LINEARE FUNKTIONALANALYSIS UND ANWENDUNGEN AUF PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Wintersemester 2005/ 2006

G. Lube
Georg-August-Universität Göttingen, NAM

1. Februar 2006

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 0

Einleitung

Gegenstand dieser Vorlesung sind eine Einführung in die *lineare Funktionalanalysis* und - darauf aufbauend als Anwendung - in Elemente einer modernen Theorie partieller Differentialgleichungen.

Die Lineare Funktionalanalysis untersucht allgemein lineare Abbildungen zwischen linearen Räumen mit topologischer Struktur. Sie basiert auf der grundlegenden Erkenntnis, daß sich die topologischen Begriffe des (endlich-dimensionalen) Euklidschen Raumes $\mathbf{R}^n$ auch auf (unendlichdimensionale) Funktionenräume übertragen lassen. Wir werden sehen, daß sich jedoch bestimmte Aussagen nicht kritiklos vom endlich-dimensionalen auf den unendlich-dimensionalen Fall erweitern lassen.

In Teil I der Vorlesung über *Strukturen und Funktionenräume* behandeln wir die grundlegenden funktionalanalytischen Begriffe und Aussagen sowie geeignete Beispiele eingeführt. Teil II stellt die wichtigsten Begriffe und Aussagen zu *Linearen Operatoren und Funktionalen* zusammen.

Vor allem geht es in dieser Vorlesung (in den Teilen II und insbesondere III) um die Untersuchung von linearen Operatorgleichungen und geeignete Anwendungen. Wir beschränken uns dabei vorwiegend auf die Untersuchung von Gleichungen der Form

$$\text{Finde } u \in X : \quad Au = f, \tag{1}$$

falls $A : X \to Y$ eine lineare Abbildung zwischen den normierten Räumen X und Y sowie f ein gegebenes Element aus Y sind. Die Bedeutung der *funktionalanalytischen Untersuchung* derartiger Gleichungen besteht nun gerade darin, daß von der konkreten Gestalt der Operatorgleichung abstrahiert wird und die wesentlichen Eigenschaften der Gleichung herausgestellt werden.

Wesentliche *Fragestellungen* sind hier

1. Existenz einer Lösung
2. Eindeutigkeit der Lösung
3. Korrekte Stellung des Problems, d.h. stetige Abhängigkeit der Lösung von den Daten
4. Numerische Näherungsverfahren zur Ermittlung der Lösung und deren Begründung (Konvergenzaussagen und Fehlerabschätzungen).

Wir betrachten zunächst den endlich-dimensionalen Prototyp des Problems (1).

Beispiel 0.1. *(Lineare Gleichungssysteme)*

Als wichtiges Beispiel werden im Rahmen der Vorlesungen über Lineare Algebra und Numerische Mathematik bereits lineare Gleichungssysteme behandelt. Dabei sind $X = Y = \mathbf{R}^n$, u bzw. f Vektoren und die Abbildung A wird durch eine Matrix $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$ charakterisiert. Lineare Gleichungssysteme großer Dimension spielen eine herausragende Rolle bei der Näherungslösung von partiellen Differentialgleichungen.

Ein sehr einfacher, aber durchaus praxisrelevanter Fall ist der einer *symmetrischen, streng positiv definiten* Matrix A. Bekanntlich existiert dann genau eine Lösung $u \in \mathbf{R}^n$ des Gleichungssystems. Die Numerischen Mathematik behandelt mit dem Begriff der *Kondition* die dritte Fragestellung. Bei schlechter Kondition werden Datenfehler mit dem Faktor $cond(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$ verstärkt. Bei der betrachteten Klasse von Matrizen kann die Kondition durch das Verhältnis von größtem und kleinstem Eigenwert der Matrix abgeschätzt werden. Ferner steht das Cholesky–Verfahren als direktes Lösungsverfahren zur Verfügung. Für verschiedene iterative Verfahren werden Konvergenzaussagen bereitgestellt.

In Anwendungen spielen aber auch *allgemeinere* Klassen von (im allgemeinen Fall *nichtsymmetrischen*) Matrizen eine große Rolle. Hinsichtlich der ersten beiden Fragestellungen gibt hier die auf Riesz und Fredholm zurückgehende Lösbarkeitstheorie linearer Gleichungen, die auch historisch gesehen den Ausgangspunkt für die Entwicklung der Funktionalanalysis darstellt, eine umfassende Antwort. So gilt zusammenfassend für lineare Gleichungssysteme:

Alternativsatz: Entweder *besitzt das homogene Gleichungssystem*

$$Au = 0$$

nur die triviale Lösung $u = 0$ *und das inhomogene Gleichungssystem*

$$Au = f$$

besitzt für jede rechte Seite f *genau eine Lösung* u

oder *das homogene Gleichungssystem und das zugehörige homogene adjungierte Gleichungssystem*

$$A^* v = 0$$

besitzen die gleiche endliche Anzahl linear unabhängiger Lösungen. Im letzteren Fall ist das inhomogene Problem genau dann lösbar, wenn f *der Bedingung*

$$\sum_{i=1}^{n} f_i v_i = 0$$

für alle Lösungen v *des homogenen adjungierten Systems genügt.*

Hinsichtlich der dritten Fragestellung gibt es im allgemeinen Fall keine elegante Charakterisierung der Kondition einer Matrix. Die Vorlesung *Numerische Mathematik* stellt neben direkten Methoden mit iterativen Verfahren geeignete Näherungsverfahren zur Lösung der Systeme und oft Konvergenzaussagen bereit. □

Im Rahmen dieser Vorlesung erweitern wir diese Betrachtungen auf den Fall *unendlich-dimensionaler* Räume X und Y. Wichtige Anwendungsbeispiele sind Differential- und Integralgleichungsaufgaben. Von besonderem Interesse sind *Randwertprobleme für elliptische Differentialgleichungen,* die eine herausragende Rolle in der mathematischen Physik spielen. So betrachten wir im Rahmen der Vorlesung als einfachstes, jedoch sehr wichtiges Modellproblem das folgende

Beispiel 0.2. *(Dirichletsches Randwertproblem für die Poisson-Gleichung)*
Untersucht wird die Lösbarkeit des *Dirichletschen Randwertproblems für die Poisson-Gleichung*

$$\begin{aligned} -\Delta u \equiv -\left\{\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}\right\} &= f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega \\ u(x,y) &= 0, \qquad\quad (x,y) \in \Gamma \end{aligned}$$

in einem offenen und zusammenhängenden Gebiet Ω im $\mathbf{R}^2$ mit dem Rand Γ. Dieses Problem tritt zum Beispiel auf bei der Modellierung

- der stationären Wärmeausbreitung durch Leitung in einem homogenen Körper,
- der Diffusion eines Schadstoffes in einem homogenen Medium,
- der stationären Bewegung einer wirbel- und quellenfreien Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit (Potentialströmungen) oder
- des Potentials elektrostatischer Felder.

Für die Lösbarkeitstheorie (d.h. die erste und zweite Fragestellung) erweist sich die Konstruktion eines geeigneten Lösungsbegriffes, d.h. die sachgemäße Wahl der Räume X und Y als wesentlich. Eine besonders befriedigende Lösung findet man dabei mit den *Sobolev-Räumen.* Hier wird der klassische Ableitungsbegriff in geeigneter Weise abgeschwächt. Die entsprechende *verallgemeinerte Aufgabenstellung* wird so formuliert, daß sich durch Approximation in endlich–dimensionalen Unterräumen unmittelbar numerische Näherungsverfahren ergeben.

Wir werden zeigen, daß das angegebene Randwertproblem als Operatorgleichung in einem unendlich-dimensionalen normierten Raum mit einem symmetrischen und streng positiven Operator gedeutet werden kann. Viele Aussagen, die für den Fall eines endlich–dimensionalen Raumes gelten, übertragen sich auch hier. So hat der Lösbarkeitssatz für den Fall linearer Gleichungssysteme mit positiv definiter Matrix eine gewisse Verallgemeinerung in der sogenannten *Lax-Milgram Theorie.* Sie beantwortet in geeigneter Weise auch die dritte und vierte Fragestellung.

Im Fall allgemeinerer elliptischer Randwertprobleme, zum Beispiel für die sogenannte *Helmholtz-Gleichung*

$$\begin{aligned} (-\Delta u + cu)(x,y) &= f(x,y), \qquad (x,y) \in \Omega \\ u(x,y) &= 0, \qquad\qquad (x,y) \in \Gamma, \end{aligned}$$

werden wir auch den für lineare Gleichungssysteme angesprochenen *Alternativsatz* von Fredholm für Operatorgleichungen in Räumen unendlicher Dimension verallgemeinern. Dazu benötigen wir vor allem den Begriff des *kompakten Operators.* □

Insgesamt ist die Vorlesung so konzipiert, daß auch der lediglich an der allgemeinen Theorie interessierte Hörer angesprochen wird. Andererseits bilden die hier zu behandelnden Themen eine wichtige Grundlage für eine moderne Theorie der (partiellen) Differentialgleichungen oder der Integralgleichungen, die in weiteren Spezialvorlesungen in den kommenden Semestern behandelt werden.

Eine Bemerkung zur nachfolgenden *Literaturübersicht*: Im Rahmen dieser Vorlesung orientiere ich mich insbesondere an den Monographien [2, 11, 12], aber auch die weiteren Stellen sind empfehlenswert.

Literaturverzeichnis

[1] R.A. Adams: *Sobolev spaces.* Academic Press, New York. 1975

[2] H.W. Alt. *Lineare Funktionalanalysis.* Springer-Verlag. 1999

[3] H. Heuser. *Funktionalanalysis.* Teubner-Verlag. 1975

[4] D. Gilbarg, N.S. Trudinger: *Elliptic partial differential equations of second order.* Sringer-Verlag. 1977

[5] R. Kreß. *Lineare Integralgleichungen.* Springer-Verlag. 1998

[6] E. Kreyszig: *Introductory Functional Analysis with Applications.* J. Wiley 1978

[7] R. Meise, D. Vogt. *Einführung in die Funktionalanalysis.* Vieweg-Verlag 1992

[8] H. Triebel. *Höhere Analysis.* Verlag der Wissenschaften 1972

[9] J. Wloka. *Funktionalanalysis und Anwendungen.* de Gruyter 1971

[10] E. Zeidler. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications.* I, IIa. Springer-Verlag 1989

[11] Zeidler, E.: *Applied Functional Analysis: Main Principles and Their Applications*, Springer, New York 1995

[12] Zeidler, E.: *Applied Functional Analysis: Applications to Mathematical Physics*, Springer, New York 1995

Teil I

Strukturen und Funktionenräume

Kapitel 1

Metrische Räume

Im Rahmen dieser Vorlesung wird der Begriff der *Metrik* (bzw. des Abstandes) die allgemeinste *Struktur* sein. (Den Zusammenhang zwischen dem Begriff Metrik und dem allgemeineren Strukturbegriff *Topologie* streifen wir nur kurz.)

In diesem Kapitel führen wir zunächst wesentliche Begriffe und einfache Beispiele metrischer Räume ein. Dann führen wir die für die weiteren Untersuchungen tragenden Begriffe *Konvergenz* und *Stetigkeit* in metrischen Räumen ein.

1.1 Abstandsbegriff

Definition 1.1. *Für eine beliebige Menge X heißt eine Abbildung $d : X \times X \to \mathbf{R}$ mit den für alle $u, v, w \in X$ geltenden Eigenschaften*

(M1)	$d(u,v)$	$\geq$	0		(Positivität)
(M2)	$d(u,v)$	$=$	0	$\iff \quad u = v$	(Definitheit)
(M3)	$d(u,v)$	$=$	$d(v,u)$		(Symmetrie)
(M4)	$d(u,v)$	$\leq$	$d(u,w) + d(w,v)$		(Dreiecksungleichung)

Metrik auf X. *Das Paar (X, d) heißt* metrischer Raum. *Die Elemente eines metrischen Raumes werden* Punkte *genannt. Die Zahl $d(u,v)$ heißt* Abstand *der Punkte u und v.*

Bei der Begriffsbildung des metrischen Raumes wird von der Spezifik eines konkret vorliegenden Raumes abstrahiert, um die durch die Metrik implizierten Strukturen herausarbeiten zu können. Für eine Punktmenge X können in der Regel verschiedene Metriken angegeben werden.

Auf jeder Teilmenge U eines metrischen Raumes X wird in natürlicher Weise durch Einschränkung des Abstandes $d(\cdot,\cdot)$ auf $U \times U$ eine Metrik induziert. Damit werden Teilmengen metrischer Räume durch die induzierte Metrik ebenfalls zum metrischen Raum.

Wir zeigen noch eine für spätere Zwecke nützliche Ungleichung.

Lemma 1.2. *In einem metrischen Raum X gilt für alle Punkte $u, v, u', v' \in X$ die* Vierecksungleichung

$$|d(u,v) - d(u',v')| \leq d(u,u') + d(v,v'). \tag{1.1}$$

Beweis: Nach (M4) gilt

$$d(u,v) \le d(u,u') + d(u',v') + d(v',v).$$

Über (M3) folgt daraus

$$d(u,v) - d(u',v') \le d(u,u') + d(v,v')$$

sowie durch Vertauschung der Größen und mittels (M3)

$$d(u',v') - d(u,v) \le d(u,u') + d(v,v').$$

Aus beiden Ungleichungen folgt die Behauptung (1.1) . □

1.2 Beispiele metrischer Räume

Wir beginnen mit einigen einfachen Beispielen, die als Übungsaufgaben empfohlen werden.

Beispiel 1.3. *(Endlich-dimensionale Räume* $\mathbf{R}^n$ *und* $\mathbf{C}^n$ *)*
Auf den Punktmengen $X = \mathbf{R}^n$ bzw. $X = \mathbf{C}^n$ bezeichnet

$$d(x,y) := \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2 \right)^{1/2} \tag{1.2}$$

die *euklidische* Metrik. (Nachweis: Übungsaufgabe !) □

Beispiel 1.4. *(Folgenräume* l^∞*)*
Sei $X = l^\infty$ die Menge aller beschränkten Folgen reeller oder komplexer Zahlen, d.h. jedes Element aus X ist eine Folge $x = (\xi_i)$ mit $|\xi_i| \le C_x, i \in \mathbf{N}$. Mit der Abstandsfunktion

$$d(x,y) := \sup_{j \in \mathbf{N}} |\xi_j - \eta_j|, \quad x = (\xi_j), \;\; y = (\eta_j) \tag{1.3}$$

wird X zum metrischen Raum. (Nachweis: Übungsaufgabe !) □

Beispiel 1.5. *(Raum* $C(\Omega)$ *der stetigen Funktionen)*
Für $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ und die Menge

$$C(\Omega) := \{ f : \Omega \to \mathbf{R} \text{ bzw. } \mathbf{C} : \quad f \text{ stetig und beschränkt} \} \tag{1.4}$$

mit reell- oder komplexwertigen Funktionen f ist

$$d(f,g) := \sup_{x \in \Omega} |f(x) - g(x)| \tag{1.5}$$

eine Metrik. (Nachweis: Übungsaufgabe !) □

Die nachfolgende Erweiterung von Beispiel 1.4 erfordert bereits einen gewissen technischen Aufwand.

Beispiel 1.6. *(Folgenräume* l^p*)*
Wir betrachten für $1 \le p < \infty$ die Räume $X = l^p$ aller Folgen $x = (\xi_i)$ mit der Eigenschaft

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p < \infty.$$

Mit $x = (\xi_j), y = (\eta_j)$ wird durch

$$d(x,y) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j - \eta_j|^p \right)^{1/p} \tag{1.6}$$

eine Abstandsfunktion eingeführt. Offenbar sind die Axiome (M1)–(M3) einer Metrik erfüllt. Zum Nachweis der Dreiecksungleichung (M4) sind einige Vorbereitungen erforderlich. Dazu beweisen wir schrittweise einige wichtige Ungleichungen, die wir auch in anderem Zusammenhang benutzen werden.

Lemma 1.7. *(Youngsche Ungleichung)*
Seien $p, q > 1$ Zahlen mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt für alle $a, b \in \mathbf{C}$ die Youngsche Ungleichung

$$|ab| \le \frac{1}{p}|a|^p + \frac{1}{q}|b|^q. \tag{1.7}$$

Beweis: Der Beweis für den Fall $a, b > 0$ ist ausreichend. Seien $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ eine stetige, streng monoton wachsende Funktion mit $f(0) = 0$ und f^{-1} die Umkehrfunktion. Durch Untersuchung der von nachfolgenden Integralen beschriebenen Flächeninhalte ersieht man die Ungleichung

$$ab \le \int_0^a f(t)dt + \int_0^b f^{-1}(s)ds.$$

Im Spezialfall $f(t) = t^{p-1}$ ist $f^{-1}(s) = s^{q-1}$, denn aus $p + q = pq$ folgt

$$(p-1)(q-1) = pq - p - q + 1 = 1.$$

Daraus folgt die Behauptung wegen

$$ab \le \int_0^a t^{p-1}dt + \int_0^b s^{q-1}ds = \frac{1}{p}|a|^p + \frac{1}{q}|b|^q. \qquad \square$$

Lemma 1.8. *(Höldersche Ungleichung für Summen)*
Für Zahlen $p, q > 1$ mit $1/p + 1/q = 1$ und beliebige Punkte $x = (\xi_i), y = (\eta_i) \in l^p$ gilt

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j||\eta_j| \le \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\eta_j|^q \right)^{1/q}. \tag{1.8}$$

Der Spezialfall $p = q = 2$ ist die Schwarzsche Ungleichung.

Beweis: Wir betrachten zunächst den Fall endlicher Summen und setzen

$$A := \left(\sum_{j=1}^{m} |\xi_j|^p \right)^{1/p}, \qquad B := \left(\sum_{j=1}^{m} |\eta_j|^q \right)^{1/q}.$$

Für $A = 0$ bzw. $B = 0$ gilt offenbar die Aussage. Für $AB > 0$ ergibt Lemma 1.7 mit $a := \xi_j/A,\ b := \eta_j/B$

$$\frac{|\xi_j \eta_j|}{AB} \le \frac{1}{p}\frac{|\xi_j|^p}{A^p} + \frac{1}{q}\frac{|\eta_j|^q}{B^q}, \quad j = 1, ..., m.$$

Summation über j ergibt

$$\frac{1}{AB}\sum_{j=1}^{m}|\xi_j\eta_j| \le \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

und damit

$$\sum_{j=1}^{m}|\xi_j\eta_j| \le AB.$$

Die Behauptung folgt dann durch Grenzübergang für $m\to\infty$. □

Lemma 1.9. *(Minkowskische Ungleichung für Summen)*
Für Zahlen $p\ge 1$ und beliebige Punkte $x=(\xi_i), y=(\eta_i)\in l^p$ gilt

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j+\eta_j|^p\right)^{1/p} \le \left(\sum_{j=1}^{\infty}|\xi_j|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{j=1}^{\infty}|\eta_j|^p\right)^{1/p}. \tag{1.9}$$

Beweis: Für $p=1$ folgt die Aussage bereits aus der verallgemeinerten Dreiecksungleichung für Zahlen.
Seien jetzt $p>1$ und q konjugierte Exponenten mit $1/p+1/q=1$. Im Fall endlicher Summen gilt mittels Hölderscher Ungleichung und wegen $(p-1)q=pq-q=p$

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{m}|\xi_j+\eta_j|^p = \sum_{j=1}^{m}|\xi_j+\eta_j||\xi_j+\eta_j|^{p-1}\\
\le\ &\sum_{j=1}^{m}|\xi_j||\xi_j+\eta_j|^{p-1}+\sum_{j=1}^{m}|\eta_j||\xi_j+\eta_j|^{p-1}\\
\le\ &\left\{\left(\sum_{j=1}^{m}|\xi_j|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{j=1}^{m}|\eta_j|^p\right)^{1/p}\right\}\left(\sum_{j=1}^{m}|\xi_j+\eta_j|^p\right)^{1/q}.
\end{aligned}$$

Division durch den letzten Faktor auf der rechten Seite ergibt die Behauptung für den Fall einer endlichen Summe.
Die für $m\to\infty$ auf der rechten Seite stehenden beiden Summen konvergieren wegen $x,y\in l^p$. Dann konvergiert auch die links stehende Summe. Das ergibt die Behauptung. □

Aus der Minkowskischen Ungleichung folgert man nun unmittelbar auf die Gültigkeit der Dreiecksungleichung (M4) in l^p. Damit haben wir den

Satz 1.10. *Der Raum l^p ist metrischer Raum.*

1.3 Offene Mengen

Zur topologischen Charakterisierung metrischer Räume benötigt man die folgenden Begriffe und Aussagen über *offene Mengen.*

Definition 1.11. *Für jeden Punkt u eines metrischen Raumes X und jede Zahl $r>0$ heißt*

$$B(u;r) := \{v\in X:\ d(u,v)<r\} \tag{1.10}$$

offene Kugel *mit dem Mittelpunkt u und Radius r. Ferner heißt*

$$B[u;r] := \{v\in X:\ d(u,v)\le r\} \tag{1.11}$$

abgeschlossene Kugel *mit dem Mittelpunkt u und Radius r.*

Definition 1.12. *Eine Teilmenge U des metrischen Raumes X wird als* offen *bezeichnet, falls zu jedem $u \in U$ eine Zahl $r > 0$ derart existiert, daß $B(u; r) \subset U$.*

Satz 1.13. *Offene Kugeln sind offen.*

Beweis: Sei $v \in B(u; r)$. Dann gilt $r' := r - d(u, v) > 0$. Nach der Dreiecksungleichung (M4) gilt für alle Punkte w mit $d(v, w) < r'$

$$d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w) < d(u, v) + r - d(u, v) = r,$$

d.h. $B(v; r') \subset B(u; r)$. □

Der metrische Raum X und die leere Menge $\emptyset$ sind offen. Ferner gilt

Satz 1.14. *Der Durchschnitt endlich vieler offener sowie die Vereinigung beliebig vieler offener Mengen sind offen.*

Beweis: (i) Seien $U_1, ..., U_m$ offene Mengen sowie $U := \cap_{i=1}^m U_i$. Ein Punkt $u \in U$ liegt damit in jeder Menge U_i. Dann existieren Zahlen $r_i > 0$ derart, daß $B(u; r_i) \subset U_i, i = 1, ..., m$. Die erste der beiden Aussagen folgt dann mit der Festsetzung $r := \min_{i=1,...,m} r_i$ aus $B(u; r) \subset U$.
(ii) Für eine Indexmenge I seien $U_i, i \in I$ offene Mengen. Ein beliebiger Punkt $u \in U := \cup_{i \in I} U_i$ liegt dann offenbar in wenigstens einer Menge U_i. Daher existiert eine Zahl $r > 0$ mit $B(u; r) \subset U_i \subset U$. □

Nach Satz 1.14 besitzt jeder metrische Raum in kanonischer Weise eine *Topologie*. Damit sind die wesentlichen Begriffe *Konvergenz* und *Stetigkeit* verfügbar.

1.4 Konvergenz

Wir führen jetzt den *Konvergenzbegriff* in metrischen Räumen ein und betrachten *abgeschlossene* Mengen.

Definition 1.15. *Eine Folge (u_n) von Punkten eines metrischen Raumes X heißt* konvergent, *falls es ein $u \in X$ mit*

$$\lim_{n \to \infty} d(u_n, u) = 0 \tag{1.12}$$

gibt, d.h. zu jeder Zahl $\epsilon > 0$ findet man eine natürliche Zahl $N(\epsilon)$ mit $d(u_n, u) < \epsilon$ für alle $n \geq N(\epsilon)$. Eine nicht konvergente Folge heißt divergent.

Für eine konvergente Folge schreiben wir wie üblich

$$\lim_{n \to \infty} u_n = u \qquad \text{bzw.} \qquad u_n \to u, \;\; n \to \infty. \tag{1.13}$$

Satz 1.16. *Für eine konvergente Folge ist das Grenzelement eindeutig bestimmt.*

Beweis: Gelte $u_n \to u$ und $u_n \to v$ für $n \to \infty$. (M4) zeigt dann

$$d(u, v) \leq d(u, u_n) + d(u_n, v) \to 0, \quad n \to \infty,$$

d.h. $d(u, v) = 0$ und damit nach (M2) $u = v$. □

Beispiel 1.17. In den metrischen Räumen aus den Beispielen 1.3 bzw. 1.5 entspricht der durch die Definition 1.15 eingeführte Konvergenzbegriff der Konvergenz von Punktfolgen in $\mathbf{R}^n$ bzw. $\mathbf{C}^n$ sowie der gleichmäßigen Konvergenz von Funktionenfolgen auf Ω. □

Definition 1.18. *Ein Punkt u eines metrischen Raumes X heißt* Berührungspunkt einer Teilmenge U von X, *wenn eine Folge (u_n) in U existiert mit*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u.$$

Eine Teilmenge U eines metrischen Raumes X heißt abgeschlossen, *wenn sie alle ihre Berührungspunkte enthält.*

Satz 1.19. *Eine Teilmenge U eines metrischen Raumes X ist genau dann abgeschlossen, wenn ihr Komplement $X \setminus U$ in X offen ist.*

Beweis: $\Rightarrow$ Sei zunächst $u \in X \setminus U$. Dann existiert eine Zahl $n \in \mathbf{N}$ mit $B(u; 1/n) \subset X \setminus U$, denn sonst gäbe es eine Folge (u_n) in U mit $u_n \to u, n \to \infty$. Somit wäre u Berührungspunkt von U und läge in U. Folglich ist $X \setminus U$ offen.

$\Leftarrow$ Sei nun andererseits u Berührungspunkt von U. Also gibt es eine Folge (u_n) in U mit $u_n \to u, n \to \infty$. Dann existiert zu jedem $\epsilon > 0$ eine Zahl $n \in \mathbf{N}$ mit $u_n \in B(u; \epsilon)$. Damit kann u nicht zur offenen Menge $X \setminus U$ gehören. Also gilt $u \in U$ und U ist somit abgeschlossen. □

Satz 1.20. *Abgeschlossene Kugeln sind abgeschlossen.*

Beweis: Sei $v \in X \setminus B[u; r]$. Damit gelten $d(u, v) > r$ und für alle w mit $d(v, w) < r' := d(v, u) - r$ nach (M4)

$$d(u, w) \geq d(u, v) - d(v, w) > d(u, v) - d(u, v) + r = r,$$

also $w \in X \setminus B[u; r]$ und damit $B(v; r') \subset X \setminus B[u; r]$. Die Behauptung folgt dann über Satz 1.19. □

Definition 1.21. *Die Menge $\overline{U}$ aller Berührungspunkte einer Teilmenge U eines metrischen Raumes X heißt* abgeschlossene Hülle von U.

Aus den Definitionen 1.15 und 1.18 schließen wir, daß eine Menge U genau im Fall $U = \overline{U}$ abgeschlossen ist.

Satz 1.22. *Die abgeschlossene Hülle einer Teilmenge U ist die kleinste abgeschlossene Menge, die U enthält.*

Beweis: Übungsaufgabe □

Definition 1.23. *Eine Teilmenge U eines metrischen Raumes X heißt* beschränkt, *wenn sie in einer abgeschlossenen Kugel enthalten ist.*

Satz 1.24. *Konvergente Folgen sind beschränkt.*

Beweis: Für die Folge (u_n) mit $u_n \to u, n \to \infty$ gibt es eine Zahl $N \in \mathbf{N}$, so daß $d(u_n, u) < 1, n \geq N$. Mit

$$r := \max\{1; \max_{1 \leq n \leq N} d(u_n, u)\}$$

ergibt sich $u_n \in B[u; r]$ für alle Indizes $n \in \mathbf{N}$. □

1.5 Stetigkeit. Isometrie

Als weiteren tragenden Begriff führen wir den der *Stetigkeit* ein. Auch der Begriff der *Isometrie* wird nachfolgend verschiedentlich benutzt.

Definition 1.25. *Seien X und Y metrische Räume.*
(i) Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt stetig im Punkt $u \in X$, *falls es zu jeder Zahl $\epsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$ gibt mit*

$$d(f(u), f(v)) < \epsilon \qquad \forall v \in X : \ d(v, u) < \delta. \tag{1.14}$$

(ii) Die Abbildung f heißt stetig (auf X), *wenn sie in jedem Punkt aus X stetig ist.*
(iii) Die Abbildung f heißt gleichmäßig stetig (auf X), *falls es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit*

$$d(f(u), f(v)) < \epsilon \qquad \forall u, v \in X: \ d(v, u) < \delta. \tag{1.15}$$

Satz 1.26. *Eine Funktion $f : X \to Y$ ist stetig im Punkt $u \in X$ genau dann, wenn für jede Folge (u_n) in X mit*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u$$

gilt

$$\lim_{n\to\infty} f(u_n) = f(u).$$

Beweis: $\Rightarrow$ Gelte $u_n \to u, n \to \infty$. Für $\epsilon > 0$ wird $\delta > 0$ so gewählt, daß

$$d(f(v), f(u)) < \epsilon, \quad \forall v \in X: \ d(v, u) < \delta.$$

Wegen der Konvergenz der Folge (u_n) existiert ein $N(\epsilon)$ so, daß $d(u_n, u) < \delta$ für alle $n \geq N$. Dann ergibt sich aus $d(f(u_n), f(u)) < \epsilon$ für alle $n \geq N$ die gesuchte Konvergenzaussage $f(u_n) \to f(u), \ n \to \infty$.

$\Leftarrow$ Sei nun angenommen, daß f in u nicht stetig ist. Dann existieren ein $\epsilon > 0$ und eine Folge (u_n) in X mit

$$d(u_n, u) \leq \frac{1}{n}, \qquad d(f(u_n), f(u)) \geq \epsilon.$$

Dann konvergiert die Urbildfolge (u_n) gegen u, aber im Widerspruch zur Annahme konvergiert $(f(u_n))$ nicht gegen $f(u)$. □

Definition 1.27. *(X, d) und (X', d') seien metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \to X'$ heißt* Isometrie, *wenn für alle $u, v \in X$ gilt*

$$d(u, v) = d'(f(u), f(v)). \tag{1.16}$$

Existiert eine surjektive Isometrie $f : X \to X'$, so heißen X und X' isometrisch.

Nachfolgender Satz impliziert die Bijektivität surjektiver Isometrien.

Satz 1.28. *Eine Isometrie ist injektiv.*

Beweis: Für $u, v \in X$ gelte $f(u) = f(v)$. Aus

$$d(u, v) = d'(f(u), f(v)) = 0$$

folgt $u = v$. □

Nach diesem Resultat können metrische Beziehungen aus einem metrischen Raum sofort auf einen zu diesem isometrischen Raum übertragen werden. Abstrahiert man von der konkreten Gestalt zweier isometrischer Räume, so kann man ihre metrische Eigenschaften als übereinstimmend ansehen.

Kapitel 2

Vollständige metrische Räume

Im vorliegenden Abschnitt führen wir zunächst den zentralen Begriff der *Vollständigkeit* ein. Besonders wichtig ist das Resultat über die *Vervollständigung* metrischer Räume. Mit dem Fixpunktsatz von Banach erhalten wir dann ein klassisches konstruktives Instrument zur Lösung von gewissen *Fixpunktgleichungen* in metrischen Räumen. Schließlich bereiten wir mit dem Satz von Baire und dem Prinzip der *gleichmäßigen Beschränktheit* wesentliche Aussagen über lineare Operatoren in normierten Räumen vor.

2.1 Vollständigkeit

Definition 2.1. *Eine Folge (u_n) von Elementen eines metrischen Raums X heißt* Cauchy–Folge, *falls es zu jedem Wert $\epsilon > 0$ eine natürliche Zahl $N(\epsilon)$ mit der Eigenschaft $d(u_n, u_m) < \epsilon$ für alle $m, n \geq N(\epsilon)$ gibt, d.h.*

$$\lim_{m,n\to\infty} d(u_n, u_m) = 0. \tag{2.1}$$

Satz 2.2. *Konvergente Folgen sind Cauchy–Folgen.*

Beweis: Für die gegen u konvergierende Folge (u_n) in X gibt es zu jedem Wert $\epsilon > 0$ ein $N(\epsilon)$ mit der Eigenschaft $d(u_n, u) < \epsilon/2$ für alle $n \geq N(\epsilon)$. Die Dreiecksungleichung ergibt dann

$$d(u_n, u_m) \leq d(u_n, u) + d(u, u_m) < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

für alle $m, n \geq N(\epsilon)$. □

Das Beispiel der rationalen Zahlen als Teilmenge der reellen Zahlen legt klar, daß die Umkehrung der Aussage von Satz 2.2 im allgemeinen Fall nicht richtig ist. Das führt auf die

Definition 2.3. *Ein metrischer Raum X heißt* vollständig, *falls jede Cauchy-Folge in X gegen ein Element aus X konvergiert.*

Satz 2.4. (i) *Vollständige Teilmengen eines metrischen Raumes sind abgeschlossen.*
(ii) *Abgeschlossene Teilmengen eines vollständigen metrischen Raumes sind vollständig.*

Beweis: (i) Sei U vollständige Teilmenge des metrischen Raumes X. Für jeden Berührungspunkt u von U existiert dann eine Folge (u_n) in U mit $u_n \to u, n \to \infty$. Nach Satz 2.2 ist (u_n) Cauchy-Folge. Wegen der Vollständigkeit von U konvergiert die Folge gegen ein Element $v \in U$. Satz 1.16 über die Eindeutigkeit des Grenzwertes ergibt $v = u$. Damit ist $u \in U$ und somit U abgeschlossen.

(ii) Sei jetzt U abgeschlossene Teilmenge des vollständigen metrischen Raums X. Eine Cauchy-Folge (u_n) in U ist dann auch Cauchy-Folge in X, d.h. es existiert ein Element $u \in X$ mit

$u_n \to u, n \to \infty$. Nun ist u Berührungspunkt der abgeschlossenen Menge U und somit $u \in U$. Daraus folgt die Vollständigkeit von U. $\square$

Beispiel 2.5. Die in den Beispielen 1.3 bzw. 1.5 eingeführten metrischen Räume $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{C}^n$ bzw. $C(\Omega)$ sind vollständig, denn das Konvergenzkriterium von Cauchy ist hinreichend sowohl für die Konvergenz von Punktfolgen in $\mathbf{R}^n$ und $\mathbf{C}^n$ als auch für die gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen. $\square$

2.2 Vervollständigung metrischer Räume

Definition 2.6. *Eine Teilmenge U eines metrischen Raumes X heißt im Fall $\overline{U} = X$* dicht, *d.h. jedes Element aus X ist Grenzelement einer konvergenten Folge von Punkten aus U.*

Für spätere Betrachtungen erweist sich folgender Satz als wesentlich. Der Beweis des Satzes verallgemeinert die Einführung der reellen Zahlen.

Theorem 2.7. *Jeder metrische Raum X ist isometrisch zu einer dichten Teilmenge eines vollständigen metrischen Raumes $\tilde{X}$, der bis auf Isometrie eindeutig bestimmt ist. $\tilde{X}$ heißt* Vervollständigung von X.

Beweis: (i) Aus der Vierecksungleichung (vgl. Lemma 1.2) folgt für zwei Cauchy–Folgen (u_n) und (v_n)

$$|d(u_n, v_n) - d(u_m, v_m)| \leq d(u_n, u_m) + d(v_n, v_m) \to 0, \quad n, m \to \infty,$$

d.h. $(d(u_n, v_n))$ ist Cauchy-Folge in $\mathbf{R}$. Damit existiert der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} d(u_n, v_n)$ stets.

Wir führen nun eine Äquivalenzrelation $(u_n) \sim (v_n)$ für Cauchy-Folgen in X ein:

$$(u_n) \sim (v_n) \qquad \Leftrightarrow \qquad d(u_n, v_n) \to 0, \quad n \to \infty. \tag{2.2}$$

Wegen $d(u_n, u_n) = 0$ gilt die Reflexivitätseigenschaft $(u_n) \sim (u_n)$. Die Symmetrieeigenschaft

$$(u_n) \sim (v_n) \quad \Leftrightarrow \quad (v_n) \sim (u_n)$$

folgt aus (M3). Schließlich ist die Relation transitiv

$$(u_n) \sim (v_n), \quad (v_n) \sim (w_n) \quad \Rightarrow \quad (u_n) \sim (w_n)$$

aufgrund der Dreiecksungleichung (M4). $\tilde{X}$ sei nun die Menge aller Klassen äquivalenter Cauchy–Folgen in X.

(ii) Wir definieren eine Metrik $\tilde{d}$ auf $\tilde{X}$: Zu $\tilde{u}, \tilde{v} \in \tilde{X}$ mit den Repräsentanten (u_n) und (v_n) sei

$$\tilde{d}(\tilde{u}, \tilde{v}) := \lim_{n\to\infty} d(u_n, v_n). \tag{2.3}$$

Die Definition hängt offenbar nicht von der Wahl der Repräsentanten ab, denn für $(u_n) \sim (u'_n)$ und $(v_n) \sim (v'_n)$ gilt nach Vierecksungleichung

$$|d(u_n, v_n) - d(u'_n, v'_n)| \leq d(u_n, u'_n) + d(v_n, v'_n) \to 0, \quad n \to \infty,$$

damit

$$\lim_{n\to\infty} d(u_n, v_n) = \lim_{n\to\infty} d(u'_n, v'_n).$$

Die Metrikaxiome übertragen sich von X auf $\tilde{X}$, denn
(M1):

$$\tilde{d}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \lim_{n\to\infty} d(u_n, v_n) \geq 0$$

(M2):

$$\tilde{d}(\tilde{u},\tilde{v}) = \lim_{n\to\infty} d(u_n, v_n) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (u_n) \sim (v_n) \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{u} = \tilde{v}$$

(M3):

$$\tilde{d}(\tilde{u},\tilde{v}) = \lim_{n\to\infty} d(u_n, v_n) = \lim_{n\to\infty} d(v_n, u_n) = \tilde{d}(\tilde{v},\tilde{u})$$

(M4):

$$\begin{aligned} \tilde{d}(\tilde{u},\tilde{v}) &= \lim_{n\to\infty} d(u_n, v_n) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} d(u_n, w_n) + \lim_{n\to\infty} d(w_n, v_n) = \tilde{d}(\tilde{u},\tilde{w}) + \tilde{d}(\tilde{w},\tilde{v}). \end{aligned}$$

(iii) Durch die Abbildung $f : X \to \tilde{X}$ mit $f : u \mapsto \tilde{u}$ mit dem Repräsentanten $(u, u, u, ...)$ wird eine Isometrie erklärt, denn per Definition ist

$$\tilde{d}(f(u), f(v)) = d(u, v)$$

für alle $u, v \in X$.
Wir zeigen die Dichtheit des Wertebereiches $f(X) = \{f(u) : u \in X\}$ in $\tilde{X}$: Sei $\tilde{u} \in \tilde{X}$ und (u_n) ein Repräsentant von $\tilde{u}$. Dann folgt

$$\lim_{n\to\infty} \tilde{d}(\tilde{u}, f(u_n)) = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} d(u_m, u_n) = 0,$$

da (u_n) Cauchy-Folge ist. Damit gilt $f(u_n) \to \tilde{u}, n \to \infty$.
(iv) Wir untersuchen die Vollständigkeit von $\tilde{X}$: Sei $(\tilde{u}_n)$ Cauchy-Folge in $\tilde{X}$. Nach Schritt (iii) existiert zu jedem $\tilde{u}_n$ ein Element $u_n \in X$ so, daß

$$\tilde{d}(\tilde{u}_n, f(u_n)) < \frac{1}{n}.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} d(u_n, u_m) = \tilde{d}(f(u_n), f(u_m)) \quad &\leq \quad \tilde{d}(f(u_n), \tilde{u}_n) + \tilde{d}(\tilde{u}_n, \tilde{u}_m) + \tilde{d}(\tilde{u}_m, f(u_m)) \\ &< \quad \frac{1}{n} + \tilde{d}(\tilde{u}_n, \tilde{u}_m) + \frac{1}{m} \to 0, \quad n, m \to \infty. \end{aligned}$$

Somit ist (u_n) Cauchy-Folge in X und erzeugt ein Element $\tilde{u} \in \tilde{X}$. Weiter ist

$$\begin{aligned} \tilde{d}(\tilde{u}, \tilde{u}_n) \quad &\leq \quad \tilde{d}(\tilde{u}, f(u_n)) + \tilde{d}(f(u_n), \tilde{u}_n) \\ &\leq \quad \lim_{m\to\infty} d(u_m, u_n) + \frac{1}{n} \to 0, \quad n \to \infty. \end{aligned}$$

Also erhalten wir $\tilde{u}_n \to \tilde{u}, n \to \infty$.
(v) Wir zeigen die Eindeutigkeit der Vervollständigung bis auf Isometrie:
Seien (Y, d_Y) und (Z, d_Z) zwei vollständige metrische Räume sowie $f : X \to Y$ und $g : X \to Z$ Isometrien derart, daß $f(X)$ dicht in Y bzw. $g(X)$ dicht in Z sind. Nun definieren wir eine Abbildung $h : Y \to Z$ dadurch, daß für jedes Element $v \in Y$

$$h(v) := \lim_{n\to\infty} g(u_n) \tag{2.4}$$

gesetzt wird. Dabei sei (u_n) eine Folge in X mit $f(u_n) \to v, n \to \infty$.

Der so erklärte Grenzwert in (2.4) existiert, da wegen

$$d_Z(g(u_n), g(u_m)) = d_X(u_n, u_m) = d_Y(f(u_n), f(u_m)) \to 0, \quad n, m \to \infty$$

$(g(u_n))$ eine Cauchy-Folge in Z ist.

Weiterhin ist (2.4) nicht abhängig von der speziellen Wahl der Folge (u_n). Dazu sei (u'_n) eine andere Folge mit $f(u'_n) \to v, n \to \infty$. Dann gilt

$$d_Z(g(u_n), g(u'_n)) = d_X(u_n, u'_n) = d_Y(f(u_n), f(u'_n)) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Die Folgen $(g(u_n))$ und $(g(u'_n))$ haben also den gleichen Grenzwert.

Abbildung h ist eine Isometrie, denn nach Vierecksungleichung haben wir für $n \to \infty$

$$\begin{aligned} & |d_Z(h(v), h(v')) - d_Y(v, v')| \\ = \; & |d_Z(h(v), h(v')) - d_Z(g(u_n), g(u'_n)) + d_Y(f(u_n), f(u'_n)) - d_Y(v, v')| \\ \le \; & d_Z(h(v), g(u_n)) + d_Z(h(v'), g(u'_n)) + d_Y(f(u_n), v) + d_Y(f(u'_n), v')) \to 0. \end{aligned}$$

Die Surjektivität von h sieht man wie folgt: Für jedes $w \in Z$ gibt es eine Folge (u_n) in X mit $g(u_n) \to w, n \to \infty$. Wie in (2.4) schließen wir dann auf die Existenz des Grenzwertes

$$\psi := \lim_{n\to\infty} f(u_n).$$

Dann ist aber $w = h(\psi)$ nach Konstruktion von h. □

2.3 Fixpunktsatz von Banach

Wir betrachten in diesem Abschnitt (im allgemeinen Fall nichtlineare) Abbildungen bzw. Operatoren $A : X \to X$, die einen vollständigen metrischen Raum X in sich abbilden. Es sollen hinreichende Bedingungen für die Lösbarkeit der Operatorgleichung

$$u = A(u) \tag{2.5}$$

und Verfahren zur Näherungslösung dieser Gleichung angegeben werden.

Bei den weiteren Aussagen benötigen wir folgendes Resultat.

Lemma 2.8. *Die Metrik $d(\cdot, \cdot)$ ist eine stetige Funktion.*

Beweis: Gelte $u_n \to u, v_n \to v$ für $n \to \infty$. Aus der Vierecksungleichung (Lemma 1.2) ergibt sich die Stetigkeit der Metrik wegen

$$|d(u_n, v_n) - d(u, v)| \le d(u_n, u) + d(v_n, v) \to 0, \quad n \to \infty. \qquad \square$$

Wir erinnern daran, daß nach Satz 2.4 (ii) abgeschlossene Teilmengen U eines vollständigen metrischen Raumes X selbst vollständig sind. Die nachfolgende Darstellung kann dann sofort auf die Abbildungskonstellation $A : U \to U$ übertragen werden.

Definition 2.9. *Ein Operator $A : X \to X$ eines metrischen Raumes X in sich heißt* Kontraktionsoperator, *falls eine Zahl $q \in [0, 1)$ existiert, so daß*

$$d(A(u), A(v)) \le q d(u, v) \quad \forall u, v \in X. \tag{2.6}$$

Jede derartige Zahl q heißt Kontraktionszahl *von A.*

Aus der Ungleichung in dieser Definition folgt der

Satz 2.10. *Ein Kontraktionsoperator ist stetig.*

Definition 2.11. *Jedes Element u eines metrischen Raumes X mit der Eigenschaft*

$$A(u) = u$$

heißt Fixpunkt *des Operators $A : X \to X$.*

Der zentrale Satz dieses Abschnittes ist

Theorem 2.12. (Fixpunktsatz von S. Banach) *Ein Kontraktionsoperator eines vollständigen metrischen Raumes X in sich besitzt einen und nur einen Fixpunkt.*

Beweis. Sei $A : X \to X$ Kontraktionsoperator mit der Kontraktionszahl $q \in [0, 1)$. Wir wählen ein beliebiges Startelement $u_0 \in X$ und erklären die Folge (u_n) in X durch die Iterationsvorschrift *(sukzessive Approximation)*

$$u_{n+1} := A(u_n), \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{2.7}$$

Per Definition gilt

$$d(u_{n+1}, u_n) = d(A(u_n), A(u_{n-1})) \leq qd(u_n, u_{n-1})$$

und damit durch vollständige Induktion

$$d(u_{n+1}, u_n) \leq q^n d(u_1, u_0), \quad n = 1, 2, ...$$

Wir können nun folgern, daß (u_n) Cauchy-Folge ist, denn für $m \geq n$ gilt

$$\begin{aligned} d(u_n, u_m) &\leq d(u_n, u_{n+1}) + d(u_{n+1}, u_{n+2}) + \cdots + d(u_{m-1}, u_m) \\ &\leq (q^n + q^{n+1} + \cdots + q^{m-1}) d(u_1, u_0) \\ &\leq \frac{q^n}{1-q} d(u_1, u_0) \to 0, \quad n \to \infty. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Wegen der Vollständigkeit der Menge X findet man dann ein Element $u \in X$ derart, daß $u_n \to u, n \to \infty$. Aufgrund der Stetigkeit des Kontraktionsoperators A nach Satz 2.10 folgern wir

$$u = \lim_{n\to\infty} u_{n+1} = \lim_{n\to\infty} A(u_n) = A(u),$$

d.h. u ist Fixpunkt des Operators.

Es bleibt der Nachweis der Eindeutigkeit des Fixpunktes: Wir nehmen an, daß u und $\tilde{u}$ voneinander verschiedene Fixpunkte von A sind. Dann ergibt sich wegen

$$0 \neq d(u, \tilde{u}) = d(A(u), A(\tilde{u})) \leq qd(u, \tilde{u})$$

die Forderung $q \geq 1$ im Widerspruch zur Annahme der Kontraktivität von A. □

2.4 Verfahren der sukzessiven Approximation

Die zentrale Rolle des Fixpunktsatzes von Banach ergibt sich aus dem konstruktiven Existenzbeweis für den Fixpunkt eines Operators. Das dem Beweis zugrunde liegende Iterationsverfahren der sukzessiven Approximation liefert einen in der Regel leicht programmierbaren Algorithmus zur näherungsweisen Bestimmung des Fixpunktes. Zugleich erhält man Fehlerabschätzungen für die Güte der Approximation.

Theorem 2.13. *Der Operator $A : X \to X$ mit der Kontraktionszahl $q \in [0,1)$ bilde den vollständigen metrischen Raum X in sich ab. Dann konvergiert das Verfahren der sukzessiven Approximation*

$$u_{n+1} := A(u_n), \quad n = 0, 1, 2, ...$$

für beliebige Startelemente $u_0 \in X$ gegen den eindeutig bestimmten Fixpunkt u des Operators A. Man hat ferner für beliebige Zahlen $n \in \mathbf{N}_0$ die a-priori Fehlerabschätzung

$$d(u, u_n) \leq \frac{q^n}{1-q} d(u_1, u_0)$$

sowie für $n \geq 1$ die a-posteriori Fehlerabschätzung

$$d(u, u_n) \leq \frac{q}{1-q} d(u_n, u_{n-1}).$$

Beweis: Die a-priori Aussage über den Fehler folgt aus der Formel (2.8) durch Grenzübergang $m \to \infty$. Die a-posteriori Fehleraussage folgt aus der a-priori Analyse durch Wahl von u_{n-1} als Startelement. □

Bemerkung 2.14. Die a-priori Fehlerabschätzung kann benutzt werden, um vorab bei vorgegebener Fehlertoleranz ϵ eine obere Schranke für die Zahl der notwendigen Iterationsschritte zu bestimmen. Genauer sind zur Gewährleistung von

$$d(u, u_n) \leq \epsilon$$

aufgrund der a-priori Abschätzung

$$n \geq \frac{\ln \tilde{\epsilon}}{\ln q}, \quad \tilde{\epsilon} := \frac{(1-q)\epsilon}{d(u_1, u_0)}$$

Iterationsschritte erforderlich. Mit kleinerer Kontraktionszahl q verringert sich natürlich die Zahl der notwendigen Schritte.

Die a-posteriori Abschätzung zeigt die aktuelle Verbesserung der Näherung gegenüber dem letzten Schritt und ist daher für praktische Zwecke nützlich.

2.5 Satz von Baire

Die Aussagen dieses Abschnitts werden wir besonders bei der Untersuchung linearer Operatoren in normierten Räumen heranziehen.

In vollständigen metrischen Räumen gilt, wie bereits im Raum $\mathbf{R}^m$, der folgende Schachtelsatz.

Satz 2.15. *Im vollständigen metrischen Raum X sei $B_n := B[u_n; r_n]$ eine Folge abgeschlossener Kugeln mit der Monotonieeigenschaft*

$$B_{n+1} \subset B_n, \;\; n = 1, 2, ...$$

und

$$\lim_{n\to\infty} r_n = 0.$$

Dann existiert genau ein Element $u \in X$ mit

$$u \in \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Beweis: Für $m \geq n$ gilt wegen $u_m \in B_m \subset B_n$

$$d(u_m, u_n) \leq r_n \to 0, \quad n \to \infty. \tag{2.9}$$

Daher ist (u_n) Cauchy-Folge. Aufgrund der Vollständigkeit von X haben wir die Konvergenzaussage

$$u_n \to u \in X, \quad n \to \infty.$$

Grenzübergang $m \to \infty$ in (2.9) liefert dann $d(u, u_n) \leq r_n$, d.h. $u \in B_n$ für alle $n \in \mathbf{N}$.

Zum Nachweis der Eindeutigkeit seien u und v zwei Elemente aus dem Durchschnitt aller Kugeln B_n. Dann folgt

$$d(u, v) \leq d(u, u_n) + d(u_n, v) \leq 2r_n \to 0, \quad n \to \infty,$$

also $u = v$. □

Theorem 2.16. (Baire)
Im vollständigen metrischen Raum X sei (U_n) eine solche Folge abgeschlossener Teilmengen von X, daß $\cup_{n=1}^{\infty} U_n$ eine offene Kugel enthält. Dann enthält auch eine Teilmenge U_n eine offene Kugel.

Beweis: Sei V die nach Voraussetzung existierende offene Kugel in $\cup_{n=1}^{\infty} U_n$. Wir treffen die Annahme, daß keine der Mengen U_n eine offene Kugel enthält. Nun konstruieren wir per Induktion eine Folge (u_n) in X sowie eine Folge (r_n) in $\mathbf{R}$ mit den folgenden Eigenschaften:

a) $B_n = B[u_n; r_n] \subset V, \quad n = 0, 1, 2, ...$

b) $0 < r_n \leq \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, ...$

c) $B_n \subset X \setminus U_n, \quad B_n \subset B_{n-1}, \quad n = 1, 2, ...$

Sei dazu $B_0 = B[u_0; r_0] \subset V$ beliebig gewählt. Für ein fixiertes $n \geq 0$ seien die Folgen bis u_n und r_n bestimmt. Dann ist die Menge

$$(X \setminus U_{n+1}) \cap B(u_n; r_n)$$

offen und nach Annahme nicht die leere Menge, denn sonst wäre $B(u_n; r_n) \subset U_{n+1}$. Daher findet man eine Kugel mit Mittelpunkt u_{n+1} und Radius $0 < r_{n+1} \leq 1/(n+1)$ derart, daß

$$B_{n+1} = B[u_{n+1}; r_{n+1}] \subset (X \setminus U_{n+1}) \cap B(u_n; r_n).$$

Die so konstruierte Folge (B_n) genügt den Voraussetzungen des Satzes 2.15. Somit existiert ein Element $u \in \cap_{n=1}^{\infty} B_n$. Für dieses Element gilt

$$u \in \cap_{n=1}^{\infty} B_n \subset \cap_{n=1}^{\infty} (X \setminus U_n) = X \setminus \cup_{n=1}^{\infty} U_n,$$

d.h.

$$u \notin \cup_{n=1}^{\infty} U_n.$$

Andererseits ist aber auch

$$u \in \cap_{n=1}^{\infty} B_n \subset V \subset \cup_{n=1}^{\infty} U_n.$$

Die Behauptung folgt aus dem sich ergebenden Widerspruch. □

Definition 2.17. *Die Menge aller* stetigen reell- oder komplexwertigen Funktionen *auf einem metrischen Raum X ist*

$$C(X) := \{f : X \to \mathbf{R} \text{ bzw. } \mathbf{C} : f \text{ stetig}\}.$$

Theorem 2.18. (Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit)
Sei X vollständiger metrischer Raum. V sei eine punktweise beschränkte Teilmenge von $C(X)$, d.h. zu jedem Element $u \in X$ existiert eine Zahl C_u mit

$$|F(u)| \leq C_u \quad \forall F \in V.$$

Dann gibt es eine offene Kugel B in X und eine Konstante C, so daß

$$|F(u)| \leq C \quad \forall u \in B, \ \forall F \in V.$$

Beweis: Wir setzen für alle $n \in \mathbf{N}$

$$U_n := \{u \in X : \ |F(u)| \leq n, \ F \in V\}.$$

Sei u Berührungspunkt von U_n. Dann existiert eine Folge $(u_m)_{m \in \mathbf{N}}$ aus U_n mit $u_m \to u, m \to \infty$. Aus $|F(u_m)| \leq n$ für alle $F \in V$ und alle $m \in \mathbf{N}$ folgt dann $|F(u)| \leq n$ für alle $F \in V$. Die Kugeln U_n sind daher abgeschlossen.

Zu $u \in X$ wählen wir einen Index $n_u \geq C_u$. Nach Voraussetzung gilt dann $u \in U_{n_u}$. Daraus folgern wir

$$X = \cup_{n=1}^{\infty} U_n.$$

X enthält eine offene Kugel. Dann gibt es nach dem Satz von Baire einen Index $n \in \mathbf{N}$ und eine offene Kugel B mit $B \subset U_n$. Daraus folgt die Behauptung $|F(u)| \leq C := n$ für alle $u \in B$ und alle $F \in V$. □

Kapitel 3

Kompaktheit

Im vorliegenden Kapitel stellen wir zunächst einige grundlegende Begriffe zum Thema *Kompaktheit* und ihre Beziehungen untereinander auf. Dann behandeln wir Mengen $C(X)$ stetiger Funktionen auf kompakten Mengen X. Von besonderer Bedeutung ist der Satz von *Arzela/ Ascoli* zur Charakterisierung relativ kompakter Teilmengen von $C(X)$.

