



Georg-August-Universität
Göttingen
Zentrum für Informatik

ISSN 1612-6793
Nummer zai-msc-2012-02

Masterarbeit
im Studiengang „Angewandte Informatik“

Methoden zu Wirbelelementverfahren und Lagrangschen Strömungsfeldanalysen

Jens Künemund

am Institut für
Numerische und Angewandte Mathematik

Bachelor- und Masterarbeiten
des Zentrums Informatik
an der Georg-August-Universität Göttingen
31. März 2012

Georg-August-Universität Göttingen
Zentrum für Informatik

Lotzestraße 16-18
37083 Göttingen
Germany

Tel. +49 (551) 39-1 44 02
Fax +49 (551) 39-1 44 03
E-Mail office@informatik.uni-goettingen.de
WWW www.informatik.uni-goettingen.de

Danksagung

Diese Arbeit entstand aufgrund der besonderen Anregungen von Prof. Dr. Robert Schaback, Prof. Dr. Gert Lube und Dr.-Ing Markus Rütten, wofür ich mich an dieser Stelle bedanken möchte.

Mein besonderer Dank gilt Dr.-Ing Markus Rütten, der mich durch seine Diskussionen, Anregungen und Forderungen dazu gebracht hat, die Grenzen dieser Arbeit immer wieder zu erweitern. Durch die vielen Gespräche mit ihm war es mir möglich, einen Einblick in das interessante Thema der Strömungsmechanik zu bekommen.

Ebenso möchte ich mich bei meinen Freunden Stefan und Birgit Saalfeld bedanken, die durch ihre kritischen Nachfragen und Gespräche erheblich zur Qualität dieser Arbeit beigetragen haben.

Für die mathematische Beratung, nicht nur während der Masterarbeit, sowie für viele anregende Diskussionen bedanke ich mich bei Dr. Markus Lambert.

Meiner Familie, insbesondere meinen Eltern, danke ich für ihre Geduld und moralische Unterstützung, die sie nicht nur während der Entstehung dieser Arbeit, sondern während meines gesamten Studiums aufgebracht haben.

Meiner Freundin Daniela Scholz danke ich für ihr Verständnis und ihre Unterstützung, besonders in der Endphase dieser Arbeit. Ihr Rückhalt hat wesentlich zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen.

Ehrenwörtliche Erklärung

Ich erkläre hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Göttingen, den 31.03.2012

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	VIII
Verzeichnis der Quelltextauszüge	X
Tabellenverzeichnis	XI
Symbolverzeichnis	XII
1 Einleitung	1
2 Theoretische Grundlagen	4
2.1 Vektoranalytische Begriffe	4
2.2 Eulersche und Lagrangesche Betrachtung	6
2.3 Partikeltrajektorie	9
2.4 Kinematische Tensoren	10
2.5 Bilanzgleichungen	14
2.5.1 Kontinuitätsgleichung	14
2.5.2 Impulsgleichung	17
2.6 Anfangswertprobleme	19
2.6.1 Explizites Euler-Verfahren	20
2.6.2 Adams-Bashforth-Verfahren	20
2.7 Eigenwertprobleme	21
2.7.1 Potenzmethode	22
2.7.2 Jacobi-Verfahren	23
3 C++ Numerik Bibliothek	26
3.1 Lesbarkeit gegenüber Performanz	27
3.2 Einführen einer Domain spezifischen Sprache	29
3.3 Matrixoperationen	36
3.4 Vergleich mit der Bibliothek „Eigen“	38
4 Wirbelementverfahren	39
4.1 Herleitung	39
4.2 Definition des Verfahrens	44
4.3 Validierungstestfall	47
4.4 Grenzen des aktuellen Verfahrens	48

5	Lagrangesche Analyseverfahren	51
5.1	Finite Time Lyapunov Exponent	51
5.1.1	Herleitung	52
5.1.2	FTLE mit Satelliten-Partikeln	54
5.1.3	FTLE mit Transportgleichung	59
5.2	Unterteilung der Verformung	60
5.2.1	Schergeschwindigkeit	60
5.2.2	Dehngeschwindigkeit	61
5.2.3	Verformungsgeschwindigkeit	62
5.3	Deformation im lokalen, mitgeführten Koordinatensystem	63
5.4	Verformungsbeschleunigung	66
5.4.1	Frenetsche Formeln	67
5.4.2	Partikeltrajektorie im Frenetschen Dreibein	69
6	Anwendungsfälle	73
6.1	Stationäre Strömungen	74
6.1.1	Interaktion von zwei Punktwirbeln	74
6.1.2	Interaktion von vier Punktwirbeln	77
6.1.3	Interaktion von fünf Punktwirbeln	85
6.1.4	Interaktion von zwölf Punktwirbeln	86
6.2	Instationäre Strömungen	93
6.2.1	Interaktion einer Punktwirbellinie	93
6.2.2	Interaktion eines 3D Punktwirbelkreuzes	106
7	Fazit und Ausblick	115
	Literaturverzeichnis	117

Abbildungsverzeichnis

1	Bewegung eines 2D Linienelementes	11
2	Darstellung eines 3D Volumenelements	13
3	Berechnungsbaum des arithmetischen Mittels	30
4	Verformung eines 2D Fluidelements	42
5	Vergleich der Kerne von Stock ($\sigma^3 = 0,05$) und Sheel ($\sigma^2 = 1,8$)	46
6	Rotation zweier Punktwirbel um ein Wirbelzentrum	47
7	Abweichung vom Wirbelzentrum	48
8	Abstand mehrerer Trajektorien	52
9	Partikelabstand bei einer Sattelpunktsstruktur	54
10	Ausgangsbelegung der Satellitenpartikel beim FTLE	55
11	Mittelwert FTLE-Wert am Beispiel der Kármánschen Wirbelstraße	56
12	FTLE-Wert („vorwärts“) am Beispiel der Kármánschen Wirbelstraße	57
13	FTLE-Analyse („rückwärts“) am Beispiel der Kármánschen Wirbelstraße	58
14	Uneindeutigkeit bei der Trajektorienanalyse	59
15	Schematische Darstellung der Schergeschwindigkeit	60
16	Schematische Darstellung der Dehngeschwindigkeit	61
17	Scherströmung zwischen zwei Platten	63
18	Schematische Darstellung einer Raumkurve mit Schmiegekreis	67
19	Geschwindigkeitsfeld: Interaktion von zwei Punktwirbeln	74
20	Geschwindigkeitsfeld: Interaktion von vier Punktwirbeln	75
21	Geschwindigkeitsfeld: Interaktion von fünf Punktwirbeln	75
22	Wirbelpositionierung: Interaktion von zwölf Punktwirbeln	76
23	Charakteristische Größen: Interaktion von zwei Punktwirbeln	80
24	Charakteristische Größen: Interaktion von vier Punktwirbeln	84

ABBILDUNGSVERZEICHNIS

25	Charakteristische Größen: Interaktion von fünf Punktwirbeln	90
26	Geschwindigkeitsfeld: Interaktion von zwölf Punktwirbeln	92
27	Geschwindigkeitsfeld: Punktwirbellinie $T = 0s$	93
28	Geschwindigkeitsfeld: Punktwirbellinie	94
29	FTLE-Wert und Verformungsrate einer Punktwirbellinie	98
30	Krümmung und Zentripetalbeschleunigung einer Punktwirbellinie . .	101
31	Scherrate und Dehnrate einer Punktwirbellinie	104
32	Geschwindigkeitsfeld: Startkonfiguration eines 3D Wirbelkreuzes . .	105
33	Geschwindigkeitsfeld: 3D Wirbelkreuz $T = 0s$	105
34	Geschwindigkeitsfeld: 3D Wirbelkreuz $T = 0,012s$	106
35	Geschwindigkeitsfeld: 3D Wirbelkreuz	108
36	FTLE-Wert und Verformungsrate eines 3D Punktwirbelkreuzes	111
37	Scherrate und Dehnrate eines 3D Punktwirbelkreuzes	114

Verzeichnis der Quelltextauszüge

1	Arithmetisches Mittel von Vektoren in C	27
2	Arithmetisches Mittel von Vektoren mittels Funktionen	28
3	Arithmetisches Mittel von Vektoren in C++	28
4	Operatoren von Vektoren in C++	29
5	API einer Template Vektorimplementierung	31
6	Vektorspeicherklasse auf Basis eines Arrays	32
7	Erstellen eines Vektors	32
8	Additionsoperatorklasse	33
9	Additionsaufruf mit zwei Vektoren	33
10	Additionsaufruf mit drei Vektoren	34
11	Additionsoperator für die API Klasse	34
12	Divisionsoperatorklasse	35
13	Divisionsoperator für CVector	35
14	Arithmetisches Mittel in Klassenschreibweise	36

Tabellenverzeichnis

1	Bewegung zu dimensionslosen Zeiten in der Eulersche Betrachtung im Vergleich zur Lagrangeschen Betrachtung	7
2	Koeffizienten des Adams-Bashforth-Verfahrens bis zur Ordnung 6 . . .	21
3	Algorithmischer Ablauf des Jacobi-Verfahrens	24
4	Performanz Vergleich mit „Eigen“, Vektoren	38
5	Performanz Vergleich mit „Eigen“, Matrizen	38
6	Algorithmischer Ablauf des Wirbelementverfahrens	47

Symbolverzeichnis

\vec{a}	Beschleunigung
C	Cauchy-Greenscher Verzerrungstensor
D	Verzerrungsgeschwindigkeitstensor
$\ddot{\epsilon}_t$	Dehnbeschleunigung
$\ddot{\gamma}_t$	Scherbeschleunigung
$\ddot{\zeta}$	Verformungsbeschleunigung
Δ	Laplaceoperator
Δ_J	Funktionaldeterminante
$\dot{\epsilon}_b$	Dehngeschwindigkeit in Binormalenrichtung
$\dot{\epsilon}_n$	Dehngeschwindigkeit in Normalenrichtung
$\dot{\epsilon}_t$	Dehngeschwindigkeit in Strömungsrichtung
$\dot{\gamma}$	Schergeschwindigkeit
$\dot{\gamma}_t$	Schergeschwindigkeit in Strömungsrichtung
$\dot{\zeta}$	Verformungsgeschwindigkeit
$\dot{\zeta}_{nb}$	planare Verformungsgeschwindigkeit
F	Absolute Deformationsgradiententensor
κ	Krümmung
λ	Eigenwert
L	Geschwindigkeitsgradiententensor
M	Verzerrungsbeschleunigungstensors
μ	dynamische Viskosität
$\nabla \cdot$	Divergenzoperator
$\nabla \times$	Rotationsoperator
∇	Gradientenoperator
ν	kinematische Viskosität
$\phi(P, t)$	Partikeltrajektorie
$\psi_{t_0}^{t_0+\Delta t}(\vec{X})$	Partikeltrajektorie

SYMBOLVERZEICHNIS

ρ	Dichte
$\sigma_{t_0}^t(P)$	FTLE-Wert
S	Cauchysche Spannungstensor
τ	Torsion
$\vec{t}, \vec{n}, \vec{b}$	Koordinatenachsen des Frenetschen Dreibeins
\vec{u}	Geschwindigkeit
\vec{u}_ω	divergenzfreier Anteil der Geschwindigkeit
\vec{u}_ϕ	rotationsfreier Anteil der Geschwindigkeit
$\vec{\Gamma}$	vektorielle Zirkulation
$\vec{\omega}$	Wirbelstärke
\vec{X}	Position auf einer Partikeltrajektorie
W	Drehgeschwindigkeitstensor
\vec{x}	Ortsvektor im Kartesischen
m	Masse
P	Partikel
t	Zeitpunkt
V	Volumen

1 Einleitung

Bei der Betrachtung heutiger strömungsmechanischer Probleme wird vermehrt auf den Einsatz von Computersimulationen zurückgegriffen. Diese bieten den Vorteil, dass beispielsweise weniger Windkanalexperimente durchgeführt werden müssen, um die Tragflächen eines neuen Flugzeuges auszulegen. Ein weiterer Vorteil dieser als CFD (computational fluid dynamics) bezeichneten Technik liegt darin, dass es beim Experiment nicht immer möglich ist, alle Aspekte des Modellversuchs in entsprechender Genauigkeit zu untersuchen, Skalierungsgrenzen erlauben dies nicht

Somit haben sich in den letzten Jahren verschiedene CFD Verfahren etabliert. Die meisten dieser Verfahren beruhen aktuell auf der „Eulerschen“ Betrachtung, bei der, der von dem Modell umgebene Raum, durch einzelne Teilvolumen diskretisiert wird. Je kleiner diese Teilvolumen erstellt werden, umso genauere Aussagen können über die Strömung getroffen werden. Gleichzeitig bedeuten jedoch mehr Teilvolumen auch mehr Rechenzeit. Aufgrund der heutigen technischen Möglichkeiten können bereits über 100 Millionen Teilvolumen zur Berechnung eines Strömungsproblems verwendet werden.

Damit tritt jedoch ein anderes Problem in den Vordergrund. Sobald zeitlich veränderliche Modelle betrachtet werden sollen, ist es notwendig, diese Diskretisierung kontinuierlich anzupassen. Aufgrund des hohen Aufwandes, den diese Anpassung nach sich zieht, werden für entsprechende Simulationen vermehrt andere Verfahren verwendet. Diese verzichten auf eine vordefinierte Diskretisierung und verwenden miteinander interagierende, bewegte Teilchen um eine Simulation durchzuführen. Auch für diese „Lagrangesche“ Betrachtung gilt: je mehr Teilchen, umso genauer die Strömungssimulation. Allerdings ist der Aufwand für diese Verfahren um einiges höher, da alle Teilchen ständig ihre Position ändern, weshalb sie bisher nicht so intensiv untersucht wurden.

In neuester Zeit befinden sich die Lagrangeschen Verfahren damit in der Situation, dass sie aufgrund der gestiegenen Rechenleistung mehrere Millionen Teilchen simulieren können und zudem ein entsprechendes Anwendungsgebiet haben, jedoch

anschließend zumeist Eulersche Analysen durchgeführt werden. Diese werden den berechneten Daten allerdings nicht gerecht, da beide Betrachtungen Stärken und Schwächen in verschiedenen Bereichen besitzen.

Daher werden in der vorliegenden Arbeit verschiedene Lagrangesche Strömungsfeldanalysen betrachtet. Um diese durchführen zu können, bietet es sich an, ebenfalls ein Lagrangesches Verfahren an sich zu verwenden. Aktuell sind in diesem Bereich besonders die „Smoothed Particle Hydrodynamics“ (kurz SPH) Verfahren (vgl. [GM77]) und die Wirbelementverfahren (vgl. [CK00]) zu nennen. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde entschieden die Wirbelementverfahren zu verwenden. Diese Entscheidung fiel aufgrund der Tatsache, dass grundlegende Punktwirbelinteraktionen bereits seit mehreren Jahren untersucht werden und dadurch sehr gut verstanden sind. So beschreibt Lugt [Lug96] die Bewegung und Interaktion einzelner Punktwirbel, bishin zu Punktwirbellinien. Zudem sind Wirbelverfahren sehr leicht „stufbar“, da eine Reduzierung auf Potentiallöser, Eulerlöser oder Navier-Stokeslöser möglich ist. Damit eignen sich die Wirbelementverfahren für die Untersuchung einzelner charakteristischer Größen, um auf dieser Basis Lagrangesche Strömungsfeldanalysen durchzuführen.

Die Lagrangesche Strömungsfeldanalyse konzentriert sich in den letzten Jahren insbesondere auf die Betrachtung des „Finite Time Lyapunov Exponent“ Wertes, welcher im Rahmen dieser Arbeit dargestellt werden soll (vgl. [TFPG]). Desweiteren werden Möglichkeiten vorgestellt, mit denen es möglich ist, Scherungen und Dehnungen innerhalb der Strömung zu identifizieren, wobei auf die Transformation in ein lokales Koordinatensystem zurückgegriffen wird. Diese Technik ermöglicht es beispielsweise auch die lokale Krümmung der Strömung zu betrachten.

Ziel dieser Arbeit ist es, verschiedene Lagrangesche Strömungsfeldanalysen darzustellen, mit denen eine Auswertung Lagrangescher Simulationen unterstützt wird. Dazu beginnt die Arbeit mit der Darstellung der notwendigen theoretischen Grundlagen. In diesem Kapitel werden die vektoranalytischen Grundbegriffe, die in dieser Arbeit Anwendung finden dargestellt. Zudem wird auf den Unterschied zwischen der Eulerschen und der Lagrangeschen Betrachtung eingegangen. Desweiteren wird die Partikeltrajektorie bzw. Bahnlinie als Kernpunkt der in dieser Arbeit untersuchten Analysen eingeführt. Auf die verwendeten kinematischen Tensoren und Bilanzgleichungen wird ebenso eingegangen wie auf die verwendeten Verfahren für Anfangs- und Eigenwertprobleme.

Um eine effiziente Umsetzung des Wirbelementverfahrens sowie der Lagrangeschen Analysen in algorithmischer Form zu ermöglichen, wird in Kapitel 3 eine objektorien-

tierte numerische Bibliothek basierend auf der Programmiersprache C++ vorgestellt. Ebenso wird ein Vergleich dieser mit einer bereits etablierten Bibliothek („Eigen“) durchgeführt.

In Kapitel 4 erfolgt die Herleitung und die Definition des verwendeten Wirbelementverfahrens. Desweiteren werden die Grenzen des Verfahrens, sowie ein Validierungstestfall vorgestellt.

Die Lagrangeschen Strömungsfeldanalysen werden in Kapitel 5 dargestellt. Untersucht werden dabei hauptsächlich der „Finite Time Lyapunov Exponent“ und die Verformungsgeschwindigkeit, wobei eine Aufteilung der Verformungsgeschwindigkeit in die Bestandteile Scherrate, Dehnrate und planare Verformungsrate statt findet. Zu diesem Zweck wird die Transformation der notwendigen Größen in ein lokales, mitgeführtes Koordinatensystem, dem sogenannten Frenetschen Dreibein, dargestellt.

Die Berechnung der Strömungsfeldanalysen an einigen ausgewählten Beispielen auf Basis der Wirbelementverfahren erfolgt in Kapitel 6. Die Testfälle dieses Kapitels werden in stationäre, sowie instationäre Fälle unterteilt.

Die Arbeit schließt mit der Zusammenfassung, sowie einem Ausblick auf mögliche weiterführende Themenbereiche.

2 Theoretische Grundlagen

In diesem Kapitel sollen kurz einige strömungsmechanische Grundlagen sowie numerische Verfahren und mathematische Notationen beschrieben werden, die in den nachfolgenden Kapiteln Verwendung finden.

2.1 Vektoranalytische Begriffe

Da die Betrachtungen dieser Arbeit im dreidimensionalen Raum stattfinden, sollen in diesem Kapitel die verwendeten Operatoren kurz dargestellt werden. Dabei orientiert sich die verwendete Notation an [BSMM05]. Zur Darstellung wird ein beliebiges Skalarfeld s und ein beliebiges Vektorfeld $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ verwendet.

Zur Vereinfachung wird der Nablaoperator

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (1)$$

als symbolischer Vektor eingeführt. Damit lässt sich der Gradient eines Skalarfeldes als ∇s

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial s}{\partial x_1} \\ \frac{\partial s}{\partial x_2} \\ \frac{\partial s}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} s = \nabla s, \quad (2)$$

der Gradient eines Vektorfeldes als $\nabla \vec{v}$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \nabla \vec{v}, \quad (3)$$

die Divergenz eines Vektorfeldes als $\nabla \cdot \vec{v}$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \nabla \cdot \vec{v} \quad (4)$$

und die Rotation eines Vektorfeldes als $\nabla \times \vec{v}$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \nabla \times \vec{v} \quad (5)$$

darstellen.

Das Skalarprodukt des Nablaoperators mit sich selbst wird verkürzend durch den Laplace-Operator

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla \quad (6)$$

dargestellt. Dieser ist sowohl auf skalaren wie auch auf vektoriellen Funktionen definiert, wobei im vektoriellen eine komponentenweise Anwendung stattfindet. Wird der Laplace-Operator auf eine skalare Größe angewendet, so kann dies durch die Summierung der zweiten partiellen Ableitungen

$$\Delta s = \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} \quad (7)$$

beschrieben werden.

Desweiteren ergeben sich die folgenden Rechenregeln für den Nabla- und Laplace-Operator:

$$\nabla \cdot (\nabla s) = \Delta s \quad (8a)$$

$$\nabla \times (\nabla s) = 0 \quad (8b)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) = 0 \quad (8c)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{v}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{v}) - \Delta \vec{v} \quad (8d)$$

$$\nabla \times (s\vec{v}) = (\nabla s) \times \vec{v} + s(\nabla \times \vec{v}) \quad (8e)$$

2.2 Eulersche und Lagrangesche Betrachtung

In der Strömungsmechanik werden verschiedenste Transportprozesse untersucht. Die Anwendungsgebiete reichen dabei beispielsweise von der Betrachtung von Kies-Schüttkegeln bis hin zur Umströmung ganzer Gebäude oder von Flugzeugen. Dabei gibt es zwei Möglichkeiten diese Prozesse zu beschreiben, zum einen als ortsfester und zum anderen als mitbewegter Beobachter. Handelt es sich um einen ortsfesten Beobachter, so wird dies als „Eulersche Betrachtung“ bezeichnet. Bei einem mitbewegten Beobachter hingegen handelt es sich um eine „Lagrangesche Betrachtung“.

Zur Veranschaulichung dieser beiden Variationen sei auf die Abbildungen in der Tabelle 1 verwiesen. In diesen wird schematisch ein Fluss dargestellt, auf dem sich Blätter mit der Strömung bewegen. Bei einer Eulerschen Herangehensweise wird innerhalb des Flusses ein konstantes Gebiet definiert. In diesem festen Gebiet wird über die Zeit beobachtet, wie viele Blätter sich hindurch bewegen. So befindet sich zum Zeitpunkt $T = 0$ kein Blatt im Beobachtungsbereich. Zum Zeitpunkt $T = 1$ haben sich die Blätter soweit weiterbewegt, dass sich mehrere innerhalb des Beobachtungsbereiches befinden. Wohingegen zum Zeitpunkt $T = 2$ die Blätter soweit weiterbewegt wurden, dass sie das Beobachtungsgebiet nahezu vollständig verlassen haben.

Soll nun der gleiche Fall „Lagrangesch“ betrachtet werden, so wird ebenfalls ein Gebiet definiert, welches sich jedoch zeitlich in der Strömung mitbewegt. So befinden sich zum Zeitpunkt $T = 0$ eine bestimmte Anzahl an Blättern bereits im Gebiet. Da sich die Strömung mit gleichmäßiger Geschwindigkeit bewegt, und die Blätter ebenso wie das Gebiet nur mitbewegt werden, ändert sich in diesem Beispiel die Anzahl der Blätter im Gebiet über die Zeit nicht (vgl. Zeitpunkte $T = 1$ und $T = 2$). An diesem Beispiel wird deutlich, dass, obwohl bei beiden Herangehensweisen der gleiche Sachverhalt beschrieben wird, Unterschiede bestehen. Allerdings ist es wichtig, dass Verfahren, die in jeweils anderen Bezugssystemen formuliert werden, zu den gleichen Ergebnissen führen.

Um dies zu verdeutlichen, werden wiederum die Blätter in der Tabelle 1 herangezogen, wobei nun die zeitliche Änderung der Masse m der Blätter betrachtet wird. Anschaulich bedeutet dies, dass davon ausgegangen wird, dass die Blätter über die Zeit verfaulen und somit eine Reduktion der Masse erfahren. Hierbei interessiert rein die Massenänderung, sodass die weiteren (chemischen) Vorgänge vernachlässigt werden. Zudem wird jedes Blatt der Einfachheit halber als Punktmasse betrachtet.

Als erstes soll der Lagrangesche Fall betrachtet werden, bei dem jedes Blatt als einzelnes Gebiet anzunehmen ist. Da so Gebiet und Blatt identisch sind, ist die

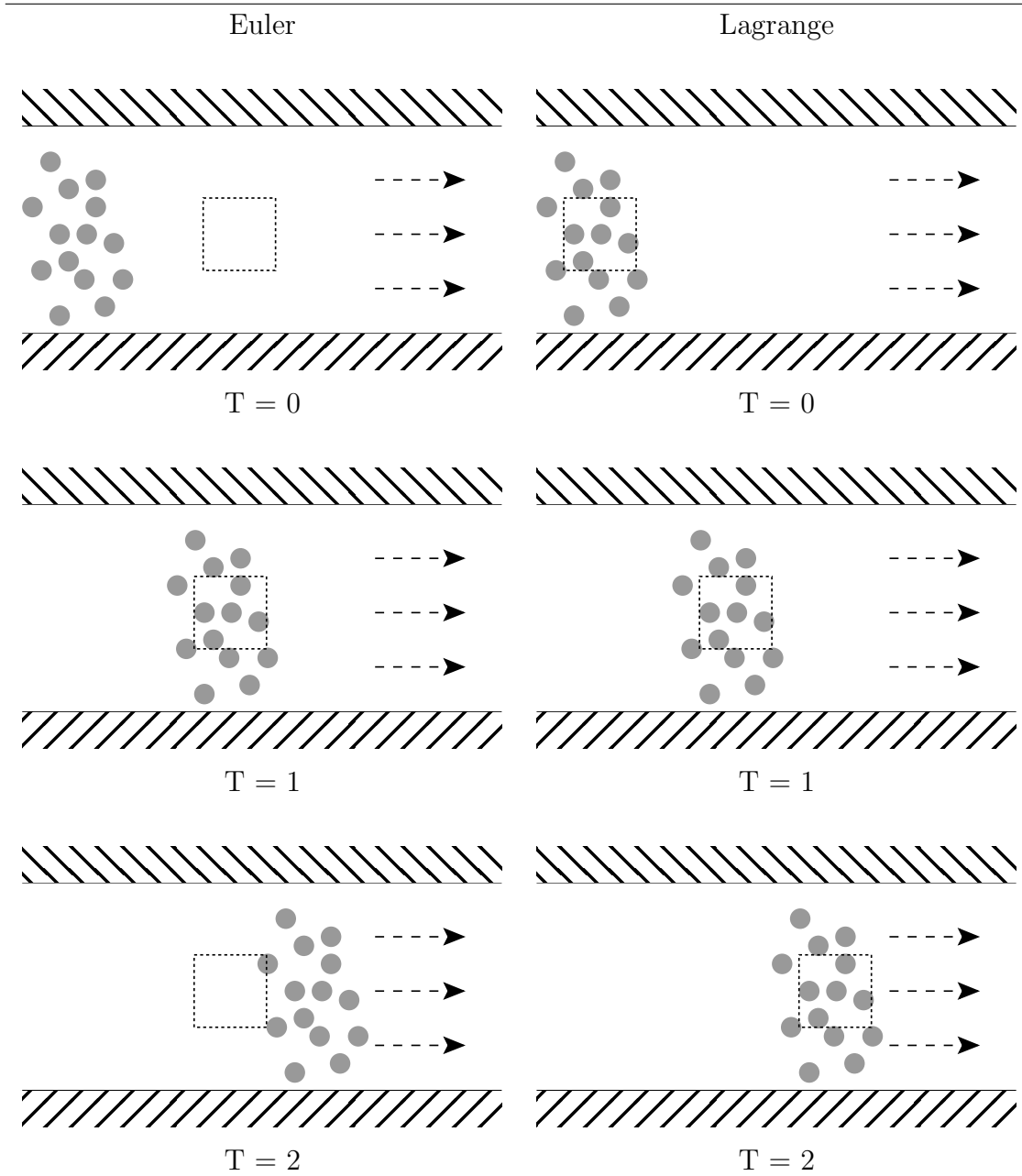


Tabelle 1: Bewegung zu dimensionslosen Zeiten in der Eulersche Betrachtung im Vergleich zur Lagrangeschen Betrachtung

gesamte Masse der Blätter über den betrachteten Zeitraum abgedeckt. Um die Dualität von Betrachtungsgebiet und „Blatt“ zu verdeutlichen, wird im Folgenden der Begriff Partikel verwendet. Jedes Partikel P „transportiert“ bestimmte Transportgrößen, wie in diesem Fall die Masse. Allgemein kann demnach die Masse m als Funktion

$$m = m(P, t) \quad (9)$$

betrachtet werden. Gleiches gilt für jede weitere Lagrangesche Transportgröße.

Um die zeitliche Ableitung der Masse eines Partikels zu bestimmen, wird die substantielle Zeitableitung $\frac{D}{Dt}$ verwendet, wobei die Kettenregel

$$\frac{Dm(P, t)}{Dt} = \frac{\partial m(P, t)}{\partial t} + \frac{\partial m(P, t)}{\partial P} \frac{dP}{dt} \quad (10)$$

genutzt wird. Da das Partikel P ansich über die Zeit nicht verändert wird, sondern nur die mitgeführten Größen, gilt $\frac{dP}{dt} \equiv 0$. Somit vereinfacht sich (10) zu

$$\frac{Dm(P, t)}{Dt} = \frac{\partial m(P, t)}{\partial t}. \quad (11)$$

Damit kann die reine Massenänderung für jedes sich fortbewegende Partikel betrachtet werden.

Demgegenüber steht die Eulersche Betrachtung, bei der das gesamte Strömungsgebiet in einzelne Zellen unterteilt wird. Wichtig ist hierbei das gesamte Gebiet abzudecken, um sicherzustellen, dass jedes „Blatt“ zu jeder Zeit in einer Zelle liegt. Damit beschreibt jede Zelle im Grenzwert einen ortsfesten Punkt \vec{x} . Durch diesen bewegen sich die Blätter bzw. Partikel, sodass für die Masse m die funktionale Abhängigkeit

$$m = m(\vec{x}, t) = m(\phi(P, t), t), \quad (12)$$

unter Berücksichtigung der Partikeltrajektorie ϕ (vgl. Abschnitt 2.3), gilt. Ebenso wird jede weitere Transportgröße in Abhängigkeit der Zeit und der Position definiert.

Ebenso wie die zeitliche Ableitung der Masse im Lagrangeschen Fall, wird auch im Eulerschen Fall die substantielle Zeitableitung $\frac{D}{Dt}$ verwendet. Analog zu Gleichung (10) wird auch an dieser Stelle die Kettenregel verwendet, wobei die entsprechende Darstellung der Masse benutzt wird. Daraus folgt die Gleichung

$$\frac{Dm(\vec{x}, t)}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial m(\vec{x}, t)}{\partial t}}_{\text{lokal}} + \underbrace{\frac{\partial m(\vec{x}, t)}{\partial \vec{x}} \cdot \frac{d\phi(P, t)}{dt}}_{\text{konvektiv}}, \quad (13)$$

woran zu erkennen ist, dass der konvektive Anteil nicht entfällt, sondern zu

$$\frac{\partial m(\vec{x}, t)}{\partial \vec{x}} \cdot \frac{d\phi(P, t)}{dt} = \nabla m(\vec{x}, t) \cdot \vec{u}(\vec{x}, t) \quad (14)$$

umgeformt werden kann. Dementsprechend kann die substantielle Zeitableitung durch

$$\frac{Dm(\vec{x}, t)}{Dt} = \frac{\partial m(\vec{x}, t)}{\partial t} + \nabla m(\vec{x}, t) \cdot \vec{u}(\vec{x}, t) \quad (15)$$

berechnet werden. Daraus folgt, dass die substantielle Zeitableitung in der Eulerschen Betrachtungsweise aus einer lokalen zeitlichen Änderung sowie einer lokalen räumlichen Ableitung am momentan festen Punkt im Raum bestimmt wird.

Welche der beiden Betrachtungsweisen Verwendung findet, hängt von der jeweiligen Lösungsmethode ab. So werden gitterbasierte Verfahren wie Finite-Differenzen, Finite-Volumen oder Finite-Elemente Verfahren naturgemäß in Eulerschen Darstellung beschrieben. Die Lagrangesche Herangehensweise wird hingegen bei gitterfreien Partikelverfahren wie den „Smoothed Particle Hydrodynamics“ (SPH) oder den Wirbelelementverfahren verwendet.

2.3 Partikeltrajektorie

Da in der Lagrangeschen Beschreibung einzelne, örtlich veränderliche Partikel betrachtet werden, ist es möglich eine Funktion anzugeben, die zu einer beliebigen Zeit t den Ort \vec{x} eines beliebigen Partikels $P \in \mathbb{P}$, mit $\mathbb{P} = \{P_i, i = 1, \dots, N\}$, abbildet. Diese Funktion wird als Partikeltrajektorie oder Bahnlinie bezeichnet und durch

$$\vec{x}(t) \mapsto \phi(P, t) \quad (16)$$

definiert. Dabei erfolgt die Angabe des Ortes in einem ortsfesten kartesischen Koordinatensystem, sodass eine absolute Aussage über die Positionen aller Partikel möglich ist. Da nach Definition nur immer genau ein Partikel zur selben Zeit an einem Ort sein kann, ist diese Abbildung bijektiv.

Dementsprechend ist es möglich, eine Abbildungsfunktion zu definieren, die einen Punkt \vec{X} zum Zeitpunkt t_0 auf einen, entlang der Trajektorie verschobenen, Punkt zur Zeit $t_0 + \Delta t$ abbildet. Dazu sei die Menge aller Trajektorie

$$\mathbb{M}_\phi = \{\phi(P_i, t), i = 1, \dots, N\}, \quad (17)$$

sowie die Menge aller Punkte der Trajektorien

$$\mathbb{D} = \{\vec{X} \in \mathbb{R}^3 : \exists 1 \leq i \leq N, t_0 \in [0, T] \vec{X} = \phi(P_i, t_0)\}, \quad (18)$$

gegeben. Damit kann die Abbildungsfunktion

$$\psi_{t_0}^{t_0+\Delta t} : \mathbb{D} \mapsto \mathbb{M}_\phi, \quad (19)$$

für die gilt:

$$\begin{aligned} \vec{X} \mapsto \psi_{t_0}^{t_0+\Delta t}(\vec{X}) &= \phi(P_i, t_0 + \Delta t), \\ \text{mit } \phi(P_i, t_0) &= \vec{X} \end{aligned} \quad (20)$$

definiert werden.

Alle in dieser Arbeit dargestellten Analyseverfahren beruhen direkt oder indirekt auf der Auswertung von Eigenschaften der Partikeltrajektorie (vgl. Kapitel 5). Dabei wird jedoch nicht nur die einzelne Trajektorie betrachtet, sondern auch das Verhalten verschiedener Trajektorien zueinander. Allerdings liegt während der Simulation die Bahnlinie nur bis zum aktuellen Zeitpunkt, und auch dann nur in diskreter Form, vor, sodass vornehmlich lokale Eigenschaften untersucht werden.

2.4 Kinematische Tensoren

In den später folgenden Kapiteln werden verschiedene grundlegende Tensoren aus der Strömungsmechanik verwendet, die sogenannten kinematischen Tensoren. Diese sollen im Folgenden kurz dargestellt werden.

Der Geschwindigkeitsgradiententensor \mathbf{L} stellt die partielle erste räumliche Ableitung des Geschwindigkeitsfeldes

$$\mathbf{L} = \nabla \vec{u}, \quad (21)$$

ausgewertet an einer diskreten Position, dar. Somit drückt \mathbf{L} die räumliche Änderung des Geschwindigkeitsfeldes im Eulerschen Bezugssystem aus, woraus die fundamentale Beziehung für materielle Linienelemente $d\vec{r}$

$$\frac{\mathbf{D}(d\vec{r})}{Dt} = \mathbf{L} \cdot d\vec{r}, \quad (22)$$

nämlich der Zusammenhang zur substantiellen Zeitableitung folgt.

Dieser Zusammenhang lässt sich über die Abbildung 2.11(a) herleiten, bei der an den

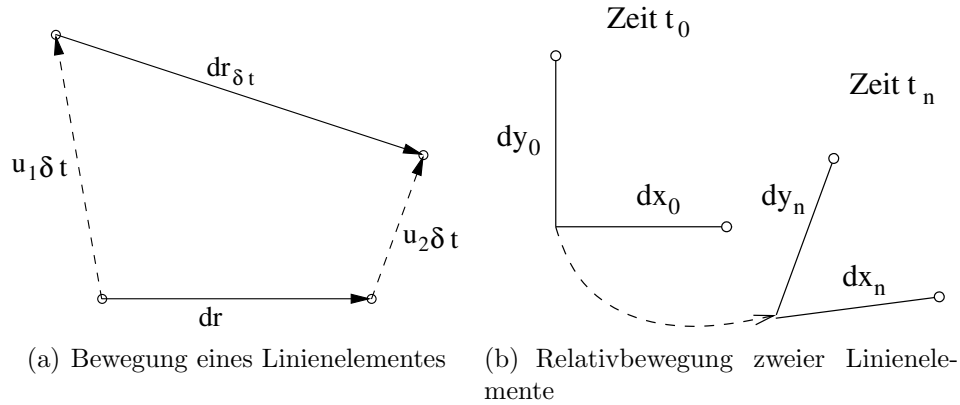


Abb. 1: Bewegung eines 2D Linienelementes

Eckpunkten des Linienelementes die jeweiligen Geschwindigkeiten \vec{u}_1 und \vec{u}_2 wirken. Damit wird das Linienelement innerhalb der Zeitspanne δt (unter Vernachlässigung Terme höherer Ordnung) verschoben, wodurch $d\vec{r}_{\delta t}$ entsteht. Dies kann durch die Gleichung

$$d\vec{r}_{\delta t} = d\vec{r} + (\vec{u}_2 - \vec{u}_1)\delta t + O(t^2) \quad (23)$$

beschrieben werden. Wird davon ausgegangen, dass die beiden Eckpunkte infinitesimal benachbarte Punkte sind, gilt für die Differenz der Geschwindigkeitskomponenten

$$\begin{aligned} (\vec{u}_2 - \vec{u}_1)_1 &= \frac{\partial u_1}{\partial x} dx + \frac{\partial u_1}{\partial y} dy + \frac{\partial u_1}{\partial z} dz, \\ (\vec{u}_2 - \vec{u}_1)_2 &= \frac{\partial u_2}{\partial x} dx + \frac{\partial u_2}{\partial y} dy + \frac{\partial u_2}{\partial z} dz, \\ (\vec{u}_2 - \vec{u}_1)_3 &= \frac{\partial u_3}{\partial x} dx + \frac{\partial u_3}{\partial y} dy + \frac{\partial u_3}{\partial z} dz. \end{aligned} \quad (24)$$

Dies kann verkürzend, unter Verwendung von \mathbf{L} in der Form

$$\vec{u}_2 - \vec{u}_1 = \mathbf{L} \cdot d\vec{r}, \quad (25)$$

geschrieben werden. Nach Einsetzen dieser Beziehung in die Gleichung (23) ergibt sich

$$d\vec{r}_{\delta t} - d\vec{r} = (\mathbf{L} \cdot d\vec{r})\delta t + O(t^2). \quad (26)$$

Dabei gibt die linke Seite dieser Gleichung an, wie sich für einen mit dem Punkt „1“ mitbewegten Beobachter der Abstandsvektor zum benachbarten Punkt „2“ innerhalb der Zeitspanne δt ändert. Wird die gesamte Gleichung durch δt dividiert und anschließend der Grenzübergang $\delta t \rightarrow 0$ durchgeführt, so ergibt sich die fundamen-

tale Beziehung für infinitesimale Linienelemente (22).

Desweiteren lässt sich \mathbf{L} additiv in einen symmetrischen Anteil \mathbf{D} (mit $\mathbf{D}^T = \mathbf{D}$) und einen schiefsymmetrischen Anteil \mathbf{W} (mit $\mathbf{W}^T = -\mathbf{W}$) durch

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} + \mathbf{W} \quad (27)$$

zerlegen. Daraus folgt die Berechnung von \mathbf{D} und \mathbf{W} in der Form

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) \\ \mathbf{W} &= \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T). \end{aligned} \quad (28)$$

Der Anteil \mathbf{D} wird als Verzerrungsgeschwindigkeitstensor bezeichnet und in der Matrixdarstellung durch

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \quad (29)$$

definiert. Dementsprechend wird \mathbf{W} durch

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) & 0 & -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) & 0 \end{pmatrix} \quad (30)$$

definiert und als Drehgeschwindigkeitstensor bezeichnet. Somit beschreibt \mathbf{D} die Dehnungen und \mathbf{W} die Rotation eines Fluidelementes.

Der nächste zu betrachtende Tensor ist der absolute bzw. materielle Deformationsgradiententensor \mathbf{F} , der die Abbildung eines Fluidelementes, ausgehend vom Zeitpunkt t_0 zu einem beliebigen Zeitpunkt t darstellt. Somit gilt für ein beliebiges Linienelement $d\vec{r}$ (vgl. Abbildung 1)

$$d\vec{r} = \mathbf{F} \cdot d\vec{r}_0 \quad (31)$$

wobei \mathbf{F} als „Historie“ des Geschwindigkeitsgradiententensors \mathbf{L} interpretiert werden kann. Anhand dessen ist es nachvollziehbar, dass der Zusammenhang mit dem Geschwindigkeitsfeld durch

$$\frac{D\mathbf{F}}{Dt} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{F} \quad (32)$$

gegeben ist. Durch diese Beziehung ergibt sich die Kettenregel

$$\mathbf{F}(t_0, t_2) = \mathbf{F}(t_0, t_1) \cdot \mathbf{F}(t_1, t_2) \text{ mit } t_0 \leq t_1 \leq t_2. \quad (33)$$

Auf Basis der Betrachtung eines einzelnen Linienelementes $d\vec{r}$ kann auch die Verformung eines Volumenelementes dV (vgl. Abbildung 2) anhand des absoluten Deformationsgradiententensors dargestellt werden. Dazu wird dV_0 und dV aus einzelnen

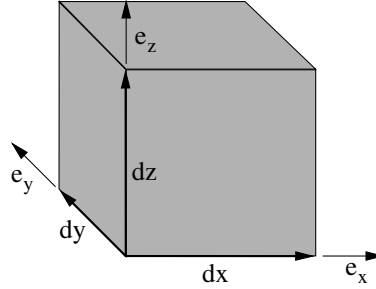


Abb. 2: Darstellung eines 3D Volumenelements

Linienelementen durch

$$dV_0 = \|d\vec{x}_0\| \cdot \|d\vec{y}_0\| \cdot \|d\vec{z}_0\| = d\vec{x}_0 \cdot (d\vec{y}_0 \times d\vec{z}_0) \quad (34a)$$

$$dV = \|d\vec{x}\| \cdot \|d\vec{y}\| \cdot \|d\vec{z}\| = d\vec{x} \cdot (d\vec{y} \times d\vec{z}) \quad (34b)$$

bestimmt. Diese Linienelemente lassen sich durch

$$\begin{aligned} d\vec{x} &= \|d\vec{x}\| \cdot \vec{e}_x \\ d\vec{y} &= \|d\vec{y}\| \cdot \vec{e}_y \\ d\vec{z} &= \|d\vec{z}\| \cdot \vec{e}_z \end{aligned} \quad (35)$$

in ihren Betrags- und Vektoranteil zerlegen. Durch Einsetzen der Gleichung (31) in (34b) ergibt sich

$$dV = (\mathbf{F} \cdot d\vec{x}_0) \cdot ((\mathbf{F} \cdot d\vec{y}_0) \times (\mathbf{F} \cdot d\vec{z}_0)) = [(\mathbf{F} \cdot \vec{e}_x) \cdot ((\mathbf{F} \cdot \vec{e}_y) \times (\mathbf{F} \cdot \vec{e}_z))]dV_0, \quad (36)$$

wobei an dieser Stelle bereits der Zusammenhang zwischen dV_0 und dV ersichtlich wird. Wird das Skalar- und Vektorprodukt vollständig ausgeführt, so kann dieser Term zu

$$(\mathbf{F} \cdot \vec{e}_x) \cdot ((\mathbf{F} \cdot \vec{e}_y) \times (\mathbf{F} \cdot \vec{e}_z)) = \det \mathbf{F} = \Delta_J \quad (37)$$

umgeschrieben werden, wobei Δ_J als Funktionaldeterminante bezeichnet wird. Somit

ergibt sich analog zu (31) die Beziehung

$$dV = \Delta_J dV_0 \quad (38)$$

für Volumenelemente.

Bleiben die Orientierung und die Größe aller Fluidelemente erhalten, so reduziert sich \mathbf{F} auf den Einheitstensor. Falls \mathbf{F} verschieden vom Einheitstensor ist, so bedeutet dies jedoch nicht, dass tatsächlich Verzerrungen auftreten. Als Beispiel dafür sei an dieser Stelle die Starrkörperrotation um eine Achse angeführt. Dabei treten keine Verzerrungen innerhalb des Fluidelementes auf, jedoch ist \mathbf{F} verschieden vom Einheitstensor. Deshalb wurde der rechte Cauchy-Green Verzerrungstensor \mathbf{C} in der Form

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \quad (39)$$

definiert. Dieser beschreibt die Verzerrung von Fluidelementen ohne deren Drehung (Starrkörperrotation) zu beachten (vgl. [Böh00] Seite 48ff).

2.5 Bilanzgleichungen

Ebenso wie andere natur- und ingenieurwissenschaftliche Disziplinen beruht auch die Kontinuumsmechanik der Fluide auf Grundaxiomen, die auf Basis verschiedener Erfahrungstatsachen festgelegt wurden. Einige dieser Axiome können als Mengbilanzen aufgefasst werden, wobei sie grundsätzlich immer die gleiche Form: „Änderung des Vorrats im Inneren = Produktion im Inneren + Fluss über die Systemgrenzen“ besitzen. Damit bringt die Bilanz zum Ausdruck, dass sich der Vorrat einer speicherfähigen Größe in einem Gebiet, über den Austausch mit der Umgebung und durch Umwandlung im Innern ändert.

2.5.1 Kontinuitätsgleichung

Ein Beispiel einer solchen Bilanzgleichung ist die Massenerhaltung, die im Folgenden hergeleitet werden soll (vgl. [Spu93]). Dazu wird ein Volumenkörper M definiert, der sich aus einzelnen Massenelementen dm zusammensetzt, wobei die Summe aller Massenelemente die Gesamtmasse m bildet. In Integraldarstellung kann

dieser Zusammenhang über die Gleichung

$$m = \int_M dm \quad (40)$$

dargestellt werden. Indem ausgenutzt wird, dass die Masse m als Produkt der Dichte ρ und des Volumens V dargestellt werden kann, lässt sich die Gleichung (40) zu

$$m = \int_M dm = \iiint_{V(t)} \rho(\vec{x}, t) dV \quad (41)$$

umformen. Dies ist möglich, da die Dichte im Rahmen der Kontinuumstheorie eine stetige Funktion des Ortes darstellt. Die gleiche Betrachtung kann für jede stetige Funktion φ durchgeführt werden, wobei sich die allgemeine Form

$$\int_M \varphi dm = \iiint_{V(t)} \varphi \rho dV \quad (42)$$

ergibt.

Für die Herleitung der Bilanzgleichungen ist besonders die zeitliche Änderung dieser Integraldarstellung von Interesse. Eine besonders einfache Ableitung lässt sich aus dem Axiom der Massenerhaltung schließen, demzufolge die Masse eines abgegrenzten Systems zeitlich konstant ist, woraus

$$\frac{Dm}{Dt} = 0 \quad (43)$$

folgt. Dieser Zusammenhang gilt nach Gleichung (40) nicht nur für die Gesamtmasse, sondern auch für die einzelnen Massenelemente, sodass direkt

$$\frac{D(dm)}{Dt} = 0 \quad (44)$$

folgt.

Wird die zeitliche Ableitung von (42) betrachtet, so kann die Differentiation nach der Leibnizschen Regel innerhalb des Integrals ausgeführt werden, da für die Funktion φ explizit die Eigenschaft der Stetigkeit gefordert wird. Somit folgt die Gleichung

$$\frac{D}{Dt} \int_M \varphi dm = \int_M \frac{D}{Dt} (\varphi dm) = \int_M \frac{D\varphi}{Dt} dm = \iiint_{V(t)} \frac{D\varphi}{Dt} \rho dV, \quad (45)$$

nach Anwendung der Kettenregel und unter Verwendung der Massenerhaltung (44).

Allerdings beruht die Gleichung (45) explizit auf dem Erhaltungssatz der Masse. Diese Darstellung kann durch eine Gleichung ersetzt werden, in welcher die Dichte nicht auftritt. Dazu wird wiederum die zeitliche Änderung einer volumenbezogenen Fluideigenschaft φ betrachtet:

$$\frac{D}{Dt} \iiint_{V(t)} \varphi dV = \frac{D}{Dt} \int_M \varphi \theta dm = \int_M \frac{D}{Dt} (\varphi \theta) dm. \quad (46)$$

Dabei muss $\theta = \frac{1}{\rho}$ gelten, was als spezifisches Volumen bezeichnet wird. Nach Anwendung der Kettenregel und durch Ersetzen von

$$\frac{D\theta}{Dt} dm = \frac{D\frac{1}{\rho}}{Dt} dm = \frac{D(dV)}{Dt} \quad (47)$$

lässt sich die Gleichung (46) zu

$$\frac{D}{Dt} \iiint_{V(t)} \varphi dV = \iiint_{V(t)} \frac{D\varphi}{Dt} dV + \iiint_{V(t)} \varphi \frac{D(dV)}{Dt} \quad (48)$$

umformen. Unter Verwendung der Gleichung (38) lässt sich die Gleichung (48) auf ein Ausgangsvolumen dV_0 zurückführen, wobei die materielle Zeitableitung der Funktionaldeterminante

$$\frac{D(dV)}{Dt} = \frac{D(\Delta_J dV_0)}{Dt} = \frac{D(\Delta_J)}{Dt} dV_0 \quad (49)$$

zu beachten ist. Durch Einsetzen und Zusammenfassen ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \iiint_{V(t)} \varphi dV &= \iiint_{V_0} \frac{D\varphi}{Dt} \Delta_J dV_0 + \iiint_{V_0} \varphi \frac{D(\Delta_J dV_0)}{Dt} \\ &= \iiint_{V_0} \left(\frac{D\varphi}{Dt} \Delta_J + \varphi \frac{D(\Delta_J)}{Dt} \right) dV_0. \end{aligned} \quad (50)$$

Da die Zeitableitung der Funktionaldeterminante analog zu (32) direkt in der Form

$$\frac{D(\Delta_J)}{Dt} = (\nabla \cdot \vec{u}) \Delta_J \quad (51)$$

angegeben werden kann, ist es möglich für die Gleichung (50) eine Rücktransformation

für ein beliebiges dV durchzuführen, wodurch sich

$$\frac{D}{Dt} \iiint_{V(t)} \varphi dV = \iiint_{V(t)} \left(\frac{D\varphi}{Dt} + \varphi \nabla \cdot \vec{u} \right) dV \quad (52)$$

ergibt.

Durch die Ersetzung $\varphi = \rho$ kann aus der allgemeine Bilanzgleichung (52) die Erhaltungsgleichung in integraler Form

$$\frac{D}{Dt} \iiint_{V(t)} \rho dV = \iiint_{V(t)} \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{u} \right) dV = 0 \quad (53)$$

angegeben werden. Da die Integration für einen beliebigen Integrationsbereich definiert ist, kann daraus geschlossen werden, dass der Integrand selbst verschwindet. Daraus folgt die Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0. \quad (54)$$

Diese Gleichung stellt die lokale bzw. differentielle Form des Erhaltungssatzes der Masse dar und wird auch als Kontinuitätsgleichung bezeichnet.

