Charakterisierung bedingt positiv definiter Funktionen für multivariate Interpolationsmethoden mit radialen Basisfunktionen

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fachbereiche
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von
Armin Iske
aus Kassel

Göttingen 1994

D 7

Referent: Prof. Dr. R. Schaback
Korreferent: Prof. Dr. J. Werner

Tag der mündlichen Prüfung: 28. April 1994

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Der Begriff *radiale Basisfunktion* ist inzwischen zu einem Schlagwort auf dem Gebiet der multivariaten Interpolation und Approximation geworden. Bei den verwendeten Methoden werden multivariate Funktionen durch Interpolanten approximiert, die Linearkombinationen von Translaten der Gestalt $\psi(x - x_j) = \phi(\|x - x_j\|)$ zu gegebenen Interpolationspunkten $x_j \in \mathbb{R}^d$ enthalten. Dabei bezeichnet $\|\cdot\|$ die euklidische Norm.

In den letzten 20 Jahren wurden im wesentlichen fünf Typen solcher radialer Basisfunktionen $\psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ studiert:

polynomials	$\psi(x) = (-1)^{\lceil \nu/2 \rceil} \|x\|^\nu$	$\nu > 0, \nu \notin 2\mathbb{N}$
thin plate splines	$\psi(x) = (-1)^{k+1} \|x\|^{2k} \log \|x\|$	$k \in \mathbb{N}$
Gaussians	$\psi(x) = e^{\perp\alpha\|x\|^2}$	$\alpha > 0$
Multiquadrics	$\psi(x) = (-1)^{\lceil \nu/2 \rceil} \left(c^2 + \|x\|^2\right)^{\nu/2}$	$\nu > 0, \nu \notin 2\mathbb{N}, c \neq 0$
inverse Multiquadrics	$\psi(x) = \left(c^2 + \|x\|^2\right)^{\nu/2}$	$-d < \nu < 0, \nu \notin 2\mathbb{Z}, c \neq 0.$

Erste Untersuchungen gingen dabei auf zwei dieser speziellen Funktionen zurück:

Zum einen die *thin plate splines* $\phi(r) = r^2 \log(r)$, Fundamentallösungen der Plattengleichung im $\mathbb{R}^2$, die erstmals Duchon [7], [8], [9] im Jahre 1976 zum Gegenstand seiner Forschung machte, zum anderen die *Multiquadrics* $\phi(r) = -\sqrt{r^2 + c^2}$, die fünf Jahre zuvor von Hardy [19] für konkrete Approximationsaufgaben der Geophysik praktisch verwendet wurden.

Im Verlauf des letzten Jahrzehnts wurden diese beiden Typen intensiver bei der Behandlung multivariater Interpolationsaufgaben studiert. Franke [14] erkannte bereits zu Beginn der 80er Jahre, daß diese Funktionen beispielsweise wegen ihrer Approximationsgüte und Implementierbarkeit für solche Zwecke äußerst geeignet sind. Aus diesen Gründen sind die Methoden der multivariaten Interpolation und Approximation mit radialen Basisfunktionen inzwischen zu einem mächtigen Werkzeug gereift, und die Forschung auf diesem Gebiet ist entsprechend intensiv.

Die untersuchten Interpolationsmethoden unterscheiden sich im wesentlichen durch zwei Arten von Datenvorgaben:

Der Fall der Interpolation von regelmäßigen *Gitterdaten* wurde beispielsweise in der Dissertation [5] von Buhmann umfassend behandelt, der die Multiquadrics als Ansatzfunktionen verwendete. Einen Überblick über die Eigenarten solcher Datenvorgaben findet man in dem Artikel [33] von Powell.

Die Mehrheit aller Autoren geht allerdings von der Vorgabe endlich vieler, chaotisch verteilter Daten aus. Für die zugehörigen Methoden hat sich der Begriff *scattered data interpolation* durchgesetzt. Es gibt mittlerweile zahlreiche Publikationen auf diesem Gebiet. Eine umfangreichere Literaturliste findet man beispielsweise in [6], [24], [33].

Obwohl die Menge der radialen Basisfunktionen überschaubar ist, ergeben sich aus deren Interpolationsprozessen eine Reihe von Problemen, die längst nicht erschöpfend behandelt werden konnten, wie z. B. Approximationsverhalten (siehe [25]) und Approximationsgüte (siehe [11], [22], [27], [44]), Abschätzungen für die Konditionszahlen der Interpolationsmatrizen (siehe [30], [31], [32], [35]), Methoden zur Präkonditionierung (siehe [10], [12]), Vergleiche zwischen Interpolationsmethoden (siehe [34]) etc. Der erst kürzlich erschienene Übersichtsartikel [6] von Buhmann liefert Einblicke in ausgewählte Problemstellungen dieses Forschungsgebietes.

Bei allgemeineren Beschreibungen von Approximationsmethoden mit radialen Basisfunktionen nutzt man typische Eigenschaften, die diese oben genannten Funktionen gemeinsam haben:

- Stetigkeit,
- höchstens polynomiales Wachstum im Unendlichen,
- (bedingte) positive Definitheit.

Wir werden in dieser Arbeit wichtige Ergebnisse erzielen, bei der die Eigenschaft der „Radialität“ nicht entscheidend sein wird. Wir lassen den Zusatz „radial“ ggf. fallen. Von zentraler Bedeutung dagegen ist der Begriff der „bedingten positiven Definitheit“, und daher geben wir bereits jetzt die

Definition 1.1*: Eine stetige Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ heißt bedingt positiv semidefinit der Ordnung m auf $\mathbb{R}^d$, falls für beliebige paarweise verschiedene Punkte $x_1, \ldots, x_N \in \mathbb{R}^d$ und beliebige reelle Zahlen $c_1, \ldots, c_N$ mit der Eigenschaft*

$$\sum_{j=1}^{N} c_j x_j^p = 0 \qquad |p| < m,\, p \in \mathbb{N}_0^d$$

die Ungleichung

$$\sum_{j,k=1}^{N} c_j c_k f(x_j - x_k) \geq 0 \tag{1.1}$$

erfüllt ist. Die Funktion f heißt bedingt positiv definit der Ordnung m auf $\mathbb{R}^d$, falls f bedingt positiv semidefinit der Ordnung m auf $\mathbb{R}^d$ ist, und Gleichheit in (1.1) genau dann vorliegt, falls $c = (c_1, \ldots, c_N) = 0$ gilt. Eine Funktion, die bedingt positiv (semi)definit der Ordnung 0 auf $\mathbb{R}^d$ ist, bezeichnen wir als positiv (semi)definit auf $\mathbb{R}^d$.

Wie aus der obigen Definition ersichtlich, unterscheiden wir hier stets im Gegensatz zu manchen Autoren sehr sorgfältig zwischen bedingter positiver Definitheit und Semidefinitheit. Dies ist bei den Interpolationsmethoden mit radialen Basisfunktionen auf endlich vielen chaotisch verteilten Daten von grundlegender Bedeutung, wie wir im folgenden Paragraphen zeigen werden. Die dortigen Ausführungen kann man als Ergänzung dieser Einleitung verstehen, da wir in einigen Punkten präziser werden und gleichzeitig auf gewisse Probleme hinweisen, die wir bei unseren Untersuchungen stets im Auge behalten wollen.

Wir liefern schließlich in Paragraph 3 einen Überblick über die vorhandenen theoretischen Untersuchungen positiv und bedingt positiv (semi)definiter Funktionen. Hierbei steht zweifellos der Satz von Bochner im Mittelpunkt, mit dem eine eindrucksvolle Charakterisierung gerader Funktionen, die auf $\mathbb{R}$ positiv semidefinit sind, gelungen ist. Ebenso werden wir das bekannte und vielzitierte hinreichende Kriterium von Micchelli [29] anführen, mit dem man nachprüft, ob eine feste *radiale* Funktion bedingt positiv definit auf allen $\mathbb{R}^d$ $(d \geq 1)$ ist.

Anschließend definieren wir in Paragraph 4 den Begriff der *bedingt positiv definiten Distribution* und stellen in Paragraph 5 mit dem Hauptsatz dieser Dissertation einen grundlegenden Zusammenhang zwischen regulären Distributionen und bedingt positiv semidefiniten Funktionen her. Dabei behalten wir stets die übrigen typischen Eigenschaften radialer Basisfunktionen – mit Ausnahme der Radialität – im Hinterkopf und treffen eine recht schwache Voraussetzung, unter der wir einen völlig neuen Zugang zur Untersuchung bedingt positiv definiter Funktionen, insbesondere radialer Basisfunktionen, erhalten. Wir charakterisieren bedingt positiv definite Funktionen durch Eigenschaften ihrer verallgemeinerten Fouriertransformierten. Wir werden zeigen, daß man die Ordnung der bedingten positiven Definitheit einer stetigen Funktion anhand des Polverhaltens ihrer positiven verallgemeinerten Fouriertransformierten um Null leicht bestimmen kann. Für den Spezialfall positiv semidefiniter Funktionen auf $\mathbb{R}$ erhalten wir eine gewisse Analogie zu dem erwähnten Satz von Bochner. Darüberhinaus sind wir mit relativ einfachen Methoden in der Lage, die Menge der bisher verwendeten radialen Basisfunktionen um eine Vielfalt weiterer zu ergänzen. Mit unseren Ergebnissen wird es beispielsweise gelingen, erstmals eine positiv definite radiale Funktion mit kompaktem Träger anzugeben.

Anschließend wird in Paragraph 6 eine Hilbertraumtheorie für Interpolationsaufgaben mit einer festen radialen Basisfunktion entwickelt, die teilweise Ergebnisse von Madych & Nelson [27] aufgreift. Dabei beschränken wir uns im Gegensatz zu Madych & Nelson allerdings nicht ausschließlich auf den Fall der scattered data interpolation, sondern erzielen allgemeinere Ergebnisse. Es werden Funktionenräume konstruiert, die auf natürliche Art und Weise entstehen, wenn man Fehlerabschätzungen bezüglich dieser Interpolationsmethoden anstrebt. Wir werden zeigen, daß diese Funktionenräume isometrisch isomorph zu gewissen gewichteten L^2-Räumen sind.

Da die Fourieranalysis und zunehmend auch die Distributionentheorie inzwischen zu den Grundlagen dieses Forschungsgebietes gehören, setzen wir deren Kenntnisse voraus und zitieren hier lediglich die Bücher von Schwartz [39] und Hörmander [21] sowie Stein & Weiss [40], die eine umfassende Einarbeitung ermöglichen.

Selbstverständlich haben wir uns darum bemüht, in dieser Arbeit stets Bezeichnungen zu verwenden, die jedem Mathematiker geläufig sein sollten. So bezeichnet $\mathbb{N}$ beispielsweise die Menge der natürlichen Zahlen. Weiterhin haben wir es weitgehend vermieden, bestimmte Symbole mehrfach zu belegen. i bezeichnet in dieser Arbeit zum Beispiel ausschließlich die komplexe Zahl $\sqrt{-1}$ und wird nicht etwa als Laufindex verwendet. Wir haben dennoch eine Liste von verwendeten Symbolen hinzugefügt, mit der wir sonstige Mißverständnisse in dieser Hinsicht ausräumen möchten.

An dieser Stelle bedanke ich mich mit Nachdruck bei meinem Doktorvater Prof. Dr. Robert Schaback, der nicht nur mein Interesse an diesem Forschungsgebiet geweckt, sondern ebenso die Anfertigung dieser Dissertation durch wertvolle Anmerkungen unterstützt hat. Weiterhin gilt mein Dank Herrn Prof. Dr. Jochen Werner, der freundlicherweise das Korreferat übernahm. Außerdem hat Herr Marko Weinrich stets recht kontroverse Diskussionen mit mir geführt, von denen ich während des Entstehens dieser Arbeit profitieren konnte. Ihm danke ich ebenso wie allen Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern des Instituts für Numerische und Angewandte Mathematik für deren Hilfsbereitschaft in vielerlei Hinsicht.

2 Interpolation mit radialen Basisfunktionen

Wir wollen in diesem Paragraphen erläutern, für welche Interpolationsprobleme unsere anschließenden Untersuchungen über bedingt positiv definite Funktionen von Interesse sein werden:

Gegeben sei eine endliche Menge $X = \{x_1, \dots, x_N\}$ paarweise verschiedener, beliebig chaotisch verteilter Punkte aus dem $\mathbb{R}^d$. Wir beabsichtigen, reelle Daten $y_1, \dots, y_N$ mit einer Funktion $s_\psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ der Gestalt

$$s_\psi(x) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \psi(x - x_j) + \sum_{\ell=1}^{Q} \mu_\ell p_\ell(x)$$

zu interpolieren, so daß die Gültigkeit von

$$s_\psi(x_k) = y_k \qquad 1 \leq k \leq N$$

gewährleistet ist. Dabei sei die Funktion $\psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ bedingt positiv definit der Ordnung m auf $\mathbb{R}^d$ und weiterhin $p_1, \dots, p_Q$ mit $Q := \binom{m-1+d}{d}$ eine Basis des Vektorraumes $\mathcal{P}_m^d$ aller Polynome in d Veränderlichen mit Höchstordnung m.

Für hinreichend große Werte von $N \in \mathbb{N}$ erhalten wir ein überbestimmtes lineares Gleichungssystem. Um die auftretenden Freiheitsgrade zu eliminieren, stellen wir zusätzlich die Nebenbedingung

$$\sum_{j=1}^{N} \lambda_j p_\ell(x_j) = 0 \qquad 1 \leq \ell \leq Q,$$

so daß wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} A & P \\ P^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

mit den Matrizen

$$A = (\psi(x_j - x_k))_{1 \leq j,k \leq N} \qquad P = (p_\ell(x_j))_{\substack{1 \leq j \leq N \\ 1 \leq \ell \leq Q}}$$

und den Vektoren

$$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N)^T \qquad \mu = (\mu_1, \dots, \mu_Q)^T \qquad y = (y_1, \dots, y_N)^T$$

zu betrachten haben.

Selbstverständlich interessieren wir uns dafür, unter welchen Umständen die quadratische Koeffizientenmatrix des Systems (2.1) nichtsingulär ist. Der folgende Satz gibt darauf eine Antwort.

Satz 2.1: *Falls die Funktion ψ bedingt positiv definit der Ordnung m auf $\mathbb{R}^d$ und die Matrix P injektiv ist, so ist das lineare Gleichungssystem (2.1) eindeutig lösbar.*

Obwohl dieser Satz spätestens seit Erscheinen der Arbeit [29] von Micchelli hinreichend bekannt ist, geben wir dennoch einen kurzen

Beweis: Wir nehmen an, daß der Vektor $(\lambda_H, \mu_H)^T \in \mathbb{R}^{N+Q}$ Lösung des homogenen Systems zu (2.1) sei. Dann folgt

$$\begin{aligned} A\lambda_H + P\mu_H &= 0 \qquad (2.2)\\ P^T\lambda_H &= 0. \qquad (2.3)\end{aligned}$$

Multipliziert man nun (2.2) von links mit λ_H^T, so ergibt sich unter Verwendung von (2.3) die Gültigkeit von

$$\lambda_H^T A\lambda_H + \underbrace{\lambda_H^T P}_{=0}\mu_H = \lambda_H^T A\lambda_H = 0.$$

Wegen der bedingten positiven Definitheit von ψ auf $\mathbb{R}^d$ folgt daraus $\lambda_H = 0$ und mit der Injektivität von P schließt man, daß μ_H wegen (2.2) ebenso Nullvektor ist. □

An dieser Stelle bemerken wir, daß der obige Satz die Bezeichnung „radiale Basisfunktion“ rechtfertigt, falls ψ eine radiale Funktion ist. Wir betonen nochmals, daß die Eigenschaft der Radialität hier jedoch keine Rolle spielt.

