

**Newton-Verfahren beim inversen  
Neumann-Problem  
zur Helmholtz-Gleichung**

**Diplomarbeit**

vorgelegt von  
**Thorsten Hohage**  
aus  
**Northeim**

angefertigt am  
**Institut für  
Numerische und Angewandte Mathematik**  
der  
**Georg-August-Universität zu Göttingen**  
**1996**



# Einleitung

In dieser Arbeit wird ein inverses akustisches Streuproblem behandelt. Zunächst stelle ich einige physikalische Tatsachen über die Ausbreitung von Schallwellen in einer homogenen Flüssigkeit mit zu vernachlässigender innerer Reibung zusammen. Eine genauere Behandlung dieses Themas findet man z.B. in [We].

Seien  $v(x, t)$  die Geschwindigkeit,  $p(x, t)$  der Druck und  $\rho(x, t)$  die Dichte der Flüssigkeit. Nimmt man an, daß  $v$ ,  $p$  und  $\rho$  nur wenig um einen konstanten Zustand  $v_0 = 0$ ,  $p_0$ ,  $\rho_0$  schwanken, so erfüllen die Zustandsgrößen näherungsweise die linearisierte Euler-Gleichung

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \operatorname{grad} p,$$

die linearisierte Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho_0 \operatorname{div} v$$

und die Beziehung

$$\frac{\partial p}{\partial t} = c^2 \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

mit einer Konstanten  $c > 0$ , die die Dimension einer Geschwindigkeit hat. Falls  $\operatorname{rot} v = 0$ , folgt mit Hilfe der linearisierten Euler-Gleichung, daß ein Geschwindigkeitspotential  $U(x, t)$  existiert, so daß

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -p \quad \text{und} \quad \operatorname{grad} U = \rho_0 v.$$

Dieses Potential erfüllt die Wellengleichung

$$\Delta U = \rho_0 \operatorname{div} v = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}.$$

Nimmt man weiterhin an, daß die Schwingung zeitharmonisch ist, d.h. daß in der üblichen komplexen Schreibweise  $U$  von der Form

$$U(x, t) = \operatorname{Re} (u(x)e^{-i\omega t})$$

mit einer Kreisfrequenz  $\omega > 0$  ist, so erfüllt der ortsabhängige Anteil  $u$  die Helmholtz-Gleichung

$$\Delta u + k^2 u = 0$$

mit Wellenzahl  $k = \frac{\omega}{c}$ .

Befindet sich in der Flüssigkeit ein undurchdringlicher Körper  $D$ , so hängen die Bedingungen, die  $u$  auf dem Rand  $\Gamma$  von  $D$  erfüllt, von den physikalischen Eigenschaften der Oberfläche von  $D$  ab. Bei sogenannten "schallharten" Hindernissen ist die Normalkomponente  $\langle v, n \rangle$  der Geschwindigkeit auf dem Rand Null, d.h. es gilt

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \langle \operatorname{grad} u, n \rangle = 0$$

auf  $\Gamma$ . Dabei ist  $n$  der nach außen weisende Normalenvektor auf  $\Gamma$ .

Als "direktes Problem" betrachte ich nun die Aufgabe, für eine einfallende Welle  $u_i(x) = e^{ik\langle d, x \rangle}$ , die auf ein bekanntes schallhartes Objekt  $D$  trifft, die gestreute Welle  $u_s$  zu berechnen. Dabei muß das Gesamtfeld  $u := u_i + u_s$  die Randbedingung  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$  erfüllen. Das gestreute Feld  $u_s$  löst die Helmholtz-Gleichung und erfüllt außerdem die sgn. *Sommerfeld'sche Ausstrahlungsbedingung*. Da mein numerisches Verfahren nur im  $\mathbb{R}^2$  arbeitet, habe ich auch im theoretischen Teil dieser Arbeit nur den zweidimensionalen Fall betrachtet. Dies entspricht der Streuung an langen, zylinderförmigen Objekten. In diesem Fall lautet die Sommerfeld'sche Ausstrahlungsbedingung

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left( \frac{\partial u_s}{\partial r} - ik u_s \right) = 0$$

gleichmäßig für alle Richtungen. Physikalisch entspricht dies der Bedingung, daß Energie nach außen transportiert wird, mathematisch wird dadurch Eindeutigkeit des direkten Problems gesichert. Man kann zeigen, daß die Sommerfeld'sche Ausstrahlungsbedingung das asymptotische Verhalten

$$u_s(x) = \frac{e^{ik|x|}}{\sqrt{|x|}} \left\{ u_\infty\left(\frac{x}{|x|}\right) + O\left(\frac{1}{|x|}\right) \right\}, \quad |x| \rightarrow \infty$$

gleichmäßig für alle Richtungen  $\frac{x}{|x|}$  impliziert. Die auf dem Einheitskreis  $S^1$  definierte Funktion  $u_\infty$  heißt *Fernfeld* von  $u_s$  und ist analytisch.

Das im folgenden betrachtete "inverse Problem" hierzu besteht darin, bei Kenntnis einer einfallenden Welle  $u_i$  und eines zugehörigen (gemessenen) Fernfeldes  $u_\infty^{mess}$  den Streukörper  $D$  zu rekonstruieren. Wie viele inverse Probleme ist dieses Problem nicht-linear und schlecht gestellt, d.h. die Lösung hängt nicht stetig von den Daten ab. Dabei ist die Frage nach der Eindeutigkeit einer Lösung bisher noch ungeklärt. Ich formuliere nun die Aufgabenstellung in Form einer Operatorgleichung  $u_\infty(\Gamma) = u_\infty^{mess}$ , die nach  $\Gamma$  zu lösen ist, wobei die zulässigen Ränder zunächst in geeigneter Weise durch Elemente eines normierten Raumes zu beschreiben sind. Zur Lösung dieser Gleichung verwende ich ein Newton-Verfahren. Dabei muß, um trotz der schlechten Gestelltheit Stabilität zu gewährleisten, ein Regularisierungsverfahren verwendet werden.

Meine Arbeit gliedert sich in folgende Kapitel:

Im *ersten Kapitel* wird das direkte äußere Neumann-Problem behandelt, d.h. das Problem, eine ausstrahlende Lösung  $u$  der Helmholtz-Gleichung zu beliebigen vorgegebenen stetigen Neumann-Randdaten  $f = \frac{\partial u}{\partial n}$  zu finden. Die Existenz einer Lösung dieses Problems wird wie in [Gr] mit Hilfe eines gemischten Einfachschicht- und Volumenpotentials bewiesen.

Die folgenden drei Kapitel dienen der Behandlung der Fréchet-Ableitung des Fernfeldes  $u_\infty$  nach dem Rand. Im *zweiten Kapitel* wird zunächst die Fréchet-Ableitung allgemein eingeführt und unter anderem ein Differentiationsatz für parameterabhängige Integraloperatoren bewiesen (vgl. [Po]).

Im *dritten Kapitel* zeige ich nach Ideen von Potthast ([Po]), daß der Fernfeld-Operator Fréchet-differenzierbar ist, und gebe eine Charakterisierung der Ableitung an. Dabei konnten im Vergleich zu der oben zitierten Arbeit einige technische Schwierigkeiten durch die Verwendung des Volumenpotentials vermieden werden.

Das *vierte Kapitel* dient der Beschreibung zweier Verfahren zur effizienten numerischen Berechnung der Fréchet-Ableitung des Fernfeldes. Für beide Verfahren kann bei analytischen Randkurven  $\Gamma$  exponentielle Konvergenz gezeigt werden.

Im *fünften Kapitel* wird schließlich das Newton-Verfahren beschrieben und unter verschiedenen Bedingungen getestet. Es wird neben der in anderen Arbeiten zu diesem Thema verwendeten linearen Tikhonov-Regularisierung ein alternatives Regularisierungsverfahren vorgestellt, mit dem z.T. erheblich bessere numerische Ergebnisse erzielt wurden. Die Rechnungen wurden auf einer DECstation 3000/600 am Institut für Numerische und Angewandte Mathematik der Universität Göttingen in der Programmiersprache C++ durchgeführt.

Ich danke Herrn Prof. Dr. Kreß für die Themenstellung und für die Betreuung dieser Arbeit.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Das äußere Neumann-Problem</b>	<b>1</b>
1.1	Die Grundlösung der Helmholtz-Gleichung im $\mathbb{R}^2$	2
1.2	Regularitätseigenschaften der Potentiale	5
1.3	Ausstrahlende Lösungen der Helmholtz-Gleichung	11
1.4	Existenz und Eindeutigkeit	14
<b>2</b>	<b>Die Fréchet-Ableitung</b>	<b>18</b>
2.1	Einführung der Fréchet-Ableitung	18
2.2	Rechenregeln für die Fréchet-Ableitung	19
2.3	Ein Differentiationssatz	23
<b>3</b>	<b>Die Fréchet-Ableitung des Fernfeldes nach dem Rand</b>	<b>26</b>
3.1	Das Streuproblem am schallharten Hindernis	26
3.2	Die Fréchet-Differenzierbarkeit der Integraloperatoren	30
3.3	Charakterisierung der Fréchetableitung	34
<b>4</b>	<b>Die numerische Berechnung der Fréchet-Ableitung</b>	<b>44</b>
4.1	Trigonometrische Interpolation und Quadraturformeln	44
4.2	Numerische Lösung des direkten Neumann-Problems	46
4.3	Erstes Verfahren	51
4.4	Zweites Verfahren	56
4.5	Vergleich der beiden Verfahren	59
<b>5</b>	<b>Das Newton-Verfahren</b>	<b>61</b>
5.1	Newton-Verfahren und Regularisierung	62
5.2	Einschub: Periodische radiale Basisfunktionen	65
5.3	Numerische Ergebnisse und Experimente	70
5.3.1	Vergleich der beiden Verfahren	71
5.3.2	Rekonstruktionen mit trigonometrischen Polynomen	72
5.3.3	Verwendung radialer Basisfunktionen	73
5.3.4	Rekonstruktionen bei gestörten Daten	75
5.3.5	Einschränkung des Winkelbereichs	78
5.3.6	Abhängigkeit von Richtung und Wellenzahl	79
5.3.7	Suchen der Lage	82

5.3.8 Vergleich der Regularisierungsverfahren . . . . .	83
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>87</b>

# Abbildungsverzeichnis

5.1	Analytische radiale Basisfunktionen . . . . .	68
5.2	Faltungen der charakteristischen Funktion auf $[-a, a]$ . . . . .	70
5.3	Rekonstruktionen mit trigonometrischen Polynomen . . . . .	73
5.4	Rekonstruktion des Drachens mit der radialen Basisfunktion $\phi_2$ . . . .	76
5.5	Rekonstruktion des Sterns mit der radialen Basisfunktion $\phi_2$ . . . . .	77
5.6	Rekonstruktionen mit den radialen Basisfunktionen $\phi_1$ und $f_a^{(8)}$ . . . .	77
5.7	Rekonstruktionen bei gestörten Daten . . . . .	78
5.8	Rekonstruktionen für verschiedene Einfallsrichtungen bei $k = 3$ . . . . .	80
5.9	Rekonstruktionen für verschiedene Einfallsrichtungen bei $k = 0.5$ . . . .	80
5.10	Rekonstruktionen des Drachens bei 3 einfallenden Wellen und $k = 1$ . . . .	81
5.11	Suchen der Lage eines Streukörpers . . . . .	82
5.12	Fehlgeschlagener Rekonstruktionsversuch mit der Tikhonov- Regularisierung . . . . .	84
5.13	Feinapproximation des Sterns mit Tikhonov-Regularisierung . . . . .	84
5.14	Vergleich der Regularisierungsverfahren bei $N = 60$ trigonometri- schen Monomen . . . . .	84

# Tabellenverzeichnis

4.1	Beispiel zum ersten Berechnungsverfahren von $u'_\infty(z, h)$ . . . . .	56
4.2	Beispiel zum zweiten Berechnungsverfahren von $u'_\infty(z, h)$ . . . . .	59
5.1	Vergleich der beiden Implementationen des Newton-Verfahrens . . . . .	71
5.2	Fehler E bei gestörten Daten . . . . .	78
5.3	Rekonstruktionen bei eingeschränktem Winkelbereich . . . . .	79
5.4	Anzahl der Newton-Schritte zum Finden der Lage eines um $v$ verschobenen Streukörpers bei verschiedenen Wellenzahlen . . . . .	83
5.5	Vergleich der beiden Regularisierungsverfahren bei gestörten Daten . . . . .	85

# Kapitel 1

## Das äußere Neumann-Problem

Ich beschäftige mich in diesem Kapitel mit dem folgenden Problem:

**Definition 1.1 (Äußeres Neumann-Problem)** Sei  $D \subset \mathbb{R}^2$  ein beschränktes, einfach zusammenhängendes Gebiet mit  $C^2$ -glattem Rand  $\Gamma$ .  $n(x)$  bezeichne den nach außen weisenden Einheits-Normalenvektor im Punkt  $x \in \Gamma$ . Zu einer gegebenen Funktion  $f \in C(\Gamma)$  wird eine Funktion  $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}) \cap C(\mathbb{R}^2 \setminus D)$  gesucht, die die Helmholtz-Gleichung

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad (1.1)$$

$k > 0$ , in  $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$  löst, die Sommerfeld'sche Ausstrahlungsbedingung

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left( \frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) = 0, \quad r = |x|, \quad (1.2)$$

gleichmäßig in alle Richtungen  $\frac{x}{|x|}$  erfüllt und der Randbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial n} = f \quad \text{auf } \Gamma \quad (1.3)$$

im Sinne von gleichmäßiger Konvergenz

$$\lim_{\rho \rightarrow 0_+} \langle n(x), \text{grad } u(x + \rho n(x)) \rangle = f(x), \quad x \in \Gamma,$$

genügt.

Zur Lösung dieses Problems werde ich Integralgleichungsmethoden verwenden. Allgemein wird bei diesen Verfahren die Lösung in Form eines Einfachschicht-, Doppelschicht-, oder Volumenpotentials gesucht. Deshalb untersuche ich in Abschnitt 1.1 zunächst die Grundleistung der Helmholtz-Gleichung im  $\mathbb{R}^2$ . Für die Dichten der Potentiale werden Integralgleichungen aufgestellt, deren Lösbarkeit bei geeignetem Ansatz mit Hilfe der Riesz-Fredholm-Theorie nachgewiesen werden kann. Zur Aufstellung und Behandlung dieser Integralgleichungen benutzt man Sprungbeziehungen und Regularitätseigenschaften der Potentiale, die in Abschnitt 1.2 behandelt werden. Beim äußeren Neumann-Problem zur Laplace-Gleichung führt ein

Einfachschichtpotential-Ansatz zum Erfolg. Verwendet man diesen Ansatz auch zur Lösung des äußeren Neumann-Problems zur Helmholtz-Gleichung, so ergibt sich das Problem, daß die zugehörige Integralgleichung nicht für alle Werte von  $k$  eindeutig lösbar ist. Das liegt daran, daß es bei der Helmholtz-Gleichung im Gegensatz zur Laplace-Gleichung nichttriviale Lösungen des homogenen inneren Dirichlet-Problems geben kann. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, um diese Eindeutigkeitsproblematik zu umgehen. Ich werde in Abschnitt 1.4 ein gemischtes Einfachschicht- und Volumenpotential verwenden. Dieser Ansatz hat den Vorteil, daß man die Verwendung des stark singulären Operators  $T$ , der Normalableitung des Doppelschichtpotentials, vermeidet. Vorher beschäftige ich mich in Abschnitt 1.3 mit Lösungen der Helmholtz-Gleichung, die die Sommerfeld'sche Ausstrahlungsbedingung erfüllen. Diesen kann man eindeutig ein *Fernfeld* zuordnen, das im folgenden eine wichtige Rolle spielen wird.

## 1.1 Die Grundleistung der Helmholtz-Gleichung im $\mathbb{R}^2$

Führt man zur Lösung der Helmholtz-Gleichung Polarkoordinaten  $(r, \varphi)$  ein und macht einen Ansatz

$$u(x) = R(kr)P(\varphi),$$

mit komplexwertigen Funktionen  $R$  und  $P$ , so erhält man nach einigen Umformungen aus der Helmholtz-Gleichung

$$\frac{1}{R(kr)} \left( r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} R(kr) + r \frac{\partial}{\partial r} R'(kr) + (kr)^2 R(kr) \right) = -\frac{1}{P(\varphi)} P''(\varphi).$$

Da die linke Seite nur von  $r$  und die rechte Seite nur von  $\varphi$  abhängt, müssen beide gleich einer Konstanten sein, die ich  $n^2$  nenne. Man erhält für  $R$  und  $P$  die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$-P''(\varphi) + n^2 P(\varphi) = 0 \quad (1.4)$$

$$t^2 R''(t) + tR'(t) + [t^2 - n^2]R(t) = 0. \quad (1.5)$$

Die erste Differentialgleichung besitzt offenbar die Lösungen  $P(\varphi) = e^{\pm in\varphi}$ . Damit  $u$  in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  stetig ist, muß  $n \in \mathbb{N}_0$  gelten. Gl.(1.5) heißt *Bessel'sche Differentialgleichung*, ihre Lösungen heißen *Zylinderfunktionen*. Man kann mit Hilfe des Quotientenkriteriums verifizieren, daß die Funktionen

$$J_n(t) := \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!(n+p)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{n+2p}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (1.6)$$

Lösungen der Differentialgleichung (1.5) sind.  $J_n$  ist analytisch für  $t \in \mathbb{R}$  und heißt *Besselfunktion* der Ordnung  $n$ . Eine zweite linear unabhängige Lösung von (1.5) ist

gegeben durch

$$Y_n(t) := \frac{2}{\pi} \left\{ \ln \frac{t}{2} + C \right\} J_n(t) - \frac{1}{\pi} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(n-1-p)!}{p!} \left( \frac{2}{t} \right)^{n-2p} \quad (1.7)$$

$$- \frac{1}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!(n+p)!} \left( \frac{t}{2} \right)^{n+2p} \left\{ \sum_{m=1}^{p+n} \frac{1}{m} + \sum_{m=1}^p \frac{1}{m} \right\},$$

wobei

$$C := \lim_{p \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{m=1}^p \frac{1}{m} - \ln p \right\}$$

die Euler'sche Konstante ist.  $Y_n$  heißt *Neumannfunktion* der Ordnung  $n$ . Die Linearkombinationen

$$H_n^{(1),(2)} := J_n \pm iY_n$$

heißen *Hankelfunktionen* erster, bzw. zweiter Art von der Ordnung  $n$ . Da in dieser Arbeit meistens Hankelfunktionen erster Art benötigt werden, schreibe ich künftig  $H_n$  für  $H_n^{(1)}$ . Für große Argumente haben die Hankelfunktionen das asymptotische Verhalten

$$H_n^{(1),(2)}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} e^{\pm i(t - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{t}\right) \right\}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (1.8)$$

Einen Beweis für diese Beziehung findet man in [Le], Gl.(5.11.4.). Mit Hilfe der Differentiationsformel

$$H_{n+1}(t) = -t^n \frac{d}{dt} \left\{ t^{-n} H_n(t) \right\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.9)$$

die man anhand der Reihendarstellungen (1.6) und (1.7) leicht überprüfen kann, erhält man für die Ableitungen der Hankelfunktionen das asymptotische Verhalten

$$H_n^{(1),(2)'}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} e^{\pm i(t - \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4})} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{t}\right) \right\}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (1.10)$$

Ebenfalls aus Gl.(1.9) erhält man  $H_1 = -H_0'$ , und durch Differentiation dieser Gleichung  $H_0'' = -H_1'$ . Damit ergibt sich das asymptotische Verhalten

$$H_0''(t) = -\sqrt{\frac{2}{\pi t}} e^{i(t - \frac{\pi}{4})} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{|x|}\right) \right\}. \quad (1.11)$$

Die *Grundlösung zur Helmholtzgleichung im  $\mathbb{R}^2$*  lautet

$$\Phi(x, y) := \frac{i}{4} H_0(|x - y|), \quad x, y \in \mathbb{R}^2, x \neq y.$$

Aus den Reihendarstellungen (1.6) und (1.7) folgt

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x - y|} + \frac{i}{4} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{k}{2} - \frac{C}{2\pi} + O\left(|x - y|^2 \ln \frac{1}{|x - y|}\right) \quad (1.12)$$

für  $|x - y| \rightarrow 0$ . Nach diesen Vorbereitungen können die folgenden Eigenschaften der Grundlösung leicht nachgerechnet werden:

**Lemma 1.2** Für feste Punkte  $y, a \in \mathbb{R}^2$  mit  $|a| = 1$  lösen die Funktion  $\Phi(\cdot, y)$  und  $\langle \text{grad}_x \Phi(\cdot, y), a \rangle$  die Helmholtzgleichung in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{y\}$  und erfüllen die Sommerfeld'sche Ausstrahlungsbedingung gleichmäßig für alle  $y$  aus einem Kompaktum und alle Einheitsvektoren  $a$ .

**Beweis:**  $\Phi(\cdot, y)$  löst die Helmholtzgleichung in  $\mathbb{R}^2 \setminus \{y\}$  nach Konstruktion. Durch Vertauschen der Differentiationsreihenfolge sieht man, daß auch  $\langle \text{grad}_x \Phi(\cdot, y), a \rangle$  eine Lösung der Helmholtzgleichung ist. Mit Hilfe der Beziehungen

$$|x - y| = \sqrt{|x|^2 - 2\langle x, y \rangle + |y|^2} = |x| \left( 1 + O\left(\frac{1}{|x|}\right) \right)$$

und

$$\frac{x - y}{|x - y|} = \hat{x} \left( 1 + O\left(\frac{1}{|x|}\right) \right)$$

gleichmäßig für alle Richtungen  $\hat{x} := \frac{x}{|x|}$  und alle  $y$  aus einem Kompaktum erhält man die asymptotischen Beziehungen

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial \Phi}{\partial r}(x, y) - ik\Phi(x, y) \right| \\ &= \frac{1}{4} \left| kH'_0(k|x - y|) \left\langle \frac{x - y}{|x - y|}, \hat{x} \right\rangle - ikH_0(k|x - y|) \right| \\ &= O\left(\frac{1}{|x|^{\frac{3}{2}}}\right) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial}{\partial r} \langle \text{grad}_x \Phi(x, y), a \rangle - ik \langle \text{grad}_x \Phi(x, y), a \rangle \right| \\ &= \frac{1}{4} \left| \left( k^2 H''_0(k|x - y|) - k \frac{H'_0(k|x - y|)}{|x - y|} \right) \left\langle \frac{x - y}{|x - y|}, a \right\rangle \left\langle \frac{x - y}{|x - y|}, \hat{x} \right\rangle \right. \\ & \quad \left. + k \frac{H'_0(k|x - y|)}{|x - y|} \langle \hat{x}, a \rangle - ik^2 H_0(k|x - y|) \left\langle \frac{x - y}{|x - y|}, a \right\rangle \right| \\ &= \frac{1}{4} \left| k^2 H''_0(k|x - y|) \langle \hat{x}, a \rangle - ik^2 H'_0(k|x - y|) \langle \hat{x}, a \rangle \right| + O\left(\frac{1}{|x|^{\frac{3}{2}}}\right) \\ &= O\left(\frac{1}{|x|^{\frac{3}{2}}}\right) \end{aligned}$$

gleichmäßig für alle Richtungen  $\hat{x}$ , alle  $y$  aus einem Kompaktum und alle Einheitsvektoren  $a$ . ■

## 1.2 Regularitätseigenschaften der Potentiale

**Definition 1.3** Eine reell- oder komplexwertige Funktion  $\varphi$  auf einer Menge  $G \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  heißt gleichmäßig hölderstetig mit Hölderexponent  $\alpha \in (0, 1]$ , wenn es eine Konstante  $C$  gibt, so daß

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq C|x - y|^\alpha$$

für alle  $x, y \in G$ . Der Vektorraum aller auf  $G$  definierten Funktionen, die beschränkt und gleichmäßig hölderstetig mit Exponent  $\alpha$  sind, wird mit  $C^{0,\alpha}(G)$  bezeichnet und heißt Hölderraum.

Sei  $\Gamma$  eine  $C^{k+1}$ -glatte geschlossene Kurve im  $\mathbb{R}^2$  ( $k \in \mathbb{N}_0$ ). Dann ist  $C^{k,\alpha}(\Gamma)$  der Vektorraum aller  $k$ -fach differenzierbaren Funktionen auf  $\Gamma$ , deren  $k$ -te Ableitung nach der Bogenlänge gleichmäßig hölderstetig mit Exponent  $\alpha$  ist.

**Satz 1.4** Seien  $G$  und  $\Gamma$  wie in Definition 1.3. Dann sind die Hölderräume  $C^{0,\alpha}(G)$  und  $C^{k,\alpha}(\Gamma)$  mit den Normen

$$\begin{aligned} \|\chi\|_{0,\alpha;G} &:= \sup_{x \in G} |\chi(x)| + \sup_{x,y \in G, x \neq y} \frac{|\chi(x) - \chi(y)|}{|x - y|^\alpha}, \\ \|\varphi\|_{k,\alpha;\Gamma} &:= \|\varphi\|_{\infty;\Gamma} + \left\| \frac{d^k}{ds^k} \varphi \right\|_{0,\alpha;\Gamma}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Banachräume. Dabei ist  $\frac{d}{ds}$  die Ableitung nach der Bogenlänge.

**Beweis:** Zum Beweis, daß  $C^{0,\alpha}(G)$  mit der angegebenen Norm vollständig ist, siehe [K1], Satz 7.2. Benutzt man dieses Ergebnis, so kann man mit einfachen Hilfsmitteln der Analysis zeigen, daß auch  $C^{k,\alpha}(\Gamma)$  für  $k \geq 1$  vollständig ist. ■

**Bemerkungen:**

1. Jede gleichmäßig hölderstetige Funktion ist stetig, und falls  $G$  konvex ist, ist jede differenzierbare Funktion  $\alpha$ -hölderstetig für  $0 < \alpha \leq 1$ . Die Umkehrungen gelten nicht.
2. Für konvexes  $G$ ,  $0 < \alpha < 1$  und  $k \in \mathbb{N}_0$  ist die Norm  $\|\cdot\|_{C^{k+1}}$  stärker als die Norm  $\|\cdot\|_{k,\alpha}$ , d.h. es gibt eine Konstante  $C > 0$  mit  $\|\cdot\|_{k,\alpha} \leq C\|\cdot\|_{C^{k+1}}$ .
3. Für  $\varphi, \psi \in C^{k,\alpha}(\Gamma)$  und  $k \in \mathbb{N}_0$  ist  $\varphi\psi$  wieder in  $C^{k,\alpha}(\Gamma)$ .

**Satz 1.5** Sei  $0 < \alpha < \beta \leq 1$  und sei  $G \subset \mathbb{R}^n$  kompakt. Dann sind die Einbettungsoperatoren

$$I^\beta : C^{0,\beta}(G) \longrightarrow C(G)$$

und

$$I^{\alpha,\beta} : C^{0,\beta}(G) \longrightarrow C^{0,\alpha}(G)$$

kompakt.

**Beweis:** Siehe [K1], Satz 7.4.

Seien  $D, \Gamma$  und  $n$  wie in Definition 1.1, und sei  $\varphi \in C(\Gamma)$ . Dann heißen die Funktionen

$$u(x) := \int_{\Gamma} \Phi(x, y) \varphi(y) \, ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma,$$

und

$$v(x) := \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} \varphi(y) \, ds(y) \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma,$$

*akustisches Einfeldpotential*, bzw. *akustisches Doppelschichtpotential* mit Dichte  $\varphi$ . Sei  $B \subset \mathbb{R}^2$  ein beschränktes, abgeschlossenes Gebiet und  $\chi \in C(B)$ . Dann heißt

$$w(x) := \int_B \Phi(x, y) \chi(y) \, dy, \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

*Volumenpotential* mit Dichte  $\chi$ . Alle Potentiale lösen die Helmholtz-Gleichung in  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ , bzw.  $\mathbb{R}^2 \setminus B$  und erfüllen die Sommerfeld'sche Ausstrahlungsbedingung, da dies nach Lemma 1.2 für die Kerne  $\Phi(x, y)$  und  $\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)}$  gleichmäßig in  $y$  gilt.

**Bemerkung:** Die folgenden Regularitätseigenschaften und Sprungbeziehungen sind zum größten Teil [CK1] entnommen. Dort wird allerdings nur der dreidimensionale Fall behandelt. Die Beweise lassen sich jedoch mit einigen Modifikationen auch auf den zweidimensionalen Fall übertragen. Darauf soll hier kurz eingegangen werden. In dem grundlegenden Satz 2.7. in [CK1] sind die Eigenschaften (2.13.) und (2.14.) zu ersetzen durch

$$|K(x, y)| \leq M|x - y|^{\alpha-1} \quad (1.13)$$

für alle  $x \in G, y \in \Gamma$  mit  $x \neq y$ , bzw.

$$|K(x_1, y) - K(x_2, y)| \leq M \sum_{j=1}^m |x_1 - y|^{\alpha-1-j} |x_1 - x_2|^j \quad (1.14)$$

für alle  $x_1, x_2 \in G, y \in \Gamma$  mit  $2|x_1 - x_2| \leq |x_1 - y|$  und ein  $m \in \mathbb{N}$ . Dabei ist  $M$  eine positive Konstante und  $G$  ein abgeschlossenes Gebiet, das  $\Gamma$  in seinem Inneren enthält.

Es ist zu zeigen, daß auch die Grundleistung im  $\mathbb{R}^2$  und ihre Normalableitung den Bedingungen (1.13) und (1.14) genügen. Beachtet man, daß nach Gl.(1.12) die Grundleistung zur Laplace-Gleichung dasselbe singuläre Verhalten besitzt wie die Grundleistung zur Helmholtz-Gleichung, so erkennt man, daß man sich wie im  $\mathbb{R}^3$  auf den potentialtheoretischen Grenzfall  $k = 0$  zurückziehen kann.

$\ln \frac{1}{|x-y|}$  erfüllt Bedingung (1.14) für  $\alpha = 1$  und  $m = 1$ , da

$$\ln \frac{1}{|x_1 - y|} - \ln \frac{1}{|x_2 - y|} = \ln \frac{|x_2 - y|}{|x_1 - y|} \leq \ln \left( 1 + \frac{|x_2 - x_1|}{|x_1 - y|} \right) \leq \frac{|x_2 - x_1|}{|x_1 - y|}$$

für  $x_1, x_2 \in G, y \in \Gamma$  mit  $2|x_1 - x_2| \leq |x_1 - y|$ .

Durch Vertauschung von  $x_1$  und  $x_2$  erhält man

$$\ln \frac{1}{|x_2 - y|} - \ln \frac{1}{|x_1 - y|} \leq \frac{|x_2 - x_1|}{|x_2 - y|} \leq 2 \frac{|x_2 - x_1|}{|x_1 - y|},$$

und daraus

$$\left| \ln \frac{1}{|x_1 - y|} - \ln \frac{1}{|x_2 - y|} \right| \leq 2 \frac{|x_2 - x_1|}{|x_1 - y|}.$$

Völlig analog zu Gl.(2.48) in [CK1] zeigt man, daß die Normalableitung von  $\ln \frac{1}{|x-y|}$  die Bedingung (1.14) für  $m = 2$  und  $\alpha = 1$  erfüllt.

Der folgende Satz charakterisiert das Verhalten des Einfach- und des Doppelschichtpotentials und ihrer Ableitungen auf dem Rand.

**Satz 1.6** *Das Einfachschichtpotential  $u$  mit Dichte  $\varphi \in C(\Gamma)$  kann stetig auf  $\Gamma$  fortgesetzt werden mit den Randwerten*

$$u(x) = \int_{\Gamma} \Phi(x, y) \varphi(y) ds(y), \quad x \in \Gamma. \quad (1.15)$$

Für die Normalableitung von  $u$  gilt

$$\frac{\partial u_{\pm}}{\partial n}(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(x)} \varphi(y) ds(y) \mp \frac{1}{2} \varphi(x), \quad x \in \Gamma, \quad (1.16)$$

wobei

$$\frac{\partial u_{\pm}}{\partial n}(x) := \lim_{\rho \rightarrow 0_{\pm}} \langle n(x), \text{grad } u(x \pm \rho n(x)) \rangle, \quad x \in \Gamma, \quad (1.17)$$

im Sinne von gleichmäßiger Konvergenz zu verstehen ist. Das Doppelschichtpotential  $v$  mit Dichte  $\varphi$  kann stetig von  $D$  nach  $\bar{D}$  und von  $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$  nach  $\mathbb{R}^2 \setminus D$  fortgesetzt werden und besitzt die Randwerte

$$\frac{\partial v_{\pm}}{\partial n}(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} \varphi(y) ds(y) \pm \frac{1}{2} \varphi(x), \quad x \in \Gamma, \quad (1.18)$$

mit

$$v_{\pm}(x) := \lim_{\rho \rightarrow 0} v(x \pm \rho n(x)), \quad x \in \Gamma. \quad (1.19)$$

Außerdem gilt

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left\{ \frac{\partial v}{\partial n}(x + \rho n(x)) - \frac{\partial v}{\partial n}(x - \rho n(x)) \right\} = 0, \quad x \in \Gamma, \quad (1.20)$$

gleichmäßig auf  $\Gamma$ .

**Beweis:** Siehe [CK1], Sätze 2.12, 2.13, 2.19 und 2.21.

**Satz 1.7** Sei  $0 < \alpha < 1$ . Dann können die ersten Ableitungen des Einfachschichtpotentials  $u$  mit hölderstetiger Dichte  $\varphi \in \mathbb{C}^{0,\alpha}(\Gamma)$  gleichmäßig hölderstetig von  $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$  nach  $\mathbb{R}^2 \setminus D$  fortgesetzt werden, und es gilt

$$\|\operatorname{grad} u\|_{\alpha; \mathbb{R}^2 \setminus D} \leq C_\alpha \|\varphi\|_{\alpha; \Gamma}.$$

Die ersten Ableitungen des Doppelschichtpotential  $v$  mit Dichte  $\varphi \in C^{1,\alpha}(\Gamma)$  können gleichmäßig hölderstetig von  $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$  nach  $\mathbb{R}^2 \setminus D$  fortgesetzt werden mit

$$\|\operatorname{grad} v\|_{\alpha; \mathbb{R}^2 \setminus D} \leq C_\alpha \|\varphi\|_{1,\alpha; \Gamma}.$$

In beiden Ungleichungen hängt die Konstante  $C_\alpha$  nur von  $\Gamma$  und  $\alpha$  ab.

**Beweis:** Siehe [CK1], Sätze 2.17 und 2.23.

Schließlich benötige ich noch den folgenden Satz:

**Satz 1.8** Der Operator  $K^*$ , definiert durch

$$(K^* \varphi)(x) := 2 \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(x)} \varphi(y) \, ds(y), \quad x \in \Gamma, \quad (1.21)$$

für  $\varphi \in C(\Gamma)$ , bildet  $C(\Gamma)$  beschränkt nach  $C^{0,\alpha}(\Gamma)$  ab. Ist  $\Gamma$  sogar  $C^{2,\alpha}$ -glatt, so bildet  $K^*$  den Raum  $C^{0,\alpha}(\Gamma)$  beschränkt nach  $C^{1,\alpha}(\Gamma)$  ab.

**Beweis:** Zum Beweis der ersten Aussage siehe [CK1], Satz 2.30, zum Beweis der zweiten Aussage [Ki], Satz 2.8. ■

**Satz 1.9** Sei  $B \subset \mathbb{R}^2$  ein beschränktes, abgeschlossenes Gebiet und  $\chi \in C(B)$ . Das Volumenpotential  $w$  sei durch Gl. (1.9) definiert.

1. Es gilt  $w \in C^1(\mathbb{R}^2)$ , und für eine nur von  $B$  abhängige Konstante  $C$  ist

$$\|w\|_{\infty; \mathbb{R}^2} \leq C \|\chi\|_{\infty; B}, \quad \|\operatorname{grad} w\|_{\infty; \mathbb{R}^2} \leq C \|\chi\|_{\infty; B}. \quad (1.22)$$

2. Für  $\chi \in C^{0,\alpha}(B)$  ist  $w \in C^2(\overset{\circ}{B})$ , und in  $\overset{\circ}{B}$  gilt

$$\Delta w + k^2 w = -\chi.$$

**Beweis:** Wähle  $\eta \in C^2(\mathbb{R})$  mit  $\eta(x) = 0$  für  $x \leq \frac{1}{2}$  und  $\eta(x) = 1$  für  $x \geq 1$ . Da stetige Funktionen auf einem abgeschlossenen Intervall beschränkt sind, gilt  $\|\eta\|_{\infty}, \|\eta'\|_{\infty}, \|\eta''\|_{\infty} < \infty$ .