3.1 Kompakte Mengen

Definition 3.1. (i) *Eine Teilmenge U eines metrischen Raumes X heißt* kompakt, *falls jede offene Überdeckung von U eine endliche Überdeckung enthält, d.h. zu jeder Familie $C_j, j \in J$ offener Mengen mit*

$$U \subset \bigcup_{j \in J} C_j$$

findet man eine endliche Teilfamilie $C_{j(k)}, j(k) \in J, k = 1, ..., n$ mit

$$U \subset \bigcup_{k=1}^{n} C_{j(k)}.$$

(ii) *Eine Teilmenge U heißt* folgenkompakt, *falls jede Folge von Punkten aus U eine Teilfolge enthält, die gegen einen Punkt aus U konvergiert.*

Definition 3.2. *Eine Teilmenge U eines metrischen Raumes X heißt* total beschränkt (bzw. besitzt ein endliches ϵ-Netz), *falls zu jedem $\epsilon > 0$ eine endliche Zahl von Punkten $u_1, ..., u_n \in U$ existiert mit*

$$U \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(u_j; \epsilon),$$

d.h. jeder Punkt $u \in U$ hat höchstens den Abstand ϵ zu einem der Punkte $u_1, ..., u_n$.

Satz 3.3. *Jede folgenkompakte Menge U ist total beschränkt.*

Beweis: Wir nehmen an, die Behauptung sei falsch. Dann existieren eine Zahl $\epsilon > 0$ und eine Folge (u_n) in U mit $d(u_n, u_m) \geq \epsilon$ für alle $n \neq m$. Folglich enthält (u_n) keine konvergente Teilfolge. Das widerspricht der Folgenkompaktheit von U. □

Definition 3.4. *Ein metrischer Raum heißt* separabel, *falls er eine abzählbare dichte Teilmenge enthält.*

Satz 3.5. *Jede total beschränkte Menge ist separabel.*

Beweis: Wir setzen $\epsilon = 1/m, m = 1, 2, ...$ und wählen zugehörige, nach Definition der Totalbeschränktheit existierende endliche Mengen von Elementen, die die betrachtete Menge überdecken. So erhalten wir eine in U dichte Folge. □

Satz 3.6. *Eine Teilmenge eines metrischen Raumes ist kompakt genau dann, wenn sie folgenkompakt ist.*

Beweis: (i) Annahme: Sei U kompakte Teilmenge, jedoch nicht folgenkompakt. Dann findet man eine Folge (u_n) in U, die keine konvergente Teilfolge mit Grenzwert in U enthält. Damit gibt es zu jedem $u \in U$ eine offene Kugel $B(u; r)$ mit Radius $r(u)$, die höchstens endlich viele Glieder der Folge (u_n) enthält. Die Menge dieser Kugeln ist offenbar eine offene Überdeckung von U. Wegen der Kompaktheit von U kann in U nur eine endliche Zahl von Folgengliedern aus (u_n) liegen. Das ist ein Widerspruch zur Annahme über die Folge.

(ii) Sei U folgenkompakt. Ferner sei $W_j, j \in J$ eine offene Überdeckung von U. Wir zeigen zunächst, daß es dann ein $\delta > 0$ derart gibt, daß für jedes $u \in U$ die Kugel $B(u; \delta)$ in wenigstens einer der Mengen W_j enthalten ist:
Anderenfalls gäbe es eine Folge (u_n) in U, daß die Kugel $B(u_n; 1/n)$ in keiner der Mengen W_j enthalten ist. Wegen der Folgenkompaktheit von U enthält aber die Folge (u_n) eine konvergente Teilfolge $(u_{n(k)})$ mit dem Grenzwert $u \in U$. Dieses Grenzelement liegt in einer der Mengen W_j. Aufgrund der Offenheit von W_j folgt über die Dreiecksungleichung, daß für hinreichend großes k gilt $B(u_{n(k)}; 1/n(k)) \subset W_j$. Das ist ein Widerspruch.

Die folgenkompakte Menge U ist nun nach Satz 3.3 total beschränkt. Dann existiert eine endliche Zahl von Punkten $u_1, ...u_n$ in U, so daß die Kugeln $B(u_k; \delta), k = 1, ..., n$ eine Überdeckung von U bilden. Zu jeder dieser Kugeln findet man nun eine Menge $W_{j(k)}, j(k) \in J$ mit $B(u_k; \delta) \subset W_{j(k)}$. Damit überdeckt bereits die endliche Familie $W_{j(k)}, k = 1, ..., n$ die Menge U. Damit ist U kompakt. □

Folgerung 3.7. *Kompakte Mengen in metrischen Räumen sind beschränkt, abgeschlossen und vollständig.*

Beweis: Wir führen den Beweis nur für die Vollständigkeit. Sei (u_n) Cauchy–Folge. Dann gibt es eine konvergente Teilfolge $(u_{n(k)})$ mit $u_{n(k)} \to u \in U, k \to \infty$. Wegen

$$d(u_k, u) \leq d(u_k, u_{n(k)}) + d(u_{n(k)}, u) \to 0, \quad k \to \infty$$

folgt $u_k \to u, k \to \infty$.
(Beweis der beiden anderen Folgerungen als Übungsaufgabe !) □

Definition 3.8. *Eine Teilmenge eines metrischen Raumes heißt* relativ kompakt, *wenn ihr Abschluß kompakt ist.*

Satz 3.9. *Eine Menge U ist relativ kompakt genau dann, wenn jede Folge von Elementen in U eine konvergente Teilfolge enthält.*

Beweis: (i) $\Rightarrow$ Nach Definition ist $\overline{U}$ kompakt, also nach Satz 3.6 auch folgenkompakt mit Grenzwert in $\overline{U}$. Daraus folgt die Aussage.

(ii) $\Leftarrow$ Sei (u_n) eine Folge in $\overline{U}$. Dann existiert zu jedem u_n ein Element $v_n \in U$ mit $d(u_n, v_n) < 1/n$. Die Folge (v_n) enthält eine konvergente Teilfolge mit $v_{n(k)} \to v \in \overline{U}, k \to \infty$. Wegen

$$d(u_{n(k)}, v) \leq d(u_{n(k)}, v_{n(k)}) + d(v_{n(k)}, v) \to 0, \quad k \to \infty$$

folgt mit $u_{n(k)} \to v, k \to \infty$ die Behauptung. □

3.2 Stetige Funktionen auf kompakten Mengen

Wir erinnern zunächst an den Begriff der gleichmäßigen Stetigkeit einer Funktion (vgl Definition 1.25 (iii)). Ein hinreichendes Kriterium gibt der

Satz 3.10. *Eine stetige Funktion $f : X \to Y$ eines kompakten metrischen Raumes X in einen metrischen Raum Y ist gleichmäßig stetig.*

Beweis: Wir nehmen an, daß f nicht gleichmäßig stetig ist. Dann finden wir eine Zahl $\epsilon > 0$ und Folgen (u_n), (v_n) in X mit der Eigenschaft

$$d(u_n, v_n) \leq \frac{1}{n}, \quad d(f(u_n), f(v_n)) \geq \epsilon.$$

Wegen der Kompaktheit von X gibt es konvergente Teilfolgen mit

$$u_{n(k)} \to u, \quad v_{n(k)} \to v, \quad k \to \infty.$$

Aus $d(u_{n(k)}, v_{n(k)}) \leq 1/n(k)$ folgern wir $u = v$. Aufgrund der Stetigkeit von f an der Stelle u erhalten wir mit

$$\begin{aligned} d(f(u_{n(k)}), f(v_{n(k)})) &\leq d(f(u_{n(k)}), f(u)) + d(f(v), f(v_{n(k)})) \\ &\to 0, \quad k \to \infty \end{aligned}$$

einen Widerspruch. □

Satz 3.11. *Sei X kompakter metrischer Raum. Dann ist die Menge $C(X)$ der reell- oder komplexwertigen Funktionen auf X mit der Metrik*

$$d(f, g) := \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)| \tag{3.1}$$

vollständiger metrischer Raum.

Beweis: (i) Wir zeigen, daß die Metrik d wohldefiniert ist: Sei $u \in C(X)$. Dann finden wir eine Folge (x_n) in X mit

$$|u(x_n)| \to \sup_{y \in X} |u(y)|, \quad n \to \infty.$$

Wegen der Kompaktheit von X existiert eine konvergente Teilfolge mit $x_{n(k)} \to x \in X, k \to \infty$. Die Stetigkeit von u zieht die Aussage

$$\sup_{y \in X} |u(y)| = \lim_{k \to \infty} |u(x_{n(k)})| = |u(x)|$$

nach sich.

(ii) Die Gültigkeit der Metrikaxiome (M1)–(M4) zeigt man wie im Beispiel 1.5.

(iii) Wir zeigen noch die Vollständigkeit von $C(X)$. Sei dazu (u_n) Cauchy-Folge in $C(X)$. Zu beliebigem $\epsilon > 0$ existiert dann ein Index $N(\epsilon) \in \mathbf{N}$ so, daß

$$d(u_n, u_m) = \sup_{x \in X} |u_n(x) - u_m(x)| < \epsilon, \quad \forall m, n \geq N,$$

d.h.

$$|u_n(x) - u_m(x)| < \epsilon, \quad \forall x \in X, \ \forall m, n \geq N. \tag{3.2}$$

Für jeden Punkt $x \in X$ ist somit $(u_n(x))$ Cauchy–Folge in $\mathbf{R}$ bzw. $\mathbf{C}$. Wegen der Vollständigkeit von $\mathbf{R}$ bzw. $\mathbf{C}$ ist die Folge dann auch konvergent in $\mathbf{R}$ bzw. $\mathbf{C}$.
Wir konstruieren nun eine Funktion $u : X \to \mathbf{R}$ bzw. $\mathbf{C}$ durch

$$u(x) := \lim_{n\to\infty} u_n(x), \quad \forall x \in X.$$

Nach Grenzübergang $m \to \infty$ in (3.2) folgt

$$|u_n(x) - u(x)| \leq \epsilon, \quad \forall x \in X,\ \forall n \geq N,$$

d.h.

$$\sup_{x\in X} |u_n(x) - u(x)| \leq \epsilon, \quad \forall n \geq N. \tag{3.3}$$

Die Stetigkeit der Grenzfunktion u ergibt sich wie folgt: Nach Satz 3.10 ist u_N gleichmäßig stetig. Also gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$ derart, daß

$$|u_N(x) - u_N(y)| < \epsilon, \quad \forall x, y \in X :\ d(x, y) < \delta.$$

Daraus folgern wir über die Dreiecksungleichung

$$|u(y) - u(x)| \leq |u(y) - u_N(y)| + |u_N(y) - u_N(x)| + |u_N(x) - u(x)| < 3\epsilon$$

für alle $x, y \in X$ mit $d(y, x) < \delta$.
Die Ungleichung (3.3) impliziert schließlich die gewünschte Konvergenzaussage $u_n \to u, n \to \infty$.
□

Beispiel 3.12. Ω sei ein Gebiet im $\mathbf{R}^n$, d.h. eine offene und zusammenhängende Punktmenge. $\overline{\Omega}$ ist die abgeschlossene Hülle von Ω. Ist darüber hinaus Ω beschränkt, so ist $\overline{\Omega}$ kompakt. Dann ist die Menge

$$C(\overline{\Omega}) := \{f : \overline{\Omega} \to \mathbf{R} \text{ oder } \mathbf{C} \mid f \text{ stetig}\}$$

nach Satz 3.11 in Verbindung mit der Supremum-Metrik

$$d(f, g) := \sup_{x\in\overline{\Omega}} |f(x) - g(x)|, \ \ \forall f, g \in C(\overline{\Omega}) \tag{3.4}$$

vollständiger metrischer Raum. □

Abschließend charakterisieren wir relativ kompakte Teilmengen von $C(X)$.

Theorem 3.13. (Arzela/ Ascoli)
X sei kompakter metrischer Raum. Eine Teilmenge $U \subset C(X)$ ist relativ kompakt genau dann, wenn U gleichmäßig beschränkt, *d.h.*

$$\exists K > 0 :\ |u(x)| \leq K, \quad \forall x \in X,\ \forall u \in U, \tag{3.5}$$

und gleichgradig stetig *ist, d.h. für alle $\epsilon > 0$ findet man eine Zahl $\delta > 0$ mit*

$$|u(x) - u(y)| < \epsilon \quad \forall x, y \in X :\ d(x, y) < \delta,\ \forall u \in U. \tag{3.6}$$

Beweis: (i) $\Longrightarrow$ Sei U relativ kompakt. Per Definition und nach den Sätzen 3.6. und 3.3 ist $\overline{U}$ folgenkompakt und total beschränkt. Dann ist auch U total beschränkt, d.h. man findet zu beliebigem $\epsilon > 0$ endlich viele Funktionen $u_1, ..., u_n \in U$ mit

$$\min_{j=1,\ldots,n} d(u, u_j) < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall u \in U.$$

Nach Satz 3.10 ist jede der Funktion $u_1, ..., u_n$ gleichmäßig stetig auf der kompakten Menge X, d.h. man findet (zu dem oben betrachteten beliebigen ϵ) ein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft

$$|u_j(x) - u_j(y)| < \frac{\epsilon}{3} \quad \forall x, y \in X: \ d(x,y) < \delta, \ \forall j = 1, ..., n.$$

Für jedes $u \in U$ sei der Index j_0 so gewählt, daß

$$d(u, u_{j_0}) = \min_{j=1,...,n} d(u, u_j).$$

Dann folgt über die Dreiecksungleichung und die beiden abgeleiteten Ungleichungen für alle $x, y \in X$ mit $d(x,y) < \delta$

$$|u(x) - u(y)| \leq |u(x) - u_{j_0}(x)| + |u_{j_0}(x) - u_{j_0}(y)| + |u_{j_0}(y) - u(y)| < \epsilon.$$

Also ist U gleichgradig stetig.

Die Beschränktheit von U folgt, da kompakte Mengen beschränkt sind.

(ii) $\Longleftarrow$ Übungsaufgabe ! $\square$

Kapitel 4

Normierte Räume

Im vorliegenden Kapitel betrachten wir *normierte Räume* und *Banach-Räume*. Sie sind spezielle *lineare Räume (Vektorräume)* über $\mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$, in denen Addition und Skalarmultiplikation für $u, v \in X$ und reelle (oder komplexe) Zahlen γ punktweise erklärt sind durch

$$(u+v)(x) := u(x) + v(x), \quad (\gamma u)(x) := \gamma u(x).$$

Grundkenntnisse über lineare Räume (z.B. aus Anfängervorlesungen) werden vorausgesetzt. Von Bedeutung für spätere Untersuchungen sind insbesondere die Aussagen aus dem Abschnitt über äquivalente Normen sowie der Begriff *Bestapproximation*.

4.1 Normbegriff

Definition 4.1. *Sei X linearer Raum über $\mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$. Dann heißt eine Abbildung*

$$\|\cdot\| : \quad X \to \mathbf{R}$$

mit den Eigenschaften

$$\begin{array}{llcll}
\text{(N1)} & \|u\| & \geq & 0 & \text{(Positivität)} \\
\text{(N2)} & \|u\| & = & 0 \iff u = 0 & \text{(Definitheit)} \\
\text{(N3)} & \|\gamma u\| & = & |\gamma|\|u\| & \text{(Homogenität)} \\
\text{(N4)} & \|u+v\| & \leq & \|u\| + \|v\| & \text{(Dreiecksungleichung)}
\end{array}$$

für alle $u, v \in X$ und alle $\gamma \in \mathbf{R}$ bzw. $\mathbf{C}$ Norm auf X. *Ein linearer Raum X mit Norm heißt* normierter Raum.

Wichtige Fälle linearer Räume endlicher Dimension sind $X = \mathbf{R}^m$ und $X = \mathbf{C}^m$. Die im Rahmen dieser Vorlesung zu betrachtenden linearen Räume (z.B. Abschnitte 5 und 6) haben jedoch in der Regel keine endliche Dimension.

Satz 4.2. *Auf einem normierten Raum X wird durch*

$$d(u,v) := \|u - v\|, \quad u, v \in X \tag{4.1}$$

eine Metrik erklärt.

Beweis: Die Axiome (M1)-(M4) folgen aus den Axiomen (N1)-(N4). Bei (M3) setze man speziell $\gamma = -1$. □

Nach Satz 4.2 sind normierte Räume spezielle metrische Räume. Wir charakterisieren jetzt einige in normierten Räumen zusätzlich geltende Aussagen.

Satz 4.3. *Zu einer Metrik d auf einem linearen Raum X gibt es eine Norm $\|\cdot\|$ auf X mit $d(u,v) = \|u - v\|$ genau dann, wenn für beliebige $u, v, w \in X$ und alle Zahlen $\gamma \in \mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$ die folgenden Eigenschaften gelten:*

$$d(u + w, v + w) = d(u, v) \qquad \text{(Translationsinvarianz)}$$

$$d(\gamma u, \gamma v) = |\gamma| d(u, v) \qquad \text{(Homogenität)}.$$

Beweis: (i) "$\Rightarrow$": folgt durch Nachrechnen.
(ii) "$\Leftarrow$": Wir definieren

$$\|u\| := d(u, 0) = d(0, u).$$

Offenbar gelten die Normaxiome (N1)-(N3). (N4) ergibt sich aus

$$\begin{aligned} \|u + v\| &= d(u + v, 0) = d(u + v, -v + v) = d(u, -v) \\ &\le d(u, 0) + d(0, -v) = d(u, 0) + d(0, v) = \|u\| + \|v\|. \qquad \square \end{aligned}$$

Satz 4.4. *In einem normierten Raum X gilt für beliebige $u, v \in X$ die Ungleichung* (2. Dreiecksungleichung)

$$|\|u\| - \|v\|| \le \|u - v\|. \tag{4.2}$$

Beweis. Nullergänzung und Dreiecksungleichung (N4) liefern

$$\|u\| = \|u - v + v\| \le \|u - v\| + \|v\|,$$

damit

$$\|u\| - \|v\| \le \|u - v\|$$

und durch Vertauschung von u und v

$$\|v\| - \|u\| \le \|v - u\|. \qquad \square$$

Satz 4.5. *In einem normierten Raum sind Addition, Skalarmultiplikation und Norm stetig.*

Beweis: Wir nehmen an, daß gilt $u_n \to u, v_n \to v$ und $\beta_n \to \beta$ für $n \to \infty$. Dann gilt

$$\|(u_n + v_n) - (u + v)\| \le \|u_n - u\| + \|v_n - v\| \to 0, \quad n \to \infty,$$

sowie

$$\|\beta_n u_n - \beta u\| \le |\beta_n| \|u_n - u\| + |\beta_n - \beta| \|u\| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Die zweite Dreiecksungleichung (vgl. Satz 4.4) ergibt

$$|\|u_n\| - \|u\|| \le \|u_n - u\| \to 0, n \to \infty.$$

Aus diesen Ungleichungen folgt die Behauptung. □

4.2 Äquivalente Normen

Definition 4.6. *Zwei Normen auf einem linearen Raum heißen* äquivalent, *falls jede bezüglich der ersten Norm konvergente Folge auch bezüglich der zweiten Norm konvergent ist und umgekehrt.*

Satz 4.7. *Zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ auf einem linearen Raum X sind genau dann äquivalent, wenn positive Zahlen c und C existieren, so daß*

$$c\|u\|_1 \leq \|u\|_2 \leq C\|u\|_1 \quad \forall u \in X. \tag{4.3}$$

Die Grenzelemente bezüglich beider Normen sind gleich.

Beweis. (i) $\Leftarrow$ Wir nehmen zunächst an, daß die im Satz angegebene Ungleichung gilt. Dann folgt aus $\|u - u_n\|_1 \to 0, n \to \infty$ die Aussage $\|u - u_n\|_2 \to 0, n \to \infty$ und umgekehrt.
(ii) $\Rightarrow$ Sei nun die Äquivalenz beider Normen vorausgesetzt. Wir nehmen an, daß keine Zahl $C > 0$ existiert mit $\|w\|_2 \leq C$ für alle $w \in X$, $\|w\|_1 = 1$. Dann kann eine Folge (w_n) gewählt werden mit $\|w_n\|_1 = 1$, $\|w_n\|_2 > n^2$. Mit $v_n = w_n/n$ folgt $\|v_n\|_2 > n$, $\|v_n\|_1 = 1/n$. Damit konvergiert die Folge (v_n) bezüglich der Norm $\|\cdot\|_1$ und divergiert bezüglich $\|\cdot\|_2$ im Widerspruch zu der angenommenen Normäquivalenz.
Somit gibt es eine Zahl $C > 0$ derart, daß $\|w\|_2 \leq C \quad \forall w \in X$, $\|w\|_1 = 1$. Aus der Forderung der Homogenität (N3) ergibt sich folglich

$$\|u\|_2 = \left\| \, \|u\|_1 \frac{u}{\|u\|_1} \right\|_2 \leq C\|u\|_1 \quad \forall u \in X.$$

Die zweite Ungleichung folgt durch Vertauschung der Rolle beider Normen. □

Satz 4.8. *Auf einem endlich-dimensionalen Raum sind alle Normen äquivalent.*

Beweis. (i) Sei X ein m–dimensionaler Raum mit der Basis $u_1, ..., u_m$. Jedes Element von X besitzt dann die eindeutige Darstellung

$$u = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k u_k.$$

Dann erklären wir durch den Ausdruck

$$\|u\|_\infty := \max_{k=1,\dots,m} |\alpha_k| \tag{4.4}$$

die Maximum–Norm auf X.
Sei nun $\|\cdot\|$ eine beliebige andere Norm auf X. Die Idee des Beweises besteht darin, die Äquivalenz dieser Norm zur Maximum–Norm zu zeigen.
(ii) Wir zeigen zunächst die Normabschätzung nach oben:
Die Dreiecksungleichung liefert dann für beliebige Elemente u aus X

$$\|u\| \leq \sum_{k=1}^{m} |\alpha_k| \; \|u_k\| \leq C\|u\|_\infty, \quad C := \sum_{k=1}^{m} \|u_k\|.$$

(iii) Für die Normabschätzung nach unten sei nun angenommen, daß keine Zahl $c > 0$ existiert mit $c\|u\|_\infty \leq \|u\|$ für alle $u \in X$. Dann findet man eine Folge (v_n), $\|v_n\| = 1$ mit $\|v_n\|_\infty > n$. Für die Folge (w_n), $w_n := v_n/\|v_n\|_\infty$ liefert die Basisdarstellung in X

$$w_n = \sum_{k=1}^{m} \alpha_{kn} u_k.$$

Jede der Folgen $(\alpha_{kn})_{n\in\mathbf{N}}, k = 1, ..., m$ ist wegen $\|w_n\|_\infty = 1$ beschränkt in **R** oder **C.** Nach dem Satz von Bolzano–Weierstraß können wir somit sukzessiv für jede Zahl $k = 1, ..., m$ konvergente Teilfolgen $\alpha_{k,n(j)} \to \alpha_k, j \to \infty$ auswählen. Für das Element

$$w := \sum_{k=1}^{m} \alpha_k u_k$$

ergibt sich daraus die Konvergenzaussage $\|w_{n(j)} - w\|_\infty \to 0,\ \ j \to \infty$ und somit $\|w_{n(j)} - w\| \le C\|w_{n(j)} - w\|_\infty \to 0,\ \ j \to \infty$. Andererseits hatten wir aber $\|w_n\| = 1/\|v_n\|_\infty \to 0, n \to \infty$. Folglich ist $w = 0$ und auch $\|w_{n(j)}\|_\infty \to 0,\ \ j \to \infty$. Das steht aber im Widerspruch zur Konstruktion mit $\|w_n\|_\infty = 1$ für beliebige Zahlen n.
Die Annahme ist somit falsch. Daraus ergibt sich die zu beweisende Normäquivalenz. □

Satz 4.9. *Beschränkte Teilmengen eines endlich-dimensionalen normierten Raumes sind relativ kompakt.*

Beweis: Wir verwenden die im Beweis von Satz 4.8 eingeführten Bezeichnungen. Sei U beschränkte Teilmenge aus einem $m-$dimensionalen Unterraum X_m des normierten Raumes X. Nach den Sätzen 4.7 und 4.8 ist dann U auch in der Maximum-Norm auf X_m beschränkt. Für eine Folge (w_n) in U sind dann die Folgen (α_{kn}) aus **R** bzw. **C** für $k = 1, ..., m$ beschränkt. Schließlich nutzt man wie im Beweis von Satz 4.8 den Satz von Bolzano-Weierstraß, um eine konvergente Teilfolge $(w_{n(j)})$ zu ermitteln. □

Für Sätze über lineare Operatoren benötigen wir später eine Umkehrung des Satzes 4.9. Vorbereitend zeigen wir dazu

Lemma 4.10. *(Riesz) Seien X normierter Raum, $U \subset X, U \neq X$ nichtleerer und abgeschlossener Unterraum und $\beta \in (0, 1)$. Dann findet man ein Element $w \in X$ mit $\|w\| = 1$, so daß*

$$\|v - w\| \ge \beta, \quad \forall v \in U.$$

Beweis: Wegen $U \neq X$ findet man ein Element $u \in X$ mit $u \notin U$. Die Abgeschlossenheit von U impliziert

$$\gamma := \inf_{v\in U} \|u - v\| > 0.$$

Man wählt dann ein Element $g \in U$ so , daß

$$\gamma \le \|u - g\| \le \frac{\gamma}{\beta}.$$

Mit der Festlegung

$$w := \frac{u - g}{\|u - g\|}$$

gilt $\|w\| = 1$ sowie für alle $v \in U$

$$\|w - v\| = \frac{1}{\|u - g\|}\|u - (g + \|u - g\|v)\,\| \ge \frac{\gamma}{\|u - g\|} \ge \beta,$$

da nach Voraussetzung an U gilt $g + \|u - g\|v \in U$. Daraus ergibt sich die Behauptung. □

Die gesuchte Umkehrung von Satz 4.9 gibt der

Satz 4.11. *Ein normierter Raum X ist genau dann endlich-dimensional, wenn die Einheitskugel $\{v \in X : \|v\| \le 1\}$ relativ kompakt ist.*

Beweis: (i) $\Longrightarrow$ Folgerung aus Satz 4.9
(ii) $\Longleftarrow$ Wir nehmen an, daß X nicht endlich-dimensional ist. Sei $u_1 \in X$ ein beliebiges Element mit $\|u_1\| = 1$. Dann ist $U_1 := \text{span}\{u_1\}$ endlich-dimensional und daher abgeschlossener Unterraum von X. Nach Lemma 4.10 gibt es ein Element $u_2 \in X$ mit $\|u_2\| = 1$ und $\|u_2 - u_1\| \geq 1/2$. Dann sei $U_2 := \text{span}\{u_1, u_2\}$. Erneute Anwendung des Lemmas von Riesz liefert die Existenz von $u_3 \in X$ mit $\|u_3\| = 1$ und $\|u_3 - u_2\| \geq 1/2$, $\|u_3 - u_1\| \geq 1/2$. Wiederholte Anwendung dieses Vorgehens erzeugt eine Folge (u_n) mit $\|u_n\| = 1$ und $\|u_n - u_m\| \geq 1/2, n \neq m$. Dann enthält aber die beschränkte Folge (u_n) keine konvergente Teilfolge. Das steht aber im Widerspruch zur vorausgesetzten relativen Kompaktheit der Einheitskugel in X. □

4.3 Banach-Räume

Definition 4.12. *Vollständige normierte Räume heißen* Banach-Räume.

Derartige Räume spielen bei der Untersuchung von Randwertaufgaben partieller Differentialgleichungen eine tragende Rolle. Daher werden wir in den Abschnitten 5, 6 und 7 geeignete Funktionenräume als Banach-Räume kennzeichnen.

Satz 4.13. *Endlich-dimensionale normierte Räume sind Banach-Räume.*

Beweis: Wir benutzen die im Beweis von Satz 4.8 eingeführten Bezeichnungen, insbesondere die Maximum–Norm im normierten Raum X_m. Für eine Cauchy-Folge (w_n) aus dem endlich dimensionalen Raum X_m sind nach den Sätzen 4.7 und 4.8 die Folgen $(\alpha_{kn})_{n\in\mathbf{N}}$ in $\mathbf{R}$ bzw. $\mathbf{C}$ für $k = 1, ..., m$ ebenfalls Cauchy-Folgen. Wegen der Vollständigkeit von $\mathbf{R}$ bzw. $\mathbf{C}$ ergeben sich daraus die Konvergenzaussagen

$$\alpha_{kn} \to \alpha_k, \quad n \to \infty$$

für alle $k = 1, ..., m$ und somit

$$w_n \to w := \sum_{k=1}^{m} \alpha_k u_k \in X_m, \quad n \to \infty. \qquad \square$$

Folgerung 4.14. *Endlich-dimensionale Unterräume normierter Räume sind abgeschlossen.*

Beweis. Dies folgt aus Satz 4.13, da jede vollständige Teilmenge auch abgeschlossen ist (vgl. Satz 2.4 (i)). □

4.4 Vervollständigung normierter Räume

Definition 4.15. *X und X' seien normierte Räume. Eine lineare isometrische Abbildung $f : X \to X'$ heißt* Normisomorphie, *d.h. für alle $u \in X$ gilt $\|f(u)\| = \|u\|$. Normierte Räume X und X' heißen* normisomorph, *wenn eine surjektive Normisomorphie $f : X \to X'$ existiert.*

Für normisomorphe Räume gibt es keine Unterschiede bezüglich ihrer linearen und metrischen Struktur.

Satz 4.16. *Jeder normierte Raum X ist normisomorph zu einem dichten Unterraum eines bis auf Normisomorphie eindeutig bestimmten Banach-Raumes $\tilde{X}$. $\tilde{X}$ heißt dann* Vervollständigung *von X.*

Beweis: Wir beschränken uns hier auf eine Beweisskizze nach dem Vorbild des Beweises von Theorem 2.7. Wir benutzen dazu die dort eingeführten Bezeichnungen und bewiesenen Aussagen.

So gibt es nach Theorem 2.7 zum normierten (also metrischen) Raum X eine Vervollständigung $\tilde{X}$. Es bleibt zu zeigen, daß $\tilde{X}$ Banach-Raum ist.

(i) Zunächst zeigen wir, daß $\tilde{X}$ linearer Raum ist. Dazu erklären wir Addition und Skalarmultiplikation auf $\tilde{X}$. Zu $\tilde{u}, \tilde{v} \in \tilde{X}$ seien (u_n) und (v_n) die Repräsentanten. Mit (u_n) und (v_n) sind wegen

$$\|(u_n + v_n) - (u_m + v_m)\| \leq \|(u_n - u_m)\| + \|v_n - v_m\| \to 0, \ \ n, m \to \infty$$

sowie

$$\|\beta u_n - \beta u_m\| \leq |\beta| \|u_n - u_m\| \to 0, \ \ n, m \to \infty$$

auch $(u_n + v_n)$ und (βu_n) Cauchy–Folgen. Diese erzeugen Äquivalenzklassen $\tilde{u} + \tilde{v}$ bzw. $\beta\tilde{u}$ mit den Repräsentanten $(u_n + v_n)$ bzw. (βu_n). Wie im Beweis von Theorem 2.7 kann man zeigen, daß diese Festlegungen unabhängig von der Wahl der Repräsentanten für $\tilde{u}$ und $\tilde{v}$ ist. Ferner vererben sich die Axiome des linearen Raumes von X auf $\tilde{X}$.

(ii) Eine Norm $\|\cdot\|\tilde{}$ auf $\tilde{X}$ wird definiert durch

$$\|\tilde{u}\|\tilde{} := \tilde{d}(\tilde{u}, 0) = \lim_{n\to\infty} d(u_n, 0) = \lim_{n\to\infty} \|u_n\|. \tag{4.5}$$

Über den Satz 4.3 zeigt man, daß die Normaxiome (N1)–(N4) erfüllt sind.

(iii) Wegen der Vollständigkeit des metrischen Raumes $(\tilde{X}, \tilde{d})$ ist dann $\tilde{X}$ Banach-Raum.

(iv) Nachweis der Normisomorphie: Wir hatten im Beweis von Theorem 2.7 durch $f : u \mapsto \tilde{u}$ mit dem Repräsentanten $(u, u, u, ...)$ eine Abbildung $f : X \to \tilde{X}$ definiert. Wir zeigen die Linearität von f. $f(u+v)$ hat den Repräsentanten $(u+v, u+v, u+v, ...)$, der nach Definition der Addition auf $\tilde{X}$ auch Repräsentant von $f(u) + f(v)$ ist. Daraus folgt

$$f(u + v) = f(u) + f(v).$$

Mit analoger Argumentation zeigen wir

$$f(\beta u) = \beta f(u).$$

Nach Theorem 2.7 ist f eine Isometrie. Nach Definition 4.15 ist f auch Normisomorphie.

(v) Zum Nachweis der Eindeutigkeit zeigt man, daß die im Beweis des Theorems 2.7 erklärte Isometrie $h : Y \to Z$ linear ist. Dazu nutzt man die Linearität von $f : X \to Y$ und $g : X \to Z$. □

4.5 Approximation in Unterräumen endlicher Dimension

Definition 4.17. *Seien U Teilmenge eines normierten Raumes X und $u \in X$. Ein Element $v \in U$ heißt* beste Approximation an u bezüglich U *genau dann, wenn*

$$\|u - v\| = \inf_{w\in U} \|u - w\|, \tag{4.6}$$

d.h. für alle $w \in U$ gilt

$$\|u - v\| \leq \|u - w\|.$$

Von besonderem Interesse für Anwendungen ist der Fall endlich dimensionaler Unterräume U. Dann gilt der

Satz 4.18. *Sei U endlich dimensionaler Unterraum des normierten Raumes X. Dann existiert* *zu jedem $u \in X$ eine beste Approximation v an u bezüglich U.*

Beweis: Zu $u \in X$ wählen wir eine Minimalfolge (u_n) an u, d.h. für $u_n \in U$ gilt

$$\|u - u_n\| \to d := \inf_{w \in U} \|u - w\|, \quad n \to \infty.$$

Die Folge (u_n) ist wegen

$$\|u_n\| \leq \|u - u_n\| + \|u\|,$$

beschränkt. Nach Satz 4.14 ist der endlich-dimensionale Raum U abgeschlossen, d.h. nach Satz 4.9 enthält (u_n) eine konvergente Teilfolge $(u_{n(k)})_k$ mit Grenzwert $v \in U$. Dann gilt aber

$$\|u - v\| = \lim_{k \to \infty} \|u - u_{n(k)}\| = d.$$

□

Auf die Wahl geeigneter endlich dimensionaler Unterräume gehen wir später genauer im Fall von Hilbert–Räumen ein. Da die Bestapproximation in Unterräumen dort in Summenform angegeben werden kann, wollen wir schließlich den Reihenbegriff auf normierte Räume ausdehnen.

Definition 4.19. *Sei (u_n) Folge von Elementen des normierten Raumes X. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ heißt* konvergent, *falls die Folge (S_n) der Partialsummen*

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} u_k$$

konvergiert. Der Grenzwert $S := \lim_{n \to \infty} S_n$ heißt Summe der Reihe.

Satz 4.20. *Für die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ im Banach–Raum ist die Konvergenz der Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\| < \infty$$

eine hinreichende Bedingung. Ferner gilt

$$\left\| \sum_{k=1}^{\infty} u_k \right\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\|.$$

Beweis: Für $m > n$ folgt nach Voraussetzung der absoluten Konvergenz, d.h. der Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\|$, daß

$$\begin{aligned} \|S_m - S_n\| &= \|u_{n+1} + ... + u_m\| \\ &\leq \|u_{n+1}\| + ... + \|u_m\| \to 0, \quad n, m \to \infty. \end{aligned}$$

Damit ist (S_n) Cauchy–Folge im Banach–Raum X, also auch konvergent. Die gesuchte Majorantenabschätzung ergibt sich nach Grenzübergang $n \to \infty$ in

$$\|S_n\| = \left\| \sum_{k=1}^{n} u_k \right\| \leq \sum_{k=1}^{n} \|u_k\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\|$$

wegen der Stetigkeit der Norm. □

Kapitel 5

Räume stetig differenzierbarer Funktionen

In diesem Abschnitt werden Räume *stetig differenzierbarer* Funktionen über Punktmengen $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, die bei der klassischen Behandlung partieller Differentialgleichungen benötigt werden (vgl. Abschnitt 5.5), als Banach-Räume charakterisiert. Dabei beschränken wir uns auf reell- oder komplexwertige Funktionen. Man kann jedoch viele Begrife und Aussagen für Funktionenräume über $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ mit Werten in einem Banach-Raum Y erweitern, man vergleiche hierzu Alt [2], Kap. 1.

Zunächst charakterisieren wir die Menge der stetigen Funktionen $C(\overline{\Omega})$ in Abhängigkeit von verschiedenen Normen. Dann führen wir geeignete *Unterräume* von $C(\overline{\Omega})$ ein.

Abschließend motivieren wir, warum eine Lösungstheorie spezieller partieller Randwertprobleme (vom elliptischen Typ) in den hier betrachteten klassischen Funktionenräumen wenig praxisrelevant ist. Dieser Gedanke führt dann in natürlicher Weise über die Idee der *Vervollständigung* in den nächsten Kapiteln zu den *Lebesgue-* und *Sobolev-Räumen.*

5.1 Räume stetiger Funktionen

Wir führen zunächst einige Bezeichhnungen ein: Nachfolgend sei $x = (x_1, ..., x_n)$ ein beliebiger Punkt im $\mathbf{R}^n$. Weiter sei Ω ein beschränktes Gebiet im $\mathbf{R}^n$, d.h. eine offene und zusammenhängende Punktmenge. Dann ist $\overline{\Omega}$ die abgeschlossene Hülle von Ω. Mit $\partial\Omega := \overline{\Omega} \setminus \Omega$ bezeichnen wir den *Rand des Gebietes.*

Für unsere späteren Betrachtungen benötigen wir den Raum $C(\overline{\Omega})$ der stetigen Funktionen $u : \overline{\Omega} \to \mathbf{R}$ bzw. $\mathbf{C}$. Mit der punktweise vorgenommenen Addition und Skalarmultiplikation ist $C(\overline{\Omega})$ linearer Raum. Ferner ist der Raum nicht endlich-dimensional, da etwa die Monome $x \mapsto x^n, n = 0, 1, 2, ...$ linear unabhängig sind.

Wir charakterisieren hier den Raum $C(\overline{\Omega})$ der stetigen Funktionen in Abhängigkeit von der Wahl verschiedener Normen.

Satz 5.1. *Für jedes $1 \le p \le \infty$ wird auf $C(\overline{\Omega})$ durch*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} := \begin{cases} \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx\right)^{1/p} & 1 \le p < \infty \\ \sup_{x\in\overline{\Omega}} |u(x)| & p = \infty \end{cases} \tag{5.1}$$

für $u \in C(\overline{\Omega})$ eine Norm definiert. $C(\overline{\Omega})$ ist mit der Supremum-Norm

$$\|u\|_{L^\infty(\overline{\Omega})} := \sup_{x\in\overline{\Omega}} |u(x)| \tag{5.2}$$

sogar vollständig und damit Banach-Raum.

Beweis: Wir zeigen die Normeigenschaften: Die Eigenschaften $(N1) - (N3)$ sind offensichtlich erfüllt. Die Gültigkeit der Dreiecksungleichung für $p = \infty$ ersehen wir aus der folgenden Abschätzung:

$$\begin{aligned} \|u+v\|_{L^\infty(\Omega)} &= \max_{x\in\overline{\Omega}} |(u+v)(x)| \;=\; |(u+v)(x_0)| \;\leq\; |u(x_0)| + |v(x_0)| \\ &\leq \max_{x\in\overline{\Omega}} |u(x)| + \max_{x\in\overline{\Omega}} |v(x)| \;=\; \|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v\|_{L^\infty(\Omega)}. \end{aligned}$$

Für $p \in [1, \infty)$ beweisen wir die Dreiecksungleichung in Abschnitt 6.4.

Schließlich untersuchen wir die Eigenschaft der Vollständigkeit bezüglich der Norm (5.2): Bekanntlich entspricht die Konvergenz einer Funktionenfolge (u_n) aus dem Raum $C(\overline{\Omega})$ gegen eine Funktion u bezüglich der Maximum–Norm gerade der gleichmäßigen Konvergenz, denn

$$\|u - u_n\|_{C(\overline{\Omega})} < \epsilon \quad \Longleftrightarrow \quad |u(x) - u_n(x)| < \epsilon, \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Da nun das Cauchysche Konvergenzkriterium hinreichend für die gleichmäßige Konvergenz einer Folge stetiger Funktionen gegen eine stetige Grenzfunktion ist, folgt damit die Vollständigkeit des Raumes $C(\overline{\Omega})$ bezüglich der Maximum–Norm. □

Die folgenden Betrachtungen zeigen, daß die Charakterisierung dieses Raums als Banach–Raum von der verwendeten Norm abhängt.

Satz 5.2. *Der lineare Raum $C(\overline{\Omega})$ ist in Verbindung mit der L^p–Norm (5.1) mit $1 \leq p < \infty$ nicht vollständig.*

Beweis: Bezüglich der Vollständigkeit konstruieren wir im eindimensionalen Fall ein Gegenbeispiel. Wir nehmen o.B.d.A. an, daß $\overline{\Omega} = [0, 2]$ und

$$u_n(x) := \begin{cases} x^n, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Dann ist (u_n) Cauchy–Folge, denn für $n < m$ gilt

$$\|u_n - u_m\|^p_{L^p(0,2)} = \int_0^1 |x^n - x^m|^p dx \leq \int_0^1 x^{np} dx \leq \frac{1}{np+1} \to 0, \quad n \to \infty.$$

Wir nehmen nun an, daß die Folge (u_n) gegen eine stetige Funktion u konvergiert, d.h.

$$\|u_n - u\|_{L^p(0,2)} \to 0, \;\; n \to \infty.$$

Aus der später zu beweisenden Minkowskischen Ungleichung (vgl. Abschnitt 6.4) ergibt sich

$$\begin{aligned} \left(\int_0^1 |u(x)|^p dx\right)^{1/p} &\leq \left(\int_0^1 |u(x) - u_n(x)|^p dx\right)^{1/p} + \left(\int_0^1 x^{np} dx\right)^{1/p} \\ &\leq \|u - u_n\|_{L^p(0,1)} + \left(\frac{1}{1+np}\right)^{1/p} \to 0, \;\; n \to \infty. \end{aligned}$$

Das impliziert $u(x) = 0, \;\; 0 \le x \le 1$. Andererseits ist

$$\begin{aligned}\left(\int_1^2 |u(x) - 1|^p dx\right)^{1/p} &= \left(\int_1^2 |u(x) - u_n(x)|^p dx\right)^{1/p} \\ &\le \|u - u_n\|_{L^p(1,2)} \to 0, \quad n \to \infty.\end{aligned}$$

Das impliziert $u(x) = 1, \;\; 1 \le x \le 2$. Damit ist aber die Grenzfunktion nicht stetig auf $[0,2]$ im Widerspruch zur Annahme. □

Die Nichtvollständigkeit der Menge der stetigen Funktionen bezüglich der L^p-Norm ist für uns Veranlassung, im folgenden Abschnitt 6 basierend auf der allgemeinen Vorgehensweise in normierten Räume (vgl. Abschnitt 4.4) geeignete Vervollständigungen zu betrachten. Dies führt zu den *Lebesgue-Räumen*.

5.2 Räume stetig differenzierbarer Funktionen

Einen Vektor $\alpha := (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ mit nichtnegativen ganzen Zahlen α_i nennen wir *Multiindex* der Länge

$$|\alpha| := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i. \tag{5.3}$$

Zur Abkürzung schreiben wir *partielle Ableitungen der Ordnung* α einer hinreichend oft im Punkt $x \in \Omega$ differenzierbaren Funktion $u : \Omega \to \mathbf{R}$ in folgender Form:

$$D^\alpha u(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}(x), \;\; |\alpha| \ge 1 : \qquad D^{(0,\dots,0)} u(x) := u(x). \tag{5.4}$$

Definition 5.3. *(i) Für eine nichtnegative ganze Zahl m wird die Menge der $m-$fach auf Ω stetig differenzierbaren Funktionen bezeichnet durch*

$$C^m(\Omega) := \{v : \Omega \to \mathbf{R} |\; D^\alpha v \in C(\Omega), \;\; \forall \alpha : |\alpha| \le m\}. \tag{5.5}$$

(ii) $C^m(\overline{\Omega})$ ist die Menge aller Funktionen aus $C^m(\Omega)$ mit stetig auf $\overline{\Omega}$ fortsetzbaren Ableitungen bis zur Ordnung m.

Satz 5.4. *Sei $\overline{\Omega}$ kompakt, d.h. abgeschlossen und beschränkt. Dann ist die Menge $C^m(\overline{\Omega})$ in Verbindung mit der Norm*

$$\|u\|_{C^m(\overline{\Omega})} := \max_{|\alpha| \le m} \sup_{x \in \overline{\Omega}} |D^\alpha u(x)| \,, \quad u \in C^m(\overline{\Omega}) \tag{5.6}$$

Banach-Raum.

Beweis: (i) Man sieht unmittelbar ein, daß $C^m(\overline{\Omega})$ linearer und normierter Raum ist.

(ii) Zum Nachweis der Vollständigkeit sei (u_j) Cauchy–Folge in $C^m(\overline{\Omega})$. Aus der Definition der Norm ergibt sich, daß die stetigen Funktionen $D^\alpha u_j$ mit $|\alpha| \le m$ auf der Menge $\overline{\Omega}$ gleichmäßig jeweils gegen eine Funktion u^α konvergieren. Für $\alpha = (0, ..., 0)$ ist $u^\alpha = u$. Diese Grenzfunktionen sind ebenfalls stetig auf $\overline{\Omega}$.
Sei nun zunächst $\beta = (1, 0, ..., 0)$. Für einen fixierten Punkt $x \in \Omega$ und eine reelle Zahl h

mit $0 < |h| < h(x)$ mit hinreichend kleinem $h(x)$ folgt aus der Dreiecksungleichung und dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{u(x_1+h,x_2,...,x_n)-u(x_1,x_2,...,x_n)}{h}-u^\beta(x)\right| \\
\le\ & \frac{2}{h}\sup_{y\in\overline{\Omega}}|u(y)-u_j(y)|+\sup_{y\in\overline{\Omega}}|u^\beta(y)-D^\beta u_j(y)| \\
&\qquad +\left|\frac{u_j(x_1+h,x_2,...,x_n)-u_j(x_1,x_2,...,x_n)}{h}-D^\beta u_j(x)\right| \\
=\ & \frac{2}{h}\sup_{y\in\overline{\Omega}}|u(y)-u_j(y)|+\sup_{y\in\overline{\Omega}}|u^\beta(y)-D^\beta u_j(y)| \\
&\qquad +\left|D^\beta u_j(x_1+\theta h,x_2,...,x_n)-D^\beta u_j(x)\right| \\
\le\ & \frac{2}{h}\sup_{y\in\overline{\Omega}}|u(y)-u_j(y)|+\sup_{y\in\overline{\Omega}}|u^\beta(y)-D^\beta u_j(y)| \\
& +2\sup_{y\in\overline{\Omega}}|D^\beta u_j(y)-D^\beta u_{j_0}(y)|+\left|D^\beta u_{j_0}(x_1+\theta h,x_2,...,x_n)-D^\beta u_{j_0}(x)\right|.
\end{aligned}$$

Dabei ist θ eine geeignete Zahl aus $[0,1]$. Für eine vorgegebene Zahl $\epsilon > 0$ wählen wir $j_0(\epsilon)$ so, daß der dritte Summand der letzten Abschätzung für $j \ge j_0(\epsilon)$ kleiner als $\epsilon/3$ wird. Bei festem $j_0(\epsilon)$ bestimmt man die h so, daß auch der vierte Summand kleiner als $\epsilon/3$ wird. Schließlich bestimmt man eine natürliche Zahl $j \ge j_0(\epsilon)$ so, daß auch die beiden ersten Summanden kleiner als $\epsilon/3$ werden. Dann folgt

$$\frac{\partial}{\partial x_1}u(x) = D^\beta u(x) = u^\beta(x).$$

Durch iterative Anwendung dieses Verfahrens erhält man $D^\alpha u(x) = u^\alpha(x)$ für $1 \le |\alpha| \le m$. Somit gehört u zu $C^m(\overline{\Omega})$. Ferner gilt

$$\lim_{j\to\infty}\|u_j-u\|_{C^m(\overline{\Omega})}=0.$$

Daraus folgt die Behauptung. □

5.3 Hölder-Räume

Definition 5.5. *Seien* $0 < \lambda \le 1$ *und* m *eine nichtnegative ganze Zahl. Dann bezeichnet der* Hölder-Raum $C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})$ *die Menge der Funktionen aus* $C^m(\overline{\Omega})$, *für die gilt*

$$\|u\|_{C^{m,\lambda}(\overline{\Omega})} := \|u\|_{C^m(\overline{\Omega})}+\sum_{|\alpha|=m}\sup_{\substack{x,y\in\overline{\Omega}\\ x\neq y}}\frac{|D^\alpha u(x)-D^\alpha u(y)|}{|x-y|^\lambda}<\infty. \tag{5.7}$$

Beispiel 5.6. Das vorliegende eindimensionale Beispiel ist von gewissem Wert für das Verständnis für den im folgenden Abschnitt einzuführenden Begriff *Randglätte* eines (zweidimensionalen) Gebietes.
Seien $m = 0$, $\Omega = (-1,1)$ und $u(x) = |x|^\lambda$. Dann gilt $u \in C^{0,\lambda}[-1,1]$. (Übungsaufgabe !) □

Bemerkung 5.7. (i) Eine Funktion $u \in C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$ ist auch gleichmäßig stetig. Zum Beweis wähle man für beliebiges $\epsilon > 0$ die Zahl $\delta(\epsilon) := \left(\epsilon/\|u\|_{C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})}\right)^{1/\lambda}$. Dann ist

$$|u(x)-u(y)|<\epsilon, \qquad \forall\ x,y:\ |x-y|<\delta(\epsilon).$$

(ii) Es gilt $C^{0,\lambda}(\overline{\Omega}) \subset C(\overline{\Omega})$, jedoch gibt es stetige Funktionen, die nicht hölder–stetig sind. Als Beispiel wählen wir die Funktion $u: \ [0,1/2] \to \mathbf{R}$ mit

$$u(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{1}{\log x}, & 0 < x \leq 1/2. \end{cases}$$

Offenbar ist $u \in C[0,1/2]$. Die Annahme $u \in C^{0,\lambda}[0,1/2]$ führt jedoch auf

$$|u(x) - u(0)| \leq C|x - 0|^\lambda, \qquad C := \|u\|_{C^{0,\lambda}[0,1/2]}$$

somit

$$1 \leq C|x|^\lambda |\log x|, \qquad \forall x \in (0,1/2].$$

Dies liefert für $x \to +0$ den Widerspruch $1 \leq 0$.
(iii) Für konvexes und beschränktes Ω gilt $C^1(\overline{\Omega}) \subset C^{0,\lambda}(\overline{\Omega})$. Zum Nachweis liefert der Mittelwertsatz der Differentialrechnung

$$|u(x) - u(y)| \leq \max_{z \in \overline{\Omega}} |u'(z)| \ |x - y|,$$

damit

$$\frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\lambda} \leq \max_{z \in \overline{\Omega}} |u'(z)| \ |x - y|^{1-\lambda} \leq C < \infty, \quad \forall x, y \in \overline{\Omega}. \quad \square$$

Satz 5.8. *Sei $\overline{\Omega}$ kompakt, d.h. abgeschlossen und beschränkt. Dann ist $C^{m;\lambda}(\overline{\Omega})$ in Verbindung mit der in Definition 5.6 definierten Norm Banach–Raum.*

Beweis: Übungsaufgabe ! $\square$

5.4 Randglätte

Wir verwenden die in Abschnitt 5.3 eingeführten Hölder-Räume, um die *Glätte des Randes* $\partial\Omega$ eines beschränkten Gebietes zu beschreiben.

Definition 5.9. *Ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ gehört zur Klasse $C^{m;\lambda}$ mit $m \in \mathbf{N}_0$ und $0 \leq \lambda \leq 1$, wenn es endlich viele offene Gebiete $B_i, i = 1, ..., N$ gibt, so daß $\partial\Omega \cap B_i$ für jeweils $i = 1, ..., N$ der Graph einer $C^{m;\lambda}$-Funktion ist und $\Omega \cap B_i$ auf jeweils einer Seite dieses Graphen liegt.*

Genauer gelte: Für $i = 1, ..., N$ gibt es ein euklidisches Koordinatensystem $(e_1^i, ..., e_n^i)$ im $\mathbf{R}^n$, Zahlen $r_i > 0$ und $h_i > 0$ sowie eine Funktion $f^i : \mathbf{R}^{n-1} \to \mathbf{R}$ aus der Klasse $C^{m;\lambda}$, so daß mit den Bezeichnungen

$$x_{,n}^i := (x_1^i, ..., x_{n-1}^i), \qquad x = \sum_{j=1}^n x_j^i e_j^i$$

für $x \in \mathbf{R}^n$ mit $|x_{,n}^i| < r_i$ gilt

$$\begin{aligned} x_n^i = f^i(x_{,n}^i) \quad &\Rightarrow \quad x \in \partial\Omega \\ 0 < x_n^i - f^i(x_{,n}^i) < h_i \quad &\Rightarrow \quad x \in \Omega \\ 0 > x_n^i - f^i(x_{,n}^i) > -h_i \quad &\Rightarrow \quad x \notin \Omega. \end{aligned}$$

Die Gebiete

$$B_i := \{x \in \mathbf{R}^n | \ |x_{,n}^i| < r_i, \ |x_n^i - f^i(x_{,n}^i)| < h_i\}, \quad i = 1, ..., N$$

bilden eine endlich offene Überdeckung des Randes $\partial\Omega$.

Speziell heißt ein zur Klasse $C^{0;1}$ *gehörendes Gebiet* Lipschitz-stetig.

Beispiel 5.10. (Übungsaufgabe !)
(i) Die Kugeln $\Omega = \{x \in \mathbf{R}^n : \|x\| < r\}$ gehören zu $C^{m;\lambda}$ für beliebige $m \in \mathbf{N}_0$ und $\lambda \in (0,1]$.

(ii) Die Quadergebiete $\Omega = \{x \in \mathbf{R}^n : -\infty < a_i < x_i < b_i < \infty\}$ sind Lipschitz-stetig. Im zweidimensionalen Fall greife man hier auf Beispiel 5.6 zurück. □

Für Gebiete $\Omega \in C^1$ existiert der äußere Normaleneinheitsvektor $\nu(x) = (\nu_i(x))$ in allen Punkten des Randes $\partial\Omega$. Wir erinnern an das für die weiteren Ausführungen sehr wichtige und aus dem Gaußschen Integralsatz folgende

Lemma 5.11. *(Regel der partiellen Integration)*
Für $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$ *gilt mit dem äußeren Normaleneinheitsvektor* $\nu = (\nu_i)$ *auf* $\partial\Omega$ *für* $i = 1, ..., n$

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v \; dx = \int_{\partial\Omega} uv\nu_i \; ds - \int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} \; dx. \tag{5.8}$$

Beweis: vgl. z.B. Triebel [8], Anhang 3 □

Bemerkung 5.12. Es kann gezeigt werden, daß die Aussage von Satz 5.11 auch noch für Lipschitz-stetige Gebiete $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ gilt. Der Beweis ergibt sich zum Beispiel als Spezialfall von Alt [2], Satz A 6.8. □

Definition 5.13: *Sei* $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ *ein beschränktes, Lipschitz-stetiges Gebiet. Dann ist* $C(\partial\Omega)$ *der Raum der in jedem Punkt* $x \in \partial\Omega$ *stetigen Funktionen.*

5.5 Randwertaufgaben in punktweiser Form

Im Verlauf dieser Vorlesung untersuchen wir in einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ Randwertprobleme für lineare partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung.

Definition 5.14. *Bei gegebenen Funktionen*

$$a_{ij}, b_j, c, f : \Omega \to \mathbf{R}, \quad i,j = 1,...,n; \quad g : \partial\Omega \to \mathbf{R}$$

und symmetrischer, positiv definiter Matrix $A(x) = (a_{ij}(x))$ *heißt das (in sogenannter Divergenzform gegebene) Problem: Finde* $u : \Omega \mapsto \mathbf{R}$ *so, daß*

$$-\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)(x) + \sum_{j=1}^n b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x) + c(x)u(x) = f(x), \quad x \in \Omega \tag{5.9}$$

$$u(x) = g(x), \quad x \in \partial\Omega \tag{5.10}$$

Dirichletsches Randwertproblem (oder 1. Randwertaufgabe).