Wir wollen verdeutlichen, inwieweit die Lage der Interpolationspunkte bei der Lösbarkeit des zugrundeliegenden linearen Gleichungssystems eingeht:

Die Injektivität der Matrix P ist nämlich gleichbedeutend mit der Bedingung

$$p(x_j) = 0 \quad 1 \leq j \leq N \qquad \Longrightarrow \qquad p \equiv 0 \qquad \text{für alle } p \in \mathcal{P}_m^d \qquad (2.4)$$

an die Lage der Punkte aus X. Ein Punktesatz X, für den die Bedingung (2.4) erfüllt ist, heißt *$\mathcal{P}_m^d$-regulär*. Diese Eigenschaft sichert lediglich die Eindeutigkeit bei der Interpolation mit Polynomen aus dem Raum $\mathcal{P}_m^d$ auf diesen Daten und stellt somit keine scharfe Einschränkung an X dar.

Nun ist offensichtlich, daß die Ordnung m der bedingten positiven Definitheit von ψ auf $\mathbb{R}^d$ die Gestalt des Interpolationsproblems komplett bestimmt. Daher ist die Kenntnis der Zahl m bei gegebenem ψ von grundlegender Bedeutung.

Wir verwenden die Abkürzungen $\texttt{bpd}(m,d)$ sowie $\texttt{bpsd}(m,d)$ für die Klasse der bedingt positiv definiten bzw. semidefiniten Funktionen der Ordnung m auf $\mathbb{R}^d$ und erlauben uns die folgende triviale

Bemerkung 2.1: *Sei $d \in \mathbb{N}$. Eine stetige Funktion, die bedingt positiv (semi)definit der Ordnung m auf $\mathbb{R}^d$ ist, ist ebenso bedingt positiv (semi)definit der Ordnung $m+\ell$ auf $\mathbb{R}^d$, wobei $\ell \in \mathbb{N}$:*

$$bpd(0,d) \subset bpd(1,d) \subset \ldots \subset bpd(m,d) \subset \ldots \subset bpd(m+\ell,d)$$

$$bpsd(0,d) \subset bpsd(1,d) \subset \ldots \subset bpsd(m,d) \subset \ldots \subset bpsd(m+\ell,d).$$

□

Man beachte, daß Polynome aus $\mathcal{P}_m^d$ durch den Interpolationsansatz (2.1) unter Beachtung der obigen Bedingung (2.4) reproduziert werden. Dies kann man wegen Bemerkung 2.1 ebenso für Polynome höherer Ordnung durch entsprechendes Erweitern des Systems (2.1) und unter Aufrechterhaltung von (2.4) erreichen.

Üblicherweise geht man davon aus, daß die zu interpolierenden Daten $y_j = f(x_j)$ $(1 \leq j \leq N)$ Werte einer Funktion f seien, die in einem zu spezifizierenden Funktionenraum $\mathcal{F}$ liege. Interessant und gewissermaßen naheliegend ist dann die Frage nach Fehlerabschätzungen in bezug auf die zugrundeliegende Interpolationsmethode. Hierzu verlangt man zu einem festen Punkt $x \in \mathbb{R}^d \setminus X$ die Stetigkeit des Fehlerfunktionals $\epsilon_x : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ auf dem Funktionenraum $\mathcal{F}$, so daß man Abschätzungen folgender Form angeben kann:

$$|\epsilon_x(f)| = |f(x) - s_\psi(x)| \leq \|f\|_{\mathcal{F}} \cdot P_{\psi,X}(x). \tag{2.5}$$

Dabei bezeichnet $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$ eine (Semi-)Norm auf $\mathcal{F}$ und der Wert der *Gütefunktion* $P_{\psi,X}$ entspricht der (Semi-)Norm des Fehlerfunktionals ϵ_x in einem zu definierenden Dualraum von $\mathcal{F}$. Nach obigen Überlegungen verschwindet ϵ_x auf dem Polynomraum $\mathcal{P}_m^d$, so daß man bei der Beschreibung des Funktionenraumes $\mathcal{F}$ natürlicherweise die Forderungen $\mathcal{P}_m^d \subset \mathcal{F}$ sowie $\|p\|_{\mathcal{F}} = 0$ für alle $p \in \mathcal{P}_m^d$ im Hinblick auf die obige Fehlerabschätzung (2.5) erfüllen möchte.

Wu & Schaback [44] haben gezeigt, daß man auf dem Funktionenraum

$$\mathfrak{F}_\psi := \left\{ f \in L_1(\mathbb{R}^d) \,\Big|\, \|f\|_{\mathfrak{F}_\psi} < \infty \right\} \tag{2.6}$$

mit der Norm

$$\|f\|_{\mathfrak{F}_\psi} := \left((2\pi)^{\perp d} \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(\omega)|^2 / \varphi(\omega)\, d\omega \right)^{1/2} \tag{2.7}$$

Fehlerabschätzungen der obigen Form erhält. Wu & Schaback haben jedoch erkannt, daß der Funktionenraum $\mathfrak{F}_\psi$ mit der strikten Nebenbedingung $\|f\|_{\mathfrak{F}_\psi} < \infty$ an die gewöhnliche Fouriertransformierte einer Funktion $f \in \mathfrak{F}_\psi$ „zu klein" ist. Darüberhinaus enthält $\mathfrak{F}_\psi$ keine Polynome, da diese schließlich nicht im gewöhnlichen Sinne fouriertransformierbar sind.

Wir werden in Paragraph 6 einen Funktionenraum $\left(\mathcal{F}_\psi, \|\cdot\|_{\mathcal{F}_\psi}\right)$ konstruieren, der sich in einer natürlichen Weise aus einem allgemeineren Interpolationsansatz entwickelt. Dabei geht unsere distributionelle Charakterisierung bedingt positiv definiter Funktionen aus Paragraph 5 massiv ein.

Wir erhalten nicht nur praktische Beziehungen zwischen dem Dualraum, in dem das Fehlerfunktional liegt, und dem zugehörigen Funktionenraum $\mathcal{F}_\psi$, sondern ebenso zwischen den entsprechenden Räumen ihrer distributionellen Fouriertransformierten . Über die Beschreibung der letzteren beiden Räume bekommen wir eine explizite Darstellung unseres Funktionenraumes $\mathcal{F}_\psi$. Wir werden nicht nur zeigen, daß der Funktionenraum $\left(\mathfrak{F}_\psi, \|\cdot\|_{\mathfrak{F}_\psi}\right)$ von Wu & Schaback [44] normisometrisch in unserem Raum $\left(\mathcal{F}_\psi, \|\cdot\|_{\mathcal{F}_\psi}\right)$ eingebettet ist, sondern darüberhinaus einen isometrischen Isomorphismus zwischen $\mathcal{F}_\psi$ und einem zu beschreibenden gewichteten L^2-Raum $\mathcal{L}_\varphi^2$ konstruieren.

3 Bedingt positiv definite Funktionen

Wir haben bereits den Begriff der bedingt positiv definiten bzw. positiv definiten Funktion definiert und fassen in diesem Paragraphen die in der Literatur vorhandenen Ergebnisse über diese Klassen von Funktionen zusammen.

3.1 Positiv definite Funktionen

Zunächst stellen wir zwei elementare Eigenschaften von positiv semidefiniten geraden Funktionen vor, die sich unmittelbar aus den Definitionen ergeben:

Bemerkung 3.1: *Eine positiv semidefinite Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mit $f(-x) = f(x)$ und $f \not\equiv 0$ besitzt folgende Eigenschaften:*

(a) $f(0) > 0$

(b) $|f(x)| \leq f(0)$ *für alle* $x \in \mathbb{R}^d$. □

Aus der obigen Eigenschaft (b) erkennt man insbesondere, daß solche Funktionen beschränkt sind.

Bereits zu Beginn dieses Jahrhunderts definierte Mathias [28] den Begriff *positiv definite Funktion*, der nach unserer Terminologie mit dem Begriff der positiven Semidefinitheit übereinstimmt. Mathias verallgemeinerte in seiner Dissertation Ergebnisse über Fourier-sche Reihen von Carathéodory und Toeplitz aus dem Jahre 1911 und bewies den folgenden

Satz 3.1 (Mathias): *Falls die Fouriertransformierte $\hat{f}$ einer positiv semidefiniten geraden Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existiert, so ist diese nichtnegativ.* □

Mathias stellte in seiner Arbeit [28] darüberhinaus die Vermutung an, daß positiv semidefinite gerade Funktionen stets eine typische Integraldarstellung besitzen.
Dies wurde von Bochner [4] bestätigt, dessen Forschungsergebnisse aus den 30er Jahren die Untersuchungen positiv definiter Funktionen entscheidend vorangetrieben haben. Der folgende Satz von Bochner hat sich bis zur heutigen Zeit als grundlegend beim Studium solcher Funktionen erwiesen.

Satz 3.2 (Bochner): *Jede positiv semidefinite gerade Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist die Fouriertransformierte eines endlichen nichtnegativen Borelschen Maßes μ:*

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x}\, d\mu(\lambda).$$

Umgekehrt ist die Fouriertransformierte eines endlichen nichtnegativen Borelschen Maßes eine positiv semidefinite gerade Funktion. □

In Abschnitt 5.2 werden wir mit der Charakterisierung der Funktionenklasse $bpsd(m, d)$ eine Folgerung aus dem Hauptsatz dieser Dissertation ziehen, mit der sich für den Spezialfall $m = 0$ und $d = 1$ eine Analogie zu dem Satz von Bochner ergibt.

3.2 Charakterisierung mit vollständig monotonen Funktionen

Schoenberg nutzte die Ergebnisse von Bochner und identifizierte in seinen Veröffentlichungen [37] und [38] aus dem Jahre 1938 die Klasse der auf allen $\mathbb{R}^d$ positiv definiten stetigen radialen Funktionen mit einer anderen Funktionenklasse, der der *vollständig monotonen* stetigen Funktionen. Wir definieren zunächst den Begriff der vollständigen Monotonie und liefern anschließend eine Charakterisierung dieser Funktionenklasse, die im Jahre 1928 erstmals von Bernstein [3] angegeben wurde (siehe ebenso [43]).

Definition 3.1 *: Die Funktion $\phi : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ sei aus $C^\infty(0,\infty)$ und es gelte*

$$(-1)^\ell \phi^{(\ell)}(r) \geq 0 \qquad \ell = 0, 1, 2, \ldots$$

für alle $r \in (0,\infty)$. Dann heißt ϕ vollständig monoton auf $(0,\infty)$.

Satz 3.3 (Bernstein) *: Die Funktion $\phi : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ ist genau dann vollständig monoton auf $(0,\infty)$, wenn ϕ eine Integraldarstellung vom Laplace-Stieltjes-Typ der Form*

$$\phi(x) = \int_0^\infty e^{\perp x\lambda}\, d\mu(\lambda), \qquad x \in (0,\infty)$$

mit einer monoton steigenden Funktion μ mit $\int_0^\infty d\mu(\lambda) < \infty$ besitzt.

Wir formulieren nun den maßgeblichen Satz, der sich aus den Arbeiten [37] und [38] von Schoenberg ergibt und gewissermaßen eine Verknüpfung der Sätze von Bochner und Bernstein darstellt.

Satz 3.4 (Schoenberg) *: Die Funktionen $\psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mit $\psi(x) = \phi(\|x\|^2)$ und $\psi \not\equiv 0$ sind genau dann positiv definit auf $\mathbb{R}^d$ für alle $d \in \mathbb{N}$, wenn ϕ auf $[0,\infty)$ stetig und vollständig monoton auf $(0,\infty)$ ist.* □

Eine sehr eindrucksvolle Studie über positiv semidefinite Funktionen innerhalb eines Forschungsberichts über die „Theorie der reproduzierenden Kerne“ findet man in dem vielbeachteten Artikel [2] von Aronszajn aus dem Jahre 1950. Gleichermaßen weitreichende Untersuchungen über positiv semidefinite Funktionen mit einem interessanten distributionellen Zugang findet man in dem Buch [17] von Gel'fand & Vilenkin, wo darüberhinaus erstmals der Begriff der *bedingt positiv definiten Funktion* auftaucht. Für diese Funktionen wird dort ebenso ein distributioneller Zusammenhang hergestellt, der sich für unsere Zwecke allerdings eher als unpraktisch erweist.

In den meisten Veröffentlichungen der letzten sieben Jahre über radiale Basisfunktionen wird die Arbeit [29] von Micchelli zitiert. Dieser hat ein äußerst brauchbares hinreichendes Kriterium für die bedingte positive Definitheit einer radialen Funktion ψ auf allen $\mathbb{R}^d$ angegeben, mit dem man gleichzeitig deren entsprechende Ordnung bestimmen kann. Dabei hat Micchelli die Arbeiten [37] und [38] von Schoenberg als Grundlage seiner Untersuchungen verwendet. Wir zitieren den hier relevanten

Satz 3.5 (MICCHELLI) *: Die Funktionen $\psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mit $\psi(x) = \phi(\|x\|^2)$ und $\psi \not\equiv 0$ sind bedingt positiv definit der Ordnung m auf $\mathbb{R}^d$ für alle $d \in \mathbb{N}$, falls ϕ auf $[0, \infty)$ stetig und $(-1)^m \phi^{(m)}$ vollständig monoton auf $(0, \infty)$ ist.* □

Mithilfe der erwähnten Arbeiten von Schoenberg erhält man für den Fall $m = 0$ die entsprechende Äquivalenzaussage aus Satz 3.4, die Schoenberg ebenso für den Fall $m = 1$ zeigte. Micchelli [29] vermutete, daß man diese Äquivalenzaussage für alle $m \in \mathbb{N}_0$ aufrechterhalten kann. Erst vor kurzem wurden während der Formulierung dieser Arbeit Forschungsergebnisse von Guo, Hu & Sun [18] veröffentlicht, die Micchelli recht geben:

Satz 3.6 (GUO, HU, SUN) *: Sei $\phi : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die nicht identisch verschwinde, und sei $\psi(x) = \phi(\|x\|^2)$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$.*
Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) ψ ist bedingt positiv definit der Ordnung m auf $\mathbb{R}^d$ für alle $d \in \mathbb{N}$.

(b) $(-1)^m \phi^{(m)}$ ist vollständig monoton auf $(0, \infty)$. □

Mit den vorgestellten Ergebnissen von Micchelli [29] und Guo, Hu & Sun [18] läßt sich nun die Ordnung m der bedingten positiven Definitheit aller eingangs erwähnten radialen Basisfunktionen bestimmen:

radiale Basisfunktion		$m \in \mathbb{N}_0$
polynomials	$\psi(x) = (-1)^{\lceil \nu/2 \rceil} \|x\|^\nu$	$m > \nu/2$
thin plate splines	$\psi(x) = (-1)^{k+1} \|x\|^{2k} \log \|x\|$	$m > k$
Gaussians	$\psi(x) = e^{\perp\alpha\|x\|^2}$	$m \geq 0$
Multiquadrics	$\psi(x) = (-1)^{\lceil \nu/2 \rceil} (c^2 + \|x\|^2)^{\nu/2}$	$m > \nu/2$
inverse Multiquadrics	$\psi(x) = (c^2 + \|x\|^2)^{\nu/2}$	$m \geq 0$

Für die oben genannten radialen Funktionen ist der Nachweis der bedingten positiven Definitheit einschließlich ihrer Ordnungen mittels vollständiger Monotonie relativ einfach, kann aber u. U. für kompliziertere Typen radialer Funktionen recht schwierig bis unmöglich werden. Mit den obigen Ergebnissen bleibt weiterhin offen, wie man den Nachweis der bedingten positiven Definitheit für eine Funktion erbringt, die nicht notwendigerweise radial ist. Weiterhin ist Micchellis Charakterisierung bedingt positiv definiter Funktionen dimensionsunabhängig. Diese Tatsache schließt jedoch aus, Micchellis Kriterium zur Konstruktion einer positiv definiten radialen Funktion mit kompaktem Träger zu verwenden. Denn schließlich ist nach dem Satz 3.3 von Bernstein mit Ausnahme der Nullfunktion jede Funktion, die auf $(0, \infty)$ vollständig monoton ist, nullstellenfrei. Zur Konstruktion von radialen Basisfunktionen mit kompaktem Träger ist somit eine Charakterisierung der Funktionenklasse $bpd(m, d)$ für ein festes $d \in \mathbb{N}$ erforderlich.