*Beweis der 1. Behauptung:* Definiere für  $n \in \mathbb{N}$

$$w_n(x) := \int_B \Phi(x, y) \eta(n|x - y|) \chi(y) \, dy, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Offenbar ist  $w_n$  differenzierbar, und es gilt

$$\operatorname{grad} w_n(x) = \int_B \operatorname{grad}_x \{ \Phi(x, y) \eta(n|x - y|) \} \chi(y) \, dy, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Ich zeige nun, daß  $\|w - w_n\|_{\infty; \mathbb{R}^2} \rightarrow 0$  und  $\|w^{(1)} - \operatorname{grad} w_n\|_{\infty; \mathbb{R}^2} \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ , wobei

$$w^{(1)}(x) := \int_B \operatorname{grad}_x \Phi(x, y) \chi(y) \, dy, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Nach einem bekannten Satz der Analysis folgt dann, daß  $w$  differenzierbar ist und daß  $\operatorname{grad} w = w^{(1)}$ .

- Für  $x \in \mathbb{R}^2$  erhält man durch Einführung von Polarkoordinaten  $(r, \varphi)$  mit  $y_1 = x_1 + r \cos \varphi$ ,  $y_2 = x_2 + r \sin \varphi$

$$\begin{aligned} |w(x) - w_n(x)| &\leq \int_B |\Phi(x, y)| |1 - \eta(n|x - y|)| \|\chi\|_{\infty} \, dy \\ &= \frac{1}{4} \|\chi\|_{\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} \int_{-\pi}^{\pi} |H_0(kr)| |1 - \eta(nr)| r \, d\varphi \, dr \\ &\leq C \int_0^{\frac{1}{n}} \ln(kr) r \, dr \\ &= C \left( \frac{1}{n} \right)^2 \left[ \frac{1}{2} \ln \left( \frac{k}{n} \right) - \frac{1}{4} \right] \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Die Konstante  $C$  hängt dabei nicht von  $x$  ab.

- Für alle  $x \in \mathbb{R}^2$  gilt mit einer nicht von  $x$  abhängigen Konstanten  $C$

$$\begin{aligned} &|w^{(1)}(x) - \operatorname{grad} w_n(x)| \\ &\leq \int_B \left( \left| \operatorname{grad}_x \Phi(x, y) (1 - \eta(n|x - y|)) \right| \right. \\ &\quad \left. + \left| \Phi(x, y) \operatorname{grad}_x \eta(n|x - y|) \right| \right) \|\chi\|_{\infty} \, dy \\ &\leq \frac{1}{4} \|\chi\|_{\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} \int_{-\pi}^{\pi} \{ k |H_0'(kr)| + n |H_0(kr)| |\eta'(nr)| \} r \, d\varphi \, dr \\ &\leq C \int_0^{\frac{1}{n}} \{ r^{-1} + n \ln(kr) \} r \, dr \\ &\leq C \left( \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \left[ \frac{1}{2} \ln \frac{k}{n} - \frac{1}{4} \right] \right) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Zum Beweis von (1.22) setze

$$C := \max \left\{ \int_B |\Phi(\cdot, y)| \, dy \|_{\infty; \mathbb{R}^2}, \left\| \int_B |\operatorname{grad}_x \Phi(\cdot, y)| \, dy \right\|_{\mathbb{R}^2; \infty} \right\} < \infty.$$

*Beweis der 2. Behauptung:* Offenbar sind die Funktionen  $w_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , sogar zweimal stetig differenzierbar, und man darf Differentiation und Integration vertauschen. Ich zeige zunächst, daß

$$\|\chi + \Delta w_n + k^2 w_n\|_{\infty; \mathbb{R}^2} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Nach der Dreiecksungleichung gilt für alle  $x \in \overset{\circ}{B}$

$$\begin{aligned} & |\chi(x) + \Delta w_n(x) + k^2 w_n(x)| \\ &= \left| \chi(x) + \chi(x) \int_B (\Delta_x + k^2) \{ \Phi(x, y) \eta(n|x-y|) \} dy \right| \\ &+ \left| \int_B [\chi(y) - \chi(x)] (\Delta_x + k^2) \{ \Phi(x, y) \eta(n|x-y|) \} dy \right|. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Da  $\Phi(\cdot, y)$  die Helmholtz-Gleichung löst, erhält man unter Ausnutzung der Symmetrie in  $x$  und  $y$  für das Integral im ersten Summanden

$$\begin{aligned} & \int_B (\Delta_x + k^2) \{ \Phi(x, y) \eta(n|x-y|) \} dy \\ &= \int_{|x-y| \leq \frac{1}{n}} (\Delta_x + k^2) \{ \Phi(x, y) \eta(n|x-y|) \} dy \\ &= \int_{|x-y| \leq \frac{1}{n}} \Delta_y \{ \Phi(x, y) \eta(n|x-y|) \} dy + k^2 \int_{|x-y| \leq \frac{1}{n}} \Phi(x, y) \eta(n|x-y|) dy. \end{aligned}$$

Da  $\Phi$  nur eine logarithmische Singularität besitzt und  $\eta$  beschränkt ist, konvergiert der zweite Summand in der letzten Zeile dieser Gleichung für  $n \rightarrow \infty$  gegen 0. Für den ersten Summanden erhält man nach dem Gauß'schen Integralsatz und unter Ausnutzung von  $\eta'(1) = 0$  sowie  $\eta(1) = 1$  den Grenzwert

$$\begin{aligned} & \int_{|x-y| \leq \frac{1}{n}} \Delta_y \{ \Phi(x, y) \eta(n|x-y|) \} dy \\ &= \int_{|x-y| = \frac{1}{n}} \frac{\partial}{\partial n(y)} \{ \Phi(x, y) \eta(n|x-y|) \} ds(y) \\ &= \int_{|x-y| = \frac{1}{n}} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} \eta(n|x-y|) ds(y) \\ &= \frac{ikn}{2n} H'_0\left(\frac{k}{n}\right) \rightarrow -1 \end{aligned}$$

für  $n \rightarrow \infty$ . Insgesamt ist damit bewiesen, daß der erste Summand in (1.23) für  $n \rightarrow \infty$  gleichmäßig in  $x$  gegen 0 konvergiert. Für den zweiten Summanden gilt dasselbe, denn für hinreichend große  $n$  ist

$$\begin{aligned} & \left| \int_B [\chi(y) - \chi(x)] (\Delta_x + k^2) \{ \Phi(x, y) \eta(n|x-y|) \} dy \right| \\ &\leq \int_{|x-y| \leq \frac{1}{n}} \|\chi\|_\alpha |x-y|^\alpha \left\{ (\Delta_x + k^2) \Phi(x, y) \right\} \eta(n|x-y|) \\ &\quad + 2 \langle \text{grad}_x \Phi(x, y), \text{grad}_x \eta(n|x-y|) \rangle + \Phi(x, y) \Delta_x \eta(n|x-y|) \Big| dy \\ &= \frac{\|\chi\|_\alpha}{4} \int_0^{\frac{1}{n}} \int_{-\pi}^{\pi} r^\alpha \left\{ |2k H'_0(kr) n \eta'(nr)| + |H_0(kr)| |n^2 \eta''(nr) + n \eta'(nr) r^{-1}| \right\} r d\varphi dr \\ &\leq C \int_0^{\frac{1}{n}} nr^\alpha dr + C \left| \ln \left( \frac{k}{2n} \right) \right| \int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{n}} (n^2 r^{1+\alpha} + nr^\alpha) dr \\ &\leq \tilde{C} \left( n^{-\alpha} + \left| \ln \left( \frac{k}{2n} \right) \right| n^{-\alpha} \right), \end{aligned}$$

und dies strebt offenbar für  $n \rightarrow \infty$  gegen 0. Die Konstanten  $C$  und  $\tilde{C}$  hängen dabei nicht von  $x$  ab. Durch analoges Vorgehen kann man auch zeigen, daß die partiellen Ableitungen der Komponenten von  $\text{grad } w_n$  gleichmäßig gegen stetige Funktionen konvergieren. Deshalb ist  $w$  zweimal stetig differenzierbar, und es gilt  $\|\Delta w - \Delta w_n\|_\infty \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Daraus ergibt sich in  $\mathring{B}$

$$\Delta w = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta w_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-k^2 w_n - \chi) = -k^2 w - \chi.$$

■

### 1.3 Ausstrahlende Lösungen der Helmholtz-Gleichung

Die Darstellung in diesem Abschnitt sowie des ersten Satzes in Abschnitt 1.4 orientiert sich an [CK2]. Da dort allerdings nur der dreidimensionale Fall behandelt wird, sind einige Beweise hier noch einmal ausgeführt.

**Satz 1.10** *Sei  $D \subset \mathbb{R}^2$  ein beschränktes Gebiet mit  $C^2$ -glattem Rand  $\Gamma$ , und sei  $n$  die nach außen weisende Normale. Sei  $u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$  eine Lösung der Helmholtz-Gleichung, die eine Normalableitung im Sinne von gleichmäßiger Konvergenz besitzt. Dann gilt*

$$u(x) = \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial u(y)}{\partial n} \Phi(x, y) - u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} \right\} ds(y), \quad x \in D. \quad (1.24)$$

**Beweis:** Der Beweis in [CK2], S.16, läßt sich mit geringen Modifikationen übertragen. ■

**Satz 1.11** *Sei  $D \subset \mathbb{R}^2$  das offene und beschränkte Komplement eines unbeschränkten Gebietes mit  $C^2$ -glattem Rand  $\Gamma$  und sei  $n$  der ins Äußere von  $D$  weisende Einheits-Normalenvektor. Sei  $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}) \cap C(\mathbb{R}^2 \setminus D)$  eine Lösung der Helmholtz-Gleichung, die eine Normalableitung auf  $\Gamma$  im Sinne von gleichmäßiger Konvergenz besitzt. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

1.  $u$  erfüllt die Sommerfeld'sche Ausstrahlungsbedingung, d.h. es gilt

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left( \frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) = 0, \quad r = |x|,$$

gleichmäßig in alle Richtungen  $\frac{x}{|x|}$ .

2. Es gilt

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{|x|=r} \left| \frac{\partial u}{\partial r} - iku \right|^2 ds = 0.$$

3. Für alle  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$  gilt die Green'sche Darstellungsformel im Außengebiet:

$$u(x) = \int_{\Gamma} \left\{ u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} - \frac{\partial u(y)}{\partial n} \Phi(x, y) \right\} ds(y) \quad (1.25)$$

Ist eine dieser Bedingungen erfüllt, so heißt  $u$  ausstrahlende Lösung der Helmholtz-Gleichung.

**Beweis: 1)  $\Rightarrow$  2):** Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung existiert für jedes hinreichend große  $r$  ein  $x_r \in \mathbb{R}^2$  mit  $|x_r| = r$ , so daß

$$\int_{|x|=r} \left| \frac{\partial u}{\partial r} - iku \right|^2 ds = 2\pi r \left| \frac{\partial u}{\partial r}(x_r) - iku(x_r) \right|^2.$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite strebt nach Voraussetzung 1) gegen 0 für  $r \rightarrow \infty$ .

**2)  $\Rightarrow$  3):** Ich zeige zunächst, daß

$$\int_{\Omega_r} |u|^2 ds = O(1), \quad r \rightarrow \infty, \quad (1.26)$$

wobei  $\Omega_r := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = r\}$  und  $n$  der nach außen weisende Normalenvektor auf  $\Omega_r$  ist. Es gilt

$$\int_{\Omega_r} \left\{ \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right| + k^2 |u|^2 + 2k \operatorname{Im} \left( u \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} \right) \right\} ds = \int_{\Omega_r} \left| \frac{\partial u}{\partial n} - iku \right|^2 ds \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty.$$

Ich wähle jetzt  $r$  so groß, daß  $D$  im Inneren von  $\Omega_r$  enthalten ist, und erhalte nach dem ersten Green'schen Satz für das Gebiet  $D_r := \{x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D} : |x| < r\}$

$$\int_{\Omega_r} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} ds = \int_{\Gamma} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} ds - k^2 \int_{D_r} |u|^2 dy + \int_{D_r} |\operatorname{grad} u|^2 dy.$$

Setzt man den Imaginärteil dieser Gleichung in die vorherige Gleichung ein, so ergibt sich

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Omega_r} \left\{ \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 + k^2 |u|^2 \right\} ds = -2k \operatorname{Im} \int_{\Gamma} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} ds. \quad (1.27)$$

Da beide Summanden des ersten Integranden positiv sind, müssen auch die Integrale über die einzelnen Summanden für  $r \rightarrow \infty$  beschränkt sein. Insbesondere folgt also (1.26).

Wähle nun  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$  beliebig und anschließend  $r \in \mathbb{R}$  so, daß  $r > |x|$  und  $\bar{D}$  im Inneren von  $\Omega_r$  liegt. Dann gilt nach Satz 1.10 angewandt auf  $D_r$

$$\begin{aligned} & \left| u(x) + \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial u(y)}{\partial n} \Phi(x, y) - u(y) \frac{\Phi(x, y)}{n(y)} \right\} ds(y) \right| \\ &= \left| \int_{\Omega_r} \left\{ \frac{\partial u(y)}{\partial n} \Phi(x, y) - u(y) \frac{\Phi(x, y)}{n(y)} \right\} ds(y) \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_{\Omega_r} |\Phi(x, y)| \left| \frac{\partial u(y)}{\partial n} - ik u(y) \right| ds(y) \\
&\quad + \int_{\Omega_r} | -u(y) | \left| \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} - ik \Phi(x, y) \right| ds(y) \\
&\leq \underbrace{\left( \int_{\Omega_r} |\Phi(x, y)|^2 ds(y) \right)^{\frac{1}{2}}}_{=O(1) \text{ nach (1.8)}} \underbrace{\left( \int_{\Omega_r} \left| \frac{\partial u(y)}{\partial n} - ik u(y) \right|^2 ds(y) \right)^{\frac{1}{2}}}_{=o(1) \text{ nach Vor.}} \\
&\quad + \underbrace{\left( \int_{\Omega_r} |u(y)|^2 ds(y) \right)^{\frac{1}{2}}}_{=O(1) \text{ nach (1.26)}} \underbrace{\left( \int_{\Omega_r} \left| \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} - ik \Phi(x, y) \right|^2 ds(y) \right)^{\frac{1}{2}}}_{=o(1) \text{ nach Lemma 1.2 und 1) } \Rightarrow 2)}
\end{aligned}$$

für  $r \rightarrow \infty$ . Daraus folgt Behauptung 3.

**3)  $\Rightarrow$  1):** Gilt für  $u$  die Darstellungsformel (1.25), so erfüllt  $u$  die Sommerfeld'sche Ausstrahlungsbedingung, da  $\Phi(x, y)$  und  $\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)}$  sie gleichmäßig bezüglich  $y \in \Gamma$  erfüllen nach Lemma 1.2.  $\blacksquare$

**Satz 1.12** *Jede ausstrahlende Lösung der Helmholtz-Gleichung besitzt das asymptotische Verhalten einer auslaufenden Zylinderwelle*

$$u(x) = \frac{e^{ik|x|}}{\sqrt{|x|}} \left\{ u_\infty(\hat{x}) + O\left(\frac{1}{|x|}\right) \right\}, \quad |x| \rightarrow \infty, \quad (1.28)$$

gleichmäßig in alle Richtungen  $\hat{x} = \frac{x}{|x|}$ . Dabei ist die Funktion  $u_\infty$  auf dem Einheitskreis  $S^1$  definiert und heißt Fernfeld von  $u$ . Unter den Voraussetzungen von Satz 1.11 gilt für das Fernfeld die Darstellungsformel

$$u_\infty(\hat{x}) = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{8\pi k}} \int_{\Gamma} \left\{ u(y) \frac{\partial e^{-ik\langle \hat{x}, y \rangle}}{\partial n(y)} - \frac{\partial u}{\partial n} e^{-ik\langle \hat{x}, y \rangle} \right\} ds(y), \quad \hat{x} \in S^1. \quad (1.29)$$

**Beweis:** Mit der Beziehung

$$|x - y| = \sqrt{|x|^2 - 2\langle x, y \rangle + |y|^2} = |x| - \langle \hat{x}, y \rangle + O\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad x \rightarrow \infty,$$

gleichmäßig für alle  $y \in \Gamma$  und alle  $\frac{x}{|x|}$  und den Formeln (1.8) und (1.10) ergibt sich

$$\begin{aligned}
\Phi(x, y) &= \frac{i}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi k |x|}} e^{i(k|x| - k\langle \hat{x}, y \rangle - \frac{\pi}{4})} \left( 1 + O\left(\frac{1}{|x|}\right) \right) \\
&= \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{8\pi k}} \frac{e^{ik|x|}}{\sqrt{|x|}} e^{-ik\langle \hat{x}, y \rangle} \left( 1 + O\left(\frac{1}{|x|}\right) \right), \quad |x| \rightarrow \infty,
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} &= \frac{ik}{4} H_0'(k|x-y|) \left\langle \frac{y-x}{|y-x|}, n(y) \right\rangle \\
&= \frac{ik}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi k|x|}} e^{i(k|x| - k\langle \hat{x}, y \rangle + \frac{\pi}{4})} \langle -\hat{x}, n(y) \rangle \left( 1 + O\left(\frac{1}{|x|}\right) \right) \\
&= \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{8\pi k}} \frac{e^{ik|x|}}{\sqrt{|x|}} \frac{\partial e^{-ik\langle \hat{x}, y \rangle}}{\partial n(y)} \left( 1 + O\left(\frac{1}{|x|}\right) \right), \quad |x| \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

gleichmäßig für alle  $y \in \Gamma$  und alle Richtungen  $\frac{x}{|x|}$ . Durch Einsetzen in (1.25) ergibt sich die Behauptung. ■

## 1.4 Existenz und Eindeutigkeit

In diesem Abschnitt seien  $D$ ,  $\Gamma$  und der Normalektor  $n$  immer wie in Definition 1.1.

**Lemma 1.13 (Rellich)** *Sei  $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D})$  eine Lösung der Helmholtz-Gleichung mit dem Abklingverhalten*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{|x|=r} |u(x)|^2 ds = 0. \quad (1.30)$$

Dann gilt  $u = 0$  in  $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ .

**Beweis:** Ich rechne mit Polarkoordinaten  $(r, \varphi)$  und definiere eine neue Funktion  $\tilde{u}(r, \varphi) := u(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$ . Da  $D$  beschränkt ist, gibt es ein hinreichend großes  $R$ , so daß  $D$  in dem Kreis mit Radius  $R$  um den Ursprung enthalten ist. Für festes  $r > R$  erhält man die Fourierreiheentwicklung

$$\tilde{u}(r, \varphi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n(r) e^{in\varphi}$$

mit Fourierkoeffizienten

$$a_n(r) := \int_0^{2\pi} e^{-in\varphi} \tilde{u}(r, \varphi) d\varphi.$$

Nach der Parseval'schen Gleichung gilt

$$r \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n(r)|^2 = r \int_0^{2\pi} |\tilde{u}(r, \varphi)|^2 d\varphi = \int_{|x|=r} |u(x)|^2 ds \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty,$$

also

$$\sqrt{r} |a_n(r)| \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty, \quad (1.31)$$

für alle  $n \in \mathbb{Z}$ . Durch zwei partielle Integrationen erhält man

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{2\pi} e^{-in\varphi} (\Delta + k^2) u(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \, d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} e^{-in\varphi} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + k^2 \right) \tilde{u}(r, \varphi) \, d\varphi \\ &= a_n''(r) + \frac{1}{r} a_n'(r) + \left( k^2 - \left( \frac{n}{r} \right)^2 \right) a_n(r). \end{aligned}$$

Daraus erkennt man, daß die Funktion  $r \mapsto a\left(\frac{r}{k}\right)$  die Bessel'sche Differentialgleichung (1.5) mit Parameter  $n$  erfüllt. Also ist

$$a_n(r) = p_n H_n^{(1)}(kr) + q_n H_n^{(2)}(kr)$$

für alle  $n \in \mathbb{Z}$  mit komplexen Koeffizienten  $p_n$  und  $q_n$ . Aus dem asymptotischen Verhalten der Hankelfunktionen für große Argumente folgt mit Hilfe von (1.31)  $p_n = q_n = 0$ , und daraus  $u(x) = 0$  für  $|x| > R$ . Aus der Analytizität von  $u$  (s. [CK2], S.17) folgt nun  $u = 0$  in  $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ . ■

**Lemma 1.14** *Sei  $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}) \cap C(\mathbb{R}^2 \setminus D)$  eine ausstrahlende Lösung der Helmholtz-Gleichung, die eine Normalableitung im Sinne von gleichmäßiger Konvergenz besitzt, und für die gilt:*

$$\operatorname{Im} \int_{\Gamma} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} \, ds \geq 0$$

Dann ist  $u = 0$  in  $\mathbb{R}^2 \setminus D$ .

**Beweis:** Im Beweis von Satz 1.11 wurde die folgende Gl. (1.27) hergeleitet:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Omega_r} \left\{ \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 + k^2 |u|^2 \right\} \, ds = -2k \operatorname{Im} \int_{\Gamma} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} \, ds. \quad (1.32)$$

Daraus folgt, daß (1.30) erfüllt ist. Nach dem Rellich-Lemma 1.13 ist also  $u = 0$  in  $\mathbb{R}^2 \setminus D$ , was zu zeigen war. ■

**Korollar 1.15** *Das äußere Neumann-Problem besitzt höchstens eine Lösung.*

**Beweis:** Seien  $u_1$  und  $u_2$  zwei Lösungen des äußeren Neumann-Problems. Dann löst  $u := u_2 - u_1$  das äußere Neumann-Problem zur Randbedingung  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ . Nach Lemma 1.14 ist  $u = 0$ , also  $u_1 = u_2$ . ■

Zum Existenzbeweis für das äußere Neumann-Problem verwende ich einen gemischten Einfachschicht- und Volumenpotentialansatz. Hierin folge ich [Gr]. Sei  $B \subset \mathbb{R}^2$

eine abgeschlossene Kreisscheibe, die ganz im Inneren von  $D$  liegt. Für Dichten  $\varphi \in C(\Gamma)$  und  $\chi \in C^{0,\alpha}(B)$  setze ich

$$u(x) := \int_B \Phi(x, y)\chi(y) dy - \int_\Gamma \Phi(x, y)\varphi(y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^2. \quad (1.33)$$

Da man nicht erwarten kann, daß die Dichten  $\varphi, \chi$  allein durch die Randbegingung (1.3) eindeutig bestimmt sind, fordere ich zusätzlich

$$\Delta u(x) - iu(x) = g(x) \quad \text{für } x \in \overset{\circ}{B} \quad (1.34)$$

mit einer festen Funktion  $g \in C^{0,\alpha}(B)$ . Zur Lösung des äußeren Neumann-Problems könnte ich auch einfach  $g \equiv 0$  setzen, ich werde jedoch später (Beweis von Satz 3.12) die allgemeinere Form benötigen.

**Satz 1.16** *Genügen die Dichten  $(\varphi, \chi) \in C(\Gamma) \times C^{0,\alpha}(B)$  dem Integralgleichungssystem*

$$\begin{aligned} \varphi(x) - 2 \int_\Gamma \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(x)} \varphi(y) ds(y) + 2 \int_B \frac{\partial \Phi(x, y)}{n(x)} \chi(y) dy &= 2f(x), x \in \Gamma \\ \chi(x) - (i + k^2) \int_\Gamma \Phi(x, y)\varphi(y) ds(y) + (i + k^2) \int_B \Phi(x, y)\chi(y) dy &= -g(x), x \in B \end{aligned}$$

mit rechter Seite  $(f, g) \in C(\Gamma) \times C^{0,\alpha}(B)$ , so löst die durch (1.33) definierte Funktion  $u$  das äußere Neumann-Problem zur Funktion  $f$  und erfüllt die Bedingung (1.34).

**Beweis:** Nach den Bemerkungen auf Seite 6 löst  $u$  die Helmholtz-Gleichung (1.1) und erfüllt die Sommerfeld'sche Ausstrahlungsbedingung (1.2). Nach den Sätzen 1.6 und 1.9 ergibt sich die Randbedingung (1.3) aus der ersten Gleichung und die zusätzliche Bedingung (1.34) aus der zweiten Gleichung. ■

**Satz 1.17** *Das Gleichungssystem in Satz 1.16 besitzt für jede rechte Seite  $(f, g) \in C(\Gamma) \times C^{0,\alpha}(B)$  genau eine Lösung  $(\varphi, \chi) \in C(\Gamma) \times C^{0,\alpha}(B)$ . Das äußere Neumann-Problem ist also für jedes  $f \in C(\Gamma)$  lösbar, und die Lösung hängt stetig von  $f$  ab.*

**Beweis:** Das Gleichungssystem in Satz (1.16) besitzt die Form  $(I - A)(\varphi, \chi) = (f, g)$  mit einer  $2 \times 2$ -Matrix von Integraloperatoren. Um zu zeigen, daß  $A$  den Produktraum  $C(\Gamma) \times C^{0,\alpha}(B)$  kompakt in sich abbildet, zerlege ich seine Komponenten in folgender Weise:

$$\begin{aligned} A_{11} &: C(\Gamma) \rightarrow C^{0,\alpha}(\Gamma) \hookrightarrow C(\Gamma) \\ A_{12} &: C^{0,\alpha}(B) \hookrightarrow C(B) \rightarrow C(\Gamma) \\ A_{21} &: C(\Gamma) \rightarrow C^1(B) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(B) \\ A_{22} &: C^{0,\alpha}(B) \hookrightarrow C(B) \rightarrow C^1(B) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(B) \end{aligned}$$

In diesen Zerlegungen sind alle Operatoren beschränkt und jeweils mindestens ein Operator ist kompakt. Dies folgt aus den Sätzen 1.5, 1.8 und den Ungleichungen (1.22). Die Beschränktheit von  $A_{21} : C(\Gamma) \rightarrow C^1(B)$  folgt aus der Beschränktheit des differenzierten Kerns. Also sind alle Komponenten von  $A$  kompakt.

Es bleibt zu zeigen, daß  $I - A$  injektiv ist. Nach der Riesz-Theorie folgt dann, daß  $I - A$  auch surjektiv und der inverse Operator  $(I - A)^{-1}$  beschränkt ist. Deshalb ist das äußere Neumann-Problem nach Satz 1.16 lösbar, und zumindest die Dichten  $(\phi, \chi)$  hängen stetig von  $f$  ab. Nach Einführung einer geeigneten Norm für  $u$  (z.B. der Supremumsnorm) kann man daraus folgern, daß auch  $u$  stetig von  $f$  abhängt.

Sei also  $(\varphi, \chi)$  eine Lösung des homogenen Gleichungssystems  $(I - A)(\varphi, \chi) = 0$ . Dann erfüllt das durch (1.33) definierte Potential  $u$  nach Satz 1.16 die Randbedingung  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ . Wegen der Eindeutigkeit des äußeren Neumann-Problems ist  $u = 0$  in  $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ . Insbesondere ist  $u_+ = 0$ . Nach den Sätzen (1.6) und (1.9) gilt auch  $u_- = 0$ . Nach denselben Sätzen kann man den 1.Green'schen Satz in der üblichen Weise (vgl. [K1], S.63) auf Parallelkurven zu  $\Gamma$  anwenden und erhält unter Berücksichtigung von  $\Delta u - iu = 0$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Gamma} \bar{u}_- \frac{\partial u_-}{\partial n} ds \\ &= \int_{\Gamma} \bar{u}_- \frac{\partial u_-}{\partial n} ds - \int_{\partial B} \bar{u} \frac{\partial u}{\partial n} ds + \int_{\partial B} \bar{u} \frac{\partial u}{\partial n} ds \\ &= \int_{D \setminus B} \left( -k^2 |u|^2 + \langle \text{grad } u, \text{grad } u \rangle \right) dx + \int_B \left( i|u|^2 + \langle \text{grad } u, \text{grad } u \rangle \right) dx. \end{aligned}$$

(Die Normale  $n$  auf  $\partial B$  weist ins Äußere von  $B$ .) Vergleich der Imaginärteile dieser Gleichung liefert  $u = 0$  in  $B$ . Nach Satz (1.9) folgt

$$-\chi = \Delta u + k^2 u = 0$$

in  $\overset{\circ}{B}$ . Also gilt

$$u(x) = - \int_{\Gamma} \Phi(x, y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Da  $u$  die Helmholtz-Gleichung in  $D$  löst und Lösungen der Helmholtz-Gleichung analytisch sind, ist  $u = 0$  in  $D$ . Daraus ergibt sich

$$\varphi = \frac{\partial u_+}{\partial n} - \frac{\partial u_-}{\partial n} = 0 \quad \text{auf } \Gamma.$$

Damit ist die Injektivität von  $I - A$  gezeigt, und der Satz ist bewiesen. ■

# Kapitel 2

## Die Fréchet-Ableitung

Zur Beschreibung und Durchführung des Newton-Verfahrens in Kapitel 5 werde ich eine Verallgemeinerung der gewöhnlichen Ableitung im  $\mathbb{R}^n$  auf normierte Räume benötigen. Diese wird in Abschnitt 2.1 eingeführt, und in Abschnitt 2.2 werden einige bekannte Rechenregeln für die Differentiation auf die allgemeinere Situation übertragen. In Abschnitt 2.3 wird ein Differentiationsatz für Integraloperatoren bewiesen, der in Kapitel 3 eine entscheidende Rolle spielen wird.

### 2.1 Einführung der Fréchet-Ableitung

**Bezeichnung:** Seien  $X$  und  $Y$  normierte Räume. Dann ist  $L(X, Y)$  der Raum aller beschränkten linearen Abbildungen von  $X$  nach  $Y$  mit der Norm  $\|F\| := \sup_{\|x\|=1} \|F(x)\|$ .

$L(\underbrace{X, \dots, X}_n; Y)$  ist der Raum aller beschränkten  $n$ -fach linearen Abbildungen von  $X \times \dots \times X$  nach  $Y$  versehen mit der Norm  $\|F\| := \sup_{\|x_1\|=\dots=\|x_n\|=1} \|F(x_1, \dots, x_n)\|$ .

**Definition 2.1 (Fréchet-Ableitung)** Seien  $X$  und  $Y$  normierte Räume und  $X' \subset X$  offen. Eine Abbildung  $F : X' \rightarrow Y$  heißt Fréchet-differenzierbar in einem Punkt  $x \in X'$ , wenn es eine beschränkte lineare Abbildung  $F'(x) : X \rightarrow Y$  gibt mit

$$\|F(x+h) - F(x) - F'(x)h\| = o(\|h\|)$$

für  $\|h\| \rightarrow 0, h \in X$ . Ist  $F$  in jedem Punkt  $x \in X'$  Fréchet-differenzierbar, dann heißt die Abbildung  $F' : X' \rightarrow L(X, Y), x \mapsto F'(x)$  die Fréchet-Ableitung von  $F$ .

Die  $n$ -te Fréchet-Ableitung ist die Fréchet-Ableitung der  $(n-1)$ -sten Fréchet-Ableitung, sofern diese existiert. Besitzt  $F$  eine  $n$ -te Fréchet-Ableitung in einem Punkt  $x \in X'$ , so heißt  $F$  in diesem Punkt  $n$ -mal Fréchet-differenzierbar.

Nach dieser rekursiven Definition der Fréchet-Ableitungen höherer Ordnung erhält man

$$F : X' \rightarrow Y$$

$$\begin{aligned}
F' &: X' \longrightarrow L(X, Y) \\
F'' &: X' \longrightarrow L(X, L(X, Y)) \\
F''' &: X' \longrightarrow L(X, L(X, L(X, Y))) \\
&\text{usw.}
\end{aligned}$$

Für grössere  $n$  werden die Bildräume schnell sehr kompliziert. Hier kann man sich zur Vereinfachung die kanonischen Normisomorphismen

$$L(X, L(X, \dots, L(X, Y) \dots)) \cong L(X, \dots, X; Y) \quad (2.1)$$

zunutzen. Für  $n = 2$  lautet dieser Isomorphismus

$$\begin{aligned}
L(X, X; Y) &\longrightarrow L(X, L(X, Y)) \\
f &\longmapsto \begin{cases} X \longrightarrow L(X, Y) \\ h_1 \longmapsto f(h_1, \cdot) \end{cases}
\end{aligned}$$

Wegen

$$\sup_{\|h_1\|=\|h_2\|=1} \|f(h_1, h_2)\| = \sup_{\|h_1\|=1} \left( \sup_{\|h_2\|=1} \|f(h_1, h_2)\| \right)$$

(eine allgemeine Eigenschaft des Supremums) ist diese Abbildung wohldefiniert und normerhaltend. Linearität, Injektivität und Surjektivität sind leicht einzusehen. Für allgemeines  $n$  verfährt man analog durch vollständige Induktion.

Vermöge des Isomorphismus (2.1) kann die  $n$ -te Fréchet-Ableitung einer Abbildung  $F : X' \rightarrow Y$  in einem Punkt  $x \in X'$  aufgefaßt werden als  $n$ -fach lineare, beschränkte Abbildung von  $X \times \dots \times X$  nach  $Y$ :

$$F^{(n)} : X' \longrightarrow L(\underbrace{X, \dots, X}_{n\text{-mal}}; Y)$$

In dieser Arbeit werde ich meistens nur die Diagonalterme der höheren Fréchet-Ableitungen benötigen. Ich verwende die Notation

$$F^{(n)}(x, h) := (F^{(n)}(x))(h, \dots, h), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Man überzeugt sich leicht, daß die Fréchet-Ableitung, sofern sie existiert, eindeutig bestimmt ist und daß Fréchet-Differenzierbarkeit Stetigkeit impliziert.

## 2.2 Rechenregeln für die Fréchet-Ableitung

**Satz 2.2 (Kettenregel)** *Seien  $X, Y$  und  $Z$  normierte Räume und  $X' \subset X$ ,  $Y' \subset Y$  offene Teilmengen. Seien  $G : X' \rightarrow Y'$  und  $F : Y' \rightarrow Z$  Fréchet-differenzierbar. Dann ist auch  $F \circ G : X' \rightarrow Z$  Fréchet-differenzierbar, und es gilt*

$$(F \circ G)'(x, h) = F'(G(x), G'(x, h))$$

für alle  $x \in X'$  und  $h \in X$ .

**Beweis:** Für  $x \in X'$  und  $h \in X$  gilt

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\|h\|} \|F(G(x+h)) - F(G(x)) - F'(G(x), G'(x, h))\| \\ \leq & \frac{\|F(G(x+h)) - F(G(x)) - F'(G(x), G(x+h) - G(x))\|}{\|G(x+h) - G(x)\|} \cdot \underbrace{\frac{\|G(x+h) - G(x)\|}{\|h\|}}_{O(1)} \\ & + \|F'(G(x), \frac{G(x+h) - G(x) - G'(x, h)}{\|h\|})\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

für  $\|h\| \rightarrow 0$ , denn jeder einzelne Summand strebt gegen 0. (An den Stellen  $h \in X$  mit  $G(x+h) = G(x)$  ist der erste Faktor des ersten Summanden durch 0 stetig zu ergänzen.) ■

**Satz 2.3** Seien  $X$  und  $Y$  normierte Räume und  $X' \subset X$  offen. Die Abbildung  $A : X' \rightarrow Y$  sei zweimal stetig Fréchet-differenzierbar. Dann gilt für alle  $h_1, h_2 \in X$  und alle  $x \in X'$

$$A''(x; h_1, h_2) = A''(x; h_2, h_1).$$

**Beweis:** Sei  $F \in X^*$  ein beliebiges stetiges Funktional auf  $X$ . Für  $x \in X'$  und  $h \in X$  gilt dann

$$\begin{aligned} FA'(x, h) &= F \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [A(x+th) - A(x)] \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} F[A(x+th) - A(x)] = \frac{d}{dt} FA(x+th) \Big|_{t=0}. \end{aligned}$$

Durch zweimalige Anwendung dieser Beziehung erhält man

$$FA''(x; h_1, h_2) = \frac{\partial}{\partial t_2} \frac{\partial}{\partial t_1} FA''(x + t_1 h_1 + t_2 h_2) \Big|_{t_1=t_2=0}$$

und

$$FA''(x; h_2, h_1) = \frac{\partial}{\partial t_1} \frac{\partial}{\partial t_2} FA''(x + t_1 h_1 + t_2 h_2) \Big|_{t_1=t_2=0}.$$

Da für zweimal stetig differenzierbare Funktionen auf  $\mathbb{R}^2$  die Reihenfolge der Ableitungen vertauschbar ist, gilt

$$FA''(x; h_1, h_2) = FA''(x; h_2, h_1).$$

Die Behauptung folgt nun aus dem Satz von Hahn-Banach. ■

**Bemerkung:** Der Satz läßt sich auch ohne Verwendung des Satzes von Hahn-Banach und sogar ohne die Voraussetzung der Stetigkeit der zweiten Ableitung zeigen. Der Beweis ist dann allerdings deutlich schwieriger. (siehe z.B. [Di], S.181) Die Verallgemeinerung auf höhere Ableitungen ist offensichtlich.