Definition 5.15. *Für hinreichend glatte Daten gemäß*

$$a_{ij} \in C^1(\Omega); \;\; b_j, c, f \in C(\Omega); \;\; g \in C(\partial\Omega)$$

heißt $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ klassische Lösung des Dirichletschen Randwertproblems (5.9), (5.10) *genau dann, wenn die Gleichungen (5.9) bzw. (5.10) punktweise auf* Ω *bzw.* $\partial\Omega$ *erfüllt sind.*

Einfachster und zugleich wichtiger Spezialfall von (5.9) ist die *Poisson-Gleichung*

$$-\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) = f(x), \quad x \in \Omega. \tag{5.11}$$

Für homogene Probleme (d.h. $f \equiv 0$) heißt (5.11) auch *Laplace–Gleichung.*

Es kann gezeigt werden, daß der *klassische Lösungsbegriff* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\partial\Omega)$ nicht für eine geeignete Lösbarkeitstheorie für das Randwertproblem (5.9), (5.10) ausreichend ist. Von Schauder stammt eine entsprechende Existenztheorie in Hölder-Räumen (vgl. z.B. Gilbarg/ Trudinger [4], Kap. 6).

Ein weiterer Kritikpunkt einer klassischen Lösbarkeitstheorie ist die starke Glätteforderung an die Daten des Problems nach Definition 5.14, die bei praktischen Anwendungen oft nicht erfüllt ist. Daher ist eine *Abschwächung des Lösungsbegriffs* auf der Grundlage eines *verallgemeinerten Ableitungsbegriffs* der anzustrebende Ausweg, den wir auch im Verlauf dieser Vorlesung benutzen werden. Die Grundidee ist wie folgt:

- Multiplikation der Differentialgleichung (5.9) mit einer beliebigen *Testfunktion* $v \in C^2(\Omega)$ mit $v = 0$ auf $\partial\Omega$ und Integration über das Gebiet Ω
- Partielle Integration des Terms mit Ableitungen 2. Ordnung nach Lemma 5.11 und Berücksichtigung der für die Testfunktionen geltenden Randbedingung $v = 0$.

Dies führt auf

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_\Omega \left\{ \sum_{j=1}^{n} b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x)u \right\} vdx = \int_\Omega f(x)vdx. \tag{5.12}$$

Im Verlauf dieser Vorlesung werden wir diesen Weg genauer ausarbeiten. Dazu benötigen wir einen abgeschwächten Integrationsbegriff (vgl. Kapitel 6) und den Begriff des Sobolev-Raumes (vgl. Kapitel 7).

Kapitel 6

Räume Lebesgue-integrierbarer Funktionen

Im vorliegenden Kapitel werden wir Räume Lebesgue-integrierbarer Funktionen einführen und funktionalanalytisch charakterisieren. Sie sind zum Beispiel für eine moderne Lösungstheorie partieller Differentialgleichungen grundlegend. Dazu werden einige grundlegende Kenntnisse der Maßtheorie vorausgesetzt, die man in einschlägigen Lehrbüchern findet. Wir stellen jedoch den Ausführungen im Anhang A einen kleinen Exkurs zum Lebesgue-Integral nach. Eine ausführlichere Darstellung dazu findet man etwa bei Alt [2], Anhang 1.

An dieser Stelle weisen wir bereits auf folgenden Punkt hin: In Kapitel 7.1 zeigen wir, daß die Lebesgue-Räume sich auch auf wohlbestimmte Weise durch Vervollständigung der stetigen Funktionen in der L^p-Norm erklären lassen.

6.1 Meßbare Mengen

Definition 6.1. *Seien S eine Menge und $\mathcal{B}$ eine Menge von Teilmengen von S, die einen* σ-Ring *bzw. eine* σ-Algebra *bilden, d.h. es gilt*

(i) $\emptyset \in \mathcal{B}$; $\qquad E \in \mathcal{B} \implies S \setminus E \in \mathcal{B}$,

(ii) $E_i \in \mathcal{B},\ i \in \mathbf{N} \qquad \implies \cup_{i\in\mathbf{N}} E_i \in \mathcal{B}$.

Ferner sei $\mu : \mathcal{B} \to [0,\infty]$ mit $\mu(\emptyset) = 0$ ein σ-additives Maß, *d.h.*

(iii) $E_i \in \mathcal{B},\ i \in \mathbf{N},\quad E_i \in \mathcal{B}$ *paarweise disjunkt* $\quad\implies\quad \mu(\cup_{i\in\mathbf{N}} E_i) = \sum_{i\in\mathbf{N}} \mu(E_i)$.

(iv) $N \in \mathcal{B},\ \mu(N) = 0,\ E \subset N \implies E \in \mathcal{B}$.

Dann heißt $(S, \mathcal{B}, \mu)$ Maßraum. *Mengen $E \in \mathcal{B}$ heißen* μ-meßbar.

Gilt (ii) nur für endliche Vereinigungen, so heißt $\mathcal{B}$ Ring *oder* Boolsche Algebra.

Mengen $N \in \mathcal{B}$ mit $\mu(N) = 0$ wie in Voraussetzung (iv) heißen *μ-Nullmengen.* Wir werden künftig sagen, eine Aussage gilt *$\mu-$fast überall* (bzw. μ-f.ü.), falls sie mit Ausnahme einer $\mu-$Nullmenge richtig ist.

Wir geben zwei für unsere Anwendungen wichtige Beispiele an.

Beispiel 6.2. (i) Beim *diskreten* Maß auf $S = \mathbf{N}$ besteht $\mathcal{B}$ aus allen Teilmengen aus $\mathbf{N}$. $\mu(E)$ ist dann die Anzahl der Elemente von E.

(ii) Sei $\mathcal{S} = \mathbf{R}^n$. Ferner werde zunächst $\mathcal{B}_0$ gebildet aus allen endlichen Vereinigungen disjunkter, halboffener Quader der Form

$$[a, b[:= \{x \in \mathbf{R}^n |\ a_i \leq x_i < b_i,\ i = 1, ..., n\}$$

mit $-\infty \leq a_i < b_i \leq +\infty$. Dann heißt

$$\mu_0([a, b[) := \prod_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \tag{6.1}$$

Lebesguesches Elementarmaß. $\mathcal{B}_0$ ist ein Ring, jedoch kein $\sigma-$Ring. μ_0 ist auf $\mathcal{B}_0$ additiv und sogar σ-additiv. Die Menge $(S, \mathcal{B}_0, \mu_0)$ ist ein sogenannter *Prämaßraum* (vgl. Definition in Anhang A, Definition A.1.).

Durch ein Fortsetzungsprinzip, das wir im Exkurs zum Lebesgue-Integral im Anhang skizzieren, kann man den Prämaßraum $(S, \mathcal{B}_0, \mu_0)$ zu einem Maßraum $(S, \mathcal{B}, \mu)$ mit $\mathcal{B}_0 \subset \mathcal{B}$ und $\mu = \mu_0$ auf $\mathcal{B}_0$ erweitern. Man bezeichnet dann μ als *Lebesgue-Maß* $\mathcal{L}^n$ auf $\mathbf{R}^n$.

Das System $\mathcal{B}$ der Lebesgue-meßbaren Mengen setzt sich aus Lebesgue-Nullmengen sowie *Borel-Mengen* zusammen. Genauer gibt es zu $E \in \mathcal{B}$ Borel-Mengen E_1, E_2 mit $E_1 \subset E \subset E_2$ sowie $\mathcal{L}^n(E_2 \setminus E_1) = 0$. Die Menge der Borel-Mengen ist dann der kleinste σ-Ring, der die Menge $\mathcal{B}_0$ (bzw. alle offenen oder alle abgeschlossenen Mengen) enthält. □

6.2 Meßbare Funktionen

Definition 6.3. *Seien* $(S, \mathcal{B}, \mu)$ *ein Maßraum und* (Y, d) *ein metrischer Raum. Eine Abbildung* $u : S \to Y$ *heißt* $\mu-$meßbar, *wenn folgende Bedingungen gelten:*

(i) $U \subset Y$ *offen* $\implies u^{-1}(U) \in \mathcal{B}$.

(ii) Es existiert eine $\mu-$*Nullmenge* N*, so daß* $u(S \setminus N)$ *separabel ist.*

Man kann zeigen, daß für separable Räume Y Bedingung (ii) entfallen kann. Dies ist im für uns wichtigen Fall $Y = \mathbf{R}^n$ gegeben.

Nachfolgend stellen wir hinreichende Bedingungen für die $\mu-$Meßbarkeit von Funktionen zusammen.

Lemma 6.4. *(i) Seien* $u : S \to Y$ *meßbar,* Z *ein Banach-Raum sowie* $\phi : Y \to Z$ *eine stetige Funktion, die separable Menge wieder in separable Mengen abbildet. Dann ist auch die Funktion* $\phi \circ u$ *meßbar.*

(ii) Sind u_i *meßbar und gilt* $u = \lim_{i\to\infty} u_i$ *fast überall, so ist auch die Grenzfunktion* u *meßbar.*

Beweis: (in allgemeinerer Form) vgl. [2], Lemma 1.10 □

Wir führen nun die Menge

$$M(\mu, Y) := \{u : S \to Y \mid u \text{ ist } \mu-\text{meßbar}\} \tag{6.2}$$

ein. Es gelte die Äquivalenzrelation $u \sim v$ in $M(\mu, Y)$ genau dann, wenn $u = v$ μ-fast überall gilt.

Wir benutzen nachfolgend die Bezeichnung

$$\{d(u, v) > r\} := \{x \in S \mid d(u(x), v(x)) > r\}.$$

Bei Mengen S mit endlichem Maß $\mu(S)$ versehen wir den Raum $M(\mu, Y)$ mit dem Abstandsmaß

$$d_\mu(u,v) := \inf\{r \geq 0 \mid \mu(\{d(u,v) > r\}) \leq r\}.$$

Eine Folge $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ heißt $\mu-$*maßkonvergent gegen* u, falls $d_\mu(u_k, u) \to 0,\ k \to \infty$ oder - dazu äquivalent - falls für jedes $\epsilon > 0$ gilt $\mu(\{d(u_k, u) > \epsilon\}) \to 0,\ k \to \infty$.

Satz 6.5. *Bei Mengen S mit endlichem Maß $\mu(S)$ ist $(M(\mu, Y), d_\mu)$ metrischer Raum. Ferner ist mit dem Bildraum Y auch $M(\mu, Y)$ vollständig.*

Beweis: vgl. Alt [2], Satz 1.11 □

Man kann noch einen relativ tiefliegenden Zusammenhang zwischen meßbaren und stetigen Funktionen herstellen, den wir hier für den Spezialfall meßbarer Mengen S im $\mathbf{R}^n$ und einem Zahlkörper $Y = \mathbf{K}$ angeben.

Satz 6.6. (Satz von Lusin)
Sei S meßbare Teilmenge des $\mathbf{R}^n$. Dann ist die Funktion $u : S \to \mathbf{K}$ mit $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ meßbar genau dann, wenn sie stetig bis auf kleine Teilmengen ist, d.h. genauer: Für jede Zahl $\delta > 0$ gibt es offene Teilmengen $S_\delta \subset S$ mit $\mu(S_\delta) < \delta$, so daß die Funktion $u : S \setminus S_\delta \to$ stetig ist.

Beweis: vgl. (in allgemeinerer Form) Alt [2], Satz A.4.7 □

6.3 Lebesgue-Räume

Sei nun $(S, \mathcal{B}, \mu)$ ein Maßraum. Ferner sei v eine nichtnegative und $\mu-$meßbare Funktion auf S. Ist v zusätzlich $\mu-$integrierbar, so werde durch

$$\int_S v\ d\mu \in [0, \infty]$$

das Lebesgue-Integral von v auf S erklärt (vgl. dazu Anhang A, Definition A.10).

Ist allgemeiner Y Banach-Raum über $\mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$ mit der Norm $\|\cdot\|$, so ist für $\mu-$meßbare Funktionen $u : S \to Y$ nach Lemma 6.4 (i) auch die Funktion $\|u\|$, d.h. die Abbildung $x \mapsto \|u(x)\|$, $\mu-$meßbare Funktion. Wir definieren dann folgende Ausdrücke

$$\|u\|_{L^p} := \begin{cases} \left(\int_S \|u\|^p\ d\mu\right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty \\ \inf_{\mu(N)=0} \sup_{x\in S\setminus N} \|u(x)\|, & p = \infty \end{cases}. \tag{6.3}$$

Abzählbare Vereinigungen von Nullmengen sind wiederum Nullmengen. Dann gibt es eine $\mu-$Nullmenge N, so daß

$$\sup_{x\in S\setminus N} \|u(x)\| = \|u\|_{L^\infty}.$$

Für $1 \leq p < \infty$ gilt für jede Zahl $\delta > 0$ die Aussage

$$\|u\|^p_{L^p} \geq \delta^p\ \mu\left(\{x \in S \mid \|u(x)\| \geq \delta\}\right).$$

Somit folgt aus $\|u\|_{L^p} = 0$ auch $u = 0$ $\mu-$fast überall in S. Dies motiviert die

Definition 6.7. *Für $1 \leq p \leq \infty$ wird auf der Menge*

$$\tilde{L}^p(\mu, Y) := \{u : S \to Y \mid u\ \ \mu - \textit{meßbar},\ \|u\|_{L^p} < \infty\}$$

eine Äquivalenzrelation $\sim$ eingeführt. Dabei gilt $u \sim v$ genau dann, wenn $u = v$ $\mu-$fast überall. Als Lebesgue-Raum $L^p(\mu, Y)$ *wird die Menge der Äquivalenzklassen in $\tilde{L}^p(\mu, Y)$ bezeichnet. Ist speziell $Y = \mathbf{R}$ oder $Y = \mathbf{C}$, so schreiben wir nur $L^p(\mu)$.*

Offenbar ist $L^p(\mu, Y)$ ein linearer Raum. So führt man die Addition und Skalarmultiplikation jeweils für Repräsentanten der entsprechenden Äquivalenzklassen ein (vgl. auch den Beweis über Vervollständigung normierter Räume). Man sieht sofort ein, daß diese Operationen unabhängig von der Auswahl der Repräsentanten sind. Das Nullelement in $L^p(\mu, Y)$ entspricht dann der Äquivalenzklasse der f.ü. auf S verschwindenden Funktionen.

Wir geben zwei instruktive Beispiele an.

Beispiel 6.8. Ist μ das diskrete Maß aus Beispiel 6.2 (i), so erhalten wir die Folgenräume $L^p(\mu) = l^p(\mathbf{K})$ mit $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ aus Kapitel 1. □

Beispiel 6.9. Sei nun nach Beispiel 6.2 (ii) μ das Lebesgue-Maß auf einer Lebesgue-meßbaren Menge $S \subset \mathbf{R}^n$ (vgl. Anhang A). Wir schreiben dann $L^p(S, Y)$ statt $L^p(\mu, Y)$. Bei Anwendungen auf partielle Differentialgleichungen ist ferner oft $S = \Omega$ ein Gebiet im $\mathbf{R}^n$ sowie $Y = \mathbf{K}$ mit $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{K} = \mathbf{C}$. Wir verwenden dann auch die Schreibweise $L^p(\Omega)$, die Norm $\|\cdot\|_Y := |\cdot|$ sowie

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty.$$

Für das spätere Verständnis sind noch die folgenden speziellen Beispiele nützlich.

Beispiel 6.10. (Polstellen im $\mathbf{R}^n$)
Sei $\Omega := B(0; r) \subset \mathbf{R}^n$. Die Funktion $u(x) := \|x\|^{-s}$ gehört zu $L^p(\Omega)$ genau dann, wenn $s < n/p$ gilt.
(*Übungsaufgabe !* Hinweis: Übergang zu räumlichen Polarkoordinaten) □

Beispiel 6.11. Sei Ω beschränkt. Dann ist die Menge $L^\infty(\Omega)$ der Äquivalenzklassen der auf Ω meßbaren und f.ü. beschränkten Funktionen Teilmenge aller Räume $L^p(\Omega)$ mit $1 \le p < \infty$, denn man schätzt ab

$$\int_\Omega |u(x)|^p dx \le \int_\Omega M^p dx = M^p \ \operatorname{meas}(\Omega) < \infty.$$

Beispiel 6.12. Sei die Funktion $u : S \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{K}$ fast überall stetig auf der meßbaren Menge M. Hier sei der Fall $S = \mathbf{R}^n$ zugelassen. Ferner gelte mit einer endlichen Konstanten M die Wachstumbeziehung

$$|u(x)| \le \frac{C}{(1 + |x|)^\alpha}, \qquad \forall x \in S.$$

Dann ist die Funktion u für $\alpha > n$ integrierbar, d.h. $u \in L^1(S)$. Die Zugehörigkeit von u zu $L^p(S)$ bei fixiertem p und n hängt dann von α ab (*Übungsaufgabe !*). □

6.4 Aussagen über Lebesgue-Räume $L^p(\Omega)$

Im nachfolgenden Abschnitt betrachten wir speziell den Lebesgue-Raum $L^p(\Omega)$ über meßbaren Mengen $\Omega \subseteq \mathbf{R}^n$. Man vergleiche jedoch Bemerkung 6.16 bezüglich möglicher Verallgemeinerungen.

Lemma 6.13. *(i) Für $u \in L^p(\Omega)$ und $v \in L^q(\Omega)$ mit $1/p + 1/q = 1$ und $1 \le p, q \le \infty$ ist*

$uv \in L^1(\Omega)$ und es gilt die Höldersche Ungleichung

$$\left| \int_\Omega u(x)v(x)dx \right| \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

(ii) Für $u_i \in L^{p_i}(\Omega)$ mit $\sum_{i=1}^N 1/p_i = 1$ und $1 \leq p_i \leq \infty$ gilt die verallgemeinerte Höldersche Ungleichung

$$\left| \int_\Omega \prod_{i=1}^N u_i(x)dx \right| \leq \prod_{i=1}^N \|u_i\|_{L^{p_i}(\Omega)}.$$

Beweis: (i) Zunächst folgt nach Lemma 6.4 (i), daß uv meßbar ist.
Für $p = 1$ und somit $q = \infty$ gilt fast überall auf Ω, daß $|(uv)(x)| \leq \|v\|_{L^\infty(\Omega)} |u(x)|$ ist. Daraus folgert man $uv \in L^1(\Omega)$. Ferner gilt die Behauptung natürlich auch in den Fällen $p = \infty$, $q = 1$ sowie für $\|u\|_{L^p(\Omega)} = 0$ oder $\|v\|_{L^q(\Omega)} = 0$.
(ii) Wir können daher annehmen, daß $1 < p < \infty$ und $\|u\|_{L^p(\Omega)} > 0$ bzw. $\|v\|_{L^q(\Omega)} > 0$ ist. Ausgangspunkt ist die Youngsche Ungleichung (vgl. Lemma 1.7)

$$xy \leq \frac{1}{p} x^p + \frac{1}{q} y^q \quad \forall x, y \geq 0$$

Mit der Wahl

$$x := \frac{|u(x)|}{\|u\|_{L^p(\Omega)}}, \quad y := \frac{|v(x)|}{\|v\|_{L^q(\Omega)}}$$

folgt

$$\frac{|u(x)v((x)|}{\|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}} \leq \frac{1}{p} \frac{|u(x)|^p}{\|u\|^p_{L^p(\Omega)}} + \frac{1}{q} \frac{|v(x)|^q}{\|v\|^q_{L^q(\Omega)}}.$$

Aufgrund der Integrierbarkeit der rechten Seite über Ω ergibt sich $uv \in L^1(\Omega)$. Weiterhin liefert Ausführung der Integration über Ω die Behauptung wegen

$$\frac{\int_\Omega |u(x)v((x)| \ dx}{\|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}} \leq \frac{1}{p} \frac{\int_\Omega ||u(x)|^p \ dx}{\|u\|^p_{L^p(\Omega)}} + \frac{1}{q} \frac{\int_\Omega |v(x)|^q \ dx}{\|v\|^q_{L^q(\Omega)}} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

(iii) Die verallgemeinerte Höldersche Ungleichung für $N \geq 2$ erhält man schließlich durch Induktion. □

Lemma 6.14. *Für $u, v \in L^p(\Omega)$ mit $1 \leq p \leq \infty$ gilt die* Minkowskische Ungleichung

$$\|u + v\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)}.$$

Beweis: (i) Für $p = 1$ bzw. $p = \infty$ folgt die Aussage aus der punktweisen genommenen Dreiecksungleichung. Für Zahlen $1 < p < \infty$ hat man zunächst punktweise (Übungsaufgabe !)

$$|u(x) + v(x)|^p \leq (|u(x)| + |v(x)|)^p \leq 2^{p-1}(|u(x)|^p + |v(x)|^p).$$

Damit ist $u + v \in L^p(\Omega)$.
(ii) Mittels punktweiser Dreiecksgleichung kann man abschätzen

$$|u(x) + v(x)|^p \leq |u(x)| \ |u(x) + v(x)|^{p-1} + |v(x)| \ |u(x) + v(x)|^{p-1}. \tag{6.4}$$

Zunächst gilt $|u|, |v| \in L^p(\Omega)$. Wegen $q(p-1) = p$ folgt dann auch $|u+v|^{p-1} \in L^q(\Omega)$. Die Höldersche Ungleichung ergibt dann bei Anwendung in (6.4)

$$\begin{aligned} \int_\Omega |u+v|^p \, dx &\leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \left\| |u+v|^{p-1} \right\|_{L^q(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)} \left\| |u+v|^{p-1} \right\|_{L^q(\Omega)} \\ &\leq \left(\|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)} \right) \left(\int_\Omega |u+v|^p \, dx \right)^{1-1/p}. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Die Behauptung ist trivial für $\int_\Omega |u+v|^p \, dx = 0$. Sonst folgt die Behauptung aus (6.5) nach Kürzen. □

Theorem 6.15. *(Fischer/Riesz)*
Die Menge $L^p(\Omega)$ der Äquivalenzklassen von Lebesgue-integrierbaren Funktionen ist ein Banach-Raum bezüglich der Norm

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} := \begin{cases} \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty \\ \inf_{\mu(N)=0} \sup_{x \in \Omega \setminus N} |u(x)|, & p = \infty \end{cases}$$

Beweis: (i) $L^p(\Omega)$ ist linearer Raum (s.o.). Die Normeigenschaften (N1)-(N3) für den Ausdruck $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ zeigt man wie in Satz 5.1. Die Minkowski-Ungleichung ist die Dreiecksungleichung (N4).

(ii) Wir zeigen die Vollständigkeit für $p = \infty$: Sei $(u_j)_{j \in \mathbf{N}}$ Cauchy-Folge in $L^\infty(\Omega)$. Dann existieren eine Konstante $C < \infty$ und eine $\mu-$Nullmenge N derart, daß für $x \in \Omega \setminus N$ gilt

$$|u_j(x)| \leq \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \qquad \forall j \in \mathbf{N},$$

$$|u_k(x) - u_l(x)| \leq \|u_k - u_l\|_{L^\infty(\Omega)} \to 0, \qquad k, l \to \infty.$$

Damit existiert die Grenzfunktion

$$u(x) := \begin{cases} \lim_{j \to \infty} u_j(x) & x \in \Omega \setminus N \\ 0, & x \in N. \end{cases}$$

Sie ist nach Lemma 6.4 (ii) meßbar und beschränkt. Ferner ist

$$|u(x) - u_k(x)| = \lim_{l \to \infty} |u_l(x) - u_k(x)| \leq \liminf_{l \to \infty} \|u_l - u_k\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad x \in \Omega \setminus N.$$

Daraus folgt die gesuchte Aussage wegen

$$\|u - u_k\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \liminf_{l \to \infty} \|u_l - u_k\|_{L^\infty(\Omega)} \to 0, \quad k \to \infty.$$

(iii) Wir zeigen die Vollständigkeit für $1 \leq p < \infty$: Sei dazu $(u_k)_{k \in \mathbf{N}}$ Fundamentalfolge in $L^p(\Omega)$. Es reicht der Nachweis der Konvergenz einer Teilfolge, da jede Cauchy-Folge maximal einen Häufungspunkt hat. Wir wählen nun diese Teilfolge $(u_{k_i})_i$ so aus, daß

$$\sum_i \|u_{k_{i+1}} - u_{k_i}\|_{L^p(\Omega)} < \infty.$$

Zu deren Konstruktion wählt man $\tilde{k}_i \in \mathbf{N}$ so, daß

$$\|u_k - u_l\|_{L^p(\Omega)} \leq \frac{1}{2^i} \qquad \forall k, l \geq \tilde{k}_i.$$

Gilt nicht bereits $\lim_{i\to\infty} \tilde{k}_i = \infty$, so setze man $k_i := \max\{i; \tilde{k}_i\}$. Die entstehende Teilfolge werde o.B.d.A. wieder mit $(u_k)_k$ bezeichnet.
Mit der Festsetzung

$$h_l := \sum_{k=1}^{l} |u_{k+1} - u_k|$$

folgern wir dann über das Lemma von Fatou (vgl. Anhang A, Lemma A.18) und die Minkowski-Ungleichung

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left(\lim_{l\to\infty} h_l^p\right) dx &\leq \liminf_{l\to\infty} \int_\Omega h_l^p \, dx = \left(\liminf_{l\to\infty} \|h_l\|_{L^p(\Omega)}\right)^p \\ &\leq \left(\sum_k \|u_{k+1} - u_k\|_{L^p(\Omega)}\right)^p < \infty.\end{aligned}$$

Damit existiert

$$\lim_{l\to\infty} h_l(x) < \infty \qquad \text{f.ü. in } \Omega.$$

Nach Definition der Glieder h_l ist damit $(u_k(x))_{k\in\mathbf{N}}$ Cauchy-Folge f.ü. in Ω, somit existiert der Grenzwert

$$u(x) = \lim_{k\to\infty} u_k(x) \qquad \text{f.ü. in } \Omega.$$

Eine erneute Anwendung des Lemmas von Fatou und der Dreiecksungleichung ergibt schließlich

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u - u_l|^p \, dx &\leq \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega |u_k - u_l|^p \, dx = \left(\liminf_{k\to\infty} \|u_k - u_l\|_{L^p(\Omega)}\right)^p \\ &\leq \left(\sum_{k\geq l} \|u_{k+1} - u_k\|_{L^p(\Omega)}\right)^p \to 0, \qquad l \to \infty.\end{aligned}$$

Damit ist die Konvergenz einer geeigneten Teilfolge gezeigt. Dies ergibt die Vollständigkeit des $L^p(\Omega)$. □

Bemerkung 6.16. Die Aussage von Satz 6.15 läßt sich auf den Fall $L^p(\mu, Y)$ mit Banach-Raum Y verallgemeinern (vgl. Alt [2], Lemma 1.13 sowie Satz 1.17). □

Kapitel 7

Sobolev-Räume

Im vorliegenden Abschnitt stellen wir die für eine moderne Lösbarkeitstheorie partieller Differentialgleichungen geeigneten Funktionenräume, die sogenannten *Sobolev-Räume*, bereit. Dazu wird ein *verallgemeinerter Ableitungsbegriff* benötigt.

Wir betrachten reell- oder komplexwertige Funktionen und verwenden die im Kapitel 6 eingeführten Bezeichnungen zu L^p-Räumen über meßbaren Mengen $\Omega \subset \mathbf{R}^n$. Einige relativ technische Beweise stellen wir im Anhang B zusammen.

7.1 Dichte Teilmengen von $L^p(\Omega)$

Zur Einführung von *Sobolev-Räumen* charakterisieren wir zunächst dichte Teilmengen von $L^p(\Omega)$. Dabei sei $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ein Gebiet, d.h. eine offene und zusammenhängende (somit auch Lebesgue-meßbare) Punktmenge.

Lemma 7.1. *Die Menge der Treppenfunktionen liegt dicht in $L^p(\Omega)$ mit $1 \leq p < \infty$. Die Aussage ist auch für $p = \infty$ richtig, sofern das Gebiet Ω ein endliches Lebesgue-Maß hat.*

Beweis: vgl. Anhang B, Lemma B.1 □

Definition 7.2. *Für eine im Gebiet Ω definierte Funktion u bezeichnet man die Menge*

$$supp\ u := \overline{\{x \in \Omega|\ u(x) \neq 0\}}$$

als Träger *von u. Eine Funktion heißt* finit, *wenn ihr Träger kompakt (also beschränkt und abgeschlossen) im Gebiet Ω ist.*

Das nachfolgende Resultat zeigt, daß man die Lebesgue-Räume $L^p(\Omega)$ in gewisser Weise als Vervollständigung der Menge der stetigen Funktionen auffassen kann.

Lemma 7.3. *Die Menge $C_0^0(\Omega)$ der auf dem Gebiet $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ stetigen und finiten Funktionen liegt dicht in $L^p(\Omega)$ für $1 \leq p < \infty$.*

Beweis: vgl. Anhang B, Lemma B.2 □

Zur Beachtung: Für $p = \infty$ ist die Aussage des Lemmas falsch, denn z.B. kann die Funktion $u(x) \equiv 1$ nicht durch finite Funktionen approximiert werden.

Definition 7.4. *Der Raum der* Testfunktionen *$C_0^\infty(\Omega)$ ist die Menge der bezüglich Ω finiten und unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen.*

Das folgende Beispiel zeigt, daß die Menge $C_0^\infty(\Omega)$ nichtleer ist.

Beispiel 7.5. Wir betrachten in $\mathbf{R}$ mit zunächst beliebiger Konstante C die Funktion

$$\omega(t) := \begin{cases} C\exp\left(-\frac{1}{1-t^2}\right), & |t| < 1 \\ 0 & |t| \geq 1 \end{cases} . \tag{7.1}$$

Die Ableitungen

$$\omega^{(j)}(t) = C\frac{P_j(t)}{(1-t^2)^{2j}}\exp\left(-\frac{1}{1-t^2}\right), \quad |t| < 1$$

mit geeigneten Polynomen $P_j(t)$ sind auf $\mathbf{R}$ stetig und gehören wegen

$$\lim_{s\to\infty} s^j e^{-s} = 0$$

zu $C_0^\infty(\mathbf{R})$. Weiterhin ist supp $u = [-1, 1]$.
Analog gehört im $\mathbf{R}^n$ die Funktion

$$\omega(x) = \begin{cases} C\exp\left(-\frac{1}{1-r^2}\right), & |r| < 1 \\ 0 & |r| \geq 1 \end{cases} , \quad r^2 := \sum_{i=1}^n x_i^2 \tag{7.2}$$

zu $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ mit supp $u = \{x \in \mathbf{R}^n : \ |x| \leq 1\}$. □

Wir beschreiben nun das auf S.L. Sobolev zurückgehende *Mittelungsverfahren* zur Glättung von L^p-Funktionen. Die in Beispiel 7.5 offene Konstante C wird nun wie folgt normiert:

$$\int_{\mathbf{R}^n} \omega(x)dx = \int_{\|x\|\leq 1} \omega(x)dx = 1.$$

Ferner sei für $h > 0$ die Familie von Funktionen

$$\omega_h(x) := \frac{1}{h^n}\omega\left(\frac{x}{h}\right), \qquad x \in \mathbf{R}^n \tag{7.3}$$

definiert, die mitunter als *Dirac-Folge* bezeichnet wird.
Dann ist mit $y_j = x_j/h, j = 1, ..., n$

$$\int_{\mathbf{R}^n} \omega_h(x)\ dx = \frac{1}{h^n}\int_{\|x\|\leq h} \omega\left(\frac{x}{h}\right)\ dx = \int_{\|y\|\leq 1} \omega(y)\ dy = 1. \tag{7.4}$$

Man kann somit ω_h auch als Wahrscheinlichkeitsdichte interpretieren.

Nun gehöre eine gegebene reell- oder komplexwertige Funktion u zu $L^p(\Omega)$ mit $1 \leq p < \infty$. Man setzt u außerhalb von Ω mit Null fort. Die so entstehende Funktion wird weiterhin mit u bezeichnet. Das Mittelungsverfahren basiert nun auf einer Faltung von u mit der Dirac-Folge ω_h.

Definition 7.6. *Die* Sobolevsche Mittelungsfunktion u_h *ist definiert durch*

$$u_h(x) := \int_{\mathbf{R}^n} u(x-hy)\omega(y)\ dy = \int_{\|y\|\leq 1} u(x-hy)\omega(y)\ dy \tag{7.5}$$

bzw. nach Koordinatentransformation $z := x - hy$ *durch*

$$u_h(x) := \int_{\mathbf{R}^n} u(z)\omega\left(\frac{x-z}{h}\right)\frac{dz}{h^n} = \int_{\|x-z\|\leq h} \omega_h(x-z)u(z)\ dz. \tag{7.6}$$

Offenbar tragen zur Bildung von $u_h(x)$ nur die Werte von $u(z)$ mit $\|z-x\| \le h$ bei.

Die folgenden Aussagen sind die wesentlichen dieses Abschnittes. Sie zeigen, daß man L^p-Funktionen beliebig gut durch glatte Funktionen approximieren kann.

Satz 7.7. *Sei $u \in L^p(\Omega)$ mit $1 \le p < \infty$. Setzt man u außerhalb von Ω mit Null fort, so sind die Funktionen $u_h(x)$ mit $h > 0$ beliebig oft differenzierbar. Ferner ist $u_h \in L^p(\Omega)$ und es gilt*

$$(i) \quad \|u_h\|_{L^p(\Omega)} \le \|u\|_{L^p(\Omega)}, \qquad (ii) \quad \lim_{h\to 0} \|u-u_h\|_{L^p(\Omega)} = 0. \tag{7.7}$$

Beweis: vgl. Anhang B, Lemma B.3 □

Satz 7.8. *Die Menge $C_0^\infty(\Omega)$ über dem Gebiet $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ist dicht in $L^p(\Omega)$ mit $1 \le p < \infty$.*

Beweis: Nach Lemma 7.3 liegen die stetigen und finiten Funktionen dicht im Raum $L^p(\Omega)$. Die zu einer finiten und stetigen Funktion u konstruierte Mittelungsfunktion u_h gehört für $0 < h \le h_0$ zu $C_0^\infty(\Omega)$. Dies ergibt sich aus dem Beweis von Satz 7.7. Nach Formel (7.7) (ii) approximieren die Funktionen u_h die fixierte Funktion u in der L^p-Norm. Daraus folgt die Behauptung des Satzes. □

7.2 Verallgemeinerte Ableitungen

Im Hinblick auf die Näherungslösung von Randwertaufgaben partieller Differentialgleichungen ist eine Abschwächung des *klassischen Differentiationsbegriffs* sinnvoll (vgl. Kapitel 5). Sei wiederum $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ein Gebiet.

Definition 7.9.

$$L^1_{loc}(\Omega) := \left\{ v : \Omega \to \mathbf{R} \text{ oder } \mathbf{C} \text{ meßbar} \mid \int_A |v(x)| \; dx < \infty \;\; \forall A \subset\subset \Omega \right\}. \tag{7.8}$$

$A \subset\subset B$ heißt, daß A kompakt ist und $A \subset B$ gilt.

Bemerkung 7.10. Für beschränkte Gebiete Ω gelten folgende Mengeninklusionen mit $k \in \mathbf{N}_0$ und $p > 1$:

$$C_0^\infty(\Omega) \subset C^k(\overline{\Omega}) \subset L^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega) \subset L^1(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega). \tag{7.9}$$

Die drei letzten Inklusionen in (7.9) sind für unbeschränkte Gebiete $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ im allgemeinen Fall nicht richtig (*Übungsaufgabe !*).

Wir erinnern an die für die weiteren Ausführungen sehr wichtige Regel der partiellen Integration (vgl. Lemma 5.11). Daraus folgt speziell für $u \in C^1(\overline{\Omega})$ und beliebige Testfunktionen $v \in C_0^\infty(\Omega)$ sowie alle $i = 1, ..., n$

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v \; dx = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} \; dx. \tag{7.10}$$

Nach der Hölderschen Ungleichung (Lemma 6.13) ist

$$\left| \int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} \; dx \right| = \left| \int_{supp\ v} u \frac{\partial v}{\partial x_i} \; dx \right| \le \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{C(\overline{\Omega})} \int_{supp\ v} |u| \; dx$$

bzw.

$$\left| \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v \; dx \right| = \left| \int_{supp\ v} \frac{\partial u}{\partial x_i} v \; dx \right| \le \|v\|_{C(\overline{\Omega})} \int_{supp\ v} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| \; dx,$$

d.h. die Integrale in (7.10) ergeben noch Sinn für $u, \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Definition 7.11. *$w_i \in L^1_{loc}(\Omega)$ heißt* verallgemeinerte erste Ableitung von $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ in x_i–Richtung, *falls*

$$\int_\Omega w_i v \; dx = -\int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_i} \; dx, \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega) \tag{7.11}$$

gilt. Man schreibt $w_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$.

Man kann zeigen, daß verallgemeinerte erste Ableitungen im Falle ihrer Existenz auch eindeutig bestimmt sind (Übungsaufgabe !).

Beispiel 7.12. Für $u \in C^1(\Omega)$ gilt $w_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \; i = 1, ..., n$, d.h. stetig differenzierbare Funktionen sind auch verallgemeinert differenzierbar. □

Beispiel 7.13. Sei das Gebiet $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ beschränkt mit Lipschitz-stetigem Rand , d.h. $\partial\Omega \in C^{0,1}$ und gelte

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{I} \overline{\Omega}_i; \quad \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset, \;\; i \neq j; \quad \partial\Omega_i \in C^{0,1}, \quad i = 1, ..., I.$$

Sei ferner $u \in C(\overline{\Omega})$ stückweise stetig differenzierbar derart, daß für $|\alpha| = 1$ gilt

$$D^\alpha u|_{\Omega_i} \in C(\Omega_i); \quad D^\alpha u|_{\Omega_i} \text{ stetig fortsetzbar auf } \overline{\Omega}_i, i = 1, ..., I.$$

Dann ist w_α mit $w_\alpha|_{\Omega_i} = D^\alpha u, \; i = 1, ..., I$ verallgemeinerte erste Ableitung von u, denn partielle Integration zeigt für $j = 1, ..., n$ und beliebige Testfunktionen $v \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned} \int_\Omega u \frac{\partial v}{\partial x_j} \; dx &= \sum_{i=1}^{I} \int_{\Omega_i} u \frac{\partial v}{\partial x_j} \; dx \\ &= \sum_{i=1}^{I} \left(\int_{\partial\Omega_i} u v \nu_{ij} \; ds - \int_{\Omega_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} v \; dx \right) \\ &= -\int_\Omega v \frac{\partial u}{\partial x_j} \; dx. \end{aligned}$$

Dabei ist $\nu_i = (\nu_{ij})_{j=1}^n$ der äußere Normaleneinheitsvektor, der wegen $\partial\Omega_i \in C^{0,1}$ f.ü. auf $\partial\Omega_i$ existiert. Die Randintegrale über $\partial\Omega_i \cap \partial\Omega$ verschwinden wegen $v \in C_0^\infty(\Omega)$. Die Randintegrale über $\partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j, i \neq j$ heben sich jeweils auf. □

Das gerade diskutierte Beispiel spielt später bei der numerischen Lösung elliptischer Randwertprobleme eine wichtige Rolle. Dort benutzt man in der *Methode der finiten Elemente* Ansatz-und Testfunktionen, die über paarweise disjunkten Teilgebieten (den "finiten Elementen") zum Beispiel stückweise polynomiale Funktionen bis zu einem gewissen Grad k sind. Ferner fordert man oft Glattheit dieser Funktionen bis zu einer gewissen Ordnung auf dem gesamten Gebiet Ω. Ableitungen dieser Funktionen sind dann aber in der Regel unstetig an den Kopplungsrändern der Teilgebiete.

7.3 Sobolev-Raum $W^{1,p}(\Omega)$

Nachfolgend betrachten wir Mengen verallgemeinert differenzierbarer, reell- oder komplexwertiger Funktionen auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbf{R}^n$.

Definition 7.14. *Für $1 \leq p \leq \infty$ heißt die Menge*

$$W^{1,p}(\Omega) := \left\{ v \in L^p(\Omega) : \;\; \exists \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^p(\Omega), \;\; i = 1, ..., n \right\} \tag{7.12}$$

Sobolev-Raum *der Funktionen mit verallgemeinerten und zur $p-$ten Potenz auf Ω integrierbaren Ableitungen. Dabei werden jeweils Funktionen, die sich bezüglich des $n-$dimensionalen Lebesgueschen Maßes nur auf einer Menge vom Maß 0 unterscheiden, identifiziert.*

Beispiel 7.15. In Polarkoordinaten (r, ϕ) sei im Kreissektor Ω mit $0 \leq r < R, 0 < \phi < \phi_0$ mit Öffnungswinkel $\phi_0 \in (0, 2\pi]$ die Funktion

$$u(x_1, x_2) \equiv u(r, \phi) := r^\beta \sin(\beta\phi), \quad \beta := \frac{\pi}{\phi_0}$$

gegeben. Sie genügt dem Randwertproblem

$$\Delta u(x) \equiv \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)(x) = 0 \text{ in } \Omega; \quad u(x) = R^\beta \sin(\beta\phi) \text{ auf } \partial\Omega.$$

Man sieht aus $|u| \leq R^\beta$, daß $u \in L^p(\Omega), 1 \leq p \leq \infty$. Nachrechnen des entstehenden Integrals zeigt, daß

$$D^{(1,0)}u(x) = \beta r^{\beta-1} \sin\left((\beta - 1)\phi\right).$$

Also ist

$$D^{(1,0)}u \in L^p(\Omega) \quad \Leftrightarrow \quad (\beta - 1)p + 2 > 0.$$

Eine einfache Umrechnung zeigt, daß in Abhängigkeit vom Öffnungswinkel gilt

$$D^{(1,0)}u \in L^p(\Omega), \quad \forall \phi_0 \in (0, 2\pi], \quad 1 \leq p \leq 2;$$

bzw.

$$D^{(1,0)}u \in L^p(\Omega), \quad \forall \phi_0 \in \left(0, \frac{p}{p-2}\pi\right), \quad p > 2.$$

Analog gilt die Aussage für $D^{(0,1)}u$. Für $2 < p < 4$ ist ferner $\frac{p}{p-2}\pi > 2\pi$. Damit ist $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < 4$ für beliebige Öffnungswinkel $\phi_0 \in (0, 2\pi)$. Für $p \geq 4$ ist $u \in W^{1,p}(\Omega)$ nur für $\phi_0 \in (0, \frac{p}{p-2}\pi)$. □

Die wesentliche funktionalanalytische Charakterisierung der Sobolev-Räume gibt

Satz 7.16. *Der Raum $W^{1,p}(\Omega)$ mit $1 \leq p < \infty$ ist mit der Norm*

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha|\leq 1} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p dx\right)^{1/p} = \left(\|u\|^p_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{1/p}$$

Banach-Raum.

Beweis: (i) Offenbar ist $W^{1,p}(\Omega)$ linearer Raum. Die Normeigenschaften (N1)-(N3) sieht man ebenfalls unmittelbar ein. Es verbleibt zunächst der Nachweis der Dreiecksungleichung. Nach Theorem 6.15 ist der Raum $L^p(\Omega)$ mit der Norm $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ Banach-Raum. Über die Minkowskische Ungleichung

$$\left(\sum_{i=0}^n |\xi_i + \eta_i|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=0}^n |\xi_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=0}^n |\eta_i|^p\right)^{1/p}$$

für reelle Zahlen $\xi_0, ...\xi_n, \eta_0, ..., \eta_n$ finden wir mit der Festsetzung

$$\xi_0 := \|u\|_{L^p(\Omega)}, \ \xi_i := \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{L^p(\Omega)}; \qquad \eta_0 := \|v\|_{L^p(\Omega)}, \ \eta_i := \left\|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right\|_{L^p(\Omega)}$$

schließlich die Dreiecksungleichung wegen

$$\|u+v\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} + \|v\|_{W^{1,p}(\Omega)},$$

d.h. der im Satz definierte Ausdruck ist eine Norm auf $W^{1,p}(\Omega)$.

(ii) Zum Nachweis der Vollständigkeit von $W^{1,p}(\Omega)$ sei $(u_n)_n$ eine Cauchy-Folge in $W^{1,p}(\Omega)$. Dann sind $(u_n)_n$ und $(D^\alpha u_n)_n$ Cauchy-Folgen in $L^p(\Omega)$ für $|\alpha| = 1$. Damit gilt wegen der Vollständigkeit des $L^p(\Omega)$

$$u_n \to u \quad \text{in } L^p(\Omega), \quad n \to \infty,$$

$$D^\alpha u_n \to w_\alpha \quad \text{in } L^p(\Omega), \quad n \to \infty.$$

Wir benutzen jetzt, daß nach der Hölderschen Ungleichung mit $1/p + 1/q = 1$ und für $G \subset \Omega$ gilt

$$\int_G |v| dx \leq \left(\int_G 1^q dx\right)^{1/q} \left(\int_G |v|^p dx\right)^{1/p} \leq (\text{meas}(G))^{1/q} \|v\|_{L^p(\Omega)}.$$

Damit erhalten wir für beliebige kompakte Teilgebiete $G \subset \Omega$

$$u_n \to u \quad \text{in } L^1(G), \quad n \to \infty,$$

$$D^\alpha u_n \to w_\alpha \quad \text{in } L^1(G), \quad n \to \infty.$$

Dann folgt aus

$$\int_\Omega u_n D^\alpha v dx = -\int_\Omega (D^\alpha u_n)\, v dx, \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega)$$

nach Grenzübergang $n \to \infty$, daß

$$\int_\Omega u D^\alpha v dx = -\int_\Omega w_\alpha v dx, \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Daraus erhalten wir $w_\alpha = D^\alpha u$ und $w_\alpha \in L^p(\Omega)$. Hierbei wird die Eindeutigkeit der verallgemeinerten ersten Ableitungen benutzt. Folglich ist

$$u_n \to u \quad \text{in } W^{1,p}(\Omega), \quad n \to \infty,$$

d.h. jede Cauchy–Folge in $W^{1,p}(\Omega)$ konvergiert. □

Satz 7.17. *Der Raum $W^{1,\infty}(\Omega)$ ist Banach–Raum mit der Norm*

$$\|u\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq 1} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Beweis: Übungsaufgabe ! □

Die nachfolgend definierten Teilmengen, bei denen in einem verallgemeinerten Sinne die Randwerte verschwinden, spielen später eine tragende Rolle bei der Untersuchung gewisser Randwertaufgaben elliptischer Differentialgleichungen.

Definition 7.18. *Der Raum $W_0^{1,p}(\Omega)$ ist der Abschluß der Menge $C_0^\infty(\Omega)$ in der Norm $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$.*

Satz 7.19. *Der Raum $W_0^{1,p}(\Omega)$ mit $1 \leq p < \infty$ ist mit der Norm $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ Banach–Raum.*

Beweis: $C_0^\infty(\Omega)$ ist linearer Unterraum von $W^{1,p}(\Omega)$. Damit ist $W_0^{1,p}(\Omega)$ abgeschlossener linearer Unterraum von $W^{1,p}(\Omega)$. Daraus folgt die Behauptung. □

Die gerade vorgenommene Definition der Räume $W_0^{1,p}(\Omega)$ erlaubt es, ihre Elemente beliebig gut durch Testfunktionen $C_0^\infty(\Omega)$ zu approximieren. Dies ist eine grundlegende Beobachtung für die funktionalanalytische Behandlung partieller Differentialgleichungen. Es ergibt sich in natürlicher Weise die Frage, ob ein derartiger Zugang auch für die Sobolev-Räume $W^{1,p}(\Omega)$ möglich ist. Nach Satz 7.16 ist der Raum $W^{1,p}(\Omega)$ vollständig. Dann ist auch der Abschluß der Menge $C^1(\Omega)\cap W^{1,p}(\Omega)$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{W^{1,p}}$ in $W^{1,p}(\Omega)$ enthalten. Für $1 \le p < \infty$ gilt folgende Aussage.

Satz 7.20. (*Satz von Meyer/ Serrin*)
Sei $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ein Gebiet sowie $1 \le p < \infty$. Dann liegt die Menge $C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega))$ dicht in $W^{1,p}(\Omega)$. Bei hinreichend glattem Rand $\partial\Omega$ stimmt $W^{1,p}(\Omega)$ mit dem Abschluß von $C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega))$ bezüglich der Norm in $W^{1,p}(\Omega)$ überein.

Beweis: Den Beweis des ersten Teils des Satzes findet man bei Alt [2], Satz 2.14. Zum Beweis der vollständigen Aussage vgl. des vgl. z.B. Zeidler [10] Abschn. 21.4d oder Adams [1]. □

Für Anwendungen auf lineare partielle Differentialgleichungen spielt der Fall $p = 2$ eine wesentliche Rolle.

7.4 Höhere verallgemeinerte Ableitungen

In natürlicher Weise erklärt man jetzt sukzessiv höhere verallgemeinerte Ableitungen.

Definition 7.21. *$w_\alpha \in L^1_{loc}(\Omega)$ heißt* verallgemeinerte Ableitung $D^\alpha u$ von $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, *falls gilt*

$$\int_\Omega w_\alpha v \ dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D^\alpha v \ dx \qquad \forall v \in C_0^\infty(\Omega). \tag{7.13}$$

Man schreibt auch $w_\alpha = D^\alpha u$.

Beispiel 7.22. Für $u \in C^{|\alpha|}(\Omega)$ stimmen die "klassischen" (stetigen) und verallgemeinerten Ableitungen auf Ω überein. □

Beispiel 7.23. Sei $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ beschränkt, $\partial\Omega \in C^{0,1}$ und gelte

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{I} \overline{\Omega}_i; \quad \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset, \ \ i \neq j; \quad \partial\Omega_i \in C^{0,1}, \quad i = 1, ..., n.$$

Sei ferner $u \in C^{k-1}(\overline{\Omega})$ mit $k \in \mathbf{N}$ derart stückweise stetig differenzierbar, daß für $|\alpha| \le k$

$$D^\alpha u|_{\Omega_i} \in C(\Omega_i); \quad D^\alpha u|_{\Omega_i} \ \text{ stetig fortsetzbar auf } \overline{\Omega}_i, i = 1, ..., I.$$

Dann ist v_α mit $v_\alpha|_{\Omega_i} = D^\alpha u$ für alle Multiindizes α mit $|\alpha| \le k$ verallgemeinerte Ableitung von u. □

Definition 7.24. *Für $1 \le p \le \infty$ heißt die Menge*

$$W^{k,p}(\Omega) := \{v \in L^p(\Omega) : \ \exists D^\alpha v \in L^p(\Omega), \ \forall \alpha : |\alpha| \le k\} \tag{7.14}$$

Sobolev-Raum *der Funktionen mit verallgemeinerten und zur $p-$ten Potenz auf Ω integrierbaren Ableitungen bis zur Ordnung k.*

Satz 7.25. *Sei Ω Gebiet im $\mathbf{R}^n$. Dann ist der Raum $W^{k,p}(\Omega)$ Banach-Raum für $1 \le p < \infty$ mit der Norm*

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \le k} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p} \tag{7.15}$$

bzw. für $p = \infty$ mit

$$\|u\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \le k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}. \tag{7.16}$$

Beweis: Analog zum Beweis der Sätze 7.16 und 7.17. □

Definition 7.26. Der Raum $W_0^{k,p}(\Omega)$ *ist der Abschluß der Menge $C_0^\infty(\Omega)$ in der Norm $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ des Raumes $W^{k,p}(\Omega)$.*

Bemerkung 7.27. Schließlich gilt auch noch die Verallgemeinerung von Satz 7.20 für $m \in \mathbf{N}$. Man kann zeigen, daß die Menge $C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ dicht in $W^{k,p}(\Omega)$ ist. Bei hinreichend glattem Rand $\partial\Omega$ stimmen sogar $W^{k,p}(\Omega)$ und der Abschluß von $C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ bezüglich der Norm in $W^{k,p}(\Omega)$ überein. □

Satz 7.28. *Der Raum $W_0^{k,p}(\Omega)$ ist für die Zahlen $1 \le p < \infty$ Banach-Raum mit der Norm $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$.*

Beweis: Analog zum Beweis von Satz 7.19. □

Kapitel 8

Hilbert-Räume

Wir betrachten jetzt spezielle normierte Räume, in denen ein Skalarprodukt definiert ist. Letzteres wird sich als äußerst wichtig bei der praktischen Behandlung von Operatorgleichungen erweisen. Weiterhin kann das Problem der Bestapproximation (vgl. Abschnitt 4.5) in endlichdimensionalen linearen Unterräumen vollständig und konstruktiv gelöst werden.

8.1 Prä-Hilbert Räume

Definition 8.1. *(i) Sei X reeller oder komplexer linearer Raum. Eine Abbildung* $(\cdot,\cdot) : X \times X \to$ **R** *(oder* **C** *) mit den Bedingungen*

$$
\begin{array}{llcll}
\text{(H1)} & (u,u) & \geq & 0 & \text{(Positivität)} \\
\text{(H2)} & (u,u) & = & 0 \iff u = 0 & \text{(Definitheit)} \\
\text{(H3)} & \overline{(u,v)} & = & (v,u) & \text{(Symmetrie)} \\
\text{(H4)} & (u,\alpha v + \beta w) & = & \alpha(u,v) + \beta(u,w) & \text{(Linearität)}
\end{array}
$$

für alle $u, v, w \in X$ *und* $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ *oder* **C** *heißt* Skalarprodukt *auf X.*
(ii) Ein linearer Raum mit Skalarprodukt heißt Prä-Hilbert-Raum.

Aus den Axiomen (H3) und (H4) folgen unmittelbar die Eigenschaft

(H4') $\quad (\alpha u + \beta v, w) = \overline{\alpha}(u,w) + \overline{\beta}(v,w) \qquad$ (Antilinearität)

sowie

Beispiel 8.2. *Auf* $\mathbf{R}^m$ *bzw.* $\mathbf{C}^m$ *bildet*

$$(x,y) := \sum_{i=1}^{m} \overline{x}_i y_i$$

mit $x = (x_1, ..., x_m)^t$ *bzw.* $y = (y_1, ..., y_m)^t$ *ein Skalarprodukt.*

Lemma 8.3. *Ein Skalarprodukt genügt der* Ungleichung von Cauchy-Schwarz

$$|(u,v)|^2 \leq (u,u)(v,v) \tag{8.1}$$

für alle $u, v \in X$. Genau für linear abhängige u und v gilt die Gleichheit.

Beweis. Für $v = 0$ ist die Ungleichung richtig. Im Falle $v \neq 0$ findet man die Ungleichung (8.1) mit $\alpha := \frac{(v,u)}{(v,v)}$ aus

$$0 \leq (u - \alpha v, u - \alpha v) = (u, u) - \alpha(u, v) - \overline{\alpha}[(v, u) - \alpha(v, v)].$$

Der Fall linearer Unabhängigkeit sei als Übungsaufgabe zu lösen. □

Satz 8.4. *In jedem Prä-Hilbert Raum X ist durch*

$$\|u\| := (u, u)^{1/2}, \quad u \in X, \tag{8.2}$$

eine Norm erklärt. Damit ist jeder Prä-Hilbert Raum auch normierter Raum.

Beweis. Die Normeigenschaften (N1)-(N3) folgen jeweils aus den Axiomen (H1), (H2) sowie (H4) und (H4'). Die Dreiecksungleichung (N4) ist Folgerung aus Lemma 8.3 wegen

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + 2\mathrm{Re}(u, v) + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (\|u\| + \|v\|)^2.$$

□

Damit läßt sich die Ungleichung von Cauchy-Schwarz auch schreiben als

$$|(u, v)| \leq \|u\|\|v\|,$$

d.h. das in Beispiel 8.2 gegebene Skalarprodukt erzeugt gerade die euklidische Norm.