Wir werden eine Theorie liefern, bei der die genannten Probleme nicht auftreten. Mit unseren Methoden erfolgt der Nachweis der bedingten positiven Definitheit einer Funktion einschließlich deren Ordnung anhand des Polverhaltens ihrer positiven verallgemeinerten Fouriertransformierten im Nullpunkt. Dabei spielt zum einen die Radialität überhaupt keine Rolle, und zum anderen ist es mittlerweise problemlos, die entsprechenden Eigenschaften verallgemeinerter Fouriertransformierter durch einen Blick in eine der zahlreichen Integraltabellen zu ermitteln. Unsere Charakterisierung bedingt positiv definiter Funktionen ist von der Raumdimension $d \in \mathbb{N}$ abhängig, und wir werden daher in der Lage sein, eine Schar von positiv definiten radialen Funktionen mit kompaktem Träger anzugeben.

4 Bedingt positiv definite Distributionen

4.1 Der Schwartzsche Raum

Für diesen gesamten Paragraphen sei die Raumdimension $d \in \mathbb{N}$ fest. Wir betrachten im folgenden Distributionen auf dem Grundraum $\mathcal{S}$ aller Funktionen aus $C^\infty(\mathbb{R}^d)$, die einschließlich ihrer Ableitungen schnell abklingen:

$$\mathcal{S} := \left\{ \gamma \in C^\infty(\mathbb{R}^d) \,\middle|\, \lim_{\|x\| \to \infty} \left| x^q D^p \gamma(x) \right| \to 0; \;\; \text{für alle } p, q \in \mathbb{N}_0^d \right\}$$

$\mathcal{S}$ heißt *Schwartzscher Raum* bzw. Raum aller *guten Funktionen*.

Wir stellen einige Definitionen sowie grundlegende Eigenschaften von $\mathcal{S}$ voran, die hier verwendet werden:

- Wir erläutern zuerst den Konvergenzbegriff in $\mathcal{S}$: Sei $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Funktionenfolge aus $\mathcal{S}$, für die folgendes gilt:

  1. Zu jedem Paar von Multiindizes p, q aus $\mathbb{N}_0^d$ gibt es eine positive Konstante C_{pq}, so daß
  $$\left| x^q D^p \gamma_n(x) \right| \leq C_{pq} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N},\; x \in \mathbb{R}^d$$
  erfüllt ist.
  2. Für jeden Multiindex $p \in \mathbb{N}_0^d$ konvergiert die Ableitung $D^p \gamma_n$ für $n \to \infty$ auf $\mathbb{R}^d$ gleichmäßig gegen Null.

  Dann heißt die Folge $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ *Nullfolge* in $\mathcal{S}$ und wir verwenden folgende Schreibweise:
  $$\lim_{n \to \infty} \gamma_n = 0 \qquad \text{oder} \qquad \gamma_n \to 0, n \to \infty.$$

  Eine Folge $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ aus $\mathcal{S}$ heißt *konvergent* gegen ein Element $\gamma \in \mathcal{S}$, falls die Folge $\{\gamma_n - \gamma\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, kurz:
  $$\lim_{n \to \infty} \gamma_n = \gamma \qquad \text{oder} \qquad \gamma_n \to \gamma, n \to \infty.$$

- Die gewöhnliche Fouriertransformation ist ein stetiger Automorphismus auf $\mathcal{S}$.

- Die Fouriertransformierte FG einer Distribution G aus dem topologischen Dualraum $\mathcal{S}'$ von $\mathcal{S}$ ist definiert durch die Abbildungsvorschrift
  $$FG(\gamma) := G(\hat{\gamma}) \qquad \text{für alle } \gamma \in \mathcal{S}.$$
  Die distributionelle Fouriertransformation F ist ein stetiger Automorphismus auf $\mathcal{S}'$.

- $\mathcal{S}$ ist bezüglich des Faltungsproduktes $*$ abgeschlossen, d. h. aus $\gamma, \beta \in \mathcal{S}$ folgt $\gamma * \beta \in \mathcal{S}$. Insbesondere gilt:

$$\begin{aligned} \widehat{\gamma * \beta} &= \hat{\gamma} \cdot \hat{\beta} \\ \widehat{\gamma * \gamma^*} &= \hat{\gamma} \cdot \overline{\hat{\gamma}} = |\hat{\gamma}|^2 \end{aligned}$$

  für alle Funktionen $\beta, \gamma \in \mathcal{S}$, wobei $\gamma^*(x) = \overline{\gamma(-x)}$.

- Es gilt die *Parsevalsche Gleichung*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \gamma(x)\beta(x)\, dx = (2\pi)^{\perp d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\gamma}(\omega)\hat{\beta}(\omega)\, d\omega$$

  für alle $\gamma, \beta \in \mathcal{S}$.

- Sei G eine Distribution aus $\mathcal{S}'$. Dann gilt ebenso die Parsevalsche Gleichung im distributionellen Sinne:

$$G(\gamma) = (2\pi)^{\perp d} FG(\hat{\gamma}) \qquad \text{für alle } \gamma \in \mathcal{S}.$$

- Eine stetige Funktion f mit höchstens polynomialem Wachstum im Unendlichen definiert eine reguläre Distribution $[f]$ auf dem Raum $\mathcal{S}$ durch die Abbildungsvorschrift

$$[f](\gamma) := (f, \gamma)_{L_2} := \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\gamma(x)\, dx \qquad \text{für alle } \gamma \in \mathcal{S}.$$

  Falls f eine klassische Fouriertransformierte besitzt, so gilt $F[f] = [\hat{f}]$.

Bemerkung 4.1*: Für eine reguläre Distribution $[f] \in \mathcal{S}'$ gilt mit der Parsevalschen Gleichung:*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\gamma(x)\gamma(y)\, dx\, dy = [f]\,(\gamma * \gamma^*) = (2\pi)^{\perp d} F[f](|\hat{\gamma}|^2)$$

□

4.2 Definitionen und Eigenschaften

Definition 4.1*: Eine Distribution $G : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ heißt bedingt positiv semidefinit der Ordnung m auf $\mathbb{R}^d$, falls die Ungleichung*

$$G(\gamma * \gamma^*) \geq 0 \tag{4.1}$$

für alle Funktionen $\gamma \in \mathcal{S}$ mit

$$\int_{\mathbb{R}^d} x^p \gamma(x) dx = 0 \qquad \textit{für alle } p \in \mathbb{N}_0^d \textit{ mit } |p| < m \tag{4.2}$$

erfüllt ist. G heißt bedingt positiv definit der Ordnung m auf $\mathbb{R}^d$, falls G bedingt positiv semidefinit der Ordnung m auf $\mathbb{R}^d$ ist, und zusätzlich Gleichheit in (4.1) genau dann gilt, wenn $\gamma \equiv 0$.

Eine bedingt positiv (semi)definite Distribution der Ordnung 0 auf $\mathbb{R}^d$ heißt positiv (semi)-definit auf $\mathbb{R}^d$.

Wir benutzen die Abkürzung $BPSD(m,d)$ für die Klasse der bedingt positiv semidefiniten sowie $BPD(m,d)$ für die Klasse der bedingt positiv definiten Distributionen der Ordnung m auf $\mathbb{R}^d$.

Aus dieser Definition folgt sofort die triviale

Bemerkung 4.2: *Eine bedingt positiv (semi)definite Distribution der Ordnung m auf $\mathbb{R}^d$ ist ebenso bedingt positiv (semi)definit der Ordnung $m+\ell$ auf $\mathbb{R}^d$, wobei ℓ eine natürliche Zahl ist:*

$$BPSD(0,d) \subset BPSD(1,d) \subset \ldots \subset BPSD(m,d) \subset \ldots \subset BPSD(m+\ell,d)$$

$$BPD(0,d) \subset BPD(1,d) \subset \ldots \subset BPD(m,d) \subset \ldots \subset BPD(m+\ell,d).$$

□

Wir erkennen, daß alle guten Funktionen mit der Eigenschaft (4.2) einen linearen Teilraum des Schwartzschen Raumes $\mathcal{S}$ bilden. Diesen benennen wir mit $\mathcal{S}_m^\perp$. Ebenso bildet die Menge aller Fouriertransformierten von Funktionen aus $\mathcal{S}_m^\perp$ einen linearen Teilraum von $\mathcal{S}$, den wir mit $\widehat{\mathcal{S}_m^\perp}$ bezeichnen. Wir geben die Gestalt dieser Räume folgendermaßen an:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_m^\perp &:= \left\{ \gamma \in \mathcal{S} \,\middle|\, [x^p](\gamma) = 0, \text{ für alle } p \in \mathbb{N}_0^d \text{ mit } |p| < m \right\} \\ \widehat{\mathcal{S}_m^\perp} &:= \left\{ \hat{\gamma} \in \mathcal{S} \,\middle|\, \gamma \in \mathcal{S}_m^\perp \right\} \end{aligned} \tag{4.3}$$

Eine nützliche Charakterisierung von $\widehat{\mathcal{S}_m^\perp}$ liefert der folgende

Satz 4.1: *Es gilt:*

$$\widehat{\mathcal{S}_m^\perp} = \left\{ \hat{\gamma} \in \mathcal{S} \,\middle|\, D^p \hat{\gamma}(\omega)\Big|_{\omega=0} = 0, \ \textit{für alle } p \in \mathbb{N}_0^d \ \textit{mit } |p| < m \right\}.$$

Beweis: Sei $\gamma \in \mathcal{S}_m^\perp$. Dann gilt für alle Multiindizes $p \in \mathbb{N}_0^d$ mit $|p| < m$:

$$0 = [x^p](\gamma) = (2\pi)^{\perp d} F[x^p](\hat{\gamma}) = i^{|p|} D^p \delta(\hat{\gamma}) = (-i)^{|p|} D^p \hat{\gamma}(\omega)\Big|_{\omega=0}.$$

□

4.3 Typische Funktionen aus den Räumen $\mathcal{S}_m^\perp$ und $\widehat{\mathcal{S}_m^\perp}$

Wir wollen nun einige typische Funktionenscharen aus dem Raum $\widehat{\mathcal{S}_m^\perp}$ angeben, die wir bei unseren weiteren Betrachtungen verwenden werden. Selbstverständlich stellen deren inverse Fouriertransformierte typische Funktionen aus $\mathcal{S}_m^\perp$ dar. Wir ordnen diesen Funktionen Bezeichnungen zu, so daß bei unseren weiteren Untersuchungen klar sein wird, welcher Typ von Funktionen aus $\widehat{\mathcal{S}_m^\perp}$ bzw. $\mathcal{S}_m^\perp$ jeweils gemeint ist.

4.3.1 Gute Funktionen mit kompaktem Träger

Betrachtet man die Charakterisierung in Satz 4.1, so sieht man, daß eine gute Funktion $\hat{\gamma}$, deren Träger den Nullpunkt nicht enthält, offensichtlich die Forderung

$$D^p \hat{\gamma}(\omega)\Big|_{\omega=0} = 0$$

für alle Multiindizes $p \in \mathbb{N}_0^d$ erfüllt und somit im Raum $\widehat{\mathcal{S}_m^\perp}$ liegt.
Wir wollen nun gute Funktionen mit beliebig kleinem Träger, der die Null nicht enthält, konstruieren. Wir bemerken zuerst, daß für jede reelle positive Zahl α die Funktionen

$$\hat{\gamma}_\alpha^{(\omega_0)}(\omega) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{\alpha \perp \|\omega \perp \omega_0\|^2}\right) & \|\omega - \omega_0\| < \alpha \\ 0 & \|\omega - \omega_0\| \geq \alpha \end{cases} \tag{4.4}$$

im Raum $\mathcal{D}$ aller Funktionen aus $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit kompaktem Träger liegen, und es gilt:

$$supp\ \hat{\gamma}_\alpha^{(\omega_0)} = \overline{B_\alpha}(\omega_0) := \{\omega \in \mathbb{R}^d \,\big|\, \|\omega - \omega_0\| \leq \alpha\}.$$

Falls insbesondere $0 \notin supp\ \hat{\gamma}_\alpha^{(\omega_0)}$ gilt, so liegt $\hat{\gamma}_\alpha^{(\omega_0)}$ in $\widehat{\mathcal{S}_m^\perp}$. Da wir sowohl den Aufpunkt ω_0 als auch die positive Zahl α beliebig wählen können, haben wir bereits eine Schar von guten Funktionen aus $\widehat{\mathcal{S}_m^\perp}$ gefunden, die unseren gestellten Anforderungen genügt. Wir werden solche Funktionen zu gegebenem $\omega_0 \in \mathbb{R}^d$ sowie $\alpha > 0$ stets mit $\hat{\gamma}_\alpha^{(\omega_0)}$ bezeichnen.

4.3.2 δ-erzeugende Funktionenfolgen

Um nun Funktionen aus $\widehat{\mathcal{S}_m^\perp}$ zu finden, deren Träger den Nullpunkt enthalten, wählen wir für alle $n \in \mathbb{N}$ den Ansatz

$$\hat{\gamma}_n^{(u)}(\omega) := u(\omega) \cdot e^{\perp n\|\omega \perp \omega_0\|^2/2} \tag{4.5}$$

bestehend aus einem Produkt zwischen einer Funktion $u \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit höchstens polynomialem Wachstum im Unendlichen und einem Faktor, der grob gesagt eine δ_{ω_0}-erzeugende Folge darstellt. Die Funktionen $\hat{\gamma}_n^{(u)}$ liegen für alle $n \in \mathbb{N}$ offensichtlich im Raum $\mathcal{S}$.
Um sicherzustellen, daß jede Funktion $\hat{\gamma}_n^{(u)}$ im Raum $\widehat{\mathcal{S}_m^\perp}$ liegt, müssen wir die Gültigkeit von

$$D^p \hat{\gamma}_n^{(u)}(\omega)\Big|_{\omega=0} = 0 \quad \text{für alle } p \in \mathbb{N}_0^d \text{ mit } |p| < m$$

erfüllen.
Wie man diese Bedingung als Forderung an die Funktion u schreiben kann, ersieht man aus dem folgenden

Lemma 4.1: *Sei $\hat{\gamma}_n^{(u)}$ eine Funktion der Gestalt (4.5).*
Setze

$$\begin{aligned} v_0(\omega) &:= u(\omega) \\ v_{q+e_\ell}(\omega) &:= (-n\,(\omega_\ell - \omega_0^{e_\ell}))\,v_q(\omega) + \frac{\partial}{\partial\omega_\ell} v_q(\omega). \end{aligned}$$

Dann gilt:

$$D^p \hat{\gamma}_n^{(u)}(\omega) = v_p(\omega) e^{\perp n\|\omega\perp\omega_0\|^2/2}.$$

□

Die rekursiv definierten Funktion v_p haben eine Darstellung der Form

$$v_p(\omega) = \sum_{|q|<|p|} a_q D^q u(\omega) + D^p u(\omega)$$

mit gewissen Koeffizienten $a_q \in \mathbb{R}$, so daß wir den für unsere Zwecke wichtigen Schluß ziehen können mit der

Folgerung 4.1: *Sei $\hat{\gamma}_n^{(u)}$ eine Funktion der Gestalt (4.5).*
Falls

$$D^q u(\omega)\Big|_{\omega=0} = 0 \qquad \textit{für alle } q \in \mathbb{N}_0^d \textit{ mit } |q| < |p|,$$

so gilt:

$$D^p \hat{\gamma}_n^{(u)}(\omega)\Big|_{\omega=0} = D^p u(\omega)\Big|_{\omega=0} \cdot e^{\perp n\|\omega_0\|^2/2}.$$

□

Beispielsweise gilt für die Funktion $u(\omega) = \omega^q$:

$$D^p u(\omega)\Big|_{\omega=0} = D^p \omega^q\Big|_{\omega=0} = \begin{cases} 0 & p \neq q \\ q! & p = q \end{cases}$$

und somit liegen für $|q| \geq m$ sämtliche Funktionen der Folge $\left\{\hat{\gamma}_n^{(\omega^q)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\hat{\gamma}_n^{(\omega^q)}(\omega) := \omega^q \cdot e^{\perp n\|\omega\perp\omega_0\|^2/2}$$

im Raum $\widehat{\mathcal{S}_m^\perp}$.

