \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$, die ganzen Zahlen
- $\mathbb{Q} := \{\frac{a}{b} | a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}$, die rationalen Zahlen (Definition 4)
- $\mathbb{R}$, die Menge der reellen Zahlen
- $\mathbb{R}^2$, die Menge der Paare von reellen Zahlen
- $\mathbb{R}^n$, die Menge aller Tupel $(r_1, \ldots, r_n)$ von n reellen Zahlen $r_1, \ldots, r_n \in \mathbb{R}$
- Für reelle Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$ gelten die *binomischen Formeln*
  - $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$,
  - $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$ und
  - $(x - y)(x + y) = x^2 - y^2$.

8 Lösungen der Aufgaben

8.1 Lösungen zu Kapitel 1

8.1.1 Rechenaufgaben

1. Berechnen Sie

   (a) $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6}$ (b) $\frac{3}{2} + \frac{3}{5} = \frac{21}{10}$ (c) $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

   (d) $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{47}{60}$ (e) $\frac{3}{2} - \frac{2}{3} + \frac{2}{5} - \frac{5}{2} = -\frac{19}{15}$ (f) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}} - \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{12}} = 0$

   (g) $\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{8}} = \frac{2\sqrt{12}}{\sqrt{8}}$ (h) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} = \frac{247}{210}$ (i) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{4}{\sqrt{6}}$

2. Vereinfachen Sie so weit wie möglich.

   (a) $\frac{a-5}{5-a} = -1$ (b) $\frac{4xy-20}{30-6xy} = \frac{2}{-3}$ (c) $\frac{3x+3}{2x^2-2} = \frac{3}{2(x-1)}$

   (d) $\frac{9x^2-12xy+3y^2}{12x^2-16xy+4y^2} = \frac{3}{4}$ (e) $\frac{2(a^4-b^4)}{a^2+b^2} = 2(a^2 - b^2)$ (f) $\frac{a^2+8a+2}{a^2x+8ax+2x+a^2+8a+2} = \frac{1}{x+1}$

3. Erweitern Sie die folgenden Brüche.

   (a) $\frac{2a}{3b} = \frac{10a^2}{15ab}$ (b) $\frac{9x}{7y} = \frac{9x(a-b)}{7ay-7by}$ (c) $\frac{a-3b}{3x-1} = \frac{-2a+6b}{2-6x}$

   (d) $\frac{2a}{x+1} = \frac{2a(x+1)}{x^2+2x+1}$ (e) $\frac{a}{x-2} = \frac{a(x+2)}{x^2-4}$ (f) $\frac{8y}{xy} = \frac{8}{x}$

   (g) $\frac{a+1}{y-2} = \frac{(a+1)(y-2)}{y^2-4y+4}$ (h) $\frac{12x}{12x+4} = \frac{3x^2}{3x^2+x}$ (i) $\frac{1}{xy-ab} = \frac{xy+ab}{(xy)^2-(ab)^2}$

4. Vereinfachen Sie die Mehrfachbrüche.

   (a) $\dfrac{\dfrac{a}{2(a+1)}}{2+1} = \dfrac{3a}{2a+2}$ (b) $\dfrac{\dfrac{3a}{4x}}{\dfrac{6a}{8ax}} = a$ (c) $\dfrac{\dfrac{a+1}{a^2-1}}{a-1} = 1$

(d)$\dfrac{(x+2)^{-1}}{\dfrac{x-2}{x+2} * (x-2)^{-1}} = 1$ (e)$\dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{a}}{\dfrac{9a}{\sqrt[4]{9}}} = \frac{1}{3a^2}$ (f)$(\dfrac{(x+1)^{-1}}{(x-1)^{-1}})^{-1}(x-1) = (x+1)$

5. a) $\frac{2}{3} > \frac{7}{11}$ b) $\frac{1000}{10000} = \frac{10}{100}$ c) $\frac{3}{11} < \frac{5}{12}$ d) $\frac{1}{7} < \frac{1}{2}$
   e) $\frac{1}{10} > \frac{100}{10000}$ f) $-\frac{1}{2} < -\frac{3}{8}$ g) $\frac{2}{2} > \frac{2}{3}$ h) $\frac{100}{250} = \frac{2}{5}$
   i) $-\frac{3}{5} < -\frac{4}{12}$ j) $\frac{13}{7} = \frac{52}{28}$ k) $\frac{6}{7} < \frac{7}{6}$ l) $-\frac{1}{6} > -\frac{2}{9}$

6. Wenden Sie die Potenzgesetze an und vereinfachen Sie(nur Lösung).

   (a)a^5 (b)a^6 (c)x

   (d)$2y^2 + y$ (e)$a^{12} - b^8$ (f)$\sqrt[5]{x}$

   (g)$2(x+y)^5$ (h)$b^2 - y^2$

7. Geben Sie die Lösungsmenge an (nur Lösung).

   (a)$x = -1$ (b)$x = 1$

   (c)$x = -\frac{1}{3}$ (d)$x = 1$

   (e)$x = 1$ (f)$x = \pm\sqrt{5} + 3$

   (g)$x = 1$ (h)$x = a$

8. a) injektiv und surjektiv, also bijektiv
   b) injektiv und surjektiv, also bijektiv
   c) injektiv aber nicht surjektiv
   d) injektiv aber nicht surjektiv
   e) weder injektiv noch surjektiv

8.1.2 Kurztest

Lösungen (1) b,c ; (2)c ; (3) b ; (4) c

8.1.3 Anwendungsaufgaben

1. (a) $32°C = 305.15°K$
   (b) $280°K = 6.85°C$
   (c) $50°C = 122°F$
   (d) $25°C = 77°F$
   (e) Umrechnung der Temperatur in Celsius in die Temperatur in Fahrenheit: $T_{°F} = T_{°C} \cdot 1.8 + 32$; Umrechnung der Temperatur in Fahrenheit in die Temperatur in Celsius: $T_{°C} = T_{°F} \cdot \frac{5}{9} - \frac{160}{9}$.

2. Bezeichne q die Häufigkeit des rezessiven Allels und p die Häufigkeit des dominanten Allels. Es gilt $1 = (p+q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$, weil ein Hardy-Weinberg-Gleichgewicht vorliegt. Eine Erkrankung tritt auf, wenn ein Mensch zwei rezessive Allele besitzt, also $q^2 = \frac{1}{10000}$ und $q = \frac{1}{100}$. Dann ist $p = 1 - q = \frac{99}{100}$. Die Häufigkeit der nicht erkrankten Träger des Allels ist also $2pq = \frac{198}{10000}$, das heißt von 10000 Menschen sind 198 nicht erkrankte Träger des Allels.

3. (a)$2039500\text{J} : 4.187\frac{J}{\text{g}\cdot°C} : 50000\text{g} = 9.74°C$
   (b) $0.93\frac{\text{kcal}}{\text{kg}\cdot\text{K}} = 3.89\frac{\text{J}}{\text{g}\cdot°C}$
   (c) Milch kocht schneller, da sie eine geringere Wärmekapazität hat.

4. Bestimmung der Menge Alkohol im Wein : $375\text{ml} \cdot \frac{12}{100} = 45\text{ml}$, also $0.8\frac{\text{g}}{\text{ml}} \cdot 45\text{ml} = 36\text{g}$ Alkohol.
   Bestimmung der Menge Wasser im Körper :
   $$70\text{kg} \cdot \frac{60}{100} = 42\text{kg}$$
   $$65\text{kg} \cdot \frac{60}{100} = 39\text{kg}$$
   Bestimmung der Blutalkoholkonzentration: $X_1 = 1000 \cdot \frac{36\text{g}}{42000\text{g}} = 0.857$. Die 70 kg schwere Person hat also eine Blutalkoholkonzentration von 0.734 Promille. Die Person mit 65 kg Gewicht hat $X_2 = 1000 \cdot \frac{36\text{g}}{39000\text{g}} = 0.923$ Promille.

5. Nein, die Daten machen keinen Sinn.

6. In einem Kilogramm Wasser sind 9g Kochsalz. Anhand der Massezahlen kann man erkennen, dass 58,443g NaCl aus 22,99g Na und 35,453g Cl bestehen. Daraus ergibt sich, dass 9g Kochsalz aus $22.99 : 58,443 \cdot 9 = 3.54$g Na und $35.453 : 58,443 \cdot 9 = 5.46$g Cl bestehen.

7. Schritt 1(Reaktionsgleichung): $C_2H_6O + 3O_2 \rightarrow 2CO_2 + 3H_2O$

Schritt 2(Umrechnung in $\frac{g}{mol}$):

$$\begin{aligned} C_2H_6O &: 2 \cdot 12,011 + 6 \cdot 1,008 + 15,999 && = 46,069 \\ 3O_2 &: 6 \cdot 15,999 && = 95,994 \\ 2CO_2 &: 2 \cdot (12,011 + 2 \cdot 15,999) && = 88,018 \\ 3H_2O &: 3 \cdot (2 \cdot 1,008 + 15,999) && = 54,045 \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass aus 46g Ethanol bei der Verbrennung ungefähr 88g CO_2 und 54g H_2O entstehen. Ein Liter Ethanol entspricht 789,4g Ethanol. Der Dreisatz liefert nun, dass aus 789.4 g Ethanol ungefähr 1510g Kohlenstoffdioxid und 927g Wasser entstehen.

8. (a) Zwei Quadratmeter sind 20000 Quadratzentimeter. Das bedeutet, dass auf der Haut $20000 \cdot 4000000 = 80000000000$ Mikroorganismen leben.
(b) Ein Quadratzentimeter sind 10^8 Quadratmikrometer. Die Bakterien haben eine Größe von $1 \cdot 0.5 = 0.5$ Quadratmikrometer. Daraus ergibt sich, dass auf der Haut maximal $\frac{10^8}{0.5} = 2 \cdot 10^8$ Bakterien Platz finden können.

8.2 Lösungen zu Kapitel 2

8.2.1 Trainingsaufgaben

1. a) $A + B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, $A \cdot B = \begin{pmatrix} -6 & 12 \\ 13 & -15 \end{pmatrix}$

   b) $A + B$ nicht möglich, $A \cdot B = \begin{pmatrix} 7 & -9 \\ -7 & 7 \\ 10 & -7 \end{pmatrix}$

   c) $A + B = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ 7 & 7 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}$, $A \cdot B$ nicht möglich

   d) $A + B$ nicht möglich, $A \cdot B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

   e) $A + B$ nicht möglich, $A \cdot B = \begin{pmatrix} -5 \\ -10 \end{pmatrix}$

   f) $A + B = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 0 \\ 11 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, $A \cdot B = \begin{pmatrix} 18 & 3 & 8 \\ 8 & -14 & -15 \\ -10 & -8 & -8 \end{pmatrix}$

   g) $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & -3 \end{pmatrix}$, $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

   h) $A + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A \cdot B = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ -16 & -1 \end{pmatrix}$

   i) $A + B$ nicht möglich, $A \cdot B = 4$

j) $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $A \cdot B$ nicht möglich

2. a) $x = y = 0$ b) $x = 2$, $y = -1$ c) $x = a$, $y = b$

   d) $x = 1$, $y = 0$ e) $x = a + b$, $y = a - b$

3. a) keine Lösung b) $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$

   c) $w = 7$, $x = 20$, $y = -5$, $z = 11$ d) $x = 4$, $y = 6$, $z = 5$

4. a) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ c) $\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

   d) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

   Das Gleichungssystem b) hat unendlich viele Lösungen. Hier haben wir $x_2 = t$ frei gewählt, und die anderen Lösungen in Abhängigkeit von t dargestellt.

5. a) $x_1 = 4$, $x_2 = -1$ b) $x_1 = 2$, $x_2 = -9$ c) $x_1 = 4$, $x_2 = -7$

   d) $x_1 = 9$, $x_2 = 6$ e) $x_1 = 7$, $x_2 = 0$ f) $x_1 = -1$, $x_2 = -4$

   g) $x_1 = -2$, $x_2 = -10$ h) $x_1 = 14$, $x_2 = 0$ i) $x_1 = 7$, $x_2 = 3$

   j) $x_1 = 1$, $x_2 = -9$ k) $x_1 = 2$, $x_2 = -4$ l) $x_1 = -1$, $x_2 = -3$

   m) $x_1 = 4$, $x_2 = 3$ n) $x_1 = 2$, $x_2 = 0$ o) $x_1 = 3$, $x_2 = 2$

   p) $x_1 = 1$, $x_2 = -2$ q) $x_1 = 2$, $x_2 = -3$ r) $x_1 = 15$, $x_2 = -3$

6. a) $x_{1/2} = \pm 5$, $x_{3/4} = \pm 2$ b) $x_{1/2} = \pm 4$, $x_{3/4} = \pm 1$

   c) $x_{1/2} = \pm 5$, $x_{3/4} = \pm\sqrt{5}$ d) $x_{1/2} = \pm 3$, $x_{3/4} = \pm 1$

   e) $x_{1/2} = \pm 3$, $x_{3/4} = \pm 2$ f) $x_{1/2} = \pm 3$, $x_{3/4} = \pm 3$

7. a) $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$
   Genauer: Nullstelle $x = 1$ wird geraten und dann Polynomdivision mit Linearfaktor $(x - 1)$:

$$
\begin{array}{l}
\big(-x^3 \qquad + x\big) : \big(x - 1\big) = -x^2 - x \\
\underline{\;\; x^3 - x^2 \;\;} \\
\qquad -x^2 + x \\
\qquad \underline{\;\; x^2 - x \;\;} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

   Danach erneut die Nullstellen von $-x^2 - x$ berechnen und man erhält

die beiden Nullstellen: $x_2 = -1$ und $x_3 = 0$.
b) $x_1 = 3$, $x_2 = -2$, $x_3 = -8$