**Satz 2.4 (Produktregel)** Seien  $X_1, X_2$  und  $Y$  normierte Räume, und es gebe eine beschränkte, bilineare Abbildung  $X_1 \times X_2 \rightarrow Y$ ,  $(x_1, x_2) \mapsto [x_1, x_2]$ . Sei  $U'$  eine offene Teilmenge eines weiteren normierten Raumes  $U$  und seien  $F_1 : U' \rightarrow X_1$  und  $F_2 : U' \rightarrow X_2$  Fréchet-differenzierbare Abbildungen. Dann ist auch  $[F_1, F_2] : U' \rightarrow Y$ ,  $u \mapsto [F_1(u), F_2(u)]$  Fréchet-differenzierbar und besitzt die Ableitung

$$[F_1, F_2]'(u, h) = [F_1'(u, h), F_2(u)] + [F_1(u), F_2(u, h)] \quad u \in U', h \in U. \quad (2.2)$$

**Beweis:** Die rechte Seite der Gleichung (2.2) ist als Operator in  $h$  offenbar linear und beschränkt, und es gilt für  $u \in U'$ :

$$\begin{aligned} & \| [F_1, F_2](u+h) - [F_1, F_2](u) - [F_1'(u, h), F_2(u)] - [F_1(u), F_2(u, h)] \| \\ \leq & C \left\{ \underbrace{\|F_1(u+h) - F_1(u) - F_1'(u, h)\|}_{=o(\|h\|)} \underbrace{\|F_2(u+h)\|}_{=O(1)} \right. \\ & + \|F_1(u)\| \underbrace{\|F_2(u+h) - F_2(u) - F_2'(u, h)\|}_{=o(\|h\|)} \\ & \left. + \underbrace{\|F_1'(u, h)\|}_{=O(\|h\|)} \underbrace{\|F_2(u+h) - F_2(u)\|}_{=O(\|h\|)} \right\} \\ = & o(\|h\|), \quad \|h\| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

■

**Beispiele:**

1.  $X_1 = \mathbb{C}$ ,  $X_2 = Y$  normierter Raum mit der Skalarmultiplikation in  $Y$  als beschränkter bilinearer Abbildung.
2.  $X_1 = X_2$  Hilbertraum mit dem Skalarprodukt als beschränkter bilinearer Abbildung.
3.  $X_2, Y$  normierte Räume,  $X_1 = L(X_2, Y)$ . Die beschränkte bilineare Abbildung ist die Anwendung eines Operators aus  $L(X_2, Y)$  auf einen Vektor aus  $X_2$ .

**Satz 2.5 (Quotientenregel)** Seien  $U$  ein normierter Raum,  $X$  ein Banachraum und  $U' \subset U$  offen. Sei  $F : U' \rightarrow L(X, X)$  Fréchet-differenzierbar, und für alle  $u \in U'$  sei  $F(u)$  beschränkt invertierbar. Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} F^{-1} & : U' \rightarrow L(X, X) \\ u & \mapsto (F(u))^{-1} \end{aligned}$$

Fréchet-differenzierbar und besitzt die Ableitung

$$(F^{-1})'(u, h) = -F^{-1}(u)F'(u, h)F^{-1}(u), \quad u \in U', h \in U.$$

**Beweis:** Ich zeige zunächst, daß  $F^{-1}$  stetig ist. Dazu ist die Stetigkeit von

$$\begin{aligned} \text{inv} : \quad F(U') &\longrightarrow L(X, X) \\ A &\longmapsto A^{-1} \end{aligned}$$

nachzuweisen, denn es gilt  $F^{-1} = \text{inv} \circ F$ . Sei  $\epsilon > 0$  und  $A \in F(U')$ , d.h. insbesondere ist  $A$  invertierbar. Setze

$$\delta := \min \left( \frac{\epsilon}{2\|A^{-1}\|^2}, \frac{1}{2\|A^{-1}\|} \right).$$

Sei  $B \in F(U')$  mit  $\|B - A\| < \delta$ . Wegen der Identität

$$B = A(I - A^{-1}(A - B))$$

und

$$\|A^{-1}(A - B)\| \leq \|A^{-1}\| \|A - B\| < \frac{1}{2}$$

ist  $B$  nach dem Satz über die Neumann'sche Reihe invertierbar, und es gilt

$$\|B^{-1}\| \leq \frac{\|A^{-1}\|}{1 - \|A^{-1}(A - B)\|}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \|A^{-1} - B^{-1}\| &= \|A^{-1}BB^{-1} - A^{-1}AB^{-1}\| \leq \|A^{-1}\| \|B - A\| \|B^{-1}\| \\ &< \|A^{-1}\| \frac{\epsilon}{2\|A^{-1}\|^2} \|B^{-1}\| \leq \frac{\epsilon}{2} \cdot \frac{1}{1 - \|A^{-1}(A - B)\|} \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Damit erhält man für  $u \in U'$  und  $\|h\| \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} &\|F^{-1}(u + h) - F^{-1}(u) + F^{-1}(u)F'(u, h)F^{-1}(u)\| \\ &\leq \|F^{-1}(u + h)F(u) - F^{-1}(u + h)F(u + h) + F^{-1}(u)F'(u, h)\| \|F^{-1}(u)\| \\ &\leq \underbrace{\|F^{-1}(u + h)\|}_{=O(1)} \left( \underbrace{\|F(u) - F(u + h) + F'(u, h)\|}_{=o(\|h\|)} \right) \\ &\quad + \underbrace{\|F(u + h)\|}_{=O(1)} \left( \underbrace{\|F^{-1}(u) - F^{-1}(u + h)\|}_{=o(1)} \underbrace{\|F'(u, h)\|}_{=O(\|h\|)} \right) \|F^{-1}(u)\| \\ &= o(\|h\|). \end{aligned}$$

■

**Satz 2.6 (Taylorformel)** Sei  $X$  ein normierter Raum und  $X' \subset X$  offen und konvex. Sei  $F : X' \rightarrow \mathbb{C}$   $n$ -mal stetig Fréchet-differenzierbar. Dann gilt für alle  $x \in X'$  und  $h \in X$  mit  $x + h \in X'$

$$F(x + h) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{m!} F^{(m)}(x, h) + \frac{1}{(n-1)!} \int_0^1 (1-s)^{n-1} F^{(n)}(x + sh, h) ds. \quad (2.3)$$

**Beweis:** Seien  $x$  und  $h$  fest. Definiere  $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $g(s) := F(x + sh)$ . Wegen der Konvexität von  $X'$  ist  $g$  wohldefiniert. Mit Hilfe der Kettenregel zeigt man induktiv, daß  $g$   $n$ -mal stetig differenzierbar ist mit

$$g^{(m)}(s) = F^{(m)}(x + sh, h) \quad m = 0, \dots, n.$$

Die gewöhnliche Taylorentwicklung von  $g$  um 0 liefert

$$\begin{aligned} F(x + h) &= g(1) = \sum_{m=0}^{n-1} g^{(m)}(0) + \frac{1}{(n-1)!} \int_0^1 (1-s)^{n-1} g^{(n)}(s) ds \\ &= \sum_{m=0}^{n-1} \frac{1}{m!} F^{(m)}(x, h) + \frac{1}{(n-1)!} \int_0^1 (1-s)^{n-1} F^{(n)}(x + sh, h) ds. \end{aligned}$$

■

## 2.3 Ein Differentiationssatz

Den in diesem Abschnitt bewiesenen Differentiationssatz werde ich in Abschnitt 3.2. benötigen. Es handelt sich um eine Modifikation von [Po], Satz 3.5. Seien  $G_2 \subset \mathbb{R}^n$  meßbar und  $G_1 \subset \mathbb{R}^m$ . Ich betrachte Integraloperatoren der Form

$$\begin{aligned} A(x) &: C(G_2) \rightarrow C(G_1) \\ (A(x)\varphi)(t) &:= \int_{G_2} f(t, \tau; x)\varphi(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (2.4)$$

die von einem Parameter  $x$  aus einer offenen Teilmenge  $X'$  eines normierten Raumes  $X$  abhängen. Der folgende Satz besagt, daß unter gewissen Bedingungen an  $f$  die Abbildung

$$\begin{aligned} A &: X' \rightarrow L(C(G_2), C(G_1)) \\ x &\mapsto A(x) \end{aligned}$$

Fréchet-differenzierbar ist und daß die Differentiation unter dem Integral durchgeführt werden kann, daß also die Fréchet-Ableitung gegeben ist durch den Operator

$$\begin{aligned} A^{(1)}(x, h) &: C(G_2) \rightarrow C(G_1) \\ (A^{(1)}(x, h)\varphi)(t) &:= \int_{G_2} \frac{\partial f}{\partial x}(t, \tau; x, h)\varphi(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (2.5)$$

In dieser Arbeit sind  $G_1$  und  $G_2$  stets das Intervall  $[0, 2\pi)$  oder offene Teilmengen des  $\mathbb{R}^2$ .

**Satz 2.7** *Es gelten die oben eingeführten Bezeichnungen. Für  $m \neq n$  sei  $Q := G_1 \times G_2$  und für  $m = n$  sei  $Q := \{(t, \tau) \in G_1 \times G_2 : t \neq \tau\}$ . Die Funktion  $f : Q \times X' \rightarrow \mathbb{C}$  genüge den folgenden Voraussetzungen:*

1. Für alle  $(t, \tau) \in Q$  ist  $f(t, \tau; \cdot)$  zweimal stetig Fréchet-differenzierbar auf  $X'$ .
2. Für alle  $x \in X'$  und alle  $h \in X$  sind die durch die Gln. (2.4) und (2.5) definierten Operatoren  $A(x)$  und  $A^{(1)}(x, h)$  wohldefiniert. ( $C(G_1)$  und  $C(G_2)$  seien mit der Supremumsnorm versehen.)
3. Für jedes  $\mathbf{x} \in X'$  existieren Majoranten  $g_m : Q \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $m=1,2$  mit

$$\left| \frac{\partial^m f}{\partial x^m}(t, \tau; x, h) \right| \leq g_m(t, \tau) \|h\|^m$$

für alle  $(t, \tau) \in Q$ ,  $h \in X$  und alle  $x$  in einer Umgebung von  $\mathbf{x}$ , und es gelte

$$\int_{G_2} g_m(t, \tau) \, d\tau \leq C_m$$

für alle  $t \in G_1$ ,  $m = 1, 2$  und Konstanten  $C_m > 0$ .

Dann ist  $A$  für jedes  $\mathbf{x} \in X'$  Fréchet-differenzierbar und besitzt die Ableitung  $A'(\mathbf{x}, h) = A^{(1)}(\mathbf{x}, h)$ .

**Beweis:** Sei  $\mathbf{x} \in X'$  beliebig. Dann ist die Abbildung  $h \mapsto A^{(1)}(\mathbf{x}, h)$  linear und beschränkt. Die Linearität folgt aus der Linearität von  $\frac{\partial}{\partial x} f(t, \tau; \mathbf{x}, h)$  in  $h$  und die Beschränktheit aus der Abschätzung

$$\sup_{\|h\|=1} \sup_{\|\varphi\|=1} \left\| \int_{G_2} \frac{\partial}{\partial x} f(\cdot, \tau; \mathbf{x}, h) \varphi(\tau) \, d\tau \right\|_{\infty; G_1} \leq \left\| \int_{G_2} g_1(\cdot, \tau) \, d\tau \right\|_{\infty; G_1} \leq C_1.$$

Ferner erhält man für alle  $\varphi \in C(G_2)$  und alle hinreichend kleinen  $h \in X$  nach der Taylorformel:

$$\begin{aligned} & \|A(\mathbf{x} + h)\varphi - A(\mathbf{x})\varphi - A^{(1)}(\mathbf{x}, h)\varphi\|_{\infty; G_1} \\ &= \left\| \int_{G_2} [f(\cdot, \tau; \mathbf{x} + h) - f(\cdot, \tau; \mathbf{x}) - \frac{\partial f}{\partial x}(\cdot, \tau; \mathbf{x}, h)] \varphi(\tau) \, d\tau \right\|_{\infty; G_1} \\ &= \left\| \int_{G_2} \int_0^1 (1-s) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\cdot, \tau; \mathbf{x} + sh, h) \, ds \varphi(\tau) \, d\tau \right\|_{\infty; G_1} \\ &\leq \left\| \int_{G_2} \int_0^1 |1-s| g_2(\cdot, \tau) \|h\|^2 \, ds |\varphi(\tau)| \, d\tau \right\|_{\infty; G_1} \\ &\leq \left\| \int_{G_2} g_2(\cdot, \tau) \|h\|^2 \|\varphi\|_{\infty; G_2} \, d\tau \right\|_{\infty; G_1} \\ &\leq C_2 \|\varphi\|_{\infty; G_2} \|h\|^2, \end{aligned}$$

also

$$\frac{1}{\|h\|} \|A(\mathbf{x} + h) - A(\mathbf{x}) - A^{(1)}(\mathbf{x}, h)\|_{L(C(G_2), C(G_1))} \leq C_2 \|h\| \rightarrow 0, \quad \|h\| \rightarrow 0.$$

■

**Korollar 2.8** Die Funktion  $f$  erfülle die Voraussetzungen von Satz 2.7. Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} B : X' &\longrightarrow C(G_1) \\ x &\longmapsto \int_{G_2} f(\cdot, \tau; x) \, d\tau \end{aligned}$$

Fréchet-differenzierbar, und es gilt für jedes  $\mathbf{x} \in X'$

$$B'(\mathbf{x}, h) = \int_{G_2} \frac{\partial f}{\partial z}(\cdot, \tau; \mathbf{x}, h) \, d\tau.$$

**Beweis:**  $1_{G_2}$  bezeichne die Funktion, die auf  $G_2$  konstant den Wert 1 hat. Es ist  $B(x) = A(x)1_{G_2}$  für alle  $x \in X'$ , und man erhält

$$\begin{aligned} &\|B(\mathbf{x} + h) - B(\mathbf{x}) - B'(\mathbf{x}, h)\| \\ &= \|[A(\mathbf{x} + h) - A(\mathbf{x}) - A'(\mathbf{x}, h)]1_{G_2}\| \\ &\leq \sup_{\|\varphi\|=1} \|[A(\mathbf{x} + h) - A(\mathbf{x}) - A'(\mathbf{x}, h)]\varphi\| \\ &= \|A(\mathbf{x} + h) - A(\mathbf{x}) - A'(\mathbf{x}, h)\|_{L(C(G_2), C(G_1))} = o(\|h\|). \end{aligned}$$

Analog kann man auch die Beschränktheit der Abbildung  $h \mapsto B'(\mathbf{x}, h)$  auf die Beschränktheit der Abbildung  $h \mapsto A'(\mathbf{x}, h)$  zurückführen. ■

# Kapitel 3

## Die Fréchet-Ableitung des Fernfeldes nach dem Rand

In diesem Kapitel wird bewiesen, daß das Fernfeld  $u_\infty$  bei Streuung einer einfallenden Welle  $u_i(x) = e^{ik\langle x, d \rangle}$  an einem schallharten Hindernis  $D$  Fréchet-differenzierbar ist nach dem Rand  $\Gamma$  von  $D$ . In Abschnitt 3.1. werden zunächst die nötigen Begriffe für eine präzise Formulierung dieser Aussage eingeführt. Der weitere Fortgang basiert auf der in Kapitel 1 dargestellten Lösung des äußeren Neumann-Problems mit Hilfe eines gemischten Einfachschicht- und Volumenpotentials. In Abschnitt 3.2 wird bewiesen, daß alle beteiligten Integraloperatoren Fréchet-differenzierbar sind. Daraus folgt dann die Fréchet-Differenzierbarkeit von  $u_\infty$ . Schließlich wird in Abschnitt 3.3 gezeigt, daß man  $u'_\infty$  wieder durch die Lösung eines äußeren Neumann-Problems charakterisieren kann.

### 3.1 Das akustische Streuproblem am schallharten Hindernis

Ich beschäftige mich im folgenden mit der Streuung von Schallwellen an einem langen, zylinderförmigen, schallharten Hindernis mit Querschnittsfläche  $D$ .

**Definition 3.1** *Unter dem akustischen Streuproblem an einem schallharten Hindernis versteht man die folgende Fragestellung: Gegeben seien ein beschränktes, einfach zusammenhängendes Gebiet  $D \subset \mathbb{R}^2$  mit  $C^{2,\alpha}$ -glattem Rand  $\Gamma$  und nach außen weisender Normale  $n$  sowie eine einfallende Welle  $u_i(x) = e^{ik\langle x, d \rangle}$  mit  $d \in \mathbb{R}^2$ ,  $|d| = 1$ . Gesucht ist eine gestreute Welle  $u_s \in C^2(\mathbb{R} \setminus \bar{D}) \cap C(\mathbb{R}^2 \setminus D)$ , die die Helmholtz-Gleichung löst, der Sommerfeld'schen Ausstrahlungsbedingung (1.2) genügt und für die das Gesamtfeld  $u := u_i + u_s$  auf dem Rand  $\Gamma$  die Bedingung*

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0$$

*im Sinne von gleichmäßiger Konvergenz auf  $\Gamma$  erfüllt.*

Diese Fragestellung läßt sich offensichtlich zurückführen auf das äußere Neumann-Problem zur Randbedingung  $\frac{\partial u_s}{\partial n} = -\frac{\partial u_i}{\partial n}$ .

In der Definition des Streuproblems wurden höhere Glattheitsanforderungen an den Rand  $\Gamma$  gestellt als in der Definition des äußeren Neumann-Problems. Im folgenden wird gezeigt, daß unter diesen Voraussetzungen das Gesamtfeld  $u$  bis auf den Rand zweimal stetig differenzierbar ist. Diese Eigenschaft werde ich in Abschnitt 3.3. zur Charakterisierung der Fréchet-Ableitung benötigen.

**Lemma 3.2** *Sei  $0 < \alpha < 1$  und  $\Gamma$   $C^{2,\alpha}$ -glatt. Dann kann für  $\varphi \in C^{1,\alpha}(\Gamma)$*

$$\operatorname{grad}_x \int_{\Gamma} \Phi(x, y) \varphi(y) \, ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D},$$

*gleichmäßig  $\alpha$ -hölderstetig differenzierbar auf  $\mathbb{R}^2 \setminus D$  fortgesetzt werden.*

**Beweis:** Für  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$  ergibt sich durch partielle Integration

$$\begin{aligned} \operatorname{grad}_x \int_{\Gamma} \Phi(x, y) \varphi(y) \, ds(y) &= - \int_{\Gamma} \operatorname{grad}_y \Phi(x, y) \varphi(y) \, ds(y) \\ &= - \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} n(y) \varphi(y) \, ds(y) - \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial s(y)} s(y) \varphi(y) \, ds(y) \\ &= - \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} n(y) \varphi(y) \, ds(y) + \int_{\Gamma} \Phi(x, y) \frac{d}{ds} (s(y) \varphi(y)) \, ds(y) \end{aligned}$$

wobei  $s(z(t)) := \frac{z'(t)}{|z'(t)|}$  der normierte Tangentialvektor an  $\Gamma$  ist. Im letzten Schritt wurde eine partielle Integration durchgeführt. Da  $n\varphi \in C^{1,\alpha}(\Gamma)$  und  $\frac{d}{ds}(s\varphi) \in C^{0,\alpha}(\Gamma)$ , folgt die Behauptung aus Satz 1.7.  $\blacksquare$

**Satz 3.3** *Das Gesamtfeld  $u$  bei Streuung einer einfallenden Welle  $u_i(x) = e^{ik\langle x, d \rangle}$  an einem schallharten Hindernis  $D$  mit  $C^{2,\alpha}$ -glattem Rand  $\Gamma$  ist ein Element von  $C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^2 \setminus D)$ .*

**Beweis:** Unter den angegebenen Voraussetzungen ist offenbar  $\frac{\partial u_i}{\partial n} \in C^{1,\alpha}(\Gamma)$ . Wegen Lemma 3.2 und der Analytizität des Volumenpotentialanteils von (1.33) außerhalb von  $B$  ist der Satz bewiesen, wenn gezeigt werden kann, daß der Operator  $I + A$  die Menge  $C^{1,\alpha}(\Gamma) \times C^{0,\alpha}(B)$  bijektiv in sich abbildet. Dazu wird die Riesz-Theorie verwendet. Die Injektivität von  $I + A$  wurde schon im Beweis von Satz 1.17 sogar für einen größeren Definitionsbereich gezeigt. Es bleibt nur noch die Kompaktheit von  $A$  in den veränderten Normen nachzuweisen. Dazu zerlege ich die Komponenten von  $A$  in folgender Weise:

$$\begin{aligned} A_{11} &: C^{1,\alpha}(\Gamma) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(\Gamma) \rightarrow C^{1,\alpha}(\Gamma) \\ A_{12} &: C^{0,\alpha}(B) \hookrightarrow C(B) \rightarrow C^2(\Gamma) \hookrightarrow C^{1,\alpha}(\Gamma) \\ A_{21} &: C^{1,\alpha}(\Gamma) \hookrightarrow C(\Gamma) \rightarrow C^1(B) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(B) \\ A_{22} &: C^{0,\alpha}(B) \hookrightarrow C(B) \rightarrow C^1(B) \hookrightarrow C^{0,\alpha}(B) \end{aligned}$$

In diesen Zerlegungen sind alle Operatoren beschränkt, und jeweils mindestens ein Operator ist kompakt. Das folgt aus den Sätzen 1.5, 1.8 und 1.22. Die Beschränktheit der Operatoren  $A_{12} : C(B) \rightarrow C^1(\Gamma)$  und  $A_{21} : C(\Gamma) \rightarrow C^1(B)$  folgt aus der Beschränktheit der differenzierten Kerne. Also sind alle Komponenten von  $A$  kompakt. ■

Ich werde nun einige Bezeichnungen einführen, um die Lösung des akustischen Streuproblems am schallharten Hindernis explizit angeben zu können. Zunächst muß der Rand  $\Gamma$  durch ein Element eines normierten Raumes beschrieben werden, um später von einer Fréchet-Ableitung nach dem Rand überhaupt sprechen zu können. Bei zwei Raumdimensionen bietet es sich an, den Rand durch  $2\pi$ -periodische Funktionen zu parametrisieren.

**Definition 3.4** Sei  $0 < \alpha < 1$ .  $C_{2\pi}^{2,\alpha}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$  bezeichne den Vektorraum aller  $C^{2,\alpha}$ -glatten  $2\pi$ -periodischen Funktionen von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}^2$ , versehen mit der Norm  $\|z\| := \max(\|z\|_\infty, \|z'\|_\infty, \|z''\|_{0,\alpha})$ .  $RP \subset C_{2\pi}^{2,\alpha}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$  sei die Menge aller  $z \in C_{2\pi}^{2,\alpha}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$  mit den Eigenschaften:

1.  $z|_{[0,2\pi]}$  ist injektiv.
2.  $z$  ist regulär, d.h.  $|z'(t)| > 0$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ .
3.  $z$  ist linksorientiert.

**Bemerkung:** Eine genaue Definition von Linksorientiertheit wird im Beweis von Lemma 3.7 gegeben.

Sei  $\Gamma = z(\mathbb{R})$  mit  $z \in RP$ . Für ein Feld  $w \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D})$  definiere ich die *parametrisierte Normalableitung* durch

$$(Nw)(t) := (N(z)w)(t) := \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \langle n(t; z), \text{grad } w(z(t) + \rho n(t; z)) \rangle, \quad t \in \mathbb{R},$$

sofern dieser Limes gleichmäßig in  $t$  existiert. Dabei ist  $n(t; z) := n(z(t))$ .

Das Integralgleichungssystem aus Satz 1.16 lautet in parametrisierter Form

$$(I + B(z)) \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(f \circ z) \\ g \end{pmatrix}$$

mit

$$B(z) := \begin{pmatrix} B_{11}(z) & B_{12}(z) \\ B_{21}(z) & B_{22}(z) \end{pmatrix}$$

und

$$B_{11}(z) : C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \longrightarrow C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$$

$$(B_{11}(z)\psi)(t) := -\frac{ik}{2} \int_0^{2\pi} \frac{H_0'(k|z(t) - z(\tau)|)}{|z(t) - z(\tau)|} \langle z(t) - z(\tau), n(t; z) \rangle \psi(\tau) |z'(\tau)| d\tau$$

$$B_{12}(z) : C^{0,\alpha}(B) \longrightarrow C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$$

$$(B_{12}(z)\chi)(t) := \frac{ik}{2} \int_B \frac{H_0'(k|z(t)-y|)}{|z(t)-y|} \langle z(t)-y, n(t; z) \rangle \chi(y) dy$$

$$B_{21}(z) : C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \longrightarrow C^{0,\alpha}(B)$$

$$(B_{21}(z)\psi)(x) := -\frac{i}{4}(i+k^2) \int_0^{2\pi} H_0(k|x-z(\tau)|) \psi(\tau) |z'(\tau)| d\tau$$

$$B_{22}(z) : C^{0,\alpha}(B) \longrightarrow C^{0,\alpha}(B)$$

$$(B_{22}(z)\chi)(x) := \frac{i}{4}(i+k^2) \int_B H_0(k|x-y|) \chi(y) dy$$

sowie

$$\psi := \varphi \circ z.$$

Sei  $G \subset \mathbb{R}^2$  ein Gebiet, dessen Abschluß  $\bar{G}$  ganz in  $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$  enthalten ist. Der *Potentialoperator*  $P$  ist definiert durch

$$P(z) : C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \times C^{0,\alpha}(B) \longrightarrow C^1(G)$$

$$\left( P(z) \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} \right) (x) := \frac{i}{4} \int_B H_0(k|x-y|) \chi(y) dy - \frac{i}{4} \int_0^{2\pi} H_0(k|x-z(\tau)|) \psi(\tau) |z'(\tau)| d\tau$$

und der *Fernfeldoperator*  $F$  durch

$$F(z) : C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \times C^{0,\alpha}(B) \longrightarrow L^2(S^1)$$

$$\left( F \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} \right) (\hat{x}) = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{8\pi k}} \left( \int_B e^{-ik\langle \hat{x}, y \rangle} \chi(y) dy - \int_0^{2\pi} e^{-ik\langle \hat{x}, y \rangle} \psi(\tau) |z'(\tau)| d\tau \right).$$

Damit kann der folgende Satz formuliert werden:

**Satz 3.5** *Das Streuproblem an einem schallharten Hindernis  $D$  ist für jede einfallende Welle  $u_i(x) = e^{ik\langle x, d \rangle}$  eindeutig lösbar. Wird der Rand  $\Gamma$  von  $D$  durch  $z \in RP$  parametrisiert, sind das gestreute Feld  $u_s(z)$  und sein Fernfeld  $u_\infty(z)$  gegeben durch*

$$u_s(z) = P(z)(I + B(z))^{-1} \begin{pmatrix} -2N(z)u_i \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$u_\infty(z) = F(z)(I + B(z))^{-1} \begin{pmatrix} -2N(z)u_i \\ 0 \end{pmatrix}.$$

**Beweis:** Die Aussage folgt aus den Sätzen 1.16, 1.17 und 1.12. ■

## 3.2 Die Fréchet-Differenzierbarkeit der Integraloperatoren

Zunächst zeige ich einige Abschätzungen für die Parametrisierungsfunktionen.

**Lemma 3.6** Sei  $\mathbf{z} \in RP$ . Dann gibt es Konstanten  $c_1, C_2, C_3, C_4, q > 0$ , so daß

$$|z(t) - z(\tau)| \geq c_1 |t - \tau| \quad (3.1)$$

$$|z(t) - z(\tau)| \leq C_2 |t - \tau| \quad (3.2)$$

$$|H_0^{(m)}(k|z(t) - z(\tau)|) \leq C_3 |t - \tau|^{-m}, \quad m \in \{1, 2, 3\} \quad (3.3)$$

$$\left| \frac{\partial^m}{\partial z^m} \{ \langle z(t) - z(\tau), n(t; z) \rangle \} (z, h) \right| \leq C_4 |t - \tau|^2 \|h\|^m, \quad m \in \{0, 1, 2\} \quad (3.4)$$

für alle  $z \in C_{2\pi}^{2,\alpha}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$  mit  $\|z - \mathbf{z}\| < q$ ,  $h \in C_{2\pi}^{2,\alpha}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$  und alle  $t, \tau \in \mathbb{R}$  mit  $|t - \tau| \leq \pi$ .

**Beweis:** Sei  $K := \{(t, \tau) \in \mathbb{R}^2 : t \in [0, 2\pi] \text{ und } |t - \tau| \leq \pi\}$ . Offenbar reicht es, für jede Ungleichung ein  $q > 0$  anzugeben, so daß die Ungleichung für alle  $\|z - \mathbf{z}\| < q$  und alle  $(t, \tau) \in K$  gültig ist.

(3.1) Betrachte die Abbildung  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(t, \tau) := \begin{cases} \frac{|z(t) - z(\tau)|}{|t - \tau|} & \text{für } t \neq \tau \\ |z'(t)| & \text{für } t = \tau. \end{cases}$$

$f$  ist stetig und positiv auf  $K$ . Für  $t \neq \tau$  folgt die Positivität von  $f$  aus der  $2\pi$ -Periodizität und der Injektivität von  $\mathbf{z}|_{[0, 2\pi]}$ , für  $t = \tau$  aus der Bedingung  $|z'| > 0$ . Da eine stetige Funktion auf einem Kompaktum ihr Infimum annimmt, existiert ein  $c > 0$  mit  $f(t, \tau) \geq c$  für alle  $(t, \tau) \in K$ . Nach einer Multiplikation mit  $|t - \tau|$  erhält man daraus  $|z(t) - z(\tau)| \geq c|t - \tau|$  für alle  $|t - \tau| \in K$ .

Für  $z \in C_{2\pi}^{2,\alpha}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$  mit  $\|z - \mathbf{z}\| \leq \frac{c}{2}$  ergibt sich

$$\begin{aligned} |z(t) - z(\tau)| &\geq |z(t) - z(\tau)| - |(z - \mathbf{z})(t) - (z - \mathbf{z})(\tau)| \\ &\geq c|t - \tau| - \|(z - \mathbf{z})'\|_\infty |t - \tau| \geq \frac{c}{2} |t - \tau|. \end{aligned}$$

Also gilt (3.1) mit  $c_1 := \frac{c}{2}$  in einer Kugel um  $\mathbf{z}$  mit dem Radius  $\frac{c}{2}$ .

(3.2) Sei  $q > 0$ . Nach dem Mittelwertsatz gilt für alle  $z \in C_{2\pi}^{2,\alpha}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$  mit  $\|z - \mathbf{z}\| < q$  für alle  $(t, \tau) \in K$  die Ungleichung

$$|z(t) - z(\tau)| \leq \|z'\|_\infty |t - \tau| \leq (\|z_0'\|_\infty + q) |t - \tau|.$$

(3.3) Aus der Reihendarstellung (1.6) und (1.7) der Bessel- und Neumannfunktion ergibt sich  $|H_0^{(m)}(x)| = O(x^{-m})$  für  $x \rightarrow 0$  und  $m = 1, 2, 3, \dots$ . Also existiert für

beliebiges  $q > 0$  eine Konstante  $C'_3 > 0$ , so daß  $|H_0^{(m)}(x)| \leq \frac{C'_3}{x^m}$  für  $0 < x \leq 2k(\|\mathbf{z}\|_\infty + q)$  und  $m = 1, 2, 3$ . Daraus folgt (3.3) mit Hilfe von (3.1).

(3.4) Nach der Taylorformel gilt für alle  $z \in C_{2\pi}^{2,\alpha}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ , die hinreichend nahe bei  $\mathbf{z}$  liegen, so daß  $n(t; z)$  wohldefiniert ist, die Gleichung

$$\begin{aligned} & \langle z(t) - z(\tau), n(t; z) \rangle \\ &= \left\langle -z'(t)(\tau - t) - \int_0^1 (1-s)z''(t + (\tau - t)s) ds (\tau - t)^2, n(t; z) \right\rangle \\ &= R(t, \tau; z) |t - \tau|^2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

mit

$$R(t, \tau; z) := - \left\langle \int_0^1 (1-s)z''(t + (\tau - t)s) ds, n(t; z) \right\rangle.$$

Für festes  $(t, \tau)$  ist  $R(t, \tau; z)$  beliebig oft nach  $z$  Fréchet-differenzierbar, denn  $n(t; z)$  ist beliebig oft differenzierbar und ebenso die beschränkte lineare Abbildung  $z \mapsto \int_0^1 (1-s)z''(t + (\tau - t)s) ds$ . Man sieht leicht, daß es eine Konstante  $C_4$  und ein  $q > 0$  gibt, so daß

$$\left| \frac{\partial^m}{\partial z^m} R(t, \tau; z, h) \right| \leq C_4 \|h\|^m$$

für alle  $(t, \tau) \in K$ ,  $\|z - \mathbf{z}\| \leq q$ ,  $h \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$  und  $m \in \{0, 1, 2\}$ . Wegen (3.5) ist damit auch (3.4) bewiesen. ■

**Lemma 3.7**  $RP \subset C_{2\pi}^{2,\alpha}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$  ist offen.

**Beweis:** Sei  $\mathbf{z} \in RP$ . Es ist zu zeigen, daß es ein  $r > 0$  gibt, so daß alle  $z \in C_{2\pi}^{2,\alpha}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$  mit  $\|z - \mathbf{z}\| < r$  den drei Eigenschaften aus Definition 3.4 genügen:

Ist  $r < q$  mit dem  $q$  aus Lemma 3.6, so sind alle  $z$  mit  $\|z - \mathbf{z}\| < r$  wegen (3.1) und der  $2\pi$ -Periodizität injektiv. Ist außerdem  $r < \frac{1}{2} \inf_{t \in [0, 2\pi]} |\mathbf{z}'(t)|$ , so sind alle  $z$  mit  $\|z - \mathbf{z}\| < r$  auch regulär.

Für die 3. Eigenschaft ist zunächst zu überlegen, wie Linksoorientiertheit definiert werden kann. Ich benutze dazu den Begriff der Umlaufzahl aus der Funktionentheorie.  $\mathbb{R}^2$  wird dabei als  $\mathbb{C}$  aufgefaßt und entsprechend  $z$  als komplexwertig. Nach dem Jordan'schen Kurvensatz wird die Ebene durch die Kurve  $\Gamma := \mathbf{z}(\mathbb{R})$  in ein Innengebiet und ein Außengebiet geteilt. Für alle Punkte  $\xi$  aus dem Innengebiet gilt für die Umlaufzahl

$$n(\xi, \mathbf{z}) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dz}{z - \xi} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{\mathbf{z}'(t) dt}{\mathbf{z}(t) - \xi},$$

daß  $n(\xi, \mathbf{z}) \in \{-1, 1\}$  und daß der Wert nicht von der Wahl von  $\xi$  abhängt. Ist er gleich 1, heißt  $\mathbf{z}$  *linksoorientiert*, anderenfalls *rechtsorientiert*. Wähle nun einen beliebigen Punkt  $\xi$  aus dem Innengebiet. Er hat einen positiven Abstand  $d > 0$  von  $\Gamma$ . Für  $z \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$  mit  $\|z - \mathbf{z}\|_\infty < \frac{d}{2}$  ist die Funktion  $g : [0, 1] \mapsto \{1, -1\}$ ,  $g(\lambda) := n(\xi, \lambda z + (1 - \lambda)\mathbf{z})$  wohldefiniert und stetig. Deshalb ist  $g(0) = g(1)$ , d.h.  $z$  und  $\mathbf{z}$  haben die gleiche Umlaufzahl. Wähle deshalb  $r = \min\left(q, \frac{1}{2} \inf_{t \in [0, 2\pi]} |\mathbf{z}'(t)|, \frac{d}{2}\right)$ . ■

**Satz 3.8 (Fréchet-Differenzierbarkeit der Integraloperatoren)**

Die Abbildungen

$$\begin{aligned}
B : RP &\longrightarrow L(C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \times C^{0,\alpha}(B), C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \times C^{0,\alpha}(B)) \\
z &\longmapsto B(z), \\
P : RP &\longrightarrow L(C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \times C^{0,\alpha}(B), C(G)) \\
z &\longmapsto P(z), \\
F : RP &\longrightarrow L(C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \times C^{0,\alpha}(B), L^2(S^1)) \\
z &\longmapsto F(z)
\end{aligned}$$

sind Fréchet-differenzierbar.