4.3.3 Approximierende an Symbolfunktionen

Seien paarweise verschiedene Punkte $x_1, \ldots, x_N \subset \mathbb{R}^d$ sowie reelle Zahlen $c_1, \ldots, c_N$ mit der Eigenschaft

$$\sum_{j=1}^{N} c_j x_j^p = 0 \qquad |p| < m \tag{4.6}$$

gegeben. Dann bezeichnen wir die Funktion

$$\sigma_{c,X}(\omega) := \sum_{j=1}^{N} c_j e^{\perp i x_j^T \omega}$$

als *Symbolfunktion.*

Wir geben eine Funktionenfolge $\left\{\hat{\gamma}_n^{(\sigma)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ an, durch die $\sigma_{c,X}$ beliebig gut punktweise approximiert wird:

$$\hat{\gamma}_n^{(\sigma)}(\omega) := \sum_{j=1}^{N} c_j e^{\perp\|\omega\|^2/(4n)} \cdot e^{\perp i x_j^T \omega} = \sigma_{c,X}(\omega) \cdot e^{\perp\|\omega\|^2/(4n)}.$$

Unter der Voraussetzung (4.6) folgt

$$D^p \sigma_{c,X}(\omega)\Big|_{\omega=0} = 0 \qquad \text{für alle } p \in \mathbb{N}_0^d \text{ mit } |p| < m.$$

Mit der Charakterisierung aus Satz 4.1 erkennt man nun, daß sämtliche Funktionen der Folge $\{\gamma_n^{(\sigma)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit (4.6) im Raum $\widehat{\mathcal{S}_m^\perp}$ liegen.

Die Funktionenfolge bestehend aus den inversen Fouriertransformierten dieser Funktionen liegt selbstverständlich im Raum $\mathcal{S}_m^\perp$, so daß wir folgenden Satz formulieren können:

Satz 4.2: *Seien paarweise verschiedene Punkte $x_1, \ldots, x_N \subset \mathbb{R}^d$ und reelle Zahlen $c_1, \ldots, c_N$ mit der Eigenschaft (4.6) gegeben.*
Dann liegen sämtliche Funktionen der Folge $\left\{\gamma_n^{(\sigma)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch

$$\gamma_n^{(\sigma)}(x) := \sum_{j=1}^{N} c_j \left(\frac{n}{\pi}\right)^{d/2} e^{\perp n\|x \perp x_j\|^2},$$

im Raum $\mathcal{S}_m^\perp$. □

4.4 Verallgemeinerte Fouriertransformierte radialer Basisfunktionen

Wir haben bereits in der Einleitung den Begriff der *verallgemeinerten Fouriertransformierten* einer radialen Basisfunktion ψ und ebenso in diesem Paragraph den Ausdruck *distributionelle Fouriertransformierte* verwendet. Wir unterscheiden zwischen diesen beiden Begriffen sehr wohl und wollen den feinen, aber wichtigen Unterschied an dieser Stelle explizit machen:

Von den in der Einleitung aufgeführten radialen Basisfunktionen sind lediglich die *Gaussians* und die *inverse Multiquadrics* im klassischen Sinne fouriertransformierbar. Für die übrigen Typen von radialen Basisfunktionen divergiert jedoch das Integral

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{\perp i x^T \omega} \psi(x)\, dx$$

bereits für $\omega = 0$, da diese Funktionen nicht im Raum $L_1(\mathbb{R}^d)$ aller absolut integrierbaren Funktionen liegen. Wie schon in der Einleitung erwähnt, weisen sämtliche Typen von radialen Basisfunktionen im Unendlichen höchstens ein polynomiales Wachstum auf. Nach den Bemerkungen aus Abschnitt 4.1 können wir somit jeder radialen Basisfunktion ψ eine reguläre Distribution $[\psi] \in \mathcal{S}'$ zuordnen. Mit den dortigen Ausführungen besitzt $[\psi]$ eine Fouriertransformierte $F[\psi] \in \mathcal{S}'$, da die distributionelle Fouriertransformation F ein Automorphismus auf $\mathcal{S}'$ ist. Wir bezeichnen $F[\psi]$ naheliegenderweise als *distributionelle Fouriertransformierte* von ψ.

Wir fügen nun den in der Einleitung erwähnten typischen Eigenschaften radialer Basisfunktionen eine wichtige Beobachtung hinzu, die im folgenden von großer Bedeutung sein wird:

Für alle in der Einleitung aufgeführten radialen Basisfunktionen ψ stimmt die distributionelle Fouriertransformierte $F[\psi]$ auf $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ mit einer stetigen Funktion φ überein, d. h. es gilt

$$F[\psi](\gamma) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\omega)\gamma(\omega)\, d\omega \qquad \text{für alle } \gamma \in \mathcal{S} \text{ mit } 0 \notin \mathit{supp}\,\gamma. \tag{4.7}$$

Wir bezeichnen die Funktion $\varphi \in C(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ als *verallgemeinerte Fouriertransformierte* von ψ und formulieren die selbstverständliche

Bemerkung 4.3: *Sei f eine Funktion, die im klassischen Sinne fouriertransformierbar ist. Dann stimmt die verallgemeinerte Fouriertransformierte von f auf $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ mit der klassischen Fouriertransformierten $\hat{f}$ von f überein.* □

Wir geben nun die verallgemeinerten Fouriertransformierten aller radialen Basisfunktionen an, die bisher untersucht wurden. Diese werden beispielsweise im Buch [16] von Gel'fand & Shilov berechnet (siehe ebenso [26]).

radiale Basisfunktion $\psi(x)$	verallgemeinerte Fouriertransformierte $\varphi(\omega)$
$(-1)^{\lceil \nu/2 \rceil} \|x\|^{\nu}, \nu > 0, \nu \notin 2\mathbb{N}$	$2^{d+\nu} \pi^{d/2} \frac{\Gamma((d+\nu)/2)}{\Gamma(-\nu/2)} \|\omega\|^{\perp d \perp \nu}$
$(-1)^{k+1} \|x\|^{2k} \log \|x\|, k \in \mathbb{N}$	$2^{d+2k\perp 1} \pi^{d/2} \Gamma(d/2+k)\, k! \|\omega\|^{\perp d \perp 2k}$
$e^{\perp \alpha \|x\|^2}, \alpha > 0$	$\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{d/2} e^{\perp \|\omega\|^2/(4\alpha)}$
$(-1)^{\lceil \nu/2 \rceil} \left(c^2 + \|x\|^2\right)^{\nu/2}$, $\nu > 0, \nu \notin 2\mathbb{N}, c \neq 0$	$(-1)^{\lceil \nu/2 \rceil} \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(-\nu/2)} K_{(d+\nu)/2}(c\|\omega\|) \left(\frac{\|\omega\|}{2c}\right)^{\perp(d+\nu)/2}$
$\left(c^2 + \|x\|^2\right)^{\nu/2}$, $-d < \nu < 0, \nu \notin 2\mathbb{Z}, c \neq 0$	$\frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(-\nu/2)} K_{(d+\nu)/2}(c\|\omega\|) \left(\frac{\|\omega\|}{2c}\right)^{\perp(d+\nu)/2}$

In der obigen Tabelle bezeichnet K_η die modifizierte Besselfunktion. Eigenschaften dieser Funktionen findet man beispielsweise bei [1].

Auf das qualitative Verhalten der einzelnen Funktionen φ wird im Übersichtsartikel [33] von Powell hingewiesen. Wir führen markante Eigenschaften auf, die alle verallgemeinerten Fouriertransformierten aus der obigen Tabelle gemeinsam haben.

Beobachtung 4.1*: Die verallgemeinerten Fouriertransformierten φ aller aufgeführten radialen Basisfunktionen ψ*

(a) weisen höchstens im Urprung ein Polverhalten auf, wobei dieses Polverhalten algebraischer Natur ist,

(b) sind um Unendlich integrierbar,

(c) sind auf $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ positiv.

Wir wollen die obigen Eigenschaften im Auge behalten und werden diese in einer Voraussetzung präzisieren, unter der wir eine praktische Charakterisierung bedingt positiv definiter Funktionen herleiten.

4.5 Regularisierung singulärer Distributionen

Wir knüpfen an den vorigen Abschnitt an und gehen davon aus, daß die Funktion f die distributionelle Fouriertransformierte $F[f] \in \mathcal{S}'$ und die verallgemeinerte Fouriertransformierte $\hat{f}$ besitze. Nach der Terminologie des letzten Abschnitts stimmt die Distribution $F[f] \in \mathcal{S}'$ mit der Funktion $\hat{f} \in C(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ auf $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ gemäß (4.7) überein:

$$F[f](\gamma) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\omega)\gamma(\omega)\, d\omega \qquad \text{für alle } \gamma \in \mathcal{S} \text{ mit } 0 \notin \mathit{supp}\, \gamma. \tag{4.8}$$

Wir wollen einen Zusammenhang zwischen $F[f]$ und $\hat{f}$ unter der Annahme, daß $\hat{f}$ die Eigenschaft (a) der Beobachtung 4.1 aus dem vorigen Abschnitt besitze, herstellen. Wir präzisieren diese Eigenschaft mit der

Voraussetzung 4.1: *Die Funktion $\hat{f} \in C(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ besitze höchstens eine algebraische Singularität im Nullpunkt, so daß es eine minimale Zahl $s = s(\hat{f}) \in \mathbb{N}_0$ gibt, mit der die Funktion $\hat{f}(\omega)\|\omega\|^s$ lokal integrierbar ist, d. h. für jedes $R > 0$ existiert das Integral*

$$\int_{B_R(0)} \|\omega\|^s \hat{f}(\omega)\, d\omega$$

über die Kugel $B_R(0)$ mit Radius R um Null.

Aus der Theorie der Distributionen wissen wir, daß man der Funktion $\hat{f}$ unter der obigen Voraussetzung 4.1 auf sinnvolle Weise eine Distribution $G_{\hat{f}} \in \mathcal{S}'$ zuordnen kann, die auf $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ mit $\hat{f}$ übereinstimmt, so daß

$$G_{\hat{f}}(\gamma) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\omega)\gamma(\omega)\, d\omega \qquad \text{für alle } \gamma \in \mathcal{S} \text{ mit } 0 \notin \mathit{supp}\, \gamma$$

gilt. Distributionen aus $\mathcal{S}'$ mit dieser Eigenschaft bezeichnet man als eine *Regularisierung* von $\hat{f}$. Somit stellt $F[f]$ ebenso eine Regularisierung von $\hat{f}$ dar. Eine Regularisierung ist im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt, aber es gilt der folgende Satz, den man beispielsweise im Buch [23] von Jantscher findet.

Satz 4.3: *Die Funktion $\hat{f}$ erfülle die Voraussetzung 4.1. Die Distribution $G_{\hat{f}} \in \mathcal{S}'$ sei eine Regularisierung von $\hat{f}$. Dann besitzen alle Regularisierungen von $\hat{f}$ die Gestalt $G_{\hat{f}} + T_\delta$, wobei T_δ eine endliche Linearkombination der Diracschen δ-Distribution und deren Ableitungen darstellt.* □

Wir sind in Lage, eine spezielle Schar von Regularisierungen $G_{\hat{f}}^{(\alpha)} \in \mathcal{S}'$ von $\hat{f}$ sofort anzugeben:

$$G_{\hat{f}}^{(\alpha)}(\gamma) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\omega) \left(\gamma(\omega) - \sum_{|q|<s} \frac{D^q\gamma(\omega)\Big|_{\omega=0}}{q!}\, \omega^q \cdot H\left(1 - \frac{\|\omega\|}{\alpha}\right)\right) d\omega. \tag{4.9}$$

Dabei bezeichnet α einen positiven reellen Parameter, und die Abbildung $H : \mathbb{R} \to \{0, 1\}$ mit

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0 \\ 1 & \text{für } t > 0 \end{cases}$$

heißt *Heaviside-Funktion.*

Offensichtlich ist der obige Ausdruck für alle $\gamma \in \mathcal{S}$ definiert und $G_{\hat{f}}^{(\alpha)}$ stimmt auf $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ mit $\hat{f}$ überein.

Solche Regularisierungen hängen selbstverständlich von der Wahl der positiven Zahl α ab. Man kann jedoch zeigen, daß zwei verschiedene Regularisierungen *dieser Form* sich lediglich um eine Linearkombination von δ-Funktionalen und deren Ableitungen bis zur Höchstordnung s unterscheiden. Wir wollen diese Tatsache in der folgenden Voraussetzung berücksichtigen.

Voraussetzung 4.2: *Sei f eine stetige Funktion, die eine reguläre Distribution $[f] \in \mathcal{S}'$ definiere. Es gebe eine Funktion $\hat{f} \in C(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ mit den folgenden Eigenschaften:*

(a) $\hat{f}$ erfüllt die Voraussetzung 4.1 mit der (minimalen) Zahl $s = s(\hat{f}) \in \mathbb{N}_0$.

(b) Die Funktion $\hat{f}$ stimmt auf $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ mit $F[f] \in \mathcal{S}'$ überein, so daß für alle $\hat{\gamma} \in \mathcal{S}$ gilt:

$$\begin{aligned} F[f](\hat{\gamma}) \quad &= \quad \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\omega) \left(\hat{\gamma}(\omega) - \sum_{|q|<s} \frac{D^q \hat{\gamma}(\omega)\big|_{\omega=0}}{q!} \, \omega^q \cdot H\left(1 - \frac{\|\omega\|}{\alpha}\right) \right) d\omega \\ &\quad + \sum_{|q|<s} a_q D^q \hat{\gamma}(\omega)\Big|_{\omega=0}. \end{aligned} \tag{4.10}$$

In der obigen Regularisierung von $F[f]$ bezeichnet α eine positive reelle Zahl und die Zahlen $a_q \in \mathbb{R}$ sind beliebig.

Unter dieser Voraussetzung werden wir in der Lage sein, bedingt positiv definite stetige Funktionen mit Hilfe der Eigenschaften ihrer verallgemeinerten Fouriertransformierten zu charakterisieren.

Wir wollen jedoch zunächst zwei wichtige Feststellungen treffen, die sich aus der obigen Voraussetzung ergeben. Die erste wird uns erlauben, (4.10) durch eine äquivalente Forderung zu ersetzen.

Bemerkung 4.4: *Sei f eine Funktion, die eine reguläre Distribution $[f] \in \mathcal{S}'$ definiere. Die Gestalt der distributionellen Fouriertransformierten $F[f] \in \mathcal{S}'$ ist genau dann durch eine Regularisierung der Form (4.10) beschrieben, wenn die folgende Gleichung gilt:*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\gamma(x)\, dx = (2\pi)^{\perp d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\omega)\hat{\gamma}(\omega)\, d\omega \qquad \textit{für alle } \gamma \in \mathcal{S}_s^{\perp}. \tag{4.11}$$

Beweis: (4.11) wird offensichtlich durch (4.10) impliziert.

Falls (4.11) gilt, so stimmt die distributionelle Fouriertransformierte $F[f]$ von $[f]$ mit der stetigen Funktion $\hat{f}$ auf $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ gemäß (4.8) überein. Somit ist die Gestalt von $F[f]$ nach Satz 4.3 bis auf eine endliche Linearkombination T_δ der Diracschen δ-Distribution und deren Ableitungen durch (4.10) bestimmt. Wegen der Gültigkeit von (4.11) beinhaltet T_δ jedoch ausschließlich Ableitungen der δ-Distribution bis zur Höchtordnung s. Somit nimmt $F[f]$ die Gestalt (4.10) an. $\square$

Wir formulieren eine weitere wichtige Bemerkung, mit der es unter einer weiteren Annahme möglich ist, auf das asymptotische Wachstumsverhalten im Unendlichen einer Funktion f zu schließen, die die Voraussetzung 4.2 erfüllt.

