Eindeutigkeits- und Regularitätssätze für Randwertprobleme bei der skalaren und vektoriellen Helmholtz-Gleichung

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fachbereiche
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von
Peter Hähner
aus
Siegen

Göttingen 1990

D7

Referent: Prof. Dr. R. Kreß

Korreferent: Prof. Dr. E. Heinz

Tag der mündlichen Prüfung: 1.11.1990

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

Die Ausbreitung akustischer, zeitharmonischer Wellen in einem homogenen, isotropen Medium im $\mathbb{R}^3$ wird durch die skalare Helmholtz-Gleichung beschrieben (vgl. [25]). Elektromagnetische, zeitharmonische Wellen in einem homogenen, isotropen Medium können durch die Maxwell-Gleichungen bzw. durch die vektorielle Helmholtz-Gleichung beschrieben werden (vgl. [22]). Bei vielen Fragestellungen in der Physik soll zu einer gegebenen einfallenden Welle und zu einem gegebenem Objekt D die von D reflektierte Welle bestimmt werden. Diese Probleme führen auf Randwertaufgaben bei der skalaren bzw. vektoriellen Helmholtz-Gleichung. Dabei sind die einfallende Welle, die reflektierte Welle und evtl. die transmittierte Welle in D durch Randbedingungen auf dem Rand ∂D von D miteinander gekoppelt (vgl. z.B. [25], [22], [7]). Mathematisch sind zuerst einmal die Fragen nach Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen zu diesen Randwertaufgaben interessant.

Um die Eindeutigkeit einer Lösung der entstehenden Randwertaufgabe zu zeigen, wird in der Regel der Gaußsche Satz angewendet. Dafür muß die Lösung am Rand ∂D eine gewisse Regularität besitzen.

Eine Möglichkeit, die Existenz einer Lösung der Randwertaufgabe nachzuweisen, ist die Integralgleichungsmethode. Dazu muß der Rand hinreichend glatt sein. Man kennt eine spezielle Lösung der Helmholtz-Gleichung $\Delta u + \kappa^2 u = 0$, welche eine geeignete Singularität besitzt (z.B. $\Phi(x,y) = \exp(i\kappa|x-y|)/(4\pi|x-y|)$, $x, y \in \mathbb{R}^3$, $x \neq y$). Nun versucht man, die Lösung der Randwertaufgabe als Potential dieser speziellen Lösung oder ihrer Ableitungen mit unbekannter Dichte φ (über den Rand ∂D) darzustellen. Die Randbedingungen führen auf Integralgleichungen für die unbekannte Dichte φ. Betrachtet man diese Integralgleichungen im Raum der stetigen oder hölderstetigen Funktionen, so kann man beweisen, daß diese Gleichungen dort eine eindeutige Lösung φ besitzen und daß der Ansatz mit der Dichte φ die ursprüngliche Randwertaufgabe löst.

Es ist auch möglich, die Integralgleichungen als Gleichungen in L^p-Räumen aufzufassen. Sie sind auch dort eindeutig lösbar (vgl. z.B. [2]). Potentialen mit L^2-Dichten kann man in vernünftiger Weise Randwerte zuordnen (vgl. [13]), die dann in L^2-Räumen liegen. Damit läßt sich die Existenz von Lösungen der

Randwertaufgabe beweisen, die die Randwerte im L^2-Sinn annehmen. Solche Lösungen sind am Rand ∂D nicht mehr so regulär, daß der Gaußsche Satz auf sie angewendet werden kann; d.h. es ist nicht mehr klar, ob die Randwertaufgabe im L^2-Sinn höchstens eine Lösung besitzt.

In der Literatur ist die Frage, ob eine Lösung des Randwertproblems, welche homogene Randwerte im L^2-Sinn annimmt, nur die triviale Lösung sein kann, von Calderón [4] für das äußere Randwertproblem bei den Maxwell-Gleichungen untersucht worden. Miranda [21] beweist für das innere Dirichlet-Problem bei der skalaren Helmholtz-Gleichung Eindeutigkeit (wenn $\kappa = i\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$) (vgl. auch [15]). Mikhailov [19],[20] und Chabrowski und Thompson [5],[6] geben notwendige und hinreichende Bedingungen dafür an, daß die (schwache) Lösung einer elliptischen Differentialgleichung Randwerte im L^2-Sinn annimmt. In [20] werden auch Eindeutigkeitssätze und Regularitätssätze für das innere Dirichlet-Problem bei starker L^2-Konvergenz der Randdaten bewiesen.

In dieser Arbeit werden wir die Frage nach der Eindeutigkeit weiter verfolgen. Im zweiten Kapitel werden wir die Technik von Miranda so ergänzen, daß wir auch Aussagen treffen können, wenn $\kappa \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Im}(\kappa) \geq 0$, beliebig ist. Wir werden zeigen, daß eine Lösung der skalaren Helmholtz-Gleichung in D mit homogenen Randdaten im L^2-Sinn die triviale Lösung ist, falls das klassische Dirichlet-Problem in D höchstens eine Lösung besitzt. Falls κ^2 ein Eigenwert zum klassischen Dirichlet-Problem ist, liegt eine Lösung mit homogenen Randdaten im L^2-Sinn im klassischen Eigenraum. Wir untersuchen auch allgemein die Randregularität einer schwachen Lösung des Dirichlet-Problems. Unsere Methode ist von der in [5],[20] verschieden. Dieses Kapitel ist hauptsächlich dazu gedacht, die Beweisideen im vierten Kapitel zu motivieren und an den weniger aufwendigen, skalaren Problemen zu erläutern. Die Resultate dieses Kapitels sind alle bekannt.

Im dritten Kapitel werden wir auch andere Randbedingungen (Neumann-Randbedingung, Randbedingung beim Transmissionsrandwertproblem) zur skalaren Helmholtz-Gleichung betrachten.

Schließlich übertragen wir im vierten Kapitel einige Resultate zum Dirichlet-Problem aus Kapitel 2 auf Randwertprobleme bei der vektoriellen Helmholtz-Gleichung. Wir zeigen die Eindeutigkeit von Lösungen mit L^2-Randdaten beim äußeren elektrischen und magnetischen Randwertproblem. Beim inneren elektrischen und magnetischen Randwertproblem erhalten wir ähnliche Aussagen wie bei der skalaren Helmholtz-Gleichung. Da die Beweisideen dieses Kapitels und die Beweisideen des zweiten Kapitels die gleichen sind, sind die Beweise im vierten Kapitel knapp gehalten.

Die Sätze über das elektrische Randwertproblem gelten auch für die Maxwell-Gleichungen.

Um die Beweise leichter lesbar zu gestalten, werden technische Details im Anhang zum zweiten bzw. zum vierten Kapitel zusammengestellt und bewiesen.

Bei den Beweisen erweist sich die Methode von Calderón als ein entscheidendes Hilfsmittel. Calderóns Grundidee besteht darin, das Randwertproblem zuerst auf einer Parallelfläche zum Rand ∂D zu lösen und dann den Abstand zwischen der Parallelfläche und dem Rand ∂D gegen Null gehen zu lassen. Anders als Calderón benutzen wir zur Lösung der Randwertprobleme auf der Parallelfläche eindeutig lösbare Fredholm-Integralgleichungen 2. Art. Wir schwächen die Voraussetzungen bzgl. der Annahme der Randwerte noch einmal leicht ab. Calderón setzt voraus, daß die Randdaten bzgl. der L^2-Norm konvergieren. Wir benötigen nur, daß die Randdaten schwach bzgl. der L^2-Norm konvergieren.

Leider ist es mir bisher nicht gelungen, entsprechende Aussagen für Transmissionsrandwertprobleme bei den Maxwell-Gleichungen bzw. bei der vektoriellen Helmholtz-Gleichung zu beweisen.

Zur Notation sei noch bemerkt, daß

$$\Phi(x,y) := \frac{\exp(i\kappa|x-y|)}{4\pi|x-y|} \quad , \quad x,y \in \mathbb{R}^3 \ , \ x \neq y \ ,$$

immer die Grundlösung zur Wellenzahl κ bezeichnet. Für $a = (a_1, a_2, a_3)^T$, $b = (b_1, b_2, b_3)^T \in \mathbb{C}^3$ ist mit $(a,b) := \sum_{j=1}^3 a_j b_j$ die Bilinearform (nicht das Skalarprodukt!) und mit $[a,b] := (a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1)^T$ das Vektorprodukt gemeint.

Zum Schluß möchte ich Herrn Professor Dr. Rainer Kreß für die Anregung zu dieser Arbeit und für die Betreuung bei ihrer Entstehung danken. Professor Dr. Peter Werner danke ich für seinen Hinweis auf die Ansätze, die im vierten Kapitel bei der vektoriellen Helmholtz-Gleichung benutzt werden. Besonderer Dank gebührt Professor Dr. Erhard Heinz, der sich bereit erklärt hat, das Korreferat zu dieser Arbeit zu übernehmen und der mich auf die Arbeiten von Chabrowski und Thompson aufmerksam gemacht hat. Bei Axel Zinn bedanke ich mich für zahlreiche Verbesserungsvorschläge zu Mängeln, die er beim Korrekturlesen gefunden hat.

2. Der Eindeutigkeitssatz beim Dirichlet-Problem für die skalare Helmholtz-Gleichung

Es sei $D \subset \mathbb{R}^3$ eine beschränkte, offene Menge und $u \in C(\overline{D}) \cap C^2(D)$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion, die bis zum Rand von D stetig ist, in D die Helmholtz-Gleichung $\Delta u + \kappa^2 u = 0$, $\kappa \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Im}(\kappa) \geq 0$, erfüllt und auf dem Rand von D verschwindet, d.h. $u(x) = 0$ für alle $x \in \partial D$. Diese Regularitätsforderungen an u sind die Minimalvoraussetzungen, um das Dirichlet-Problem mit homogenen Randdaten im klassischen Sinn überhaupt zu formulieren. Dann gibt es verschiedene Möglichkeiten, auf das Verschwinden von u in ganz D zu schließen.

Falls $\kappa = i\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, ist, läßt sich das Maximumprinzip anwenden. Andernfalls werden wir versuchen, mit Hilfe des Greenschen Satzes Aussagen über u zu treffen. Da die obigen Voraussetzungen an u und an D so nicht ausreichen, um die Greensche Umformung zu rechtfertigen, sind in der Literatur verschiedene Wege eingeschlagen worden, die Greensche Umformung doch anzuwenden.

Am einfachsten ist es, die Stetigkeit von $\operatorname{grad} u$ bis zum Rand ∂D von D zu verlangen und den Rand ∂D genügend regulär vorauszusetzen (vgl. [25]). Dann sind die Voraussetzungen für die Greensche Umformung erfüllt, aber die Lösungsklasse wird stark eingeschränkt. Eine zweite Technik setzt den Rand ∂D C^2-glatt voraus und zeigt dann, daß sich $\operatorname{grad} u$ unter den Minimalvoraussetzungen stetig auf den Rand ∂D fortsetzen läßt (vgl. [7], [17], [26]). Die dritte, eleganteste Methode leitet ohne Zusatzannahmen zu den Minimalvoraussetzungen ab, daß die Greensche Umformung durchgeführt werden kann (vgl. [8], [24]).

Von verschiedenen Autoren ist bei C^2-glattem Rand ∂D die Randregularität von u abgeschwächt worden. Anstelle der Voraussetzungen
$u \in C(\overline{D}) \cap C^2(D)$, $u(x) = 0$, $x \in \partial D$, wird $u \in C^2(D)$ und die L^2-Randbedingung

$$\int_{\partial D} |u(x + hn(x))|^2 ds(x) \to 0 \ , \quad h \nearrow 0 \text{ (d.h. } h \to 0, h < 0 \text{) },$$

gefordert (vgl. [21], [4]). Dabei bezeichnet n die nach außen weisende Normale an ∂D. Wenn keine weiteren Voraussetzungen an $\operatorname{grad} u$ gestellt werden sollen (in [2] wird z.B. die Existenz von $\frac{\partial u}{\partial n}$ gefordert), ist keine der oben beschriebenen Techniken auf die L^2-Randbedingung übertragbar. Miranda gibt für den Fall $\kappa = i\lambda$, $\lambda \in I\!R$, einen Eindeutigkeitsbeweis an ([21], vgl. auch [15]). Unter sehr allgemeinen Voraussetzungen zeigen Mikhailov [20] und Chabrowski und Thompson [5] Eindeutigkeit bei elliptischen Randwertproblemen zweiter Ordnung. Des weiteren hat Calderón für die Maxwellschen Gleichungen einen Eindeutigkeitssatz bewiesen ([4]), dessen Idee sich auch auf skalare Probleme übertragen läßt.

Im ersten Satz werden wir den Beweis von Miranda auf beliebige $\kappa \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Im}(\kappa) \geq 0$, ausdehnen, indem wir mit Hilfe der Idee von Miranda und einer Zusatzüberlegung die Greensche Umformung rechtfertigen. Falls $\kappa = 0$ oder $\mathrm{Im}(\kappa) > 0$ ist, erhalten wir so den üblichen Eindeutigkeitssatz. Der Fall $\mathrm{Im}(\kappa) = 0$ wird später noch genauer untersucht.

Im folgenden sei $D \subset I\!R^3$ immer eine offene, beschränkte, zusammenhängende Menge, $D_a := I\!R^3 \setminus \overline{D}$ sei zusammenhängend, der Rand von D, ∂D, sei auch der Rand von D_a. ∂D sei C^2-glatt, die Normale n an ∂D sei in das Außengebiet D_a gerichtet.

Weiter sei für $x \in \partial D$ $\hat{H}(x)$ die mittlere Krümmung von ∂D an der Stelle x und $\hat{K}(x)$ die Gaußsche Krümmung an der Stelle x.

Bemerkung: Für die Gültigkeit der hier bewiesenen Sätze muß D nicht zusammenhängend sein. D kann auch aus endlich vielen offenen, beschränkten und zusammenhängenden Mengen bestehen. Die Beweise müßen dann nur geringfügig oder gar nicht modifiziert werden. Wir nehmen hier aus Bequemlichkeit den geometrisch einfachsten Fall an.

Für hinreichend kleines $h_0 > 0$ definieren wir die Parallelflächen
$\partial D_h := \{z \in I\!R^3 \colon z = x + hn(x), x \in \partial D\}$, $|h| \leq h_0$. D_h sei das Innere des von ∂D_h berandeten Gebietes. $D_h = \{z \in D\colon \mathrm{dist}(z, \partial D) > |h|\}$ für $h \leq 0$,
$D_h = \{z \in I\!R^3 \colon z \in D \text{ oder } \mathrm{dist}(z, \partial D) < h\}$ für $h > 0$. Schließlich sei
$D_{h,a} := I\!R^3 \setminus \overline{D_h}$.

Wird ∂D_h durch $z = x + hn(x)$, $x \in \partial D$, parametrisiert , so besteht die Beziehung $ds(z) = (1 - 2\hat{H}(x)h + \hat{K}(x)h^2)ds(x)$ zwischen dem Flächenelement $ds(z)$ von ∂D_h im Punkt z und dem Flächenelement $ds(x)$ von ∂D im Punkt x.

Satz 2.1:

Sei $u \in C^2(D)$ mit

$$\Delta u + \kappa^2 u = 0 \quad \text{in } D,\ \kappa \in \mathbb{C},\ \mathrm{Im}(\kappa) \geq 0,$$

$$\int\limits_{\partial D} |u(x + hn(x))|^2 ds(x) \to 0 \quad \text{für } h \nearrow 0 \text{ (d.h. } h \to 0, h < 0 \text{).}$$

Dann gilt

$$\int\limits_{\partial D_k} \overline{u}\, \frac{\partial u}{\partial n}\, ds \to 0 \quad \text{für eine geeignete Folge } (h_k) \text{ mit } h_k \nearrow 0, k \to \infty\ ,$$

wobei $\partial D_k := \partial D_{h_k}$ ist.

Beweis :

Wir definieren für $-h_0 \leq h < 0$

$$I(h) := \frac{1}{2} \int\limits_{\partial D} |u(x + hn(x))|^2 (1 - 2\hat{H}(x)h + h^2 \hat{K}(x)) ds(x),\ I(0) := 0.$$

Dann ist $I \in C^1(-h_0, 0) \cap C[-h_0, 0]$,

$$I'(h) = \int\limits_{\partial D} |u(x + hn(x))|^2 (-\hat{H}(x) + h\hat{K}(x)) ds(x) + \mathrm{Re} \int\limits_{\partial D_h} \overline{u}\, \frac{\partial u}{\partial n}\, ds$$

$$= \int\limits_{\partial D} |u(x+hn(x))|^2 (-\hat{H}(x)+h\hat{K}(x)) ds(x) + \mathrm{Re} \left\{ \int\limits_{D_h} (\overline{u}(-\kappa^2 u) + |\mathrm{grad}\, u|^2) dx \right\}$$

$$= \int\limits_{\partial D} |u(x+hn(x))|^2 (-\hat{H}(x)+h\hat{K}(x)) ds(x) - \mathrm{Re}(\kappa^2) \int\limits_{D_h} |u|^2 dx + \int\limits_{D_h} |\mathrm{grad}\, u|^2 dx\ . \tag{2.1}$$

Wir nehmen an, daß $\int\limits_{D_h} |\mathrm{grad}\, u|^2 dx \to \infty,\ h \nearrow 0$, gilt. Aus

$$\int\limits_{D_h} |u|^2 dx =$$

$$= \int\limits_{D_{-h_0}} |u|^2 dx + \int\limits_{-h_0}^{h} \left\{ \int\limits_{\partial D} |u(x+\tau n(x))|^2 (1 - 2\tau \hat{H}(x) + \tau^2 \hat{K}(x)) ds(x) \right\} d\tau$$

$$= \int\limits_{D_{-h_0}} |u|^2 dx + 2 \int\limits_{-h_0}^{h} I(\tau) d\tau \ , h \in [-h_0, 0) \ ,$$

folgt die Existenz von

$$\lim_{h \nearrow 0} \int\limits_{D_h} |u|^2 dx \ .$$

Dann gibt es ein $h_1 < 0$, so daß $I'(h) > 0$ für alle h mit $h_1 \le h < 0$ ist. Aus dem Mittelwertsatz folgt dann $I(0) = I(h_1) + |h_1|\, I'(\tilde{h}) > 0$, $\tilde{h} \in (h_1, 0)$ im Widerspruch zu $I(0) = 0$. Also existiert $\int\limits_D |\mathrm{grad}\, u|^2 dx$ und

$$\int\limits_{D \setminus D_h} |\mathrm{grad}\, u|^2 dx =$$

$$= \int\limits_0^{|h|} \int\limits_{\partial D} |\mathrm{grad}\, u(x - tn(x))|^2 (1 + 2\hat{H}(x)t + t^2 \hat{K}(x)) ds(x) dt \to 0, \quad h \nearrow 0 \ . \tag{2.2}$$

Dann können wir eine Folge (h_k) mit $h_k < 0$, $h_k \to 0$, $k \to \infty$, so auswählen, daß

$$|h_k| \int\limits_{\partial D} |\frac{\partial u}{\partial n}(x + h_k n(x))|^2 (1 - 2\hat{H}(x) h_k + h_k^2 \hat{K}(x)) ds(x) \to 0, \quad k \to \infty. \tag{2.3}$$

Denn mit

$$f(h) := \int\limits_{\partial D} |\mathrm{grad}\, u(x + hn(x))|^2 (1 - 2\hat{H}(x) h + h^2 \hat{K}(x)) ds(x)$$

gilt

$$f \in C[-h_0, 0) \ , \quad 0 \le f(h) \ , \quad \int\limits_0^{|h|} f(-t) dt \to 0, \ h \nearrow 0, \quad \text{nach (2.2).}$$

Damit erhalten wir

$$0 \leq \inf_{\tau \in [h,0)} (f(\tau)|\tau|) \leq \inf_{\tau \in [h,0)} (f(\tau)|h|) \leq \int\limits_0^{|h|} f(-\tau)d\tau \to 0, \ \ h \nearrow 0.$$

h_k wird so gewählt, daß $-\frac{1}{k} < h_k < 0$ und

$$f(h_k)|h_k| - \inf\{f(\tau)|\tau| \colon \tau \in [-\frac{1}{k}, 0)\} \leq \frac{1}{k}$$

ist. Dann gilt: $f(h_k)|h_k| \to 0, \ k \to \infty$, und

$$|h_k| \int\limits_{\partial D} |\frac{\partial u}{\partial n}(x + h_k n(x))|^2 (1 - 2\hat{H}(x)h_k + h_k^2 \hat{K}(x)) ds(x) \leq |h_k| f(h_k) \to 0$$

für $k \to \infty$.

Aus Gleichung (2.1) folgt die Existenz von $\lim_{h \nearrow 0} I'(h)$, insbesondere $|I'(h)| \leq C$ für alle $h \in [-h_0, 0)$. Aus dem Mittelwertsatz schließen wir $|I(h)| = |I(0) + hI'(\tilde{h})| \leq C|h|$, $\tilde{h} \in (h, 0)$, und mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\left| \int\limits_{\partial D_k} \overline{u} \, \frac{\partial u}{\partial n} \, ds \right|^2 \leq$$

$$\leq I(h_k) \int\limits_{\partial D} |\frac{\partial u}{\partial n}(x + h_k n(x))|^2 (1 - 2\hat{H}(x)h_k + h_k^2 \hat{K}(x)) ds(x) \to 0, \quad k \to \infty \ .$$

■

Mit Satz 2.1 können wir

$$0 = \lim_{k \to \infty} \operatorname{Im} \left\{ \overline{\kappa} \int\limits_{\partial D_k} \frac{\partial u}{\partial n} \, \overline{u} \, ds \right\} = \lim_{k \to \infty} \operatorname{Im} \left\{ \overline{\kappa} \int\limits_{D_k} (-\kappa^2 |u|^2 + |\operatorname{grad} u|^2) dx \right\}$$

$$= -\operatorname{Im}(\kappa) \int\limits_D |\kappa|^2 |u|^2 dx - \operatorname{Im}(\kappa) \int\limits_D |\operatorname{grad} u|^2 dx$$

folgern, da die Greensche Umformung mit dem C^1-glatten Rand ∂D_k, der in D liegt, und mit der in D zweimal stetig differenzierbaren Funktion u durchgeführt werden kann. Daraus erhalten wir $u(x) = 0$ für alle $x \in D$, falls $\mathrm{Im}(\kappa) > 0$ ist.