Genauer: Nullstelle $x = 3$ wird geraten und dann Polynomdivision mit Linearfaktor $(x - 3)$:

$$
\begin{array}{l}
\big(\quad x^3 \;+ 7x^2 - 14x - 48\big) : \big(x - 3\big) = x^2 + 10x + 16 \\
\underline{-\,x^3 \;+ 3x^2} \\
\qquad\quad 10x^2 - 14x \\
\qquad \underline{-\,10x^2 + 30x} \\
\qquad\qquad\quad 16x - 48 \\
\qquad\qquad \underline{-\,16x + 48} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Das weitere Vorgehen ist immer analog zu a).
c) $x_1 = 3$, $x_2 = 3$, $x_3 = -2$
Genauer: Nullstelle $x = 3$ wird geraten und dann Polynomdivision mit Linearfaktor $(x - 3)$:

$$
\begin{array}{l}
\big(\quad x^3 - 4x^2 - 3x + 18\big) : \big(x - 3\big) = x^2 - x - 6 \\
\underline{-\,x^3 + 3x^2} \\
\qquad\quad -\,x^2 - 3x \\
\qquad\quad \underline{\;\; x^2 - 3x} \\
\qquad\qquad\quad -\,6x + 18 \\
\qquad\qquad\quad \underline{\;\; 6x - 18} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

d) $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$

Genauer: Nullstelle $x = 1$ wird geraten und dann Polynomdivision mit Linearfaktor $(x - 1)$:

$$
\begin{array}{l}
\big(\quad 2x^3 - 6x^2 + 6x - 2\big) : \big(x - 1\big) = 2x^2 - 4x + 2 \\
\underline{-\,2x^3 + 2x^2} \\
\qquad\quad -\,4x^2 + 6x \\
\qquad\quad \underline{\;\; 4x^2 - 4x} \\
\qquad\qquad\quad 2x - 2 \\
\qquad\qquad \underline{-\,2x + 2} \\
\qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

e) $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$
Genauer: Nullstelle $x = 1$ wird geraten und dann Polynomdivision mit Linearfaktor $(x - 1)$:

$$
\begin{array}{l}
\big(\quad x^3 - x^2 - x + 1\big) : \big(x - 1\big) = x^2 - 1 \\
\underline{-\,x^3 + x^2} \\
\qquad\qquad -\,x + 1 \\
\qquad\qquad\ \ \underline{x - 1} \\
\qquad\qquad\qquad\ 0
\end{array}
$$

f) $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$

Genauer: Nullstelle $x = 2$ wird geraten und dann Polynomdivision mit Linearfaktor $(x - 2)$:

$$
\begin{array}{l}
\big(\quad 3x^3 - 6x^2 - 3x + 6\big) : \big(x - 2\big) = 3x^2 - 3 \\
\underline{-\,3x^3 + 6x^2} \\
\qquad\qquad\quad -\,3x + 6 \\
\qquad\qquad\qquad \underline{3x - 6} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

g) $x_1 = 2$, $x_2 = -5$, $x_3 = 1$
Genauer: Nullstelle $x = 2$ wird geraten und dann Polynomdivision mit Linearfaktor $(x - 2)$:

$$
\begin{array}{l}
\big(\quad 2x^3 + 4x^2 - 26x + 20\big) : \big(x - 2\big) = 2x^2 + 8x - 10 \\
\underline{-\,2x^3 + 4x^2} \\
\qquad\qquad 8x^2 - 26x \\
\qquad\quad \underline{-\,8x^2 + 16x} \\
\qquad\qquad\qquad -\,10x + 20 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{10x - 20} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

h) $x_1 = -2$, $x_2 = -5$, $x_3 = 3$
Genauer: Nullstelle $x = -2$ wird geraten und dann Polynomdivision mit Linearfaktor $(x + 2)$:

$$
\begin{array}{l}
\big(\quad x^3 + 4x^2 - 11x - 30\big) : \big(x + 2\big) = x^2 + 2x - 15 \\
\underline{-\,x^3 - 2x^2} \\
\qquad\qquad 2x^2 - 11x \\
\qquad\quad \underline{-\,2x^2 \ \ -\,4x} \\
\qquad\qquad\qquad -\,15x - 30 \\
\qquad\qquad\qquad\quad \underline{15x + 30} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

8.2.2 Kurztest

Lösungen (1) c ; (2) b,c ; (3) c ; (4) b

8.2.3 Anwendungsaufgaben

zu 1.

1. (a) Wir suchen zunächst rationale Zahlen x_1, x_2 und $x_3 \in \mathbb{Q}$ mit

$$x_1 C_{16}H_{32}O_2 + x_2 O_2 \longrightarrow x_3 CO_2 + H_2O.$$

(Auch hier gehen wir zunächst von nur einem Produktmolekül Wasser aus.) Zu lösen ist also das Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccc} & C_{16}H_{32}O_2 & O_2 & CO_2 & H_2O \\ C & 16x_1 & & -x_3 & = 0 \\ O & 2x_1 & +\,2x_2 & -\,2x_3 & = 1 \\ H & 32x_1 & & & = 2 \end{array}$$

Lösungen sind $x_1 = \frac{1}{16}$, $x_2 = \frac{23}{16}$ und $x_3 = 1$. Wenn wir also die kleinstmöglichen ganzzahligen stöchiometrischen Koeffizienten suchen erhalten wir die Reaktionsgleichung

$$C_{16}H_{32}O_2 + 23O_2 \longrightarrow 16CO_2 + 16H_2O.$$

(b) Der respiratorische Quotient von Palmitionsäure ist folglich $\frac{16}{23}$ und damit ungefähr $0,7$.

(c) Die Reaktionsgleichung lautet

$$2C_{57}H_{110}O_6 + 163O_2 \longrightarrow 114CO_2 + 110H_2O.$$

Der respiratorische Quotient ist damit $\frac{114}{163}$, also auch ungefähr $0,7$.

2. Um einen Liter 8% Lösung zu erhalten brauchen wir 600ml der 10% Lösung und 400ml der 5% Lösung.

3. Die Reaktionsgleichung lautet :

$$C_6H_{12}O_6 + 6H_2O + 12S \longrightarrow 6CO_2 + 12H_2S$$

4. Die Reaktionsgleichung lautet :

$$CH_4 + 2H_2O \longrightarrow 4H_2 + CO_2$$

8.3 Lösungen zu Kapitel 3

8.3.1 Rechenaufgaben

1. Die folgenden Lösungen sind Beispiellösungswege. Sicherlich gibt es viele Varianten, um die entsprechenden Aussagen zu zeigen.

a) Wegen $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$ ist die Folge (x_n) streng monoton fallend. Alle Folgenglieder sind positiv und da die Folge streng monoton fallend ist, ist das erste Folgenglied das größte. Wir haben $0 < x_n < 1 = x_1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge ist nach oben und nach unten beschränkt. Da die Folge monoton und beschränkt ist, konvergiert sie auch.

b) Die folgende Rechnung zeigt, dass (x_n) streng monoton fallend ist:

$$\begin{aligned} x_n - x_{n+1} &= \frac{n}{n^3+4} - \frac{n+1}{(n+1)^3+4} \\ &= \frac{n((n+1)^3+4) - (n+1)(n^3+4)}{(n^3+4)((n+1)^3+4)} \\ &= \frac{2n^3+3n^2+n-4}{(n^3+4)((n+1)^3+4)} > 0 \quad \text{für } n \geq 1 \end{aligned}$$

Alle Folgenglieder sind positiv und da die Folge streng monoton fallend ist, ist das erste Folgenglied das größte. Wir haben $0 < x_n < \frac{1}{5} = x_1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge ist nach oben und nach unten beschränkt. Da die Folge monoton und beschränkt ist, konvergiert sie auch.

c) Wir schreiben die Folge (x_n) als:

$$x_n = \frac{4n}{2n^2-1} = \frac{4n}{n^2+n^2-1} = \frac{4n}{n^2+(n-1)(n+1)} = \frac{4}{n+(1-\frac{1}{n})(n+1)}$$

Nun sind die Folgen (n), $(n+1)$ und $(1-\frac{1}{n})$ alle streng monoton wachsend und nicht negativ. Der Nenner $n+(1-\frac{1}{n})(n+1)$ ist also streng monoton wachsend und für $n \in \mathbb{N}$ positiv. Daher ist die Folge x_n streng monoton fallend. Außerdem können wir an dieser Darstellung ablesen, dass alle Folgenglieder positiv sind. Da die Folge streng monoton fallend ist, ist das erste Folgenglied das größte. Wir haben $0 < x_n < 4 = x_1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge ist nach oben und nach unten beschränkt. Da die Folge monoton und beschränkt ist, konvergiert sie auch.

d) Wegen $x_1 = -4$, $x_2 = 1{,}6$ und $x_3 = 0{,}8$ ist die Folge (x_n) weder monoton fallend noch monoton wachsend. Weiterhin konvergiert die Folge (x_n) gegen den Grenzwert 0. Denn:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4n}{2n^2-3} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4}{n}}{2 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n^2}} = \frac{0}{2-0} = 0$$

Da die Folge (x_n) konvergiert, ist sie auch beschränkt.

e) Da das Vorzeichen der Folge (x_n) ständig wechselt ist die Folge weder monoton fallend noch monoton wachsend. Die Folge konvergiert gegen Null, denn $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{200}{n^4} = 0$. Da die Folge (x_n) konvergiert, ist sie auch beschränkt.

f) Da die Folge (n^2) streng monoton wächst, trifft das auch auf die Folge $x_n = n^2 - 5$ zu. Weiter ist $x_n = n^2 - 5 \geq -5$. Also ist (x_n) nach unten beschränkt. Wir sehen hier leicht, dass die Folge (x_n) jedoch nicht nach oben beschränkt ist. Um das (mathematisch genau) einzusehen, kann man zeigen, dass für jedes positive $C \in \mathbb{R}$ ein n_C existiert, das $x_{n_c} \geq C$ erfüllt. Zum Beispiel folgt aus $n_C \geq C + 3$, dass $x_{n_c} = (n_C)^2 + 5 \geq (C+3)^2 - 5 \geq C^2 + 6C + 4 > C$. Also ist (x_n) nicht beschränkt und kann auch nicht konvergieren.

g) Es ist $x_1 = -3$, $x_2 = -4$ und $x_3 = 1$, also ist die Folge (x_n) weder monoton fallend noch monoton wachsend. Dass die Folge $x_n = n^2 - 4n$ unbeschränkt ist, kann man anhand der Umformung $x_n = (n-2)^2 - 4$ leicht sehen. (Wer so genau wie in (1f) vorgehen möchte, kann zum Beispiel mit $n_C \geq C + 4$ arbeiten.) Jedoch ist die Folge (x_n) wegen $x_n = (n-2)^2 - 4 \geq -4$ nach unten beschränkt. Da die Folge (x_n) nicht beschränkt ist, kann sie auch nicht konvergieren.

h) Wegen $x_{n+1} - x_n = (n+1)^2 - 2(n+1) - (n^2 - 2n) = 2n - 1 > 0$ für $n \geq 1$, ist die Folge x_n streng monoton wachsend. Dass die Folge nach unten beschränkt, aber nicht nach oben beschränkt und deshalb nicht konvergent ist, folgt wie in (1g).

i) Die folgende Rechnung zeigt, dass (x_n) monoton wachsend ist:

$$\begin{aligned} x_{n+1} - x_n &= \frac{2^{n+1}}{n+1} - \frac{2^n}{n} = \frac{2^{n+1}n - 2^n(n+1)}{(n+1)n} = \frac{2 \cdot 2^n n - 2^n n - 2^n}{(n+1)n} \\ &= \frac{2^n(n-1)}{(n+1)n} \geq 0 \quad \text{für } n \geq 1 \quad (\text{Gleichheit für } n = 1) \end{aligned}$$

Weiterhin gilt für $n \geq 4$, dass $2^n \geq n^2$ (Streng genommen, müsste man das erst beweisen.), also $x_n = \frac{2^n}{n} \geq n$. Die Folge (x_n) wächst also mindestens genauso schnell wie die Folge der natürlichen Zahlen. Also ist (x_n) nicht nach oben beschränkt und kann auch nicht konvergieren. Da alle Folgeglieder positiv sind, ist die Folge nach unten beschränkt.

j) Wegen $\frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^n}$ ist die Folge $x_n = \frac{1}{2^n} + 4$ streng monoton fallend. Alle Folgenglieder sind positiv und da die Folge streng monoton fallend ist, ist das erste Folgenglied das größte. Wir haben $0 < x_n < 4{,}5 = x_1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge ist nach oben und nach unten beschränkt. Da die Folge monoton und beschränkt ist, konvergiert sie auch.

k) Da das Vorzeichen der Folge (x_n) ständig wechselt ist die Folge weder monoton fallend noch monoton wachsend. Andererseits ist die Folge konvergent, denn: $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$. Da die Folge (x_n) konvergiert, ist sie auch beschränkt.

l) Wegen $x_1 = -9$, $x_3 < -9$ und $x_6 > 0{,}8$ ist die Folge (x_n) weder monoton fallend noch monoton wachsend. In (1i) haben wir bereits gesehen, dass die Folge $\left(\frac{2^n}{n}\right)$ nach oben unbeschränkt ist. Für ungerades $n \in \mathbb{N}$ ist $x_n = -\frac{2^n}{n} - 7$. Also ist die Folge (x_n) nach unten unbeschränkt. Für gerades $n \in \mathbb{N}$ ist $x_n = \frac{2^n}{n} - 7$. Also ist die Folge nach oben unbeschränkt. Die Folge kann nicht konvergieren.

2. Die hier angegebenen natürlichen Zahlen n müssen nicht die kleinsten natürlichen Zahlen mit den geforderten Eigenschaften sein.

   a) Es ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$.
   Wir zeigen, dass $n_0 = 400$ eine mögliche Wahl ist: Für $n \geq 400$ gilt

   $$|a_n - 0| = \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{400^2} = \frac{1}{1600} < 10^{-3}$$

   b) Es ist

   $$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+8n-4}{n^2+7} = \lim_{n\to\infty} \frac{4+\frac{8}{n}-\frac{4}{n^2}}{1+\frac{7}{n^2}} = \frac{4+0+0}{1+0} = 4.$$

   Wir betrachten nun

   $$|b_n - 4| = \left|\frac{4n^2+8n-4}{n^2+7} - 4\right| = \left|\frac{8n-32}{n^2+7}\right|.$$

   Für $n \geq 2$ ist

   $$\left|\frac{8n-32}{n^2+7}\right| \leq \frac{8n}{n^2+7} < \frac{8n}{n^2} = \frac{8}{n}.$$

   Also folgt für $n \geq 8000$, dass

   $$|b_n - 4| < \frac{8}{8000} = 10^{-3}.$$

   Ein mögliches n_0 ist $n_0 = 8000$.

   c) Es ist

   $$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n+7}{3^n+4} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1+4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{0}{1+4\cdot 0} = 0.$$

   Wir beobachten zunächst, dass

   $$|c_n - 0| = \frac{2^n+7}{3^n+4} < \frac{2^n+7}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n + 7\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

   und versuchen natürliche Zahlen n_1 und n_2 zu finden, so dass für alle $n \geq n_1$ gilt
   (I)

   $$\left(\frac{2}{3}\right)^n < \frac{1}{2}\cdot 10^{-3}$$

   und für alle $n \geq n_2$ gilt
   (II)

   $$7\left(\frac{1}{3}\right)^n < \frac{1}{2}\cdot 10^{-3}.$$

Dann erfüllt nämlich die größere der beiden Zahlen $n_0 = max(n_1, n_2)$, dass für alle $n \geq n_0$ gilt

$$|c_n - 0| < \left(\frac{2}{3}\right)^n + 7\left(\frac{1}{3}\right)^n \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-3} + \frac{1}{2} \cdot 10^{-3} = 10^{-3}.$$

Wegen (I) wählen wir $n_1 > \log_{(\frac{2}{3})}(\frac{1}{2000}) \approx 18,75$ und wegen (II) wählen wir $n_2 > \log_{(\frac{1}{3})}(\frac{1}{14000}) \approx 8,69$. Also erfüllt $n_0 = 19$ die gewünschten Eigenschaften.