**Beweis:** Für alle Operatoren kann die Fréchet-Differenzierbarkeit mit Hilfe von Satz 2.7 nachgewiesen werden. Hier soll nur für den schwierigsten Fall des Operators  $B_{11}$  gezeigt werden, daß die Voraussetzungen dieses Satzes erfüllt sind:

Es gelten die Spezifikationen  $X = C_{2\pi}^{2,\alpha}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ ,  $X' = RP$ ,  $G_1 = G_2 = [0, 2\pi)$ , sowie  $Q = \{(t, \tau) \in [0, 2\pi)^2 : t \neq \tau\}$ .  $f : Q \times RP \rightarrow \mathbb{C}$  ist der Kern des Operators  $B_{11}$  ohne den Vorfaktor  $(-\frac{ik}{2})$ . Ich verifiziere der Reihe nach die Voraussetzungen von Satz 2.7:

1.  $f$  ist für festes  $(t, \tau) \in \mathbb{R}^2$  mit  $t - \tau \notin \{2\pi n : n \in \mathbb{Z}\}$  zweimal nach  $z$  Fréchet-differenzierbar, und es gilt

$$\begin{aligned}
f(t, \tau; z) &= \frac{H'_0(k|\tilde{z}|)}{|\tilde{z}|} \langle \tilde{z}, n \rangle |z'(\tau)|, \\
\frac{\partial f}{\partial z}(t, \tau; z, h) &= \left( \frac{kH''_0(k|\tilde{z}|)}{|\tilde{z}|^2} - \frac{H'_0(k|\tilde{z}|)}{|\tilde{z}|^3} \right) \langle \tilde{z}, \tilde{h} \rangle \langle \tilde{z}, n \rangle |z'(\tau)| \\
&\quad + \frac{H'_0(k|\tilde{z}|)}{|\tilde{z}|} \frac{\partial}{\partial z} \{ \langle \tilde{z}, n \rangle \}(z, h) |z'(\tau)| \\
&\quad + \frac{H'_0(k|\tilde{z}|)}{|\tilde{z}|} \langle \tilde{z}, n \rangle \frac{\langle z'(\tau), h'(\tau) \rangle}{|z'(\tau)|}, \quad \text{sowie} \\
\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(t, \tau; z, h) &= 2 \frac{H'_0(k|\tilde{z}|)}{|\tilde{z}|} \frac{\partial}{\partial z} \{ \langle \tilde{z}, n \rangle \}(z, h) \frac{\langle z'(\tau), h'(\tau) \rangle}{|z'(\tau)|} \\
&\quad + 2 \left( \frac{kH''_0(k|\tilde{z}|)}{|\tilde{z}|^2} - \frac{H'_0(k|\tilde{z}|)}{|\tilde{z}|^3} \right) \langle \tilde{z}, \tilde{h} \rangle \frac{\partial}{\partial z} \{ \langle \tilde{z}, n \rangle \}(z, h) |z'(\tau)| \\
&\quad + 2 \left( \frac{kH''_0(k|\tilde{z}|)}{|\tilde{z}|^2} - \frac{H'_0(k|\tilde{z}|)}{|\tilde{z}|^3} \right) \langle \tilde{z}, \tilde{h} \rangle \langle \tilde{z}, n \rangle \frac{\langle z'(\tau), h'(\tau) \rangle}{|z'(\tau)|} \\
&\quad + \left[ \left( \frac{k^2 H'''_0(k|\tilde{z}|)}{|\tilde{z}|^3} - 3 \frac{kH''_0(k|\tilde{z}|)}{|\tilde{z}|^4} + 3 \frac{H'_0(k|\tilde{z}|)}{|\tilde{z}|^5} \right) \langle \tilde{z}, \tilde{h} \rangle^2 \right. \\
&\quad \quad \left. + \left( \frac{kH''_0(k|\tilde{z}|)}{|\tilde{z}|^2} - \frac{H'_0(k|\tilde{z}|)}{|\tilde{z}|^3} \right) |\tilde{h}|^2 \right] \langle \tilde{z}, n \rangle |z'(\tau)|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{H'_0(k|\tilde{z}|)}{|\tilde{z}|} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \{ \langle \tilde{z}, n \rangle \} (z, h) |z'(\tau)| \\
& + \frac{H'_0(k|\tilde{z}|)}{|\tilde{z}|} \langle \tilde{z}, n \rangle \left( \frac{|h(\tau)|^2}{|z'(\tau)|} - \frac{\langle z(\tau), h(\tau) \rangle^2}{|z'(\tau)|^3} \right).
\end{aligned}$$

Dabei ist  $\tilde{z} := z(t) - z(\tau)$ ,  $\tilde{h} := h(t) - h(\tau)$  und  $n := n(t; z)$ . Insbesondere ist  $f$  natürlich für  $(t, \tau) \in Q$  zweimal stetig Fréchet-differenzierbar.

2. Es gilt  $B_{11}(z), \frac{\partial B_{11}}{\partial z}(z, h) \in L(C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}))$ , da die Funktionen  $f(\cdot, \cdot; z)$  und  $\frac{\partial f}{\partial z}(\cdot, \cdot; z, h)$  beschränkt sind, wie im nächsten Punkt gezeigt werden wird.
3. Wendet man die Abschätzungen (3.1)-(3.4) aus Lemma 3.6 auf die in Punkt 1. ausgeschriebenen Ableitungen von  $f$  an, so ergibt sich, daß es für jedes  $\mathbf{z} \in RP$  Konstanten  $C, q > 0$  gibt, so daß

$$\left| \frac{\partial^m f}{\partial z^m}(t, \tau; z, h) \right| \leq C \|h\|^m$$

für  $m \in \{0, 1, 2\}$ , für alle  $(t, \tau) \in \mathbb{R}^2$  mit  $|t - \tau| \leq \pi$ , alle  $h \in C_{2\pi}^{2,\alpha}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$  und für alle  $z \in RP$  mit  $\|z - \mathbf{z}\| < q$ . Wegen der  $2\pi$ -Periodizität von  $f$  gilt diese Abschätzung auch für alle  $(t, \tau) \in Q$ .

Für die Operatoren  $P, F$  und die anderen Komponenten von  $B$  ist die 3. Bedingung von Satz 2.7 wesentlich leichter einzusehen, da die Kerne und ihre Ableitungen hier beschränkt sind. Es ist zu beachten, daß Satz 2.7 in der gegebenen Formulierung nur Fréchet-Differenzierbarkeit in der Supremumsnorm ergibt. Er kann aber bei allen angegebenen Operatoren herangezogen werden, um Fréchet-Differenzierbarkeit zunächst in einer stärkeren Norm zu beweisen, was dann die Fréchet-Differenzierbarkeit in der gewünschten Norm impliziert. Betrachte dazu  $B_{12}(z) : C(B) \rightarrow C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ ,  $\text{grad } B_{21} : C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow C(B; \mathbb{C}^2)$ ,  $P : C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \times C(B) \rightarrow C(G)$ ,  $\text{grad } P : C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \times C(B) \rightarrow C(G, \mathbb{C}^2)$  und  $F : C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \times C(B) \rightarrow C(S^1)$ . Die Ableitung von  $B_{22}$  verschwindet. ■

Nach diesen Vorbereitungen kann bereits ein erstes Teilergebnis gezeigt werden.

**Satz 3.9** *Bei fester einfallender Welle  $u_i$  sind die Abbildungen  $RP \rightarrow C(G)$ ,  $z \mapsto u_s(z)$  und  $RP \rightarrow L^2(S^1)$ ,  $z \mapsto u_\infty(z)$  Fréchet-differenzierbar, und es gilt für jedes  $\mathbf{z} \in RP$*

$$\begin{aligned}
u'_s(\mathbf{z}, h) &= P'(\mathbf{z}, h)(I + B(\mathbf{z}))^{-1} \begin{pmatrix} -2N(\mathbf{z})u_i \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\quad - P(\mathbf{z})(I + B(\mathbf{z}))^{-1} B'(\mathbf{z}, h)(I + B(\mathbf{z}))^{-1} \begin{pmatrix} -2N(\mathbf{z})u_i \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$+P(\mathbf{z})(I + B(\mathbf{z}))^{-1} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \begin{pmatrix} -2N(z)u_i \\ 0 \end{pmatrix} \right\}(\mathbf{z}, h) \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} u'_\infty(\mathbf{z}, h) &= F'(\mathbf{z}, h)(I + B(\mathbf{z}))^{-1} \begin{pmatrix} -2N(\mathbf{z})u_i \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\quad -F(\mathbf{z})(I + B(\mathbf{z}))^{-1} B'(\mathbf{z}, h)(I + B(\mathbf{z}))^{-1} \begin{pmatrix} -2N(\mathbf{z})u_i \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\quad +F(\mathbf{z})(I + B(\mathbf{z}))^{-1} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \begin{pmatrix} -2N(z)u_i \\ 0 \end{pmatrix} \right\}(\mathbf{z}, h). \end{aligned} \quad (3.7)$$

$u'_s(\mathbf{z}, h)$  ist wieder eine ausstrahlende Lösung der Helmholtz-Gleichung, und es gilt  $u'_\infty(\mathbf{z}, h) = (u'_s(\mathbf{z}, h))_\infty$ .

**Beweis:** Man kann elementar verifizieren, daß die Abbildung  $z \mapsto 2N(z)u_i$  von  $RP$  nach  $C_{2\pi}^{1,\alpha}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  Fréchet-differenzierbar ist. (3.6) und (3.7) folgen aus den Sätzen 3.5, 3.8, der Produktregel 2.4 und der Quotientenregel 2.5. Nach Lemma 1.2 ist  $u'_s(\mathbf{z}, h)$  eine ausstrahlende Lösung der Helmholtz-Gleichung. Deshalb ist der Ausdruck  $(u'_s(\mathbf{z}, h))_\infty$  sinnvoll. Es ist noch zu zeigen, daß er gleich  $u'_\infty(\mathbf{z}, h)$  ist. Offenbar gilt

$$\left( P(\mathbf{z}) \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} \right)_\infty = F(\mathbf{z}) \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix}.$$

Deshalb stimmen jeweils die letzten beiden Summanden von (3.7) und dem Fernfeld von (3.6) überein. Die ersten Summanden stimmen aber ebenfalls überein, denn aus dem asymptotischen Verhalten (1.10) und den Gleichungen (3.6) und (3.7) ergibt sich

$$\left( P'(\mathbf{z}, h) \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} \right)_\infty = F'(\mathbf{z}, h) \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix}.$$

■

**Bemerkung:** Man sieht an Gl. (3.6), daß  $u'_s(\mathbf{z}, h)$  unabhängig ist von dem aus beweistechnischen Gründen eingeführten Gebiet  $G$ , d.h. falls  $G_1, G_2 \subset \mathbb{R}^2$ , so daß  $\bar{G}_1, \bar{G}_2 \subset \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ , dann gilt  $(u'_{s,G_1}(\mathbf{z}, h))(x) = (u'_{s,G_2}(\mathbf{z}, h))(x)$  für alle  $x \in G_1 \cap G_2$ . Deshalb kann  $u'_s(\mathbf{z}, h)$  auf dem ganzen Außenraum  $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$  definiert werden.

### 3.3 Charakterisierung der Fréchet-Ableitung durch ein Randwertproblem

**Lemma 3.10** Seien  $X$  ein normierter Raum,  $X' \subset X$ ,  $G \subset \mathbb{R}^n$  offene Teilmengen und  $X' \rightarrow C^1(G, \mathbb{C})$ ,  $z \mapsto f_z$  sowie  $X' \rightarrow G$ ,  $z \mapsto x_z$  Fréchet-differenzierbare Abbildungen. Dann ist auch die Abbildung  $X' \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $z \mapsto f_z(x_z)$  Fréchet-differenzierbar, und es gilt für jedes  $\mathbf{z} \in X'$  und alle  $h \in X$

$$\frac{\partial}{\partial z} \{ f_z(x_z) \}(\mathbf{z}, h) = \left( \frac{\partial f_z}{\partial z}(\mathbf{z}, h) \right) (x_z) + \left\langle \text{grad } f_z, \frac{\partial x_z}{\partial z}(\mathbf{z}, h) \right\rangle.$$

**Beweis:** Betrachte die Zerlegung

$$\begin{aligned} X' &\xrightarrow{A} C^1(G) \times G \xrightarrow{B} \mathbb{R}^n \\ z &\longmapsto \begin{pmatrix} f_z \\ x_z \end{pmatrix} \longmapsto f_z(x_z). \end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} A'(\mathbf{z}, h) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_z}{\partial z}(\mathbf{z}, h) \\ \frac{\partial x_z}{\partial z}(\mathbf{z}, h) \end{pmatrix} \\ \text{und} \quad B' \left( \begin{pmatrix} f \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} g \\ y \end{pmatrix} \right) &= g(x) + \langle \text{grad } f(x), y \rangle, \end{aligned}$$

denn

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\max(\|g\|_{C^1}, |y|)} |(f+g)(x+y) - f(x) - g(x) - \langle \text{grad } f(x), y \rangle| \\ &\leq \frac{1}{\max(\|g\|_{C^1}, |y|)} (|f(x+y) - f(x) - \langle \text{grad } f(x), y \rangle| + |g(x+y) - g(x)|) \\ &\leq \frac{|f(x+y) - f(x) - \langle \text{grad } f(x), y \rangle|}{|y|} + \frac{\|\text{grad } g\|_{\infty}}{\|g\|_{C^1}} |y| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

für  $\max(\|g\|_{C^1}, |y|) \rightarrow 0$ . Dabei ist  $\|g\|_{C^1} := \|g\|_{\infty} + \|\text{grad } g\|_{\infty}$ . Man erhält nach der Kettenregel

$$\frac{\partial}{\partial z} (f_z(x_z))(\mathbf{z}, h) = B'(A(z), A'(\mathbf{z}, h)) = \left( \frac{\partial f_z}{\partial z}(\mathbf{z}, h) \right)(x) + \left\langle \text{grad } f_z(x), \frac{\partial x_z}{\partial z}(\mathbf{z}, h) \right\rangle. \quad \blacksquare$$

**Bemerkung:** Zu  $\mathbf{z} \in RP$  gibt es ein  $r > 0$ , so daß durch

$$x(t, \rho) := \mathbf{z}(t) + \rho n(t; \mathbf{z}), \quad (t, \rho) \in [0, 2\pi) \times (-r, r), \quad (3.8)$$

ein lokales Koordinatensystem in einer Umgebung von  $\Gamma = \mathbf{z}(\mathbb{R})$  gegeben ist (vgl. [CK1], S. 37). Insbesondere sind für  $\rho \in [0, r)$

$$x_{\mathbf{z}}^{\rho}(t) := \mathbf{z}(t) + \rho n(t; \mathbf{z}), \quad t \in [0, 2\pi), \quad (3.9)$$

injektive,  $C^{1,\alpha}$ -glatte, reguläre Parametrisierungen von Parallelkurven zu  $\Gamma$ .

**Lemma 3.11** Gegeben seien  $\mathbf{z} \in RP$ ,  $r$  wie oben beschrieben, und  $h \in C_{2\pi}^{2,\alpha}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ . Weiter seien  $u_1, u_2, u_3, u_4 : \mathbb{R} \times [0, r] \rightarrow \mathbb{C}$   $2\pi$ -periodische Funktionen der Form:

$$u_j(t, \rho) = \int_0^{2\pi} \Psi_j(t, \tau, \rho; \mathbf{z}, h) K(t, \tau, \rho) [\psi(t) - \psi(\tau)] d\tau \quad j = 1, \dots, 4,$$

mit

$$\begin{aligned}\Psi_1(t, \tau, \rho) &= \langle \mathbf{z}(t) - \mathbf{z}(\tau) + \rho n(t; \mathbf{z}), n(\tau; \mathbf{z}) \rangle, \\ \Psi_2(t, \tau, \rho) &= \langle \mathbf{z}(t) - \mathbf{z}(\tau) + \rho n(t; \mathbf{z}), n(t; \mathbf{z}) \rangle, \\ \Psi_3(t, \tau, \rho) &= \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \langle z(t) - z(\tau) + \rho n(t; z), n(\tau; z) \rangle \right\}(\mathbf{z}, h), \\ \Psi_4(t, \tau, \rho) &= \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \langle z(t) - z(\tau) + \rho n(t; z), n(t; z) \rangle \right\}(\mathbf{z}, h),\end{aligned}$$

sowie einer Funktion  $\psi \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  und einem Kern  $K$ , der stetig ist für  $t \neq \tau$ ,  $2\pi$ -periodisch in  $t$  und  $\tau$  und differenzierbar nach  $\rho$ . Außerdem genüge  $K$  den Abschätzungen

$$|K(t, \tau, \rho)| \leq \frac{C_1}{|\mathbf{z}(t) - \mathbf{z}(\tau) + \rho n(t; \mathbf{z})|^2} \quad (3.10)$$

$$\text{und} \quad \left| \frac{\partial K}{\partial \rho}(t, \tau, \rho) \right| \leq \frac{C_2}{|\mathbf{z}(t) - \mathbf{z}(\tau) + \rho n(t; \mathbf{z})|^3} \quad (3.11)$$

für alle  $t, \tau \in [0, 2\pi)$  mit  $t \neq \tau$  und alle  $\rho \in [0, r)$ . Dann gilt

$$\limsup_{\rho \rightarrow 0} \sup_{t \in \mathbb{R}} |u_j(t, \rho) - u_j(t, 0)| = 0, \quad j = 1, \dots, 4.$$

**Bemerkung:** Für  $K(t, \tau, \rho) = \frac{kH'_0(k|x_{\mathbf{z}}^\rho(t) - \mathbf{z}(\tau)|)}{|x_{\mathbf{z}}^\rho(t) - \mathbf{z}(\tau)|} |\mathbf{z}'(\tau)|$  gilt

$$u_1(t, \rho) = \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x_{\mathbf{z}}^\rho(t), y)}{\partial n(y)} [\varphi(y) - \varphi(x_{\mathbf{z}}^0)] ds(y).$$

Dabei ist  $\varphi \circ \mathbf{z} = \psi$ . Das dreidimensionale Analogon für diesen Fall wurde in [CK1], S. 49, bewiesen. Der Beweis des Lemmas verläuft im wesentlichen analog.

**Beweis:** Für hinreichend kleine  $\rho$  gibt es nach (3.1) und (3.4) eine Konstante  $c_3$ , so daß für alle  $t, \tau \in \mathbb{R}$  mit  $|t - \tau| \leq \pi$

$$\begin{aligned}|\mathbf{z}(t) - \mathbf{z}(\tau) + \rho n(t; \mathbf{z})|^2 &= |\mathbf{z}(t) - \mathbf{z}(\tau)|^2 + 2\rho \langle \mathbf{z}(t) - \mathbf{z}(\tau), n(t; \mathbf{z}) \rangle + \rho^2 \\ &\geq c_3 (|t - \tau|^2 + \rho^2).\end{aligned} \quad (3.12)$$

Weiter gibt es eine Konstante  $C_4 > 0$ , so daß

$$|\Psi_j(t, \tau, \rho)| \leq C_4 (|t - \tau|^2 + \rho), \quad j = 1, \dots, 4.$$

Für  $\Psi_1$  folgt dies mit Hilfe der Aufspaltung

$$\langle \mathbf{z}(t) - \mathbf{z}(\tau) + \rho n(t; \mathbf{z}), n(\tau; \mathbf{z}) \rangle = \langle \mathbf{z}(t) - \mathbf{z}(\tau); n(\tau; \mathbf{z}) \rangle + \rho \langle n(t; \mathbf{z}), n(\tau; \mathbf{z}) \rangle$$

aus Ugl.(3.4) für  $m = 0$ . Für  $\Psi_2, \Psi_3$  und  $\Psi_4$  verwendet man analoge Aufspaltungen und Ugl.(3.4) mit  $m = 1$  für  $\Psi_3$  und  $\Psi_4$ .

Es gilt für alle  $0 < \delta < \pi$  und  $j = 1, \dots, 4$

$$\begin{aligned} \int_{t-\delta}^{t+\delta} |\Psi_j(t, \tau, \rho)K(t, \tau, \rho)| \, d\tau &\leq \frac{C_1 C_4}{c_3} \int_{t-\delta}^{t+\delta} \frac{|t-\tau|^2 + \rho}{|t-\tau|^2 + \rho^2} \, d\tau \\ &< \frac{C_1 C_4}{c_3} \left\{ \int_{-\delta}^{\delta} dx + \rho \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + \rho^2} \right\} \leq 3\pi \frac{C_1 C_4}{c_3}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Durch Anwendung des Mittelwertsatzes erhält man mit Hilfe von (3.10), (3.11) und (3.12), daß es eine Konstante  $C_5 > 0$  gibt, so daß für alle  $\rho \in [0, r]$  und alle  $t, \tau \in \mathbb{R}$  mit  $|t - \tau| \leq \pi$  und  $t \neq \tau$  gilt

$$\begin{aligned} &|\Psi_j(t, \tau, \rho)K(t, \tau, \rho) - \Psi_j(t, \tau, 0)K(t, \tau, 0)| \\ &\leq \rho \sup_{\tilde{\rho} \in [0, \rho]} \left( \frac{\partial \Psi_j}{\partial \rho}(t, \tau, \tilde{\rho})K(t, \tau, \tilde{\rho}) + \Psi_j(t, \tau, \tilde{\rho}) \frac{\partial K}{\partial \rho}(t, \tau, \tilde{\rho}) \right) \\ &\leq \frac{C_5 \rho}{|t - \tau|^3}, \quad j = 1, \dots, 4. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich für  $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} &\int_{[t-\pi, t-\delta] \cup [t+\delta, t+\pi]} |\Psi_j(t, \tau, \rho)K(t, \tau, \rho) - \Psi_j(t, \tau, 0)K(t, \tau, 0)| \, d\tau \\ &\leq \frac{2\pi C_5 \rho}{\delta^3}, \quad j = 1, \dots, 4. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Setzt man (3.13) und (3.14) zusammen, so erhält man eine Konstante  $C_6$ , so daß

$$|u_j(t, \rho) - u_j(t, 0)| \leq C_6 \left\{ \sup_{|t-\tau| \leq \delta} |\psi(t) - \psi(\tau)| + \frac{\rho}{\delta^3} \right\}, \quad j = 1, \dots, 4.$$

für alle hinreichend kleinen  $\rho \geq 0$ ,  $t \in \mathbb{R}$  und  $0 < \delta \leq \pi$ .

Sei nun  $\epsilon > 0$ . Da  $\psi$  gleichmäßig stetig ist, existiert ein  $\delta > 0$ , so daß für alle  $|t - \tau| < \delta$

$$|\psi(t) - \psi(\tau)| \leq \frac{\epsilon}{2C_6}.$$

Dann gilt für  $0 \leq \rho < \frac{\epsilon}{2C_6} \delta^3$  die Ungleichung

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |u_j(t, \rho) - u_j(t, 0)| < \epsilon, \quad j = 1, \dots, 4. \quad \blacksquare$$

**Satz 3.12** Sei  $\mathbf{z} \in RP$  und  $h \in C_{2\pi}^{2,\alpha}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ . Dann erfüllt  $u'_s(\mathbf{z}, h)$  die Neumann-Randbedingung

$$\frac{\partial u'_s(\mathbf{z}, h)}{\partial n}(\mathbf{z}(t)) = RB(t; u), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.15)$$

Dabei ist  $u$  das Gesamtfeld bei Streuung von  $u_i$  an dem zu  $\mathbf{z}$  gehörigen Gebiet  $D$  und

$$RB(t; u) := - \left\langle \frac{\partial n}{\partial \mathbf{z}}(t; \mathbf{z}, h), \text{grad } u(\mathbf{z}(t)) \right\rangle - \sum_{i,j=1}^2 h_i(t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{z}(t)) n_j(t; \mathbf{z}).$$

**Beweis: 1)** Nach den Sätzen 1.16 und 1.17 gilt für alle  $(f, g) \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \times C(B)$  die Gleichung

$$N(\mathbf{z})P(\mathbf{z})(I + B(\mathbf{z}))^{-1} \begin{pmatrix} 2f \\ g \end{pmatrix} = f,$$

also  $N(\mathbf{z})P(\mathbf{z})(I + B(\mathbf{z})) = \frac{1}{2}pr_1$ , wobei  $pr_1$  die Projektion auf die erste Komponente des Produktraums ist. Mit Hilfe von Satz 3.9 erhält man daraus

$$N(\mathbf{z})u'_s(\mathbf{z}, h) = N(\mathbf{z})P'(\mathbf{z}, h)\theta - \frac{1}{2}pr_1B'(\mathbf{z}, h)\theta - \frac{\partial(N(z)u_i)}{\partial z}(\mathbf{z}, h) \quad (3.16)$$

wobei

$$\theta := \begin{pmatrix} \psi \\ \chi \end{pmatrix} := (I + B(\mathbf{z}))^{-1} \begin{pmatrix} -2N(\mathbf{z})u_i \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dabei ist die Existenz von  $N(\mathbf{z})P'(\mathbf{z}, h)\theta$  noch nachzuweisen. Für den letzten Term von (3.16) ergibt sich nach Produkt- und Kettenregel

$$-\frac{\partial(N(z)u_i)}{\partial z}(\mathbf{z}, h) = -\frac{\partial}{\partial z} \left\{ \langle n(\cdot; z), \text{grad } u_i(z) \rangle \right\}(\mathbf{z}, h) = RB(\cdot; u_i).$$

Die Doppelsumme im zweiten Summanden von  $RB$  entsteht, indem die beiden auftretenden Skalarprodukte als Summen geschrieben werden. Da  $u - u_i = u_s$  und  $RB$  linear in  $u$  ist, ergibt sich nach Einsetzen und Umstellen, daß noch die Beziehung

$$\frac{1}{2}pr_1B'(\mathbf{z}, h)\theta = N(\mathbf{z})P'(\mathbf{z}, h)\theta - RB(\cdot; u_s). \quad (3.17)$$

zu beweisen ist.

Existiert die Normalableitung von  $w \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D})$ , so gilt nach der Kettenregel  $(N(\mathbf{z})w)(t) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \rho} w(x_{\mathbf{z}}^\rho(t))$ . Dabei sind  $x_{\mathbf{z}}^\rho$ ,  $\rho \in [0, r)$  die in (3.9) definierten Parametrisierungen von Parallelkurven zu  $\Gamma$ . Insbesondere ist

$$(N(\mathbf{z})P'(\mathbf{z}, h)\theta)(t) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \rho} (P'(\mathbf{z}, h)\theta)(x_{\mathbf{z}}^\rho(t)), \quad (3.18)$$

wobei nachzuweisen ist, daß der Limes  $\rho \rightarrow 0$  gleichmäßig für  $t \in \mathbb{R}$  existiert.

Auf der linken Seite von (3.17) wird von dem Potential  $P(z)\theta$  zuerst die Normalableitung auf dem Rand gebildet - dies ergibt den Ausdruck  $B(z)\theta$  - und anschließend nach  $z$  differenziert, wobei nach Definition von  $B$  die Stelle  $z(t)$ , an der ausgewertet wird, "mitdifferenziert" wird. In (3.18) wird das Potential  $P(z)\theta$  zuerst nach  $z$  abgeleitet, wobei die Punkte, an denen das Potential ausgewertet wird, nicht von  $z$  abhängen, und abschließend wird die Normableitung gebildet.

Ich werde in den folgenden Beweisschritten zeigen, daß beide Seiten von (3.17) gleich dem Ausdruck

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\partial}{\partial z} \{P(z)\theta(x_{\mathbf{z}}^\rho)\}(\mathbf{z}, h) \quad (3.19)$$

sind und daß dieser Limes gleichmäßig in  $t$  existiert. Hier wird ebenfalls zunächst nach  $z$  differenziert und anschließend die Normalableitung gebildet, jedoch wird der Auswertungspunkt  $x_z^\rho(t)$  in die Differentiation nach  $z$  einbezogen.

**2)** Ich zeige, daß (3.19) gleich der rechten Seite von (3.17) ist. Eine Anwendung von Lemma 3.10 ergibt für  $\rho \in (0, r)$  und  $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial z} \{P(z)\theta(x_z^\rho(t))\}(\mathbf{z}, h) \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial z} \{P(z)\theta\}(\mathbf{z}, h) \right) (x_z^\rho(t)) + \left\langle \text{grad } (P(\mathbf{z})\theta)(x_z^\rho(t)), \frac{\partial x_z^\rho}{\partial z}(t; \mathbf{z}, h) \right\rangle. \end{aligned}$$

Nach Satz 3.3 ist  $u_s = P(\mathbf{z})\theta$  als Lösung eines äußeren Neumann-Problems mit  $C^{2,\alpha}$ -glatttem Rand bis auf den Rand zweimal stetig differenzierbar. Deshalb existiert die Normalableitung des letzten Terms, und man erhält

$$\begin{aligned} & \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \rho} \left\langle \text{grad } P(\mathbf{z})\theta(x_z^\rho), \frac{\partial x_z^\rho}{\partial z}(\mathbf{z}, h) \right\rangle \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \rho} \left\langle \text{grad } u_s(x_z^\rho), h(t) + \rho \frac{\partial n}{\partial z}(t; \mathbf{z}, h) \right\rangle \\ &= \lim_{\rho \rightarrow 0} \left\langle \text{grad } u_s(x_z^\rho), \frac{\partial n}{\partial z}(t; \mathbf{z}, h) \right\rangle \\ & \quad + \lim_{\rho \rightarrow 0} \left\langle \frac{\partial}{\partial \rho} (\text{grad } u_s(x_z^\rho)), h(t) + \rho \frac{\partial n}{\partial z}(t; \mathbf{z}, h) \right\rangle \\ &= -RB(t; u_s). \end{aligned}$$

gleichmäßig in  $t$ . Unter Benutzung von (3.18) folgt damit

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\partial}{\partial z} \{P(z)\theta(x_z^\rho(t))\}(\mathbf{z}, h) = (N(\mathbf{z})P'(\mathbf{z}, h)\theta)(t) - RB(t; u_s)$$

und die Existenz von  $N(\mathbf{z})P'(\mathbf{z}, h)\theta$ , sofern der Limes in (3.19) gleichmäßig in  $t$  existiert.

**3)** In den letzten beiden Beweisschritten zeige ich, daß (3.19) auch mit der linken Seite von (3.17) übereinstimmt und daß der Limes gleichmäßig in  $t$  existiert. Es gilt für  $\rho \in (0, r)$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\partial}{\partial z} \{P(z)\theta(x_z^\rho)\}(\mathbf{z}, h) \tag{3.20} \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \rho} \left\{ \int_B \Phi(x_z^\rho, y)\chi(y) dy - \int_{\Gamma(z)} \Phi(x_z^\rho, y)\varphi(y) ds(y) \right\}(\mathbf{z}, h) \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left\langle n(\cdot; z), \int_B (\text{grad}_x(x_z^\rho, y))\chi(y) dy \right\rangle \right\}(\mathbf{z}, h) \\ & \quad - \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left\langle n(\cdot; z), \int_{\Gamma(z)} (\text{grad}_x \Phi(x_z^\rho, y))\varphi(y) ds(y) \right\rangle \right\}(\mathbf{z}, h). \end{aligned}$$

Die Vertauschbarkeit der Ableitungen folgt aus Satz 2.3, denn man kann, z.B. mit Hilfe von Korollar 2.8 zeigen, daß die Abbildung  $RP \times (0, r) \rightarrow \mathbb{C}_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), (z, \rho) \mapsto P(z)\theta(x_z^\rho)$  zweimal stetig partiell Fréchet-differenzierbar und deshalb zweimal stetig Fréchet-differenzierbar auf dem Produktraum  $RP \times (0, r)$  ist.

Für die linke Seite von (3.17) ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}pr_1 B'(\mathbf{z}, h)\theta &= \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left\langle n(\cdot; z), \int_B (\text{grad}_x(x_z^0, y))\chi(y) dy \right\rangle \right\}(\mathbf{z}, h) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left\langle n(\cdot; z), \int_{\Gamma(z)} (\text{grad}_x \Phi(x_z^0, y))\varphi(y) ds(y) \right\rangle \right\}(\mathbf{z}, h). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Dabei ist wieder  $\psi = \varphi \circ z$ . Es muß also nachgewiesen werden, daß (3.20) für  $\rho \rightarrow 0$  gleichmäßig in  $t \in \mathbb{R}$  gegen (3.21) konvergiert, oder anders ausgedrückt, daß (3.20) gleichmäßig in  $t$  stetig bei  $\rho = 0$  ist.

