

Elektromagnetische Wellen: Gelöste und ungelöste inverse Probleme

Rainer Kress

Institut für Numerische
und Angewandte Mathematik

27. Januar 2010



Angewandte oder anwendbare Mathematik?

Die Mathematik verdankt ihre allgemeine Wertschätzung ihrer bedeutenden Rolle für die Anwendungen. Dies gibt uns die Verpflichtung, die Anwendbarkeit der Mathematik weiter zu pflegen. Die Mathematik kann sich nicht erschöpfen in der alleinigen Entwicklung von Theorien, wir haben auch die Aufgabe durch Anwendung der Mathematik in anderen Wissenschaften und Lebensbereichen bei der Lösung aktueller konkreter Probleme mitzuwirken.

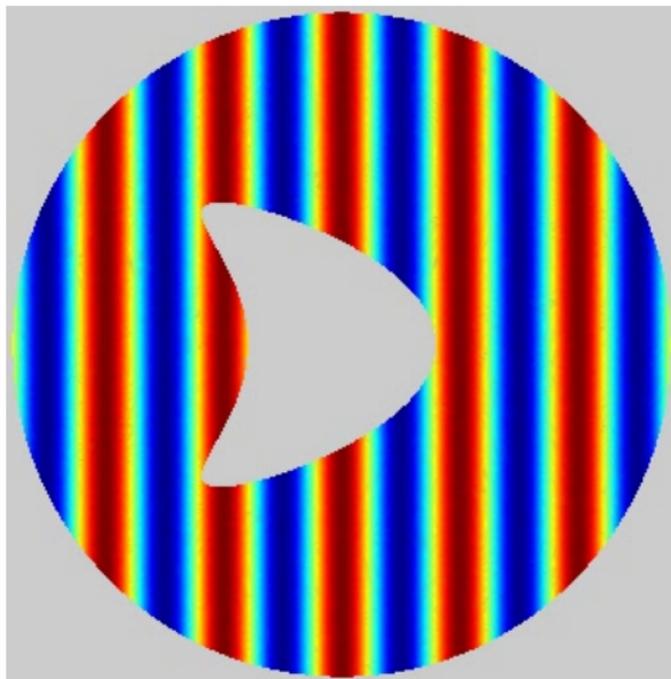


Freund und Kollege



Inverse Streutheorie

Mathematische Streutheorie modelliert die Auswirkung von Inhomogenitäten auf die Ausbreitung von Wellen.

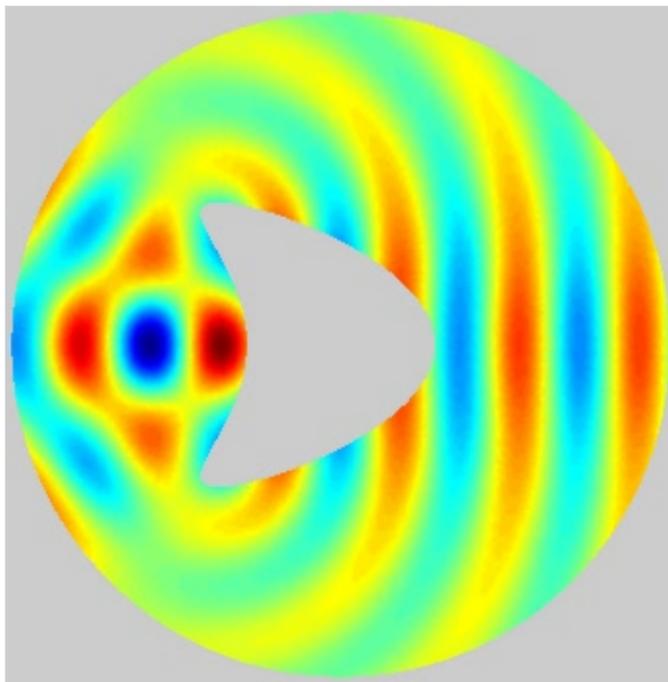


Video



Inverse Streutheorie

Mathematische Streutheorie modelliert die Auswirkung von Inhomogenitäten auf die Ausbreitung von Wellen.

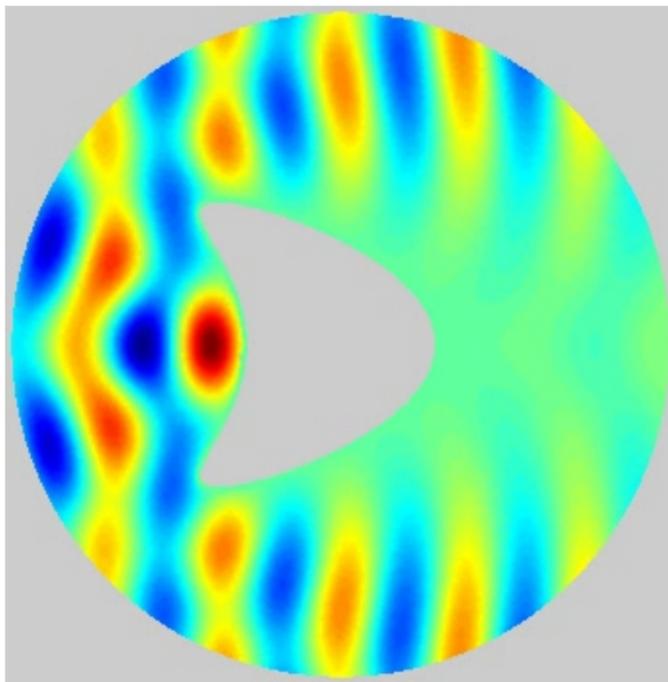


Video



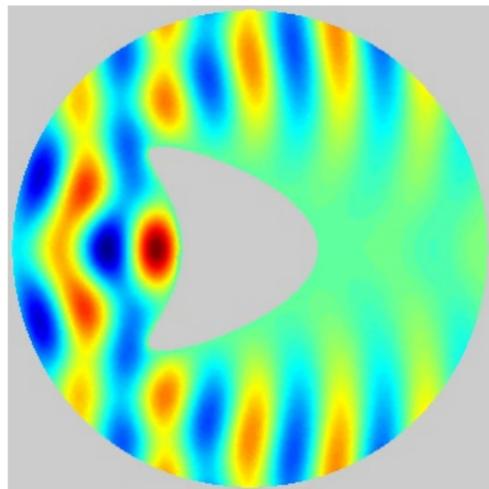
Inverse Streutheorie

Mathematische Streutheorie modelliert die Auswirkung von Inhomogenitäten auf die Ausbreitung von Wellen.



Video



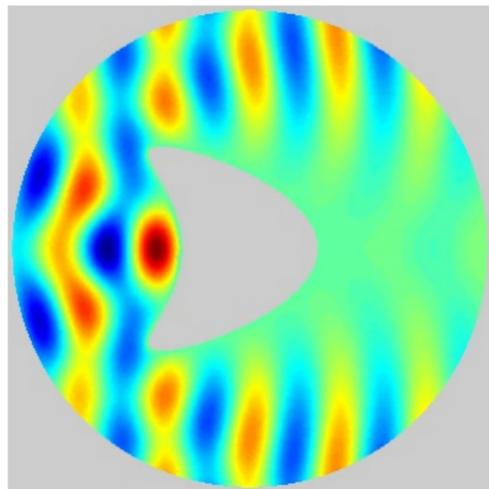


Video

Direktes Streuproblem

Gegeben: Einfallende Welle
und Streuobjekt

Gesucht: Gestreute Welle



Video

Direktes Streuproblem

Gegeben: Einfallende Welle
und Streuobjekt

Gesucht: Gestreute Welle

Inverses Streuprobem

Gegeben: Einfallende
und gestreute Welle

Gesucht: Position und Gestalt
des Streuobjekts

Zwei Probleme sind zueinander **invers**, wenn die Formulierung des ersten Problems die Lösung des zweiten Problems enthält und umgekehrt.

$$4 \times 5 = 20 \qquad 20 : 4 = 5$$

Zwei Probleme sind zueinander **invers**, wenn die Formulierung des ersten Problems die Lösung des zweiten Problems enthält und umgekehrt.

$$4 \times 5 = 20$$

$$20 : 4 = 5$$

Zwei Probleme sind zueinander **invers**, wenn die Formulierung des ersten Problems die Lösung des zweiten Problems enthält und umgekehrt.

$$4 \times 5 = 20 \qquad 20 : 4 = 5$$

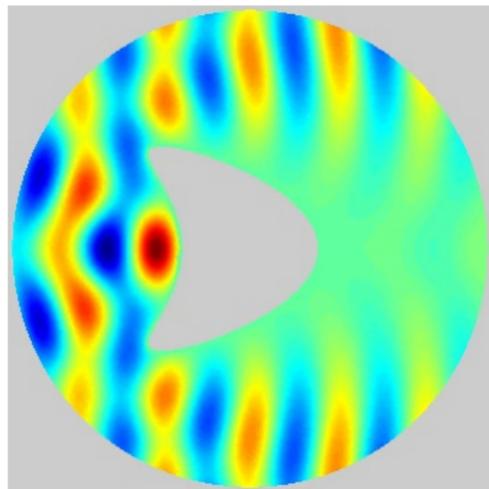
Zwei Probleme sind zueinander **invers**, wenn die Formulierung des ersten Problems die Lösung des zweiten Problems enthält und umgekehrt.

$$4 \times 5 = 20$$

Direktes Problem

$$20 : 4 = 5$$

Inverses Problem



Video

Direktes Streuprobem

Gegeben: Einfallende Welle
und Streuobjekt

Gesucht: Gestreute Welle

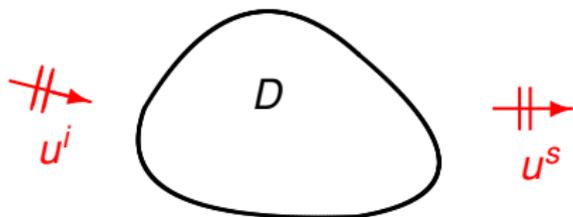
Inverses Streuprobem

Gegeben: Einfallende
und gestreute Welle

Gesucht: Position und Gestalt
des Streuobjekts

Inverses Streuproblem

$$U(x, t) = \operatorname{Re} \{ u(x) e^{-i\omega t} \} \quad \omega = \text{Frequenz}$$

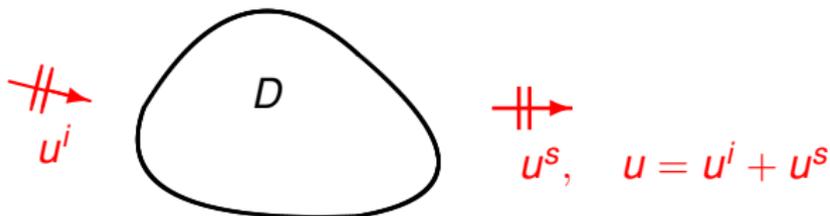


u^i : einfallende Welle, $u^i(x, d) = e^{ik \cdot x \cdot d}$, $|d| = 1$

u^s : gestreute Welle

$u = u^i + u^s$: Gesamtfeld

Inverses Streupproblem



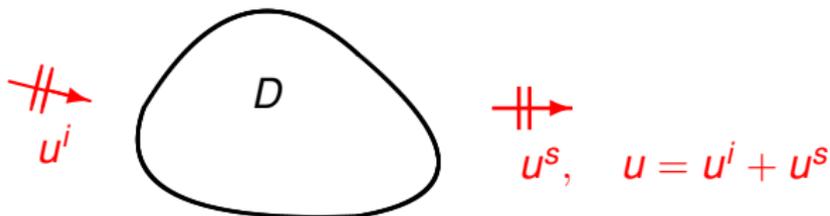
$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}, \quad \text{Helmholtz Gleichung}$$

$$u = 0 \quad \text{auf } \partial D$$

$$\frac{\partial u^s}{\partial r} - iku^s = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r = |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \quad \text{Sommerfeld}$$

$$u^s(\mathbf{x}) = \frac{e^{ik|\mathbf{x}|}}{|\mathbf{x}|} \left\{ u_\infty(\hat{\mathbf{x}}) + O\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right) \right\}, \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \quad \hat{\mathbf{x}} := \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$$