3. (a) $a_n = 6 \cdot 5^n$ (b) $a_n = 0$ (c) $a_n = 4 + \frac{n-1}{3}$

   (d) $a_n = 5^{n-1} \cdot \frac{13}{12} - \frac{1}{12}$ (e) $a_n = (0,75^n \cdot 6,8 + 3,2) \cdot 10^5$

   (f) $a_n = 7^{(2^{n-1})}$ (g) $a_n = \frac{1}{n}$ (h) $a_n = \frac{1}{2}(3^n - 1)$

   (i) $a_n = 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n = n!$

   (j) $a_n = 2^{f_n}$ wobei f_n die n-te Fibonacci-Zahl ist

   Erläuterungen:
   Für (d),(e) und (h) nutzen wir unser Wissen über die geometrische Reihe.
   Zu (h):

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1 \\
a_2 &= 1 + 3 \\
a_3 &= 1 + 3 + 3^2 \\
&\vdots \\
a_n &= 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1} = \frac{3^n - 1}{3 - 1} = \frac{1}{2}(3^n - 1)
\end{aligned}$$

   Zu (d):

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1 \\
a_2 &= 5 \cdot 1 + \frac{1}{3} = 5 + \frac{1}{3} \\
a_3 &= 5 \cdot \left(5 + \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} = 5^2 + \frac{1}{3}(5 + 1) \\
a_4 &= 5 \cdot \left(5^2 + \frac{1}{3}(5 + 1)\right) + \frac{1}{3} = 5^3 + \frac{1}{3}(5^2 + 5 + 1) \\
&\vdots \\
a_n &= 5^{n-1} + \frac{1}{3}(5^{n-2} + 5^{n-3} + \cdots + 5 + 1) \\
&= 5^{n-1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{5^{n-1} - 1}{5 - 1} = 5^{n-1} \cdot \frac{13}{12} - \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

Zu (e):

$$\begin{aligned}
a_0 &= 10^6\\
a_1 &= 0,75\cdot 10^6 + 8\cdot 10^4\\
a_2 &= 0,75\cdot\Big(0,75\cdot 10^6 + 8\cdot 10^4\Big) + 8\cdot 10^4 = 0,75^2\cdot 10^6 + 8\cdot 10^4(0,75+1)\\
a_3 &= 0,75\cdot\Big(0,75^2\cdot 10^6 + 8\cdot 10^4(0,75+1)\Big) + 8\cdot 10^4\\
&= 0,75^3\cdot 10^6 + 8\cdot 10^4(0,75^2+0,75+1)\\
&\vdots\\
a_n &= 0,75^n\cdot 10^6 + 8\cdot 10^4(0,75^{n-1}+0,75^{n-2}+\cdots+0,75+1)\\
&= 0,75^n\cdot 10^6 + 8\cdot 10^4\cdot\frac{1-0,75^n}{1-0,75}\\
&= (0,75^n\cdot 6,8+3,2)\cdot 10^5
\end{aligned}$$

Bei (g) erhalten wir das folgende Produkt, das wir geschickt kürzen können:

$$a_n = 1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}$$

4. a) $a_n = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ gerade}\\ 1 & \text{falls } n \text{ ungerade}\end{cases}$

b) $a_n = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \text{ gerade}\\ 0 & \text{falls } n \text{ ungerade}\end{cases}$

c) $a_n = \begin{cases} 7-n & \text{für } n\le 7\\ 1 & \text{falls } n\ge 8 \text{ und } n \text{ gerade}\\ 0 & \text{falls } n\ge 8 \text{ und } n \text{ ungerade}\end{cases}$

d) $a_n = \begin{cases} -4 & \text{für } n=0\\ 6-n & \text{für } 1\le n\le 6\\ 1 & \text{falls } n\ge 7 \text{ und } n \text{ ungerade}\\ 0 & \text{falls } n\ge 7 \text{ und } n \text{ gerade}\end{cases}$

e) $a_n = \begin{cases} 0,3 & \text{falls } n \text{ gerade}\\ 0,7 & \text{falls } n \text{ ungerade}\end{cases}$

f) $a_n = \begin{cases} -0,6 & \text{für } n=0\\ 1,6 & \text{für } n=1\\ 0,6 & \text{falls } n\ge 2 \text{ und } n \text{ gerade}\\ 0,4 & \text{falls } n\ge 2 \text{ und } n \text{ ungerade}\end{cases}$

g) $a_n = \begin{cases} 4,3-n & \text{für } n\le 4\\ 0,7 & \text{falls } n\ge 5 \text{ und } n \text{ ungerade}\\ 0,3 & \text{falls } n\ge 5 \text{ und } n \text{ gerade}\end{cases}$

h) $a_n = \begin{cases} -2{,}6 & \text{für } n = 0 \\ 4{,}6 - n & \text{für } 1 \leq n \leq 4 \\ 0{,}4 & \text{falls } n \geq 5 \text{ und } n \text{ ungerade} \\ 0{,}6 & \text{falls } n \geq 5 \text{ und } n \text{ gerade} \end{cases}$

i) $a_n = 0{,}5$

j) $a_n = \begin{cases} -0{,}5 & \text{für } n = 0 \\ 1{,}5 & \text{für } n = 1 \\ 0{,}5 & \text{für } n \geq 2 \end{cases}$

k) $a_n = \begin{cases} 3{,}5 - n & \text{für } n \leq 3 \\ 0{,}5 & \text{für } n \geq 4 \end{cases}$

l) $a_n = \begin{cases} -2{,}5 & \text{für } n = 0 \\ 4{,}5 - n & \text{für } 1 \leq n \leq 4 \\ 0{,}5 & \text{für } n \geq 5 \end{cases}$

Zusatz: Die Folge konvergiert genau dann, wenn a_0 ein ungerades Vielfaches von $0{,}5$ ist. In diesem Fall wird sie irgendwann konstant $0{,}5$. Das ist ihr Grenzwert.

5. exponentiealles Wachstum: a, e, n
exponentieller Zerfall: b, p
lineares Wachstum: h, i, j, l
linearer Zerfall: k, m
Wachstum, aber weder linear noch exponentiell: d, g
Zerfall, aber weder linear noch exponentiell: -
weder Wachstum noch Zerfall: c, f, o, q

6. a)

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = \frac{0}{1+0} = 0$$

b)

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 1 + 0 = 1$$

c)

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4n^2+n+1}{n^2-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{4+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{n^2}} = \frac{4+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{1-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}$$
$$= \frac{4+0+0}{1-0} = 4$$

d)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{7n}{2n-1} - \frac{4n^2-1}{5-3n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{7n}{2n-1} - \lim_{n\to\infty}\frac{4n^2-1}{5-3n^2}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{7}{2-\frac{1}{n}} - \lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{1}{n^2}}{\frac{5}{n^2}-3} = \frac{7}{2-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}} - \frac{4-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n^2}-3}\\ &= \frac{7}{2-0} - \frac{4-0}{0-3} = \frac{29}{6}\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} b_n &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2}{n+2} - \frac{n^2(2n-1)}{n^2+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2(n^2+1)-(n+2)n^2(2n-1)}{(n+2)(n^2+1)}\\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{-3n^3+4n^2}{n^3+2n^2+n+2} = \lim_{n\to\infty}\frac{-3+\frac{4}{n}}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}}\\ &= \frac{-3+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4}{n}}{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^3}} = \frac{-3+0}{1+0+0+0} = -3\end{aligned}$$

f) Für $n \geq 3$ gilt

$$c_n = \left|\frac{2n^3+1}{n^2-5}\right| \geq \left|\frac{2n^3+1}{n^2}\right| > \frac{2n^3}{n^2} = 2n.$$

Also wächst die Folge ab dem 3. Folgenglied mindestens so schnell wie die Folge $(2n)$. Eine unbeschränkte Folge konvergiert nicht.

g)

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2-5}{2n^3+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}-\frac{5}{n^3}}{2+\frac{1}{n^3}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5}{n^3}}{2+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}} = \frac{0-0}{2+0} = 0$$

h) Es ist

$$h_n = \frac{(-1)^n}{n+1} = (-1)^n \cdot \frac{1}{n+1}.$$

In (6a) haben wir bereits gesehen, dass $\left(\frac{1}{n+1}\right)$ eine Nullfolge ist. Die Folge $(-1)^n$ ist beschränkt. Also konvergiert auch h_n gegen Null:

$$\lim_{n\to\infty} h_n = 0$$

i) Die Teilfolge $f_2, f_4, f_6, \ldots, f_{2k}, \ldots$ (Folgenglieder, bei denen der Index eine gerade Zahl $2k$ ist) konvergiert gegen 1, denn

$$\lim_{2k\to\infty} f_{2k} = (-1)^{2k}\frac{2k+2}{2k+3} = \lim_{k\to\infty}\frac{2k+2}{2k+3} = \lim_{k\to\infty}\frac{2+\frac{2}{k}}{2+\frac{3}{k}} = \frac{2+0}{2+0} = 1.$$

Die Teilfolge $f_1, f_3, f_5, \ldots, f_{2k+1}, \ldots$ (Folgenglieder, bei denen der Index eine ungerade Zahl $2k+1$ ist) konvergiert gegen -1, denn

$$\begin{aligned}\lim_{2k+1\to\infty} f_{2k+1} &= (-1)^{2k+1}\frac{2k+1+2}{2k+1+3} = \lim_{k\to\infty} -\frac{2k+3}{2k+4}\\ &= \lim_{k\to\infty} -\frac{2+\frac{3}{k}}{2+\frac{4}{k}} = -\frac{2+0}{2+0} = -1.\end{aligned}$$

Da $\lim\limits_{k\to\infty} f_{2k} = 1 \neq -1 = \lim\limits_{k\to\infty} f_{2k+1}$, kann die Folge f_n nicht konvergieren.

Bemerkung. Um zu zeigen, dass eine Folge nicht konvergiert, reicht es zum Beispiel aus nachzuweisen, dass der Abstand aufeinanderfolgender Folgeglieder nicht gegen 0 konvergiert. (Achtung! Das ist kein Kriterium für Konvergenz, sondern für Divergenz.) Wenn der Abstand aufeinanderfolgender Folgeglieder zum Beispiel stets größer als eine Schranke $c > 0$ ist, haben wir schon nachgewiesen, dass die Folge nicht konvergiert. Im vorliegenden Beispiel ist das möglich, das zu zeigen:

$$|b_{n+1} - b_n| = \left|(-1)^{n+1}\frac{n+3}{n+4} - (-1)^n\frac{n+2}{n+3}\right| = \frac{n+3}{n+4} + \frac{n+2}{n+3} > \frac{3}{4} + \frac{2}{3} > 1$$

j) Wir beachten, dass $\left(\frac{(-1)^n\cdot 3}{n}\right)$ mit dem gleichen Argument wie in (6h) eine Nullfolge ist. Also gilt

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} u_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{6n^2 + (-1)^n\cdot 3n - 1}{(n+4)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{6n^2 + (-1)^n\cdot 3n - 1}{n^2+8n+16}\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{6 + \frac{(-1)^n\cdot 3}{n} - \frac{1}{n^2}}{1+\frac{8}{n}+\frac{16}{n^2}} = \frac{6 + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n\cdot 3}{n} - \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{1 + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{8}{n} + \lim\limits_{n\to\infty}\frac{16}{n^2}}\\ &= \frac{6+0-0}{1+0+0} = 6.\end{aligned}$$

k) Wir argumentieren ähnlich wie in (6i) und beachten, dass $(-1)^n = 1$, falls n eine gerade Zahl ist und $(-1)^n = -1$, falls n eine ungerade Zahl ist. Ähnlich zur obigen Rechnung aus (6j) (ersetze jeweils $((-1)^n\cdot 3)$ durch 3 und 6 durch -6, falls n ungerade) sehen wir, dass

$$\lim_{k\to\infty} v_{2k} = 6 \quad \text{und} \quad \lim_{k\to\infty} v_{2k+1} = -6.$$

Die Folge v_n kann also nicht konvergieren.

l) Wir nutzen, dass $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ für $|q| < 1$.