Falls $\mathrm{Im}(\kappa) = 0$ ist, erhalten wir wie oben

$$0 = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\partial D_k} \frac{\partial u}{\partial n} \overline{u}\, ds = -\kappa^2 \int\limits_D |u|^2 dx + \int\limits_D |\mathrm{grad}\, u|^2 dx \ .$$

Falls $\kappa = 0$ gilt, folgt wieder $u = 0$ in D. Im allgemeinen erhalten wir für reelle κ mit (2.1) nur $I'(h) \to 0,\ h \nearrow 0$; $I(h) = o(|h|),\ h \nearrow 0$. Sei

$$\chi_h(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x \in D_h \\ \cos^2(\frac{\pi}{h}(\tau - h)) & \text{für } x = y + \tau n(y),\ h \le \tau \le \frac{h}{2},\ y \in \partial D \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

für $-h_0 \le h < 0$. Bezeichnen wir mit $C_0^1(D)$ die stetig differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in D, so gilt: $\chi_h \in C_0^1(D),\ \chi_h u \in C_0^1(D)$, $\|u - \chi_h u\|_{L^2(D)} \to 0, h \nearrow 0,\ \ \|\mathrm{grad}\, u - \chi_h\, \mathrm{grad}\, u\|_{L^2(D)} \to 0, h \nearrow 0,$

$$\|u\ \mathrm{grad}\, \chi_h\|^2_{L^2(D)} \le \|u\ \mathrm{grad}\, \chi_h\|^2_{L^2(D\setminus D_h)} \le \int\limits_0^{|h|} \int\limits_{\partial D_{-\tau}} |u(x + \tau n(x))|^2 \frac{C}{h^2} ds d\tau$$

$$\le |h| \frac{C}{h^2} o(|h|) \to 0, \quad h \nearrow 0.$$

Insgesamt ergibt sich

$$\|u - \chi_h u\|_{L^2(D)} + \|\mathrm{grad}\,(u - \chi_h u)\|_{L^2(D)} \le$$

$$\le \|u - \chi_h u\|_{L^2(D)} + \|\mathrm{grad}\, u - \chi_h\, \mathrm{grad}\, u\|_{L^2(D)} + \|u\, \mathrm{grad}\, \chi_h\|_{L^2(D)} \to 0\ , \quad h \to 0\ .$$

Damit ist $u \in H_0^1(D)$ ($H_0^1(D)$ ist der Abschluß von $C_0^1(D)$ bzgl. der Norm $\|u\|^2_{H_0^1(D)} := \|u\|^2_{L^2(D)} + \|\mathrm{grad}\, u\|^2_{L^2(D)}$). Ist $v \in C_0^1(D)$, so erhalten wir durch partielle Integration

$$\int\limits_D (\mathrm{grad}\, u, \mathrm{grad}\, v) dx = \kappa^2 \int\limits_D uv dx\ .$$

Eine Funktion $u \in H_0^1(D)$, die diese Gleichung für alle $v \in C_0^1(D)$ (und damit für alle $v \in H_0^1(D)$) erfüllt und die nicht die Nullfunktion ist, heißt schwache Eigenlösung zum inneren Dirichlet-Problem bei der Helmholtz-Gleichung.

Analog zu Satz 2.1 läßt sich die Greensche Umformung für eine Lösung des homogenen äußeren Dirichlet-Problems mit L^2-Randbedingung beweisen, woraus dann wie üblich auf die Eindeutigkeit des äußeren Dirichlet-Problems mit L^2-Randbedingung geschlossen werden kann.

Der Beweis von Satz 2.1 läßt sich weder auf das Impedanzrandwertproblem oder das Transmissionsrandwertproblem bei der skalaren Helmholtz-Gleichung noch auf Randwertprobleme bei der vektoriellen Helmholtz-Gleichung übertragen. Im nächsten Satz werden wir deshalb für das äußere Dirichletsche Randwertproblem einen weiteren Eindeutigkeitssatz beweisen. Die dortige Technik ist auch bei anderen skalaren und vektoriellen Problemen anwendbar. Die Grundidee stammt von Calderón ([4]). Das Randwertproblem wird zuerst auf Parallelflächen gelöst (dazu muß es schon einen Existenz- und Eindeutigkeitssatz geben!), dann wird aus der Konvergenz der Randdaten gegen 0 auf das Verschwinden der Lösung geschlossen. Das Resultat von Satz 2.1 kann sogar etwas verschärft werden, da die Voraussetzung der starken L^2-Konvergenz der Randdaten gegen 0 in Satz 2.1 durch die Voraussetzung der schwachen Konvergenz der Randdaten gegen 0 ersetzt werden kann.

Sei $\alpha_h \colon C(\partial D) \to C(\partial D_h)$ definiert durch $(\alpha_h f)(x + hn(x)) := f(x)$, $x \in \partial D$. α_h ist ein Homöomorphismus.

Satz 2.2:

Sei $u \in C^2(D_a)$ mit

$$\Delta u + \kappa^2 u = 0 \ \text{ in } D_a,\ \kappa \in \mathbb{C} \setminus \{0\},\ \mathrm{Im}(\kappa) \geq 0,$$

$$\int\limits_{|x|=R} \left| \frac{\partial u}{\partial r}(x) - i\kappa u(x) \right|^2 ds(x) \to 0 \quad \text{für } R \to \infty.$$

Außerdem erfülle u die homogene Randbedingung

$$\int\limits_{\partial D} u(x + hn(x)) g(x) ds(x) \to 0\ ,\ \ h \searrow 0 \ (\text{d.h. } h \to 0, h > 0),$$

für alle $g \in L^2(\partial D)$ (d.h. die Funktionen $u(. + hn(.))$ konvergieren für $h \searrow 0$ schwach gegen 0 in $L^2(\partial D)$). Dann gilt: $u(x) = 0$ für alle $x \in D_a$.

Beweis :

Im ersten Schritt wird u in $D_{h,a}$ als Potential mit einer Belegung auf ∂D_h dargestellt. Sei

$$v(x) := \int\limits_{\partial D_h} \frac{\partial \Phi}{\partial n(\tilde{y})}(x, \tilde{y})\tilde{\varphi}_h(\tilde{y})ds(\tilde{y}) - i\eta \int\limits_{\partial D_h} \Phi(x, \tilde{y})\tilde{\varphi}_h(\tilde{y})ds(\tilde{y})$$

für $x \in D_{h,a} = I\!R^3 \setminus \overline{D_h}$, wobei $\tilde{\varphi}_h \in C^{1,\alpha}(\partial D_h)$, $\eta \neq 0$, $\eta\ \mathrm{Re}(\kappa) \geq 0$. Wenn die Dichte $\tilde{\varphi}_h$ die Integralgleichung

$$\tilde{\varphi}_h(\tilde{x}) + 2\int\limits_{\partial D_h} \frac{\partial \Phi}{\partial n(\tilde{y})}(\tilde{x}, \tilde{y})\tilde{\varphi}_h(\tilde{y})ds(\tilde{y}) - i\eta\, 2\int\limits_{\partial D_h} \Phi(\tilde{x}, \tilde{y})\tilde{\varphi}_h(\tilde{y})ds(\tilde{y}) = 2u(\tilde{x}) \tag{2.4}$$

für alle $\tilde{x} \in \partial D_h$ erfüllt, dann stimmen $v(x)$ und $u(x)$ für alle $x \in D_{h,a}$ überein, denn aus den Sprungrelationen ergibt sich $u(\tilde{x}) = v(\tilde{x})$ für alle $\tilde{x} \in \partial D_h$ und die Regularitätseigenschaften von Flächenpotentialen liefern $v \in C^{1,\alpha}(\overline{D_{h,a}})$ (vgl. Anhang zu diesem Kapitel). Dann erhalten wir aus dem klassischen Eindeutigkeitssatz: $u(x) = v(x)$ für alle $x \in D_{h,a}$.

Im Anhang werden wir beweisen, daß die in (2.4) auftretenden Integraloperatoren in $C^{1,\alpha}(\partial D_h)$ kompakt sind. Außerdem ist $u|_{\partial D_h} \in C^{1,\alpha}(\partial D_h)$. Damit besitzt (2.4) nach der Riesz-Theorie genau dann eine eindeutige Lösung, wenn die homogene Integralgleichung (2.4) nur die triviale Lösung besitzt.

Definieren wir $\varphi_h := \alpha_h^{-1}\tilde{\varphi}_h \in C(\partial D)$, so erhalten wir nach Anwenden von α_h^{-1} auf die Gleichung (2.4) die äquivalente Gleichung

$$(I + K_h - i\eta S_h)\varphi_h = 2\alpha_h^{-1}(u|_{\partial D_h}) \quad , \tag{2.5}$$

wobei für $\varphi \in C(\partial D)$, $x \in \partial D$,

$$(K_h\varphi)(x) := 2\int\limits_{\partial D} \frac{\partial \Phi}{\partial n(y)}(x + hn(x), y + hn(y))\varphi(y)(1 - 2h\hat{H}(y) + h^2\hat{K}(y))ds(y)$$

und

$$(S_h\varphi)(x) := \int\limits_{\partial D} \Phi(x+hn(x), y+hn(y))\varphi(y)(1-2h\hat{H}(y)+h^2\hat{K}(y))ds(y)$$

definiert sind.

Im Anhang zeigen wir, daß K_h und S_h zu stetigen Operatoren in $L^2(\partial D)$ fortgesetzt werden können, daß K_h und S_h für h gegen 0 gegen K_0 bzw. S_0 in der $L^2(\partial D)$-Operatornorm konvergieren, d.h.

$$\|K_h - K_0\|_{L^2(\partial D)} + \|S_h - S_0\|_{L^2(\partial D)} \to 0 \ , \quad h \to 0 \ ,$$

und daß $I + K_0 - i\eta S_0$ in $L^2(\partial D)$ eine stetige Inverse besitzt, d.h.

$$\|(I + K_0 - i\eta S_0)^{-1}\|_{L^2(\partial D)} \leq C_1 \ .$$

Wenden wir nun das übliche Störungsargument (Neumannsche Reihe) an, so sehen wir, daß für hinreichend kleine h die Operatoren $I + K_h - i\eta S_h$ eine stetige Inverse besitzen, welche gegen $(I + K_0 - i\eta S_0)^{-1}$ konvergieren,

$$\|(I + K_h - i\eta S_h)^{-1} - (I + K_0 - i\eta S_0)^{-1}\|_{L^2(\partial D)} \to 0 \ , \quad h \to 0 \ .$$

Wenn $I + K_h - i\eta S_h$ als Operator in $L^2(\partial D)$ injektiv ist, hat die homogene Gleichung (2.4) nur die triviale Lösung. Damit ist die Gleichung (2.4) eindeutig lösbar und u ist für genügend kleine h in $D_{h,a}$ als Potential über ∂D_h darstellbar.

Im zweiten Schritt zeigen wir, daß die Lösungen φ_h der Gleichung (2.5) schwach gegen 0 konvergieren. Daraus leiten wir dann das Verschwinden von u in D_a her.

Aus der Voraussetzung

$$\int\limits_{\partial D} u(x+hn(x))g(x)ds(x) \to 0 \ , \quad h \searrow 0, \text{ für alle } g \in L^2(\partial D) \text{ folgt:}$$

$(\alpha_h^{-1}u|_{\partial D_h})$ konvergiert schwach gegen 0 in $L^2(\partial D)$ und bleibt daher beschränkt, $\|(\alpha_h^{-1}u|_{\partial D_h})\|_{L^2(\partial D)} \leq C_2$ für alle $0 < h \leq h_0$. Also:

$$\begin{aligned}
\varphi_h &= 2\,(I + K_h - i\eta S_h)^{-1}(\alpha_h^{-1}u|_{\partial D_h}) \\
&= 2\,\{(I + K_h - i\eta S_h)^{-1} - (I + K_0 - i\eta S_0)^{-1}\}(\alpha_h^{-1}u|_{\partial D_h}) \\
&\quad + 2\,(I + K_0 - i\eta S_0)^{-1}(\alpha_h^{-1}u|_{\partial D_h}) \ ,
\end{aligned}$$

$$\|2\{(I+K_h-i\eta S_h)^{-1}-(I+K_0-i\eta S_0)^{-1}\}(\alpha_h^{-1}u|_{\partial D_h})\|\leq$$
$$\leq 2\,C_2\|(I+K_h-i\eta S_h)^{-1}-(I+K_0-i\eta S_0)^{-1}\|_{L^2(\partial D)}\to 0\ ,\quad h\to 0\ ,$$
$$2\,(I+K_0-i\eta S_0)^{-1}(\alpha_h^{-1}u|_{\partial D_h})\rightharpoonup 0\ ,\quad h\to 0,\ h>0\ .$$

Insgesamt können wir $\varphi_h \rightharpoonup 0$, $h\searrow 0$, schließen.

Nun sei $x\in D_a$ beliebig, aber fest gewählt. Es gilt

$$u(x)=\int\limits_{\partial D}\frac{\partial\Phi}{\partial n(y)}(x,y+hn(y))(1-2h\hat{H}(y)+h^2\hat{K}(y))\varphi_h(y)ds(y)$$
$$-\,i\eta\int\limits_{\partial D}\Phi(x,y+hn(y))(1-2h\hat{H}(y)+h^2\hat{K}(y))\varphi_h(y)ds(y)\to 0\ ,\quad h\searrow 0\ ,$$

da $\varphi_h\rightharpoonup 0$, $h\searrow 0$; d.h. $u(x)=0$ für alle $x\in D_a$. ■

Mit Satz 2.2 haben wir die Frage nach der Eindeutigkeit des äußeren Dirichlet-Problems bei L^2-Randbedingungen beantwortet. Die Existenz einer Lösung u, welche die Randbedingung

$$\int\limits_{\partial D}\{u(x+hn(x))-f(x)\}g(x)ds(x)\to 0\ ,\quad h\searrow 0, \text{ für alle } g\in L^2(\partial D) \text{ oder}$$

$$\int\limits_{\partial D}|u(x+hn(x))-f(x)|^2ds(x)\to 0\ ,\quad h\searrow 0, \text{ für eine vorgegebene Funktion}$$

$f\in L^2(\partial D)$ erfüllt, folgt mit dem Ansatz von Brakhage, Werner, Leis und Panich (vgl. [3], [18], [23]), den wir auch im ersten Schritt des Beweises verwendet haben, den Sprungrelationen für Potentiale mit L^2-Dichten (vgl. [13]) und der Invertierbarkeit von $(I+K_0-i\eta S_0)$ in $L^2(\partial D)$.

Wird das Dirichlet-Problem im Innenraum D betrachtet, so existieren für bestimmte κ Eigenlösungen.

κ^2 heißt klassischer Eigenwert beim Dirichlet-Problem zum Operator $-\Delta$ im Gebiet D, falls es ein $v\in C^2(D)\cap C^1(\overline{D})$ gibt, welches $\Delta v+\kappa^2 v=0$ in D und $v=0$ auf ∂D erfüllt, aber nicht in D identisch verschwindet.

Im nächsten Satz untersuchen wir die Lösungen des inneren Dirichlet-Problems mit homogenen L^2-Randbedingungen. Es wird sich zeigen, daß keine neuen Eigenwerte und Eigenlösungen hinzukommen, wenn die klassische Randbedingung durch die schwächere L^2-Randbedingung ersetzt wird.

Satz 2.3:

Sei $u \in C^2(D)$ mit

$$\Delta u + \kappa^2 u = 0 \quad \text{in } D,\ \kappa \in \mathbb{C},\ \mathrm{Im}(\kappa) \geq 0,$$

$$\int_{\partial D} u(x + hn(x))g(x)ds(x) \to 0\ ,\quad h \nearrow 0 \text{ (d.h. } h \to 0, h < 0\text{)},$$

für alle $g \in L^2(\partial D)$.

Falls κ^2 kein klassischer Eigenwert beim Dirichlet-Problem zum Operator $-\Delta$ im Gebiet D ist, folgt $u(x) = 0$ für alle $x \in D$.

Falls κ^2 ein klassischer Eigenwert beim Dirichlet-Problem zum Operator $-\Delta$ im Gebiet D ist, folgt: $u \in C^2(D) \cap C^{1,\alpha}(\overline{D})$ und $u = 0$ auf ∂D (d.h. u liegt im klassischen Eigenraum).

Beweis :

Nach Hilfssatz A3 des Anhangs ist u in D_h als Doppelschichtpotential über ∂D_h mit einer Dichte $\tilde{\varphi}_h \in C^{1,\alpha}(\partial D_h)$ darstellbar,

$$u(x) = \int_{\partial D_h} \frac{\partial \Phi}{\partial n(\tilde{y})}(x, \tilde{y})\tilde{\varphi}_h(\tilde{y})ds(\tilde{y})\ ,\quad x \in D_h\ .$$

Aus den Sprungrelationen schließen wir, daß $\tilde{\varphi}_h \in C^{1,\alpha}(\partial D_h)$ die Integralgleichung

$$\tilde{\varphi}_h(\tilde{x}) - 2\int_{\partial D_h} \frac{\partial \Phi}{\partial n(\tilde{y})}(\tilde{x}, \tilde{y})\tilde{\varphi}_h(\tilde{y})ds(\tilde{y}) = -2u(\tilde{x}) \tag{2.6}$$

für alle $\tilde{x} \in \partial D_h$ erfüllt. Wir transformieren diese Gleichung durch Anwenden von α_h^{-1} in die äquivalente Gleichung

$$(I - K_h)\varphi_h = -2\alpha_h^{-1}(u|_{\partial D_h})\ ,\quad \varphi_h := (\alpha_h^{-1}\tilde{\varphi}_h)\ . \tag{2.7}$$

Falls κ^2 kein klassischer Eigenwert zum Operator $-\Delta$ im Gebiet D ist, liefern uns wie im vorigen Satz die Konvergenz $\|K_h - K_0\|_{L^2(\partial D)} \to 0$, $h \to 0$, und die stetige Inverse von $(I - K_0)$ (die nur dann existiert, wenn κ^2 kein Eigenwert ist) mit dem Störungsargument die schwache Konvergenz der Dichten, $\varphi_h \rightharpoonup 0$, $h \to 0$, woraus wieder das Verschwinden von u in ganz D folgt.

Nun sei κ^2 ein klassischer Eigenwert zum Operator $-\Delta$ im Gebiet D.

Wir nehmen an, es gäbe eine Folge h_k, $k \in I\!N$, $h_k < 0$, mit $h_k \to 0$, $k \to \infty$, und $\|\varphi_{h_k}\|_{L^2(\partial D)} \to \infty$, $k \to \infty$. Anstatt die auftretenden Operatoren, Dichten und Ränder mit h_k zu indizieren, schreiben wir einfach nur k als Index. $\alpha_k^{-1}(u|_{\partial D_k})$ bleibt als schwach konvergente Folge beschränkt. $\psi_k := \|\varphi_k\|^{-1}_{L^2(\partial D)}\,\varphi_k$ erfüllt $\|\psi_k\|_{L^2(\partial D)} = 1$ und

$$(I - K_0)\psi_k = -2\,\|\varphi_k\|^{-1}_{L^2(\partial D)}\alpha_k^{-1}(u|_{\partial D_k}) + (K_k - K_0)\psi_k \to 0\ , \quad k \to \infty\ ,$$

da $\|K_k - K_0\|_{L^2(\partial D)} \to 0$, $k \to \infty$, gilt. Weil K_0 kompakt in $L^2(\partial D)$ ist, konvergiert eine Teilfolge $\psi_{k(j)}$, $j \in I\!N$, von ψ_k in der $L^2(\partial D)$-Norm gegen ein $\psi_0 \in L^2(\partial D)$ mit $\|\psi_0\|_{L^2(\partial D)} = 1$ und $(I - K_0)\psi_0 = 0$. Für jedes fest gewählte $x \in D$ gilt:

$$\int\limits_{\partial D} \frac{\partial\Phi}{\partial n(y)}(x,y)\psi_0(y)ds(y) =$$

$$= \lim_{j\to\infty} \int\limits_{\partial D} \frac{\partial\Phi}{\partial n(y)}(x, y + h_{k(j)}n(y))(1 - 2h_{k(j)}\hat{H}(y) + h^2_{k(j)}\hat{K}(y))\psi_{k(j)}(y)ds(y) =$$

$$= \lim_{j\to\infty} \Bigg\{ \|\varphi_{k(j)}\|^{-1}_{L^2(\partial D)} \cdot$$

$$\cdot \int\limits_{\partial D} \frac{\partial\Phi}{\partial n(y)}(x, y + h_{k(j)}n(y))(1 - 2h_{k(j)}\hat{H}(y) + h^2_{k(j)}\hat{K}(y))\varphi_{k(j)}(y)ds(y) \Bigg\} =$$

$$= \lim_{j\to\infty} \|\varphi_{k(j)}\|^{-1}_{L^2(\partial D)} \int\limits_{\partial D_{k(j)}} \frac{\partial\Phi}{\partial n(y)}(x,\tilde{y})\tilde{\varphi}_{k(j)}(\tilde{y})ds(\tilde{y}) =$$

$$= \lim_{j\to\infty} \|\varphi_{k(j)}\|^{-1}_{L^2(\partial D)} u(x) = 0\ .$$

Aus dem Verschwinden des Doppelschichtpotentials mit Dichte ψ_0 in D folgt mit den Sprungrelationen für L^2-Dichten: $\psi_0 \in \mathrm{N}(I - K_0)$. Da sich der Nullraum des Operators $(I - K_0)$ nicht ändert, wenn er in $L^2(\partial D)$ statt in $C^{1,\alpha}(\partial D)$ betrachtet wird (vgl. die Bemerkung zwischen Hilfssatz A2 und Hilfssatz A3 des Anhangs zu diesem Kapitel), ist sogar $\psi_0 \in C^{1,\alpha}(\partial D)$. Mit Hilfssatz A3 des Anhangs schließen wir jetzt aus dem Verschwinden des Doppelschichtpotentials in D, daß $\psi_0 = 0$ gilt. Dies ist ein Widerspruch zu $\|\psi_0\|_{L^2(\partial D)} = 1$.