Inverses Streuproblem



$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}, \quad \text{Helmholtz Gleichung}$$

$$u = 0 \quad \text{auf } \partial D$$

$$\frac{\partial u^s}{\partial r} - iku^s = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r = |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \quad \text{Sommerfeld}$$

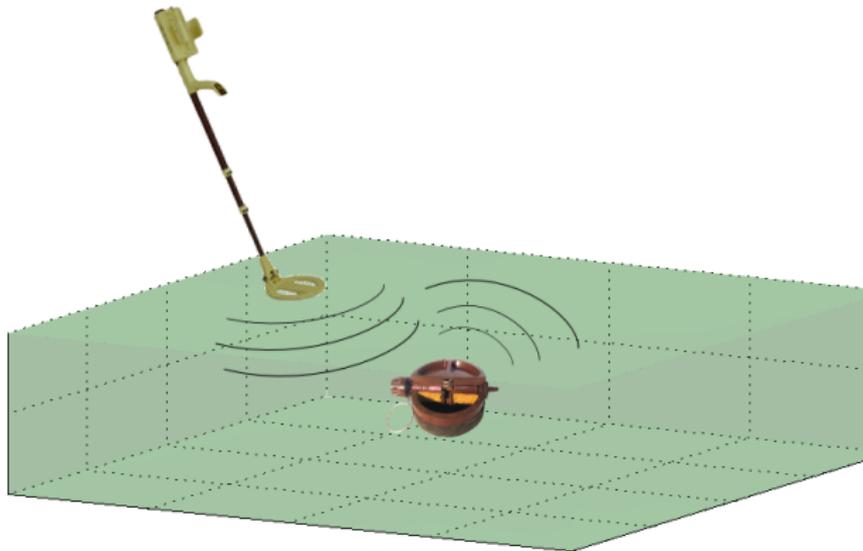
$$u^s(\mathbf{x}) = \frac{e^{ik|\mathbf{x}|}}{|\mathbf{x}|} \left\{ u_\infty(\hat{\mathbf{x}}) + O\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right) \right\}, \quad |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \quad \hat{\mathbf{x}} := \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$$

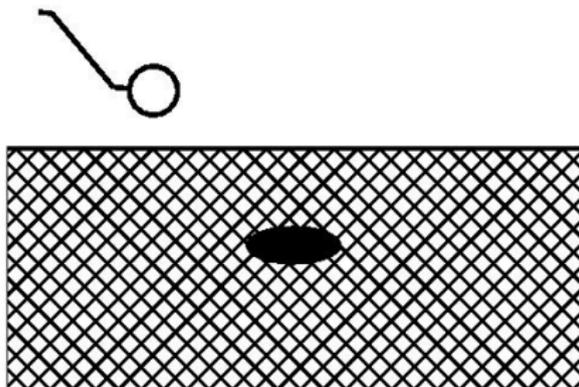
Gegeben: Fernfeld u_∞ für **eine** einfallende ebene Welle

Gesucht: **Gestalt** und Position des Streuobjekts D

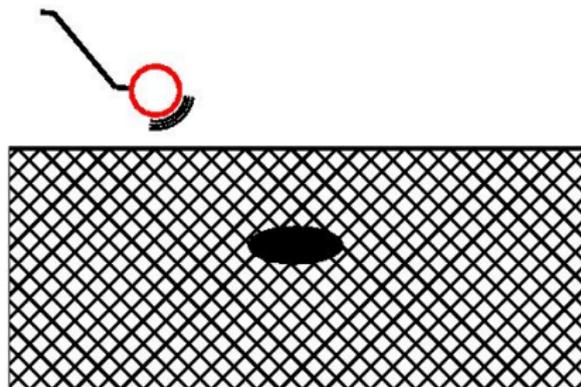
Nichtlinear und inkorrekt gestellt

Modellierung Minensuche



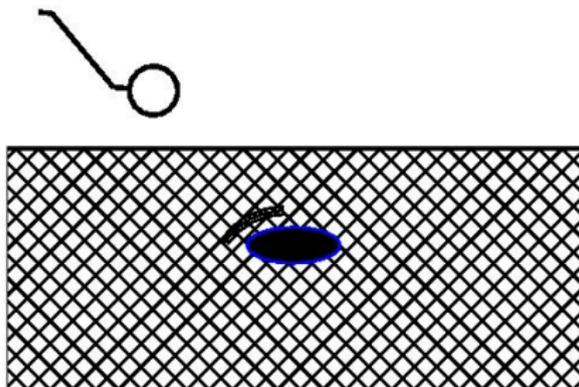


- Elektromagnetische Streuung im geschichteten Medium

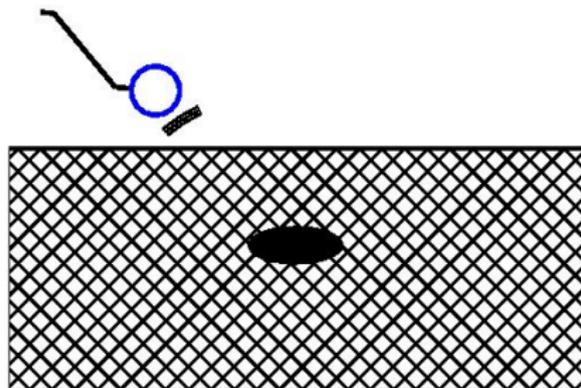


- Elektromagnetische Streuung im geschichteten Medium
- Einfallendes Primärfeld

Modellierung Minensuche

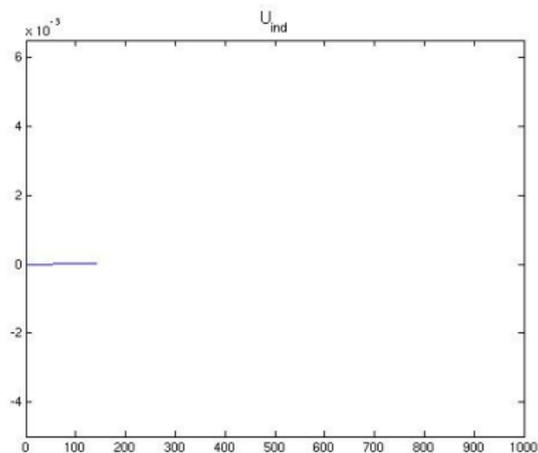
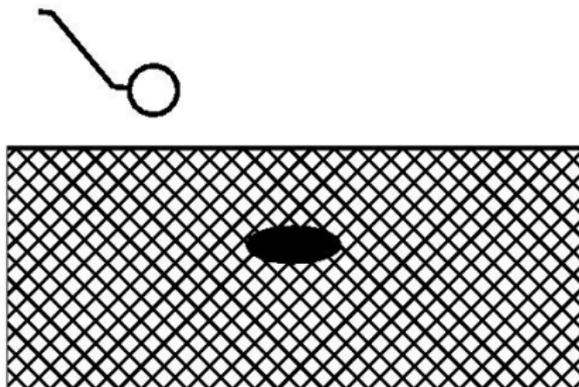


- Elektromagnetische Streuung im geschichteten Medium
- Einfallendes Primärfeld
- Gestreutes Sekundärfeld

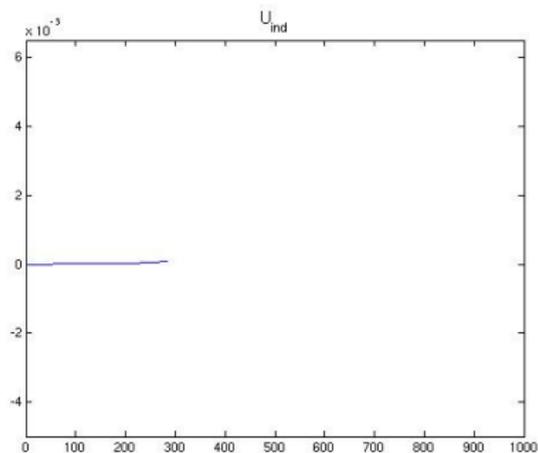
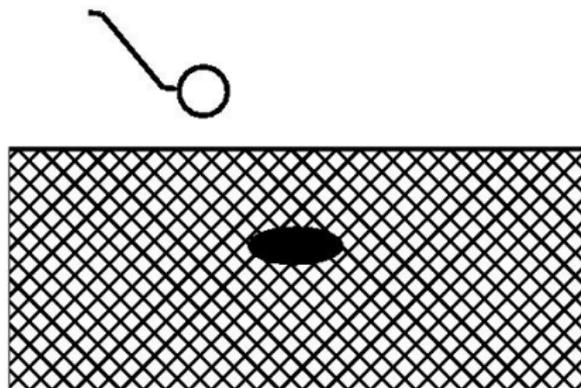


- Elektromagnetische Streuung im geschichteten Medium
- Einfallendes Primärfeld
- Gestreutes Sekundärfeld
- Induzierte Spannung im Detektor

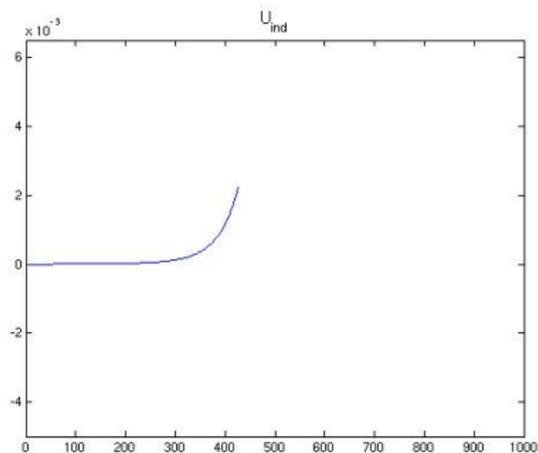
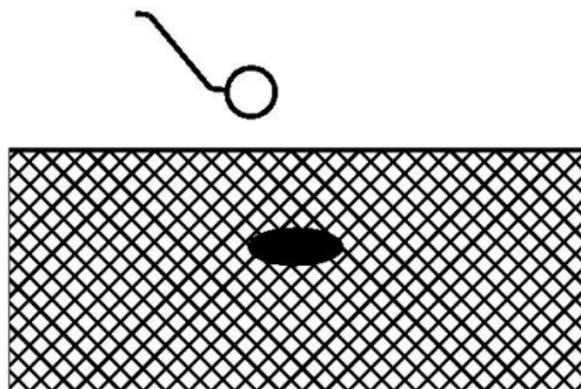
Modellierung Minensuche