Bei Fluiden, die keine Änderung der Dichte zulassen (inkompressible Strömungen), entfällt dieser Term ($\frac{D\rho}{Dt} = 0$) in der Kontinuitätsgleichung, wodurch direkt

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (55)$$

für diese Art der Strömungen folgt. Für eine geometrische Deutung dieser Aussage sei auf Kapitel 4 verwiesen.

2.5.2 Impulsgleichung

Eine weitere Bilanzgleichung, welche im Folgenden betrachtet werden soll, ist die Impulserhaltung. Diese Erhaltungsgleichung wird innerhalb dieser Arbeit für die Herleitung des Wirbelementverfahrens benötigt, weshalb sie an dieser Stelle hergeleitet werden soll. Wie im Abschnitt 2.5.1 dargestellt, interessiert für die Erhaltungsgleichungen besonders die zeitliche Ableitung der jeweiligen Größen.

Dazu sei auch im Weiteren das Massenelement dm sowie die zugehörige Volumendarstellung

$$dm = \rho dV \quad (56)$$

definiert. Desweiteren wird ausgenutzt, dass die totale zeitliche Änderung des Impulses, als Summe aller, auf ein Massenelement dm wirkender Kräfte $d\vec{f}$ dargestellt werden können. Die auf dm wirkenden Kräfte lassen sich über das zweite Newtonsche Gesetz

$$d\vec{f} = dm \vec{a} = dm \frac{D\vec{u}}{Dt} \quad (57)$$

beschreiben. Nach Einsetzen von (56) und Umstellen ergibt sich daraus die Gleichung

$$\frac{d\vec{f}}{dV} = \rho \frac{D\vec{u}}{Dt}. \quad (58)$$

Für die weitere Betrachtung wird die Kraft $d\vec{f}$ durch die massenspezifische Kraft

$$\vec{f} = \frac{d\vec{f}}{dm} \quad (59)$$

ersetzt, wodurch sich die Gleichung (58) zu

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{f}}{dV} = \vec{f} \frac{dm}{dV} = \rho \vec{f} = \rho \frac{D\vec{u}}{Dt}, \\ \vec{f} = \frac{D\vec{u}}{Dt} \end{aligned} \quad (60)$$

vereinfacht.

Die Kraft \vec{f} kann in die drei Einzelkräfte additiv zerlegt werden. Diese Kräfte sind:

- die äußeren Kräfte \vec{f}_a , wie z.B. die Gravitation oder der Elektromagnetismus;
- die spezifische Druckkraft \vec{f}_p , die auf die Oberfläche des Fluidelementes drückt;
- die inneren Kräfte \vec{f}_i , wie z.B. innere Reibung oder Wärmeleitung.

Als erstes sei auf die Druckkraft verwiesen, welche durch die Gleichung

$$-\oint_{A(t)} p \cdot \vec{n} dA = - \int_{V(t)} \nabla p dV, \quad (61)$$

dargestellt werden kann. Dabei ist $A(t)$ die gesamte Oberfläche des betrachteten Fluidelementes, p der wirkende Druck auf die Oberfläche und \vec{n} die Normalenrichtung. Nach dem Satz von Gauß kann diese Oberflächenformulierung in die Volumendarstellung überführt werden. Somit ist die spezifische Kraft durch

$$\vec{f}_p = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (62)$$

gegeben.

Werden die weiteren Kräfte ignoriert, sodass \vec{f} ausschließlich aus der Druckkraft besteht, so ergibt sich die inkompressible Eulersche Gleichung

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p, \quad (63)$$

welche eine der Grundgleichungen der Strömungsmechanik darstellt.

Desweiteren sollen die inneren Kräfte \vec{f}_i betrachtet werden. Diese lassen sich über den allgemeinen Spannungstensor \mathbf{S} , den sogenannten Cauchyschen Spannungstensor, zusammenfassen, sodass sie, unter Beachtung des Satzes von Gauß, durch die Gleichung

$$\oint_{A(t)} \mathbf{S} \cdot \vec{n} \, dA = \int_{V(t)} \nabla \cdot \mathbf{S} \, dV \quad (64)$$

beschrieben werden. Analog zur Druckkraft folgt somit direkt für die spezifische innere Kraft:

$$\vec{f}_i = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{S}. \quad (65)$$

Nach einsetzen der Kräfte in die Gleichung (60) ergibt sich die Impulserhaltung zu

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{S}. \quad (66)$$

2.6 Anfangswertprobleme

Innerhalb der vorliegenden Arbeit sind verschiedene Anfangswertprobleme der Form

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= f(t, y(t)), \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned} \quad (67)$$

enthalten. Um diese zu lösen, werden zwei unterschiedliche Verfahren innerhalb dieser Arbeit verwendet, zum einen ein explizites Euler-Verfahren als klassisches Einschrittverfahren und zum anderen ein Adams-Bashforth-Verfahren als Mehrschrittverfahren.

Im Folgenden wird zur Vereinfachung die Schreibweise

$$\begin{aligned} y_i &= y(t_i) \\ f_i &= f(t_i, y(t_i)) \\ 0 \leq t_0 &\leq t_1 \leq \dots \leq t_n \end{aligned} \tag{68}$$

verwendet.

2.6.1 Explizites Euler-Verfahren

Beim expliziten Euler-Verfahren handelt es sich um das einfachste Einschrittverfahren zur numerischen Lösung von Anfangswertproblemen. Dabei wird nur der aktuelle Funktionswert und die aktuelle zeitliche Ableitung in der Form

$$y_{i+1} = y_i + \Delta t f_i \tag{69}$$

verwendet. Erstmals wurde es 1768 von Leonhard Euler eingeführt. Das Verfahren kann zum einen geometrisch, über den Anstieg der Funktion, und zum anderen über die Taylorentwicklung (vgl. [BSMM05] Seite 931) hergeleitet werden. Dabei fällt auf, dass die Näherung y_{i+1} einen Konsistenzfehler von $O((\Delta t)^2)$ hat. Die Konsistenz- und Konvergenzordnung des Verfahrens können mit 1 angegeben werden. Damit ist es vornehmlich dazu geeignet, einen Überblick über den ungefähren Verlauf der Lösungskurve zu erhalten. Soll die Lösung genauer bestimmt werden, bieten sich Verfahren höherer Ordnung an.

2.6.2 Adams-Bashforth-Verfahren

Beim Verfahren von Adams-Bashforth handelt es sich um ein Mehrschrittverfahren, d.h., dass anders als beim expliziten Euler-Verfahren nicht nur der aktuelle Funktionswert zur Berechnung herangezogen wird, sondern auch vorhergehende. Damit kann für ein Mehrschrittverfahren der Ordnung m die Gleichung

$$y_{i+1} = y_i + \Delta t \sum_{j=0}^{m-1} [\beta_{(m,i-j)} f_{(i-j)}] \tag{70}$$

als Verfahrensvorschrift angegeben werden. Die Koeffizienten β definieren unterschiedliche Mehrschrittverfahren und ergeben sich aus deren Herleitungen. So kann

das Verfahren von Adams-Bashfort aus der Integraldarstellung

$$y_{i+1} = y_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f_i dt \quad (71)$$

von Anfangswertaufgaben durch Interpolation dargestellt werden. Dabei wird nach [BSMM05] der Integrand durch das Interpolationspolynom von Lagrange L_j ersetzt, wodurch sich

$$y_{(i+1)} = y_i + \sum_{j=0}^{m-1} \left[\int_{t_0}^{t_{i+1}} L_j(t) dt \right] f_{(i-j)} = y_i + \Delta t \sum_{j=0}^{m-1} [\beta_{(m,i-j)} f_{(i-j)}] \quad (72)$$

ergibt. Hieraus kann nun durch Umstellen eine Verfahrensvorschrift für die Koeffizienten

$$\beta_{(m,i)} = \int_0^1 \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{m-1} \left[\frac{s+j}{-i+j} \right] ds \quad (73)$$

hergeleitet werden.

Bedingt dadurch, dass je höher die Ordnung des Verfahrens ist, immer mehr Zeitschritte gespeichert werden müssen, ist es wichtig eine Balance zwischen Genauigkeit und Speicheraufwand zu finden. In der vorliegenden Arbeit werden deshalb ausschließlich Adams-Bashforth Verfahren bis zur Ordnung 6 verwendet. Die Koeffizienten für diese Ordnungen sind in Tabelle 2 explizit dargestellt. Der Berechnungsaufwand bei höheren Ordnungen ist nahezu vernachlässigbar, da nur bereits berechnete Werte verwendet werden, weshalb nur eine einfache Addition pro weiterer Ordnung hinzu kommt.

Ordnung	$\beta_{(m,0)}$	$\beta_{(m,1)}$	$\beta_{(m,2)}$	$\beta_{(m,3)}$	$\beta_{(m,4)}$	$\beta_{(m,5)}$
1	1					
2	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$				
3	$\frac{23}{12}$	$-\frac{16}{12}$	$\frac{5}{12}$			
4	$\frac{55}{24}$	$-\frac{59}{24}$	$\frac{37}{24}$	$-\frac{9}{24}$		
5	$\frac{1901}{720}$	$-\frac{2774}{720}$	$\frac{2616}{720}$	$-\frac{1274}{720}$	$\frac{251}{720}$	
6	$\frac{4277}{1440}$	$-\frac{7923}{1440}$	$\frac{9982}{1440}$	$-\frac{7298}{1440}$	$\frac{2877}{1440}$	$-\frac{475}{1440}$

Tabelle 2: Koeffizienten des Adams-Bashforth-Verfahrens bis zur Ordnung 6

Da Mehrschrittverfahren nicht nur den aktuellen Zeitschritt benötigen, ist es wichtig, genügend Startwerte (entsprechend der Ordnung) zu kennen. Diese sind entweder

vorgegeben oder werden in der Regel durch ein Einschrittverfahren berechnet.

2.7 Eigenwertprobleme

Ein weiterer Bereich, der innerhalb verwendeten Verfahren Anwendung findet, sind die Eigenwertprobleme. Diese werden in der vorliegenden Arbeit bei der FTLE-Analyse (vgl. Abschnitt 5.1) eines Strömungsfeldes verwendet. Hierbei ergeben sich einige Vereinfachungen, da für die zu betrachtende Matrix \mathbf{A} ausschließlich $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ und $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$ gilt.

Zudem ist nur der betragsgrößte Eigenwert λ_1 (mit $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$) von Interesse.

2.7.1 Potenzmethode

Bei der Potenzmethode handelt es sich um ein iteratives Verfahren, bei dem der betragsgrößte Eigenwert und der zugehörige Eigenvektor berechnet werden. Nachdem diese berechnet wurden, kann das Verfahren neu gestartet werden, um so den nächstgrößeren Eigenwert zu bestimmen. Dies ist für die aktuelle Anwendung jedoch nicht notwendig, sodass nur ein Berechnungszyklus betrachtet werden soll. Die Potenzmethode stammt vom österreichischen Mathematiker Richard von Mises (1883 - 1953), der diese 1929 in der Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik (ZAMM) veröffentlichte, weshalb sie auch als „von-Mises-Iteration“ bezeichnet wird.

Der eigentliche Algorithmus wird durch

$$\begin{aligned} \vec{y}_0 &\in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \mathbf{A}\vec{y}_0 \neq 0, \quad i > 1 \\ \vec{x}_i &= \frac{\vec{y}_i}{\|\vec{y}_i\|_2} \\ \vec{y}_i &= \mathbf{A}\vec{x}_{(i-1)} \\ \lambda^i &= \vec{x}_{(i-1)}^T \vec{y}_i \end{aligned} \tag{74}$$

beschrieben. Dabei wird die Berechnung iterativ wiederholt, bis eine entsprechende Abbruchbedingung erfüllt ist. Eine Variante für eine solche Bedingung ist beispielsweise

$$|\lambda_i - \lambda_{(i-1)}| < \epsilon. \tag{75}$$

Hierbei ist λ_1 der zu berechnende betragsgrößte Eigenwert, \vec{y} ein beliebig gewählter Startvektor und \mathbf{A} die zu untersuchende Matrix. Der Vektor \vec{x} konvergiert dann gegen den zu λ gehörenden Eigenvektor.

Die Konvergenzgeschwindigkeit und Stabilität hängen bei diesem Verfahren besonders von der Unterscheidbarkeit der einzelnen Eigenwerte ab. So kann unter der Annahme, dass ein Eigenwert die anderen betragsmäßig dominiert, d.h. es gilt

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|, \quad (76)$$

festgestellt werden, dass die Eigenwertnäherung linear mit dem Konvergenzfaktor

$$\frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|} \quad (77)$$

konvergiert.

2.7.2 Jacobi-Verfahren

Das Jacobi-Verfahren ist ein iteratives Verfahren zum Bestimmen aller Eigenwerte und Eigenvektoren, welches 1846 von Carl Gustav Jacob Jacobi (1804 - 1851) eingeführt wurde. Es basiert auf der Idee, dass eine symmetrische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$), durch die Transformation mit einer Transformationsmatrix \mathbf{T} , in eine Diagonalmatrix \mathbf{B}

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} \quad (78)$$

überführt werden kann.

Dabei enthält die Diagonale von \mathbf{B} die zu \mathbf{A} gehörenden Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ und \mathbf{T} spaltenweise die zugehörigen Eigenvektoren $\vec{e}_{\lambda_1}, \vec{e}_{\lambda_2}, \dots, \vec{e}_{\lambda_n}$. Somit besteht die Aufgabe des Jacobi-Verfahrens darin, die entsprechenden Transformationsmatrizen zu bestimmen.

Dazu wird ausgenutzt, dass die Transformationsmatrix \mathbf{T} als Matrixprodukt einzelner Rotationsmatrizen \mathbf{T}_k

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_k \cdot \mathbf{T}_{k-1} \dots \mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{T}_0 \quad (79)$$

dargestellt werden kann. Jede Rotationsmatrix wird dabei so konstruiert, dass sie die Nichtdiagonaleinträge a_{pq} und a_{qp} der Matrix A zu Null transformiert, was eine

1.	betragsgrößtes Element a_{pq} bestimmen
2.	$\alpha = \frac{a_{qq} - a_{pp}}{2a_{pq}}$ $\beta = \frac{\text{sign}(\alpha)}{ \alpha + \sqrt{1 + \alpha^2}}$ $c = \frac{1}{\sqrt{1 + \beta^2}}$ $s = c\beta$
3.	\mathbf{T}_k erzeugen
4.	$\mathbf{A}_{k+1} = \mathbf{T}_k^T \cdot \mathbf{A}_k \cdot \mathbf{T}_k$
5.	ab 1. wiederholen solange (83) nicht erfüllt

Tabelle 3: Algorithmischer Ablauf des Jacobi-Verfahrens

Da dieses Verfahren relativ aufwendig ist, wird das Jacobi-Verfahren vornehmlich für relativ kleine Matrizen ($n \approx 10$) verwendet.

Wie bereits dargestellt, werden in der vorliegenden Arbeit nur Eigenwerte für 3×3 Matrizen berechnet werden, wodurch das Jacobi-Verfahren durchaus einsetzbar ist.

3 C++ Numerik Bibliothek

Die vorliegende Arbeit basiert auf der Simulation von Transportproblemen, welche durch ein Wirbelelementverfahren (vgl. Kapitel 4) beschrieben werden, und den darauf aufbauenden Analyseverfahren (vgl. Kapitel 5). Diese wiederum basieren auf verschiedenen numerischen Verfahren, wie Anfangswert- (vgl. Abschnitt 2.6) und Eigenwertlösern (vgl. Abschnitt 2.7). Werden auch diese Verfahren im Detail betrachtet, so fällt auf, dass sie ausschließlich aus grundlegenden Vektor- und Matrixoperationen bestehen. Somit ist es essenziell, eben diese Operationen möglichst effizient in Quelltext zu überführen, um an dieser Stelle möglichst geringe Performanzverluste zu erreichen. Aufgrund der Komplexität der darauf aufbauenden Verfahren und im Hinblick auf Erweiterungen, ist es jedoch ebenso wichtig, dass diese Operationen auch möglichst „gut lesbar“ sind. Als „gut lesbar“ wird hierbei besonders die Ähnlichkeit zur mathematischen Formulierung verstanden.

Eben mit diesen Anforderungen beschäftigen sich Programmierbibliotheken für lineare Algebra, weshalb versucht wurde, eine ebensolche für die vorliegende Arbeit zu verwenden. Dabei fiel die Wahl auf die etablierte Bibliothek: „Eigen“ [url]. Allerdings musste festgestellt werden, dass diese (ebenso wie vergleichbare Bibliotheken) die gegebenen Anforderungen nicht vollständig erfüllt. Daher wurde entschieden, eine eigene „leichtgewichtige“ numerische Bibliothek zu entwerfen.

Im Vordergrund dieser numerischen Bibliothek stehen die Vektor- und Matrixrepräsentation sowie die entsprechenden grundlegenden Operationen. Auf diesen „bauen“ dann komplexere Verfahren (wie z.B. Eigenwertlöser) auf, welche wiederum für einen größeren Zusammenhang (z.B. bestimmen von charakteristischen Strömungsgrößen, vgl. Kapitel 5) verwendet werden. Daher wurde entschieden, einen zweischichtigen Ansatz zu verfolgen, wobei das Grundkonzept der untersten Schicht (Vektor- und Matrixoperationen) im Folgenden kurz dargestellt werden soll. Abschließend soll diese dargestellte Schicht mit dem entsprechenden Pendant der „Eigen“ Bibliothek verglichen werden.

Aufgrund der Komplexität dieses Themas werden im Folgenden Grundkenntnisse in

```
1 double a[3];
2 double b[3];
3 double c[3];
4
5 int i;
6 for(i = 0; i < 3; i++)
7 {
8     a[i] = (b[i] + c[i]) / 2;
9 }
```

Quelltextauszug 1: Arithmetisches Mittel von Vektoren in C

der objektorientierten Programmiersprache C++ vorausgesetzt. Sollten diese bisher nicht bestehen, so sei auf das Buch von Bjarne Stroustrup [SAL10] verwiesen.

3.1 Lesbarkeit gegenüber Performanz

Besonders wichtig bei der Entwicklung waren zwei gleichwertige Anforderungen. Zum einen sollen sich mathematische und algorithmische Formulierungen stark ähneln, um so etwaige Programmierfehler zu vermeiden. Zum anderen soll die möglichst beste Performanz (im Rahmen einer Hochsprache) erreicht werden. Um diese Anforderungen zu verdeutlichen, sei auf die Berechnung des arithmetischen Mittels im \mathbb{R}^3 verwiesen. In diesem Abschnitt soll dargestellt werden, dass es für jede dieser Anforderungen eine entsprechende bevorzugte Implementierung gibt.

Als Ausgangsformulierung dient dabei die folgende mathematische Formulierung:

$$\begin{aligned} a, b, c &\in \mathbb{R}^3, \\ a &= \frac{b + c}{2}, \end{aligned} \tag{84}$$

welche im nächsten Schritt algorithmisch formuliert werden soll. Hierbei ist die Darstellung als einfaches Array und eine entsprechende Duplizierung bzw. Schleife die einfachste Möglichkeit (siehe Quelltextauszug 1). Zudem sind diese Darstellungen (im Rahmen einer Hochsprache) die effizientesten. Allerdings leidet bereits bei einem solch einfachen Beispiel die Lesbarkeit. Bei Betrachtung dieser Schleifenschreibweise für ein Vektor Matrix Produkt wird deutlich, dass an dieser Stelle eine andere Lösung wünschenswert ist. Ein weiterer negativer Aspekt, der in dem Quelltextauszug 1 auffällt, ist der zusätzliche Code, der durch die verwendete Schleife entsteht, was zu ungewünschten Codeverdopplungen führt. Beispielsweise soll das arithmetische Mittel für n verschiedene Variablen berechnet werden, was in dieser Schreibweise

```
1 double a [3];  
2 double b [3];  
3 double c [3];  
4  
5 a = vecDivScalar (vecAddVec (b, c), 2);
```

Quelltextauszug 2: Arithmetisches Mittel von Vektoren mittels Funktionen

```
1 CVector3d a;  
2 CVector3d b;  
3 CVector3d c;  
4  
5 a = (b + c) / 2;
```

Quelltextauszug 3: Arithmetisches Mittel von Vektoren in C++

dazu führt, dass die entsprechende Schleife n mal verwendet werden muss.

Um diese negativen Aspekte an der Implementierung zu verringern, liegt es nahe, die Berechnung des arithmetischen Mittels in eine Funktion auszulagern. Es geht an dieser Stelle jedoch nicht darum, nur das arithmetische Mittel zu bestimmen (in diesem Falle wäre diese Möglichkeit eine Option), sondern eine Bibliothek für grundlegende Matrix- und Vektoroperationen zur Verfügung zu stellen. Somit bedeutet ein Auslagern in einzelne Funktionen, dass äußerst viele Funktionen vordefiniert werden müssten. Beispiele hierfür sind die Vektoraddition, die Vektorsubtraktion und das Skalarprodukt. Allerdings können auch so nur die grundlegenden Funktionen implementiert werden, was dazu führt, dass bei komplexeren Berechnungen wiederum die Lesbarkeit leidet. Zur Verdeutlichung sei auf den Quelltextauszug 2 verwiesen.

Daher ist eine Formulierung des arithmetischen Mittels wie in Quelltextauszug 3 dargestellt zu bevorzugen, da diese besonders der mathematischen Formulierung ähnelt.

Um eine solche Schreibweise innerhalb der Programmierung zu erreichen, werden Matrizen und Vektoren nicht mehr als Felder, sondern als eigenständige Datentypen bzw. Klassen dargestellt. Der Quelltextauszug 3 deutet dies mit der Vektorklasse `CVector3d` an. Dabei übernimmt die Klasse gleichzeitig zwei Aufgaben, zum einen die einzelnen Komponenten des Vektors zu speichern und zum anderen die Operatoren zur Verfügung zu stellen. Für das Beispiel des arithmetischen Mittels bedeutet dies, dass die Operatoren „+“ und „/“ zu definieren bzw. zu überladen sind. An eben dieser Stelle liegt jedoch die besondere Schwierigkeit, die beiden Anforderungen (Lesbarkeit und Performanz) gleichzeitig zu erfüllen.

```
1
2 CVector3d operator+(const Vector3d &vec) const
3 {
4     return CVector3d(x + vec.x , y + vec.y , z + vec.z);
5 }
6 CVector3d operator/(const double &value) const
7 {
8     return CVector3d(x / value , y / value , z / value);
9 }
```

Quelltextauszug 4: Operatoren von Vektoren in C++

Falls die Operatoren etwa auf ähnliche Art, wie in Quelltextauszug 4 beschrieben wird, definiert werden, so werden zur Laufzeit zwei zusätzliche temporäre Objekte erzeugt und zerstört. Dies führt, verglichen mit der Implementierung aus Quelltextauszug 1, zu einer erheblich langsameren Berechnung, jedoch zu einer besseren Lesbarkeit. Somit kann an dieser Stelle für jede Anforderung eine entsprechende Implementierung angegeben werden. Es ist nun notwendig, eine Implementierung zu finden, welche diese beiden Punkte miteinander vereint.

3.2 Einführen einer Domain spezifischen Sprache

Im Folgenden soll die Einführung einer Domain spezifischen Sprache innerhalb der Programmiersprache C++ auf Basis der Template Metaprogrammierung dargestellt werden. Diese ermöglicht es, eine Matrix-Vektor Implementierung durchzuführen, welche die Vorzüge der, in Abschnitt 3.1 dargestellten, Varianten vereint.

Bei einer domänenspezifischen Sprache handelt es sich ganz allgemein um eine formale Sprache, die für ein bestimmtes Problemfeld entworfen und implementiert wird. Hierbei soll die Sprache so konstruiert werden, dass sie von Domänenspezialisten ohne zusätzliches Wissen verwendbar ist. Da es sich bei der hier dargestellten Domäne um die Numerik handelt, deckt sich diese Aussage mit der Vorderung der Lesbarkeit, wie sie in 3.1 definiert wurde.

Bei der Metaprogrammierung handelt es sich prinzipiell um die „Programmierung der Programmierung“. Dies bedeutet, dass Quelltext entwickelt wird, der zur Kompilierzeit den eigentlichen ausführbaren Quelltext selbstständig erzeugt. In der Programmiersprache C++ ist der einfachste Mechanismus dieses umzusetzen die Definition von Makros. Weitaus mächtiger ist die Metaprogrammierung auf Basis von Templates (vgl. [AG04, VJ02, Ale01]). Beispielsweise berechnete das erste Template Metaprogramm die ersten 100 Primzahlen und gab diese zur Kompilierzeit aus, eine

weitere Auswirkung auf die Laufzeitausführung fand jedoch nicht statt. Weitaus häufiger wird die Template Metaprogrammierung heute vornehmlich dazu eingesetzt, verschiedene Design-Konzepte zu unterstützen bzw. zu ermöglichen, was sie für die Definition von domänenspezifische Sprachen interessant macht.

Aufgrund des weiten Anwendungsgebietes der Template Metaprogrammierung wird diese konzeptuell in verschiedene Techniken aufgeteilt. Für die vorliegende Arbeit wurden vornehmlich die Expression Templates (vgl. [AG04, VJ02]) verwendet. Dieses Konzept beruht darauf, dass Berechnungsaufrufe (beispielsweise 3) zur Kompilierzeit in „Berechnungsbäume“ übertragen werden (siehe Abbildung 3).

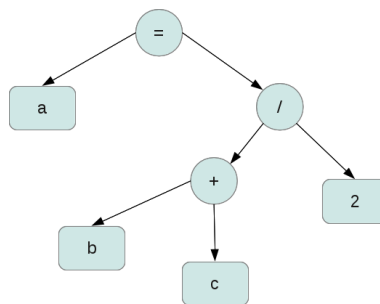


Abb. 3: Berechnungsbaum des arithmetischen Mittels

Anhand dieses Baumes kann dann zur Laufzeit die Auswertung des Ausdrucks ohne zusätzliche temporäre Objekte erfolgen. Um einen Aufbau des Baumes zur Kompilierzeit zu ermöglichen, kann dieser nicht aus klassischen Instanzen bestehen, sondern wird aus speziell definierten template Klassen erzeugt. Somit kann jedes Blatt des Baumes aus einer eigenen Klasse bestehen. Um ein Auswerten des Baumes als Gesamtheit zu ermöglichen, ist es notwendig, eine Hüllklasse zu definieren. Diese kann als API (aplikation programming interface) angesehen werden und kapselt die gemeinsame Funktionalität aller Blätter. Ein Beispiel einer solchen Klasse ist im Quelltextausschnitt 5 dargestellt, wobei zur Fokussierung auf das Wesentliche eine Beschränkung der Vektoren auf den \mathbb{R}^3 durchgeführt wurde. Dies dient jedoch nur der Veranschaulichung und kann auf verschiedenste Zahlenräume erweitert werden.

Bei der Betrachtung der API fallen besonders zwei Dinge auf. Zum einen werden nicht die beiden (für das arithmetische Mittel) benötigten Operatoren Multiplikation und Division definiert und zum anderen besitzt die Klasse keine x, y und z Membervariablen. Dieses ist auch für eine solche API nicht notwendig, da diese durch den definierten Templateparameter in den Vektor eingeht. Der einfachste Fall ist hierbei die Darstellung eines Vektors, der ausschließlich seine drei Raumkoordinaten speichern kann. Um dies zu erreichen wird, wie in Quelltextauszug 6 zu sehen, eine weitere Klasse erstellt, die dann das Speichern der Koordinaten übernimmt. Dazu wird die

```
1 template<typename t_representation>
2 class CVector
3 {
4     public :
5         CVector();
6         ~CVector();
7
8         template<typename t_rep1 >
9         CVector& operator=(CVector<t_rep1> const& a)
10        {
11            for(size_t i = 0; i < 3; i++)
12            {
13                this->m_representation[i] = a[i];
14            }
15            return *this;
16        }
17
18        double &operator[(size_t idx)
19        {
20            return m_representation[idx];
21        }
22
23        t_representation &rep()
24        {
25            return m_representation;
26        }
27
28        private :
29            t_representation m_representation;
30    };
```

Quelltextauszug 5: API einer Template Vektorimplementierung


```
1 class CStorage
2 {
3     public :
4         CStorage ();
5         ~CStorage ();
6
7         double &operator [] ( size_t idx )
8         {
9             return m_value [ idx ];
10        }
11
12        private :
13            double m_value [ 3 ];
14    };
```

Quelltextauszug 6: Vektorspeicherklasse auf Basis eines Arrays

```
1 CVector<CStorage> vec ;
```

Quelltextauszug 7: Erstellen eines Vektors

Klasse zur Datenspeicherung als Templateparameter der CVector Klasse übergeben. Hierbei ist zu beachten, dass die übergebene Klasse die erwartete Schnittstelle zum Zugriff auf die Datenelemente ermöglicht. Dies geschieht im Quelltextauszug 6 allein über den Indexoperator, weshalb alle Klassen die dem CVector auf diese Art und Weise übergeben werden den Indexoperator überladen müssen. Da die CStorage Klasse, wie sie in 6 definiert ist, diese Schnittstelle erfüllt, kann eine Instance, eines rein speichernden Vektors wie in Auszug 7 dargestellt, erzeugt werden.

Dieser erstellte Vektor ist nur geeignet, um Werte aus dem \mathbb{R}^3 zu speichern und noch nicht in der Lage das arithmetische Mittel zu berechnen. Allerdings ist ein wichtiger Punkt an dieser Stelle bereits erkennbar, nämlich das Verlagern von Funktionalität bzw. Verantwortlichkeit einer Klasse in die Templateparameter. Dadurch ist es beispielsweise möglich, eine andere Speicherklasse zu erstellen, die nicht auf einem Array sondern auf einer Liste oder anderen komplexeren Datentypen beruht. Interessant ist dies insbesondere bei der Implementierung einer Matrix, da hierdurch verschiedene Matrixtypen (beispielsweise: vollbesetzt, dünnbesetzt, diagonal) mit der gleichen API dargestellt werden können.

Mehrnoch kann diese Repräsentationsdarstellung auch für andere Dinge verwendet werden. Etwa in dem eine Operationsklasse ähnlich der in Quelltextauszug 8 gezeigten Klasse definiert wird. Diese Klasse soll ebenfalls als Templateparameter an die API-Klasse übergeben werden, sodass auch diese Klasse den Indexoperator überlädt. Bei der Nutzung des Operators erfolgt jedoch nicht der Zugriff auf

```
1 template < typename t_operand1, typename t_operand2 >
2 class COperatorAdd
3 {
4     private :
5         t_operand1 const & m_operand1;
6         t_operand2 const & m_operand2;
7
8     public :
9
10        COperatorAdd(t_operand1 const &a, t_operand2 const &b)
11        : m_operand1(a), m_operand2(b)
12        {
13        }
14
15        inline const double operator [] (size_t idx) const
16        {
17            return m_operand1[idx] + m_operand2[idx];
18        }
19    };
```

Quelltextauszug 8: Additionsoperatorklasse

```
1 CVector<CStorage> vec1;
2 CVector<CStorage> vec2;
3
4 COperatorAdd<CStorage, CStorage>
5     addition(vec1.rep(), vec2.rep());
6
7 double x = addition[0];
8 double y = addition[1];
9 double z = addition[2];
```

Quelltextauszug 9: Additionsaufruf mit zwei Vektoren

ein zuvor gespeichertes Element, sondern es wird eine komponentenweise Addition durchgeführt. Die dafür verwendeten Operanden werden wiederum per Templateparameter definiert. Um eine möglichst breite Wiederverwendung zu ermöglichen, ist die einzige Forderung an diese Templateparameter, dass auch sie den Indexoperator implementiert haben. Dadurch ist es möglich, alle bisher definierten Klassen als Eingabe der COperatorAdd-Klasse zu verwenden. Handelt es sich also beispielsweise, wie in Quelltextauszug 9 dargestellt, bei den beiden übergebenen Templateparametern der COperatorAdd Klasse um Vektoren, so wird eine klassische Vektoraddition durchgeführt. Bezugnehmend auf den, in Abbildung 3 dargestellten, Berechnungsbaum, stellen die übergebenen Vektoren die Blätter und die Klasse COperatorAdd einen Knoten des Baumes dar. Womit ein eigener Teilbaum erzeugt wird, der wiederum als Blatt für einen übergeordneten Baum verwendet werden kann.

Als Beispiel sei auf den Quelltextauszug 10 verwiesen. Nach Überladen des Ad-

```
1 CVector<CStorage> vec1;  
2 CVector<CStorage> vec2;  
3 CVector<CStorage> vec3;  
4  
5 COperatorAdd<CStorage, CStorage>  
6     tmp_addition(vec1.rep(), vec2.rep());  
7  
8 COperatorAdd<CStorage, COperatorAdd<CStorage, CStorage> >  
9     addition(vec3.rep(), tmp_addition);  
10  
11 double x = addition[0];  
12 double y = addition[1];  
13 double z = addition[2];
```

Quelltextauszug 10: Additionsaufruf mit drei Vektoren

```
1  
2 template<typename t_rep1, typename t_rep2>  
3 CVector<COperatorAdd<t_rep1, t_rep2> >  
4     operator+ (CVector<t_rep1> const& a, CVector<t_rep2> const& b)  
5     {  
6         return CVector<COperatorAdd<t_rep1, t_rep2> >  
7             (COperatorAdd<t_rep1, t_rep2>(a.rep(), b.rep()));  
8     }
```

Quelltextauszug 11: Additionsoperator für die API Klasse

ditionsoperators für die API-Klasse, wie in Quelltextauszug 11 dargestellt, kann aufbauend auf 8 die Addition durchgeführt werden. Dabei sei auf die besondere Bedeutung des in Quelltextauszug 5 dargestellten Kopierkonstruktors verwiesen, da dieser für jede Komponente den Indexoperator aufruft und dadurch die Addition anstößt. Um die Berechnung des arithmetischen Mittels zu komplettieren, fehlt an dieser Stelle noch die Division durch eine skalar (double) wertige Größe. Dies geschieht auf ähnliche Weise wie die Implementierung der vektoriiellen Addition.

So muss zum einen eine Operationsklasse für Division (siehe Quelltextauszug 12) erstellt werden, und zum anderen ist der Divisionsoperator (siehe Quelltextauszug 13) für die API-Klasse zu überladen. Mit dieser Erweiterung ist es nun möglich, das arithmetische Mittel wie in 3 dargestellt zu formulieren. Um deutlicher zu verstehen was genau bei der Kompilierung geschieht, ist es wichtig, den Übersetzungsbaum aus Abbildung 3 zu betrachten. Dort ist jeder Kreis eine Operation und jedes abgerundete Rechteck ein Wert. Eine Operation setzt sich immer aus zwei Operatoren zusammen, wobei als Operatoren Werte aber auch Operationen möglich sind. Die erste Operation, die ausgewertet wird, ist die Operation die als Kinder zwei Werte besitzt. Dies ist im aktuellen Fall die Addition, weshalb der Kompiler

```
1 template < typename t_operand1 >
2 class COperatorDiv
3 {
4     private :
5         t_operand1 const & m_operand1;
6         double const & m_operand2;
7
8     public :
9
10        COperatorDiv(t_operand1 const &a, double const &b)
11        : m_operand1(a), m_operand2(b)
12        {
13        }
14
15        inline const double operator [] (size_t idx) const
16        {
17            return m_operand1[idx] / m_operand2;
18        }
19    };
```

Quelltextauszug 12: Divisionsoperatorklasse

```
1
2 template<typename t_rep1 >
3 CVector<COperatorDiv<t_rep1> >
4     operator/ (CVector<t_rep1> const& a, double const& b)
5     {
6         return CVector<COperatorDiv<t_rep1> >
7             (COperatorDiv<t_rep1>(a.rep(), b));
8     }
```

Quelltextauszug 13: Divisionsoperator für CVector

```
1 CVector<COperatorDiv<COperatorAdd<CStorage, CStorage>, double>>
```

Quelltextauszug 14: Arithmetisches Mittel in Klassenschreibweise

den Additionsoperator aus Quelltextauszug 8 aufruft. Somit wird eine Instance der CVector-Klasse geschaffen, die als Repräsentation kein Array mehr speichert, sondern den Additionsoperator als Eigenschaft besitzt. Im nächsten Schritt wird dieser Teilbaum als ausgewertet und damit als Wert angesehen (dies ist aber nur rein virtuell, eine Berechnung hat zu diesem Zeitpunkt noch nicht stattgefunden), weshalb im nächsten Schritt der Divisionsoperator ausgewertet wird. Dieser bekommt zum einen die 2 als skalare Größe und zum anderen die Instance aus der Addition als Parameter übergeben. Somit ergibt sich die in Quelltextauszug 14 dargestellte kompilergenerierte Klasse für das arithmetische Mittel. Da beim Aufruf des Zuweisungsoperators der Indexoperator dieser Klasse aufgerufen wird, erfolgt an dieser Stelle die Auswertung des gesamten Ausdruckes am Stück.

Damit konnte der erste Teil der gestellten Anforderungen (die Lesbarkeit) erfüllt werden. Allerdings ist noch zu klären, warum dieser Ansatz schneller ist als der aus Quelltextauszug 4. Der Vorteil liegt in der hohen Optimierbarkeit des Codes durch den Compiler, so werden die einzelnen Operationen bereits zur Kompilezeit zu einer automatisch generierten Klasse zusammengefasst. Das wichtige hierbei ist aber, dass die einzelnen Klassen keinen weiteren Speicher benötigen. Sie werden ausschließlich aus konstanten Referenzen aufgebaut, was ein temporäres Erstellen und Löschen überflüssig macht, da beim Kompilieren die bekannten Referenzen benutzt werden können.

Allerdings ist die beobachtete Performanz niedriger als bei einer reinen C-Implementierung (vgl. Auszug 1), was an dem konstanten Overhead der Klassenstruktur liegt und damit, unter Berücksichtigung der Lesbarkeit, unvermeidlich ist.

3.3 Matrixoperationen

Da bisher rein die Vektoroperationen betrachtet wurden, soll im Folgenden kurz auf die Besonderheiten bei den Matrixoperationen eingegangen werden. Hierbei sei besonders auf [VJ02] Seite 340 verwiesen, da an dieser Stelle von Vandevorde und Josuttis dargelegt wird, dass eine einfache Überführung der „Expression Templates“ auf Vektor-Matrix-Operationen nicht möglich ist. Als Beispiel wird die

Vektor-Matrix Multiplikation

$$\vec{v} = \mathbf{A} \cdot \vec{v} \quad (85)$$

angeführt. Wird diese wie bisher beschrieben entworfen, d.h. \vec{v} wird komponentenweise ausgewertet, so wird ein falsches Ergebnis erzeugt, da die Komponenten nicht unabhängig voneinander berechnet werden können.

Die einfachste Form, dieses Problem zu lösen, besteht in der generellen Einführung von temporären Objekten, sodass die Gleichung (85) zur Kompilierzeit direkt in

$$\begin{aligned} \vec{t} &= \mathbf{A} \cdot \vec{v} \\ \vec{v} &= \vec{t} \end{aligned} \quad (86)$$

überführt wird.

Allerdings sollte gerade das Einführen von temporären Variablen aus Gründen der Laufzeitoptimierung vermieden werden. Daher ist es ungünstig, diese für jede Gleichung anzuwenden, zumal es bei Matrix-Vektor-Produkten der Form

$$\vec{a} = \mathbf{A} \cdot \vec{v} \quad (87)$$

unnötig ist. Daher wurde entschieden, dass zusätzliche temporäre Variablen nur eingeführt werden, sobald ein Problem ähnlich dem aus Gleichung (85) detektiert wird. Dabei ist es nicht ausreichend zu überprüfen, ob sich eine Variable links und rechts der Zuweisung befindet, da dies unnötig viele Fälle detektiert. Als Beispiel sei an dieser Stelle auf

$$\vec{v} = \mathbf{A} \cdot \vec{a} + \vec{v} \quad (88)$$

verwiesen. Desweiteren kann die entgeltige Entscheidung über das Erzeugen eines temporären Objektes nicht mehr rein zur Kompilierzeit getroffen werden, sondern es müssen zusätzliche Laufzeitauswertungen stattfinden. Dies ist notwendig, da eine Aussage, ob zwei Variablen identisch sind, aufgrund von Referenzen, nicht möglich ist.

Deshalb findet eine zweistufige Überprüfung statt. Im ersten Schritt wird zur Kompilierzeit kontrolliert, ob eine Situation vorliegt, die das Einfügen eines temporären Objektes nötig macht. Je nachdem wie diese Überprüfung ausfällt, wird der Zuweisungsoperator unterschiedlich erstellt. Dieser beinhaltet dann nötigenfalls den zweiten Schritt, nämlich die Laufzeitkontrolle.

Auf diese Weise konnten alle notwendigen Matrix- und Vektoroperation, die für diese Arbeit nötig waren, implementiert werden.

3.4 Vergleich mit der Bibliothek „Eigen“

Abschließend soll die zuvor vorgestellte numerische Bibliothek mit der etablierten C++ Bibliothek „Eigen“ verglichen werden.

Bei der „Eigen“ Bibliothek ([url]) handelt es sich nach Angabe der Entwickler um eine: „C++ template Bibliothek für lineare Algebra, die aus den Bestandteilen Matrizen, Vektoren, numerische Löser und verwandte Algorithmen besteht“. Ebenso wie die in dieser Arbeit vorgestellte Bibliothek legt „Eigen“ besonderen Wert auf Lesbarkeit und Performanz. Dies wird jedoch um einen weiteren Punkt ergänzt, indem versucht wird, ein möglichst breites Spektrum an Funktionalität bereitzustellen. Dies führt jedoch zu Performanzverlusten, weshalb entschieden wurde, auf „Eigen“ zu verzichten und mit der Eigenentwicklung weiterzuarbeiten. Diese Entscheidung wurde vornehmlich aufgrund eines direkten Vergleiches mit „Eigen“, indem verschiedene Berechnungen verglichen wurden, getroffen. Die Ergebnisse dieses Vergleiches werden in den Tabellen 4 und 5 dargestellt. Die angegebenen Zeiten sollen

Testfall	„Eigen“	Eigenentwicklung
$\vec{a} + \vec{b}$	7 s	3 s
$\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$	8 s	3 s
$(\vec{a} + \vec{b})/2$	7 s	3 s

Tabelle 4: Performanz Vergleich mit „Eigen“, Vektoren

Testfall	„Eigen“	Eigenentwicklung
$\mathbf{A} + \mathbf{B}$	6 s	4 s
$\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}$	8 s	5 s
$\mathbf{A} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{D}) \cdot \mathbf{A}$	58 s	23 s

Tabelle 5: Performanz Vergleich mit „Eigen“, Matrizen

dabei ausschließlich einen qualitativen Vergleich liefern. Um statistisch belastbare Daten zu erhalten, wurden bei der vektoriellen ($\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$) $2 \cdot 10^7$ und bei der Matrixbetrachtung ($\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$) $1 \cdot 10^6$ Elemente verwendet. Dabei wurden absichtlich nur Vektoren aus dem \mathbb{R}^3 und Matrizen aus dem $\mathbb{R}^{3 \times 3}$ verglichen, da diese den Hauptanteil für die Berechnungen innerhalb der vorliegenden Arbeit darstellen. Bei größere Vektoren oder Matrizen ist der Unterschied zwischen den beiden Implementierungen bei weitem nicht mehr so groß, da dann der Zusatzaufwand im Vergleich zu der Gesamtgröße der Vektoren bzw. Matrizen geringer ist.

4 Wirbelementverfahren

Um in der vorliegenden Arbeit Lagrangesche Strömungsanalysen durchführen zu können, werden die zu analysierenden Daten auf Basis eines Wirbelementverfahrens erzeugt. Dabei werden reine Freiströmungen betrachtet, wobei bewusst auf eine Randimplementierung verzichtet wurde.

Im Folgenden werden die strömungsmechanischen Größen hergeleitet, auf denen dieses Verfahren beruht und anschließend das eigentliche Verfahren dargestellt. Desweiteren werden die Grenzen des Verfahrens aufgezeigt und erklärt, warum das Wirbelementverfahren für die in dieser Arbeit untersuchten Betrachtungen geeignet ist.

4.1 Herleitung

Im Folgenden soll die Wirbelstärketransportgleichung als Grundlage der Wirbelementverfahren hergeleitet werden. Dabei orientieren sich diese Ausführungen an der Arbeit von Rütten (vgl. [Rüt04]).

Die Wirbelstärke $\vec{\omega}$ lässt sich über den definierten Zusammenhang mit der Geschwindigkeit durch

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u} \quad (89)$$

darstellen. Um die Wirbelstärke herzuleiten, wird das Helmholtz-Theorem verwendet. Dies besagt, dass ein beliebiges Vektorfeld \vec{v} als Summe eines rotationsfreien (\vec{v}_ϕ) und eines divergenzfreien Feldes (\vec{v}_ω) dargestellt werden kann. Das rotationsfreie Feld \vec{v}_ϕ kann als Gradient eines skalaren Potentials ϕ und das divergenzfreie Feld \vec{v}_ω als Rotation des vektoriellen Potentials \vec{k} bestimmt werden. Damit ergibt sich die Aufteilung eines Vektorfeldes als

$$\vec{v} = \vec{v}_\phi + \vec{v}_\omega = \nabla\phi + \nabla \times \vec{k}. \quad (90)$$

Dementsprechend lässt sich auch das Geschwindigkeitsfeld nach dem Helmholtz-

Theorem in

$$\vec{u} = \vec{u}_\phi + \vec{u}_\omega = \nabla\phi + \nabla \times \vec{k} \quad (91)$$

zerlegen. Wird der Rotationsoperator auf diese Gleichung angewendet, so entfällt nach Definition der rotationsfreie Anteil und es bleibt nur noch

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u} = \nabla \times (\nabla \times \vec{k}), \quad (92a)$$

$$= \nabla(\nabla \cdot \vec{k}) - \Delta \vec{k} = -\Delta \vec{k}, \quad (92b)$$

aufgrund der notwendigen Existenzbedingung $\nabla \cdot \vec{k} = 0$, übrig (vgl. Kapitel 2.1 Gleichung (8)). Ebenso kann der Divergenzoperator auf Gl. (91) angewendet werden, wodurch nach Definition der divergenzfreie Anteil entfällt und nur noch

$$\nabla \cdot \vec{u} = \nabla \cdot \nabla\phi = \Delta\phi \quad (93)$$

verbleibt (vgl. Kapitel 2.1 Gleichung (8)).

Durch das „Fundamentaltheorem der Kinematik“

$$\frac{D(d\vec{r})}{Dt} = \nabla\vec{u} d\vec{r} = (\mathbf{S} + \mathbf{W})d\vec{r} = \mathbf{S} d\vec{r} + \frac{1}{2}\vec{\omega} \times d\vec{r} \quad (94)$$

wird die Bedeutung der Wirbelstärke dargestellt. $d\vec{r}$ ist dabei ein beliebiges Linien-element, welches in der Strömung transportiert, gedreht ($\frac{1}{2}\vec{\omega} \times d\vec{r}$) und gestreckt bzw. gestaucht ($\mathbf{S} d\vec{r}$) wird (vgl. Abbildung 1). Somit ist erkennbar, dass die Wirbelstärke ein Maß für die lokale Rotation des Fluidelementes ist.

Um die Entstehung und den Transport der Wirbelstärke innerhalb des Feldes zu beschreiben, wird die Wirbelstärketransportgleichung verwendet. Diese leitet sich aus der Impulsgleichung (vgl. Gleichung (66))

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{1}{\rho}\nabla \cdot \mathbf{S} \quad (95)$$

her. Nach Anwendung des Rotationsoperators auf die Gleichung (95) ergibt sich die Wirbelstärketransportgleichung

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = (\nabla\vec{u})\vec{\omega} - \vec{\omega}(\nabla \cdot \vec{u}) + \nabla \times \left(-\frac{1}{\rho}\nabla p\right) + \nabla \times \left(\frac{1}{\rho}\nabla \cdot \mathbf{S}\right) \quad (96)$$

in ihrer allgemeinen Form. Bei \mathbf{S} handelt es sich um den allgemeinen Spannungstensor, den sogenannten Cauchyschen Spannungstensor.

Bei Betrachtung der einzelnen Komponenten dieser Gleichung fällt auf, dass einige

anhand der Rechenregeln (8) aus Kapitel 2.1 vereinfacht werden können. So lässt sich der Term

$$\nabla \times \left(-\frac{1}{\rho} \nabla p\right) = -\left(\nabla \frac{1}{\rho}\right) \times (\nabla p) - \frac{1}{\rho} \nabla \times (\nabla p) = -\left(\nabla \frac{1}{\rho}\right) \times (\nabla p) \quad (97)$$

vereinfachen, da $\nabla \times (\nabla p)$ identisch verschwindet. Wird als nächstes der Term

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{S}\right) = \left(\nabla \frac{1}{\rho}\right) \times (\nabla \cdot \mathbf{S}) + \frac{1}{\rho} \nabla \times (\nabla \cdot \mathbf{S}) \quad (98)$$

wie beschrieben umgeformt, so können diese beiden Terme zu

$$\left(\nabla \frac{1}{\rho}\right) \times (\nabla \cdot \mathbf{S} - \nabla p) + \frac{1}{\rho} \nabla \times (\nabla \cdot \mathbf{S}) \quad (99)$$

zusammengefasst werden. Durch Einsetzen dieser Umformungen in die Gleichung (96), ergibt sich

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = (\nabla \vec{u})\vec{\omega} - \vec{\omega}(\nabla \cdot \vec{u}) + \left(\nabla \frac{1}{\rho}\right) \times (\nabla \cdot \mathbf{S} - \nabla p) + \frac{1}{\rho} \nabla \times (\nabla \cdot \mathbf{S}). \quad (100)$$

Innerhalb dieser Arbeit werden nur inkompressible Strömungen betrachtet. Für diese gilt konsequenterweise, dass sich die Dichte nicht ändert ($\nabla \rho \equiv 0$), wodurch die entsprechenden Terme entfallen. Somit ist aber auch eine weitere Eigenschaft inkompressibler Strömungen erkennbar. Diese soll durch Abbildung 4 verdeutlicht werden. Sie zeigt ein Fluidelement, welches aufgrund des umgebenden Strömungsfeldes entlang der Koordinatenachsen verformt wird. Da bei Inkompressibilität der Flächeninhalt nicht verändert werden darf, muss für die Summe der Geschwindigkeitsänderungen $\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0$ gelten, denn anderenfalls würde sich ein Linienelement schneller als ein anderes bewegen. Diese Summe ist gleichzeitig die Definition der Divergenz, womit gilt:

$$\nabla \cdot \vec{u} \equiv 0. \quad (101)$$

Nach Anwendung der Gleichung (95) auf die Wirbelstärketransportgleichung vereinfacht sich diese weiter zu

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = (\nabla \vec{u})\vec{\omega} + \frac{1}{\rho} \nabla \times (\nabla \cdot \mathbf{S}). \quad (102)$$

Durch die Einschränkung auf rein inkompressible, newtonsche Fluide wird die Be-

trachtung weiter vereinfacht. Es gilt dann für \mathbf{S} das entsprechende Materialgesetz

$$\mathbf{S} = 2\mu\mathbf{D} = 2\mu\frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) = \mu(\nabla\vec{u} + (\nabla\vec{u})^T), \quad (103)$$

welches den Verzerrungsgeschwindigkeitstensor \mathbf{D} , den Geschwindigkeitsgradiententensor \mathbf{L} (vgl. Abschnitt 2.4) sowie die dynamische Viskosität μ beinhaltet. Durch Einsetzen von \mathbf{S} und Anwendung der vektoranalytischen Umformungen aus 2.1, kann die Wirbelstärketransportgleichung für den inkompressiblen newtonschen Fall in der Form

$$\boxed{\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = (\nabla\vec{u})\vec{\omega} + \nu\Delta\vec{\omega}} \quad (104)$$

geschrieben werden. Hierbei ist $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ die kinematische Viskosität. Nachfolgend

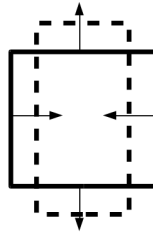


Abb. 4: Verformung eines 2D Fluidelements

sollen nun die einzelnen, für die späteren Betrachtungen wichtigen Terme dieser Transportgleichung näher betrachtet werden.