Sei nun h_k, $k \in I\!N$, $h_k < 0$, mit $h_k \to 0$, $k \to \infty$, eine beliebige Folge. Dann bleiben die zugehörigen φ_k in der $L^2(\partial D)$-Norm beschränkt und wir können eine schwach konvergente Teilfolge $\varphi_{k(j)}$, $j \in I\!N$, auswählen, $\varphi_{k(j)} \rightharpoonup \varphi_0$, $j \to \infty$. Aus $(I - K_{k(j)})\varphi_{k(j)} = -2\alpha_{k(j)}^{-1}(u|_{\partial D_{k(j)}})$ erhalten wir

$$(I - K_0)\varphi_{k(j)} = -2\alpha_{k(j)}^{-1}(u|_{\partial D_{k(j)}}) + (K_{k(j)} - K_0)\varphi_{k(j)} \rightharpoonup 0 \ , \quad j \to \infty \ .$$

Zusammen mit $(I - K_0)\varphi_{k(j)} \rightharpoonup (I - K_0)\varphi_0$ heißt das $\varphi_0 - K_0\varphi_0 = 0$. Wegen

$$u(x) = \int\limits_{\partial D} \frac{\partial \Phi}{\partial n(y)}(x, y + h_{k(j)}n(y))(1 - 2h_{k(j)}\hat{H}(y) + h_{k(j)}^2\hat{K}(y))\varphi_{k(j)}(y)ds(y)$$

$$\to \int\limits_{\partial D} \frac{\partial \Phi}{\partial n(y)}(x, y)\varphi_0(y)ds(y) \ , \quad j \to \infty \ ,$$

für jedes feste $x \in D$, ist u als Doppelschichtpotential über ∂D mit einer Dichte $\varphi_0 \in \mathrm{N}(I - K_0) \subset C^{1,\alpha}(\partial D)$ darstellbar und daher eine klassische Eigenlösung oder die Nullfunktion. ■

Unter der Voraussetzung der starken L^2-Konvergenz der Randdaten gegen 0 hätten wir den letzten Satz auch anders ableiten können. Im Anschluß an Satz 2.1 haben wir festgestellt, daß eine Lösung u des inneren Dirichlet-Problems, deren Randdaten bzgl. der L^2-Norm gegen 0 konvergieren, im Sobolev-Raum $H_0^1(D)$ liegt und eine schwache Lösung des inneren homogenen Dirichlet-Problems ist:

$$\int\limits_D (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad} \overline{v})dx = \kappa^2 \int\limits_D u\overline{v}dx \qquad \text{für alle } v \in H_0^1(D).$$

Nutzen wir Regularitätssätze für schwache Lösungen elliptischer Randwertprobleme aus (vgl. [17]), so können wir $u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$, $\Delta u + \kappa^2 u = 0$ in D, $u|_{\partial D} = 0$ folgern, d.h. u löst das klassische homogene Dirichlet-Problem. Dies ist das Resultat des letzten Satzes, den wir aber ohne die Regularitätssätze für schwache Lösungen bewiesen haben.

Wir gehen jetzt den umgekehrten Weg und leiten mit den Methoden des letzten Satzes die Randregularität von schwachen Lösungen des Dirichlet-Problems her, d.h. wir zeigen unter geeigneten Voraussetzungen: schwache Lösungen sind auch klassische Lösungen und insbesondere schwache Eigenlösungen sind auch klassische Eigenlösungen. Dabei benutzen wir zum Nachweis der inneren Regularität eine Standardmethode.

Satz 2.4:

Sei $f \in C^2(D) \cap C^{m,\alpha}(\overline{D})$, $m = 0, 1$, $0 \leq \alpha < 1$, mit $\Delta f \in L^2(D)$. $u \in H^1(D)$ erfülle $u - f \in H_0^1(D)$ und

$$\int\limits_D (\operatorname{grad}(u-f), \operatorname{grad}\overline{v})dx - \kappa^2 \int\limits_D (u-f)\overline{v}dx = \int\limits_D (\Delta f + \kappa^2 f)\overline{v}dx$$

für alle $v \in H_0^1(D)$. Dann ist (nach Änderung auf einer Menge vom Maß Null) $u \in C^2(D) \cap C^{m,\alpha}(\overline{D})$. u erfüllt $\Delta u + \kappa^2 u = 0$ in D und $u = f$ auf ∂D.

Beweis :

Zuerst weisen wir mit einer Standardmethode (Weylsches Lemma) $u \in C^2(D)$ und $\Delta u + \kappa^2 u = 0$ in D nach (vgl. [11] und [10]).

Für $\varphi \in C_0^2(D)$ gilt

$$\int\limits_D (\operatorname{grad}(u-f), \operatorname{grad}\overline{\varphi})dx = -\int\limits_D (u-f)\Delta\overline{\varphi}dx \qquad \text{und}$$

$$\int\limits_D (\Delta f + \kappa^2 f)\overline{\varphi}dx = \int\limits_D f(\Delta\overline{\varphi} + \kappa^2\overline{\varphi})dx \ .$$

Mit der Voraussetzung erhalten wir

$$\int\limits_D u(\Delta\varphi + \kappa^2\varphi)dx = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^2(D). \tag{2.8}$$

Sei $\eta_\epsilon \in C^\infty(I\!R)$, $0 \leq \eta_\epsilon(t) \leq 1$ für alle $t \in I\!R$ und

$$\eta_\epsilon(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \leq \frac{\epsilon}{2} \\ 0 & \text{für } t \geq \epsilon \end{cases} \quad .$$

Weiter sei

$$H_\epsilon(x,y) := \eta_\epsilon(|x-y|)\Phi(x,y)\ , x,y \in I\!R^3,\ x \neq y\ .$$

Zu jeder kompakten Teilmenge G von D gibt es ein $\epsilon = \epsilon(G) > 0$, so daß für alle $\psi \in C^1(I\!R^3)$, mit $\psi(x) = 0$ für $x \notin G$, die Funktion

$$\varphi(x) := \int\limits_{I\!R^3} H_\epsilon(x,y)\psi(y)dy\ ,\quad x \in I\!R^3,$$

zu $C_0^2(D)$ gehört. Es gilt

$$(\Delta\varphi)(x) + \kappa^2\varphi(x) = -\psi(x) + \int\limits_{I\!R^3} K_\epsilon(x,y)\psi(y)dy\ ,\quad x \in I\!R^3,$$

mit $K_\epsilon(x,y) := \Delta_y H_\epsilon(x,y) + \kappa^2 H_\epsilon(x,y)$. $K_\epsilon(x,y) \in C^\infty(I\!R^3 \times I\!R^3)$, $K_\epsilon(x,y) = 0$ für $|y-x| \leq \frac{\epsilon}{2}$ und für $|y-x| \geq \epsilon$ und die Ableitungen nach x von $K_\epsilon(x,y)$ sind beschränkt in $I\!R^3 \times I\!R^3$. Mit (2.8) und dem Satz von Fubini folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \int\limits_D \left(-\psi(x) + \int\limits_{I\!R^3} K_\epsilon(x,y)\psi(y)dy \right) u(x)dx \\ &= \int\limits_{I\!R^3} \psi(y) \left(-u(y) + \int\limits_{I\!R^3} K_\epsilon(x,y)u(x)dx \right) dy \end{aligned}$$

für alle $\psi \in C_0^1(G)$. Dann gilt

$$u(y) = \int\limits_{I\!R^3} K_\epsilon(x,y)u(x)dx \ \text{ für fast alle } y \text{ im Inneren von } G.$$

Also ist u nach Abänderung auf einer Menge vom Maß Null eine zweimal stetig differenzierbare Funktion im Inneren von G. Da G beliebig in D gewählt werden kann, folgt $u \in C^2(D)$ (nach Abänderung auf einer Nullmenge) und

$$-\int\limits_D \Delta u\,\overline{\varphi}dx = \int\limits_D (\operatorname{grad} u, \operatorname{grad}\overline{\varphi})dx = \kappa^2 \int\limits_D u\,\overline{\varphi}dx\ ,$$

$$\text{d.h.}\quad \int_D (\Delta u + \kappa^2 u)\varphi dx = 0 \quad \text{für alle } \varphi \in C_0^1(D).$$

Daher gilt $\Delta u + \kappa^2 u = 0$ in D.

Jetzt weisen wir die Regularität von u am Rand nach. Dazu zeigen wir zuerst $\|\alpha_h^{-1}(u|_{\partial D_h}) - f|_{\partial D}\|_{L^2(\partial D)} \to 0$, $h \nearrow 0$.

Für $\varphi \in C_0^1(D)$ haben wir die Abschätzung:

$$\int_{\partial D} |\varphi(x + hn(x))|^2 ds(x) = \int_{\partial D} \left| \int_0^h (n(x), \operatorname{grad} \varphi(x + tn(x)))dt \right|^2 ds(x)$$

$$\leq C|h| \int_D |\operatorname{grad} \varphi|^2 dx \ .$$

Wir wählen zu einem vorgegebenem $\epsilon > 0$ ein h_1, $0 < h_1 \leq h_0$, so daß

$$C|h| \int_D |\operatorname{grad}(u - f)|^2 dx < \frac{\epsilon}{8} \qquad \text{und}$$

$$\int_{\partial D} |f(x + hn(x)) - f(x)|^2 ds(x) < \frac{\epsilon}{8} \qquad \text{für alle } |h| \leq h_1 \text{ ist.}$$

Da $u - f \in H_0^1(D) \cap C(D)$ ist, können wir $u - f$ mit einer Folge von Funktionen $\varphi_j \in C_0^1(D)$, $j \in I\!N$, in der H^1-Norm approximieren und erhalten mit Hilfssatz A4 des Anhangs für $-h_1 < h < 0$:

$$\int_{\partial D} |u(x + hn(x)) - f(x)|^2 ds(x) =$$

$$= \liminf_{j\to\infty} \left\{ \int_{\partial D} |\{u(x + hn(x)) - f(x + hn(x)) - \varphi_j(x + hn(x))\} + \right.$$

$$\left. + \{f(x + hn(x)) - f(x)\} + \varphi_j(x + hn(x))|^2 ds(x) \right\} \leq$$

$$\leq 4 \liminf_{j\to\infty} \int_{\partial D} |u(x + hn(x)) - f(x + hn(x)) - \varphi_j(x + hn(x))|^2 ds(x) + \frac{\epsilon}{2}$$

$$+\,2\,\liminf_{j\to\infty}\int\limits_{\partial D}|\varphi_j(x+hn(x))|^2 ds(x)\le$$

$$\le\;4\,\liminf_{j\to\infty} C(h)\int\limits_{D}\{|\mathrm{grad}\,(u-f-\varphi_j)|^2+|u-f-\varphi_j|^2\}dx+\frac{\epsilon}{2}$$

$$+\,2\,C|h|\liminf_{j\to\infty}\int\limits_{D}|\mathrm{grad}\,\varphi_j|^2 dx\;<\;\epsilon\;.$$

Dabei wurde in der ersten Ungleichung die Abschätzung

$$|a+b+c|^2\le 2|a+b|^2+2|c|^2\le 4|a|^2+4|b|^2+2|c|^2\;,\;\;a,b,c\in\mathbb{C}\;,$$

benutzt.

Stellen wir wieder u in D_h als Doppelschichtpotential über ∂D_h mit einer Dichte $\tilde{\varphi}_h\in C^{1,\alpha}(\partial D_h)$ dar, d.h.

$$u(x)=\int\limits_{\partial D_h}\frac{\partial\Phi}{\partial n(\tilde{y})}(x,\tilde{y})\tilde{\varphi}_h(\tilde{y})ds(\tilde{y})\;,\quad x\in D_h\;,$$

so erfüllt $\varphi_h:=\alpha_h^{-1}\tilde{\varphi}_h$ wieder die Gleichung $(I-K_h)\varphi_h=-2\alpha_h^{-1}(u|_{\partial D_h})$. Wie im Beweis von Satz 2.3 können wir eine Folge h_k, $k\in\mathbb{N}$, mit $h_k<0$, $h_k\to 0$, $k\to\infty$, so auswählen, daß φ_{h_k} gegen ein $\varphi_0\in L^2(\partial D)$ in der $L^2(\partial D)$-Norm konvergiert, $\varphi_{h_k}\to\varphi_0$, $k\to\infty$. φ_0 löst die Gleichung $(I-K_0)\varphi_0=-2f|_{\partial D}$. Dann liegt φ_0 sogar in $C^{m,\alpha}(\partial D)$ (da $f|_{\partial D}\in C^{m,\alpha}(\partial D)$) und

$$u(x)=\int\limits_{\partial D}\frac{\partial\Phi}{\partial n(y)}(x,y)\varphi_0(y)ds(y)\;,\quad x\in D\;,$$

erfüllt die Behauptung. ■

Anhang zum zweiten Kapitel

Bei den Beweisen für die Sätze des zweiten Kapitels haben wir einige technische Resultate benutzt, die wir jetzt nachweisen wollen. Zuerst begründen wir die Sprungrelationen und Regularitätseigenschaften von Flächenpotentialen über eine Parallelfläche ∂D_h.

Für einen C^2-glatten Rand ∂D ist

$$\partial D_h := \{z \in \mathbb{R}^3 : z = x + hn(x), x \in \partial D\}$$

eine C^1-glatte Fläche, wenn $|h| \leq h_0$ und $h_0 \in (0, 1)$ hinreichend klein ist. Es gilt für $\tilde{x} = x + hn(x)$, $\tilde{y} = y + hn(y), x, y \in \partial D$: $n(\tilde{x}) = n(x)$ (daher der Name Parallelfläche),

$$(n(\tilde{x}), \tilde{x} - \tilde{y}) = (n(x), x - y) + \frac{1}{2}h|n(x) - n(y)|^2,$$

$$|\tilde{x} - \tilde{y}|^2 = |x - y|^2 + 2h(n(x) - n(y), x - y) + h^2|n(x) - n(y)|^2.$$

Daraus erhält man:

$$|\tilde{x} - \tilde{y}| \leq 2|x - y|, |\tilde{x} - \tilde{y}| \geq \frac{1}{2}|x - y|, \tag{A1}$$

$$|(n(\tilde{x}), \tilde{x} - \tilde{y})| \leq C|x - y|^2, |n(\tilde{x}) - n(\tilde{y})| \leq C|x - y| \tag{A2}$$

für alle $x, y \in \partial D$ und für alle $|h| \leq h_0$, wenn $h_0 > 0$ hinreichend klein gewählt ist. Also ist ∂D_h eine Ljapunov-Fläche. Für solche Flächen gelten die Sprungrelationen auch (vgl. [9]).

Fast alle Resultate über Flächenpotentiale, die im Kapitel 2 des Buches von Colton und Kreß [7] hergeleitet werden, gelten auch für die Fläche ∂D_h. Denn zum Beweis der Eigenschaften von Flächenpotentialen werden von der Fläche nur die Abschätzungen (A2) (vgl. [7] Theorem 2.2) und die Existenz einer stetigen Krümmung benötigt (d.h. die Normale muß nach den Parametrisierungsvariablen der Fläche stetig differenzierbar sein ([7] Theorem 2.1)). An den Stellen des Buches von Colton und Kreß , an denen zweite Ableitungen von der Parametrisierung benutzt werden, müssen wir die Parametrisierung der Parallelfläche ∂D_h mit ihrem Gradienten durch zweimal stetig differenzierbare Funktionen gleichmäßig approximieren. Auf diese Weise können wir alle Sätze aus dem zweiten Kapitel von [7] mit einer einzigen Ausnahme auf die Fläche ∂D_h übertragen. Diese Ausnahme ist die Regularität des auf der Fläche ausgewerteten Doppelschichtpotentials. Für $\varphi \in C^{0,\alpha}(\partial D)$ ist der Beweis für $K\varphi \in C^{1,\alpha}(\partial D)$ aus [7] nicht übertragbar ([7] Theorem 2.22). Sämtliche Eigenschaften von Flächenpotentialen auf ∂D_h, die im folgenden benötigt werden (Sprungrelationen, Regularitätseigenschaften usw.), sind somit gültig.

Anstelle der obigen Ausnahme reicht es für unsere Zwecke aus, daß das Doppelschichtpotential auf ∂D_h Dichten aus $C^{1,\alpha}(\partial D_h)$ kompakt in $C^{1,\alpha}(\partial D_h)$ abbildet, d.h. $\tilde{K}_h\colon C^{1,\alpha}(\partial D_h) \to C^{1,\alpha}(\partial D_h)$,

$$\tilde{K}_h\tilde{\varphi}(\tilde{x}) \;:=\; 2\int\limits_{\partial D_h} \frac{\partial\Phi}{\partial n(\tilde{y})}(\tilde{x},\tilde{y})\tilde{\varphi}(\tilde{y})ds(\tilde{y}) \;, \quad \tilde{x} \in \partial D_h \;,$$

ist kompakt in der $C^{1,\alpha}(\partial D_h)$-Norm. Denn:

Für $\varphi \in C^{1,\alpha}(\partial D_h)$ definieren wir

$$v(x) := 2\int\limits_{\partial D_h} \frac{\partial\Phi}{\partial n(\tilde{y})}(x,\tilde{y})\varphi(\tilde{y})ds(\tilde{y}) \;, \quad x \in D_h \;.$$

Analog zu Theorem 2.23 in [7] gilt:

$$\operatorname{grad} v(x) = \kappa^2 2\int\limits_{\partial D_h} \Phi(x,\tilde{y})n(\tilde{y})\varphi(\tilde{y})ds(\tilde{y})$$

$$+2\int\limits_{\partial D_h} [\operatorname{grad}_x\Phi(x,\tilde{y}),[n(\tilde{y}),\operatorname{Grad}\varphi(\tilde{y})]]ds(\tilde{y}) \;, \quad x \in D_h \;.$$

Mit den Sprungrelationen berechnen wir für $\tilde{x} \in \partial D_h$

$$(\operatorname{Grad} K\varphi)(\tilde{x}) = -[n(\tilde{x}),[n(\tilde{x}),\operatorname{grad} v(\tilde{x})]] + \operatorname{Grad}\varphi(\tilde{x})$$

$$= -2\kappa^2\int\limits_{\partial D_h} [n(\tilde{x}),[n(\tilde{x}),\Phi(\tilde{x},\tilde{y})n(\tilde{y})\varphi(\tilde{y})]]ds(\tilde{y}) - [n,\tilde{M}_h[n,\operatorname{Grad}\varphi]](\tilde{x}) \;,$$

wobei $\tilde{M}_h: T^{0,\alpha}(\partial D_h) \to T^{0,\alpha}(\partial D_h)$ durch

$$\tilde{M}_h a(\tilde{x}) := 2 \int\limits_{\partial D_h} [n(\tilde{x}), \mathrm{rot}_{\tilde{x}}\{\Phi(\tilde{x},\tilde{y})a(\tilde{y})\}]ds(\tilde{y}) \ , \tilde{x} \in \partial D_h \ ,$$

definiert ist. Da $\tilde{K}_h$ und $\tilde{S}_h$, der Einfachschichtpotentialoperator auf ∂D_h, in $C^{0,\alpha}(\partial D_h)$, kompakt sind, $\tilde{M}_h$ in $T^{0,\alpha}(\partial D_h)$, den α-Hölderstetigen Tangentialfeldern auf ∂D_h, kompakt ist und $C^{1,\alpha}(\partial D_h)$ vollständig ist, folgt die Behauptung.

Der folgende Hilfssatz ist das entscheidende Mittel, um die Konvergenz der Operatoren auf ∂D_h gegen die entsprechenden Operatoren auf ∂D nachzuweisen. Wir bezeichnen in dem Hilfssatz mit X einen der Räume $(C(\partial D), \|.\|_\infty)$ oder $(L^p(\partial D), \|.\|_p)$, $1 \leq p < \infty$. Dabei sei $L^p(\partial D)$ die Vervollständigung von $C(\partial D)$ bezüglich der $\|.\|_p$-Norm $\|\varphi\|_p^p = \int_{\partial D} |\varphi|^p ds$.

Hilfssatz A1:

Seien $A_h: X \to X$

$$(A_h\varphi)(x) := \int\limits_{\partial D} k(x,y,h)\varphi(y)ds(y) \ , \quad x \in \partial D \ , \quad |h| \leq h_0 \ ,$$

Integraloperatoren, deren Kerne folgende Eigenschaften erfüllen:

$k(x,y,h)$ ist stetig in x und y für $x \neq y$ und schwach singulär, d.h. es gibt Konstanten $\beta > 0$, $C > 0$, so daß

$$|k(x,y,h)| \leq \frac{C}{|x-y|^{2-\beta}} \quad \text{für alle } x,y \in \partial D,\ x \neq y, \text{ und für alle } |h| \leq h_0 \text{ ist.} \tag{A3}$$

Für h gegen 0 konvergiert $k(x,y,h)$ gleichmäßig gegen $k(x,y,0)$, wenn $|x-y| \geq \delta$ ist, d.h. zu jedem $\epsilon > 0$ und $\delta > 0$ gibt es ein $h_1 > 0$, so daß für alle $x,y \in \partial D$ mit $|x-y| \geq \delta$ und für alle $|h| \leq h_1$ gilt:

$$|k(x,y,h) - k(x,y,0)| \leq \epsilon \ . \tag{A4}$$

Dann sind die Operatoren $A_h: X \to X$ kompakt und es gilt: $\|A_h - A_0\| \to 0$, $h \to 0$.