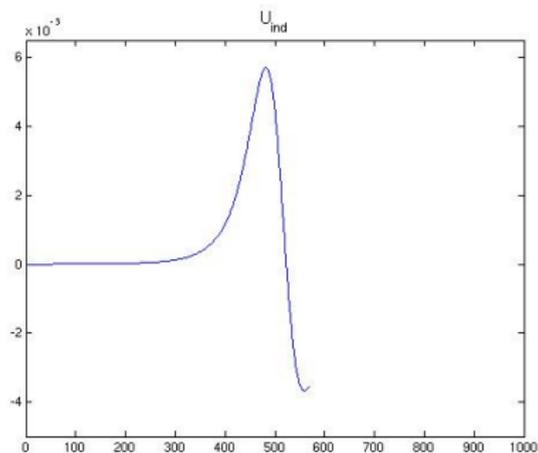
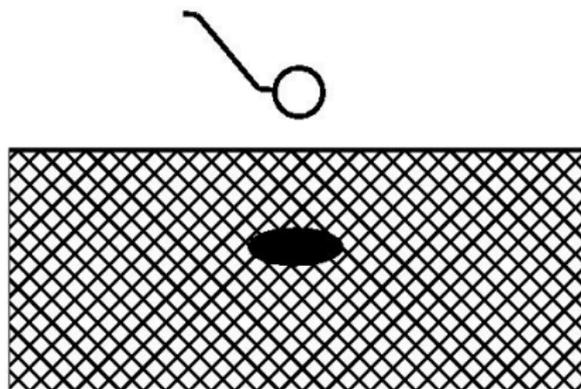
Modellierung Minensuche



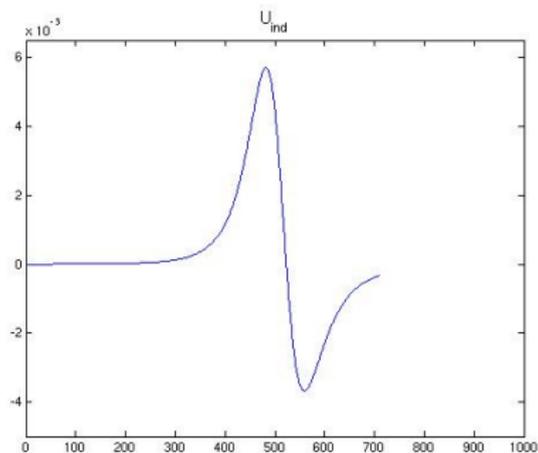
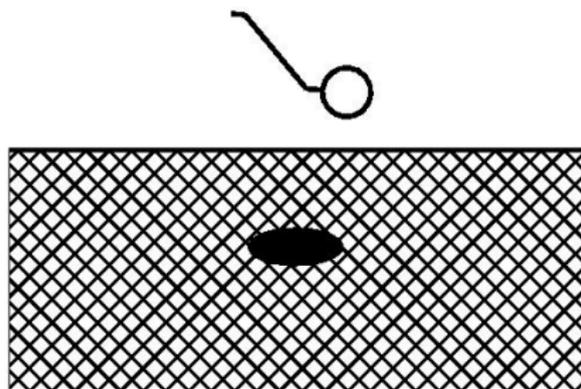
Modellierung Minensuche



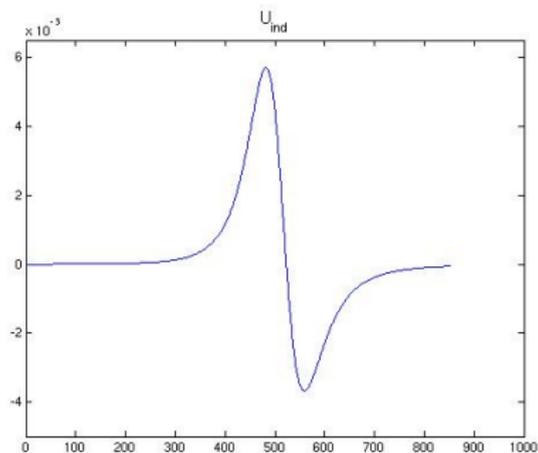
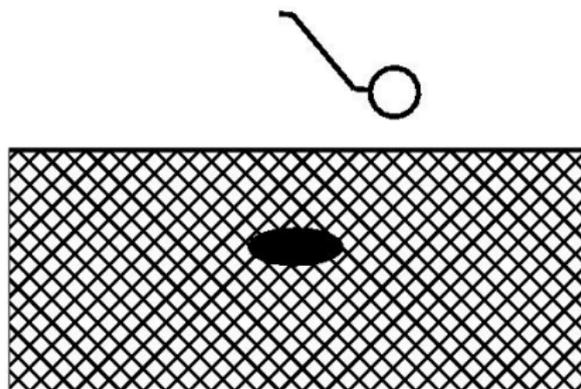
Modellierung Minensuche



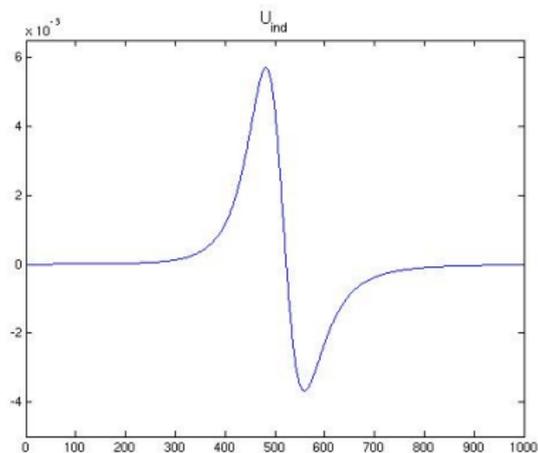
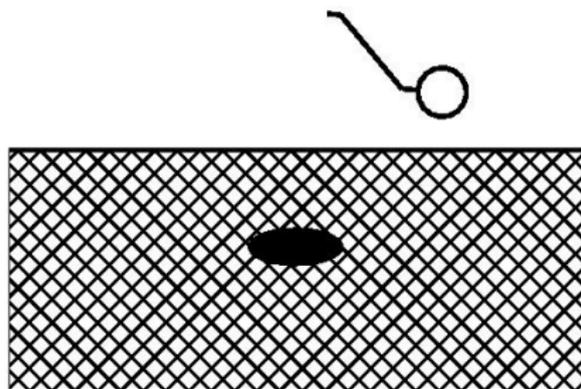
Modellierung Minensuche



Modellierung Minensuche



Modellierung Minensuche



Maxwell Gleichungen

$$\operatorname{curl} E - i\omega\mu H = 0, \quad \operatorname{curl} H + i\omega\varepsilon E = \sigma E$$

Randbedingungen

$E_{\text{tang}} = 0$ auf metallischer Mine,

E_{tang} and H_{tang} stetig am Übergang Luft-Erde

Silver–Müller Ausstrahlungsbedingung für gestreutes Feld

Primärfeld modelliert nach Biot–Savart

Induzierte Spannung nach Faraday

Maxwell Gleichungen

$$\operatorname{curl} E - i\omega\mu H = 0, \quad \operatorname{curl} H + i\omega\varepsilon E = \sigma E$$

Randbedingungen

$E_{\text{tang}} = 0$ auf metallischer Mine,
 E_{tang} and H_{tang} stetig am Übergang Luft-Erde

Silver–Müller Ausstrahlungsbedingung für gestreutes Feld

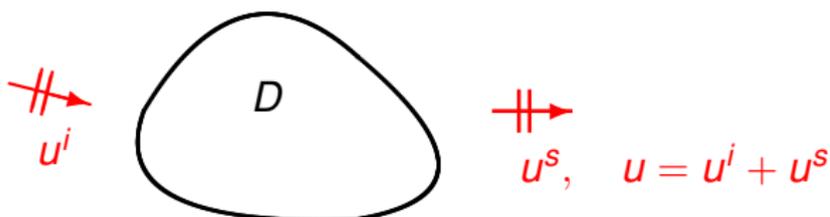
Primärfeld modelliert nach Biot–Savart

Induzierte Spannung nach Faraday

Projektverbund Humin/MD, gefördert von BMBF:
Metalldetektoren für Humanitäres Minenräumen

Delbary, Erhard, K., Potthast, Schulz 2008

Inverses Streupproblem



$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}, \quad \text{Helmholtz Gleichung}$$

$$u = 0 \quad \text{auf } \partial D$$

$$\frac{\partial u^s}{\partial r} - iku^s = o\left(\frac{1}{r}\right), \quad r = |x| \rightarrow \infty, \quad \text{Sommerfeld}$$

$$u^s(x) = \frac{e^{ik|x|}}{|x|} \left\{ u_\infty(\hat{x}) + O\left(\frac{1}{|x|}\right) \right\}, \quad |x| \rightarrow \infty, \quad \hat{x} := \frac{x}{|x|}$$

Gegeben: Fernfeld u_∞ für **eine** einfallende ebene Welle

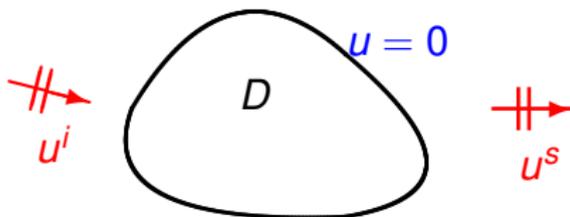
Gesucht: **Gestalt** und Position des Streuobjekts D



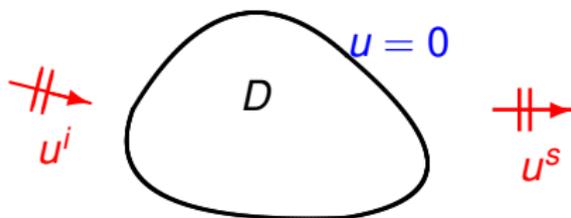
Franz Rellich 1906–1955



Rellich Lemma: Das Fernfeld u_∞ bestimmt eindeutig das Gesamtfeld $u = u^i + u^s$ in $R^3 \setminus D$.



Rellich Lemma: Das Fernfeld u_∞ bestimmt eindeutig das Gesamtfeld $u = u^i + u^s$ in $R^3 \setminus D$.

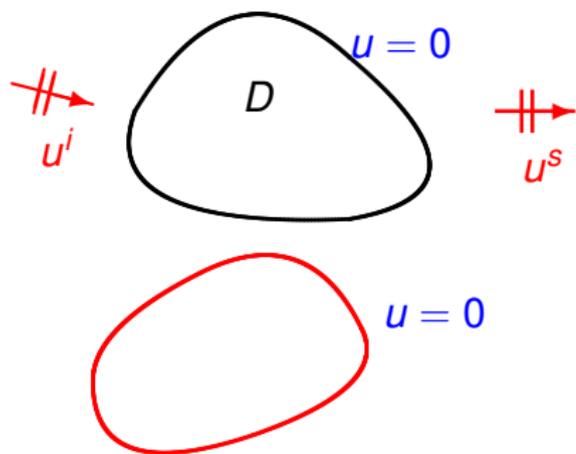


Eindeutigkeit: \Leftrightarrow
Keine weiteren Oberflächen mit $u = 0$

Eindeutigkeit, d.h. Identifizierbarkeit

Eindeutigkeit: \Leftrightarrow

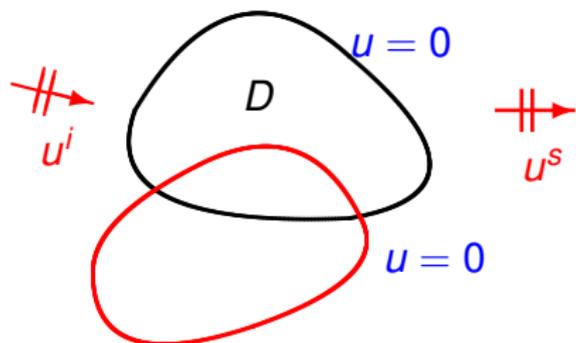
Keine weiteren Oberflächen mit $u = 0$



Nein!!