Bemerkung 4.5: *Die Funktion f erfülle die Voraussetzung 4.2. Weiterhin sei die verallgemeinerte Fouriertransformierte $\hat{f}$ von f um Unendlich integrierbar. Dann wächst f im Unendlichen höchstens wie ein Polynom vom Grad s:*

$$f(x) = \mathcal{O}\left(\|x\|^s\right), \quad \|x\| \to \infty$$

Beweis: Für alle $\gamma \in \mathcal{S}$ gilt mit (4.10)

$$(2\pi)^d [f](\gamma) = (2\pi)^d \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\gamma(x)\,dx = F[f](\hat{\gamma})$$

$$= \int_{B_\alpha(0)} \hat{f}(\omega) \left(\hat{\gamma}(\omega) - \sum_{|q|<s} \frac{D^q \hat{\gamma}(\omega)\big|_{\omega=0}}{q!}\,\omega^q \right) d\omega$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^d \setminus B_\alpha(0)} \hat{f}(\omega)\hat{\gamma}(\omega)\,d\omega + \sum_{|q|<s} a_q D^q \hat{\gamma}(\omega)\Big|_{\omega=0}$$

$$= \int_{B_\alpha(0)} \hat{f}(\omega) \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{\perp i x^T \omega}\gamma(x)\,dx - \sum_{|q|<s} \frac{\omega^q}{q!} \left(D^q_\omega \int_{\mathbb{R}^d} e^{\perp i x^T\omega}\gamma(x)\,dx\Big|_{\omega=0} \right) \right) d\omega$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^d \setminus B_\alpha(0)} \hat{f}(\omega) \int_{\mathbb{R}^d} e^{\perp i x^T\omega}\gamma(x)\,dx\,d\omega + \sum_{|q|<s} a_q D^q_\omega \int_{\mathbb{R}^d} e^{\perp i x^T\omega}\gamma(x)\,dx\Big|_{\omega=0}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \left\{ \int_{B_\alpha(0)} \hat{f}(\omega) \left(e^{\perp i x^T\omega} - \sum_{|q|<s} \frac{D^q_\omega e^{\perp i x^T\omega}\big|_{\omega=0}}{q!}\,\omega^q \right) d\omega \right.$$

$$\left. + \int_{\mathbb{R}^d \setminus B_\alpha(0)} \hat{f}(\omega) e^{\perp i x^T\omega}\,d\omega + \sum_{|q|<s} a_q D^q_\omega e^{\perp i x^T\omega}\Big|_{\omega=0} \right\} \gamma(x)\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \left\{ \int_{B_\alpha(0)} \hat{f}(\omega) \left(\sum_{|q|=s} \frac{D^q_\omega e^{\perp i (hx)^T\omega}}{q!}\,\omega^q \right) d\omega \right.$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^d \setminus B_\alpha(0)} \hat{f}(\omega) e^{\perp i x^T \omega} \, d\omega + \sum_{|q|<s} a_q D_\omega^q e^{\perp i x^T \omega} \Big|_{\omega=0} \Bigg\} \gamma(x) \, dx.$$

Unter der Voraussetzung 4.2 und mit der Integrierbarkeit von $\hat{f}$ um Unendlich sind die jeweiligen Vertauschungen der Integrationsreihenfolge mit dem Satz von Fubini erlaubt. Weiterhin wurde in der vorletzten Zeile die Lagrangesche Restglied-Darstellung der Taylorreihen-Entwicklung verwendet, h bezeichnet somit eine reelle Zahl mit $0 \leq h \leq 1$.

Die stetige Funktion f ist durch ihre reguläre Distribution $[f] \in \mathcal{S}'$ eindeutig bestimmt und somit folgt

$$(2\pi)^d f(x) =$$

$$\left(\sum_{|q|=s} \frac{(-ihx)^q}{q!} \int_{B_\alpha(0)} \hat{f}(\omega) e^{\perp i (hx)^T \omega} \omega^q \, d\omega + \int_{\mathbb{R}^d \setminus B_\alpha(0)} \hat{f}(\omega) e^{\perp i x^T \omega} \, d\omega + \sum_{|q|<s} a_q (-ix)^q \right).$$

Man erhält insgesamt die Behauptung dieser Bemerkung. □

Mit Bemerkung 4.4 erkennt man, daß unsere Voraussetzung 4.2 mit der *"Basic Hypothesis"* des unveröffentlichten Manuskripts [26] von Madych & Nelson fast übereinstimmt. Die Voraussetzung von Madych & Nelson ist (scheinbar) stärker, da dort zusätzlich die Positivität der verallgemeinerten Fouriertransformierten, die Teil (c) unserer Beobachtung 4.1 entspricht, sowie deren Integrierbarkeit um Unendlich gefordert werden. Wir haben diese beiden Punkte in Voraussetzung 4.2 aus gutem Grund weggelassen. Wir werden zeigen, daß man unter Voraussetzung 4.2 an eine bedingt positiv definite Funktion f auf die Nichtnegativität ihrer verallgemeinerten Fouriertransformierten $\hat{f} \not\equiv 0$ schließen kann. Diese Eigenschaft ist für alle praktischen Absichten, die wir verfolgen, völlig ausreichend. Weiterhin werden wir erkennen, daß man die zusätzliche Voraussetzung der Integrierbarkeit von $\hat{f}$ um Unendlich aus der Bemerkung 4.5 für bedingt positiv definite reguläre Distributionen fallen lassen kann.

4.6 Pol- und Werteverhalten der Fouriertransformierten

Wir wenden uns nun wieder den bedingt positiv definiten regulären Distributionen zu. Wir werden sehen, daß man unter der Voraussetzung 4.2 wichtige Aussagen über das Pol- und Werteverhalten der verallgemeinerten Fouriertransformierten von Funktionen treffen kann, die eine bedingt positiv definite reguläre Distribution erzeugen.

Wir beginnen mit Untersuchungen über das Werteverhalten und formulieren

Satz 4.4: *Die Funktion f erzeuge eine reguläre Distribution $[f] \in \mathcal{S}'$ und besitze die Funktion $\hat{f} \in C(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ als verallgemeinerte Fouriertransformierte, so daß (4.8) gilt.*

Falls f eine bedingt positiv semidefinite reguläre Distribution $[f]$ erzeugt, so nimmt $\hat{f}$ auf $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ ausschließlich nichtnegative Werte an:

$$\hat{f}(\omega) \geq 0 \qquad \text{für alle } \omega \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}.$$

Falls $[f]$ sogar bedingt positiv definit ist, dann nimmt $\hat{f}$ auf $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ fast überall positive Werte an:

$$\hat{f}(\omega) > 0 \qquad \textit{für alle } \omega \in \mathbb{R}^d \setminus (\{0\} \cup Z),$$

wobei $Z \subset \mathbb{R}^d$ eine Menge vom Maß Null bezeichnet.

Beweis: Wir zeigen zunächst, daß $\hat{f}$ auf $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ in beiden Fällen nichtnegativ ist. Dazu nehmen wir an, daß es einen Punkt $\omega_0 \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ gebe mit $\hat{f}(\omega_0) < 0$. Wegen der Stetigkeit von $\hat{f}$ gibt es eine hinreichend kleine offene Umgebung $U = U(\omega_0)$ von ω_0 mit $0 \notin U$ und

$$\hat{f}(\omega) < 0 \qquad \text{für alle } \omega \in U.$$

Wir betrachten nun eine Funktion $\hat{\gamma}_\alpha^{(\omega_0)}$ der Gestalt (4.4) und wählen dabei den Wert von α hinreichend klein, so daß

$$supp\ \hat{\gamma}_\alpha^{(\omega_0)} \subset U$$

gilt. Dann folgt aber für $\hat{\gamma}_\alpha := \hat{\gamma}_\alpha^{(\omega_0)}$ mit Gleichung (4.8) die Gültigkeit von

$$(2\pi)^d[f](\gamma_\alpha * \gamma_\alpha^*) = F[f](|\hat{\gamma}_\alpha|^2) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\omega)|\hat{\gamma}_\alpha(\omega)|^2\, d\omega = \int_U \hat{f}(\omega)|\hat{\gamma}_\alpha(\omega)|^2\, d\omega < 0 \tag{4.12}$$

im Widerspruch zur bedingten positiven Semi-Definitheit von $[f]$.

Sei nun $[f]$ bedingt positiv definit. Nehmen wir an, daß $\hat{f}$ in einem Punkt $\omega_0 \neq 0$ eine Nullstelle besitze, so daß $\hat{f}(\omega_0) = 0$ gilt. Dann können wir zeigen, daß es keine offene Umgebung von ω_0 gibt, auf der $\hat{f}$ identisch verschwindet, d. h. für jede offene Umgebung U von ω_0 mit $0 \notin U$ gilt:

$$\hat{f}(\omega)\Big|_U \not\equiv 0.$$

Anderenfalls kann man eine Funktion $\hat{\gamma}_\alpha = \hat{\gamma}_\alpha^{(\omega_0)}$ mit $supp\ \hat{\gamma}_\alpha^{(\omega_0)} \subset U$ finden, so daß der Ausdruck

$$[f](\gamma_\alpha * \gamma_\alpha^*) = (2\pi)^{-d} \int_U \hat{f}(\omega)|\hat{\gamma}_\alpha(\omega)|^2\, d\omega \tag{4.13}$$

verschwindet. Da $[f]$ bedingt positiv definit ist, darf dies aber dann und nur dann der Fall sein, wenn die Funktion $\hat{\gamma}_\alpha^{(\omega_0)}$ identisch verschwindet. Somit haben wir einen Widerspruch zur obigen Annahme konstruiert. □

Im obigen Beweis dürfen wir die Gleichung

$$F[f](|\hat{\gamma}|^2) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\omega)|\hat{\gamma}(\omega)|^2\, d\omega \tag{4.14}$$

für Funktionen $\hat{\gamma}$ mit $0 \notin supp\ \hat{\gamma}$ wegen (4.8) ohne weiteres verwenden. Falls f die Voraussetzung 4.2 erfüllt, so gilt diese Gleichung wegen Bemerkung 4.4 sogar für alle Funktionen $\hat{\gamma}$ mit $|\hat{\gamma}|^2 \in \widehat{\mathcal{S}_s^\perp}$. Wir machen nun eine äußerst interessante und nützliche Beobachtung, die es uns erlauben wird, die obige Gleichung (4.14) für reguläre Distributionen $[f] \in BPSD(m,d)$ sowie $\hat{\gamma} \in \widehat{\mathcal{S}_m^\perp}$ unter der Voraussetzung 4.2 zu verwenden.

Satz 4.5: *Die Funktion f erfülle die Voraussetzung 4.2. Weiterhin erzeuge f eine bedingt positiv semidefinite reguläre Distribution $[f]$ der Ordnung m auf $\mathbb{R}^d$. Dann gilt: $m \geq s/2$.*

Beweis: Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, daß $s/2 > m \geq 0$ gelte. Dann ist insbesondere s positiv, so daß $\hat{f}$ wegen Voraussetzung 4.2 ein algebraisches Polverhalten im Nullpunkt hat. Mit Bemerkung 4.2 nehmen wir nun ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, daß m größtmöglich mit der Eigenschaft $m < s/2$ sei.

Wir haben zwei Fälle zu unterscheiden:

- Sei s eine ungerade natürliche Zahl. Dann gilt $m = \lfloor s/2 \rfloor = (s-1)/2$ und somit $s = 2m+1$. Nun wird der Ausdruck $F[f](|\hat{\gamma}_n|^2)$ wegen (4.10) mit den Funktionen

$$\hat{\gamma}_n(\omega) = \omega^p \cdot e^{\perp n\|\omega\|^2/2} \qquad p \in \mathbb{N}_0^d \text{ mit } |p| = m$$

regularisiert zu

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\omega) \left(|\hat{\gamma}_n(\omega)|^2 - \sum_{|q| \leq 2m} \frac{D^q |\hat{\gamma}_n(\omega)|^2 \Big|_{\omega=0}}{q!} \omega^q \cdot H\left(1 - \frac{\|\omega\|}{\alpha}\right)\right) d\omega \\ &+ \sum_{|q|\leq 2m} a_q D^q |\hat{\gamma}_n(\omega)|^2 \Big|_{\omega=0}.\end{aligned} \tag{4.15}$$

Die Ableitungen von Funktionen der Gestalt von $\hat{\gamma}_n$ wurden bereits in Unterabschnitt 4.3.2 betrachtet. Wir wissen daher, daß für $q \in \mathbb{N}_0^d$ mit $|q| \leq 2m$

$$D^q |\hat{\gamma}_n(\omega)|^2 \Big|_{\omega=0} = \begin{cases} 0 & \text{falls } q \neq 2p \\ (2p)! & \text{falls } q = 2p \end{cases}$$

gilt. Daher vereinfacht sich der obige Ausdruck (4.15) wie folgt:

$$\int_{B_\alpha(0)} \hat{f}(\omega) \cdot \omega^{2p} \left(e^{\perp n\|\omega\|^2} - 1\right) d\omega + \int_{\mathbb{R}^d \setminus B_\alpha(0)} \hat{f}(\omega) \cdot \omega^{2p} e^{\perp n\|\omega\|^2} d\omega + a_p (2p)! \tag{4.16}$$

Man sieht, daß das Integral über $B_\alpha(0)$ für $n \to \infty$ gegen $-\infty$ divergiert, während das rechte Integral gegen Null strebt. Der letzte Summand ist offensichtlich unabhängig von n. Somit gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$[f](\gamma_{n_0} * \gamma_{n_0}^*) = (2\pi)^{\perp d} F[f](|\hat{\gamma}_{n_0}|^2) < 0.$$

- Sei $s \in 2\mathbb{N}$. Dann gilt $s = 2m+2$ und die die Regularisierung des Ausdrucks $F[f](|\hat{\gamma}_n|^2)$ hat gemäß (4.10) folgendes Aussehen:

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\omega) \left(|\hat{\gamma}_n(\omega)|^2 - \sum_{|q| \leq 2m+1} \frac{D^q |\hat{\gamma}_n(\omega)|^2 \Big|_{\omega=0}}{q!} \omega^q \cdot H\left(1 - \frac{\|\omega\|}{\alpha}\right)\right) d\omega \\ &+ \sum_{|q|\leq 2m+1} a_q D^q |\hat{\gamma}(\omega)|^2 \Big|_{\omega=0}.\end{aligned} \tag{4.17}$$

Wir betrachten erneut die Funktionen

$$\hat{\gamma}_n(\omega) = \omega^p \cdot e^{\perp n\|\omega\|^2/2}, \qquad p \in \mathbb{N}_0^d \text{ mit } |p| = m$$

und bemerken, daß ebenso

$$D^q|\hat{\gamma}_n(\omega)|^2\Big|_{\omega=0} = 0 \qquad \text{für } q \in \mathbb{N}_0^d \text{ mit } |q| = 2m+1$$

gilt, so daß diese Regularisierung (4.17) mit dem Ausdruck (4.16) übereinstimmt. Die Betrachtungen dieses Falles lassen sich somit auf den vorhergehenden reduzieren.

In beiden Fällen erhalten wir einen Widerspruch zur getroffenen Annahme, daß $[f]$ eine bedingt positiv semidefinite reguläre Distribution der Ordnung $m < s/2$ auf $\mathbb{R}^d$ sei. □

Wir wollen nun einige nützliche Konsequenzen aus den beiden vorhergehenden Sätzen festhalten.
Die erste folgt aus dem Satz 4.4. In Bemerkung 4.5 haben wir die Integrierbarkeit von $\hat{f}$ um Unendlich als weitere Annahme aufgenommen. Mit der folgenden Bemerkung sieht man, daß diese Voraussetzung für bedingt positiv semidefinite reguläre Distributionen immer erfüllt ist.