Beweis :

Wegen (A3) ist $A_h\varphi$ für stetige φ wohldefiniert und stetig. Weiter gilt für stetiges φ und $1 < p < \infty$ mit der Hölderschen Ungleichung $(1/p + 1/q = 1)$:

$$|(A_h\varphi)(x)|^p = \left|\int\limits_{\partial D} k(x,y,h)\varphi(y)ds(y)\right|^p \leq$$

$$\leq \left(\int\limits_{\partial D} |k(x,y,h)|ds(y)\right)^{p/q} \int\limits_{\partial D} |k(x,y,h)||\varphi(y)|^p ds(y) \ .$$

Daraus folgt: $\|A_h\varphi\|_p^p \leq C_1\|\varphi\|_p^p$. Für $p=1$ erhalten wir

$$\int\limits_{\partial D} |(A_h\varphi)(x)|ds(x) \leq \int\limits_{\partial D} |\varphi(y)| \int\limits_{\partial D} |k(x,y,h)|ds(x)\, ds(y) \leq$$

$$\leq C_2 \int\limits_{\partial D} |\varphi(y)|ds(y) \ .$$

Es ist klar, daß A_h auch in $C(\partial D)$ wohldefiniert und stetig ist (vgl. [7]). Damit ist A_h als Operator von X nach X wohldefiniert und stetig.

Nun schätzen wir für stetige φ und $1 < p < \infty$ ab:

$$|(A_h\varphi)(x) - (A_0\varphi)(x)|^p = \left|\int\limits_{\partial D} (k(x,y,h) - k(x,y,0))\varphi(y)ds(y)\right|^p \leq$$

$$\leq \left(\int\limits_{\partial D} |k(x,y,h) - k(x,y,0)|ds(y)\right)^{p/q} \int\limits_{\partial D} |k(x,y,h) - k(x,y,0)||\varphi(y)|^p ds(y) \ ,$$

$$\|A_h\varphi - A_0\varphi\|_p^p \leq \sup_{x\in\partial D} \left(\int\limits_{\partial D} |k(x,y,h) - k(x,y,0)|ds(y)\right)^{p/q} \cdot$$

$$\cdot \int\limits_{\partial D}\int\limits_{\partial D} |k(x,y,h) - k(x,y,0)|ds(x)|\varphi(y)|^p ds(y) \leq$$

$$\leq f(h) \int\limits_{\partial D}\int\limits_{\partial D} \frac{2C}{|x-y|^{2-\beta}} ds(x)|\varphi(y)|^p ds(y) \leq C_3 f(h)\|\varphi\|_p^p \ ,$$

mit

$$f(h) := \sup_{x\in\partial D}\left(\int\limits_{\partial D}|k(x,y,h)-k(x,y,0)|ds(y)\right)^{p/q} \le$$

$$\le \sup_{x\in\partial D}\Bigg(\int\limits_{\partial D\cap\{|x-y|\le\delta\}}\frac{2C}{|x-y|^{2-\beta}}ds(y)+$$

$$+\int\limits_{\partial D\cap\{|x-y|\ge\delta\}}|k(x,y,h)-k(x,y,0)|ds(y)\Bigg)^{p/q}.$$

Zu vorgegebenem $\epsilon > 0$ können wir $\delta > 0$ so klein wählen, daß

$$\int\limits_{\partial D\cap\{|x-y|\le\delta\}}\frac{2C}{|x-y|^{2-\beta}}ds(y) \le \frac{1}{2}\epsilon^{q/p} \qquad \text{für alle } x\in\partial D \text{ gilt.}$$

Dann wählen wir $h_1 > 0$ so klein, daß

$$\int\limits_{\partial D\cap\{|x-y|\ge\delta\}}|k(x,y,h)-k(x,y,0)|ds(y) \le \frac{1}{2}\epsilon^{q/p} \qquad \text{für alle } x\in\partial D$$

und $|h| \le h_1$ gilt. Dann erhalten wir für $|h| \le h_1$:

$$f(h) \le \left(\frac{1}{2}\epsilon^{q/p}+\frac{1}{2}\epsilon^{q/p}\right)^{p/q} = \epsilon\ ,$$

d.h. $f(h) \to 0$, $h \to 0$.

Für $p = 1$ oder die $\|.\|_\infty$-Norm schätzen wir genauso ab:

$$\|A_h\varphi - A_0\varphi\|_1 \le \int\limits_{\partial D}\int\limits_{\partial D}|k(x,y,h)-k(x,y,0)|ds(x)|\varphi(y)|ds(y) \le$$

$$\le \sup_{y\in\partial D}\int\limits_{\partial D}|k(x,y,h)-k(x,y,0)|ds(x)\|\varphi\|_1\ ,$$

$$\|A_h\varphi - A_0\varphi\|_\infty \le \sup_{x\in\partial D}\int\limits_{\partial D}|k(x,y,h)-k(x,y,0)|ds(y)\|\varphi\|_\infty\ ,$$

$$\sup_{x\in\partial D}\int_{\partial D}|k(x,y,h)-k(x,y,0)|ds(y)\to 0\ ,\quad h\to 0\ ,$$

$$\sup_{y\in\partial D}\int_{\partial D}|k(x,y,h)-k(x,y,0)|ds(x)\to 0\ ,\quad h\to 0\qquad \text{(wie eben)}.$$

Insgesamt erhalten wir die Behauptung $\|A_h - A_0\|\to 0$, $h\to 0$.

Wählen wir zu $\mu > 0$ $\eta_\mu \in C(I\!R)$ so, daß $0\le \eta_\mu(t)\le 1$ für alle $t\in I\!R$, $\eta_\mu(t)=0$ für $t\le \mu/2$, $\eta_\mu(t)=1$ für $t\ge\mu$ gilt, und definieren wir

$$\tilde{k}(x,y,h,\mu) := \eta_\mu(|x-y|)k(x,y,h)\ \text{ und }\ \tilde{k}(x,y,h,0):=k(x,y,h)\ ,$$

so erfüllen die Kerne $\tilde{k}(x,y,h,\mu)$ für festes h als Funktionen von x und y mit μ als Parameter die Bedingungen (A3) und (A4). Da die Kerne $\tilde{k}$ für $\mu>0$ als Funktion von x und y stetig sind, sind die zugehörigen Integraloperatoren $A_{h,\mu}$ in X kompakt. Da X vollständig ist und mit den vorherigen Überlegungen A_h durch die kompakten Operatoren $A_{h,\mu}$ in der Operatornorm approximiert wird, $\|A_{h,\mu}-A_h\|\to 0$, $\mu\to 0$, ist auch A_h in X kompakt. ■

Mit diesem Hilfssatz können wir die Konvergenz der im letzten Kapitel aufgetretenen Operatoren leicht nachweisen. Seien für $\varphi\in X$ $K_h\varphi$, $S_h\varphi$, $K'_h\varphi$ aus X definiert durch

$$K_h\varphi(x) := 2\left(\alpha_h^{-1}\int_{\partial D_h}\frac{\partial\Phi}{\partial n(\tilde{y})}(.,\tilde{y})(\alpha_h\varphi)(\tilde{y})ds(\tilde{y})\right)(x) =$$

$$= 2\int_{\partial D}\frac{\partial\Phi}{\partial n(y)}(x+hn(x),y+hn(y))\varphi(y)(1-2h\hat{H}(y)+h^2\hat{K}(y))ds(y)\ ,$$

$$S_h\varphi(x) := 2\left(\alpha_h^{-1}\int_{\partial D_h}\Phi(.,\tilde{y})(\alpha_h\varphi)(\tilde{y})ds(\tilde{y})\right)(x) =$$

$$= 2\int_{\partial D}\Phi(x+hn(x),y+hn(y))\varphi(y)(1-2h\hat{H}(y)+h^2\hat{K}(y))ds(y)\ ,$$

$$K'_h\varphi(x) := 2\left(\alpha_h^{-1}\int_{\partial D_h}\frac{\partial\Phi}{\partial n(.)}(.,\tilde{y})(\alpha_h\varphi)(\tilde{y})ds(\tilde{y})\right)(x) =$$

$$= 2 \int\limits_{\partial D} \frac{\partial \Phi}{\partial n(x)}(x + hn(x), y + hn(y))\varphi(y)(1 - 2h\hat{H}(y) + h^2\hat{K}(y))ds(y)$$

für $x \in \partial D$, $|h| \leq h_0$ (α_h läßt sich auf X fortsetzen). Dann gilt der folgende

Hilfssatz A2:

Es gilt:

$$\|K_h - K_0\| \to 0 \ , \ \|S_h - S_0\| \to 0 \ , \ \|K'_h - K'_0\| \to 0 \ , \ h \to 0,$$

wobei $\|.\|$ die Operatornorm im Raum X bezeichnet.

Beweis :

Mit den Abschätzungen (A1) und (A2) läßt sich leicht nachrechnen, daß die Kerne der Operatoren K_h, S_h und K'_h die Bedingungen (A3) und (A4) von Hilfssatz A1 erfüllen. Wir betrachten nur den Operator K_h, die anderen Operatoren können genauso behandelt werden.

$$k(x, y, h) := \frac{\partial \Phi}{\partial n(y)}(x + hn(x), y + hn(y))(1 - 2h\hat{H}(y) + h^2\hat{K}(y)) =$$

$$= (1 - 2h\hat{H}(y) + h^2\hat{K}(y)) \exp(i\kappa|x - y + h(n(x) - n(y))|) \cdot$$

$$\cdot \left\{ \frac{(n(y), x - y + h(n(x) - n(y)))}{|x - y + h(n(x) - n(y))|^3} - i\kappa \frac{(n(y), x - y + h(n(x) - n(y)))}{|x - y + h(n(x) - n(y))|} \right\}$$

ist stetig in x und y für $x \neq y$. Aus (A1) und (A2) ergibt sich

$$|k(x, y, h)| \leq \frac{C}{|x - y|} \qquad \text{für alle } x, y \in \partial D,\ |h| \leq h_0.$$

Die gleichmäßige Konvergenz von $k(x, y, h)$ gegen $k(x, y, 0)$ für $|x - y| \geq \delta$ folgt aus dem Mittelwertsatz. ■

Wir müssen noch nachweisen, daß $(I + K_0 - i\eta S_0)$ in X stetig invertierbar ist (vgl. den Beweis von Satz 2.2). Da $K_0 - i\eta S_0$ nach den beiden letzten Hilfssätzen in X kompakt ist, müssen wir aus $(I + K_0 - i\eta S_0)\varphi = 0$, $\varphi \in X$, auf $\varphi = 0$ schließen. Es ist bekannt, daß $(I + K_0 - i\eta S_0)$ in $C(\partial D)$ injektiv ist (vgl. [7], [3],

[23]). Betrachten wir das Dualsystem $\langle X, C^{0,\alpha}(\partial D)\rangle$ mit $\langle f,g\rangle = \int_{\partial D} fg\,ds$, so ist der Operator $(I+K_0'-i\eta S_0)$ zu $(I+K_0-i\eta S_0)$ adjungiert (vgl. [7]). Aus der Fredholmtheorie wissen wir

$$\dim \mathrm{N}((I+K_0-i\eta S_0)|_X) = \dim \mathrm{N}((I+K_0'-i\eta S_0)|_{C^{0,\alpha}(\partial D)}) =$$

$$= \dim \mathrm{N}((I+K_0-i\eta S_0)|_{C(\partial D)}) = 0\ .$$

Mit der gleichen Methode läßt sich auch beweisen, daß sich der Nullraum einer Fredholmschen Integralgleichung 2. Art nicht ändert, wenn sie statt in $C^{1,\alpha}(\partial D)$ oder $C^{0,\alpha}(\partial D)$ als Gleichung in $L^p(\partial D)$ betrachtet wird.

Der nächste Hilfssatz zeigt, daß eine innere Lösung der Helmholtz-Gleichung als Doppelschichtpotential darstellbar ist.

Hilfssatz A3:

Sei $|h| \le h_0$ fest und $u \in C^2(D_h) \cap C^{1,\alpha}(\overline{D_h})$ erfülle

$$\Delta u + \kappa^2 u = 0 \quad \text{ in } D_h,\ \kappa \in \mathbb{C},\ \mathrm{Im}\kappa \ge 0.$$

Dann gibt es genau ein $\varphi \in C^{1,\alpha}(\partial D_h)$, so daß u in D_h als Doppelschichtpotential über ∂D_h mit der Dichte φ dargestellt werden kann,

$$u(x) = \int\limits_{\partial D_h} \frac{\partial \Phi}{\partial n(\tilde{y})}(x,\tilde{y})\varphi(\tilde{y})ds(\tilde{y}) \quad \text{ für alle } x \in D_h.$$

Beweis :

Zuerst zeigen wir, daß es höchstens ein φ gibt.

Sei $\varphi \in C^{1,\alpha}(\partial D_h)$ und

$$u(x) := \int\limits_{\partial D_h} \frac{\partial \Phi}{\partial n(\tilde{y})}(x,\tilde{y})\varphi(\tilde{y})ds(\tilde{y}) \quad \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial D_h.$$

Gilt $u(x)=0$ für alle $x \in D_h$, so folgt mit den Sprungrelationen $\frac{\partial u_+}{\partial n} = \frac{\partial u_-}{\partial n} = 0$ auf ∂D_h ($u_+ := u|_{D_{h,a}}$, $u_- := u|_{D_h}$), und aus der klassischen Eindeutigkeit des äußeren Neumann-Problems schließen wir $u_+ = 0$. Dann erhalten wir mit den Sprungrelationen $\varphi = u_+ - u_- = 0$, d.h. es kann höchstens eine Dichte $\varphi \in C^{1,\alpha}(\partial D_h)$ geben, mit welcher u als Doppelschichtpotential dargestellt werden kann.

Zu einem gegebenem u existiert nach der Fredholmschen Alternative im Dualsystem $\langle C^{1,\alpha}(\partial D_h), C^{0,\alpha}(\partial D_h)\rangle$, $\langle f, g\rangle = \int_{\partial D_h} fg\, ds$, eine Dichte $\varphi_1 \in C^{1,\alpha}(\partial D_h)$, so daß

$$\varphi_1(\tilde{x}) - 2 \int\limits_{\partial D_h} \frac{\partial \Phi}{\partial n(\tilde{y})}(\tilde{x}, \tilde{y})\varphi_1(\tilde{y})ds(\tilde{y}) = -2u(\tilde{x}) \ , \quad \tilde{x} \in \partial D_h \ , \tag{A5}$$

gilt. Denn:

Ist $\psi_0 \in C^{0,\alpha}(\partial D_h)$ eine Lösung der homogenen zu (A5) adjungierten Gleichung

$$\psi_0(\tilde{x}) - 2 \int\limits_{\partial D_h} \frac{\partial \Phi}{\partial n(\tilde{x})}(\tilde{x}, \tilde{y})\psi_0(\tilde{y})ds(\tilde{y}) = 0 \ , \quad \tilde{x} \in \partial D_h \ ,$$

so definieren wir

$$v(x) = \int\limits_{\partial D_h} \Phi(x, \tilde{y})\psi_0(\tilde{y})ds(\tilde{y}) \ , \quad x \in I\!R^3 \setminus \partial D_h \ ,$$

und erhalten $v_+ := v|_{D_{h,a}} \in C^2(D_{h,a}) \cap C^{1,\alpha}(\overline{D}_{h,a})$, $\frac{\partial v_+}{\partial n} = 0$. Also ist $v_+ = 0$ in $D_{h,a}$. Aus den Sprungrelationen folgt für $v_- := v|_{D_h}$: $v_- = 0$ auf ∂D_h, $v_- \in C^2(D_h) \cap C^{1,\alpha}(\overline{D_h})$, $\frac{\partial v_-}{\partial n} = \frac{\partial v_-}{\partial n} - \frac{\partial v_+}{\partial n} = \psi_0$ auf ∂D_h. Dann ist mit dem zweiten Greenschen Satz

$$\langle \psi_0, u|_{\partial D_h}\rangle = \int\limits_{\partial D_h} \frac{\partial v_-}{\partial n} u\, ds = \int\limits_{\partial D_h} v_- \frac{\partial u}{\partial n}\, ds = 0 \ .$$

Daraus folgt mit der Fredholm-Alternative (A5).

Nun setzen wir

$$v_1(x) = u(x) - \int\limits_{\partial D_h} \frac{\partial \Phi}{\partial n(\tilde{y})}(x, \tilde{y})\varphi_1(\tilde{y})ds(\tilde{y}) \ , \quad x \in D_h \ .$$

$v_1 \in C^2(D_h) \cap C^{1,\alpha}(\overline{D_h})$ hat homogene Randwerte $v_1|_{\partial D_h} = 0$.

Wir müssen v_1 als Doppelschichtpotential darstellen. Dies ist ein Problem in einem endlichdimensionalen Teilraum von $C^{1,\alpha}(\partial D_h)$.

Sei $V := \{w \in C^2(D_h) \cap C^{1,\alpha}(\overline{D_h}),\ \Delta w + \kappa^2 w \text{ in } D_h,\ w = 0 \text{ auf } \partial D_h\}$. Für $\varphi \in \mathrm{N}(I - \tilde{K}_h) \subset C^{1,\alpha}(\partial D_h)$ liegt das Potential

$$(P\varphi)(x) = \int\limits_{\partial D_h} \frac{\partial \Phi}{\partial n(\tilde{y})}(x, \tilde{y})\varphi(\tilde{y})ds(\tilde{y}) \ , \quad x \in D_h, \quad \text{in } V.$$

$P\colon \mathrm{N}(I - \tilde{K}_h) \to V$ ist linear und injektiv nach der ersten Überlegung des Beweises, d.h. $\dim \mathrm{N}(I - \tilde{K}_h) \leq \dim V$.

Definieren wir

$$(\tilde{K}_h'\psi)(\tilde{x}) = 2 \int\limits_{\partial D_h} \frac{\partial \Phi}{\partial n(\tilde{x})}(\tilde{x}, \tilde{y})\psi(\tilde{y})ds(\tilde{y}) \ , \ \tilde{x} \in \partial D_h \ , \ \psi \in C^{0,\alpha}(\partial D_h) \ ,$$

so ist für $w \in V$ $\ \frac{\partial w}{\partial n} \in \mathrm{N}(I - \tilde{K}_h')$, denn der Darstellungssatz für w lautet

$$w(x) = \int\limits_{\partial D_h} \Phi(x, \tilde{y})\frac{\partial w}{\partial n}(\tilde{y})ds(\tilde{y}) \ , \quad x \in D_h \ , \quad (w = 0 \text{ auf } \partial D_h!).$$

Bilden wir die Normalableitung und benutzen die Sprungrelationen, erhalten wir $(I - \tilde{K}_h')\frac{\partial w}{\partial n} = 0$.

Dann ist der Operator $Q\colon V \to \mathrm{N}(I - \tilde{K}_h')$, $Q(w) = \frac{\partial w}{\partial n}$ wohldefiniert, linear und injektiv, weil aus $0 = Q(w) = \frac{\partial w}{\partial n}$ auf ∂D_h zusammen mit $w = 0$ auf ∂D_h und dem Darstellungssatz $w = 0$ in D_h folgt, d.h. $\dim V \leq \dim \mathrm{N}(I - \tilde{K}_h')$.

Mit der Fredholmschen Alternative erhalten wir

$$\dim \mathrm{N}(I - \tilde{K}_h) \leq \dim V \leq \dim \mathrm{N}(I - \tilde{K}_h') = \dim \mathrm{N}(I - \tilde{K}_h) \ ,$$

insbesondere $\dim \mathrm{N}(I - \tilde{K}_h) = \dim V$. Dann ist der Operator P surjektiv; es gibt daher ein $\varphi_2 \in \mathrm{N}(I - \tilde{K}_h)$, so daß für alle $x \in D_h$

$$v_1(x) = u(x) - \int\limits_{\partial D_h} \frac{\partial \Phi}{\partial n(\tilde{y})}(x, \tilde{y})\varphi_1(\tilde{y})ds(\tilde{y}) = \int\limits_{\partial D_h} \frac{\partial \Phi}{\partial n(\tilde{y})}(x, \tilde{y})\varphi_2(\tilde{y})ds(\tilde{y})$$

ist. Also ist u als Doppelschichtpotential darstellbar. ■

Zum Schluß wollen wir einen Spursatz beweisen, den wir im Beweis von Satz 2.4 benutzt haben.

Hilfssatz A4:

Sei h fest gewählt, $-h_0 < h \leq 0$. Dann existiert eine Konstante $C = C(h)$, so daß

$$\int\limits_{\partial D_h} |u|^2 ds \leq C \int\limits_{D_h} (|\operatorname{grad} u|^2 + |u|^2) dx$$

für alle $u \in C(D) \cap H_0^1(D)$ gilt.