Eindeutigkeit: \Leftrightarrow

Keine weiteren Oberflächen mit $u = 0$



?????

Theorem 1. Schiffer 1967

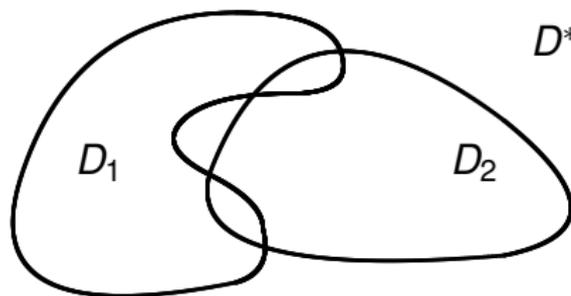
Für zwei Streuobjekte D_1 und D_2 gelte

$$u_{\infty,1}(\hat{x}, d) = u_{\infty,2}(\hat{x}, d)$$

für **alle** Beobachtungsrichtungen \hat{x} und
alle Einfallsrichtungen d .

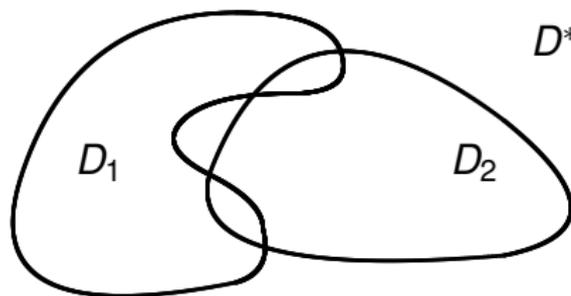
Dann ist $D_1 = D_2$.

Beweisidee zum Theorem von Schiffer



D^* = unbeschränkte Komponente
von $R^3 \setminus (D_1 \cup D_2)$

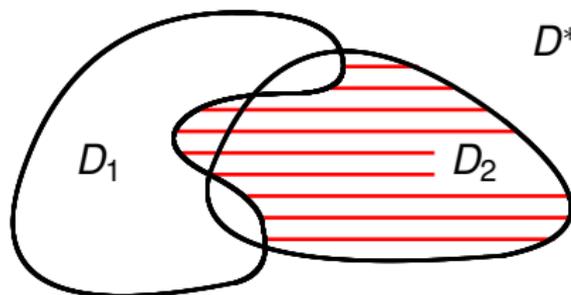
Beweisidee zum Theorem von Schiffer



D^* = unbeschränkte Komponente
von $R^3 \setminus (D_1 \cup D_2)$

$$u_1(\cdot, d) = u_2(\cdot, d) \quad \text{in } D^*$$

Beweisidee zum Theorem von Schiffer



D^* = unbeschränkte Komponente
von $R^3 \setminus (D_1 \cup D_2)$

$$u_1(\cdot, d) = u_2(\cdot, d) \quad \text{in } D^*$$

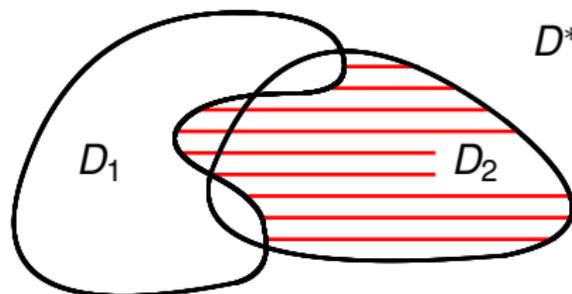
Im **schraffierten** Gebiet: $\Delta u_1 + k^2 u_1 = 0$

Auf dem Rand: $u_1 = 0$

$\{u_1(\cdot, d) : d \in S^2\}$ linear unabhängig.

Widerspruch zu $H_0^1 \rightarrow L^2$ kompakt.

Beweisidee zum Theorem von Schiffer



D^* = unbeschränkte Komponente
von $R^3 \setminus (D_1 \cup D_2)$

$$u_1(\cdot, d) = u_2(\cdot, d) \quad \text{in } D^*$$

Im **schraffierten** Gebiet: $\Delta u_1 + k^2 u_1 = 0$

Auf dem Rand: $u_1 = 0$

$\{u_1(\cdot, d) : d \in S^2\}$ linear unabhängig.

Widerspruch zu $H_0^1 \rightarrow L^2$ kompakt.

Kirsch, K. 1992 Alternativer Beweis

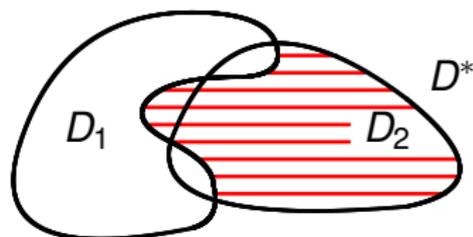
Beweisidee zum Theorem von Schiffer

Lax and Philipps, Scattering Theory, Academic Press, 1967

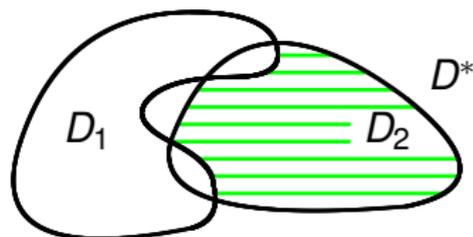
Beweisidee zum Theorem von Schiffer

Lax and Philipps, *Scattering Theory*, Academic Press, 1967

Korrektes Hilfsgebiet: $(R^3 \setminus D^*) \setminus D_1$



Inkorrektes Hilfsgebiet: $D_2 \setminus (D_1 \cap D_2)$



Theorem 2. Colton, Sleeman 1983

Unter der a priori Information $k \operatorname{diam} D < 2\pi$ ist D eindeutig bestimmt durch das Fernfeld für **eine** ebene Welle.

- Eindeutigkeit bei einer einfallenden Welle ohne a priori Annahmen

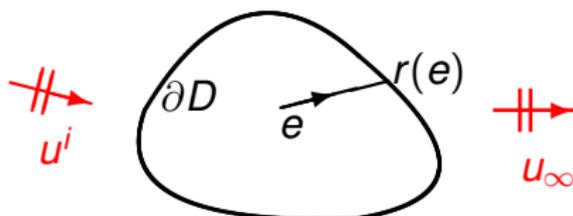
- Eindeutigkeit bei einer einfallenden Welle ohne a priori Annahmen
- Eindeutigkeit bei einer einfallenden Welle für andere Randbedingungen bei a priori Annahmen über die Größe des Streuobjekts

- Eindeutigkeit bei einer einfallenden Welle ohne a priori Annahmen
- Eindeutigkeit bei einer einfallenden Welle für andere Randbedingungen bei a priori Annahmen über die Größe des Streuobjekts
- Eindeutigkeit aus der Amplitude $|u_\infty|$ des Fernfelds

Iterative Methoden: Interpretation des inversen Streuproblems als nichtlineare inkorrekt gestellte Operator Gleichung.

Regularisierte Newton Iteration, Landweber Iteration, konjugierte Gradienten Verfahren, etc

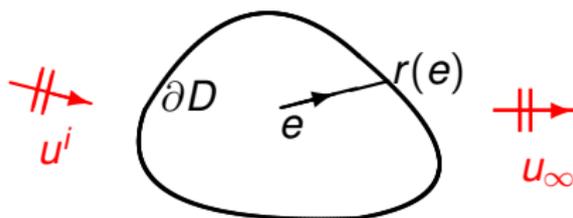
Rand nach Fernfeld Abbildung



Zur Vereinfachung: $\partial D = \partial D_r = \{r(e)e : e \in S^2\}$

$$A(r) = u_\infty$$

Rand nach Fernfeld Abbildung



Zur Vereinfachung: $\partial D = \partial D_r = \{r(e)e : e \in S^2\}$

$$A(r) = u_\infty$$

Linearisiere: $A(r_0 + q) = A(r_0) + A'(r_0)q + O(q^2)$

Löse $A(r_0) + A'(r_0)q = u_\infty$ und setze $r_1 = r_0 + q$

Regularisierung erforderlich, z.B. nach **Tikhonov**

$$\alpha q + [A'(r_0)]^* A'(r_0)q = [A'(r_0)]^* [u_\infty - A(r_0)]$$

Theorem 3.

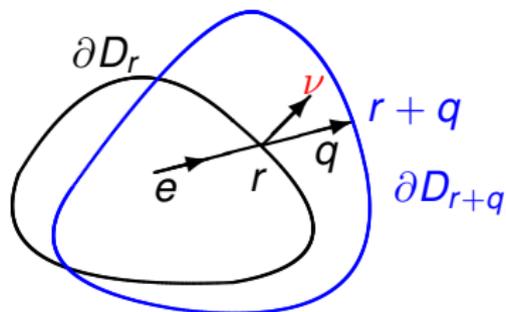
$$A : H_+^2(S^2) \rightarrow L^2(S^2)$$

$$A'(r)q = v_{q,\infty}$$

mit dem Fernfeld $v_{q,\infty}$ zur Lösung von

$$\Delta v_q + k^2 v_q = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus D_r$$

$$v_q = -\nu \cdot e \frac{\partial u}{\partial \nu} q \quad \text{auf } \partial D_r$$



$$A(r+q)$$

$$= A(r) + A'(r)q + O(q^2)$$

Roger 1981, formales Differenzieren

Kirsch 1991, Hilbert Raum Methoden, Gebietsableitung

Potthast 1992, Randintegralgleichungen

Theorem 3.