Bemerkung 4.6: *Die Funktion f erfülle die Voraussetzung 4.2. Weiterhin erzeuge f eine bedingt positiv semidefinite reguläre Distribution $[f]$ auf $\mathbb{R}^d$. Dann ist die verallgemeinerte Fouriertransformierte $\hat{f}$ von f um Unendlich integrierbar, d. h. für jede positive Zahl R ist das Integral*

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus B_R(0)} \hat{f}(\omega)\, d\omega$$

finit.

Beweis: Wir betrachten die Funktionen

$$\gamma_k(x) = e^{-k\|x\|^2} \left(\frac{k}{\pi}\right)^{d/2}$$

der Folge $\{\gamma_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{S}$, durch die das Diracsche δ-Funktional erzeugt wird. Die zugehörigen Fouriertransformierten dieser Funktionen besitzen bekanntlich die Gestalt

$$\hat{\gamma}_k(\omega) = e^{-\|\omega\|^2/(4k)}.$$

Wir behandeln den Fall $s = 0$ zuerst. Hier ergibt sich durch Einsetzen von γ_k bzw. $\hat{\gamma}_k$ in (4.10):

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\gamma_k(x)\, dx = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\omega) e^{-\|\omega\|^2/(4k)}\, d\omega$$

Wegen der Stetigkeit von f konvergiert das Integral auf der linken Seite mit $k \to \infty$ gegen $f(0)$. Da $\hat{f}$ mit Satz 4.4 nichtnegativ ist, folgt mit dem Lemma von Fatou

$$0 \leq (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\omega)\, d\omega \leq f(0) < \infty$$

und somit die Integrierbarkeit von $\hat{f}$.

Für $s > 0$ setzen wir ebenso γ_k bzw. $\hat{\gamma}_k$ in die Regularisierung (4.10) ein und vereinfachen auf der dortigen rechten Seite:

$$
\begin{aligned}
(2\pi)^d[f](\gamma_k) &= (2\pi)^d \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\gamma_k(x)\,dx = F[f](\hat{\gamma}_k) \\
&= \int_{B_\alpha(0)} \hat{f}(\omega) \left(\hat{\gamma}_k(\omega) - \sum_{|q|<s} \frac{D^q\hat{\gamma}_k(\omega)\big|_{\omega=0}}{q!}\,\omega^q \right) d\omega + \int_{\mathbb{R}^d\setminus B_\alpha(0)} \hat{f}(\omega)\hat{\gamma}_k(\omega)\,d\omega \\
&\quad + \sum_{|q|<s} a_q D^q\hat{\gamma}_k(\omega)\Big|_{\omega=0} \\
&= \int_{B_\alpha(0)} \hat{f}(\omega) \sum_{|q|=s} \frac{D^q\hat{\gamma}_k(h\omega)}{q!}\,\omega^q\,d\omega + \int_{\mathbb{R}^d\setminus B_\alpha(0)} \hat{f}(\omega)\hat{\gamma}_k(\omega)\,d\omega \qquad (4.18) \\
&\quad + \sum_{|q|<s} a_q D^q\hat{\gamma}_k(\omega)\Big|_{\omega=0}.
\end{aligned}
$$

In (4.18) wurde dabei die Lagrangesche Darstellung des Restgliedes der Taylorreihen-Entwicklung verwendet, h ist somit eine reelle Zahl mit $0 \le h \le 1$.

Die Ableitungen $D^q\hat{\gamma}_k$ lassen sich als Ausdrücke schreiben, in denen die Hermite-Polynome $H_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$
H_n(x) := (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{\perp x^2/2},
$$

auftauchen (siehe z. B. [41], Abschnitt 5.5):

$$
D^q\hat{\gamma}_k(h\omega) = \left(-h/\sqrt{2k}\right)^{|q|} e^{\perp\|h\omega\|^2/(4k)} \prod_{j=1}^{d} H_{q_j}\left(h\omega_j/\sqrt{2k}\right).
$$

Somit konvergiert das Integral über $B_\alpha(0)$ aus (4.18) für $|q| = s > 0$ ebenso wie die dortige Summe mit $k \to \infty$ gegen Null. Wegen der Stetigkeit von f in Null folgt mit einer ähnlichen Argumentation wie im Fall $s = 0$ mit der Nichtnegativität von $\hat{f}$ unter Anwendung des Fatouschen Lemmas die Existenz des Integrals

$$
\int_{\mathbb{R}^d\setminus B_\alpha(0)} \hat{f}(\omega)\,d\omega < \infty.
$$

$\square$

Als unmittelbare Konsequenz dieser Bemerkung ergibt sich mit Satz 4.5 die

Folgerung 4.2: *Die Funktion f erfülle die Voraussetzung 4.2. Falls f eine positiv semidefinite reguläre Distribution $[f]$ auf $\mathbb{R}^d$ erzeugt, so ist die verallgemeinerte Fouriertransformierte $\hat{f}$ von f aus $L_1(\mathbb{R}^d)$.*

Beweis: Wegen der Positivität von $\hat{f}$ reicht es, die Integrierbarkeit dieser Funktion zu diskutieren. Daß $\hat{f}$ um Unendlich integrierbar ist, haben wir bereits mit der obigen Bemerkung 4.6 festgehalten. Da $[f]$ bedingt positiv semidefinit der Ordnung 0 auf $\mathbb{R}^d$ ist, folgt mit Satz 4.5, daß $s = 0$ gilt. Unter Voraussetzung 4.2, Teil (a), ist $\hat{f}$ somit ebenso um den Nullpunkt integrierbar. $\square$

Das Ergebnis unserer nächsten Folgerung haben wir bereits vor der Formulierung des obigen Satzes 4.5 angedeutet.

Folgerung 4.3: *Die Funktion f erfülle die Voraussetzung 4.2 und erzeuge eine bedingt positiv semidefinite Distribution $[f]$ der Ordnung m auf $\mathbb{R}^d$.*
Dann gilt:

$$[f](\gamma * \gamma^*) = (2\pi)^{\perp d} F[f](|\hat{\gamma}|^2) = (2\pi)^{\perp d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\omega)|\hat{\gamma}(\omega)|^2 \, d\omega \geq 0$$

für alle guten Funktionen $\gamma \in \mathcal{S}_m^\perp$ bzw. $\hat{\gamma} \in \widehat{\mathcal{S}_m^\perp}$.

Beweis: Sei $[f]$ eine bedingt positiv semidefinite reguläre Distribution der Ordnung m auf $\mathbb{R}^d$. Falls f die Voraussetzung 4.2 erfüllt, dann gilt $m \geq s/2$ mit dem obigen Satz 4.5. Da das Quadrat $|\hat{\gamma}|^2$ einer Funktionen $\hat{\gamma} \in \widehat{\mathcal{S}_m^\perp}$ eine Nullstelle der Mindestordnung $2m$ in Null besitzt, gilt $|\hat{\gamma}|^2 \in \widehat{\mathcal{S}_{2m}^\perp}$ und somit $|\hat{\gamma}|^2 \in \widehat{\mathcal{S}_s^\perp}$. Die obige Behauptung folgt nun mit Bemerkung 4.4. $\square$

Wir machen eine weitere interessante Beobachtung durch

Folgerung 4.4: *Die Funktion f erfülle die Voraussetzung 4.2 und erzeuge eine positiv semidefinite reguläre Distribution $[f]$ auf $\mathbb{R}^d$. Dann ist f eine beschränkte Funktion.*

Beweis: Falls $[f]$ bedingt positiv semidefinit der Ordnung $m = 0$ auf $\mathbb{R}^d$ ist und außerdem die Voraussetzung 4.2 erfüllt, so gilt $s = 0$ mit dem obigen Satz 4.5. Das asymptotische Verhalten der stetigen Funktion f wird unter Voraussetzung 4.2 wegen Bemerkung 4.5 beschrieben durch

$$f(x) = \mathcal{O}\left(\|x\|^s\right) = \mathcal{O}(1), \quad \|x\| \to \infty.$$

Nun erkennt man, daß f unter diesen Umständen eine beschränkte Funktion ist. $\square$

Wir wissen bereits mit Bemerkung 3.1, daß positiv (semi)definite gerade Funktionen ebenso stets beschränkt sind. Hier deutet sich mit unserer letzten Folgerung 4.4 bereits ein Zusammenhang zwischen positiv (semi)definiten regulären Distributionen und deren erzeugender Funktion an. Wir werden diesen im folgenden Paragraphen erkennen und durch eine wesentlich allgemeinere Aussage komplett ergründen.

5 Charakterisierung bedingt positiv definiter Funktionen

In diesem Paragraphen stellen wir einen fundamentalen Zusammenhang zwischen bedingt positiv definiten regulären Distributionen und bedingt positiv definiten Funktionen her. Dadurch erhalten wir eine sehr praktische Charakterisierung bedingt positiv definiter Funktionen. Wir ziehen daraus einige wichtige Folgerungen.

5.1 Hauptsatz

Wir nutzen die Kenntnisse der beiden vorigen Paragraphen und sind bereits jetzt in der Lage, den Hauptsatz dieser Arbeit zu beweisen.

Hauptsatz 5.1: *Die Funktion f erfülle die Voraussetzung 4.2 aus Abschnitt 4.5. f erzeugt genau dann eine bedingt positiv semidefinite reguläre Distribution der Ordnung m auf $\mathbb{R}^d$, wenn f eine bedingt positiv semidefinite Funktion der Ordnung m auf $\mathbb{R}^d$ ist:*

$$[f] \in BPSD(m,d) \qquad \Longleftrightarrow \qquad f \in bpsd(m,d).$$

Weiterhin ist f eine bedingt positiv definite Funktion der Ordnung m auf $\mathbb{R}^d$, falls f eine bedingt positiv definite reguläre Distribution der Ordnung m auf $\mathbb{R}^d$ erzeugt:

$$[f] \in BPD(m,d) \qquad \Longrightarrow \qquad f \in bpd(m,d).$$

Beweis: Wir beweisen die zweite Aussage des Hauptsatzes zuerst und nehmen an, daß f die Voraussetzung 4.2 erfülle und eine bedingt positiv definite reguläre Distribution $[f]$ der Ordnung m auf $\mathbb{R}^d$ erzeuge. Weiterhin seien paarweise verschiedene Punkte $x_1, \ldots, x_N$ aus dem $\mathbb{R}^d$ sowie reelle Zahlen $c_1, \ldots, c_N$ mit der Eigenschaft

$$\sum_{j=1}^{N} c_j x_j^p = 0 \qquad |p| < m$$

gegeben. Nach Satz 4.2 liegen dann die Funktionen

$$\gamma_n^{(\sigma)}(x) = \sum_{j=1}^{N} c_j \left(\frac{n}{\pi}\right)^{d/2} e^{\perp n \|x \perp x_j\|^2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ im Raum $\mathcal{S}_m^{\perp}$. Da $[f]$ bedingt positiv definit der Ordnung m auf $\mathbb{R}^d$ ist, gilt für alle natürlichen Zahlen n und $\gamma_n = \gamma_n^{(\sigma)}$ die Ungleichung

$$[f](\gamma_n * \gamma_n^*) \geq 0$$

und somit ebenso

$$\lim_{n \to \infty} [f](\gamma_n * \gamma_n^*) = \sum_{j,k=1}^{N} c_j c_k f(x_j - x_k) \geq 0.$$

Wir haben nur noch nachzuweisen, daß dieser Ausdruck genau dann verschwindet, falls alle Skalare c_j $(1 \leq j \leq N)$ verschwinden.
Diesen Nachweis erbringen wir folgendermaßen: Mit Folgerung 4.3 gilt:

$$\begin{aligned}[f](\gamma_n * \gamma_n^*) &= (2\pi)^{\perp d} F[f](|\hat{\gamma}_n|^2) \\ &= (2\pi)^{\perp d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\omega)|\hat{\gamma}_n(\omega)|^2 \, d\omega \\ &= (2\pi)^{\perp d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\omega) \left| \sum_{j=1}^{N} c_j e^{\perp\|\omega\|^2/(4n) \perp i x_j^T \omega} \right|^2 d\omega \qquad (5.1) \\ &= (2\pi)^{\perp d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\omega) \cdot e^{\perp\|\omega\|^2/(2n)} \left| \sum_{j=1}^{N} c_j e^{\perp i x_j^T \omega} \right|^2 d\omega\end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Nach dem Satz von der majorisierenden Konvergenz gilt nun:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\omega) \cdot e^{\perp\|\omega\|^2/(2n)} \left| \sum_{j=1}^{N} c_j e^{\perp i x_j^T \omega} \right|^2 d\omega = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\omega) \left| \sum_{j=1}^{N} c_j e^{\perp i x_j^T \omega} \right|^2 d\omega.$$

Da $\hat{f}$ nach Satz 4.4 fast überall positiv ist, kann dieses Integral nur dann verschwinden, falls die Symbolfunktion

$$\sigma_{c,X}(\omega) = \sum_{j=1}^{N} c_j e^{\perp i x_j^T \omega}$$

identisch verschwindet. Da die Punkte $x_1, \ldots, x_N$ paarweise verschieden sind, ist dies dann und nur dann der Fall, wenn sämtliche Skalare c_j $(1 \leq j \leq N)$ verschwinden. Einen möglichen Beweis dieses bekannten Resultates findet man beispielsweise in [33].

Nun beweisen wir die erste Aussage unseres Hauptsatzes. Der Beweis der Notwendigkeit ist bereits im obigen Beweis der zweiten Aussage enthalten, so daß wir lediglich die Hinlänglichkeit der ersten Aussage des Hauptsatzes zu beweisen haben. Dazu nehmen wir nun an, daß f eine bedingt positiv semidefinite Funktion der Ordnung m auf $\mathbb{R}^d$ sei, die die Voraussetzung 4.2 erfülle.
Wir bemerken, daß man das Doppelintegral

$$\int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\gamma(x)\gamma(y) \, dx dy$$

beliebig gut durch Summen der Form

$$\sum_{j,k=1}^{N_n} \gamma\left(x_j^{(n)}\right) \mu\left(B_j^{(n)}\right) \gamma\left(x_k^{(n)}\right) \mu\left(B_k^{(n)}\right) f\left(x_j^{(n)} - x_k^{(n)}\right) \qquad (5.2)$$

approximieren kann. Die Mengen $B_j^{(n)}$ sind dabei paarweise disjunkt und weiterhin gilt $x_j^{(n)} \in B_j^{(n)}$ $(1 \leq j \leq N_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ sowie

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \mu\left(B_j^{(n)}\right) &= 0 \\ \lim_{n\to\infty} \mu\left(\mathbb{R}^d \setminus \bigcup_{j=1}^{N_n} B_j^{(n)}\right) &= 0.\end{aligned}$$

Die Summen (5.2) sind für jedes $n \in \mathbb{N}$ nichtnegativ unter der Voraussetzung, daß

$$\sum_{j=1}^{N_n} \gamma\left(x_j^{(n)}\right) \mu\left(B_j^{(n)}\right) \left(x_j^{(n)}\right)^p = 0$$

für alle Multiindizes $p \in \mathbb{N}_0^d$ mit $|p| < m$ gilt. Mit diesen Ausdrücken werden die Integrale

$$\int_{\mathbb{R}^d} \gamma(x) x^p \, dx \qquad |p| < m$$

beliebig gut approximiert. Daraus schließt man, daß $[f]$ bedingt positiv semidefinit der Ordnung m auf $\mathbb{R}^d$ ist. □

5.2 Folgerungen

Da der Hauptsatz 5.1 unter Berücksichtigung der Voraussetzung 4.2 die Funktionenklasse $bpsd(m, d)$ in die Distributionenklasse $BPSD(m, d)$ kanonisch einbettet, kann man den mächtigen Apparat der Distributionentheorie bei der Untersuchung bedingt positiv (semi)definiter Funktionen einsetzen. Wir ziehen in diesem Abschnitt praktische Folgerungen aus den Ergebnissen der Paragraphen 3 und 4. Die für unsere Zwecke zweifellos wichtigste umfaßt eine praktische Charakterisierung der Funktionenklasse $bpd(m, d)$ und stellt darüberhinaus in unserer Terminologie für den Spezialfall $m = 0$ und $d = 1$ ein Analogon des Satzes 3.2 von Bochner dar:

Satz 5.1*: Die Funktion f erfülle die Voraussetzung 4.2 aus Abschnitt 4.5.*
Dann sind äquivalent:

(a) f ist bedingt positiv definit der Ordnung $m \geq s/2$ auf $\mathbb{R}^d$.