Beweis :

Wir nehmen an, die Behauptung sei falsch, d.h. es existiert eine Folge $u_j \in C(D) \cap H_0^1(D)$, $j \in I\!N$, so daß

$$\int\limits_{\partial D_h} |u_j|^2 ds \geq j \quad \text{ und } \int\limits_{D_h} (|\operatorname{grad} u_j|^2 + |u_j|^2) dx \to 0 \ , \quad j \to \infty \ .$$

Für

$$v(x) := \int\limits_{\partial D_h} \frac{\mathrm{e}^{-|x-\tilde{y}|}}{4\pi|x-\tilde{y}|} \varphi(\tilde{y}) ds(\tilde{y}) \ , \quad \varphi \in L^2(\partial D_h) \ , \quad x \in D_h \ ,$$

gilt mit

$$(\tilde{K}'_h \psi)(\tilde{x}) = 2 \int\limits_{\partial D_h} \frac{\partial \Phi}{\partial n(\tilde{x})} (\tilde{x}, \tilde{y}) \psi(\tilde{y}) ds(\tilde{y}) \ , \ \tilde{x} \in \partial D_h \ , \ \psi \in L^2(\partial D_h)$$

(dabei bezeichnet

$$\Phi(x,y) := \frac{\mathrm{e}^{-|x-y|}}{4\pi|x-y|}$$

die Grundlösung für $\kappa = i$): $v \in H^1(D_h)$, $2\frac{\partial v}{\partial n} = (I + \tilde{K}'_h)\varphi \in L^2(\partial D_h)$, $\Delta v - v = 0$ in D_h,

$$\int\limits_{\partial D_h} \overline{u_j} \frac{\partial v}{\partial n} ds = \int\limits_{D_h} (\overline{u_j} v + (\operatorname{grad} v, \operatorname{grad} \overline{u_j})) dx \to 0 \quad j \to \infty \ .$$

Da $(I+\tilde{K}'_h)L^2(\partial D_h) = L^2(\partial D_h)$ ist, folgt $u_j \rightharpoonup 0$, $j \to \infty$, und $\|u_j\|_{L^2(\partial D_h)} \leq C$ für alle j im Widerspruch zu $\|u_j\|_{L^2(\partial D_h)} \geq j$ für alle j. ■

3. Das Neumann-Problem und das Transmissionsrandwert–problem

Beim Neumann-Problem und beim Transmissionsrandwertproblem könnten wir analog zum letzten Kapitel vorgehen, um Eindeutigkeitsresultate zu erzielen. Beim äußeren Neumann-Problem müßten wir dann einen Einfachschichtpotentialansatz über die Parallelfläche ∂D_h machen. Falls κ^2 ein Eigenwert von $-\Delta$ zum inneren Dirichlet-Problem ist, ist die erhaltene Integralgleichung nicht mehr eindeutig lösbar, bzw. überhaupt nicht lösbar. Im letzten Kapitel haben wir die Schwierigkeiten bei inneren Eigenwerten umgangen, indem wir zum Doppelschichtpotential noch ein geeignetes Einfachschichtpotential addiert haben. Beim Neumann-Problem müßten wir analog dazu zum Einfachschichtpotential ein geeignetes Doppelschichtpotential addieren und erhielten dann eine Integralgleichung mit einem stark singulären Operator. Damit wären wir zwar die Schwierigkeiten bei inneren Eigenwerten los, hätten aber neue durch den singulären Operator, der regularisiert werden müßte.

Eine zweite Möglichkeit, eine eindeutig lösbare Integralgleichung zu erhalten, obwohl κ^2 Eigenwert von $-\Delta$ zum inneren Dirichlet-Problem ist, ist der Ansatz von Werner [26]. Er addiert zum Einfachschichtpotential ein Volumenpotential und fordert zusätzlich zur Neumannschen Randbedingung eine weitere Bedingung im Innengebiet, so daß das dann entstehende Integralgleichungssystem eindeutig lösbar ist. Wir werden diese Idee später bei den vektoriellen Randwertproblemen ausnutzen.

Wir verzichten hier darauf, wie im letzten Kapitel das Randwertproblem zuerst auf Parallelflächen zu lösen. Statt dessen bauen wir unsere Beweise im wesentlichen auf der Tatsache auf, daß u in der Nähe des Randes durch einfache Integration aus $\frac{\partial u}{\partial n}$ bestimmt werden kann.

Wie vorher sei $D \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes Gebiet, ∂D aus der Klasse C^2, $D_a := \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ zusammenhängend, $\kappa \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\operatorname{Im}(\kappa) \geq 0$. Sei $u \in C^2(D)$ mit

$$\int\limits_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n}(x + hn(x))g(x)ds(x) \to 0,\ h \nearrow 0,$$

bzw. $u \in C^2(D_a)$ mit

$$\int\limits_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n}(x+hn(x))g(x)ds(x) \to 0,\ h \searrow 0\ , \quad \text{für alle } g \in L^2(\partial D).$$

Dann ist

$$\|\frac{\partial u}{\partial n}(.+hn(.))\|_{L^2(\partial D)} \text{ als Funktion von } h \text{ in } (0,h_0] \text{ beschränkt, da}$$

$\frac{\partial u}{\partial n}(.+hn(.))$ schwach konvergent ist, und

$$\int\limits_{\partial D} |u(x+h_2n(x))-u(x+h_1n(x))|^2\, ds(x) = \int\limits_{\partial D} \left| \int\limits_{h_1}^{h_2} \frac{\partial u}{\partial n}(x+tn(x))dt \right|^2 ds(x)$$

$$\le |h_1-h_2| \int\limits_{\partial D} \int\limits_{h_1}^{h_2} \left| \frac{\partial u}{\partial n}(x+tn(x)) \right|^2 dtds(x) \to 0\ ,\ h_1,h_2 \nearrow 0 \text{ bzw. } h_1,h_2 \searrow 0.$$

Also existiert eine Funktion $f \in L^2(\partial D)$, so daß

$$\int\limits_{\partial D} |u(x+hn(x))-f(x)|^2\, ds(x) \to 0,\ h \nearrow 0 \text{ bzw. } h \searrow 0.$$

Berücksichtigen wir

$$\lim_{h\searrow 0} \int\limits_{\partial D_h} \overline{u}\frac{\partial u}{\partial n}ds = \lim_{h\searrow 0}\Bigg\{ \int\limits_{\partial D} \overline{f(x)}\frac{\partial u}{\partial n}(x+hn(x))ds(x)$$

$$+\int\limits_{\partial D} (\overline{u(x+hn(x))}-\overline{f(x)})\frac{\partial u}{\partial n}(x+hn(x))(1-2h\hat{H}(x)+h^2\hat{K}(x))ds(x)$$

$$+\int\limits_{\partial D} \overline{f(x)}(-2h\hat{H}(x)+h^2\hat{K}(x))\frac{\partial u}{\partial n}(x+hn(x))ds(x)\Bigg\} = 0\ ,$$

so können wir im üblichen Eindeutigkeitsbeweis den Gaußschen Satz auf ∂D_h anwenden, dann h gegen 0 gehen lassen und erhalten

Satz 3.1:

Sei $u \in C^2(D_a)$ mit

$$\int\limits_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n}(x + hn(x))g(x)ds(x) \to 0,\ h \searrow 0\ , \quad \text{für alle } g \in L^2(\partial D)\ ,$$

und

$$\int\limits_{|x|=R} \left| \frac{\partial u}{\partial r}(x) - i\kappa u(x) \right|^2 ds(x) \to 0,\ R \to \infty.$$

Dann gilt: $u(x) = 0$ für alle $x \in D_a$.

Im Fall eines Innengebietes gilt wie beim Dirichlet-Problem

Satz 3.2:

Sei $u \in C^2(D)$ mit $\int\limits_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial n}(x+hn(x))g(x)ds(x) \to 0$, $h \nearrow 0$, für alle $g \in L^2(\partial D)$.

Falls κ^2 kein klassischer Eigenwert von $-\Delta$ zum Neumann-Problem in D ist (d.h. aus $v \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$, $\Delta v + \kappa^2 v = 0$ in D und $\frac{\partial v}{\partial n} = 0$ auf ∂D folgt $v = 0$), gilt: $u(x) = 0$ für alle $x \in D$.

Falls κ^2 ein klassischer Eigenwert von $-\Delta$ zum Neumann-Problem in D ist, gilt: $u \in C^2(D) \cap C^{1,\alpha}(\overline{D})$ und $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ auf ∂D.

Beweis :

Aus dem Darstellungssatz für u auf Parallelflächen und durch Grenzübergang $h \nearrow 0$ erhält man:

$$u(x) = -\int\limits_{\partial D} \frac{\partial \Phi}{\partial n(y)}(x,y)u(y)ds(y)\ ,\ x \in D, \quad \text{wobei } \ u|_{\partial D} \in L^2(\partial D).$$

Mit den L^2-Sprungrelationen folgt $u + Ku = 0$ auf ∂D. Da

$$\mathrm{N}((I+K)|_{L^2(\partial D)}) = \mathrm{N}((I+K)|_{C(\partial D)}) \subset C^{1,\alpha}(\partial D)$$

ist, gilt

$$u(x) = \int\limits_{\partial D} \frac{\partial \Phi}{\partial n(y)}(x,y)\varphi(y)ds(y)\ ,\ x \in D, \quad \text{wobei } \ \varphi \in \mathrm{N}(I+K) \subset C^{1,\alpha}(\partial D).$$

Also ist $u \in C^2(D) \cap C^{1,\alpha}(\overline{D})$ und $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ auf ∂D. Daraus folgt die Behauptung. ■

Im folgenden werden wir $D_i := D$ setzen, um zu betonen, daß D ein Innengebiet im Gegensatz zum Außengebiet D_a ist.

Beim skalaren Transmissionsproblem sind $u_i \in C^2(D_i)$ und $u_a \in C^2(D_a)$ mit folgenden Eigenschaften gesucht:

$$\Delta u_i + \kappa_i^2 u_i = 0 \;\text{ in } D_i,\;\; \Delta u_a + \kappa_a^2 u_a = 0 \;\text{ in } D_a,$$

$$\int\limits_{|x|=R} \left| \frac{\partial u_a}{\partial r}(x) - i\kappa_a u_a(x) \right|^2 ds(x) \to 0,\; R \to \infty,$$

$$\int\limits_{\partial D} \left(\frac{\partial u_i}{\partial n}(x - hn(x)) - \frac{\partial u_a}{\partial n}(x + hn(x)) - \lambda(x) u_a(x + hn(x)) - g(x) \right) p(x) ds(x) \to 0\,,$$

$$\int\limits_{\partial D} \Big(\mu_i(x) u_i(x - hn(x)) - \mu_a(x) u_a(x + hn(x)) - f(x) \Big) p(x) ds(x) \to 0\;,\; h \searrow 0,$$

für alle $p \in L^2(\partial D)$. Dabei sind $\kappa_i, \kappa_a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\mathrm{Im}(\kappa_i) \geq 0$, $\mathrm{Im}(\kappa_a) \geq 0$, $\mu_i, \mu_a \in C^{1,\alpha}(\partial D)$ mit $\mu_i(x) + \mu_a(x) \neq 0$ für alle $x \in \partial D$, und $\lambda \in C^{0,\alpha}(\partial D)$ fest gegeben. Weiter sind $f, g \in L^2(\partial D)$ vorgegeben.

Der Fall, daß μ_i und μ_a Konstanten aus $\mathbb{C}$ sind, ist von Hettlich ([12]), Angell([1]), Kreß und Roach ([16] vgl. auch [7]) untersucht worden. Sie verwenden für den Existenzbeweis des Problems Integralgleichungen, die im Raum der stetigen Funktionen eindeutig lösbar sind (sogar in L^2- Räumen). Aber es muß dort $f \in C^{1,\alpha}(\partial D)$ und $g \in C^{0,\alpha}(\partial D)$ gefordert werden, damit das Problem höchstens eine Lösung besitzt. Der folgende Satz sagt nun, daß für Funktionen u_i, u_a, die das homogene Transmissionsproblem lösen (d.h. $f = 0$, $g = 0$), $u_i \in C^{1,\alpha}(\overline{D_i})$ und $u_a \in C^{1,\alpha}(\overline{D_a})$ gilt. Damit sind dann die klassischen Eindeutigkeitssätze anwendbar.

Satz 3.3:

Seien $u_i \in C^2(D_i)$, $u_a \in C^2(D_a)$ Lösungen des homogenen Transmissionsproblems. Dann gilt: $u_i \in C^2(D_i) \cap C^{1,\alpha}(\overline{D_i})$ und $u_a \in C^2(D_a) \cap C^{1,\alpha}(\overline{D_a})$.

Beweis :

Im ersten Schritt zeigen wir, daß $\lim\limits_{h\searrow 0} u_i(. - hn(.))$ und $\lim\limits_{h\searrow 0} u_a(. + hn(.))$ als schwache Grenzwerte in L^2 existieren. Für $0 < h \leq h_0$, $x \in \partial D$, ist

$$\int_{h_0}^{h} \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial n}(x - tn(x)) - \frac{\partial u_a}{\partial n}(x + tn(x)) \right\} dt$$

$$= - \int_{h_0}^{h} \frac{d}{dt} \left\{ u_i(x - tn(x)) + u_a(x + tn(x)) \right\} dt$$

$$= -u_i(x - hn(x)) - u_a(x + hn(x)) + u_i(x - h_0 n(x)) + u_a(x + h_0 n(x)) \ .$$

Aus

$$\int_{\partial D} \Bigg| u_i(x - h_2 n(x)) + u_a(x + h_2 n(x)) + \lambda(x) \int_{h_0}^{h_2} u_a(x + tn(x)) dt$$

$$- \left\{ u_i(x - h_1 n(x)) + u_a(x + h_1 n(x)) + \lambda(x) \int_{h_0}^{h_1} u_a(x + tn(x)) dt \right\} \Bigg|^2 ds(x) =$$

$$= \int_{\partial D} \left| \int_{h_1}^{h_2} \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial n}(x - tn(x)) - \frac{\partial u_a}{\partial n}(x + tn(x)) - \lambda(x) u_a(x + tn(x)) \right\} dt \right|^2 ds(x) \leq$$

$$\leq |h_1 - h_2| \int_{h_1}^{h_2} \int_{\partial D} \left| \frac{\partial u_i}{\partial n}(x - tn(x)) - \frac{\partial u_a}{\partial n}(x + tn(x)) - \lambda(x) u_a(x + tn(x)) \right|^2 ds(x) dt$$

$$\to 0 \ , h_1, h_2 \searrow 0 \ ,$$

(das Integral über ∂D bleibt beschränkt, da der Integrand schwach konvergent für $t \to 0$ ist) folgt, daß

$$\lim_{h \searrow 0} \left\{ u_i(. - hn(.)) + u_a(. + hn(.)) + \lambda \int_{h_0}^{h} u_a(. + tn(.)) dt \right\}$$

im L^2-Sinn existiert. Mit

$$f_i\colon (0,h_0] \to L^2(\partial D) \quad f_i(h)(x) := u_i(x - hn(x)) \ , \ x \in \partial D,$$

$$f_a\colon (0,h_0] \to L^2(\partial D) \quad f_a(h)(x) := u_a(x + hn(x)) \ , \ x \in \partial D,$$

gelten die Gleichungen

$$\mu_i f_i(h) - \mu_a f_a(h) = l(h) \ ,$$

$$f_i(h) + f_a(h) + \lambda \int_{h_0}^{h} f_a(t)dt = r(h), \ \ h \in (0,h_0],$$

wobei $l(h) \rightharpoonup 0$ und $r(h) \to r(0) \in L^2(\partial D)$ für $h \searrow 0$ konvergieren. Daraus ergibt sich:

$$(\mu_i + \mu_a) f_a(h) + \mu_i \lambda \int_{h_0}^{h} f_a(t)dt = r_2(h), \ \ h \in (0,h_0].$$

Dies ist eine Volterra-Integralgleichung zweiter Art (mit L^2-wertigen Funktionen). Volterra-Integralgleichungen zweiter Art sind eindeutig lösbar. Für die Lösung $f_a(h)$ dieser Integralgleichung existiert $\lim\limits_{h\searrow 0} f_a(h)$ im schwachen Sinn, da $\lim\limits_{h\searrow 0} r_2(h)$ im schwachen Sinn existiert. Dann existiert auch $\lim\limits_{h\searrow 0} f_i(h)$ im schwachen Sinn.

Im zweiten Schritt werden u_i und u_a als Potentiale über ∂D dargestellt.

Aus dem Existenzbeweis für das äußere Dirichletproblem mit dem Ansatz von Brakhage und Werner zusammen mit dem Eindeutigkeitssatz 2.2 ergibt sich

$$u_a(x) = \int_{\partial D} \varphi(y) \left\{ \frac{\partial \Phi_a}{\partial n(y)}(x,y) - i\eta \Phi_a(x,y) \right\} ds(y) \ \ \text{für } x \in D_a,$$

mit einer Dichte $\varphi \in L^2(\partial D)$ ($\eta \neq 0$, $\eta \ \mathrm{Re}(\kappa_a) \geq 0$). Jetzt definieren wir

$$w_1(x) := u_i(x) - \int_{\partial D} \varphi(y) \frac{\partial \Phi_i}{\partial n(y)}(x,y) ds(y)$$

für $x \in D_i$. Dabei ist Φ_a die Grundlösung zur Wellenzahl κ_a und Φ_i die Grundlösung zur Wellenzahl κ_i. Dann gilt $w_1 \in C^2(D_i)$ und

$$\frac{\partial w_1}{\partial n}(. - hn(.)) = \left(\frac{\partial u_i}{\partial n} - \frac{\partial}{\partial n} \int\limits_{\partial D} \varphi(y) \frac{\partial \Phi_i}{\partial n(y)}(., y) ds(y) \right) (. - hn(.))$$

$$= \frac{\partial u_i}{\partial n}(. - hn(.)) - \frac{\partial u_a}{\partial n}(. + hn(.))$$

$$+ \left(\frac{\partial}{\partial n} \int\limits_{\partial D} \varphi(y) \left(\frac{\partial \Phi_a}{\partial n(y)}(., y) - i\eta \Phi_a(., y) \right) ds(y) \right) (. + hn(.))$$

$$- \left(\frac{\partial}{\partial n} \int\limits_{\partial D} \varphi(y) \frac{\partial \Phi_i}{\partial n(y)}(., y) ds(y) \right) (. - hn(.))$$

$$= \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial n}(. - hn(.)) - \frac{\partial u_a}{\partial n}(. + hn(.)) - \lambda u_a(. + hn(.)) \right\}$$

$$+ \int\limits_{\partial D} \varphi(y) \left\{ \frac{\partial}{\partial n(.)} \frac{\partial \Phi_a}{\partial n(y)}(. + hn(.), y) - \frac{\partial}{\partial n(.)} \frac{\partial \Phi_i}{\partial n(y)}(. - hn(.), y) \right\} ds(y)$$

$$+ \int\limits_{\partial D} (-i\eta\varphi(y)) \frac{\partial \Phi_a}{\partial n(.)}(. + hn(.), y) ds(y) + \lambda u_a(. + hn(.)) \rightharpoonup r_3, \ h \searrow 0 \ ,$$

mit $r_3 \in L^2(\partial D)$. Denn der erste Summand konvergiert nach Voraussetzung gegen 0; der zweite Summand konvergiert nach den Sprungrelationen für L^2-Funktionen (vgl. [13]) gegen 0. Ebenso konvergieren die beiden letzten Terme nach den L^2-Sprungrelationen gegen eine L^2-Funktion r_3. Wir zeigen, daß w_1 in D_i als Einfachschichtpotential darstellbar ist. Der Beweis verläuft analog zu dem Beweis von Hilfssatz A3 im Anhang des letzten Kapitels. Sei $\chi_1 \in L^2(\partial D)$ eine Lösung von $(I + K_i')\chi = 2r_3$. Eine solche Lösung muß nach der Fredholm-Theorie existieren, da für
$\hat{\varphi} \in \mathrm{N}(I + K_i) \subset C^{1,\alpha}(\partial D)$ und

$$u(x) := -2 \int\limits_{\partial D} \hat{\varphi}(y) \frac{\partial \Phi_i}{\partial n(y)}(x, y) ds(y) \ , \ x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial D,$$

$$u_+ := u|_{D_a}\ , \qquad u_- := u|_{D_i}\ ,$$

auf ∂D gilt: $u_+ = -(K_i + I)\hat\varphi = 0$ (also $u_+ = 0$ in D_a), $u_- = -(K_i - I)\hat\varphi = 2\hat\varphi$, $\frac{\partial u_-}{\partial n} = \frac{\partial u_+}{\partial n} = 0$ (weil $u_+ = 0$ in D_a),

$$2\int\limits_{\partial D} r_3\hat\varphi ds = \lim_{h\searrow 0}\int\limits_{\partial D_{-h}} \frac{\partial w_1}{\partial n} u ds = \lim_{h\searrow 0}\int\limits_{\partial D_{-h}} \frac{\partial u}{\partial n} w_1 ds = 0,$$

d.h. $r_3 \in \mathrm{N}(I + K_i)^-$ (bzgl. des üblichen Dualsystems).