Die linke Seite stellt die substantielle Zeitableitung der Wirbelstärke dar. Wie in Abschnitt 2.2 dargelegt, kann diese in Eulerscher oder Lagrangescher Art betrachtet werden. In der Literatur findet sich oft die Eulersche Ableitung der Wirbelstärke

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} + (\nabla\vec{\omega})\vec{u}, \quad (105)$$

wohingegen in dieser Arbeit der konvektive Anteil entfällt, da eine Lagrangesche Betrachtung

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t}, \quad (106)$$

durchgeführt wird und somit die substantielle bzw. materielle Ableitung genutzt wird. Damit gibt dieser Teil die zeitliche Änderung der Wirbelstärke für einen mitbewegten Beobachter wieder (siehe Abschnitt 2.2).

Als nächstes folgt auf der rechten Seite der Wirbelstreckterm

$$(\nabla\vec{u})\vec{\omega}, \quad (107)$$

welcher die durch die Geschwindigkeit erzeugte Verformung des Wirbelstärkefeldes darstellt. Der letzte Term

$$\nu \Delta \vec{\omega} \quad (108)$$

beschreibt die Diffusion der Wirbelstärke, die aufgrund von Reibungskräften auftritt. Zusammenfassend kann der Transport der Wirbelstärke in Zusammenhang mit der Geschwindigkeit dargestellt werden.

Im Folgenden soll nun der umgekehrte Fall, also die Berechnung der Geschwindigkeit aus einem Wirbelstärkefeld, betrachtet werden, wobei nur freie Strömungen ohne Rand untersucht werden. Als Ausgangspunkt dafür wird die Gleichung (89) verwendet.

Wie bereits in Gleichung (90) dargestellt wurde, setzt sich jedes Vektorfeld aus einem divergenzfreien und einem rotationsfreien Anteil zusammen, weshalb in Gleichung (89) der rotationsfreie Anteil der Geschwindigkeit \vec{u}_ϕ bei der Berechnung entfällt und nur noch der Rotationsanteil \vec{u}_ω verbleibt. Es gilt damit

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{u}_\omega. \quad (109)$$

Als nächstes wird auf diese Gleichung der Rotationsoperator angewendet, wodurch sich

$$\nabla \times \vec{\omega} = \nabla \times (\nabla \times \vec{u}_\omega) = \nabla(\nabla \cdot \vec{u}_\omega) - \Delta \vec{u}_\omega \quad (110)$$

ergibt. Da nur inkompressible Strömungen angenommen werden, gilt Gleichung (101), woraus für den Rotationsanteil der Geschwindigkeit die Poissongleichung

$$\Delta \vec{u}_\omega = -\nabla \times \vec{\omega} \quad (111)$$

folgt. Aus der Theorie partieller Differentialgleichungen ist die Lösung dieser Gleichung durch

$$\vec{u}_\omega(\vec{x}, t) = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{(\vec{x} - \vec{x}') \times \vec{\omega}(\vec{x}', t)}{\|\vec{x} - \vec{x}'\|^3} dV \quad (112)$$

gegeben. Hier bezeichnet \vec{x} den Punkt, an dem die Geschwindigkeit induziert wird, und \vec{x}' einen Punkt, von dem die induzierende Wirkung ausgeht. Diese Gleichung wird als Gesetz von Biot-Savart bezeichnet, benannt nach Jean-Baptiste Biot (1774-1862) und Felix Savart (1781-1841).

Um die Gesamtgeschwindigkeit zu erhalten, kann das Gesetz von Biot-Savart durch den rotationsfreien Anteil der Geschwindigkeit, nach dem Helmholtz Theorem (91), additiv ergänzt werden. Im Folgenden soll aber weiterhin die durch die Wirbelstärke induzierte Geschwindigkeit \vec{u}_ω betrachtet werden.

4.2 Definition des Verfahrens

Bei der bisherigen Betrachtung des Wirbelstärkefeld wurde dieses als kontinuierliche Größe betrachtet. Dies soll nun durch eine diskrete Darstellung ersetzt werden. Dafür definiert Stock (vgl. [GS05]) Partikel, die die „vektorielle Zirkulation“ $\vec{\Gamma}_i$ transportieren. Dazu verknüpft Stock das diskrete Wirbelstärkefeld $\vec{\omega}$ und die „vektorielle Zirkulation“ $\vec{\Gamma}_i$ über das Gleichungssystem

$$\vec{\omega}(\vec{x}, t) = \sum_i^N [\vec{\Gamma}_i(t) \delta(\vec{x} - \vec{x}_i)], \quad (113)$$

wobei $\delta(\cdot)$ die Dirac Delta Funktion bezeichnet. Damit ist es möglich, jederzeit eine Umformung der Größen ineinander durchzuführen. Durch das Einführen der zusätzlichen Größe $\vec{\Gamma}_i$ definiert Stock ein Teilungsverfahren, indem er die Wirbelstärke-transportgleichung (104) in die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{D\vec{\Gamma}_i}{Dt} &= (\nabla \vec{u}) \cdot \vec{\Gamma}_i, \\ \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} &= \nu \Delta \vec{\omega} \end{aligned} \quad (114)$$

zerlegt. Stock bezieht sich hierbei auf die grundlegende Arbeit von Gharakhani und Ghoniem (vgl. [GG97]), die diese Teilungsstrategie für die Navier-Stockes Gleichungen beschreiben.

Die Idee dieses Verfahrens beruht darauf, die Wirbelstärke-transportgleichung (vgl. Gleichung (104)) in

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\nabla \vec{\omega}) \cdot \vec{u} = (\nabla \vec{u}) \cdot \vec{\omega} \quad (115)$$

und

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = \nu \Delta \vec{\omega} \quad (116)$$

zu zerlegen. Dabei stellt die Gleichung (115) eine Eulersche Beschreibung dar, die in ihr Lagrangesches Pendat

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt}(\phi(P, t), t) = (\nabla \vec{u}(\phi(P, t), t)) \cdot \vec{\omega}(\phi(P, t), t), \quad (117)$$

mithilfe der Partikeltrajektorie, umgeformt wird. Allerdings handelt es sich bei $\vec{\omega}$ nicht um eine partikeltransportierte, diskrete Größe, weshalb Gharakhani und

Ghoniem diese Gleichung unter Berücksichtigung von (113) mit

$$\frac{D\vec{\Gamma}_i}{Dt} = (\nabla\vec{u}) \cdot \vec{\Gamma}_i \quad (118)$$

ersetzen. Dabei ist $\vec{\Gamma}_i(t) = \vec{\omega}_i(t)V_i$ die volumenbezogene Wirbelstärke eines freibeweglichen Wirbelpartikels.

Somit lassen sich der Diffusionsanteil und der Wirbelstreckterm getrennt voneinander betrachten. Da innerhalb der vorliegenden Arbeit jedoch reine Punktwirbelinteraktionen untersucht werden, also die Wirbelpartikel keine Wirbelstärke über die Diffusion verlieren (d.h. $\nu\Delta\vec{\omega} = 0$), entfällt der Diffusionsanteil und es verbleibt (118). In Anlehnung an Stock wird im Folgenden weiterhin die Bezeichnung „vektorielle Zirkulation“ für $\vec{\Gamma}_i$ benutzt.

Wird $\vec{\Gamma}_i$ in die Gleichung (112) eingesetzt und die Dirac Funktion durch eine Glättungsfunktion $K(\cdot)$ angenähert, so kann die Geschwindigkeit in diskreter Form anhand der Gleichung

$$\vec{u}_\omega(\vec{x}, t) = -\frac{1}{4\pi} \sum_i^N \frac{(\vec{x} - \vec{x}_j) \times \vec{\Gamma}_j}{\|\vec{x} - \vec{x}_j\|^3} K(\vec{x} - \vec{x}_j) \quad (119)$$

berechnet werden. Als Glättungsfunktion wird die von Stock beschriebene Funktion

$$K(x) = \int_0^{\frac{|x|}{\sigma}} \frac{3}{4\pi} e^{-r^3} r^2 dr = \frac{3}{4\pi} (1 - e^{-\frac{\|x\|^3}{\sigma^3}}), \quad (120)$$

welche für den dreidimensionalen Fall konstruiert ist, verwendet. Somit kann die Geschwindigkeit \vec{u} aus der aktuellen Zirkulation $\vec{\Gamma}_i$ berechnet werden. Eine weitere Möglichkeit die Geschwindigkeit zu bestimmen, wird in der Arbeit von Sheel (vgl. [She08]) dargestellt. Dieser berechnet \vec{u} durch

$$\vec{u}_\omega(\vec{x}, t) = -\frac{1}{4\pi} \sum_i^N \frac{\|\vec{x} - \vec{x}_j\|^2 + \frac{5}{2}\sigma^2}{(\|\vec{x} - \vec{x}_j\|^2 + \sigma^2)^{\frac{5}{2}}} (\vec{x} - \vec{x}_j) \times \vec{\Gamma}_j. \quad (121)$$

Wird bei diesen Verfahren der Skalierungsfaktor σ (Kernradius) so angepasst, dass die beiden entstehenden Funktionen einen ähnlichen Maximalwert erreichen, dann sind die Unterschiede deutlich zu erkennen (vgl. Abbildung 5). So ist die von Sheel erzeugte Funktion im vorderen Teil deutlich breiter als die von Stock und liefert in diesem Bereich höhere Geschwindigkeiten. Im weiteren Verlauf kehrt sich dies jedoch um, sodass die von Stock erzeugte Funktion höhere Geschwindigkeiten erzeugt.

Im direkten Vergleich zeigt die Funktion von Stock die besseren Ergebnisse, weshalb im Folgenden nur dieser Ansatz betrachtet wird.

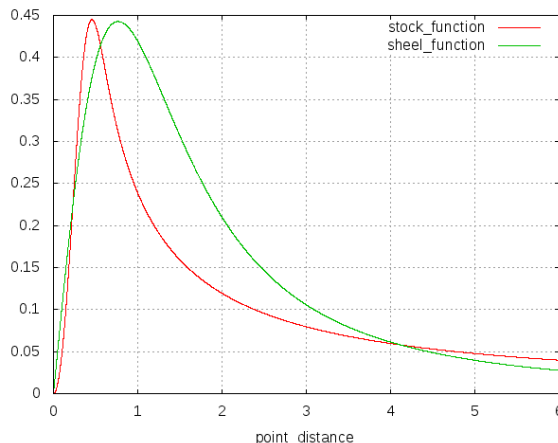


Abb. 5: Vergleich der Kerne von Stock ($\sigma^3 = 0,05$) und Sheel ($\sigma^2 = 1,8$)

Für die Berechnung der Zirkulation ist es notwendig, dass der Geschwindigkeitsgradient möglichst genau berechnet wird. Daher bietet es sich an dieser Stelle an, den Gradientenoperator direkt auf die Gleichung (119) anzuwenden, um den Geschwindigkeitsgradienten analytisch zu bestimmen. Dadurch ergibt sich

$$\frac{\partial u_j(\vec{x})}{\partial x_i} = -\frac{1}{16\pi^2} \sum_k^N \left(\frac{\partial g_j(\vec{x} - \vec{x}_k)}{\partial x_i} K(\vec{x} - \vec{x}_k) + g_j(\vec{x} - \vec{x}_k) \frac{\partial K_j(\vec{x} - \vec{x}_k)}{\partial x_i} \right) \quad (122)$$

mit

$$g(\vec{x}) = \frac{\vec{x} \times \vec{\Gamma}}{\|\vec{x}\|^3}$$

$$\frac{\partial g_j(\vec{x})}{\partial x_i} = \frac{B_{i,j}}{\|\vec{x}\|^3} - \frac{3x_i(\vec{x} \times \vec{\Gamma})_j}{\|\vec{x}\|^5} \quad (123)$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -\Gamma_3 & \Gamma_2 \\ \Gamma_3 & 0 & -\Gamma_1 \\ -\Gamma_2 & \Gamma_1 & 0 \end{pmatrix}$$

und

$$K(\vec{x}) = 1 - e^{-\frac{\|\vec{x}\|^3}{\sigma^3}}$$

$$\frac{\partial K_j(\vec{x})}{\partial x_i} = \frac{3\|\vec{x}\|x_i}{\sigma^3} e^{-\frac{\|\vec{x}\|^3}{\sigma^3}} \quad (124)$$

für die Komponenten von $\nabla\vec{u}$.

Hiermit ist die rechte Seite der Zirkulation aus Gleichung (114) vollständig bestimmt, sodass ein Lösen des Anfangswertproblems möglich ist. Dies geschieht numerisch über die in Kapitel 2.6 beschriebenen Verfahren, wobei das explizite Euler-Verfahren zum Anrechnen und das Verfahren von Adams-Bashforth für die eigentliche Berechnung verwendet wird.

1. „Vektorielle Zirkulation“ der Wirbelpartikel verteilen
2. Geschwindigkeitsfeld nach Gleichung (119) ermitteln
3. Bestimmen des Geschwindigkeitsgradienten nach (122)
4. Zeitliche Änderung der „vektorielle Zirkulation“ nach (118) berechnen
5. „Vektorielle Zirkulation“ zeitlich entwickeln, vgl. Abschnitt 2.6
6. Neue Position aus der Geschwindigkeit ermitteln, vgl. Abschnitt 2.6
7. Für N Zeitschritte ab 2. wiederholen

Tabelle 6: Algorithmischer Ablauf des Wirbelementverfahrens

Zusammenfassend wird die Berechnungsvorschrift des Wirbelementverfahrens in der Übersicht 6 dargestellt.

4.3 Validierungstestfall

Um den Fehler des in Abschnitt 4.2 vorgestellten Verfahrens zu betrachten, wird ein analytisch lösbarer Testfall verwendet. Dabei wird ausgenutzt, dass zwei Wirbelpartikel mit entgegengerichteter vektorieller Zirkulation sich um ein Wirbelzentrum bewegen. Der prinzipielle Aufbau ist in Abbildung 6 dargestellt, wobei der Punkt c das Wirbelzentrum kennzeichnet. Da die beiden Wirbelpartikel keine Wirbelstärke

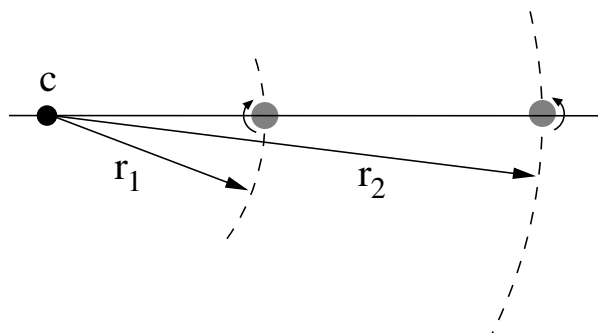


Abb. 6: Rotation zweier Punktwirbel um ein Wirbelzentrum

über die Zeit verlieren, muss das Wirbelzentrum ortsfest sein. Die Lage dieses Zentrums \vec{x}_c lässt sich nach [AKO07], für den zweidimensionale Fall ($\Gamma_1 = \Gamma_2 = 0$), über den Zusammenhang

$$\vec{x}_c = \frac{\sum_{i=0}^N (\vec{\Gamma}_i)_3 \vec{x}_i}{\sum_{i=0}^N (\vec{\Gamma}_i)_3} \quad (125)$$

berechnen.

Zur Vereinfachung werden die beiden Wirbelpartikel so positioniert, dass das Wirbelzentrum im Koordinatenursprung liegt. Damit kann der Fehler des Verfahrens darüber bestimmt werden, wie weit das errechnete Zentrum vom ortsfesten analytischen Zentrum abweicht. Zur Berechnung wird eine Zeitschrittweite von 10^{-3} für ein Adams-Bashforth Verfahren (vgl. Abschnitt 2.6) vierter Ordnung verwendet. Gerechnet wurden hierbei 15000 Zeitschritte (15 Sekunden Realzeit). Damit ergibt sich das in Abbildung 7 dargestellte Fehlerdiagramm, in welchem zu erkennen ist, dass die Abweichungen sich in einer Größenordnung von 10^{-7} befinden. Damit ist der Fehler

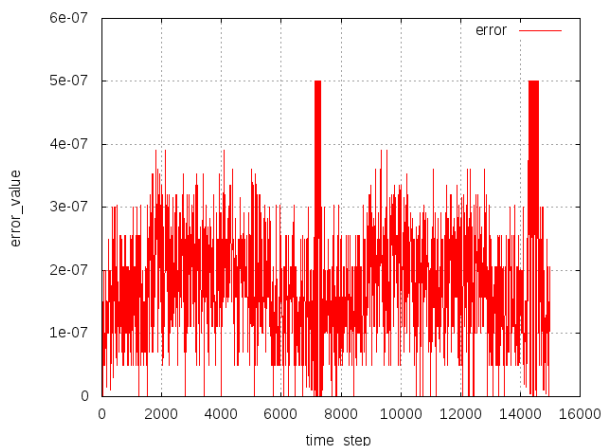


Abb. 7: Abweichung vom Wirbelzentrum

des Verfahrens gering genug, um eine weiterführende Analyse auf den erzeugten Daten durchführen zu können.

4.4 Grenzen des aktuellen Verfahrens

Das beschriebene Wirbelverfahren nach [GS05] hat einige Schwächen, auf die im Folgenden näher eingegangen werden soll.

Bei der Betrachtung des Verfahrens fällt auf, dass zur Berechnung der Geschwindigkeit

nach Gleichung (119) eine $n \times n$ Summe über alle Partikel betrachtet werden muss. Dies ist notwendig, da die Wirkung der Wirbelstärke bis ins unendlich reicht, was sich in der Definition des Kerns (Gleichung (120)) widerspiegelt.

Anhand der Abbildung 5 ist zu erkennen, dass zwar eine bestimmte Schranke definiert werden kann, ab der die Restwirkung nur noch minimal vorhanden ist, diese dann aber willkürlich gesetzt wäre und dadurch das Ergebnis verfälschen würde. Daher entsteht durch diese Fernwirkung ein erheblicher Rechenaufwand, da alle entsprechenden Partikel betrachtet werden müssen. Beatson und Greengard beschreiben in [BG97] einen Multipol-Ansatz, um diesen Aufwand zu verringern. Dabei geschieht die Auswertung in mehreren Schritten. Zuerst findet in einem lokalen Bereich eine Auswertung der Wirkung nach den bisher beschriebenen Gleichungen statt. Dieser lokale Bereich wird zuvor durch eine maximale Abstandsnorm definiert, wobei bewusst die Fernwirkung vernachlässigt wird. Im nächsten Schritt wird die lokale Wirkung innerhalb eines Bereiches als Multipol-Entwicklung auf die entfernten Partikel angewendet, wodurch nur im lokalen Bereich eine $N \times N$ Auswertung notwendig ist. Der weitere Aufwand berechnet sich aus der Anzahl (und somit der Größe) der eingeführten lokalen Bereiche. Greengard et. al. erweitern diese Betrachtung in [CGR99] explizit für 3D. Zudem wird darauf verwiesen, dass die Unterteilung in lokale Bereiche auf verschiedenen Ebenen geschehen kann. So ist es möglich, die Partikel zuerst lokal wirken zu lassen, dann Multipole zu bestimmen und diese dann wiederum als Partikel zu betrachten und eine quasi lokale Berechnung durchzuführen. Dies wird wiederholt, bis die geforderte Vergrößerung erreicht ist. Danach wird der Einfluss wieder auf die Originalpartikel zurückgerechnet. Da die Umsetzung eines solchen Verfahrens jedoch den zeitlichen Rahmen dieser Arbeit übersteigt, wurde darauf verzichtet. Somit werden nur Problemstellungen betrachtet, die durch einzelne Punktwirbel dargestellt werden können.

Eine weitere Beschränkung stellt die Berechnung des Geschwindigkeitsgradienten nach Gleichung (122) dar, da hierbei nur der Rotationsanteil der Strömung, nicht aber die Potentiallösung, für das Skalarpotential berücksichtigt wird. Um den gesamten Geschwindigkeitsgradienten zu bestimmen, gibt es verschiedene Möglichkeiten. Einige davon sollen im Folgenden kurz angesprochen werden. So ist es beispielsweise möglich, die Geschwindigkeitsinformation etwa mittels radialer Basisfunktionen zu interpolieren (vgl. [Wen05]) und die Interpolationsfunktion analytisch abzuleiten. Da das Geschwindigkeitsfeld aus beiden Anteilen besteht, ergibt dies somit den gesamten Geschwindigkeitsgradienten L . Allerdings ist dieses Verfahren sehr rechenaufwendig, da in jedem Zeitschritt für jedes Partikel eine Interpolante bestimmt und ausgewertet werden muss. Eine weitaus effizientere Vorgehensweise ergibt sich aus der Betrachtung eines

anderen Partikelverfahrens, der „smoothed particle hydrodynamics“ Methode (kurz SPH). Hierbei wird ebenfalls auf die Approximationstheorie zurückgegriffen, da die Eigenschaften der einzelnen Partikel aus den Eigenschaften der Nachbarpartikel und einer Ansatzfunktion bestimmt werden können (vgl. [Saa12]). Allgemein gilt somit für eine durch die Partikel transportierte Größe a

$$a_i = \sum_j^N (V_j a_j W(\vec{x}_i - \vec{x}_j, h)) \quad (126)$$

mit der Kernfunktion $W(\vec{x}, h)$ und dem Partikelvolumen V . Im Speziellen kann diese Vorschrift

$$\nabla \vec{u}_i = \sum_j^N (V_j (\vec{u}_i - \vec{u}_j) \nabla W(\vec{x}_i - \vec{x}_j, h)) \quad (127)$$

auch zur Bestimmung des Geschwindigkeitsgradienten verwendet werden. Als Kernfunktion können auch an dieser Stelle radiale Basisfunktionen (z.B. Wendland-Funktionen) verwendet werden.

Ein weiterer Vorteil dieser Berechnung liegt in der Rückwirkung auf das Wirbelstärkefeld. So ist es nach Gleichung (89), anhand der Rotation des Geschwindigkeitsfeldes, möglich die Wirbelstärke zu ermitteln. Werden etwa in ein ruhendes ($\vec{u} \equiv 0$ und $\vec{\omega} \equiv 0$) Partikelfeld zusätzliche Partikel mit $\vec{u} \neq 0$ eingebracht, so kann über (127) ein Geschwindigkeitsgradient bestimmt werden. Dieser bewirkt die Induktion einer entsprechenden Wirbelstärke. Da im Rahmen der vorliegenden Arbeit jedoch ausschließlich geschlossene Systeme betrachtet werden, genügt das in Abschnitt 4.2 vorgestellte Verfahren.

5 Lagrangesche Analyseverfahren

Bei der Simulation von Strömungen ist es nicht nur wichtig ein möglichst effizientes und genaues Verfahren zu verwenden, sondern auch die erzeugten Daten auswerten zu können. Aktuell werden dazu beispielsweise Druckverteilungen auf der Oberfläche oder Geschwindigkeitsveränderungen analysiert. In Anbetracht der Tatsache, dass die simulierten Fälle immer größer und komplexer werden, ist es notwendig, die Auswertung durch weitere Verfahren zu ergänzen.

Dabei können, ebenso wie die Simulationsverfahren, auch die Auswertung in Lagrangescher oder Eulerscher Form stattfinden. Im Folgenden sollen einige Lagrangesche Analyseverfahren dargestellt werden.

5.1 Finite Time Lyapunov Exponent

Der Finite Time Lyapunov Exponent (im Folgenden kurz FTLE) stellt eine Möglichkeit dar, Verformungen von Fluidelementen innerhalb des Strömungsgebietes zu detektieren. Als Verformung eines Fluidelementes wird dabei jegliche Änderung von der Ausgangskonfiguration bezeichnet.

Ziel dieser Analyse ist es, die Verformungen innerhalb der Strömung zu charakterisieren. Wichtig ist diese Analyse, da mit jeder Verformung innerhalb des Fluides Arbeit im physikalischen Sinne erbracht wird, was wiederum bedeutet, dass Energie umgewandelt wird. Dies bedeutet, dass in Gebieten mit hohen Verformungsraten auch hohe Energie vorliegt (und auch dissipiert, wenn Reibung wirkt).

Allerdings wird beim FTLE-Wert nicht nur die aktuelle Verformung betrachtet, sondern die Verformung eines Linienelementes über eine bestimmte Zeit betrachtet. Anders formuliert bedeutet dies, dass die relativen Abstände von Partikeltrajektorien über einen gewissen Zeitraum untersucht werden.

Aufgrund dieser Betrachtungen können dann Rückschlüsse nicht nur auf die Energie, sondern auch auf die Strömungsstruktur getroffen werden. Um dies zu verdeutlichen

sei auf Abbildung 8 verwiesen, in der mehrere Trajektorien $\phi(P, t)$ dargestellt sind. Die Abstände der Trajektorien werden zu den Zeiten t_0 , t_1 und t_2 bestimmt, wobei auffällt, dass einige Abstände sich über die Zeit verändern, wobei andere gleich bleiben. Werden die Abstände zwischen den Trajektorien als Linienelemente angesehen, so bedeutet dies, dass für einige Linienelemente eine Verformung auftritt, bei anderen Linienelementen hingegen nicht.

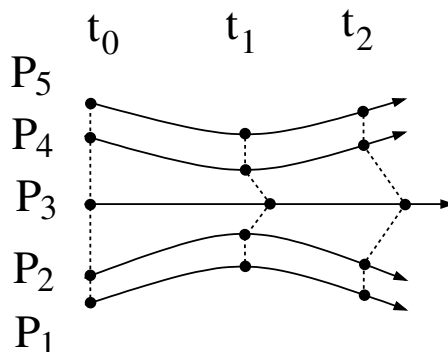


Abb. 8: Abstand mehrerer Trajektorien

In dem dargestellten Beispiel aus Abbildung 8 tritt die größte Verformung für die Linienelemente von P_3 auf. Diese Trajektorie liegt gerade zwischen zwei sich drehenden Strömungsgebieten, sodass mit P_3 eine Trennlinie zwischen zwei Strömungsgebieten gefunden ist. Damit ermöglicht die Untersuchung des FTLE-Wertes einen Ansatzpunkt für die Strömungsanalyse.

5.1.1 Herleitung

Nachdem die Bedeutung der FTLE-Untersuchung dargelegt wurde, soll im Folgenden die Herleitung des Verfahrens vorgestellt werden. Diese orientiert sich an den Ausführungen von [TFPG].

Als Ausgangspunkt werden zwei beliebige Partikel P_1 und P_2 als Eckpunkte eines Linienelementes sowie deren Positionen $\vec{X}_1 = \phi(P_1, t_0)$ und $\vec{X}_2 = \phi(P_2, t_0)$ betrachtet. Dabei ist das Partikel P_2 ($\vec{X}_2 = \vec{X}_1 + d\vec{r}(t_0)$) so zu wählen, dass das Linienelement $d\vec{r}(t_0)$ zum Zeitpunkt t_0 infinitesimal klein ist.

Nach Abschnitt 2.3 lässt sich die Position von P_2 zu einem Zeitpunkt $t = t_0 + \Delta t$ durch

$$\psi_{t_0}^t(\vec{X}_2) = \psi_{t_0}^t(\vec{X}_1) + d\vec{r}(t) \quad (128)$$

darstellen. Um $d\vec{r}(t)$ zu bestimmen, kann diese Gleichung umgestellt

$$d\vec{r}(t) = \psi_{t_0}^t(\vec{X}_2) - \psi_{t_0}^t(\vec{X}_1) \quad (129)$$

und eine Taylorreihenentwicklung bis zum ersten Glied durchgeführt

$$d\vec{r}(t) = \frac{d\psi_{t_0}^t(\vec{X}_1)}{d\vec{X}} d\vec{r}(t_0) + O(\|d\vec{r}(t_0)\|^2) \quad (130)$$

werden. Da P_2 so gewählt wurde, dass $\|d\vec{r}(t_0)\|$ als infinitesimal klein betrachtet werden kann, entfällt das Restglied. Die verbleibende rechte Seite

$$d\vec{r}(t) = \frac{d\psi_{t_0}^t(\vec{X}_1)}{d\vec{X}} d\vec{r}(t_0) \quad (131)$$

kann in den ursprünglichen Abstand der Partikel $d\vec{r}(t_0)$ und den Deformationsgradienten Tensor

$$\mathbf{F} = \frac{d\psi_{t_0}^t(\vec{X}_1)}{d\vec{X}} \quad (132)$$

(vgl. Kapitel 2.4) aufgeteilt werden. Somit kann $d\vec{r}(t) = \mathbf{F} d\vec{r}(t_0)$ geschrieben werden.

Allerdings ist die FTLE-Analyse nur an der betragsmäßigen Änderung des Linienelementes interessiert, daher wird die Gleichung

$$\begin{aligned} \|d\vec{r}(t)\| &= \|\mathbf{F} d\vec{r}(t_0)\| \\ &= \sqrt{\langle \mathbf{F} d\vec{r}(t_0), \mathbf{F} d\vec{r}(t_0) \rangle} \\ &= \sqrt{\langle d\vec{r}(t_0), \mathbf{F}^T \mathbf{F} d\vec{r}(t_0) \rangle} \end{aligned} \quad (133)$$

betrachtet. Durch die Bildung der Norm ist auf der rechten Seite der rechte Cauchy-Greensche Verzerrungstensor $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$ erkennbar. Dieser stellt in der Strömungsmechanik die Verzerrung der Fluidelemente (vgl. Abschnitt 2.4), jedoch nicht mehr deren Drehung dar.

Desweiteren wird nicht der Abstand an sich betrachtet, sondern nur die maximale Deformationsrichtung. Dazu wird die Gleichung

$$\max_{d\vec{r}(t_0)} \|d\vec{r}(t)\| = \sqrt{\langle d\vec{r}(t_0), \lambda_{max}(\mathbf{C}) d\vec{r}(t_0) \rangle} = \sqrt{\lambda_{max}(\mathbf{C})} \|d\vec{r}(t_0)\|, \quad (134)$$

verwendet, wobei $d\vec{r}(t_0)$ am Eigenvektor zum maximalen Eigenwert $\lambda_{max}(\mathbf{C})$, orientiert ist. Da sich der Abstand der Partikeltrajektorien in relativ kleinen Zeitskalen maßgeblich ändern kann (vgl. Abbildung 9), wird die Gleichung (134) durch eine

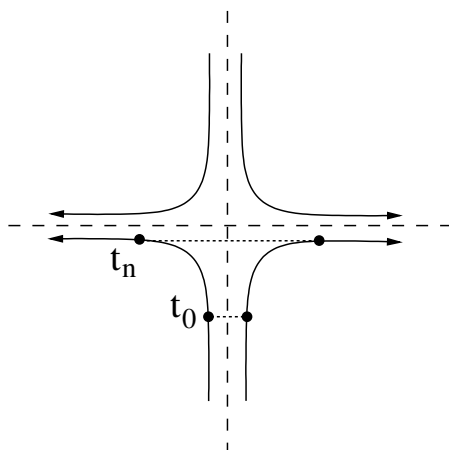


Abb. 9: Partikelabstand bei einer Sattelpunktsstruktur

Exponentialfunktion erweitert.

$$\max_{d\vec{r}(t_0)} \|d\vec{r}(t)\| = e^{\sigma_{t_0}^t(P)|t|} \|\overline{d\vec{r}(t_0)}\| \quad (135)$$

Dabei wird $\sigma_{t_0}^t(P)$ als Finite Time Lyapunov Exponent bezeichnet und durch

$$\sigma_{t_0}^t(P) = \frac{1}{|t|} \ln \sqrt{\lambda_{\max}(C)} \quad (136)$$

definiert.

5.1.2 FTLE mit Satelliten-Partikeln

Anhand der Herleitung für die FTLE-Analyse lässt sich erkennen, dass der absolute Deformationsgradiententensor \mathbf{F} den bestimmenden Anteil bei der Berechnung darstellt. Aus diesem Grund besteht die Frage, wie er bestimmt werden kann. Eine Möglichkeit besteht in der Verwendung von Satelliten-Partikeln, die jeweils einem Strömungspartikel zugeordnet sind. Die Abbildung 10 soll diese Ausgangsbelegung verdeutlichen. Um eine Aussage über den absoluten Deformationsgradiententensor zu erhalten, wirkt das Geschwindigkeitsfeld nicht nur auf die Strömungspartikel, sondern auch auf die Satelliten-Partikel, wodurch sich die Position der Partikel relativ zueinander verändern kann. Damit kann diese Belegung als dreidimensionales, zeitlich veränderbares Fluidelement betrachtet werden. Wird die Definition des absoluten Deformationsgradiententensor (vgl. [Böh00] Seite 46ff) als die Transformation

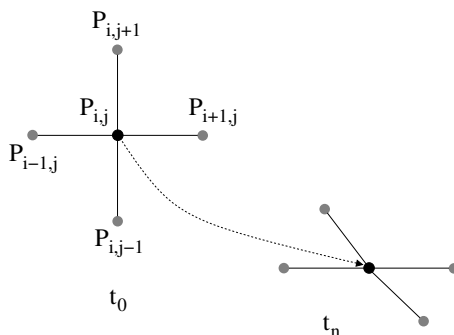


Abb. 10: Ausgangsbelegung der Satellitenpartikel beim FTLE

eines Linienelementes $d\vec{r}$ zum Zeitpunkt t_0 in die Zeit t

$$d\vec{r} = \mathbf{F} \cdot d\vec{r}_0 \quad (137)$$

verwendet, so kann \mathbf{F} durch Umstellen über das Fluidelement berechnet werden. Explizit bedeutet dies, dass \mathbf{F} über die Differenzenapproximation

$$\mathbf{F} \approx \begin{pmatrix} \frac{x_{i+1,j}(t_n) - x_{i-1,j}(t_n)}{x_{i+1,j}(t_0) - x_{i-1,j}(t_0)} & \frac{x_{i,j+1}(t_n) - x_{i,j-1}(t_n)}{y_{i,j+1}(t_0) - y_{i,j-1}(t_0)} \\ \frac{y_{i+1,j}(t_n) - y_{i-1,j}(t_n)}{x_{i+1,j}(t_0) - x_{i-1,j}(t_0)} & \frac{y_{i,j+1}(t_n) - y_{i,j-1}(t_n)}{y_{i,j+1}(t_0) - y_{i,j-1}(t_0)} \end{pmatrix} \quad (138)$$

dargestellt werden kann, wobei die Notation aus Abbildung 10 mit $P_{i,j} = P(x_{i,j}; y_{i,j})$ verwendet wurde.

Diese Partikel werden frei in der Strömung mittransportiert. Dabei gibt es zwei Herangehensweisen. Zum einen können die Partikel als reine Informationsträger angesehen werden. Dies bedeutet, dass die gleichen Transportgleichungen für die Satelliten-Partikel wie für die „normalen“ Partikel gelöst werden. Allerdings werden die Satelliten-Partikel nur als Informationsempfänger, sonst aber als passiv betrachtet. Dies hat den Vorteil, dass bei der Initialbelegung die Satelliten-Partikel viel enger an ihre zugeordneten Partikel gesetzt werden können. Damit kann die generelle Auflösung des Verfahrens um einiges gröber sein als die Auflösung des FTLE. Diese Herangehensweise kann beispielsweise genutzt werden, um einen groben Überblick über die Strömung zu bekommen und diese dann im Weiteren zu verfeinern.

Eine andere Möglichkeit besteht darin, die Satelliten-Partikel aktiv an der Strömungsentstehung zu beteiligen. Dies hat den Vorteil, dass keine zusätzlichen Partikel (die nur zur Analyse verwendet werden) gespeichert werden müssen. Dabei ist zu überlegen, ob eine Unterscheidung zwischen Satelliten und Strömungspartikel sin-

nvoll ist. Werden keine expliziten Satelliten mehr verwendet, so entsteht im Prinzip ein Netzverfahren, bei dem sich die Zellen in der Strömung mitbewegen und verformen.

Handelt es sich bei der Analyse um eine vorberechnete Strömung, die nur noch analysiert werden soll, so verschimmt natürlich diese Unterscheidung, da alle Partikel passiv transportiert werden. Ein Beispiel für eine solche Analyse zeigt die Abbildung 11, in der die zugrundeliegende Umströmung eines Zylinders über den DLR-TAU-Code ([SGH06]) berechnet wurde.

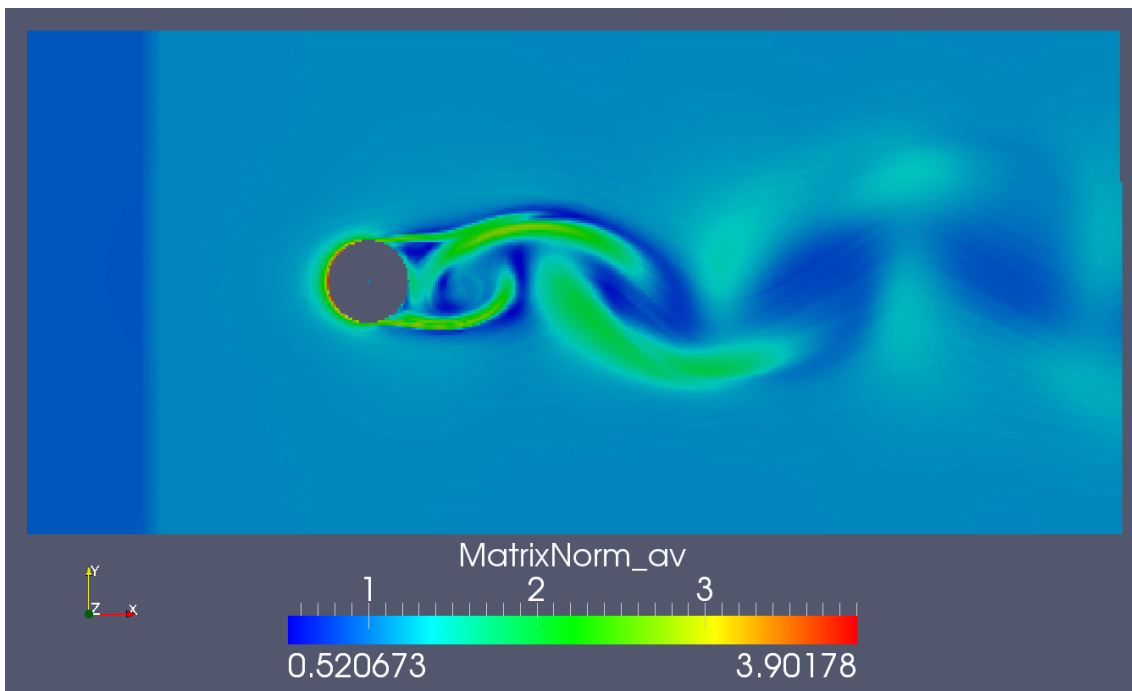


Abb. 11: Mittelwert FTLE-Wert am Beispiel der Kármánschen Wirbelstraße

Da ein Unterschied besteht, ob die Strömung zeitlich vorwärts oder rückwärts betrachtet wird, wurde bei dieser Betrachtung der Mittelwert beider Anteile bestimmt. Die Einzellösungen sind in den Abbildungen 12 für den zeitlich positiven und 13 für den zeitlich negativen Teil dargestellt.

Diese zweifache Betrachtung ist notwendig, da nur so alle Strukturen wirklich aufgelöst werden können. Startet die Analyse beispielsweise in einer Strömungsstruktur wie in Abbildung 14 zum Zeitpunkt t_0 , so „zeigt“ der FTLE-Wert für den zeitlich positiven Verlauf zwar ein Auseinanderdriften der beiden Partikel an, es kann so aber noch keine Aussage über die wirkliche Struktur getroffen werden. Es ist beispielsweise möglich, dass zuvor eine gleichmäßige Strömung vorherrschte (vgl. Abbildung 14 Fall „1“) und diese durch etwas gestört wurde, weshalb es zu einem Entfernen der Partikel kommt. Andererseits kann es sich aber auch um eine zeitlich begrenzte

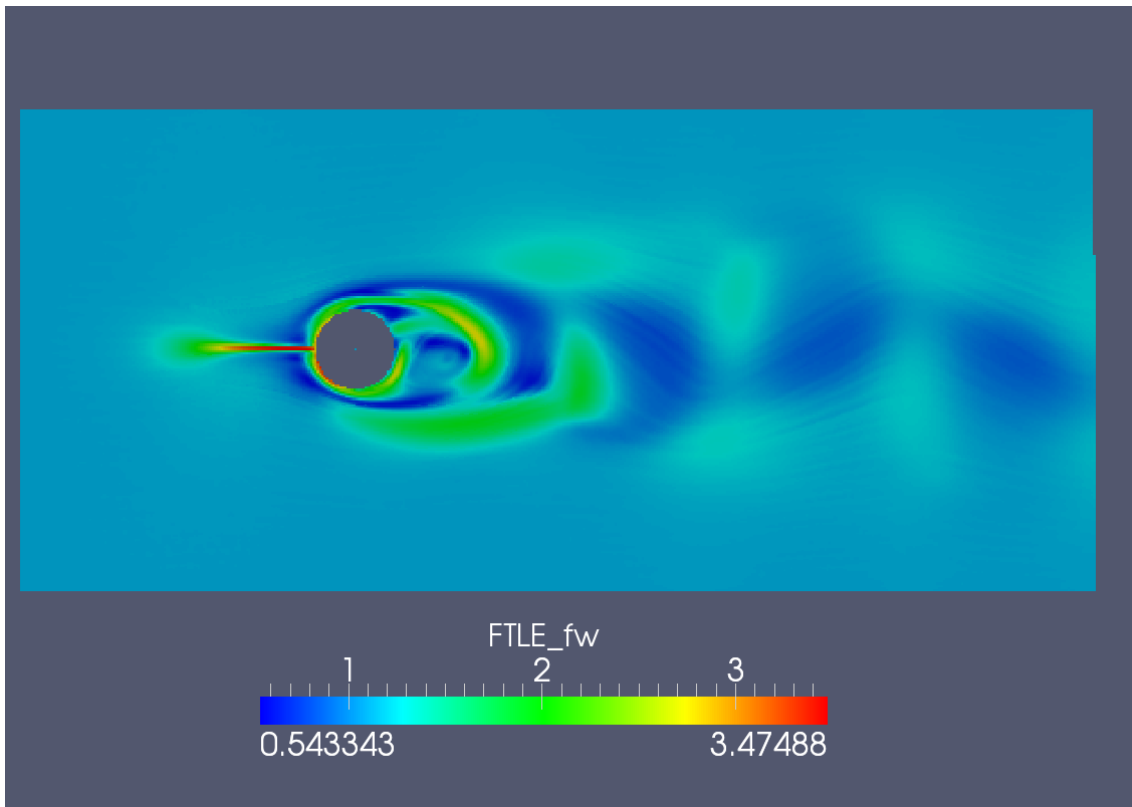


Abb. 12: FTLE-Wert („vorwärts“) am Beispiel der Kármánschen Wirbelstraße

Verengung der Strömung (vgl. Abbildung 14 Fall „2“) handeln. Um dies entscheiden zu können, ist es notwendig, auch die zeitlich negative Richtung zu untersuchen, da nur aus beiden Aussagen hierzu eine entsprechende Aussage getroffen werden kann. Dies ist besonders wichtig, falls die Untersuchung des FTLE-Wertes als nachgeschaltetes Werkzeug zur Strömungsanalyse verwendet werden soll.

Wird der FTLE-Wert jedoch während der Strömungssimulation verwendet, um anhand dieses Wertes Veränderungen direkt durchführen zu können, so kann nur der zeitlich positive Anteil berücksichtigt werden. Dies kann, je nach Betrachtung, jedoch schon ausreichen. Beispielsweise wenn keine komplette FTLE-Analyse während der Berechnung durchgeführt werden soll, sondern nur gewisse Aussagen Verwendung finden sollen. So gibt ein sich vergrößernder FTLE-Wert beispielsweise, unabhängig von der „Historie“ der Strömung, an, dass Partikel sich auseinander bewegen. Ein solcher Wert kann dann wiederum vom Partikelverfahren verwendet werden, um Änderungen am Strömungslöser durchzuführen. Beispiele hierfür sind, etwa Kernvariationen oder Veränderungen des Multipolansatzes bei entsprechenden FTLE-Werten.

Die Berechnung des FTLE-Wertes über Satelliten-Partikel hat jedoch den Nachteil,

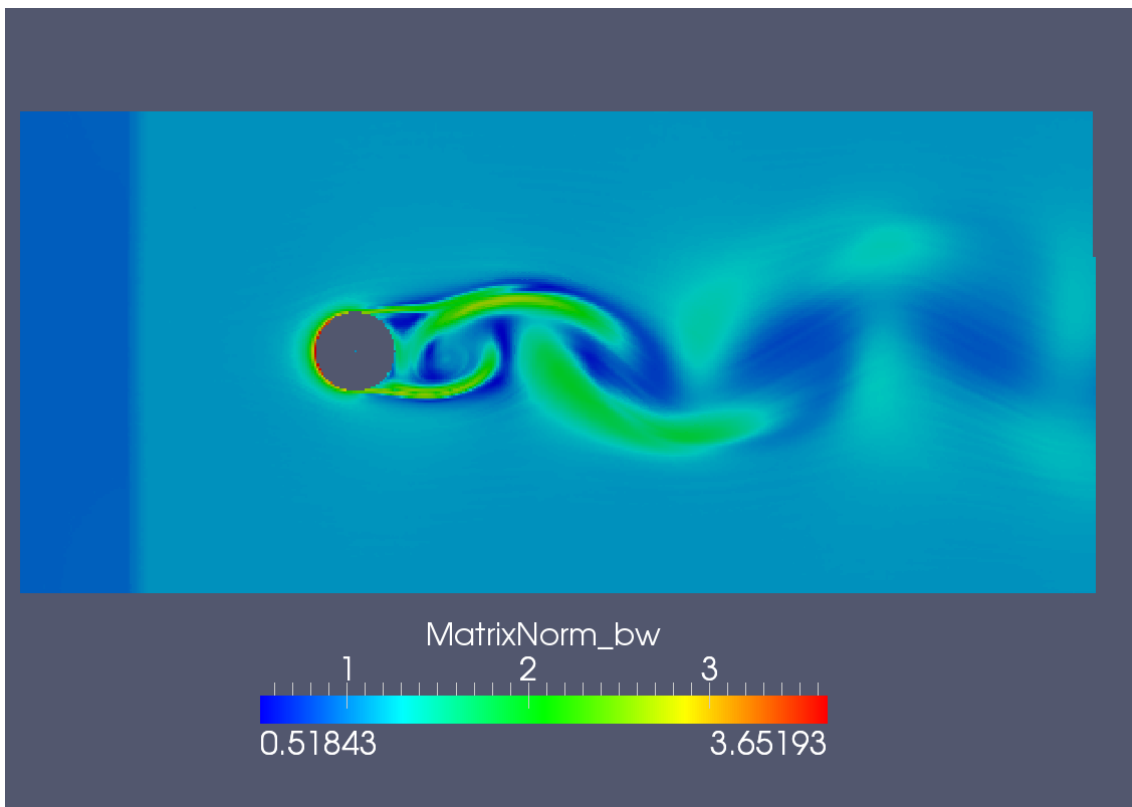


Abb. 13: FTLE-Analyse („rückwärts“) am Beispiel der Kármánschen Wirbelstraße

dass die Partikel sich in der Strömung sehr stark voneinander entfernen können. Besonders bei drehenden Strömungen besteht dann die Gefahr, dass die Berechnung des Eigenwertes des Cauchy-Green Verzerrungstensors Werte liefert, die nicht zwangsläufig auf eine Deformation des Gebietes hindeuten müssen.

Als Beispiel sei an dieser Stelle ein einfacher Wirbel, mit betragsmäßig konstanter Geschwindigkeit, angeführt. Das Geschwindigkeitsfeld dieses Wirbels sorgt dafür, dass die Satelliten-Partikel schneller bzw. langsamer als ihre Basis-Partikel bewegt werden, da sie auf verschiedenen Kreisbahnen positioniert sind. Dadurch entsteht eine Verzerrung und demzufolge ein entsprechender FTLE-Wert. Jedoch kann es passieren, dass die Partikel sich soweit voneinander entfernen, dass die einzelnen Achsen der Satelliten Partikel quasi zusammenklappen und somit bei der Eigenwertbetrachtung imaginäre Anteile entstehen. Von der Strömungsstruktur bewegen sich die Partikel allerdings auf einer zyklischen Kreisbahn, sodass sich zwar die einzelnen Partikel, nicht aber die Trajektorien voneinander entfernen.

Aus diesem Grund liegt es nahe, die FTLE-Analyse über die Transportgleichung des absoluten Deformationsgradiententensor zu berechnen.

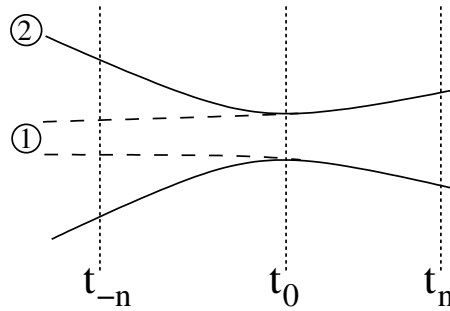


Abb. 14: Uneindeutigkeit bei der Trajektorienanalyse

5.1.3 FTLE mit Transportgleichung

Da für die Berechnung des FTLE-Wertes nach Gleichung (136) vornehmlich der rechte Cauchy-Green Verzerrungstensor \mathbf{C} benötigt wird und die Satelliten-Partikel nur zur Berechnung dieses Tensors eingeführt wurden, liegt es nahe, auch weitere Berechnungsmethoden für \mathbf{C} zu untersuchen.

Der Cauchy-Green Verzerrungstensor ergibt sich aus dem symmetrischen Produkt des absoluten Deformationsgradiententensors ($\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$), weshalb sich die Frage stellt, wie dieser, ohne Satelliten-Partikel zu nutzen, berechnet werden kann. Dies geschieht über die Evolutionsgleichung des absoluten Deformationsgradiententensors

$$\frac{D\mathbf{F}}{Dt} = \mathbf{L} \cdot \mathbf{F}, \quad (139)$$

womit der Zusammenhang zum Geschwindigkeitsfeld ausgenutzt wird.