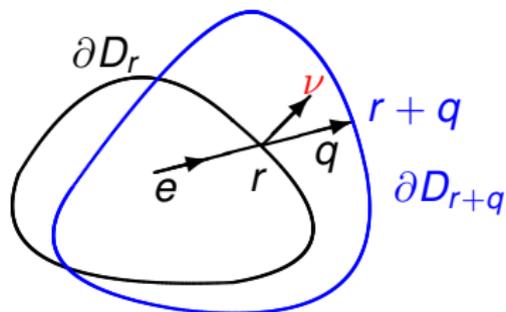
$$A : H_+^2(S^2) \rightarrow L^2(S^2)$$

$$A'(r)q = v_{q,\infty}$$

mit dem Fernfeld $v_{q,\infty}$ zur Lösung von

$$\Delta v_q + k^2 v_q = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus D_r$$

$$v_q = -\nu \cdot e \frac{\partial u}{\partial \nu} q \quad \text{auf } \partial D_r$$



$$A(r+q)$$

$$= A(r) + A'(r)q + O(q^2)$$

Numerische Implementierung:

Hettlich, Hohage, Kirsch, K., Murch et al,

Roger, Rundell, Tobocman, ... 1981-..., in 2D

Farhat et al 2002, Harbrecht & Hohage 2005, in 3D

$$u^s(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus D$$

$$u^s(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus D$$

Daten Gleichung

$$u_\infty(\hat{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} e^{-ik\hat{x}\cdot y} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) ds(y), \quad \hat{x} \in S^2$$

Feld Gleichung

$$u^i(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) ds(y), \quad x \in \partial D$$

Zwei Integralgleichungen für zwei Unbekannte

Huygensches Prinzip

Daten Gleichung

$$u_\infty(\hat{x}) = - \int_{\partial D_r} e^{-ik \hat{x} \cdot y} \varphi(y) ds(y), \quad \hat{x} \in S^2$$

Feld Gleichung

$$u^i(x) = \int_{\partial D_r} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \varphi(y) ds(y), \quad x \in \partial D_r$$

- Für Näherung r_0 löse eine der beiden Gleichungen für φ . Linearisiere die andere Gleichung (bei festem φ) nach r und erhalte update $r_1 = r_0 + q$.

Huygensches Prinzip

Daten Gleichung

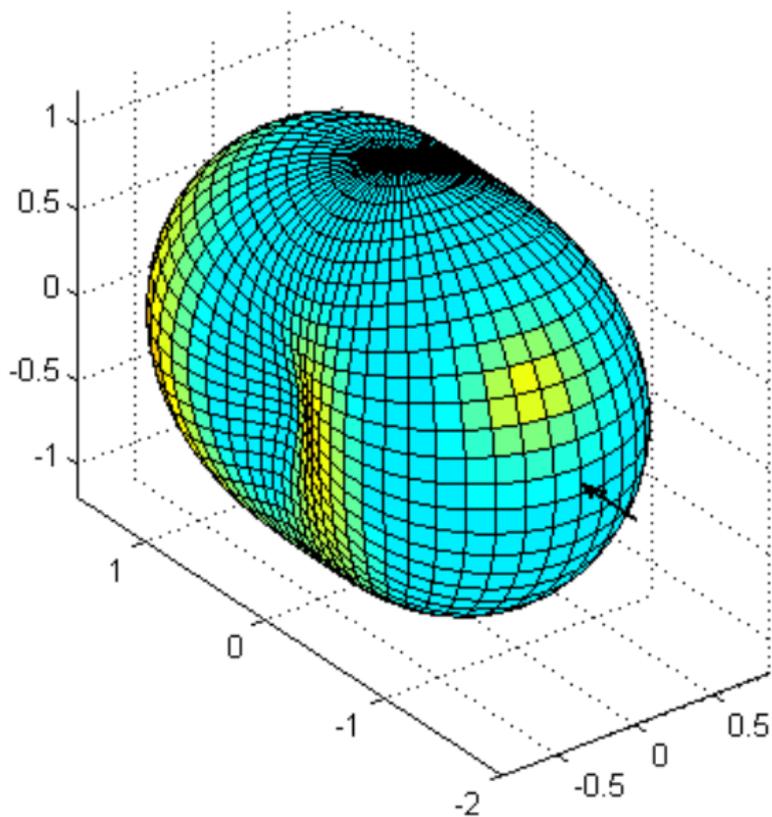
$$u_{\infty}(\hat{x}) = - \int_{\partial D_r} e^{-ik \hat{x} \cdot y} \varphi(y) ds(y), \quad \hat{x} \in S^2$$

Feld Gleichung

$$u^i(x) = \int_{\partial D_r} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \varphi(y) ds(y), \quad x \in \partial D_r$$

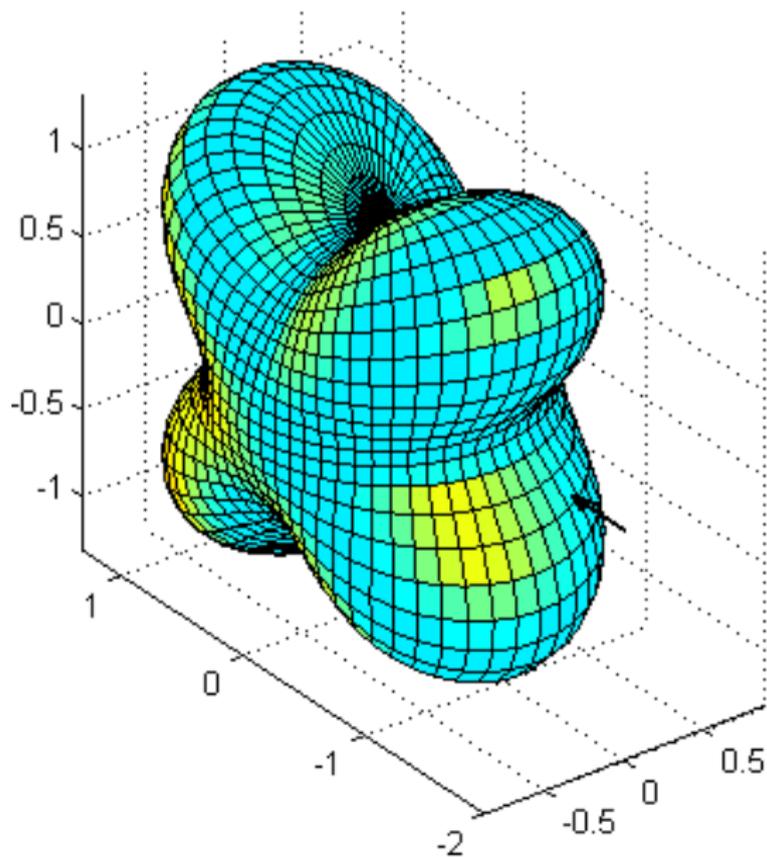
- Für Näherung r_0 löse eine der beiden Gleichungen für φ . Linearisiere die andere Gleichung (bei festem φ) nach r und erhalte update $r_1 = r_0 + q$.
- Ausgehend von Näherung r_0 und φ_0 linearisiere beide Gleichungen simultan

**Chapko, Ivanyshyn, Johansson, K.,
Rundell, Serranho, Sleeman, 2005 ...**



Video



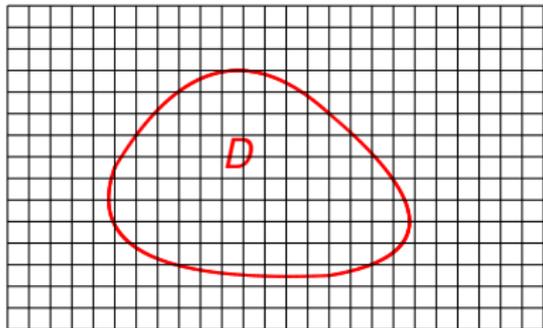


Video



Indikator Funktionen $J : R^3 \rightarrow R$, deren Wert $J(z)$ entscheidet, ob ein Punkt z **innerhalb oder außerhalb** des Streuobjekts D liegt.

Indikator Funktionen $J : R^3 \rightarrow R$, deren Wert $J(z)$ entscheidet, ob ein Punkt z **innerhalb oder außerhalb** des Streuobjekts D liegt.



Numerische Auswertung der Indikator Funktion an einem Gitter von Punkten und Farbkodierung von $J(z)$.

Definiere **Fernfeld Operator** $F : L^2(S^2) \rightarrow L^2(S^2)$ durch

$$(Fg)(\hat{x}) := \int_{S^2} u_{\infty}(\hat{x}, d)g(d) ds(d), \quad \hat{x} \in S^2$$

Definiere **Fernfeld Operator** $F : L^2(S^2) \rightarrow L^2(S^2)$ durch

$$(Fg)(\hat{x}) := \int_{S^2} u_\infty(\hat{x}, d)g(d) ds(d), \quad \hat{x} \in S^2$$

Setze

$$e_z(\hat{x}) = e^{-ikz \cdot \hat{x}}, \quad \hat{x} \in S^2$$

und betrachte die **lineare Integralgleichung**

$$Fg = e_z$$

mit einem beliebigen Punkt z

Lineare Sampling Methode

Sei $z \in D$ und g eine Lösung von

$$\int_{S^2} u_\infty(\hat{x}, d) g_z(d) ds(d) = e^{-ik z \cdot \hat{x}}, \quad \hat{x} \in S^2$$

Lineare Sampling Methode

Sei $z \in D$ und g eine Lösung von

$$\int_{S^2} u_{\infty}(\hat{x}, d) g_z(d) ds(d) = e^{-ikz \cdot \hat{x}}, \quad \hat{x} \in S^2$$

$$\Rightarrow \int_{S^2} u^s(x, d) g_z(d) ds(d) = \frac{e^{ik|x-z|}}{|x-z|}, \quad x \in R^3 \setminus \bar{D}$$

Lineare Sampling Methode

Sei $z \in D$ und g eine Lösung von

$$\int_{S^2} u_\infty(\hat{x}, d) g_z(d) ds(d) = e^{-ikz \cdot \hat{x}}, \quad \hat{x} \in S^2$$

$$\Rightarrow \int_{S^2} u^s(x, d) g_z(d) ds(d) = \frac{e^{ik|x-z|}}{|x-z|}, \quad x \in R^3 \setminus \bar{D}$$

$$\Rightarrow - \int_{S^2} e^{ikx \cdot d} g_z(d) ds(d) = \frac{e^{ik|x-z|}}{|x-z|}, \quad x \in \partial D$$

Lineare Sampling Methode

Sei $z \in D$ und g eine Lösung von

$$\int_{S^2} u_\infty(\hat{x}, d) g_z(d) ds(d) = e^{-ikz \cdot \hat{x}}, \quad \hat{x} \in S^2$$

$$\Rightarrow \int_{S^2} u^s(x, d) g_z(d) ds(d) = \frac{e^{ik|x-z|}}{|x-z|}, \quad x \in R^3 \setminus \bar{D}$$

$$\Rightarrow - \int_{S^2} e^{ikx \cdot d} g_z(d) ds(d) = \frac{e^{ik|x-z|}}{|x-z|}, \quad x \in \partial D$$

$$\Rightarrow J(z) := \|g_z\|_{L^2(S^2)} \rightarrow \infty, \quad z \rightarrow \partial D$$

Lineare Sampling Methode

Sei $z \in D$ und g eine Lösung von

$$\int_{S^2} u_\infty(\hat{x}, d) g_z(d) ds(d) = e^{-ikz \cdot \hat{x}}, \quad \hat{x} \in S^2$$

$$\Rightarrow \int_{S^2} u^s(x, d) g_z(d) ds(d) = \frac{e^{ik|x-z|}}{|x-z|}, \quad x \in R^3 \setminus \bar{D}$$

$$\Rightarrow - \int_{S^2} e^{ikx \cdot d} g_z(d) ds(d) = \frac{e^{ik|x-z|}}{|x-z|}, \quad x \in \partial D$$

$$\Rightarrow J(z) := \|g_z\|_{L^2(S^2)} \rightarrow \infty, \quad z \rightarrow \partial D$$