(b) $\hat{f}(\omega) \geq 0$ für alle $\omega \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, $\hat{f} \not\equiv 0$.

Beweis: Wir bemerken zuerst, daß die Ungleichung $m \geq s/2$ aus Teil (a) mit Satz 4.5 selbstverständlich ist. Wir haben diese Tatsache in die Formulierung des Satzes wegen der Argumentation beim Beweis von $(b) \Rightarrow (a)$ aufgenommen.

Diesen Teil der Aussage beweisen wir zuerst und nehmen dazu an, daß $\hat{f}$ auf $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ nichtnegativ ist und nicht identisch verschwindet.

Wegen des Polverhaltens von $\hat{f}$ im Nullpunkt gemäß Voraussetzung 4.2 und mit $m \geq s/2$ folgt die Gültigkeit von

$$\sum_{j,k=1}^{N} c_j c_k f(x_j - x_k) = (2\pi)^{\perp d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\omega) \left| \sum_{j=1}^{N} c_j e^{\perp i x_j^T \omega} \right|^2 d\omega \geq 0 \tag{5.3}$$

für paarweise verschiedene Punkte $x_1, \ldots, x_N \subset \mathbb{R}^d$ und reelle Zahlen $c_1, \ldots, c_N$ mit der Eigenschaft

$$\sum_{j=1}^{N} c_j x_j^p = 0 \qquad \text{für alle } p \in \mathbb{N}_0^d \text{ mit } |p| < m. \tag{5.4}$$

Denn schließlich besitzt die Symbolfunktion

$$\sigma_{c,X}(\omega) = \sum_{j=1}^{N} c_j e^{\perp i x_j^T \omega}$$

eine Nullstelle der Ordnung $m \geq s/2$ in Null, falls die Bedingung (5.4) erfüllt ist. Unter dieser Voraussetzung existiert das obige Integral im klassischen Sinne. Wir haben die Gültigkeit von (5.3) bereits durch Grenzübergang in (5.1) im Beweis des Hauptsatzes 5.1 erkannt.

Wegen der Stetigkeit von $\hat{f}$ auf $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ gibt es eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^d$ mit $0 \notin U$, auf der $\hat{f}$ positiv ist. Unter diesen Voraussetzungen verschwindet die Doppelsumme in (5.3) genau dann, wenn die Symbolfunktion $\sigma_{c,X}$ identisch verschwindet.

Da die Punkte $x_1, \ldots, x_N$ paarweise verschieden sind, ist dies genau dann der Fall, wenn alle reellen Zahlen $c_1, \ldots, c_N$ verschwinden, wie wir bereits im Beweis des Hauptsatzes 5.1 feststellen konnten.

Daß (b) durch (a) impliziert wird, folgt aus Satz 4.4 und dem Hauptsatz 5.1. □

Wir wollen erläutern, welche Konsequenzen die Gültigkeit des obigen Satzes 5.1 für unsere Anwendungen nach sich zieht:

Wir haben in Paragraph 2 das Problem der Interpolation auf endlich vielen Daten vollständig beschrieben. Bei dieser Interpolationsmethode wurde eine radiale Funktion ψ, bedingt positiv definit der Ordnung $m \in \mathbb{N}_0$, verwendet. Neben einer schwachen Voraussetzung an die gegebenen Daten war im wesentlichen die bedingte positive Definitheit von ψ wegen Satz 2.1 für die eindeutige Lösbarkeit des Interpolationsproblems von entscheidender Bedeutung. Ferner bestimmte die Ordnung m von ψ die Größe der Interpolationsmatrix.

Da es inzwischen ganze Bibliotheken an umfangreichen Transformationstabellen gibt, in denen verallgemeinerte Fouriertranformierte spezieller oder weniger spezieller Funktionen aufgelistet sind, sind wir mit dem obigen Satz 5.1 ohne weiteres in der Lage, eine Vielfalt an radialen Funktionen zu finden, die für multivariate Interpolationsprobleme potentiell brauchbar sind: Wir haben lediglich die Gesamtheit aller radialen Funktionen ψ herzunehmen, die mit ihrer verallgemeinerten Fouriertransformierten φ die Voraussetzung 4.2 aus Abschnitt 4.5 erfüllen. Falls $\varphi \not\equiv 0$ eine nichtnegative Funktion ist, so wissen wir mit Satz 5.1, daß ψ bedingt positiv definit auf $\mathbb{R}^d$ ist. Weiterhin können wir an dem Polverhalten von φ in Null die Ordnung m der bedingten positiven Definitheit von ψ auf $\mathbb{R}^d$ ablesen. Es ist tatsächlich äußerst erstaunlich, daß wir unter Beachtung der Voraussetzung 4.2 dabei lediglich mit der Information über das Polverhalten von φ im Nullpunkt auskommen. Diese Tatsache macht es besonders einfach, die Menge der untersuchten radialen Basisfunktionen um eine bisher ungeahnte Vielfalt zu ergänzen. Unter Verwendung der Ergebnisse dieser Dissertation, insbesondere des obigen Satzes 5.1, ist es beispielsweise Schaback & Wendland [36] gelungen, erstmals eine positiv definite radiale Funktion mit kompaktem Träger anzugeben. Angespornt durch deren Folgerungen aus dieser Arbeit nehmen wir gern an diesem Wettbewerb teil und geben weitere Typen von positiv definiten radialen Funktionen mit kompaktem Träger an.

Satz 5.2: *Sei $d \geq 2$. Dann sind die radialen Funktionen*

$$\psi_\nu(x) = (1 - \|x\|)_+^\nu := \begin{cases} (1 - \|x\|)^\nu & \textit{falls } \|x\| < 1 \\ 0 & \textit{falls } \|x\| \geq 1 \end{cases}$$

für $\nu \geq (d+1)/2$ positiv definit auf $\mathbb{R}^d$.

Beweis: Offensichtlich sind die Funktionen ψ_ν radial und darüberhinaus im klassischen Sinne fouriertransformierbar. Nach Stein & Weiss [40], Theorem 3.3 in IV, S. 155, sind die Fouriertransformierten $\hat{\phi}_\nu(\|\cdot\|) = \varphi_\nu(\cdot)$ der Funktionen $\psi_\nu(x) = \phi_\nu(\|x\|)$ radial und berechnen sich bis auf einen gewissen positiven Faktor zu

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_\nu(s) &= \int_0^\infty \phi_\nu(r) r^{d/2} J_{(d\perp 2)/2}(rs)\, dr \\ &= \int_0^1 (1-r)^\nu r^{d/2} J_{(d\perp 2)/2}(rs)\, dr \\ &= s^{\perp 1} \int_0^s (1 - t/s)^\nu \, (t/s)^{d/2} \, J_{(d\perp 2)/2}(t)\, dt \\ &= s^{\perp(d/2+\nu+1)} \int_0^s (s-t)^\nu t^{d/2} J_{(d\perp 2)/2}(t)\, dt. \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet J_η wie üblich die Besselfunktion erster Art, deren Eigenschaften man beispielsweise bei Abramowitz & Stegun [1] findet.

Mit unserem zentralen Satz 5.1 bleibt nun nur noch nachzuweisen, daß die Integrale

$$\int_0^s (s-t)^\nu t^{d/2} J_{(d\perp 2)/2}(t)\, dt$$

nichtnegativ sind. Nach Gasper [15] (Ungleichung (1.4), S.869, sowie Ungleichung (3.17), S.878, mit $\delta = \epsilon = 0, \alpha = (d-2)/2, \mu = d/2, \lambda = (d+1)/2,\ \gamma \geq 0$) sind diese Integrale für $\nu \geq (d+1)/2$ sogar positiv. Der Fall $\nu = (d+1)/2$ wurde dabei erstmals von Fields & Ismail [13] (Corollary 1.1, S.557) behandelt. □

Der obige Satz 5.2 unterstreicht die Tragweite unseres Satzes 5.1 nochmals mit Nachdruck und zeigt, daß die Behandlung des Begriffes der bedingten positiven Definitheit in Abhängigkeit von der Raumdimension d hier von entscheidender Bedeutung ist. Man beachte, daß von keiner der Funktionen ψ_ν aus dem obigen Satz 5.2 die positive Definitheit mit dem Satz 3.5 von Micchelli nachgewiesen werden kann. Denn schließlich müßten dann die Funktionen $g_\nu(t) = (1 - \sqrt{t})_+^\nu$ auf $(0, \infty)$ vollständig monoton sein. Da diese aber ebenso kompakten Träger besitzen, steht dies im Widerspruch zu dem Satz 3.3 von Bernstein. Radiale Funktionen mit kompaktem Träger können somit nur auf Räumen $\mathbb{R}^d$ unter Einschränkung der Raumdimension d als positiv definit erkannt werden.

Für weitere Forschungsaktivitäten auf dem Gebiet der multivariaten Interpolation mit radialen Basisfunktionen wird man nun eine B-Spline-artige Theorie anstreben, bei der man nur noch positiv definite radiale Funktionen mit kompaktem Träger verwendet. Diese

Vorgehensweise würde einige der in der Einleitung aufgeführten Probleme, wie z. B. Konditionsabschätzungen der Interpolationsmatrizen sowie effiziente Auswertung der Interpolanten bzw. Implementierbarkeit wesentlich entschärfen. Grundlegend für eine solche Theorie wäre dann die Frage, ob man nach dem Vorbild der B-Splines durch iterierte Faltungen glattere radiale Funktionen erhält, ohne dabei die Eigenschaft der positiven Definitheit zu verlieren. Aus dem Hauptsatz 5.1 ergibt sich eine weitere Folgerung, die uns in dieser Hinsicht beruhigen wird.

Folgerung 5.1*: Die Funktionen $f, g \in L_1(\mathbb{R}^d)$ mögen beide die Voraussetzung 4.2 aus Abschnitt 4.5 erfüllen. Falls f und g beide positiv definit auf $\mathbb{R}^d$ sind und das Faltungsprodukt $h = f * g$ nicht identisch verschwindet, dann ist h positiv definit auf $\mathbb{R}^d$.*

Beweis: Nach Bemerkung 3.1 sind f und g beschränkt und definieren daher reguläre Distributionen $[f]$ und $[g]$ auf dem Schwartzschen Raum $\mathcal{S}$. Da f und g außerdem beide in $L_1(\mathbb{R}^d)$ liegen, ist das Faltungsprodukt $h = f * g$ ebenfalls beschränkt. Denn wegen

$$|h(x)| = |(f * g)(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(y) g(x-y)\, dy \right| \le g(0) \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|\, dy$$

gilt: $|h(x)| \le g(0) \|f\|_{L_1}$. Somit definiert $f * g$ ebenso eine reguläre Distribution $[f * g]$ auf $\mathcal{S}$. Weiterhin existieren die Fouriertransformierten $\hat{f}$ und $\hat{g}$ dieser beiden Funktionen im gewöhnlichen Sinne.
Nun folgt

$$\begin{aligned}
[f * g](\gamma * \gamma^*) &= \int_{\mathbb{R}^d} (f * g)(x) (\gamma * \gamma^*)(x)\, dx \\
&= (2\pi)^{\perp d} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\widehat{f * g}\right)(\omega) \left(\widehat{\gamma * \gamma^*}\right)(\omega)\, d\omega \\
&= (2\pi)^{\perp d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\omega) \hat{g}(\omega) |\hat{\gamma}(\omega)|^2\, d\omega
\end{aligned}$$

für alle Funktionen $\gamma \in \mathcal{S}$.
Wegen Satz 4.4 sind $\hat{f}$ und $\hat{g}$ nichtnegativ auf $\mathbb{R}^d$. Da das Faltungsprodukt $f * g$ nicht identisch verschwindet, gibt es eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^d$, auf der die Funktion $\hat{h} = \hat{f} \cdot \hat{g}$ positiv ist. Mit Satz 5.1 folgt nun, daß h positiv definit auf $\mathbb{R}^d$ ist. □

5.3 Anwendung auf radiale Basisfunktionen

Wir haben bereits in der Einleitung die Gestalt aller radialen Basisfunktion angegeben, die bisher untersucht wurden. In Abschnitt 4.4 wurden deren verallgemeinerte Fouriertransformierte aufgelistet.

Wir überzeugen uns mit Beobachtung 4.1 davon, daß sämtliche aufgeführten radialen Basisfunktionen ψ die Voraussetzung 4.2 aus Abschnitt 4.5 erfüllen, und daß deren verallgemeinerten Fouriertransformierten φ darüberhinaus positiv sind. Wir geben nun zu jeder Funktion ψ (eine Abschätzung für) die Zahl $s \in \mathbb{N}_0$, die sich mit Voraussetzung 4.2

ergibt, an und bestätigen mit Satz 5.1 in der folgenden Tabelle die (minimale) Ordnung m der bedingten positiven Definitheit auf $\mathbb{R}^d$ der einzelnen radialen Basisfunktionen, die bereits in Abschnitt 3.2 auftauchen.

radiale Basisfunktion		$s \in \mathbb{N}_0$	$m \in \mathbb{N}_0$
polynomials	$\psi(x) = (-1)^{\lceil \nu/2 \rceil} \|x\|^\nu$	$s > \nu$	$m > \nu/2$
thin plate splines	$\psi(x) = (-1)^{k+1} \|x\|^{2k} \log \|x\|$	$s > 2k$	$m > k$
Gaussians	$\psi(x) = e^{\perp \alpha \|x\|^2}$	$s = 0$	$m \geq 0$
Multiquadrics	$\psi(x) = (-1)^{\lceil \nu/2 \rceil} \left(c^2 + \|x\|^2\right)^{\nu/2}$	$s > \nu$	$m > \nu/2$
inverse Multiquadrics	$\psi(x) = \left(c^2 + \|x\|^2\right)^{\nu/2}$	$s = 0$	$m \geq 0$

6 Hilbertraumtheorie zur Interpolation mit radialen Basisfunktionen

Wir konstruieren in diesem Paragraphen einen Funktionenraum $\mathcal{F}_\psi$, der für Interpolationsaufgaben mit einer Funktion $\psi \in bpd(m,d)$ im folgenden Sinne natürlich ist: Wir verlangen für einen festen Punkt $x \in \mathbb{R}^d$ die Stetigkeit des Fehlerfunktionals

$$\epsilon_x : \mathcal{F}_\psi \to \mathbb{R}, \qquad x \mapsto (f - s_\psi)(x) \qquad f \in \mathcal{F}_\psi$$

auf dem Funktionenraum $\mathcal{F}_\psi$, um Fehlerabschätzungen der Form

$$|f(x) - s_\psi(x)| \leq \|f\|_{\mathcal{F}_\psi} \cdot P_\psi(x) \tag{6.1}$$

bei der Punktauswertung in x anzugeben. Die Gestalt der Interpolanten s_ψ sowie die Art der Datenvorgabe ist so allgemein wie möglich gehalten, umfaßt aber selbstverständlich den Fall der in Paragraph 2 vorgestellten Interpolation auf einer endlichen Datenmenge.

Dabei werden wir ebenso die Reproduktion von Polynomen aus $\mathcal{P}_m^d$ erreichen, indem wir die Forderung

$$\epsilon_x(\mathcal{P}_m^d) = \{0\}.$$

erheben. Das Fehlerfunktional besitzt somit die gleiche „Orthogonalitätsrelation“ wie die guten Funktionen aus $\mathcal{S}_m^\perp$. Wie wir diesen Begriff der „Orthogonalität“ verstehen, ergibt sich aus der folgenden Topologisierung und Vervollständigung des „richtigen“ Dualraumes und dem zugehörigen Raum der Fouriertransformierten.