Satz 8.5. *Auf einem normierten Raum X mit Norm $\|\cdot\|$ existiert ein Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$ mit*

$$\|u\| := \sqrt{(u, u)} \tag{8.3}$$

genau dann, wenn die Parallelogrammgleichung

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 \tag{8.4}$$

für alle $u, v \in X$ gilt.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ Diese Aussage folgt durch Nachrechnung.

(ii) $\Leftarrow$ Im Falle eines reellen normierten Raumes X wird gesetzt

$$(u, v) := \frac{1}{4}\{\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2\}. \tag{8.5}$$

Für einen komplexen normierten Raumes X sei

$$(u, v) := \frac{1}{4}\{\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 + i\|u + iv\|^2 - i\|u - iv\|^2\}.$$

Der Nachweis der Axiome (H1)-(H3) ist wieder elementar und wird dem Leser zur Übung überlassen. Beim Nachweis von Axiom (H4), d.h. der Linearität des Skalarproduktes, führen wir nur den reellen Fall aus. (Den komplexen Fall findet man in der Arbeit Jordan/ von Neumann: *On inner products in linear metric spaces*, Annals of Math. (1935), 719-723.)

Aus (8.5) folgt zunächst

$$(-u, w) = -(u, w) \tag{8.6}$$

und daraus $(0,w)=0$. Definition (8.5) und Parallelogrammgleichung liefern dann

$$\begin{aligned}(u,w)+(v,w) &= \frac{1}{4}\{\|u+w\|^2-\|u-w\|^2+\|v+w\|^2-\|v-w\|^2\}\\ &= \frac{1}{2}\left\{\left\|\frac{u+v}{2}+w\right\|^2-\left\|\frac{u+v}{2}-w\right\|^2\right\}\\ &= 2\left(\frac{u+v}{2},w\right).\end{aligned}$$

Mit $v=0$ folgt dann

$$(u,w)=2\left(\frac{u}{2},w\right).$$

Die Additivität des Skalarproduktes

$$(u,w)+(v,w)=(u+v,w)$$

ersehen wir dann unter Beachtung der vorher abgeleiteten Gleichung. Es verbleibt der Nachweis der Homogenität des Skalarproduktes: Induktiv folgt aus den beiden letzten Gleichungen

$$k(u,w)=(ku,w),\quad \forall k\in\mathbf{N}$$

und

$$\frac{1}{2^l}(u,w)=\left(\frac{u}{2^l},w\right),\quad \forall l\in\mathbf{N}.$$

Daraus folgt sofort

$$\frac{k}{2^l}(u,w)=\left(\frac{k}{2^l}u,w\right),\quad \forall k\in\mathbf{Z},\ \forall l\in\mathbf{N}.$$

Die Homogenität

$$\gamma(u,w)=(\gamma u,w)\quad \forall\gamma\in\mathbf{R}$$

ergibt sich dann aus der Dichtheit der (im Dualsystem geschriebenen) rationalen Zahlen in $\mathbf{R}$ sowie der Stetigkeit der (bei der Definition des Skalarproduktes verwendeten) Norm auf X. □

Lemma 8.6. *In einem Prä-Hilbert Raum ist das Skalarprodukt stetig.*

Beweis: Wir betrachten zwei Folgen mit $u_n\to u$ und $v_n\to v$ für $n\to\infty$. Dann liefern Nullergänzung und die Cauchy–Schwarzsche Ungleichung

$$\begin{aligned}|(u_n,v_n)-(u,v)| &\le |(u_n,v_n-v)|+|(u_n-u,v)|\\ &\le \|u_n\|\|v_n-v\|+\|u_n-u\|\|v\|\to 0,\ \ n\to\infty.\end{aligned}$$

□

8.2 Hilbert-Räume

Definition 8.7. *Ein vollständiger Prä-Hilbert Raum heißt* Hilbert-Raum.

Satz 8.8. *Jeder Prä-Hilbert Raum X ist normisomorph zu einem dichten Unterraum eines (bis auf Normisomorphie eindeutig bestimmten) Hilbert–Raumes $\tilde{X}$. $\tilde{X}$ heißt* Vervollständigung von

X.

Beweis: Nach Satz 4.16 findet man zu jedem normierten Raum X die Vervollständigung $\tilde{X}$. Da sich die Parallelogrammgleichung von X auf $\tilde{X}$ vererbt, besitzt $\tilde{X}$ nach Satz 8.5 auch ein Skalarprodukt. Daraus folgt die Behauptung. □

Für die späteren Anwendungen wichtige Beispiele unendlich-dimensionaler Hilbert-Raumes erklären wir in

Satz 8.9. *Sei $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ein Gebiet.*
(i) Der Raum $L^2(\Omega)$ ist Hilbert-Raum mit dem Skalarprodukt

$$(u,v)_{L^2} := \int_\Omega \overline{u(x)} v(x)\ dx.$$

(ii) Die Räume $W^{m,2}(\Omega)$ und $W_0^{m,2}(\Omega)$ sind Hilbert-Räume mit dem Skalarprodukt

$$(u,v)_{W^{m,2}(\Omega)} := \sum_{0 \le |\alpha| \le m} \int_\Omega \overline{D^\alpha u} D^\alpha v\ \ dx.$$

Beweis: Wir beschränken uns auf den Fall $m = 0$, d.h. Aussage (i):
Nach der Hölderschen Ungleichung (vgl. Lemma 6.13) existiert das Skalarprodukt. Die Axiome (H1)-(H4) des Skalarproduktes prüft man elementar nach. □

8.3 Approximation in Prä–Hilbert Räumen

Wir erinnern zunächst an den Begriff der *Bestapproximation* (vgl Abschnitt 4.5).

Definition 8.10. *(i) Zwei Elemente u und v eines Prä-Hilbert Raumes X mit der Eigenschaft $(u,v) = 0$ heißen* orthogonal. *(Schreibweise: $u \perp v$)*

(ii) Zwei Teilmengen U und V von X heißen orthogonal *(Schreibweise: $U \perp V$), falls jedes Paar von Elementen $u \in U$ und $v \in V$ orthogonal ist.*

Lemma 8.11. *Für zwei orthogonale Elemente $u, v \in X$ gilt*

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2. \tag{8.7}$$

Beweis: Es gilt unter Ausnutzung der Orthogonalität

$$(u + v, u + v) = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\mathrm{Re}(u,v) = \|u\|^2 + \|v\|^2.$$

□

Satz 8.12. *(i) Sei $U \subset X$ linearer Teilraum. Dann ist $w \in U$ Bestapproximation an $u \in X$ bezüglich U g.d.w.*

$$(w - u, v) = 0, \quad \forall v \in U. \tag{8.8}$$

(ii) Die Bestapproximation ist eindeutig bestimmt.

Beweis: Ausgangspunkt ist die für alle $w, v \in U$ und alle $\beta \in \mathbf{R}$ gültige Identität

$$||u - w - \beta v||^2 = ||u - w||^2 - 2\beta \mathrm{Re}(u - w, v) + \beta^2 ||v||^2. \tag{8.9}$$

$(i)_1$ *Notwendigkeit:* Sei w Bestapproximation. Es sei angenommen, daß ein Element $v \in U$ existiert mit $(u - w, v) \neq 0$. Wir setzen fest

$$\beta := \frac{\mathrm{Re}(u - w, v)}{||v||^2}.$$

Mit der Wahl $z := w + \beta v$ ergibt sich aus (8.9) dann mit

$$||u - z||^2 = ||u - w||^2 - \beta^2 ||v||^2 < ||u - w||^2$$

ein Widerspruch zur Bestapproximation von w.

$(i)_2$ *Hinlänglichkeit:* Sei die Orthogonalitätsbedingung aus dem Satz erfüllt. Dann ergibt sich aus (8.9) mit $\beta = 1$

$$||u - (v + w)||^2 = ||u - w||^2 + ||v||^2 \geq ||u - w||^2, \quad \forall v \in U,$$

d.h. w ist Bestapproximation. Man beachte, daß mit v auch $v + w$ ein beliebiges Element in U ist.

(ii) Die Eindeutigkeit der Bestapproximation ergibt sich aus der letzten Ungleichung, da dort Gleichheit nur im Fall $v = 0$ gilt. □

Satz 8.13. *Sei U vollständiger Unterraum des Prä–Hilbert Raumes X. Dann existiert zu jedem $u \in X$ eine und nur eine Bestapproximation w an u bezüglich U.*

Beweis: Wir betrachten eine Folge (w_n) in X mit

$$\|u - w_n\|^2 \leq d^2 + \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbf{N}, \quad d := \inf_{v \in U} \|u - v\|. \tag{8.10}$$

Dann ergibt sich für alle $n, m \in \mathbf{N}$ mittels Parallelogrammgleichung

$$\begin{aligned} & \|(u - w_n) + (u - w_m)\|^2 + \|w_n - w_m\|^2 \\ = \quad & 2\|u - w_n\|^2 + 2\|u - w_m\|^2 \leq 4d^2 + \frac{2}{n} + \frac{2}{m}. \end{aligned}$$

Da U Unterraum ist, ist auch $\frac{1}{2}(w_n + w_m) \in U$. Dann ist (w_n) Cauchy–Folge, denn

$$\|w_n - w_m\|^2 \leq 4d^2 + \frac{2}{n} + \frac{2}{m} - 4 \left\| u - \frac{1}{2}(w_n + w_m) \right\|^2 \leq \frac{2}{n} + \frac{2}{m}.$$

Wegen der Vollständigkeit von U findet man nun ein $w \in U$ mit $w_n \to w, n \to \infty$. Durch den Grenzübergang $n \to \infty$ in (8.10) folgt, daß w Bestapproximation an u bezüglich der Menge U ist. □

Satz 8.12 ermöglicht nun die Berechnung der Bestapproximation bezüglich endlichdimensionaler linearer Teilräume durch Lösung eines linearen Gleichungssystems.

Satz 8.14. *Sei U endlichdimensionaler linearer Teilraum des Prä-Hilbert Raumes X und $\phi_1, ..., \phi_n$ eine Basis von U. Dann gelten folgende Aussagen:*

(i) Das Element $w = \sum_{k=1}^n \alpha_k \phi_k$ ist Bestapproximation an $u \in X$ bezüglich U g.d.w. die Koeffizienten $\alpha_1, ..., \alpha_n$ dem folgenden System von Normalgleichungen genügen

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k (\phi_i, \phi_k) = (\phi_i, u), \quad i = 1, ..., n. \tag{8.11}$$

(ii) *Das lineare Gleichungssystem (8.11) besitzt eine und nur eine Lösung.*

Beweis: (i) Die Normalgleichungen (8.11) sind äquivalent zu $(u - w, v) = 0$ für alle $v \in U$. Dann kann Satz 8.12 angewendet werden.

(ii) Wegen der Basiseigenschaft ist für die Gramsche Matrix $\det(\phi_k, \phi_i)_{k,i=1}^n \neq 0$. Daraus folgen Eindeutigkeit und Existenz der Lösung des Gleichungssystems. □

8.4 Bestapproximation bei Orthonormalsystemen

Definition 8.15. *Eine Teilmenge U des Prä-Hilbert Raumes X heißt* Orthogonalsystem, *falls*

$$(u, v) = 0, \quad \forall u, v \in U, \ u \neq v.$$

U heißt Orthonormalsystem (ONS), *falls zusätzlich $||u|| = 1$ für alle $u \in U$ gilt .*

Wir geben nun einige theoretische Aussagen an, falls U ein von einem ONS aufgespannter endlichdimensionaler Teilraum ist.

Satz 8.16. *Die Bestapproximation w an ein Element $u \in X$ bezüglich $U = span\{\phi_1, ..., \phi_n\}$ mit dem ONS (ϕ_i) genügt der Darstellung* (Fourier-Entwicklung)

$$w = \sum_{k=1}^{n} (\phi_k, u)\phi_k \tag{8.12}$$

und

$$||u - w||^2 = ||u||^2 - \sum_{k=1}^{n} |(\phi_k, u)|^2. \tag{8.13}$$

Insbesondere folgt aus (8.13) die Besselsche Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{n} |(\phi_k, u)|^2 \leq ||u||^2. \tag{8.14}$$

Beweis: Die Normalengleichungen (8.11) vereinfachen sich wegen der Eigenschaften des ONS zu

$$\alpha_i = (\phi_i, u), \quad i = 1, ..., n.$$

Daraus folgt (8.12). Ferner gilt

$$||u - w||^2 = (u - w, u - w) = (u - w, u) = ||u||^2 - \sum_{k=1}^{n} |(\phi_k, u)|^2. \qquad \square$$

Den Grenzübergang $n \to \infty$ charakterisiert der

Satz 8.17. *Sei $\{\phi_i : i \in \mathbf{N}\}$ ONS im Prä-Hilbert Raum X. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $span\{\phi_i : i \in \mathbf{N}\}$ *ist dicht in X.*

(ii) *Für alle $u \in X$ gilt:* $u = \sum_{k=1}^{\infty} (\phi_k, u)\phi_k$.

(iii) *Für alle $u \in X$ gilt die* Parsevalsche Gleichung

$$||u||^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |(\phi_k, u)|^2. \tag{8.15}$$

Ein ONS mit diesen Eigenschaften heißt vollständig.

Beweis: Sei $U_n := \mathrm{span}\{\phi_1, ..., \phi_n\}$. Nach Satz 8.16 ist dann

$$u_n := \sum_{k=1}^{n} (\phi_k, u)\phi_k$$

Bestapproximation an u bezüglich U_n.

$(i) \to (ii)$: Für $u \in X$ und alle $\epsilon > 0$ existieren eine Zahl $N = N(\epsilon) \in \mathbf{N}$ sowie ein Element $\phi \in U_N$ mit $||u - \phi|| < \epsilon$. Für alle $n \geq N(\epsilon)$ ist dann

$$||u - u_n|| = \inf_{v \in U_n} ||u - v|| \leq ||u - \phi|| < \epsilon.$$

Damit folgt $\lim_{n\to\infty} u_n = u$ in X.

$(ii) \to (iii)$: Skalarproduktbildung ergibt wegen (ii)

$$||u||^2 = (u, u) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\phi_k, u)\phi_k, u \right) = \sum_{k=1}^{\infty} |(\phi_k, u)|^2.$$

$(iii) \to (i)$: Nach Satz 8.16 erhalten wir

$$||u - u_n||^2 = ||u||^2 - \sum_{k=1}^{n} |(\phi_k, u)|^2 \to 0, \quad n \to \infty. \qquad \square$$

Teil II

Lineare Operatoren und Funktionale

Kapitel 9

Lineare beschränkte Operatoren

Teil II dieser Vorlesung ist grundlegenden Aussagen zu *linearen Operatoren* und *Funktionalen* auf normierten Räumen gewidmet. Im vorliegenden Kapitel führen wir die grundlegenden Begriffe und Aussagen über *lineare stetige Operatoren* ein. Grundlegend sind dann das *Prinzip der Normbeschränktheit* und der *Satz von Banach-Steinhaus*. Schließlich kommen wir über den Begriff des Projektionsoperators auf das Problem der Bestappproximation zurück.

9.1 Beschränktheit und Stetigkeit

Definition 9.1. *Für normierte Räume X und Y heißt der Operator $A : X \to Y$* linear, *falls gilt*

$$A(\alpha u + \beta v) = \alpha A u + \beta A v, \quad \forall u, v \in X, \quad \alpha, \beta \in \mathbf{R} \ (oder\ \mathbf{C}). \tag{9.1}$$

Ein linearer Operator $A : X \to Y$ heißt beschränkt, *falls eine positive Zahl C existiert mit*

$$\|Au\| \leq C\|u\|, \quad \forall u \in X. \tag{9.2}$$

Jede derartige Zahl C heißt Schranke für A.

Satz 9.2. *Ein linearer Operator $A : X \to Y$ ist genau dann beschränkt, wenn*

$$\|A\| := \sup_{\|u\|=1} \|Au\| < \infty. \tag{9.3}$$

Die Zahl $\|A\|$ ist die kleinste Schranke des Operators A und heißt Norm von A. *Es gilt damit*

$$\|Au\| \leq \|A\| \ \|u\|, \quad \forall u \in X.$$

Beweis. (i) Sei zunächst A beschränkter Operator mit Schranke C, folglich

$$\sup_{\|u\|=1} \|Au\| \leq C.$$

Damit ist speziell die Zahl $\|A\|$ wohldefiniert und nicht größer als jede Schranke von A.

(ii) Ist andererseits $\|A\| < \infty$, so folgt für $u \neq 0$ aus Linearität von A und Homogenität der Norm

$$\|Au\| = \left\| A\left(\|u\|\frac{u}{\|u\|}\right)\right\| = \left\|\|u\| A\left(\frac{u}{\|u\|}\right)\right\| = \|u\| \left\| A\left(\frac{u}{\|u\|}\right)\right\| \leq \|A\| \ \|u\|$$

wegen $\|u/\|u\|\| = 1$. Damit ist der Operator A beschränkt und hat die Schranke $\|A\|$. □

Satz 9.3. *Für lineare Operatoren $A : X \to Y$ sind die Begriffe* Stetigkeit *und* Beschränktheit *äquivalent.*

Beweis. (i) Sei zunächst A stetig. Wir nehmen an, daß keine Konstante C existiert, so daß $\|Au\| \leq C\|u\|$ für alle $u \in X$. Dann finden wir eine Folge (u_n) in X mit $\|u_n\| = 1, \|Au_n\| > n$. Für die Folge $y_n := u_n/\|Au_n\|$ gilt $y_n \to 0, n \to \infty$. Dann zieht die Stetigkeit von A nach sich, daß $Ay_n \to A(0) = 0, n \to \infty$ im Widerspruch zur Konstruktion $\|Ay_n\| = 1$ für alle n. Folglich muß A beschränkt sein.

(ii) Sei nun A beschränkt. Dann sei $u_n \to 0, n \to \infty$. Mit

$$\|Au_n\| \leq \|A\|\|u_n\|$$

ergibt sich dann $Au_n \to A(0) = 0, n \to \infty$, d.h. die Stetigkeit von A im Punkt 0. Die Stetigkeit in einem beliebigen Punkt sieht man wie folgt: Für $u_n \to u, n \to \infty$ ergibt die Linearität des Operators A, daß

$$A(u_n) = A(u_n - u) + A(u) \to A(0) + A(u) = A(u), \quad n \to \infty$$

wegen $u_n - u \to 0, \;\; n \to \infty$. □

9.2 Räume stetiger linearer Operatoren

Definition 9.4. *$\mathcal{L}(X, Y)$ ist die Menge der linearen stetigen (bzw. beschränkten) Operatoren $A : X \to Y$.*

Satz 9.5. *(i) Im Fall normierter Räume X, Y ist auch $\mathcal{L}(X, Y)$ normierter Raum mit der Norm $\| \cdot \|_{\mathcal{L}(X,Y)} := \| \cdot \|$ aus (9.3).*

(ii) Darüber hinaus ist mit Y auch $\mathcal{L}(X, Y)$ Banach-Raum.

In der Regel werden wir den Index $\mathcal{L}(X, Y)$ in der Norm auf $\mathcal{L}(X, Y)$ künftig fortlassen.

Beweis von Satz 9.5: (i) Offenbar ist $\mathcal{L}(X, Y)$ linearer Raum. Man prüft leicht nach, daß sich die Normaxiome (N1)-(N4) auf den Raum $\mathcal{L}(X, Y)$ übertragen.

(ii) Wir zeigen die Vollständigkeit von $\mathcal{L}(X, Y)$: Sei dazu $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{L}(X, Y)$, d.h. zu jedem $\epsilon > 0$ findet man einen Index $N(\epsilon) \in \mathbf{N}$ mit $\|A_n - A_m\| \leq \epsilon$ für alle $n, m \geq N(\epsilon)$. Damit gilt für alle $u \in X$ und alle $n, m \geq N(\epsilon)$

$$\|A_n u - A_m u\| \leq \|A_n - A_m\| \; \|u\| \leq \epsilon\|u\|. \tag{9.4}$$

Damit ist für jedes Element $u \in X$ die Folge $(A_n u)_{n\in\mathbf{N}}$ Cauchy-Folge in Y. Sie konvergiert, da Y vollständig ist.

Dann wird durch $Au := \lim_{n\to\infty} A_n u$ ein Operator $A : X \to Y$ definiert. Offenbar ist A auch linear. Der Grenzübergang $m \to \infty$ in (9.4) zeigt für alle $u \in X$ und alle $n, m \geq N(\epsilon)$

$$\|A_n u - Au\| \leq \epsilon\|u\|.$$

Daraus folgen die Beschränktheit von A und

$$\|A_n - A\| \leq \epsilon, \quad \forall n \geq N(\epsilon).$$

Dies ist die gesuchte Konvergenzaussage $\|A_n - A\| \to 0, n \to \infty$ für die (beliebige) Cauchy-Folge $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$. □

Bemerkung 9.6. Im Beweis von Satz 9.5 nutzten wir die *Normkonvergenz* einer Operatorfolge $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$, d.h. im Sinne der Operatornorm (9.3). Dieser Konvergenzbegriff ist strikt von dem der *punktweisen Konvergenz* einer Operatorfolge zu unterscheiden. Punktweise Konvergenz von $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ liegt vor, wenn für jedes $u \in X$ die Folge $(A_n u)_{n\in\mathbf{N}}$ in Y konvergiert. Normkonvergenz zieht punktweise Konvergenz nach sich. Die Umkehrung ist jedoch im allgemeinen Fall nicht richtig. □

Satz 9.7. *Für normierte Räume X, Y und Z sowie lineare stetige Operatoren $A : X \to Y$ und $B : Y \to Z$ ist auch der durch die Vorschrift*

$$(BA)u := B(Au), \quad \forall u \in X$$

definierte Operator $BA : X \to Z$ ein linearer stetiger Operator mit

$$\|BA\| \leq \|A\| \, \|B\|.$$

Beweis. Dies folgt wegen $\|(BA)u\| = \|B(Au)\| \leq \|B\| \, \|A\| \, \|u\|$. □

Satz 9.8. *Seien U dichter Unterraum des normierten Raumes X und Y ein Banach-Raum. Für jeden Operator $A \in \mathcal{L}(U, Y)$ existiert dann genau ein Operator $\tilde{A} \in \mathcal{L}(X, Y)$ mit $\tilde{A}u = Au$ für alle $u \in U$. Ferner gilt $\|\tilde{A}\| = \|A\|$. $\tilde{A}$ heißt auch* stetige Fortsetzung von A auf X.

Beweis: Wegen der Dichtheit von U in X gibt es zu einem Element $u \in X$ eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ in U mit $u_n \to u, n \to \infty$. Wegen

$$\|Au_n - Au_m\| \leq \|A\| \, \|u_n - u_m\|$$

ergibt sich, daß $(Au_n)_{n\in\mathbf{N}}$ Cauchy-Folge in Y ist. Wir setzen nun

$$\tilde{A}u := \lim_{n\to\infty} Au_n.$$

Offenbar ist diese Definition unabhängig von der konkreten Folge $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$, denn mit einer weiteren Folge $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ mit $v_n \to u, n \to \infty$ folgt

$$\|Au_n - Av_n\| \leq \|A\| \, \|u_n - v_n\| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Man sieht sofort, daß $\tilde{A}$ linearer Operator ist. Ferner gilt

$$\tilde{A}u = Au \quad \forall u \in U.$$

Führt man in der Abschätzung

$$\|Au_n\| \leq \|A\| \, \|u_n\|$$

den Grenzübergang $n \to \infty$ durch, so folgt

$$\|\tilde{A}u\| \leq \|A\| \, \|u\|,$$

d.h. die Beschränktheit von $\tilde{A}$ mit $\|\tilde{A}\| \leq \|A\|$. Andererseits schätzt man ab

$$\|A\| = \sup_{\substack{u\in U \\ \|u\|=1}} \|Au\| \leq \sup_{\substack{u\in X \\ \|u\|=1}} \|\tilde{A}u\| = \|\tilde{A}\|.$$

Daraus folgt $\|A\| = \|\tilde{A}\|$.

Wir zeigen noch die Eindeutigkeit: Seien $\tilde{A}_i, i = 1, 2$ zwei Fortsetzungen von A. Für $u \in X$ sei $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ eine Folge in U mit $u_n \to u, n \to \infty$. Aus der Stetigkeit von A ergibt sich wegen

$$\tilde{A}_1 u = \lim_{n\to\infty} \tilde{A}_1 u_n = \lim_{n\to\infty} \tilde{A}_2 u_n = \tilde{A}_2 u,$$

die Aussage $\tilde{A}_1 = \tilde{A}_2$. □

9.3 Satz von Banach-Steinhaus

Theorem 9.9. *(Prinzip der Normbeschränktheit)*
Seien X Banach–Raum und Y normierter Raum. Die Teilmenge $U \subset \mathcal{L}(X,Y)$ sei punktweise beschränkt, *d.h. zu jedem $u \in X$ existiert eine Konstante C_u mit $\|Au\| \leq C_u$ für alle Operatoren $A \in U$. Dann gibt es eine Konstante C derart, daß für alle $A \in U$ gilt*

$$\|A\| \leq C.$$

Beweis: Zu einem Operator $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ definieren wir die Funktion $F_A \in C(X)$ durch

$$F_A : u \mapsto \|Au\|.$$

Ferner sei

$$V := \{F_A : A \in U\} \subset C(X).$$

Gemäß Voraussetzung ist

$$|F_A(u)| = \|Au\| \leq C_u, \quad \forall F_A \in V,$$

also ist die Menge V punktweise beschränkt. Nach dem Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit (vgl. Theorem 2.18) folgen die Existenz einer offenen Kugel $B = B(u_0; r) \subset X$ und einer Konstanten C mit

$$\|Au\| = |F_A(u)\| \leq C, \quad \forall u \in B, \ \forall A \in U.$$

Dann ergibt sich aber für alle $u \in X$ mit $\|u\| \leq 1$ und alle Operatoren $A \in U$ wegen $ru + u_0 \in B(u_0; r)$ über die Dreiecksungleichung die Abschätzung

$$\|Au\| = \frac{1}{r}\|A(ru + u_0) - Au_0\| \leq \frac{2C}{r}.$$

Daraus ersehen wir die gesuchte Beschränktheit von A, denn

$$\|A\| \leq \frac{2C}{r}, \quad \forall A \in U.$$

□

Satz 9.10. *Sei $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ eine punktweise konvergente Folge beschränkter linearer Operatoren eines Banach-Raumes X in einen normierten Raum Y, d.h. $(A_n u)_{n\in\mathbf{N}}$ konvergiert für alle $u \in X$. Dann ist auch der durch*

$$Au := \lim_{n\to\infty} A_n u \tag{9.5}$$

definierte Grenzoperator ein beschränkter linearer Operator $A \in \mathcal{L}(X,Y)$.

Beweis: Offenbar ist der im Satz definierte Grenzoperator A linear. Die Menge

$$U := \{A_n : n \in \mathbf{N}\} \subset \mathcal{L}(X,Y)$$

ist punktweise beschränkt, da jede konvergente Folge beschränkt ist. Dann folgt nach Theorem 9.9 die Existenz einer Konstanten C mit

$$\|A_n\| \leq C, \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

d.h.

$$\|A_n u\| \leq C\|u\|, \quad \forall n \in \mathbf{N}, \ \forall u \in X.$$

Im Grenzübergang $n \to \infty$ ergibt sich wegen

$$\|Au\| \leq C\|u\|, \quad \forall u \in X$$

die Beschränktheit des Operators A. □

Wir beweisen nun ein wichtiges notwendiges und hinreichendes Kriterium für die punktweise Konvergenz einer Operatorfolge im Raum $\mathcal{L}(X,Y)$.

Theorem 9.11. *(Satz von Banach-Steinhaus)*
Seien X Banach-Raum und Y normierter Raum. Eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbf{N}}$ aus $\mathcal{L}(X,Y)$ konvergiert punktweise gegen $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ genau dann, wenn

a) *Für alle Elemente u einer in X dichten Teilmenge U gilt $A_n u \to Au$, $n \to \infty$.*

b) *Es existiert eine Konstante C mit $\|A_n\| \leq C$ für alle $n \in \mathbf{N}$.*

Beweis: (i) *Notwendigkeit:* Folgerung aus Satz 9.10.

(ii) *Hinlänglichkeit:* Wir betrachten ein beliebiges Element $u \in X$. Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es dann wegen der Dichtheit von U in X ein Element $v \in U$ mit

$$\|v-u\| < \frac{\epsilon}{2(C+\|A\|)}$$

und darüber hinaus wegen a) eine Zahl $N(\epsilon) \in \mathbf{N}$ mit

$$\|A_n v - Av\| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall n \geq N(\epsilon).$$

Nullergänzung und Dreiecksungleichung ergeben unter Beachtung von b), daß

$$\begin{aligned} \|A_n u - Au\| &\leq \|A_n u - A_n v\| + \|A_n v - Av\| + \|Av - Au\| \\ &< \|A_n\|\, \|u-v\| + \frac{\epsilon}{2} + \|A\|\, \|v-u\| \\ &\leq (C+\|A\|)\, \|u-v\| + \frac{\epsilon}{2} \\ &< \epsilon, \quad \forall n \geq N(\epsilon), \end{aligned}$$

also $A_n u \to Au, n \to \infty$. □

9.4 Projektionsoperatoren

Definition 9.12. *Seien X normierter Raum und $U \subset X$ ein nichtleerer Unterraum. Ein Operator $P \in \mathcal{L}(X,U)$ mit der Eigenschaft $Pu = u$ für alle $u \in U$ heißt* Projektion von X auf U.

Satz 9.13. *Ein nichttrivialer beschränkter linearer Operator ist Projektionsoperator genau dann, wenn $P^2 = P$. Es gilt $\|P\| \geq 1$.*

Beweis: Sei $P : X \to U$ Projektionsoperator. Wegen $Pu \in U$ ergibt sich

$$P^2 u = P(Pu) = Pu, \quad \forall u \in X.$$

Sei jetzt $P^2 = P$. Mit der Festlegung $U := P(X)$ finden wir für jedes Element $u \in U$ ein geeignetes Element $v \in X$ mit $u = Pv$. Also ist

$$Pu = P(Pv) = Pv = u.$$

Aus $P^2 = P$ folgt nach Satz 9.7
$$\|P\| \leq \|P\|^2,$$
damit $\|P\| \geq 1$. □

Satz 9.14. *Sei U nichtleerer vollständiger Unterraum des Prä-Hilbert Raumes X. Die (nicht-triviale) Abbildung P, die jedem Element $u \in X$ die Bestapproximation w bezüglich U zuordnet, ist Projektionsoperator. Sie heißt* orthogonale Projektion von X auf U *und erfüllt* $\|P\| = 1$.

Beweis: Für alle $u \in U$ ist $Pu = u$. Aus der Orthogonalitätsbedingung für die Bestapproximation in Prä-Hilbert Räumen (vgl. Satz 8.12) ergeben sich die Linearität von P (Begründung !) und

$$\begin{aligned} \|u\|^2 &= \|Pu + (u - Pu)\|^2 = \|Pu\|^2 + \|u - Pu\|^2 \\ &\geq \|Pu\|^2, \quad \forall u \in X. \end{aligned}$$

Also ist $\|P\| \leq 1$. Nach Satz 9.13 muß also $\|P\| = 1$ gelten. □

Kapitel 10

Invertierbarkeit linearer Operatoren

Im vorliegenden Kapitel geben wir vor allem Kriterien für die Invertierbarkeit linearer stetiger Operatoren an. Die entscheidende Aussage ist der *Homöomorphiesatz* von S. Banach. Schließlich kann man für lineare kontraktive Operatoren die Lösung von Operatorgleichungen 2. Art explizit über die Neumann'sche Reihe angeben.

10.1 Homöomorphiesatz

Definition 10.1. *Sei $A : X \to Y$ linearer Operator. Falls es einen linearen Operator $S : Y \to X$ gibt, so daß die folgenden Gleichungen*

$$AS = I_Y, \qquad SA = I_X \tag{10.1}$$

für die identischen Abbildungen I_X bzw. I_Y von X bzw. Y erfüllt sind, so heißt S inverser Operator (Umkehroperator) *von A. Man schreibt*

$$A^{-1} := S. \tag{10.2}$$

Wir wollen jetzt für einen linearen stetigen Operator $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ untersuchen, wann der inverse Operator A^{-1} als stetiger Operator charakterisiert werden kann. Ein derartiger Operator heißt *Homöomorphismus.* Dazu betrachten wir zunächst den Fall endlich-dimensionaler Räume.

Satz 10.2. *Seien X und Y normierte Räume und speziell X endlich-dimensional. Jeder lineare Operator $A : X \to Y$ ist dann stetig.*

Beweis: Sei $\{\phi_1, ..., \phi_n\}$ eine Basis in X. Jedes Element in X besitzt dann eine Basisdarstellung der Form

$$u = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \phi_k.$$

Ferner ist auf X der durch

$$\|u\|_\infty := \max_{k=1,\dots,n} |\alpha_k|$$

definierte Ausdruck eine Norm. Wegen der Äquivalenz aller Normen auf endlich-dimensionalen Räumen (vgl. Satz 4.8) gibt es für eine beliebige andere Norm $\|\cdot\|$ auf X eine Konstante $C > 0$ derart, daß

$$\|u\|_\infty \le C\|u\|, \quad \forall u \in X.$$

Dann schätzen wir ab

$$\|Au\| = \left\| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k A\phi_k \right\| \le \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k| \; \|A\phi_k\| \le C \sum_{k=1}^{n} \|A\phi_k\| \; \|u\|.$$

Also ist A beschränkt und folglich stetig. □

Folgerung 10.3. *Seien X und Y endlich-dimensionale normierte Räume. Für bijektive Operatoren $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ gehört der inverse Operator zu $\mathcal{L}(Y,X)$.*

Beweis: Die Bijektivität von $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ impliziert, daß der inverse Operator $A^{-1} : Y \to X$ existiert. Die Linearität von A^{-1} folgt aus der für beliebige $u, v \in X$ und $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ gültigen Darstellung

$$\begin{aligned} AA^{-1}(\alpha u + \beta v) &= \alpha u + \beta v = \alpha AA^{-1}u + \beta AA^{-1}v \\ &= A(\alpha A^{-1}u + \beta A^{-1}v). \end{aligned}$$

Die Stetigkeit des inversen Operators folgt bereits aus Satz 10.2. □

Die Verallgemeinerung von Folgerung 10.3 für Banach-Räume gibt die folgende von S. Banach formulierte Aussage.

Theorem 10.4. *(Homöomorphiesatz)*
Für Banach-Räume X, Y folgt aus der Bijektivität von $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ die Aussage $A^{-1} \in \mathcal{L}(Y,X)$.

Beweis: Existenz und Linearität des inversen Operators A^{-1} folgen wie im Beweis von Folgerung 10.3. Damit ist lediglich noch seine Beschränktheit zu zeigen.
(i) Für $r > 0$ sei

$$U_r := \{Au : \|u\| \le r\}.$$

Wegen der Surjektivität des Operators A gilt

$$Y = \bigcup_{m=1}^{\infty} U_m$$

und

$$Y = \bigcup_{m=1}^{\infty} \overline{U_m}.$$

Wir können nun das Theorem 2.16 (Baire) anwenden, da der Banach-Raum Y natürlich eine offene Kugel enthält. Ferner benutzen wir, daß in einem normierten Raum jede offene Kugel stets eine abgeschlossene Kugel enthält. Dann gibt es eine Zahl $m \in \mathbf{N}$ und eine abgeschlossene Kugel mit nichtverschwindendem Radius

$$B[v_m; \rho_m] \subset \overline{U_m}.$$

Mit $v := v_m/m$ und $\rho := \rho_m/m$ folgt für ein beliebiges Element $b \in B[v;\rho]$, daß $mb \in B[v_m;\rho_m]$. Dann findet man unter Benutzung der Stetigkeit von A eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ in X mit $\|u_n\| \le m$ sowie

$$Au_n \to mb, \quad n \to \infty.$$

Division durch m führt auf $b \in \overline{U_1}$ und damit auf

$$B[v;\rho] \subset \overline{U_1}.$$

(ii) Wir zeigen, daß für alle $b \in Y$ mit $\|b\| \le r\rho$ bei $r > 0$ gilt

$$b \in \overline{U_r}.$$

Mit den Festlegungen

$$b_1 := v + \frac{b}{r}, \quad b_2 := v - \frac{b}{r}$$

folgt für beliebige $b \in Y$ mit $\|b\| \le r\rho$ nach (i), daß

$$b_1, b_2 \in B[v;\rho] \subset \overline{U_1}.$$

Daher gibt es Folgen $(u_{n,i})_{n\in\mathbf{N}}$ mit $\|u_{n,i}\| \le 1$, so daß

$$b_i = \lim_{n\to\infty} Au_{n,i}, \quad i = 1, 2.$$

Daraus folgt nach Dreiecksungleichung $b_1 - b_2 \in \overline{U_2}$ und damit wegen der Linearität von A

$$b = \frac{r}{2}(b_1 - b_2) \in \overline{U_r}.$$

(iii) Sei $b \in Y$ mit $\|b\| \le \rho$. Nun bestimmen wir *per Induktion* eine Folge (b_n) in Y mit

$$b_n \in U_{1/2^{n-1}}$$

sowie

$$\|b - \sum_{k=1}^{n} b_k\| \le \frac{\rho}{2^n}.$$

Als Induktionsanfang ist wegen (ii) $b \in \overline{U_1}$. Damit existiert $b_1 \in U_1$ mit

$$\|b - b_1\| \le \frac{\rho}{2}.$$

(Dazu setze man etwa $b_1 = \frac{1}{2}b$. Man erhält $\|b_1\| \le \frac{1}{2}\rho < \rho$ sowie nach (ii), daß $b_1 \in \overline{U_1}$ und $\|b - b_1\| \in \overline{U_{1/2^{2-1}}}$.)
Für den Induktionsschluß sei nun die Folge bis zum Glied b_n ermittelt. Nach (ii) ist dann

$$b - \sum_{k=1}^{n} b_k \in \overline{U_{1/2^n}}$$

und es existiert ein $b_{n+1} \in U_{1/2^n}$ mit

$$\left\| b - \sum_{k=1}^{n+1} b_k \right\| \le \frac{\rho}{2^{n+1}}.$$

(Man setzt hier zum Beispiel $b_{n+1} = \frac{1}{2}(b - \sum_{k=1}^{n} b_k)$. Offenbar ist dann $\|b_{n+1}\| \le \frac{1}{2^{n+1}} < \frac{1}{2^n}$, somit $b_{n+1} \in U_{1/2^n}$ sowie $\|b - \sum_{k=1}^{n+1} b_k\| = \|b_{n+1}\| \le \frac{\rho}{2^{n+1}}$.)
Für die Partialsummenfolge gilt also

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} b_k \to b, \;\; n \to \infty.$$

(iv) Wir zeigen, daß die Urbildfolge $(A^{-1}S_n)_{n\in\mathbf{N}}$ Cauchy-Folge ist: Wegen $b_k \in U_{1/2^{k-1}}$ ist $\|A^{-1}b_k\| \leq 1/2^{k-1}$, damit gilt für $m > n$

$$\|A^{-1}S_m - A^{-1}S_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{m} A^{-1}b_k \right\| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{2^{k-1}} \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Da nun X als Banach-Raum vollständig ist, findet man ein Element $u \in X$ mit

$$A^{-1}S_n \to u, \quad n \to \infty.$$

Weiterhin folgt wegen der Stetigkeit von A

$$AA^{-1}S_n \to Au, \quad n \to \infty.$$

Andererseits ist nach (iii)

$$AA^{-1}S_n = S_n \to b, \quad n \to \infty.$$

Also gilt

$$Au = b$$

und folglich

$$\|A^{-1}b\| = \|u\| = \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} A^{-1}b_k \right\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = 2.$$

Wir haben damit gezeigt, daß

$$\|A^{-1}b\| \leq 2, \quad \forall b: \ \|b\| \leq \rho.$$

Daraus folgt aber die gesuchte Beschränktheit von A^{-1} mit

$$\|A^{-1}\| \leq \frac{2}{\rho}.$$

□

10.2 Neumannsche Reihe

Wir geben jetzt einen ersten Existenzsatz für den inversen Operator eines linearen stetigen Operators an, der speziell zur Analyse von *Operatorgleichungen 2. Art*

$$u - Bu = f \tag{10.3}$$

herangezogen wird. Er ist eine Spezialisierung des Fixpunktsatzes von Banach.

Satz 10.5. *Sei $B : X \to X$ beschränkter linearer Operator im Banach–Raum X mit der Eigenschaft $\|B\| < 1$.*
(i) Dann ist der Operator $I - B$ mit dem Einheitsoperator I invertierbar, d.h. die Gleichung $u - Bu = f$ hat für jedes $f \in X$ genau eine Lösung $u \in X$. Der inverse Operator erlaubt die Darstellung (Neumannsche Reihe)

$$(I - B)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} B^k \tag{10.4}$$

und ist beschränkt mit

$$\|(I-B)^{-1}\| \le \frac{1}{1-\|B\|}. \tag{10.5}$$

Die iterierten Operatoren werden dabei sukzessiv erklärt durch die Vorschrift $B^0 := I$ *und* $B^n := BB^{n-1},\ n \in \mathbf{N}$.

(ii) Das Verfahren der sukzessiven Approximation

$$u_{n+1} := Bu_n + f, \quad n = 0, 1, 2, ... \tag{10.6}$$

konvergiert bei beliebigem Startelement u_0 *gegen die Lösung* u.
Ferner hat man für beliebige Zahlen $n \in \mathbf{N}_0$ *die a-priori Fehlerabschätzung*

$$\|u-u_n\| \le \frac{\|B\|^n}{1-\|B\|}\|u_1-u_0\| \tag{10.7}$$

sowie die a-posteriori Fehlerabschätzung

$$\|u-u_n\| \le \frac{\|B\|}{1-\|B\|}\|u_n-u_{n-1}\|. \tag{10.8}$$

Beweis. (i) Nach Satz 9.7 haben wir $\|B^n\| \le \|B\|^n$. Wegen $\|B\| < 1$ ergibt sich die absolute Konvergenz der Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty}\|B^k\| \le \sum_{k=0}^{\infty}\|B\|^k = \frac{1}{1-\|B\|}.$$

im Banach–Raum $\mathcal{L}(X,X)$. Nach Satz 4.20 konvergiert dann die Neumannsche Reihe in der Operator–Norm und definiert einen beschränkten linearen Operator

$$S := \sum_{k=0}^{\infty} B^k, \quad \|S\| \le \frac{1}{1-\|B\|}.$$

S ist inverser Operator zu $I-B$, denn wegen $\|B^{n+1}\| \le \|B\|^{n+1} \to 0, n \to \infty$ ergibt sich

$$(I-B)S = (I-B)\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} B^k = \lim_{n\to\infty}(I-B^{n+1}) = I$$

sowie

$$S(I-B) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} B^k(I-B) = \lim_{n\to\infty}(I-B^{n+1}) = I.$$

(ii) Folgerung aus dem Fixpunktsatz von Banach (vgl. Satz 2.13). □

Bemerkung 10.6. *Im Fall endlich-dimensionaler Räume X ist die hinreichende Bedingung des Satzes 10.5 sogar notwendig.* □

Beweis: *Übungsaufgabe !*

Kapitel 11

Lineare stetige Funktionale

Im vorliegenden Kapitel betrachten wir speziell lineare Abbildungen $f : X \to \mathbf{R}$ bzw. $f : X \to \mathbf{C}$ eines linearen Raumes X in den Zahlkörper $\mathbf{R}$ bzw. $\mathbf{C}$. Eine derartige Abbildung heißt *lineares Funktional.*

Wir beweisen Aussagen zur Existenz stetiger linearer Funktionale. Die zentrale Aussage ist dabei der *Fortsetzungssatz von Hahn-Banach*, auf den wir später vielfach zurückgreifen werden. Weiterhin untersuchen wir die Struktur von Räumen stetiger linearer Funktionale, der sogenannten *Dualräume.*

11.1 Satz von Hahn-Banach

Definition 11.1. *Sei $f : U \to \mathbf{K}$ mit $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ oder $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ beschränktes lineares Funktional auf einem Unterraum $U \subset X$. Dann heißt ein beschränktes lineares Funktional $f_0 : U_0 \to \mathbf{K}$ auf einem Unterraum U_0* Fortsetzung von f, *wenn gilt*

$$U \subset U_0, \quad f_0(u) = f(u), \ \forall u \in U, \quad \|f_0\| = \|f\|. \tag{11.1}$$

Die Fortsetzung heißt echt, *wenn U echter Unterraum von U_0 ist.*

Die erste Aussage ist ein *Fortsetzungssatz.* Er ist von grundlegender Bedeutung für die lineare Funktionalanalysis.

Theorem 11.2. *(Hahn-Banach)*
Zu jedem beschränkten linearen Funktional f auf einem Unterraum U eines normierten Raumes X existiert ein beschränktes lineares Funktional g auf X mit den Eigenschaften

(i) $g(u) = f(u), \ \forall u \in U$; (ii) $\|g\| = \|f\|$.

Beweis: Sei zunächst $\mathbf{K} = \mathbf{R}$.

1) Wir zeigen jetzt, daß eine echte Fortsetzung $f_0 : U_0 \to \mathbf{R}$ des Funktionals f existiert, sofern U echter Unterraum von X ist. Dann gibt es ein Element $u_0 \in X$ mit $u_0 \notin U$. Wir setzen

$$U_0 := \text{span}\{U, u_0\} = \{u + \gamma u_0 : u \in U, \gamma \in \mathbf{R}\}.$$

Offensichtlich ist U echter Unterraum von U_0.
Ein lineares Funktional $f_0 : U_0 \to \mathbf{R}$ wird jetzt (bei noch zu fixierender Zahl $\alpha \in \mathbf{R}$) definiert durch

$$f_0(u + \gamma u_0) := f(u) + \alpha\gamma, \quad u \in U, \gamma \in \mathbf{R}.$$

Per Definition ist $f_0(u) = f(u)$ für alle Elemente $u \in U$. Für die gewünschte Aussage bleibt zu zeigen, daß die Zahl α stets so gewählt werden kann, daß $\|f_0\| \le \|f\|$. Dies impliziert auch die fehlende Aussage $\|f_0\| = \|f\|$.

Für $v, w \in U$ schätzen wir ab

$$f(w) - f(v) = f(w-v) \le \|f\| \, \|w-v\| \le \|f\|(\|w+u_0\| + \|v+u_0\|),$$

damit

$$-f(v) - \|f\|\|v+u_0\| \ \le -f(w) + \|f\| \, \|w+u_0\|.$$

Damit kann man eine reelle Zahl α so wählen, daß

$$\sup_{v\in U} \left[-f(v) - \|f\| \, \|v+u_0\|\right] \le \alpha \le \inf_{w\in U} \left[-f(w) + \|f\| \, \|w+u_0\|\right].$$

Für $\gamma > 0$ setzen wir $w = u/\gamma$ und erhalten nach Multiplikation mit γ

$$\alpha\gamma \le -f(u) + \|f\| \, \|u+\gamma u_0\|,$$

d.h.

$$f_0(u+\gamma u_0) = f(u) + \alpha\gamma \le \|f\| \, \|u+\gamma u_0\|.$$

Für $\gamma < 0$ setzen wir $v = u/\gamma$ und erhalten nach Multiplikation mit der Zahl γ analog

$$\alpha\gamma \le -f(u) + \|f\| \, \|u+\gamma u_0\|,$$

also auch

$$f_0(u+\gamma u_0) = f(u) + \alpha\gamma \le \|f\| \, \|u+\gamma u_0\|.$$

Damit haben wir im Grenzübergang $\gamma \to 0$, daß

$$f_0(u) \le \|f\| \, \|u\|, \quad \forall u \in U_0.$$

Die Substitution $u \to -u$ liefert daraus

$$-f_0(u) \le \|f\| \, \|u\|, \quad \forall u \in U_0$$

und folglich die gesuchte Aussage

$$\|f_0\| \le \|f\|.$$

2) Wir wollen jetzt zeigen, daß das Funktional f auf den gesamten Raum X fortgesetzt werden kann.

Sei dazu $\mathcal{M}$ die Menge aller Fortsetzungen von f. Dann kann auf $\mathcal{M}$ eine Halbordnung

$$f_1 \prec f_2$$

erklärt werden, falls f_2 Fortsetzung von f_1 ist. Die sieht man wegen

1. $f_1 \prec f_1$ (Reflexivität)
2. Aus $f_1 \prec f_2$ und $f_2 \prec f_1$ folgt $f_1 = f_2$. (Antisymmetrie)
3. Aus $f_1 \prec f_2$ und $f_2 \prec f_3$ folgt $f_1 \prec f_3$. (Transitivität) .

Sei jetzt $\mathcal{N} := \{f_i \in \mathcal{L}(U_i, \mathbf{R}) : i \in I\}$ (total) geordnete Teilmenge von $\mathcal{M}$, d.h. für jeweils zwei Elemente $f_1, f_2 \in \mathcal{N}$ gilt entweder $f_1 \prec f_2$ oder $f_2 \prec f_1$.

Wir überlegen, daß die Menge

$$V := \bigcup_{i \in I} U_i$$

Unterraum von X ist. Für jeweils zwei Elemente $u_k \in V, k = 1, 2$ ist $u_k \in U_{i_k}$ mit $i_k \in I$. O.B.d.A. ist dann $U_{i_1} \subset U_{i_2}$, da $\mathcal{N}$ geordnet ist. Dann ist auch $\beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 \in U_{i_2} \subset V$.

Wir konstruieren jetzt ein *maximales Element* der Menge $\mathcal{M}$. Dazu wird ein Funktional $h : V \to \mathbf{R}$ über die Vorschrift

$$h(u) := f_i(u), \quad u \in V$$

definiert. Dabei wird der Index $i \in I$ so ausgewählt, daß $u \in U_i$ ist. Das Funktional ist wohldefiniert: Sei dazu $u \in U_{i_1}$ und $u \in U_{i_2}$. Da wieder o.B.d.A. $U_{i_1} \subset U_{i_2}$ angenommen werden kann, ist dann wegen Definition 11.1 $f_{i_1}(u) = f_{i_2}(u)$. Ferner folgt aus der Linearität der Funktionale f_i die Linearität von h. Erneut nach Definition 11.1 ist auch

$$|h(u)| = |f_i(u)| \leq \|f_i\| \, \|u\| \leq \|f\| \, \|u\|, \quad \forall u \in V$$

sowie

$$h(u) = f(u), \quad \forall u \in U.$$

Auf diese Weise ist das Funktional h Fortsetzung für jedes Funktional $f_i, i \in I$, d.h. $f_i \prec h, \ \forall i \in I$. Dann heißt h *obere Schranke* für die Menge $\mathcal{N}$.

Wir benutzen nun das *Zornsche Lemma* (vgl. z.B. van der Waerden, Algebra I, S. 210 ff.): Es liefert, daß die oben definierte (geordnete) Menge $\mathcal{M}$ ein *maximales Element* besitzt, d.h. es existiert ein Funktional $g \in \mathcal{M}$ mit

$$g \prec \tilde{g} \quad \Rightarrow \quad g = \tilde{g}.$$

Dieses Funktional ist auf dem gesamten Raum X definiert, denn sonst finden wir über Teil 1) des Beweises einen Widerspruch. Für den Fall $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ haben wir damit den Satz nachgewiesen.

3) Der Nachweis der Aussage des Satzes für den Fall $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ wird dem Leser zur Übung empfohlen. □

11.2 Folgerungen aus dem Satz von Hahn-Banach

Wir geben jetzt einige nützliche Folgerungen des Fortsetzungssatzes von Hahn-Banach an. Zunächst betrachten wir den folgenden *Trennungssatz.*

Satz 11.3. *Seien X normierter Raum, U ein Unterraum von X und u_0 ein Element mit positivem Abstand*

$$d := \inf_{v \in U} \|v - u_0\| > 0 \tag{11.2}$$

zu U. Dann findet man ein beschränktes lineares Funktional f auf X mit

(i) $f(u) = 0, \ \forall u \in U$, (ii) $f(u_0) = d$, (iii) $\|f\| = 1$.

Beweis: Wir definieren auf $W := \mathrm{span}\{U, u_0\}$ ein lineares Funktional $f : W \to \mathbf{C}$ durch

$$f(u + \gamma u_0) := \gamma d.$$

Es gilt $f(u) = 0$ für alle Elemente $u \in U$. Ferner ist $f(u_0) = d$. Die Beschränktheit von f ersieht man für $\gamma \neq 0$ aus der Abschätzung

$$\|u + \gamma u_0\| = |\gamma| \left\| \frac{u}{\gamma} + u_0 \right\| \geq |\gamma| \inf_{v \in U} \|v - u_0\| = |\gamma| d,$$

denn dann folgt aus

$$|f(u + \gamma u_0)| = |\gamma| d \leq \|u + \gamma u_0\|$$

die Aussage $\|f\| \leq 1$.
Durch Auswahl einer Minimalfolge $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ in U mit

$$\|u_n - u_0\| \leq d + \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbf{N}$$

folgt

$$d = f(u_0) = f(u_0 - u_n) \leq \|f\| \|u_n - u_0\| \leq \|f\| \left(d + \frac{1}{n} \right).$$

Im Grenzübergang $n \to \infty$ ergibt sich $\|f\| \geq 1$. Durch Kombination mit der zuvor gezeigten Ungleichung haben wir $\|f\| = 1$.
Nach dem Satz von Hahn–Banach kann das Funktional f auf X in der geforderten Weise fortgesetzt werden. □

Wir formulieren noch weitere Folgerungen aus den beiden vorausgegangenen Sätzen, auf die wir später verschiedentlich zurückgreifen werden.

Folgerung 11.4. *Sei X normierter Raum.*

(i) *Zu jedem Element $u_0 \neq 0$ existiert ein beschränktes lineares Funktional f auf X mit*

$$f(u_0) = \|u_0\| \quad \text{und} \quad \|f\| = 1. \tag{11.3}$$

(ii) *Gilt für $u \in X$ und alle beschränkten linearen Funktionale f auf X die Aussage $f(u) = 0$, so ist $u = 0$.*

(iii) *Es gilt*

$$\|u\| = \sup_{\|f\|=1} |f(u)|. \tag{11.4}$$

Beweis: (i) Man wendet Satz 11.3 mit $U = \{0\}$ an.

(ii) Dies folgt bereits aus (i).

(iii) Aus $|f(u)| \leq \|f\| \|u\|$ folgt zuerst

$$\sup_{\|f\|=1} |f(u)| \leq \|u\|.$$

Andererseits wählt man nach (i) für $u \neq 0$ ein Funktional f_0 mit

$$f_0(u) = \|u\|, \quad \|f_0\| = 1.$$

Dann ist

$$\sup_{\|f\|=1} |f(u)| \geq |f_0(u)| = \|u\|.$$

Die Kombination beider Ungleichungen zeigt die Behauptung von (iii). □

11.3 Dualräume

Definition 11.5. *Der Raum* $X^* := \mathcal{L}(X, \mathbf{K})$ *mit* $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ *bzw.* $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ *der linearen beschränkten Funktionale auf einem normierten Raum* X *heißt* Dualraum von X.

Eine funktionalanalytische Charakterisierung von Dualräumen gibt

Satz 11.6. *(i)* X^* *ist Banach–Raum mit der Norm*

$$\|f\|_{X^*} := \sup_{\|u\|=1} |f(u)|. \tag{11.5}$$

(ii) Es gilt $\dim X = \dim X^*$.

Beweis: (i) Das folgt aus Satz 9.5.

$(ii)_1$ Wir betrachten zunächst den endlich–dimensionalen Fall, d.h. sei $\dim X = n \in \mathbf{N}$. Nach Satz 10.2 ist jedes lineare Funktional dann beschränkt. Sei jetzt $\phi_1, ..., \phi_n$ Basis von X. Damit ist jedes lineare Funktional f durch die Werte $f(\phi_i), i = 1, ..., n$ eindeutig definiert.