Schlechte Nachricht: Die Integralgleichung ist nur in Ausnahmefällen lösbar

Lineare Sampling Methode

Sei $z \in D$ und g eine Lösung von

$$\int_{S^2} u_\infty(\hat{x}, d) g_z(d) ds(d) = e^{-ikz \cdot \hat{x}}, \quad \hat{x} \in S^2$$

$$\Rightarrow \int_{S^2} u^s(x, d) g_z(d) ds(d) = \frac{e^{ik|x-z|}}{|x-z|}, \quad x \in R^3 \setminus \bar{D}$$

$$\Rightarrow - \int_{S^2} e^{ikx \cdot d} g_z(d) ds(d) = \frac{e^{ik|x-z|}}{|x-z|}, \quad x \in \partial D$$

$$\Rightarrow J(z) := \|g_z\|_{L^2(S^2)} \rightarrow \infty, \quad z \rightarrow \partial D$$

Schlechte Nachricht: Die Integralgleichung ist nur in Ausnahmefällen lösbar

Gute Nachricht: Methode funktioniert ausgezeichnet und kann durch Approximationsargumente legitimiert werden

Lineare Sampling Methode

Sei $z \in D$ und g eine Lösung von

$$\int_{S^2} u_\infty(\hat{x}, d) g_z(d) ds(d) = e^{-ikz \cdot \hat{x}}, \quad \hat{x} \in S^2$$

$$\Rightarrow \int_{S^2} u^s(x, d) g_z(d) ds(d) = \frac{e^{ik|x-z|}}{|x-z|}, \quad x \in R^3 \setminus \bar{D}$$

$$\Rightarrow - \int_{S^2} e^{ikx \cdot d} g_z(d) ds(d) = \frac{e^{ik|x-z|}}{|x-z|}, \quad x \in \partial D$$

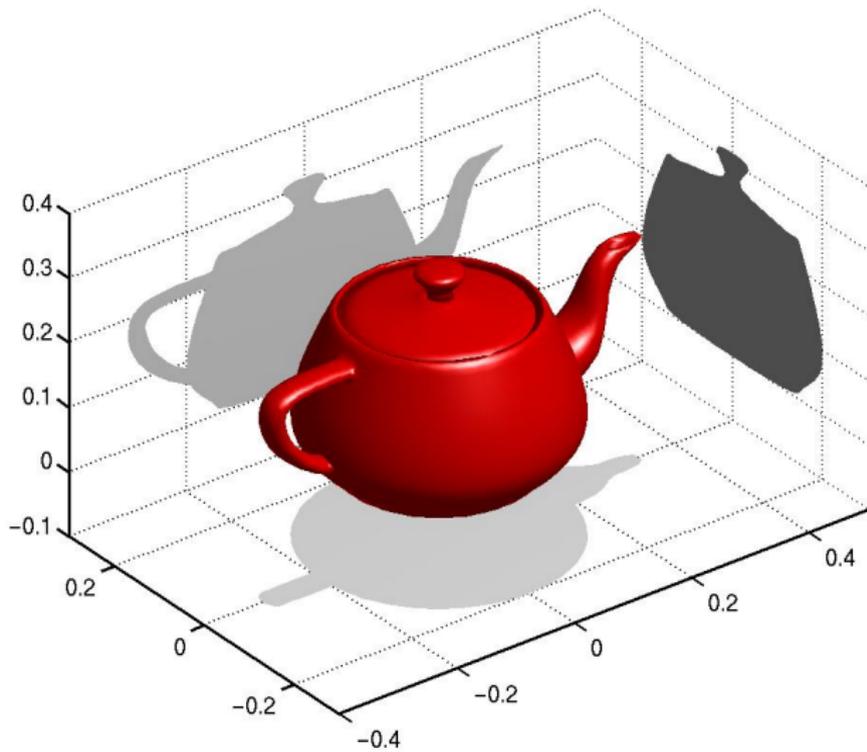
$$\Rightarrow J(z) := \|g_z\|_{L^2(S^2)} \rightarrow \infty, \quad z \rightarrow \partial D$$

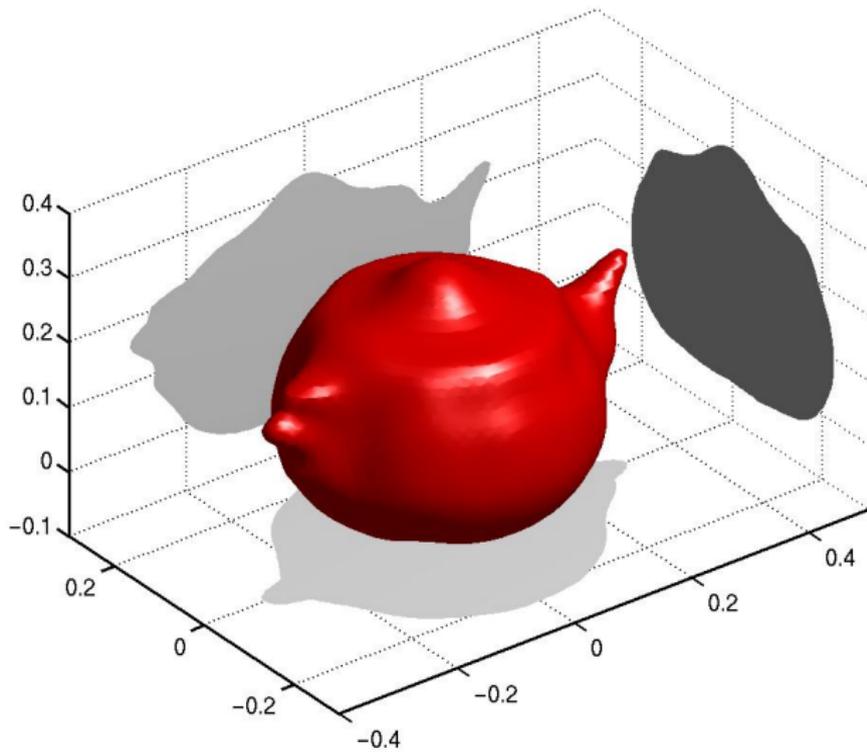
Schlechte Nachricht: Die Integralgleichung ist nur in Ausnahmefällen lösbar

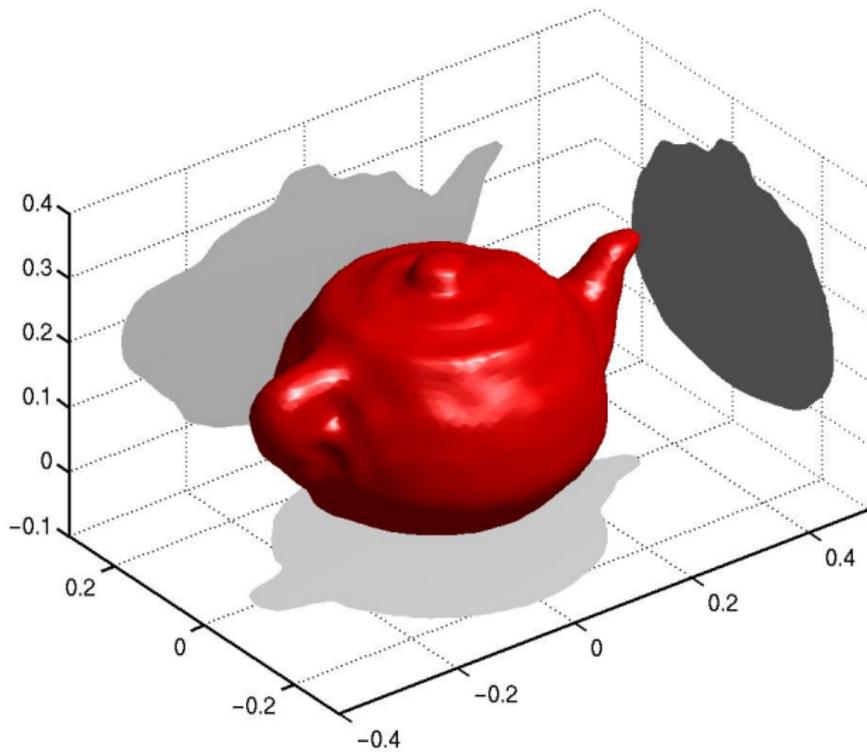
Gute Nachricht: Methode funktioniert ausgezeichnet und kann durch Approximationsargumente legitimiert werden

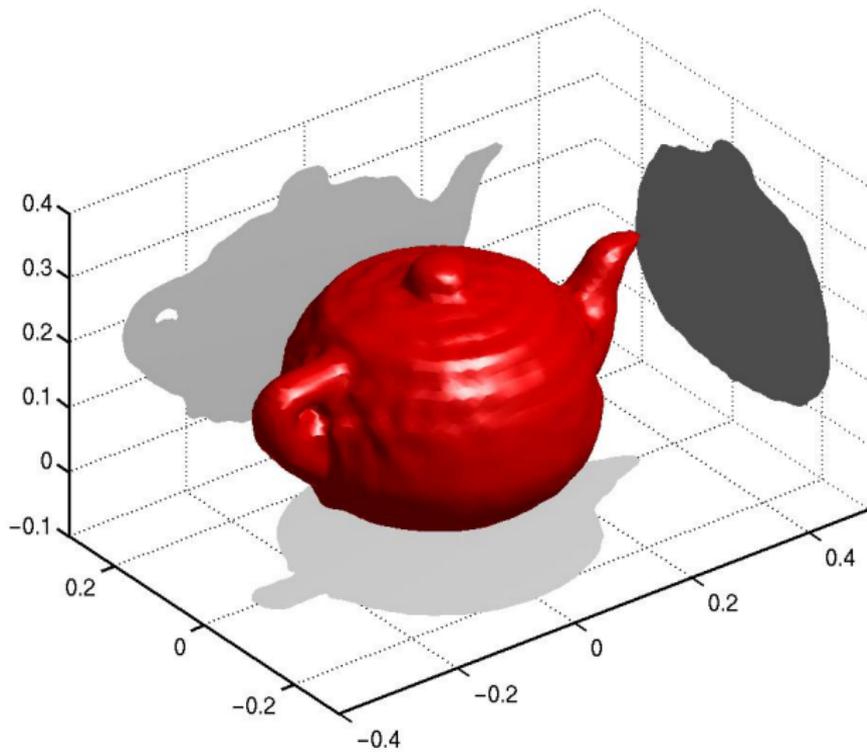
Colton, Kirsch 1996,

Arens, Cakoni, Haddar, K., Monk, ...









$$v(x) = \int_{S^2} e^{ik \cdot x \cdot d} g(d) ds(d)$$

$$v(x) = \int_{S^2} e^{ik \cdot x \cdot d} g(d) ds(d)$$



Gustav Herglotz 1891–1953



Carl David Tolmé Runge 1856–1927

Faktorisierungs Methode

Betrachte zu dem **Fernfeld Operator** $F : L^2(S^2) \rightarrow L^2(S^2)$ mit

$$(Fg)(\hat{x}) := \int_{S^2} u_\infty(\hat{x}, d)g(d) ds(d), \quad \hat{x} \in S^2$$

für $e_z(\hat{x}) = e^{-ikz \cdot \hat{x}}$ die **lineare Operator Gleichung**

$$(F^*F)^{1/4}g = e_z$$

Betrachte zu dem **Fernfeld Operator** $F : L^2(S^2) \rightarrow L^2(S^2)$ mit

$$(Fg)(\hat{x}) := \int_{S^2} u_\infty(\hat{x}, d)g(d) ds(d), \quad \hat{x} \in S^2$$

für $e_z(\hat{x}) = e^{-ikz \cdot \hat{x}}$ die **lineare Operator Gleichung**

$$(F^*F)^{1/4}g = e_z$$

Theorem 4. Die $(F^*F)^{1/4}$ Gleichung ist lösbar genau dann, wenn $z \in D$.