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} w_n &= \lim_{n\to\infty}\frac{5\cdot 8^n + 2^n + 4}{3\cdot 8^n + 5\cdot(-6)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{5\cdot 1 + \left(\frac{2}{8}\right)^n + 4\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^n}{3\cdot 1 + 5\cdot\left(-\frac{6}{8}\right)^n}\\ &= \frac{5 + \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{8}\right)^n + 4\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{8}\right)^n}{3 + 5\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\left(-\frac{6}{8}\right)^n} = \frac{5+0+4\cdot 0}{3+5\cdot 0} = \frac{5}{3}\end{aligned}$$

7. (a) Diese geometrische Reihe konvergiert mit dem Grenzwert $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^i = \frac{1}{1-\frac{3}{5}} = \frac{5}{2}$.
   (b) Bei dieser Reihe fehlt nur noch der Summand $\left(\frac{3}{5}\right)^0 = 1$, damit wir die geometrische Reihe aus (a) erhalten. Somit können wir die Konvergenz dieser Reihe auf die Konvergenz der Reihe aus (a) zurückführen und erhalten für den Grenzwert $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^i = \sum\limits_{i=0}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^i - 1 = \frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2}$.
   (c) Diese geometrische Reihe konvergiert nicht, da $\left|\frac{5}{3}\right| > 1$.
   (d) Diese geometrische Reihe konvergiert mit dem Grenzwert $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-4}{7}\right)^n = \frac{1}{1+\frac{4}{7}} = \frac{7}{11}$
   (e) Diese geometrische Reihe konvergiert nicht, da $\left|\frac{-7}{4}\right| > 1$.
   (f) Die geometrische Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n$ konvergiert mit dem Grenzwert $\frac{5}{2}$. Also konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{7\cdot 3^n}{5^n\cdot 8} = \frac{7}{8}\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n$ mit dem Grenzwert $\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{2} = \frac{35}{16}$.
   (g) Die geometrische Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n$ konvergiert mit dem Grenzwert $\frac{5}{2}$. Also konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\cdot 3^n}{5^{n+1}} = \frac{1}{5}\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n$ mit dem Grenzwert $\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{2} = \frac{1}{2}$.
   (h) Diese Reihe konvergiert nicht, da die Folge der Reihenglieder $\left(1+\frac{1}{n}\right)$ keine Nullfolge ist.
   (i) siehe Aufgabe 9 (a)

8. Es handelt sich hierbei stets um Lösungsvorschläge. Sicherlich sind oft auch andere Lösungswege zulässig.
   (a) Die geometrische Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ konvergiert. Daher konvergiert auch $\frac{1}{3}\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$.
   (b) Wir folgern die Konvergenz der Reihe aus dem Majorantenkriterium: Für $n \geq 1$ gilt
   $$\left|\left(\frac{1}{3n^2}\right)^n\right| \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$
   und die geometrische Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$ konvergiert.
   (c) Wir folgern die Konvergenz der Reihe aus dem Majorantenkriterium: Für $n \geq 1$ gilt
   $$\left|\frac{1}{3^n}\cdot\frac{1}{n}\right| \leq \frac{1}{3^n}.$$
   und die geometrische Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ konvergiert.
   (d) Die Reihe konvergiert nicht, da die Folge der Reihenglieder $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots$ keine Nullfolge ist.

(e) Die geometrische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ konvergiert.

(f) Die Reihe konvergiert nicht, da die Folge der Reihenglieder $\frac{n}{100}$ keine Nullfolge ist.

(g) Die Reihe konvergiert nicht, da die Folge der Reihenglieder $\left(\frac{n}{100}\right)^n$ keine Nullfolge ist.

(h) Wir folgern die Konvergenz der Reihe aus dem Majorantenkriterium: Für $n \geq 0$ gilt

$$\left|\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2^n}\right)^n\right| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

und die geometrische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n$ konvergiert.

(i) Wir folgern die Konvergenz der Reihe aus dem Majorantenkriterium: Für $n \geq 1$ gilt

$$\left|\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{n}\right)^n\right| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

und die geometrische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n$ konvergiert.

(j) Wir folgern die Konvergenz der Reihe aus dem Majorantenkriterium: Für $n \geq 8$ gilt

$$\left|\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{n}\right)^n\right| \leq \left(\frac{3}{4}+\frac{1}{8}\right)^n = \left(\frac{7}{8}\right)^n.$$

und die geometrische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{7}{8}\right)^n$ konvergiert.

(k) Wir folgern die Konvergenz der Reihe aus dem Majorantenkriterium: Für $n \geq 3$ gilt

$$\left|\left(\frac{n^2-3n}{5n^2}\right)^n\right| \leq \left(\frac{n^2}{5n^2}\right)^n = \left(\frac{1}{5}\right)^n$$

und die geometrische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^n$ konvergiert.

(l) Die Reihe konvergiert nicht, da die Folge der Reihenglieder $\frac{n^2+4n}{5n^2}$ keine Nullfolge ist ($\frac{n^2+4n}{5n^2} \geq \frac{n^2}{5n^2} = \frac{1}{5}$).

9. (a) Für die Partialsummenfolge $s_m = \sum_{n=1}^{m}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$ gilt

$$\begin{aligned}
s_m &= \sum_{n=1}^{m}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\
&= \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{m-1}-\frac{1}{m}\right)+\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m+1}\right)\\
&= \frac{1}{1}+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(-\frac{1}{m}+\frac{1}{m}\right)-\frac{1}{m+1}\\
&= 1-\frac{1}{m+1}.
\end{aligned}$$

Die Konvergenz dieser Folge bedeutet die Konvergenz der Reihe. Wir können sogar den Grenzwert angeben (Das war nicht verlangt.):

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\lim_{m\to\infty}s_m=\lim_{m\to\infty}(1-\frac{1}{m+1})=1$$

Bemerkung: Summen, in denen sich aufeinanderfolgende Summanden geschickt auslöschen wie im obigen Beispiel, nennen wir auch Teleskopsummen.

(b) Es ist

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{(n+1)-n}{n(n+1)}=\frac{1}{n^2+n}.$$

Alle Reihenglieder stimmen überein.

(c) Wir nutzen das Majorantenkriterium. Für $n \geq 1$ gilt $n \leq n^2$ und deshalb

$$\left|\frac{1}{2n^2}\right|=\frac{1}{n^2+n^2}\leq\frac{1}{n^2+n}.$$

Da die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+n}$ konvergiert, zeigt diese Abschätzung die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}$. Somit konvergiert auch $2\cdot\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

10. (a) Wir wenden das Quotientenkriterium an, um zu zeigen, dass die Reihe konvergiert: Es ist für $n \geq 1$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\frac{(n+1)^2+4(n+1)+1}{5^{n+1}}}{\frac{n^2+4n+1}{5^n}}\right| &= \frac{1}{5}\frac{(n+1)^2+4(n+1)+1}{n^2+4n+1}\\
&= \frac{1}{5}\frac{(n^2+4n+1)+(2n+1+4)}{n^2+4n+1}=\frac{1}{5}\left(1+\frac{2n+5}{n^2+4n+1}\right)\\
&\leq \frac{1}{5}\left(1+\frac{2n+5}{n^2+4n}\right)=\frac{1}{5}\left(1+\frac{2+\frac{5}{n}}{n+4}\right)\leq\frac{1}{5}\left(1+\frac{2+5}{1+4}\right)\\
&= \frac{1}{5}\left(1+\frac{7}{5}\right)=\frac{12}{25}<1.
\end{aligned}$$

(b) Die Reihe divergiert, da die Folge der Reihenglieder $\frac{n^2+4n+1}{(\frac{1}{5})^n}=5^n(n^2+4n+1)$ keine Nullfolge ist.

(c) Die Reihe divergiert. Aus der Abschätzung aus (a) folgt für $n \geq 1$

$$\left|\frac{\frac{5^{n+1}}{(n+1)^2+4(n+1)+1}}{\frac{5^n}{n^2+4n+1}}\right|\geq\frac{25}{12}>1.$$

Daraus folgt mit dem Quotientenkriterium die Divergenz der Reihe.

(d) Wir wenden das Majorantenkriterium an, um zu zeigen, dass die Reihe konvergiert. Für $n \geq 0$ ist $\left|\frac{(\frac{1}{5})^n}{n^2+4n+1}\right| \leq \left(\frac{1}{5}\right)^n$ und die geometrische Reihe $\sum\limits_{n=0} \left(\frac{1}{5}\right)^n$ konvergiert.

(e) Die Reihe konvergiert. Wir wenden wie in (a) das Quotientenkriterium an und berücksichtigen, dass $|(-1)^n| = 1$.

(f) Die Reihe divergiert, da die Folge der Reihenglieder $\frac{n^2+4n+1}{(-\frac{1}{5})^n} = (-5)^n(n^2+4n+1)$ keine Nullfolge ist.

(g) Die Reihe divergiert. Wir wenden wie in (c) das Quotientenkriterium an und berücksichtigen, dass $|(-1)^n| = 1$.

(h) Die Reihe konvergiert. Wir wenden wie in (d) das Majorantenkriterium an und berücksichtigen, dass $|(-1)^n| = 1$.

11. (a) Sicherlich gibt es viele verschiedene Wege, die Konvergenz nachzuweisen. Hier sind drei Varianten angegeben.

i. Sowohl die geometrische Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ als auch die geometrische Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ konvergieren. Deshalb konvergiert auch

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n + 5 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\left(\frac{2}{3}\right)^n + 5 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+5}{3^n}. \quad (*)$$

ii. Wir wenden das Majorantenkriterium an. Es ist für $n \geq 0$

$$\left|\frac{2^n+5}{3^n}\right| \leq 5 \cdot \frac{2^n+1}{3^n} \leq 5 \cdot \frac{2^n+2^n}{3^n} = 5 \cdot \frac{2 \cdot 2^n}{3^n} = 10 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

und die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 10 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$ konvergiert, da die geometrische Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$ konvergiert.

iii. Wir wenden das Quotientenkriterium an. Es ist für $n \geq 0$

$$\left|\frac{\frac{2^{n+1}+5}{3^{n+1}}}{\frac{2^n+5}{3^n}}\right| = \frac{1}{3}\frac{2^{n+1}+5}{2^n+5} = \frac{1}{3}\left(\frac{2^{n+1}-2^n}{2^n+5} + \frac{2^n+5}{2^n+5}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{2^n}{2^n+5}+1\right) \leq \frac{2}{3} < 1.$$

(b) Mit $(*)$ aus (a)i. folgt

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+5}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n + 5 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} + 5 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{21}{2}.$$

(c) Die Reihe konvergiert nicht. Es genügt festzustellen, dass jedes Reihenglied $\frac{3^n+5}{2^n}$ größer als 1 ist:

$$\frac{3^n+5}{2^n} \geq \frac{3^n}{2^n} \geq 1$$

Alternativ können wir die Divergenz der Reihe auch mit dem Quotientenkritetium nachweisen: Für $n \geq 3$ ist

$$\left|\frac{\frac{3^{n+1}+5}{2^{n+1}}}{\frac{3^n+5}{2^n}}\right| = \frac{1}{2}\frac{3^{n+1}+5}{3^n+5} \geq = \frac{1}{2}\frac{3^{n+1}}{3^n+5} = \frac{3}{2}\frac{3^n}{3^n+5} = \frac{3}{2}\frac{1}{1+\frac{5}{3^n}} \geq \frac{3}{2}\frac{1}{1+\frac{5}{3^3}} = \frac{81}{64} > 1.$$

12. (a) Wir nutzen das Quotientenkriterium, um zu zeigen, dass die Reihe konvergiert. Für $n \geq 2$ gilt

$$\left|\frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}}\right| = \frac{2}{n+1} \leq \frac{2}{3} < 1.$$

(b) Wir nutzen das Quotientenkriterium, um zu zeigen, dass die Reihe konvergiert. Für $n \geq a$ gilt

$$\left|\frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}}\right| = \frac{a}{n+1} \leq \frac{a}{a+1} < 1.$$

8.3.2 Kurztest

Lösungen (1) a,d,e,f; (2) b; (3) b; (4) a; (5) b; (6) a,b,c; (7) a,c; (8) b,d,e; (9) e,g,h,m; (10) a,e,g,h,i,j,k; (11) b,g,j,l,o,p,q,r,s

8.3.3 Anwendungsaufgaben

1. (a) Sei a_n die Masse in der n-ten Messung in Gramm. Nach den gegebenen Messwerten ist dann $a_n = \frac{n-1}{n+1}$ eine sinnvolle Hypothese.

(b) Wir nutzen eine geschickte Schreibweise für a_n. Es ist nämlich

$$a_n = \frac{n-1}{n+1} = \frac{n+1-1-1}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1}.$$

Die Population wächst in jedem Schritt, denn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_n = 1 - \frac{2}{n+1} < 1 - \frac{2}{n+2} = a_{n+1}.$$

Die Folge a_n ist sogar streng monoton wachsend. Es ist aber immer

$$a_n = 1 - \frac{2}{n+1} < 1.$$

Langfristig kommt die Folge a_n dieser Obergrenze beliebig nahe:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{2}{n+1}\right) = 1 - \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n+1} = 1$$

2. (a) Ähnlich wie in 1.(b) erhalten wir hier

$$a_n = \frac{n-3}{n+2} = \frac{n+2-2-3}{n+2} = 1 - \frac{5}{n+2}.$$

Die Population wächst in jedem Schritt, denn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_n = 1 - \frac{5}{n+2} < 1 - \frac{5}{n+3} = a_{n+1}.$$

Die Folge a_n ist sogar streng monoton wachsend. Es ist aber immer

$$a_n = 1 - \frac{5}{n+3} < 1.$$

Langfristig kommt die Folge a_n dieser Obergrenze beliebig nahe:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{5}{n+2}\right) = 1 - \lim_{n\to\infty}\frac{5}{n+2} = 1$$

(b) Dass die Masse der Bakterienpopulation in jedem Schritt wächst, ist gleichbedeutend damit, dass die Folge a_n streng monoton wachsend ist. Es ist

$$a_n = \frac{n+r}{n+s} = \frac{n+s-s+r}{n+s} = 1 - \frac{s-r}{n+s} = 1 + \frac{r-s}{n+s}.$$

Für $r < s$ bzw. $s - r > 0$ gilt

$$a_n = 1 - \frac{s-r}{n+s} < 1 - \frac{s-r}{(n+s)+1} = 1 - \frac{s-r}{(n+1)+s} = a_{n+1},$$

d. h. die Folge a_n wächst streng monoton, wie gefordert.
Für $r = s$ ist die Folge $a_n = 1$ konstant.
Für $r > s$ bzw. $r - s > 0$ ist zum Beispiel $a_1 = 1 + \frac{r-s}{1+s} > 1 + \frac{r-s}{2+s} = a_2$, d. h. die Folge a_n kann nicht monoton wachsend sein.
Damit also die Masse der Bakterienpopulation in jedem Schritt wächst, müssen r und s so gewählt sein, dass $r < s$.

Wer die Lösung dieser Aufgabe nicht gleich an der Folge erkennt, kann so vorgehen:

Dass die Masse in jedem Schritt wächst, bedeutet: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} a_n &< a_{n+1} \\ 1 + \frac{r-s}{n+s} &< 1 + \frac{r-s}{(n+1)+s} \\ \frac{r-s}{n+s} &< \frac{r-s}{(n+1)+s} \qquad (*) \end{aligned}$$

Wir machen eine Fallunterscheidung nach dem Vorzeichen von $r - s$:
Wäre $r-s > 0$, dann würde aus $(*)$ $\frac{1}{n+s} < \frac{1}{(n+1)+s} \Leftrightarrow (n+1)-s < n+s \Leftrightarrow 1 < 0$ folgen, eine falsche Aussage.
Im Fall $r = s$ ist $(*)$ auch nicht erfüllt.
Ist aber $r - s < 0$, dann ist $(*)$ mit den gleichen Umformungen äquivalent zu der wahren Aussage $1 > 0$.
Folglich wächst die Masse in jedem Schritt genau dann, wenn $r - s < 0$, d. h. $r < s$.