Wir betrachten jetzt die durch die Vorschrift $f_i(\phi_j) = \delta_{ij}$ erklärten Funktionale $f_1, ..., f_n$. Wir zeigen, daß durch sie eine Basis von X^* gebildet wird. Zur Untersuchung der linearen Unabhängigkeit betrachten wir die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_i f_i = 0.$$

Sukzessives Einsetzen von ϕ_j ergibt $\gamma_j = 0, j = 1, ..., n$. Ferner kann jedes Element $f \in X^*$ in der Form

$$f = \sum_{i=1}^{n} f(\phi_i) f_i$$

dargestellt werden, d.h. $\dim X^* = n$.

$(ii)_2$ Sei jetzt $\dim X = \infty$. Dann findet man eine Folge $(\phi_n)_{n\in\mathbf{N}}$ linear unabhängiger Elemente aus X. Ziel ist nun die Konstruktion einer Folge $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ in X^* mit $f_i(\phi_j) = 0, j < i$ und $f_i(\phi_i) = 1$.

Sei die Folge bis zum $n-$ten Glied bestimmt. Ein beschränktes lineares Funktional f_{n+1} auf $U_{n+1} = \text{span}\{\phi_1, ..., \phi_{n+1}\}$ wird festgelegt durch $f_{n+1}(\phi_j) = 0, j < n+1$ und $f_{n+1}(\phi_{n+1}) = 1$. Nach dem Satz von Hahn-Banach kann f_{n+1} auf den gesamten Raum X fortgesetzt werden.

Wir zeigen noch die lineare Unabhängigkeit der $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Sei dazu

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_i f_i = 0.$$

Hieraus folgt

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_i f_i(\phi_j) = 0, \quad j = 1, ..., n.$$

Die Matrix $(f_i(\phi_j))_{1\leq i,j\leq n}$ ist obere Dreiecksmatrix mit 1 als Hauptdiagonalelementen, also $\gamma_i = 0, i = 1, ..., n$. Somit ist die Matrix invertierbar. $\square$

11.4 Beispiele für Dualräume

Wir weisen darauf hin, daß as wichtigste Beispiel erst im folgenden Kapitel für Hilbert-Räume X bewiesen wird (vgl. Darstellungssatz von Riesz, Theorem 12.1). Hier charakterisieren wir Dualräume für weitere spezielle normierte Räume.

Satz 11.7. *Die stetigen linearen Funktionale auf $X = \mathbf{C}^m$ haben die Gestalt*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i \tag{11.6}$$

mit $x = (x_1, ..., x_m)^t \in \mathbf{C}^m$ und $y = (y_1, ..., y_m)^t \in \mathbf{C}^m$. Mit $1/p + 1/q = 1$ gilt

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^m |y_i|^q\right)^{1/q}, & 1 < p \leq \infty, \\ \\ \max_{1 \leq i \leq m} |y_i|, & p = 1. \end{cases} \tag{11.7}$$

Die Abbildung $f \mapsto y$ beschreibt einen isometrischen Isomorphismus von $(\mathbf{C}^m, \|\cdot\|_p)^*$ auf $(\mathbf{C}^m, \|\cdot\|_q)$. (In diesem Sinne kann man beide Räume identifizieren.)

Beweis: Jedes lineare beschränkte Funktional auf $\mathbf{C}^m$ hat die Gestalt (11.6) mit $y_i = f(e_i)$. Für die Werte $1 < p < \infty$ liefert die Höldersche Ungleichung (vgl. Lemma 1.8)

$$|f(x)| \leq \left(\sum_{i=1}^m |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^m |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^m |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \|x\|_p,$$

damit

$$\|f\|_p \leq \left(\sum_{i=1}^m |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Sei andererseits $z \in \mathbf{C}^m$ festgelegt durch

$$z_i := \frac{|y_i|^q}{y_i}.$$

Dann finden wir

$$\sum_{i=1}^m |y_i|^q = \sum_{i=1}^m z_i y_i = f(z) \leq \|f\|_p \|z\|_p.$$

Wegen

$$\|z\|_p^p = \sum_{i=1}^m |z_i|^p = \sum_{i=1}^m |y_i|^{qp-p} = \sum_{i=1}^m |y_i|^q$$

folgt auch

$$\left(\sum_{i=1}^m |y_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \|f\|_p$$

und daraus die Isometrie $\|f\|_p = \|y\|_q$.

Die Grenzfälle $p = 1$ und $p = \infty$ mag der Leser zur Übung selbst ausführen.

Die Linearität und Surjektivität der Abbildung $f \mapsto y$ sieht man sofort ein. □

Folgerung 11.8. *Man kann zeigen, daß für* $1 < p < \infty$ *die Folgenräume* l^p *und* l^q *mit* $1/p + 1/q = 1$ *Dualräume sind.*

Beweis: Übungsaufgabe ! □

Satz 11.9. *Zu jedem* $f \in (L^p(\Omega))^*$ *mit* $1 < p < \infty$ *gibt es ein* $v \in L^q(\Omega)$ *mit* $1/p + 1/q = 1$ *derart, daß*

$$f(u) = \int_\Omega u(x)v(x)dx \tag{11.8}$$

für alle $u \in L^p(\Omega)$*. Die Abbildung* $f \mapsto v$ *beschreibt einen isometrischen Isomorphismus von* $(L^p(\Omega))^*$ *auf* $L^q(\Omega)$*.*

Beweis: Zunächst ersieht man die Wohldefiniertheit des Funktionals f aus der Hölderschen Ungleichung. Zum weiteren Beweis sind dann weitergehende Aussagen der Maßtheorie, insbesondere der Satz von Radon-Nikodym, erforderlich (vgl. z.B. H.W. Alt "Lineare Funktionalanalysis", SpringerVerlag 1992, S. 125 ff.). □

Bemerkung 11.10. Identifiziert man die linearen Funktionale $f \in (L^p(\Omega))^*$ nach Satz 11.8 mit ihren "erzeugenden" Elementen $v \in L^q(\Omega)$, so kann man $L^q(\Omega)$ als dualen Raum zu $L^p(\Omega)$ auffassen. □

Kapitel 12

Theorie von Lax-Milgram

Gegenstand dieses Abschnitts ist zunächst die grundlegende Charakterisierung der Dualräume von Hilbert-Räumen mit Hilfe des *Rieszschen Darstellungssatzes.*

Dann untersuchen wir die Lösbarkeit linearer Operatorgleichungen

$$Au = f \tag{12.1}$$

in Hilbert-Räumen X mit einem strikt koerzitiven (oder elliptischen) Operator $A \in \mathcal{L}(X, X)$ (*Lax-Milgram Theorie*). Diese Voraussetzungen an A sind hinreichend für die Anwendung des Hommörmorphiesatzes Die Lax-Milgram Theorie kann dann nach Einführung der passenden Funktionenräume auf eine recht große Klasse von Randwertaufgaben angewendet werden (vgl. Kap. 13/14).

12.1 Darstellungssatz von Riesz

Sei nachfolgend X stets ein Hilbert-Raum über dem Zahlkörper $\mathbf{K}$, $\mathbf{K} = \mathbf{R}$ bzw. $\mathbf{K} = \mathbf{C}$ mit dem Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$. Für den Dualraum X^* von X gilt der wichtige Darstellungssatz.

Theorem 12.1. *(Riesz)*
Auf einem Hilbert-Raum X existiert zu jedem stetigen linearen Funktional $f : X \to \mathbf{K}$ ein eindeutig bestimmtes Element $v \in X$, so daß für alle $u \in X$ gilt

$$f(u) = (v, u). \tag{12.2}$$

Die Abbildung (Rieszscher Darstellungsoperator) $R : X^* \to X$ mit $R : f \mapsto v$ *ist antilinear, bijektiv und isometrisch.*

Identifizierungsprinzip: *Auf diese Weise kann man über die Identifizierung jedes Funktionals $f \in X^* = \mathcal{L}(X, \mathbf{K})$ mit dem zugeordneten Element $v \in X$ den Dualraum X^* mit dem Hilbert-Raum X identifizieren.*

Beweis: 1) *Eindeutigkeit:* Wir nehmen an, es existieren zwei Elemente $v_1, v_2 \in X$ mit der gesuchten Eigenschaft. Aus

$$0 = (v_1, u) - (v_2, u) = (v_1 - v_2, u) \quad \forall u \in X$$

folgt mit $u = v_1 - v_2$ wegen des Axioms (H2) für ein Skalarprodukt, daß $v_1 = v_2$.

2) *Konstruktion des Elementes v:* Sei $f \neq 0$. Dann kann ein Element $w \in X$ mit $f(w) \neq 0$ gewählt werden. Wegen der Stetigkeit von f ist der Nullraum

$$N(f) := \{u \in X : \ f(u) = 0\}$$

abgeschlossener und damit vollständiger Unterraum des Hilbert–Raumes X.

Wir nutzen jetzt die Sätze 8.12 und 8.13 über die Bestapproximation bezüglich vollständiger Unterräume von Hilbert-Räumen. Danach existiert die Bestapproximation $\tilde{w} \in N(f)$ an w bezüglich $N(f)$ mit $w - \tilde{w} \perp N(f)$.
Wir setzen nun $\psi := w - \tilde{w}$. Wegen

$$f(f(\psi)u - f(u)\psi) = f(\psi)f(u) - f(u)f(\psi) = 0$$

ist

$$f(\psi)u - f(u)\psi \in N(f), \quad \forall u \in X,$$

also $(\psi, f(\psi)u - f(u)\psi) = 0$. Daraus errechnet man die gesuchte Darstellung

$$f(u) = \left(\frac{\overline{f(\psi)}\psi}{\|\psi\|^2}, u \right), \quad \forall u \in X.$$

3) *Eigenschaften des Rieszschen Darstellungsoperators:*

Surjektivität: Für alle Elemente $v \in X$ definiert

$$f(u) = (v, u), \quad \forall u \in X$$

ein lineares Funktional mit $Rf = v$.

Beschränktheit und Isometrie: Die Beschränktheit folgt aus

$$|f(u)| \leq \|f\| \; \|u\|, \quad \forall u \in X.$$

Mit $u := \frac{v}{\|v\|}$ ergibt sich

$$\left| f\left(\frac{v}{\|v\|} \right) \right| = \left| \left(v, \frac{v}{\|v\|} \right) \right| = \|v\|$$

und daher wegen $\|f\| = \|v\|$ die Isometrie von R.

Antilinearität: Für beliebige Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$, beliebige Elemente $f, g \in X^*$ gilt für alle $u \in X$

$$\begin{aligned} (R(\alpha f + \beta g), u) &= (\alpha f + \beta g)(u) = \alpha f(u) + \beta g(u) \\ &= \alpha(Rf, u) + \beta(Rg, u) = (\overline{\alpha} Rf + \overline{\beta} Rg, u). \end{aligned}$$

Daraus folgt $R(\alpha f + \beta g) = \overline{\alpha} Rf + \overline{\beta} Rg$. □

12.2 Lemma von Lax-Milgram

Definition 12.2. *Sei X Hilbert–Raum. Ein Operator $A \in \mathcal{L}(X, X)$ heißt* strikt koerzitiv *auf X (oder $X-$*elliptisch*), falls es eine Konstante $\gamma > 0$ gibt mit*

$$\operatorname{Re}(Av, v) \geq \gamma \|v\|^2, \quad \forall v \in X. \tag{12.3}$$

Theorem 12.3. *(Lemma von Lax–Milgram)*
Seien X Hilbert–Raum und $A \in \mathcal{L}(X, X)$ ein strikt koerzitiver Operator. Dann existiert der inverse Operator $A^{-1} \in \mathcal{L}(X, X)$.

Beweis: 1) *Injektivität von A:* Nach Voraussetzung und Ungleichung von Cauchy–Schwarz ist

$$\gamma \|u\|^2 \leq \operatorname{Re}(Au, u) \leq \|Au\| \|u\| \quad \forall u \in X,$$

daher

$$\|Au\| \geq \gamma \|u\| \quad \forall u \in X. \tag{12.4}$$

Dann ist A injektiv, denn aus $Au = 0$ folgt wegen (12.4) $u = 0$.

2) *Abgeschlossenheit des Bildraumes $A(X)$:*
Sei $b \in \overline{A(X)}$. Dann existiert eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ in $A(X)$ mit $b_n \to b$ für $n \to \infty$. Dann ist $b_n = Au_n$ mit geeignetem $u_n \in X$. Nach (12.4) ist

$$\gamma\|u_n - u_m\| \leq \|A(u_n - u_m)\| = \|b_n - b_m\| \quad \forall n, m \in \mathbf{N}.$$

Damit ist $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ Cauchy-Folge in X. Wegen der Vollständigkeit von X konvergiert $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ für $n \to \infty$ gegen ein Element $u \in X$. Aufgrund der Stetigkeit von A ist $b = Au$ und damit $A(X) = \overline{A(X)}$.

3) *Surjektivität von A:*
Nach 2) ist $A(X)$ vollständig. Wir betrachten nun die orthogonale Projektion $P : X \to A(X)$. Ferner sei $v \in X$ beliebiges Element. Nach den Sätzen 8.12 und 8.13 ist $Pv - v \perp A(X)$ und speziell

$$(Pv - v, A(Pv - v)) = 0.$$

Nach (12.3) ist dann $v - Pv = 0$, also $v = Pv \in A(X)$. Daraus ergibt sich über $A(X) = X$ die Surjektivität von A.

4) *Existenz und Beschränktheit von A^{-1} :*
Nach 1) und 3) ist A surjektiv und injektiv, d.h. bijektiv. Daraus folgt die Existenz von A^{-1}. Einsetzen von $u = A^{-1}b$ in (12.4) ergibt

$$\|A^{-1}b\| \leq \frac{1}{\gamma}\|b\|,$$

d.h. $\|A^{-1}\| \leq 1/\gamma$. □

12.3 Strikt koerzitive beschränkte Sesquilinearformen

Definition 12.4. $a : X \times X \to \mathbf{C}$ *heißt* Sesquilinearform auf X, *falls*

$$a\left(\sum_{i=1}^{2} \alpha_i u_i, v\right) = \sum_{i=1}^{2} \overline{\alpha_i}\ a(u_i, v), \quad \forall u_i, v \in X,\ \forall \alpha_i \in \mathbf{C},\ \ i = 1, 2, \tag{12.5}$$

$$a\left(u, \sum_{i=1}^{2} \beta_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{2} \beta_i\ a(u, v_i), \quad \forall u, v_i \in X,\ \forall \beta_i \in \mathbf{C},\ \ i = 1, 2. \tag{12.6}$$

Beispiel 12.5. Insbesondere ist das Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$ auf jedem Hilbert-Raum X über dem Zahlkörper $\mathbf{C}$ eine Sesquilinearform (vgl. Definition 8.1). □

Als Folgerung aus dem Lemma von Lax-Milgram finden wir dann

Satz 12.6. *(Lösbarkeit von Variationsgleichungen im Hilbert-Raum)*
Sei $a : X \times X \to \mathbf{C}$ Sesquilinearform auf dem Hilbert–Raum X. Ferner sei a beschränkt, *d.h.*

$$\exists K > 0 : \ \ |a(u, v)| \leq K\|u\|\ \|v\|, \quad \forall u, v \in X, \tag{12.7}$$

und strikt koerzitiv, *d.h.*

$$\exists \gamma > 0 : \quad Re\ a(v,v) \geq \gamma \|v\|^2 \ \ \forall v \in X. \tag{12.8}$$

Dann existiert zu jedem beschränkten linearen Funktional $f \in X^*$ *ein und nur ein Element* $u \in X$ *mit*

$$a(u,v) = f(v), \quad \forall v \in X.$$

Ferner gilt

$$\|u\| \leq \frac{1}{\gamma} \|f\|_{X^*}.$$

Beweis: 1) Für festes $w \in X$ ist $v \mapsto a(w,v)$ wegen der Beschränktheit von a ein beschränktes lineares Funktional auf X. Nach Theorem 12.1 existiert eindeutig ein $u \in X$ mit

$$a(w,v) = (u,v), \quad \forall v \in X.$$

Die Zuordnung $w \mapsto u$ definiert einen Operator $A : X \to X$ mit

$$a(w,v) = (Aw,v) \quad \forall v,w \in X.$$

2) Wegen der Sesquilinearität von a und des Skalarproduktes $(\cdot,\cdot)$ ist A linear. Wegen der Beschränktheit von a ist

$$\|Av\|^2 = (Av,Av) = a(v,Av) \leq K\|v\| \ \|Av\|, \quad \forall v \in X,$$

d.h. A ist beschränkt mit $\|A\| \leq K$.
Ferner ist A strikt koerzitiv, denn

$$\mathrm{Re}(Av,v) = \mathrm{Re}\ \ a(v,v) \geq \gamma\|v\|^2, \quad \forall v \in X.$$

Nach Theorem 12.1 existiert zu jedem $f \in X^*$ genau ein $u \in X$ mit $\|u\| = \|f\|$ derart, daß

$$f(v) = (u,v) \quad \forall v \in X,$$

d.h. die Aufgabe

$$a(u,v) = f(v) \quad \forall v \in X$$

ist äquivalent zu $Au = f$.
Theorem 12.3 liefert schließlich die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung $u \in X$ von $Au = f$ mit

$$\|u\| = \|A^{-1}f\| \leq \frac{1}{\gamma}\|f\|.$$

. □

Kapitel 13

Variationsaufgaben in reellen Hilbert-Räumen

Oft sind lineare Operatorgleichungen $Au = f$ mit $A : X \to X^*$ in *reellen* Hilbert-Räumen X von Interesse. Wir spezifizieren und erweitern hier für den späteren Gebrauch (z.B. für die Untersuchung von partiellen Differentialgleichungen) die Aussagen des vorhergehenden Abschnittes für diesen Fall.

Die entstehenden *Variationsgleichungen* sind im symmetrischen Fall zu quadratischen Variationsproblemen, d.h. Minimierungsproblemen in X, äquivalent.

Ferner untersuchen wir die Approximation der Lösung u in endlichdimensionalen Unterräumen von X und schätzen den Fehler ab.

13.1 Strikt koerzitive beschränkte Bilinearformen

Seien X Hilbert-Raum über $\mathbf{R}$ mit Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$ und Norm $\|\cdot\|_X = \sqrt{(\cdot,\cdot)}$ sowie $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbf{R})$ der zugehörige Dualraum. Wir verwenden die folgende Schreibweise für lineare Funktionale $f \in X^* = \mathcal{L}(X, \mathbf{R})$:

$$\langle f, v \rangle := f(v) \quad \forall v \in X. \tag{13.1}$$

Dann kann der Darstellungssatz von Riesz auch wie folgt umformuliert werden.

Folgerung 13.1. *Auf einem reellen Hilbert–Raum X existiert zu jedem Funktional $f \in X^*$ ein eindeutig bestimmtes Element $u \in X$ so, daß*

$$f(v) = \langle f, v \rangle = (u, v) \quad \forall v \in X.$$

Der Rieszsche Operator $R : X^* \to X$ mit $R : f \mapsto u$ ist linear, bijektiv und isometrisch.

Definition 13.2. $f : X \to \mathbf{R}$ *heißt* stetige Linearform auf X, *falls*

$$f\left(\sum_{i=1}^{2} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{2} \alpha_i f(v_i), \qquad \forall v_i \in X,\ \forall \alpha_i \in \mathbf{R},\ i = 1, 2,$$

$$\exists M > 0 : \ |f(v)| \le M \|v\|_X, \qquad \forall v \in X.$$

Definition 13.3. $a : X \times X \to \mathbf{R}$ *heißt* stetige Bilinearform auf $X \times X$, *falls*

$$a\left(\sum_{i=1}^{2} \alpha_i u_i, v\right) = \sum_{i=1}^{2} \alpha_i\ a(u_i, v), \qquad \forall u_i, v \in X,\ \forall \alpha_i \in \mathbf{R},\ i = 1, 2,$$

$$a\left(u, \sum_{i=1}^{2} \beta_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{2} \beta_i \; a(u, v_i), \qquad \forall u, v_i \in X, \;\; \forall \beta_i \in \mathbf{R}, \;\; i = 1, 2,$$

$$\exists K > 0: \;\; |a(u,v)| \leq K \|u\|_X \|v\|_X, \qquad \forall u, v \in X.$$

Wir benutzen später den folgenden Darstellungssatz für stetige Bilinearformen.

Lemma 13.4. *Sei a stetige Bilinearform auf $X \times X$ nach Definition 13.3. Dann gibt es genau einen Operator $A \in \mathcal{L}(X, X^*)$ mit*

$$(i) \quad a(u,v) = \langle Au, v \rangle, \quad \forall u, v \in X, \qquad (ii) \;\; \|A\| \leq K.$$

Beweis: Ergibt sich aus Folgerung 13.1. □

Gegenstand der weiteren Untersuchungen ist die folgende *Variationsgleichung*

$$\text{Finde } \; u \in X: \quad a(u,v) = f(v) \quad \forall v \in X. \tag{13.2}$$

Die Variationsgleichung (13.2) kann nach Lemma 13.4 alternativ formuliert werden als

$$\langle Au - f, v \rangle \;\; = \;\; 0 \quad \forall v \in X$$

bzw. als $Au = f \quad \text{in} \;\; X^*$. Nach Anwendung des Rieszschen Darstellungsoperators R folgt

$$RAu = Rf \quad \text{in} \;\; X.$$

Wir untersuchen hier alternativ zu Satz 12.6 die Lösbarkeit der Variationsgleichung (13.2) mit Hilfe des Fixpunktsatzes von Banach. Zugleich wird ein *konstruktives* iteratives Lösungsverfahren für (13.2) gewonnen. Diese Vorgehensweise benutzt man übrigens auch dann, wenn A allgemeiner *nichtlinear* und *streng monoton* ist.

Wir formulieren (13.2) als äquivalente Fixpunktgleichung im Hilbert-Raum X

$$\text{Finde } \; u \in X: \quad u = T(u) := u - \rho(RAu - Rf) \tag{13.3}$$

mit einem zunächst beliebigen Parameter $\rho > 0$ und dem Riesz-Operator R.

Der Banachsche Fixpunktsatz (vgl. Theorem 2.12) ist anwendbar, wenn gilt

$$(i) \;\; T: X \to X, \qquad (ii) \;\; T \;\text{ ist kontraktiv auf }\; X. \tag{13.4}$$

Die Eigenschaft (i) ist offenbar per Konstruktion erfüllt. Eigenschaft (ii) ist erfüllt, wenn die Lipschitz-Bedingung

$$(ii') \;\; \exists \tilde{L} \in [0,1): \quad \|Tv_1 - Tv_2\|_X \leq \tilde{L} \|v_1 - v_2\|_X, \;\; \forall v_1, v_2 \in X$$

nachgewiesen wird. Dazu fordern wir eine zusätzliche Eigenschaft von a.

Definition 13.5. *Die Bilinearform* $a: X \times X \to \mathbf{R}$ *heißt* $X-$elliptisch (oder strikt koerzitiv auf X), *falls eine Konstante* $\gamma > 0$ *existiert mit*

$$a(v,v) \geq \gamma \|v\|_X^2, \quad \forall v \in X. \tag{13.5}$$

Für eine $X-$elliptische Bilinearform gilt dann

$$(RAv, v) = \;\; < Av, v > \;\; = a(v,v) \geq \gamma \|v\|_X^2.$$

Andererseits ist

$$\|RAv\|_X = \|Av\|_{X^*} \leq \|A\|\|v\|_X \leq K\|v\|_X.$$

Unter Beachtung dieser beiden Beziehungen erhält man mit $v = v_1 - v_2$, daß

$$\begin{aligned} \|Tv_1 - Tv_2\|_X^2 &= \|v - \rho RAv\|_X^2 = (v - \rho RAv, v - \rho RAv) \\ &= \|v\|_X^2 - 2\rho(RAv, v) + \rho^2\|RAv\|_X^2 \\ &\leq (1 - 2\rho\gamma + \rho^2 K^2)\|v\|_X^2 =: L(\rho)\|v_1 - v_2\|_X^2, \end{aligned}$$

d.h. (ii') wäre für $L(\rho) \in [0,1)$ erfüllt. Nun ist aber $L(0) = L(2\gamma/K^2) = 1$. Wegen der $X-$Elliptizität und Beschränktheit von a ist

$$\gamma\|v\|_X^2 \leq (RAv, v) \leq \|RAv\|_X\|v\|_X \leq K\|v\|_X^2, \quad \forall v \in X, \tag{13.6}$$

d.h. $\gamma \leq K$. Daraus folgt

$$L\left(\frac{\gamma}{K^2}\right) = \frac{K^2 - \gamma^2}{K^2} \geq 0.$$

Also liegt die Konstante $L(\rho)$ in $[0,1)$ genau für $0 < \rho < 2\gamma/K^2$.

Damit folgt die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung $u \in X$ der Variationsgleichung. Ferner gilt nach Einsetzen von $v = u$ in (13.6) die folgende *a-priori Abschätzung* der Lösung:

$$\gamma\|u\|_X^2 \leq (RAu, u) \leq \|RAu\|_X\|u\|_X,$$

d.h.

$$\|u\|_X \leq \frac{1}{\gamma}\|RAu\|_X \leq \frac{1}{\gamma}\|Au\|_{X^*}.$$

Wir fassen die Ergebnisse zusammen im

Satz 13.6. *Auf dem Hilbert-Raum X seien $a : X \times X \to \mathbf{R}$ eine stetige und $X-$elliptische Bilinearform und $f : X \to \mathbf{R}$ eine stetige Linearform.*
Dann existiert eine und nur eine Lösung $u \in X$ der Variationsgleichung (13.2). Sie genügt der Abschätzung

$$\|u\|_X \leq \frac{1}{\gamma}\|f\|_{X^*}.$$

Zugleich folgt aus dem Banachschen Fixpunktsatz ein konstruktives Lösungsverfahren (*sukzessive Approximation*): Sei $u^{(0)} \in X$ ein beliebiger Startwert des Verfahrens. Dann löse man für $n \in \mathbf{N}_0$ und hinreichend kleinemρ

$$u^{(n+1)} := T(u^{(n)}) := u^{(n)} - \rho R\left(Au^{(n)} - f\right). \tag{13.7}$$

Ein Konvergenzresultat gibt der

Satz 13.7. *Die Voraussetzungen von Satz 13.6 seien erfüllt. Ferner gelte $0 < \rho < 2\gamma/K^2$. Dann konvergiert die Folge $(u^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ der sukzessiven Approximation für jeden Startwert $u^{(0)} \in X$ gegen die eindeutig bestimmte Lösung der Variationsgleichung (13.2). Es gilt die Fehlerabschätzung*

$$\|u - u^{(n)}\|_X \leq \frac{[L(\rho)]^{n/2}}{1 - [L(\rho)]^{1/2}}\|u^{(1)} - u^{(0)}\|_X, \quad n \in \mathbf{N}_0.$$

Bemerkung 13.8. Die sukzessive Approximation kann alternativ als *pseudo-instationäres* Lösungsverfahren

$$\frac{u^{(n+1)} - u^{(n)}}{\rho} = R(f - Au^{(n)}), \quad n \in \mathbf{N}_0$$

oder als *Defektkorrekturverfahren*

$$R^{-1}\left(u^{(n+1)} - u^{(n)}\right) = \rho\left[f - Au^{(n)}\right], \quad n \in \mathbf{N}_0 \tag{13.8}$$

geschrieben werden. Bei Kenntnis von R^{-1} kann jede Variationsgleichung (13.2) iterativ durch ein Problem vom Typ (13.8) gelöst werden. Man hofft, daß diese Operatorgleichungen einfacher als die ursprüngliche Variationsgleichung (13.2) zu lösen sind.

13.2 Quadratische Variationsprobleme

Wir betrachten jetzt im Spezialfall *symmetrischer*, stetiger und strikt koerzitiver Bilinearformen auf dem reellen Hilbert-Raum X sogenannte *quadratische Variationsprobleme*

$$\text{Finde } u \in X: \ \ F(u) := \frac{1}{2}a(u,u) - f(u) \le F(v) \quad \forall v \in X. \tag{13.9}$$

Für dieses Problem gilt der folgende Existenz– und Eindeutigkeitssatz.

Satz 13.9. *Sei $a : X \times X \to \mathbf{R}$ symmetrische, beschränkte und strikt koerzitive Bilinearform auf dem reellen Hilbert–Raum X. Ferner sei $f : X \to \mathbf{R}$ beschränktes lineares Funktional auf X. Dann hat das Variationsproblem (13.9) eine und nur eine Lösung $u \in X$. u ist auch Lösung der Variationsgleichung*

$$\text{Finde } u \in X: \ \ a(u,v) = f(v) \ \ \forall v \in X.$$

Beweis: Ausgangspunkt ist die zweiseitige Abschätzung nach Voraussetzung

$$\gamma\|u\|^2 \le a(u,u) \le K\|u\|^2 \quad \forall u \in X. \tag{13.10}$$

Daraus folgt, daß durch

$$(u,v)_E := a(u,v), \quad \forall u,v \in X \tag{13.11}$$

ein neues (*energetisches*) Skalarprodukt auf X definiert werden kann. Die induzierten Normen $\|\cdot\| := (\cdot,\cdot)$ und $\|\cdot\|_E := \sqrt{a(\cdot,\cdot)}$ sind äquivalent.

Nach dem Rieszschen Darstellungssatz (vgl. Folgerung 13.1) gibt es ein Element $\tilde{f} \in X$ mit $f(v) = (\tilde{f}, v)_E$ für alle $v \in X$. Dann ist das Minimierungsproblem (13.9) äquivalent zu

$$\text{Finde } u \in X: \quad \|\tilde{f} - u\|_E^2 \ \le \ \|\tilde{f} - v\|_E^2 \quad \forall v \in X$$

mit der eindeutig bestimmten Lösung $u = \tilde{f}$ wegen

$$\|\tilde{f} - u\|_E^2 = (\tilde{f}, \tilde{f})_E - 2(\tilde{f}, u)_E + (u,u)_E = (\tilde{f}, \tilde{f})_E + 2F(u).$$

Da u Lösung von (13.9) ist, besitzt

$$F(u + tv) = F(u) + t\left[a(u,v) - f(v)\right] + \frac{1}{2}t^2 a(v,v)$$

in $t = 0$ für fixierte $u, v \in X$ ein Minimum. Daraus folgt (13.2) als notwendige Minimumbedingung. Die Eindeutigkeit der Lösung von (13.2) folgt bereits aus Satz 13.6. □

Bemerkung 13.10. Eine typische Interpretation des Minimierungsproblems (13.9) in der Elastizitätstheorie ergibt sich, wenn u die Verschiebung eines elastischen Körpers (z.B. Platte oder Balken) ist. Die Ausdrücke $a(u,u)/2$ bzw. $f(u)$ sind dann die elastische potentielle Energie des Körpers bzw. die Wirkung äußerer Kräfte. (13.9) entspricht einem *Minimalprinzip*, dem Prinzip der minimalen potentiellen Energie. Dies erklärt auch den Begriff "energetisches Skalarprodukt".

13.3 Ritz-Galerkin Verfahren

Das Ziel ist jetzt die Approximation der Lösung $u \in X$ der Variationsgleichung (13.2) in endlichdimensionalen Unterräumen

$$X_n \subset X, \quad \dim\ X_n = n < \infty.$$

Offenbar ist $\{X_n; \|\cdot\|_X\}$ Banach–Raum.

Definition 13.11. *Als* Ritz-Galerkin Verfahren *zur Variationsgleichung (13.2) bezeichnet man das Problem:*

$$\text{Finde } u^n \in X_n : \ \ a(u^n, v) = f(v) \ \ \forall v \in X_n. \tag{13.12}$$

Sei jetzt $\{\phi_1, ..., \phi_n\}$ eine Basis von X_n, d.h.

$$X_n = \text{span } \{\phi_1, ..., \phi_n\}.$$

Dann vermittelt die Abbildung

$$P : \mathbf{R}^n \to X_n \subset X, \quad P\underline{v} := \sum_{i=1}^{n} v_i\phi_i$$

mit dem Koeffizientenvektor $\underline{v} := (v_1, ..., v_n)^t$ einen Isomorphismus zwischen $\mathbf{R}^n$ und X_n.

Lemma 13.12. *Das Ritz-Galerkin-Verfahren ist äquivalent zu*

$$\textit{Finde } u^n \in X_n : \ \ a(u^n, \phi_i) = f(\phi_i), \ \ i = 1, ..., n. \tag{13.13}$$

bzw. mit den Bezeichnungen $\underline{u} = (u_1, ..., u_n)^t \in \mathbf{R}^n, u^n := P\underline{u}, \quad A = (A_{ij})_{i,j=1}^n$ *mit* $A_{ij} := a(\phi_j, \phi_i)$ *sowie* $\underline{f} = (f_1, ..., f_n)^t$ *mit* $f_i := f(\phi_i)$ *zum linearen Gleichungssystem*

$$A\underline{u} = \underline{f}. \tag{13.14}$$

Beweis: Die Äquivalenz von (13.12) und (13.13) ergibt sich aus der Basisdarstellung $v = \sum_{i=1}^n v_i\phi_i$. Die zweite Aussage folgt mit $u^n = P\underline{u} = \sum_{j=1}^n u_j\phi_j$ aus

$$f_i = f(\phi_i) = a(u^n, \phi_i) = \sum_{j=1}^{n} u_j a(\phi_j, \phi_i) = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}u_j \quad i = 1, ..., n. \qquad \Box$$

Bemerkung 13.13. Unter Verwendung des Euklidschen Skalarproduktes $\langle \underline{u}, \underline{v}\rangle := \sum_{i=1}^n u_iv_i$ im $\mathbf{R}^n$ ergibt sich mit der Matrix $A = (A_{ij})$ folgende Charakterisierung

$$a(u, v) = \langle A\underline{u}, \underline{v}\rangle, \ \ f(v) = \langle \underline{f}, \underline{v}\rangle, \quad u = P\underline{u}, \ \ v = P\underline{v} \quad \forall u, v \in X_n. \qquad \Box$$

Im Fall einer $X-$elliptischen Bilinearform a gilt der folgende Existenz– und Eindeutigkeitssatz für das Ritz–Galerkin Verfahren.

Satz 13.14 *Sei* X_n $n-$*dimensionaler Unterraum des reellen Hilbert-Raumes* X *mit der Basis* $\{\phi_1, ..., \phi_n\}$. *Ferner sei* $a : X \times X \to \mathbf{R}$ *stetige, strikt koerzitive Bilinearform gemäß der Definitionen 13.3 und 13.5. Dann ist die Matrix* $A = (a(\phi_j, \phi_i))_{i,j=1}^n$ *nichtsingulär. Für die damit existierende und eindeutig bestimmte Lösung* $u^n \in X_n$ *gilt a-priori*

$$\|u^n\|_X \leq \frac{1}{\gamma}\|f\|_{X^*}.$$

Beweis: Mit $\underline{u} \neq 0$ folgt $P\underline{u} \neq 0$ und

$$\langle A\underline{u}, \underline{u} \rangle = a(P\underline{u}, P\underline{u}) \geq \gamma \|P\underline{u}\|_X^2 > 0,$$

also $A\underline{u} \neq 0$. Daraus folgen Regularität von A und damit Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des linearen Gleichungssystems. Die a-priori Abschätzung folgt aus

$$\gamma \|P\underline{u}\|_X^2 \leq a(P\underline{u}, P\underline{u}) = f(P\underline{u}) \leq \|f\|_{X^*} \|P\underline{u}\|_X. \qquad \Box$$

Schließlich geben wir noch eine Fehlerabschätzung an.

Satz 13.15. *(Lemma von Cea)*
Unter den Voraussetzungen des Satzes 13.14 gilt für den Approximationsfehler

$$\|u - u^n\|_X \leq \frac{K}{\gamma} \inf_{v \in X_n} \|u - v\|_X. \tag{13.15}$$

Beweis: Aus der Fehlergleichung (*Galerkin-Orthogonalität*)

$$a(u - u^n, w) = a(u, w) - a(u^n, w) = f(w) - f(w) = 0, \quad \forall w \in X_n$$

folgt nach Nullergänzung für beliebiges $v \in X_n$ aus

$$\gamma \|u - u^n\|_X^2 \leq a(u - u^n, u - u^n) = a(u - u^n, u - v) \leq K \|u - u^n\|_X \|u - v\|_X$$

die angegebene Fehleraussage. $\Box$

Bemerkung 13.16. Die Bedingung der strikten $X-$Elliptizität von a in Satz 13.14 kann abgeschwächt werden zur sogenannten *diskreten Babuska–Bedingung*

$$\inf_{u \in X_n \setminus \{0\}} \sup_{v \in X_n \setminus \{0\}} \frac{|a(u, v)|}{\|u\|_X \|v\|_X} = \gamma_n > 0, \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Dann gilt die modifizierte Fehlerabschätzung

$$\|u - u^n\|_X \leq \left(1 + \frac{K}{\gamma_n}\right) \inf_{v \in X_n} \|u - v\|_X.$$

(Übungsaufgabe !) $\Box$

Mit dem Lemma von Cea ist die Fehlerabschätzung auf eine *Interpolationsaussage* im endlichdimensionalen Unterraum X_n zurückgeführt. Man beachte, daß (13.15) jedoch noch keine Konvergenzaussage beinhaltet.

Definition 13.17. *Eine aufsteigende Folge endlich-dimensionaler Unterräume*

$$X_1 \subset X_2 \subset \ldots \subset X_{n-1} \subset X_n \subset \ldots \subset X$$

des reellen Hilbert-Raumes X mit $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n} = X$ heißt Galerkin–Schema in X.

Satz 13.18. Existiert im reellen Hilbert-Raum X ein Galerkin-Schema, so gilt

$$\lim_{n \to \infty} \inf_{v \in X_n} \|u - v\|_X = 0, \quad \forall u \in X.$$

Beweis: Folgerung aus der Dichtheit von $\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n$ in X.

Die Sätze 13.15 und 13.18 implizieren eine Konvergenzaussage für das Ritz-Galerkin Verfahren. Das wesentliche praktische Problem ist die Konstruktion geeigneter Unterräume X_n. Ein wichtiges Ziel dabei ist die Gewinnung schwach besetzter Matrizen A, deren Dimension n in der Regel sehr groß ist.

Kapitel 14

Elliptische Randwertprobleme

Gegenstand dieses Kapitels ist die Lösbarkeit linearer Randwertaufgaben 2. Ordnung mit einem *strikt koerzitiven (oder elliptischen)* Operator. Zur Motivation studieren wir zunächst als Prototyp das Dirichletsche Randwertproblem der *Poisson-Gleichung*, das bereits wichtige Anwendungen in der mathematischen Physik abdeckt (vgl. Einleitung).

Für das entsprechende Randwertproblem (RWP) einer allgemeinen elliptischen Differentialgleichung 2. Ordnung untersuchen wir dann die Anwendbarkeit und Grenzen der Lax-Milgram Theorie. Auch in diesem Kapitel beschränken wir uns auf reellwertige Funktionen.

14.1 1. Randwertproblem der Poisson-Gleichung

Wir erinnern an das *homogene Dirichletsche Randwertproblem für die Poisson-Gleichung*

$$\begin{aligned} -(\Delta u)(x) \equiv -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) &= f(x), \quad x \in \Omega && (14.1) \\ u(x) &= 0, \qquad x \in \partial\Omega && (14.2) \end{aligned}$$

in einem Gebiet Ω im $\mathbf{R}^n$ mit dem Rand $\partial\Omega \in C^1$. Das Problem tritt bei der Modellierung einfacher zeitunabhängiger Diffusionsvorgänge auf, vgl. Einleitung.

Für $f \in C(\Omega)$ heißt eine Funktion $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ nach Definition 5.15 klassische Lösung von (14.1),(14.2), wenn diese Gleichungen für alle Punkte $x \in \Omega$ bzw. $x \in \partial\Omega$ erfüllt sind. Dieser Lösungsbegriff ist bereits für $f \notin C(\Omega)$ nicht zutreffend.

Als Ausweg hatten wir schon in Abschnitt 5.5 die Herleitung eines *verallgemeinerten Problems* skizziert. Sei zunächst $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. Nach Multiplikation von (14.1) mit einer beliebigen Testfunktion $v \in C_0^\infty(\Omega)$ und Integration über das Gebiet Ω erhalten wir

$$-\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) v(x) dx = \int_\Omega f(x) v(x) dx.$$

Nun wendet man links die Regel der partiellen Integration (vgl. Lemma 5.11) an:

$$-\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}(x) v(x) dx = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v \nu_i ds \right).$$

Da die Testfunktion auf dem Rand punktweise verschwindet, fällt das Randintegral weg. Damit erhält man

$$\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) dx = \int_\Omega f(x) v(x) dx, \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega). \tag{14.3}$$

Wir untersuchen, unter welchen Voraussetzungen die Formulierung (14.3) noch sinnvoll bleibt. Per Definition ist der Raum $C_0^\infty(\Omega)$ dicht im Hilbert-Raum $X := W_0^{1,2}(\Omega)$. Wir definieren

$$a(u,v) \;:=\; \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) dx, \qquad \forall u, v \in X \tag{14.4}$$

$$f(v) \;:=\; \int_\Omega f(x) v(x) dx, \qquad \forall v \in X. \tag{14.5}$$

Lemma 14.1. *Seien $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ beschränktes Gebiet sowie $f \in L^2(\Omega)$. Dann sind durch (14.5) bzw. (14.4) eine beschränkte Linearform bzw. beschränkte Bilinearform auf X bzw. $X \times X$ definiert.*

Beweis: Linearität von f bzw. a folgen unmittelbar aus den Eigenschaften des Lebesgue-Integrals. Die Beschränktheit von f folgt mittels Hölder-Ungleichung

$$|f(v)| \le \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \le \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)}.$$

Die Beschränktheit von a ergibt sich über die Höldersche Ungleichung aus

$$|a(u,v)| \le \left(\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{1/2} = \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)}. \qquad \square$$

Man kann nun in (14.3) zu Elementen $u, v \in X$ übergehen. Seien dazu $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ und $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ Folgen in $C_0^\infty(\Omega)$ mit den Grenzwerten $u, v \in X$. Dann gilt mit $K = 1$ nach Nullergänzung

$$\begin{aligned}
|f(v_n) - f(v)| &\le M \|v_n - v\|_X \to 0, \quad n \to \infty \\
|a(u_n, v_n) - a(u,v)| &= |a(u_n - u, v_n) + a(u, v_n - v)| \\
&\le K \left(\|u_n - u\|_X \|v_n\|_X + \|u\|_X \|v_n - v\|_X \right) \\
&\to 0, \quad n \to \infty.
\end{aligned}$$

Ferner kann man in der Formulierung (14.3) zu Gebieten mit lediglich Lipschitz-stetigem Rand übergehen (vgl. Bemerkung 5.12 bzw. H.W. Alt [2], Satz A.6.8. Diese Vorbetrachtungen motivieren folgende Definition.

Definition 14.2. *Als* verallgemeinerte Aufgabenstellung *des homogenen Dirichletschen RWP der Poisson–Gleichung bezeichnet man*

$$\textit{Finde } u \in X: \quad a(u,v) = f(v), \quad \forall v \in X. \tag{14.6}$$

Die Lösung $u \in X$ heißt verallgemeinerte Lösung *des RWP (14.1)-(14.2).*

Bemerkung 14.3. Offenbar ist jede klassische Lösung auch verallgemeinerte Lösung. Die Umkehrung gilt bei hinreichend glatten Daten, hier $f \in C(\Omega)$ und bei C^1–glattem Rand, unter der Regularitätsvoraussetzung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. □

Die Lax-Milgram Theorie aus Kapitel 12 zum Existenz- und Eindeutigkeitsbeweis verallgemeinerter Lösungen erfordert noch den Nachweis der strikten Koerzitivität von a auf X. Wegen

$$a(v,v) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 dx \le \|v\|^2_{W^{1,2}(\Omega)}.$$

ist eine modifizierte Abschätzung erforderlich. Dazu erklären wir im nachfolgenden Lemma eine neue Norm auf X.

Lemma 14.4. *Für eine beschränkte, offene Punktmenge $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ sind auf $X = W_0^{1,2}(\Omega)$ die Ausdrücke $\|\cdot\|_{W^{1,2}(\Omega)}$ und*

$$|u|_X := \sqrt{a(u,u)} = \left(\sum_{i=1}^n \int_\Omega \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2 dx\right)^{1/2} \tag{14.7}$$

äquivalente Normen.

Beweis: (i) Per Definition ist

$$|u|_X \leq \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)}.$$

(ii) Sei nun $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Wegen der Beschränktheit von Ω existiert eine offene Kugel $B(0,r)$ mit $\Omega \subset B(0,r)$. Die Funktion u wird außerhalb von Ω mit Null fortgesetzt. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und die Hölder-Ungleichung liefern

$$\begin{aligned} |u(x)|^2 &= \left|\int_{-r}^{x_1} 1 \cdot \frac{\partial u}{\partial x_1}(\xi, x_2, ..., x_n) d\xi\right|^2 \leq (x_1 + r) \int_{-r}^{x_1} \left|\frac{\partial u}{\partial x_1}(\xi, x_2, ..., x_n)\right|^2 d\xi \\ &\leq 2r \int_{-r}^{r} \left|\frac{\partial u}{\partial x_1}(\xi, x_2, ..., x_n)\right|^2 d\xi, \quad \forall x = (x_1, ..., x_n) \in \Omega. \end{aligned}$$

Integration über Ω liefert für beliebige $u \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq 4r^2 \left\|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C_F^2 |u|_X^2 \qquad C_F := 2r \tag{14.8}$$

sowie

$$\|u\|^2_{W^{1,2}(\Omega)} \leq (1 + C_F^2)|u|_X^2, \qquad \forall u \in X.$$

Die Dichtheit von $C_0^\infty(\Omega)$ in $W_0^{1,2}(\Omega)$ bezüglich $\|\cdot\|_{W^{1,2}}$ ergibt die Behauptung. □

Die Beziehung (14.8) heißt auch *Friedrichsche Ungleichung.* Damit ist das Lemma von Lax-Milgram (vgl. Satz 13.6) anwendbar.

Satz 14.5. *Seien $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ beschränktes Gebiet sowie $f \in L^2(\Omega)$. Dann gibt es eine und nur eine verallgemeinerte Lösung $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ der Variationsgleichung (14.6).*

14.2 Strikt elliptische Gleichungen 2. Ordnung

Wir betrachten nun in einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ das homogene Dirichletsche RWP für allgemeinere lineare partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung in sogenannter *Divergenzform*

$$-\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)(x) + \sum_{j=1}^n b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x) + c(x)u(x) = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{14.9}$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega \tag{14.10}$$

bei gegebenen Funktionen

$$a_{ij}, b_j, c, f : \Omega \to \mathbf{R}, \quad i,j = 1, ..., n.$$

Für hinreichend glatte Daten gemäß $a_{ij} \in C^1(\Omega)$; $b_j, c, f \in C(\Omega), i, j = 1, ..., n$ wurde in Abschnitt 5.5 eine Funktion $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ klassische Lösung von (14.9),(14.10) genannt, wenn die Gleichungen (14.9) bzw. (14.10) punktweise auf Ω bzw. $\partial\Omega$ erfüllt sind. Diese starken Glätteforderungen an die Daten des Problems sind bei praktischen Anwendungen oft nicht erfüllt.

Zur Ableitung eines *verallgemeinerten Problems* gehen wir wie in Kapitel 14.1 vor. Multiplikation der Gleichung (14.9) mit einer beliebigen Testfunktion $v \in C_0^\infty(\Omega)$, Integration über Ω sowie partielle Integration des Terms mit Ableitungen 2. Ordnung und Berücksichtigung der Randbedingung $v = 0$ ergeben

$$\int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} + \left[\sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu \right] v \right) dx = \int_\Omega fv dx. \tag{14.11}$$

Sei

$$a(u, v) := \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} + \left[\sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu \right] v \right) dx, \tag{14.12}$$

$$f(v) := \int_\Omega f \; v \; dx. \tag{14.13}$$

Durch (zunächst formalen) Grenzübergang von $u, v \in C_0^\infty(\Omega)$ zu Elementen im Hilbert-Raum $X := W_0^{1,2}(\Omega)$ gelangen wir zu

Definition 14.6. *Als* verallgemeinerte Aufgabenstellung *des homogenen Dirichletschen RWP (14.9)-(14.10) bezeichnet man*

$$\textit{Finde } u \in X: \quad a(u, v) = f(v), \quad \forall v \in X. \tag{14.14}$$

Die Lösung $u \in X$ heißt verallgemeinerte Lösung *von (14.9)-(14.10).*

Wir untersuchen nun wieder, ob die Voraussetzungen der Lax-Milgram Theorie für diese Variationsgleichung erfüllt sind.

Lemma 14.7. *Sei $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ beschränktes Gebiet und gelte*

$$a_{ij}, b_j, c \in L^\infty(\Omega), \;\; i, j = 1, ..., n; \qquad f \in L^2(\Omega). \tag{14.15}$$

Ferner mögen für die symmetrische Matrix $A(x) = [a_{ij}(x)]_{i,j=1}^n$ gleichmäßig auf Ω positive Konstanten γ und Γ existieren mit

$$\gamma \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \le \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \le \Gamma \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \quad \textit{in } \Omega \textit{ f.ü.}, \; \forall \xi = (\xi_i)_{i=1}^n \in \mathbf{R}^n. \tag{14.16}$$

Dann sind f nach (14.13) bzw. a nach (14.12) beschränkte Linearform auf X bzw. beschränkte Bilinearform auf $X \times X$.

Beweis: (i) Linearität von f bzw. Bilinearität von a sind offensichtlich.
(ii) Mittels der Ungleichungen von Cauchy-Schwarz und Friedrichs erhalten wir

$$|f(v)| \le \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \le C_F \|f\|_{L^2(\Omega)} |v|_{W^{1,2}(\Omega)}.$$

(iii) Die Beschränktheit von $a = a_1 + a_2$ ergibt sich in zwei Schritten. Zunächst erhalten wir über die verallgemeinerte Cauchysche Ungleichung (Übungsaufgabe !)

$$\left| \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_j \eta_i \right| \le \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}| \, |\xi_j||\xi_i| \right)^{1/2} \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}| \, |\eta_j||\eta_i| \right)^{1/2}$$

und die Voraussetzung an die Matrix $A(x)$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
|a_1(u,v)| &\equiv \left| \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx \right| \\
&\le \left(\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega |a_{ij}| \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right| \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| dx \right)^{1/2} \left(\sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega |a_{ij}| \left| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right| \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| dx \right)^{1/2} \\
&\le \Gamma \left(\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{1/2} \\
&\le K_1 \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Weiter ist nach verallgemeinerter Hölderscher und Friedrichsscher Ungleichung

$$\begin{aligned}
&|a_2(u,v)| = \left| \sum_{j=1}^{n} \int_\Omega b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} v dx + \int_\Omega cuv dx \right| \\
\le\ & \sum_{j=1}^{n} \|b_j\|_{L^\infty(\Omega)} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|c\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \\
\le\ & \left(\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \|b_j\|^2_{L^\infty(\Omega)}} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|^2_{L^2(\Omega)}} + C_F \|c\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \right) C_F \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)} \\
\le\ & \left(\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \|b_j\|^2_{L^\infty(\Omega)}} \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} + C_F \|c\|_{L^\infty(\Omega)} \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \right) C_F \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)} \\
\le\ & K_2 \|u\|_{W^{1,2}(\Omega)} \|v\|_{W^{1,2}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Aus den beiden Abschätzungen folgt die Beschränktheit von a. Abschließend sei vermerkt, daß im Beweis nur die obere Abschätzung aus (14.16) benutzt wurde. □

Lemma 14.8. *Über die Voraussetzungen von Lemma 14.7 hinaus gelte*

$$\frac{\partial b_j}{\partial x_j} \in L^\infty(\Omega), \quad j = 1, ..., n$$

sowie

$$c(x) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial b_j}{\partial x_j}(x) \ge 0 \text{ f.ü. in } \Omega.$$

Dann ist die Bilinearform a nach (14.12) $X-$elliptisch.

Beweis: Übungsaufgabe (Hinweis: Partielle Integration von $a_2(u,u)$!) □

Nach den Lemmata 14.7 und 14.8 ist das Lemma von Lax-Milgram anwendbar.

Satz 14.9. *Unter den Voraussetzungen der Lemmata 14.7 und 14.8 existiert eine und nur eine verallgemeinerte Lösung $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ des RWP (14.9),(14.10).*

Wir betrachten jetzt zwei typische Anwendungsfälle, die jeweils Verallgemeinerungen des im Abschnitt 14.1 betrachteten Poisson-Problems darstellen.

Beispiel 14.10 (*Transmissionsproblem*)
Sei $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ beschränktes Gebiet mit Lipschitz-stetigem Rand $\partial\Omega$, so daß mit paarweise durchschnittsfremden und Lipschitz-stetig berandeten Gebieten Ω_k gilt $\overline{\Omega} = \cup_{k=1}^{K} \overline{\Omega_k}$. Sei ferner

$$a_{ij}(x) := a(x)\delta_{ij}, \;\; i, j = 1, ..., n; \quad a(x)|_{\Omega_k} = a_k > 0, \;\; k = 1, ..., K.$$

Das verallgemeinerte Problem

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_\Omega f(x) v dx$$

hat dann eine und nur eine Lösung $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$. Derartige Transmissionsprobleme treten zum Beispiel bei der Wärmeleitung in einem Körper Ω auf, der aus verschiedenen Materialien mit unterschiedlicher Wärmeleitfähigkeit zusammengesetzt ist. □

Beispiel 14.11 (*Diffusions-Konvektions-Reaktions-Problem*)
Im Randwertproblem (14.9)-(14.10) sei u z.B. die Konzentration eines Stoffes, der sich in einem chemischen Reaktor Ω befindet. Dann beschreiben die Terme

- $-\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \right)(x)$ die Änderung von u unter dem Einfluß von Diffusion,
- $\sum_{j=1}^n b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x)$ die Änderung von u unter dem Einfluß des Transports durch die Strömung im Reaktor mit der Geschwindigkeit $\mathbf{b}(x) = \sum_{j=1}^n b_j(x)\mathbf{e}_j$ und
- $c(x)u(x) - f(x)$ die Änderung von u unter dem Einfluß einer (stark vereinfachten) chemischen Reaktion.

Bei inkompressibler Strömung, d.h. $\sum_{j=1}^n \frac{\partial b_j}{\partial x_j} = 0$, und endothermer chemischer Reaktion, d.h. $c(x) \geq 0$, existiert nach Satz 14.9 eine eindeutige verallgemeinerte Lösung $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$. □

Bemerkung 14.12. Die Lax-Milgram Theorie (vgl. Satz 14.9) liefert offenbar noch keine Lösbarkeitsaussage, wenn die Voraussetzungen an die Terme 1. und 0. Ordnung nicht erfüllt sind. Ein wichtiger Fall ist die sogenannte *Helmholtz-Gleichung*

$$-(\Delta u)(x) + c(x)u(x) = f(x), \quad x \in \Omega$$

ohne Vorzeichenbeschränkung an den Koeffizienten c. Für $c(x) = -\kappa^2 < 0$ tritt sie bei der Ermittlung zeitharmonischer Lösungen der Wellengleichung auf. Wir erweitern in Teil III die Theorie so, daß auch in solchen Fällen eine Lösbarkeitsaussage möglich sind. □

14.3 Zusammenhang mit Minimierungsproblemen

Mit den Bezeichnungen von Abschnitt 14.2 sei speziell a *symmetrische*, stetige, strikt koerzitive Bilinearform auf dem reellen Hilbert-Raum $X = W_0^{1,2}(\Omega)$. Für das *quadratische Variationsproblem*

$$\text{Finde } u \in X: \;\; F(u) := \frac{1}{2}a(u,u) - f(u) \leq F(v), \quad \forall v \in X \tag{14.17}$$

gilt der folgende Existenz- und Eindeutigkeitssatz.

Satz 14.13. *Unter den Voraussetzungen von Satz 14.9 sei speziell a symmetrisch, d.h. $b_j(x) = 0, x \in \Omega, \; j = 1, ..., n$. Dann hat das Minimierungsproblem (14.17) eine und nur eine Lösung*

$u \in X$. Sie ist auch Lösung der Variationsgleichung (14.14).