Für

$$w_2(x) := w_1(x) - \int\limits_{\partial D} \chi_1(y)\Phi_i(x,y)ds(y)\ ,\ x \in D_i,$$

gilt: $w_2 \in C^2(D_i)$, $\Delta w_2 + \kappa_i^2 w_2 = 0$ in D_i und $\frac{\partial w_2}{\partial n}(. - hn(.)) \rightharpoonup 0$, $h \searrow 0$. Daher ist

$$w_2(x) = \int\limits_{\partial D} \chi_2(y)\Phi_i(x,y)ds(y)\ ,\ x \in D_i,$$

denn:

$$U_2 := \left\{ w \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D}) \colon \Delta w + \kappa_i^2 w = 0, \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \text{ auf } \partial D \right\},$$

$$U_1 := \left\{ \int\limits_{\partial D} \hat\varphi(y)\Phi_i(.,y)ds(y) \colon \hat\varphi \in \mathrm{N}(I + K_i') \right\} \subset U_2,$$

$\dim(U_1) = \dim(\mathrm{N}(I + K_i')) = \dim(\mathrm{N}(I + K_i)) = \dim(U_2)$ (also $U_1 = U_2$).

$$\int\limits_{\partial D} \chi_2(y)\Phi_i(x,y)ds(y) = w_2(x) =$$

$$= u_i(x) - \int\limits_{\partial D} \frac{\partial \Phi_i}{\partial n(y)}(x,y)\varphi(y)ds(y) - \int\limits_{\partial D} \chi_1(y)\Phi_i(x,y)ds(y)\ ,\ x \in D_i,$$

liefert

$$u_i(x) = \int\limits_{\partial D} \frac{\partial \Phi_i}{\partial n(y)}(x,y)\varphi(y)ds(y) - \int\limits_{\partial D} \psi(y)\Phi_i(x,y)ds(y)\ ,\ x \in D_i,$$

$\psi \in L^2(\partial D)$. Mit den homogenen Randbedingungen bekommen wir folgendes Gleichungssystem für φ und ψ:

$$\begin{pmatrix} (\mu_i + \mu_a)I & 0 \\ (i\eta + \lambda)I & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} \mu_a K_a - \mu_i K_i - i\eta\mu_a S_a & \mu_i S_i \\ T_a - T_i - i\eta K_a' + \lambda K_a - i\eta\lambda S_a & K_i' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da der Operator seinen Nullraum nicht ändert, wenn er von $C(\partial D) \times C(\partial D)$ auf $L^2(\partial D) \times L^2(\partial D)$ erweitert wird (vgl. ähnliche Argumentation im Anhang zu Kapitel 2 im Anschluß an Hilfssatz A2), folgt durch Hochschaukeln der Regularität mit den Abbildungseigenschaften der Operatoren K_a, K_i, S_a, S_i, K_a', K_i' und $T_a - T_i$: $\varphi \in C^{1,\alpha}(\partial D)$ und $\psi \in C^{0,\alpha}(\partial D)$. Daraus ergibt sich die Behauptung. ■

Bemerkungen: Mit analogen Argumenten lassen sich auch allgemeinere Transmissions-Randbedingungen behandeln:

$$a_i \frac{\partial u_i}{\partial n} - a_a \frac{\partial u_a}{\partial n} - \lambda_a u_a - \lambda_i u_i = g,$$

$$\hat{a}_i \frac{\partial u_i}{\partial n} - \hat{a}_a \frac{\partial u_a}{\partial n} - \hat{\lambda}_a u_a - \hat{\lambda}_i u_i = f,$$

wenn an die Koeffizienten noch einige Bedingungen gestellt werden.

Beim Impedanz-Randwertproblem wird $\dfrac{\partial u}{\partial n} - \lambda u = g$ im L^2-Sinn gefordert.

Dabei sind $\lambda \in C(\partial D)$ und $g \in L^2(\partial D)$ vorgegeben. Der obige Beweis liefert dann die Existenz von u und $\frac{\partial u}{\partial n}$ im L^2-Sinn auf ∂D. Daher ist der übliche Eindeutigkeitssatz anwendbar (vgl. [7]).

Der erste Schritt des Beweises von Satz 3.3 kann nicht auf das Transmissionsrandwertproblem bei der vektoriellen Helmholtz-Gleichung übertragen werden. Daher scheitert dieser Beweis bei der vektoriellen Helmholtz-Gleichung.

4. Eindeutigkeitssätze bei vektoriellen Randwertproblemen für die Helmholtz-Gleichung

In diesem Kapitel wollen wir die Eindeutigkeitssätze und die Regularitätsresultate für Eigenlösungen aus den ersten Kapiteln auf Randwertprobleme bei der vektoriellen Helmholtz-Gleichung übertragen. Da die Grundideen schon im zweiten Kapitel ausführlich dargestellt worden sind, halten wir hier die Beweise möglichst kurz. Zuerst vereinbaren wir einige Notationen. E und H bezeichnen vektorwertige Abbildungen (etwa $E\colon D_a \to \mathbb{C}^3$). $T^{0,\alpha}(\partial D_h)$ ist der Raum der hölderstetigen Tangentialfelder an ∂D_h mit Hölderexponent $0 < \alpha < 1$ und Norm $\|.\|_{T^{0,\alpha}(\partial D_h)}$. $T_d^{0,\alpha}(\partial D_h)$ ist der Raum der hölderstetigen Tangentialfelder an ∂D_h, die eine hölderstetige Flächendivergenz besitzen (mit Hölderexponent $0 < \alpha < 1$), mit der Norm

$$\|a\|_{T_d^{0,\alpha}(\partial D_h)} := \|a\|_{T^{0,\alpha}(\partial D_h)} + \|\mathrm{Div}\, a\|_{C^{0,\alpha}(\partial D_h)} \ .$$

Schließlich sei $T^2(\partial D_h)$ die Vervollständigung von $T^{0,\alpha}(\partial D_h)$ bzgl. der üblichen L^2-Norm $\|a\|^2_{T^2(\partial D_h)} := \int_{\partial D_h} |a|^2 ds$.

Als erstes behandeln wir die Eindeutigkeit des äußeren elektrischen Randwertproblems für die vektorielle Helmholtz-Gleichung. Wir merken an, daß wir damit auch die Eindeutigkeit des äußeren Randwertproblems für die Maxwell-Gleichungen beweisen. Denn für eine Lösung (E, H) der Maxwell-Gleichungen $\mathrm{rot}\, E - i\kappa H = 0$, $\mathrm{rot}\, H + i\kappa E = 0$ in D_a gilt $\mathrm{div}\, E = 0$ in D_a (Anwenden von div auf die zweite Gleichung) und $\Delta E + \kappa^2 E = 0$ in D_a (Anwenden von rot auf die erste Gleichung; $\mathrm{rot}\, H = -i\kappa E$ einsetzen).

Satz 4.1:

$E \in C^2(D_a)$ erfülle

$$\Delta E + \kappa^2 E = 0 \ \text{ in } D_a, \ \ \kappa \in \mathbb{C}, \kappa \neq 0, \, \mathrm{Im}\, \kappa \geq 0,$$

$$\int\limits_{|x|=R} \left| [\mathrm{rot} E(x), \frac{x}{|x|}] + \frac{x}{|x|} \mathrm{div} E(x) - i\kappa E(x) \right|^2 ds(x) \to 0, \quad R \to \infty \ ,$$

und

$$\int\limits_{\partial D} \{([n(x), E(x+hn(x))], c(x)) + \operatorname{div} E(x+hn(x))\gamma(x)\}\, ds(x) \to 0,\ \ h \searrow 0\ ,$$

für alle $c \in T^2(\partial D)$, $\gamma \in L^2(\partial D)$.

Dann gilt: $E(x) = 0$ für alle $x \in D_a$.

Beweis :

Es sei B eine offene Kugel im $\mathbb{R}^3$ mit $\overline{B} \subset D$ und

$$\hat{C}_0^{0,\alpha}(B) := \{F\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}^3\ :\ F \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^3), F(x) = 0 \text{ für } x \notin B\}\ .$$

Wie im zweiten Kapitel beweisen wir im ersten Schritt mit Hilfe eines Ansatzes von Werner [27], daß E in $D_{h,a}$ als

$$E(x) = \operatorname{rot} \int\limits_{\partial D_h} \Phi(x,\tilde{y})\tilde{a}_h(\tilde{y})ds(\tilde{y}) - \int\limits_{\partial D_h} \Phi(x,\tilde{y})\tilde{\lambda}_h(\tilde{y})n(\tilde{y})ds(\tilde{y})$$

$$- \int\limits_{\mathbb{R}^3} \Phi(x,y)b_h(y)dy\ ,\ \ x \in D_{h,a}\ , \tag{4.1}$$

dargestellt werden kann, wenn $\tilde{a}_h \in T_d^{0,\alpha}(\partial D_h)$, $\tilde{\lambda}_h \in C^{0,\alpha}(\partial D_h)$, $b_h \in \hat{C}_0^{0,\alpha}(B)$ das folgende Integralgleichungssystem lösen:

$$a(\tilde{x}) + 2\int\limits_{\partial D_h} [n(\tilde{x}), \operatorname{rot}_{\tilde{x}}\{\Phi(\tilde{x},\tilde{y})a(\tilde{y})\}]ds(\tilde{y})$$

$$-2\int\limits_{\partial D_h} [n(\tilde{x}), n(\tilde{y})]\Phi(\tilde{x},\tilde{y})\lambda(\tilde{y})ds(\tilde{y})$$

$$-2\int\limits_{\mathbb{R}^3} \Phi(\tilde{x},y)[n(\tilde{x}), b(y)]dy = 2\,[n(\tilde{x}), E(\tilde{x})]\ ,\ \ \tilde{x} \in \partial D_h\ , \tag{4.2}$$

$$\lambda(\tilde{x}) + 2\int\limits_{\partial D_h} \frac{\partial \Phi}{\partial n(\tilde{y})}(\tilde{x},\tilde{y})\lambda(\tilde{y})ds(\tilde{y})$$

$$-2 \int\limits_{\mathbb{R}^3} (\operatorname{grad}_{\tilde{x}} \Phi(\tilde{x}, y), b(y)) dy = 2\, (\operatorname{div} E)(\tilde{x}) \ , \ \tilde{x} \in \partial D_h \ , \tag{4.3}$$

$$b(x) + i \operatorname{sign}(\operatorname{Re}(\kappa))\, \eta(x) \Bigg\{ \int\limits_{\partial D_h} \operatorname{rot}_x \{\Phi(x, \tilde{y}) a(\tilde{y})\} ds(\tilde{y})$$

$$- \int\limits_{\partial D_h} \Phi(x, \tilde{y}) \lambda(\tilde{y}) n(\tilde{y}) ds(\tilde{y}) - \int\limits_{\mathbb{R}^3} \Phi(x, y) b(y) dy \Bigg\} = 0 \ , \ x \in B \ . \tag{4.4}$$

Dabei ist $\eta \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^3)$ eine fest gewählte Funktion mit $\eta(x) > 0$ für $x \in B$, $\eta(x) = 0$ für $x \notin B$.

Wir wollen zuerst annehmen, daß $\tilde{a}_h \in T_d^{0,\alpha}(\partial D_h)$, $\tilde{\lambda}_h \in C^{0,\alpha}(\partial D_h)$, $b_h \in \hat{C}_0^{0,\alpha}(B)$ die Integralgleichungen (4.2), (4.3), (4.4) lösen. Mit diesen Dichten definieren wir ein Vektorfeld $\tilde{E}(x)$, $x \in D_{h,a}$, als die rechte Seite von (4.1). Aus den Regularitätseigenschaften von Flächen- und Volumenpotentialen folgt: $\tilde{E}$, $\operatorname{rot} \tilde{E}$, $\operatorname{div} \tilde{E} \in C(\overline{D_{h,a}})$. Außerdem genügt $\tilde{E}$ der Ausstrahlungsbedingung. Aus den Sprungrelationen und den Gleichungen (4.2), (4.3) erhalten wir $[n, E] = [n, \tilde{E}]$ und $\operatorname{div} E = \operatorname{div} \tilde{E}$ auf ∂D_h. Dann folgt aus dem klassischen Eindeutigkeitssatz $E(x) = \tilde{E}(x)$ für alle $x \in D_{h,a}$.

Als nächstes zeigen wir, daß die Gleichungen (4.2), (4.3), (4.4) eindeutig lösbar sind. Dazu fassen wir die drei Gleichungen in einer Operatorgleichung

$$(a, \lambda, b)^T + \tilde{L}_h (a, \lambda, b)^T = (2\, [n, E]|_{\partial D_h}, 2 \operatorname{div} E|_{\partial D_h}, 0)^T \tag{4.5}$$

zusammen, die im Banachraum $X_1 := T_d^{0,\alpha}(\partial D_h) \times C^{0,\alpha}(\partial D_h) \times \hat{C}_0^{0,\alpha}(B)$ mit der Norm

$$\|(a, \lambda, b)^T\|_1 := \|a\|_{T^{0,\alpha}(\partial D_h)} + \|\operatorname{Div} a\|_{C^{0,\alpha}(\partial D_h)} + \|\lambda\|_{C^{0,\alpha}(\partial D_h)} + \|b\|_{\hat{C}_0^{0,\alpha}(B)}$$

betrachtet wird.

Der Operator $\tilde{L}_h$ besteht aus den Integraloperatoren $\tilde{L}_{hjk}$ $(j, k = 1, 2, 3)$, die aus den Gleichungen (4.2), (4.3), (4.4) gewonnen werden. Zum Beispiel ist

$$(\tilde{L}_{h11} a)(\tilde{x}) = 2 \int\limits_{\partial D_h} [n(\tilde{x}), \operatorname{rot}_{\tilde{x}} \{\Phi(\tilde{x}, \tilde{y}) a(\tilde{y})\}] ds(\tilde{y}) \ , \ \tilde{x} \in \partial D_h \ ,$$

$$(\tilde{L}_{h12}\lambda)(\tilde{x}) = -2 \int\limits_{\partial D_h} [n(\tilde{x}), n(\tilde{y})]\Phi(\tilde{x}, \tilde{y})\lambda(\tilde{y})ds(\tilde{y}) \ , \ \tilde{x} \in \partial D_h \ ,$$

$$(\tilde{L}_{h21}a)(\tilde{x}) = 0 \ , \ \tilde{x} \in \partial D_h \ ,$$

$$(\tilde{L}_{h33}b)(x) = -i \operatorname{sign}(\operatorname{Re}(\kappa))\, \eta(x) \int\limits_{\mathbb{R}^3} \Phi(x, y)b(y)dy \ , \ x \in B \ .$$

Die Operatoren $\tilde{L}_{hjk}$ $(j, k = 1, 2, 3)$ sind kompakt ([7], [14]). Daher ist $\tilde{L}_h$ ein kompakter Operator in X_1, und wir können die Riesz-Theorie benutzen.

Sei $(\tilde{a}_h, \tilde{\lambda}_h, b_h)^T \in X_1$ eine Lösung der homogenen Gleichung (4.5). Wir definieren $\tilde{E}(x)$, $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial D_h$, als die rechte Seite von (4.1). Dann erhalten wir wie oben $\tilde{E}(x) = 0$ für $x \in D_{h,a}$, weil $[n, \tilde{E}] = 0$, $\operatorname{div} \tilde{E} = 0$ auf ∂D_h gilt. Mit den Sprungrelationen folgt $[n, \operatorname{rot} \tilde{E}_-] = 0$, $(n, \tilde{E}_-) = 0$ auf ∂D_h. Der Index "–" bedeutet, daß wir die Randwerte bzgl. D_h betrachten ($\tilde{E}_-(x) := \tilde{E}(x)$, $x \in D_h$). Außerdem gilt $\tilde{E}_- \in C^2(D_h)$, $\tilde{E}_-$, rot $\tilde{E}_-$, $\operatorname{div} \tilde{E}_- \in C(\overline{D_h})$, und aus der dritten Gleichung von (4.5) können wir

$$\Delta \tilde{E}_- + \kappa^2 \tilde{E}_- + i \operatorname{sign}(\operatorname{Re}(\kappa))\, \eta \tilde{E}_- = 0 \quad \text{in } B \tag{4.6}$$

folgern. Diese Gleichung gilt auch in $D_h \setminus \overline{B}$, da $\eta(x) = 0$ für $x \in D_h \setminus \overline{B}$ ist. Also gilt (4.6) in ganz D_h, weil $\tilde{E}_- \in C^2(D_h)$ ist. Aus dem Greenschen Satz erhalten wir damit

$$0 = \int\limits_{\partial D_h} \{([n, \overline{\tilde{E}_-}], \operatorname{rot} \tilde{E}_-) + (n, \overline{\tilde{E}_-}) \operatorname{div} \tilde{E}_-\} ds$$

$$= \int\limits_{D_h} \{|\operatorname{rot} \tilde{E}_-|^2 + |\operatorname{div} \tilde{E}_-|^2 + (\Delta \tilde{E}_-, \overline{\tilde{E}_-})\} dx$$

$$= \int\limits_{D_h} \{|\operatorname{rot} \tilde{E}|^2 + |\operatorname{div} \tilde{E}|^2 - (\kappa^2 + i \operatorname{sign}(\operatorname{Re}(\kappa))\, \eta)|\tilde{E}|^2\} dx$$

und

$$0 = \operatorname{Im} \left\{ \overline{\kappa} \int\limits_{D_h} \{|\operatorname{rot} \tilde{E}|^2 + |\operatorname{div} \tilde{E}|^2 - (\kappa^2 + i \operatorname{sign}(\operatorname{Re}(\kappa))\, \eta)|\tilde{E}|^2\} dx \right\}$$

$$= -\mathrm{Im}(\kappa) \int\limits_{D_h} \{|\mathrm{rot}\,\tilde{E}|^2 + |\mathrm{div}\,\tilde{E}|^2 + |\kappa|^2|\tilde{E}|^2\}dx - |\mathrm{Re}(\kappa)| \int\limits_{B} \eta|\tilde{E}|^2 dx \ .$$

Falls $\mathrm{Im}(\kappa) > 0$ ist, folgt sofort $\tilde{E}(x) = 0$ für alle $x \in D_h$. Wenn $\mathrm{Im}(\kappa) = 0$ ist, wissen wir, daß $|\mathrm{Re}(\kappa)| > 0$ ist ($\kappa \neq 0$!) und $\int_B \eta|\tilde{E}|^2 dx = 0$ gilt. Da $\eta(x) > 0$ für alle $x \in B$ ist, folgt $\tilde{E}(x) = 0$ für alle $x \in B$. Daher erhalten wir mit (4.6) $\Delta\tilde{E} + \kappa^2\tilde{E} = 0$ in D_h. Dann ist $\tilde{E}$ analytisch in D_h ([7]) und verschwindet in B. Also gilt $\tilde{E}(x) = 0$ für alle $x \in D_h$. Nun liefern die Sprungrelationen: $\tilde{a}_h = [n, \tilde{E}_+] - [n, \tilde{E}_-] = 0$, $\tilde{\lambda}_h = \mathrm{div}\,\tilde{E}_+ - \mathrm{div}\,\tilde{E}_- = 0$ auf ∂D_h ($\tilde{E}_+(x) := \tilde{E}(x)$, $x \in D_{h,a}$). Schließlich ist $b_h(x) = \Delta\tilde{E}(x) + \kappa^2\tilde{E}(x) = 0$ für alle $x \in B$. Also ist nach der Riesz-Theorie (4.5) eindeutig lösbar, und $E(x)$ ist wie in (4.1) darstellbar.

Im zweiten Schritt beweisen wir die Existenz einer Folge $h_k > 0$, $k \in I\!N$, welche $h_k \to 0$ für $k \to \infty$,

$$\|b_{h_k} - b_0\|_{\hat{C}_0^{0,\beta}(B)} \to 0 \quad \text{und}$$

$$\int\limits_{\partial D} \{(\tilde{a}_{h_k}(z + h_k n(z)), c(z)) + \tilde{\lambda}_{h_k}(z + h_k n(z))\gamma(z)\}ds(z) \to 0 \ , \ k \to \infty \ , \quad (4.7)$$

für alle $c \in T^2(\partial D)$, $\gamma \in L^2(\partial D)$ erfüllt, wobei $0 < \beta < \alpha$ und $b_0 \in \hat{C}_0^{0,\beta}(B)$ ist.

Wenn wir zuerst einmal annehmen, daß (4.7) gilt, erhalten wir für ein festes $x \in D_a$

$$E(x) = \mathrm{rot} \int\limits_{\partial D} \Phi(x, y + h_k n(y))(1 - 2h_k\hat{H}(y) + h_k^2\hat{K}(y))\tilde{a}_{h_k}(y + h_k n(y))ds(y)$$

$$- \int\limits_{\partial D} \Phi(x, y + h_k n(y))n(y)(1 - 2h_k\hat{H}(y) + h_k^2\hat{K}(y))\tilde{\lambda}_{h_k}(y + h_k n(y))ds(y)$$

$$- \int\limits_{B} \Phi(x,y)b_{h_k}(y)dy \to - \int\limits_{B} \Phi(x,y)b_0(y)dy \ , \ k \to \infty \ .$$

Dann ist $E \in C^2(I\!R^3)$ und

$$\int\limits_{\partial D} \{([n, E], \mathrm{rot}\,\overline{E}) + (n, E)\mathrm{div}\,\overline{E}\}ds$$

$$= \lim_{h\to 0} \int_{\partial D} \{([n,E](z+hn(z)), \operatorname{rot} \overline{E}(z)) + (n,E)(z) \operatorname{div} \overline{E}(z+hn(z))\} ds(z)$$

$$= 0 \ .$$

Aus dem klassischen Eindeutigkeitssatz folgt jetzt $E(x) = 0$ für alle $x \in D_a$.

Wir wenden wieder ein Störungsargument an, um (4.7) zu beweisen. Dazu beziehen wir die Elemente $(\tilde{a}_h, \tilde{\lambda}_h, b_h)^T$ für verschiedene h auf den Banachraum $X_2 := T^2(\partial D) \times L^2(\partial D) \times \hat{C}_0^{0,\alpha}(B)$ mit der Norm

$$\|(a,\lambda,b)^T\|_2^2 := \|a\|_{T^2(\partial D)}^2 + \|\lambda\|_{L^2(\partial D)}^2 + \|b\|_{\hat{C}_0^{0,\alpha}(B)}^2 \ .$$

Den Operator $\alpha_h \colon X_2 \to T^2(\partial D_h) \times L^2(\partial D_h) \times \hat{C}_0^{0,\alpha}(B)$, der es uns ermöglicht, Dichten auf ∂D als Dichten auf ∂D_h aufzufassen (und umgekehrt), definieren wir folgendermaßen:

$$\alpha_h(\tilde{a}_h, \tilde{\lambda}_h, b_h)^T = (\alpha_{h1}\tilde{a}_h, \alpha_{h2}\tilde{\lambda}_h, b_h)^T,$$

$$\alpha_{h1} \colon T^2(\partial D) \to T^2(\partial D_h) \qquad (\alpha_{h1}a)(z+hn(z)) := a(z) \ , \ z \in \partial D \ ,$$

$$\alpha_{h2} \colon L^2(\partial D) \to L^2(\partial D_h) \qquad (\alpha_{h2}\lambda)(z+hn(z)) := \lambda(z) \ , \ z \in \partial D \ .$$

α_h ist ein Homöomorphismus für $0 \le h \le h_0$ ($\partial D_0 := \partial D$).