3. (a) Sei a_n die Anzahl der Ameisen nach n Wochen. Da die Anfangspopulation 30000 beträgt, gilt damit $a_0 = 30000$. Wöchentlich sterben 5% der Ameisen der Vorwoche, aber 1000 junge Ameisen kommen zur Population hinzu. Daher gilt
$$a_{n+1} = 95\% \cdot a_n + 1000 = 0,95 \cdot a_n + 1000.$$
Für die Anzahl der Ameisen nach einer Woche erhalten wir also
$$a_1 = 0,95 \cdot a_0 + 1000 = 0,95 \cdot 30000 + 1000 = 29500.$$

(b) Für die Anzahl der Ameisen nach zwei bzw. drei bzw. fünf Wochen erhalten wir entsprechend
$$\begin{aligned}
a_2 &= 0,95 \cdot a_1 + 1000 = 0,95 \cdot 29500 + 1000 = 29025\\
a_3 &= 0,95 \cdot a_2 + 1000 = 0,95 \cdot 29025 + 1000 \approx 28574\\
a_5 &= 0,95 \cdot a_4 + 1000 = 0,95 \cdot (0,95 \cdot a_3 + 1000) + 1000 \approx 27738
\end{aligned}$$

(c) Schauen wir uns noch einmal die ersten Folgenglieder an:
$$\begin{aligned}
a_0 &= 30000\\
a_1 &= 0,95 \cdot 30000 + 1000\\
a_2 &= 0,95 \cdot (0,95 \cdot 30000 + 1000) + 1000 = 0,95^2 \cdot 30000 + (1 + 0,95) \cdot 1000\\
a_3 &= 0,95 \cdot \left[0,95^2 \cdot 30000 + (1 + 0,95) \cdot 1000\right] + 1000\\
&= 0,95^3 \cdot 30000 + \left(1 + 0,95 + 0,95^2\right) \cdot 1000\\
\vdots &= \vdots\\
a_n &= 0,95^n \cdot 30000 + \left(1 + 0,95 + 0,95^2 + \cdots + 0,95^{n-1}\right) \cdot 1000
\end{aligned}$$
Auch das können wir noch besser zusammenfassen (vergleiche die Herleitung zur Grenzwertberechnung der geometrischen Reihe!):
$$\begin{aligned}
a_n &= 0,95^n \cdot 30000 + \frac{1 - 0,95^n}{1 - 0,95} \cdot 1000\\
&= 0,95^n \cdot 30000 + \cdot (1 - 0,95^n) \cdot 20000\\
&= 0,95^n \cdot 10000 + 20000
\end{aligned}$$
Nach n Wochen kann man folglich eine Population von $20000 + 0,95^n \cdot 10000$ Ameisen erwarten.

(d) Wegen $0,95^n > 0,95^{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$ ist die Folge $a_n = 20000 + 0,95^n \cdot 10000$ streng monoton fallend. Die Ameisenpopulation nimmt wöchentlich ab. Allerdings ist die Abnahme wegen $a_n = 20000 + 0,95^n \cdot 10000 > 20000$ nach unten beschränkt. Es gibt immer mindestens 20000 Ameisen. Dieser Schranke kommt die Ameisenpopulation langfristig beliebig nahe:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} (20000 + 0,95^n \cdot 10000) = 20000 + \lim_{n\to\infty} (0,95^n) \cdot 10000 \\ &= 20000 + 0 \cdot 10000 = 20000\end{aligned}$$

4. (a) Sei a_n die Anzahl der Bakterien nach n Tagen. Anfänglich liegen 10^6 Bakterien vor, also $a_0 = 10^6$. Jeden Tag bleiben noch $\frac{7}{10}$ der Bakterien vom Vortag übrig, d. h. $a_{n+1} = \frac{7}{10}a_n$ für $n \geq 1$. Zum Beispiel ist $a_1 = \frac{7}{10} \cdot 10^6$, $a_2 = \left(\frac{7}{10}\right)^2 \cdot 10^6$ und $a_3 = \left(\frac{7}{10}\right)^3 \cdot 10^6$ etc. Allgemein erhalten wir $a_n = \left(\frac{7}{10}\right)^n \cdot 10^6$.

(b) Um diese neue Folge besser zu verstehen, schauen wir uns zunächst die ersten Folgenglieder an:

$$\begin{aligned}a_0 &= 10^6 \\ a_1 &= \frac{7}{10} \cdot 10^6 + b \\ a_2 &= \frac{7}{10} \cdot \left(\frac{7}{10} \cdot 10^6 + b\right) + b = \left(\frac{7}{10}\right)^2 \cdot 10^6 + \left(1 + \frac{7}{10}\right) \cdot b \\ a_3 &= \frac{7}{10} \cdot \left[\left(\frac{7}{10}\right)^2 \cdot 10^6 + \left(1 + \frac{7}{10}\right) \cdot b\right] + b \\ &= \left(\frac{7}{10}\right)^3 \cdot 10^6 + \left(1 + \frac{7}{10} + \left(\frac{7}{10}\right)^2\right) \cdot b \\ \vdots &= \vdots \\ a_n &= \left(\frac{7}{10}\right)^n \cdot 10^6 + \left(1 + \frac{7}{10} + \left(\frac{7}{10}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{7}{10}\right)^{n-1}\right) \cdot b\end{aligned}$$

Auch das können wir noch besser zusammenfassen (vergleiche die Herleitung zur Grenzwertberechnung der geometrischen Reihe!):

$$a_n = \left(\frac{7}{10}\right)^n \cdot 10^6 + \frac{1 - \left(\frac{7}{10}\right)^n}{1 - \frac{7}{10}} \cdot b = \left(\frac{7}{10}\right)^n \cdot 10^6 + \frac{10}{3}\left(1 - \left(\frac{7}{10}\right)^n\right) \cdot b$$

(c) Dass die Anzahl der Bakterien nach zwei Wochen $5 \cdot 10^6$ beträgt, bedeutet $a_{14} = 5 \cdot 10^6$. Mit dem Ergebnis aus b) erhalten wir

$$\left(\frac{7}{10}\right)^{14} \cdot 10^6 + \frac{10}{3}\left(1 - \left(\frac{7}{10}\right)^{14}\right) \cdot b = 5 \cdot 10^6.$$

Umstellen nach b liefert

$$b = \frac{5 - \left(\frac{7}{10}\right)^{14}}{\frac{10}{3} \cdot \left(1 - \left(\frac{7}{10}\right)^{14}\right)} \cdot 10^6 \approx 1{,}508 \cdot 10^6.$$

(d) Wenn wir a_0 nicht bei 10^6 festsetzen, sondern frei wählbar lassen, erhalten wir mit derselben Rechnung wie in b)

$$a_n = \left(\frac{7}{10}\right)^n \cdot a_0 + \frac{10}{3}\left(1 - \left(\frac{7}{10}\right)^n\right) \cdot b.$$

(e) Dass die Anzahl der Bakterien nach einer Woche $k \cdot a_0$ beträgt, bedeutet $a_7 = k \cdot a_0$. Mit der Formel aus d) erhalten wir

$$\left(\frac{7}{10}\right)^7 \cdot a_0 + \frac{10}{3}\left(1 - \left(\frac{7}{10}\right)^7\right) \cdot b = k \cdot a_0.$$

Umstellen nach b liefert

$$b = \frac{k - \left(\frac{7}{10}\right)^7}{\frac{10}{3} \cdot \left(1 - \left(\frac{7}{10}\right)^7\right)} \cdot a_0 = \frac{3}{10} \cdot \frac{k - \left(\frac{7}{10}\right)^7}{1 - \left(\frac{7}{10}\right)^7} \cdot a_0.$$

5. Sei V der gesamte Erdölvorrat und sei a_n der Verbrauch an Erdöl im n-ten Jahr ($n = 1, 2, \ldots$) im ersten Szenario, d. h. wenn die Vorräte solange konstant verbraucht werden, bis sie aufgebraucht sind. Dann gilt laut Annahme, dass die Vorräte dann noch 50 Jahre reichen, dass

$$a_n = \begin{cases} \frac{V}{50} & \text{für } 1 \leq n \leq 50 \\ 0 & \text{für } n \geq 51 \end{cases}$$

Sei b_n der Verbrauch an Erdöl im n-ten Jahr im zweiten Szenario, bei dem man den Verbrauch von Jahr zu Jahr um einen konstanten Faktor $q < 1$ verringert, so dass die Vorräte ewig reichen. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$b_{n+1} = b_n \cdot q.$$

Es handelt sich hierbei um eine exponentielle Abnahme des Verbrauchs. Im ersten Jahr gehen wir vom gleichen Verbrauch wie im ersten Szenario aus. Also

$$b_1 = a_1 = \frac{V}{50}.$$

Dass die Vorräte ewig reichen sollen, heißt

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \leq V.$$

Die Summe über die verbrauchten Mengen in jedem Jahr darf den Gesamtvorrat nicht überschreiten. Da wir so wenig Verbrauch wie möglich einbüßen wollen, ermitteln wir den größtmöglichen Faktor $q < 1$ und nehmen an, dass

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = V. \qquad (*)$$

Wegen $b_1 = \frac{V}{50}$ und $b_{n+1} = b_n \cdot q$ können wir b_n auch explizit angeben:

$$b_n = q^{n-1} \cdot \frac{V}{50}$$

Für die geometrische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ergibt sich

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(q^{n-1} \cdot \frac{V}{50} \right) = \frac{V}{50} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{V}{50} \cdot \frac{1}{1-q}.$$

Damit können wir die Bedingung $(*)$ auch so formulieren:

$$\frac{V}{50} \cdot \frac{1}{1-q} = V$$

Wir erhalten $1 - q = \frac{1}{50}$, also

$$q = \frac{49}{50} = 98\%.$$

D. h. wenn man den Verbrauch jedes Jahr auf 98% des Vorjahres reduzieren könnte, würde das Erdöl nach den getroffenen Annahmen ewig reichen. Man müsste den jährlichen Verbrauch pro Jahr um 2% verringern. Das beantwortet die Frage aus der Aufgabenstellung.

8.4 Lösungen zu Kapitel 4

1. (a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ (b) $D = \mathbb{R} \setminus \{1, -3\}$ (c) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

   (d) $D =]1; \infty]$ (e) $D = \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2\}$ (f) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

   (g) $D =]0; \infty]$ (h) $D = \mathbb{R} \setminus \{n\pi, m\pi + \frac{\pi}{2}\}$ (i) $D =]0; \infty]$

2. (a) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = -2$ (b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3 - x}{x} = -1$ (c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^4 + x^3}{x^2} = 0$

   (d) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^4 - x^2}{x - 1} = 2$ (e) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 1} = \frac{3}{2}$ (f) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{\sqrt{x}}{x^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2}$

3. a) Fallunterscheidung:
   - $a = 0$: $f(X) = \{b\}$; nicht surjektiv.
   - $a \neq 0$: $f(X) = \mathbb{R}$; surjektiv.

   b) $f(X) = [-4, 5]$; surjektiv.

   c) $f(X) = [-1, 1]$; nicht surjektiv.

4. a) $f(X) = [1, \infty)$; nicht injektiv, da $f(x) = f(-x)$.

   b) $f(X) = \mathbb{R}$; injektiv, da streng monoton wachsend, Umkehrfunktion: $g : \mathbb{R} \to [1, \infty)$, $g(y) = \frac{\exp(y)-3}{2}$.

   c) $f(X) = \mathbb{R}$; injektiv, da $f(x) = x^3 - 9x^2 + 27x - 27 = (x-3)^3$ streng monoton wachsend, Umkehrfunktion: $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(y) = \sqrt[3]{y} + 3$.

   d) $f(X) = [0, \ln(10000)]$; injektiv, da streng monoton fallend. Umkehrfunktion: $g : [0, \ln(10000)] \to [-10, 1]$, $g(y) = \exp(\frac{y}{4})$.

   e) $f(X) = [0, \infty]$; nicht injektiv, da $f(x) = f(-x)$.

   f) $f(X) = [-5, 5]$; nicht injektiv, da zum Beispiel $f(0) = f(\pi)$.

5. a) Nicht injektiv auf $\mathbb{R}$. Injektiv auf $(-\infty, 3]$ mit Umkehrfunktion $g_1 : (-\infty, 9] \to (-\infty, 3]$, $g_1(y) = -\sqrt{-y+9} + 3$ und auf $[3, \infty)$ mit Umkehrfunktion $g_2 : (-\infty, 9] \to [3, \infty)$, $g_2(y) = \sqrt{-y+9} + 3$.

   b) Nicht injektiv auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
   Injektiv auf $[-\frac{\pi}{2}, 0]$ mit Umkehrfunktion $g_1 : [0, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, 0]$, $g_1(y) = \arcsin(-\sqrt{y})$ und auf $[0, \frac{\pi}{2}]$ mit Umkehrfunktion $g_2 : [0, 1] \to [0, \frac{\pi}{2}]$, $g_2(y) = \arcsin(\sqrt{y})$.

   c) Injektiv auf $\mathbb{R}$ mit Umkehrfunktion $g : [0, 8] \cup (38, \infty) \to \mathbb{R}$,
   $g(y) = \begin{cases} \sqrt[3]{y} & y \leq 8 \\ y - 36 & y > 38 \end{cases}$.