Als Startbedingung dieses Anfangswertproblems wird davon ausgegangen, dass zum Zeitpunkt t_0 keine Verzerrungen im Gebiet vorhanden sind und damit \mathbf{F} gleich dem Einheitstensor ist. Als weitere Größe in der Gleichung (139) wird der Geschwindigkeitsgradiententensor \mathbf{L} zu jedem Zeitschritt benötigt. Um diesen bei gegebenen Datensätzen zu berechnen, können verschiedene Verfahren (wie z.B. Interpolation) verwendet werden. Da dies jedoch relativ aufwändig ist, bietet es sich an diesen Stellen an, weiterhin den FTLE-Wert mittels Satelliten-Partikel zu ermitteln.

Bei der Berechnung des FTLE-Wertes während einer Simulation jedoch, benötigen einige Verfahren per Definition ebenfalls \mathbf{L} (vgl. Kapitel 4), sodass dieser Wert bereits vorliegt. Dies hat auch den Vorteil, dass keine zusätzlichen Fehler durch etwaige Interpolationsverfahren entstehen, sondern der wirkende Gradient verwendet wird.

In der Gleichung (139) stellt der Geschwindigkeitsgradient den antreibenden Faktor, für die Verformung eines Fluidelementes dar. Daher liegt die Bestrebung na-

he, diesen Gradienten in einen Verzerrungs- (\mathbf{D}) und einen Rotationsanteil (\mathbf{W}) (vgl. Abschnitt 2.4) zu zerlegen, um so bei der FTLE-Analyse nur einen Anteil zu berücksichtigen. Dies ist jedoch in dieser Form unnötig, da nach Definition des Cauchy-Green Verzerrungstensors ($\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$) dieser nur die Verzerrung, nicht aber die Drehung der Fluidelemente repräsentiert. Somit wird direkt nur der Verzerrungsanteil \mathbf{D} verwendet.

5.2 Unterteilung der Verformung

Eine weitere Möglichkeit der Analyse der Strömungsstruktur besteht in der Untersuchungen der Einzelkomponenten des Geschwindigkeitsgradiententensors \mathbf{L} . Hierdurch soll eine gezielte Untersuchung der Strömung hinsichtlich Dehnung bzw. Stauchung und Scherung durchgeführt werden. Dies ermöglicht, gegenüber der FTLE-Analyse, eine genauere Untersuchung einer speziellen Komponente.

Dafür ist als erstes zu klären, wie Dehnungen bzw. Stauchungen und Scherung gegeneinander abgegrenzt werden und was dies aus strömungsmechanischer Sicht bedeutet (vgl. [Tru96]). Zudem muss ein geeignetes Maß gefunden werden, um die jeweilige Verzerrung berechnen zu können.

5.2.1 Schergeschwindigkeit

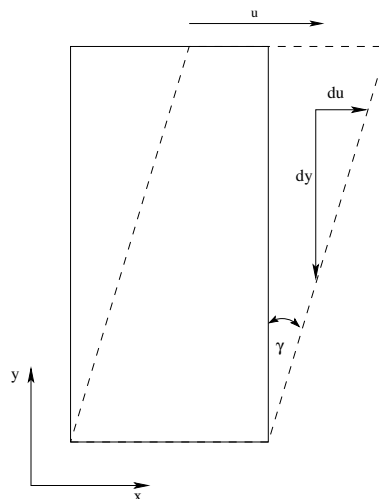


Abb. 15: Schematische Darstellung der Schergeschwindigkeit

Die Schergeschwindigkeit $\dot{\gamma}$ oder auch Scherrate, welche die Kennzahl für eine Scherung darstellt, wird anhand der Abbildung 15 (vgl. [MHMS02]) schematisch gezeigt.

In dieser Abbildung ist ein Fluidelement dargestellt, bei dem zwei verschiedene Geschwindigkeiten in x-Richtung wirken, wobei die Geschwindigkeit in y-Richtung jeweils Null ist. Der Betrag der jeweiligen Geschwindigkeit spielt dabei keine Rolle, weshalb die Geschwindigkeit $\vec{u}_0 = 0$ und $\vec{u}_1 = \vec{u}$ gesetzt ist. Dadurch kann die Gleichung

$$\frac{du_1}{dy} = \frac{d}{dy} \left(\frac{ds}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dy} \right) = \frac{d\gamma}{dt} = \dot{\gamma} \quad (140)$$

für die Schergeschwindigkeit $\dot{\gamma}$ angegeben werden, wobei $\frac{ds}{dt}$ die überstrichene Strecke pro Zeit und somit die Geschwindigkeit u_1 darstellt. Somit kann die Schergeschwindigkeit als Änderung der Tangentialkomponente des Geschwindigkeitsfeldes normal zur Strömungsrichtung verstanden werden. Bei reinen Scherströmungen bewegen sich somit zwei Partikel a, b mit $x(a) = x(b)$ und $y(a) \neq y(b)$ auf parallelen Bahnen, jedoch mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten.

5.2.2 Dehngeschwindigkeit

Die Dehngeschwindigkeit $\dot{\epsilon}$ oder auch Dehnrates stellt die maßgebliche Kennzahl für die Dehnung innerhalb einer Strömung dar. Auch die Dehngeschwindigkeit kann über die Änderung des Geschwindigkeitsfeldes bezüglich der Strömungsrichtung definiert werden. Dies soll anhand der Abbildung 16 verdeutlicht werden. So ist in dieser

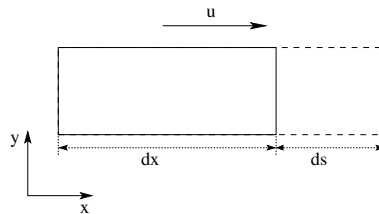


Abb. 16: Schematische Darstellung der Dehngeschwindigkeit

Abbildung ein Fluidelement dargestellt, bei dem die Geschwindigkeit ebenfalls nur in x-Richtung einen von Null verschiedenen Wert besitzt. Anders als in Abbildung 15 wird nun jedoch nicht der „untere Rand“ des Fluidelements, sondern der „linke Rand“ konstant gehalten. Dadurch findet eine Verformung des Fluidelementes statt, welche durch die Dehngeschwindigkeit $\dot{\epsilon}$ anhand der Gleichung

$$\frac{du_1}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{ds}{dt} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dx} \right) = \frac{d\epsilon}{dt} = \dot{\epsilon} \quad (141)$$

beschrieben werden kann, wobei wiederum der Zusammenhang $u_1 = \frac{ds}{dt}$ gilt. Somit wird deutlich, dass die Dehngeschwindigkeit eine Änderung der Tangentialkompo-

nente des Geschwindigkeitsfeldes in Strömungstangentenrichtung darstellt. Im Dreidimensionalen kann die Dehnung nicht nur anhand einer einzigen Richtung untersucht werden, sondern muss für jede Hauptachse durchgeführt werden. Diese drei Dehnungen werden nach Abschnitt 5.4.1 als $\dot{\epsilon}_t$ (Tangentialrichtung), $\dot{\epsilon}_n$ (Normalenrichtung) und $\dot{\epsilon}_b$ (Binormalenrichtung) bezeichnet, wobei mit $\dot{\epsilon}_t$ die Dehnrates in Strömungsrichtung bezeichnet wird. Bei inkompressiblen Fluiden ergibt sich hierbei aufgrund der Divergenzfreiheit $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ (vgl. Abbildung 4) der Zusammenhang, dass für die Summe aller Einzeldehnungen

$$\dot{\epsilon}_t + \dot{\epsilon}_n + \dot{\epsilon}_b = 0 \quad (142)$$

gelten muss, um eine Volumenerhaltung zu garantieren. Daher wird in den meisten Fällen nur die Dehnung in Strömungsrichtung ($\dot{\epsilon}_t$) als relevante Größe betrachtet.

5.2.3 Verformungsgeschwindigkeit

Desweiteren kann an dieser Stelle, vergleichbar mit der FTLE-Analyse, die kumulierte Betrachtung der einzelnen Verformungen durchgeführt werden. Diese Größe wird im Folgenden als Verformungsgeschwindigkeit $\dot{\zeta}$ (in der Rheologie wird für diese Größe oft $\dot{\gamma}$ verwendet) bezeichnet und kann über den Verzerrungsgeschwindigkeitstensor \mathbf{D} durch

$$\dot{\zeta} = \sqrt{\frac{1}{2} \text{tr}((\mathbf{L} + \mathbf{L}^T)^2)} = \sqrt{2 \text{tr}(\mathbf{D}^2)} \quad (143)$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}^2 = & 2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right)^2 \\ & + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right)^2 \end{aligned} \quad (144)$$

definiert werden. Damit liefert die Verformungsgeschwindigkeit nur eine Aussage, ob eine Verformung jeglicher Art auftritt. Sie gibt keinen Hinweis darauf, um was für eine Verformung (Dehnung bzw. Stauchung oder Scherung) es sich handelt, oder wie diese orientiert ist.

5.3 Deformation im lokalen, mitgeführten Koordinatensystem

Nach den Definitionen der Scher- bzw. Dehngeschwindigkeit und Verformungsgeschwindigkeit wird ersichtlich, dass die Kenntniss über die Strömungsrichtungen unabdingbar für die Berechnung dieser charakteristischen Größen ist. Deutlich wird dies beispielsweise an einer Scherströmung, die zwischen zwei Platten entsteht (vgl. Abbildung 17). Sind die beiden Platten so angeordnet, dass die entstehende Scherströmung parallel zur x-Achse ist (vgl. Abbildung 17(a)), so kann die Schergeschwindigkeit $\dot{\gamma}$ direkt aus (140) und die Dehngeschwindigkeit $\dot{\epsilon}$ direkt aus (141) berechnet werden. Da es sich um eine reine Scherströmung handelt, gilt demnach $\dot{\epsilon} = 0$.

Werden die beiden Platten nun jedoch gedreht (vgl. Abbildung 17(b)), ohne weitere Anpassungen vorzunehmen, so ist die Berechnung für $\dot{\gamma}$ und $\dot{\epsilon}$ in dieser Form nicht mehr korrekt. Beispielsweise liefert die an sich gleiche Strömung $\dot{\epsilon} \neq 0$, was auf eine Dehnung hinweist, die es jedoch gar nicht gibt.

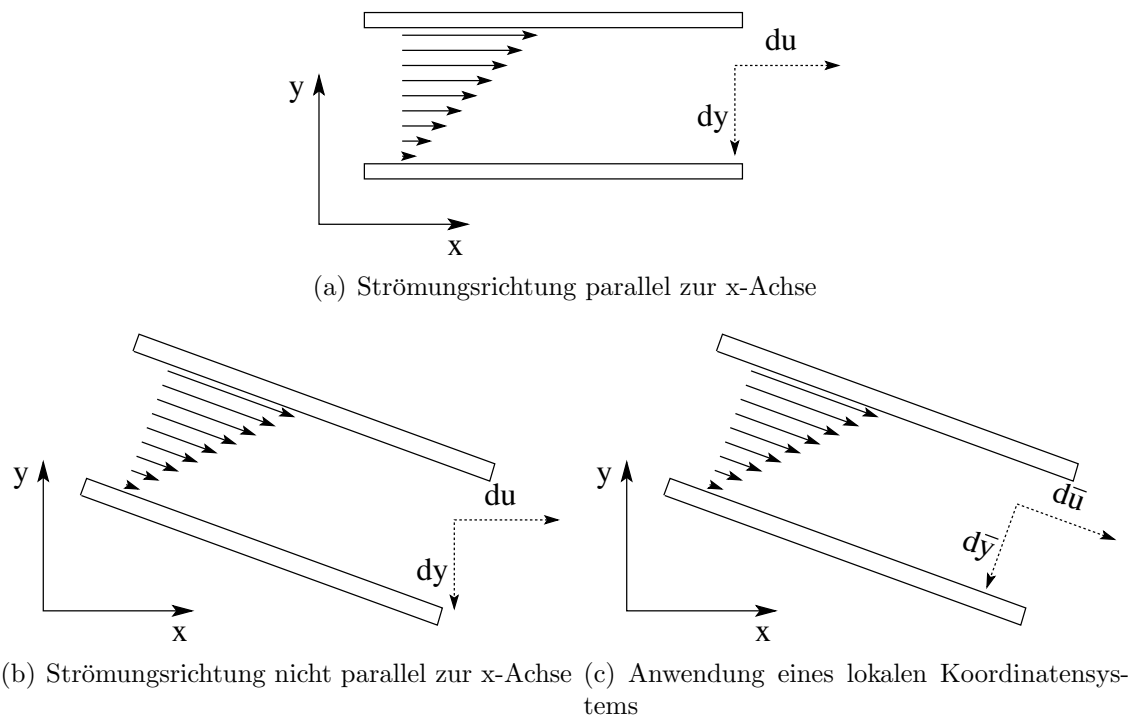


Abb. 17: Scherströmung zwischen zwei Platten

Die Lösung dieses Problems besteht in der Anpassung der Betrachtungsrichtung. Denn $\dot{\gamma}$ ist an sich nicht über die Änderung der Geschwindigkeit entlang einer Koordinatenachse, sondern entlang der Strömungsrichtung definiert. Daher ist es notwendig, eine Transformation in ein lokales Koordinatensystem, welches an der

Strömungsrichtung orientiert ist, zu betrachten. Die so transformierten Größen werden im Folgenden mit einer Tilde markiert.

Da der Geschwindigkeitsgradiententensor \mathbf{L} , die für $\dot{\gamma}$ und $\dot{\epsilon}$ benötigten Informationen darstellt, ist es notwendig, diesen an jedem Betrachtungspunkt in ein lokales Koordinatensystem zu überführen. Dafür wird eine Transformationsmatrix \mathbf{T} und die Beziehung

$$\tilde{\mathbf{L}} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{T}^T \quad (145)$$

verwendet. \mathbf{T} soll dabei so gewählt sein, dass das entstehende lokale System mit der x-Achse in Strömungsrichtung orientiert ist. Hierdurch ergibt sich nach [Wol10] die aus drei orthonormalen Vektoren bestehende Matrix

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \vec{t}_1 \\ \vec{t}_2 \\ \vec{t}_3 \end{pmatrix}. \quad (146)$$

Der Vektor \vec{t}_1 stellt die x-Achse dar und wird demnach als

$$\vec{t}_1 = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \quad (147)$$

definiert. Ausgehend davon kann \vec{t}_2 als Kreuzprodukt von \vec{t}_1 bzw. \vec{u} mit einem beliebigen anderen Vektor \vec{t} dargestellt werden. Da ein beliebiger Vektor möglich ist, wurde $\vec{t} \equiv 1$ gewählt, wodurch sich

$$\vec{t}_2 = \frac{\vec{u} \times \vec{t}}{\|\vec{u} \times \vec{t}\|} \quad (148)$$

ergibt. Dementsprechend kann der Vektor \vec{t}_3 durch

$$\vec{t}_3 = \frac{\vec{t}_1 \times \vec{t}_2}{\|\vec{t}_1 \times \vec{t}_2\|} \quad (149)$$

orthonormal zu den beiden anderen konstruiert werden. Somit ist das Orthonormalsystem definiert.

Auf Basis dieses lokalen Koordinatensystems, dessen x-Achse in Strömungsrichtung zeigt, können die entsprechenden Auswertungen durchgeführt werden. Dabei gilt der

folgende Zusammenhang mit der Verformungsgeschwindigkeit

$$\begin{aligned} \dot{\zeta}^2 = & 2 \left(\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \tilde{x}_1} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \tilde{x}_2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \tilde{x}_3} \right)^2 \\ & + \left(\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \tilde{x}_2} + \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \tilde{x}_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \tilde{x}_3} + \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \tilde{x}_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \tilde{x}_3} + \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \tilde{x}_2} \right)^2, \end{aligned} \quad (150)$$

welche nach [Wol10] in zwei einzelne Komponenten zerlegt werden kann. Diese sind zum einen die Dehngeschwindigkeit in Strömungsrichtung

$$\dot{\epsilon}_t = \sqrt{2 \left(\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \tilde{x}_1} \right)^2} = \sqrt{2} \frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \tilde{x}_1} \quad (151)$$

und die Schergeschwindigkeit

$$\dot{\gamma}_t = \sqrt{\left(\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \tilde{x}_2} + \frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \tilde{x}_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial \tilde{x}_3} + \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \tilde{x}_1} \right)^2} \quad (152)$$

in Strömungsrichtung. Es ist zu beachten, dass bei $\dot{\epsilon}_t$ das Vorzeichen eine entscheidende Rolle spielt, da hierdurch zwischen einer Dehnung und einer Stauchung unterschieden werden kann. Desweiteren muss im dreidimensionalen Fall die Schergeschwindigkeit um weitere Terme ergänzt werden, um die gesamte Scherung darzustellen. In der Gleichung (152) werden jedoch die von der Hauptrichtung verschiedenen Terme nicht beachtet, sodass nur die in Richtung der Strömung eingeschränkte Scherung $\dot{\gamma}_t$ betrachtet wird.

Somit verbleiben noch drei weitere Terme

$$\dot{\zeta}_{nb} = \sqrt{2 \left(\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \tilde{x}_2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \tilde{x}_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \tilde{x}_3} + \frac{\partial \tilde{u}_3}{\partial \tilde{x}_2} \right)^2}, \quad (153)$$

welche in [Wol10] als Richtungsgradient bezeichnet werden und eine Änderung der Normalenkomponente der Geschwindigkeit normal zur Strömungsrichtung beschreiben. Bei genauer Betrachtung dieser Terme ist zu erkennen, dass sie die zweidimensionale Verformungsrate in der nb-Ebene darstellen. Daher wird im Folgenden für $\dot{\zeta}_{nb}$ die Bezeichnung planare Verformungsrate verwendet.

Für zweidimensionale Strömungen vereinfacht sich $\dot{\zeta}_{nb}$, da die Terme in die dritte Raumrichtung erwartungsgemäß identisch verschwinden und somit nur noch

$$\dot{\zeta}_{nb} = \sqrt{2 \left(\frac{\partial \tilde{u}_2}{\partial \tilde{x}_2} \right)^2} = \dot{\epsilon}_n, \quad (154)$$

verbleibt. Dieser Term stellt die Dehngeschwindigkeit in Normalenrichtung dar. Da innerhalb der vorliegenden Arbeit ausschließlich inkompressible Strömungen ($\nabla \cdot \vec{u} = 0$) betrachtet werden, muss für die Summe der Dehnraten die Gleichung (142) gelten. Da bei zweidimensionalen Strömungen $\dot{\epsilon}_b$ entfällt, gilt nach Gleichung (154)

$$\dot{\zeta}_{nb} = \dot{\epsilon}_n = -\dot{\epsilon}_t, \quad (155)$$

womit die Auswertung von $\dot{\zeta}_{nb}$ keine zusätzliche Information gegenüber $\dot{\epsilon}_t$ ergibt.

Der Vorteil der planaren Verformung im Dreidimensionalen besteht darin, dass sie es ermöglicht, eine Aussage über ein Abweichen der Strömungsrichtung der Nachbarpartikel treffen zu können. Für das Beispiel aus Abbildung 17 würde $\dot{\zeta}_{nb} \neq 0$ ein Aufbrechen der Parallelität innerhalb der Strömung bedeuten.

Abschließend kann als Zusammenhang der vorgestellten Verformungsgeschwindigkeit die Gleichung

$$\dot{\zeta} = \sqrt{2tr(\mathbf{D}^2)} = \sqrt{\dot{\gamma}_t^2 + \dot{\epsilon}_t^2 + \dot{\zeta}_{nb}^2} \quad (156)$$

angegeben werden. Somit kann aus dem Verhältnis der einzelnen Komponenten zur gesamten Verformungsgeschwindigkeit eine Aussage darüber getroffen werden, ob es sich vornehmlich um eine Dehn- oder eine Scherströmung handelt.

5.4 Verformungsbeschleunigung

Im Folgenden sollen die eingeführten Verformungsgeschwindigkeiten um zusätzliche charakteristische Größen ergänzt werden. Hierzu ist es notwendig, das bisher definierte lokale Koordinatensystem genauer zu betrachten. Dieses wurde durch die Gleichungen (146), (147), (148) und (149) definiert, wobei die einzige Nebenbedingung darin bestand, dass die \vec{x} -Achse an der Strömungsrichtung \vec{u} ausgerichtet ist. Dadurch ist jedoch kein vollständiges Orthonormalsystem definiert, weshalb ein beliebiger anderer Vektor (im speziellen $(1, 1, 1)^T$) verwendet wird um einen zu \vec{v} orthonormalen Vektor zu erhalten. Aus dem Kreuzprodukt dieser beiden Vektoren errechnet sich daraufhin die letzte Koordinatenachse des Systems.

Damit ist dieses System jedoch zum Teil willkürlich gewählt, was bei den bisherigen Untersuchungen von $\dot{\gamma}_t$, $\dot{\epsilon}_t$, $\dot{\zeta}_{nb}$ und $\dot{\zeta}$ keinen Einfluss hatte. Bei der Verwendung einer Basis, die nicht willkürlich, sondern auf der Grundlage von Strömungsgrößen gewählt wurde, können zusätzliche charakteristische Größen definiert werden. Weshalb im Folgenden ein Koordinatensystem basierend auf den Frenetschen Formeln verwendet wird. Diese sind nach [Car93] und [Gro91] für parametrisierte Kurven definiert.

5.4.1 Frenetsche Formeln

Für parametrisierte Kurven kann ein lokales Orthonormalsystem im Punkt \vec{x} angegeben werden, welches, wie in Abbildung 18 schematisch dargestellt, konstruiert ist. Der

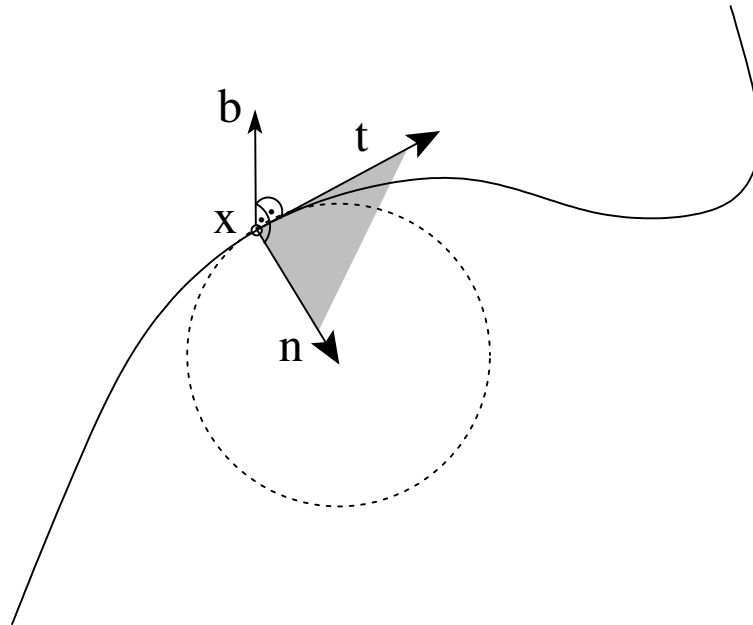


Abb. 18: Schematische Darstellung einer Raumkurve mit Schmiegekreis

Tangentenvektor \vec{t} zeigt dabei in Tangentialrichtung und der Normalenvektor \vec{n} in Krümmungsrichtung der Kurve. Der Binormalenvektor \vec{b} ist entsprechend senkrecht zu \vec{t} und \vec{n} konstruiert. Die Krümmungsrichtung wird prinzipiell über einen „Schmiegekreis“ definiert. Ein „Schmiegekreis“ ist dabei derjenige Kreis, der die Kurve in einem lokalen Punkt am besten annähert. Die Krümmungsrichtung \vec{n} definiert sich dann als Vektor zwischen \vec{x} und dem Mittelpunkt des „Schmiegekreises“ (vgl. Abbildung 18), wobei der Betrag von \vec{n} als Krümmungsradius ρ bzw. der Kehrwert als Krümmung κ bezeichnet wird. Die durch die Vektoren \vec{t} und \vec{n} aufgespannte Ebene wird Schmiegeebene genannt. Diese drei Vektoren (\vec{t} , \vec{b} und \vec{n}) und das daraus resultierende System werden als Frenetsches Dreibein bezeichnet und sind nach dem französischen Mathematiker Jean Frédéric Frenet (1816 - 1900) benannt.

Die parametrisierte Raumkurve $\vec{r}(\cdot)$ kann über jeden beliebigen Parameter definiert werden, sofern für diesen eine eindeutige Zuordnung möglich ist. Die einfachste Zuordnung erfolgt dabei nach [Gro91] über die Bogenlängen s , welche die Länge entlang der Kurve, gemessen von einem willkürlichen Startpunkt, angibt. Daher wird diese Parameterdarstellung $\vec{r}(s)$ zur Definition der Frenetschen Gleichungen verwendet. Aufgrund dieser Definition ergeben sich einige Vereinfachungen bei den

Berechnungen der zuvor eingeführten Vektoren. Nach der Definition des Differenzenquotienten

$$\frac{d\vec{r}(s)}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(s + \Delta s) - \vec{r}(s)}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s}, \quad (157)$$

wobei für hinreichend kleine Δs der Zusammenhang

$$\|\Delta \vec{r}\| \approx \Delta s \quad (158)$$

gilt, ist zu erkennen, dass dieser den Tangenten-Einheitsvektor darstellt. Demzufolge wird \vec{t} durch

$$\vec{t} = \frac{d\vec{r}(s)}{ds} \quad \text{mit} \quad \|\vec{t}\| = 1 \quad (159)$$

definiert.

Im nächsten Schritt ist der Normalenvektor \vec{n} zu bestimmen. Dieser kann als Richtungsänderung des Tangentenvektors interpretiert werden. Da $\|\vec{t}\| = 1$ gilt, liefert

$$\kappa \vec{n} = \frac{d\vec{t}(s)}{ds} = \frac{d^2\vec{r}(s)}{ds^2}, \quad (160)$$

den Normalenvektor als Einheitsvektor.

Der dritte Vektor steht senkrecht auf der Schmiegebene, wobei er so gewählt wird, dass ein Rechtssystem entsteht. Demzufolge sei die Binormale \vec{b} durch

$$\vec{b} = \vec{t} \times \vec{n} \quad (161)$$

bestimmt. Nachdem nach Gleichung (161) die Binormale bestimmt werden kann, soll im Folgenden die zeitliche Entwicklung der Binormalen betrachtet werden. Da die Binormale stets senkrecht auf der Schmiegebene steht, liefert demnach der Betrag der zeitlichen Ableitung

$$\tau = \left\| \frac{d\vec{b}}{ds} \right\| \quad (162)$$

wie schnell sich die Lage der Schmiegebene ändert. Dieses Maß wird als Torsion τ bezeichnet. Da es sich bei der Binormalen ebenfalls um einen Einheitsvektor handelt, kann eine Aussage über die Richtung der zeitlichen Ableitung getroffen werden.

Hierzu wird die Differentiation auf die Gleichung (161) angewendet. Nach Anwendung der Produktregel ergibt sich die Gleichung

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = \frac{d\vec{t}}{ds} \times \vec{n} + \vec{t} \times \frac{d\vec{n}}{ds} = \kappa \vec{n} \times \vec{n} + \vec{t} \times \frac{d\vec{n}}{ds} = \vec{t} \times \frac{d\vec{n}}{ds}, \quad (163)$$

wodurch deutlich wird, dass die Ableitung der Binormalen orthogonal zum Tangen-

tenvektor ist. Zudem steht die Ableitung senkrecht auf der Binormalen. Daraus kann gefolgert werden, dass die Ableitung der Binormalen in Richtung des Normalenvektors \vec{n} zeigt, wodurch

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = \tau\vec{n} \quad (164)$$

definiert werden kann.

Bei der Betrachtung der Definitionen für \vec{t} , \vec{b} und \vec{n} ist zu erkennen, dass Punkte auf der parametrisierten Kurve entstehen können, an denen einige dieser Vektoren identisch verschwinden. Beispielsweise ist laut Definition der Betrag von \vec{n} identisch null, sobald die Krümmung der Kurve null ist. Geometrisch bedeutet dies, dass die Kurve in diesem Bereich gerade ist. Bezogen auf die Kurve kann dieser Sachverhalt auch durch die Ableitungen ausgedrückt werden. Dies bedeutet, dass, falls die Krümmung null ist, gleichzeitig auch die zweite Ableitung der Raumkurve verschwindet. Punkte, an denen dies auftritt, werden singuläre Punkte der Ordnung eins genannt. Entsprechend sind singuläre Punkte der Ordnung null Punkte, an denen die erste Ableitung der Raumkurve verschwindet. Da an diesen Punkten kein, in der bisherigen Form definiertes, Frenetsches Dreibein aufgebaut werden kann, ist es notwendig, diese Punkte explizit zu behandeln. Wie dies im speziellen geschieht, wird in Abschnitt 5.4.2 dargestellt.

Damit ist ein lokales orthonormales Koordinatensystem für eine nach der Bogenlänge s parametrisierte Kurve konstruiert. Die zusätzlichen charakteristischen Größen Krümmung κ und Torsion τ folgen direkt aus der Definition dieses Systems. Diese Größen beschreiben das lokale Verhalten einer parametrisierten Raumkurve vollkommen. Daher liegt es nahe, diese Konstruktion auf die Partikeltrajektorie $\phi(P, t)$ zu übertragen.

5.4.2 Partikeltrajektorie im Frenetschen Dreibein

Soll die für parametrisierte Kurven dargestellte Konstruktion eines Frenetschen Dreibeins auf die Partikeltrajektorie durchgeführt werden, so muss nach [Gro91] eine Überführung der zeitabhängigen Funktion $\phi(P, t)$ in eine nach dem Bogenlänge s parametrisierte Kurve $\vec{r}(s)$ stattfinden. Eine solche Überführung ist jedoch aufwendig, sodass eine Konstruktion eines Frenetschen Dreibeins im Folgenden auf andere Weise durchgeführt werden soll.

Der Tangentialvektor stellt die Geschwindigkeit \vec{u} des Partikels zur aktuellen Zeit

dar und lässt sich analog durch

$$\begin{aligned}\vec{t}_\phi &= \frac{d\phi(P, t)}{dt} = \vec{u} \\ \vec{t} &= \frac{\vec{t}_\phi}{\|\vec{t}_\phi\|}\end{aligned}\tag{165}$$

berechnen. Daher stellt sich die Frage, in welche Richtung die zweite Zeitableitung der Partikeltrajektorie, also die Beschleunigung \vec{a} , im Vergleich zu der Ableitung von $\vec{r}(s)$ zeigt. Dieser Vektor verbleibt in der Schmiegebene, was über die Definition der Beschleunigung erklärt werden kann. Dazu wird die Geschwindigkeit als Produkt des Geschwindigkeitsbetrages und des Tangenteneinheitsvektors

$$\vec{u} = \|\vec{u}\|\vec{t}\tag{166}$$

dargestellt. Da die Beschleunigung als Zeitableitung der Geschwindigkeit definiert ist, folgt durch Einsetzen:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d(\|\vec{u}\|\vec{t})}{dt} = \frac{d\|\vec{u}\|}{dt}\vec{t} + \|\vec{u}\|\frac{d\vec{t}}{dt}.\tag{167}$$

Die Ableitung des Tangenteneinheitsvektors kann unter Berücksichtigung der Bogenlänge durch

$$\frac{d\vec{t}}{dt} = \frac{d\vec{t}}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{\vec{n}}{\rho} \|\vec{u}\|\tag{168}$$

berechnet werden. Der Krümmungsradius ρ soll an dieser Stelle durch die bisher betrachtete Größe Krümmung $\kappa = \frac{1}{\rho}$ ersetzt werden. Dadurch kann die Beschleunigung \vec{a} additiv in einen zur Bewegungsrichtung \vec{u} parallelen Anteil (Tangentialbeschleunigung)

$$a_t = \frac{d\|\vec{u}\|}{dt}\tag{169}$$

und eine dazu orthogonal stehende Normalbeschleunigung

$$a_n = \|\vec{u}\|^2 \kappa\tag{170}$$

durch

$$\vec{a} = a_t \vec{t} + a_n \vec{n}\tag{171}$$

zerlegt werden. Daraus folgt direkt, dass die Beschleunigung immer in der Scher-

ebene liegt, weshalb der Binormalenvektor sofort durch

$$\vec{b} = \frac{\vec{u} \times \vec{a}}{\|\vec{u} \times \vec{a}\|} \quad (172)$$

berechnet werden kann. Demzufolge ist auch der Normalenvektor durch nochmaliges Anwenden des Kreuzproduktes

$$\vec{n} = \frac{\vec{b} \times \vec{u}}{\|\vec{b} \times \vec{u}\|} \quad (173)$$

zu bestimmen.

Da sich somit die Krümmung direkt ergibt, wird sie im Folgenden ebenfalls als Größe mitbetrachtet. Da die Krümmung als Inverse des Scherkreisradius bei kleinen Radien sehr schnell große Werte annimmt, wird sie bei der Verwendung als charakteristische Größe ausschließlich logarithmisch betrachtet.

Nachdem somit ein Frenetsches Dreibein für die Partikeltrajektorie beschrieben werden kann, sollen darauf aufbauend weitere charakteristische Größen untersucht werden. Deswegen soll im Folgenden die in Gleichung (151) dargestellte Dehngeschwindigkeit $\dot{\epsilon}_t$ näher betrachtet werden.

Die Dehngeschwindigkeit ermöglicht eine Aussage darüber, ob Fluidelemente gedehnt oder gestaucht werden. Beispielsweise tritt dieser Effekt bei Verengungen auf. Allerdings interessiert dabei nicht nur, wie stark eine auftretende Dehnung ist, sondern auch, ob diese abrupt oder eher kontinuierlich wirkt. Daher kann es sinnvoll sein, auch die zeitliche Änderung der Dehngeschwindigkeit die Dehnbeschleunigung $\ddot{\epsilon}_t$ in Strömungsrichtung zu betrachten. Wird die zeitliche Ableitung auf die Gleichung (151) angewendet, so ergibt sich durch den Satz von Schwarz die Gleichung

$$\frac{d\dot{\epsilon}_t}{dt} = \sqrt{2} \frac{d}{dt} \frac{d\tilde{u}_1}{d\tilde{x}_1} = \sqrt{2} \frac{d}{d\tilde{x}_1} \frac{d\tilde{u}_1}{dt} = \sqrt{2} \frac{da_1}{d\tilde{x}_1} = \ddot{\epsilon}_t \quad (174)$$

für die Dehnbeschleunigung.

Die gleiche Betrachtung kann auch für die Schergeschwindigkeit $\dot{\gamma}$ durchgeführt werden. Daher liegt es nahe, die zeitliche Ableitung direkt für die Verformungsgeschwindigkeit aus Gleichung (150) anzuwenden und dann die einzelnen resultierenden Terme zu betrachten. Hierfür ist es allerdings notwendig, die zeitliche Entwicklung des Verzerrungsgeschwindigkeitstensors \mathbf{D}

$$\mathbf{M} = \frac{d\mathbf{D}}{dt} \quad (175)$$

zu betrachten, wodurch der Verzerrungsbeschleunigungsstensors \mathbf{M} entsteht. Dieser soll konsequenterweise im Folgenden für die Berechnung der Verformungsbeschleunigung $\ddot{\zeta}$ verwendet werden. Unter Verwendung des gleichen Vorgehens wie bei $\dot{\zeta}$ ergibt sich

$$\ddot{\zeta} = \sqrt{2tr(\mathbf{M}^2)} \quad (176)$$

für $\ddot{\zeta}$. In Komponentendarstellung folgt somit

$$\begin{aligned} \ddot{\zeta}^2 = & 2 \left(\frac{\partial \tilde{a}_1}{\partial \tilde{x}_1} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \tilde{a}_2}{\partial \tilde{x}_2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \tilde{a}_3}{\partial \tilde{x}_3} \right)^2 \\ & + \left(\frac{\partial \tilde{a}_1}{\partial \tilde{x}_2} + \frac{\partial \tilde{a}_2}{\partial \tilde{x}_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{a}_1}{\partial \tilde{x}_3} + \frac{\partial \tilde{a}_3}{\partial \tilde{x}_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{a}_2}{\partial \tilde{x}_3} + \frac{\partial \tilde{a}_3}{\partial \tilde{x}_2} \right)^2. \end{aligned} \quad (177)$$

Dies ist jedoch die gesamt Verformungsbeschleunigung, bei der keine Aussage über Dehnung bzw. Stauchung und Scherung möglich ist. Daher werden die Terme von $\ddot{\zeta}$ im Folgenden einzeln betrachtet.

Für die Dehnbeschleunigung, die bereits mit $\ddot{\epsilon}_t = a_t$ definiert wurde, kann zudem der erste Term

$$\ddot{\epsilon}_t = \sqrt{2 \frac{\partial \tilde{a}_1}{\partial \tilde{x}_1}^2} = \sqrt{2} \frac{\partial \tilde{a}_1}{\partial \tilde{x}_1} \quad (178)$$

verwendet werden. Desweiteren kann die Scherbeschleunigung $\ddot{\gamma}$ analog zur Schergeschwindigkeit $\dot{\gamma}$ durch

$$\ddot{\gamma}_t = \sqrt{\left(\frac{\partial \tilde{a}_1}{\partial \tilde{x}_2} + \frac{\partial \tilde{a}_2}{\partial \tilde{x}_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{a}_1}{\partial \tilde{x}_3} + \frac{\partial \tilde{a}_3}{\partial \tilde{x}_1} \right)^2} \quad (179)$$

definiert werden. Somit verbleibt die zeitliche Ableitung der planaren Verformung durch

$$\ddot{\zeta}_{nb} = \sqrt{2 \left(\frac{\partial \tilde{a}_2}{\partial \tilde{x}_2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial \tilde{a}_3}{\partial \tilde{x}_3} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{a}_2}{\partial \tilde{x}_3} + \frac{\partial \tilde{a}_3}{\partial \tilde{x}_2} \right)^2}, \quad (180)$$

womit ausgedrückt werden kann, ob sich das Aufbrechen einer Parallelströmung beschleunigt oder eher konstant vor sich geht. Somit können als zusätzliche charakteristische Größen die einzelnen Verformungsbeschleunigungen angegeben werden.

6 Anwendungsfälle

In diesem Kapitel soll die kombinierte Verwendung von Wirbelementverfahren (vgl. Kapitel 4) und Lagrangeschen Analyseverfahren (vgl. Kapitel 5.1) näher dargestellt werden. Ziel war es, eine Betrachtung der wirklichen Partikelbahnen zu ermöglichen. Da diese Berechnungen bereits zur Laufzeit des eigentlichen Verfahrens erfolgen, ist es möglich, dass dies für spätere automatisierte Veränderungen der Wirbelmethoden verwendet werden kann. Indem bestimmte charakteristische Strömungseigenschaften detektiert werden, könnte es beispielsweise möglich sein, verschiedene anisotrope Ansatzfunktionen zu verwenden, um eine effizientere bzw. genauere Simulation durchführen zu können. Desweiteren besteht die Vermutung, dass die untersuchten Maße ein Kriterium liefern könnten, um Gebiete zu erkennen, in welche zusätzliche Partikel eingeführt werden müssen. Dies kann notwendig werden, da sonst die Genauigkeit im gesamten Rechengebiet nicht aufrecht erhalten werden kann. Bevor jedoch eine Aussage getroffen werden kann, ob diese Maße in dieser Form prinzipiell für derartige Anwendungen geeignet sind, ist es notwendig, das Verhalten dieser Auswertungen bei Wirbelverfahren genauer zu betrachten.

Da das bisherige Wirbelverfahren aufgrund des fehlenden Multipol-Ansatzes (vgl. Kapitel 4.4) limitiert ist, werden die grundlegenden Untersuchungen anhand von Punktwirbeln dargestellt. Diese bilden wiederum ein Geschwindigkeitsfeld um ihre Position aus, sodass Partikel in ihrem Umfeld beeinflusst werden. Diese Tatsache soll im Folgenden dazu verwendet werden, eine Lagrangesche Analyse durchzuführen, indem zusätzliche mitbewegte Partikel im Einflussbereich der Wirbelpartikel positioniert werden. An den Positionen dieser Partikel findet dann die Auswertung statt. Dabei werden die Geschwindigkeit und Position dieser passiven Partikel direkt über das Wirbelementverfahren berechnet, ohne dass eine Interpolation stattfindet.

6.1 Stationäre Strömungen

Im ersten Abschnitt sollen reine stationäre Strömungen untersucht werden. Dies wird dadurch erreicht, dass sich zwar die passiven Partikel frei im Strömungsgebiet bewegen, jedoch nicht die Wirbelpartikel. Somit wird für jede Position \vec{x} im gesamten Gebiet zu jedem Zeitpunkt t immer die gleiche Geschwindigkeit berechnet. Da die Wirkung auf die passiven Partikel ausschließlich über die in Gleichung (119) bestimmte Geschwindigkeit errechnet wird, ergibt sich eine rein stationäre Strömung.

Anhand dieser Strömungen soll zum einen gezeigt werden, dass es möglich ist eine Strömungssteuerung mittels Punktwirbeln durchzuführen, und zum anderen sollen die eingeführten Lagrangeschen Analyseverfahren (vgl. Kapitel 5.1) an grundlegenden topologischen Strukturen dargestellt werden. Hierzu werden insgesamt vier stationäre Testfälle untersucht.

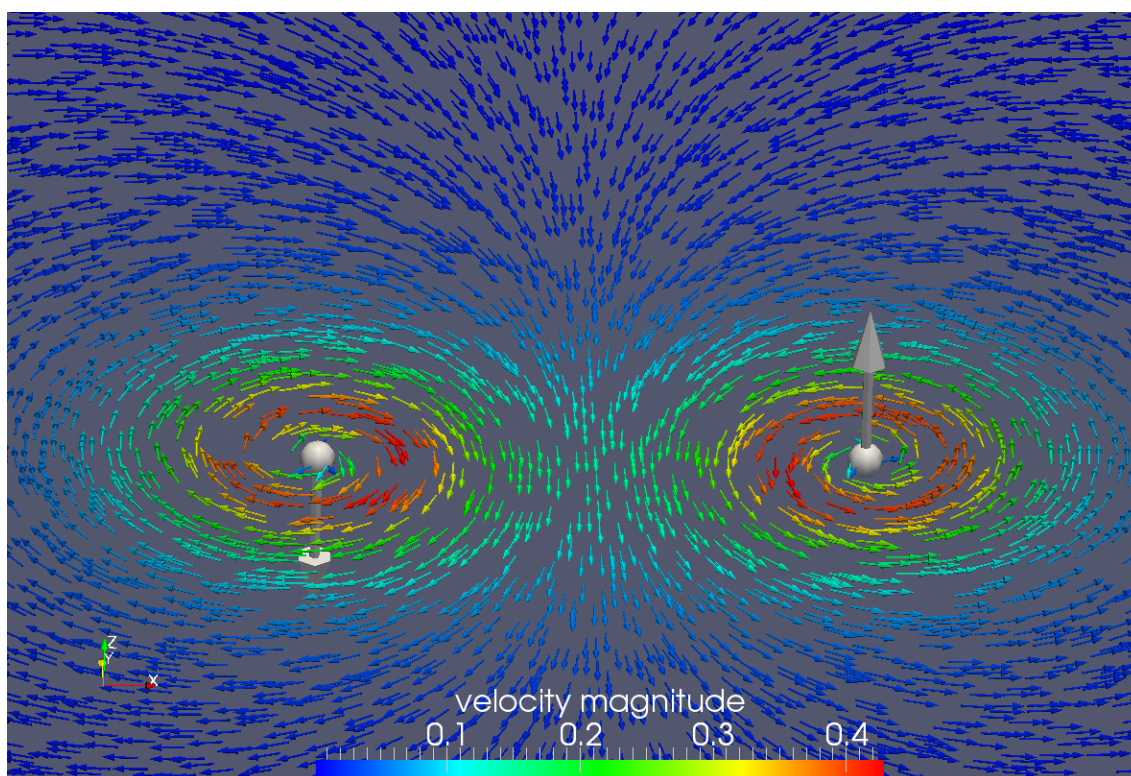


Abb. 19: Geschwindigkeitsfeld: Interaktion von zwei Punktwirbeln

6.1.1 Interaktion von zwei Punktwirbeln

Beim ersten zu betrachtenden Fall handelt es sich um die Interaktion zweier Punktwirbel in der xy -Ebene. Dieses ist die einfachste Strömungsstruktur, die durch die

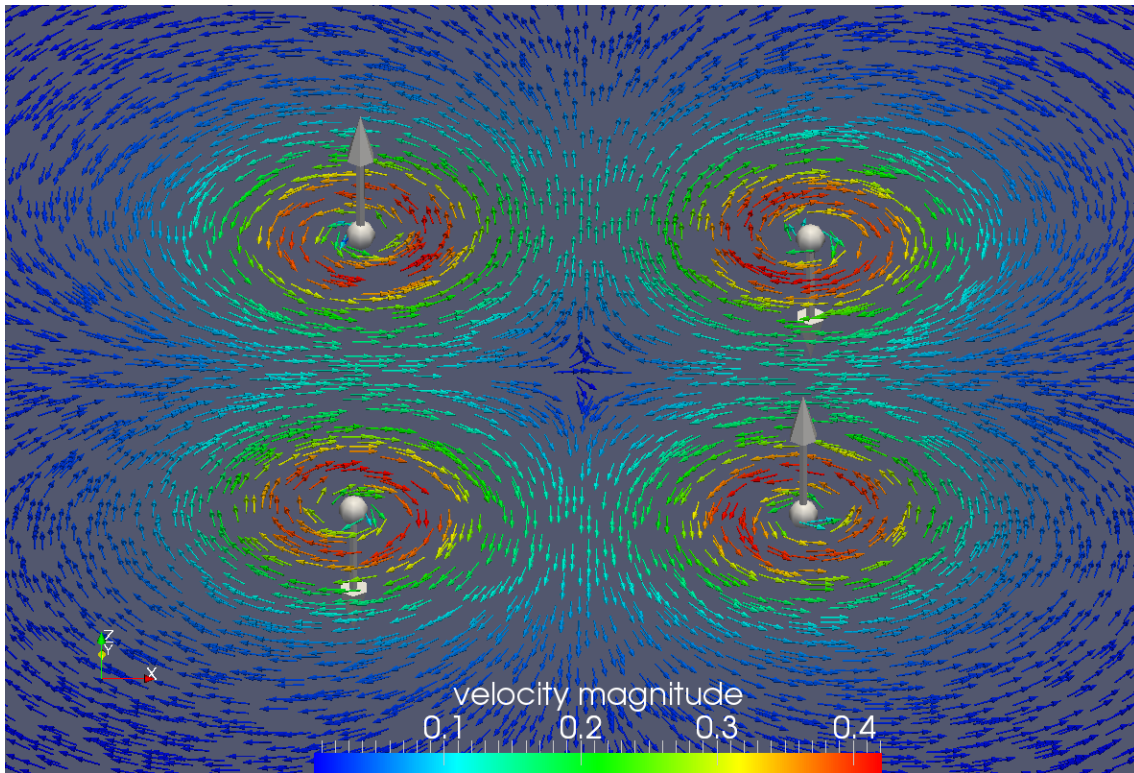


Abb. 20: Geschwindigkeitsfeld: Interaktion von vier Punktwirbeln

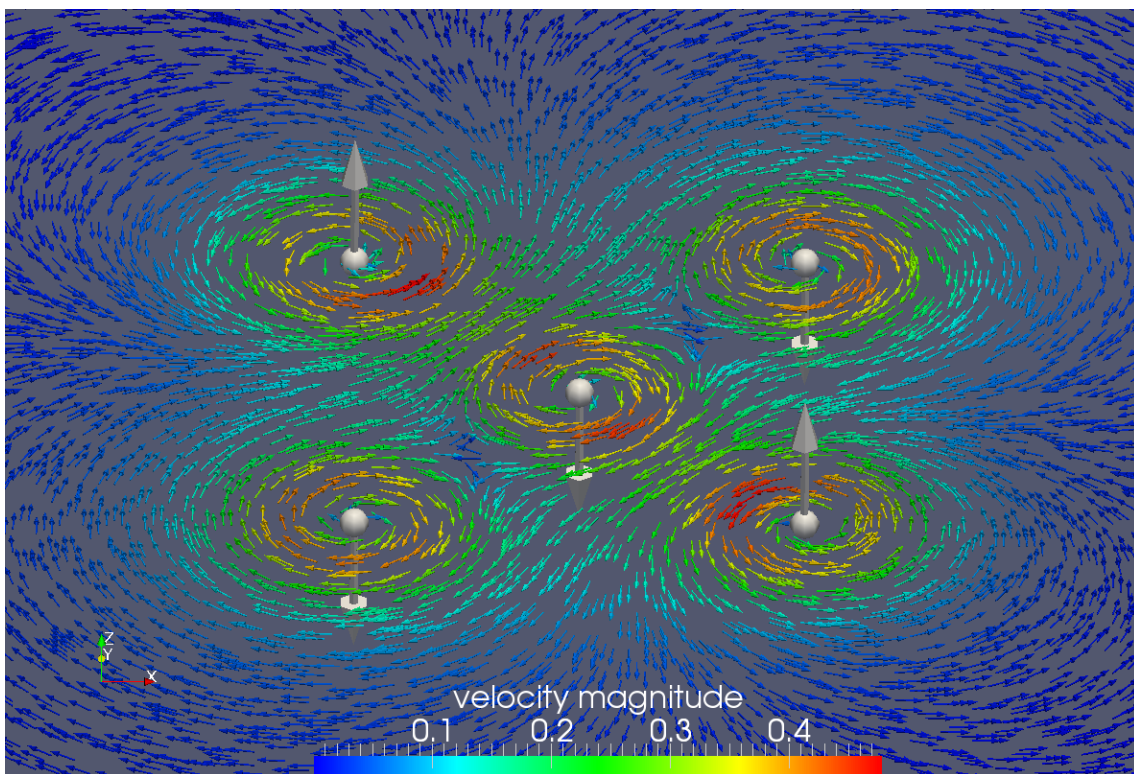


Abb. 21: Geschwindigkeitsfeld: Interaktion von fünf Punktwirbeln

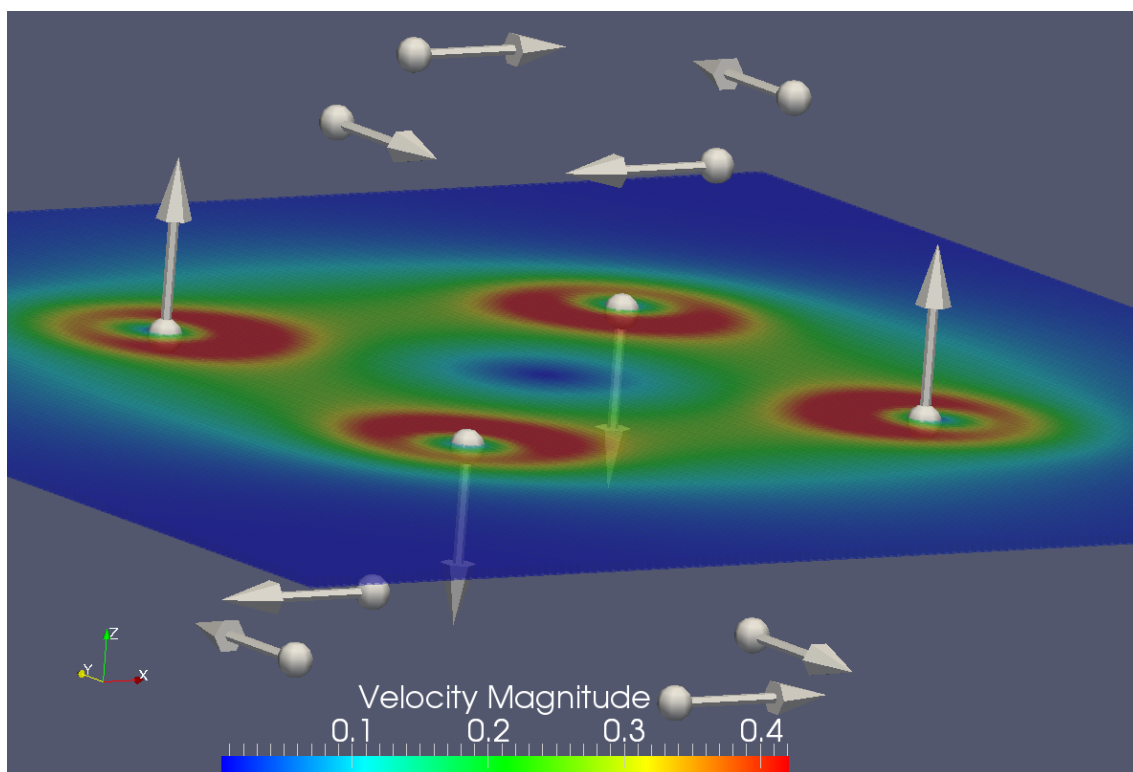


Abb. 22: Wirbelpositionierung: Interaktion von zwölf Punktwirbeln

Interaktion von Punktwirbeln erzeugt werden kann. Da diese Struktur auch bei komplexeren Strömungen wiederzufinden ist, wird sie im Folgenden dargestellt.