Für das Integral über  $B$  ist dies klar, da die Ableitungen der Grundlösung beschränkt sind. Um auch für das Integral

$$I := I(t, \rho; z) := \int_{\Gamma(z)} \frac{\partial \Phi(x_z^\rho(t), y)}{\partial n(x)} \varphi(y) ds(y)$$

die Stetigkeit bei  $\rho = 0$  zu beweisen, schreibe ich

$$I = I_1 + \varphi(x_z^0)\tilde{I}$$

mit

$$\begin{aligned} I_1 &:= \int_{\Gamma(z)} \frac{\partial \Phi(x_z^\rho, y)}{\partial n(x)} [\varphi(y) - \varphi(x_z^0)] ds(y) \\ \text{und } \tilde{I} &:= \int_{\Gamma(z)} \frac{\partial \Phi(x_z^\rho, y)}{\partial n(x)} ds(y). \end{aligned}$$

Da  $\text{grad}_x \Phi(x, y) = -\text{grad}_y \Phi(x, y)$ , erhält man durch Aufspaltung des Gradienten in einen Anteil parallel zu  $n(y)$  und einen Anteil parallel zu  $T(y)$  (dem normierten Tangentialvektor bei  $y$ )

$$\tilde{I} = \left\langle n(x_z^0), - \int_{\Gamma(z)} \frac{\partial \Phi(x_z^\rho, y)}{\partial s(y)} T(y) ds(y) - \int_{\Gamma(z)} \frac{\partial \Phi(x_z^\rho, y)}{\partial n(y)} n(y) ds(y) \right\rangle.$$

Daraus ergibt sich

$$\tilde{I} = I_2 + I_3 + I_4$$

mit

$$\begin{aligned} I_2 &:= \left\langle n(x_z^0), \int_{\Gamma(z)} \Phi(x_z^\rho, y) \frac{d}{ds(y)} \{T(y)\} ds(y) \right\rangle \\ I_3 &:= \int_{\Gamma(z)} \left\langle n(x_z^0), n(x_z^0) - n(y) \right\rangle \frac{\partial \Phi(x_z^\rho, y)}{\partial n(y)} ds(y) \\ I_4 &:= - \int_{\Gamma(z)} \frac{\partial \Phi(x_z^\rho, y)}{\partial n(y)} ds(y). \end{aligned}$$

$I_2$  erhält man durch eine partielle Integration. Insgesamt gilt also  $I = I_1 + \varphi(x_z^0)[I_2 + I_3 + I_4]$ . Ich werde im folgenden zeigen, daß für  $k = 1, \dots, 4$

$$\limsup_{\rho \rightarrow 0} \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| \frac{\partial I_k}{\partial z}(t, \rho; \mathbf{z}, h) - \frac{\partial I_k}{\partial z}(t, 0; \mathbf{z}, h) \right| = 0. \quad (3.22)$$

4) Nach Korollar 2.8 können in den Integralen  $I_1, \dots, I_4$  für  $\rho \in (0, r)$  jeweils Differentiation und Integration vertauscht werden. Ich benutze im folgenden die Abkürzungen

$$\begin{aligned} r &:= r(t, \tau, \rho; z) := z(t) - z(\tau) + \rho n(t; z) \\ \text{und} \quad \mathbf{r} &:= \mathbf{r}(t, \tau, \rho) := \mathbf{z}(t) - \mathbf{z}(\tau) + \rho n(t; \mathbf{z}). \end{aligned}$$

(4.1.) Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_1}{\partial z}(t, \rho; \mathbf{z}, h) &= \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ kH_0'(k|r|) \left\langle \frac{r}{|r|}, n(t; z) \right\rangle |z'(\tau)| \right\} (\mathbf{z}, h) [\psi(\tau) - \psi(t)] d\tau \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{kH_0'(k|r|)}{|r|} \right\} (\mathbf{z}, h) \langle r, n(t; \mathbf{z}) \rangle |z'(\tau)| [\psi(\tau) - \psi(t)] d\tau \\ &+ \int_0^{2\pi} \frac{kH_0'(k|\mathbf{r}|)}{|\mathbf{r}|} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \langle r, n(t; z) \rangle \right\} (\mathbf{z}, h) |z'(\tau)| [\psi(\tau) - \psi(t)] d\tau \\ &+ \int_0^{2\pi} \frac{kH_0'(k|\mathbf{r}|)}{|\mathbf{r}|} \langle \mathbf{r}, n(t; \mathbf{z}) \rangle \frac{\partial}{\partial z} \left\{ |z'(\tau)| \right\} (\mathbf{z}, h) [\psi(\tau) - \psi(t)] d\tau. \end{aligned}$$

Die Stetigkeit der letzten beiden Summanden des letzten Gliedes dieser Gleichung folgt aus Lemma 3.11 mit  $j = 4$  bzw.  $j = 2$  und  $K = \frac{kH_0'(k|\mathbf{r}|)}{|\mathbf{r}|} |z'(\tau)|$ , bzw.  $K = \frac{kH_0'(k|\mathbf{r}|)}{|\mathbf{r}|} \frac{\partial}{\partial z} \{ |z'(\tau)| \} (\mathbf{z}, h)$ . Man zeigt mit Hilfe von Lemma 3.6, daß  $K$  den Voraussetzungen (3.10) und (3.11) von Lemma 3.11 genügt. Um Lemma 3.11 auf den ersten Summanden anwenden zu können, muß gezeigt werden, daß auch für  $K = |z'(\tau)| \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{kH_0'(k|r|)}{|r|} \right\} (\mathbf{z}, h)$  die Voraussetzungen (3.10) und (3.11) erfüllt sind. Dazu schreibe ich

$$|z'(\tau)| \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{kH_0'(k|r|)}{|r|} \right\} (\mathbf{z}, h) = |z'(\tau)| \frac{k^2 H_0''(k|\mathbf{r}|) |\mathbf{r}| - kH_0'(k|\mathbf{r}|)}{|\mathbf{r}|^3} \left\langle \mathbf{r}, \frac{\partial r}{\partial z}(\mathbf{z}, h) \right\rangle \quad (3.23)$$

und nutze aus, daß

$$2 \left\langle \mathbf{r}, \frac{\partial r}{\partial z}(\mathbf{z}, h) \right\rangle = \frac{\partial |r|^2}{\partial z}(\mathbf{z}, h) = \frac{\partial}{\partial z} \left\{ |z(t) - z(\tau)|^2 + 2\rho \langle z(t) - z(\tau), n(t; z) \rangle \right\} (\mathbf{z}, h). \quad (3.24)$$

Nun können die Abschätzungen aus Lemma 3.6 angewendet werden, um die Voraussetzung (3.10) zu verifizieren. Zum Nachweis von (3.11) ist (3.23) zunächst nach  $\rho$  zu differenzieren.

(4.2.) Mit der Abkürzung  $L(\tau; z) := |z'(\tau)| \frac{dT}{ds}(z(\tau))$ , also

$$L(\tau; z) = \left( \frac{z'(\tau)}{|z'(\tau)|} \right)' = \frac{z''(\tau)}{|z'(\tau)|} - \frac{z'(\tau) \langle z'(\tau), z''(\tau) \rangle}{|z'(\tau)|^3}$$

ergibt sich wie in (3.23)

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_2}{\partial z}(t, \rho; \mathbf{z}, h) &= \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \{ H_0(k|r|) L(\tau; z) \}(\mathbf{z}, h) d\tau \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{kH'_0(k|\mathbf{r}|)}{2|\mathbf{r}|} \frac{\partial |r|^2}{\partial z}(\mathbf{z}, h) L(\tau; \mathbf{z}) d\tau + \int_0^{2\pi} H_0(k|\mathbf{r}|) \frac{\partial}{\partial z} \{ L(\tau; z) \}(\mathbf{z}, h) d\tau \end{aligned} \quad (3.25)$$

Aus (3.24), (3.12) und Lemma 3.6 folgt, daß der Integrand des ersten Integrals in der letzten Zeile dieser Gleichung beschränkt ist. Es gibt also eine Konstante  $M_1 > 0$ , so daß für alle  $\gamma \in [0, \pi]$ ,  $t \in \mathbb{R}$  und alle hinreichend kleinen  $\rho > 0$  gilt

$$\left| \int_{t-\gamma}^{t+\gamma} \left[ \frac{kH'_0(k|\mathbf{r}(\rho))}{2|\mathbf{r}(\rho)|} \frac{\partial |r(\rho)|^2}{\partial z}(\mathbf{z}, h) - \frac{kH'_0(k|\mathbf{r}(0))}{2|\mathbf{r}(0)|} \frac{\partial |r(0)|^2}{\partial z}(\mathbf{z}, h) \right] L(\tau; \mathbf{z}) d\tau \right| \leq M_1 \gamma.$$

Für das Integral über den Rest  $R := [t-\pi, t-\gamma) \cup (t+\gamma, t+\pi]$  des Integrationsbereichs erhält man mit Hilfe des Mittelwertsatzes eine Konstante  $M_2$ , so daß für alle  $t \in \mathbb{R}$  und alle hinreichend kleinen  $\rho > 0$

$$\left| \int_R \left[ \frac{kH'_0(k|\mathbf{r}(\rho))}{2|\mathbf{r}(\rho)|} \frac{\partial |r(\rho)|^2}{\partial z}(\mathbf{z}, h) - \frac{kH'_0(k|\mathbf{r}(0))}{2|\mathbf{r}(0)|} \frac{\partial |r(0)|^2}{\partial z}(\mathbf{z}, h) \right] L(\tau; \mathbf{z}) d\tau \right| \leq \frac{M_2 \rho}{\gamma}.$$

Dazu zeigt man mit Hilfe von (3.24), (3.12) und Lemma 3.6, daß sich der Betrag des nach  $\rho$  differenzierten Integranden gleichmäßig in  $\rho$  durch  $\frac{M_2}{2\pi|t-\tau|}$  abschätzen läßt. Zu gegebenem  $\epsilon > 0$  wählt man nun zunächst  $\gamma := \frac{\epsilon}{2M_1}$  und anschließend  $\delta := \frac{\epsilon\gamma}{2M_2}$ . Dann ist für alle  $t \in \mathbb{R}$  und  $0 \leq \rho \leq \delta$

$$\left| \int_{t-\pi}^{t+\pi} \left[ \frac{kH'_0(k|\mathbf{r}(\rho))}{2|\mathbf{r}(\rho)|} \frac{\partial |r(\rho)|^2}{\partial z}(\mathbf{z}, h) - \frac{kH'_0(k|\mathbf{r}(0))}{2|\mathbf{r}(0)|} \frac{\partial |r(0)|^2}{\partial z}(\mathbf{z}, h) \right] L(\tau; \mathbf{z}) d\tau \right| \leq \epsilon.$$

Damit ist für das erste Integral die Stetigkeit bei  $\rho = 0$  gezeigt. Das zweite Integral kann aufgefaßt werden als Einfachschichtpotential mit stetiger Dichte. Deshalb können die Sprungbeziehungen, Satz 1.6, benutzt werden.

(4.3.) Die Fréchet-Differentiation von  $I_3$  ergibt den Ausdruck

$$\begin{aligned} &\frac{\partial I_3}{\partial z}(t, \rho; \mathbf{z}, h) \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \langle n(t; z), n(t; z) - n(\tau; z) \rangle \frac{kH'_0(k|r|)}{|r|} \langle r, n(\tau; z) \rangle |z'(\tau)| \right\}(\mathbf{z}, h) d\tau \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \langle n(t; z, h), n(t; z) - n(\tau; z) \rangle \right\}(\mathbf{z}, h) \frac{kH'_0(k|\mathbf{r}|)}{|\mathbf{r}|} \langle \mathbf{r}, n(\tau; \mathbf{z}) \rangle |z'(\tau)| d\tau \\ &+ \int_0^{2\pi} \langle n(t; \mathbf{z}), n(t; \mathbf{z}) - n(\tau; \mathbf{z}) \rangle \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{kH'_0(k|r|)}{|r|} |z'(\tau)| \right\}(\mathbf{z}, h) \langle \mathbf{r}, n(\tau; \mathbf{z}) \rangle d\tau \\ &+ \int_0^{2\pi} \langle n(t; \mathbf{z}), n(t; \mathbf{z}) - n(\tau; \mathbf{z}) \rangle \frac{kH'_0(k|\mathbf{r}|)}{|\mathbf{r}|} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \langle r, n(\tau; z) \rangle \right\}(\mathbf{z}, h) |z'(\tau)| d\tau. \end{aligned}$$

Für alle Summanden kann die gleichmäßige Existenz des Limes  $\rho \rightarrow 0$  mit Hilfe von Lemma 3.11 für  $j = 1$ , bzw.  $j = 3$  gezeigt werden. Beim zweiten Summanden sind wieder nach Anwendung der Produktregel (3.23) und (3.24) zu benutzen.

(4.4.) Für das Integral  $I_4$  benutzt man die Beobachtung, daß nach dem Gauß'schen Integralsatz für alle  $z \in RP$

$$\int_{\Gamma(z)} \frac{\partial \Phi_0(x_z^\rho, y)}{\partial n(y)} ds(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } \rho = 0 \\ 0 & \text{für } \rho > 0. \end{cases} \quad (3.26)$$

Dabei ist  $\Phi_0(x, y) := \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x-y|}$  die Grundlösung zur Laplace-Gleichung. (Einen Beweis von (3.26) findet man in [CK1], S.48.) Die Fréchet-Ableitung von (3.26) nach  $z$  verschwindet identisch und ist deshalb stetig. Ich betrachte die Differenz zwischen den Potentialen zur Helmholtz-Gleichung und zur Laplace-Gleichung. Es gilt

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \int_{\Gamma(z)} \left[ \frac{\partial \Phi(x_z^\rho, y)}{\partial n(y)} - \frac{\partial \Phi_0(x_z^\rho, y)}{\partial n(y)} \right] ds(y) \right\} (\mathbf{z}, h) \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{f'(|r|)}{|r|} \langle r, n(\tau; z) \rangle |z'(\tau)| \right\} (\mathbf{z}, h) d\tau \end{aligned} \quad (3.27)$$

mit  $f(x) := \frac{i}{4} H_0(kx) - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{x}$ . Aufgrund der Reihenentwicklungen (1.6) und (1.7) erhält man  $|f'(x)| = O\left(|x| \ln \frac{1}{|x|}\right)$  und  $|f''(x)| = O\left(\ln \frac{1}{|x|}\right)$ . Damit kann man zeigen, daß der Kern des Integrals auf der rechten Seite von (3.27) gleichmäßig stetig ist, und daraus folgt (3.22) für  $I_4$ . ■

# Kapitel 4

## Die numerische Berechnung der Fréchet-Ableitung

Nachdem im vorigen Kapitel die Fréchet-Ableitung des Fernfeldes  $u_\infty(z)$  nach dem durch  $z$  parametrisierten Rand theoretisch behandelt wurde, sollen in diesem Kapitel zwei Verfahren zur effizienten numerischen Berechnung von  $u'_\infty(z, h)$  beschrieben werden. Ich widme diesem Thema ein eigenes Kapitel, da es den Kernpunkt bei der Implementation des im nächsten Kapitel zu diskutierenden Newton-Verfahrens darstellt.

Das erste Verfahren, das in Abschnitt 4.3. behandelt wird, basiert auf der Charakterisierung von  $u'_\infty(z, h)$  durch ein äußeres Neumann-Problem (Satz 3.12). Hauptschwierigkeit ist hier die Behandlung der zweiten Ableitungen des Gesamtfeldes  $u$ , die in der Randbedingung auftreten. Dazu beschreibe ich, wie man  $u|_\Gamma$  mit Hilfe eines Green'schen Ansatzes berechnet, und zeige in Abschnitt 4.2. durch Modifikation der in der Arbeit [K2] durchgeführten Fehleranalyse, daß auch die zweiten Ableitungen gut approximiert werden.

Das zweite Verfahren ist die direkte Implementation einer zu (3.7) analogen Formel, die sich bei Verwendung eines Einfachschichtpotentials ergibt. Das für die theoretischen Betrachtungen in den Kapiteln 1 und 3 verwendete Volumenpotential ist für eine numerische Implementierung nicht geeignet, da ein wesentlicher Vorteil der Integralgleichungsmethode, die Reduktion der Dimension, verlorengelht.

In Abschnitt 4.5. werde ich schließlich die beiden dargestellten Verfahren vergleichen.

### 4.1 Trigonometrische Interpolation und Quadraturformeln

In diesem Abschnitt werden einige Tatsachen über trigonometrische Interpolation bei äquidistanten Stützstellen und darauf basierende Quadraturformeln zusammen-

gestellt. Für  $n \in \mathbb{N}$  seien die Stützstellen  $t_j^{(n)}$  definiert durch

$$t_j^{(n)} := \frac{j\pi}{n}, \quad j = 0, \dots, 2n-1. \quad (4.1)$$

Das Interpolationsproblem, zu gegebenen Werten  $f_0, \dots, f_{2n-1} \in \mathbb{C}$  eine Funktion der Form

$$v(t) = \sum_{m=0}^n a_m \cos mt + \sum_{m=1}^{n-1} b_m \sin mt \quad (4.2)$$

mit Koeffizienten  $a_m, b_m \in \mathbb{C}$  zu finden, so daß  $v(t_j^{(n)}) = f_j$  für  $j = 0, \dots, 2n-1$ , ist eindeutig lösbar. Der Raum aller Funktionen der Form (4.2) heißt  $T_n$ . Die Lagrange-Basis für das obige Interpolationsproblem lautet

$$\begin{aligned} L_j^{(n)}(t) &= \frac{1}{2n} \left\{ 1 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \cos k(t - t_j^{(n)}) + \cos n(t - t_j^{(n)}) \right\} \\ &= \frac{1}{2n} \sin n(t - t_j^{(n)}) \cot \frac{t - t_j^{(n)}}{2}, \quad t \neq t_j^{(n)}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

$j = 0, \dots, 2n-1$ , d.h. die Interpolationsfunktion ist gegeben durch  $\sum_{j=0}^{2n-1} f_j L_j^{(n)}$ . Mittels trigonometrischer Identitäten sieht man leicht, daß tatsächlich  $L_j^{(n)} \in T_n$ . Der trigonometrische Interpolationsoperator  $P_n : C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow T_n$  ist definiert durch die Vorschrift

$$(P_n f)(t) := \sum_{j=0}^{2n-1} f(t_j^{(n)}) L_j^{(n)}(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Für den Interpolationsfehler bei einer analytischen,  $2\pi$ -periodischen Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die sich in ein Gebiet  $\mathbb{R} \times (-s, s) \subset \mathbb{C}$ ,  $s > 0$  holomorph fortsetzen läßt, gilt die Darstellungsformel

$$f(t) - (P_n f)(t) = \frac{1}{2\pi} \sin nt \operatorname{Re} \left\{ \int_{i\sigma}^{i\sigma+2\pi} \frac{i \cot \frac{\tau-t}{2}}{\sin n\tau} f(\tau) d\tau \right\}. \quad (4.4)$$

Dabei ist  $0 < \sigma < s$  (vgl. [K1]). Hieraus folgt durch elementare Abschätzungen

$$\|f^{(p)} - (P_n f)^{(p)}\|_{\infty} \leq C e^{-n\sigma}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (4.5)$$

für  $p \in \{0, 1, 2\}$  mit einer nur von  $f$  abhängigen Konstanten  $C > 0$ . Falls  $f$  nur aus dem Hölderraum  $C_{2\pi}^{q,\beta}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  ist mit  $q \in \mathbb{N}$  und  $\beta \in (0, 1)$ , gilt für alle  $0 \leq p \leq q$  und alle  $0 < \alpha \leq \beta$  die Fehlerabschätzung

$$\|f - P_n f\|_{p,\alpha} \leq C \frac{\ln n}{n^{q-p+\beta-\alpha}} \|f\|_{q,\beta}. \quad (4.6)$$

Dabei ist  $C$  eine nur von  $p, q, \alpha$  und  $\beta$  abhängige Konstante (s. [M1], Satz 4.10).

Man erhält allgemein eine Näherung für ein u.U. gewichtetes Integral über das Periodenintervall einer Funktion  $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , indem man  $f$  durch das Interpolationspolynom  $P_n f$  ersetzt und dann exakt integriert. Ich werde in dieser Arbeit folgende Approximationen verwenden:

$$\int_0^{2\pi} f(\tau) d\tau \approx \int_0^{2\pi} (P_n f)(\tau) d\tau \quad (4.7)$$

$$\int_0^{2\pi} \ln \left( 4 \sin^2 \frac{t-\tau}{2} \right) f(\tau) d\tau \approx \int_0^{2\pi} \ln \left( 4 \sin^2 \frac{t-\tau}{2} \right) (P_n f)(\tau) d\tau, \quad (4.8)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cot \frac{\tau-t}{2} f'(\tau) d\tau \approx \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cot \frac{\tau-t}{2} (P_n f)'(\tau) d\tau \quad (4.9)$$

Für (4.7) erhält man wegen  $\int_0^{2\pi} L_j^{(n)}(\tau) d\tau = \frac{\pi}{n}$

$$\int_0^{2\pi} (P_n f)(\tau) d\tau = \frac{\pi}{n} \sum_{j=0}^{2n-1} f(t_j^{(n)}),$$

d.h. (4.7) fällt mit der Trapezregel zusammen. Mit Hilfe der Integrale

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left( 4 \sin^2 \frac{\tau-t}{2} \right) e^{im\tau} d\tau = \begin{cases} 0, & m=0 \\ -\frac{1}{m} e^{imt}, & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.10)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cot \frac{\tau-t}{2} e^{im\tau} d\tau = \begin{cases} 0, & m=0 \\ i \operatorname{sgn}(m) e^{imt}, & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.11)$$

und (4.3) erhält man für die rechten Seiten von (4.8) und (4.9) die Formeln

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \ln \left( 4 \sin^2 \frac{t-\tau}{2} \right) (P_n f)(\tau) d\tau &= \sum_{j=0}^{2n-1} R_j^{(n)}(t) f(t_j^{(n)}), \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cot \frac{\tau-t}{2} (P_n f)'(\tau) d\tau &= \sum_{j=0}^{2n-1} T_j^{(n)}(t) f(t_j^{(n)}) \end{aligned}$$

mit den Quadraturkoeffizienten

$$\begin{aligned} R_j^{(n)}(t) &:= -\frac{2\pi}{n} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m} \cos m(t-t_j^{(n)}) - \frac{\pi}{n^2} \cos n(t-t_j^{(n)}), \\ T_j^{(n)}(t) &:= -\frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n-1} m \cos m(t-t_j^{(n)}) - \frac{1}{2} \cos n(t-t_j^{(n)}). \end{aligned}$$

## 4.2 Numerische Lösung des direkten Neumann-Problems

In diesem Abschnitt werde ich ein in [K2] vorgestelltes numerisches Verfahren zur Lösung des direkten Neumann-Problems referieren und zeigen, daß man die dort

enthaltene Fehleranalyse so modifizieren kann, daß man unter höheren Regularitätsforderungen an die rechte Seite Konvergenz der Näherungslösung gegen die wahre Lösung statt in der  $\|\cdot\|_{1,\alpha}$ -Norm sogar in der  $\|\cdot\|_{2,\alpha}$ -Norm erhält. Wegen der zweiten Ableitungen, die in Gl.(3.15) bei der Charakterisierung der Fréchet-Ableitung auftauchen, werde ich dieses Resultat benötigen, um die Konvergenz des ersten Verfahrens zur Berechnung der Fréchet-Ableitung nachzuweisen.

Zur Lösung des äußeren Neumann-Problems zur Randfunktion  $g \in C^{1,\alpha}(\Gamma)$  wird der gemischte Potentialansatz

$$v(x) = \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} - i\eta \Phi(x, y) \right\} \varphi(y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D} \quad (4.12)$$

mit unbekannter Dichte  $\varphi \in C^{2,\alpha}(\Gamma)$  verwendet. (In [K2] wird nur  $g \in C_{2\pi}^{0,\alpha}(\Gamma)$  verlangt.) Man erhält nach den Sprungbeziehungen für  $\varphi$  die Integralgleichung

$$(T - i\eta K' + i\eta I)\varphi = 2g. \quad (4.13)$$

Der Integraloperator  $T - i\eta K' + i\eta I : C^{2,\alpha}(\Gamma) \rightarrow C^{1,\alpha}(\Gamma)$  ist beschränkt, da  $T$  und  $K'$  in dieser Operatornorm beschränkt sind (s. [Ki]). Da der Einfachschichtpotentialoperator  $S$  als Abbildung von  $C^{1,\alpha}(\Gamma)$  nach  $C^{2,\alpha}(\Gamma)$  den Integraloperator  $T - i\eta K' + i\eta I$  und den adjungierten Operator  $T - i\eta K + i\eta I$  regularisiert, ist die Riesz-Theorie in der in [K1], Kapitel 5, beschriebenen Form anwendbar. Man kann auf diese Weise zeigen, daß  $T - i\eta K' + i\eta I : C^{2,\alpha}(\Gamma) \rightarrow C^{1,\alpha}(\Gamma)$  für alle Wellenzahlen  $k > 0$  beschränkt invertierbar ist.

Gl.(4.13) wird nun parametrisiert und die Singularität von  $T$  abgespalten. Man erhält eine Gleichung der Form

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cot \frac{\tau - t}{2} \psi'(\tau) d\tau + \int_0^{2\pi} K(t, \tau) \psi(\tau) d\tau + a(t) \psi(t) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (4.14)$$

Dabei ist  $\psi := \varphi \circ z$  die unbekannte Funktion,  $f := 2|z'|(g \circ z)$  und  $a := i\eta|z'|$ . Der Integralkern  $K$  hat eine logarithmische Singularität und läßt sich für analytisches  $z$  aufspalten in

$$K(t, \tau) = K_1(t, \tau) \ln \left( 4 \sin^2 \frac{t - \tau}{2} \right) + K_2(t, \tau)$$

mit analytischen,  $2\pi$ -periodischen Funktionen  $K_1$  und  $K_2$ . Definiert man beschränkte Operatoren  $T_0, A_1, A_2, A_3 : C_{2\pi}^{2,\alpha}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow C_{2\pi}^{1,\alpha}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  durch

$$\begin{aligned} (T_0\psi)(t) &:= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cot \frac{\tau - t}{2} \psi'(\tau) d\tau, \\ (A_1\psi)(t) &:= \int_0^{2\pi} K_1(t, \tau) \ln \left( 4 \sin^2 \frac{t - \tau}{2} \right) \psi(\tau) d\tau, \\ (A_2\psi)(t) &:= \int_0^{2\pi} K_2(t, \tau) \psi(\tau) d\tau, \\ (A_3\psi)(t) &:= a(t) \psi(t) \end{aligned}$$

und setzt  $A := A_1 + A_2 + A_3$ , so schreibt sich (4.14) kurz

$$T_0\psi + A\psi = f.$$

Ersetzt man in (4.14) die Integrale durch die Quadraturformeln (4.8) und (4.7), so erhält man die Gleichung

$$\sum_{j=0}^{2n-1} \tilde{\psi}_n(t_j^{(n)}) \left\{ T_j^{(n)}(t) + R_j^{(n)}(t)K_1(t, t_j^{(n)}) + \frac{\pi}{n}K_2(t, t_j^{(n)}) \right\} + a(t)\tilde{\psi}_n(t) = f(t), \quad (4.15)$$

die nach  $\tilde{\psi}_n \in T_n$  gelöst wird. Da nach (4.11)

$$T_0P_n\psi = T_0\psi = P_nT_0\psi \quad (4.16)$$

für  $\psi \in T_n$ , kann man (4.15) auch in der Form

$$T_0\tilde{\psi}_n + A_{1,n}\tilde{\psi}_n + A_{2,n}\tilde{\psi}_n + A_3\tilde{\psi}_n = f \quad (4.17)$$

schreiben, mit den Quadratur-Operatoren

$$(A_{1,n}\psi)(t) := \int_0^{2\pi} \ln \left( 4 \sin^2 \frac{t-\tau}{2} \right) (P_nK_1(t, \cdot)\psi)(\tau) d\tau,$$

$$(A_{2,n}\psi)(t) := \int_0^{2\pi} (P_nK_2(t, \cdot)\psi)(\tau) d\tau.$$

Wendet man auf Gl.(4.17) den trigonometrische Interpolationsoperator  $P_n$  an, so erhält man nach (4.16) die Näherungsgleichung

$$T_0\psi_n + P_nA_{1,n}\psi_n + P_nA_{2,n}\psi_n + P_nA_3\psi_n = P_nf, \quad (4.18)$$

die äquivalent ist zu dem linearen Gleichungssystem

$$\sum_{j=0}^{2n-1} \left\{ T_{|k-j|}^{(n)}(0) + R_{|k-j|}^{(n)}(0)K_1(t_k^{(n)}, t_j^{(n)}) + \frac{\pi}{n}K_2(t_k^{(n)}, t_j^{(n)}) \right\} \psi_n(t_j^{(n)})$$

$$+ a(t_k^{(n)})\psi_n(t_k^{(n)}) = f(t_k^{(n)}), \quad k = 0, \dots, 2n-1, \quad (4.19)$$

das nach den Knotenwerten  $\psi_n(t_k^{(n)})$  gelöst wird.

Ich zitiere aus [K2] folgendes für die Fehleranalyse benötigte Lemma:

**Lemma 4.1** *Sei  $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$   $p$ -mal stetig differenzierbar,  $2\pi$ -periodisch und nach der zweiten Variablen  $p+1$ -mal stetig differenzierbar ( $p \in \mathbb{N}_0$ ). Dann gilt für die Funktion*

$$u(t) := \int_0^{2\pi} \ln \left( 4 \sin^2 \frac{t-\tau}{2} \right) \varphi(t, \tau) d\tau, \quad t \in \mathbb{R},$$

für alle  $0 < \alpha < 1$  die Abschätzung

$$\|u\|_{p,\alpha} \leq C \left( \|\varphi\|_{p,\infty} + \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\|_{p,\infty} \right) \quad (4.20)$$

mit einer nur von  $p$  und  $\alpha$  abhängigen Konstante  $C$ . Dabei ist  $\|\cdot\|_{p,\infty}$  das Maximum der Supremumsnormen aller partiellen Ableitungen der Ordnung kleiner oder gleich  $p$ .

**Beweis:** Lemma 4.1 und Corollar 4.2 in [K2]. ■

Setze  $A_n := A_{1,n} + A_{2,n} + A_{3,n}$ . Es gilt der folgende Konvergenzsatz:

**Satz 4.2** Sei  $z$  analytisch. Dann konvergiert die Folge  $P_n A_n : C_{2\pi}^{2,\alpha}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow C_{2\pi}^{1,\alpha}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  für alle  $0 < \alpha < 1$  in der Operatornorm gegen  $A : C_{2\pi}^{2,\alpha}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow C_{2\pi}^{1,\alpha}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ .

**Beweis:** In diesem Beweis bezeichne  $C$  jeweils eine (u.U. von Zeile zu Zeile verschiedene) Konstante, die höchstens von  $\alpha, \beta$  (siehe unten!) und  $z$  abhängt. Eine Anwendung von Lemma 4.1 mit  $\varphi(t, \tau) = (P_n K_1(t, \cdot) \psi)(\tau) - K_1(t, \tau) \psi(\tau)$  liefert unter Benutzung von  $\frac{\partial}{\partial t} P_n K_1(t, \cdot) \psi = P_n \frac{\partial K_1}{\partial t}(t, \tau) \psi(\tau)$  und (4.6)

$$\begin{aligned} \|(A_{1,n} - A_1) \psi\|_{1,\alpha} &\leq C \left( \|\varphi\|_{1,\infty} + \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\|_{1,\infty} \right) \\ &\leq C \max_{p \in \{0,1,2\}} \max_{t \in \mathbb{R}} \left\| \frac{\partial^p \varphi}{\partial t^p}(t, \cdot) \right\|_{1,\infty} \\ &\leq C \max_{p \in \{0,1,2\}} \max_{t \in \mathbb{R}} \left\| \frac{\partial^p \varphi}{\partial t^p}(t, \cdot) \right\|_{1,\beta} \\ &= C \max_{p \in \{0,1,2\}} \max_{t \in \mathbb{R}} \left\| P_n \left( \frac{\partial^p K_1(t, \cdot)}{\partial t^p} \psi \right) - \frac{\partial^p K_1(t, \cdot)}{\partial t^p} \psi \right\|_{1,\beta} \\ &\leq C \frac{\ln n}{n^{1+\alpha-\beta}} \max_{p \in \{0,1,2\}} \max_{t \in \mathbb{R}} \left\| \frac{\partial^p K_1(t, \cdot)}{\partial t^p} \psi \right\|_{2,\alpha} \\ &\leq C \frac{\ln n}{n^{1+\alpha-\beta}} \|\psi\|_{2,\alpha} \end{aligned} \quad (4.21)$$

für alle  $0 < \beta \leq \alpha < 1$ . Analog zeigt man

$$\|(A_{1,n} - A_1) \psi\|_{2,\alpha} \leq C \frac{\ln n}{n^{\alpha-\beta}} \|\psi\|_{2,\alpha}$$

für alle  $0 < \beta \leq \alpha < 1$ . Insbesondere folgt daraus

$$\|A_{1,n} \psi\|_{2,\alpha} \leq C \|\psi\|_{2,\alpha}.$$

Nach einer weiteren Anwendung von (4.6) erhält man hieraus

$$\|P_n A_{1,n} \psi - A_{1,n} \psi\|_{1,\alpha} \leq C \frac{\ln n}{n} \|A_{1,n} \psi\|_{2,\alpha} \leq C \frac{\ln n}{n} \|\psi\|_{2,\alpha}. \quad (4.22)$$

Setzt man (4.21) und (4.22) zusammen und wendet die Dreiecksungleichung an, so ergibt sich

$$\|P_n A_{1,n} \psi - A\psi\|_{1,\alpha} \leq C \frac{\ln n}{n} \|\psi\|_{2,\alpha}.$$

Nach demselben Verfahren kann man zeigen, daß

$$\|P_n A_{2,n} \psi - A\psi\|_{1,\alpha} \leq C \frac{\ln n}{n} \|\psi\|_{2,\alpha}.$$

Schließlich ergibt eine erneute Anwendung von (4.6)

$$\|P_n A_3 \psi - A_3 \psi\|_{1,\alpha} \leq C \frac{\ln n}{n} \|A_3 \psi\|_{2,\alpha} \leq C \frac{\ln n}{n} \|\psi\|_{2,\alpha}.$$

Zusammensetzen der letzten drei Formeln und Anwenden der Dreiecksungleichung ergibt

$$\|P_n A_n \psi - A\psi\|_{1,\alpha} \leq C \frac{\ln n}{n} \|\psi\|_{2,\alpha}$$

für alle  $\psi \in C_{2\pi}^{1,\alpha}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ , und damit ist die Behauptung bewiesen.  $\blacksquare$

**Satz 4.3** Für hinreichend große  $n$  besitzt die Näherungsgleichung (4.18) eine eindeutige Lösung  $\psi_n$ , deren Abstand von der Lösung  $\psi$  der wahren Gleichung (4.13) bzgl. der  $\|\cdot\|_{2,\alpha}$ -Norm die Abschätzung

$$\|\psi_n - \psi\|_{2,\alpha} \leq C (\|P_n f - f\|_{1,\alpha} + \|P_n A_n \psi - A\psi\|_{1,\alpha}) \quad (4.23)$$

erfüllt. Dabei hängt die Konstante  $C$  nur von  $\alpha \in (0, 1)$  und  $z$  ab.

**Beweis:** Da der Operator  $T_0 + A$  beschränkt invertierbar ist, und da die Folge  $(P_n A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in der Operatornorm gegen  $A$  konvergiert, kann man mit Hilfe der Neumann'schen Reihe zeigen, daß für hinreichend große  $n$  die Operatoren  $T_0 + P_n A_n$  beschränkt invertierbar und die Inversen  $(T_0 + P_n A_n)^{-1}$  gleichmäßig beschränkt sind (vgl. etwa [K1], Satz 10.1). Wegen

$$\begin{aligned} (T_0 + P_n A_n)(\psi_n - \psi) &= (T_0 + P_n A_n)\psi_n - (T_0 + A)\psi + (A - P_n A_n)\psi \\ &= P_n f - f + (A - P_n A_n)\psi \end{aligned}$$

erhält man daraus für hinreichend große  $n$

$$\begin{aligned} \|\psi_n - \psi\|_{2,\alpha} &\leq \|(T_0 + P_n A_n)^{-1}((P_n f - f) + (A - P_n A_n)\psi)\|_{2,\alpha} \\ &\leq C (\|P_n f - f\|_{1,\alpha} + \|P_n A_n \psi - A\psi\|_{1,\alpha}), \end{aligned}$$

wobei die Abbildungen  $(T_0 + P_n A_n)^{-1}$  natürlich als Operatoren von  $C_{2\pi}^{1,\alpha}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  nach  $C_{2\pi}^{2,\alpha}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  betrachtet werden.  $\blacksquare$

Wie in [K2] bemerkt wird, ist mit der rechten Seite  $f$  auch die Lösung  $\psi$  analytisch. Mit Hilfe von (4.4) kann deshalb das folgende Korollar zu Satz 4.3 gezeigt werden:

**Korollar 4.4** Falls unter den Voraussetzungen von Satz 4.3 zusätzlich die rechte Seite  $f$  analytisch ist (und dies ist beim Streuproblem am schallharten Hindernis für analytisches  $z$  der Fall), erhält man exponentielle Konvergenz, d.h. es gibt Konstanten  $C > 0$  und  $\sigma > 0$ , so daß für hinreichend große  $n$

$$\|\psi_n - \psi\|_{2,\alpha} \leq Ce^{-n\sigma}.$$

### 4.3 Erstes Verfahren

Die erste Methode zur Berechnung der Fréchet-Ableitung beruht auf Satz 3.12. In dem folgenden Lemma wird gezeigt, daß man die Randbedingung  $RB$  in diesem Satz so umformen kann, daß nur noch Ableitungen von  $u$  nach der Bogenlänge vorkommen. Einen ähnlichen Ausdruck erhält Hettlich ([He]) mit anderen Methoden. (Beachte, daß für eine Funktion  $f \in C^1(\Gamma)$  die Ableitung nach der Bogenlänge geschrieben werden kann als  $\frac{df}{ds} \circ z = \frac{(f \circ z)'}{|z'|}$ .)