6. a) Stetig, da Polynomfunktion.

   b) $\lim\limits_{x \nearrow -1} \frac{x^7}{x+1} = \infty$, der linksseitige Grenzwert existiert also nicht. Deshalb ist die Funktion nicht stetig.

   c) $\lim\limits_{x \nearrow 0} = -\infty$, der linksseitige Grenzwert existiert also nicht. Deshalb ist die Funktion nicht stetig.

   d) $f(x) = 2^x = \exp(\ln(2)x)$. $\ln(2)x$ ist eine lineare Funktion und somit stetig, die Exponentialfunktion ist auch stetig. Als Komposition stetiger Funktionen ist f also stetig.

   e) $\lim\limits_{x \nearrow -2} \frac{x^2-2}{x+2} = -\infty$, der linksseitige Grenzwert existiert also nicht. Deshalb ist die Funktion nicht stetig.

   f) $\lim\limits_{x \nearrow 1} f(x) = \lim\limits_{x \nearrow 1} 3x = 3 \neq 4 = f(1) = \lim\limits_{x \nearrow 1} f(x)$.
   Also ist die Funktion nicht stetig.

g) $f(x) = |x| = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$
x und $-x$ sind lineare Funktionen und somit stetig. Zu überprüfen ist also noch die Stetigkeit in $x = 0$. $\lim\limits_{x \nearrow 0} f(x) = \lim\limits_{x \nearrow 0} -x = 0$ und $\lim\limits_{x \searrow 0} f(x) = f(0) = 0$. Also ist f stetig.

h) $f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} \frac{-x}{x} & x < 0 \\ \frac{x}{x} & x \geq 0 \end{cases}$
$\Rightarrow \lim\limits_{x \nearrow 0} f(x) = \lim\limits_{x \nearrow 0} \frac{-x}{x} = \lim\limits_{x \nearrow 0} -1 = -1$ und $\lim\limits_{x \searrow 0} f(x) = \lim\limits_{x \searrow 0} \frac{x}{x} = \lim\limits_{x \searrow 0} 1 = 1$. Damit ist f nicht stetig.

i) x^2 und x^3 sind Polynomfunktionen, also ist die Funktion stetig auf $(-\infty, 0)$ und $(0, \infty)$. Zu untersuchen ist noch die Stetigkeit in $x = 0$:
$\lim\limits_{x \nearrow 0} f(x) = f(0) = 0^3 = 0$ und $\lim\limits_{x \searrow 0} f(x) = \lim\limits_{x \searrow 0} x^2 = 0$.
Also ist f stetig in 0 und somit auf ganz $\mathbb{R}$.

j) Die Exponentialfunktion ist stetig, x^2 ist ein Polynom und somit auch stetig. Da das Produkt zweier stetiger Funktionen stetig ist, ist die Funktion f stetig.

k) Ist $x \neq 0$, so ist f als Quotient zweier stetiger Funktionen stetig. Für den Grenzwert bei $x = 0$ gilt: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x^2+x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} x + 1 = 1$, also ist f auch in $x = 0$ stetig.

l) Für $a = 0$ ist die Funktion nicht definiert, sei also $a \neq 0$. $3x^3 + 2x + 2$ und $x^3 - 8$ sind Polynome, also stetig. Da $x^3 - 8 \neq 0$ für $x \leq 1$ ist auch $\frac{3x^3+2x+2}{x^3-2}$ für $x \leq 1$ stetig. $a^{\frac{3x^3+2x+2}{x^3-2}}$ ist dann als Verkettung stetiger Funktionen stetig auf $(-\infty, 1]$. Da $-\cos(\pi x)$, $2x^2 - 1$ und ax^2 stetig sind und $x^2 \neq 0$ für $x > 1$, ist auch $-\cos(\pi x) \cdot \frac{2x^2-1}{ax^2}$ als Quotient und Produkt stetiger Funktionen stetig auf $(1, \infty)$. Zu zeigen ist noch die Stetigkeit in $x = 1$:
$\lim\limits_{x \nearrow 1} f(x) = a^{\frac{3+2+2}{1-8}} = a^{-1}$ und $\lim\limits_{x \searrow 1} f(x) = -\cos(\pi) \cdot \frac{2-1}{a^1} = a^{-1}$. Also ist f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

7. a) 7 und $6x$ sind stetig, $6x \neq 0$ für x aus $[1, 2]$. Deshalb ist $\frac{7}{6x}$ stetig auf $[1, 2]$. Wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion ist $\exp(\frac{7}{6x})$ als Verkettung stetiger Funktionen stetig auf $[1, 2]$.

b) $\lim\limits_{x \searrow 1} 3^{x^2 + \frac{2}{x-1}} = \infty$, der rechtsseitige Grenzwert existiert also nicht. Deshalb ist die Funktion nicht stetig auf $[0, \infty)$.

c) $\sin(x)$ und $\cos(x)$ sind stetig und $\cos(x) \neq 0$ für x aus $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$. Also ist $\tan(x)$ stetig auf $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$.

8.4.1 Anwendungsaufgaben

1. a) Die gesuchte Funktion sei F und diese ist abhängig von T, welches für die Temperatur in Grad Fahrenheit steht. Anhand der gegebenen Tabelle muss gelten: $F(50) = 10$; $F(60) = 20$, $F(70) = 30$ und $F(80) = 40$.

Mit Hilfe einer Skizze kann man feststellen, dass der Funktionsgraph einen linearen Verlauf hat. Damit hat die Funktion folgende Form:
$F(T) = m \cdot T + b$.
Um m und b zu bestimmen, genügen zwei beliebige Werte aus der Tabelle, beispielsweise $F(50) = 10$ und $F(60) = 20$. Man hat also folgende zwei Gleichungen:
(I) $m \cdot 50 + b = 10$ und (II) $m \cdot 60 + b = 20$. Um die Steigung m und den y-Achsenabschnitt b zu bestimmen, kann man z.B folgende Rechenvarianten benutzen:
1. Möglichkeit:

$$\begin{aligned} 50m + b &= 10 && | \\ 60m + b &= 20 && |- \\ \hline -10m &= -10 && \Rightarrow m = 1 \end{aligned}$$

Durch Einsetzen in (I) erhält man nun:

$$\begin{aligned} 50 \cdot 1 + b &= 10 \\ \Leftrightarrow b &= -40 \end{aligned}$$

2. Möglichkeit
$50m + b = 10 \Leftrightarrow b = 10 - 50m$
Einsetzen in (II) ergibt:

$$\begin{aligned} 60m + 10 - 50m &= 20 \\ \Leftrightarrow 10m + 10 &= 20 \\ 10m &= 10 \\ m &= 1 \end{aligned}$$

Das Einsetzen ergibt analog zur 1. Möglichkeit:

$$b = -40$$

Unsere gesuchte Funktion lautet also:
$F(T) = T - 40$
Für $T = 55$ erhält man also:
$F(55) = 55 - 40 = 15$
Dies bedeutet, daß Grillen bei einer Temperatur von 55° Fahrenheit 55 mal in 15 Sekunden zirpen.

b) In der Anwendungsaufgabe aus 1.8 haben wir folgende Formel zur Umrechnung von Grad Celsius in Grad Fahrenheit kennengelernt:

$$T_{\circ F} = v_{\circ C} = \cdot 1,8 + 32$$

Dies kann man nun in die Funktion $F(T)$ aus Aufgabenteil a) einsetzen, damit hängt $F(T)$ dann von $v_{\circ C}$ ab und nicht mehr von T:

$$F(v_{\circ C}) = v_{\circ C} \cdot 1,8 + 32 - 40 = v_{\circ C} \cdot 1,8 - 8$$

Die Temperatur in Grad Celsius soll nun in Abhängigkeit von der Anzahl des Zirpens in 15 Sekunden angegeben werden, also muss man die Funktion $F(v_{\circ C})$ nach $v_{\circ C}$ auflösen. Nach Aufgabenteil a) steht $F(v_{\circ C})$ für die Anzahl des Zirpens. Im Folgenden ersetzen wir $F(v_{\circ C})$ durch y:

$$y = v_{\circ C} \cdot 1,8 - 8$$

Auflösen nach $v_{\circ C}$ ergibt:

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow y + 8 = 1,8v_{\circ C} \\
&\Leftrightarrow \frac{y+8}{1,8} = v_{\circ C} \\
&\Leftrightarrow \frac{5}{9}y + 4\frac{4}{9} = v_{\circ C}
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich als Funktion:

$$v_{\circ C}(y) = \frac{5}{9}y + 4\frac{4}{9}$$

2. a)

   b) Man geht hier analog zu Aufgabe 1a) vor:
   Aus der Tabelle nimmt man wieder zwei beliebige Spalten als Ausgangspunkt, da man nach Aufgabenteil a) weiß, dass es sich um eine lineare Funktion handelt. Unsere gesuchte Funktion sei f, diese ist abhängig von t, also der Zeit in Tagen. Sie hat folgende allgemeine Form:

   $$f(t) = m \cdot t + b$$

   Man nehme aus der Tabelle beispielsweise folgende Daten:

   $$f(0) = 4$$

   und

   $$f(2) = 6$$

   Es gilt also:
   (I): $4 = m \cdot 0 + b$ und (II): $6 = m \cdot 2 + b$
   Aus Gleichung (I) erhält man direkt $b = 4$. Dies eingesetzt in (II), ergibt:

   $$\begin{aligned}
   &6 = m \cdot 2 + 4 \\
   &\Leftrightarrow 2 = m \cdot 2 \\
   &\Leftrightarrow m = 1
   \end{aligned}$$

Damit hat die gesuchte Funktion folgendes Aussehen:

$$f(t) = t + 4$$

c) Hier muss man also $f(20)$ berechnen:

$$f(20) = 20 + 4 = 24$$

Damit wäre die Amaryllis nach 20 Tagen 24 cm hoch.

d) Die Funktionsformel beschreibt das Wachstum der Pflanze nicht komplett realistisch. Nur bis zu einem gewissen Zeitpunkt wächst die Pflanze weiter, denn ansonsten würde sie unendlich hoch werden. Dies ist biologisch völlig unsinnig, denn die Amaryllis wird nur ca. cm hoch und stirbt nach der Blüte ab.

3. a) Das Maximum der unveränderten Sinusfunktion ist der Wert 1 und das Minimum entsprechend -1. Damit die gesuchte Funktion L für den Luftstrom das Maximum 0,5 und das Minimum -0,5 hat, muss man also die Sinunsfunktion mit dem Faktor 0,5 multiplizieren. Es bleibt noch die Periodendauer auf 5 Sekunden anzupassen, denn normalerweise hat die Sinusfunktion, auch mit einem beliebigen Faktor multipliziert, die Periode 2π. Es gilt:

$$\sin(2\pi \cdot n) = 0$$

für $n \in \mathbb{Z}$
In unserem Fall soll für ein gesuchtes a jedoch gelten:

$$\sin(5a \cdot n) = 0$$

Man muss also folgende Gleichung lösen:

$$5a = 2\pi$$

Für a ergibt dies $a = \frac{2}{5}\pi$.
Die gesuchte Funktion $L(t)$ hat nun folgende Form:

$$L(t) = 0,5 \sin(\frac{2}{5}\pi \cdot t)$$

Der Definitionsbereich ist $D = \mathbb{R}^+$, denn t steht für die Zeit in Sekunden und diese ist nie negativ. Für den Wertebreich ergibt sich durch die Multiplikation mit 0,5 das Intervall $W = [-0,5,0,5]$

b) Um die Funktion L nun mit Hilfe der Kosinusfunktion darzustellen, muss man folgende Veränderungen vornehmen:

i) Die Kosinusfunktion muss so verschoben werden, dass bei $t = 0$ die Lungen leer sind.

ii) Wie in Teil a) muss der Wertebereich auf $[-0,5,0,5]$ eingeschränkt werden.

iii) Ebenfalls wie in Teil a) muss man die Periodendauer auf 5 Sekunden festlegen.

Beginnen wir also mit 1., dann müssen wir $\cos(t)$ so verändern, dass bei $t = 0$ eine Nullstelle ist. Eigentlich hat die Funktion $\cos(t)$ auf der positiven t-Achse die erste Nullstelle bei $\frac{\pi}{2}$. Man muss also eine horizontale Verschiebung um $\frac{\pi}{2}$ nach links vornehmen. Es muss also gelten:

$$\cos(t + b) = 0$$

für $t = 0$.
Dies ergibt folgende Gleichung:

$$0 + b = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow b = \frac{\pi}{2}$$

Für den 2. Schritt erhalten wir analog zu Aufgabenteil a) den Wertebereich $[-0,5, 0,5]$ durch Multiplizieren mit dem Faktor 0,5. Damit hat die Funktion L nach zwei von drei Schritten folgendes Aussehen:

$$L(t) = 0,5\cos(t + \frac{\pi}{2})$$

Um nun im 3. Schritt die Periodendauer zu ändern, die ebenso wie bei der Sinusfunktion, eigentlich bei 2π liegt, muss gelten:

$$5 \cdot a + \frac{\pi}{2} = 2\pi$$

damit $\cos(a \cdot t + \frac{\pi}{2} = 0$ für $t = 0$ gilt. Es ergibt sich also:

$$\begin{aligned} 5 \cdot a &= \frac{3}{2}\pi \\ \Leftrightarrow a &= \frac{\frac{3}{2}\pi}{5} \\ \Leftrightarrow a &= \frac{3}{10}\pi \end{aligned}$$

Die Funktion $L(t) = 0,5\cos(\frac{3}{10}\pi \cdot t + \frac{\pi}{2}$ beschreibt somit den Luftsrom beim Ein- und Ausatmen mit Hilfe der Kosinusfunktion.

4. Wir definieren zunächst a als die Anzahl der vergangenen Stunden.
Eine Vermehrung der Population um 50% in jeder Stunde bedeutet, dass nach jeder Stunde 150% der Menge der vorangegangenen Stunde vorhanden sind. Man kann sich dies formal folgendermaßen verdeutlichen:

$$\begin{array}{lrl}
\text{Stunde 0:} & 1000 = 1000 \cdot 1,5^0 & \text{Bakterien} \\
\text{Stunde 1:} & 1500 = 1000 \cdot 1,5 = 1000 \cdot 1,5^1 & \text{Bakterien} \\
\text{Stunde 2:} & 2250 = 1500 \cdot 1,5 = (1000 \cdot 1,5) \cdot 1,5 = 1000 \cdot 1,5^2 & \text{Bakterien} \\
\vdots & & \\
\text{Stunde a:} & 1000 \cdot 1,5^a & \text{Bakterien}
\end{array}$$

Für $a = 10,3$ gilt also:

$$100 \cdot 1,5^{10,3} \approx 65123,84$$

Also sind nach 10,3 Stunden 65123 Bakterien vorhanden.