Die beiden Punktwirbel dieses Testfalles wirken zwar aufeinander, werden jedoch fest an ihrer Position gehalten. Die vektorielle Zirkulation der beiden Punktwirbel ist betragsmäßig gleich und jeweils nur in z-Richtung von Null verschieden. Da die Zirkulation jedoch entgegengerichtet besetzt ist, ergeben sich zwei gegenläufig drehende Systeme. Der Aufbau und das daraus resultierende stationäre Geschwindigkeitsfeld für die passiven Partikel ist in Abbildung 19 zu sehen.

Es wird erwartet, dass die Partikel im oberen Bereich durch die kumulierte Wirkung der beiden Wirbel „eingesaugt“ und im unteren Bereich „ausgestoßen“ werden. Dies bedeutet, dass die Fluidelemente im oberen Bereich gestaucht und im unteren Bereich gestreckt werden sollten. Zudem ist, wie beim Einzelwirbel, eine Scherung im Bereich des Wirbels zu erwarten.

Werden die Ergebnisse des FTLE-Wertes (Abbildung 23(a)) mit denen der Verformungsgeschwindigkeit (Abbildung 23(b)) verglichen, so ist zu erkennen, dass beide qualitativ ausschließlich den Scheranteil der Verzerrung darstellen. Die unterschiedliche Größenordnung der beiden Größen erklärt sich aufgrund der unterschiedlichen Berechnungen. So wird der FTLE-Wert über die Zeit ansteigen, da er

eine Gesamtverzerrung eines Fluidelementes darstellt. Daher wurde für die aktuelle Betrachtung nur der erste Zeitschritt verwendet.

Die Verformungsrate hingegen untersucht nur den aktuellen Zeitschritt und liefert deswegen bei einem stationären Geschwindigkeitsfeld immer den gleichen Wert.

Somit stellt die Scherung (Abbildung 23(c)) in diesem Testfall den größten Anteil dar. Die anfänglich erwähnte Dehnung ist um einiges kleiner, wodurch sie beim FTLE-Wert nicht sichtbar wird. Da die Verformungsgeschwindigkeit nicht nur in ihrer Gesamtheit betrachtet werden kann, sondern auch die einzelnen Komponenten berechnet wurden, ist in Abbildung 23(d) zu erkennen, dass sich die erwartete Dehnrate einstellt.

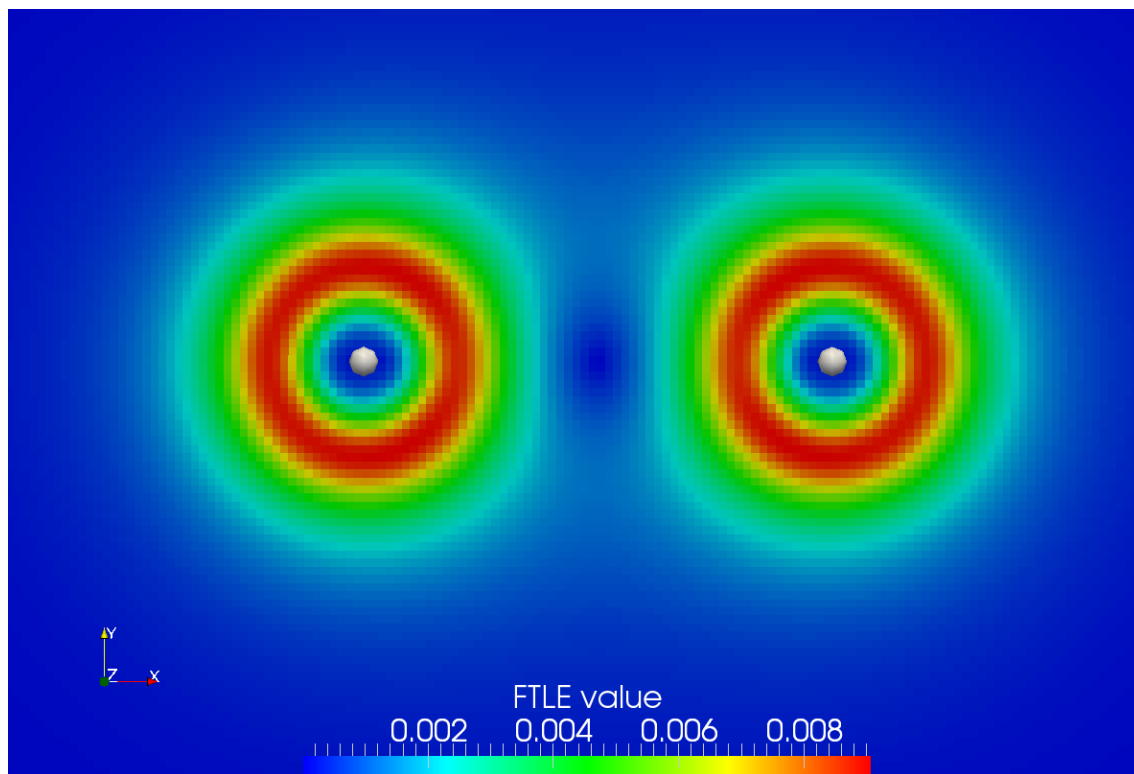
Desweiteren ist in Abbildung 23(e) die Tangentialbeschleunigung der passiven Partikel zu erkennen. Wie in Kapitel 5 dargestellt, ist dieser Wert konstant Null, solange ein Partikel seinen Geschwindigkeitsbetrag nicht ändert. Dabei ist diese Größe nicht mit der allgemeinen Beschleunigung zu verwechseln, da diese auch die Zentripetalbeschleunigung beinhaltet. Wie auf der Abbildung 23(e) zu sehen ist, werden die Partikel im „oberen“ Bereich schneller und im „unteren“ Bereich langsamer, sobald sie in den Zwischenbereich der beiden Wirbel kommen. Dies deckt sich mit der Erwartung über ein „einsaugen“ und „ausstoßen“ der Partikel.

Die letzte betrachtete charakteristische Größe für diesen Testfall ist die lokale Krümmung (Abbildung 23(f)) der Bahnlinien. Interessanterweise teilt die Krümmung das Strömungsgebiet in zwei Gebiete mit jeweils einem Punktwirbel ein. An dieser Trennlinie nimmt die Krümmung stark ab, was auf die Richtungsänderung der Normalbeschleunigung (Zentripetalbeschleunigung) zurückzuführen ist (siehe Kapitel 5) und dementsprechend in diesem Bereich erwartet wurde.

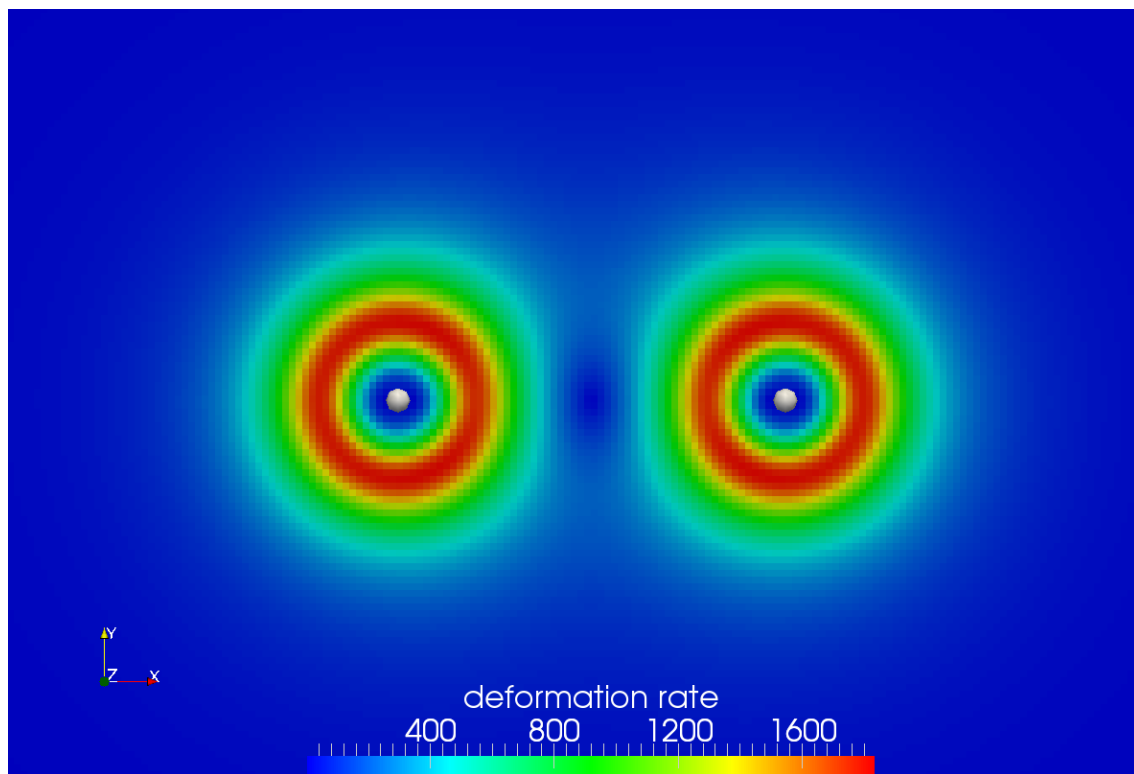
6.1.2 Interaktion von vier Punktwirbeln

Eine bekannte Struktur in der Strömungsmechanik ist die Sattelpunktsströmung, welche im Folgenden durch vier einzelne Punktwirbel erzeugt werden soll. Dazu werden vier Wirbelpartikel an den Ecken eines gedachten Quaders positioniert. Dies ist in Abbildung 20 zusammen mit dem resultierenden Geschwindigkeitsfeld dargestellt. Wichtig ist hierbei, dass die Zirkulation benachbarter Wirbelpartikel entgegengesetzt gerichtet ist. Dadurch bewegen sich die passiven Partikel auf Bahnen, wie sie in einer Sattelpunktsstruktur vorkommen.

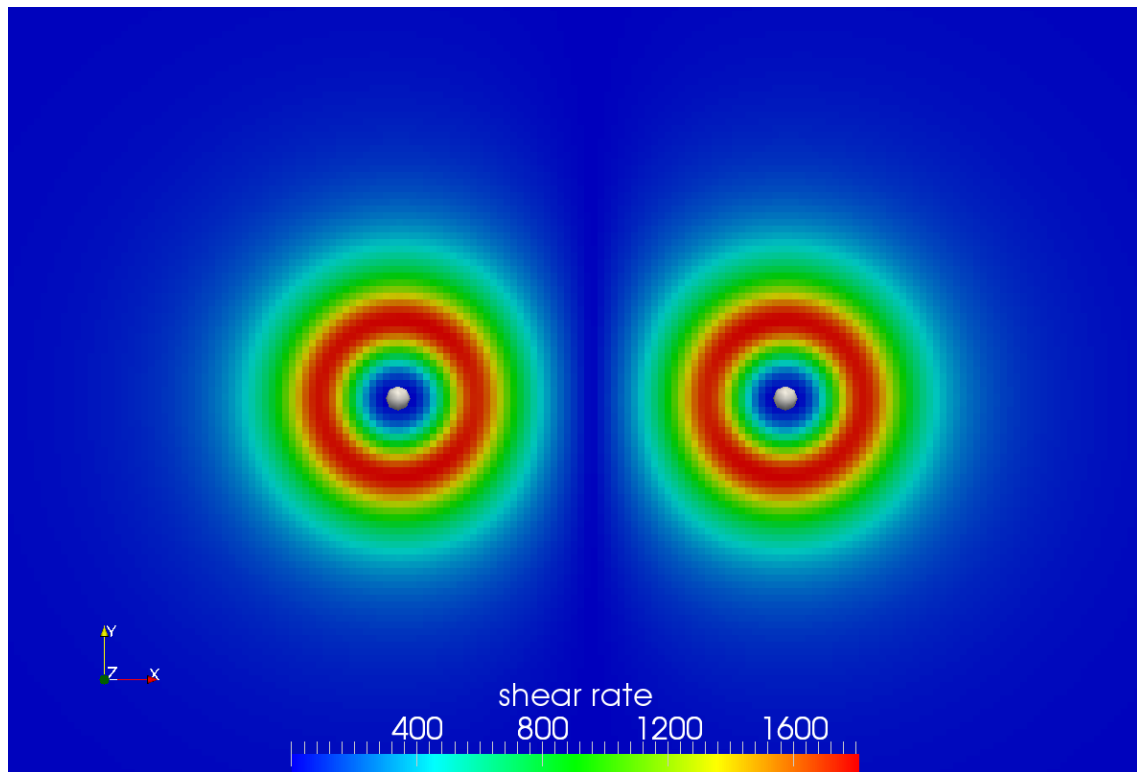
Ebenso wie bei der Betrachtung zweier ortsfester Punktwirbel, liefern auch bei diesem Testfall die Verzerrungsrate und der FTLE-Wert qualitativ die gleichen Ergeb-



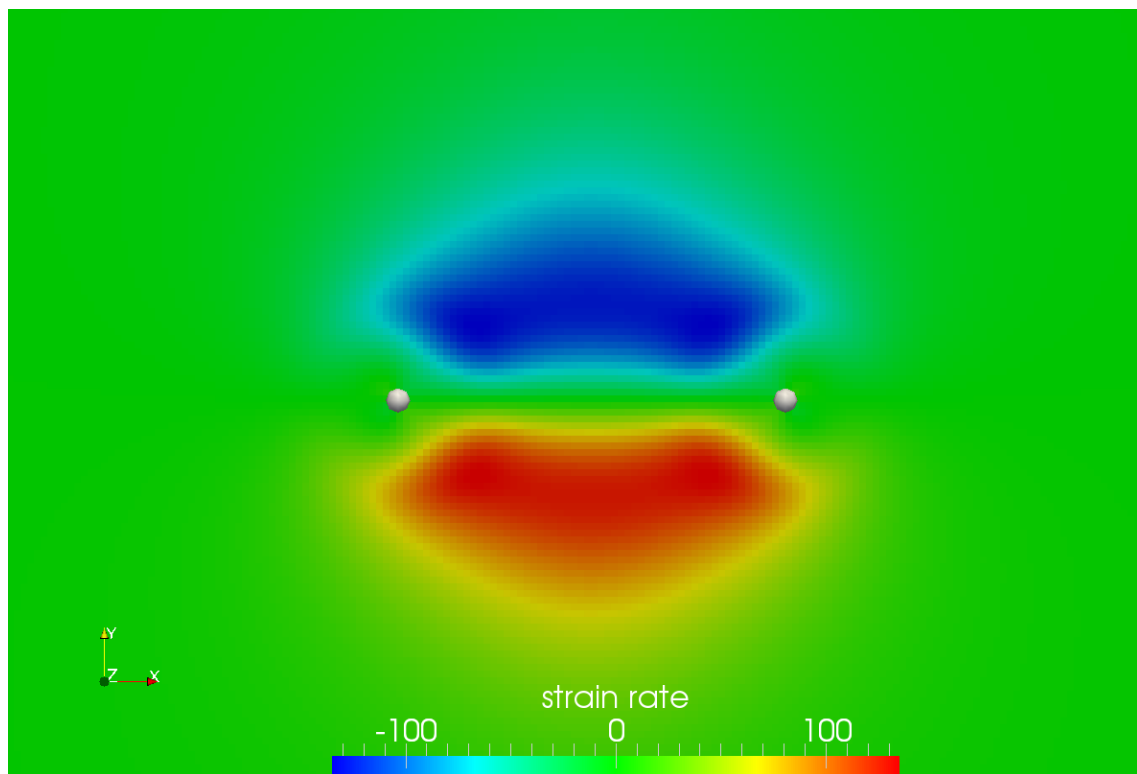
(a) FTLE-Wert



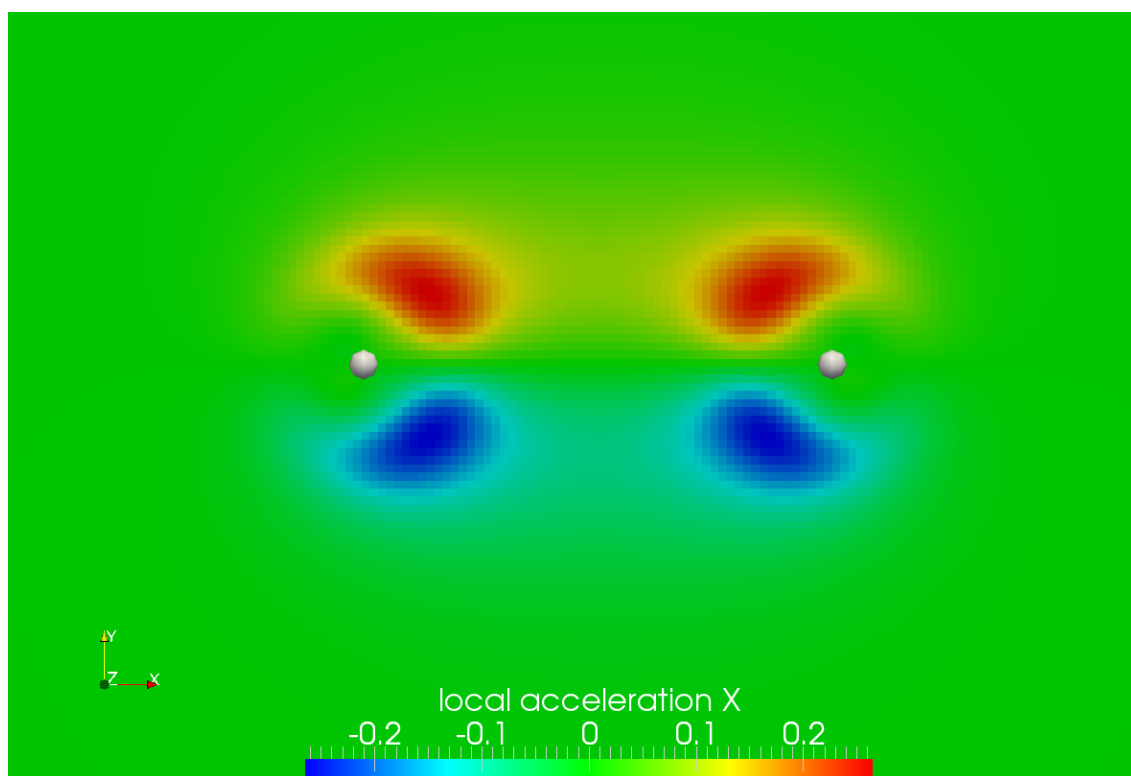
(b) Verformungsrate



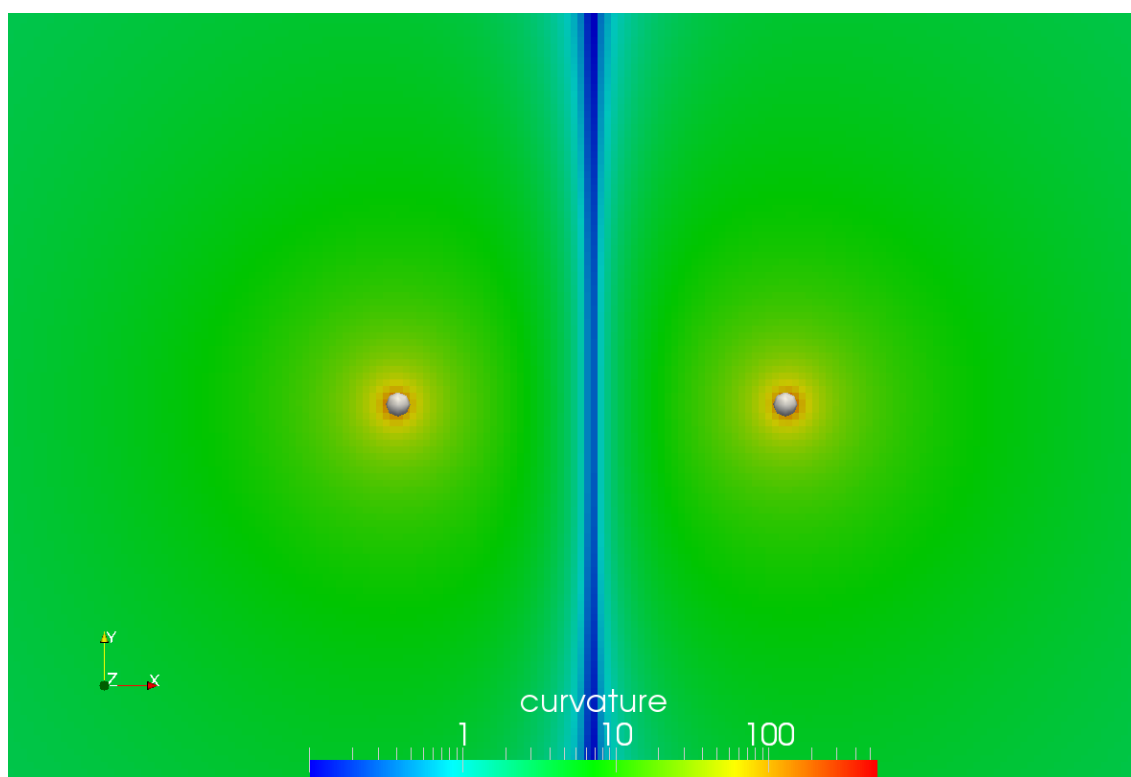
(c) Scherrate



(d) Dehnrate



(e) Tangentialbeschleunigung



(f) Krümmung

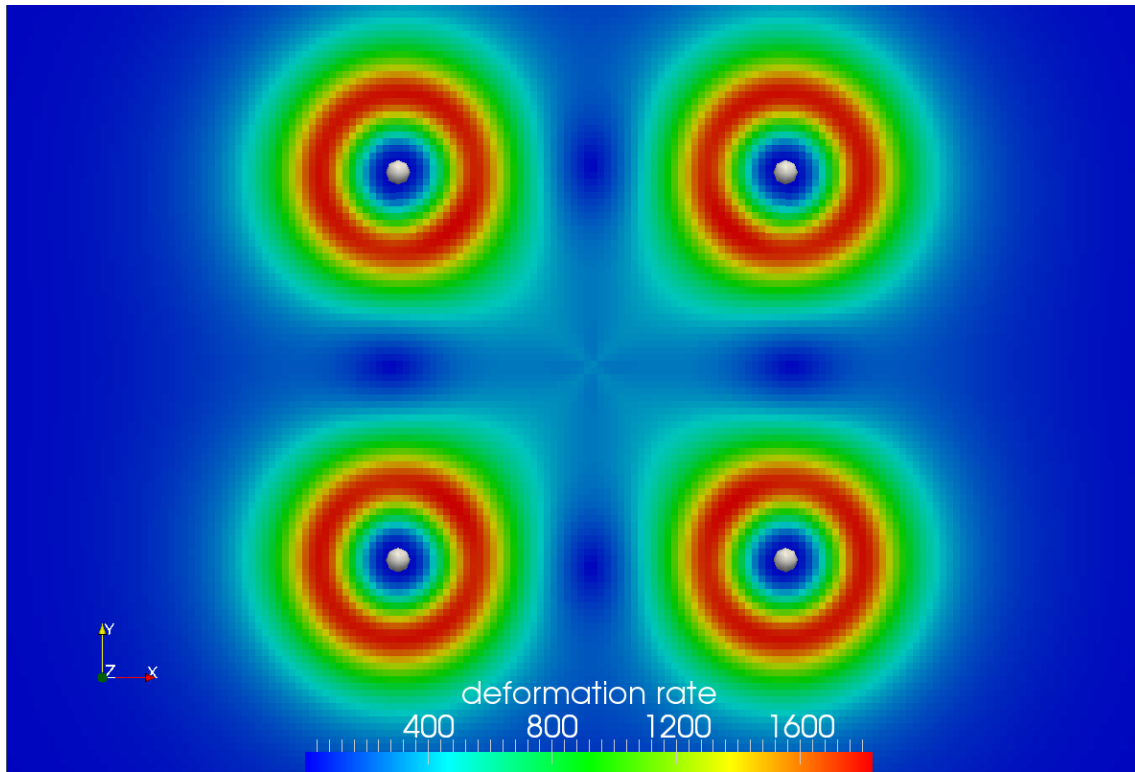
Abb. 23: Charakteristische Größen: Interaktion von zwei Punktwirbeln

nisse, daher wird an dieser Stelle nur die Verformungsrate (Abbildung 24(a)) dargestellt. Im Vergleich dieser mit der Scherrate (Abbildung 24(b)) ist festzustellen, dass die Scherung den hauptsächlichen Anteil an der Verformung ausmacht. Allerdings sind bereits Abweichungen erkennbar, die darauf hindeuten, dass die weiteren Komponenten einen nicht unerheblichen Anteil an der Verzerrung haben. Wird als nächstes die Dehnrate (Abbildung 24(c)) betrachtet, so fällt auf, dass die Partikel beispielsweise im linken Bereich gestaucht werden. An dieser Stelle laufen viele Partikel zusammen, ohne dass die Geschwindigkeit viel höher wird. Dadurch werden die Fluidelemente zusammengestaucht. Wird die Bahn dieser Partikel weiter betrachtet, so ist zu erkennen, dass die Geschwindigkeit in Richtung Zentrum zunimmt. Dadurch werden die Fluidelemente gestreckt. Allerdings erfolgt in der Nähe des Zentrums ein Umlenken der Partikelbahn, sodass an dieser Stelle wiederum viele Partikel zusammenlaufen und somit eine Stauchung erfahren. Im letzten Abschnitt verbreitert sich die Strömung wieder, was direkt eine Dehnung zur Folge hat. Dieses erwartete Verhalten ist in der Abbildung 24(c) wiederzuerkennen.

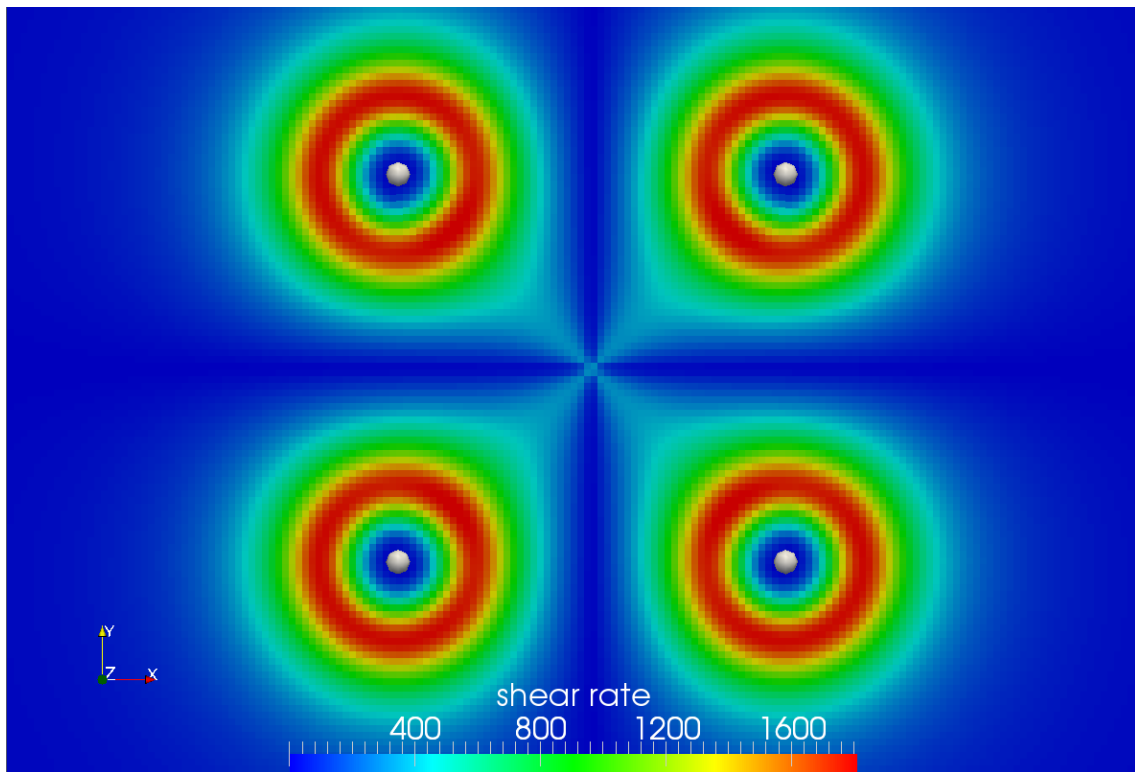
Gerade die innere Struktur der Dehnrate ist charakteristisch für eine Sattelpunktsstruktur und wird auch bei weiteren Testfällen immer wieder zu beobachten sein.

Bei der Betrachtung der Tangentialbeschleunigung (Abbildung 24(d)) ist zu erkennen, dass in den Bereichen, in denen die Partikel in die Sattelpunktsstruktur eintreten, die Partikel beschleunigt werden, sodass innerhalb dieser Struktur eine höhere Geschwindigkeit vorliegt. Diese Wirkung der vier Wirbelpartikel überlagert sich im Zentrum, wodurch die Geschwindigkeit an diesem Punkt rapide abnimmt. Daher werden Partikel, die sich diesem Punkt nähern, abgebremst, wohingegen sich entfernende Partikel beschleunigt werden. Dieses Verhalten wird innerhalb einer Sattelpunktsstruktur erwartet und deckt sich somit mit den erzielten Ergebnissen. Gleichzeitig ist diese Verteilung der Tangentialbeschleunigung für die charakteristische Struktur eines Sattelpunktes verantwortlich (vgl. Abbildung 9). So gleichen sich innerhalb eines Sattelpunktes die Zentripetal- und Tangentialbeschleunigung nicht vollständig aus, was dazu führt, dass Partikel sich relativ geradlinig hineinbewegen, um dann stark umgelenkt zu werden.

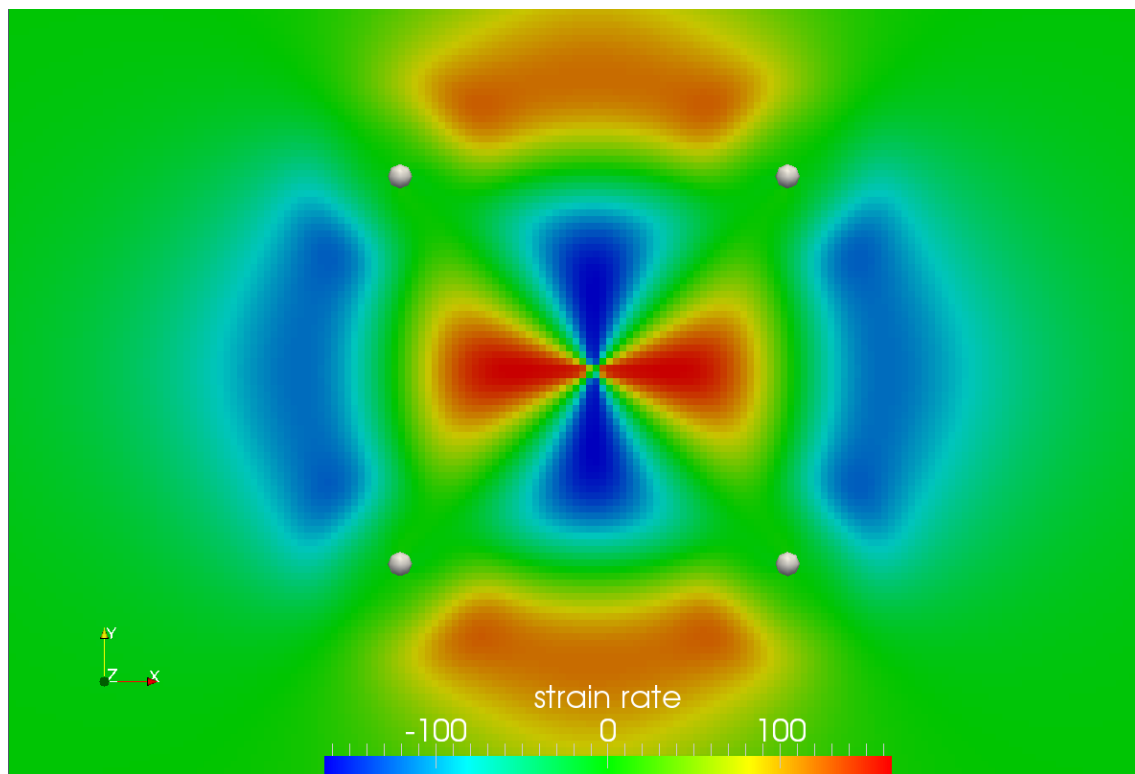
Dieses Verhalten spiegelt sich auch in der Betrachtung der Krümmung wieder, welche abschließend für diesen Fall betrachtet werden soll. Ähnlich wie beim Testfall der zwei Punktwirbel wird erwartet, dass einzelne Separationslinien, an denen die Krümmung nahezu Null ist, entstehen. Wie in den Abbildungen 24(e) und 24(f) zu erkennen ist, unterteilen diese Linien die Punktwirbel in einzelne Bereiche, wobei sich diese Struktur auch in die dritte Raumrichtung fortsetzt und dadurch Separationsebenen bildet. An dieser Stelle ist die weitreichende Wirkung der Wirbelstärke



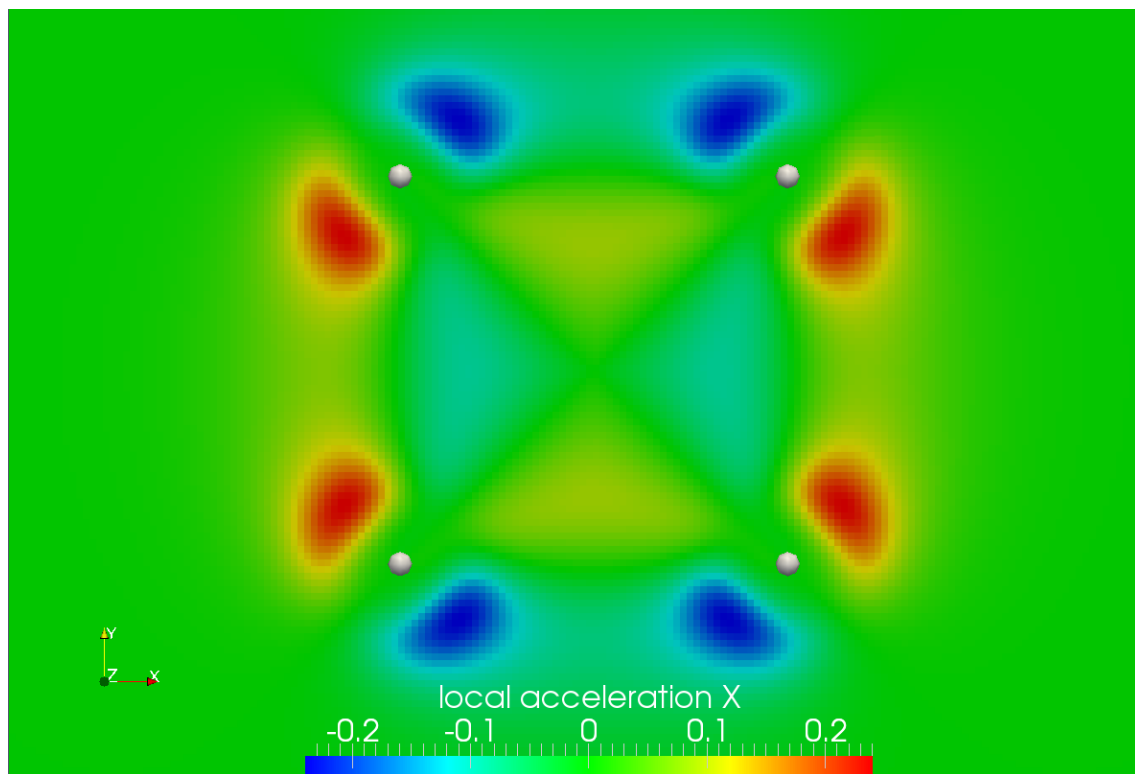
(a) Verformungsrate



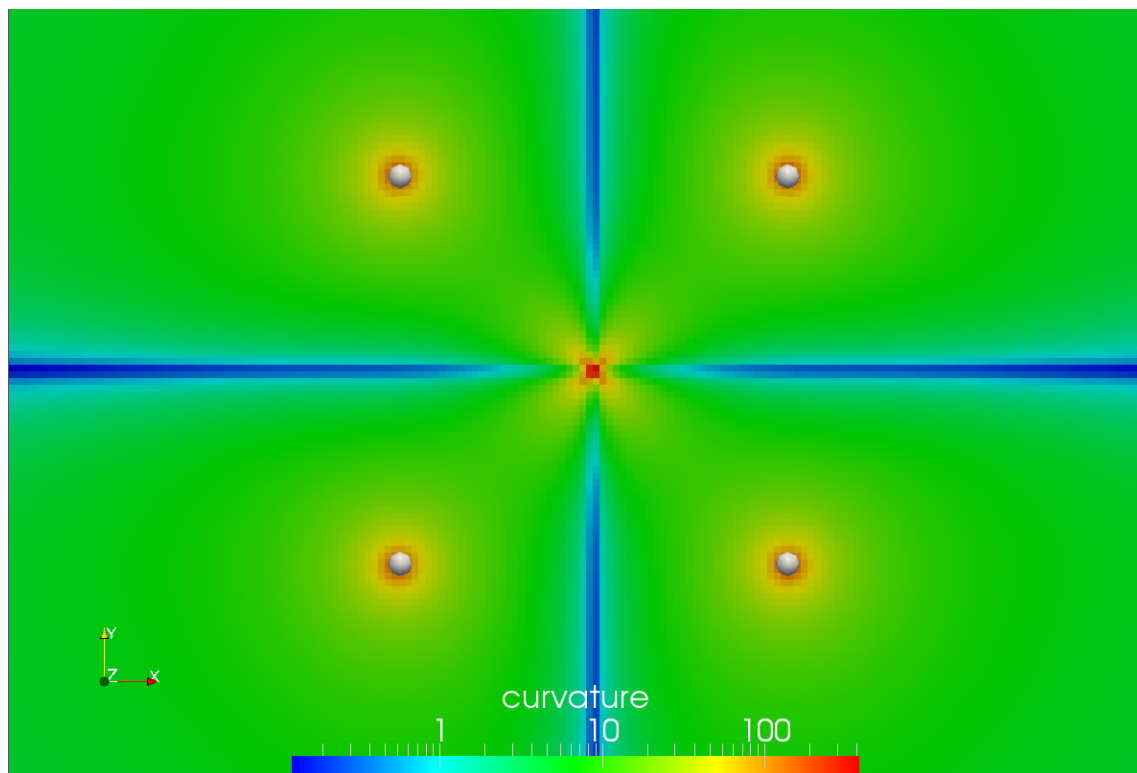
(b) Scherrate



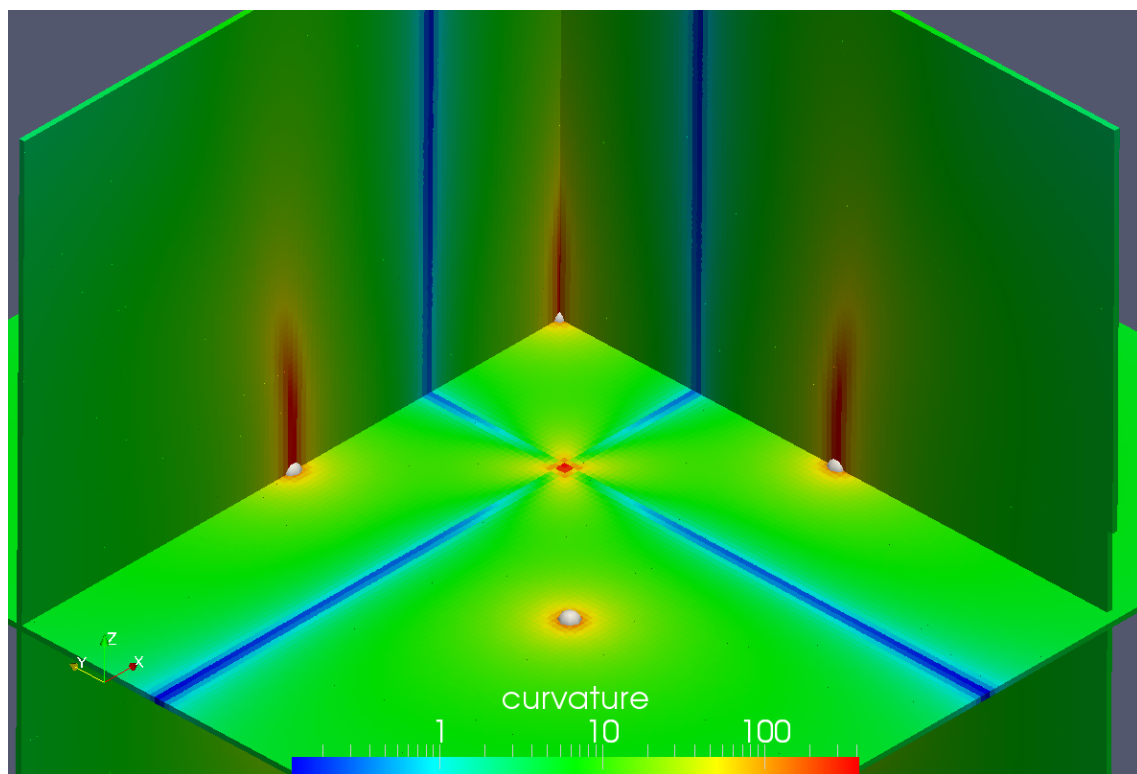
(c) Dehnrate



(d) Tangentialbeschleunigung



(e) Krümmung



(f) Krümmung 3D

Abb. 24: Charakteristische Größen: Interaktion von vier Punktwirbeln

erkennbar.

Im Zentrum ist zu erkennen, dass die Krümmung relativ groß ist, da sich an dieser Stelle die Einflüsse aller Punktwirbel überlagern. Nach Definition einer Sattelpunktstruktur müsste ein Partikel, welches sich auf der x -Achse diesem Punkt nähert, direkt an diesem Punkt seine Bewegungsrichtung um 90° ändern und sich dann entlang der y -Achse bewegen. Die Krümmung würde an einer solchen Unstetigkeitsstelle einen unendlich großen Wert liefern. Diese Unstetigkeit wird jedoch von den verwendeten numerischen Verfahren nicht abgebildet, sodass nur eine sehr starke Änderung der Bewegungsrichtung zu beobachten ist. Diese Änderung spiegelt sich in einem hohen Krümmungswert an dieser Stelle wieder.

6.1.3 Interaktion von fünf Punktwirbeln

Nachdem in den bisherigen Testfällen grundlegende Strömungsstrukturen betrachtet wurden, soll als nächstes eine überlagerte Struktur untersucht werden. Dazu wurde in das Zentrum einer Sattelpunktstruktur ein zusätzliches Wirbelpartikel eingefügt. Dadurch ändert sich die Struktur des Geschwindigkeitsfeldes maßgeblich, wie in Abbildung 21 zu erkennen ist. Die äußeren Wirbelpartikel sind dabei mit der gleichen Wirbelstärke wie in Abschnitt 6.1.2 belegt, sodass ein Sattelpunkt entsteht. Der zusätzliche fünfte Punkt hat betragsmäßig ebenfalls die gleiche Wirbelstärke, wobei diese in negative z -Richtung orientiert ist. Somit verbleibt auch bei diesem Testfall das gesamte betrachtete Geschwindigkeitsfeld in der xy -Ebene. Zudem entsteht eine Linie von drei Punktwirbeln, deren Wirbelstärke gleichgerichtet ist. Damit sind jedoch die Geschwindigkeitsfelder zwischen diesen Wirbeln entgegengesetzt zueinander ausgerichtet. Dies spiegelt sich in verschiedenen charakteristischen Größen wieder, die im Folgenden betrachtet werden sollen.

Wird die Schergeschwindigkeit (Abbildung 25(b)) mit der Gesamtverzerrung (Abbildung 25(b)) verglichen, so ist in diesem Testfall der Unterschied zwischen beiden Größen klar zu erkennen. Der Ursprung dieses Unterschiedes wird deutlich, sobald die beiden weiteren Komponenten der Verzerrung ebenfalls betrachtet werden. So nimmt die Dehnrate (Abbildung 25(c)) in bestimmten Bereich betragsmäßig vergleichsweise hohe Werte an. Werden diese Stellen mit den Betrachtungen aus Abschnitt 6.1.1 verglichen, so ist zu erkennen, dass zwischen den entgegengesetzt drehenden Wirbeln ähnliche Engstellen wie beim Zweiwirbelfall entstehen. Dadurch ist zu erwarten, dass eine ähnliche Struktur bei der Dehngeschwindigkeit auftritt. Da die Strömung aber auch von weiteren Wirbeln beeinflusst wird, überwiegt der Dehnanteil in Richtung des zentralen Wirbels.

Desweiteren ist an der Dehnrate zu erkennen, dass sich zwei Sattelpunktsstrukturen zwischen den drei gleichdrehenden Wirbeln ausbilden. Dies zeigt sich auch bei der Betrachtung des Geschwindigkeitsfeldes (Abbildung 21).

Bei der Betrachtung der Tangentialbeschleunigung 25(d) fällt auf, dass sie prinzipiell ähnliche Strukturen gegenüber der Tangentialbeschleunigung bei vier Punktwirbeln (vgl. Abbildung 24(d)) aufweist, allerdings die inneren Beschleunigungen invertiert und deutlich stärker ausgeprägt sind. Dieser Unterschied erklärt sich durch den direkten Vergleich mit der Tangentialbeschleunigung bei zwei gegenläufig drehenden Punktwirbeln (vgl. Abbildung 23(e)).

Da dieser Testfall eine überlagerte Strömung darstellt, ist nicht zu erwarten, dass eine so klare Separationsfläche wie in Abschnitt 6.1.2 zu erkennen ist. Allerdings hebt sich auch hier die kumulierte Wirkung der Wirbelpartikel an verschiedenen Punkten auf und verstärkt sich dafür an anderen Punkten. Diese überlagerte Wirkung ist besonders an der Krümmung in Abbildung 25(f) zu erkennen.

6.1.4 Interaktion von zwölf Punktwirbeln

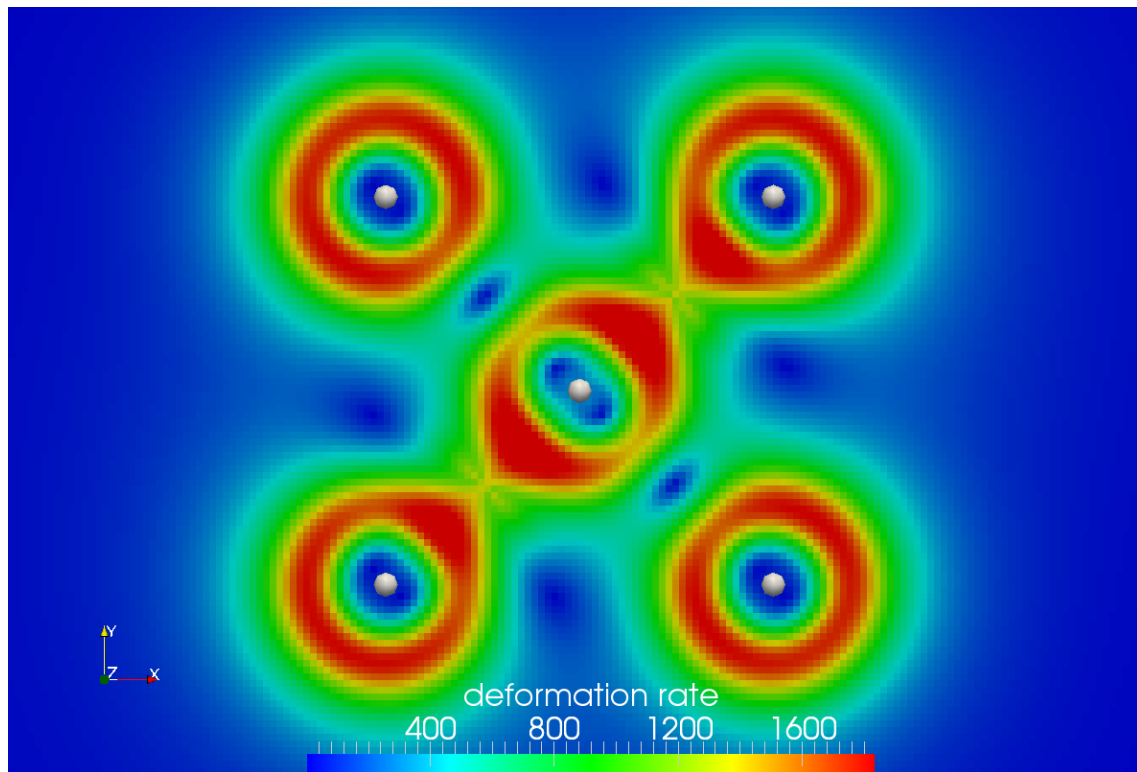
Dieser Testfall erweitert die bisherigen Untersuchungen um die dritte Raumrichtung, indem zusätzlich zu der bisherigen Sattelpunktsstruktur weitere Wirbelpartikel in z-Richtung positioniert werden. Dabei ist zu beachten, dass die Wirbelstärken anders zu orientieren sind, da es sich ansonsten um eine reine Fortführung des Sattelpunktes in 3D handeln würde. Daher wurden die Wirbelpartikel wie in Abbildung 22 dargestellt angeordnet. Dies hat zur Folge, dass die Sattelpunktsstruktur in der xy-Ebene unterstützt wird. Gleichzeitig entsteht jedoch in der dritten Raumrichtung eine eigene Struktur. Beim Vergleich des Geschwindigkeitsfeld in der xy-Ebene mit dem Geschwindigkeitsfeld aus dem vier Punktwirbel-Testfall (vgl. Abbildung 24), wird somit erwartet, dass diese sich stark ähneln. Da sich das Geschwindigkeitsfeld nicht mehr ausschließlich in einer einzigen Ebene befindet, wird es als Einzelschnitte in den Abbildungen 26(a), 26(b), 26(c) und 26(d) dargestellt.