**Lemma 4.5** Unter den Voraussetzungen von Satz 3.12 gilt

$$RB(t; u) = \frac{1}{|z'|} \left( \frac{\langle n, h \rangle}{|z'|} (u \circ z)' \right)' + k^2 \langle n, h \rangle u \circ z. \quad (4.24)$$

**Beweis:** Wie in (3.8) führe ich in einer äußeren Umgebung von  $\Gamma$  ein lokales Koordinatensystem ein durch die Vorschrift

$$x(t_1, t_2) := z(t_1) + t_2 n(t_1), \quad (t_1, t_2) \in [0, 2\pi) \times [0, r).$$

Zunächst erläutere ich einige differentialgeometrische Begriffe. Für die lokalen Basisvektoren  $x_{,i} := \frac{\partial x}{\partial t_i}$  erhält man

$$x_{,1} = z'(t_1) + t_2 n'(t_1) \quad \text{und} \quad x_{,2} = n(t_1).$$

Der erste Fundamentaltensor ist gegeben durch

$$(g_{ij}) = (\langle x_{,i}, x_{,j} \rangle) = \begin{pmatrix} |z'(t_1) + t_2 n'(t_1)|^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die durch  $x$  gegebenen Koordinaten sind also orthogonal. ( $g_{12} = g_{21} = 0$ , da  $2\langle n', n \rangle = \langle n, n \rangle' = 0$ .) Sei  $(g^{ij})$  die inverse Matrix zu  $(g_{ij})$  und  $g := \det(g_{ij})$ . Gradienten und Laplace-Operator berechnen sich in den neuen Koordinaten nach den Formeln

$$\begin{aligned} (\text{grad } v) \circ z &= \sum_{i=1}^2 g^{ii} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t_i} x_{,i} = \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t_1} g^{11} x_{,1} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t_2} x_{,2} \\ (\Delta v) \circ z &= \sum_{i=1}^2 \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial t_i} \left( \sqrt{g} g^{ii} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t_i} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial t_1} \left( \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t_1} \right) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial t_2} \left( \sqrt{g} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t_2} \right), \end{aligned}$$

wobei  $\tilde{v} := v \circ x$ . Sei  $\tilde{u} := u \circ x$ . Es gilt

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t_2}(t_1, 0) = \frac{\partial u}{\partial n}(x(t_1, 0)) = 0 \quad \text{für alle } t_1 \in [0, 2\pi)$$

und deshalb

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t_1 \partial t_2}(t_1, 0) = 0 \quad \text{für alle } t_1 \in [0, 2\pi).$$

Weiterhin folgt aus der Helmholtz-Gleichung  $\Delta u + k^2 u = 0$

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t_2^2}(\cdot, 0) = -k^2 \tilde{u}(\cdot, 0) - \frac{1}{|z'|^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t_1^2}(\cdot, 0) - \frac{1}{|z'|} \left( \frac{1}{|z'|} \right)' \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t_1}(\cdot, 0).$$

Nach diesen Vorbereitungen erhält man für den ersten Summanden von  $RB(t; u)$

$$\begin{aligned} & - \left\langle \frac{\partial n}{\partial z}(z, h), (\text{grad } u) \circ z \right\rangle \tag{4.25} \\ & = - \left\langle \frac{1}{|z'|} \begin{pmatrix} h'_2 \\ -h'_1 \end{pmatrix} - \frac{\langle z', h' \rangle}{|z'|^3} \begin{pmatrix} z'_2 \\ -z'_1 \end{pmatrix}, \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t_1} g^{11} x_{,1} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t_2} n \right\rangle \Big|_{t_2=0} \\ & = - \frac{g^{11}}{|z'|} \left\langle \begin{pmatrix} h'_2 \\ -h'_1 \end{pmatrix}, x_{,1} \right\rangle \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t_1} \Big|_{t_2=0} \\ & = \frac{1}{|z'|^3} \langle h'_1 z'_2 - h'_2 z'_1 \rangle \frac{\partial \tilde{u}(\cdot, 0)}{\partial t_1} \\ & = \frac{1}{|z'|^2} \langle n, h' \rangle \frac{\partial \tilde{u}(\cdot, 0)}{\partial t_1}. \end{aligned}$$

Für den zweiten Summanden ergibt sich

$$\begin{aligned} & - \sum_{i,j=1}^2 h_j n_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x(\cdot, 0)) \tag{4.26} \\ & = - \sum_{j=1}^2 h_j \left\langle n, \left( \text{grad } \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) (x(\cdot, 0)) \right\rangle \\ & = - \sum_{j=1}^2 h_j \left( \langle n, x_{,1} \rangle g^{11} \frac{\partial}{\partial t_1} \left( \frac{\partial u}{\partial x_j} \circ x \right) + \langle n, x_{,2} \rangle \frac{\partial}{\partial t_2} \left( \frac{\partial u}{\partial x_j} \circ x \right) \right) \Big|_{t_2=0} \\ & = - \sum_{j=1}^2 h_j \frac{\partial}{\partial t_2} \left( g^{11} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t_1} \langle x_{,1}, e_j \rangle + g^{22} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t_2} \langle x_{,2}, e_j \rangle \right) \Big|_{t_2=0} \\ & = - \sum_{j=1}^2 h_j \left( \frac{\partial}{\partial t_2} (g^{11} \langle x_{,1}, e_j \rangle) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t_1} + n_j \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t_2^2} \right) \Big|_{t_2=0} \\ & = \frac{1}{|z'|^2} \langle n', h \rangle \frac{\partial \tilde{u}(\cdot, 0)}{\partial t_1} + \langle n, h \rangle \left( k^2 \tilde{u}(\cdot, 0) + \frac{1}{|z'|^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}(\cdot, 0)}{\partial t_1^2} + \frac{1}{|z'|} \left( \frac{1}{|z'|} \right)' \frac{\partial \tilde{u}(\cdot, 0)}{\partial t_1} \right). \end{aligned}$$

Dabei wurde in der letzten Zeile benutzt, daß

$$\langle n', h \rangle = \left\langle n', \frac{z'}{|z'|} \right\rangle \left\langle \frac{z'}{|z'|}, h \right\rangle + \langle n', n \rangle \langle n, h \rangle = \frac{\langle n', z' \rangle \langle z', h \rangle}{|z'|^2}$$

und deshalb

$$-\frac{\partial}{\partial t_2} \left\{ \frac{1}{|z' + t_2 n'|^2} \langle z' + t_2 n', h \rangle \right\} \Big|_{t_2=0} = -\frac{\langle n', h \rangle}{|z'|^2} + 2 \frac{\langle n', z' \rangle \langle z', h \rangle}{|z'|^4} = \frac{\langle n', h \rangle}{|z'|^2}.$$

Setzt man (4.25) und (4.26) zusammen, so erhält man (4.24) nach der Produktregel.

■

Um das Gesamtfeld  $u$  auf  $\Gamma$  zu berechnen, löse ich das direkte Streuproblem mit einem Green'schen Ansatz. Dann erhält man  $u$  direkt als Lösung der Integralgleichung. Dies soll im folgenden unter Benutzung der Existenz- und Eindeutigkeitsanalyse aus Kapitel 1 gezeigt werden.

Nach der Greenschen Darstellungsformel (1.25) gilt

$$u^s(x) = \int_{\Gamma} \left( u^s(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} - \frac{\partial u^s(y)}{\partial n} \Phi(x, y) \right) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D},$$

und nach dem 2. Greenschen Satz

$$0 = \int_{\Gamma} \left( u^i(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} - \frac{\partial u^i(y)}{\partial n} \Phi(x, y) \right) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}.$$

Addition dieser beiden Gleichungen ergibt unter Ausnutzung von  $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$  auf  $\Gamma$

$$u^s(x) = \int_{\Gamma} u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}, \quad (4.27)$$

bzw.

$$u(x) = u^i(x) + \int_{\Gamma} u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}. \quad (4.28)$$

Durch Bildung der Normalableitung erhält man daraus

$$Tu = -2 \frac{\partial u^i}{\partial n}. \quad (4.29)$$

Führt man in (4.28) den Grenzübergang  $x \rightarrow \Gamma$ ,  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$  durch, so erhält man

$$u(x) = u^i(x) + \int_{\Gamma} u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} ds(y) + \frac{1}{2} u(x), \quad x \in \Gamma,$$

und daraus

$$u - Ku = 2u^i. \quad (4.30)$$

Linearkombination von (4.29) und (4.30) mit einem Kopplungsparameter  $\eta \in \mathbb{R}$  ergibt

$$(T - i\eta K + i\eta I)u = -2\frac{\partial u^i}{\partial n} + 2i\eta u^i. \quad (4.31)$$

Die Integraloperatoren, die man aus dem Potentialansatz und dem Ansatz über die Greenschen Formeln erhält, sind zueinander adjungiert bezüglich der bilinearen Systeme  $\langle C_{2\pi}^{1,\alpha}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), C_{2\pi}^{2,\alpha}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rangle$  und  $\langle C_{2\pi}^{2,\alpha}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), C_{2\pi}^{1,\alpha}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rangle$ . Parametrisierung von (4.31) und Multiplikation mit  $|z'(t)|$  liefert

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cot \frac{t-\tau}{2} \tilde{u}'(\tau) d\tau + \int_0^{2\pi} K(\tau, t) \tilde{u}(\tau) d\tau + a(t) \tilde{u}(t) \\ &= 2|z'(t)| \left\{ -\frac{\partial u^i(z(t))}{\partial n} + i\eta u^i(z(t)) \right\}, \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

mit dem Kern  $K$  aus (4.14). Deshalb sind das numerische Verfahren und die Fehleranalyse aus dem vorigen Abschnitt auf diese Situation übertragbar. In dem zu lösenden linearen Gleichungssystem steht die zu (4.19) transponierte Matrix. Es bietet sich deshalb an, das Randwertproblem aus Satz 3.12 mit dem gemischten Potentialansatz (4.12) zu lösen. Dann braucht man nur eine Matrix zu berechnen und eine LR-Zerlegung durchzuführen. Wie im Beweis von Satz 1.12 zeigt man, daß beim Ansatz (4.12) das Fernfeld von  $v$  gegeben ist durch

$$v_\infty(\hat{x}) = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{8\pi k}} \int_\Gamma \left\{ \frac{\partial e^{-ik\langle \hat{x}, d \rangle}}{\partial n(y)} - i\eta e^{-ik\langle \hat{x}, d \rangle} \right\} \varphi(y) ds(y). \quad (4.32)$$

**Erstes Verfahren zur näherungsweise Berechnung der Fréchetableitung  $u'_\infty(z, h)$  bei einfallender Welle  $u^i(x) = e^{ik\langle d, x \rangle}$  und  $2n$  Stützstellen:**

1. Berechnung des Gesamtfeldes  $u$  auf  $\Gamma$  mit Green'schem Ansatz

- Berechne die Matrix  $A = (a_{kj}) \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$  und den Vektor  $b = (b_k) \in \mathbb{C}^{2n}$  nach den Formeln

$$a_{kj} := T_{|k-j|}^{(n)}(0) + R_{|k-j|}^{(n)}(0) K_1(t_j^{(n)}, t_k^{(n)}) + \frac{\pi}{n} K_2(t_j^{(n)}, t_k^{(n)}) + \delta_{kj} a(t_k^{(n)})$$

und

$$b_k := -2 \left( e^{ik\langle d, z \rangle} (ik \langle \bar{n}, d \rangle - i\eta |z'|) \right) (t_k^{(n)}).$$

Dabei ist  $\bar{n} = |z'|n = \begin{pmatrix} z_2' \\ -z_1' \end{pmatrix}$ . Zur Definition von  $K_1$  und  $K_2$  siehe [K2].

- Führe ein LR-Zerlegung  $A = PLR$  durch ( $P$  Permutationsmatrix,  $L$  untere Dreiecksmatrix,  $R$  obere Dreiecksmatrix).
- Berechne die Lösung  $u$  von  $PLRu = b$  durch Vertauschen der Elemente von  $b$  und anschließendes Vor- und Rückwärtseinsetzen.

## 2. Berechnung der Randbedingung RB nach Gl.(4.24)

- Berechne die Vektoren  $u'$  und  $u''$  mit  $u'_k := \tilde{u}'_n(t_k^{(n)})$  und  $u''_k := \tilde{u}''_n(t_k^{(n)})$  nach den Formeln

$$u'_k := \sum_{j=0}^{2n-1} L_{j-k}^{(n)'}(0)u_j \quad \text{und} \quad u''_k := \sum_{j=0}^{2n-1} L_{j-k}^{(n)''}(0)u_j.$$

Dabei ist  $\tilde{u}_n := \sum_{j=0}^{2n-1} L_j^{(n)}u_j$  das trigonometrische Interpolationspolynom mit den Stützwerten  $\tilde{u}_n(t_k^{(n)}) = u_k$  und  $L_j^{(n)}$  die durch (4.3) gegebene Lagrange-Basis. Die in den Summen auftretenden Lagrange-Funktionen mit negativem Index werden durch die Vorschrift  $L_j^{(n)} := L_{j+2n}^{(n)}$  erklärt.

- Berechne den Vektor  $rb \in \mathbb{C}^{2n}$  nach der Vorschrift

$$rb_k = 2 \left( u_k k^2 \langle \bar{n}, h \rangle + u'_k \frac{\langle \bar{n}', h \rangle + \langle \bar{n}, h' \rangle - 2 \frac{\langle z', z'' \rangle}{|z'|^2} \langle \bar{n}, h \rangle}{|z'|^2} + u''_k \frac{\langle \bar{n}, h \rangle}{|z'|^2} \right) (t_k^{(n)}).$$

## 3. Lösung des Randwertproblems aus Satz 3.12

- Löse die Gleichung  $A^t \psi = rb \Leftrightarrow R^t L^t P^t \psi = rb$  durch Vor- und Rückwärtseinsetzen und anschließendes Vertauschen der Elemente.
- Berechne  $u'_\infty(z, h)$  durch Approximation von (4.32) mit der Trapezregel

$$(u'_\infty(z, h))(\hat{x}) \approx \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{n} \sqrt{\frac{\pi}{8k}} \sum_{j=0}^{2n-1} \psi_j \left( (k \langle \hat{x}, \bar{n} \rangle + \eta |z'|) e^{-ik \langle \hat{x}, z \rangle} \right) (t_j^{(n)}).$$

**Bemerkung:** Die häufig benötigten Quadraturkoeffizienten  $T_j^{(n)}(0)$  und  $R_j^{(n)}(0)$ , die Werte Ableitungen der Lagrange-Basis  $L_j^{(n)'}(0)$ ,  $L_j^{(n)''}(0)$  sowie die Knotenstellen  $z^{(p)}(t_j^{(n)})$ ,  $j = 0, \dots, 2n-1$ ,  $p = 0, 1, 2, 3$  sollten nur einmal berechnet und dann gespeichert werden.

**Beispiel 4.6** Ich wähle als Streukörper das durch die Parametrisierung

$$z(t) = \frac{1 + 0.9 \cos t + 0.1 \sin 2t}{1 + 0.75 \cos t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

gegebene bohnenförmige Gebiet und

$$h(t) = \sin 3t \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

Außerdem wähle ich  $k = \eta = 1$  und  $d = (1, 0)$ . Dann ergeben sich die in Tabelle 4.1 dargestellten Ergebnisse. Exponentielle Konvergenz ist deutlich erkennbar.

n	$\operatorname{Re} u'_\infty(z, h)(d)$	$\operatorname{Im} u'_\infty(z, h)(d)$	$\operatorname{Re} u'_\infty(z, h)(-d)$	$\operatorname{Im} u'_\infty(z, h)(-d)$
16	-0.02835488643	-0.0852397226	0.3105598925	0.0135066481
32	-0.01074823451	-0.1474862302	0.1981580186	0.1172907102
64	-0.01083958407	-0.1470318727	0.1989053837	0.1165309772
128	-0.01083958507	-0.1470318711	0.1989053835	0.1165309730

Tabelle 4.1: Beispiel zum ersten Berechnungsverfahren von  $u'_\infty(z, h)$ 

## 4.4 Zweites Verfahren

Verwendet man zur Lösung des äußeren Neumann-Problems zur Funktion  $g \in C(\Gamma)$  einen Einfachschichtpotential-Ansatz

$$w(x) = \int_{\Gamma} \Phi(x, y) \varphi(y) \, ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}, \quad (4.34)$$

mit unbekannter Dichte  $\varphi \in C(\Gamma)$ , so erhält man nach den Sprungbeziehungen für  $\varphi$  die Integralgleichung

$$(I - K^*)\varphi = -2g. \quad (4.35)$$

Falls das homogene innere Dirichlet-Problem für  $D$  nur die triviale Lösung besitzt, d.h. falls die Wellenzahl  $k$  kein "Dirichlet-Eigenwert" des Laplace-Operators ist, kann man mit Hilfe der Riesz-Theorie zeigen, daß der Operator  $I - K^*$  beschränkt invertierbar ist.

Parametrisierung von (4.35) und Multiplikation mit  $|z'(t)|$  liefert

$$\psi(t) - \int_0^{2\pi} L(t, \tau; z) \psi(\tau) \, d\tau = -2|z'(t)|g(z(t))$$

mit der unbekanntenen Dichte  $\psi := |z'|(\varphi \circ z)$  und

$$L(t, \tau; z) := -\frac{ik^2}{2} \langle z(t) - z(\tau), \bar{n}(t) \rangle \frac{H_1(r)}{r}.$$

Dabei ist  $r := r(t, \tau; z) := k|z'(t) - z'(\tau)|$  und  $\bar{n} := \begin{pmatrix} z'_2 \\ -z'_1 \end{pmatrix}$ . Führt man die parametrisierten Operatoren  $K_p^* : C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$  und  $F_p : C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow L^2(S^1)$  ein durch die Vorschriften

$$\begin{aligned} (K_p^* \psi)(t) &:= \int_0^{2\pi} L(t, \tau; z) \psi(\tau) \, d\tau, \\ (F_p \psi)(\hat{x}) &:= \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{8\pi k}} \int_0^{2\pi} e^{-ik \langle \hat{x}, z(\tau) \rangle} \psi(\tau) \, d\tau, \end{aligned}$$

so gilt

$$u_\infty(z) = F_p(z)(I - K_p^*(z))^{-1} \left( 2|z'| \frac{\partial u_i}{\partial n} \circ z \right).$$

Mit den Ergebnissen aus Abschnitt 3.2 erhält man nach der Produktregel

$$\begin{aligned}
u'_\infty(z, h) &= F'_p(z, h)(I - K_p^*(z))^{-1} \left( 2|z'| \frac{\partial u^i}{\partial n} \circ z \right) \\
&\quad + F_p(z)(I - K_p^*(z))^{-1} (K_p^*)'(z, h)(I - K_p^*(z))^{-1} \left( 2|z'| \frac{\partial u^i}{\partial n} \circ z \right) \\
&\quad + F_p(z)(I - K_p^*(z))^{-1} \frac{\partial}{\partial z} \left( 2|z'| \frac{\partial u^i}{\partial n} \circ z \right) (z, h). \tag{4.36}
\end{aligned}$$

Nach Satz 2.7 gilt

$$((K_p^*)'(z, h)\psi)(t) = \int_0^{2\pi} L'(t, \tau; z, h)\psi(\tau) d\tau.$$

Unter Benutzung der Identität (1.9) erhält man

$$L'(t, \tau; z, h) = if(t, \tau; z, h) \frac{H_2(r)}{r^2} + ig(t, \tau; z, h) \frac{H_1(r)}{r}$$

mit

$$\begin{aligned}
f(t, \tau; z, h) &:= \frac{k^4}{2} \langle z(t) - z(\tau), \bar{n}(t) \rangle \langle z(t) - z(\tau), h(t) - h(\tau) \rangle, \\
g(t, \tau; z, h) &:= -\frac{k^2}{2} \left( \langle h(t) - h(\tau), \bar{n}(t) \rangle + \langle z(t) - z(\tau), (h'_2(t), -h'_1(t))^t \rangle \right).
\end{aligned}$$

Entsprechend ist

$$(F'_p\psi)(\hat{x}) = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{8\pi k}} \int_0^{2\pi} (-ik) \langle \hat{x}, h(\tau) \rangle e^{-ik\langle \hat{x}, z(\tau) \rangle} \psi(\tau) d\tau.$$

Um gute Quadraturoperatoren zur Approximation von  $K_p^*$  und  $(K_p^*)'(z, h)$  zu erhalten, ist in den Kernen  $L$  und  $L'$  wieder die logarithmische Singularität abzuspalten. Es gilt

$$L(t, \tau; z) = L_1(t, \tau; z) \ln \left( 4 \sin^2 \frac{t - \tau}{2} \right) + L_2(t, \tau; z)$$

mit

$$\begin{aligned}
L_1(t, \tau; z) &:= \frac{k^2}{2\pi} \langle z(t) - z(\tau), \bar{n}(t) \rangle \frac{J_1(r)}{r}, \\
L_2(t, \tau; z) &:= L(t, \tau; z) - L_1(t, \tau; z) \ln \left( 4 \sin^2 \frac{t - \tau}{2} \right)
\end{aligned}$$

sowie

$$L'(t, \tau; z, h) = L'_1(t, \tau; z, h) \ln \left( 4 \sin^2 \frac{t - \tau}{2} \right) + L'_2(t, \tau; z, h)$$

mit

$$\begin{aligned} L_1'(t, \tau; z, h) &= -\frac{1}{\pi} f(t, \tau; z, h) \frac{J_2(r)}{r^2} - \frac{1}{\pi} g(t, \tau; z, h) \frac{J_1(r)}{r}, \\ L_2'(t, \tau; z, h) &= L'(t, \tau; z, h) - L_1'(t, \tau; z, h) \ln \left( 4 \sin^2 \frac{t - \tau}{2} \right). \end{aligned}$$

Für analytisches  $z$  sind  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_1'$  und  $L_2'$  ebenfalls analytisch und besitzen die Diagonalterme

$$\begin{aligned} L_1(t, t) &= 0, & L_2(t, t) &= \frac{\langle \bar{n}(t), z''(t) \rangle}{2\pi |z'(t)|^2}, & L_1'(t, t) &= 0, \\ L_2'(t, t) &= -\frac{1}{\pi} \frac{\langle \bar{n}(t), z''(t) \rangle \langle z'(t), h'(t) \rangle}{|z'(t)|^4} + \frac{1}{2\pi} \frac{\langle \bar{n}(t), h''(t) \rangle + \langle (h_2'(t), -h_1'(t))^t, z''(t) \rangle}{|z'(t)|^2}. \end{aligned}$$

Die Implementation von (4.36) erfolgt nun folgendermaßen:

**Zweites Verfahren zur näherungsweise Berechnung der Fréchetableitung  $u'_\infty(z, h)$  bei einfallender Welle  $u^i(x) = e^{ik\langle d, x \rangle}$  und  $2n$  Stützstellen:**

1. Berechnung von  $\psi := (I - K_p^*)^{-1} \left( 2|z'| \frac{\partial u^i}{\partial n} \circ z \right)$

- Berechne die Matrix  $A = (a_{kj}) \in \mathbb{C}^{2n \times 2n}$  und den Vektor  $b = (b_k) \in \mathbb{C}^{2n}$  nach den Formeln

$$\begin{aligned} a_{kj} &:= R_{|k-j|}^{(n)}(0) L_1(t_k^{(n)}, t_j^{(n)}) + \frac{\pi}{n} L_2(t_k^{(n)}, t_j^{(n)}), \\ b_k &:= 2ik \left( \langle d, \bar{n} \rangle e^{ik\langle d, z \rangle} \right) (t_k^{(n)}) \end{aligned}$$

- Führe eine LR-Zerlegung  $A = PLR$  durch (P Permutationsmatrix, L untere Dreiecksmatrix, R obere Dreiecksmatrix).
- Löse die Gleichung  $PLR\psi = b$  nach  $\psi \in \mathbb{C}^{2n}$ .

2. Berechnung von  $\chi := (K_p^*)'(z, h)\psi + 2\frac{\partial}{\partial z} \left( |z'| \frac{\partial u^i}{\partial n} \circ z \right) (z, h)$

- Für  $k = 0, \dots, 2n - 1$ :  
 $\chi_k := 2ik \left( e^{ik\langle d, z \rangle} \{ \langle d, (h_2', -h_1')^t \rangle + ik \langle d, \bar{n} \rangle \langle d, h \rangle \} \right) (t_k^{(n)})$   
Für  $j = 0, \dots, 2n - 1$ :  
 $\chi_k := \chi_k + \left( R_{|k-j|}^{(n)} L_{F,1}(t_k^{(n)}, t_j^{(n)}) + \frac{\pi}{n} L_{F,2}(t_k^{(n)}, t_j^{(n)}) \right) \psi_j$

3. Ersetzung von  $\chi$  durch  $(I - K_p^*)^{-1}\chi$

- Setze  $\chi := R^{-1}L^{-1}P^{-1}\chi$ .

4. Berechnung von  $u'_\infty(z, h) = F_p\chi + F_p'(z, h)\psi$

- Berechne

$$(u'_\infty(z, h))(\hat{x}) \approx \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{n} \sqrt{\frac{\pi}{8k}} \sum_{j=0}^{2n-1} \chi_j e^{-ik\langle \hat{x}, z(t_k^{(n)}) \rangle} + \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{n} \sqrt{\frac{k\pi}{8}} \sum_{j=0}^{2n-1} \psi_j (\langle \hat{x}, h \rangle e^{-ik\langle \hat{x}, z \rangle}) (t_j^{(n)}).$$

**Beispiel 4.7** Ich verwende die Daten aus Beispiel 4.6. Die numerischen Ergebnisse sind in Tabelle 4.2 dargestellt.

n	Re $u'_\infty(z, h)(d)$	Im $u'_\infty(z, h)(d)$	Re $u'_\infty(z, h)(-d)$	Im $u'_\infty(z, h)(-d)$
16	-0.01253872019	-0.1500106419	0.1979961905	0.1240799818
32	-0.01082281836	-0.1469820889	0.1989381039	0.1164166722
64	-0.01083957940	-0.1470318777	0.1989053785	0.1165309857
128	-0.01083957978	-0.1470318791	0.1989053775	0.1165309888

Tabelle 4.2: Beispiel zum zweiten Berechnungsverfahren von  $u'_\infty(z, h)$

Die geringfügigen Abweichungen zwischen den Tabellen 4.1 und 4.2 bei  $n = 128$  sind vermutlich darauf zurückzuführen, daß die benutzten Implementationen der Bessel- und Neumann-Funktionen aus "Numerical Recipes in C" nur mit einfacher Genauigkeit arbeiten.

## 4.5 Vergleich der beiden Verfahren

Wie aus den Tabellen 4.1 und 4.2 hervorgeht ist die Genauigkeit beider Verfahren bei analytischen Randkurven vergleichbar.

Ein Nachteil von Methode 2 ist, daß sie bei irregulären Wellenzahlen nicht funktioniert. Dieser Nachteil ist allerdings eher von theoretischer Natur, da es zu einem Gebiet höchstens endlich viele irreguläre Wellenzahlen gibt und dieses Problem deshalb in der Praxis fast nie auftritt. Außerdem kann man auch bei Methode 2 mit einem gemischten Potentialansatz arbeiten und dadurch die Eindeutigkeitsproblematik vermeiden. Dafür muß allerdings die Fréchetableitung des stark singulären Operators  $T$  berechnet werden (vgl [M2]).

Bei beiden Verfahren ist nur eine LR-Zerlegung durchzuführen, und alle anderen Operationen haben höchstens einen Rechenaufwand der Größenordnung  $O(n^2)$ . Deshalb ist jeweils der Rechenaufwand im Limes  $n \rightarrow \infty$  von der Größenordnung  $O(n^3)$ . Sollen die Verfahren allerdings im Rahmen eines Newton-Verfahrens eingesetzt werden, so ist es nicht sinnvoll, zuviel Rechenzeit dafür zu investieren, die Fréchetableitung möglichst genau zu berechnen. Hier hat sich die Wahl  $n = 32$

als sinnvoll erwiesen. Bei dieser Wahl von  $n$  ist der Rechenaufwand für eine LR-Zerlegung etwa so groß wie der zum Aufstellen einer Matrix  $(K_p^*)'(z, h)$  bei der zweiten Methode. Da beim Newton-Verfahren die Fréchet-Ableitung für verschiedene  $h$ 's berechnet werden muß, arbeitet Methode 1 wesentlich schneller. Auf einem Pentium 100 Rechner dauerte ein Newton-Schritt bei 9 Basisfunktionen  $h_j$  und  $n = 32$  mit dem ersten Verfahren 0.7 Sekunden, und mit dem zweiten Verfahren 2.1 Sekunden. Die Ergebnisse sind fast identisch (siehe Tab. 5.1). Deshalb habe ich bei den Beispielen in Abschnitt 5.3. überall (außer bei Tab. 5.1) das erste Verfahren verwendet.

# Kapitel 5

## Das Newton-Verfahren

In diesem Kapitel wird das inverse Neumann-Problem, oder genauer eigentlich das inverse Streuproblem am schallharten Hindernis besprochen. Ich spezifiziere zunächst, was damit gemeint ist:

**Definition 5.1 (Inverses Neumann-Problem)** *Gegeben sei eine ebene einfallende Welle  $u_i(x) := e^{ik\langle x, d \rangle}$  mit Wellenzahl  $k > 0$  und Richtung  $d \in S^1$  sowie ein (gemessenes) Fernfeld  $u_\infty^{mess} \in L^2(S^1)$ . Gesucht ist ein beschränktes, einfach zusammenhängendes Gebiet  $D \subset \mathbb{R}^2$  mit  $C^{2,\alpha}$ -glattem Rand  $\Gamma$ , so daß das Fernfeld  $u_\infty$  bei Streuung von  $u_i$  an  $D$  gleich  $u_\infty^{mess}$  ist.*

Es konnte bisher weder bewiesen noch widerlegt werden, ob eine Lösung dieses Problems, sofern sie existiert, eindeutig bestimmt ist. Immerhin konnte gezeigt werden, daß zwei Streukörper identisch sein müssen, wenn die gestreuten Felder für alle Einfallrichtungen  $d$  und feste Wellenzahl  $k$  übereinstimmen (s. z.B. [CK1], Satz 5.6.). Da Fernfelder analytisch sind, ist das Problem 5.1 sicherlich nicht für jedes  $u \in L^2(S^1)$  lösbar. Hingegen konnte gezeigt werden (s. [Gr]), daß für einen festen Streukörper die Menge der Fernfelder für alle Einfallrichtungen  $d \in S^1$  vollständig in  $L^2(S^1)$  liegt, falls es keine nicht-trivialen Neumann-Eigenfunktionen von  $D$  gibt, die gleichzeitig Herglotz-Wellenfunktionen sind, d.h. falls es keine nicht-trivialen Funktionen der Form  $v(x) = \int_{S^1} e^{ik\langle x, d \rangle} g(d) ds(d)$  mit  $g \in L^2(S^1)$  gibt, die die Randbedingung  $\frac{\partial v}{\partial n} = 0$  auf  $\Gamma$  erfüllen. Durch Drehung eines Streukörpers, der keine solchen Neumann-Eigenfunktionen besitzt, folgt daraus unmittelbar, daß auch die Menge der Fernfelder aller zulässigen Streukörper bei fester einfallender Welle vollständig in  $L^2(S^1)$  ist.

Das inverse Streuproblem 5.1 ist schwierig zu behandeln, da es, wie sich herausstellt, nicht-linear und schlecht gestellt ist. Es ist nicht-linear, da etwa mit den in Abschnitt 3.1 eingeführten Bezeichnungen  $u_\infty(z) + u_\infty(-z) = 2u_\infty(z) \neq 0$ , während  $z + (-z) = 0$  für  $z = (\cos t, \sin t)$ . Daß das Problem 5.1 schlecht gestellt ist, ist plausibel, da der Operator  $u_\infty$  stark glättend wirkt, nämlich  $C^{2,\alpha}$ -Funktionen auf analytische abbildet. Genauer kann man zeigen, daß der Operator  $u_\infty : RP \rightarrow L^2(S^1)$  vollstetig ist (s. etwa [CK2], Satz 5.7 für das Dirichlet-Problem). Daraus folgt, daß

der Umkehroperator, sofern er existiert, nicht stetig sein kann, denn die Hintereinanderschaltung eines kompakten und eines stetigen Operators ist kompakt, die Identität auf einem unendlich-dimensionalen Banachraum hingegen nicht.

## 5.1 Newton-Verfahren und Regularisierung

Mit den in Abschnitt 3.1 eingeführten Bezeichnung, besteht das Problem 5.1 darin, die nichtlineare Operatorgleichung

$$u_\infty(z) = u_\infty^{mess}, \quad (5.1)$$

nach  $z \in RP$  zu lösen. Ich ersetze diese Gleichung durch die linearisierte Gleichung

$$u_\infty(z) + u'_\infty(z, h) = u_\infty^{mess}, \quad (5.2)$$

die nach  $h \in C_{2\pi}^{2,\alpha}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$  zu lösen ist. Beginnend von einer Startnäherung  $z_0$ , wird in einem iterativen Prozeß jeweils die Näherung  $z_n$  ( $n \in \mathbb{N}_0$ ) nach Lösen der linearisierten Gleichung (5.2) durch die Näherung  $z_{n+1} := z_n + h_n$  ersetzt, bis ein noch zu definierendes Abbruchskriterium erfüllt ist.

Zur Beantwortung der Frage, inwieweit eine Lösung von (5.2) eindeutig bestimmt ist, müßte der Nullraum der Abbildung  $u'_\infty(z, \cdot)$  bekannt sein. Für das Dirichlet-Problem kann man mit Hilfe des Holmgren'schen Eindeutigkeitssatzes in wenigen Zeilen zeigen, daß  $N(u'_\infty(z, \cdot)) = \{h : \langle h, n \rangle = 0\}$  (s. z.B. [K3]). Man kann diese Gleichung als Ausdruck der Tatsache verstehen, daß Uparametrisierungen die Kurve  $\Gamma$  nicht ändern. Vermutlich gilt für das Neumann-Problem dasselbe Resultat, dies konnte jedoch bisher nicht bewiesen werden.

**Vermutung:**  $N(u'_\infty(z, \cdot)) = \{h \in C_{2\pi}^{2,\alpha}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) : \langle h, n(\cdot; z) \rangle = 0\}$

Lediglich die Inklusion  $\{h \in C_{2\pi}^{2,\alpha}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) : \langle h, n(\cdot; z) \rangle = 0\} \subset N(u'_\infty(z, \cdot))$  läßt sich, z.B. mit Hilfe von Lemma 4.5, einfach zeigen.

Ich gehe zunächst davon aus, daß der Streukörper  $D$  sternförmig bezüglich des Ursprungs ist. Dann läßt sich  $\Gamma$  eindeutig durch ein  $z \in RP$  von der Form

$$z(t) = r(t)K(t)$$

mit einer positiven Funktion  $r \in C_{2\pi}^{2,\alpha}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  und  $K(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$  beschreiben.

Entsprechend wähle ich auch  $h$  von der Form

$$h(t) = q(t)K(t)$$

mit  $q \in C_{2\pi}^{2,\alpha}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Man überzeugt sich leicht davon, daß (5.2) höchstens eine Lösung von dieser Form besitzen kann, falls die oben formulierte Vermutung richtig ist.

In der Praxis wird man  $u_\infty^{mess}$  immer nur an endlich vielen Meßpunkten  $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_M$  kennen. Um zu einem diskreten Gleichungssystem zu kommen, suche ich außerdem  $h$  aus einem endlichen Approximationsraum, etwa

$$h = \sum_{j=1}^N c_j h_j$$

mit Koeffizienten  $c_j \in \mathbb{R}$  und Basisfunktionen  $h_j$ , die wiederum von der Form  $h_j(t) = q_j(t)K(t)$  mit  $q_j \in C_{2\pi}^{2,\alpha}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  sind. Dies führt auf das endlich-dimensionale Gleichungssystem

$$\sum_{j=1}^N c_j (u'_\infty(z, h_j))(\hat{x}_k) = u_\infty^{mess}(\hat{x}_k) - (u_\infty(z))(\hat{x}_k), \quad k = 1, \dots, M, \quad (5.3)$$

das nach den reellen Koeffizienten  $c_j$  zu lösen ist. Nach Aufspaltung in Real- und Imaginärteil erhält man  $2M$  Gleichungen für  $N$  Unbekannte. Im allgemeinen ist  $2M > N$ , und (5.3) muß als lineares Ausgleichsproblem gelöst werden.

Zum Aufstellen der Matrix in (5.3) ist  $u'_\infty(z, h_j)$  für  $N$  verschiedene Basisfunktionen  $h_j$  zu berechnen. Dazu kann eines der beiden in Kapitel 4 dargestellten Verfahren benutzt werden. Zur Berechnung der rechten Seite ist das direkte Streuproblem zum Rand  $\Gamma = z(\mathbb{R})$  zu lösen. Im Prinzip kann dazu ein beliebiges Verfahren verwendet werden. Bei Verwendung des ersten Verfahrens zur Berechnung der Fréchetableitung bietet es sich jedoch an,  $u_\infty(z)$  aus  $u|_\Gamma$  nach der Formel

$$u_\infty(\hat{x}) = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{8\pi k}} \int_\Gamma \frac{\partial e^{-ik\langle \hat{x}, y \rangle}}{\partial n(y)} u(y) \, ds(y),$$

zu berechnen, die analog zum Beweis von Satz 1.12 aus der Darstellungsformel (4.27) für  $u_s$  folgt. Bei Verwendung des zweiten Verfahrens muß man die Formel

$$u_\infty(\hat{x}) = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{8\pi k}} \int_\Gamma e^{-ik\langle \hat{x}, y \rangle} \varphi(y) \, ds(y),$$

benutzen, die sich aus dem Einfachschichtpotential-Ansatz (4.34) ergibt.