5. a) Nach der Aufgabenstellung gilt allgemein:
$V = \frac{4}{3}\pi r^3$ und $S = 4\pi r^2$
Nun soll das Volumen V in Abhängigkeit von S, also als Funktion $V(S)$ dargestellt werden. Damit ergibt sich folgendes Problem:
Für welches x gilt $S \cdot x = V$? Formal:

$$\begin{aligned} 4\pi r^2 \cdot x &= \frac{4}{3}\pi r^3 \\ x &= \frac{1}{3}r \end{aligned}$$

Also ergibt sich:

$$V(S) = \frac{1}{3}r \cdot S$$

Wird S nun verdoppelt, muss man $V(2S)$ berechnen. Hier ergibt sich:

$$V(2S) = \frac{1}{3}r \cdot 2S = 2 \cdot \frac{1}{3}r \cdot S = 2 \cdot V(S)$$

Also verdoppelt sich das Volumen, wenn man die Oberfläche S verdoppelt.

b) Das Verhältnis Oberfläche zu Volumen ist:

$$\frac{S}{V} = \frac{4\pi r^2}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{4}{\frac{4}{3}r} = \frac{3}{r}$$

Da wir von einer kugelförmigen Zelle ausgehen, hängt die Größe vom Radius r ab. Wenn r also größer wird, d. h. quasi das Tier größer wird, wird das Verhältnis $\frac{S}{V} = \frac{3}{r}$ kleiner, da r nur im Nenner des Bruches vorkommt.
Die Tatsache, dass das Verhältnis Oberfläche zu Volumen kleiner wird je größer ein Individuum ist, impliziert, dass bei größeren Tieren die Oberfläche verhältnismäßig klein ist.
Dies sieht man auch direkt an den Formeln für die Oberfläche und das Volumen:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \text{ und } S = 4\pi r^2$$

Für das Volumen geht der Radius wegen r^3 kubisch ein und bei der Oberfläche nur quadratisch aufgrund des r^2.

c) In diesem Aufgabenteil ist das Vorgehen analog zu den Aufgaben 1 und 2 dieses Kapitels. Aus diesem Grund wird der Lösungsansatz nur recht kurz aufgezeigt. Es gilt:

$$\begin{aligned} l(60) = 455, \text{ also genauer } 60 \cdot a + b &= 455 \\ \text{und } l(140) = 1050 \text{ also } 140 \cdot a + b &= 1050 \end{aligned}$$

Berechnung von a und b:

$$\begin{aligned} 455 - 60 \cdot a &= b \\ \Rightarrow 140a + 455 - 60a &= 1050 \\ \Leftrightarrow 595 &= 80a \\ \Leftrightarrow a = 7,4375 \text{ und } b &= 8,75 \end{aligned}$$

Als allgemeine Formel ergibt sich damit:

$$l(s) = 7,4375 \cdot s + 8,75$$

Für eine Schwanzlänge von 100 mm heißt das:

$$l(100) = 7,4375 \cdot 100 + 8,75 = 752,5$$

Also hat diese Schlange mit einem 100 mm langen Schwanz eine Gesamtkörperlänge von 752,5 mm.

6. a)

b) Die Funktion $f(x)$ kennen wir aus Aufgabenteil a):

$$f(x) = 4 \cdot \sin(x)$$

Anhand der Zeichnung erkennen wir, dass es sich um den Graph der Sinusfunktion handelt, dessen Wertebereich von $[-1, 1]$ auf $[-4, 4]$ erweitert wurde. Die Funktion $f(x)$ hat noch immer Nullstellen bei $\pi, 2\pi, 3\pi, \cdots$, wobei die verschobene Funktion $g(x)$ ihre Nullstellen bei $\pi + 5, 2\pi + 5, 3\pi + 5, \cdots$ haben soll. Gesucht ist also a, so dass für $x = \pi+5$ (bzw. $x = 2\pi+5 \cdots$) folgendes gilt:

$$4 \cdot \sin(x + a) = 0$$

Es folgt also:

$$\pi + 5 + a = \pi$$
$$\Leftrightarrow a = -5$$

Damit ist $g(x) = 4\sin(x - 5)$ der um 5 nach rechts verschobene Graph der Ausgangsfunktion $f(x)$.
Soll nun der Graph von $g(x)$ um 3 nach oben verschoben werden, muss jeder Funktionswert (der Form $4\sin(x-5)$) um 3 nach oben verschoben werden. Dies erreicht man also durch Addition von 3 zur Funktion $g(x)$. Damit folgt:

$$h(x) = g(x) + 3 = 4\sin(x - 5) + 3$$

c) Da laut Aufgabenstellung der 21. Juni der 171. Tag des Jahres ist, handelt es sich bei dem 21. Dezember um den 351. Tag des Jahres. Die minimale Tageslänge liegt bei 7,83 Stunden und die maximale Tageslänge bei 16,65 Stunden, damit ist klar, dass $f(t)$ einen sinusähnlichen Funktionsgraphen besitzt, dessen Minimum bei 7,83 und dessen Maximum bei 16,65 liegt. Für $f(t) = m + A(\sin(wt + p))$ bestimmen wir zunächst A. In Aufgabenteil a) haben wir bereits festgestellt, dass das Multiplizieren der Sinusfunktion mit einem Faktor A bewirkt, dass die Amplitude (d. h. die maximale Auslenkung einer periodischen Funktion) A Einheiten beträgt, also sind es A Einheiten nach oben zum Maximum und A Einheiten nach unten zum Minimum. Unsere gesuchte Funktion $f(x)$ soll den Wertebereich $[7, 83, 16, 65]$ haben. Wir betrachten also die Differenz zwischen dem Maximum und dem Minimum:

$$16, 65 - 7, 83 = 8, 82$$

Eine Sinusfunktion geht von ihrer "Mittelachse" um A Einheiten nach oben und um A Einheiten nach unten, also müssen wir die berechnete Differenz noch durch 2 teilen:

$$8,82 : 2 = 4,41$$

Damit gilt also $A = 4,41$.
Laut Aufgabenstellung hat jedes Jahr 360 Tage und jedes Jahr wiederholen sich die Tageslängen, also muss die gesuchte Funktion $f(t)$ die Periode 360 haben. Die Funktion $\sin(wt)$ hat die Periode 2π für $w = 1$, d. h. es gilt $\sin(1 \cdot 2\pi) = 0$. In unserem Fall soll jedoch gelten $\sin(w \cdot 360) = 0$, also:

$$\begin{aligned} w \cdot 360 &= 2\pi \\ \Leftrightarrow w &= \frac{\pi}{180} \end{aligned}$$

Nun bleiben noch die Werte für m und p zu bestimmen. Aus Aufgabenteil c) wissen wir bereits, dass m der senkrechten Verschiebung entspricht und ebenso wissen wir, dass p der waagerechten Verschiebung entspricht. Beginnen wir mit der Ermittlung von m. Wir haben bereits erwähnt, dass von der "Mittelachse" der gleiche Abstand zum Maximum wie zum Minimum besteht, dieser Abstand ist $A = 4,41$. In der unveränderten Sinusfunktion entspricht diese "Mittelachse" der x-Achse. In unserer Funktion muss jedoch gelten:

$$7,83 + 4,41 = 16,65 + 4,41 = 12,24$$

Unsere "Mittelachse" muss also bei 12,24 liegen und damit muss man eine Verschiebung um 12,24 Einheiten nach oben vornehmen. Also gilt:

$$m = 12.24$$

Zuletzt ermitteln wir nun die reelle Zahl p. Dazu betrachten wir den minimalen Funktionswert (oder auch den maximalen). Der minimale Funktionswert wird für $t = 351$ angenommen und somit nicht für $\frac{3}{2}\pi$ wie bei $\sin(t)$. Damit muss gelten:
$w \cdot t + p = \frac{3}{2}\pi$ für $t = 351$, in unserem Fall also:

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{180} \cdot 351 + p &= \frac{3}{2}\pi \\ \Leftrightarrow p &= -1,4137 \end{aligned}$$

Den selben Wert für p erhält man, wenn man den maximalen Funktionswert nutzt. Dann muss gelten:

$$\frac{\pi}{180} \cdot 171 + p = \frac{1}{2}\pi$$
$$\Leftrightarrow p = -1,4137$$

Die gesuchte Funktion $f(t)$ hat letztendlich also folgende Form:

$$f(t) = 12,24 + 4,41 \cdot (\sin(\frac{\pi}{180} \cdot t - 1,4137))$$

d) Da die Funktion $f(t)$ die Tageslänge angibt, muss man zunächst die entsprechende Tageslänge berechnen, die einer Nachtlänge von 9,4 Stunden entspricht, also:

$$24 - 9,4 = 14,6$$

$f(t) = 14,6$ ist also gegeben:

$$12,24 + 4,41(\sin(\frac{\pi}{180} \cdot t - 1,4137)) = 14,6$$
$$\Leftrightarrow 4,41(\sin(\frac{\pi}{180} \cdot t - 1,4137)) = 2,36$$
$$\Leftrightarrow \sin(\frac{\pi}{180} \cdot t - 1,4137)) = \frac{236}{441}$$
$$\Rightarrow \frac{\pi}{180} \cdot t \approx 1,9784$$
$$\Rightarrow t \approx 113,3529$$

Da man nur ganze Tage angeben kann, bleibt zu überlegen, ob der 113. oder der 114. Tag mindestens 14,6 Stunden Tageslicht hat. Da Tag 171 des Jahres die maximale Tageslänge hat, ist die Funktion bis dort monoton steigend und damit hat Tag 113 noch nicht ganz 14,6 Stunden Tageslicht. Tag 114 des Jahres ist der erste, der mindestens 14,6 Stunden Tag hat. Es handelt sich dabei um den 24. April.

7. a) Da es sich um eine Anfangspopulation von 25000 Mitgliedern handelt, deren Wachstum exponentiell verläuft, beschreibt $f(t) = 25000 \cdot p^t$ die Größe der Population nach t Stunden. $p \in \mathbb{R}$ ist beliebig und weiterhin muss laut Aufgabenstellung gelten:

$$25000 \cdot p^3 = 3 \cdot 25000$$
$$\Leftrightarrow p = \sqrt[3]{3}$$
$$\Rightarrow f(t) = 25000 \cdot (\sqrt[3]{3})^t$$

Damit ist die gesuchte Funktion gefunden.

b)

$$f(0,5) = 25000 \cdot (\sqrt[3]{3})^{0,5} \approx 30023$$

c) Hier muss gelten:

$$\begin{aligned} 25000 \cdot (\sqrt[3]{3})^t &= 100001 \\ \Leftrightarrow (\sqrt[3]{3})^t &= 4 \\ \Leftrightarrow t &= \frac{\log(4)}{\log((\sqrt[3]{3})^t)} \\ \Leftrightarrow t &\approx 3,79 \end{aligned}$$

Nach mehr als 3,79 Stunden (ungefähr) hat die Population mehr als 100000 Mitgliedern.

d)

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to\infty}(25000 \cdot (\sqrt[3]{3})^t) = \infty$$

Dieses Ergebnis ist unrealistisch, da das Wachstum einer Bakterienkultur nur unter bestimmten Bedingungen und meist nur im Anfangsstadium exponentiell wächst.

8. Die folgende Funktion ist gegeben:

$$f(x) = \frac{Bx}{x+K}$$

Die Umkehrfunktion f^{-1} muss zwei Bedingungen erfüllen:

$$f(f^{-1}(x)) = x \text{ und } f^{-1}(f(x)) = x$$

Zur Berechnung der Umkehrfunktion stellt man die Funktion $f(x)$ zunächst nach x um:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{Bx}{x+K} \\ \Leftrightarrow f(x)(x+K) &= Bx \\ \Leftrightarrow x \cdot f(x) + K \cdot f(x) &= Bx \\ \Leftrightarrow (f(x)-B)x &= -Kf(x) \\ \Leftrightarrow x &= \frac{Kf(x)}{B-f(x)} \end{aligned}$$

Nun ersetzt man x durch f^{-1} und $f(x)$ durch x und erhält:

$$f^{-1}(x) = \frac{Kx}{B-x}$$

Zur Überprüfung rechnet man nun die Proben:
$f(f^{-1}(x) = f(\frac{Kx}{B-x}) = \dfrac{B\frac{xK}{B-x}}{\frac{xK}{B-x}+K} = \dfrac{BKx}{BK} = x$
$f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(\dfrac{Bx}{x+K}) = \dfrac{\frac{Bx}{x+K}\cdot K}{B-\frac{Bx}{x+K}} = \dfrac{BKx}{BK} = x$
Damit ist die Umkehrfunktion von $f(x)$ ermittelt und es ist $f^{-1} = \dfrac{Kx}{B-x}$.

8.5 Lösungen zu Kapitel 5

Lösungen:

1. a) $f'(x) = xe^x + e^x,\ f''(x) = xe^x + 2e^x,\ f'''(x) = xe^x + 3e^x$
   b) $f'(x) = 6\left(2x+1\right)^2 = 24x^2 + 24x + 6,\ f''(x) = 48x + 24,\ f'''(x) = 48$
   c) $f'(x) = -4x^3,\ f''(x) = -12x^2,\ f'''(x) = -24x$
   d) Beachte: $f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)} = x - 1$, also $f'(x) = 1,\ f''(x) = 0,\ f'''(x) = 0$
   e) $f'(x) = -\dfrac{4}{x^7},\ f''(x) = \dfrac{28}{x^8},\ f'''(x) = -\dfrac{224}{x^9}$
   f) $f'(x) = 4(a+b)x^3+2(c-2)x,\ f''(x) = 12(a+b)x^2+2(c-2),\ f'''(x) = 24(a+b)x$
   g) $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}},\ f''(x) = -\dfrac{2}{9\sqrt[3]{x^5}},\ f'''(x) = \dfrac{10}{27\sqrt[3]{x^8}}$
   h) $f'(x) = \dfrac{3\sqrt{x}}{2},\ f''(x) = \dfrac{3}{4\sqrt{x}},\ f'''(x) = -\dfrac{3}{8\sqrt{x^3}}$
   i) $f'(x) = 2x + \dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{x^2},\ f''(x) = 2 - \dfrac{8}{x^3},\ f'''(x) = \dfrac{24}{x^4}$
   j) $f'(x) = \ln x + 1,\ f''(x) = \dfrac{1}{x},\ f'''(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

k) $f'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x,\ f''(x) = -4\sin x \cdot \cos x,\ f'''(x) = 4\sin^2 x - 4\cos^2 x$

l) $f'(x) = -\dfrac{1}{(x+2)^2},\ f''(x) = \dfrac{2}{(x+2)^3},\ f'''(x) = -\dfrac{6}{(x+2)^4}$

2. a) $f(x) = -\dfrac{3x^2+1}{x^2\left(x^2+1\right)^2}$

   b) $f(x) = 4\sin^3 x \cdot \cos x$

   c) $f(x) = x \cdot \cos x$

   d) $f(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

   e) $f(x) = -\cos(\cos x) \cdot \sin x$

   f) $f(x) = 2(x^2 + \cos x)(2x - \sin x)$

   g) $f(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{x-2}{x^2+x+1}} \cdot \dfrac{x^2-4x-3}{(x-2)^2}$

   h) $f(x) = -\dfrac{e^{\frac{1}{\sqrt{x}}}}{x\sqrt{x}}$

   i) $f(x) = 5\left(\left(x+x^2\right)^3 + x^4\right)^4 \cdot \left(3\left(x+x^2\right)^2 \cdot (1+2x) + 4x^3\right)$

3.