Beweis: Folgerung aus den Sätzen 13.9 und 14.9. □

Beispiel 14.14. (*Minimierungsproblem von Dirichlet*)
Von Dirichlet stammt das folgende spezielle Minimierungsproblem

$$\text{Finde } u: \quad F(u) := \frac{1}{2}\int_\Omega \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^2 dx - \int_\Omega f(x)u dx = \min !.$$

Die Lösbarkeit dieses Problems war lange offen. Man kann zeigen, daß die Aufgabe keine klassische Lösung in $\tilde{X} := \{v \in C^1(\Omega) : v = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}$ besitzt. Mit $X = W_0^{1,2}(\Omega)$, d.h. nach geeigneter Vervollständigung des Lösungsraumes, folgt jedoch die eindeutige Lösbarkeit. Dieses Minimierungsproblem bildete im Prinzip den Ausgangspunkt der modernen Theorie partieller Differentialgleichungen. □

14.4 Finite-Elemente-Verfahren

Die verallgemeinerte Aufgabenstellung (14.14) des elliptischen RWP (14.9)-(14.10) führt nun direkt auf das Ritz-Galerkin Verfahren, das wir in Abschnitt 13.3 abstrakt eingeführt haben. Wesentliche praktische Probleme sind noch die Konstruktion geeigneter Unterräume

$$X_N \subset X, \quad \dim X_N = N < \infty$$

von $X := W_0^{1,2}(\Omega)$, die Generierung und Lösung des entstehenden linearen Gleichungssytems. Ritz-Galerkin Verfahren mit Unterräumen, die von stückweise polynomialen Basisfunktionen aufgespannt werden, heißen *Finite-Elemente-Methoden (FEM).* Sie gehören zu den wichtigsten numerischen Verfahren zur Lösung von Problemen in den Natur- und Ingenieurwissenschaften.

Wir erläutern die wichtigsten Ideen am RWP (14.1)-(14.2) aus Kapitel 14.1, d.h. für das Dirichletsche RWP der Poisson-Gleichung

$$-\Delta u(x) = f(x), \quad x \in \Omega; \qquad u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

Ausgangspunkt ist die verallgemeinerte Aufgabenstellung (14.6). Sei vereinfachend Ω konvexes, polyedrisches Gebiet mit

$$\overline{\Omega} = \cup_{j=1}^J \overline{\Omega_j}.$$

Dabei seien Ω_j für $n = 1$ Intervalle, für $n = 2$ Dreiecke und für $n = 3$ Tetraeder. Wir fordern hinsichtlich der Zerlegung in Teilgebiete ("finite Elemente")

- **Zulässigkeit:** Die Teilgebiete Ω_j haben entweder genau eine gemeinsame Fläche (für $n = 3$), genau eine Kante (für $n \geq 2$), genau einen Punkt (für $n \geq 1$) gemeinsam oder sind paarweise durchschnittsfremd.
- Für den Durchmesser der Ω_j umbeschriebenen Minimalkugel gilt $0 < h_j \leq h, \ j = 1, ..., J$.

Zur Konstruktion eines geeigneten Unterraumes $X_N \subset X = W_0^{1,2}(\Omega)$ betrachten wir den einfachsten Fall der stückweise linearen *Lagrange-Interpolation:* Seien $P_1, ..., P_N$ die in Ω liegenden Eckpunkte der finiten Elemente. Für fixiertes j definieren wir stückweise lineare Basisfunktionen so, daß $\phi_j(P_i) = \delta_{ij}$ gilt. In den auf dem Rand $\partial\Omega$ liegenden Eckpunkten sollen alle Basisfunktionen verschwinden. Die Funktionen ϕ_j werden nun durch *lineare Interpolation* auf $\overline{\Omega}$ definiert. Dann sei

$$X_N = \text{span}\{\phi_1, ..., \phi_N\}.$$

Per Konstruktion ist offenbar $X_N \subset X = W_0^{1,2}(\Omega)$.

Das zugehörige *Ritz-Galerkin Verfahren* lautet

$$\text{Finde } u^N = \sum_{j=1}^{N} c_j \phi_j \in X_N : \quad a(u^N, v) = f(v) \ \ \forall v \in X_N \tag{14.18}$$

mit

$$a(u,v) := \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx, \quad f(v) := \int_\Omega f(x) v dx.$$

Wegen der speziellen Wahl der diskreten Unterräume bezeichnet man dieses Verfahren auch als *Finite-Elemente-Methode (FEM).*

Nach Lemma 13.12 ist die FEM äquivalent zu einem linearen Gleichungssystem $A\underline{u} = \underline{f}$. Bei praktisch relevanten Aufgaben ist die Dimension N sehr groß. Die Koeffizientenmatrix A ist jedoch durch die spezielle Wahl der Basisfunktionen sehr schwach besetzt, d.h. sie besitzt nur sehr wenige Nichtnullelemente. Bei der Generierung des Gleichungssystems hat dies den Vorteil, daß relativ wenige Integrale zu berechnen sind. Bei der Lösung des Gleichungssystems verwendet man oft iterative Verfahren, die die schwach besetzte Struktur der Matrix ausnutzen.

Vernachlässigt man Fehler, die eventuell bei der numerischen Integration bei der Berechnung der Matrixeinträge bzw. auf der rechten Seite sowie bei der Lösung des Gleichungssystems entstehen, so gilt folgendes Resultat in der Norm $|\cdot|_{W_0^{1,2}(\Omega)}$.

Satz 14.15 *Sei X_N der beschriebene FEM-Unterraum von $X := W_0^{1,2}(\Omega)$. Unter den Voraussetzungen des Existenzsatzes 14.5 ist die Matrix $A = (a(\phi_j, \phi_i))_{i,j=1}^N$ nichtsingulär. Für die damit existierende, eindeutig bestimmte Lösung $u^N \in X_N$ gelten die a-priori Stabilitätsabschätzung*

$$|u^N|_X \leq \frac{1}{\gamma} \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

und die Fehlerabschätzung

$$|u - u^N|_X \leq \frac{K}{\gamma} \inf_{v \in X_N} \|u - v\|_X. \tag{14.19}$$

In der Approximationstheorie wird folgendes Resultat bewiesen.

Lemma 14.16. *Für die verallgemeinerte Lösung $u \in X$ des Problems (14.6) gelte $u \in W^{2,2}(\Omega)$. Dann gilt*

$$\inf_{v \in X_N} |u - v|_X \leq Ch \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Für konvexe, polyedrische Gebiete Ω sind die Voraussetzung des Lemmas erfüllt. Damit folgt für den Diskretisierungsfehler

$$|u - u^N|_X \leq Ch \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Bemerkung 14.17. Die hier nur sehr grob skizzierten FEM werden ausführlich im Rahmen einer nachfolgenden Vorlesung über Numerik partieller Differentialgleichungen behandelt. □

Teil III

Kompakte Operatoren

Kapitel 15

Schwache Konvergenz in reflexiven Räumen

Im nachfolgenden Teil III der Vorlesung wollen wir die Lösbarkeitstheorie linearer Operatorgleichungen auf sogenannte *kompakte Operatoren* auf normierten Räumen erweitern.
Zur Vorbereitung behandeln wir zunächst *reflexive Räume* und erweitern den *Konvergenzbegriff.*
Wir greifen dazu auf zahlreiche Begriffe und Aussagen aus den Kapiteln 11 (über Dualräume), 12 (zum Darstellungssatz von Riesz) sowie 9 (zum Prinzip der Normbeschränktheit) zurück.

15.1 Reflexive Räume

Nach Satz 11.6 sind Dualräume X^* normierter Räume erneut normierte Räume. Man kann daher deren Dualräume bilden.

Definition 15.1. *Der Dualraum $X^{**} := (X^*)^*$ des Dualraums X^* eines normierten Raumes X heißt* Bidualraum von X.

Wir überlegen zunächst, daß sich ein normierter Raum X als Unterraum seines Bidualraumes charakterisieren läßt.

Satz 15.2. *Die durch*

$$(Eu)(f) := f(u), \quad u \in X, \ f \in X^* \tag{15.1}$$

definierte kanonische Einbettung $E : X \to X^{**}$ *eines normierten Raumes X in seinen Bidualraum X^{**} ist ein isometrischer Isomorphismus von X auf $E(X)$.*

Beweis: (i) Wir zeigen, daß für $u \in X$ die Aussage $Eu \in X^{**}$ folgt. Per Definition ist

$$\begin{aligned}(Eu)(\alpha f + \beta g) &= (\alpha f + \beta g)(u) \quad = \quad \alpha f(u) + \beta g(u)\\ &= \alpha(Eu)(f) + \beta(Eu)(g).\end{aligned}$$

Folgerung 11.4 (iii) aus dem Fortsetzungssatz von Hahn–Banach ergibt nun

$$\|Eu\| = \sup_{\|f\|=1} |(Eu)(f)| = \sup_{\|f\|=1} |f(u)| = \|u\|.$$

Dies zeigt auch die Isometrie von E.
(ii) Wir zeigen die Linearität von $E : X \to X^{**}$. Für alle $f \in X^*$ gilt

$$\begin{aligned}(E(\alpha u + \beta v))(f) &= f(\alpha u + \beta v) \quad = \quad \alpha f(u) + \beta f(v)\\ &= \alpha(Eu)(f) + \beta(Ev)(f) \quad = \quad (\alpha Eu + \beta Ev)(f). \qquad \square\end{aligned}$$

Die kanonische Einbettung ist nicht in jedem Fall surjektiv. Dies motiviert

Definition 15.3. *Ein normierter Raum X heißt* reflexiv, *wenn die kanonische Einbettung $E : X \to X^{**}$ surjektiv ist.*

15.2 Charakterisierung reflexiver Räume

Nach Satz 11.6 sind Dualräume Banach-Räume. Daher muß ein reflexiver normierter Raum notwendig vollständig sein. Nachfolgend geben wir Beispiele und Charakterisierungen reflexiver Räume an.

Satz 15.4. *Jeder endlichdimensionale normierter Raum ist reflexiv.*

Beweis: Nach Satz 11.6 (ii) gilt $\dim X^{**} = \dim X^* = \dim X < \infty$. Damit ist die lineare injektive Abbildung $E : X \to X^{**}$ auch surjektiv. □

Für die funktionalanalytische Charakterisierung von Randwertaufgaben sind die beiden folgenden Beispiele von Bedeutung.

Satz 15.5. *Die Lebesgue-Räume $L^p(\Omega)$ über beschränkten, meßbaren Punktmengen $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ sind für $1 < p < \infty$ reflexiv.*

Beweis: Sei $\phi \in (L^p(\Omega))^{**}$. Nach Satz 11.9 existiert zu jedem Funktional $f \in (L^p(\Omega))^*$ für $1 < p < \infty$ genau ein $v \in L^q(\Omega)$ mit $1/p + 1/q = 1$, daß

$$f(u) = \int_\Omega u(x)v(x)dx, \quad \forall u \in L^p(\Omega).$$

Ferner ist die Abbildung $f \mapsto v$ ein isometrischer Isomorphismus von $(L^p(\Omega))^*$ auf $L^q(\Omega)$. Damit erklärt die Abbildung

$$g : v \mapsto \phi(f)$$

ein Funktional $g \in (L^q(\Omega))^*$.
Wir wenden erneut Satz 11.9 an. Dann gibt es ein Element $u \in L^p(\Omega)$ derart, daß

$$g(v) = \int_\Omega v(x)u(x)dx, \quad \forall v \in L^q(\Omega).$$

Also ist

$$\phi(f) = f(u), \quad \forall f \in (L^p(\Omega))^*,$$

d.h. $\phi = Eu$. Das ergibt die Behauptung. □

Satz 15.6. *Der Raum $C(\overline{\Omega})$ mit beschränktem Gebiet $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ist mit der Maximum-Norm nicht reflexiv.*

Beweis: Wir beschränken uns auf den eindimensionalen Fall $\Omega = (0, 1)$. Sei $U \subset (C[0, 1])^*$ Unterraum aller linearen Funktionale der Form

$$f(u) = \alpha \int_0^1 u(x)dx + \sum_{k=1}^n \alpha_k u(x_k)$$

mit $n \in \mathbf{N}$, reellen Gewichten α, α_k sowie den Stützstellen $x_k \in [0, 1], k = 1, ..., n$. Wir wählen jetzt $u_0 \in C[0, 1]$ mit den Eigenschaften

$$\|u_0\|_{L^\infty(0,1)} = 1, \quad \int_0^1 u_0(x)dx = 0, \quad u_0(x_k) = \mathrm{sign}(\alpha_k), \quad k = 1, ..., n.$$

Die Existenz eines solchen Elementes kann mit Hilfe des Alternantensatzes von Tschebyscheff bewiesen werden (vgl. Skript *Numer. Math. II* SS 1995, Abschnitt 5). Nun folgt

$$\|f\| \geq |f(u_0)| = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|, \quad \forall f \in U.$$

Sei jetzt $\phi : U \to \mathbf{R}$ lineares Funktional gemäß

$$\phi(f) := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k.$$

Dann ist $\phi \in U^*$ wegen

$$|\phi(f)| \leq \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k| \leq \|f\|.$$

Fortsetzung nach dem Satz von Hahn–Banach (vgl. Theorem 11.2) liefert ein lineares beschränktes Funktional $\phi \in (C[0,1])^{**}$.
Wir treffen die Annahme, daß ein Element $u_0 \in C[0,1]$ mit $\phi = Eu_0$ existiert. Dies bedeutet

$$\phi(f) = f(u_0), \quad \forall f \in (C[0,1])^*,$$

insbesondere für alle $f \in U$. Wir betrachten speziell die Funktionale

$$f_x : u \mapsto u(x), \quad x \in [0,1].$$

Für sie gilt per Konstruktion

$$1 = \phi(f_x) = f_x(u_0) = u_0(x), \quad x \in [0,1].$$

Für $f \in U$ mit $\alpha \neq 0$ ergibt sich dann aber über

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = \phi(f) = f(u_0) = \alpha + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$$

ein Widerspruch zur Annahme. Daraus folgt die Behauptung. □

Satz 15.7. *Hilbert-Räume sind reflexiv.*

Beweis: (i) Der Dualraum X^* eines Hilbert-Raumes X ist mit dem Skalarprodukt

$$(f,g)_{X^* \times X^*} := (v,u)_{X \times X} \tag{15.2}$$

Hilbert-Raum. Dabei sind $u, v \in X$ nach dem Rieszschen Darstellungssatz (vgl. Theorem 12.1) die Repräsentanten der beschränkten linearen Funktionale f und g. Offensichtlich übertragen sich die Axiome des Skalarproduktes von X auf X^*. Durch

$$(f,f)_{X^* \times X^*} = (u,u)_{X \times X} = \|u\|_X^2 = \|f\|_{X^*}^2$$

wird schließlich eine Norm auf X^* induziert.

(ii) Wir zeigen, daß die kanonische Einbettung $E : X \to X^{**}$ surjektiv ist. Sei dazu $\phi \in X^{**}$. Bei Anwendung des Darstellungssatzes von Riesz auf den Hilbert–Raum X^* findet man ein Funktional $f \in X^*$ mit dem Repräsentanten $u \in X$ so, daß für alle $g \in X^*$ mit dem Repräsentanten $v \in X$ gilt

$$\phi(g) = (g, f)_{X^* \times X^*} = (u, v)_{X \times X} = g(u).$$

Daraus folgt aber $\phi = Eu$ und damit die Behauptung. □

Satz 15.8. *Abgeschlossene Unterräume reflexiver normierter Räume sind reflexiv.*

Beweis: Sei U abgeschlossener Unterraum des reflexiven normierten Raumes X. Wir fixieren das Element $\phi \in U^{**}$ und definieren durch

$$\psi(f) := \phi(f|_U), \quad f \in X^*$$

ein lineares Funktional ψ auf X^*. Die Beschränktheit von ψ folgt aus

$$|\psi(f)| \leq \|\phi\| \|f|_U\| \leq \|\phi\| \|f\|.$$

Wegen der Reflexivität von X existiert ein Element $u_0 \in X$ mit

$$\psi(f) = f(u_0), \quad \forall f \in X^*.$$

Wir treffen die Annahme $u_0 \notin U$. Wegen der Abgeschlossenheit von U gilt

$$d := \inf_{v \in U} \|v - u_0\| > 0.$$

Nach dem Trennungssatz (vgl. Satz 11.3) gibt es dann ein Funktional $f_0 \in X^*$ mit

$$f_0(u) = 0, \quad \forall u \in U; \qquad f_0(u_0) = d.$$

Dies führt aber mit

$$d = f_0(u_0) = \psi(f_0) = \phi(f_0|_U) = \phi(0) = 0$$

auf einen Widerspruch. Also ist $u_0 \in U$.

Sei jetzt $g \in U^*$. Nach dem Fortsetzungsatz von Hahn–Banach kann g als Einschränkung $g = f|_U$ eines Funktionals aus X^* angesehen werden. Damit erhalten wir

$$\phi(g) = \phi(f|_U) = \psi(f) = f(u_0) = g(u_0) = (Eu_0)(g),$$

d.h. $\phi = E|_U(u_0)$. Daraus folgt die Behauptung. □

Satz 15.9. *Ein Banach-Raum ist genau dann reflexiv, wenn sein Dualraum reflexiv ist.*

Beweis: (i) $\Rightarrow$) Sei zunächst der Banach–Raum X reflexiv. Wir betrachten ein Element $F \in X^{***}$. Wir definieren $f \in X^*$ durch

$$f := FE_X.$$

Nach Voraussetzung findet man zu jedem $\phi \in X^{**}$ ein Element $u \in X$ so, daß $\phi = E_X u$. Speziell ist damit $\phi(f) = f(u)$. Daraus erhalten wir

$$F(\phi) = F(E_X u) = f(u) = \phi(f), \quad \forall \phi \in X^{**},$$

d.h. $F = E_{X^*} f$. Damit ist X^* reflexiv.

(ii) $\Leftarrow$) Sei jetzt X^* reflexiv. Nach (i) ist X^{**} reflexiv. Da $E(X)$ vollständiger und damit abgeschlossener Teilraum von X^{**} ist, haben wir nach Satz 15.8, daß $E(X)$ reflexiv ist. Nach Satz 15.2 ist $E(X)$ isometrisch isomorph zu X. Also ist auch X reflexiv. □

15.3 Schwache Konvergenz

Wir betrachten nun eine Verallgemeinerung des in Abschnitt 1.4 eingeführten Begriffs der "Normkonvergenz" bzw. "starken Konvergenz".

Definition 15.10. *(i) Eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ von Elementen in einem normierten Raum X heißt* schwach konvergent, *wenn ein Grenzelement $u \in X$ mit der Eigenschaft*

$$\lim_{n\to\infty} f(u_n) = f(u) \tag{15.3}$$

für alle stetigen und beschränkten Funktionale $f \in X^*$ existiert. Man schreibt

$$u_n \rightharpoonup u, \quad n \to \infty. \tag{15.4}$$

(ii) Eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ linearer beschränkter Funktionale in X^* heißt schwach-$*$-konvergent, *wenn ein Funktional $f \in X^*$ existiert mit*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(u) = f(u) \tag{15.5}$$

für alle $u \in X$. f heißt Grenzelement *der schwach-$*$-konvergenten Folge. Man schreibt*

$$f_n \rightharpoonup^* f, \quad n \to \infty. \tag{15.6}$$

Die schwach-$*$-Konvergenz einer Folge $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ beschränkter linearer Funktionale entspricht offenbar der punktweisen Konvergenz.

Man kann nun eine *schwache Topologie* auf X bzw. eine *schwach-$*$-Topologie* auf X^* einführen. Dabei sollen die schwache Konvergenz bzw. die schwach-$*$-Konvergenz mit dem durch die neue Topologie jeweils induzierten Konvergenzbegriff zusammenfallen. Man beachte, daß diese neuen Topologien in der Regel nicht mit der Normtopologie übereinstimmen.

Satz 15.11. *Die Grenzelemente einer schwach konvergenten bzw. schwach-$*$- konvergenten Folge sind eindeutig bestimmt.*

Beweis: (i) Gelte $u_n \rightharpoonup u$ sowie $u_n \rightharpoonup v$ für $n \to \infty$. Folglich ist $f(u) = f(v)$ für alle $f \in X^*$. Folgerung 11.4 (ii) aus dem Satz von Hahn-Banach ergibt mit $u = v$ die Eindeutigkeit.

(ii) Gelte $f_n \rightharpoonup^* f$ bzw. $f_n \rightharpoonup^* g$ für $n \to \infty$. Dann folgt $f(u) = g(u)$ für alle $u \in X$, also $f = g$. $\square$

Satz 15.12. *Schwach konvergente Folgen in einem normierten Raum sind beschränkt.*

Beweis: Gelte $u_n \rightharpoonup u$ für $n \to \infty$. Mit der kanonischen Einbettung $E : X \to X^{**}$ betrachten wir die Bildfolge $(Eu_n)_{n\in\mathbf{N}}$ in X^{**}. Dann ist per Definition

$$(Eu_n)(f) = f(u_n) \to f(u), \quad n \to \infty,$$

d.h. die Folge $(Eu_n)_{n\in\mathbf{N}}$ linearer Operatoren aus dem Banach–Raum X^* in den normierten Raum $\mathbf{C}$ ist punktweise beschränkt. Nach Theorem 9.9 (Prinzip der Normbeschränktheit) ist $(Eu_n)_{n\in\mathbf{N}}$ normbeschränkt. Dann gibt es unter Beachtung von Satz 15.2 eine Konstante $C > 0$ so, daß

$$\|u_n\| = \|Eu_n\| \le C, \quad \forall n \in \mathbf{N}. \qquad \square$$

Satz 15.13. *Schwach-$*$-konvergente Folgen im Dualraum eines Banach-Raumes sind beschränkt.*

Beweis: Schwach-$*$-konvergente Folgen konvergieren punktweise. Dann folgt die Behauptung aus dem Prinzip der Normbeschränktheit (vgl. Theorem 9.9). □

Satz 15.14. *Schwach konvergente Folgen im Dualraum eines normierten Raumes sind auch schwach-$*$-konvergent. In reflexiven Räumen ist auch die Umkehrung richtig.*

Beweis: Die Aussage $f_n \rightharpoonup f, n \to \infty$ heißt

$$\psi(f_n) \to \psi(f), \quad n \to \infty, \quad \forall \psi \in X^{**}. \tag{15.7}$$

Das impliziert speziell

$$f_n(u) = (Eu)(f_n) \to (Eu)(f) = f(u), \quad n \to \infty, \quad \forall u \in X, \tag{15.8}$$

also $f_n \rightharpoonup^* f, n \to \infty$. Für reflexive Räume X sind (15.7) und (15.8) äquivalent. □

Das Verhältnis "starker" und schwacher Konvergenz beschreibt der

Satz 15.15. *Jede normkonvergente Folgen ist auch schwach konvergent. Die Grenzelemente stimmen überein.*

Beweis: Dies ergibt sich aus

$$|f(u_n) - f(u)| = |f(u_n - u)| \leq \|f\| \, \|u_n - u\|, \quad \forall f \in X^*. \qquad \square$$

Nachfolgendes Beispiel zeigt, daß die Umkehrung in der Regel falsch ist.

Beispiel 15.16. *Ein vollständiges Orthonormalsystem $(\phi_n)_{n \in \mathbf{N}}$ in einem unendlich dimensionalen Prä-Hilbert Raum ist schwach konvergent, jedoch nicht stark konvergent.*

Beweis: Nach Satz 8.17 gilt für alle Elemente $u \in X$ die Parsevalsche Gleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(u, \phi_n)|^2 = \|u\|^2.$$

Nach dem notwendigen Konvergenzkriterium für Reihen ist dann $(u, \phi_n) \to 0, n \to \infty$. Der Rieszsche Darstellungssatz impliziert

$$\phi_n \rightharpoonup 0, \quad n \to \infty.$$

Andererseits ist $(\phi_n)_{n \in \mathbf{N}}$ keine Cauchy–Folge wegen

$$\|\phi_n - \phi_m\|^2 = 2, \quad n \neq m,$$

also auch nicht konvergent. □

15.4 Beschränkte Folgen in reflexiven Räumen

Von besonderer Bedeutung für die weiteren Untersuchungen ist die Frage, unter welchen Bedingungen beschränkte Folgen konvergente Teilfolgen besitzen. Insbesondere zeigen wir, daß jede beschränkte Folge in einem reflexiven Raum eine schwach konvergente Teilfolge enthält.

Satz 15.17. *In einem separablen normierten Raum enthält jede beschränkte Folge in X^* eine schwach-$*$-konvergente Teilfolge.*

Beweis: Nach Definition 3.4 ist ein metrischer (also auch normierter) Raum separabel, falls er eine abzählbare dichte Teilmenge enthält. Sei $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ beschränkte Folge in X^*, d.h. $\|f_n\| \leq C$ für alle $n \in \mathbf{N}$. Ferner sei $(u_i)_{i\in\mathbf{N}}$ eine in X dichte Folge. Dann ist die Folge $(f_n(u_i))_{n\in\mathbf{N}}$ in $\mathbf{C}$ beschränkt wegen der für alle fixierten $i \in \mathbf{N}$ gültigen Abschätzung

$$|f_n(u_i)| \leq \|f_n\| \, \|u_i\| \leq C\|u_i\|.$$

Wir wenden jetzt den Satz von Bolzano-Weierstraß in Kombination mit dem beim Beweis (vgl. Übungsaufgabe) des Satzes von Arzela-Ascoli (vgl. Theorem 3.13) benutzten Diagonalisierungsverfahren an. Dadurch findet man eine Teilfolge $(f_{n(k)})_{k\in\mathbf{N}}$ so, daß für alle Elemente u_i die Folge $(f_{n(k)}(u_i))_{k\in\mathbf{N}}$ für $k \to \infty$ konvergiert.

Sei jetzt u beliebiges Element in X. Wegen der Separabilität gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Zahl $i \in \mathbf{N}$ so, daß

$$\|u - u_i\| < \frac{\epsilon}{4C}.$$

Wegen der Konvergenz der Folge $(f_{n(k)}(u_i))_{k\in\mathbf{N}}$ findet man eine Zahl $N(\epsilon) \in \mathbf{N}$ mit

$$\left|f_{n(k)}(u_i) - f_{n(l)}(u_i)\right| < \frac{\epsilon}{2}, \quad \forall k, l \geq N(\epsilon).$$

Also ist

$$\begin{aligned} & \left|f_{n(k)}(u) - f_{n(l)}(u)\right| \\ \leq \; & \left|f_{n(k)}(u) - f_{n(k)}(u_i)\right| + \left|f_{n(k)}(u_i) - f_{n(l)}(u_i)\right| + \left|f_{n(l)}(u_i) - f_{n(l)}(u)\right| \\ \leq \; & 2C\|u_i - u\| + \left|f_{n(k)}(u_i) - f_{n(l)}(u_i)\right| < \epsilon \end{aligned}$$

für alle Zahlen $k, l \geq N(\epsilon)$. Somit ist $(f_{n(k)}(u))_{k\in\mathbf{N}}$ für alle Elemente $u \in X$ Cauchy-Folge und damit konvergent, denn $\mathbf{C}$ ist Banach-Raum. Also ist die Folge $(f_{n(k)})_{k\in\mathbf{N}}$ beschränkter linearer Funktionale punktweise konvergent. Durch

$$f(u) := \lim_{k\to\infty} f_{n(k)}(u)$$

wird dann ein lineares Grenzfunktional erklärt. Es ist wegen

$$|f_n(u)| \leq \|f_n\| \, \|u\| \leq C\|u\|$$

beschränkt mit der Schranke C. Daraus folgt die Behauptung. □

Lemma 15.18. *Der Dualraum X^* des normierten Raumes X sei separabel. Dann ist auch X separabel.*

Beweis: Sei $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ eine in X^* dichte Folge. Wir wählen zu jedem Funktional f_n ein Element $u_n \in X$ mit

$$\|u_n\| = 1, \quad |f_n(u_n)| \geq \frac{1}{2}\|f_n\|$$

und definieren

$$U := \overline{\operatorname{span}\{u_n : n \in \mathbf{N}\}}.$$

Wir nehmen an, daß $U \neq X$. Dann gibt es nach dem Trennungssatz (vgl. Satz 11.3) ein $f \in X^*$ mit $\|f\| = 1$ und $f(u) = 0$ für alle $u \in U$. Wegen der Dichtheit von $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ in X^* finden wir eine Zahl $n_0 \in \mathbf{N}$ so, daß $\|f_{n_0} - f\| < \frac{1}{4}$. Dann impliziert $\|f\| = 1$ die Aussage $\|f_{n_0}\| > \frac{1}{2}$. Wir erhalten dann wegen

$$\begin{aligned}\frac{1}{4} &< \frac{1}{2}\|f_{n_0}\| \leq |f_{n_0}(u_{n_0})| = |f_{n_0}(u_{n_0}) - f(u_{n_0})| \\ &\leq \|f_{n_0} - f\| \, \|u_{n_0}\| = \|f_{n_0} - f\| < \frac{1}{4}\end{aligned}$$

einen Widerspruch. Damit ist $U = X$, also X separabel. □

Das *Hauptresultat* dieses Abschnitts ist

Theorem 15.19. *In einem reflexiven normierten Raum enthält jede beschränkte Folge eine schwach konvergente Teilfolge.*

Beweis: Sei $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ eine beschränkte Folge im reflexiven Raum X. Nach Satz 15.8 ist der abgeschlossene Unterraum

$$U := \overline{\operatorname{span}\{u_n : n \in \mathbf{N}\}}$$

von X auch reflexiv.
Weiterhin ist U separabel, denn die Menge aller Linearkombinationen mit rationalen Koeffizienten liegt dicht in U. Wegen der Reflexivität von U ist auch U^{**} separabel. Lemma 15.18 impliziert die Separabilität von U^*.

Die kanonische Einbettung $E : U \to U^{**}$ bildet (unter Beachtung von Satz 15.2) die beschränkte Folge $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ aus U in die beschränkte Folge $(Eu_n)_{n\in\mathbf{N}}$ in U^{**} ab. Nach Satz 15.17 besitzt $(Eu_n)_{n\in\mathbf{N}}$ eine schwach-$*$-konvergente Teilfolge

$$Eu_{n(k)} \rightharpoonup^* \phi \in U^{**}, \quad k \to \infty,$$

damit

$$(Eu_{n(k)})(f) \to \phi(f), \quad k \to \infty, \quad \forall f \in U^*. \tag{15.9}$$

Wegen der Reflexivität von U existiert ein Element $u \in U$ mit $\phi = Eu$. (15.9) ist dann äquivalent zu

$$f(u_{n(k)}) \to f(u), \quad k \to \infty, \quad \forall f \in U^*.$$

Für beliebige $f \in X^*$ gehört die Einschränkung $f|_U$ zu U^*. Daher folgt

$$f(u_{n(k)}) \to f(u), \quad k \to \infty, \quad \forall f \in X^*,$$

also

$$u_{n(k)} \rightharpoonup u, \quad k \to \infty. \qquad \square$$

Bemerkung 15.20. Wesentliche Anwendung finden die Aussagen dieses Abschnitts bei der Untersuchung von (nichtlinearen) Operatorgleichungen in reflexiven Räumen nach folgender *Idee*: Man untersucht die Existenz von Näherungslösungen u_n des Problems in endlichdimensionalen Unterräumen $X_n \subset X$ und beweist die gleichmäßige Beschränktheit der Lösungen (*a–priori Abschätzung*)

$$\exists C > 0 : \quad \|u_n\| \leq C, \quad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Nach Theorem 15.19 gibt es dann eine schwach konvergente Teilfolge. Man versucht dann zu beweisen, daß der Grenzwert dieser Teilfolge auch Lösung der Operatorgleichung in X ist. Damit ist dieser Weg des Existenzbeweises in der Regel zugleich konstruktiv. □

Kapitel 16

Kompakte Operatoren

Im vorliegenden Kapitel führen wir den für die weiteren Betrachtungen der Vorlesung grundlegenden Begriff des *kompakten Operators* ein. Eigenschaften und Beispiele derartiger Operatoren werden angegeben. Schließlich diskutieren wir den Zusammenhang mit dem Begriff *Vollstetigkeit* eines Operators.

16.1 Eigenschaften kompakter Operatoren

Definition 16.1 *Ein linearer Operator A: $X \to Y$, der aus einem normierten Raum X in einen normierten Raum Y abbildet, heißt* kompakt, *wenn er beschränkte Mengen aus X in relativ kompakte Mengen in Y abbildet.*

In Satz 3.9 hatten wir gesehen, daß eine Teilmenge U eines normierten Raumes Y genau dann relativ kompakt ist, wenn jede Folge in U eine in Y konvergente Teilfolge enthält. Damit erhalten wir die folgende äquivalente Charakterisierung kompakter Operatoren.

Satz 16.2. *Ein linearer Operator A: $X \to Y$ ist kompakt genau dann, wenn für jede beschränkte Folge $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ in X die Bildfolge $(Au_n)_{n\in\mathbf{N}}$ eine konvergente Teilfolge in Y besitzt.*

Satz 16.3. *Kompakte lineare Operatoren sind beschränkt.*

Beweis: Die Behauptung folgt, da relativ kompakte Mengen nach Folgerung 3.7 beschränkt sind. □

Satz 16.4. *Linearkombinationen kompakter linearer Operatoren sind kompakt.*

Beweis: Mit $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ sei $\alpha A + \beta B$: $X \to Y$ eine Linearkombination kompakter linearer Operatoren. Aus einer beliebigen beschränkten Folge $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ in X wählen wir wegen der Kompaktheit von A und B eine Teilfolge $(u_{n(k)})_{k\in\mathbf{N}}$ so aus, daß die Folgen $(Au_{n(k)})_{k\in\mathbf{N}}$ und $(Bu_{n(k)})_{k\in\mathbf{N}}$ konvergieren. Dann konvergiert aber auch $((\alpha A + \beta B)u_{n(k)})_{k\in\mathbf{N}}$, d.h. $\alpha A + \beta B$ ist kompakt. □

Satz 16.5. *In normierten Räumen X, Y und Z seien A: $X \to Y$ und B: $Y \to Z$ beschränkte lineare Operatoren. Dann ist der Operator BA: $X \to Z$ kompakt, wenn wenigstens einer der beiden Operatoren A oder B kompakt ist.*

Beweis: Sei $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ eine beschränkte Folge in X.

(i) Falls A kompakt ist, so gibt es eine Teilfolge $(u_{n(k)})_{k\in\mathbf{N}}$ mit $Au_{n(k)} \to g \in Y, k \to \infty$. B ist nach Voraussetzung beschränkt, also auch stetig (vgl. Satz 9.3). Daher gilt auch $B(Au_{n(k)}) \to Bg \in Z, k \to \infty$, d.h. BA ist kompakt.

(ii) Seien nun A beschränkt und B kompakt. Dann ist die Folge $(Au_n)_{n\in\mathbf{N}}$ beschränkt in Y, da beschränkte Operatoren beschränkte Mengen wieder in beschränkte Menge abbilden. Dann findet man aber wegen der Kompaktheit von B eine Teilfolge $(u_{n(k)})_{k\in\mathbf{N}}$, so daß

$$(BA)u_{n(k)} = B(Au_{n(k)}) \to w \in Z, \quad k \to \infty.$$

Also ist BA kompakt. □

Satz 16.6. *Seien X normierter Raum und Y Banach–Raum. Ferner sei A_n: $X \to Y$ eine Folge kompakter linearer Operatoren, die in der Operatornorm gegen den linearen Operator A: $X \to Y$ konvergiert, d.h.*

$$\|A_n - A\| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Dann ist der Grenzoperator A kompakt.

Beweis: Sei $(u_m)_{m\in\mathbf{N}}$ eine beschränkte Folge in X, d.h. $\|u_m\| \le C$ für alle Zahlen $m \in \mathbf{N}$. Wegen der Kompaktheit von A_n kann man mit einem bereits mehrfach angewandten Diagonalisierungsverfahren eine Teilfolge $(u_{m(k)})_{k\in\mathbf{N}}$ so auswählen, daß $(A_n u_{m(k)})_{k\in\mathbf{N}}$ für jeden fixierten Index n für $k \to \infty$ konvergiert.
Sei nun $\epsilon > 0$ vorgegeben. Wegen $\|A_n - A\| \to 0, n \to \infty$ gibt es eine Zahl $n_0 \in \mathbf{N}$ so, daß $\|A_{n_0} - A\| < \epsilon/(3C)$. Aufgrund der Konvergenz der Teilfolge $(A_{n_0} u_{m(k)})_{k\in\mathbf{N}}$ existiert weiter eine Zahl $N(\epsilon) \in \mathbf{N}$ mit

$$\|A_{n_0} u_{m(k)} - A_{n_0} u_{m(l)}\| < \frac{\epsilon}{3}, \quad \forall k, l \ge N(\epsilon).$$

Daraus erhalten wir mittels Nullergänzung und Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned}
\|Au_{m(k)} - Au_{m(l)}\| &\le \|Au_{m(k)} - A_{n_0} u_{m(k)}\| \\
&\quad + \|A_{n_0} u_{m(k)} - A_{n_0} u_{m(l)}\| + \|A_{n_0} u_{m(l)} - Au_{m(l)}\| \\
&< \epsilon, \quad \forall k, l \ge N(\epsilon).
\end{aligned}$$

Damit ist $(Au_{m(k)})_{k\in\mathbf{N}}$ Cauchy-Folge, die im Banach-Raum Y auch konvergiert. □

Satz 16.7. *Sei A: $X \to Y$ ein beschränkter linearer Operator mit endlichdimensionalem Bildbereich $A(X)$. Dann ist A kompakt.*

Beweis: Sei $U \subset X$ beschränkte Teilmenge. Dann bildet der beschränkte Operator A die Menge U in die beschränkte Teilmenge $A(U)$ ab, die im endlichdimensionalen Raum $A(X)$ liegt. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß (vgl. Satz 4.9) ist dann $A(U)$ relativ kompakt. Damit ist A kompakt. □

Satz 16.8. *Die Identität I: $X \to X$ ist genau dann kompakt, wenn der Raum X endlichdimensional ist.*

Beweis: Folgerung aus dem Satz 4.11. □

Dieser Satz zeigt, daß die Umkehrung von Satz 16.3 (über die Beschränktheit kompakter Operatoren) i. allg. Fall nicht gilt. Ferner zeigen die Aussagen der Sätze 16.5 und 16.8, daß kompakte Operatoren eine beschränkte Inverse höchstens bei endlichdimensionalem Bildbereich besitzen können.

16.2 Beispiele kompakter Operatoren

Typische Beispiele kompakter Operatoren findet man in der *Theorie der Integralgleichungen.* Als Beispiel geben wir

Satz 16.9. *Sei $\overline{\Omega} \subset \mathbf{R}^n$ nichtleere, kompakte und Jordan-meßbare Punktmenge. Dann ist der Integraloperator*

$$(Au)(x) := \int_\Omega K(x,y)u(y)dy, \quad x \in \Omega \tag{16.1}$$

mit stetigem Kern $K \in C(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$ ein kompakter Operator A: $C(\overline{\Omega}) \to C(\overline{\Omega})$.

Beweis: Übungsaufgabe (Hinweis: Man nutze den Satz von Arzela-Ascoli (vgl. Theorem 3.13).) □

In der Theorie der Integralgleichungen versucht man, die Voraussetzungen an den Kern K bei geeigneter Wahl der entsprechenden Räume weiter abzuschwächen. Insbesondere sind Punktsingularitäten des Kerns von Bedeutung.

In den folgenden Abschnitten wollen wir die Lösbarkeitstheorie von *Operatorgleichungen zweiter Art*

$$(I - A)u = g \tag{16.2}$$

mit dem identischen Operator I und einem kompaktem Operator $A \in \mathcal{L}(X,X)$ studieren. Dazu werden ggf. *Operatorgleichungen erster Art*

$$Bu = f, \quad B \in \mathcal{L}(X,Y) \tag{16.3}$$

geeignet umgeformt. Bei unseren Anwendungen auf Randwertprobleme elliptischer Differentialgleichungen spielen dabei *Einbettungsoperatoren* eine wesentliche Rolle.

Definition 16.10. *Für Banach–Räume X, Y heißt $X \subset Y$* stetige Einbettung, *falls eine Konstante $C > 0$ existiert mit*

$$\|u\|_Y \le C\|u\|_X, \quad \forall u \in X.$$

Die Einbettung heißt kompakt, *falls der Einbettungsoperator $E \in \mathcal{L}(X,Y)$ mit $Eu = u$ für alle $u \in X$ kompakt ist.*

Wir benötigen später den folgenden *Einbettungssatz.*

Satz 16.11. *Sei $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ offene und beschränkte Punktmenge. Dann ist die Einbettung*

$$W_0^{k,2}(\Omega) \subset W_0^{l,2}(\Omega), \quad k,l \in \mathbf{N_0}, \ k > l \tag{16.4}$$

kompakt. Dabei sei $W_0^{0,2}(\Omega) = L^2(\Omega)$.

Beweis: vgl. z.B. H.W. Alt: Lineare Funktionalanalysis, Springer–Verlag 1985, Satz 8.7, 2) (Umfangreich !) □

16.3 Vollstetigkeit

Auf D. Hilbert geht der folgende Begriff zurück.

Definition 16.12. *Ein stetiger Operator T: $X \to Y$, der aus einem normierten Raum X in einen normierten Raum Y abbildet, heißt* vollstetig, *wenn aus der schwachen Folgenkonvergenz in X (d.h. $u_n \rightharpoonup u, n \to \infty$) die starke Konvergenz der Bildfolge in Y folgt (d.h. $Tu_n \to Tu, n \to \infty$).*

Wir zeigen, daß in der Klasse der linearen und stetigen Operatoren $\mathcal{L}(X,Y)$ mit reflexivem Raum X und normiertem Raum Y die Begriffe *Vollstetigkeit* und *Kompaktheit* zusammenfallen. Es sei vermerkt, daß diese Aussage für nichtlineare Operatoren i. allg. Fall nicht richtig ist.

Satz 16.13. *Ein kompakter linearer Operator bildet schwach konvergente Folgen in normkonvergente Folgen ab.*

Beweis: (i) Seien $A : X \to Y$ kompakt sowie $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ eine schwach konvergente Folge mit $u_n \rightharpoonup u, n \to \infty$ in X. Für beliebige Funktionale $f \in Y^*$ haben wir dann

$$f(Au_n) \to f(Au), \quad n \to \infty$$

wegen $fA \in X^*$. Das entspricht aber per Definition der schwachen Konvergenz

$$Au_n \rightharpoonup Au, \quad n \to \infty.$$

Nach Satz 15.12 ist die Folge $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ beschränkt. Wegen der Kompaktheit von A enthält nun $(Au_n)_{n\in\mathbf{N}}$ eine normkonvergente Teilfolge. Deren Grenzwert ist nach Satz 15.15 Au.

(ii) Wir zeigen (indirekt), daß auch die gesamte Folge $(Au_n)_{n\in\mathbf{N}}$ gegen Au konvergiert. Dazu nehmen wir das Gegenteil an. Dann gibt es eine Zahl $\epsilon > 0$ und eine Teilfolge $(Au_{n(k)})_{k\in\mathbf{N}}$ mit

$$\|Au_{n(k)} - Au\| \geq \epsilon, \quad \forall k \in \mathbf{N}. \tag{16.5}$$

Nach Anwendung der Überlegung aus (i) auf die schwach konvergente Teilfolge $u_{n(k)} \rightharpoonup u, k \to \infty$ folgern wir, daß auch diese Teilfolge eine Teilfolge enthält mit Normkonvergenz von deren Bildfolge gegen Au. Das ist aber ein Widerspruch zur Annahme (16.5). Daraus folgt die Behauptung. □

Die gesuchte Aussage gibt der

Satz 16.14. *Ein linearer Operator A: $X \to Y$ eines reflexiven Raumes X in einen normierten Raum Y ist kompakt genau dann, wenn er vollstetig ist.*

Beweis: Nach Satz 16.13 ist nur die Rückrichtung zu beweisen. Sei dazu $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ beschränkte Folge in X. Nach dem Theorem 15.19 enthält die Folge $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ im reflexiven Raum X eine schwach konvergente Teilfolge. Nach Voraussetzung wird diese Teilfolge auf eine in Y normkonvergente Folge abgebildet. Daher ist per Definition A kompakt. □

Kapitel 17

Die Riesz-Schauder Theorie

Im vorliegenden Abschnitt stellen wir die Resultate von Riesz zur Lösbarkeit von *Operatorgleichungen zweiter Art*

$$u - Au = f \tag{17.1}$$

mit *kompaktem linearen* Operator $A : X \to X$ und normiertem Raum X dar. Nach Formulierung der grundlegenden Sätze von Riesz formulieren wir die Lösbarkeitsaussagen. Dann entwickeln wir Aussagen über das *Spektrum* eines linearen kompakten Operators.
Es sei daran erinnert, daß wir bereits in Kapitel 10.2 mit Hilfe des Fixpunktsatzes von Banach Operatorgleichungen 2. Art untersucht hatten. Dort wurde die einschneidendere Forderung $\|A\| < 1$ getroffen.

17.1 Sätze von Riesz

Mit dem identischen Operator I verwenden wir die Abkürzung

$$L := I - A.$$

Theorem 17.1. *(1. Satz von Riesz)*
Der durch

$$N(L) := \{u \in X : Lu = 0\} \tag{17.2}$$

definierte Nullraum *des Operators L ist endlich-dimensionaler Unterraum von X.*

Beweis: Zunächst zeigen wir, daß der Nullraum des beschränkten linearen Operators L ein abgeschlossener Unterraum von X ist. Das ergibt sich, da für jede Folge $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ mit $u_n \to u, n \to \infty$ und $Lu_n = 0$ auch $Lu = 0$ gilt. Man beachte dazu, daß A als linearer kompakter Operator beschränkt (vgl. Satz 16.3) und damit stetig ist. Damit ist auch L stetig.
Für beliebige $u \in N(L)$ ist $Au = u$. Daher gilt

$$A|_{N(L)} = I : \;\; N(L) \to N(L).$$

Wegen der Kompaktheit von A auf X und der Abgeschlossenheit von $N(L)$ ist A auch kompakter Operator von $N(L)$ auf $N(L)$. Nach Satz 16.8 ist dann der Nullraum von endlicher Dimension.
□

Theorem 17.2. *(2. Satz von Riesz)*
Der durch

$$L(X) := \{Lu : \;\; u \in X\} \tag{17.3}$$

definierte Bildbereich *des Operators L ist abgeschlossener linearer Teilraum von X.*

Beweis: Wegen der Linearität von L ist $L(X)$ linearer Unterraum von X. Sei nun $f \in \overline{L(X)}$. Dann gibt es eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ in X mit $Lu_n \to f, n \to \infty$. Nun wählen wir nach Satz 4.18 zu jedem u_n die Bestapproximation w_n bezüglich $N(L)$, also

$$\|u_n - w_n\| = \inf_{w\in N(L)} \|u_n - w\|.$$

Wir zeigen jetzt (indirekt), daß die durch

$$\tilde{u}_n := u_n - w_n$$

definierte Folge $(\tilde{u}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ beschränkt ist. Dazu sei die Unbeschränktheit der Folge angenommen. Dann findet man eine Teilfolge $(\tilde{u}_{n(k)})_{k\in\mathbf{N}}$, so daß $\|\tilde{u}_{n(k)}\| \geq k$ für alle $k \in \mathbf{N}$ gilt. Wir setzen

$$v_k := \frac{\tilde{u}_{n(k)}}{\|\tilde{u}_{n(k)}\|}, \quad k \in \mathbf{N}.$$

Wegen $\|v_k\| = 1$ gibt es wegen der Kompaktheit von A eine Teilfolge $(v_{k(j)})_{j\in\mathbf{N}}$ derart, daß

$$Av_{k(j)} \to v \in X, \quad j \to \infty.$$

Ferner gilt

$$\|Lv_k\| = \frac{\|L\tilde{u}_{n(k)}\|}{\|\tilde{u}_{n(k)}\|} \leq \frac{\|L\tilde{u}_{n(k)}\|}{k} \to 0, \quad k \to \infty,$$

denn die Folge $(Lu_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ist konvergent und folglich beschränkt. Damit haben wir

$$Lv_{k(j)} \to 0, \quad j \to \infty,$$

also ist

$$v_{k(j)} = Lv_{k(j)} + Av_{k(j)} \to v, \quad j \to \infty.$$

Wegen der Stetigkeit von L folgt aus den beiden letzten Gleichungen die Aussage $Lv = 0$. Nun gehört aber $w_{n(k)} + \|\tilde{u}_{n(k)}\|v$ zum Nullraum $N(L)$ für beliebigen Index $k \in \mathbf{N}$, denn wegen $w_{n(k)} \in N(L)$ ist

$$Lw_{n(k)} + \|\tilde{u}_{n(k)}\|Lv = Lw_{n(k)} = 0.$$

Daraus folgern wir

$$\begin{aligned} \|v_k - v\| &= \frac{1}{\|\tilde{u}_{n(k)}\|}\|u_{n(k)} - \{w_{n(k)} + \|\tilde{u}_{n(k)}\|v\}\| \\ &\geq \frac{1}{\|\tilde{u}_{n(k)}\|} \inf_{w\in N(L)} \|u_{n(k)} - w\| = \frac{1}{\|\tilde{u}_{n(k)}\|}\|u_{n(k)} - w_{n(k)}\| = 1. \end{aligned}$$

Das steht aber im Widerspruch zu $v_{k(j)} \to v, j \to \infty$.

Damit ist $(\tilde{u}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ beschränkt. Wir können daher wegen der Kompaktheit von A eine Teilfolge $(\tilde{u}_{n(k)})_{k\in\mathbf{N}}$ derart auswählen, daß die Bildfolge $(A\tilde{u}_{n(k)})_{k\in\mathbf{N}}$ für $k \to \infty$ konvergiert. Wegen $L\tilde{u}_{n(k)} = Lu_{n(k)} \to f, n \to \infty$ und $\tilde{u}_{n(k)} = L\tilde{u}_{n(k)} + A\tilde{u}_{n(k)}$ konvergiert $\tilde{u}_{n(k)}$ gegen ein Element $u \in X$ für $k \to \infty$. Dann ist aber auch

$$L\tilde{u}_{n(k)} \to Lu \in X, \quad k \to \infty$$

und folglich $f = Lu \in L(X)$. Damit erhalten wir $\overline{L(X)} = L(X)$. □

Für die Aussagen des nächsten Satzes benötigen wir den *iterierten Operator*

$$L^n = (I-A)^n = I - A_n, \quad A_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \binom{n}{k} A^k, \quad n \in \mathbf{N}. \tag{17.4}$$

Aus den Sätzen 16.4 und 16.5 wissen wir, daß A_n kompakt ist. Nach den ersten beiden Sätzen von Riesz sind dann die Nullräume $N(L^n)$ endlichdimensionale sowie die Bildbereiche $L^n(X)$ abgeschlossene Unterräume von X.

Theorem 17.3. *(3. Satz von Riesz)*
(i) Es gibt genau eine Zahl $r \in \mathbf{N}_0$, so daß

$$\{0\} = N(L^0) \underset{\neq}{\subset} N(L^1) \underset{\neq}{\subset} \dots \underset{\neq}{\subset} N(L^r) = N(L^{r+1}) = \dots\ , \tag{17.5}$$

$$X = L^0(X) \underset{\neq}{\supset} L^1(X) \underset{\neq}{\supset} \dots \underset{\neq}{\supset} L^r(X) = L^{r+1}(X) = \dots\ . \tag{17.6}$$

Die Zahl r heißt auch Rieszsche Zahl *des Operators A.*
(ii) Es gilt

$$X = N(L^r) \oplus L^r(X). \tag{17.7}$$

Beweis: $(i)_1$ Für alle $u \in N(L^n), n \in \mathbf{N}_0$ gilt $L^{n+1}u = 0$, also

$$\{0\} = N(L^0) \subset N(L^1) \subset \dots \subset N(L^r) \subset N(L^{r+1}) \subset \dots .$$

Wir nehmen nun an, daß

$$\{0\} = N(L^0) \underset{\neq}{\subset} N(L^1) \underset{\neq}{\subset} \dots \underset{\neq}{\subset} N(L^r) \underset{\neq}{\subset} N(L^{r+1}) \underset{\neq}{\subset} \dots .$$

Nach Theorem 17.1 sind die Nullräume $N(L^n)$ endlich-dimensional. Nach dem Lemma von Riesz (vgl. Lemma 4.10) existiert dann für jedes $n \in \mathbf{N}_0$ ein Element $u_n \in N(L^{n+1})$ mit $\|u_n\| = 1$ und

$$\|u_n - u\| \geq \frac{1}{2}, \quad \forall u \in N(L^n).$$

Für $n > m$ gehört in der Darstellung

$$Au_n - Au_m = u_n - (u_m + Lu_n - Lu_m)$$

der letzte Term zu $N(L^n)$, denn

$$L^n(u_m + Lu_n - Lu_m) = L^{n-m-1}L^{m+1}u_m + L^{n+1}u_n - L^{n-m}L^{m+1}u_m = 0.$$

Damit haben wir

$$\|Au_n - Au_m\| \geq \frac{1}{2}, \quad n > m.$$

Dann kann die Folge $(Au_n)_{n\in\mathbf{N}}$ keine konvergente Teilfolge enthalten. Das widerspricht der Kompaktheit von A. Es gibt also in der Folge $N(L^n)$ zwei aufeinander folgende Nullräume, die gleich sind.
Sei nun

$$r := min\{k : N(L^k) = N(L^{k+1})\}.$$

Per Induktion zeigen wir nun

$$N(L^r) = N(L^{r+1}) = N(L^{r+2}) = \dots .$$

Dazu nehmen wir $N(L^k) = N(L^{k+1})$ für eine Zahl $k \geq r$ an. Für jedes $u \in N(L^{k+2})$ ist $L^{k+1}Lu = L^{k+2}u = 0$. Daraus ergibt sich $Lu \in N(L^{k+1}) = N(L^k)$. Folglich ist $L^{k+1}u = L^kLu = 0$ und damit $u \in N(L^{k+1})$. Das impliziert jedoch $N(L^{k+2}) \subset N(L^{k+1})$ und wegen der bereits gezeigten Aussage $N(L^{k+2}) \supset N(L^{k+1})$ zunächst Aussage (17.5) des Satzes.