Da sich die schlechte Gestelltheit von (5.1) auf (5.2) überträgt (s. z.B. [CK2], Satz 4.19), muß ein Regularisierungsverfahren verwendet werden. (Bei exakten Daten genügt es häufig schon, als Regularisierung die Dimension des Approximationsraums klein zu halten.)

Ein einfach zu implementierendes und häufig benutztes Regularisierungsverfahren ist die Tikhonov-Regularisierung (s. z.B. [K4], [M2]). Ist  $A$  die Matrix in Gls.(5.3) und  $b$  die rechte Seite, dann besteht dieses Verfahren, angewendet auf die diskretisierte Gleichung (5.3), darin, den Ausdruck

$$\|Ac - b\|_2^2 + \beta \|c\|_2^2$$

mit einem Regularisierungsparameter  $\beta > 0$  zu minimieren. Dabei ist  $A \in \mathbb{C}^{2M \times N}$  gegeben durch  $A_{kj} := (u'_\infty(z, h_j))(\hat{x}_k)$  und  $b \in \mathbb{C}^{2M}$  durch  $b_k := u_\infty^{mess}(\hat{x}_k) - (u_\infty(z))(\hat{x}_k)$ . Man kann zeigen (s. z.B. [K1], Kapitel 16), daß dies äquivalent ist zum Lösen des linearen Gleichungssystems

$$(A^t A + \beta I)c = A^t b. \quad (5.4)$$

Als alternatives Regularisierungsverfahren habe ich versucht, in jedem Newton-Schritt den Ausdruck

$$\|u'_\infty(z, h) - u_\infty^{mess} + u_\infty(z)\|_{L^2(S^1)}^2 + \alpha \left( \|(z+h)'\|_{L^2([0, 2\pi])}^2 + \|(z+h)''\|_{L^2([0, 2\pi])}^2 \right) \quad (5.5)$$

zu minimieren. Es wird ein mit einem Regularisierungsparameter  $\alpha > 0$  gewichteter zusätzlicher Term eingeführt, der starke Oszillationen der neuen Näherungskurve "bestraft". Unter Benutzung von  $\langle K(t), K'(t) \rangle = 0$ ,  $K''(t) = -K(t)$ ,  $|K(t)| = |K'(t)| = 1$  ergibt sich

$$\begin{aligned} |z'(t) + h'(t)|^2 &= |(r(t) + q(t))K'(t) + (r'(t) + q'(t))K(t)|^2 \\ &= \left( r(t) + \sum_{j=1}^N c_j q_j(t) \right)^2 + \left( r'(t) + \sum_{j=1}^N c_j q'_j(t) \right)^2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} |z''(t) + h''(t)|^2 &= |(r(t) + q(t))K''(t) + 2(r'(t) + q'(t))K'(t) + (r''(t) + q''(t))K(t)|^2 \\ &= \left( r(t) - r''(t) + \sum_{j=1}^N c_j (q_j(t) - q''_j(t)) \right)^2 + 4 \left( r'(t) + \sum_{j=1}^N c_j q'_j(t) \right)^2. \end{aligned}$$

Approximiert man die drei in (5.5) auftretenden Integralnormen durch die Trapezregel mit  $M$  Stützstellen, so erhält man, sofern die Meßpunkte  $\hat{x}_k$  äquidistant sind, nach Multiplikation mit  $\frac{M}{2\pi}$  den diskreten Ausdruck

$$\begin{aligned} \|Ac - b\|_2^2 &+ \alpha \sum_{k=0}^{M-1} \left( r(t_k^{(n)}) + \sum_{j=1}^N c_j q_j(t_k^{(n)}) \right)^2 + 5\alpha \sum_{k=0}^{M-1} \left( r'(t_k^{(n)}) + \sum_{j=1}^N c_j q'_j(t_k^{(n)}) \right)^2 \\ &+ \alpha \sum_{k=0}^{M-1} \left( r(t_k^{(n)}) - r''(t_k^{(n)}) + \sum_{j=1}^N c_j (q_j(t_k^{(n)}) - q''_j(t_k^{(n)})) \right)^2. \end{aligned}$$

Die Minimierung dieses Ausdrucks für  $c \in \mathbb{R}^N$ , ist offenbar äquivalent zur Lösung des linearen Ausgleichsproblems

$$\begin{pmatrix} A \\ A^{(1)} \\ A^{(2)} \\ A^{(3)} \end{pmatrix} c = \begin{pmatrix} b \\ b^{(1)} \\ b^{(2)} \\ b^{(3)} \end{pmatrix}$$

mit den Matrizen  $A^{(1)}, A^{(2)}, A^{(3)} \in \mathbb{R}^{M \times N}$  und den Vektoren  $b^{(1)}, b^{(2)}, b^{(3)} \in \mathbb{R}^M$ , deren Elemente gegeben sind durch

$$\begin{aligned} A_{kj}^{(1)} &:= \sqrt{\alpha} q_j(t_k^{(n)}), & A_{kj}^{(2)} &:= \sqrt{5\alpha} q_j'(t_k^{(n)}), & A_{kj}^{(3)} &:= \sqrt{\alpha} (q_j''(t_k^{(n)}) - q_j(t_k^{(n)})), \\ b_k^{(1)} &:= -\sqrt{\alpha} r(t_k^{(n)}), & b_k^{(2)} &:= -\sqrt{5\alpha} r'(t_k^{(n)}), & b_k^{(3)} &:= -\sqrt{\alpha} (r''(t_k^{(n)}) - r(t_k^{(n)})) \end{aligned}$$

( $k = 0, \dots, M-1$ ;  $j = 1, \dots, N$ ). Die Matrizen  $A^{(1)}, A^{(2)}$  und  $A^{(3)}$  müssen dabei nur einmal berechnet zu werden.

## 5.2 Einschub: Interpolation mit $2\pi$ -periodischen radialen Basisfunktionen

In diesem Abschnitt bezeichne  $\phi$  immer eine gerade,  $2\pi$ -periodische stetige Funktion von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$ . Ich betrachte das folgende Interpolationsproblem:

Zu gegebener Stützstellenmenge  $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subset [0, 2\pi)$  und gegebenen Stützwerten  $g_1^{(N)}, \dots, g_N^{(N)}$  finde eine Funktion  $v \in F_{X,\phi}$  mit

$$F_{X,\phi} := \left\{ \sum_{j=1}^N c_j \phi(\cdot - x_j) : c_1, \dots, c_N \in \mathbb{R} \right\},$$

so daß  $v(x_k) = g_k$  für  $k = 1, \dots, N$ .

Beachte, daß im Gegensatz etwa zur trigonometrischen oder zur Polynominterpolation der Interpolationsraum nicht nur von der Anzahl, sondern auch von der Lage der Stützstellen abhängt.

Das beschriebene Interpolationsproblem ist offenbar genau dann eindeutig lösbar, wenn das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \phi(0) & \phi(x_1 - x_2) & \cdots & \phi(x_1 - x_N) \\ \phi(x_2 - x_1) & \phi(0) & \cdots & \phi(x_2 - x_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi(x_N - x_1) & \phi(x_N - x_2) & \cdots & \phi(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_N \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

eine eindeutige Lösung besitzt. Da  $\phi$  gerade ist, ist die Matrix in (5.6) symmetrisch. Das Gleichungssystem (5.6) ist sicherlich dann eindeutig lösbar, wenn die Matrix positiv definit ist. Funktionen  $\phi$  für die dies bei jeder Stützstellenmenge  $X$  der Fall ist, nennt man positiv definit.

**Definition 5.2** Die Funktion  $\phi$  heißt positiv definit, wenn für jede Stützstellenmenge  $\{x_1, \dots, x_N\}$  und jeden Vektor  $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_N)$  mit  $\gamma \neq 0$  gilt

$$\sum_{j,k=1}^N \gamma_j \gamma_k \phi(x_j - x_k) > 0. \quad (5.7)$$

Für eine reellwertige Funktion  $f \in L^2([0, 2\pi])$  sind die *Fourierkoeffizienten* von  $f$  definiert durch die Integrale

$$\begin{aligned} a_0 &:= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \, dx, \\ a_n &:= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad n = 1, 2, \dots \\ b_n &:= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Die *Fourierreihe* von  $f$  ist gegeben durch

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

und konvergiert in der  $L^2$ -Norm gegen  $f$ .

**Satz 5.3** *Erfüllen die Fourierkoeffizienten  $a_n$  von  $\phi$  die Bedingungen*

1.  $a_n \geq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  und  $a_n > 0$  für alle  $n$  bis auf endlich viele
2.  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n < \infty$ ,

so ist  $\phi$  positiv definit, und es gilt

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx \tag{5.8}$$

für alle  $x \in \mathbb{R}$  im Sinne von *gleichmäßiger Konvergenz*.

**Beweis:** Da  $\phi$  gerade ist, verschwinden die Fourierkoeffizienten  $b_n$  von  $\phi$ . Deshalb steht auf der rechten Seite von (5.8) die Fourierreihe von  $\phi$ . Wegen Voraussetzung 2 konvergiert diese Reihe gleichmäßig gegen eine stetige Funktion, und aufgrund der  $L^2$ -Konvergenz der Fourierreihe stimmt die Grenzfunktion mit  $\phi$  überein. Setzt man nun (5.8) in Definition (5.7) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_{j,k=1}^N \gamma_j \gamma_k \phi(x_j - x_k) &= \sum_{j,k=1}^N \gamma_j \gamma_k \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n(x_j - x_k) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{j,k=1}^N \gamma_j \gamma_k (\cos nx_j \cos nx_k + \sin nx_j \sin nx_k) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left\{ \left( \sum_{k=1}^N \gamma_k \cos nx_k \right)^2 + \left( \sum_{k=1}^N \gamma_k \sin nx_k \right)^2 \right\} \geq 0. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Es muß nur noch gezeigt werden, daß in Ugl.(5.9) das Gleichheitszeichen nur für  $\gamma = 0$  stehen kann. Ich nehme also an, es herrsche Gleichheit in (5.9). Da höchstens

endlich viele  $a_n$  verschwinden, gibt es ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so daß  $a_n > 0$  für alle  $n \geq n_0$ . Dann gilt für  $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} 0 &= \left( \sum_{k=1}^N \gamma_k \cos nx_k \right)^2 + \left( \sum_{k=1}^N \gamma_k \sin nx_k \right)^2 \\ &= \left| \sum_{k=1}^N \gamma_k \cos nx_k + i \sum_{k=1}^N \gamma_k \sin nx_k \right|^2 \\ &= \left| \sum_{k=1}^N \gamma_k e^{inx_k} \right|^2, \end{aligned}$$

also

$$\sum_{k=1}^N \gamma_k e^{i(n_0+j)x_k} = 0 \quad \text{für } j = 0, 1, 2, \dots$$

Sei  $p(x) = \sum_{j=0}^{N-1} p_j e^{ijx}$  das eindeutig bestimmte trigonometrische Polynom vom Grad kleiner oder gleich  $N - 1$  mit

$$p(x_k) = \gamma_k e^{-in_0 x_k}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N |\gamma_k e^{in_0 x_k}|^2 &= \sum_{k=1}^N \gamma_k e^{in_0 x_k} p(x_k) = \sum_{k=1}^N \gamma_k e^{in_0 x_k} \left( \sum_{j=0}^{N-1} p_j e^{ijx_k} \right) \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} p_j \sum_{k=1}^N \gamma_k e^{i(n_0+j)x_k} = 0 \end{aligned}$$

und deshalb  $\gamma_1 = \dots = \gamma_N = 0$ . ■

**Bemerkung:** Es ist bisher nicht gelungen, mit Hilfe der Fourierkoeffizienten ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für die positive Definitheit einer Funktion anzugeben. Man kann zeigen, daß eine Funktion nicht mehr positiv definit sein muß, wenn in Satz 5.3 unendlich viele Fourierkoeffizienten verschwinden. Für die positive *Semidefinitheit* einer Funktion gibt es jedoch durch den Satz von Schoenberg ein notwendiges und hinreichendes Kriterium. Eine gerade,  $2\pi$ -periodische stetige Funktion ist nämlich *genau dann* positiv semidefinit, wenn alle Fourierkoeffizienten nicht-negativ und absolut summierbar sind. (Dabei heißt eine Funktion positiv semidefinit, wenn in (5.7)  $\geq$  statt  $>$  steht. Vgl. [Me])

Ich gebe nun einige Verfahren zur Konstruktion von positiv definiten Funktionen an. Zunächst erhält man aus Satz 5.3 das

**Korollar 5.4** Sei  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  eine analytische Funktion, deren Konvergenzradius echt größer als 1 ist und deren Taylorkoeffizienten  $a_n$  sämtlich nichtnegativ und bis auf endlich viele echt positiv sind. Dann ist die Funktion

$$\phi(x) := \frac{1}{2} \left( f(e^{ix}) + f(e^{-ix}) \right)$$

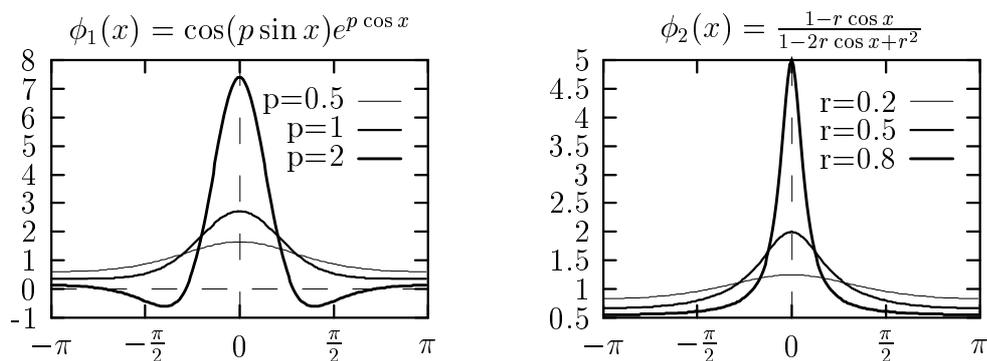


Abbildung 5.1: Analytische radiale Basisfunktionen

positiv definit.

**Beweis:** Es gilt

$$\begin{aligned}\phi(x) &= \frac{1}{2} \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n (e^{ix})^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (e^{-ix})^n \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{2} (e^{inx} + e^{-inx}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx.\end{aligned}$$

Da außerdem  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = f(1) < \infty$ , erfüllt  $\phi$  die Voraussetzungen von Satz 5.3 und ist deshalb positiv definit. ■

**Beispiel 5.5** Wählt man  $f(z) = e^{pz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{p^n}{n!} z^n$ ,  $p > 0$ , so ergibt sich

$$\begin{aligned}\phi_1(x) &= \frac{1}{2} \left( e^{p(\cos x + i \sin x)} + e^{p(\cos x - i \sin x)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( e^{ip \sin x} + e^{-ip \sin x} \right) e^{p \cos x} = \cos(p \sin x) e^{p \cos x}.\end{aligned}$$

**Beispiel 5.6** Wählt man  $f(z) = \frac{1}{1-rz} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n z^n$  mit  $0 < r < 1$ , so erhält man

$$\begin{aligned}\phi_2(x) &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{1-re^{ix}} + \frac{1}{1-re^{-ix}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2-r(e^{ix} + e^{-ix})}{1-r(e^{ix} + e^{-ix}) + r^2} = \frac{1-r \cos x}{1-2r \cos x + r^2}.\end{aligned}$$

**Definition 5.7** Für stetige,  $2\pi$ -periodische Funktionen  $f$  und  $g$  ist die Faltung  $f * g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definiert durch die Vorschrift

$$(f * g)(x) := \int_0^{2\pi} f(y)g(x-y) dy.$$

Man überzeugt sich leicht, daß  $f * g$  wieder stetig und  $2\pi$ -periodisch ist. Das folgende Lemma verifiziert man durch einfaches Nachrechnen.

**Lemma 5.8** *Seien  $f_1$  und  $f_2$  stetige,  $2\pi$ -periodische Funktionen mit Fourierkoeffizienten  $a_n^{(j)}$  und  $b_n^{(j)}$ ,  $j = 1, 2$ . Dann sind die Fourierkoeffizienten  $a_n$  und  $b_n$  von  $f_1 * f_2$  gegeben durch*

$$\begin{aligned} a_0 &= 4\pi a_0^{(1)} a_0^{(2)}, \\ a_0 &= 4\pi a_0^{(1)} a_0^{(2)}, \\ a_n &= \pi \left( a_n^{(1)} a_n^{(2)} - b_n^{(1)} b_n^{(2)} \right), \quad n = 1, 2, \dots, \\ b_n &= \pi \left( a_n^{(1)} b_n^{(2)} + a_n^{(2)} b_n^{(1)} \right), \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

**Lemma 5.9** *Ist  $f$  gerade, stetig und  $2\pi$ -periodisch und sind höchstens endlich viele Fourierkoeffizienten von  $f$  gleich Null, so ist  $f * f$  positiv definit.*

**Beweis:** Da  $f$  gerade, stetig und  $2\pi$ -periodisch ist, besitzt auch  $f * f$  diese Eigenschaften. Da höchstens endlich viele Fourierkoeffizienten von  $f$  verschwinden, folgt aus Lemma 5.8, daß Voraussetzung 1 von Satz 5.3 erfüllt ist. Voraussetzung 2 ist ebenfalls gegeben, denn sind  $\tilde{a}_n$  die Fourierkoeffizienten von  $f * f$  und  $a_n$  die Fourierkoeffizienten von  $f$ , so gilt nach der Besselschen Ungleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n = \pi \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \leq \int_0^{2\pi} f(x)^2 dx < \infty.$$

Also ist  $f * f$  positiv definit. ■

**Beispiel 5.10** Für  $a \in (0, \pi)$  sei  $f_a$  die  $2\pi$ -periodische Fortsetzung der charakteristischen Funktion auf  $[-a, a]$ , d.h.  $f_a(x) = 1$ , falls  $|x| \leq a$  und  $f_a(x) = 0$ , falls  $a < |x| \leq \pi$ . Ich definiere rekursiv die Faltungen  $f_a^{(n)} := f_a^{(n-1)} * f_a$  für  $n > 1$  und setze  $f_a^{(1)} := f_a$ . Falls  $an < \pi$ , zeigt man durch vollständige Induktion, daß  $f_a^{(n)} \in C_{2\pi}^{n-2}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  für  $n \geq 2$  und  $f_a^{(n)}(x) = 0$  für  $an < |x| \leq \pi$ . Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{1}{a} f_a^{(2)}(ax) &= \begin{cases} 2 - x, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & 2 \leq x \leq \pi \end{cases} \\ \frac{1}{a^3} f_a^{(4)}(ax) &= \begin{cases} \frac{16}{3} - 2x^2 + \frac{1}{2}x^3, & 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{32}{3} - 8x^2 + 2x^3 - \frac{1}{6}x^3, & 2 \leq x \leq 4 \\ 0, & 4 \leq x \leq \pi \end{cases} \\ \frac{1}{a^5} f_a^{(6)}(ax) &= \begin{cases} \frac{88}{5} - 4x^2 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{12}x^5, & 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{68}{5} + 10x - 14x^3 + 5x^3 - \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{24}x^5, & 2 \leq x \leq 4 \\ \frac{324}{5} - 54x^1 + 18x^2 - 3x^3 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{120}x^5, & 4 \leq x \leq 6 \\ 0, & 6 \leq x \leq \pi \end{cases} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{a^7} f_a^{(8)}(ax) = \begin{cases} \frac{19328}{315} - \frac{32}{3}x^2 + \frac{8}{9}x^4 - \frac{1}{18}x^6 + \frac{1}{144}x^7, & 0 \leq x \leq 2 \\ \frac{6592}{105} - \frac{224}{45}x - \frac{16}{5}x^2 - \frac{56}{9}x^3 + 4x^4 - \frac{14}{15}x^5 + \frac{1}{10}x^6 - \frac{1}{240}x^7, & 2 \leq x \leq 4 \\ -\frac{8896}{315} + \frac{6944}{45}x^1 - \frac{368}{3}x^2 + \frac{392}{9}x^3 - \frac{76}{9}x^4 + \frac{14}{15}x^5 - \frac{1}{18}x^6 + \frac{1}{720}x^7, & 4 \leq x \leq 6 \\ \frac{131072}{315}x - \frac{16384}{45}x + \frac{2048}{15}x^2 - \frac{256}{9}x^3 + \frac{32}{9}x^4 - \frac{4}{15}x^5 + \frac{1}{90}x^6 - \frac{1}{5040}x^7, & 6 \leq x \leq 8 \\ 0, & 8 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

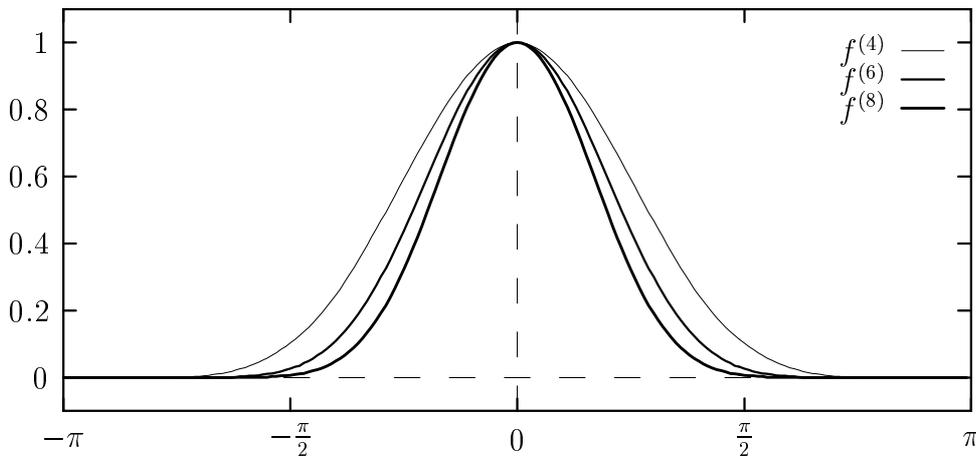


Abbildung 5.2: Faltungen der charakteristischen Funktion auf  $[-a, a]$

**Bemerkung:** Offensichtlich sind Linearkombinationen von positiv definiten Funktionen wiederum positiv definit. Man kann zeigen, daß auch Produkte positiv definiten Funktionen wieder positiv definit sind. Daraus ergeben sich weitere Möglichkeiten zur Konstruktion positiv definiten Funktionen.

### 5.3 Numerische Ergebnisse und Experimente

Um bei der Erzeugung der künstlichen Daten kein inverses Vergehen zu verüben, habe ich bei der Berechnung der Meßdaten nach dem in Abschnitt 4.2 dargestellten Verfahren stets den Kopplungsparameter  $\eta = 0$  bei  $2n = 128$  Stützstellen verwendet, während für das Newton-Verfahren  $\eta = k$  und  $2n = 64$  gesetzt wurde. Außerdem habe ich die wahren Kurven immer so gewählt, daß sie nicht in dem Approximationsraum lagen. Bei allen Versuchen wurden  $M = 64$  Meßpunkte verwendet.

Als Maß für die Qualität einer Rekonstruktion kann zum einen der relative Fehler  $F$  zwischen dem gemessenen Fernfeld und dem Fernfeld der approximierenden Kurve

$$F := \frac{\|u_\infty^{mess} - u_\infty(z_{app})\|_{L^2}}{\|u_\infty^{mess}\|_{L^2}}$$

betrachtet werden, und zum anderen bei sternförmigen Gebieten der relative Fehler  $E$  der Radialfunktionen

$$E := \frac{\|r_{wahr} - r_{app}\|_{L^2}}{\|r_{wahr}\|_{L^2}}.$$

Dabei ist natürlich  $E$  normalerweise nicht bekannt. Das Newton-Verfahren wurde abgebrochen, wenn zum ersten Mal der relative Fehler der aktuellen Näherungskurve  $z_n = r_n K$  gegenüber der vorherigen Kurve  $z_{n-1} = r_{n-1} K$  kleiner als ein Toleranzwert  $\delta$  war, d.h. wenn

$$\frac{\|r_n - r_{n-1}\|_{L^2}}{\|r_n\|_{L^2}} < \delta.$$

Als geeigneter Wert hat sich z.B.  $\delta = 0.005$  herausgestellt. Alternativ wurde bei vertauschten Daten oder bei Gebieten, die nicht sternförmig bzgl. des Ursprungs sind, das Verfahren abgebrochen, wenn zum ersten Mal  $F < \epsilon$  mit einem Toleranzwert  $\epsilon$  war.

### 5.3.1 Vergleich der beiden Verfahren

Tab. 5.1 zeigt die Fehler  $E$  und  $F$  bei Verwendung des ersten und des zweiten Verfahrens zur Berechnung der Fréchet-Ableitung für das schon in Beispiel 4.6 verwendete bohnenförmige Gebiet. Es wurde  $d = (1, 0)$  gewählt und mit den  $N = 9$  trigonometrischen Monomen vom Grad kleiner oder gleich 4 als Basisfunktionen  $q_1, \dots, q_9$  approximiert. Abbruchparameter war  $\delta = 0.005$ . Wie man sieht, liefern beide Verfahren fast identische Ergebnisse. Da, wie schon in Abschnitt 4.5 erwähnt, das erste Verfahren etwa dreimal schneller läuft, wurde im folgenden immer dieses verwendet.

k	Schritt	1. Verfahren		2. Verfahren	
		E	F	E	F
2	0	0.288024284	0.975045034	0.288024284	0.975045031
	1	0.225776584	0.462744078	0.225776585	0.462744081
	2	0.078489407	0.156729059	0.078489406	0.156729058
	3	0.022867999	0.024037880	0.022868001	0.024038291
	4	0.024558293	0.008808933	0.024558304	0.008808867
	5	0.024483739	0.008794187	0.024483743	0.008794163
0.5	0	0.288024284	0.237973129	0.288024284	0.237973125
	1	0.225705323	0.059996484	0.225705295	0.060006370
	2	0.254319795	0.074792218	0.254274658	0.074703082
	3	0.114124826	0.017093255	0.114081216	0.017131338
	4	0.027400606	0.009840074	0.027327454	0.009792835
	5	0.019853789	0.002533261	0.019865191	0.002525655
	6	0.029628295	0.000422293	0.029623038	0.000419308

Tabelle 5.1: Vergleich der beiden Implementationen des Newton-Verfahrens

### 5.3.2 Rekonstruktionen mit trigonometrischen Polynomen

Wie bei einem Newton-Verfahren zu erwarten, erhält man Konvergenz nur bei hinreichend guten Startnäherungen. Es stellt sich heraus, daß die Startnäherung um so besser sein muß, je größer die Dimension des Approximationsraums ist. Deshalb ist es sinnvoll, den Approximationsraum zunächst klein zu wählen und sich, ausgehend etwa vom Einheitskreis, eine erste Näherung zu verschaffen, und dann die Dimension des Approximationsraums schrittweise zu erhöhen, wobei jeweils das Ergebnis des letzten Schritts als Startnäherung für den nächsten verwendet wird. Desgleichen kann der Regularisierungsparameter um so kleiner gewählt werden, je besser die Startnäherung ist.

Bei den in Abb. 5.3 dargestellten Rekonstruktionen ist wie auch bei allen folgenden Abbildungen jeweils die wahre Kurve fett und die Näherungskurve dünn dargestellt. Beginnend vom Einheitskreis habe ich zunächst  $N = 7$  gewählt. Als Basisfunktionen  $q_1, \dots, q_7$  wurden die reellen trigonometrischen Monome vom Grad kleiner oder gleich 3 verwendet. Außerdem wurde das alternative Regularisierungsverfahren (5.5) mit Parameter  $\alpha = 0.0001$  benutzt. War das Abbruchkriterium  $\delta = 0.005$  nach weniger als 20 Schritten erfüllt, wurde die Dimension  $N$  des Approximationsraums um 4 erhöht und der Regularisierungsparameter  $\alpha$  durch 100 dividiert. Dabei waren bei festen  $N$  jeweils zwischen 2 und 5 Newton-Schritte erforderlich, bis sich zum ersten Mal die Näherungen in zwei aufeinanderfolgenden Schritten um weniger als  $\delta = 0.005$  unterschieden.

Als Streukörper wurden folgende Gebiete verwendet: Links oben ist das schon in den Beispielen 4.6 und 4.7 benutzte bohnenförmige Gebiet dargestellt. Das rechts oben abgebildete nußförmige Gebiet wird beschrieben durch die Radialfunktion

$$r_{Nu\beta}(t) = \sqrt{\cos^2 t + 0.26 \sin^2(t + 0.5)}.$$

Die links unten dargestellte drachenförmige Kurve ist gegeben durch

$$z_{Drachen}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) + 0.65 \cos(2t) - 0.65 \\ 1.5 \sin t \end{pmatrix}.$$

Um den Fehler  $E$  berechnen zu können, habe ich die Werte der zugehörigen Radialfunktion  $r$  mit einem Newton-Verfahren ermittelt. Schließlich wird das rechts unten abgebildete sternartige Gebiet beschrieben durch die Radialfunktion

$$r_{Stern}(t) = 0.6 + 0.2e^{1.7 \cos(t-2)+0.4 \sin t}.$$

Man erkennt, daß die beiden oberen Gebiete sehr gut approximiert werden (der Unterschied zwischen wahrer Kurve und Näherungskurve ist gar nicht mehr erkennbar), während die Rekonstruktionen der beiden unteren Gebiete noch nicht ganz befriedigend sind. Offenbar sind trigonometrische Polynome schlecht geeignet, die "Zacken" in den beiden unteren Kurven nachzubilden. (Die nach innen gerichtete Zacke in der Bohne kann gut rekonstruiert werden, da sie nahe beim Ursprung liegt und

die Ableitungen der Radialfunktion  $r$  deshalb nicht sehr groß sind. Verschiebt man die Bohne um 0.5 nach links, so ist die Qualität der Rekonstruktion auf der nicht beleuchteten Rückseite etwa vergleichbar mit der Rekonstruktion auf der Rückseite des Drachens, und die Zacke ist in der Rekonstruktion nur noch schwach erkennbar.) Dies gibt Anlaß zur Verwendung von radialen Basisfunktionen.

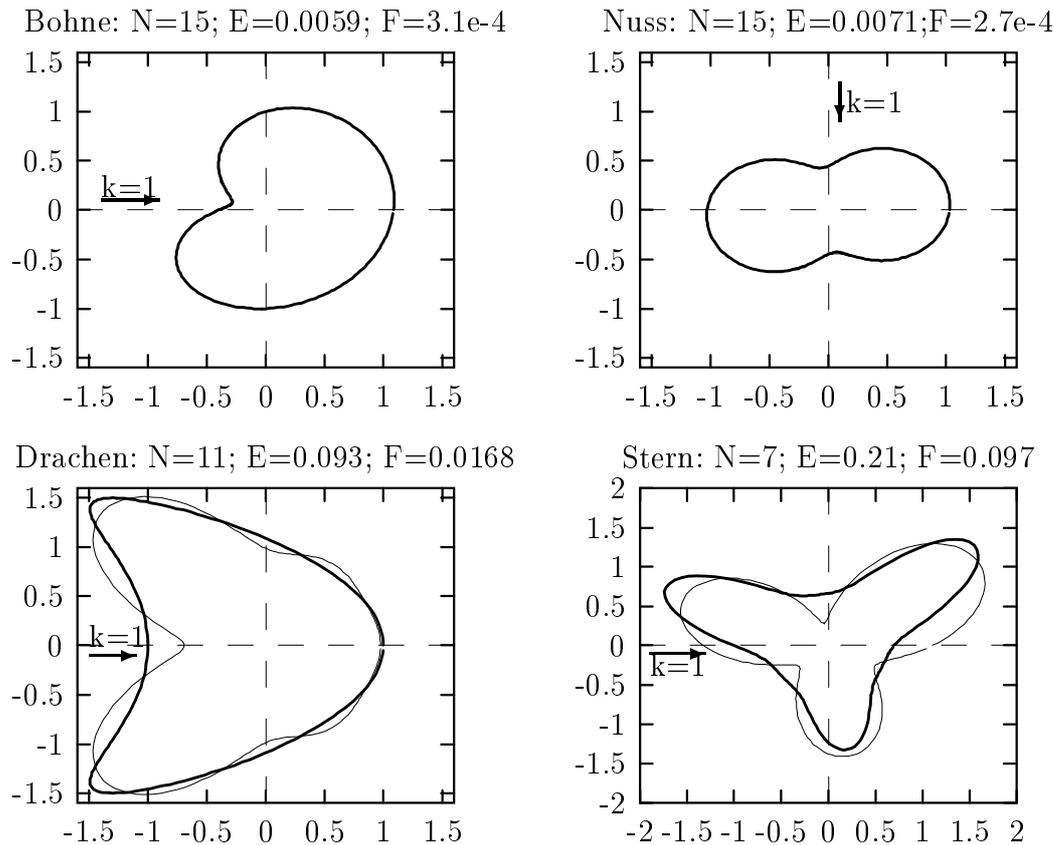


Abbildung 5.3: Rekonstruktionen mit trigonometrischen Polynomen

### 5.3.3 Verwendung radialer Basisfunktionen

Numerische Experimente zeigen, daß besonders bei Verwendung der radialen Basisfunktionen aus den Beispielen 5.6 und 5.10 gute Startnäherungen benötigt werden. Deshalb habe ich bei den Rekonstruktionen in Abb. 5.4 und 5.5 zunächst, ausgehend von Einheitskreis, mit  $N = 7$  trigonometrischen Basisfunktionen approximiert. Besonders gute Ergebnisse können bei Verwendung von nicht äquidistanten Stützstellen erzielt werden. Die Stützstellen sollten sich dort häufen, wo die zu approximierende Kurve Zacken hat. Da man i.a. nicht weiß, wo eventuelle Zacken des Streukörpers liegen, muß man sich bei der Wahl der Stützstellen an der (hoffentlich hinreichend guten) Startnäherung orientieren. Ich habe die Stützstellen  $t_j$  jeweils so verteilt, daß

für alle  $j = 1, \dots, N - 1$  das Integral

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} \sqrt{1 + 0.5r_S''(t)^2} dt \quad (5.10)$$

annähernd den gleichen Wert hatte und daß außerdem

$$\int_{t_N}^{2\pi} \sqrt{1 + 0.5r_S''(t)^2} dt \approx \int_0^{t_1} \sqrt{1 + 0.5r_S''(t)^2} dt \approx \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + 0.5r_S''(t)^2} dt$$

war. Dabei ist  $r_S$  die Radialfunktion der Startnäherung. Da auf der Spitze einer Zacke die zweite Ableitung besonders groß ist, häufen sich dort nach diesem Verteilungsalgorithmus die Stützstellen.

Anschließend habe ich den Mittelwert

$$c_0 := \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N r_S(t_j)$$

berechnet. Approximationsraum war dann die Menge aller Funktionen  $z$  der Form

$$z(t) = \left( c_0 + \sum_{j=1}^N c_j \phi(t - t_j) \right) K(t)$$

mit variablen Koeffizienten  $c_1, \dots, c_N \in \mathbb{R}$ . Am Anfang habe ich diese so bestimmt, daß die Interpolationsbedingungen

$$\sum_{j=1}^N c_j \phi(t_k - t_j) = r_S(t_k) - c_0, \quad k = 1, \dots, N$$

erfüllt waren.