Zur besseren Orientierung wurde bei den Schnitten der xz- und yz-Ebenen die xy-Ebene ebenfalls miteingeblendet. Dadurch ist der Vergleich der Geschwindigkeitsfelder möglich und die erwartete Sattelpunktsstruktur in der xy-Ebene erkennbar.

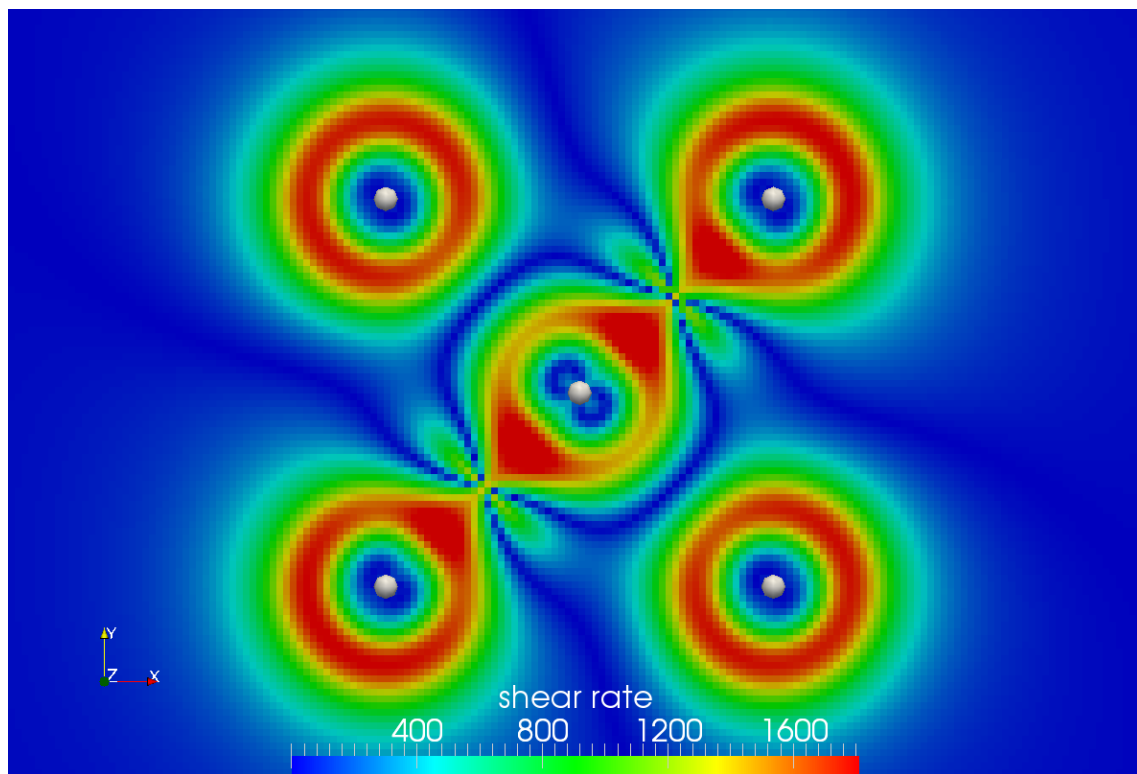
Werden zu den Schnitten der Koordinatenebenen auch noch verschobene Schnittebenen betrachtet, so ist die komplexere Strömungsstruktur zu erkennen. Als Beispiel sei auf die um $y = 0.15$ verschobene xz-Ebene (Abbildung 26(d)) verwiesen. In dieser sind Wirbelstrukturen zu erkennen, die durch die Punktwirbel in der xz-Ebene

erzeugt werden. Da diese von einem orthogonal dazu drehenden Wirbel überlagert werden, ist eine klare Deformation der Wirbelstruktur zu sehen.

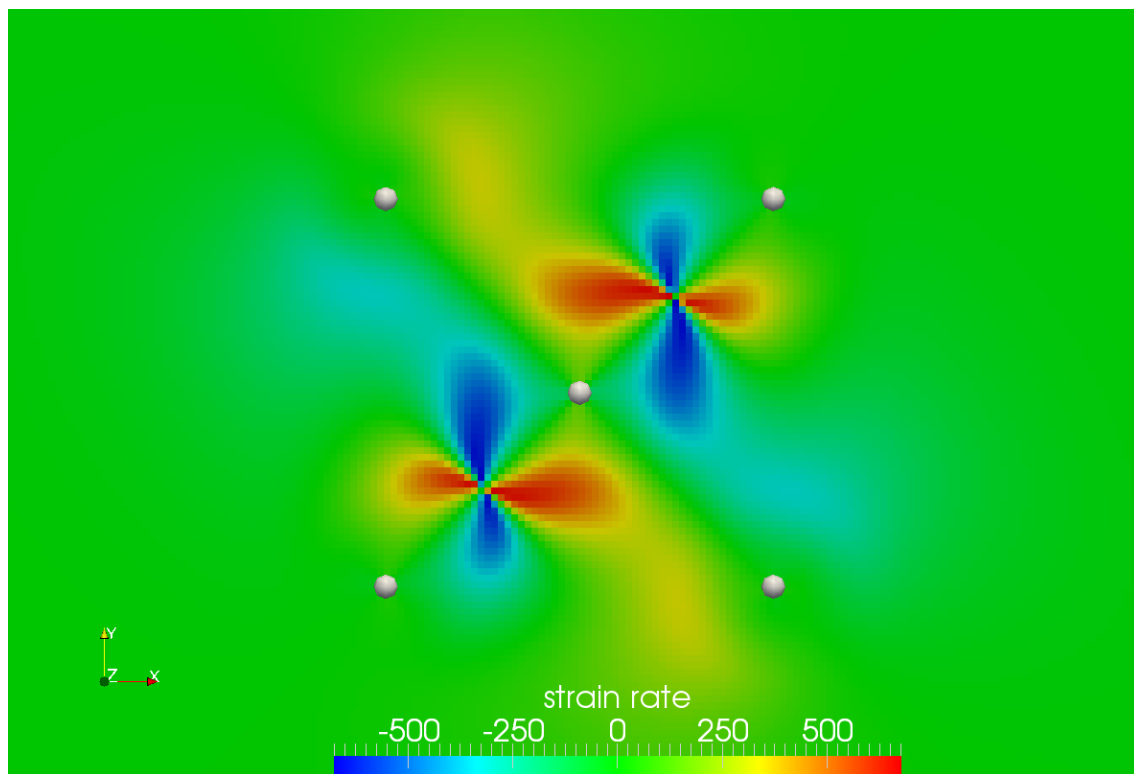
Aufgrund der hohen Ähnlichkeit zur Interaktion von vier Punktwirbeln (vgl. Abschnitt 6.1.2) sei auf eine weitere Betrachtung der Lagrangeschen Analysen für diesen Testfall verzichtet. Vielmehr sei auf die Möglichkeiten einer Strömungssteuerung mittels Wirbelpartikel im dreidimensionalen Raum, die dieser verdeutlichen soll, verwiesen.



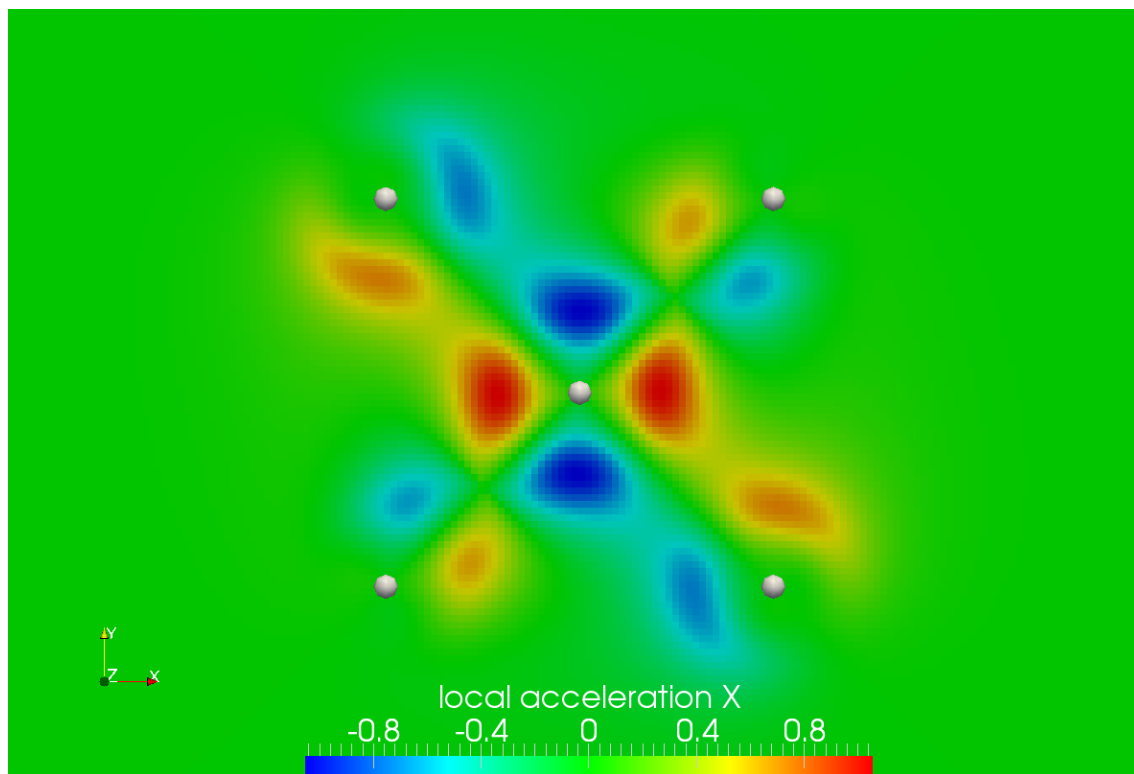
(a) Verformungsrate



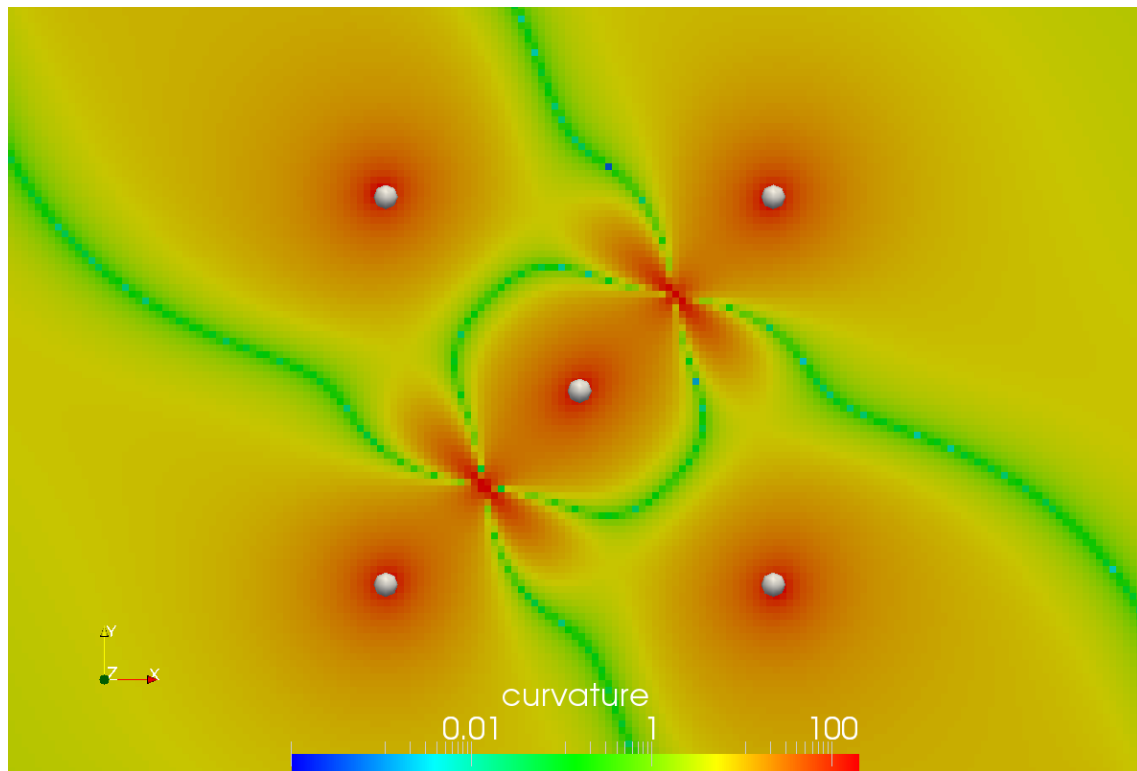
(b) Scherrate



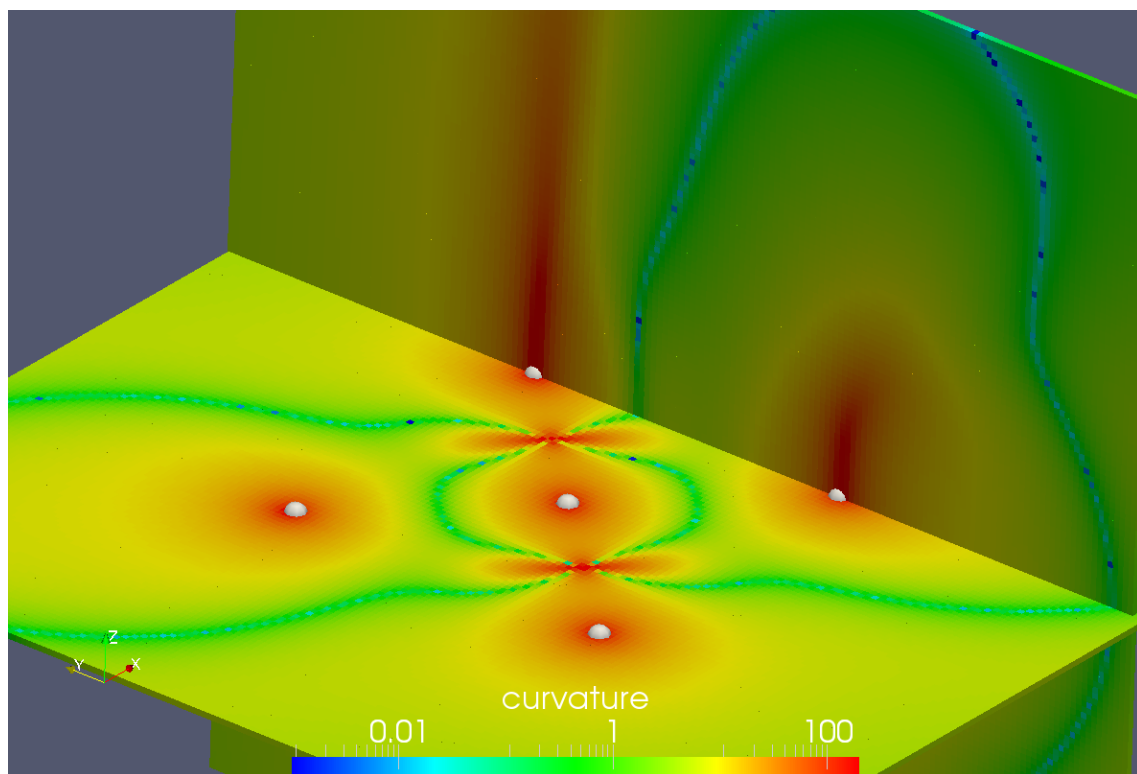
(c) Dehnrate



(d) Tangentialbeschleunigung

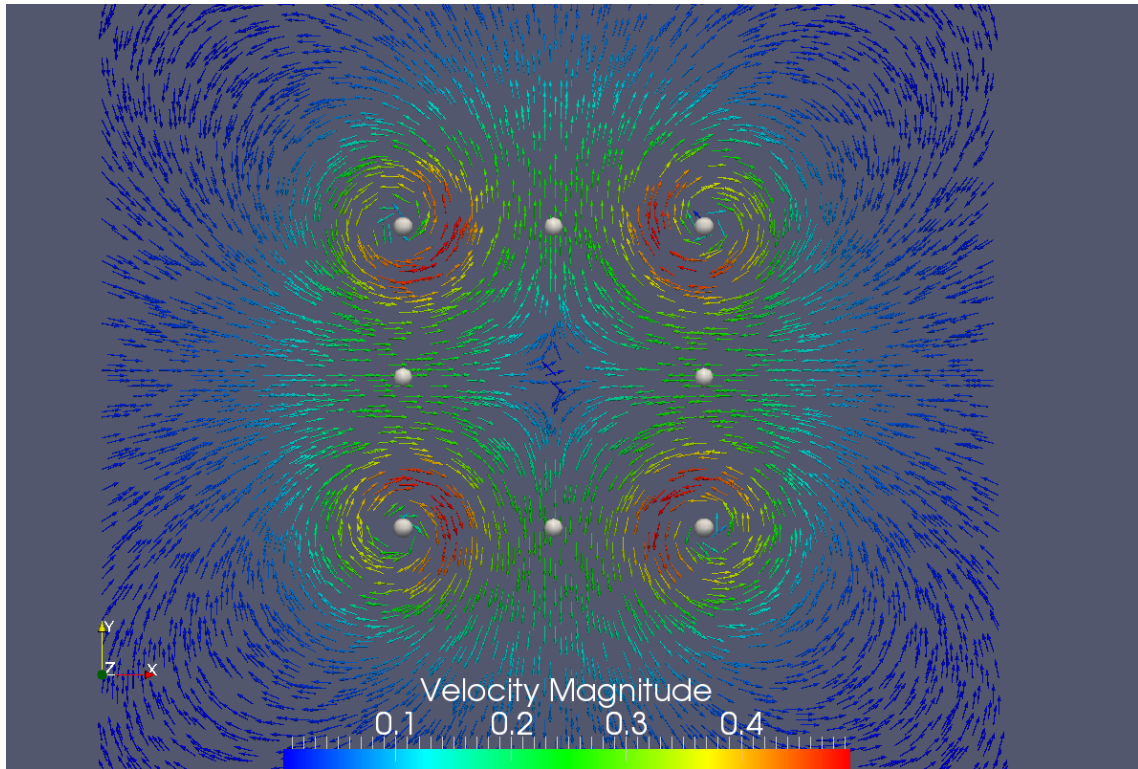


(e) Krümmung

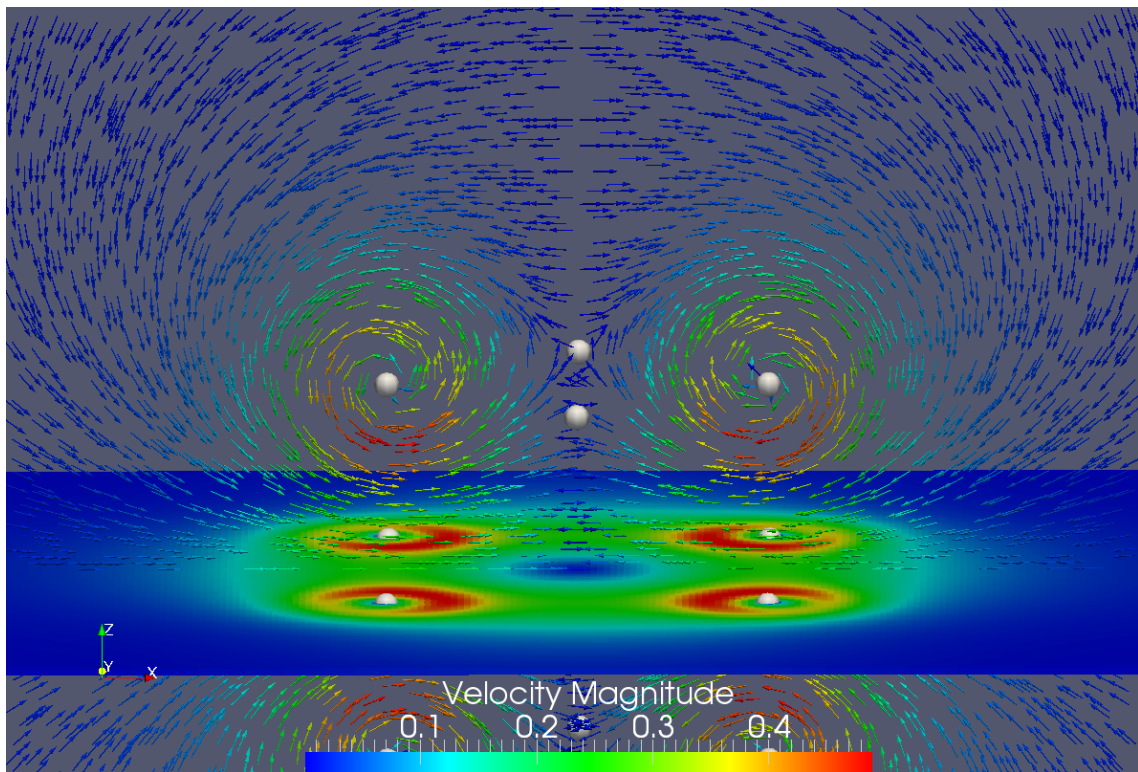


(f) Krümmung 3D

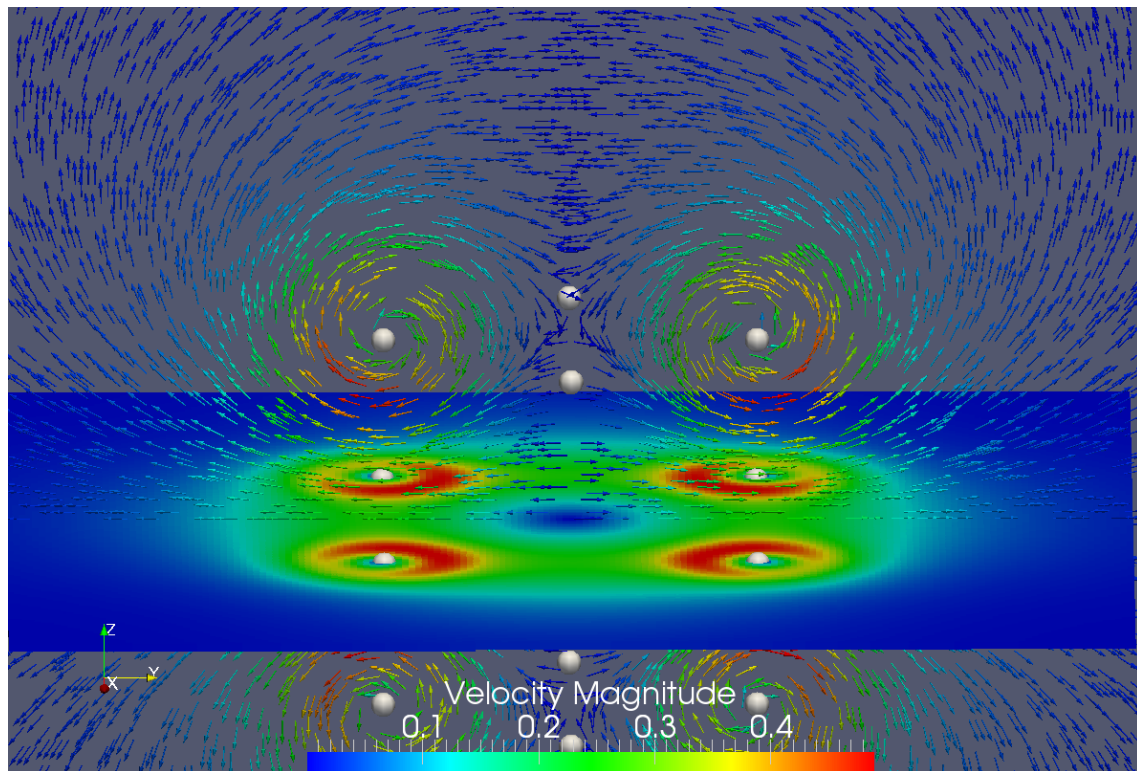
Abb. 25: Charakteristische Größen: Interaktion von fünf Punktwirbeln



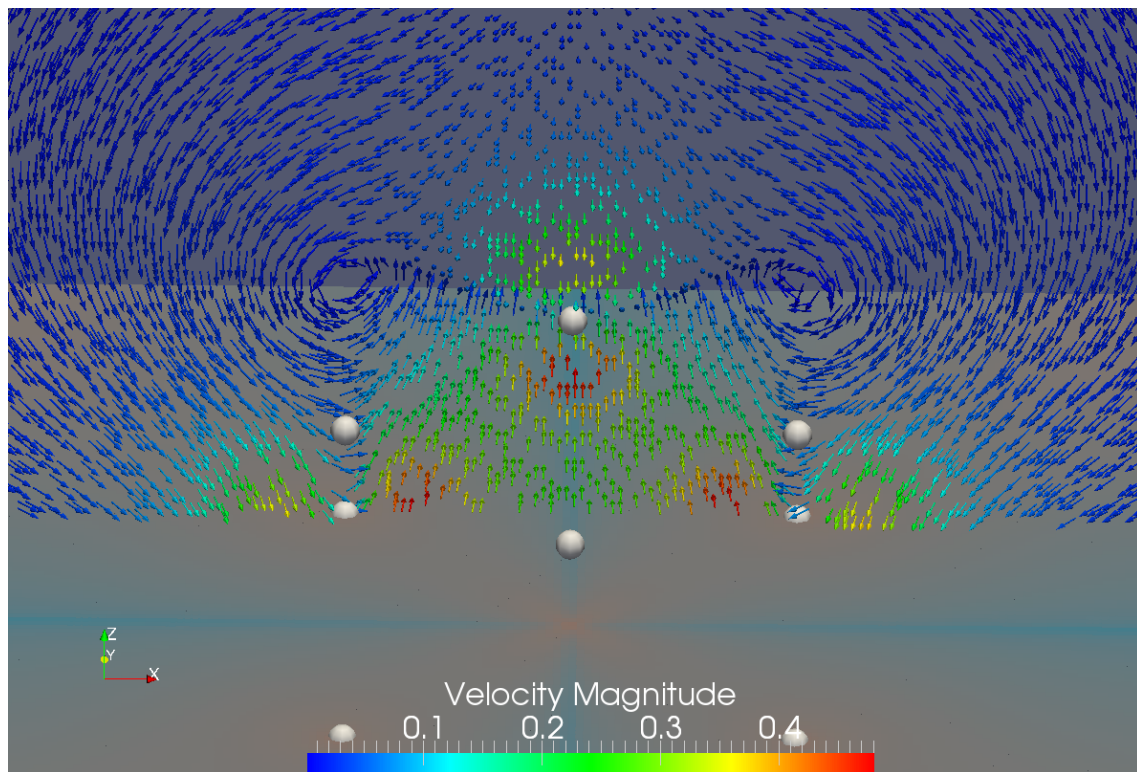
(a) Geschwindigkeitsfeld xy-Ebene



(b) Geschwindigkeitsfeld xz-Ebene



(c) Geschwindigkeitsfeld yz-Ebene



(d) xz-Ebene bei $y = 0.15$

Abb. 26: Geschwindigkeitsfeld: Interaktion von zwölf Punktwirbeln

6.2 Instationäre Strömungen

Anders als bei den stationären Strömungen, werden nun Fälle betrachtet, bei denen die einzelnen Punktwirbel eine aktive Wirkung aufeinander haben. Dadurch bewegen sich nicht nur die passiven Partikel, sondern auch die Wirbelpartikel an sich. Dies resultiert in veränderlichen Geschwindigkeitsfeldern, die im Folgenden betrachtet werden sollen.

6.2.1 Interaktion einer Punktwirbellinie

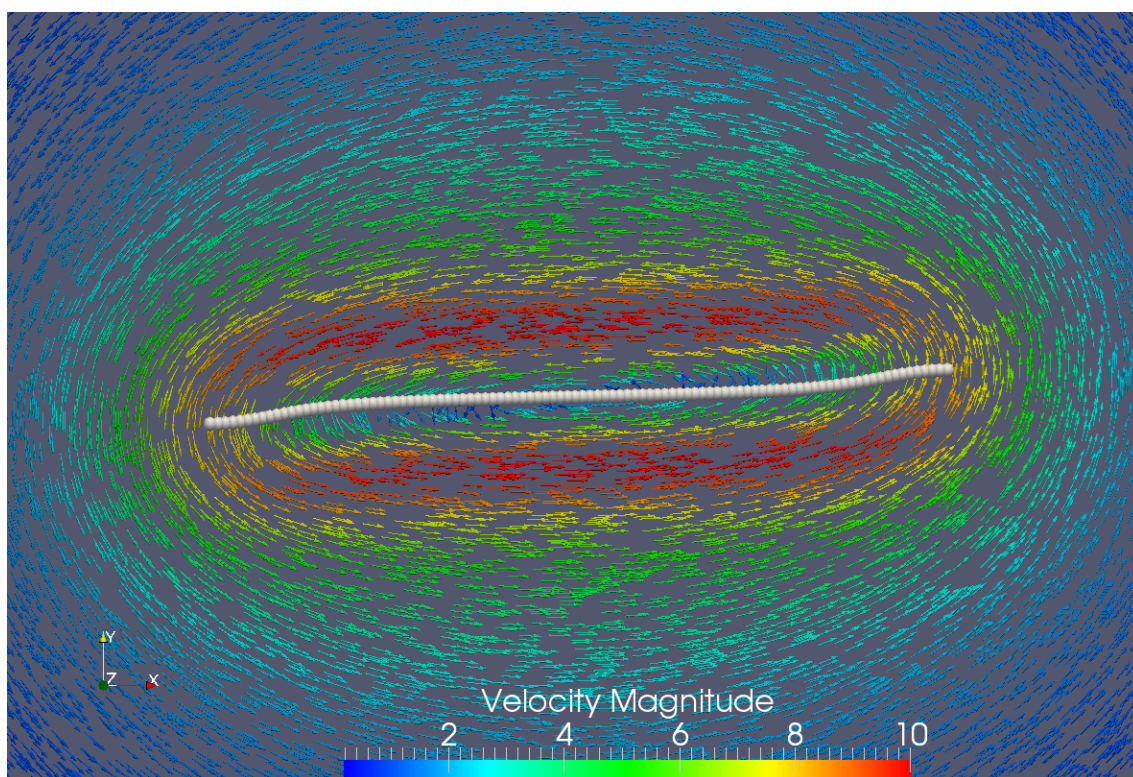
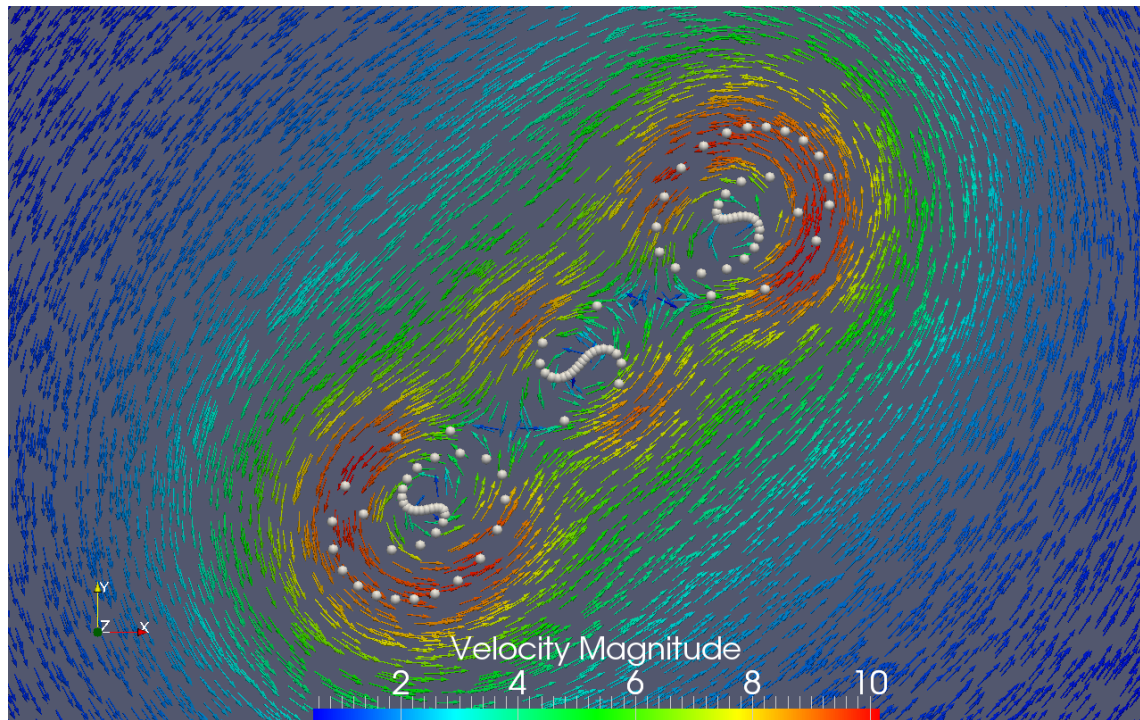
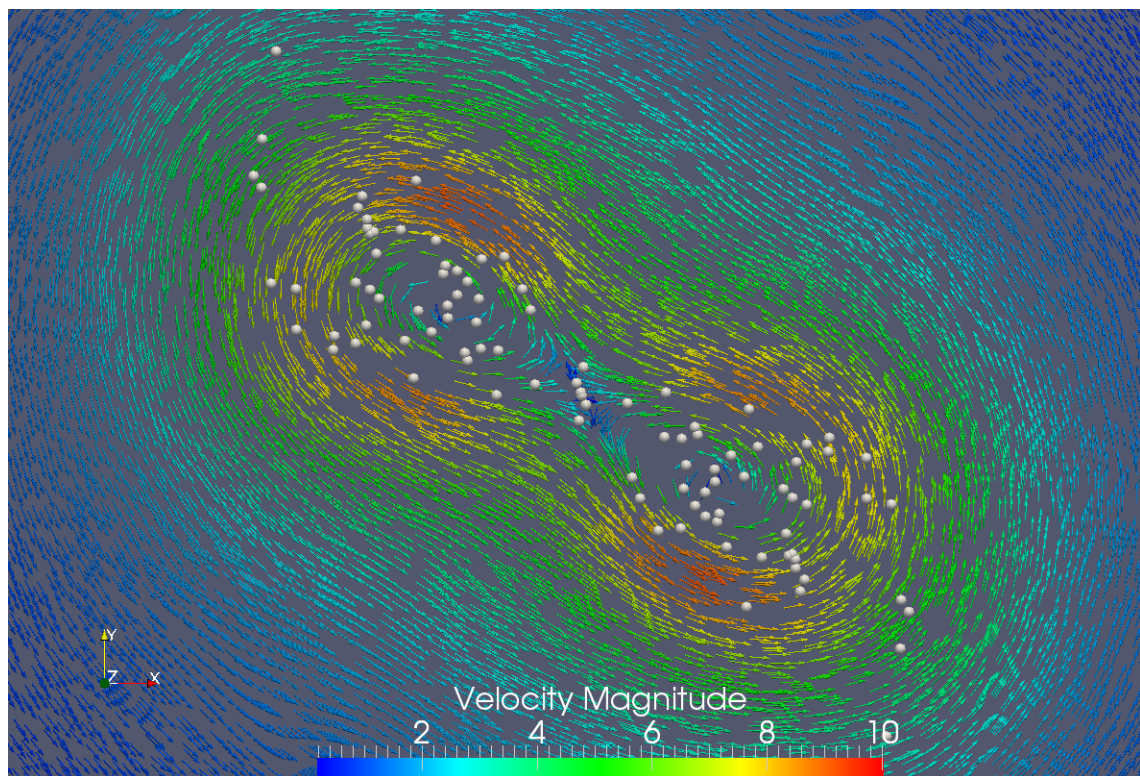


Abb. 27: Geschwindigkeitsfeld: Punktwirbellinie $T = 0$ s

Als ein instationärer Testfall wird die Interaktion einer Linie von Punktwirbeln betrachtet. Die Wirbelstärke der Partikel ist dabei so gewählt, dass die Orientierung orthogonal zur xy -Ebene ist, wobei sich die Partikel selbst in dieser Ebene befinden. Dadurch ergibt sich das in Abbildung 27 dargestellte Geschwindigkeitsfeld. Dieses verändert sich über die Zeit, aufgrund der Wirkung der Wirbelpartikel aufeinander. Die Bewegung der Wirbelpartikel ist beispielhaft zu den Zeiten $T = 0,03$ s (Abbildung 28(a)) und $T = 0,12$ s (Abbildung 28(b)) dargestellt. Wie anhand der Geschwindigkeitsfelder zu erkennen ist, rollen sich die Enden der Partikellinie über



(a) $T = 0,03s$



(b) $T = 0,12s$

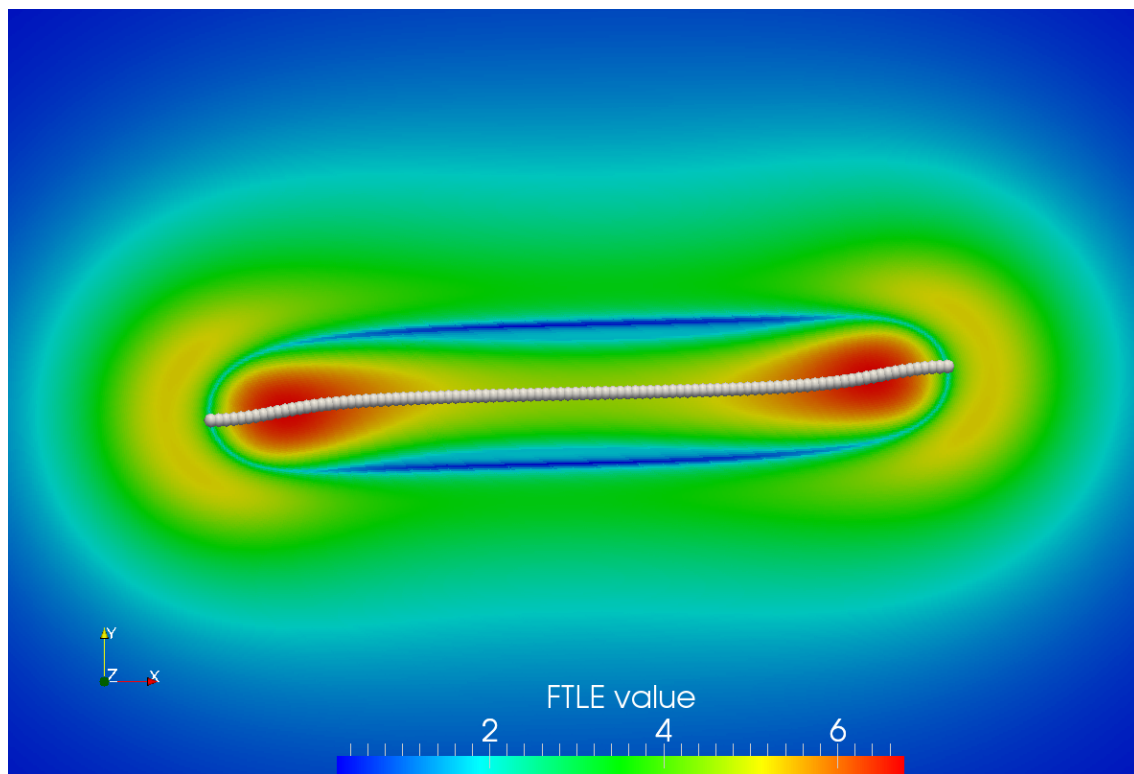
Abb. 28: Geschwindigkeitsfeld: Punktwirbellinie

die Zeit auf. Dadurch bilden sich zwei „starke“, äußere Wirbelzentren, sowie ein inneres, „schwächeres“ Wirbelzentrum. Aufgrund dieses Ungleichgewichts verbleiben bei $T = 0,12\text{s}$ nur noch die beiden äußeren Wirbelstrukturen. Damit deckt sich diese Simulation mit den Ergebnissen von Alekseenko et al. (vgl. [AKO07]) die ähnliche Fälle betrachtet haben.

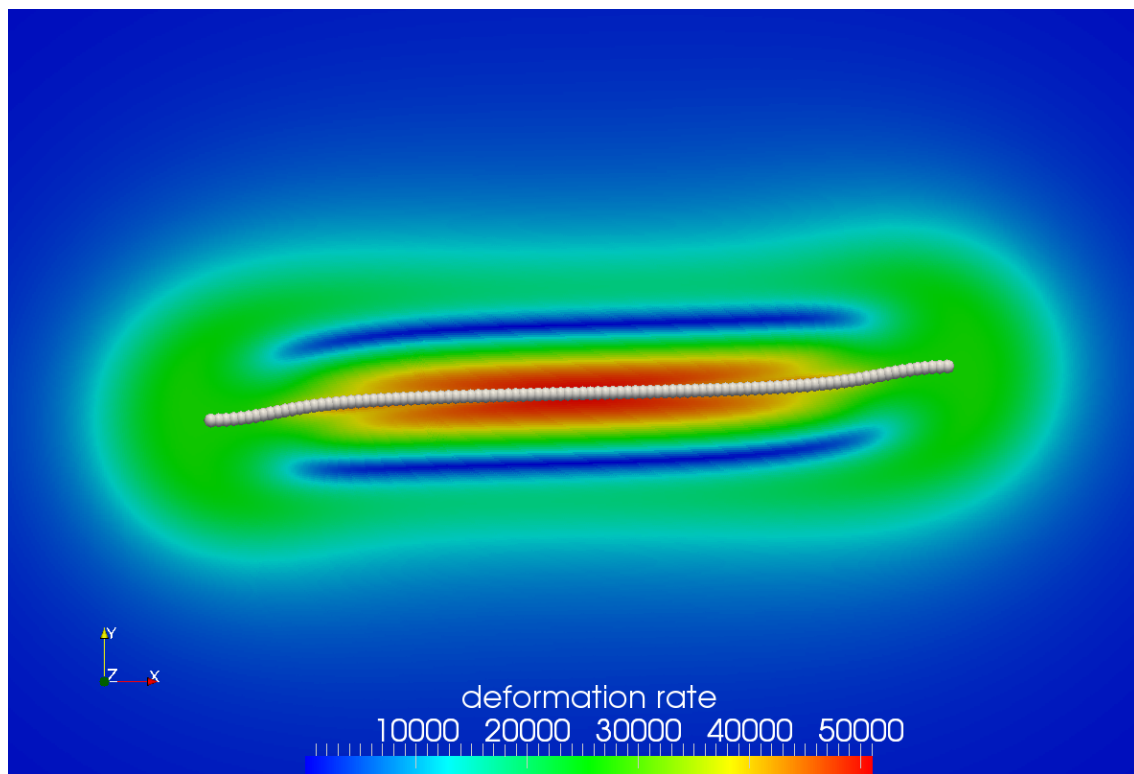
Beim Vergleich des FTLE-Wertes mit der Verformungsrate (Abbildung 29) fällt auf, dass, anders als im stationären, sich diese beiden Werte unterscheiden. Da \mathbf{F} , als maßgebliche Größe für den FTLE-Wert, die vergangenen Zeitschritte berücksichtigt, wohingegen die Verformungsrate nur den augenblicklichen Zeitschritt betrachtet, ist dieser Unterschied im instationären nachvollziehbar. Bemerkenswert ist an dieser Stelle, dass der FTLE-Wert am Rand einer jeden Wirbelstruktur einen geringeren Wert annimmt, wodurch er die Wirbelstrukturen voneinander abgrenzt.

Desweiteren wird die lokale Krümmung des Strömungsfeldes betrachtet (vgl. Abbildung 30). Wie zu erwarten, verändert diese über die Zeit ihre Struktur und bildet beispielsweise zum Zeitpunkt $T = 0,03\text{s}$ eine teilende Struktur zwischen den einzelnen Wirbelgebieten aus. Dabei ist die Ähnlichkeit zur Zentripetalbeschleunigung, über welche die Krümmung maßgeblich bestimmt wird, klar zu erkennen. Zudem ist an der Zentripetalbeschleunigung beim Zeitschritt $T = 0,03\text{s}$ zu erkennen, dass die beiden äußeren Wirbel um einiges stärker sind. Damit zeichnet sich bereits zu diesem Zeitpunkt ab, dass der innere Wirbel von den beiden äußeren im weiteren Fortgang „zerrissen“ wird.

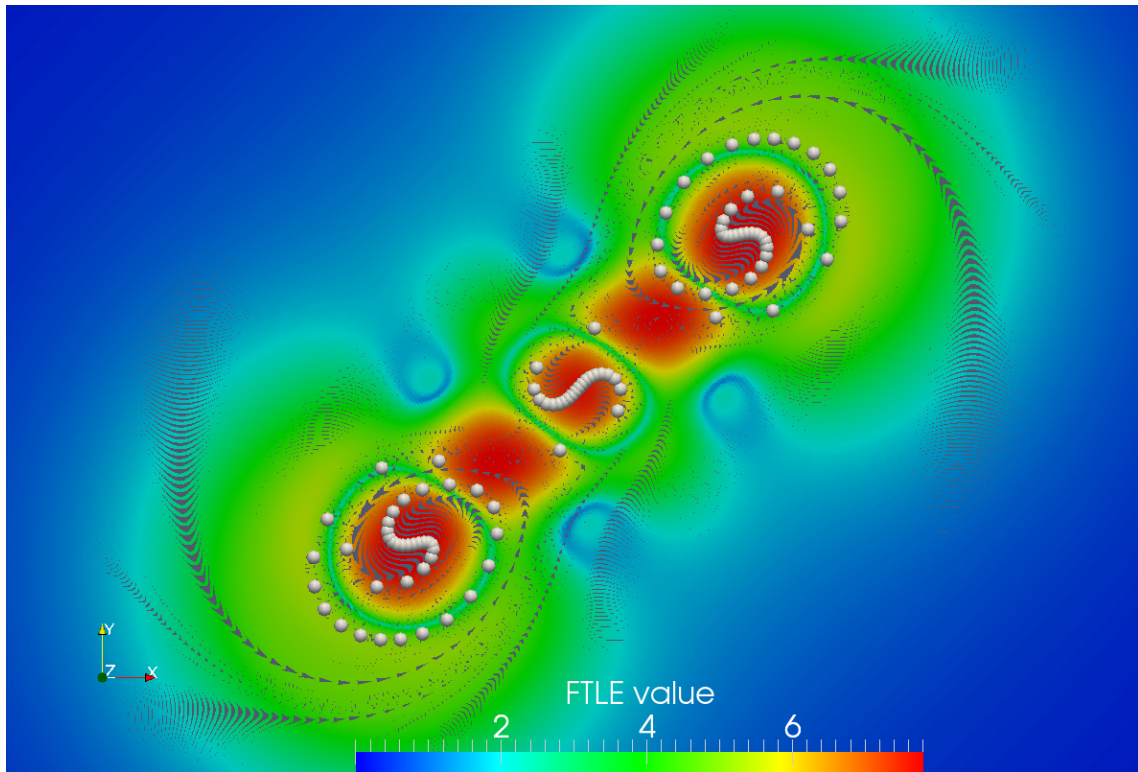
Bei der Betrachtung der Dehnrate (Abbildung 31) zum Zeitpunkt $T = 0,03\text{s}$ ist zu erkennen, dass sich zwischen den drei Wirbelstrukturen zwei Sattelpunktsstrukturen ausbilden. Diese entstehen aufgrund der gleichdrehenden Wirbel, da diese zwischen einander ein gegenläufig gerichtetes Geschwindigkeitsfeld induzieren. Diese Ausprägung von Sattelpunktsstrukturen ist bereits aus dem stationären Testfall 6.1.3 bekannt. Da in diesem Fall jedoch die Wirbelpartikel frei beweglich sind, „rollen“ die Wirbelstrukturen aneinander ab, was zur Drehung des Gesamtsystems führt. Nach Alekseenko et al. (vgl. [AKO07]) befindet sich das Drehzentrum zweier gleichstarker und gleichgerichteter Wirbel genau zwischen diesen Wirbeln. An dieser Stelle befindet sich der dritte Wirbel, womit eine Drehung um diesen stattfindet. Aufgrund der gegenläufigen Geschwindigkeitsfelder entsteht zwischen den Wirbeln Scherung, die in Abbildung 31 dargestellt ist.