$(i)_2$ Sei $v \in L^{n+1}(X)$. Dann existiert ein Element $u \in X$ mit $v = L^{n+1}u$. Wegen $v = L^n(Lu) \in L^n(X)$ folgt

$$X = L^0(X) \supset L^1(X) \supset \dots \supset L^n(X) \supset L^{n+1}(X) \supset \dots .$$

Gelte nun

$$X = L^0(X) \underset{\neq}{\supset} L^1(X) \underset{\neq}{\supset} \dots \underset{\neq}{\supset} L^n(X) \underset{\neq}{\supset} L^{n+1}(X) \underset{\neq}{\supset} \dots .$$

Nun sind nach dem 2. Satz von Riesz die Bildräume $L^n(X)$ abgeschlossene Unterräume von X. Lemma 4.10 ergibt wieder die Existenz eines Elementes $v_n \in L^n(X)$ mit $\|v_n\| = 1$ und

$$\|v_n - v\| \geq \frac{1}{2}, \quad \forall v \in L^{n+1}(X).$$

Mit $v_n = L^n u_n$ betrachten wir für $m > n$

$$Av_n - Av_m = v_n - (v_m + Lv_n - Lv_m).$$

Wegen

$$v_m + Lv_n - Lv_m = L^{n+1}(L^{m-n-1}u_m + u_n - L^{m-n}u_m)$$

ist $v_m + Lv_n - Lv_m \in L^{n+1}(X)$, daher

$$\|Av_n - Av_m\| \geq \frac{1}{2}, \quad m > n.$$

Wie in Schritt $(i)_1$ führt das auf einen Widerspruch zur Kompaktheit von A. Also gibt es in der Folge $L^n(X)$ zwei aufeinander folgende Bildbereiche, die gleich sind.
Sei

$$s := min\{k : L^k(X) = L^{k+1}(X)\}.$$

Per Induktion zeigen wir nun

$$L^s(X) = L^{s+1}(X) = L^{s+2}(X) = \dots .$$

Gelte bereits $L^k(X) = L^{k+1}(X)$ für eine Zahl $k \geq s$. Sei $v \in L^{k+1}(X)$. Dann existiert ein $u \in X$ mit $L^{k+1}u = v$. Wegen $L^ku \in L^k(X) = L^{k+1}(X)$ gibt es ein geeignetes $\tilde{u} \in X$ mit $L^ku = L^{k+1}\tilde{u}$. Dann ist $v = L^{k+2}\tilde{u} \in L^{k+2}(X)$ und folglich $L^{k+1}(X) \subset L^{k+2}(X)$. Daraus folgt

$$X = L^0(X) \underset{\neq}{\supset} L^1(X) \underset{\neq}{\supset} \dots \underset{\neq}{\supset} L^s(X) = L^{s+1}(X) = \dots .$$

$(i)_3$ Wir zeigen $r = s$. Wir nehmen zuerst $r > s$ an. Für beliebige $u \in N(L^r)$ haben wir wegen $L^{r-1}u \in L^{r-1}(X) = L^r(X)$ mit geeignetem $\tilde{u} \in X$, daß $L^{r-1}u = L^r\tilde{u}$. Wegen $L^{r+1}\tilde{u} = L^ru = 0$ ist $\tilde{u} \in N(L^{r+1}) = N(L^r)$, also $L^{r-1}u = L^r\tilde{u} = 0$. Damit ist $u \in N(L^{r-1})$, folglich $N(L^{r-1}) = N(L^r)$ im Widerspruch zur Definition von r.

Nehmen wir nun $r < s$ an. Wir setzen $v = L^{s-1}u \in L^{s-1}(X)$. Wegen $Lv = L^s u \in L^s(X) = L^{s+1}(X)$ erhalten wir $Lv = L^{s+1}\tilde{u}$ mit geeignetem $\tilde{u} \in X$. Daraus ergibt sich $L^s(u - L\tilde{u}) = Lv - L^{s+1}\tilde{u} = 0$. Wegen $N(L^{s-1}) = N(L^s)$ haben wir dann $L^{s-1}(u - L\tilde{u}) = 0$, folglich $v = L^s\tilde{u} \in L^s(X)$. Dann ist aber $L^{s-1}(X) = L^s(X)$ im Widerspruch zur Festlegung von s.

(ii) Wir zeigen noch Aussage (17.7):
Eindeutigkeit: Sei $v \in N(L^r) \cap L^r(X)$. Dann ist $v = L^r u \in L^r(X)$ mit geeignetem $u \in X$ sowie $L^r v = 0$. Damit ist $L^{2r}u = 0$, d.h. $u \in N(L^{2r}) = N(L^r)$. Dies zeigt $v = L^r u = 0$.

Existenz: Für beliebiges $u \in X$ ist $L^r u \in L^r(X) = L^{2r}(X)$. Mit geeignetem $\tilde{u} \in X$ haben wir dann $L^r u = L^{2r}\tilde{u}$. Wir setzen $v := L^r\tilde{u}$ sowie $w := u - v$. Dann ist $L^r w = L^r u - L^{2r}\tilde{u} = 0$, d.h. $w \in N(L^r)$. Mit der Zerlegung $u = w + v$ ergibt sich die Aussage (17.7). $\square$

17.2 Lösbarkeit von Operatorgleichungen 2. Art

Wir formulieren die Aussagen der Riesz-Theorie für Operatorgleichungen 2. Art und unterscheiden dazu die Fälle $r = 0$ und $r > 0$.

Satz 17.4. *Im normierten Raum X seien $A : X \to X$ ein kompakter Operator und $I - A$ injektiv. Dann existiert die Inverse $(I - A)^{-1} : X \to X$ als beschränkter Operator.*

Beweis: (i) Nach Voraussetzung ist L injektiv, d.h. $N(L) = \{0\}$. Damit ist $r = 0$. Nach Theorem 17.3 folgern wir wegen $L(X) = L^0(X) = X$ auf die Surjektivität von L. Also existiert der inverse Operator $L^{-1} : X \to X$.

(ii) Wir nehmen noch an, daß L^{-1} nicht beschränkt ist. Dann findet man eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ in X mit $\|f_n\| = 1$, so daß die Folge $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ mit $u_n := L^{-1}f_n$ unbeschränkt ist. Wir setzen nun fest

$$g_n := \frac{f_n}{\|u_n\|}, \quad v_n := \frac{u_n}{\|u_n\|}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Dies ergibt $\|v_n\| = 1$ sowie $g_n \to 0, n \to \infty$. Wegen der Kompaktheit von A kann eine Teilfolge $(v_{n(k)})_{k\in\mathbf{N}}$ so ausgewählt werden, daß $Av_{n(k)} \to v \in X, k \to \infty$ gilt. Dann folgt aber wegen

$$v_n = Av_n + g_n$$

daß $v_{n(k)} \to v, k \to \infty$ und somit $v \in N(L) = \{0\}$. Dann wäre $v = 0$ im Widerspruch zur Konstruktion mit $\|v_n\| = 1$ für alle $n \in \mathbf{N}$. $\square$

Die entsprechende Aussage für die Operatorgleichung 2. Art gibt die

Folgerung 17.5. *Im normierten Raum X sei $A : X \to X$ ein linearer kompakter Operator. Hat dann die homogene Gleichung*

$$u - Au = 0 \tag{17.8}$$

nur die triviale Lösung $u = 0$, so hat das inhomogene Problem

$$u - Au = f \tag{17.9}$$

für jedes $f \in X$ eine und nur eine Lösung $u \in X$. Außerdem hängt u stetig von f ab.

Satz 17.6 *Im normierten Raum X seien $A : X \to X$ ein linearer kompakter Operator und $I - A$ nicht injektiv. Dann ist der Nullraum $N(I - A)$ endlichdimensional und der Bildbereich $(I - A)(X) \neq X$ echter abgeschlossener Unterraum.*

Beweis: Nach Voraussetzung ist $N(L) \neq \{0\}$. Das impliziert $r > 0$. Theorem 17.3 ergibt dann die Behauptung wegen $L^1(X) \subset L^r(X) \underset{\neq}{\subset} X$. $\square$

Die entsprechende Aussage für die Operatorgleichung 2. Art gibt die

Folgerung 17.7. *Im normierten Raum X sei $A : X \to X$ ein linearer kompakter Operator. Hat dann die homogene Gleichung*

$$u - Au = 0$$

eine nichttriviale Lösung, so besitzt das inhomogene Problem

$$u - Au = f$$

entweder keine Lösung oder die allgemeine Lösung hat die Darstellung

$$u = \tilde{u} + \sum_{k=1}^{m} \gamma_k u_k. \tag{17.10}$$

Dabei sind die Elemente $u_1, ..., u_m$ eine Basis des Lösungsraumes des homogenen Problems und $\gamma_1, ..., \gamma_m$ beliebige komplexe Zahlen. $\tilde{u}$ ist eine beliebige Lösung des inhomogenen Problems.

Die Aussagen der vorausgehenden Sätze verallgemeinern die Lösbarkeitstheorie endlichdimensionaler linearer Gleichungssysteme. Insbesondere impliziert die Eindeutigkeit der Lösung des homogenen Problems auch die Existenz der Lösung des inhomogenen Problems.

Für Anwendungen ist noch folgender Satz interessant.

Satz 17.8. *Sei S beschränkter linearer Operator und existiere der beschränkte inverse Operator S^{-1}. Dann bleiben die Aussagen der Sätze 17.4 und 17.6 sowie der Folgerungen 17.5 und 17.7 richtig, wenn $I - A$ durch den Operator $S - A$ ersetzt wird.*

Beweis: Wir führen die Transformation von

$$Su - Au = f \tag{17.11}$$

in die äquivalente Gleichung

$$u - S^{-1}Au = S^{-1}f$$

aus, da $S^{-1}A$ nach Satz 16.5 kompakt ist. Dann können die Theoreme 17.1 - 17.3 benutzt werden. $\square$

Wir geben noch einen später benötigten *Projektionssatz* an.

Satz 17.9. *Der durch die Zerlegung*

$$X = N(L^r) \oplus L^r(X)$$

definierte Projektionsoperator $P : X \to N(L^r)$ ist kompakt. Ferner ist $L - P$ bijektiv.

Beweis: (i) Wir nehmen die Unbeschränktheit von P an. Dann findet man eine Folge $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ in X mit $\|u_n\| = 1$ und $\|Pu_n\| \geq n$ für alle $n \in \mathbf{N}$. Wir definieren

$$v_n := \frac{u_n}{\|Pu_n\|}, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Dann ist $v_n \to 0,\ n \to \infty$ und $\|Pv_n\| = 1$ für alle $n \in \mathbf{N}$.

Da $N(L^r)$ nach Theorem 17.1 endlich-dimensional und die Menge $(Pv_n)_{n\in\mathbf{N}}$ beschränkt sind, kann Satz 4.9 angewendet werden: Man findet dann eine Teilfolge $(v_{n(k)})_{k\in\mathbf{N}}$ mit $Pv_{n(k)} \to w \in N(L^r)$ für $k \to \infty$. Wegen $v_n \to 0,\ n \to \infty$ ist

$$Pv_{n(k)} - v_{n(k)} \to w, \quad k \to \infty.$$

Dann folgt aber $w \in L^r(X)$, denn $Pv_{n(k)} - v_{n(k)} \in L^r(X)$ und $L^r(X)$ ist abgeschlossen. Somit ist $w \in N(L^r) \cap L^r(X)$. Theorem 17.3 impliziert aber $w = 0$, also $Pv_{n(k)} \to 0,\ k \to \infty$. Dies steht im Widerspruch zur Konstruktion mit $\|Pv_n\| = 1$ für alle $n \in \mathbf{N}$. Damit ist aber P beschränkt.

Da $P(X) = N(L^r)$ nach Theorem 17.1 endlich-dimensional ist, liefert Satz 16.7 die Kompaktheit von P.

(ii) Aus Satz 16.4 ermitteln wir die Kompaktheit von $A + P$. Sei jetzt $u \in N(L - P)$ beliebig, also

$$Lu - Pu = 0.$$

Wegen $Pu \in N(L^r)$ ist $L^{r+1}u = 0$. Das impliziert nach Theorem 17.3 $u \in N(L^{r+1}) = N(L^r)$ und $Pu = u$, damit $Lu = u$. Iterativ folgt $u = L^r u = 0$ und damit $N(L - P) = \{0\}$, da u beliebiges Element in $N(L - P)$ ist. Durch Anwendung von Satz 17.4 auf den kompakten Operator $A + P$ schließt man auf die Surjektivität von $L - P = I - (A + P)$. □

17.3 Spektrum kompakter linearer Operatoren

Wir geben hier einige wichtige Definitionen der *Spektralanalysis* und formulieren einfache Aussagen der *Riesz–Schauder Theorie* über das Spektrum eines kompakten linearen Operators.

Definition 17.10. *Sei $A : X \to X$ beschränkter linearer Operator auf dem normierten Raum X. Eine Zahl $\lambda \in \mathbf{C}$ heißt* Eigenwert von A, *wenn ein Element $u \in X \setminus \{0\}$ existiert mit*

$$(A - \lambda I)u = 0. \tag{17.12}$$

u heißt zugehöriges Eigenelement von A.

Definition 17.11. *Eine Zahl $\lambda \in \mathbf{C}$ heißt* Regulärwert *von A, falls $(\lambda I - A)^{-1}$ als beschränkter Operator existiert. Die Menge aller Regulärwerte von A heißt* Resolventenmenge $\rho(A)$. *Das Komplement*

$$\sigma(A) := \mathbf{C} \setminus \rho(A) \tag{17.13}$$

heißt Spektrum von A. *Die Zahl*

$$r(A) := \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda| \tag{17.14}$$

wird als Spektralradius von A *bezeichnet.*

Die einfachsten Aussagen über das Spektrum eines kompakten Operators gibt

Satz 17.12. *Sei $A : X \to X$ linearer kompakter Operator auf dem unendlichdimensionalen normierten Raum X. Dann gehört $\lambda = 0$ zum Spektrum $\sigma(A)$ und die Menge $\sigma(A) \setminus \{0\}$ enthält höchstens abzählbar viele Eigenwerte, die sich höchstens bei $\lambda = 0$ häufen.*

Beweis: (i) Wir nehmen an, daß $\lambda = 0$ regulärer Wert von A ist. Dann exisitiert der inverse Operator A^{-1} als beschränkter Operator. Folglich ist $I = A^{-1}A$ nach Satz 16.5 kompakt. Nach Satz 16.8 muß X endlichdimensional sein. Das widerspricht aber der Voraussetzung an X. Somit gehört $\lambda = 0$ zum Spektrum von A.

(ii) Im Fall $\lambda \neq 0$ wenden wir die Sätze von Riesz auf den Operator $\lambda I - A$ an. Dann ist nach Satz 17.4 entweder $N(\lambda I - A) = \{0\}$ und $(\lambda I - A)^{-1}$ existiert als beschränkter Operator oder $N(\lambda I - A) \neq \{0\}$, d.h. im letzterem Fall ist λ Eigenwert. Daher ist jede Zahl $\lambda \neq 0$ entweder regulärer Wert oder Eigenwert von A.

(iii) Wir zeigen noch (indirekt), daß für jede Zahl $S > 0$ höchstens endlich viele Eigenwerte λ

mit $|\lambda| \geq S$ existieren können. Dazu nehmen wir an, daß eine Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}}$ voneinander verschiedener Eigenwerte mit $|\lambda_n| \geq S$ gefunden werden kann. Dann bestimmt man die zugehörigen Eigenelemente u_n mit $Au_n = \lambda_n u_n$. Weiter seien

$$U_n := \operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_n\}$$

endlichdimensionale Unterräume von X. Eigenelemente zu verschiedenen Eigenwerten sind linear unabhängig. Damit gilt $U_{n-1} \subsetneqq U_n$. Nach dem Lemma von Riesz (vgl. Lemma 4.10) gibt es dann eine Folge $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ in U_n mit $\|v_n\| = 1$ und

$$\|v_n - v\| \geq \frac{1}{2}, \quad \forall v \in U_{n-1}.$$

Mit der Basisdarstellung

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{nk} u_k$$

erhalten wir

$$\lambda_n v_n - Av_n = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_n \gamma_{nk} u_k - \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \gamma_{nk} u_k = \sum_{k=1}^{n-1} (\lambda_n - \lambda_k) \gamma_{nk} u_k \in U_{n-1}.$$

Für $m < n$ schreiben wir somit

$$Av_n - Av_m = \lambda_n v_n - (\lambda_n v_n - Av_n + Av_m) = \lambda_n (v_n - v)$$

mit $v := (\lambda_n v_n - Av_n + Av_m)/\lambda_n \in U_{n-1}$. Dies zeigt

$$\|Av_n - Av_m\| \geq \frac{|\lambda_n|}{2} \geq \frac{S}{2}, \quad m < n.$$

Damit kann die Folge $(Av_n)_{n\in\mathbf{N}}$ im Widerspruch zur Kompaktheit von A keine konvergente Teilfolge enthalten. Daraus ergibt sich die Behauptung. $\square$

Kapitel 18

Adjungierte Operatoren in Dualsystemen

Die Aussage der Riesz-Theorie läßt sich wie folgt als *Alternativsatz* formulieren:

Für einen kompakten Operator A: $X \to X$ in einem normierten Raum X ist **entweder** *$I - A$ bijektiv* **oder** *der Nullraum $N(I - A)$ besitzt von 0 verschiedene endliche Dimension und der Bildraum $(I - A)(X)$ ist echter Unterraum von X.*

Im zweiten Fall der Alternative fehlt noch die Charakterisierung des Bildraumes. Dazu führen wir jetzt den Begriff *adjungierter Operatoren* in *dualen Systemen* ein, um im Kapitel 19 die *Fredholm-Alternative* formulieren zu können.

18.1 Nichtentartete Bilinearformen. Dualsysteme

Wir erinnern zunächst an den Begriff der *Bilinearform* aus Definition 13.3.

Definition 18.1. *Seien X, Y lineare Räume. Eine Bilinearform $\langle\cdot,\cdot\rangle$: $X \times Y \to \mathbf{C}$ heißt* nichtentartet, *falls einerseits zu jedem $u \in X \setminus \{0\}$ ein Element $v \in Y$ existiert mit $\langle u, v\rangle \neq 0$ und andererseits zu jedem $v \in Y \setminus \{0\}$ ein Element $u \in X$ existiert mit $\langle u, v\rangle \neq 0$.*

Zwei normierte Räume X, Y, die mit einer nichtentarteten Bilinearform verbunden sind, bilden ein duales System $\langle X, Y\rangle$.

Weiterhin erinnern wir an die Definition dualer Räume in Kap. 11.

Satz 18.2. *Seien X normierter Raum und X^* der zugehörige Dualraum. Sie bilden mit der Bilinearform*

$$\langle f, u\rangle := f(u), \quad \forall u \in X,\ \forall f \in X^* \tag{18.1}$$

das (sogenannte) kanonische duale System $\langle X^*, X\rangle$.

Beweis: Durch Nachrechnen prüft man die Bilinearität von $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Für alle $u \in X \setminus \{0\}$ gibt es nach Folgerung 11.4 (i) ein Funktional $f \in X^*$ mit $f(u) \neq 0$. Ferner existiert zu jedem $f \in X^* \setminus \{0\}$ ein Element $u \in X$ mit $f(u) \neq 0$. $\square$

Wir geben jetzt Beispiele dualer Systeme für Funktionenräume an, die wir für Randwertprobleme partieller Differentialgleichungen im Kapitel 20 benötigen.

Beispiel 18.3. Sei $\overline{\Omega} \subset \mathbf{R}^n$ eine nichtleere, kompakte, Jordan-meßbare Punktmenge. Dann bildet $\langle C(\overline{\Omega}), C(\overline{\Omega})\rangle$ ein duales System mit der Bilinearform

$$\langle u, v\rangle := \int_\Omega u(x)v(x)dx, \quad u, v \in C(\overline{\Omega}). \tag{18.2}$$

Beweis: Mit $v = \overline{u}$ erhält man den nichtnegativen Integranden $w = |u|^2$. Für $w \in C(\overline{\Omega})$ mit $w(x) \geq 0$ für alle $x \in \overline{\Omega}$ folgt aus $\int_\Omega w(x)dx = 0$, daß $w(x) = 0$ für alle $x \in \overline{\Omega}$. □

Beispiel 18.4. Unter den Voraussetzungen von Beispiel 18.3 ist auch $\langle L^2(\Omega), L^2(\Omega)\rangle$ ein duales System mit der Bilinearform

$$\langle u, v\rangle := \int_\Omega u(x)v(x)dx, \quad u, v \in L^2(\Omega). \tag{18.3}$$

Beweis: Folgerung aus Satz 8.9. □

18.2 Adjungierte Operatoren

Definition 18.5. *Seien $\langle X_1, Y_1\rangle_1$ und $\langle X_2, Y_2\rangle_2$ duale Systeme. Dann heißen die Operatoren A: $X_1 \to X_2$ und B: $Y_2 \to Y_1$* zueinander adjungiert, *wenn für jedes Paar $(u, v) \in X_1 \times Y_2$ gilt*

$$\langle Au, v\rangle_2 = \langle u, Bv\rangle_1. \tag{18.4}$$

Satz 18.6. *Seien $\langle X_1, Y_1\rangle_1$ und $\langle X_2, Y_2\rangle_2$ duale Systeme. Existiert zu A: $X_1 \to X_2$ ein adjungierter Operator B: $Y_2 \to Y_1$, so ist B eindeutig bestimmt. Sowohl A als auch B sind linear.*

Beweis: (i) *Eindeutigkeit:* Wir nehmen an, es existieren zwei adjungierte Operatoren B_1, B_2 zu A. Für $B := B_1 - B_2$ gilt

$$\langle u, Bv\rangle_1 = \langle u, B_1 v\rangle_1 - \langle u, B_2 v\rangle_1 = \langle Au, v\rangle_2 - \langle Au, v\rangle_2 = 0,$$

für alle $u \in X_1, v \in Y_2$. Da $\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ nichtentartet ist, folgt $Bv = 0$ für alle $v \in Y_2$. Damit ist $B_1 = B_2$.

(ii) *Linearität:* Die Linearität von B sieht man aus der für alle $u \in X_1$ gültigen Darstellung

$$\begin{aligned} & \langle u, \gamma_1 B v_1 + \gamma_2 B v_2\rangle_1 = \gamma_1\langle u, Bv_1\rangle_1 + \gamma_2\langle u, Bv_2\rangle_1 \\ = \;& \gamma_1\langle Au, v_1\rangle_2 + \gamma_2\langle Au, v_2\rangle_2 = \langle Au, \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2\rangle_2 \\ = \;& \langle u, B(\gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2)\rangle_1, \end{aligned}$$

also $\gamma_1 B v_1 + \gamma_2 B v_2 = B(\gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2)$. Die Linearität von A folgt völlig analog. □

Beispiel 18.7. Seien $\overline{\Omega} \subset \mathbf{R}^n$ nichtleere, kompakte und Jrdan-meßbare Punktmenge und $C(\overline{\Omega})$ die Menge der auf $\overline{\Omega}$ stetige Funktionen. Ferner sei $K \in C(\overline{\Omega} \times \overline{\Omega})$ ein gegebener Integralkern. Dann sind im dualen System $\langle C(\overline{\Omega}), C(\overline{\Omega})\rangle$ die Integraloperatoren

$$(Au)(x) := \int_\Omega K(x, y)u(y)dy, \quad x \in \Omega$$

$$(Bv)(x) := \int_\Omega K(y, x)v(y)dy, \quad x \in \Omega$$

zueinander adjungiert, denn unter Beachtung von (18.2) folgt

$$\begin{aligned} \langle Au, v\rangle &= \int_\Omega (Au)(x)v(x)dx = \int_\Omega \left(\int_\Omega K(x, y)u(y)dy\right) v(x)dx \\ &= \int_\Omega u(y) \left(\int_\Omega K(x, y)v(x)dx\right) dy = \int_\Omega u(y)(Bv)(y)dy = \langle u, Bv\rangle. \end{aligned}$$

In der Theorie der Integralgleichungen benötigt man die Erweiterung dieser Aussage auf *schwach-singuläre Kerne* K, vgl. Übungsaufgabe. □

Beispiel 18.8. Der adjungierte Operator existiert nicht in jedem Fall. So ist der Operator $A\colon C[0,1] \to C[0,1]$ mit $(Au)(x) := u(1)$ ist kompakt, besitzt jedoch keinen adjungierten Operator bezüglich des dualen Systems $\langle C[0,1], C[0,1]\rangle$. Unter der Annahme, $B\colon C[0,1] \to C[0,1]$ wäre der adjungierte Operator, wählen wir $v \in C[0,1]$ mit $\int_0^1 v(x)dx = 1$. Mittels Ungleichung von Cauchy–Schwarz ergibt sich

$$|u(1)| = |\langle Au, v\rangle| = |\langle u, Bv\rangle| \le \|u\|_{L^2(0,1)}\|Bv\|_{L^2(0,1)}, \quad \forall u \in C[0,1].$$

Für die Folge $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ mit $u_n(x) = x^n$ gelangt man zu einem Widerspruch, da die rechte Seite für $n \to \infty$ gegen 0 geht. □

18.3 Duale Operatoren

Jetzt spezialisieren wir die bisherigen Betrachtungen (vgl. Abschnitt 18.2) auf den Fall kanonischer Dualsysteme. Man gelangt dann zu dem auf Schauder (1927) zurückgehenden Begriff des *dualen Operators.*

In der Situation von Definition 18.5 betrachten wir dazu den Spezialfall $X_1 := Y^*$, $X_2 := X^*$, $Y_2 := X$, $Y_1 := Y$. (Man denke sich weiterhin die dort verwendeten Operatoren B und A ersetzt durch A bzw. A^*.)

Satz 18.9. *Seien X, Y normierte Räume und $A\colon X \to Y$ ein beschränkter linearer Operator. Dann existiert der durch*

$$(A^*f)(u) := f(Au), \quad u \in X, f \in Y^* \tag{18.5}$$

definierte adjungierte Operator $A^*\colon Y^* \to X^*$ bezüglich der kanonischen dualen Systeme $\langle X^*, X\rangle$ und $\langle Y^*, Y\rangle$. A^* heißt dualer Operator *zu A.*

Ferner ist A^* beschränkt. Es gilt $\|A\| = \|A^*\|$.

Beweis: (i) Wegen der Linearität von f und A ist auch $A^*f = fA : X \to \mathbf{C}$ linear. Die Beschränktheit von A^*f sieht man aus

$$|(A^*f)(u)| \le \|f\|\;\|A\|\;\|u\|,$$

d.h. $\|A^*f\| \le \|f\|\;\|A\|$. Damit ist $A^*\colon Y^* \to X^*$ wohldefiniert. Weiterhin ist A^* beschränkt mit $\|A^*\| \le \|A\|$.

(ii) Wegen

$$\langle A^*f, u\rangle = (A^*f)(u) = f(Au) = \langle f, Au\rangle$$

sind A und A^* adjungiert. Nach Satz 18.6 ist A^* linear.

(iii) Nach Folgerung 11.4 (iii) aus dem Satz von Hahn-Banach ist

$$\|Au\| = \sup_{\|f\|=1} |f(Au)| = \sup_{\|f\|=1} |(A^*f)(u)| \le \|A^*\|\;\|u\|,$$

also $\|A\| \le \|A^*\|$. Beweisschritt (i) ergibt dann $\|A\| = \|A^*\|$. □

Satz 18.10. *Seien X normierter Raum und Y Banach-Raum. Dann ist der lineare Operator $A\colon X \to Y$ genau dann kompakt, wenn der duale Operator $A^*\colon Y^* \to X^*$ kompakt ist.*

Beweis: (i) "$\Rightarrow$)" Sei A kompakt. Ferner bezeichne $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ eine Folge im Dualraum Y^* mit

$\|f_n\| \le C$. Für die abgeschlossene Einheitskugel $B := B[0;1] \subset X$ ist die Menge $\overline{A(B)}$ kompakt in Y.

Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ wird nun als Teilmenge U des metrischen Raumes $C(\overline{A(B)})$ der stetigen Funktionen auf $\overline{A(B)}$ aufgefaßt. Dann haben wir

$$|f_n(Au)| \le \|f_n\| \, \|A\| \, \|u\| \le C\|A\|, \quad \forall u \in B,$$

d.h.

$$|f_n(v)| \le C\|A\|$$

für alle $v \in A(B)$ und wegen der Stetigkeit von f_n auch für alle $v \in \overline{A(B)}$. Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ ist also gleichmäßig beschränkt.

Weiter schließen wir mit

$$|f_n(v) - f_n(w)| \le \|f_n\| \, \|v-w\| \le C\|v-w\|, \quad \forall v,w \in \overline{A(B)}$$

auf die gleichgradige Stetigkeit der Folge. Damit sind alle Voraussetzungen des Satzes von Arzela-Ascoli (vgl. Theorem 3.13) erfüllt. Damit ist die Folge $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ relativ kompakt, d.h. es existiert eine Teilfolge $(f_{n(k)})_{k\in\mathbf{N}}$ mit

$$\sup_{v\in\overline{A(B)}} |f_{n(k)}(v) - f_{n(l)}(v)| \to 0, \quad k,l \to \infty.$$

Dies impliziert nun wieder

$$\begin{aligned} \|A^*f_{n(k)} - A^*f_{n(l)}\| &= \sup_{u\in B} |f_{n(k)}(Au) - f_{n(l)}(Au)| \\ &\to 0, \quad k,l \to \infty. \end{aligned}$$

Damit ist $(A^*f_{n(k)})_{k\in\mathbf{N}}$ Cauchy-Folge und folglich im Banach-Raum X^* konvergent.

(ii) "$\Leftarrow$)" Sei A^* kompakt. Nach (i) ist dann $A^{**} = (A^*)^*\colon\ X^{**} \to Y^{**}$ kompakt. Unter Verwendung der kanonischen Einbettungen $E_X\colon\ X \to X^{**}$ und $E_Y\colon\ Y \to Y^{**}$ folgt

$$(A^{**}E_X u)(f) = (E_X u)(A^*f) = (A^*f)(u) = f(Au) = (E_Y Au)(f)$$

für alle $u \in X$ und $f \in X^*$. Damit ist $A^{**}E_X = E_Y A$.

Sei jetzt $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ beschränkte Folge in X. Dann ist $(E_X u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ beschränkte Folge in X^{**}. Somit enthält die Folge $(E_Y Au_n)_{n\in\mathbf{N}} = (A^{**}E_X u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ eine im Raum Y^{**} konvergente Teilfolge $(E_Y Au_{n(k)})_{k\in\mathbf{N}}$, denn A^{**} ist kompakt.

Wegen der Vollständigkeit von Y ist $E_Y Y$ in Y^{**} abgeschlossen. Daher liegt der Grenzwert der konvergierenden Teilfolge $(E_Y Au_{n(k)})_{k\in\mathbf{N}}$ in $E_Y Y$, d.h. die Teilfolge $(Au_{n(k)})_{k\in\mathbf{N}}$ konvergiert in Y. Dies bedeutet die Kompaktheit von A. □

18.4 Adjungierte Operatoren in Hilbert-Räumen

Wir führen jetzt Dualsysteme ein, die über nichtentartete Sesquilinearformen definiert werden. Dann spezialisieren wir unsere Betrachtungen auf den Fall von (Prä-) Hilbert-Räumen.

Definition 18.11. *Seien X, Y lineare Räume. Eine Abbildung $(\cdot,\cdot)\colon\ X \times Y \to \mathbf{C}$ heißt* Sesquilinearform, *falls gilt*

$$(\gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2, v) = \overline{\gamma_1}(u_1, v) + \overline{\gamma_2}(u_2, v) \tag{18.6}$$

$$(u, \delta_1 v_1 + \delta_2 v_2) = \delta_1(u, v_1) + \delta_2(u, v_2) \tag{18.7}$$

für beliebige $u_1, u_2, u \in X$, $v_1, v_2, v \in Y$ *sowie* $\gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2 \in \mathbf{C}$.
Die Sesquilinearform heißt nichtentartet, *falls einerseits zu jedem* $u \in X \setminus \{0\}$ *ein Element* $v \in Y$ *existiert mit* $(u, v) \neq 0$ *und andererseits zu jedem* $v \in Y \setminus \{0\}$ *ein Element* $u \in X$ *existiert mit* $(u, v) \neq 0$.
Zwei normierte Räume X, Y, *die mit einer nichtentarteten Sesquilinearform verbunden sind, bilden ein* duales System (X, Y).

Bemerkungen 18.12. (i) Satz 18.6 kann für duale Systeme, die durch eine nichtentartete Sesquilinearform erzeugt werden, sinngemäß formuliert werden.

(ii) Den engen Zusammenhang zwischen Bi- und Sesquilinearformen sieht man mittels der durch

$$(\gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2)^* = \overline{\gamma_1} u_1^* + \overline{\gamma_2} u_2^*, \quad (u^*)^* = u$$

für alle $u_1, u_2, v \in X$ und $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbf{C}$ definierten Abbildung $*$: $X \to X$ (*Involution*). Sie vermittelt eine eineindeutige Korrespondenz zwischen Bilinear- und Sesquilinearformen über $(u, v) = \langle u^*, v \rangle$. □

Beispiel 18.13. Auf einem Prä-Hilbert Raum X kann jedes Skalarprodukt als nichtentartete Sesquilinearform interpretiert werden. Diese ist wegen $\overline{(u, v)} = (v, u)$ für alle $u, v \in X$ symmetrisch und positiv wegen $(u, u) > 0$ für alle $u \in X \setminus \{0\}$. Jeder Prä-Hilbert Raum erzeugt damit kanonisch das duale System (X, X). □

Im *Spezialfall* von Hilbert-Räumen existiert nach dem folgenden Satz stets der adjungierte Operator zu einem beschränkten linearen Operator.

Satz 18.14. *Seien* X, Y *Hilbert-Räume und* A: $X \to Y$ *linearer beschränkter Operator. Dann existiert genau ein linearer Operator* $A^* : Y \to X$ *mit der Eigenschaft*

$$(Au, v)_Y = (u, A^* v)_X, \quad \forall u \in X, \ v \in Y \tag{18.8}$$

d.h. A *und* A^* *sind adjungiert bezüglich der durch die Skalarprodukte auf* X *und* Y *erzeugten dualen Systeme* (X, X) *und* (Y, Y). A^* *heißt auch* Hilbert-Raum Adjungierte zu A. A^* *ist beschränkt und es gilt* $\|A\| = \|A^*\|$.

Beweis: Für jedes Element $v \in Y$ definiert die Abbildung $u \mapsto (v, Au)$ ein beschränktes lineares Funktional auf X, denn

$$|(v, Au)| \leq \|A\| \ \|u\| \ \|v\|.$$

Nach dem Rieszschen Darstellungssatz (vgl. Theorem 12.1) ist $(v, Au) = (f, u)$ mit geeignetem $f \in X$. Mit der Festsetzung $A^* v := f$ gilt dann $(v, Au) = (A^* v, u)$ und wegen der Antisymmetrie des Skalarprodukts folgt (18.8). Somit wird ein Operator $A^* : Y \to X$ definiert, der zu A adjungiert ist. Nach Satz 18.6 ist A^* linear und eindeutig bestimmt. Die Ungleichung von Cauchy-Schwarz liefert

$$\|A^* v\|^2 = (A^* v, A^* v) = (AA^* v, v) \leq \|A\| \ \|A^* v\| \ \|v\|, \quad v \in Y.$$

Also ist A^* beschränkt mit $\|A^*\| \leq \|A\|$. Da andererseits A adjungierter Operator zu A^* ist, folgt $\|A\| \leq \|A^*\|$ und damit $\|A\| = \|A^*\|$. □

Satz 18.15. *Seien* X, Y *Hilbert-Räume und* $A : X \to Y$ *linearer kompakter Operator. Dann ist der adjungierte Operator* $A^* : Y \to X$ *ebenfalls kompakt.*

Beweis: Sei $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ beschränkte Folge in Y mit $\|v_n\| \leq C$. Nach Satz 18.14 ist der adjungierte

Operator $A^*\colon\ Y \to X$ beschränkt. Damit ist $AA^* : Y \to Y$ nach Satz 16.5 kompakt. Also findet man eine Teilfolge $(v_{n(k)})_{k\in\mathbf{N}}$ so, daß $(AA^*v_{n(k)})_{k\in\mathbf{N}}$ in Y konvergent ist. Dann ist

$$\begin{aligned} \|A^*(v_{n(k)}) - A^*(v_{n(l)})\|^2 &= (v_{n(k)} - v_{n(l)}, AA^*(v_{n(k)} - v_{n(l)}) \\ &\leq 2C\|AA^*(v_{n(k)} - v_{n(l)})\|, \end{aligned}$$

d.h. $(A^*v_{n(k)})_{k\in\mathbf{N}}$ ist Cauchy-Folge. Diese konvergiert aber im Hilbert-Raum X. $\square$

Kapitel 19

Die Fredholm-Alternative

Fredholm legte um 1900 eine allgemeine Lösbarkeitstheorie für Integralgleichungen mit stetigem Kern vor (vgl. Abschnitt 19.3). Nach den Ergebnissen von Riesz (1916), die wir im Kapitel 17 dargestellt haben, konnte Schauder 1929 die Verknüpfung mit einer adjungierten Gleichung und die Charakterisierung des Bildraumes im zweiten Fall der Alternative angeben. Weitere Verallgemeinerungen der Fredholm-Alternative in dualen Systemen führten in den letzten 30-40 Jahren zu einer insgesamt befriedigenden Lösbarkeitstheorie linearer Operatorgleichungen mit kompakter Störung der Identität.

In unserer Darstellung betrachten wir Dualsysteme $\langle X, Y\rangle$ normierter Räume X, Y über dem Zahlkörper $\mathbf{R}$ oder $\mathbf{C}$, die durch eine nichtentartete Bilinearform

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times Y \to \mathbf{K} \in \{\mathbf{R}, \mathbf{C}\}$$

erzeugt werden.

19.1 Biorthogonalität in Dualsystemen

Lemma 19.1. *Sei $\langle X, Y\rangle$ ein duales System. Dann existiert zu jeder Menge linear unabhängiger Elemente $u_1, ..., u_n \in X$ eine Menge $v_1, ..., v_n \in Y$ mit der Eigenschaft der Biorthogonalität*

$$\langle u_i, v_k\rangle = \delta_{ik}, \quad i, k = 1, ..., n. \tag{19.1}$$

Die Aussage gilt sinngemäß bei Vertauschung der Rollen von X und Y.

Beweis: Wir führen den Beweis (analog zum Orthogonalisierungsverfahren von Schmidt) per Induktion. Für ein (linear unabhängiges) Element ist die Aussage offenbar richtig, da die Bilinearform nichtentartet ist.

Wir nehmen nun an, daß die Behauptung bewiesen wurde für $n \in \mathbf{N}$ linear unabhängige Elemente. Dann seien $u_1, ..., u_{n+1}$ ebenfalls linear unabhängige Elemente in X. Nach Induktionsvoraussetzung findet man für jede Zahl $m \in \{1, ..., n+1\}$ zu der Menge $u_1, ..., u_{m-1}, u_{m+1}, ..., u_{n+1}$ von n Elementen aus X eine Menge von n Elementen $v_1^{(m)}, ..., v_{m-1}^{(m)}, v_{m+1}^{(m)}, ..., v_{n+1}^{(m)}$ in Y mit der Eigenschaft

$$\langle u_i, v_k^{(m)}\rangle = \delta_{ik}, \quad i, k = 1, ..., n+1, \quad i, k \neq m. \tag{19.2}$$

Dann existiert auch ein Element $w_m \in Y$ mit

$$\gamma_m := \langle u_m, w_m - \sum_{\substack{k=1\\k\neq m}}^{n+1} v_k^{(m)} \langle u_k, w_m\rangle\rangle = \langle u_m - \sum_{\substack{k=1\\k\neq m}}^{n+1} \langle u_m, v_k^{(m)}\rangle u_k, w_m\rangle \neq 0,$$

denn andererseits wäre

$$u_m - \sum_{\substack{k=1\\k\neq m}}^{n+1} \langle u_m, v_k^{(m)}\rangle u_k = 0$$

im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von $u_1, ..., u_{n+1}$. Wir setzen nun für jedes $m \in \{1, \dots, n+1\}$

$$v_m := \frac{1}{\gamma_m}\left(w_m - \sum_{\substack{k=1\\k\neq m}}^{n+1} v_k^{(m)} \langle u_k, w_m\rangle \right).$$

Dann gelten sowohl $\langle u_m, v_m\rangle = 1$ nach Definition von γ_m als auch wegen (19.2) für $i \neq m$

$$\langle u_i, v_m\rangle = \frac{1}{\gamma_m}\left(\langle u_i, w_m\rangle - \sum_{\substack{k=1\\k\neq m}}^{n+1} \langle u_i, v_k^{(m)}\rangle\langle u_k, w_m\rangle \right) = 0.$$

Damit wurden geeignete Elemente $v_1, ..., v_{n+1} \in Y$ mit der gewünschten Biorthogonalitätseigenschaft konstruiert. Daraus folgt die Behauptung. □

19.2 Fredholmsche Sätze

Wir können jetzt die Aussagen der Riesz-Theorie erweitern und präzisieren.

Theorem 19.2. *(Erster Fredholmscher Satz)*
Seien $\langle X, Y\rangle$ ein duales System und A: $X \to X$, B: $Y \to Y$ lineare, kompakte und zueinander adjungierte Operatoren. Dann haben die Nullräume $N(I-A)$ und $N(I-B)$ gleiche endliche Dimension.

Beweis: Nach dem 1. Satz von Riesz (vgl. Theorem 17.1) gilt

$$m := \dim N(I-A) < \infty, \quad n := \dim N(I-B) < \infty. \tag{19.3}$$

Wir nehmen zunächst an, daß $m < n$.

(i) Vorbereitung: Seien $u_1, ..., u_m$ bzw. $v_1, ..., v_n$ jeweils eine Basis von $N(I-A)$ bzw. $N(I-B)$. Nach Lemma 19.1 findet man dann bei $m > 0$ Elemente $a_1, ..., a_m \in Y$ und $b_1, ..., b_n \in X$ mit den Biorthogonalitätseigenschaften

$$\langle u_i, a_k\rangle = \delta_{ik}, \quad i, k = 1, ..., m,$$

$$\langle b_i, v_k\rangle = \delta_{ik}, \quad i, k = 1, ..., n.$$

Nun definieren wir einen linearen Operator T: $X \to X$ mit endlichdimensionalem Bildbereich gemäß

$$Tu := \begin{cases} 0, & , \quad m = 0 \\ \sum_{i=1}^m \langle u, a_i\rangle b_i & , \quad m > 0 \end{cases} \tag{19.4}$$

(ii) Sei $P : X \to N[(I-A)^r]$ der auf der Zerlegung $X = N[(I-A)^r] \oplus L^r(I-A)$ basierende kompakte Projektionsoperator nach Satz 17.9. Nach Satz 10.2 ist dann der restringierte Operator $T : N[(I-A)^r] \to X$ beschränkt. Nach den Sätzen 16.5 bzw. 16.4 sind die Operatoren TP :

$X \to X$ und $A - TP$ kompakt. Somit ist die Riesz-Theorie auf $A - TP$ anwendbar.

Für $m > 0$ gilt

$$\langle u - Au + TPu, v_k \rangle = \langle u.v_k - Bv_k \rangle + \langle TPu, v_k \rangle = \langle TPu, v_k \rangle.$$

Nach Definition von T in (19.4) erhalten wir

$$\langle u - Au + TPu, v_k \rangle = \begin{cases} \langle Pu, a_k \rangle, & k = 1, \dots, m \\ 0, & k = m+1, \dots, n \end{cases} . \tag{19.5}$$

Wir wählen ein beliebiges Element $u \in N(I - A + TP)$. Nach (19.5) ist dann

$$\langle Pu, a_k \rangle = 0, \qquad k = 1, \dots, m. \tag{19.6}$$

Nach Definition von T ergibt sich $TPu = 0$ und daher $u \in N(I - A)$. Somit gilt eine Basisdarstellung

$$u = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i.$$

mit

$$\alpha_k = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \langle u_i, a_k \rangle = \langle \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i, a_k \rangle = \langle u, a_k \rangle, \quad k = 1, ..., m.$$

Wegen der Projektionseigenschaft $Pu = u$ für $u \in N(I - A)$ und wegen (19.6) ergibt sich $u = 0$. Hiermit haben wir $N(I - A + TP) = \{0\}$ und folglich die Injektivität von $I - A + TP$ gezeigt. Diese Aussage bleibt auch für $m = 0$ richtig. Nach der Riesz-Theorie hat die Gleichung

$$u - Au + TPu = b_n$$

eine eindeutige Lösung u. Unter Beachtung der Biorthogonalitätseigenschaft sowie von (19.5) erhalten wir den folgenden Widerspruch

$$1 = \langle b_n, v_n \rangle = \langle u - Au + TPu, v_n \rangle = 0.$$

Die Annahme $m < n$ ist somit falsch, damit ist $m \geq n$.

(iii) Durch Vertauschung der Rollen von A und B sowie von X und Y sieht man, daß $m \leq n$ gilt. Dann folgt die Behauptung $m = n$. □

Theorem 19.3. *(Zweiter Fredholmscher Satz)*
Unter den Voraussetzungen von Theorem 19.2 gilt die folgende Charakterisierung der Bildräume

$$(I - A)(X) = N(I - B)^{\perp} := \{f \in X : \langle f, v \rangle = 0, v \in N(I - B)\}$$

sowie

$$(I - B)(Y) = N(I - A)^{\perp} := \{g \in Y : \langle u, g \rangle = 0, u \in N(I - A)\}.$$

Beweis: Wir beschränken uns auf die Darstellung von $(I - A)(X)$.

Im Fall $m = 0$ gilt die Bedingung $\langle f, v \rangle = 0$ für alle $f \in X$ wegen $N(I - B) = \{0\}$.

Im Fall $m > 0$ sei zunächst $f \in (I - A)(X)$. Dann existiert ein Element $u \in X$ mit $f = u - Au$. Dann gilt aber

$$\langle f, v \rangle = \langle u - Au, v \rangle = \langle u, v - Bv \rangle = 0$$

für alle $v \in N(I - B)$.

Sei andererseits $\langle f, v\rangle = 0$ für alle $v \in N(I - B)$. Nach Theorem 17.2 hat die inhomogene Gleichung $u - Au + TPu = f$ eine eindeutige Lösung u. Nach (19.5) gilt dann

$$\langle Pu, a_k\rangle = \langle u - Au + TPu.v_k\rangle = \langle f.v_k\rangle = 0$$

für $k = 1, \ldots, m$. Damit ist $TPu = 0$ und es gilt somit $u - Au = f$. □

Wir fassen abschließend die Ergebnisse der beiden Fredholmschen Sätze zusammen in dem nachfolgenden Alternativsatz.

Theorem 19.4. *(Fredholmsche Alternative)*
Seien $\langle X, Y\rangle$ ein duales System und A: $X \to X$, B: $Y \to Y$ lineare, kompakte und zueinander adjungierte Operatoren. Dann gilt **entweder**

$$N(I - A) = \{0\} \quad \textit{und} \quad N(I - B) = \{0\}$$

sowie

$$(I - A)(X) = X \quad \textit{und} \quad (I - B)(Y) = Y$$

oder

$$\textit{dim}\ N(I - A) = \textit{dim}\ N(I - B) \in \mathbf{N}$$

und

$$(I - A)(X) = N(I - B)^{\perp} := \{f \in X : \langle f, v\rangle = 0, v \in N(I - B)\}$$

sowie

$$(I - B)(Y) = N(I - A)^{\perp} := \{g \in Y : \langle u, g\rangle = 0, u \in N(I - A)\}.$$

19.3 Anwendungen auf Fredholmsche Integralgleichungen

Wir betrachten als erste Anwendung die Lösbarkeitstheorie für Fredholmsche Integralgleichungen mit stetigem bzw. schwach-singulärem Kern. Sei dazu $\overline{\Omega} \subset \mathbf{R}^n$ nichtleere, kompakte und Jordan-meßbare Menge. Ferner sei $K : \overline{\Omega} \times \overline{\Omega} \to \mathbf{K}$ stetig bzw. schwach-singulär. Letztere Bedingung bedeutet, daß es positive Konstanten K und $\alpha \in (0, n]$ gibt mit

$$|K(x, y)| \le M|x - y|^{\alpha - n}, \qquad x, y \in \Omega,\ x \ne y.$$

Die Integraloperatoren $A : C(\overline{\Omega}) \to C(\overline{\Omega})$ mit

$$(Au)(x) := \int_{\Omega} K(x, y)u(y)\ dy, \qquad x \in \Omega$$

bzw. $B : C(\overline{\Omega}) \to C(\overline{\Omega})$ mit

$$(Bv)(x) := \int_{\Omega} K(y, x)v(y)\ dy, \qquad x \in \Omega$$

sind kompakt, vgl. Beispiel 16.9 bzw. Übungsaufgabe. Ferner ist das System $\langle C(\overline{\Omega}), C(\overline{\Omega})\rangle$ nach Beispiel 18.3 ein Dualsystem bzgl. der nichtentarteten Bilinearform $\langle \cdot, \cdot\rangle$ mit

$$\langle u, v\rangle := \int_{\Omega} u(x)v(x)\ dx.$$

Die Operatoren A und B sind nach Beispiel 18.7 bezüglich dieser Bilinearform zueinander adjungiert.

Dann gelten folgende Lösbarkeitsaussagen.

Folgerung 19.5. **Entweder** *haben die homogenen Integralgleichungen*

$$u(x) - \int_\Omega K(x,y)u(y)\ dy \quad = \quad 0, \quad x \in \Omega \tag{19.7}$$

$$v(x) - \int_\Omega K(y,x)v(y)\ dy \quad = \quad 0, \quad x \in \Omega \tag{19.8}$$

nur die trivialen Lösungen $u = 0$ *bzw.* $v = 0$ *und die inhomogenen Probleme*

$$u(x) - \int_\Omega K(x,y)u(y)\ dy \quad = \quad f(x), \quad x \in \Omega \tag{19.9}$$

$$v(x) - \int_\Omega K(y,x)v(y)\ dy \quad = \quad g(x), \quad x \in \Omega \tag{19.10}$$

haben für alle rechten Seiten $f \in C(\overline{\Omega})$ *bzw.* $g \in C(\overline{\Omega})$ *jeweils eine eindeutig bestimmte Lösung* $u \in C(\overline{\Omega})$ *bzw.* $v \in C(\overline{\Omega})$*,*

oder *die homogenen Probleme (19.7) bzw. (19.8) haben die gleiche Zahl* $m \in \mathbf{N}$ *linear unabhängiger Lösungen und die inhomogenen Probleme (19.9) bzw. (19.10) sind nur lösbar, wenn*

$$\int_\Omega f(x)v(x)\ dx = 0$$

für alle Lösungen v *des homogenen adjungierten Problems (19.8) bzw.*

$$\int_\Omega g(x)u(x)\ dx = 0$$

für alle Lösungen u *des homogenen Problems (19.7) gilt.*

Kapitel 20

Anwendungen auf Randwertprobleme

Im abschließenden Kapitel dieser Vorlesung untersuchen wir exemplarisch die Anwendung der Theorien von Riesz/ Schauder und Fredholm auf die *Lösbarkeit elliptischer Randwertaufgaben 2. Ordnung*, die wir bereits mittels Lax-Milgram Theorie in den Kapiteln 13 und 14 behandelt hatten. Es zeigt sich, daß die Bedingung der strikten Koerzitivität abgeschwächt werden kann.

Schließlich leiten wir Aussagen über das *Spektrum selbstadjungierter* elliptischer Operatoren ab. Diese sind wichtig, um die Methode des Separationsansatzes für *Anfangs-Randwertprobleme zeitabhängiger* partieller Differentialgleichungen vom Typ der Wärmeleitungs- bzw. Wellengleichung begründen zu können.

20.1 Gardingsche Formen

Im vorliegenden Abschnitt schwächen wir zunächst den Begriff der *strikten Elliptizität* bzw. $X-$*Koerzitivität* ab. Vereinfachend beschränken wir uns wie in Kapitel 13 auf den Fall *reeller* Hilbert-Räume.

Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(H, \|\cdot\|_H)$ Hilbert-Räume mit

(i) *stetiger Einbettung* $X \subset H$, d.h.es gibt eine Konstante $C > 0$ mit

$$\|u\|_H \leq C\|u\|_X, \quad \forall u \in X \tag{20.1}$$

sowie

(ii) *dichter Einbettung* $X \subset H$, d.h. für alle $u \in H$ und alle Zahlen $\epsilon > 0$ gibt es ein Element $w \in X$ mit $\|u - w\|_H < \epsilon$.

Lemma 20.1. *Für Hilbert-Räume $X \subset H$ mit stetiger und dichter Einbettung ist auch die Einbettung $H^* \subset X^*$ der Dualräume stetig und dicht.*

Beweis: Als Übung empfohlen ! (vgl. W. Hackbusch *Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen*, Teubner-Verlag 1986, S. 123 bzw. J. Wloka *Partielle Differentialgleichungen*, Teubner-Verlag 1982, Kap. 17.1) □

Nach dem Satz von Riesz (vgl. Theorem 12.1) identifizieren wir die Räume H und H^*. (Hinweis: Man beachte in diesem Zusammmenhang, daß nicht gleichzeitig eine Identifizierung von H und H^* sowie von X und X^* vorgenommen werden kann.)

Bei der Identifizierung von H mit H^* und von H^* mit einem Teilraum von X^* wird ein Element $v \in H$ mit dem Element $f_v \in X^*$ identifiziert, für das gilt

$$(v, u)_H = \langle f_v, u \rangle, \quad u \in X. \tag{20.2}$$

Dabei ist $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Dualitätsprodukt zwischen X^* und X. Wegen der Identifizierung führt es nicht zu Mißverständnissen, wenn dieses Dualitätsprodukt ebenso wie das Skalarprodukt auf H mit $(\cdot, \cdot)_H$ bezeichnet wird.

Definition 20.2. *Hilbert-Räume X und H mit stetiger und dichter Einbettung bilden ein sogenanntes* Evolutionstripel *bzw. einen* Gelfand-Dreier $X \subset H \subset X^*$.

Beispiel 20.3. Sei $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ beschränktes Gebiet mit Lipschitz-stetigem Rand. Wir betrachten den Raum $H := L^2(\Omega)$ sowie den Sobolev–Raum $X := W_0^{1,2}(\Omega)$ mit der Norm $\| \cdot \|_X$ gemäß

$$\|u\|_X^2 := \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 .$$

Die Einbettung $X \subset H$ ist stetig wegen der Friedrichschen Ungleichung (vgl. Lemma 14.4). Sie ist zugleich dichte Einbettung, da nach Satz 7.8 die Menge $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $L^2(\Omega)$ liegt. □

Definition 20.4. *Eine stetige Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$: $X \times X \to \mathbf{R}$ heißt* Gardingsche Form, *falls es Konstanten $\gamma > 0$ und $\delta \in \mathbf{R}$ gibt mit*

$$a(v, v) \geq \gamma \|v\|_X^2 - \delta \|v\|_H^2, \quad \forall v \in X. \tag{20.3}$$

Wir erinnern daran, daß wegen der Stetigkeit der Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ nach Lemma 13.4 genau ein Operator $A \in \mathcal{L}(X, X^*)$ mit $\langle Au, v \rangle = a(u, v)$ für alle $u, v \in X$ existiert.

Lemma 20.5. *Seien $\tilde{a}(\cdot, \cdot) := a(\cdot, \cdot) + \delta(\cdot, \cdot)_H$ und I: $X \to X^*$ der Inklusionsoperator, d.h. $I \in \mathcal{L}(X, X^*)$ mit $Iu = u, \forall u \in X$. Dann gilt:*

(i) $a(\cdot, \cdot)$ ist Gardingsche Form genau dann, wenn $\tilde{a}(\cdot, \cdot)$ $X-$elliptisch ist.

(ii) Ist $A \in \mathcal{L}(X, X^*)$ so ist auch $\tilde{A} := A + \delta I \in \mathcal{L}(X, X^*)$.

Beweis: Zur Übung empfohlen ! □

Beispiel 20.6. Unter den Voraussetzungen von Beispiel 20.3 betrachten wir den formalen Differentialoperator

$$(Lu)(x) := -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right)(x) + \sum_{j=1}^n b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) + c(x)u(x), \quad x \in \Omega \tag{20.4}$$

mit symmetrischer, positiv definiter Matrix $A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j}$ und hinreichend glatten Koeffizienten. Wir hatten in Abschnitt 14.2 gezeigt, daß die zugehörige Bilinearform

$$a(u, v) := \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \left\{ \sum_{j=1}^n b_j(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + c(x)u \right\} v \right) dx \tag{20.5}$$

unter den Voraussetzungen von Lemma 14.7 eine stetige Bilinearform auf $X \times X$ ist. Unter der zusätzlichen Voraussetzung

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial b_j}{\partial x_j} \in L^\infty(\Omega)$$

läßt sich zunächst für $v \in C_0^\infty(\Omega)$ unter Benutzung der Regel der partiellen Integration die Gleichung

$$a(v,v) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j}\ dx + \int_\Omega \left(c - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial b_j}{\partial x_j} \right) v^2\ dx$$

zeigen. Die positive Definitheit von $A(\cdot)$ sowie die übliche Voraussetzung

$$c - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial b_j}{\partial x_j} \geq 0$$

ergeben dann die $X-$Elliptizität von a. Dies kann nun abgeschwächt werden zu

$$a(u,u) \geq \gamma |u|_X^2 - \delta \|u\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \delta := \left\| c - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial b_j}{\partial x_j} \right\|_{L^\infty(\Omega)}. \tag{20.6}$$

Die Aussage gilt auch unter den schwächeren Glättevoraussetzungen von Lemma 14.7 für $u, v \in X := W_0^{1,2}(\Omega)$ nach Ausführung des entsprechenden Grenzübergangs in Sobolev–Räumen (vgl. Kapitel 7). Somit ist die Bilinarform $a(\cdot,\cdot)$ Gardingsche Form. □

20.2 Fredholm-Alternative für elliptische RWP

Wir wollen jetzt die in Kapitel 13 dargestellte Lax-Milgram Theorie (für stetige und $X-$koerzitive Bilinearformen) erweitern. Dazu müssen wir die im vorherigen Abschnitt eingeführte Einbettung $X \subset H$ noch verschärfen.