Damit transformieren wir die Gleichung (4.5) in eine äquivalente Gleichung in X_2. Wir definieren $(a_h, \lambda_h, b_h)^T := \alpha_h^{-1}(\tilde{a}_h, \tilde{\lambda}_h, b_h)^T \in X_2$ und $L_h := \alpha_h^{-1}\tilde{L}_h\alpha_h$. $(a_h, \lambda_h, b_h)^T$ ist die Lösung der Gleichung

$$(I + L_h)(a_h, \lambda_h, b_h)^T = \alpha_h^{-1}(2\,[n,E]|_{\partial D_h}, 2 \operatorname{div} E|_{\partial D_h}, 0)^T \quad \text{in } X_2. \tag{4.8}$$

Aus dem Anhang zu diesem Kapitel 2 wissen wir, daß L_h wohldefiniert als Operator in X_2 ist und daß $\|L_h - L_0\|_2 \to 0$, $h \to 0$, $h > 0$, gilt. Weiterhin ist $(I + L_0) \colon X_2 \to X_2$ invertierbar und $\|(I + L_0)^{-1}\|_2 \le C_1$. Aus dem üblichen Störungsargument können wir die Existenz von $(I+L_h)^{-1}$, $\|(I+L_h)^{-1}\|_2 \le C_2$ für $0 \le h \le h_1 \le h_0$ (h_1 hinreichend klein) und $\|(I+L_h)^{-1} - (I+L_0)^{-1}\|_2 \to 0$, $h \to 0$, $h > 0$, folgern. Daraus erhalten wir:

$$\|b_h\|_{\hat{C}_0^{0,\alpha}(B)}^2 \le \|(a_h, \lambda_h, b_h)^T\|_2^2 \le C_2^2 \|\alpha_h^{-1}(2\,[n,E]|_{\partial D_h}, 2 \operatorname{div} E|_{\partial D_h}, 0)^T\|_2^2$$

$$= 4C_2^2 \left\{ \int\limits_{\partial D} \{|[n(z), E(z + hn(z))]|^2 + |\operatorname{div} E(z + hn(z))|^2\} ds(z) \right\} \leq C_3$$

für alle $h > 0$, weil $([n, E](. + hn(.)), \operatorname{div} E(. + hn(.)))^T \in T^2(\partial D) \times L^2(\partial D)$ schwach konvergent und deswegen beschränkt ist.

Da die Einbettung von $\hat{C}_0^{0,\alpha}(B)$ in $\hat{C}_0^{0,\beta}(B)$ für $0 < \beta < \alpha$ kompakt ist([7]), können wir eine Folge h_k, $k \in I\!N$, so auswählen, daß $h_k \to 0$ $(k \to \infty)$, $h_k > 0$ für alle $k \in I\!N$ und $b_{h_k} \to b_0 \in \hat{C}_0^{0,\beta}(B)$ bzgl. der $\hat{C}_0^{0,\beta}$-Norm gilt.

Es sei $P: X_2 \to T^2(\partial D) \times L^2(\partial D)$ die Projektion $P(a, \lambda, b)^T := (a, \lambda)^T$ und $R_h: T^2(\partial D) \times L^2(\partial D) \to T^2(\partial D) \times L^2(\partial D)$ der Operator $R_h(a, \lambda)^T := P(I + L_h)^{-1}(a, \lambda, 0)^T$ für $0 \leq h \leq h_1$. R_h ist stetig und $\|R_h - R_0\| \to 0$, $h \to 0$, bzgl. der Operatornorm in $T^2(\partial D) \times L^2(\partial D)$. Dann konvergiert

$$(a_h, \lambda_h)^T = (R_h - R_0)(2\,[n, E](. + hn(.)), 2 \operatorname{div} E(. + hn(.)))^T$$
$$+ R_0(2\,[n, E](. + hn(.)), 2 \operatorname{div} E(. + hn(.)))^T$$

schwach gegen 0 für $h \to 0$. Damit ist der zweite Teil von (4.7) bewiesen. ■

Als nächstes beweisen wir den entsprechenden Satz für das äußere magnetische Randwertproblem bei der vektoriellen Helmholtz-Gleichung.

Satz 4.2:

$H \in C^2(D_a)$ erfülle

$$\Delta H + \kappa^2 H = 0 \quad \text{in } D_a,\ \kappa \in \mathbb{C},\ \kappa \neq 0,\ \operatorname{Im} \kappa \geq 0,$$

$$\int\limits_{|x|=R} \left| [\operatorname{rot} H(x), \frac{x}{|x|}] + \frac{x}{|x|} \operatorname{div} H(x) - i\kappa H(x) \right|^2 ds(x) \to 0, \quad R \to \infty\ ,$$

und

$$\int\limits_{\partial D} \Bigl\{ ([n(x), [n(x), \operatorname{rot} H(x + hn(x))]], c(x))$$
$$+ (n(x), H(x + hn(x)))\gamma(x) \Bigr\} ds(x) \to 0,\ h \searrow 0,$$

für alle $c \in T^2(\partial D)$, $\gamma \in L^2(\partial D)$.

Dann gilt: $H(x) = 0$ für alle $x \in D_a$.

Beweis :

Mit B bezeichnen wir wie im letzten Satz eine Kugel, deren Abschluß noch in D liegt.

Im ersten Schritt beweisen wir, daß H in $D_{h,a}$ als

$$H(x) = \int\limits_{\partial D_h} \Phi(x,\tilde{y})[n,\tilde{a}_h](\tilde{y})ds(\tilde{y}) + \operatorname{grad} \int\limits_{\partial D_h} \Phi(x,\tilde{y})\tilde{\lambda}_h(\tilde{y})ds(\tilde{y})$$

$$- \int\limits_{I\!R^3} \Phi(x,y)b_h(y)dy \ , \quad x \in D_{h,a} \ , \tag{4.9}$$

dargestellt werden kann, wobei $\tilde{a}_h \in T^{0,\alpha}(\partial D_h)$, $\tilde{\lambda}_h \in C^{0,\alpha}(\partial D_h)$, $b_h \in \hat{C}_0^{0,\alpha}(B)$ das folgende Integralgleichungssystem lösen:

$$a(\tilde{x}) - 2 \int\limits_{\partial D_h} [n(\tilde{x}),[n(\tilde{x}),\operatorname{rot}_{\tilde{x}}\{\Phi(\tilde{x},\tilde{y})[n,a](\tilde{y})\}]]ds(\tilde{y})$$

$$+2 \int\limits_{I\!R^3} [n(\tilde{x}),[n(\tilde{x}),\operatorname{rot}_{\tilde{x}}\{\Phi(\tilde{x},y)b(y)\}]]dy = -2\,[n,[n,\operatorname{rot}H]](\tilde{x}) \ , \ \tilde{x} \in \partial D_h \ , \tag{4.10}$$

$$\lambda(\tilde{x}) - 2 \int\limits_{\partial D_h} (n(\tilde{x}),\Phi(\tilde{x},\tilde{y})[n,a](\tilde{y}))ds(\tilde{y}) - 2 \int\limits_{\partial D_h} \frac{\partial \Phi}{\partial n(\tilde{x})}(\tilde{x},\tilde{y})\lambda(\tilde{y})ds(\tilde{y})$$

$$+2 \int\limits_{I\!R^3} (n(\tilde{x}),\Phi(\tilde{x},y),b(y))dy = -2\,(n,H)(\tilde{x}) \ , \ \tilde{x} \in \partial D_h \ , \tag{4.11}$$

$$b(x) + i\,\operatorname{sign}(\operatorname{Re}(\kappa))\,\eta(x)\Big\{ \int\limits_{\partial D_h} \Phi(x,\tilde{y})[n,a](\tilde{y})ds(\tilde{y})$$

$$+\operatorname{grad} \int\limits_{\partial D_h} \Phi(x,\tilde{y})\lambda(\tilde{y})ds(\tilde{y}) - \int\limits_{I\!R^3} \Phi(x,y)b(y)dy \Big\} = 0 \ , \ x \in B \ . \tag{4.12}$$

$\eta \in C^{0,\alpha}(I\!R^3)$ ist wieder fest gewählt und erfüllt $\eta(x) > 0$ für $x \in B$, $\eta(x) = 0$ für $x \notin B$.

Nehmen wir zuerst an, daß $\tilde{a}_h \in T_d^{0,\alpha}(\partial D_h)$, $\tilde{\lambda}_h \in C^{0,\alpha}(\partial D_h)$, $b_h \in \hat{C}_0^{0,\alpha}(B)$ die Integralgleichungen (4.10), (4.11), (4.12) lösen, so definieren wir ein Vektorfeld $\tilde{H}(x)$, $x \in D_{h,a}$, als die rechte Seite von (4.9) und erhalten mit den

Regularitätseigenschaften, den Sprungrelationen der Potentiale und aus dem klassischen Eindeutigkeitssatz, daß $\tilde{H}$ und H in $D_{h,a}$ übereinstimmen.

Um mit der Riesz-Theorie die Existenz einer Lösung $(\tilde{a}_h, \tilde{\lambda}_h, b_h)$ der Gleichungen (4.10), (4.11), (4.12) nachzuweisen, betrachten wir eine Lösung $(\tilde{a}_h, \tilde{\lambda}_h, b_h)$ der homogenen Gleichungen (4.10), (4.11), (4.12). Definieren wir $\tilde{H}_+(x)$ für $x \in D_{h,a}$ und $\tilde{H}_-(x)$ für $x \in D_h$ als die rechte Seite von (4.9), so erhalten wir aus dem klassischen Eindeutigkeitssatz $\tilde{H}_+(x) = 0$ für alle $x \in D_{h,a}$. Mit den Sprungrelationen können wir $[n, \tilde{H}_-] = 0$ und $\operatorname{div} \tilde{H}_- = 0$ auf ∂D_h folgern. Gleichung (4.12) liefert uns wie im letzten Satz

$$\Delta \tilde{H}_- + \kappa^2 \tilde{H}_- + i \operatorname{sign}(\operatorname{Re}(\kappa))\, \eta \tilde{H}_- = 0 \quad \text{in } D_h,$$

woraus wir wie im Anschluß an Gleichung (4.6) schließen können, daß $\tilde{H}_-(x) = 0$ für alle $x \in D_h$ gilt. Damit ist

$$\tilde{a}_h = [n, [n, \operatorname{rot} \tilde{H}_-]] - [n, [n, \operatorname{rot} \tilde{H}_+]] = 0 \ , \ \tilde{\lambda}_h = (n, \tilde{H}_-) - (n, \tilde{H}_+) = 0$$

auf ∂D_h und $b_h = \Delta \tilde{H}_- + \kappa^2 \tilde{H}_- = 0$ in B. Fassen wir die drei Gleichungen in einer Operatorgleichung

$$(a, \lambda, b)^T + \tilde{L}_h (a, \lambda, b)^T = (-2\,[n, [n, \operatorname{rot} H]]|_{\partial D_h}, -2\,(n, H)|_{\partial D_h}, 0)^T \qquad (4.13)$$

zusammen, die im Banachraum $X_1 := T^{0,\alpha}(\partial D_h) \times C^{0,\alpha}(\partial D_h) \times \hat{C}_0^{0,\alpha}(B)$ mit der Norm

$$\|(a, \lambda, b)^T\|_1 := \|a\|_{T^{0,\alpha}(\partial D_h)} + \|\lambda\|_{C^{0,\alpha}(\partial D_h)} + \|b\|_{\hat{C}_0^{0,\alpha}(B)}$$

betrachtet wird, so ist der Operator $\tilde{L}_h$ kompakt (dieser Operator $\tilde{L}_h$ ist von dem Operator $\tilde{L}_h$ im Beweis von Satz 4.1 verschieden). Nach der Riesz-Theorie ist das Integralgleichungssystem (4.10), (4.11), (4.12) eindeutig lösbar.

Im zweiten Schritt zeigen wir, daß ein $b_0 \in \hat{C}_0^{0,\beta}(B)$ $(0 < \beta < \alpha)$ und eine Folge $h_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$, existieren, für welche $h_k \to 0$, $k \to \infty$,

$$\|b_{h_k} - b_0\|_{\hat{C}_0^{0,\beta}(B)} \to 0 \ , \ k \to \infty \ , \text{ gilt und welche}$$

$$\int_{\partial D} \{(\tilde{a}_{h_k}(z + h_k n(z)), c(z)) + \tilde{\lambda}_{h_k}(z + h_k n(z)) \gamma(z)\} ds(z) \to 0 \ , \ k \to \infty \ , \qquad (4.14)$$

für alle $c \in T^2(\partial D)$, $\gamma \in L^2(\partial D)$ erfüllt.

Analog zum Beweis von Satz 4.1 können wir dann für festes $x \in D_a$

$$H(x) = \int\limits_{\partial D} \Phi(x, y + h_k n(y))[n, \tilde{a}_{h_k}](y + h_k n(y))(1 - 2h_k \hat{H}(y) + h_k^2 \hat{K}(y))ds(y)$$

$$+\mathrm{grad} \int\limits_{\partial D} \Phi(x, y + h_k n(y))\tilde{\lambda}_{h_k}(y + h_k n(y))(1 - 2h_k \hat{H}(y) + h_k^2 \hat{K}(y))ds(y)$$

$$- \int\limits_{I\!R^3} \Phi(x, y) b_{h_k}(y) dy$$

$$\to - \int\limits_{I\!R^3} \Phi(x, y) b_0(y) dy \ , \ k \to \infty \ ,$$

und daraus $H \in C^2(I\!R^3)$ und $H(x) = 0$ für alle $x \in D_a$ schließen.

Um (4.14) nachzuweisen, transformieren wir wieder mit dem Homöomorphismus α_h die Operatorgleichung (4.13) in die äquivalente Gleichung

$$(I + L_h)(a_h, \lambda_h, b_h)^T = \alpha_h^{-1}(-2\,[n, [n, \mathrm{rot}\, H]]|_{\partial D_h}, -2\,(n, H)|_{\partial D_h}, 0)^T$$

in $X_2 := T^2(\partial D) \times L^2(\partial D) \times \hat{C}_0^{0,\alpha}(B)$ mit $(a_h, \lambda_h, b_h)^T := \alpha_h^{-1}(\tilde{a}_h, \tilde{\lambda}_h, b_h)^T \in X_2$ und $L_h := \alpha_h^{-1} \tilde{L}_h \alpha_h$.

Im Anhang begründen wir, daß L_h als Operator in X_2 wohldefiniert ist und $\|L_h - L_0\|_2 \to 0$, $h \to 0$, $h > 0$, gilt. Außerdem weisen wir dort die Existenz von $(I + L_0)^{-1}$ in X_2 zusammen mit $\|(I + L_0)^{-1}\|_2 \leq C_1$ nach. Dann können wir wie im letzten Satz folgern und erhalten (4.14). ■

Bemerkung: Die Randbedingungen in Satz 4.1 und Satz 4.2 bedeuten, daß die Randdaten schwach gegen Null konvergieren (im Hilbertraum $T^2(\partial D) \times L^2(\partial D)$). Wir könnten allgemeiner fordern, daß die Randdaten im L^p-Raum $T^p(\partial D) \times L^p(\partial D)$, $1 \leq p < \infty$, schwach gegen Null konvergieren, d.h. für das elektrische Randwertproblem

$$G([n, E(. + hn(.))], \mathrm{div}\, E)^T \to 0 \ , \ h \searrow 0 \ ,$$

für jedes lineare, stetige Funktional G auf $T^p(\partial D) \times L^p(\partial D)$. Der Beweis der Sätze 4.1 und 4.2 läßt sich ohne weiteres auf diese Randbedingung übertragen.

In den nächsten beiden Sätzen betrachten wir die entsprechenden inneren Probleme. Dabei müssen wir wie im skalaren Fall unterscheiden, ob es klassische Eigenlösungen gibt oder nicht.

Satz 4.3:

$E \in C^2(D)$ erfülle

$$\Delta E + \kappa^2 E = 0 \ \text{ in } D,\ \kappa \in \mathbb{C},\ \kappa \neq 0,\ \operatorname{Im} \kappa \geq 0,$$

$$\int\limits_{\partial D} \{([n(x), E(x+hn(x))], c(x)) + \operatorname{div} E(x+hn(x))\gamma(x)\}\, ds(x) \to 0,\ h \nearrow 0\ ,$$

für alle $c \in T^2(\partial D)$, $\gamma \in L^2(\partial D)$.

Falls in D keine klassischen Eigenlösungen zum elektrischen Randwertproblem bei der vektoriellen Helmholtz-Gleichung existieren, gilt $E(x) = 0$ für alle $x \in D$.

Falls in D klassische Eigenlösungen zum elektrischen Randwertproblem bei der vektoriellen Helmholtz-Gleichung existieren, ist $E \in C^2(D) \cap C^{0,\alpha}(\overline{D})$, $\operatorname{rot} E \in C^{0,\alpha}(\overline{D})$, $\operatorname{div} E \in C^{1,\alpha}(\overline{D})$ (d.h. E liegt im klassischen Eigenraum).

Beweis :

Nach Hilfssatz B2 des Anhangs zu diesem Kapitel können wir E in D_h als

$$E(x) = \operatorname{rot} \int\limits_{\partial D_h} \Phi(x,\tilde{y})\tilde{a}_h(\tilde{y})ds(\tilde{y}) - \int\limits_{\partial D_h} \Phi(x,\tilde{y})\tilde{\lambda}_h(\tilde{y})n(\tilde{y})ds(\tilde{y})\ ,\ x \in D_h\ ,$$

mit Dichten $\tilde{a}_h \in T_d^{0,\alpha}(\partial D_h)$, $\tilde{\lambda}_h \in C^{0,\alpha}(\partial D_h)$ darstellen, die das Integralgleichungssystem

$$a(\tilde{x}) - 2\int\limits_{\partial D_h} [n(\tilde{x}), \operatorname{rot}_{\tilde{x}}\{\Phi(\tilde{x},\tilde{y})a(\tilde{y})\}]ds(\tilde{y})$$

$$+2\int\limits_{\partial D_h} [n(\tilde{x}), n(\tilde{y})]\Phi(\tilde{x},\tilde{y})\lambda(\tilde{y})ds(\tilde{y}) = -2\,[n(\tilde{x}), E(\tilde{x})]\ ,\ \tilde{x} \in \partial D_h\ , \tag{4.15}$$

$$\lambda(\tilde{x}) - 2\int\limits_{\partial D_h} \frac{\partial \Phi}{\partial n(\tilde{y})}(\tilde{x},\tilde{y})\lambda(\tilde{y})ds(\tilde{y}) = -2\,(\operatorname{div} E)(\tilde{x})\ ,\ \tilde{x} \in \partial D_h\ , \tag{4.16}$$

lösen. $(a_h, \lambda_h) = \alpha_h^{-1}(\tilde{a}_h, \tilde{\lambda}_h)$ löst die Gleichung

$$(I + L_h)(a_h, \lambda_h)^T = \alpha_h^{-1}(-2\,[n, E]|_{\partial D_h}, -2\,\mathrm{div}\,E|_{\partial D_h})^T$$

in $T^2(\partial D) \times L^2(\partial D)$ (α_h bezeichnet hier den Homöomorphismus zwischen $T^2(\partial D) \times L^2(\partial D)$ und $T^2(\partial D_h) \times L^2(\partial D_h)$; $L_h := \alpha_h^{-1}\tilde{L}_h\alpha_h$, $\tilde{L}_h$ wird aus den Integraloperatoren in (4.15), (4.16) gewonnen).

Falls in D keine klassischen Eigenlösungen existieren, können wir wieder aus $\|L_h - L_0\|_2 \to 0$, $h \to 0$, $h < 0$, und $\|(I + L_0)^{-1}\|_2 \le C$ die schwache Konvergenz von $(a_h, \lambda_h)^T$ in $T^2(\partial D) \times L^2(\partial D)$ gegen 0 folgern, $(a_h, \lambda_h)^T \rightharpoonup 0$, $h \nearrow 0$. Daraus erhalten wir $E(x) = 0$ für alle $x \in D$.

Falls klassische Eigenlösungen existieren, überlegen wir uns zuerst, daß die L^2-Normen $\int_{\partial D}(|a_h|^2 + |\lambda_h|^2)ds$ für $h \nearrow 0$ beschränkt bleiben.

Wir nehmen an, daß es eine Folge h_j, $j \in I\!N$, mit $h_j \nearrow 0$, $j \to \infty$, gibt, für welche

$$p_j := \left(\int\limits_{\partial D} \{|a_j|^2 + |\lambda_j|^2\} ds \right)^{1/2} \to \infty \ , \ j \to \infty \ ,$$

gilt, wobei wir $a_j := \alpha_{h_j}^{-1}\tilde{a}_{h_j}$ und $\lambda_j := \alpha_{h_j}^{-1}\tilde{\lambda}_{h_j}$ setzen.

