Nullstellen von Polynomen mit Quaternionen als Koeffizienten

Gerhard Opfer aus Hamburg

Polynome in Quaternionen vom Grad n bestehen aus (endlich, aber beliebig vielen) Termen der Form $a_0 x a_1 x \cdots a_{j-1} x a_j$ vom Grad j mit $0 \leq j \leq n$. Terme vom Grad j können mehrfach auftreten. Über diese Form von Polynomen weiß man nicht viel, außer, dass sie mindestens eine Nullstelle besitzen, wenn der Term vom höchsten Grad n nur einmal vorkommt (Eilenberg & Niven, 1944). Ein Gegenbeispiel (ohne Nullstelle) ist $p(x) := ax^n - x^n a + 1$. Dieses Polynom hat keine Nullstelle, wegen $\Re(p(x)) = 1$. Daher beschäftigen wir uns nur mit einer Polynomsorte, nämlich mit

$$p_n(x) := \sum_{j=0}^{n} a_j x^j, \quad x, a_j \in \mathbb{H}. \tag{1}$$

Betrachtet man das Polynom $p_2(x) := x^2 + 1$, so erkennt man, dass es neben $\pm\mathbf{i}$ auch noch die unendlich vielen Nullstellen $h^{-1} \pm \mathbf{i} h$ für alle $h \in \mathbb{H}, h \neq 0$ hat. Solche Nullstellen nennt man *sphärisch*. Nicht sphärische Nullstellen heißen *isoliert*. Wir werden einen Algorithmus vorschlagen mit dem man alle Nullstellen finden kann, inklusive ihres Typs (sphärisch - isoliert). Der klassische Algorithmus von Niven, 1941, wird nicht benutzt, sondern eine Arbeit von Pogorui und Shapiro, 2004.