Lemma 20.7. *Für das Evolutionstripel $X \subset H \subset X^*$ sei zusätzlich die Einbettung $X \subset H$ kompakt, d.h. der Einbettungsoperator $I_H \in \mathcal{L}(X,H)$ mit $I_H u = u$ für alle $u \in X$ ist kompakt. Dann ist auch die Inklusion $I\colon\ X \subset X^*$ kompakt.*

Beweis: Zur Übung empfohlen ! □

Lemma 20.8. *Für das Evolutionstripel $X \subset H \subset X^*$ sei die Einbettung $X \subset H$ kompakt. Die stetige Bilinearform $a(\cdot,\cdot)\colon\ X \times X \to \mathbf{R}$ sei eine Gardingsche Form. Dann ist der Operator*

$$S := (A + \delta I)^{-1} I\colon\ X \to X \tag{20.7}$$

kompakt.

Beweis: Nach Lemma 20.5 gilt für den zu a gehörigen Operator A, daß $A + \delta I \in \mathcal{L}(X, X^*)$ den Voraussetzungen der Lax-Milgram Theorie (vgl. Satz 13.6) genügt. Damit existiert der inverse Operator $(A + \delta I)^{-1} \in \mathcal{L}(X^*, X)$. Nach Satz 16.5 ist dann der zusammengesetzte Operator $S := (A + \delta I)^{-1} I\colon\ X \to X$ kompakt. □

Damit können wir die die Riesz-Schauder-Theorie (vgl. Satz 17.12) sowie die Fredholmsche Alternative (vgl. Theorem 19.4) auf den Operator $S - \mu I$ mit $\mu \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ anwenden. Diese Aussagen übertragen sich wegen der Identität

$$\begin{aligned} S - \mu I &= -\mu(I - \mu^{-1} S) = -\mu(A + \delta I)^{-1}(A + \delta I - \mu^{-1} I) \\ &= -\mu(A + \delta I)^{-1}(A - \lambda I) \end{aligned}$$

mit $\lambda := -\delta + \mu^{-1}$ auf den Operator

$$A - \lambda I = -\mu^{-1}(A + \delta I)(S - \mu I). \tag{20.8}$$

Wir erhalten den

Satz 20.9. *Seien $X \subset H \subset X^*$ ein Evolutionstripel mit kompakter Einbettung $X \subset H$ und I: $X \to X^*$ der Inklusionsoperator. Ferner seien $a(\cdot,\cdot)$: $X \times X \to \mathbf{R}$ stetige Gardingsche Form und $A \in \mathcal{L}(X, X^*)$ der zugehörige Operator. Dann gelten folgende Aussagen:*

(i) Für alle $\lambda \in \mathbf{C}$ gilt **entweder***:*

$(i)_1$ $(A - \lambda I)^{-1} \in \mathcal{L}(X^*, X)$ und $(A^* - \overline{\lambda} I)^{-1} \in \mathcal{L}(X^*, X)$, d.h.:
Es existiert für alle $f \in X^*$ genau eine Lösung $u \in X$ bzw. $u^* \in X$ von

$$Au - \lambda u = f \tag{20.9}$$

bzw.

$$A^*u^* - \overline{\lambda} u^* = f. \tag{20.10}$$

oder

$(i)_2$ λ ist Eigenwert von A, d.h.:
Es existieren endlich-dimensionale Nullräume $N(A - \lambda I) \neq \{0\}$ und $N(A^* - \overline{\lambda} I) \neq \{0\}$, d.h. $Au = \lambda u$ für $u \in N(A - \lambda I)$ bzw. $A^*u^* = \overline{\lambda} u^*$ für $u^* \in N(A^* - \overline{\lambda} I)$.

(ii) Das Spektrum $\sigma(A)$ besteht aus höchstens abzählbar vielen Eigenwerten, die sich nicht in $\mathbf{C}$ häufen können. Ferner ist

$$\lambda \in \sigma(A) \quad \Leftrightarrow \quad \overline{\lambda} \in \sigma(A^*)$$

sowie

$$\dim N(A - \lambda I) = \dim N(A^* - \overline{\lambda} I) < \infty.$$

(iii) Für $\lambda \in \sigma(A)$ existiert genau dann mindestens eine Lösung $u \in X$ von (20.9), wenn

$$\langle f, u^* \rangle = (f, u^*)_H = 0, \quad \forall u^* \in N(A^* - \overline{\lambda} I). \tag{20.11}$$

Folgerung 20.10 *Die Variationsgleichung*

$$\textit{Finde } u \in X: \quad a(u, v) = f(v), \quad \forall v \in X \tag{20.12}$$

besitzt unter den Voraussetzungen von Satz 20.9 eine eindeutige Lösung, wenn $0 \notin \sigma(A)$, d.h. $\lambda = 0$ kein Eigenwert von A ist.

Beispiel 20.11. Wir wenden jetzt den Alternativsatz 20.9 auf das verallgemeinerte elliptische Randwertproblem 2. Ordnung

$$\text{Finde } u \in X := W_0^{1,2}(\Omega): \quad a(u, v) = f(v), \quad \forall v \in X \tag{20.13}$$

mit der Bilinearform $a(\cdot,\cdot)$ aus Beispiel 20.6 und der Linearform

$$f(v) := (f, v)_H := \int_\Omega f v dx$$

an. (20.13) ist die Variationsformulierung für das homogene Dirichletsche Randwertproblem für den formalen Differentialoperator

$$(Lu)(x) := -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)(x) + \sum_{j=1}^n b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}(x) + c(x)u(x), \quad x \in \Omega$$

mit symmetrischer, positiv definiter Matrix $A(x) = (a_{ij}(x))_{i,j}$ und hinreichend glatten Koeffizienten. Nach Lemma 13.4 und dem Darstellungssatz von Riesz (vgl. Theorem 12.1) gibt es einen zugehörigen Operator $A \in \mathcal{L}(X, X^*)$ mit

$$a(u,v) = \langle Au, v\rangle = (RAu, v)_H \quad \forall u, v \in X.$$

Dabei sind $R : X^* \to X$ der Riesz-Darstellungsoperator sowie $(\cdot,\cdot)_H$ das Skalarprodukt auf dem Hilbert-Raum $H = L^2(\Omega)$.

In einer Nebenrechnung zeigt man durch partielle Integration

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} v \; dx &= -\int_\Omega u \sum_{j=1}^n \frac{\partial (b_j v)}{\partial x_j} v \; dx \\
&= -\int_\Omega \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial v}{\partial x_j} u \; dx - \int_\Omega \sum_{j=1}^n \frac{\partial b_j}{\partial x_j} vu \; dx
\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
a(u,v) &= \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} + \left\{ \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial u}{\partial x_j} + cu \right\} v \right) dx \\
&= \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + \left\{ -\sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial v}{\partial x_j} + \left(c - \sum_{j=1}^n \frac{\partial b_j}{\partial x_j} \right) v \right\} u \right) dx \\
&=: a^*(v,u).
\end{aligned}$$

Die so definierte adjungierte Bilinearform a^* erklärt offenbar den adjungierten Operator $A^* \in \mathcal{L}(X, X^*)$ und es gilt

$$a^*(v,u) = a(u,v) = \langle A^* v, u\rangle \quad \forall u, v \in X.$$

Bei hinreichend glatten Daten ist

$$(L^* u)(x) := -\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right)(x) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(b_j(x) u(x) \right) + c(x) u(x), \quad x \in \Omega$$

der formale (punktweise gegebene) adjungierte Operator. Die Aussagen von Satz 20.9 können nun unmittelbar angewendet werden. Man kann sich zusätzlich überlegen, daß alle Eigenwerte des zu $a(\cdot,\cdot)$ gehörenden Operators A in einer Parabel der komplexen Ebene liegen (Als Übung empfohlen !). □

20.3 Spezialfall selbstadjungierter Operatoren

Wir hatten im vorhergehenden Abschnitt gesehen, daß bei Kenntnis des Spektrums eines kompakten Operators $A : X \to X^*$ eine vollständige Lösbarkeitstheorie der Gleichung $Au - \lambda u = f$ bzw. der adjungierten Gleichung $A^* u^* - \overline{\lambda} u^* = f$ zur Verfügung steht. Diese Kenntnis kann auch zur Lösung zeitabhängiger partieller Differentialgleichungen (vgl. Abschnitt 20.4) herangezogen werden.

Im Fall *selbstadjungierter* Operatoren, d.h. es gilt

$$A^* = A,$$

ist eine weitergehende Beschreibung des Spektrums des Operators A über den Spektralsatz 17.12 von Riesz/ Schauder hinaus möglich. Wir betrachten das Eigenwertproblem:

$$\text{Finde} \quad \lambda \in \mathbf{C}, \quad u \in X \setminus \{0\} : \quad Au = \lambda u, \quad u \in X \tag{20.14}$$

bzw. in Variationsform

$$\text{Finde} \quad \lambda \in \mathbf{C}, \quad u \in X \setminus \{0\} : \quad a(u,v) = (\lambda u, v)_H, \quad \forall v \in X. \tag{20.15}$$

Satz 20.12. *Sei $X \subset H \subset X^*$ ein Evolutionstripel reeller Hilbert-Räume mit kompakter Einbettung $X \subset H$. Die Bilinearform a: $X \times X \to \mathbf{R}$ sei beschränkt, symmetrisch und strikt positiv, d.h. $a(v,v) > 0$ für alle $v \in X \setminus \{0\}$. Dann gilt:*

(i) Das Eigenwertproblem (20.14) bzw. (20.15) besitzt nur positive Eigenwerte

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ...$$

(unter Beachtung ihrer Vielfachheit) mit $\lim_{m\to\infty} \lambda_m = \infty$. Jeder Eigenwert hat endliche Vielfachheit, d.h. die Dimension von $N(A - \lambda I)$ ist endlich.

(ii) Es existieren zugehörige Eigenvektoren $u_1, u_2, ...$, die ein vollständiges Orthonormalsystem in X bezüglich des energetischen Skalarproduktes

$$(u,v)_E := a(u,v)$$

bilden. Ferner ist

$$(u_i, u_j)_H = \delta_{ij}, \quad \forall i,j \in \mathbf{N}.$$

Für jedes $u \in X$ konvergiert die Reihe

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} (u, u_k)_H u_k$$

im Raum X. Ferner besitzt der Operator A die Darstellung

$$Au = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (u, u_k)_H \; u_k$$

Beweis: (i) Wir benutzen das oben eingeführte energetische Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)_E = a(\cdot,\cdot)$. Ferner ist das Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)_H$ stark positiv auf $X \subset H$. Somit existiert ein linearer, symmetrischer und strikt $X-$elliptischer Operator B: $X \to X$ mit

$$(u,v)_H = (Bu, v)_E, \quad u, v \in X.$$

Dann ist das Eigenwertproblem mit $\nu := \lambda^{-1}$ äquivalent zu

$$\nu u = Bu, \quad u \in X.$$

Auf dieses Problem kann der Spektralsatz 17.12 angewendet werden, da der Operator B wegen der kompakten Einbettung $X \subset H$ ebenfalls kompakt ist. Danach existieren höchstens abzählbare viele Eigenwerte ν_k, die sich höchstens bei $\nu = 0$ häufen.

Wir zeigen die Positivität der Eigenwerte: Seien λ Eigenwert von A und u der zugehörige Eigenvektor. Dann haben wir

$$\begin{aligned}\overline{\lambda}\|u\|_H^2 &= (\lambda u, u)_H = \langle Au, u\rangle = \langle u, A^*u\rangle \\ &= \langle u, Au\rangle = (u, \lambda u)_H = \lambda\|u\|_H^2,\end{aligned}$$

also $\lambda = \overline{\lambda} \neq 0$. Wegen der Positivität von a ist

$$\lambda\|u\|_H^2 = \langle Au, u\rangle \geq 0,$$

also $\lambda \geq 0$.
Der Nullraum von $A - \lambda I$ hat nach dem 1. Satz von Riesz endliche Dimension.

(ii) Die Orthogonalität der Eigenvektoren sieht man wie folgt: Seien u_1 bzw. u_2 die Eigenvektoren zu den verschiedenen Eigenwerten λ_1 bzw. λ_2. Dann ist

$$\lambda_1(u_1, u_2)_H = \langle Au_1, u_2\rangle = \langle u_1, Au_2\rangle = \lambda_2(u_1, u_2)_H.$$

Wegen $\lambda_1 \neq \lambda_2$ folgt daraus mit $(u_1, u_2)_H = 0$ die Orthogonalität bezüglich des H-Skalarproduktes. Damit ergibt sich auch unmittelbar die Orthogonalität bezüglich des energetischen Skalarproduktes.

Den Beweis der noch nicht gezeigten Aussagen findet man z.B. in H. Triebel *Höhere Analysis*, Satz 18.4. □

Beispiel 20.13. Seien $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ beschränktes Gebiet mit Lipschitz-stetigem Rand sowie $X := W_0^{1,2}(\Omega)$ und $H := L^2(\Omega)$. Wir betrachten das zum Laplace–Operator $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ mit homogenen Dirichlet–Bedingungen gehörige Eigenwertproblem

$$\text{Finde } \; \lambda \in \mathbf{C}, u \in X: \;\; a(u,v) = (\lambda u, v)_H, \quad \forall v \in X$$

mit

$$a(u,v) := \int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} dx.$$

Dann sind die Voraussetzungen von Satz 20.12 erfüllt. □

20.4 Separationsmethode für ARWP

Wir wollen abschließend exemplarisch zeigen, wie die Kenntnis des Spektrums eines selbstadjungierten Operators zur Lösung von Anfangs-Randwertproblemen (ARWP) zugehöriger zeitabhängiger Gleichungen genutzt werden kann.

Sei $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ beschränktes Gebiet. Die lineare *Wellengleichung*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = 0, \quad \text{in } \Omega \times (0, \infty) \tag{20.16}$$

mit der Zeitvariablen t und dem Laplace–Operator

$$\Delta u := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

beschreibt in erster Näherung die Schwingung einer Membran. Dabei ist $(x, u(x,t))$ ein Membranpunkt zur Zeit t und u beschreibt die Auslenkung der Membran. Die Differentialgleichung ist gültig für kleine Auslenkungen einer dünnen Membran.

Der Separationsansatz

$$u(x,t) = W(t)V(x) \tag{20.17}$$

ergibt formal für $u \in C^2(\Omega \times (0,\infty))$

$$W''V = W\Delta V.$$

Dies ist für $u \neq 0$ nur dann möglich, wenn es eine Zahl $\lambda \in \mathbf{R}$ gibt mit

$$-\Delta V = \lambda V \quad \text{in } \Omega \tag{20.18}$$

und

$$W'' + \lambda W = 0 \quad \text{in } (0,\infty). \tag{20.19}$$

Wir nehmen an, die Membran sei am Rand $\partial\Omega$ des Gebietes eingespannt. Daher wählen wir die Randbedingung $u(x,t) = 0$ für $x \in \partial\Omega$, also $V(x) = 0$ für $x \in \partial\Omega$. Bei Multiplikation der Gleichung (20.18) mit V und partieller Integration folgt

$$\lambda \int_\Omega V^2 dx = -\int_\Omega \Delta V \cdot V dx = \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \right)^2 dx \geq 0,$$

damit $\lambda > 0$ für $V \neq 0$.

Die gewöhnliche Differentialgleichung für W hat für jedes $\lambda > 0$ die allgemeine Lösung

$$W(t) = c_1 \cos\mu(t-t_0) + c_2 \sin\mu(t-t_0)$$

mit $\mu := \sqrt{\lambda}$.

Das Eigenwertproblem (20.18) hat nach Beispiel 20.13 abzählbar viele Eigenwerte λ_k, mit $k \in \mathbf{N}$. Die zugehörigen Eigenvektoren $V_k(\cdot)$ bilden ein vollständiges Orthonormalsystem in $H := L^2(\Omega)$ bzw. $X := W_0^{1,2}(\Omega)$. Man kann dann die Lösung der Wellengleichung formal schreiben als

$$U(x,t) := \sum_{k=1}^\infty (c_{1k} \cos\mu(t-t_0) + c_{2k} \sin\mu(t-t_0)))V_k(x).$$

Die Koeffizienten c_{1k} und c_{2k} ergeben sich durch Auferlegung von Anfangsbedingungen

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), \qquad x \in \Omega$$

nach formaler Entwicklung von $u_0(\cdot)$ und $u_1(\cdot)$ nach dem vollständigen Orthonormalsystem $\{V_k\}_{k\in\mathbf{N}}$. Insbesondere kann die Lösung der Wellengleichung nicht bessere Differenzierbarkeitseigenschaften haben als die Anfangsfunktionen u_0 und u_1. Einen Konvergenzbeweis für die so formal (!) konstruierte Lösung findet man z.B. bei H. Triebel: *Höhere Analysis*, Dt. Verlag der Wissenschaften, Berlin 1972 im Kapitel VII. Bestimmte Aspekte kann man auch nachlesen bei H.W. Alt *Lineare Funktionalanalysis*, Abschn. 10.14.

Wir wollen die Methode des Separationsansatzes noch anwenden auf das Modell der Wärmeleitung. Sei $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ beschränktes Gebiet. Die lineare *Wärmeleitungsgleichung*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0, \quad \text{in } \Omega \times (0,\infty). \tag{20.20}$$

beschreibt die Temperaturverteilung $u(x,t)$ in einem homogenen Medium. ZurVereinfachung der Darstellung soll wieder eine homogene Dirichlet-Bedingung $u(x,t) = 0$ am Gebietsrand $\partial\Omega$ gelten.

Der Separationsansatz

$$u(x,t) = W(t)V(x) \tag{20.21}$$

ergibt formal

$$W'V = W\Delta V.$$

Dies ist für $u \neq 0$ nur dann möglich, wenn es eine Zahl $\lambda \in \mathbf{R}$ gibt mit

$$-\Delta V = \lambda V \quad \text{in } \Omega \tag{20.22}$$

und

$$W' + \lambda W = 0 \quad \text{in } (0,\infty). \tag{20.23}$$

Auch hier ersieht man sofort, daß $\lambda > 0$ gelten muß.

Die gewöhnliche Differentialgleichung für W hat für jedes $\lambda > 0$ die allgemeine Lösung

$$W(t) = ce^{-\lambda t}.$$

Für das Eigenwertproblem (20.22) wird natürlich die Randbedingung $V(x) = 0$ für $x \in \partial\Omega$ gestellt. Das Eigenwertproblem (20.22) hat dann mit dieser Zusatzbedingung nach Beispiel 20.13 abzählbar viele Eigenwerte λ_k, mit $k \in \mathbf{N}$. Die zugehörigen Eigenvektoren $V_k(\cdot)$ bilden wiederum ein vollständiges Orthonormalsystem in $H := L^2(\Omega)$ bzw. $X := W_0^{1,2}(\Omega)$. Man kann dann die Lösung der Wärmeleitungsgleichung formal schreiben als

$$U(x,t) := \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-\lambda_k t} V_k(x).$$

Die Koeffizienten c_k ergeben sich durch Auferlegung der Anfangsbedingung

$$u(x,0) = u_0(x)$$

nach formaler Entwicklung von $u_0(\cdot)$ nach dem vollständigen Orthonormalsystem $\{V_k\}_{k\in\mathbf{N}}$. Im Unterschied zur Wellengleichung sieht man sehr schön die Abklingeigenschaft der Lösungen (und ihrer ggf. existierenden Ableitungen) für $t \to \infty$. Dies ist die sogenannte *Glättungseigenschaft* der Wärmeleitungsgleichung. Einen Konvergenzbeweis für die so formal (!) konstruierte Lösung führt man analog zum Fall der Wellengleichung.

Anhang: Exkurs über das Lebesgue-Integral

Anhang A

Exkurs zum Lebesgue-Integral

In Kapitel 6 hatten wir einige grundlegende Kenntnisse der Maßtheorie vorausgesetzt, die man in einschlägigen Lehrbüchern zur Maßtheorie findet. Wir stellen jedoch hier (ohne Beweis) eine Einführung des Lebesgue-Integrals vor, die auf dem Vervollständigunsgprinzip in normierten Räumen (vgl. Satz 4.16) beruht. Eine ausführlichere Darstellung (unter Einschluß der Beweise) dazu findet man etwa bei H.W. Alt [2], Anhang 1.

A.1 Lebesgue-Maß

Definition A.1. *Seien S eine Menge, $\mathcal{B}_0$ eine Menge von Teilmengen von S, die einen* Ring *bzw. eine* Boolsche Algebra *bilden, d.h. es gilt*

(i) $\emptyset \in \mathcal{B}_0; \qquad E \in \mathcal{B}_0 \quad \Longrightarrow \quad S \setminus E \in \mathcal{B}_0,$

(ii) $E_1, E_2 \in \mathcal{B}_0 \quad \Longrightarrow \quad E_1 \cup E_2 \in \mathcal{B}_0.$

Ferner sei $\mu : \mathcal{B}_0 \to [0, \infty]$ mit $\mu(\emptyset) = 0$ ein additives Maß, *d.h.*

(iii) $E_1, ..., E_m \in \mathcal{B}_0$, *paarweise disjunkt* $\quad \Longrightarrow \quad \mu(\cup_{i=1}^m) = \sum_{i=1}^m \mu(E_i)$

und $\sigma-$additiv, *d.h.*

(iv) $E, E_i \in \mathcal{B}_0$ *für* $i \in \mathbf{N}, \quad E \subset \bigcup_{i\in\mathbf{N}} E_i \quad \Longrightarrow \quad \mu(E) \leq \sum_{i\in\mathbf{N}} \mu(E_i).$

Dann heißt $(S, \mathcal{B}_0, \mu)$ Prämaßraum.

Folgerung A.2. Man kann zeigen, daß ein additives und $\sigma-$subadditives Maß μ auch auf $\mathcal{B}_0$ monoton und $\sigma-$additiv ist, d.h.

(v) $E_1, E_2 \in \mathcal{B}_0, \ E_1 \subset E_2 \quad \Longrightarrow \quad \mu(E_1) \leq \mu(E_2)$,

(vi) $E_i \in \mathcal{B}_0, \ i \in \mathbf{N}$ paarweise disjunkt, $\quad \cup_{i\in\mathbf{N}} E_i \in \mathcal{B}_0 \quad \Longrightarrow \quad \mu(\cup_{i\in\mathbf{N}} E_i) = \sum_{i\in\mathbf{N}} \mu(E_i).$

Das für unsere Anwendungen wichtigste Beispiel beschreibt

Beispiel A.3. (*Elementares Lebesgue-Maß*)
Sei $\mathcal{S} = \mathbf{R}^n$. Ferner werde $\mathcal{B}_0$ gebildet aus allen endlichen Vereinigungen disjunkter, halboffener Quader der Form

$$[a, b[:= \{x \in \mathbf{R}^n | \ a_i \leq x_i < b_i, \ i = 1, ..., n\}$$

mit $-\infty \leq a_i < b_i \leq +\infty$. Dann heißt

$$\mu([a,b[) := \prod_{i=1}^{n}(b_i - a_i) \tag{A.1}$$

Lebesguesches Elementarmaß. Es hat den Wert ∞, falls wenigstens ein $a_i = -\infty$ oder ein $b_i = \infty$ ist.

Sei nun ein halboffener Quader E gerade die Vereinigung paarweise disjunkter halboffener Quader $E_1, ..., E_m$. Dann kann man zeigen, daß

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{m} \mu(E_i).$$

Somit kann das Elementarmaß eindeutig auf $\mathcal{B}_0$ fortgesetzt werden. Man muß nun lediglich noch die Eigenschaft der $\sigma-$Subadditivität zeigen (vgl. [2], A.1.2.). □

Definition A.4. *Sei μ additives und $\sigma-$additives Maß. Als* äußeres Maß μ^* *zu μ bezeichnet man für $A \subset \mathcal{S}$ die Größe*

$$\mu^*(A) := \inf\{\sum_{i\in\mathbf{N}} \mu(E_i) |\ A \subset \bigcup_{i\in\mathbf{N}} E_i,\ E_i \in \mathcal{B}_0\}. \tag{A.2}$$

Man kann zeigen, daß dann μ^* auch $\sigma-$subadditiv ist. Ferner folgert man $\mu^* = \mu$ auf $\mathcal{B}_0$. Man sagt

$$N \subset \mathcal{S} \text{ ist } \ \mu-\text{Nullmenge} \quad \Longleftrightarrow \quad \mu^*(N) = 0.$$

Jede Teilmenge einer $\mu-$Nullmenge sowie abzählbare Vereinigungen von $\mu-$Nullmengen sind $\mu-$Nullmengen. Ferner sagt man, eine Aussage ist *μ-fast überall* gültig, falls sie außerhalb einer $\mu-$Nullmenge erfüllt ist.

A.2 Lebesgue-Integral

Wir führen den Begriff des Lebesgue-Integrals über den der Treppenfunktion ein.

Definition A.5. *Sei Y Banach-Raum mit der Norm $\|\cdot\|$. Der* Raum der einfachen *oder* Treppenfunktionen *zu $(\mathcal{S}, \mathcal{B}_0, \mu)$ mit Werten in Y ist erklärt durch*

$$\begin{aligned} T(\mu, Y) \ := \ & \{f : \mathcal{S} \to Y \mid f(\mathcal{S}) \text{ beschränkt}, \\ & f^{-1}(\{y\}) \in \mathcal{B}_0 \text{ für } y \in Y,\ \mu(f^{-1}(\{y\}) < \infty \text{ für } y \neq 0\}. \end{aligned} \tag{A.3}$$

Jede Treppenfunktion f ist dann darstellbar in der Form

$$f = \sum_{i=1}^{m} \chi_{E_i}\alpha_i, \quad m \in \mathbf{N},\ \alpha_i \in Y,\ E_i \in \mathcal{B}_0,\ \mu(E_i) < \infty, \tag{A.4}$$

wobei χ_E die durch

$$\chi_E(x) = 1,\ x \in E, \quad \chi_E(x) = 0,\ x \notin E$$

definierte *charakteristische Funktion* der Menge E ist.

Auf dem Vektorraum $T(\mu, Y)$ kann durch

$$f = 0 \text{ in } T(\mu, Y) \quad \Longleftrightarrow \quad f = 0 \ \ \mu-\text{fast überall} \quad \Longleftrightarrow \quad \mu(\{x \in \mathcal{S} |\ f(x) \neq 0\}) = 0$$

eine Äquivalenzrelation definiert werden.

Definition A.6. *Für $f \in T(\mu, Y)$ wird das $\mu-$Integral von f über S definiert als*

$$\int_S f \; d\mu := \sum_{y \in Y \setminus \{0\}} \mu(f^{-1}(\{y\}) \; y = \sum_{i=1}^{m} \mu(E_i)\alpha_i. \tag{A.5}$$

Für letztere Darstellung wurde die Darstellung (A.4) benutzt.

Das $\mu-$Integral ist offenbar eine lineare Abbildung von $T(\mu, Y)$ nach Y. Für $f \in T(\mu, Y)$ gehört die mit $\|f\|$ bezeichnete Funktion $x \mapsto \|f(x)\|$ zu $T(\mu, \mathbf{R})$. Es gilt die Abschätzung

$$\left\| \int_S f \; d\mu \right\| \leq \int_S \|f\| \; d\mu.$$

Mit der Norm

$$\|f\|_{T(\mu,Y)} := \int_S \|f\| \; d\mu$$

wird dann $T(\mu, Y)$ normierter Raum.

Den so normierten Raum $T(\mu, Y)$ kann man nun nach dem Vorbild von Satz 4.16 zu einem Raum $\tilde{T}(\mu, Y)$ vervollständigen. Wir wollen diese Menge als Funktionenraum charakterisieren.

Folgende Bezeichnungen werden noch benötigt: Für $f \in T(\mu, Y)$ und $E \in \mathcal{B}_0$ ist $\chi_E f \in T(\mu, Y)$. Man definiert dann

$$\int_E f \; d\mu := \int_S \chi_E f \; d\mu.$$

Ferner sei

$$\{f > \alpha\} := \{x \in S | \; f(x) > \alpha\} \in \mathcal{B}_0$$

für $f \in T(\mu, \mathbf{R})$ und $\alpha \in \mathbf{R}$.

Die für die Einführung des Lebesgue-Integrals entscheidende Aussage ist

Lemma A.7. *Für eine Folge $(f_k)_{k \in \mathbf{N}} \in \tilde{T}(\mu, Y)$ gilt:*

(i) Es existieren eine μ-Nullmenge N und eine Teilfolge $(f_{k_i})_{i \in \mathbf{N}}$ so, daß der folgende Grenzwert existiert

$$f(x) := \lim_{i \to \infty} f_{k_i}(x), \quad x \in S \setminus N.$$

(ii) Mit der Grenzfunktion aus (i) gilt

$$(f_k)_{k \in \mathbf{N}} = 0 \;\text{ in } \tilde{T}(\mu, Y) \quad \Longleftrightarrow \quad f = 0 \;\; \mu - \text{fast überall.}$$

Beweis: vgl. [2], Lemma A.1.6 □

Lemma A.7 motiviert die

Definition A.8. *Die Menge*

$$L(\mu, Y) := \{f : S \to Y | \; \exists (f_k)_{k \in \mathbf{N}} \in \tilde{T}(\mu, Y) \; mit \; f = \lim_{k \to \infty} f_k \;\; \mu - fast\ überall\}. \tag{A.6}$$

*heißt Menge der $\mu-$*integrierbaren Funktionen.

In $L(\mu, Y)$ wird durch

$$f = g \;\text{ in } L(\mu, Y) \quad \Longleftrightarrow \quad f = g \;\; \mu - \text{fast überall}$$

eine Äquivalenrelation eingeführt.

Ferner gilt die Inklusion $T(\mu, Y) \subset L(\mu, Y)$. Die auf $L(\mu, Y)$ erklärte Äquivalenrelation ist dieselbe wie die für $T(\mu, Y)$ eingeführte. Schließlich erhalten wir

Lemma A.9. *Zwischen $\tilde{T}(\mu, Y)$ und $L(\mu, Y)$ wird durch*

$$J((f_k)_{k\in\mathbf{N}}) = f \qquad \textit{mit } f \textit{ aus Lemma A.7 (i)}$$

ein Vektorraum-Isomorphismus definiert.

Beweis: vgl. [2], A.1.7 □

Für f und $(f_k)_{k\in\mathbf{N}}$ aus Definition A.8 kommen wir schließlich zur

Definition A.10. *Für f und $(f_k)_{k\in\mathbf{N}}$ aus Definition A.8 wird das* Lebesgue-Integral von f über S *erklärt durch*

$$\int_S f \; d\mu := \lim_{k\to\infty} \int_S f_k \; d\mu. \tag{A.7}$$

Die Wohldefiniertheit sieht man wie folgt: Wegen

$$\left\| \int_S f_k \; d\mu - \int_S f_l \; d\mu \right\| \leq \int_S \|f_k - f_l\| \; d\mu \to 0, \quad k, l \to \infty.$$

existiert der Grenzwert $\lim_{k\to\infty} \int_S f_k \; d\mu \in Y$. Nach Lemma A.7 ist die Definition des Integrals von f auch unabhängig von der Folge $(f_k)_{k\in\mathbf{N}}$.

A.3 Eigenschaften des Lebesgue-Integrals

Wir fassen einige Eigenschaften des Raumes $L(\mu, Y)$ zusammen.

Satz A.11.

(i) *Es gilt $T(\mu, Y) \subset L(\mu, Y)$ und das Integral ist linear auf $L(\mu, Y)$ mit*

$$\int_S \chi_E \; \alpha \; d\mu = \mu(E) \; \alpha \quad \textit{für} \quad E \in \mathcal{B}_0, \; \mu(E) < \infty, \; \alpha \in Y.$$

(ii) Mit $f \in L(\mu, Y)$ ist $\|f\| \in L(\mu, \mathbf{R}$ mit

$$\left\| \int_S f \; d\mu \right\| \leq \int_S \|f\| \; d\mu.$$

(iii) Für $f \in L(\mu, Y)$ und $\delta > 0$ gilt

$$\int_S \|f\| \; d\mu \geq \delta \; \mu^*(\{\|f\| > \delta\}).$$

(iv) $L(\mu, Y)$ ist Banach-Raum mit der Norm

$$\|f\|_{L(\mu,Y)} := \int_S \|f\| \; d\mu.$$

(v) $T(\mu, Y)$ ist dicht in $L(\mu, Y)$.

Beweis: vgl. [2], A.1.9. □

Schließlich stellen wir wichtige Eigenschaften des Lebesgue-Integrals zsuammen.

Lemma A.12. *Gilt* $f_k \to f, k \to \infty$ *in* $L(\mu, Y)$, *so existiert eine Teilfolge* $(k_i)_{i\in\mathbf{N}}$ *mit* $f_{k_i} \to f, i \to \infty$ *μ-fast überall.*

Beweis: vgl. [2], A.1.10. □

Satz A.13.
(i) (Monotonie) Für $f, g \in L(\mu, \mathbf{R})$ *gilt*

$$g \geq f \text{ fast überall} \implies \int_S g \, d\mu \geq \int_S f \, d\mu.$$

(ii) Ist $(f_k)_{k\in\mathbf{N}}$ *Cauchy-Folge in* $L(\mu, Y)$ *und* $f_k \to f, k \to \infty$ $\mu-$*fast überall, so ist* $f \in L(\mu, Y)$ *sowie* $\|f - f_k\|_{L(\mu,Y)} \to 0, \ k \to \infty$.

(iii) (Monotone Konvergenz) Seien $f_k \in L(\mu, \mathbf{R})$ *mit* $0 \leq f_k \nearrow f, \ k \to \infty$ $\mu-$*fast überall und existiere eine Konstante* C *mit*

$$\int_S f_k \, d\mu \leq C < \infty, \quad \forall k \in \mathbf{N}.$$

Dann gilt $f \in L(\mu, \mathbf{R})$ *und* $f_k \to f, k \to \infty$ *in* $L(\mu, \mathbf{R})$. *Speziell ist*

$$\int_S f \, d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_S f_k \, d\mu.$$

Beweis: vgl. [2], A.1.12. □

Lemma A.14. *Sei* $\mathcal{B}_1$ *der kleinste* σ*-Ring, der die Menge* $\mathcal{B}_0$ *enthält. Für die Funktion* $\chi_E \in L(\mu, \mathbf{R})$ *gilt dann*

(i) Es existiert eine Menge $E_k \in \mathcal{B}_0$ *mit* $\chi_{E_k} \to \chi_E, k \to \infty$ *in* $L(\mu, \mathbf{R})$.

(ii) Es existiert eine Menge $E' \in \mathcal{B}_1$, *so daß* $\chi_E = \chi_{E'}$ $\mu-$*fast überall.*

(iii) Für alle $A \in \mathcal{B}_1$ *ist* $\chi_{E\cap A} \in L(\mu, \mathbf{R})$.

Beweis: vgl. [2], A.1.13. □

Wir können jetzt über die Konstruktion des Lebesgue-Integrals auch eine Erweiterung von μ zu einem $\sigma-$additiven Maß vornehmen. Dies ist gerade das in Beispiel 6.2 (ii) angesprochene *Fortsetzungsprinzip.*

Lemma A.15. *Unter den Annahmen von Definition 6.1 sei* $\mathcal{B}_1$ *wie in Lemma A.14 definiert. Ferner sei*

$$\mathcal{B} := \{E \subset S | \ \chi_E = \chi_{E'} \ \ \mu - \textit{fast überall für ein } E' \in \mathcal{B}_1\}.$$

Wir definieren $\overline{\mu} : \mathcal{B} \to [0, \infty]$ *durch*

$$\overline{\mu}(E) := \int \chi_E \, d\mu, \quad \chi_{E\cap A} \in L(\mu, \mathbf{R}), \ \forall A \in \mathcal{B}; \qquad \overline{\mu}(E) := \infty, \quad \textit{sonst}.$$

Dann ist $\overline{\mu}$ *Erweiterung des Ausgangsmaßes* μ *von* $\mathcal{B}_0$ *auf* $\mathcal{B}$ *und* $(S, \mathcal{B}, \overline{\mu})$ *ist sogar Maßraum. Weiterhin ist* N *eine* $\mu-$*Nullmenge genau dann wenn* $N \in \mathcal{B}$ *mit* $\overline{\mu}(N) = 0$ *gilt. Wir werden künftig vereinfachend* μ *statt* $\overline{\mu}$ *schreiben.*

Beweis: vgl. [2], A.1.14. □

Lemma A.16. *Für* $f \in L(\mu, Y)$ *gelten folgende Aussagen:*

(i) Für $E \in \mathcal{B}$ *ist* $\chi_E f \in L(\mu, Y)$.

(ii) Die Abbildung $\nu : \mathcal{B} \to Y$ mit

$$\nu(E) := \int_E f \; d\mu := \int_S \chi_E f \; d \; \mu, \qquad E \in \mathcal{B}$$

ist σ-additiv. ferner ist $\|\nu(E)\| \to 0$ bei $\mu(E) \to 0$.

Beweis: vgl. [2], A.1.16. □

Satz A.17. (Satz von Egorov)
Es seien $\mu(S) < \infty$ sowie f_j und f meßbar. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $f_j \to f, j \to \infty$ $\mu-$ fast überall.

(ii) $f_j \to f, j \to \infty$ gleichmäßig, d.h. zu $\epsilon > 0$ gibt es ein $E_\epsilon \in \mathcal{B}$ mit $\mu(S \setminus E_\epsilon) \leq \epsilon$ und $f_j \to f, j \to \infty$ gleichmäßig auf E_ϵ.

Beweis: vgl. [2], A.1.17. □

Satz A.18. (Lemma von Fatou)
Sind $f_j \in L(\mu, \mathbf{R})$ mit $f_j \geq 0$ fast überall und $\int_S f_j \; d\mu \leq C < \infty$, so ist

$$\lim_{j\to\infty}\inf f_j \in L(\mu, \mathbf{R}); \qquad \int_S \lim_{j\to\infty}\inf f_j \; d\mu \leq \lim_{j\to\infty}\inf \int_S f_j \; d\mu.$$

Beweis: vgl. [2], A.1.19. □

Satz A.19. (Satz von Lebesgue über dominierte Konvergenz)
Es seien $g \in L(\mu, \mathbf{R})$ und $f_j, f : S \to Y$ meßbar. Ist ferner fast überall

$$|f_j| \leq g, \quad \forall j \in \mathbf{N}, \qquad f = \lim_{j\to\infty} f_j,$$

so sind $f_j, f \in L(\mu, Y))$ und

$$\lim_{j\to\infty} \int_S |f_j - f| \; d\mu = 0.$$

Beweis: vgl. [2], A.1.20. □

Lemma A.20. (Majorantenkriterium)

(i) Funktionen $f \in L(\mu, Y)$ sind meßbar.

(ii) Für eine Funktion $g \in L(\mu, \mathbf{R})$ und für eine meßbare Funktion $f : S \to Y$ gelte fast überall $\|f\| \leq g$. Dann ist auch $f \in L(\mu, Y)$.

Beweis: vgl. [2], A.1.18. □

Wir formulieren das folgende Resultat für reell- oder komplexwertige Funktionen über dem Raum $\mathbf{R}^{n+m}$ mit $n, m \in \mathbf{N}$. Dabei bezeichne $(x, y) = (x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_m)$ einen beliebigen Punkt dieses Raumes. (Eine Verallgemeinerung der Aussage findet man bei Alt [2] im Abschnitt A.4.)

Satz A.21. (Satz von Fubini)

Sei $f(x, y)$ eine Lebesgue–integrierbare Funktion, die gegebenfalls außerhalb ihres Definitionsbereiches mit Null fortgesetzt wird. Dann ist f für fast alle $x \in \mathbf{R}^n$ bezüglich y Lebesgue-integrierbar. Ferner ist $\int_{\mathbf{R}^m} f(x, y) \; dy$ integrierbar bezüglich x integrierbar. Es gilt

$$\int_{\mathbf{R}^{n+m}} f(x, y) \; dx \; dy = \int_{\mathbf{R}^m} \left(\int_{\mathbf{R}^n} f(x, y) \; dx \right) \; dy = \int_{\mathbf{R}^n} \left(\int_{\mathbf{R}^m} f(x, y) \; dy \right) \; dx.$$

Dabei ist $dx\ dy$ das Lebesgue-Maß im Raum $\mathbf{R}^{n+m}$.

Beweis: vgl. Alt [2], Satz A.4.10 $\square$

Anhang B

Dichte Teilmengen von L^p

In Abschnitt 7.1 hatten wir dichte Teilmengen des Lebesgue-Raumes $L^p(\Omega)$ für Gebiete $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ betrachtet. Wir geben hier ergänzend die Beweise der wichtigen Aussagen aus Lemmata 7.1, 7.3 und 7.7 (hier Lemmata B.1, B.2 bzw. B.3) an.

Lemma B.1. *Die Menge der Treppenfunktionen liegt für $1 \leq p < \infty$ dicht in $L^p(\Omega)$. Für $p = \infty$ bleibt die Aussage richtig, wenn $\mu(\Omega) < \infty$ ist.*

Beweis: (i) Wir betrachten zunächst den Fall $1 \leq p < \infty$:
Die Menge $E_\epsilon := \{\epsilon \leq |u| \leq 1/\epsilon\}$ hat endliches Maß $\mu(E_\epsilon) < \infty$, denn

$$\int_\Omega |f|^p \; dx \geq \epsilon^p \mu(E_\epsilon).$$

Die Funktion $\chi_{E_\epsilon} u$ ist meßbar. Die Abschätzung

$$|\chi_{E_\epsilon} u| \leq \frac{1}{\epsilon} \chi_{E_\epsilon} \in L^1(\mu, \mathbf{R})$$

impliziert $\chi_{E_\epsilon} u \in L^1(\mu, \mathbf{K})$ nach dem Majorantenkriterium (vgl. Lemma A.20).
Nach Konstruktion des Lebesgue-Integrals (vgl. Lemma A.11 (v)) findet man Treppenfunktionen $v_{\epsilon,k}$ mit

$$v_{\epsilon,k} \to \chi_{E_\epsilon} u \quad \text{in } L^1(\mu, \mathbf{K}), \quad k \to \infty.$$

Wir definieren nun Treppenfunktionen

$$u_{\epsilon,k} := \begin{cases} v_{\epsilon,k}, & x \in E_\epsilon, \; |v_{\epsilon,k}| \leq 2/\epsilon; \\[2ex] \frac{2 v_{\epsilon,k}}{\epsilon |v_{\epsilon,k}|}, & x \in E_\epsilon, \; |v_{\epsilon,k}| > 2/\epsilon; \\[2ex] 0, & x \in \Omega \setminus E_\epsilon. \end{cases}$$

Für Punkte $x \in E_\epsilon$ mit $|v_{\epsilon,k}| > 2/\epsilon$ haben wir dann

$$|u_{\epsilon,k} - u(x)| \leq \frac{3}{\epsilon} \leq 3(|v_{\epsilon,k}(x)| - u(x)|) \leq 3|v_{\epsilon,k}(x) - u(x)|.$$

Dann konvergiert auch $u_{\epsilon,k} \to \chi_{E_\epsilon} u, \; k \to \infty$ in $L^1(\mu, \mathbf{K})$ und es gilt

$$\int_\Omega |u - u_{\epsilon,k}|^p \; dx \leq \int_{\Omega \setminus E_\epsilon} |u|^p \; dx + \left(\frac{3}{\epsilon}\right)^{p-1} \int_\Omega |\chi_{E_\epsilon} u - u_{\epsilon,k}| \; dx.$$

Der erste Term der rechten Seite dieser Ungleichung konvergiert für $\epsilon \to 0$ gegen Null wegen Lemma A.16, (ii). Der zweite Term konvergiert für $k \to \infty$ und jedes $\epsilon > 0$ gegen Null.

(ii) Sei jetzt $p = \infty$: Sei $R := \|u\|_{L^\infty}$. da die abgeschlossene Kugel $\overline{B(0;R)}$ kompakt in $\mathbf{K}$ ist, findet man zu jedem $k \in \mathbf{N}$ disjunkte Borel-Mengen $A_j, 1 \leq j \leq n_k$ mit $\operatorname{diam}(A_j) \leq 1/k$. Mit der Wahl $a_j \in A_j$ hat man wegen

$$\|u - \sum_{j=1}^{n_k} \chi_{u^{-1}(A_j)} a_j \|_{L^\infty} \leq \frac{1}{k}$$

die gesuchte Aussage. □

Lemma B.2. *Die stetigen und finiten Funktionen liegen dicht im Raum $L^p(\Omega)$ für $1 \leq p < \infty$.*

Beweis: Durch Nullfortsetzung von $u \in L^p(\Omega)$ kann man sich auf den Fall $S = \mathbf{R}^n$ beschränken. Nach Lemma B.1 läßt sich die so fortgesetzte Funktion u durch Treppenfunktionen mit Werten in $\mathcal{B}$ approximieren. Damit kann man die Diskussion auf den Fall mit $Y = \mathbf{R}$ und $u = \chi_E$ mit $B \in \mathcal{B}$ und $\mu(E) < \infty$ reduzieren.

In diesem Fall ist $u \in L^1(\mathbf{R}^n)$. Nach Definition des Lebesgue-Integrals gibt es Treppenfunktionen v_k, die u in der L^1-Norm approximieren. Dann sind aber auch

$$u_k := \max(0, \min(1, v_k))$$

derartige Treppenfunktionen. Wegen

$$\|u - u_k\|^p \leq \|u - u_k\| \leq \|u - v_k\|$$

ergibt sich $u_k \to u,\ k \to \infty$ in $L^p(\mathbf{R})^n$. Die Funktion v_k hat Werte in der Menge $\mathcal{B}_0$ der endlichen Vereinigungen halboffener, disjunkter Quader.

Somit ist die Diskussion zurückführbar auf den Fall $u = \chi_Q$ mit $Q = [a, b[$ mit $a, b \in \mathbf{R}^n$. Mit der Wahl

$$u_\epsilon(x) := \prod_{i=1}^{n} \max\left(\min(1, \frac{g_i(x)}{\epsilon})\right), \qquad g_i(\xi) := \frac{1}{2}(b_i - a_i) - \left|\xi - \frac{1}{2}(b_i + a_i)\right|$$

ist aber $u_\epsilon \to u, \epsilon \to 0$ in $L^p(\mathbf{R}^n)$. □

Zur Beachtung: Für $p = \infty$ ist die Aussage des Lemmas falsch, denn z.B. kann die Funktion $u(x) \equiv 1$ nicht durch finite Funktionen approximiert werden.

Lemma B.3. *Sei $u \in L^p(\Omega)$ mit $1 \leq p < \infty$. Setzt man u außerhalb von Ω mit Null fort, so sind die Funktionen $u_h(x)$ mit $h > 0$ beliebig oft differenzierbar. Ferner ist $u_h \in L^p(\Omega)$ und es gilt*

$$\|u_h\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)}, \qquad \lim_{h \to 0} \|u - u_h\|_{L^p(\Omega)} = 0. \tag{B.1}$$

In Vorbereitung des Beweises erinnern wir an einige Bezeichnungen und Aussagen aus Abschnitt 7.1: Im $\mathbf{R}^n$ gehört die Funktion

$$\omega(x) = \begin{cases} C \exp\left(-\frac{1}{1-r^2}\right), & |r| < 1 \\ 0 & |r| \geq 1 \end{cases}, \quad r^2 := \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \tag{B.2}$$

zu $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ mit supp $u = \{x \in \mathbf{R}^n : \ |x| \le 1\}$. Ferner sei für $h > 0$ die *Dirac-Folge*

$$\omega_h(x) := \frac{1}{h^n}\omega\left(\frac{x}{h}\right) \tag{B.3}$$

definiert. Dann ist mit $y_j = x_j/h, j = 1, ..., n$

$$\int_{\mathbf{R}^n} \omega_h(x)\ dx = \frac{1}{h^n}\int_{\|x\|\le h} \omega\left(\frac{x}{h}\right)\ dx = \int_{\|y\|\le 1} \omega(y)\ dy = 1. \tag{B.4}$$

Nun gehöre eine gegebene reell- oder komplexwertige Funktion u zu $L^p(\Omega)$ mit $1 \le p < \infty$. Man setzt u außerhalb von Ω mit Null fort. Die so entstehende Funktion wird weiterhin mit u bezeichnet. Das Mittelungsverfahren basiert auf einer Faltung von u mit der Dirac-Folge ω_h.

Die Sobolevsche Mittelungsfunktion u_h ist definiert durch

$$u_h(x) := \int_{\mathbf{R}^n} u(x - hy)\omega(y)\ dy = \int_{\|y\|\le 1} u(x - hy)\omega(y)\ dy \tag{B.5}$$

bzw. nach Koordinatentransformation $z := x - hy$ durch

$$u_h(x) := \int_{\mathbf{R}^n} u(z)\omega\left(\frac{x - z}{h}\right)\frac{dz}{h^n} = \int_{\|z\|\le h} \omega_h(x - z)u(z)\ dz. \tag{B.6}$$

Offenbar tragen zur Bildung von $u_h(x)$ nur die Werte von u mit $\|z - x\| \le h$ bei.

Beweis von Lemma B.3.: (i) Für die mit Null außerhalb des Gebietes Ω fortgesetzte Funktion gilt weiterhin $u \in L^p(\Omega)$. Bei festem h folgt für $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n$ sowie $x' = (x_1+\delta, x_2, ..., x_n)$ mit $0 < \delta < 1$ nach (B.6)

$$\begin{aligned}\frac{u_h(x') - u_h(x)}{\delta} &= \int_{\mathbf{R}^n} \frac{\omega_h(x' - z) - \omega_h(x - z)}{\delta}u(z)\ dz \\ &= \int_{\|x-z\|\le 1+h} \frac{\omega_h(x' - z) - \omega_h(x - z)}{\delta}u(z)\ dz.\end{aligned}$$

Aufgrund der Hölderschen Ungleichung (vgl. Lemma 6.13) ist die Funktion $u(z)$ innerhalb der Kugel $\|x - z\| \le 1 + h$ integrierbar. Man ersetze dabei Ω durch $\|x - z\| < 1 + h$ und $v(x) = 1$. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung ist der Ausdruck $\delta^{-1}(\omega_h(x' - z) - \omega_h(x - z))$ gleichmäßig beschränkt. Ferner gilt

$$\lim_{\delta\to 0} \delta^{-1}(\omega_h(x' - z) - \omega_h(x - z)) = \frac{\partial}{\partial x_1}\omega_h(x - z).$$

Der Satz von Lebesgue (vgl. Satz A.18) zeigt dann, daß $u_h(x)$ nach x_1 differenzierbar ist mit

$$\frac{\partial u_h}{\partial x_1}(x) = \int_{\mathbf{R}^n} \frac{\partial \omega_h(x - z)}{\partial x_1}\ u(z)\ dz.$$

Auf diesem Weg folgt auch die Stetigkeit von $u_h(x)$.
Da $\omega_h(x)$ beliebig oft differenzierbar ist, folgt durch Iteration die Existenz sämtlicher Ableitungen $D^\alpha u_h(x)$, deren Stetigkeit und ihre Darstellbarkeit in der Form

$$D^\alpha u_h(x) = \int_{\mathbf{R}^n} D_x^\alpha \omega_h(x - z)u(z)\ dz.$$

(ii) Für $1 < p < \infty$ folgt aus (B.5) und der Hölderschen Ungleichung (mit $1/p + 1/p' = 1$)

$$\|u_h(x)\|^p \leq \left(\int_{\mathbf{R}^n} \|u(x-hy)\| \omega^{1/p}(y) \omega^{1/p'}(y)\, dy \right)^p \leq \int_{\mathbf{R}^n} \|u(x-hy)\|\, \omega(y)\, dy. \tag{B.7}$$

Dabei wurde die Eigenschaft $(\int_{\mathbf{R}^n} \omega(y)\, dy)^{p/p'} = 1$ benutzt. Die Formel (B.7) bleibt auch für $p = 1$ richtig.
Nach dem Satz von Fubini (vgl. Satz A.21) folgern wir nun

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}^n} \int_{\mathbf{R}^n} \|u(x-hy)\|^p \omega(y)\, dy\, dx &= \int_{\mathbf{R}^n} \omega(y) \left(\int_{\mathbf{R}^n} \|u(x-hy)\|^p\, dx \right) dy \\ &= \int_{\mathbf{R}^n} \omega(y) \|u\|_{L^p}^p\, dy = \|u\|_{L^p}^p. \end{aligned}$$

Mittels Formel (B.7) folgt

$$\|u_h\|_{L^p}^p = \int_\Omega \|u_h(x)\|^p\, dx \leq \int_{\mathbf{R}^n} \|u_h(x)\|^p\, dx \leq \|u\|_{L^p}^p.$$

(iii) Zum Beweis der letzten Behauptung sei zunächst $u(x)$ eine stetige und finite Funktion. Nach Formel (B.5) bzw. (B.6) erhält man

$$\operatorname{supp} u_h \subset (\operatorname{supp} u)_h = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \exists y : \ \|x-y\| \leq h,\ y \in \operatorname{supp} u\}.$$

Wegen der Finitheit von $u(x)$ bezüglich des Gebietes Ω sind dann auch die Funktionen $u_h(x)$ mit $0 < h \leq h_0$ finit, d.h. sie gehören zu $C_0^\infty(\Omega)$.
Die gleichmäßige Stetigkeit der stetigen und finiten Funktion $u(x)$ und die Normierung $\int_{\mathbf{R}^n} \omega(y)\, dy = 1$ ergeben

$$\begin{aligned} \|u_h(x) - u(x)\| &= \left\| \int_{\mathbf{R}^n} [u(x-hy) - u(x)]\, \omega(y)\, dy \right\| \\ &\leq \int_{\mathbf{R}^n} \|u(x-hy) - u(x)\| \omega(y)\, dy \\ &\leq \epsilon \int_{\mathbf{R}^n} \omega(y)\, dy = \epsilon, \end{aligned}$$

sofern nur $0 < h \leq h(\epsilon)$. Damit verschwinden die Funktionen $u_h(x)$ außerhalb einer beschränkten Menge und konvergieren gleichmäßig gegen $u(x)$. Daraus folgt

$$\lim_{h \to 0} \|u_h - u\|_{L^p} = 0.$$

Sei nun u eine beliebige Funktion aus $L^p(\Omega)$. Nach Lemma B.2 findet man eine stetige und finite Funktion $v_\epsilon(x)$ mit $\|v_\epsilon - u\|_{L^p} \leq \epsilon$. Aus dem ersten Teil des Beweises in Schritt (iii) folgt aber

$$\|(v_\epsilon)_h - u_h\|_{L^p} = \|(v_\epsilon - u)_h\|_{L^p} \leq \|v_\epsilon - u\|_{L^p} \leq \epsilon$$

und damit

$$\|u - u_h\|_{L^p} \leq \|u - v_\epsilon\|_{L^p} + \|v_\epsilon - (v_\epsilon)_h\|_{L^p} + \|(v_\epsilon)_h - u_h\|_{L^p} \leq 2\epsilon + \|v_\epsilon - (v_\epsilon)_h\|_{L^p}.$$

Für $h \leq h(\epsilon)$ ist aber $\|v_\epsilon - (v_\epsilon)_h\|_{L^p} \leq \epsilon$. Da $\epsilon > 0$ beliebig gewählt werden kann, folgt hieraus die gesuchte Ungleichung. □