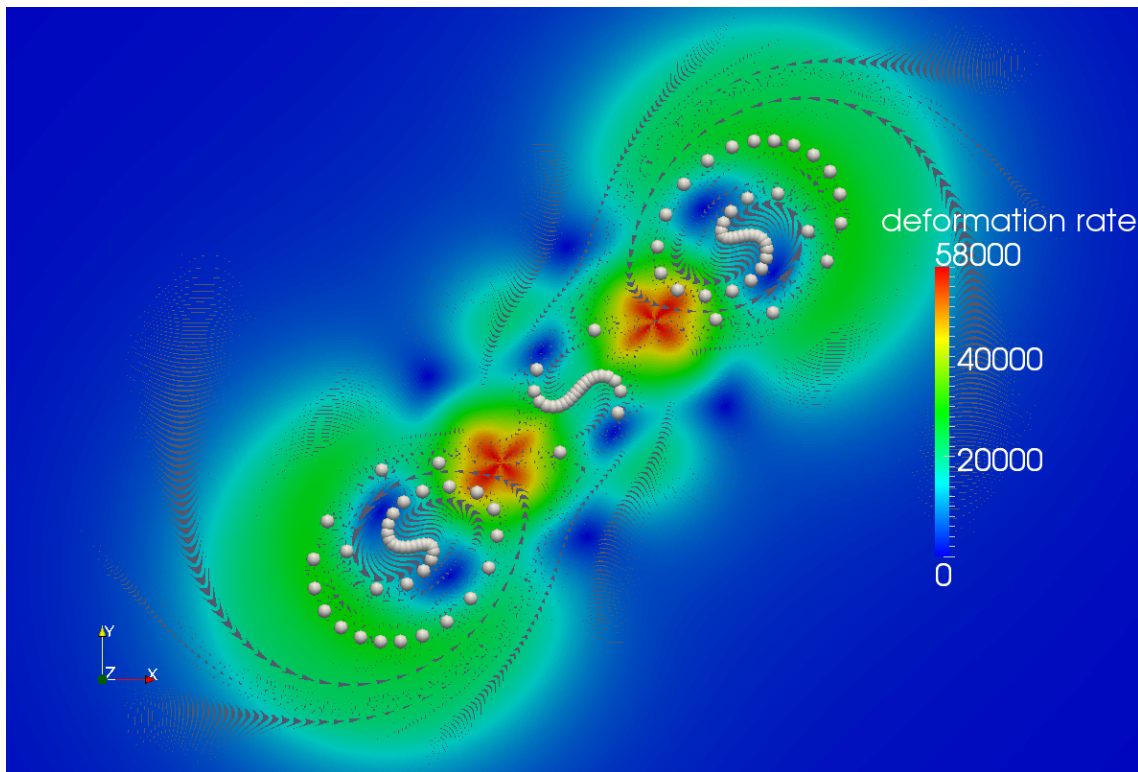
(a) FTLE-Wert $T = 0$ s



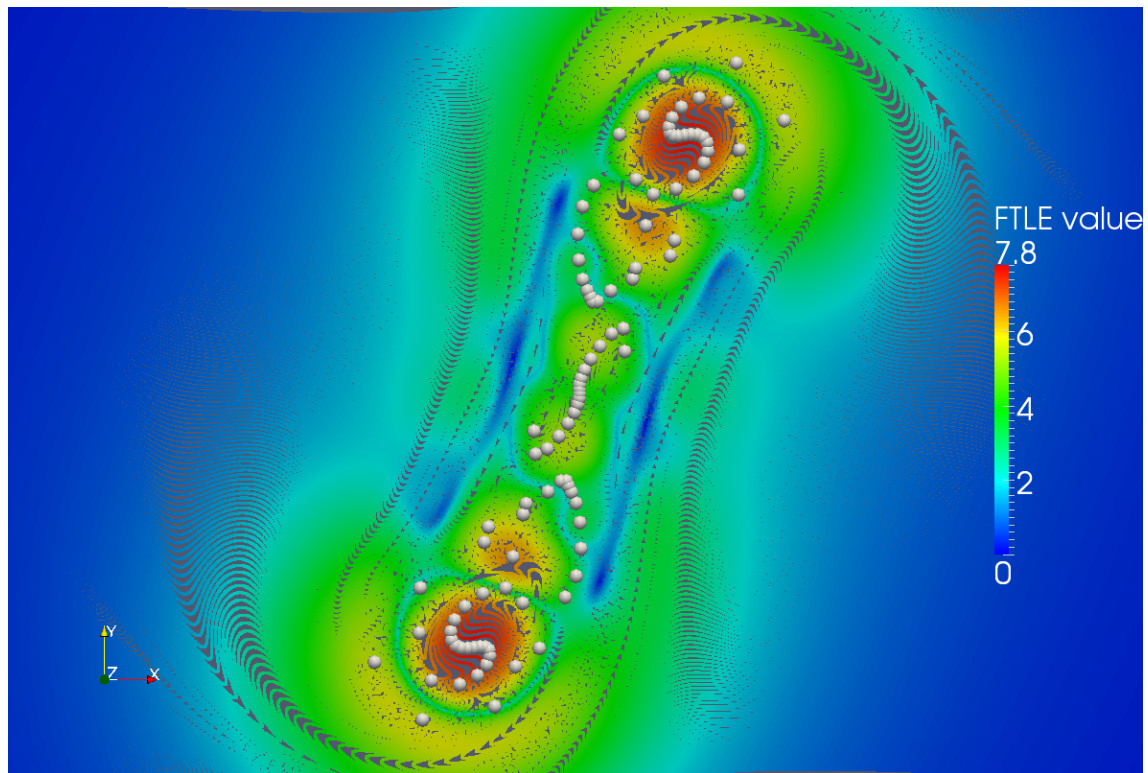
(b) Verformungsrate $T = 0$ s



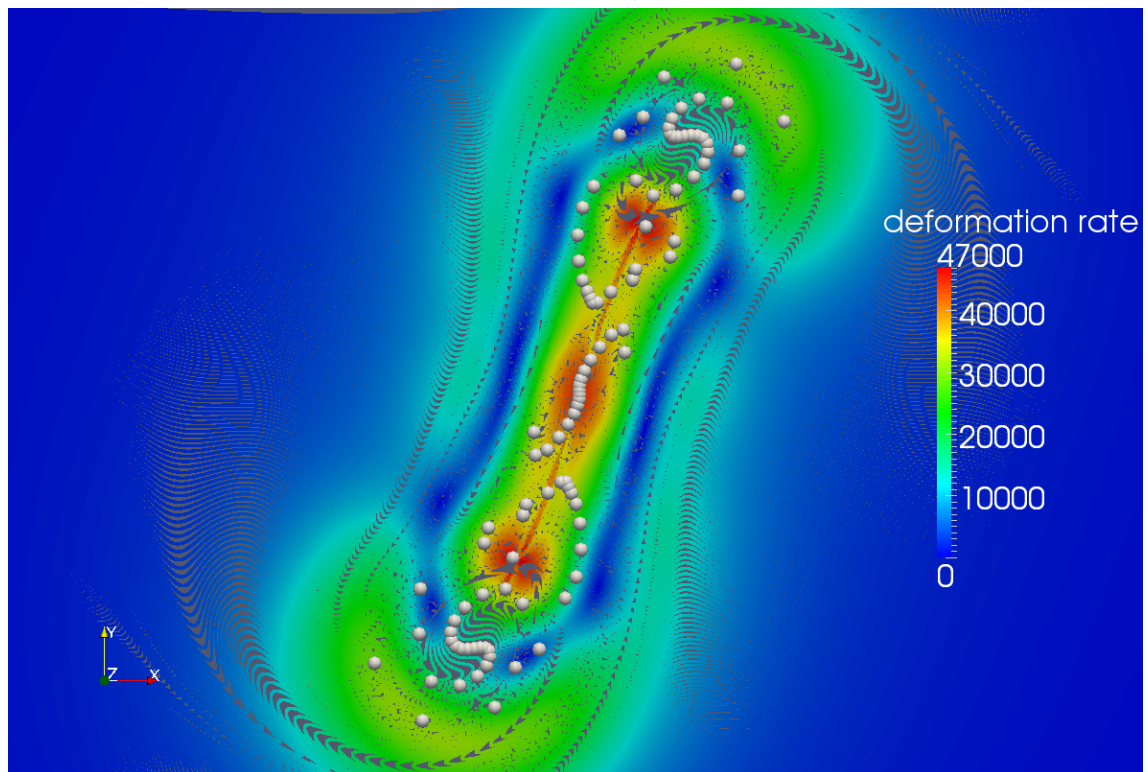
(c) FTLE-Wert $T = 0,03s$



(d) Verformungsrate $T = 0,03s$

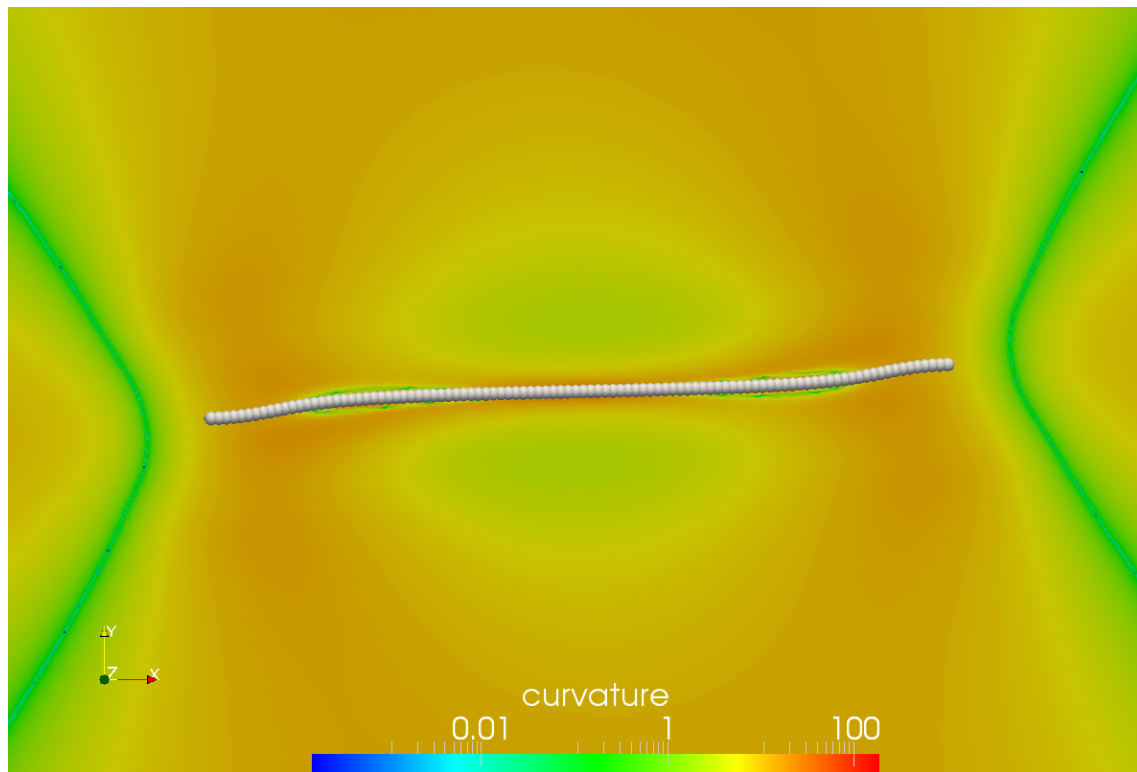


(e) FTLE-Wert $T = 0,05s$

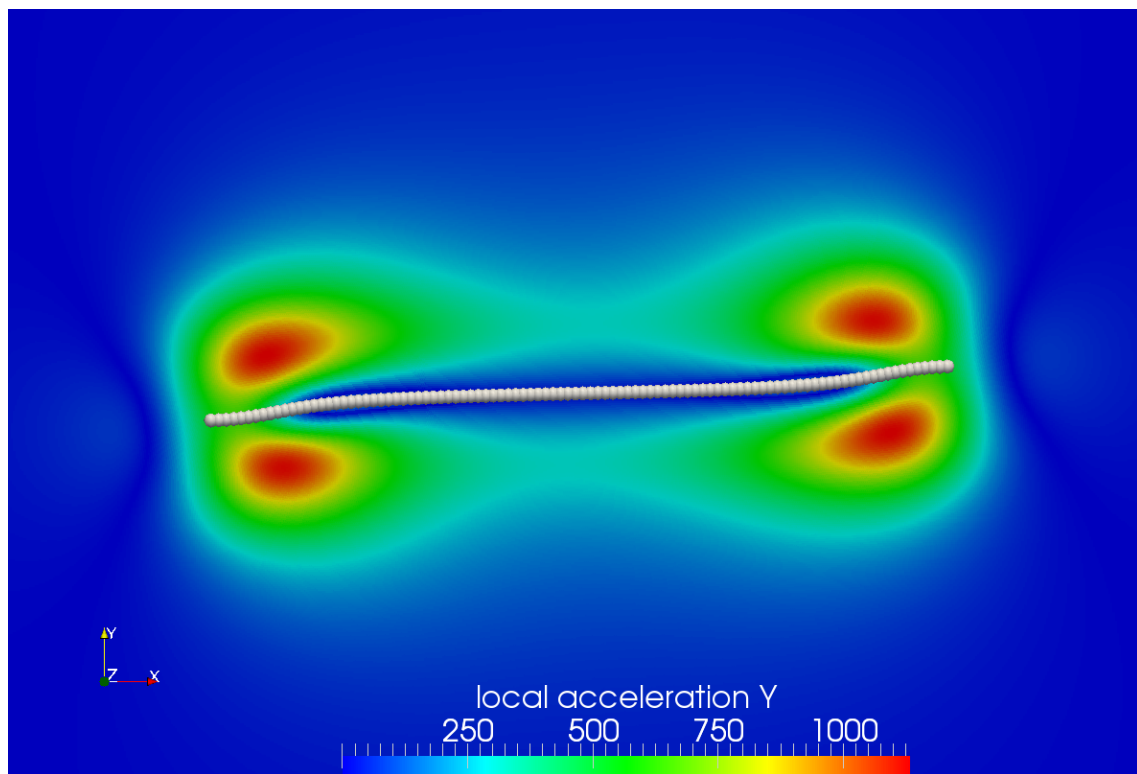


(f) Verformungsrate $T = 0,05s$

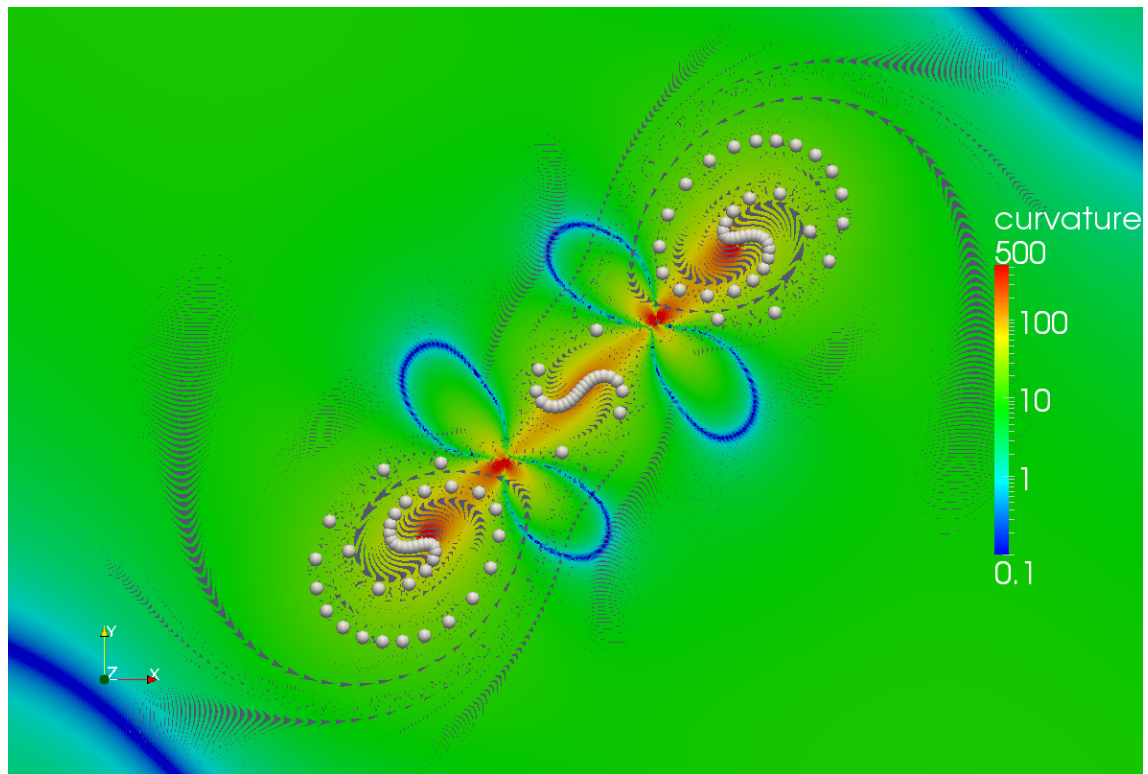
Abb. 29: FTLE-Wert und Verformungsrate einer Punktwirbellinie



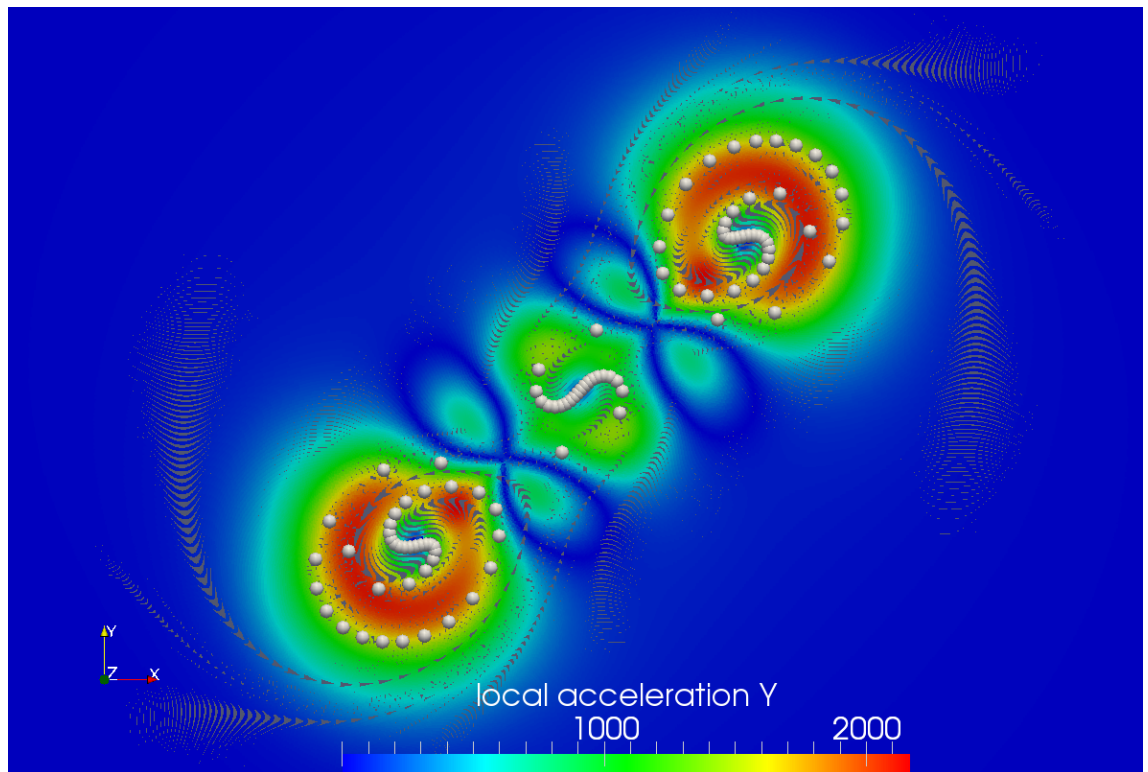
(a) Krümmung $T = 0s$



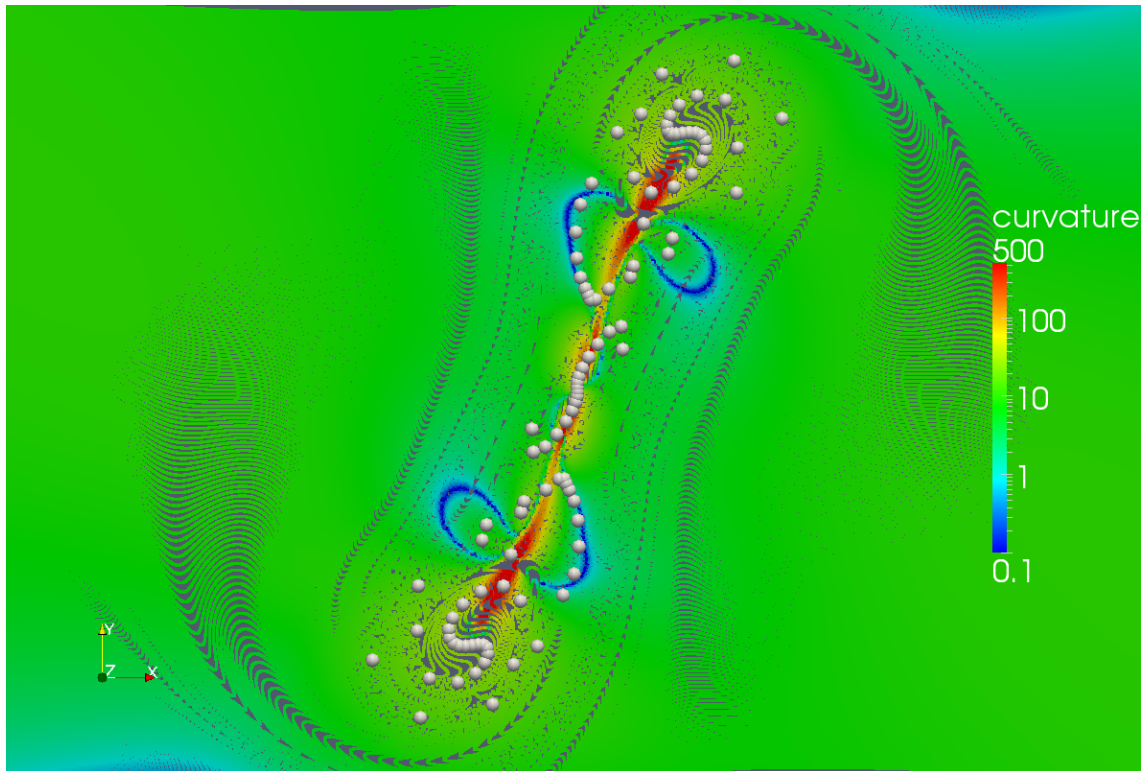
(b) Zentripetalbeschleunigung $T = 0s$



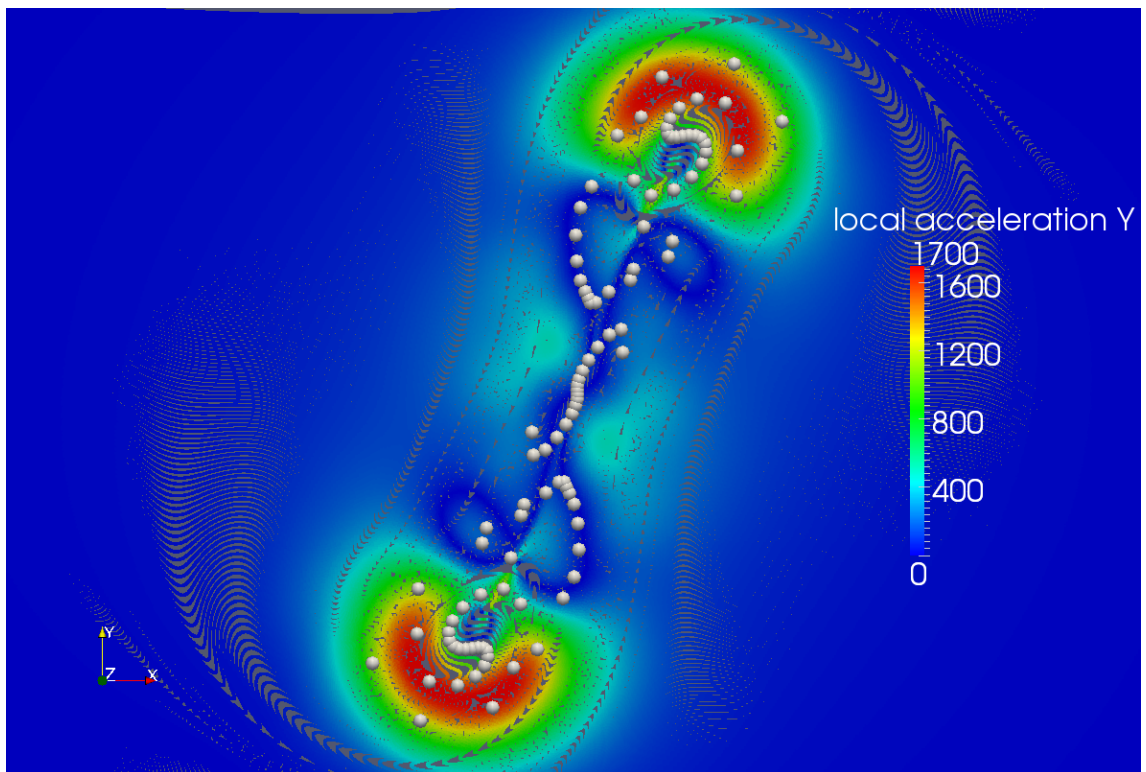
(c) Krümmung $T = 0,03s$



(d) Zentripetalbeschleunigung $T = 0,03s$

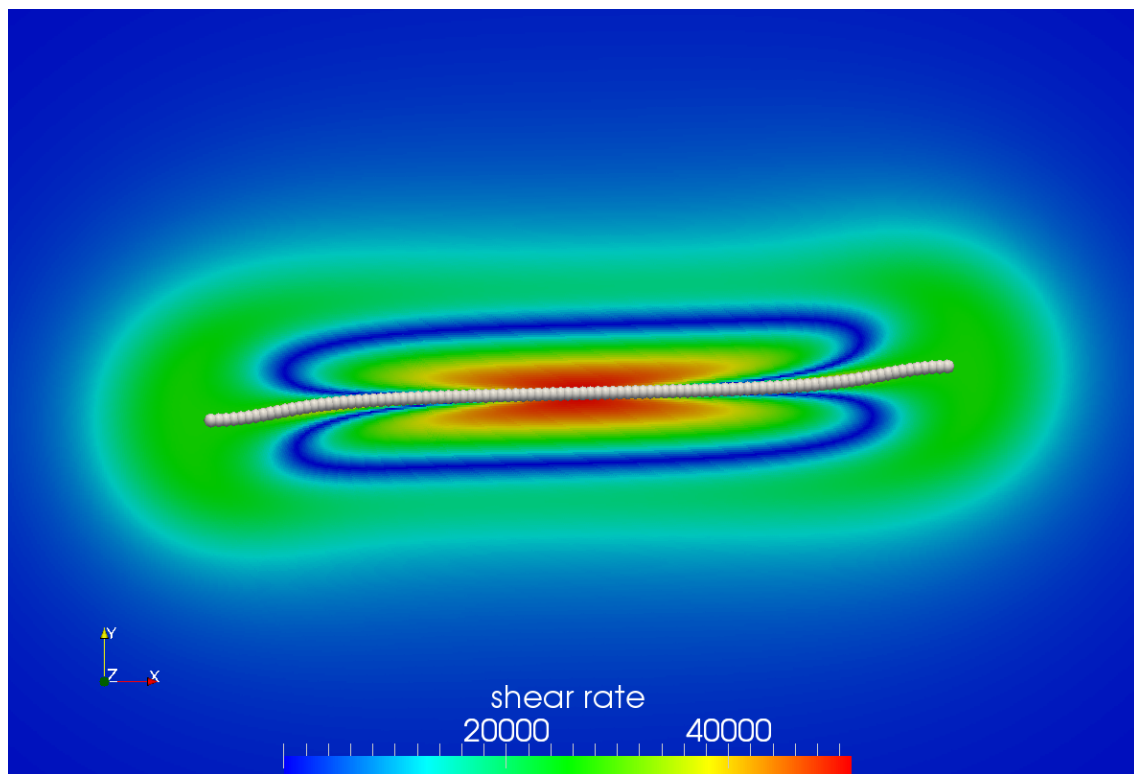


(e) Krümmung $T = 0,05s$

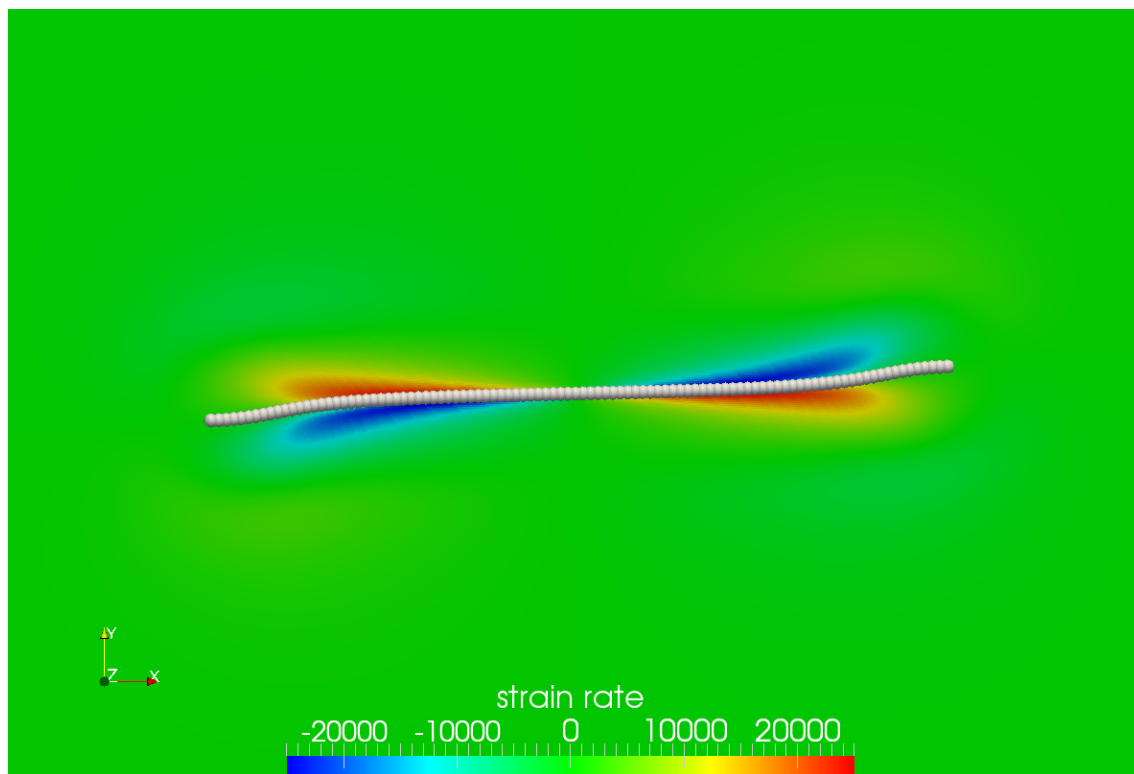


(f) Zentripetalbeschleunigung $T = 0,05s$

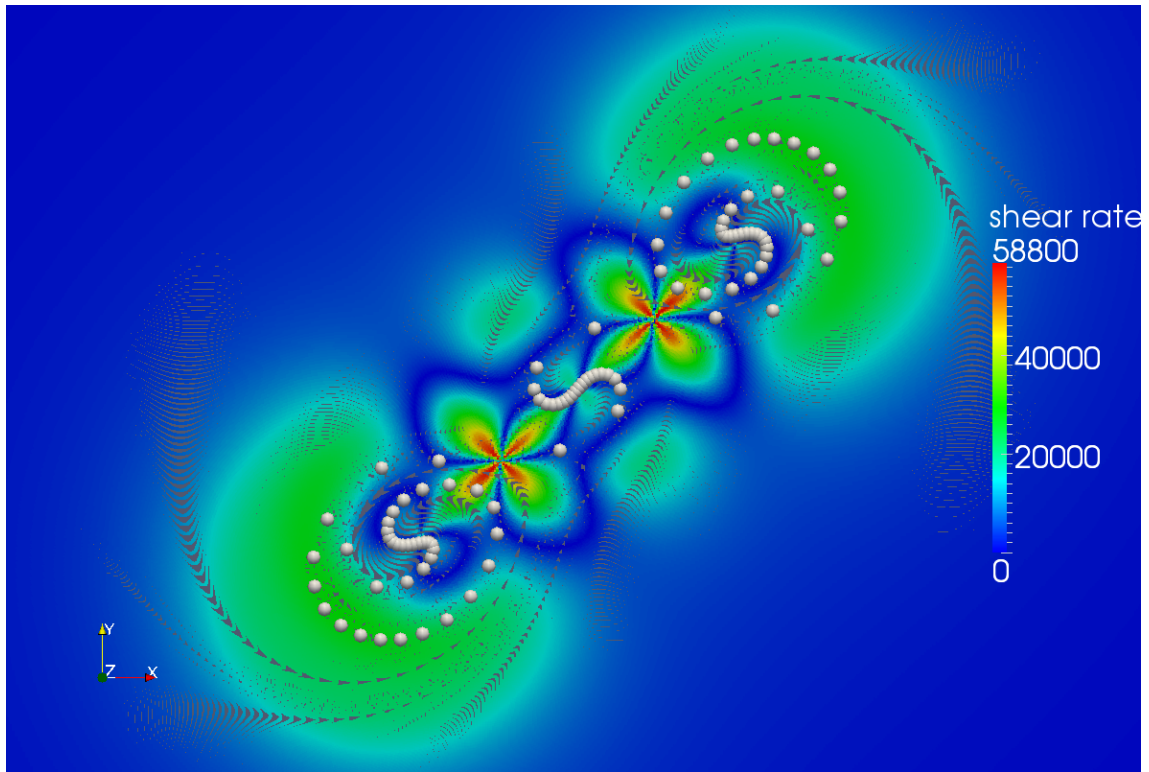
Abb. 30: Krümmung und Zentripetalbeschleunigung einer Punktwirbellinie



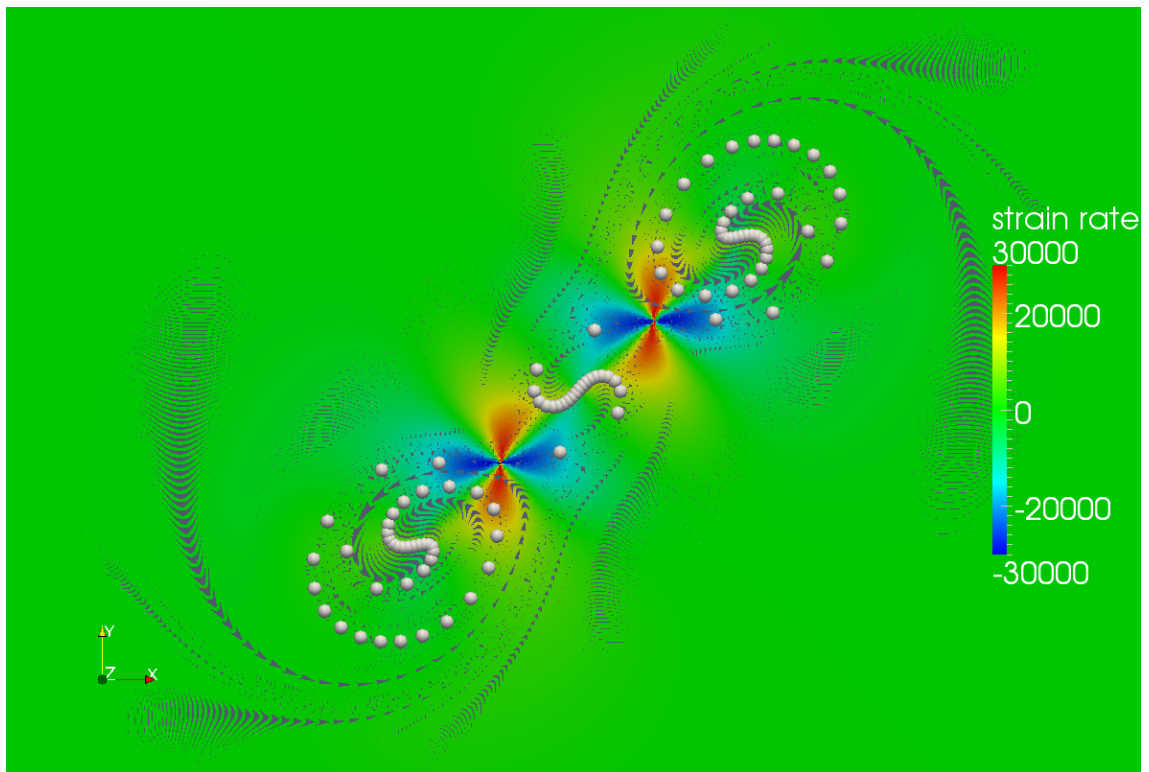
(a) Scherrate $T = 0s$



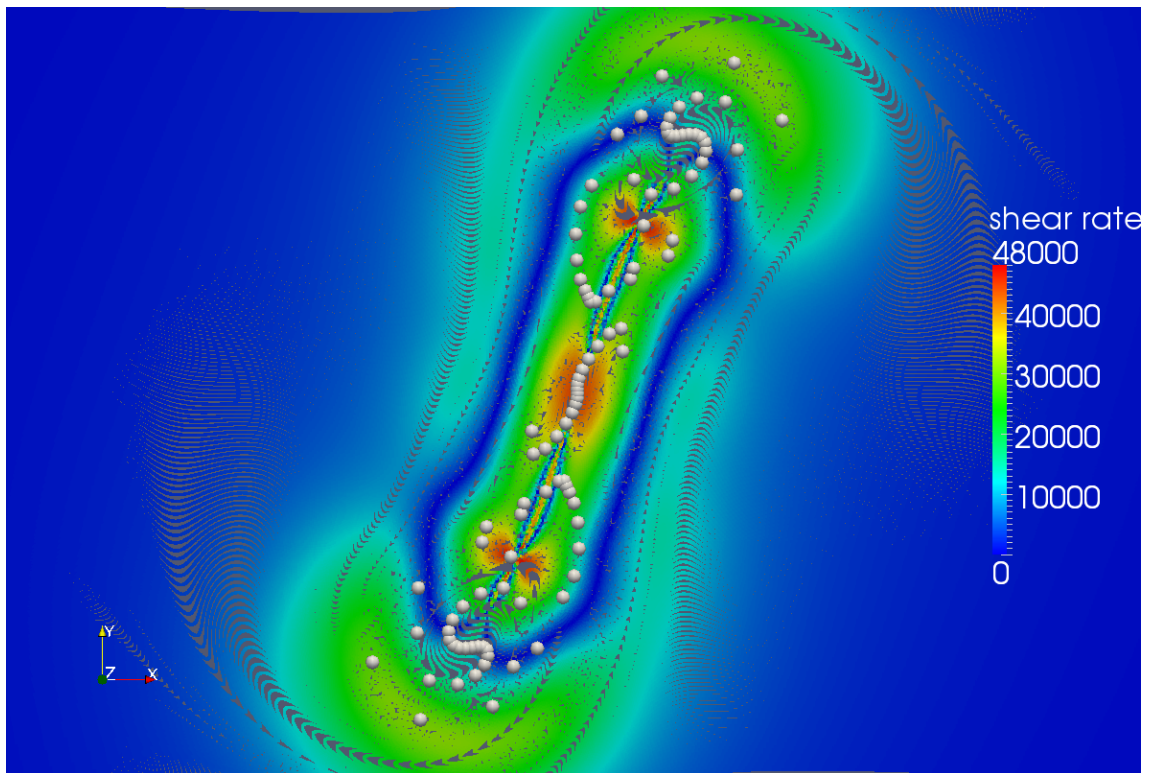
(b) Dehnrate $T = 0s$



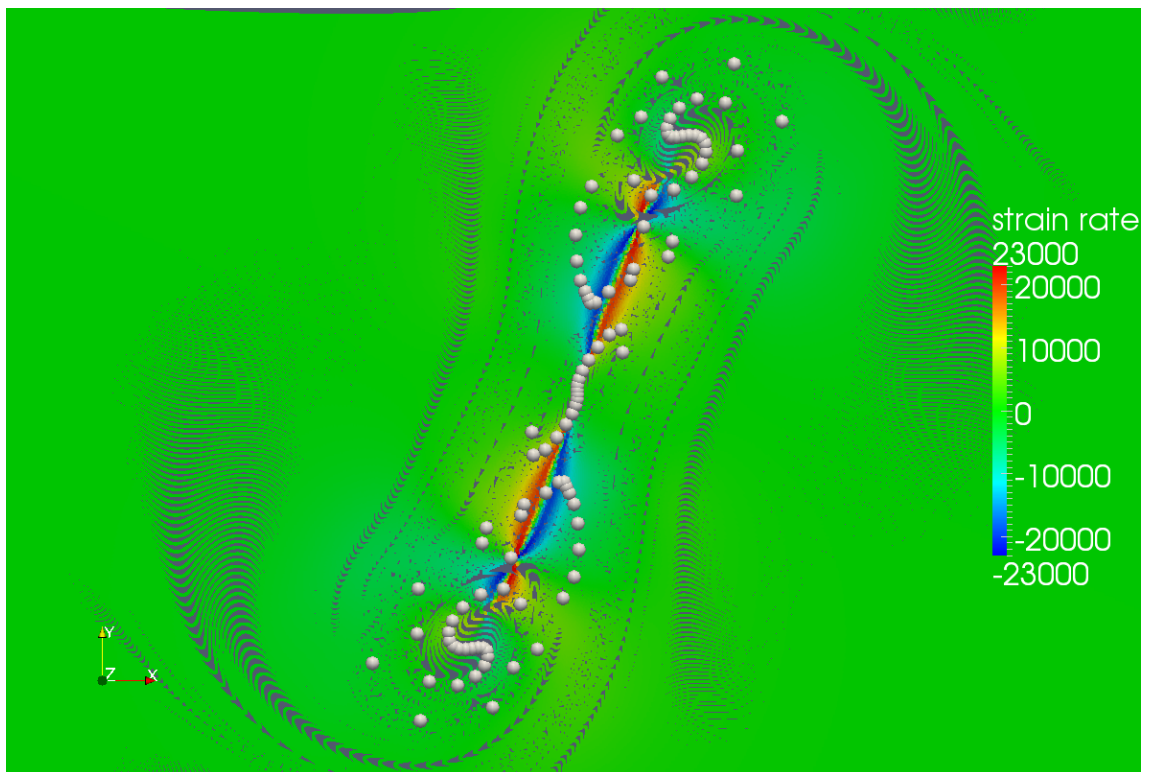
(c) Scherrate $T = 0,03s$



(d) Dehnrate $T = 0,03s$



(e) Scherrate $T = 0,05s$



(f) Dehnrate $T = 0,05s$

Abb. 31: Scherrate und Dehnrate einer Punktwirbellinie

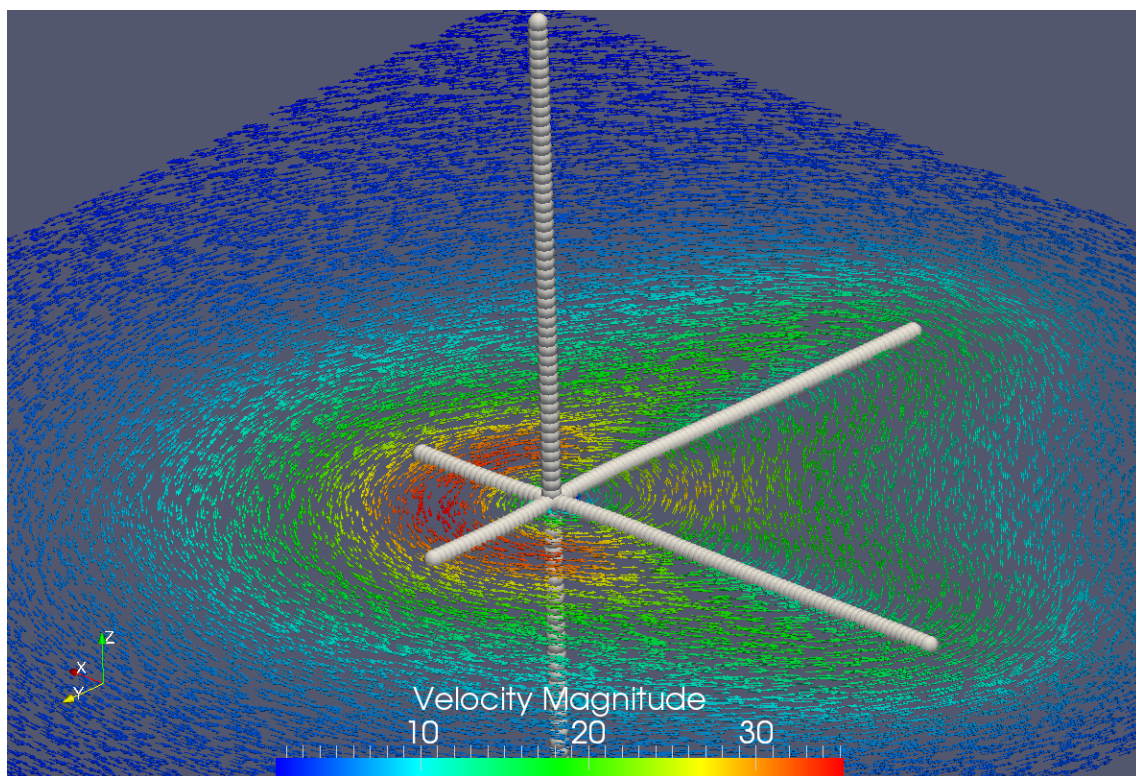


Abb. 32: Geschwindigkeitsfeld: Startkonfiguration eines 3D Wirbelkreuzes

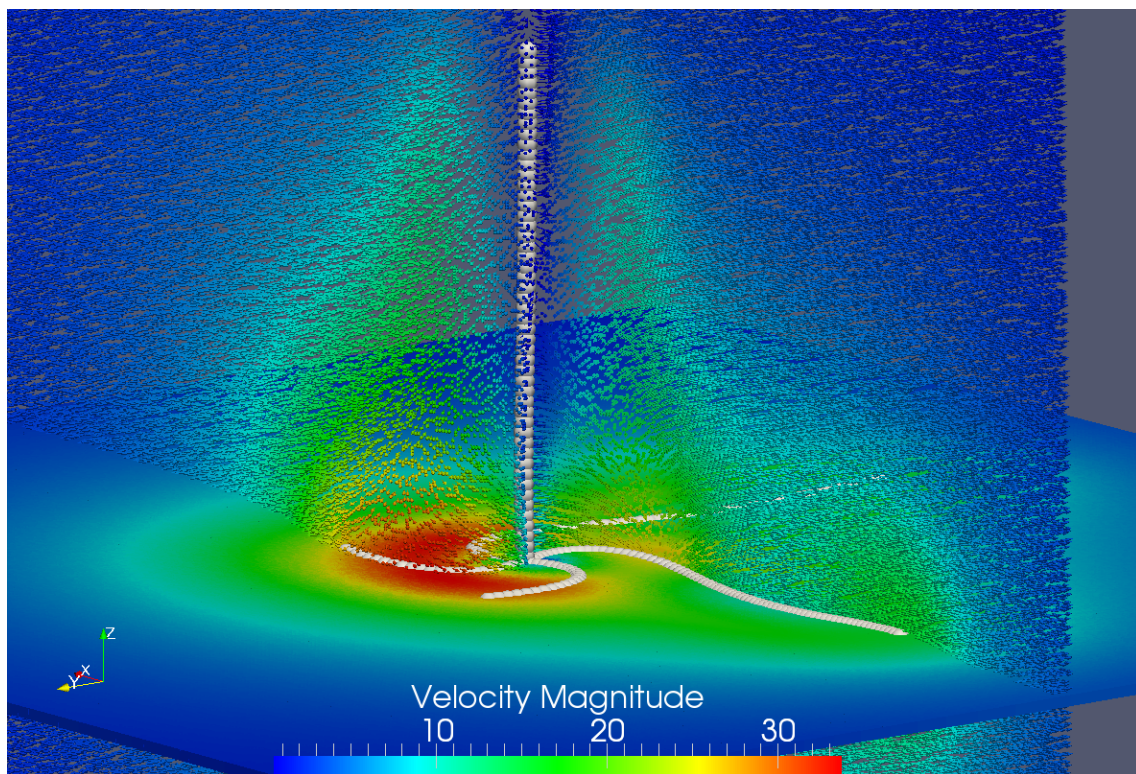
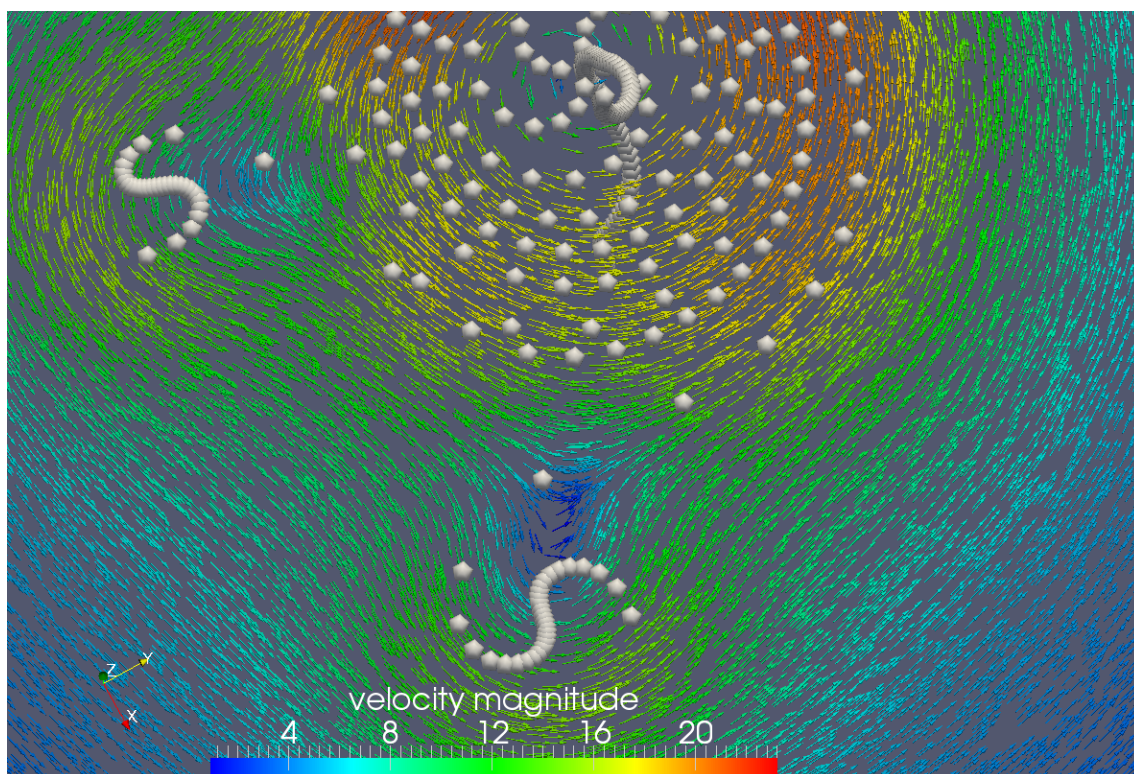


Abb. 33: Geschwindigkeitsfeld: 3D Wirbelkreuz $T = 0s$

Abb. 34: Geschwindigkeitsfeld: 3D Wirbelkreuz $T = 0,012s$

6.2.2 Interaktion eines 3D Punktwirbelkreuzes

Als letzter Testfall soll ein instationäres, dreidimensionales Punktwirbelkreuz untersucht werden. Bei diesem Testfall werden die einzelnen Punktwirbel so angeordnet, dass sie ein dreidimensionales Kreuz bilden (vgl. Abbildung 32), wobei die Zirkulation der Partikel ausschließlich in z -Richtung orientiert ist. Desweiteren werden alle Partikel mit der gleichen Zirkulation initialisiert. Bei genauerer Betrachtung der Abbildung 32 fällt auf, dass die Wirbellinien in x und y Richtung auf einer Seite länger sind als auf der anderen. Diese Konfiguration bringt eine zusätzliche Störung in das System ein. Würden die Wirbellinien in der xy -Ebene genau mittig positioniert werden, so verbliebe die z -Wirbellinie in ihrer Ausgangsposition und es entstünde kein Mehrwert gegenüber einer zweidimensionalen Betrachtung. Durch diese eingebrachte Störung verändert sich jedoch die z -Wirbellinie über die Zeit.

Bei genauer Betrachtung der Abbildung 35 ist zu erkennen, dass die z -Achse über die Zeit eine Verdrillung und Auslenkung aus ihrer ursprünglichen Lage erlebt. Dadurch „kippt“ jedoch ebenfalls die „vektorielle Zirkulation“ aus der z -Achse, wodurch eine Rückwirkung auf die Wirbelpartikel der xy -Ebene stattfindet (siehe $T = 0,05s$). Daraufhin verstärkt sich dieser Prozess immer mehr, bis am Ende die gegeneinan-

der wirkenden Kräfte so groß werden, dass das gesamte System auseinander bricht. Damit lässt sich ein Aufplatzen der Strömungsstruktur, wie es beispielsweise beim Wirbelplatzen (vgl. [Rüt04]) auftritt, beobachten.