Sei $b_j := p_j^{-1}a_j$, $\mu_j := p_j^{-1}\lambda_j$ und $L_j := \alpha_{h_j}^{-1}\tilde{L}_{h_j}\alpha_{h_j}$. Dann folgt aus

$$(I + L_j)\begin{pmatrix} b_j \\ \mu_j \end{pmatrix} = -2p_j^{-1}\alpha_{h_j}^{-1}\begin{pmatrix} [n, E] \\ \mathrm{div}E \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ j \to \infty \ ,$$

(nach Übergang zu einer Teilfolge)

$$\begin{pmatrix} b_j \\ \mu_j \end{pmatrix} = -2p_j^{-1}\alpha_{h_j}^{-1}\begin{pmatrix} [n, E] \\ \mathrm{div}E \end{pmatrix} - L_j\begin{pmatrix} b_j \\ \mu_j \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \hat{b} \\ \hat{\mu} \end{pmatrix} \ , \ j \to \infty \ ,$$

da L_0 kompakt ist und $\|L_j - L_0\|_2 \to 0$, $j \to \infty$, gilt. Aus

$$\int\limits_{\partial D} \{|b_j|^2 + |\mu_j|^2\} ds = 1 \ , \quad j \in I\!N \ ,$$

folgt

$$\int\limits_{\partial D} \{|\hat{b}|^2 + |\hat{\mu}|^2\} ds = 1 \ . \tag{4.17}$$

Andererseits wissen wir aus

$$E_j(x) = \operatorname{rot} \int\limits_{\partial D_h} \Phi(x,\tilde{y})(\alpha_{h_j} b_j)(\tilde{y}) ds(\tilde{y}) - \int\limits_{\partial D_h} \Phi(x,\tilde{y})(\alpha_{h_j}\mu_j)(\tilde{y}) n(\tilde{y}) ds(\tilde{y}) \to 0$$

und

$$E_j(x) \to \operatorname{rot} \int\limits_{\partial D} \Phi(x,y)\hat{b}(y) ds(y) - \int\limits_{\partial D} \Phi(x,y)\hat{\mu}(y) n(y) ds(y)\ ,\ j \to \infty,$$

für festes $x \in D$, daß

$$0 = \operatorname{rot} \int\limits_{\partial D} \Phi(x,y)\hat{b}(y) ds(y) - \int\limits_{\partial D} \Phi(x,y)\hat{\mu}(y) n(y) ds(y)\ , x \in D,$$

gilt, d.h. $\hat{b} = 0$ und $\hat{\mu} = 0$ im Widerspruch zu (4.17).

Dann können wir eine Folge h_j, $j \in I\!N$, so auswählen, daß $h_j \nearrow 0$, $j \to \infty$, gilt und die Folgen a_j und λ_j, $j \in I\!N$, schwach gegen $\hat{a} \in T^2(\partial D)$ bzw. gegen $\hat{\lambda} \in L^2(\partial D)$ konvergieren, $a_j \rightharpoonup \hat{a} \in T^2(\partial D)$, $\lambda_j \rightharpoonup \hat{\lambda} \in L^2(\partial D)$, $j \to \infty$.

Dies ergibt

$$E(x) = \operatorname{rot} \int\limits_{\partial D} \Phi(x,y)\hat{a}(y) ds(y) - \int\limits_{\partial D} \Phi(x,y)\hat{\lambda}(y) n(y) ds(y)\ , x \in D,$$

und mit den Randbedingungen

$$(I + L_0)\begin{pmatrix}\hat{a}\\ \hat{\lambda}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\ .$$

Daraus schließen wir $(\hat{a},\hat{\lambda})^T \in \mathrm{N}(I+L_0) \subset T_d^{0,\alpha}(\partial D) \times C^{1,\alpha}(\partial D)$. Die Behauptung folgt jetzt aus den Regularitätseigenschaften der Potentiale. ■

Satz 4.4:

$H \in C^2(D)$ erfülle

$$\Delta H + \kappa^2 H = 0 \ \text{ in } D\ ,\ \kappa \in \mathbb{C}, \kappa \neq 0,\ \operatorname{Im} \kappa \geq 0, \text{ und}$$

$$\int\limits_{\partial D} \Big\{ ([n(x),[n(x),\operatorname{rot} H(x+hn(x))]], c(x)) +$$

$$+(n(x), H(x+hn(x)))\gamma(x)\Big\}ds(x) \to 0,\ h \nearrow 0\ ,$$

für alle $c \in T^2(\partial D)$, $\gamma \in L^2(\partial D)$.

Falls in D keine klassischen Eigenlösungen zum magnetischen Randwertproblem existieren, gilt $H(x) = 0$ für alle $x \in D$.

Falls in D klassische Eigenlösungen zum magnetischen Randwertproblem existieren, gilt: $H \in C^2(D) \cap C^{0,\alpha}(\overline{D})$, $\mathrm{div} H \in C^{0,\alpha}(\overline{D})$ und $\mathrm{rot} H \in C^{0,\alpha}(\overline{D})$, d.h. H liegt im Raum der klassischen Eigenlösungen.

Beweis :

Aus dem Anhang zu diesem Kapitel wissen wir, daß H sich in D_h als

$$H(x) = \int\limits_{\partial D_h} \Phi(x,\tilde{y})[n,\tilde{a}_h](\tilde{y})ds(\tilde{y}) + \mathrm{grad} \int\limits_{\partial D_h} \Phi(x,\tilde{y})\tilde{\lambda}_h(\tilde{y})ds(\tilde{y})\ ,\ x \in D_h\ ,$$

mit Dichten $\tilde{a}_h \in T^{0,\alpha}(\partial D_h)$, $\tilde{\lambda}_h \in C^{0,\alpha}(\partial D_h)$ darstellen läßt, die das Integralgleichungssystem

$$a(\tilde{x}) + 2 \int\limits_{\partial D_h} [n(\tilde{x}), [n(\tilde{x}), \mathrm{rot}_{\tilde{x}}\{\Phi(\tilde{x},\tilde{y})[n,a](\tilde{y})\}]]ds(\tilde{y}) = 2\,[n,[n,\mathrm{rot} H]](\tilde{x})\ ,$$

$$\lambda(\tilde{x}) + 2 \int\limits_{\partial D_h} (n(\tilde{x}), \Phi(\tilde{x},\tilde{y})[n,a](\tilde{y}))ds(\tilde{y})$$

$$+2 \int\limits_{\partial D_h} \frac{\partial \Phi}{\partial n(\tilde{x})}(\tilde{x},\tilde{y})\lambda(\tilde{y})ds(\tilde{y}) = 2\,(n,H)(\tilde{x})\ ,\ \tilde{x} \in \partial D_h\ ,$$

lösen.

Jetzt können wir wie im Beweis von Satz 4.3 weiterschließen. ■

Bemerkung: Die Methoden in [7] liefern die Existenz von Lösungen mit Randdaten, die nur stetig sind oder nur in L^2-Räumen liegen. Allerdings geht bei diesen Daten die Existenz der komplementären Cauchy-Daten bis zum Rand verloren. Beim elektrischen Randwertproblem heißt das z.B., daß wir nicht erwarten können, daß (n, E) und $[n,[n,\mathrm{rot}\,E]]$ am Rand ∂D existieren, wenn wir $[n, E]$ und $\mathrm{div}\,E$ nur als stetig voraussetzen.

Anhang zum vierten Kapitel

Wie im ersten Anhang werden hier die technischen Hilfsmittel für die vektoriellen Probleme formuliert und bewiesen.

Wir haben schon im ersten Anhang begründet, warum die Sprungrelationen und Regularitätseigenschaften der auftretenden Potentiale für Parallelflächen gültig bleiben.

Hilfssatz A1 des Anhangs zu den skalaren Problemen überträgt sich selbstverständlich, wenn die Kerne der Integraloperatoren Matrizen und die Dichten Vektoren sind. Damit können wir die folgenden Operatoren untersuchen, die im letzten Kapitel auftreten. (Wir schreiben $l(h,y) := (1 - 2h\hat{H}(y) + h^2\hat{K}(y))$ für $|h| \leq h_0$, $y \in \partial D$).

$M_h: T^2(\partial D) \to T^2(\partial D)$

$$(M_h a)(x) \;:=\; 2\int\limits_{\partial D} [n(x), \mathrm{rot}_x\{\Phi(x+hn(x), y+hn(y))a(y)\}]l(h,y)ds(y) \;,$$

$M_h': T^2(\partial D) \to T^2(\partial D) \qquad M_h' b(x) \;:=\; [n, M_h[n,b]](x) \;,$

$N_h^{(1)}: L^2(\partial D) \to T^2(\partial D)$

$$(N_h^{(1)}\lambda)(x) := 2\int\limits_{\partial D} [n(x), n(y)]\Phi(x+hn(x), y+hn(y))\lambda(y)l(h,y)ds(y) \;,$$

$N_h^{(2)}: T^2(\partial D) \to L^2(\partial D)$

$$(N_h^{(2)}a)(x) := 2\int\limits_{\partial D} (n(x), \Phi(x+hn(x), y+hn(y))[n,a](y))l(h,y)ds(y) \;,$$

für $x \in \partial D$, $|h| \leq h_0$. Damit erhalten wir

Hilfssatz B1:

Die Operatoren M_h, M_h', $N_h^{(1)}$, $N_h^{(2)}$ sind kompakt, und es gilt für $h \to 0$:

$$\|M_h - M_0\| \to 0 \;, \|M_h' - M_0'\| \to 0 \;, \|N_h^{(1)} - N_0^{(1)}\| \to 0 \;, \|N_h^{(2)} - N_0^{(2)}\| \to 0 \;.$$

Das entsprechende Resultat gilt auch, wenn die Operatoren in L^p-Räumen mit $1 \leq p < \infty$ betrachtet werden, bzw. als Operatoren im Raum der stetigen Funktionen und Tangentialfelder (mit der $\|.\|_\infty$-Norm).

Außer den im Hilfssatz B1 betrachteten Operatoren, kommen im letzten Kapitel Operatoren vor, die Dichten auf ∂D in Funktionen auf $\overline{B}$ (B offene Kugel in D, $\overline{B} \subset D$) und umgekehrt abbilden. Diese sind kompakt, weil die Kerne der Integraloperatoren C^∞-glatt sind. Die Konvergenz für $h \to 0$ in der Operatornorm ist auch für diese Operatoren gültig, weil die Kerne gleichmäßig konvergieren.

Schließlich haben wir benutzt, daß die Operatoren $(I + L_0)^{-1}$ existieren und in dem jeweiligen L^2-Raum X beschränkt sind (L_0 hat in den verschiedenen Sätzen von Kapitel 4 verschiedene Bedeutungen). Dazu überlegen wir uns, daß L_0 auch als Operator in dem entsprechenden Hölder-Raum $X^{0,\alpha}$ kompakt ist, $(I+L_0)$ in dem entsprechenden Hölder-Raum bijektiv ist (das haben wir in den Beweisen zu den Sätzen von Kapitel 4 schon gezeigt), und betrachten dann die Dualsysteme $\langle X, X\rangle$ und $\langle X^{0,\alpha}, X\rangle$,

$$\langle (a_1, \lambda_1, b_1)^T, (a_2, \lambda_2, b_2)^T\rangle = \int\limits_{\partial D} \{(a_1, a_2) + \lambda_1\lambda_2\} ds + \int\limits_B (b_1, b_2) dx \; .$$

Der zweite Summand fällt weg, falls $X = T^2(\partial D) \times L^2(\partial D)$ ist. Den zu L_0 adjungierten Operator L_0' erhalten wir im wesentlichen durch Vertauschen der Kernvariablen. Er ist daher auch in X kompakt. Dann folgt aus der Fredholmtheorie die Existenz und die Beschränktheit von $(I + L_0)^{-1}$ in X.

In den beiden letzten Hilfssätzen beweisen wir, daß sich jede Lösung E der vektoriellen Helmholtz-Gleichung $\Delta E + \kappa^2 E = 0$ in D_h als ein bestimmtes Potential darstellen läßt, wenn sie bis zum Rand ∂D_h hinreichend glatt ist.

Hilfssatz B2:

$E \in C^2(D_h)$ erfülle

$$\Delta E + \kappa^2 E = 0 \;\text{ in } D_h,\ \kappa \in \mathbb{C},\ \kappa \neq 0,\ \mathrm{Im}\,\kappa \geq 0,$$

und $E \in C^{0,\alpha}(\overline{D_h})$, $\mathrm{rot}\, E \in C^{0,\alpha}(\overline{D_h})$, $\mathrm{div}\, E \in C^{0,\alpha}(\overline{D_h})$.

Dann gibt es genau ein $\tilde{a}_h \in T_d^{0,\alpha}(\partial D_h)$ und genau ein $\tilde{\lambda}_h \in C^{0,\alpha}(\partial D_h)$, so daß

$$E(x) = \operatorname{rot} \int_{\partial D_h} \Phi(x,\tilde{y})\tilde{a}_h(\tilde{y})ds(\tilde{y}) - \int_{\partial D_h} \Phi(x,\tilde{y})\tilde{\lambda}_h(\tilde{y})n(\tilde{y})ds(\tilde{y}) \ , \ x \in D_{h,} \ ,$$

gilt. Die Dichten $\tilde{a}_h \in T_d^{0,\alpha}(\partial D_h)$, $\tilde{\lambda}_h \in C^{0,\alpha}(\partial D_h)$ lösen das Integralgleichungssystem

$$a(\tilde{x}) - 2 \int_{\partial D_h} [n(\tilde{x}), \operatorname{rot}_{\tilde{x}}\{\Phi(\tilde{x},\tilde{y})a(\tilde{y})\}]ds(\tilde{y})$$

$$+2 \int_{\partial D_h} [n(\tilde{x}), n(\tilde{y})]\Phi(\tilde{x},\tilde{y})\lambda(\tilde{y})ds(\tilde{y}) = -2\,[n(\tilde{x}), E(\tilde{x})] \ , \ \tilde{x} \in \partial D_h \ , \qquad \text{(B1)}$$

$$\lambda(\tilde{x}) - 2 \int_{\partial D_h} \frac{\partial \Phi}{\partial n(\tilde{y})}(\tilde{x},\tilde{y})\lambda(\tilde{y})ds(\tilde{y}) = -2\,(\operatorname{div} E)(\tilde{x}) \ , \ \tilde{x} \in \partial D_h \ . \qquad \text{(B2)}$$

Beweis :

Wenn für $\tilde{a}_h \in T_d^{0,\alpha}(\partial D_h)$ und $\tilde{\lambda}_h \in C^{0,\alpha}(\partial D_h)$

$$0 = \operatorname{rot} \int_{\partial D_h} \Phi(x,\tilde{y})\tilde{a}_h(\tilde{y})ds(\tilde{y}) - \int_{\partial D_h} \Phi(x,\tilde{y})\tilde{\lambda}_h(\tilde{y})n(\tilde{y})ds(\tilde{y}) \ , \ x \in D_h \ ,$$

gilt, folgt aus den Sprungrelationen und der Eindeutigkeit des äußeren magnetischen Randwertproblems: $\tilde{a}_h = 0$ und $\tilde{\lambda}_h = 0$. Damit ist gezeigt, daß es höchstens ein Paar $(\tilde{a}_h, \tilde{\lambda}_h)$ geben kann, mit welchem E wie oben dargestellt werden kann.

Um die Existenz von $\tilde{a}_h$ und $\tilde{\lambda}_h$ nachzuweisen, gehen wir wie in Hilfssatz A3 vor.

Aus Kapitel 4 des Buches von Colton und Kreß wissen wir, daß die rechte Seite des Integralgleichungssystems (B1), (B2) senkrecht auf dem Nullraum des adjungierten Integralgleichungssystems steht (bzgl. des Dualsystems, das durch $\int_{\partial D_h}\{(a_1,a_2) + \lambda_1\lambda_2\}ds$ gegeben ist). Aus der Fredholm-Alternative folgt daher die Existenz von $\hat{a}_h \in T_d^{0,\alpha}(\partial D_h)$ und $\hat{\lambda}_h \in C^{0,\alpha}(\partial D_h)$, welche das Gleichungssystem (B1), (B2) lösen.

Nun müssen wir diese Lösung um ein Element aus dem Nullraum des Gleichungssystems (B1), (B2) so abändern, daß wir E in D_h wie oben darstellen. Dies ist wieder ein endlichdimensionales Problem, welches lösbar ist, da die Dimension des Eigenraumes zum inneren elektrischen Randwertproblem mit der Dimension des Nullraums des Integralgleichungssystems (B1), (B2) übereinstimmt. ■

Der letzte Hilfssatz wird analog zum vorherigen bewiesen.

Hilfssatz B3:

$E \in C^2(D_h)$ erfülle

$$\Delta E + \kappa^2 E = 0 \quad \text{in } D_h,\ \kappa \in \mathbb{C},\ \kappa \neq 0,\ \operatorname{Im} \kappa \geq 0,$$

und $E \in C^{0,\alpha}(\overline{D_h})$, $\operatorname{rot} E \in C^{0,\alpha}(\overline{D_h})$, $\operatorname{div} E \in C^{0,\alpha}(\overline{D_h})$.

Dann gibt es genau ein $\tilde{a}_h \in T^{0,\alpha}(\partial D_h)$ und genau ein $\tilde{\lambda}_h \in C^{0,\alpha}(\partial D_h)$, so daß

$$E(x) = \int\limits_{\partial D_h} \Phi(x,\tilde{y})[n,\tilde{a}_h](\tilde{y})ds(\tilde{y}) + \operatorname{grad} \int\limits_{\partial D_h} \Phi(x,\tilde{y})\tilde{\lambda}_h(\tilde{y})ds(\tilde{y}) \ , \ x \in D_h \ ,$$

gilt.

$\tilde{a}_h \in T^{0,\alpha}(\partial D_h)$, $\tilde{\lambda}_h \in C^{0,\alpha}(\partial D_h)$ lösen das Integralgleichungssystem

$$a(\tilde{x}) + 2 \int\limits_{\partial D_h} [n(\tilde{x}), [n(\tilde{x}), \operatorname{rot}_{\tilde{x}}\{\Phi(\tilde{x},\tilde{y})[n,a](\tilde{y})\}]]ds(\tilde{y}) = 2\,[n,[n,\operatorname{rot} E]](\tilde{x}) \ ,$$

$$\lambda(\tilde{x}) + 2 \int\limits_{\partial D_h} (n(\tilde{x}), \Phi(\tilde{x},\tilde{y})[n,a](\tilde{y}))ds(\tilde{y})$$

$$+2 \int\limits_{\partial D_h} \frac{\partial \Phi}{\partial n(\tilde{x})}(\tilde{x},\tilde{y})\lambda(\tilde{y})ds(\tilde{y}) = 2\,(n,E)(\tilde{x}) \ , \ \tilde{x} \in \partial D_h \ .$$

5. Literaturverzeichnis

[1] T.S. Angell, Resistive and Conductive Problems in Classical Scattering, Vortrag auf der Tagung über "Methoden und Verfahren der mathematischen Physik" vom 26.11. bis 2.12. 1989 in Oberwolfach

[2] T.S. Angell, R.E. Kleinman, Boundary Integral Equations for the Helmholtz Equation: The Third Boundary Value Problem, Math. Meth. in the Appl. Sci. 4, 1982, 164–193.

[3] H. Brakhage, P. Werner, Über das Dirichletsche Außenraumproblem für die Helmholtzsche Schwingungsgleichung, Arch. Math. 16, 1965, 325–329.

[4] A.P. Calderón, The Multipole Expansion of Radiation Fields, J. Rat. Mech. Anal. 3, 1954, 523–537.

[5] J. Chabrowski, H.B. Thompson, On the Boundary Values of the Solutions of Linear Elliptic Equations, Bull. Austr. Math. Soc. 27, 1983, 1–30.

[6] J. Chabrowski, B. Thompson, On Traces of Solutions of a Semi-Linear Partial Differential Equation of Elliptic Type, Ann. Polon. Math. 42, 1983, 45–71.

[7] D. Colton, R. Kress, Integral Equation Methods in Scattering Theory, Wiley, New York, 1983.

[8] B. Giesecke, Zum Dirichletschen Prinzip für selbstadjungierte elliptische Differentialgleichungen, Math. Z. 86, 1964, 54–62.

[9] N.M. Günter, Die Potentialtheorie und ihre Anwendung auf Grundaufgaben der mathematischen Physik, Teubner, Leipzig, 1957

[10] E. Heinz, Partielle Differentialgleichungen, Vorlesung WS 1988/89, Göttingen.

[11] G. Hellwig, Partielle Differentialgleichungen, Teubner,Stuttgart, 1960.

[12] F. Hettlich, Die Integralgleichungsmethode bei Streuung an Körpern mit einer dünnen Schicht, Diplomarbeit, Göttingen 1989.

[13] H. Kersten, Grenz- und Sprungrelationen für Potentiale mit quadratsummierbarer Flächenbelegung, Resultate der Mathematik 3, 1980, 17–24.

[14] R. Kress, On the boundary operator in electromagnetic scattering, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 103, 1986, 91–98.

[15] R. Kress, Linear Integral Equations, Springer, Berlin - Heidelberg, 1989.

[16] R. Kress, G.F. Roach, Transmissionproblems for the Helmholtz equation, J. Math. Phys. 19, 1978, 1433–1437.

[17] R. Leis, Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung, Bibliographisches Institut, Mannheim, 1967.

[18] R. Leis, Zur Dirichletschen Randwertaufgabe des Außenraumes der Schwingungsgleichung, Math. Z. 90, 1965, 205–211.

[19] V.P. Mikhailov, On the Boundary Values of Solutions of Elliptic Equations in Domains with a Smooth Boundary, Math. USSR Sbornik 30, 1976, No.2, 143–166.

[20] V.P. Mikhailov, Dirichlet's Problem for a Second Order Elliptic Equation, Diff. Equat. 12, 1976, 1320–1329.

[21] C. Miranda, Partial Differential Equations of Elliptic Type, 2nd rev. ed., Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 1970.

[22] C. Müller, Foundations of the Mathematical Theory of Electromagnetic Waves, Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 1969.

[23] O.I. Panich, On the question of the solvability of the exterior boundary-value problems for the wave equation and Maxwell's equations, Russian Math. Surveys 20, 1965, 221–226.

[24] N. Weck, Klassische Lösungen sind auch schwache Lösungen, Arch. Math. 20, 1969, 628–637.

[25] P. Werner, Zur mathematischen Theorie akustischer Wellenfelder, Arch. Rational Mech. Anal. 6, 1960, 231–260.

[26] P. Werner, Randwertprobleme der mathematischen Akustik, Arch. Rational Mech. Anal. 10, 1962, 29–66.

[27] P. Werner, On the exterior boundary value problem of perfect reflection of stationary electromagnetic wave fields, J. Math. Anal. Appl. 7, 1963, 348–396.