Betrachte zu dem **Fernfeld Operator** $F : L^2(S^2) \rightarrow L^2(S^2)$ mit

$$(Fg)(\hat{x}) := \int_{S^2} u_\infty(\hat{x}, d)g(d) ds(d), \quad \hat{x} \in S^2$$

für $e_z(\hat{x}) = e^{-ikz \cdot \hat{x}}$ die **lineare Operator Gleichung**

$$(F^*F)^{1/4}g = e_z$$

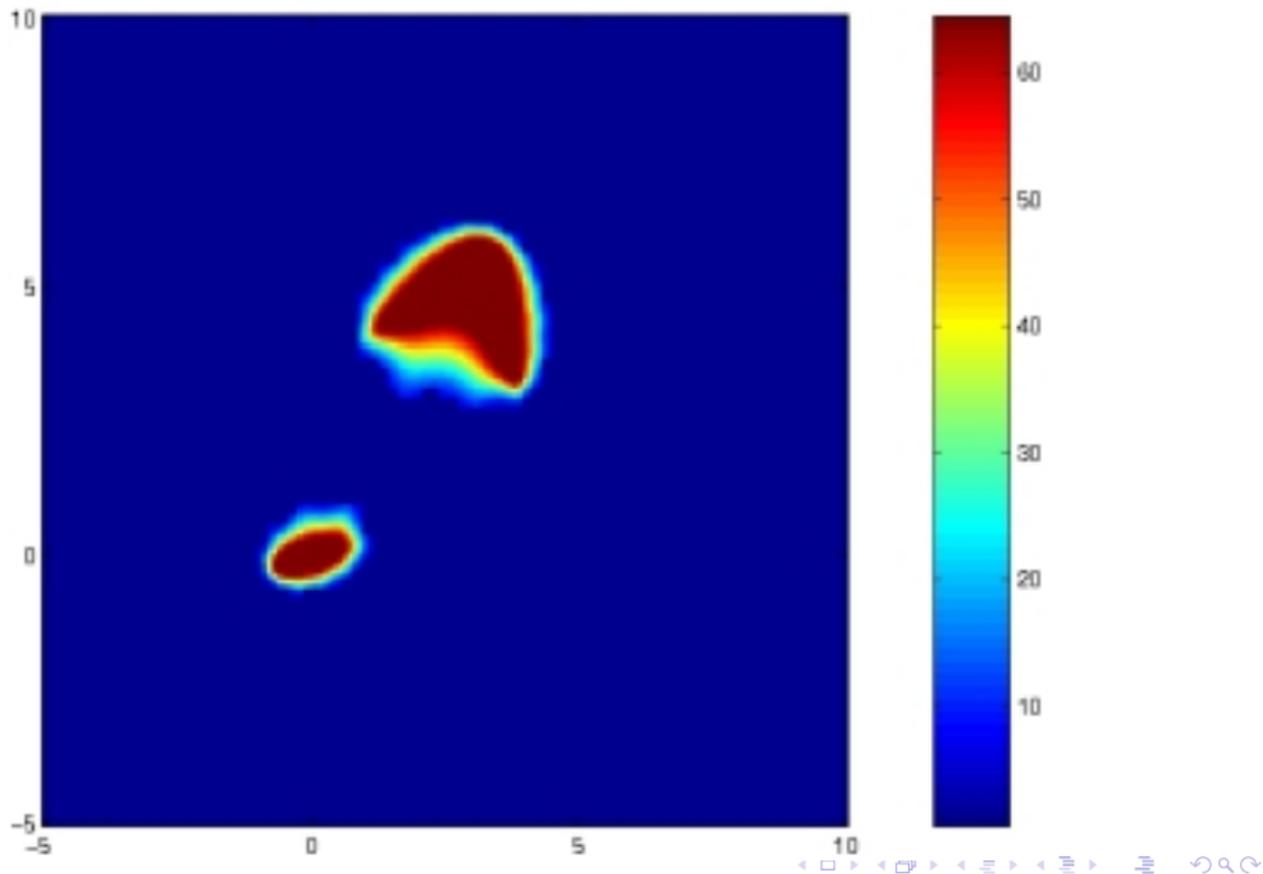
Theorem 4. Die $(F^*F)^{1/4}$ Gleichung ist lösbar genau dann, wenn $z \in D$.

Zu einer regularisierten Lösung g_z wähle $J(z) := \|g_z\|_{L^2(S^2)}$

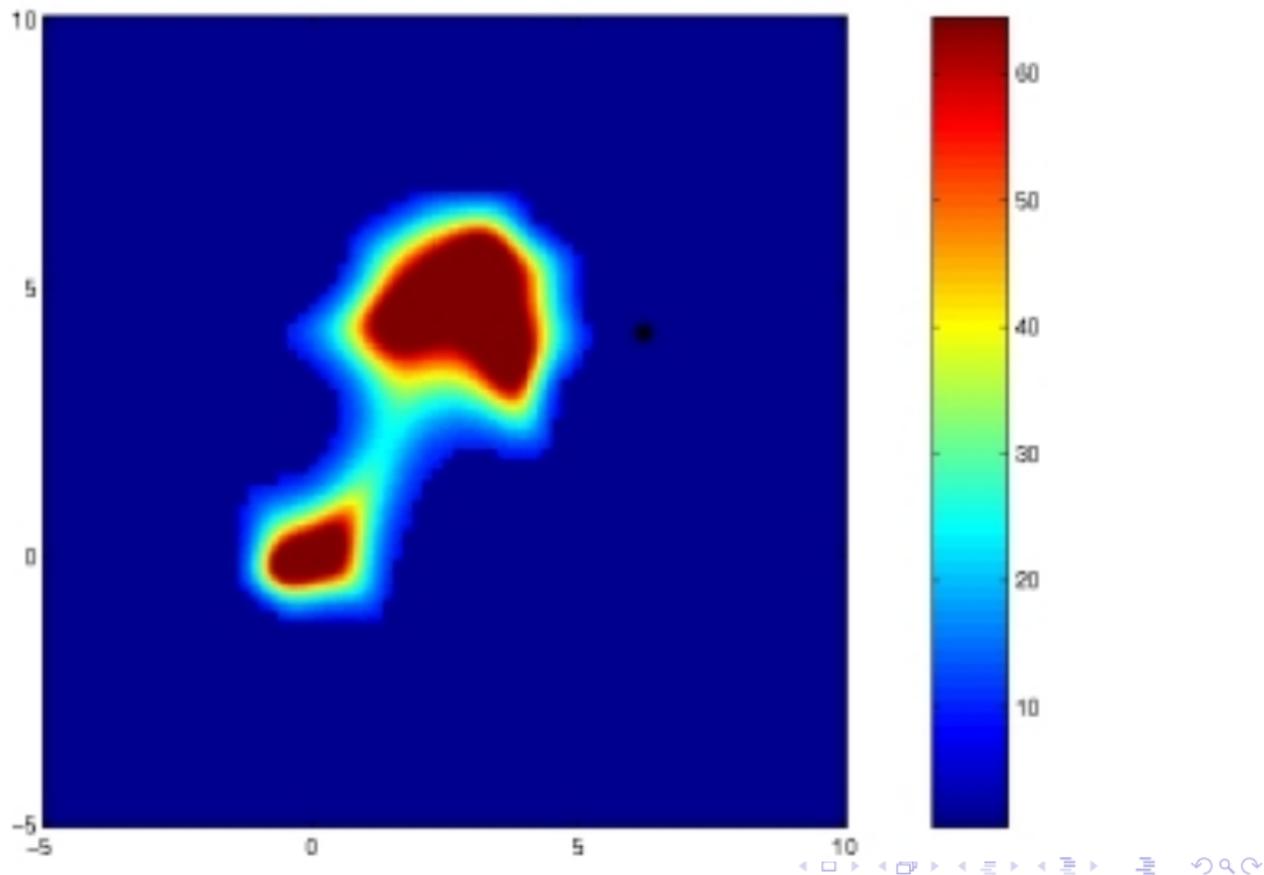
Kirsch 1998,

Arens, Haddar, Hanke-Bourgeois, van Harrach, K., Luke, ...