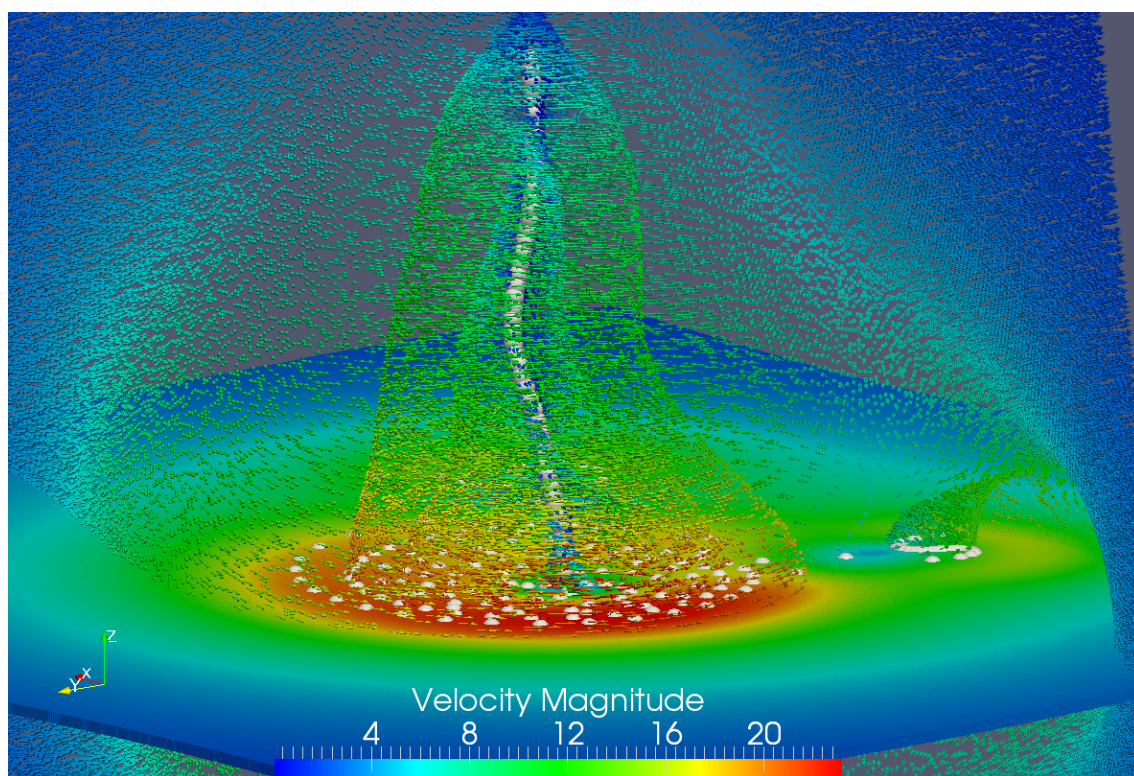
Zur Visualisierung dieses Testfalles werden, neben den Partikeln der xy -Ebene, auch die Partikel der xz -Ebene in den folgenden Abbildungen dargestellt. Da diese Partikel sich zeitlich in der Strömung mitbewegen, „rollen“ sie sich ebenso wie die Wirbelpartikel über die Zeit auf, was anhand der Abbildung 35(a) deutlich wird.

Bei der Betrachtung der zeitlichen Entwicklung der Punktwirbel ist zu erkennen, dass sich durch die beiden längeren Wirbellinien (vgl. Abbildung 32) Nebenwirbel bilden. Diese bleiben über den betrachteten Zeitraum relativ stabil und bewegen sich um den Hauptwirbel herum, wodurch eine Rückwirkung auf diesen stattfindet.

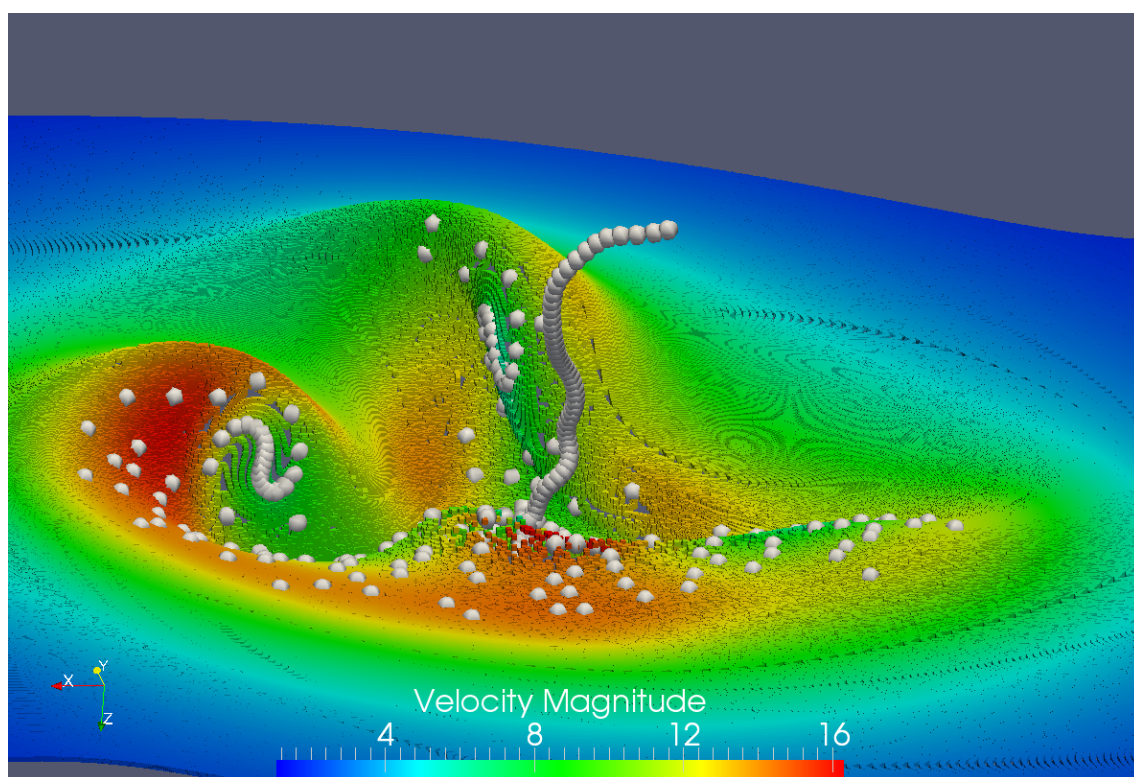
Wie auch bei der instationären Wirbellinie, wird der FTLE-Wert und die Verformungsrate für diesen Testfall miteinander verglichen (siehe Abbildung 36), wobei der Unterschied dieser beiden Werte klar erkenntlich ist. Besonders interessant ist an dieser Stelle, dass der FTLE-Wert einzelne Wirbelstrukturen abtrennt (zu erkennen an den blauen Umrandungen).

Anhand der Scher- und Dehnrate (Abbildung 37) ist die Wirkung der beiden Nebenwirbel auf das Geschwindigkeitsfeld des Hauptwirbels zu erkennen. Dieser erzeugt in der xy -Ebene ein, um seinen Ursprung, drehendes Geschwindigkeitsfeld, welches durch die Anwesenheit der Nebenwirbel gestört wird (vgl. Abbildung 34). Da jedoch die Nebenwirbel um einiges „schwächer“ sind als der Hauptwirbel, tritt diese Wirkung nur lokal auf. Dadurch kann sich eine Sattelpunktsstruktur nicht vollständig etablieren.

Bei der Betrachtung der dargestellten Größen (36 und 37) zum Zeitpunkt $T = 0,05s$ ist zu erkennen, dass die zuvor recht markanten Strukturen kaum mehr zu erkennen sind. Zu diesem Zeitpunkt beginnen die Wirbelpartikel sich so stark anzunähern, dass sie kurz darauf „auseinandergerissen“ werden.

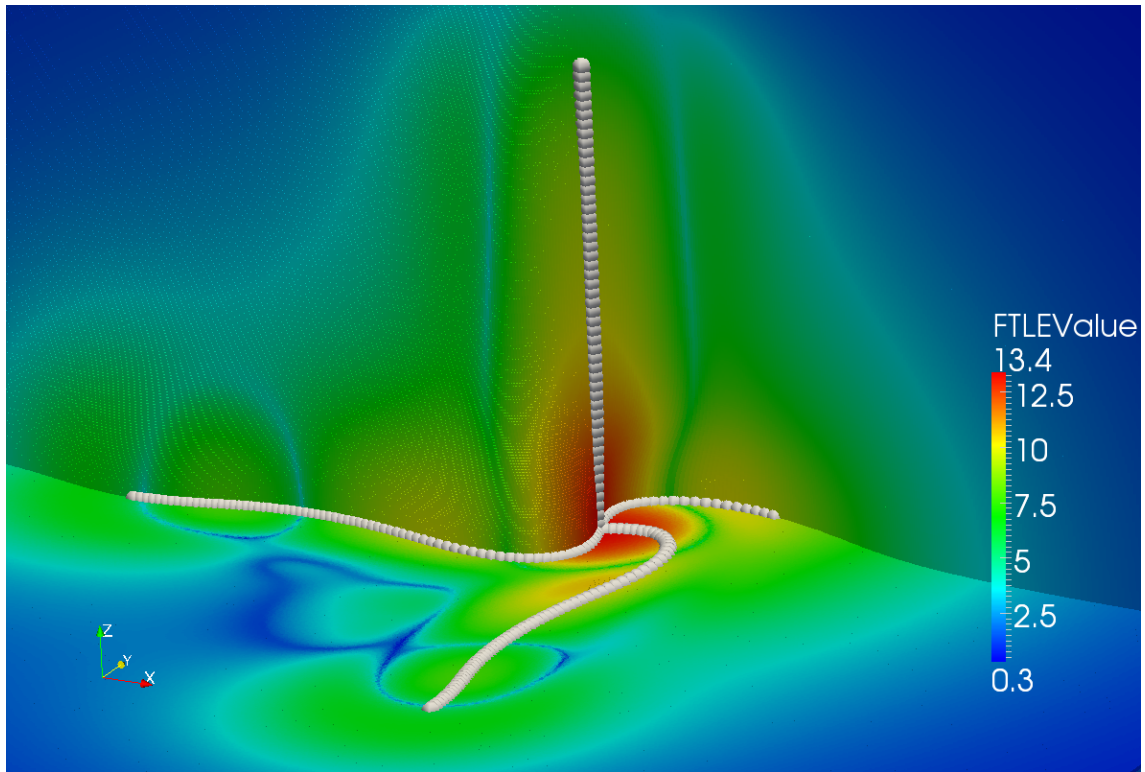


(a) $T = 0,012s$

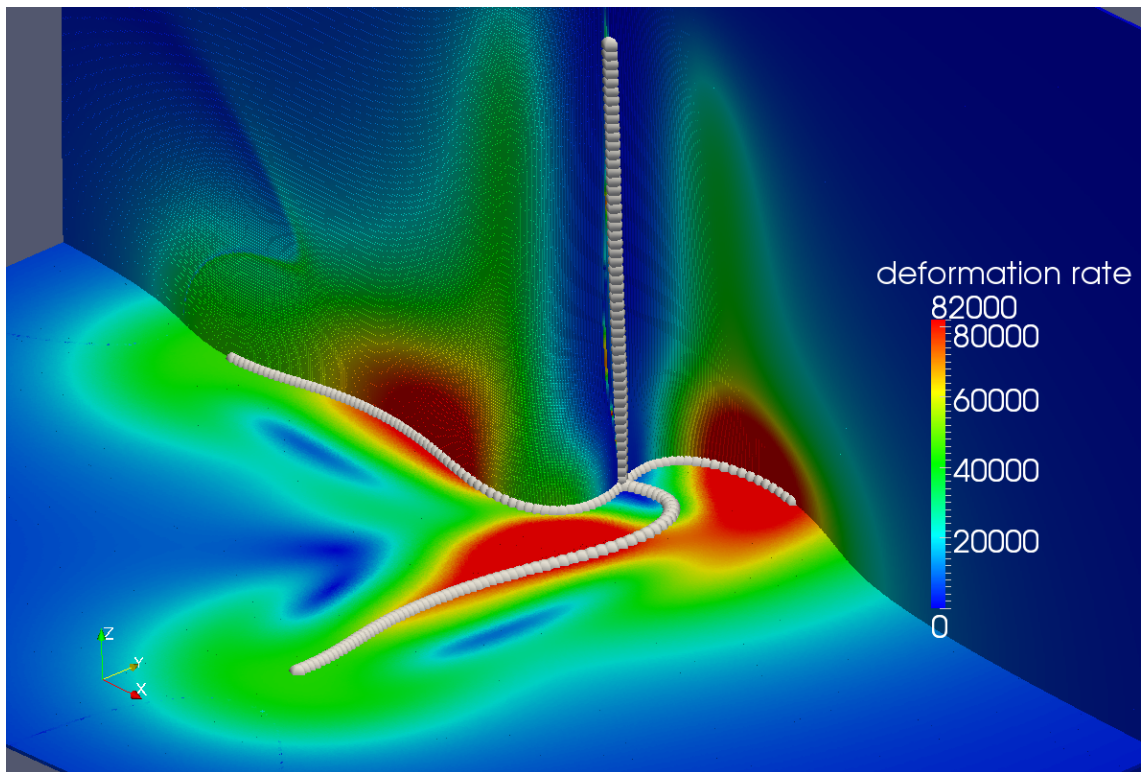


(b) $T = 0,05s$

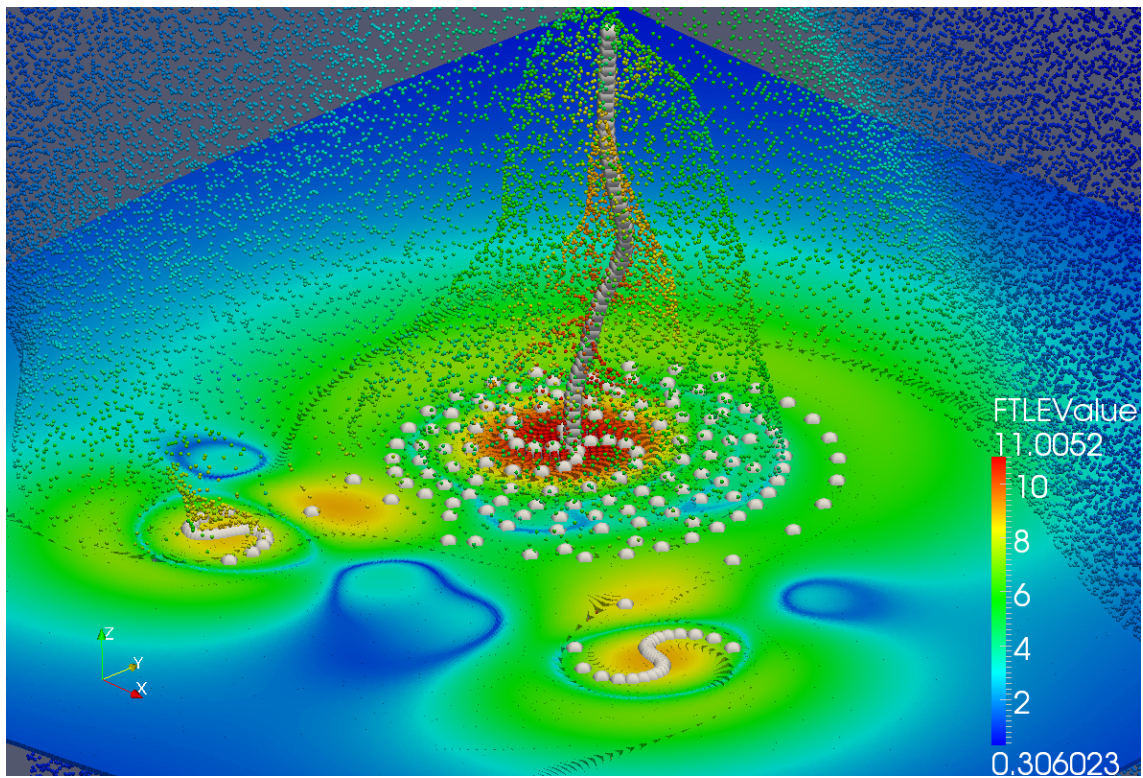
Abb. 35: Geschwindigkeitsfeld: 3D Wirbelkrenz



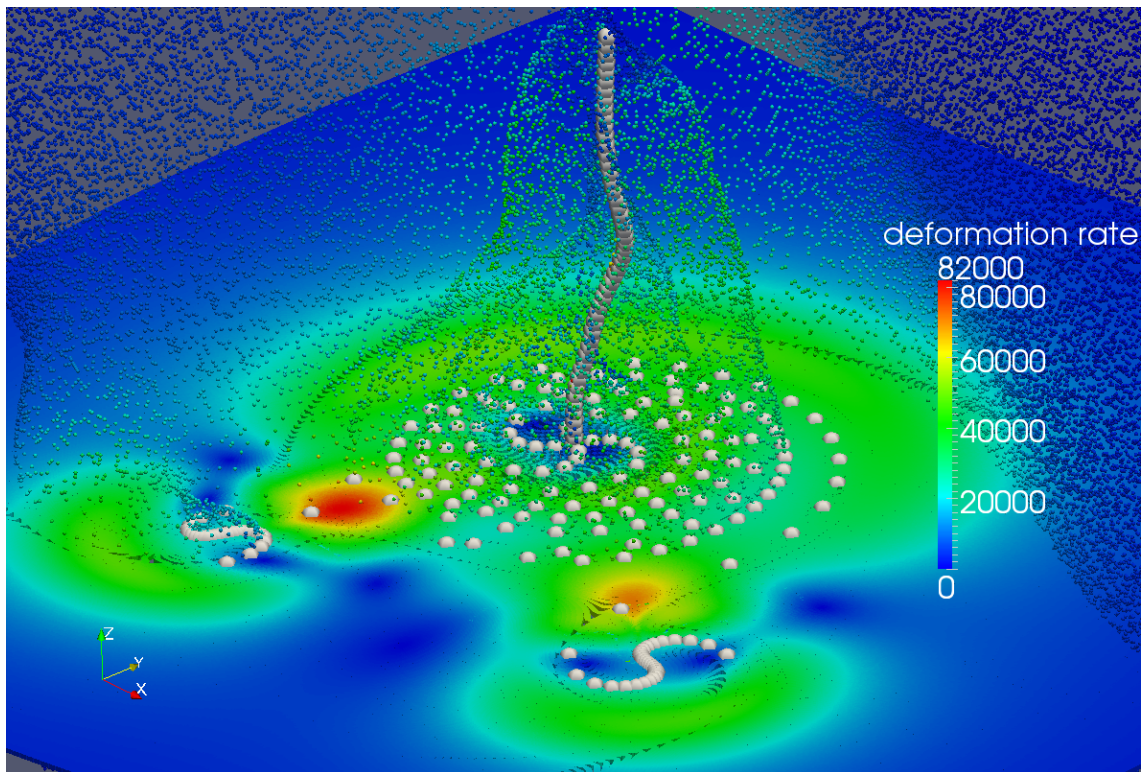
(a) FTLE-Wert $T = 0s$



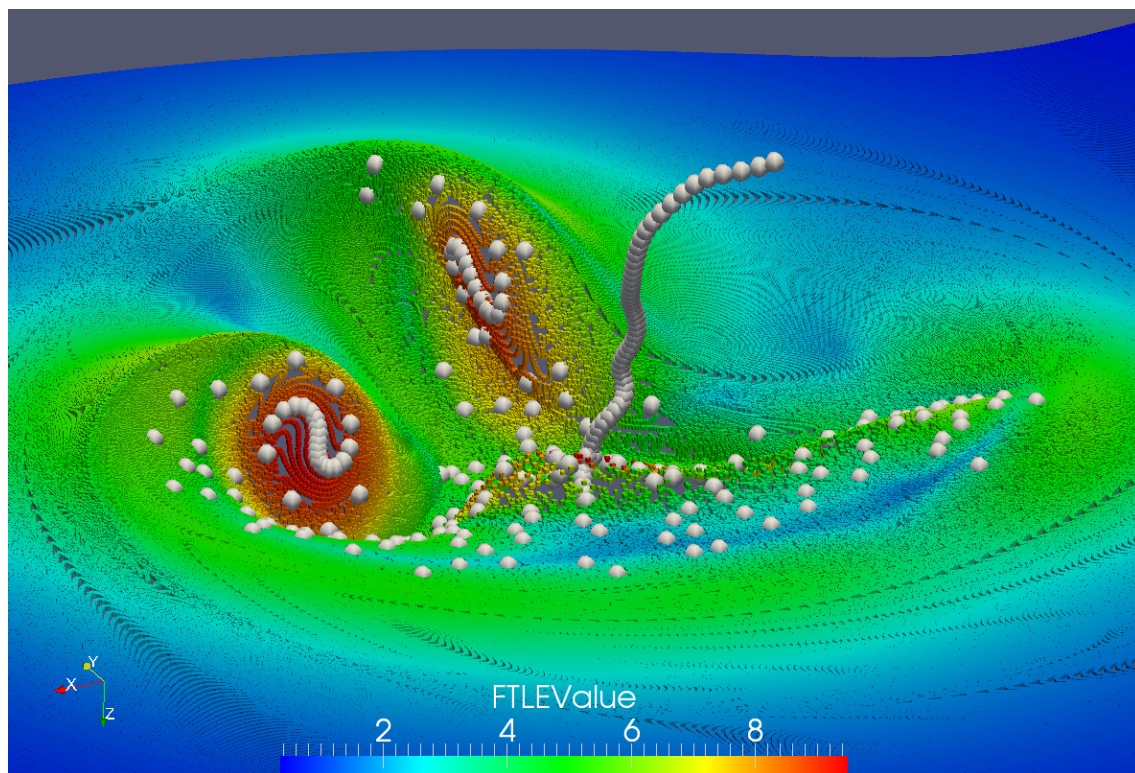
(b) Verformungsrate $T = 0s$



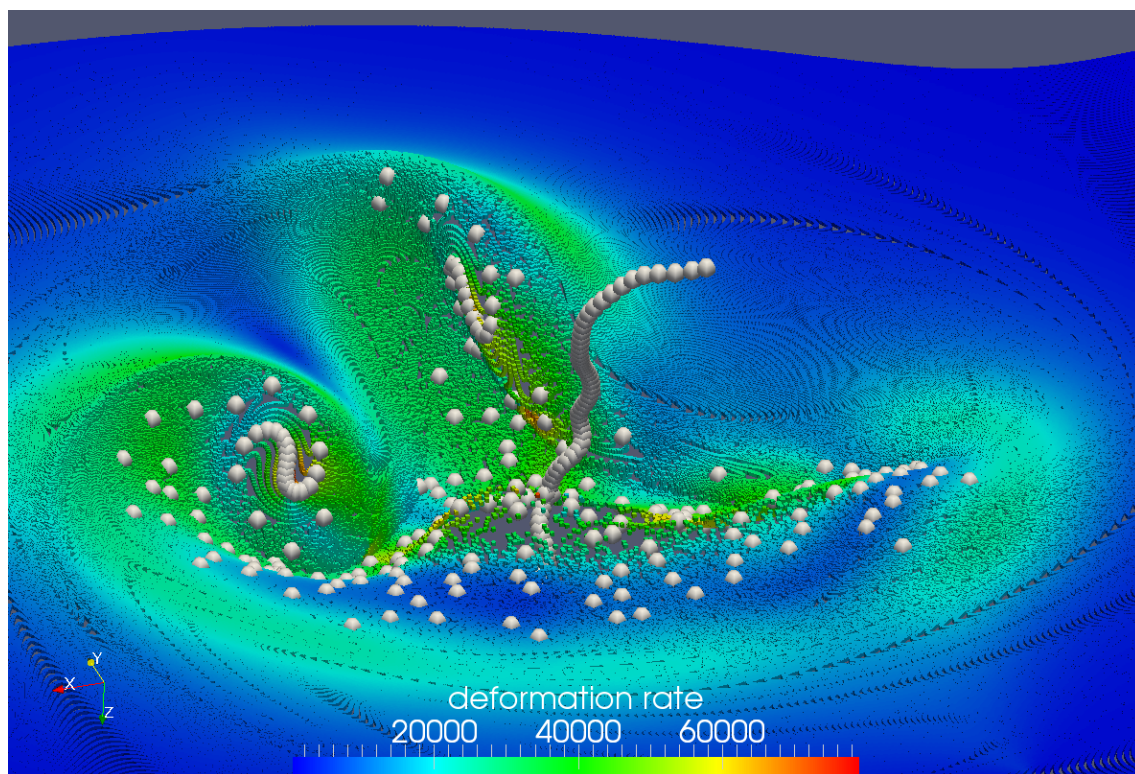
(c) FTLE-Wert $T = 0,012s$



(d) Verformungsrate $T = 0,012s$

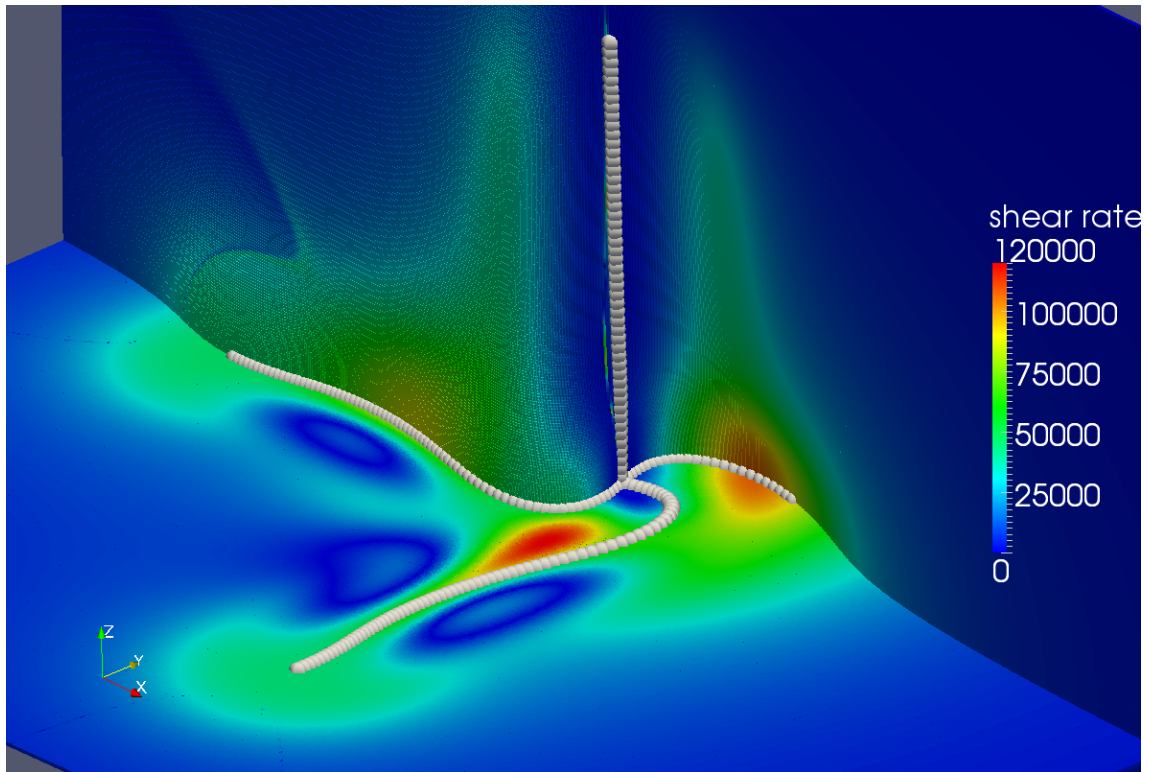


(e) FTLE-Wert $T = 0,05s$

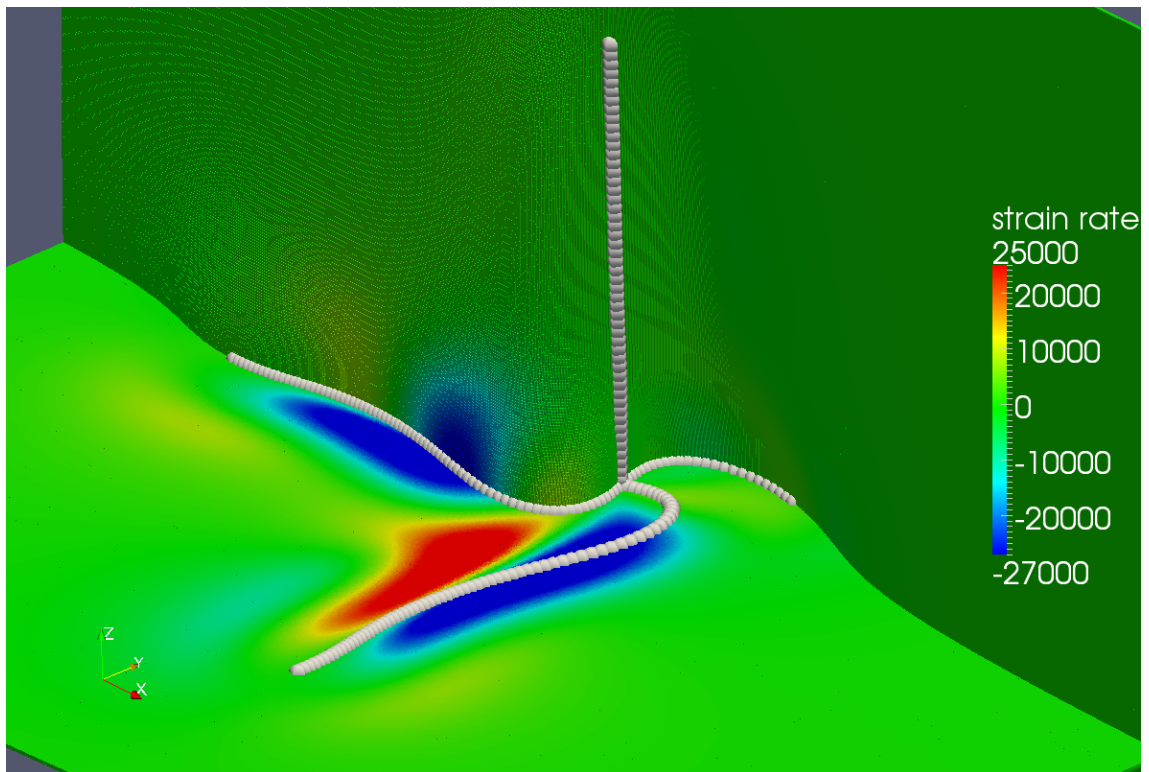


(f) Verformungsrate $T = 0,05s$

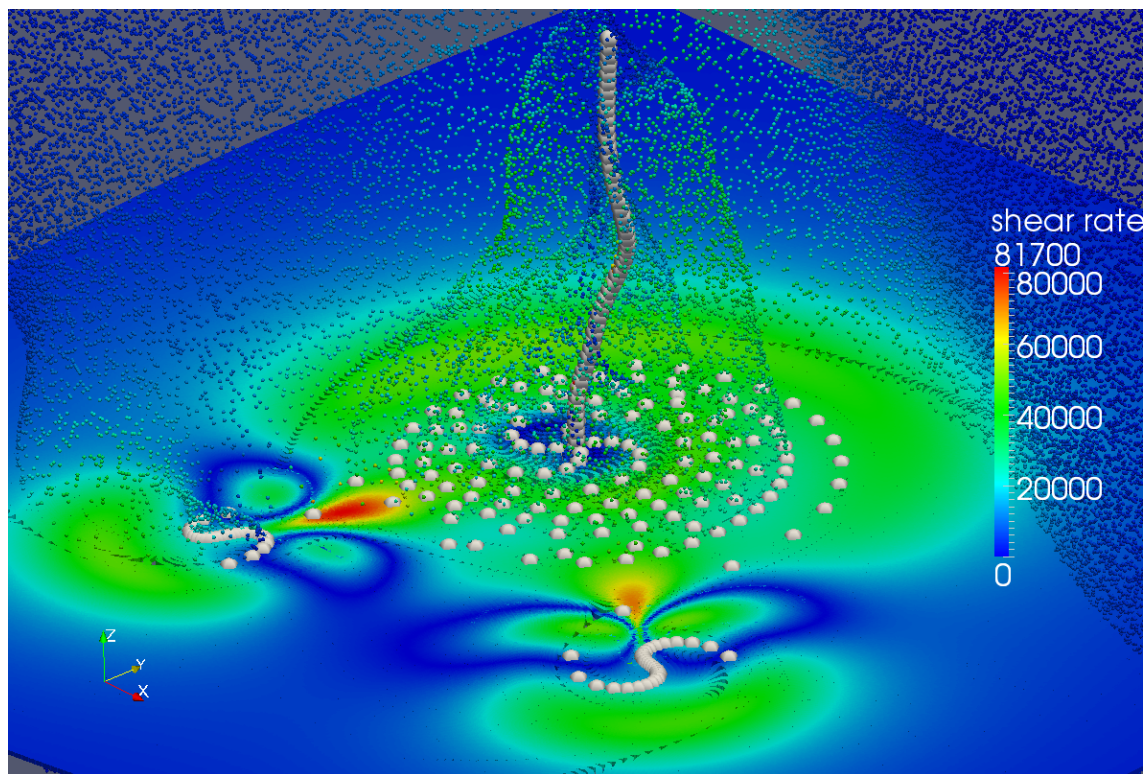
Abb. 36: FTLE-Wert und Verformungsrate eines 3D Punktwirbelkreuzes



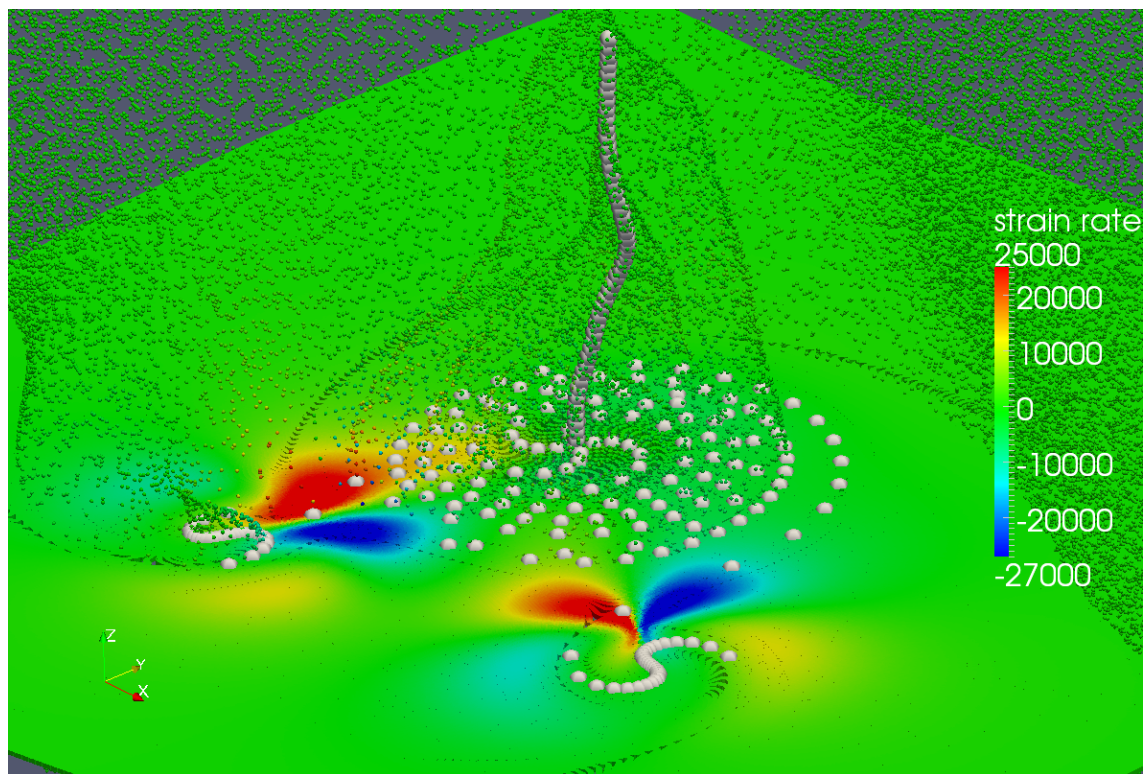
(a) Scherrate $T = 0s$



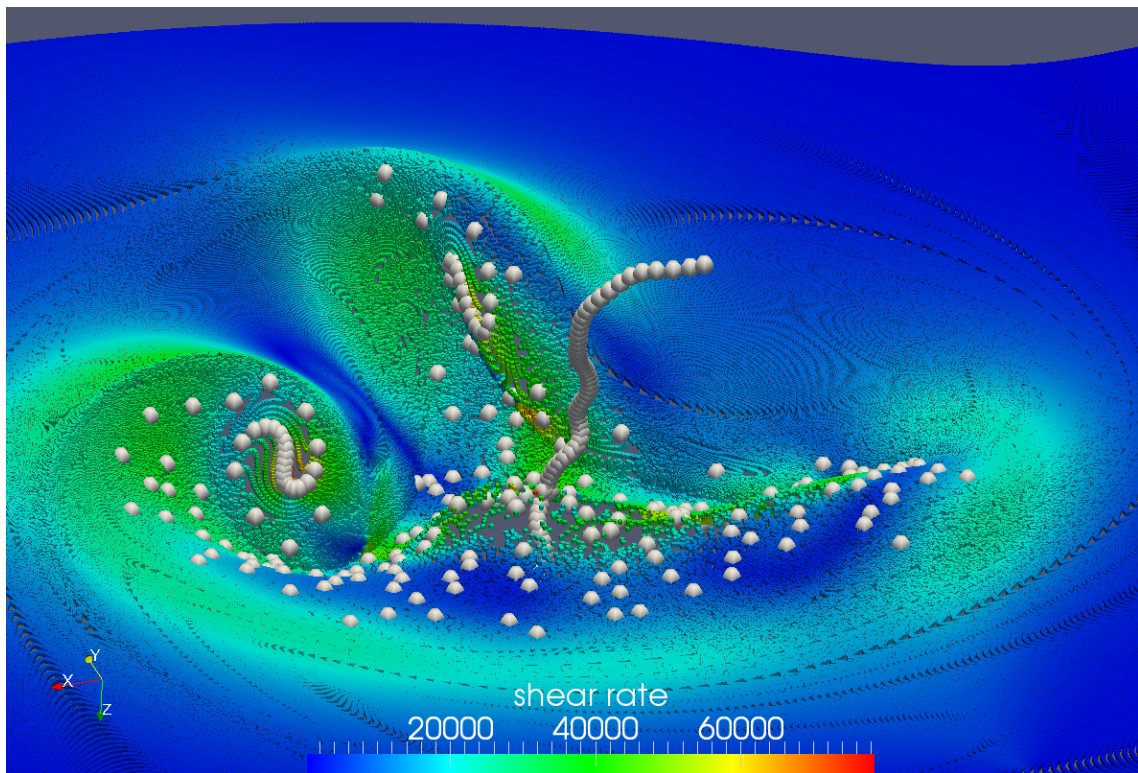
(b) Dehnrate $T = 0s$



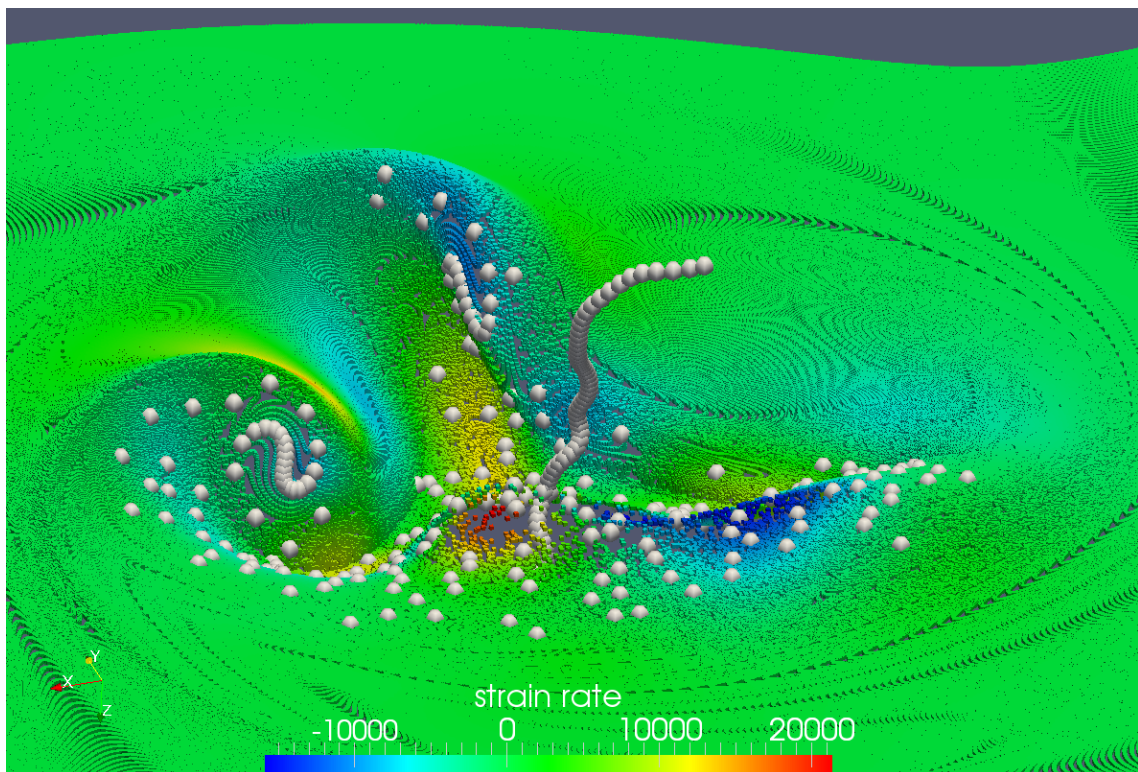
(c) Scherrate $T = 0,012s$



(d) Dehnrate $T = 0,012s$



(e) Scherrate $T = 0,05s$



(f) Dehnrate $T = 0,05s$

Abb. 37: Scherrate und Dehnrate eines 3D Punktwirbelkreuzes

7 Fazit und Ausblick

Im Rahmen dieser Arbeit konnten verschiedene Lagrangesche Strömungsanalysen dargestellt werden. Auf Basis eines Wirbelementverfahrens für Punktwirbel war es möglich, die jeweiligen charakteristischen Größen der Strömung im stationären wie auch im instationären zu bestimmen. Dabei basieren die vorgestellten Analyseverfahren nicht auf speziellen Größen der Wirbelementverfahren, sondern sind für jedes Lagrangesche Verfahren einsetzbar. Diese Übertragung auf andere Verfahren ist möglich, da alle gezeigten Analyseverfahren direkt bzw. indirekt eine Analyse der Partikeltrajektorie durchführen.

Um eine effiziente algorithmische Umsetzung dieser Verfahren zu ermöglichen, wurde eine eigene C++ Numerik Bibliothek entworfen und implementiert. Aufgrund dieser Bibliothek war es möglich, die dargestellten Testfälle mit mehr als einer Million passiver Partikel zu simulieren.

Ein besonderer Fokus der Arbeit lag auf der Betrachtung des FTLE-Wertes, als bereits etablierte Größe. Dabei konnte gezeigt werden, dass bei stationären Strömungen strukturell kein Unterschied zwischen der Verformungsrate und dem FTLE-Wert besteht. Bei instationären Strömungen treten jedoch signifikante Unterschiede auf, da die Verformungsrate nur die augenblickliche Verformung berücksichtigt.

Desweiteren wurden die einzelnen Anteile der Verformung näher betrachtet, so dass die Scher- und Dehnanteile der Strömung für jedes einzelne Partikel untersucht wurden. Um dies durchführen zu können, wurde für jedes Partikel ein lokales Koordinatensystem auf Basis der Frenetschen Formeln konstruiert. Dies hat den Vorteil, dass zusätzliche Größen, wie die Zentripetalbeschleunigung und die lokale Krümmung, ebenfalls direkt bestimmt werden können.

Somit konnten innerhalb der Arbeit verschiedene Lagrangesche Analyseverfahren auf Basis der Partikeltrajektorien (bzw. Bahnlinien) aufgezeigt werden. Diese wurden an ausgewählten Fallbeispielen dargestellt, um die Plausibilität der verwendeten Größen zu validieren. Hierbei wurde das Wirbelementverfahren im stationären

gezielt zur Strömungssteuerung eingesetzt. Im instationären war es möglich, bereits komplexere Interaktion, bishin zum Aufplatzen von eingedrehten Wirbelstrukturen, zu zeigen.

Desweiteren war es möglich, grundlegende Strömungsstrukturen innerhalb der betrachteten Testfälle anhand der Lagrangesche Analyseverfahren zu identifizieren. Hierbei sei besonders auf die Sattelpunktsstruktur verwiesen.

Allerdings konnten nur ausgewählte Analyseverfahren genauer betrachtet werden, sodass ein entsprechender Forschungsbedarf in diesem Bereich verbleibt. Beispielsweise finden alle der durchgeführten Analysen auf dem Geschwindigkeitsfeld bzw. der Partikeltrajektorie statt. Diese sollten in nachfolgenden Arbeiten auch für andere Felder, wie z.B. die Beschleunigung, untersucht werden.

Ausblickend sollte es möglich sein, auf der Grundlage dieser Analyseverfahren, eine automatisierte Anpassung des Strömungslösers zur Laufzeit zu ermöglichen. Beispielsweise ist der Einsatz verschiedener Kerne für verschiedene Strömungsstrukturen in diesem Zusammenhang denkbar. Hierzu ist es notwendig, ein geeignetes Kriterium zu definieren, anhand dessen, beispielsweise die Notwendigkeit, einen Wechsel des Kernes durchzuführen, erkennbar ist. Da zum aktuellen Zeitpunkt jedoch die dazu notwendigen Kerne noch nicht vorliegen, besteht auch in diesem Bereich Forschungsbedarf.

Dieser besteht auch für berandete Strömungen, da in der vorliegenden Arbeit nur Freiströmungen ohne Rand betrachtet wurden. Bisher haben jedoch die Wirbelementverfahren den Nachteil, dass eine Randbehandlung äußerst aufwendig ist, da für jedes Partikel der gesamte Rand betrachtet werden muss. Um diese Verfahren industriell nutzen zu können, ist jedoch ein Rand unabdingbar, weshalb an dieser Stelle weiterführende Arbeiten durchgeführt werden sollten. Darauf aufbauend liegt es nahe, weiterführende Analysen für stark bewegte Ränder (für welche die Lagrangeschen Verfahren besonders von Vorteil sind) zu untersuchen.

Innerhalb der vorliegenden Arbeit fand die Einschränkung der Wirbelementverfahren auf einzelne Punktwirbel statt. Unter dem Gesichtspunkt der Verallgemeinerung ist es notwendig, diese Einschränkung in nachfolgenden Arbeiten zu überwinden. Als Grundlage bieten sich hierzu die Arbeiten von Beatson und Greengard ([BG97]) zum Thema einer Multipol-Erweiterung an.

Obgleich in der Gesamtheit noch viel Bedarf für weiterführende Forschungen verbleibt, ist es hoffentlich gelungen, das Potential Lagrangescher Analyseverfahren zu demonstrieren und einen interessanten Einblick in dieses weite Feld zu geben.

Literaturverzeichnis

- [AG04] ABRAHAMS, David ; GURTOVOY, Aleksey: *C++ Template Metaprogramming: Concepts, Tools, and Techniques from Boost and Beyond*. Addison-Wesley Professional, 2004 (C++ in Depth Series)
- [AKO07] ALEKSEENKO, S.V. ; KUIBIN, P.A. ; OKULOV, V.L.: *Theory of Concentrated Vortices*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007
- [Ale01] ALEXANDRESCU, Andrei: *Modern C++ design: generic programming and design patterns applied*. Boston, MA, USA: Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., 2001
- [BG97] BEATSON, Rick ; GREENGARD, Leslie: A short course on fast multipole methods. In: *Wavelets, Multilevel Methods and Elliptic PDEs*, Oxford University Press, 1997, S. 1–37
- [Böh00] BÖHME, Gert: *Strömungsmechanik nichtnewtonscher Fluide*. Teubner, 2000 (Leitfäden der angewandten Mathematik und Mechanik)
- [BSMM05] BRONSTEIN, I. N. ; SEMENDJAJEW, K. A. ; MUSIOL, G. ; MÜHLIG, H.: *Taschenbuch der Mathematik*. 6. Verlag Harri Deutsch, 2005
- [Car93] CARMO, M.P.: *Differentialgeometrie von Kurven und Flächen*. Friedr. Vieweg & Sohn, 1993 (Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete)
- [CGR99] CHENG, H. ; GREENGARD, L. ; ROKHLIN, V.: A fast adaptive multipole algorithm in three dimensions. In: *J. Comput. Phys.* 155 (1999), November, S. 468–498
- [CK00] COTTET, Georges-Henri ; KOUMOUTSAKOS, Petros: *Vortex Methods, Theory and Practice*. Cambridge University Press, 2000

- [GG97] GHARAKHANI, Adrin ; GHONIEM, Ahmed F.: Three-Dimensional Vortex Simulation of Time Dependent Incompressible Internal Viscous Flows. In: *Journal of Computational Physics* (1997)
- [GM77] GINGOLD, R. A. ; MONAGHAN, J. J.: Smoothed particle hydrodynamics - Theory and application to non-spherical stars. In: *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* 181 (1977), November, S. 375–389
- [Gro91] GROSSMANN, S.: *Mathematischer Einführungskurs für die Physik*. Teubner, 1991 (Teubner Studienbücher Physik)
- [GS05] GHARAKHANI, Adrin ; STOCK, Mark J.: 3-D vortex simulation of flow over a circular disk at an angle of attack. In: *17th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference*. Toronto, Ontario, Canada, jun 6-9 2005
- [Lug96] LUGT, Hans J.: *Introduction to Vortex Theory*. Potomac, Maryland, USA: Vortex Flow Press, 1996
- [MHMS02] MENGES, G. ; HABERSTROH, E. ; MICHAELI, W. ; SCHMACHTENBERG, E.: *Werkstoffkunde Kunststoffe*. Hanser, 2002 (Studentexte Kunststofftechnik)
- [Rüt04] RÜTTEN, Markus: *Topologische Untersuchung zur Identifikation von Wirbelplatzparametern*, Helmut Schmidt Universität, Universität der Bundeswehr, Diss., 2004
- [Saa12] SAALFELD, Stefan: *Analyse von Kernelvariationen für die Smoothed Particle Hydrodynamics Methode*, Georg-August-Universität-Göttingen, Diplomarbeit, 2012
- [SAL10] STROUSTRUP, B. ; ALM, P. ; LOUIS, D.: *Einführung in die Programmierung mit C++*. Pearson Studium, 2010
- [SGH06] SCHWAMBORN, Dieter ; GERHOLD, Thomas ; HEINRICH, Ralf: The DLR TAU-Code: Recent Applications in Research and Industry. In: *European Conference on Computational Fluid Dynamics, ECCOMAS CFD* (2006)
- [She08] SHEEL, Tarun K.: *Development of a Fast Vortex Method for Fluid Flow Simulation using Special-Purpose Computers*, School of Science for Open and Environmental Systems, Keio University, Japan, Diss., 2008
- [Spu93] SPURK, J.H.: *Strömungslehre: Eine Einführung in die Theorie der Strömungen*. 3. Springer, 1993

- [TFPG] TECHNOLOGY FLOW PHYSICS GROUP, Illinois I.: *Lagrange Coherent Structures*. <http://mmae.iit.edu/shadden/LCS-tutorial/>, . – [Online; accessed 04-Februar-2012]
- [Tru96] TRUCKENBRODT, E.: *Grundlagen und elementare Strömungsvorgänge dichtebeständiger Fluide*. Springer, 1996 (Bd. 1)
- [url] *Eigen: C++ template library for linear algebra*. <http://eigen.tuxfamily.org>, . – [Online; accessed 15-Februar-2012]
- [VJ02] VANDEVOORDE, David ; JOSUTTIS, Nicolai M.: *C++ Templates The Complete Guide*. Addison-Wesley Professional, 2002
- [Wen05] WENDLAND, Holger: *Scattered Data Approximation*. Cambridge University Press, 2005. – 336 S.
- [Wol10] WOLLNY, Stefan: *Experimentelle und numerische Untersuchungen zur Partikelbeanspruchung in gerührten (Bio-)Reaktoren*, Technische Universität Berlin, Diss., 2010