Bei den Rekonstruktionen in Abb. 5.4 und 5.5 wurde die Funktion  $\phi_2$  aus Beispiel 5.6 mit  $r = 0.5$  verwendet. Die Punkte auf den Näherungskurven zeigen die Verteilung der Stützstellen an. Sobald sich die Näherungen in zwei aufeinanderfolgenden Newton-Schritten um weniger als  $\delta = 0.005$  unterschieden, wurde die Dimension des Approximationsraums um 3 erhöht und die Lage der Stützstellen nach dem oben beschriebenen Algorithmus der aktuellen Zwischennäherung angepaßt. Dadurch wurde die Stützstellenverteilung zunehmend besser. Als Regularisierung habe ich wieder (5.5) benutzt, wobei der Regularisierungsparameter  $\alpha$  mit zunehmender Qualität der Rekonstruktion wie angegeben herabgesetzt wurde. Rekonstruktionen mit anderen Werten des Parameters  $r$  der radialen Basisfunktionen  $\phi_2$  lieferten vergleichbare Ergebnisse, sofern  $r \in (0, 1)$  nicht zu klein oder zu groß gewählt wurde.

Die radialen Basisfunktionen  $\phi_1$  aus Beispiel 5.5 eignen sich gut zur Gewinnung einer groben Approximation, liefern jedoch auch bei größeren Werten von  $p$  weniger gute Ergebnisse bei der Feinapproximation. Dabei ist das Verfahren wiederum unempfindlich gegenüber kleineren Veränderungen des Parameters  $p > 0$ . Wie die

Untersuchungen in [Me] zeigen, nimmt für die radiale Basisfunktion  $\phi_1$  die Kondition der Matrizen in Gl.(5.6) mit wachsendem  $N$  sehr schnell zu, insbesondere bei nicht äquidistanter Stützstellenverteilung. Ich erhielt bereits bei  $N = 18$  numerische Probleme bei der Lösung des Interpolationsproblems. Diese Instabilität überträgt sich bei kleineren Werten des Regularisierungsparameters  $\alpha$  auch auf das Newton-Verfahren. Bei der Rekonstruktion in Abb. 5.6 (links) wurde  $p = 1$  gewählt und zunächst, beginnend vom Einheitskreis, mit  $N = 8$  Basisfunktionen  $\phi_1$  und äquidistanter Stützstellenverteilung approximiert. Anschließend wurde  $N$  auf 12 und dann auf 15 erhöht. Alle Parameter hatten die Werte aus Abb. 5.4.

Da im allgemeinen die Kondition der Matrix in Gl.(5.6) umso größer ist, je glatter die radiale Basisfunktion  $\phi$  (vgl. auch hier [Me]), könnte man angesichts der Probleme mit den Basisfunktionen  $\phi_1$  erwarten, daß bessere Ergebnisse mit den lokalen und weniger glatten Funktionen aus Beispiel 5.10 erzielt werden können. Diese Vermutung hat sich in meinen numerischen Versuchen allerdings nicht bestätigt. Die Ergebnisse bei Feinapproximation sind zwar besser als mit den Funktionen  $\phi_1$ , aber schlechter als mit den Funktionen  $\phi_2$ . Für  $N \geq 15$  trat hier in den getesteten Beispielen fast immer die Situation ein, daß sich das Newton-Verfahren zwischen zwei oder mehr Zuständen einpendelte und das Abbruchkriterium nie erfüllt wurde. In Abb. 5.6 (rechts) wurde das Verfahren für  $N = 15$  Basisfunktionen  $f_a^{(8)}$  nach 15 Newton-Schritten abgebrochen. Startnäherungen wurden zunächst mit  $N = 7$  trigonometrischen Monomen und dann mit  $N = 12$  Basisfunktionen  $f_a^{(8)}$  berechnet. Dabei wurde bei  $N = 12$  der Parameter  $a = 0.18$  gesetzt, und bei  $N = 15$  wurde  $a = 0.144$  gewählt (d.h. es war  $aN = \text{const!}$ ). Weiterhin hat es sich als günstig erwiesen, in (5.10) den Term  $\sqrt{1 + 0.5r_S''(t)^2}$  durch  $\sqrt{1 + 0.1r_S''(t)^2}$  zu ersetzen, d.h. die Stützstellen weniger stark an die Zwischennäherungen anzupassen. Ansonsten wurden alle Parameter wieder wie in Abb. 5.4 gewählt. Es hat sich gezeigt, daß das Verfahren empfindlich von der Wahl des Parameters  $a$  abhängt, daß jedoch die Funktionen  $f_a^{(4)}$ ,  $f_a^{(6)}$  und  $f_a^{(8)}$  sehr ähnliche Ergebnisse liefern. Dabei nimmt die Qualität der Rekonstruktionen mit steigender Regularität geringfügig zu.

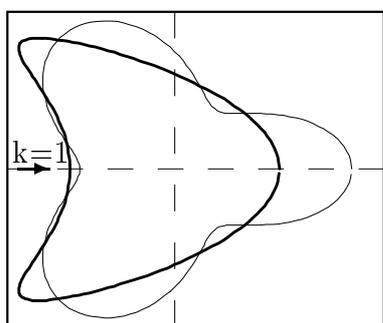
### 5.3.4 Rekonstruktionen bei gestörten Daten

Im allgemeinen werden die gemessenen Daten mit einem (relativen) Messfehler  $\epsilon_{err}$  behaftet sein. Darunter verstehe ich die Größe

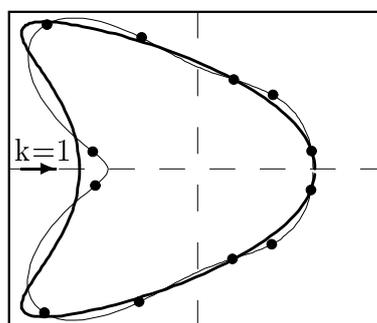
$$\epsilon_{err} := \frac{\|u_\infty^{mess} - u_\infty(z_{wahr})\|_{L^2}}{\|u_\infty(z_{wahr})\|_{L^2}}.$$

Die Integralnormen können wieder mit der Trapezregel approximiert werden. Ich simuliere den Meßfehler dadurch, daß ich ein zufälliges Rauschen auf die künstlich erzeugten Daten addiere. Das Verfahren wurde abgebrochen, sobald  $F < \epsilon_{err}$  erfüllt war oder sobald sich die Kurven in zwei aufeinanderfolgenden Schritten um weniger als  $\delta = 0.005$  unterschieden. Das Abbruchkriterium  $\epsilon = \epsilon_{err}$  ist naheliegend, da es nicht sinnvoll ist, die zu lösende Gleichung genauer zu erfüllen als der Fehler in den

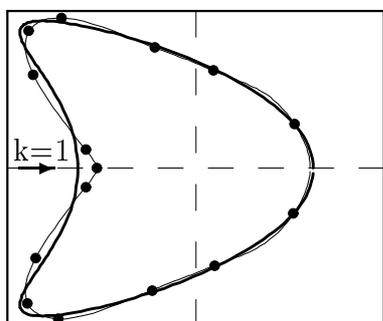
$N=7; \alpha = 10^{-4}; E=0.241; F=0.125$



$N=12; \alpha = 5 \cdot 10^{-5}; E=0.077; F=0.041$



$N=15; \alpha = 5 \cdot 10^{-6}; E=0.047; F=0.016$



$N=18; \alpha = 10^{-7}; E=0.028; F=0.0030$

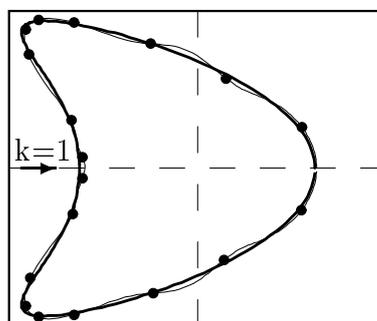


Abbildung 5.4: Rekonstruktion des Drachens mit der radialen Basisfunktion  $\phi_2$

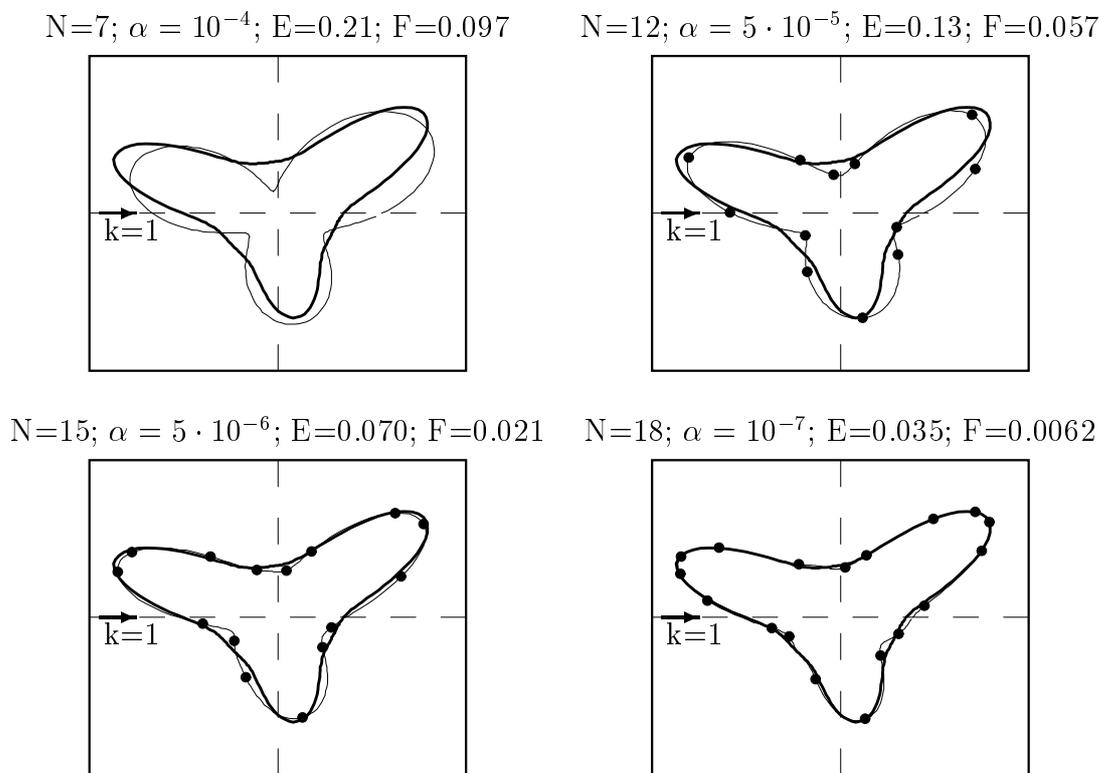


Abbildung 5.5: Rekonstruktion des Sterns mit der radialen Basisfunktion  $\phi_2$

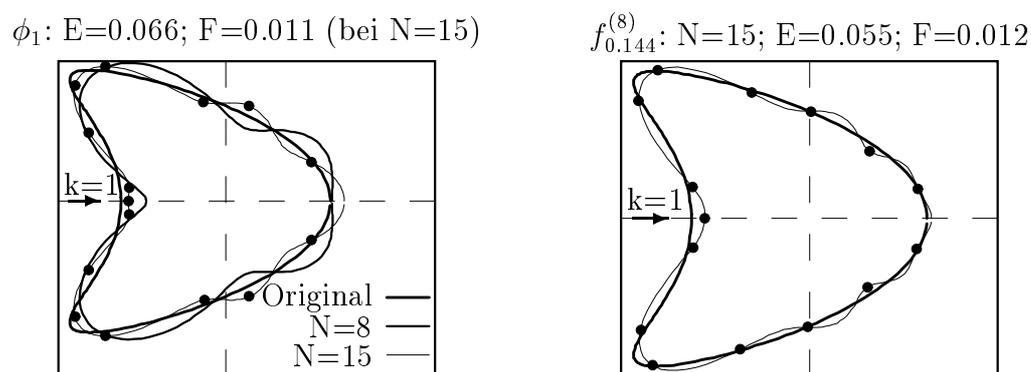


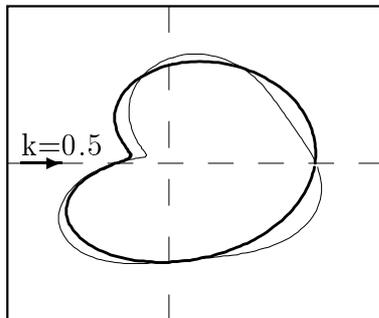
Abbildung 5.6: Rekonstruktionen mit den radialen Basisfunktionen  $\phi_1$  und  $f_a^{(8)}$

Meßdaten (Diskrepanzprinzip). Tabelle 5.2 zeigt den Fehler  $E$  zwischen Rekonstruktion und Streukörper bei verschiedenen Werten von  $\epsilon_{err}$ ,  $k$  und  $d$ . Es wurden  $N = 9$  trigonometrische Monome als Basisfunktionen verwendet und mit dem Parameter  $\alpha = 4 \cdot 10^{-6}$  nach (5.5) regularisiert. Meist waren nicht mehr als 3 oder 4 Schritte nötig, um das angegebene Abbruchkriterium zu erfüllen. Man erkennt, daß die Qualität der Rekonstruktionen auch bei gestörten Daten noch recht gut ist, aber empfindlich von der Wellenzahl  $k$  abhängt (vgl. auch Abb. 5.7; es sind die Kurven zu den beiden fett gedruckten Werten in Tab. 5.2 dargestellt). Offenbar schlägt die schlechte Gestelltheit bei kleinen Wellenzahlen  $k$  sehr viel stärker durch. Dies sieht man auch in Tab. 5.1. Bei vergleichbaren Werten von  $E$  ist der Fehler  $F$  für  $k = 0.5$  viel kleiner als für  $k = 2$ .

$\epsilon_{err}$	k=0.5		k=1		k=2	
	d=(1,0)	d=(0,1)	d=(1,0)	d=(0,1)	d=(1,0)	d=(0,1)
0.02	0.046	0.057	0.041	0.024	0.026	0.028
0.05	0.055	0.073	0.068	0.035	0.030	0.031
0.10	<b>0.102</b>	0.154	0.090	0.072	0.035	0.037
0.20	-	0.471	-	0.202	<b>0.049</b>	0.065

Tabelle 5.2: Fehler E bei gestörten Daten

Daten um 10% verrauscht; E=0.102



Daten um 20% verrauscht; E=0.049

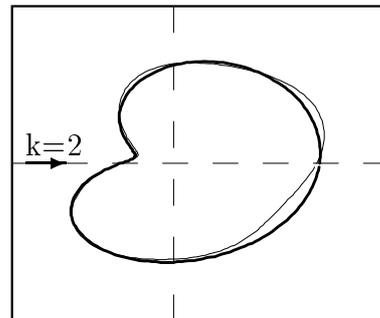


Abbildung 5.7: Rekonstruktionen bei gestörten Daten

### 5.3.5 Einschränkung des Winkelbereichs

Ich untersuche in diesem Unterabschnitt, wie stark die Qualität der Rekonstruktionen beeinträchtigt wird, wenn das Fernfeld nicht für alle Richtungen, sondern nur für Richtungen aus einem um den Faktor  $0 < q \leq 1$  eingeschränkten Winkelbereich bekannt ist. Genauer gesagt, ich nehme an, die Richtungen der Meßpunkte seien

durch

$$\hat{x}_k := \begin{pmatrix} \cos(\varphi + \pi(1 - q) + \frac{2\pi qk}{M}) \\ \sin(\varphi + \pi(1 - q) + \frac{2\pi qk}{M}) \end{pmatrix}, \quad k = 1, \dots, M$$

gegeben, wobei  $d = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ . Dies entspricht der Situation, daß das Fernfeld in der Nähe der Quelle nicht gemessen werden kann. In Tab. 5.3 ist der Fehler  $E$  bei Rekonstruktion der Bohne für  $k = 1$  und  $d = (1, 0)$  dargestellt. Als Basisfunktionen wurden  $N = 9$  trigonometrische Monome verwendet. Man erkennt, daß bei exakten Daten auch für sehr kleine Werte von  $q$  noch befriedigende Rekonstruktionen möglich sind. Allerdings wirkt sich dann ein kleiner Datenfehler sehr viel stärker aus. Das inverse Streuproblem ist offenbar bei eingeschränktem Winkelbereich noch extremer schlecht gestellt.

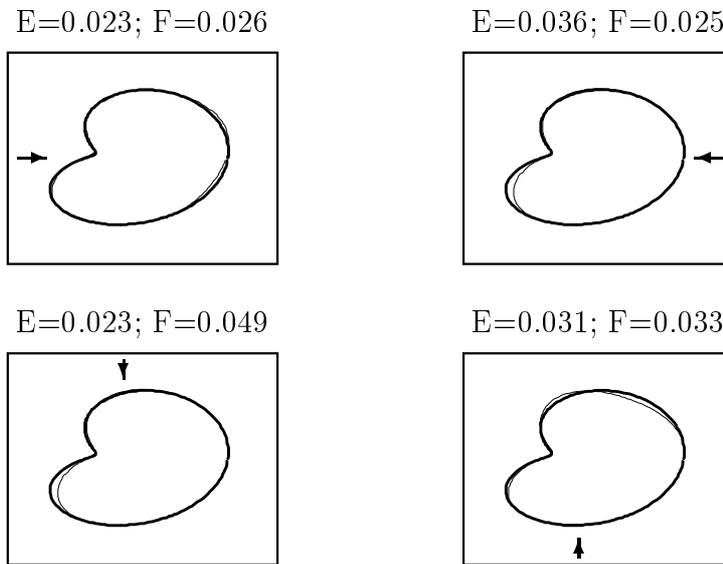
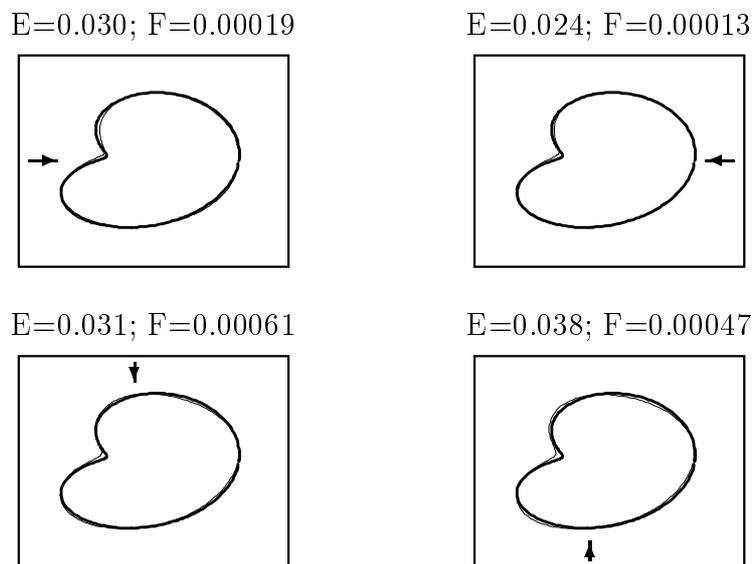
$\epsilon_{err}$	0	0.0005	0.002	0.01	0.05
$\alpha$	$10^{-10}$	$10^{-7}$	$10^{-5}$	$10^{-4}$	$5 \cdot 10^{-4}$
q=1	0.022	0.022	0.039	0.042	0.068
q=0.5	0.020	0.020	0.026	0.040	0.060
q=0.3	0.021	0.021	0.043	0.063	0.085
q=0.1	0.024	0.057	0.091	0.155	-
q=0.05	0.040	0.080	0.163	-	-

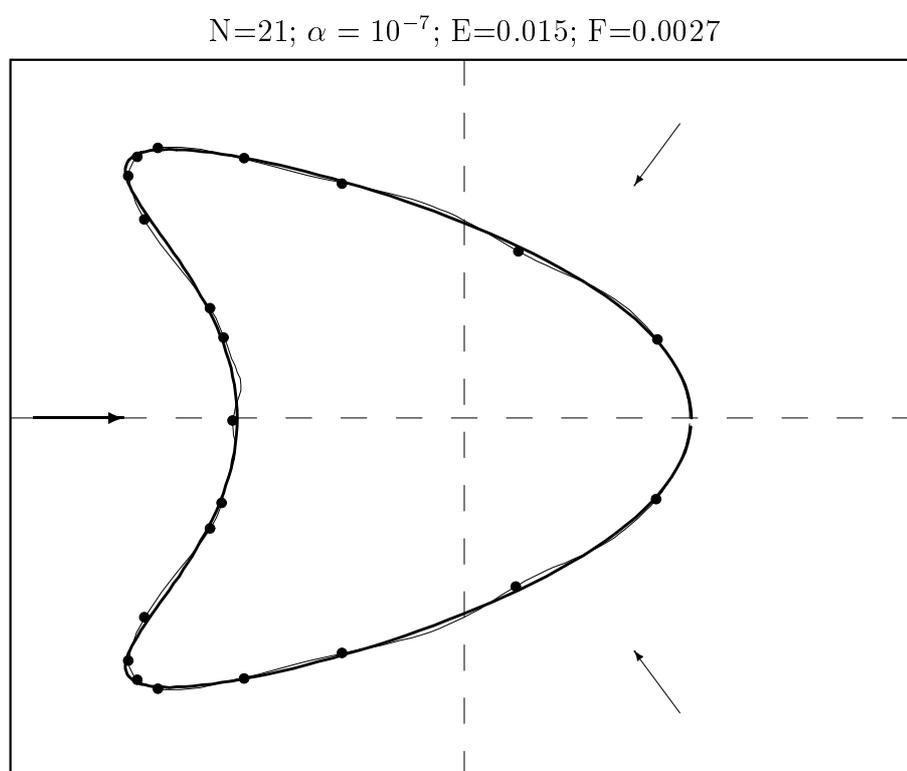
Tabelle 5.3: Rekonstruktionen bei eingeschränktem Winkelbereich

### 5.3.6 Abhängigkeit von Richtung und Wellenzahl der einfallenden Welle

In Abb. 5.8 und 5.9 sind Rekonstruktionen für verschiedene Einfallrichtungen  $d$  einer einfallenden Welle  $u_i(x) = e^{ik(x,d)}$  mit Wellenzahl  $k = 3$ , bzw.  $k = 0.5$  abgebildet. Es wurden  $N = 9$  trigonometrische Monome als Basisfunktionen gewählt. Abbruchparameter war  $\delta = 0.001$ . Es wurde keine Regularisierung verwendet. Man erkennt, daß bei kleiner Wellenlänge  $\frac{2\pi}{k}$  die beleuchtete Seite besser rekonstruiert wird als die nicht beleuchtete.

Erwartungsgemäß werden die Rekonstruktion besser, wenn die Fernfelder für mehrere einfallende Wellen zur Verfügung stehen. Abb. 5.10 zeigt die Rekonstruktion des Drachens bei 3 äquidistanten einfallenden Wellen und  $k = 1$ . Das Vorgehen war wie in Abb. 5.4, insbesondere wurde wieder die radiale Basisfunktion  $\phi_2$  mit  $r = 0.5$  verwendet. Bei der Rechnung wurden einfach die Matrizen aus (5.3) für die einzelnen Wellen zu einer Matrix zusammengesetzt, und entsprechend die rechten Seiten. Der für die Regularisierung verantwortliche Teil der Matrix wurde zur richtigen Normierung mit der Wurzel aus der Anzahl der einfallenden Wellen multipliziert.

Abbildung 5.8: Rekonstruktionen für verschiedene Einfallsrichtungen bei  $k = 3$ Abbildung 5.9: Rekonstruktionen für verschiedene Einfallsrichtungen bei  $k = 0.5$

Abbildung 5.10: Rekonstruktionen des Drachens bei 3 einfallenden Wellen und  $k = 1$

### 5.3.7 Suchen der Lage

Falls die Lage des zu rekonstruierenden Streukörpers nicht a-priori bekannt ist, kann man versuchen, sie durch ein Newton-Verfahren zu ermitteln. Dazu führe ich die konstanten Basisfunktionen  $h_{-1}(t) := (1, 0)$  und  $h_{-2}(t) := (0, 1)$  ein und wähle als Approximationsraum die Menge aller Funktionen der Form

$$z(t) = K(t) + c_{-1}h_{-1}(t) + c_{-2}h_{-2}(t). \quad (5.11)$$

In Abb. 5.11 ist das um den Vektor  $(6, 1.5)$  verschobene bohnenförmige Gebiet bei Wellenzahl  $k = 0.5$  und Einfallrichtung  $d = (0, 1)$  zu rekonstruieren. Beginnend vom Einheitskreis wurde zunächst ein Newton-Verfahren mit dem durch (5.11) gegebenen Approximationsraum und Abbruchparameter  $\epsilon = 0.3$  durchgeführt. Das Ergebnis ist der um den Vektor  $(c_{-1}, c_{-2}) = (6.233, 1.41)$  verschobene Einheitskreis, der unter dem Namen "1.Approximation" in Abb. 5.11 dargestellt ist. Ausgehend von dieser Näherung wurde nochmals ein Newton-Verfahren mit  $N = 9$  trigonometrischen und festem Verschiebungsvektor  $(6.233, 1.41)$  durchgeführt. Abbruchparameter war  $\epsilon = 0.01$ . Das Ergebnis ist ebenfalls in Abb. 5.11 unter dem Namen "2.Approximation" dargestellt.

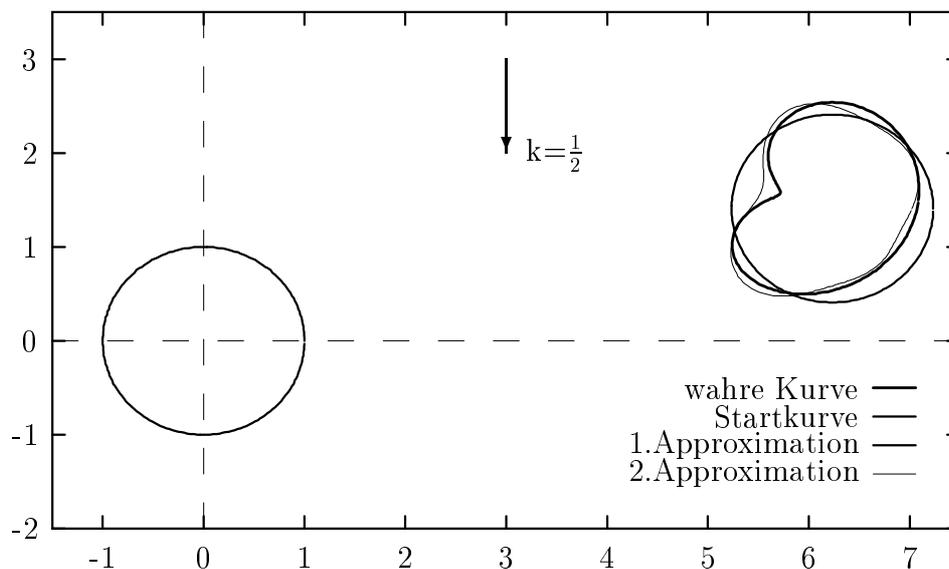


Abbildung 5.11: Suchen der Lage eines Streukörpers

Die Ergebnisse in Tabelle 5.4 zeigen, welchen Einfluß Richtung und Wellenzahl der einfallenden Welle auf die Suche nach der Lage des Streukörpers haben. Gesucht wurde jeweils ein um den Vektor  $v$  verschobenes bohnenförmiges Gebiet, als Abbruchparameter wurde  $\epsilon = 0.3$  gewählt. War dieses Kriterium nach 30 Schritten nicht erfüllt, wurde das Verfahren abgebrochen. In Tabelle 5.4 ist für die Wellenzahlen  $k = 1$  und  $k = 0.5$  sowie für verschiedene Einfallrichtungen  $d$  und Verschiebungs-

vektoren  $v$  jeweils die benötigte Anzahl der Newton-Schritte angegeben. Man erkennt, daß die Suche bei kleineren Wellenzahlen erfolgreicher ist. Außerdem wird das Objekt leichter gefunden, wenn es gegenüber der Startnäherung orthogonal, anstatt parallel zur Richtung der einfallenden Welle verschoben ist.

$v$	$k = 1$				$k = 0.5$			
	(3,0)	(0,3)	(-3,0)	(0,3)	(3,0)	(0,3)	(-3,0)	(0,3)
$d=(1,0)$	-	3	-	4	5	1	3	1
$d=(0,1)$	4	-	4	-	2	5	2	5
$d=(-1,0)$	-	3	-	3	5	1	3	1
$d=(0,-1)$	5	-	3	-	2	5	2	5

Tabelle 5.4: Anzahl der Newton-Schritte zum Finden der Lage eines um  $v$  verschobenen Streukörpers bei verschiedenen Wellenzahlen

### 5.3.8 Vergleich der Regularisierungsverfahren

In diesem Unterabschnitt vergleiche ich die alternative und die Tikhonov-Regularisierung für das Newton-Verfahren bei globaler Approximation, bei Feinapproximation, bei großen Approximationsräumen und bei fehlerhaften Daten.

Abb. 5.12 zeigt einen fehlgeschlagenen globalen Rekonstruktionversuch mit der Tikhonov-Regularisierung. Die Radialfunktion  $r$  der rekonstruierten Kurve ist in zwei Bereichen negativ. Das Resultat ist eine unzulässige Kurve mit Selbstüberschneidungen. Da die erste und besonders die zweite Ableitung in den Bereichen mit negativen Werten von  $r$  sehr groß sind, wird dieses Phänomen bei Verwendung der alternativen Regularisierung (5.5) meistens unterbunden (vgl. Abb. 5.5 links oben).

Abb. 5.13 zeigt eine Feinapproximation mit der Tikhonov-Regularisierung. Als Startnäherung wurde die in Abb. 5.5 oben rechts abgebildete Kurve verwendet. Alle Parameter wurden wie in Abb. 5.5 unten gesetzt. Bei  $\beta = 0.005$  ergab sich die dargestellte Rekonstruktion. Es treten an den nicht beleuchteten Seiten Oszillationen auf, die durch Verwendung der Regularisierung (5.5) verhindert werden konnten. Sowohl in Abb. 5.12 als auch in Abb. 5.5 wurden auch andere Werte von  $\beta$  getestet. In Abb. 5.14 wurde, ausgehend von einer Startnäherung mit  $N = 11$  trigonometrischen Monomen, der Drachen mit  $N = 60$  trigonometrischen Monomen approximiert. Man erkennt, daß sich bei der Tikhonov-Regularisierung die hohen Frequenzen schnell hochschaukeln, während die alternative Regularisierung eine sehr gute Approximation liefert. Das Abbruchkriterium mit  $\delta = 0.005$  war hier bereits nach 4 Schritten erfüllt. Auch nach 30 Newton-Schritten traten keine Stabilitätsprobleme auf.

Tab. 5.5 zeigt den Fehler  $E$  bei Rekonstruktion der Bohne für  $N = 9$  trigonometrische Basisfunktionen,  $k = 0.5$  und  $d = (1, 0)$  bei verschiedenen Werten des relative

$N=7$ ;  $\beta = 0.01$ ; 2. Newton-Schritt

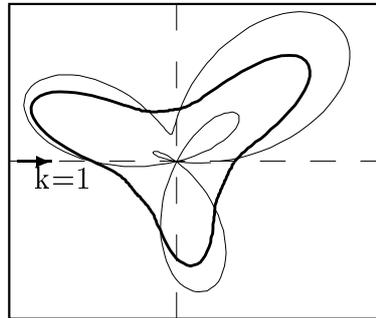


Abbildung 5.12: Fehlgeschlagener Rekonstruktionsversuch mit der Tikhonov-Regularisierung

Tikhonov-Reg.  $\beta = 0.005$ ; sonst wie Abb.5.5 un.

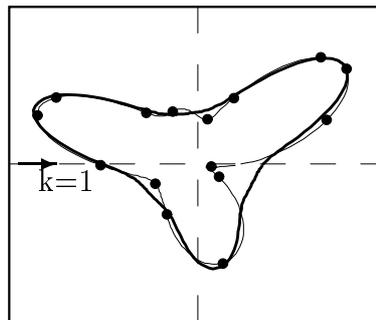
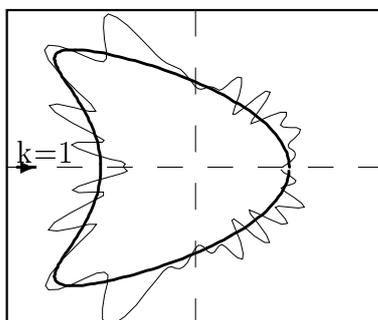


Abbildung 5.13: Feinapproximation des Sterns mit Tikhonov-Regularisierung

Tikhonov-Reg., 3. Newton-Schritt



alternative Regularisierung

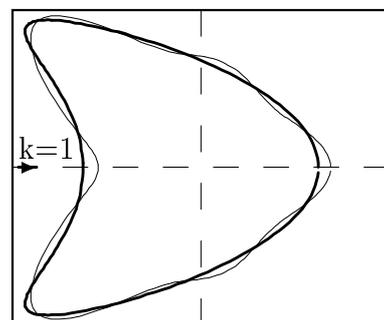


Abbildung 5.14: Vergleich der Regularisierungsverfahren bei  $N = 60$  trigonometrischen Monomen

Datenfehler  $\epsilon_{err}$  und der Regularisierungsparameter  $\alpha$  und  $\beta$ . Es stellt sich heraus, daß mit der alternativen Regularisierung bessere Ergebnisse erzielt werden können, auch wenn die Qualität der Rekonstruktionen hier empfindlicher von der geeigneten Wahl des Regularisierungsparameters abhängt.

Es kann resümiert werden, daß mit der alternativen Regularisierung überall z.T. erheblich bessere Ergebnisse erzielt wurden als mit der Tikhonov-Regularisierung.

Fehler E bei Bohne mit  $N = 9$ ,  $k = 0.5$  und  $d = (1, 0)$ .

	Tikh.Reg. mit $\beta =$			alt.Reg. mit $\alpha =$			
$\epsilon_{err}$	0.05	0.1	0.2	0.00001	0.00002	0.00005	0.0001
0.02	0.068	0.064	0.064	0.053	0.065	0.077	0.084
0.05	0.079	0.073	0.074	0.046	0.057	0.073	0.082
0.10	0.082	0.078	0.077	0.095	0.071	0.068	0.081
0.20	0.117	0.097	0.091	-	0.163	0.059	0.083

Tabelle 5.5: Vergleich der beiden Regularisierungsverfahren bei gestörten Daten



# Literaturverzeichnis

- [CK1] D. Colton, R. Kress: *Integral Equation Methods in Scattering Theory*. Wiley, New York (1983).
- [CK2] D. Colton, R. Kress: *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg (1992).
- [Di] Dieudonné: *Grundzüge der modernen Analysis*. Friedr. Vieweg + Sohn, Braunschweig (1971).
- [Gr] W. Grever: *Über das inverse Neumannproblem für die Helmholtzgleichung*. Diplomarbeit, Göttingen (1992).
- [He] F. Hettlich: *Frechet derivatives in inverse obstacle scattering*. Inverse Problems 11, S. 371-382 (1995).
- [K1] R. Kress: *Linear Integral Equations*. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg (1989).
- [K2] R. Kress: *On the Numerical Solution of a Hypersingular Integral Equation in Scattering Theory*. Jour. of Comp. a. Appl. Math. 61, S. 345-360 (1995).
- [K3] R. Kress: *A Newton Method in Inverse Obstacle Scattering*. Proceedings of the Second International Symposium on Inverse Problems in Engineering Mechanics, ISIP 94 (1994).
- [K4] R. Kress: *Integral Equation Methods in Inverse Obstacle Scattering*. Engineering Anal. with Boundary Elements 15, S. 171-179 (1995).
- [Ki] A. Kirsch: *Generalized Boundary Value- and Control Problems for the Helmholtz Equation*. Habilitationsschrift, Göttingen (1984).
- [Le] N.N. Lebedev: *Special Functions and Their Applications*. Prentice-Hall, Inc., Englewood, N.J. (1965).
- [M1] L. Mönch: *Ein Quadraturformelverfahren für eine hypersinguläre Integralgleichung bei der Helmholtz-Gleichung im  $\mathbb{R}^2$* . Diplomarbeit, Göttingen (1994).

- [M2] L. Mönch: *A Newton Method for solving the inverse scattering problem for a sound-hard obstacle*. Inverse Problems 12, S. 309-325 (1996).
- [Me] A. Meyenburg: *Interpolation mit Translaten einer gerader,  $2\pi$ -periodischen, stetigen Funktion*. Examensarbeit, Göttingen (erscheint demnächst).
- [Po] R. Potthast: *Fréchet-Differenzierbarkeit von Randintegraloperatoren und Randwertproblemen zur Helmholtzgleichung und zu den zeitharmonischen Maxwellgleichungen*. Dissertation, Göttingen (1994).
- [We] P. Werner: *Zur Theorie akustischer Wellenfelder*. Arch. Math. 20, S. 231-260 (1961).