	Nullstellen	Minima	Maxima	Wendepunkte
a)	$(-1,0),\ (1,0)$	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$	–	$(-\frac{1}{4}, -\frac{5}{27})$
b)	$(0,0),\ (3,0)$	$(3,0)$	$(1,4)$	$(2,2)$
c)	$(-3,0),\ (3,0)$	$(-1,-32)$	$(3,0)$	$(1,-16)$
d)	–	$(-1,2),\ (1,2)$	–	–
e)	$(-2,0),\ (1,0)$	$(0,-4)$	$(-2,0)$	$(-1,-2)$
f)	$(-1,0),\ (2,0)$	$(1,-4)$	$(-1,0)$	$(0,-2)$
g)	$(-1,0)$	$(1,4)$	$(-1,0)$	–
h)	$(1,0),\ (3,0)$	$(2,-1)$	–	–
i)	$(0,0),\ (6,0)$	$(6,0)$	$(2,32)$	$(4,16)$

8.6 Lösungen zu Kapitel 6

1. a) $F(x) = 2x^2 + \frac{7}{3}x^3$
   b) $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} + 2e^x + x$
   c) $F(x) = \sin(x) + \cos(x)$
   d) $f(x) = e^{-\ln(3)\cdot x} \;\Rightarrow\; F(x) = \frac{1}{\ln(3)}e^{-\ln(3)x} = \frac{1}{\ln(3)}3^{-x}$
   e) $f(x) = \frac{1}{t} \cdot x^{\frac{1}{2}} \;\Rightarrow\; F(x) = \frac{1}{t} \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}}$
   f) $F(x) = \frac{1}{5}(a+b)x^5 + 2x^{-1} + (a+2c)x$
   g) $f(x) = (x+a)^{\frac{1}{3}} \;\Rightarrow\; F(x) = \frac{3}{4}(x+4)^{\frac{4}{3}}$
   h) $f(x) = x^{-\frac{3}{2}} \;\Rightarrow\; F(x) = -2x^{-\frac{1}{2}}$
   i) $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{6}x - 4\ln(x)$

j) $\int \ln(2x)dx = \frac{1}{2}\int 2 \cdot \ln(2x)dx = \frac{1}{2}\int (2x)' \cdot \ln(2x)dx$
$= \frac{1}{2}\left[2x \cdot \ln(2x) - \int 2x \cdot \frac{1}{2x} \cdot 2\right] = \frac{1}{2}\left[2x \cdot \ln(2x) - 2x\right] = x \cdot \ln(2x) - x$
$\Rightarrow F(x) = x \cdot \ln(2x) - x$

k) $f(x) = \frac{1}{4}e^{-\ln(2)x} \;\Rightarrow\; F(x) = -\frac{1}{4\ln(2)} \cdot (\frac{1}{2})^x$

l) $F(x) = \frac{1}{5}\ln(5x+7)$

2. a) $\int (x^{\frac{2}{3}} + 7) \cdot (x^3 + x^{-\frac{1}{6}}) = \frac{3}{14}x^{\frac{14}{3}} + \frac{7}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{42}{5}x^{\frac{5}{6}}$

b) $\int e^x \cdot x dx = e^x \cdot x - \int e^x dx = e^x \cdot x - e^x = e^x(x-1)$

c) $\int x^4 e^{7x^5+2}dx = \frac{1}{35}\int (7x^5+2)' e^{7x^5+2}dx = \frac{1}{35}e^{7x^5+2}$

d) $\int e^{2x}x^2 dx = \frac{1}{2}e^{2x}x^2 - \int e^{2x}x = \frac{1}{2}e^{2x}x^2 - \left[\frac{1}{2}e^{2x}x - \int \frac{1}{2}e^{2x}dx\right]$
$= \frac{1}{2}e^{2x}x^2 - \frac{1}{2}e^{2x}x + \frac{1}{4}e^{2x}dx = e^{2x}(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4})$

e) Mit $g(y) = \frac{y^2}{2}$ gilt:
$\int e^{\sqrt{2s}}ds = \int e^{\sqrt{2g(y)}}g'(y)ds = \int e^y y dy = e^y(y-1) = e^{\sqrt{2s}}(\sqrt{2s}-1)$

f) $\int \frac{3}{(x-2)^2}dx = \int 3(x-2)^{-2}(x-2)'dx = -3(x-2)^{-1} = -\frac{3}{(x-2)}$

g) $\int \frac{1}{2+2x^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\arctan(x)$

h) $\int \cos(x)^2 dx = \cos(x)\sin(x) + \int \sin(x)^2 dx$
$= \cos(x)\sin(x) + \int 1dx - \int \cos(x)^2 dx$
$\Leftrightarrow \int \cos(x)^2 dx = \frac{\cos(x)\sin(x)+x}{2}$

i) Mit $g(y) = \sin(y)$ gilt:
$\int \sqrt{1-x^2}dx = \int \sqrt{1-g(y)^2} \cdot g'(y)dy = \int \sqrt{1-\sin(y)^2} \cdot \cos(y)dy$
$= \int \cos(y)^2 dy = \frac{\cos(y)\sin(y)+y}{2} = \frac{x\cos(\arcsin(x))+\arcsin(x)}{2}$

3. a) $\int\limits_0^5 e^{ax}dx = \left[\frac{1}{a}e^{ax}\right]_0^1 = \frac{1}{a}(e^{5a}-1)$

b) $\int\limits_0^1 0dx = 0$

c) $\int\limits_2^4 2x^2 + 5x + 3x^{-2}dx = \left[\frac{2}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 3x^{-1}\right]_2^4 = \frac{817}{12}$

d) $\int\limits_{-1}^1 |x|dx = \int\limits_{-1}^0 -xdx + \int\limits_0^1 xdx = 1$

e) $\int\limits_a^3 \sqrt{bx}\,dx = \sqrt{b}\int_a^3 x^{\frac{1}{2}}dx = \left[\sqrt{b} \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}}\right]_a^3 = \sqrt{b} \cdot \frac{2}{3} \cdot (\sqrt{27} - \sqrt{a^3})$

f) $\int\limits_{t_0}^{t_1}(x^3 + e^{x^2}) \cdot 100tdt = 50(x^3 + e^{x^2})(t_1^2 - t_0^2)$

g) $\int\limits_1^2 \frac{1}{5x-2}dx = \frac{1}{5}\int\limits_1^2 \frac{(5x-2)'}{5x-2}dx = \frac{1}{5}\left[\ln(5x-2)\right]_1^2 = \frac{1}{5}(\ln(8) - \ln(3))$

h) $\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{101x}dx = \left[\frac{\ln(x)}{101}\right]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{\ln(2)}{101}$

i) $\int\limits_0^\pi \cos(2x)\cdot\sin(3x)dx = \left[-\frac{1}{3}\cos(2x)\cos(3x)\right]_0^\pi - \int\limits_0^\pi \frac{2}{3}\sin(2x)\cos(3x)dx$
$= \left[-\frac{1}{3}\cos(2x)\cos(3x)\right]_0^\pi - \left[\frac{2}{9}\sin(2x)\sin(3x)\right]_0^\pi + \int\limits_0^\pi \frac{4}{9}\cos(2x)\cdot\sin(3x)dx$
$\Leftrightarrow \int\limits_0^\pi \cos(2x)\cdot\sin(3x)dx = \left[-\frac{1}{3}\cos(2x)\cos(3x)\right]_0^\pi - \left[\frac{2}{9}\sin(2x)\sin(3x)\right]_0^\pi \cdot \frac{9}{5} = \frac{6}{5}$

j) $\int\limits_0^1 e^{3t}\cos(t)dt = [e^{3t}\sin(t)]_0^1 - \int\limits_0^1 3e^{3t}\sin(t)dt$
$= [e^{3t}\sin(t)]_0^1 - [-3e^{3t}\cos(t)]_0^1 - \int\limits_0^1 9e^{3t}\cos(t)dt$
$\Leftrightarrow \int\limits_0^1 e^{3t}\cos(t) = \frac{e^t\sin(1)+3e^t\cos(1)-3}{10}$

k) $\int\limits_1^4 \frac{1}{(ax+b)^3}dx = \int\limits_1^4 \frac{1}{a}\frac{(ax+b)'}{(ax+b)^3}dx = \left[-\frac{1}{2a(ax+b)^2}\right]_1^4 = \frac{1}{2a(a+b)^2} - \frac{1}{2a(4a+b)^2}$

l) $\int\limits_{-\frac{6}{5}}^{\pi-\frac{b}{a}} 7\cos(5x+6)dx = \frac{7}{5}\left[\sin(5x+6)\right]_{-\frac{6}{5}}^{\pi-\frac{6}{5}} = 0$

m) $\int\limits_{-2}^0 \frac{1}{\sqrt{-x^2-2x}}dx = \int\limits_{-2}^0 \frac{1}{\sqrt{1-(x+1)^2}}dx = [\arcsin(x+1)]_{-2}^0 = \pi$

n) $\int\limits_{-1}^1 \frac{e^x}{e^x+1}dx = \int\limits_{-1}^1 \frac{(e^x+1)'}{e^x+1}dx = [\ln e^x+1]_{-1}^1 = \ln(e+1) - \ln(\frac{1}{e}+1)$

o) $\int\limits_0^{\frac{1}{5}} \frac{1}{5}e^{5x}dx = \left[\frac{1}{25}e^{5x}\right]_0^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{25}(e-1)$

p) $\int\limits_0^7 f(x)dx = \int\limits_0^2 1dx + \int\limits_2^4 (x-1)dx + \int\limits_2^4 3dx = 15$

q) $\int\limits_1^4 f(t)dt = \int\limits_1^2 e^t - 1dt + \int\limits_2^4 e^{6-2t} - 1dt = [e^t - t]_1^2 + \left[-\frac{1}{2}e^{6-2t} - t\right]_2^4$
$= -\frac{1}{2}e^{-2} - 7 - e + \frac{3}{2}e^2$

4. a) $\int\limits_1^\infty x^{-2}dx = \lim\limits_{a\to\infty} 1 - \frac{1}{a} = 1$

b) $\int\limits_0^2 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim\limits_{a\to 0} 2(\sqrt{2} - \sqrt{a}) = 2\sqrt{2}$

c) $\int\limits_{100}^\infty \frac{1}{x}dx = \lim\limits_{a\to\infty} \ln(a) - \ln(100) = \infty \Rightarrow$Das Integral existiert nicht.

d) $\int\limits_{-\infty}^z e^x dx = \lim\limits_{a\to-\infty} e^z - e^a = e^z$

5. a) Schnittpunkte: $(0,1)$, $(5,1)$, Flächeninhalt: $\int\limits_0^1 -x^3 + 5x^2 dx = \dfrac{625}{12}$

b) Schnittpunkte: $(-1,0)$, $(1,0)$, Flächeninhalt: $\int\limits_{-1}^1 2 - 2x^2 = \dfrac{8}{3}$

c) Schnittpunkte: $(-\frac{\pi}{2},0)$, $(\frac{\pi}{2},0)$, Flächeninhalt: $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \cos(x) + \frac{\pi}{2}x + 1dx + \int\limits_{0}^{\frac{2}{\pi}} \cos(x) - \frac{2}{\pi}x + 1dx$

$= \Big[\sin(x) + \frac{1}{\pi}x^2 + x\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} + \Big[\sin(x) - \frac{1}{\pi}x^2 + x\Big]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = 1 + \frac{\pi}{2}$

9 Symbolverzeichnis

Mathematische Symbole

$\in$	„ist Element von“
$\{\ \}$	geschweifte Klammern begrenzen eine Menge
$:=$	„ist definiert durch“
$\Longrightarrow$	„daraus folgt“
$\Longleftrightarrow$	„genau dann, wenn“
$\mid$	„mit“, „so dass gilt“
$\subset$	„ist eine Teilmenge von“
$\sum$	ein Summenzeichen
$\sum_{i=1}^{n} s_i$	ist definiert als die Summe $s_1 + s_2 + \cdots + s_n$

Das griechische Alphabet

Klein	*Zeichen*	*Groß*	*Variante*	*Klein*	*Zeichen*	*Groß*	*Variante*
α	alpha	A		ν	ny	N	
β	beta	B		ξ	xi	Ξ	
γ	gamma	Γ		o	omikron	O	
δ	delta	Δ		π	pi	Π	ϖ
ϵ	epsilon	E	ε	ρ	rho	P	ϱ
ζ	zeta	Z		σ	sigma	Σ	
η	eta	H		τ	tau	T	
θ	theta	Θ	ϑ	υ	ypsilon	Υ	
ι	iota	I		ϕ	phi	Φ	φ
κ	kappa	K		χ	chi	X	
λ	lambda	Λ		ψ	psi	Ψ	
μ	my	M		ω	omega	Ω	

10 Literaturverzeichnis

[BHT 98] Begon, M., Harper, J., Townsend, C.: *Ökologie*. Spektrum Akademischer Verlag, Berlin, 1998.

[BCS 99] Boos, K.-S., Christner, J., Schlimme, E.: *Abiturwissen Biologie. Stoffwechsel*. Klett Lerntraining, 1999.

[CR 03] Campbell, N. A., Reece, J. B.: *Biologie*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin, 6. Auflage, 2003.

[CLZ 90] Czihak, G., Langer, H., Ziegler, H. (Hrsg.): *Biologie - Ein Lehrbuch*. Springer, Weltbild, Augsburg, 1990.

[DLWW 07] D. Dossing, V. Liebscher , H. Wagner, S. Walcher: *Evolution, Bäume und Algorithmen*. MNU 60(2):68-75, 2007.

[F 05] Fischer, G.: *Lineare Algebra*. Vieweg + Teubner, 15. Auflage, 2005.

[F83] Forster, O.: *Analysis 1*. Vieweg, 4. Auflabe, 1983.

[J 94] Jacobs, Harold R.: *Mathematics, A Human Endeavor*. W. H. Freeman and Company, 1994.

[K 04] Kersten, I.: *Mathematische Grundlagen in Biologie und Geowissenschaften. Kurs 2004/2005.* Universitätsdrucke Göttingen, 2004.

[L 98] Kull, U., Bäßler, U., Hopmann, H., Rüdiger, W.: *Linder Biologie*. Schroedel Verlag, Hannover, 21. Auflage, 1998.

[M 01] Munk (Hrsg.), K.: *Grundstudium Biologie, Botanik*. Spektrum Akademischer Verlag; Heidelberg, Berlin; 2001; S. 1-21

11 Verzeichnis der biologischen Beispiele