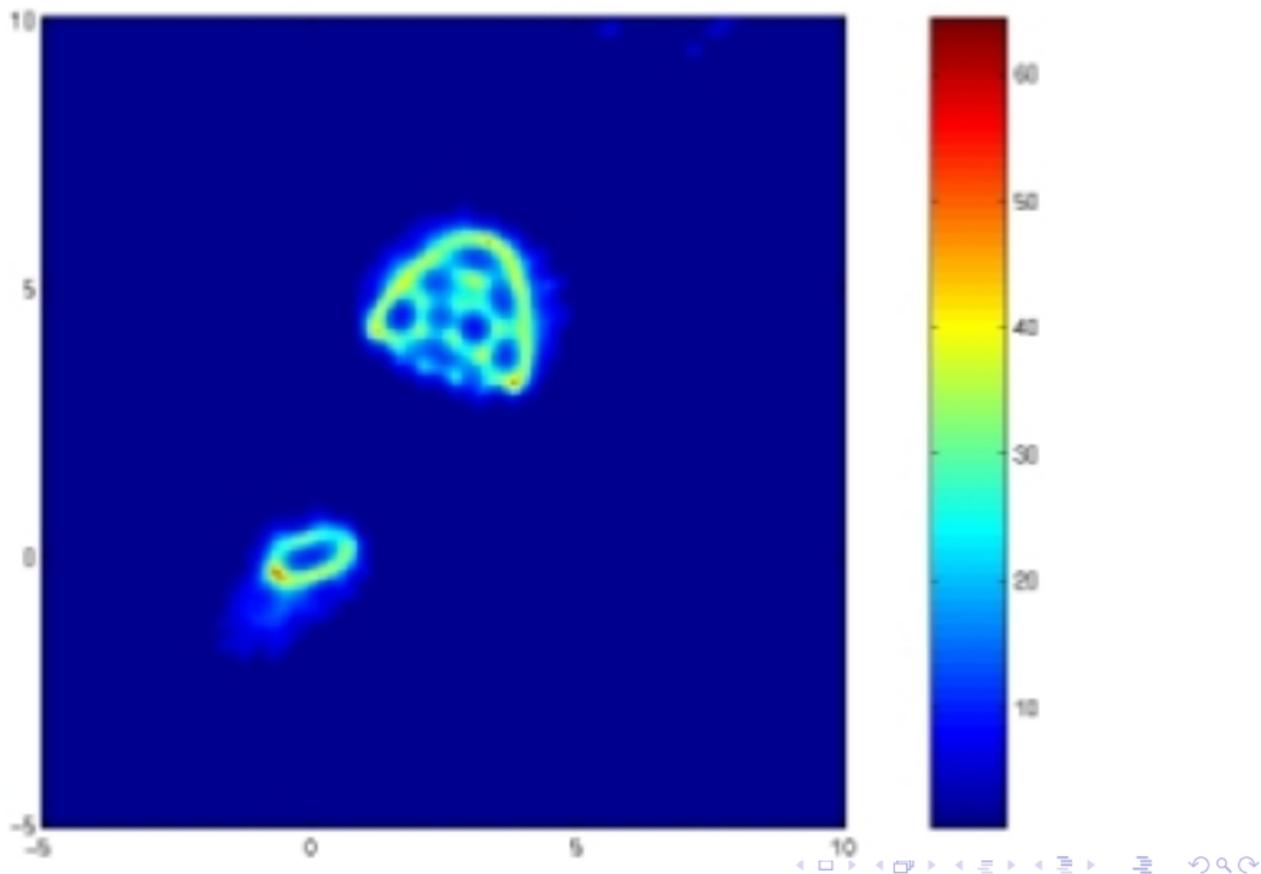
Faktorisierungs Methode



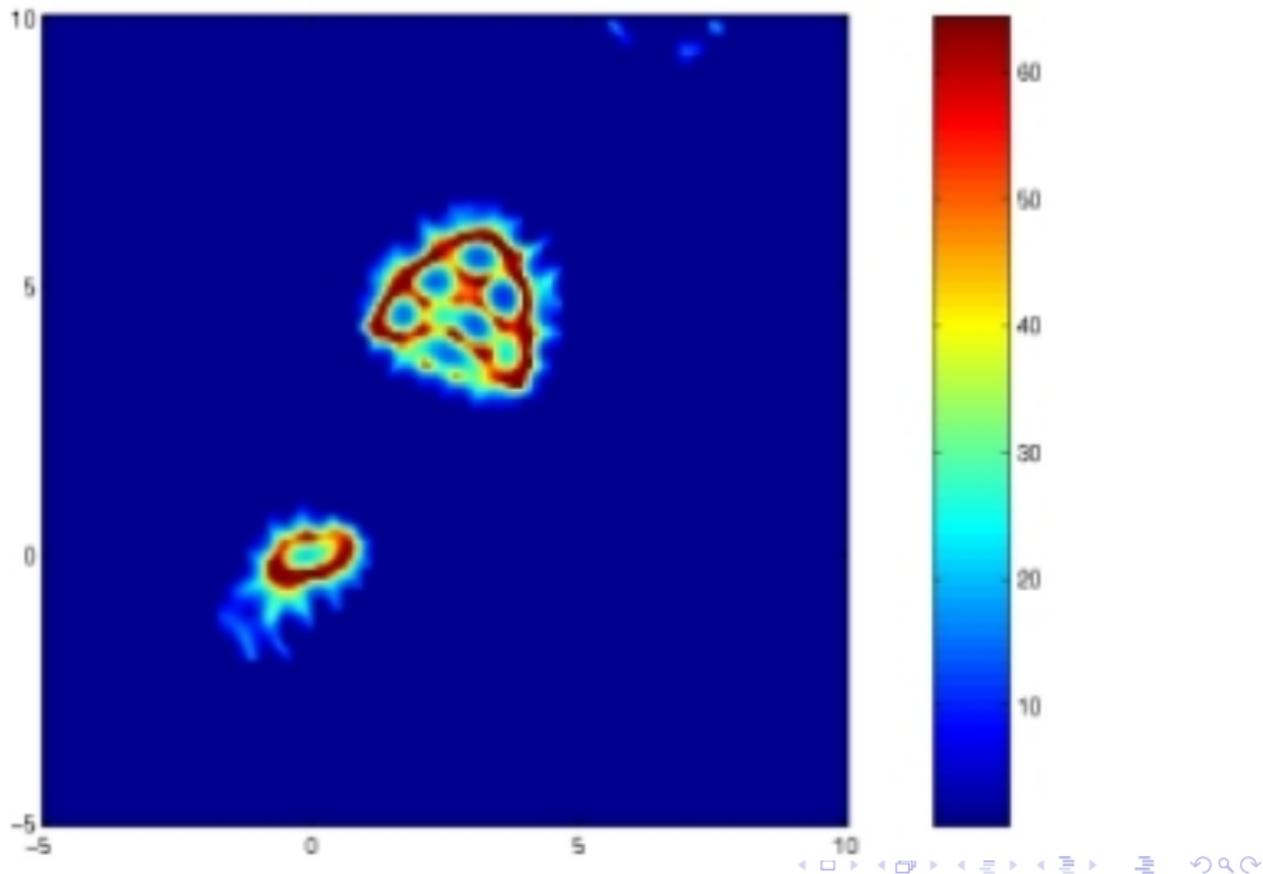
Faktorisierungs Methode



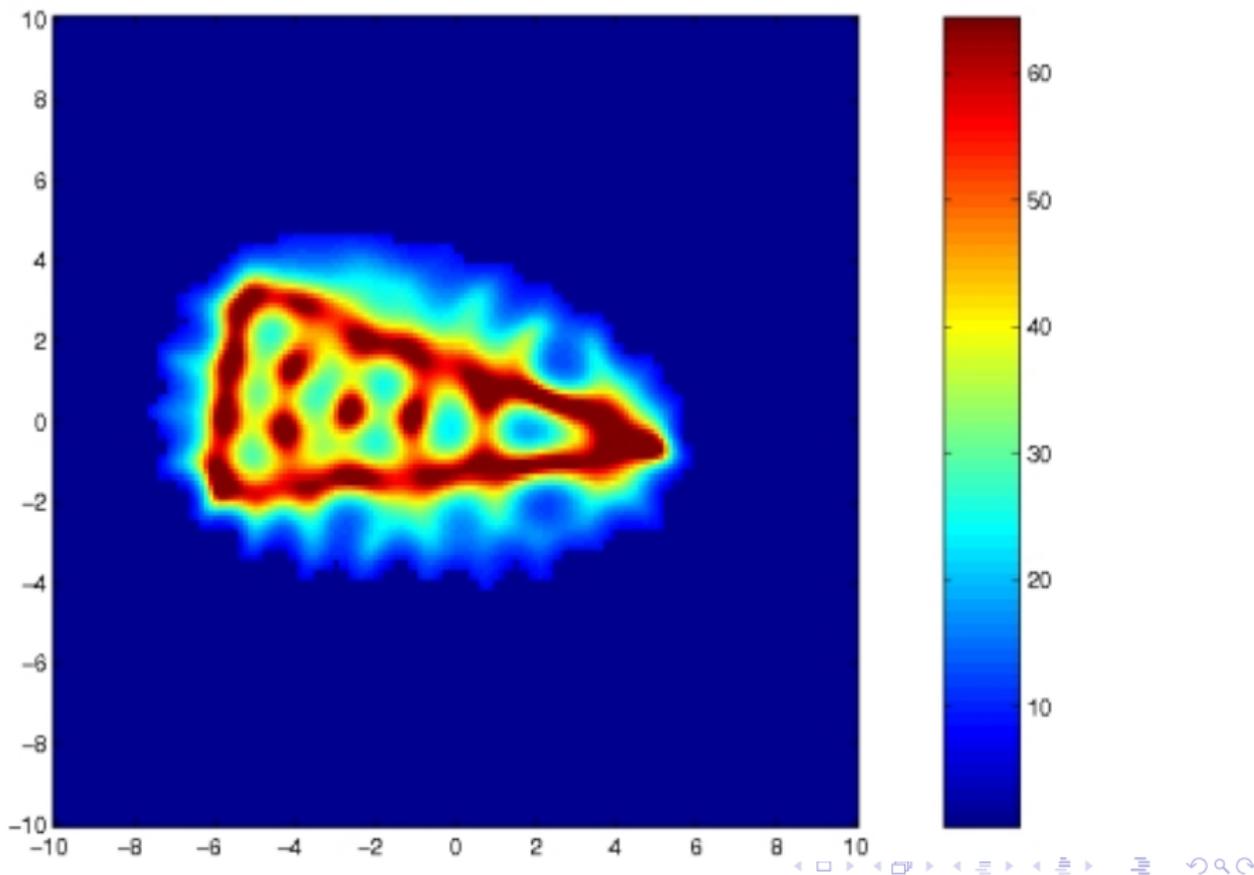
Faktorisierungs Methode



Faktorisierungs Methode



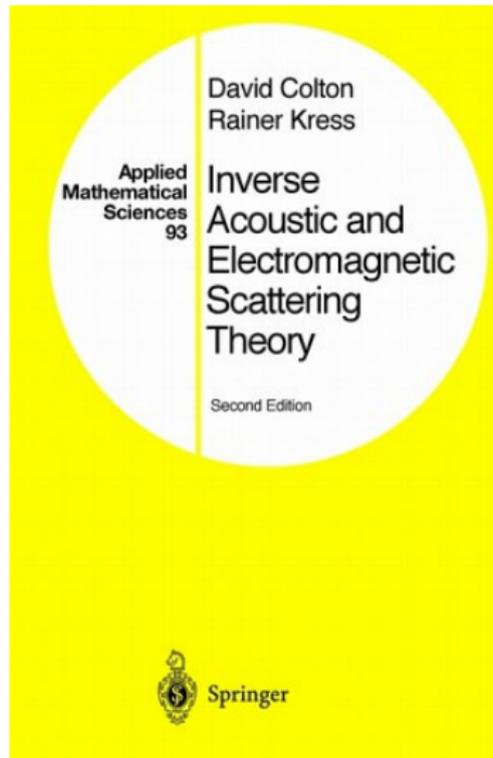
Ipswitch Data



- Konvergenzanalyse für regularisierte Iterationsverfahren

- Konvergenzanalyse für regularisierte Iterationsverfahren
- Faktorisierungsmethode bei den Maxwell Gleichungen

- Konvergenzanalyse für regularisierte Iterationsverfahren
- Faktorisierungsmethode bei den Maxwell Gleichungen
- Fundierte hybride Methode aus Sampling und Iterationsverfahren



Dank für die numerischen Beispiele

Lothar Nannen

Olha Ivanyshyn

Housseem Haddar

Andreas Kirsch

Dank an Doktorandinnen und Doktoranden

Paulik, B. Steffen, R. Steffen, Urbanek, Willers, Wilde, Jost, Gülzow, Blöhbaum, Hähner, Wienert, Zinn, Petry, Potthast, Otte, Hofmann, Mönch, Meyer, Hohage, Gerlach, Schormann, Vogt, Lee, Tsiporin, Heese, Serranho, Pieper, Ivanyshyn, Eckel, Yaman, Schuft, Altuntag

Dank an Doktorandinnen und Doktoranden

Paulik, B. Steffen, R. Steffen, Urbanek, Willers, Wilde, Jost, Gülzow, Blöhbaum, Hähner, Wienert, Zinn, Petry, Potthast, Otte, Hofmann, Mönch, Meyer, Hohage, Gerlach, Schormann, Vogt, Lee, Tsiporin, Heese, Serranho, Pieper, Ivanyshyn, Eckel, Yaman, Schuft, Altuntag

Dank für gemeinsame Publikationen aus der NAM

de Vries, Knauff, Brosowski, Gonzales, Spassov, Mohsen, Kirsch, Zinn, Chapko, Gerlach, Yoon, Meyer, Mönch, Hähner, Kühn, Potthast, Akduman, Lee, Serranho, Ivanyshyn, Eckel, Delbary, Erhard, Schulz, Vintonyak, Tezel, Yaman, Schuft

Danke!