6.1 Topologisierung der Räume $\mathcal{S}_m^\perp$ und $\widehat{\mathcal{S}_m^\perp}$

Wir wollen die linearen Räume $\mathcal{S}_m^\perp$ und $\widehat{\mathcal{S}_m^\perp}$ jeweils mit einem Skalarprodukt versehen. Wenn man berücksichtigt, in welchem Zusammenhang diese Räume in Abschnitt 4.2 definiert wurden, so ist offensichtlich, wie wir nun vorgehen werden.

Wir betrachten eine Funktion $\psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ und nehmen an, daß diese mit ihrer verallgemeinerten Fouriertransformierten φ die Voraussetzung 4.2 aus Abschnitt 4.5 erfülle. Weiterhin nehmen wir an, daß ψ bedingt positiv definit der Ordnung m auf $\mathbb{R}^d$ mit einem gewissenen $m \in \mathbb{N}_0$ sei. Dann wissen wir bereits mit Satz 4.4, daß φ auf $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ nichtnegativ ist. Wir verschärfen dies mit der

Voraussetzung 6.1: *$\varphi(\omega) > 0$ für alle $\omega \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$.*

Alle in der Einleitung angegebenen radialen Basisfunktionen erfüllen die Voraussetzungen 4.2 und 6.1.

Für den gesamten Paragraphen sei das Funktionenpaar ψ, φ mit den genannten Eigenschaften fest und möge die Voraussetzungen 4.2 und 6.1 erfüllen.

Unter der Voraussetzung 6.1 ist mit

$$(\beta, \gamma)_\psi := [\psi](\beta * \gamma^*) \qquad \beta, \gamma \in \mathcal{S}_m^\perp$$

ein Skalarprodukt auf dem Raum $\mathcal{S}_m^\perp$ gegeben, so daß $\mathcal{S}_m^\perp$ mit der induzierten Norm $\|\cdot\|_\psi := (\cdot,\cdot)_\psi^{1/2}$ ein Prä-Hilbertraum ist. Der Nachweis der Skalarprodukteigenschaften folgt unmittelbar aus den vorliegenden Definitionen.

Wir versehen nun den Raum $\widehat{\mathcal{S}_m^\perp}$ mit dem Skalarprodukt

$$(\hat{\beta},\hat{\gamma})_\varphi := (2\pi)^{\perp d}(\varphi,\hat{\beta}\cdot\overline{\hat{\gamma}})_{L_2} = (2\pi)^{\perp d}F[\psi](\hat{\beta}\cdot\overline{\hat{\gamma}}) = [\psi](\beta*\gamma^*) = (\beta,\gamma)_\psi \tag{6.2}$$

und der Norm $\|\cdot\|_\varphi := (\cdot,\cdot)_\varphi^{1/2}$, so daß folgender Satz gilt:

Satz 6.1*: Der Raum* $\left(\mathcal{S}_m^\perp, \|\cdot\|_\psi\right)$ *ist ein Prä-Hilbertraum und wird vermöge der Fouriertransformation isometrisch isomorph auf* $\left(\widehat{\mathcal{S}_m^\perp}, \|\cdot\|_\varphi\right)$ *abgebildet.*

Beweis: Der Nachweis der Skalarprodukteigenschaft folgt unmittelbar aus den einzelnen Definitionen. Die Isometrieaussage ist mit der distributionellen Parsevalschen Gleichung, die ebenso in (6.2) verwendet wurde, trivial. □

Wir werden im folgenden die Struktur des Raumes $\mathcal{S}_m^\perp$ aufgrund derer von $\widehat{\mathcal{S}_m^\perp}$ erkennen und umgekehrt. Ergebnisse, die wir dabei bezüglich des Raumes $\mathcal{S}_m^\perp$ erzielen, gelten wegen des obigen Satzes 6.1 ebenso für $\widehat{\mathcal{S}_m^\perp}$.

Wir zeigen nun, daß der Raum $\left(\mathcal{S}_m^\perp, \|\cdot\|_\psi\right)$ nicht vollständig ist. Dazu betrachten wir eine Folge von Linearkombinationen der Gestalt

$$\gamma_n(x) := \sum_{j=1}^N c_j \gamma_n^{(\delta_{x_j})}(x)$$

mit den δ_{x_j}-erzeugenden guten Funktionen

$$\gamma_n^{(\delta_{x_j})}(x) := e^{\perp n\|x\perp x_j\|^2}\cdot\left(\frac{n}{\pi}\right)^{d/2},$$

wobei die Punktmenge $X := \{x_1,\ldots,x_N\} \subset \mathbb{R}^d$ und die reellen Zahlen $c_1,\ldots,c_N$ in der üblichen Relation zueinander stehen:

$$\sum_{j=1}^N c_j x_j^p = 0 \qquad |p| < m.$$

Wir wissen bereits, daß jede Funktion der Folge $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nach Satz 4.2 im Raum $\mathcal{S}_m^\perp$ liegt. Diese Folge ist eine Cauchyfolge in $\left(\mathcal{S}_m^\perp, \|\cdot\|_\psi\right)$, denn es gilt:

$$\begin{aligned}
\|\gamma_k - \gamma_n\|_\psi^2 &= \|\hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}_n\|_\varphi^2 \\
&= (2\pi)^{\perp d}\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(\omega)\left|\hat{\gamma}_k(\omega) - \hat{\gamma}_n(\omega)\right|^2 d\omega \\
&= (2\pi)^{\perp d}\int_{\mathbb{R}^d}\varphi(\omega)\left|\sum_{j=1}^N c_j e^{\perp\|\omega\|^2/(4k)}\cdot e^{\perp i x_j^T\omega} - \sum_{j=1}^N c_j e^{\perp\|\omega\|^2/(4n)}\cdot e^{\perp i x_j^T\omega}\right|^2 d\omega
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (2\pi)^{\perp d} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\omega) \left| \sum_{j=1}^{N} c_j e^{\perp i x_j^T \omega} \left(e^{\perp \|\omega\|^2/(4k)} - e^{\perp \|\omega\|^2/(4n)} \right) \right|^2 d\omega \\
&= (2\pi)^{\perp d} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\omega) \left| \sum_{j=1}^{N} c_j e^{\perp i x_j^T \omega} \right|^2 \left(e^{\perp \|\omega\|^2/(4k)} - e^{\perp \|\omega\|^2/(4n)} \right)^2 d\omega \\
&= (2\pi)^{\perp d} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\omega) \left| \sum_{j=1}^{N} c_j e^{\perp i x_j^T \omega} \right|^2 \cdot e^{\perp \|\omega\|^2/(2k)}\, d\omega \\
&\quad - 2 \cdot (2\pi)^{\perp d} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\omega) \left| \sum_{j=1}^{N} c_j e^{\perp i x_j^T \omega} \right|^2 \cdot e^{\perp \|\omega\|^2 \cdot (\frac{1}{4k} + \frac{1}{4n})}\, d\omega \\
&\quad + (2\pi)^{\perp d} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\omega) \left| \sum_{j=1}^{N} c_j e^{\perp i x_j^T \omega} \right|^2 \cdot e^{\perp \|\omega\|^2/(2n)}\, d\omega.
\end{aligned}
$$

Unter Anwendung des Satzes der majorisierenden Konvergenz auf die letzteren drei Integrale erkennen wir die Gültigkeit von

$$
\begin{aligned}
\lim_{k,n \to \infty} \|\gamma_k - \gamma_n\|_\psi^2 &= 2 \cdot (2\pi)^{\perp d} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\omega) \left| \sum_{j=1}^{N} c_j e^{\perp i x_j^T \omega} \right|^2 d\omega \\
&\qquad - 2 \cdot (2\pi)^{\perp d} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\omega) \left| \sum_{j=1}^{N} c_j e^{\perp i x_j^T \omega} \right|^2 d\omega \\
&= 0
\end{aligned}
$$

und somit die Richtigkeit unserer obigen Behauptung, daß $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge im Raum $\mathcal{S}_m^\perp$ darstellt. Wegen

$$
\lim_{n \to \infty} \|\gamma_n\|_\psi = \sum_{j,k=1}^{N} c_j c_k \psi(x_j - x_k)
$$

besitzt die Folge $\{\gamma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ keinen Grenzwert in $\mathcal{S}_m^\perp$ und somit sind die Räume $\mathcal{S}_m^\perp$ und $\widehat{\mathcal{S}_m^\perp}$ nicht vollständig.

Wir wollen nun den Abschluß der Räume $\left(\mathcal{S}_m^\perp, \|\cdot\|_\psi\right)$ und $\left(\widehat{\mathcal{S}_m^\perp}, \|\cdot\|_\varphi\right)$ ermitteln. Dabei wird der folgende Satz aus der Analysis hilfreich sein, der beispielsweise im Buch [42] von Walter zu finden ist und dort als *„Dichtesatz"* bezeichnet wird.

Satz 6.2: *Es sei $B \subset \mathbb{R}^d$ eine offene Menge. Dann ist die Menge $C_0^\infty(B)$ dicht im Raum $L^p(B)$, d. h. zu $\hat{u} \in L^p(B)$ gibt es, wenn man $\epsilon > 0$ vorgibt, eine Funktion $\hat{\gamma} \in C_0^\infty(B)$ mit $\|\hat{u} - \hat{\gamma}\|_{L^p} < \epsilon$.* □

Wir betrachten nun den *gewichteten L^2-Raum*

$$
\mathcal{L}_\varphi^2 := \left\{ \hat{u} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R} \,\middle|\, \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{u}(\omega)|^2 \varphi(\omega)\, d\omega < \infty \right\} / \sim
$$

mit der Äquivalenzrelation $\sim$, definiert durch $\hat{u} \sim \hat{v} :\Longleftrightarrow \hat{u} \equiv \hat{v}$ fast überall.
$\mathcal{L}^2_\varphi$ ist mit dem Skalarprodukt

$$(\hat{u}, \hat{v})_\varphi := \int_{\mathbb{R}^d} \hat{u}(\omega)\overline{\hat{v}(\omega)}\varphi(\omega)\, d\omega$$

ein Hilbertraum (siehe [20], [45]). Unter Verwendung des Spezialfalles $p = 2$, $B = \mathbb{R}^d$ des obigen Satzes 6.2 zeigen wir nun, daß $\left(\widehat{\mathcal{S}_m^\perp}, \|\cdot\|_\varphi\right)$ dicht in $\left(\mathcal{L}^2_\varphi, \|\cdot\|_\varphi\right)$ liegt.

Satz 6.3: $\overline{\widehat{\mathcal{S}_m^\perp}} = \mathcal{L}^2_\varphi$.

Beweis: Offensichtlich gilt $\widehat{\mathcal{S}_m^\perp} \subset \mathcal{L}^2_\varphi$. Nehmen wir an, daß $\hat{u}$ eine beliebige Funktion aus $\mathcal{L}^2_\varphi$ sei. Dann liegt die Funktion $\hat{u}_2 = \hat{u}\sqrt{\varphi}$ in $L^2(\mathbb{R}^d)$. Mit dem obigen Satz 6.2 gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Funktion $\hat{\gamma}_2 \in \mathcal{D}$ mit $\|\hat{u}_2 - \hat{\gamma}_2\|_{L^2} < \epsilon/3$. Somit gilt für die Funktion $\hat{\gamma}_\varphi := \hat{\gamma}_2/\sqrt{\varphi} \in \mathcal{L}^2_\varphi$ die Abschätzung $\|\hat{u} - \hat{\gamma}_\varphi\|_\varphi < \epsilon/3$. Da der Träger dieser stetigen Funktion $\hat{\gamma}_\varphi$ kompakt ist, gibt es eine Funktion $\hat{\gamma}_\mathcal{D} \in \mathcal{D}$ mit $\|\hat{\gamma}_\varphi - \hat{\gamma}_\mathcal{D}\|_\varphi < \epsilon/3$. Nutzt man schließlich die Tatsache, daß die Menge

$$\mathcal{D}_0 := \left\{\hat{\gamma} \in \mathcal{D} \,\middle|\, 0 \notin supp\ \hat{\gamma}\right\} \subset \widehat{\mathcal{S}_m^\perp}$$

bezüglich $\|\cdot\|_\varphi$ dicht in $\mathcal{D}$ liegt, so erkennt man, daß es eine Funktion $\hat{\gamma} \in \widehat{\mathcal{S}_m^\perp}$ gibt mit $\|\hat{\gamma}_\mathcal{D} - \hat{\gamma}\|_\varphi < \epsilon/3$. Insgesamt folgt

$$\|\hat{u} - \hat{\gamma}\|_\varphi \le \|\hat{u} - \hat{\gamma}_\varphi\|_\varphi + \|\hat{\gamma}_\varphi - \hat{\gamma}_\mathcal{D}\|_\varphi + \|\hat{\gamma}_\mathcal{D} - \hat{\gamma}\|_\varphi < \epsilon$$

und somit die Behauptung dieses Satzes. □

Nun haben wir zu erklären, wie wir den Abschluß von $\mathcal{S}_m^\perp$ aufzufassen haben.
Wir wissen bereits mit Satz 6.1, daß die beiden Prä-Hilberträume $\mathcal{S}_m^\perp$ und $\widehat{\mathcal{S}_m^\perp}$ vermöge der klassischen Fouriertransformation isometrisch isomorph aufeinander abgebildet werden. Nach Satz 6.3 liegt $\widehat{\mathcal{S}_m^\perp}$ dicht im gewichteten L^2-Raum $\mathcal{L}^2_\varphi$. Somit läßt sich der stetige und lineare Operator der klassischen inversen Fouriertransformation, der auf $\widehat{\mathcal{S}_m^\perp}$ definiert ist, stetig auf $\mathcal{L}^2_\varphi$ fortsetzen. Mit dieser Fortsetzung erhalten wir auf kanonische Art und Weise den Abschluß von $\mathcal{S}_m^\perp$.
Wir wollen dazu erläutern, wie wir die Fortsetzung der klassischen inversen Fouriertransformation verstehen: Sei $\hat{u}$ eine beliebige Funktion aus $\mathcal{L}^2_\varphi$. Dann gibt es eine Folge $\{\hat{\gamma}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\widehat{\mathcal{S}_m^\perp}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \|\hat{u} - \hat{\gamma}_n\|_\varphi = 0.$$

Nun können wir die Operation der inversen Fouriertransformation IF auf $\mathcal{L}^2_\varphi$ geeignet beschreiben. Schließlich konvergiert die Folge $\{\hat{\gamma}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in $\widehat{\mathcal{S}_m^\perp}$. Wegen der Isometrie zwischen $\widehat{\mathcal{S}_m^\perp}$ und $\mathcal{S}_m^\perp$ konvergiert ebenso die Folge $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ der inversen Fouriertransformierten in $\mathcal{S}_m^\perp$. Das Grenzelement aus dem Abschluß von $\mathcal{S}_m^\perp$ entspricht dem Bild der fortgesetzten inversen Fouriertransformation IF angewandt auf $\hat{u}$. Naheliegenderweise bezeichnen wir dieses Grenzelement mit $u = IF\hat{u}$. Offensichtlich gilt die Isometrieeigenschaft

$$\|u\|_\psi = \lim_{n\to\infty} \|\gamma_n\|_\psi = \lim_{n\to\infty} \|\hat{\gamma}_n\|_\varphi = \|\hat{u}\|_\varphi.$$

Nun läßt sich der Abschluß des Raumes $\mathcal{S}_m^\perp$ als diejenige Menge auffassen, die aus den inversen Fouriertransformierten des gewichteten L^2-Raumes $\mathcal{L}_\varphi^2$ besteht:

$$\overline{\mathcal{S}_m^\perp} = \left\{ u = IF\hat{u} \,\middle|\, \hat{u} \in \mathcal{L}_\varphi^2 \right\}.$$

Wir erhalten insgesamt den folgenden

Satz 6.4: *Der Hilbertraum* $\left(\mathcal{L}_\varphi^2, \|\cdot\|_\varphi\right) = \left(\widehat{\overline{\mathcal{S}_m^\perp}}, \|\cdot\|_\varphi\right)$ *ist vermöge der inversen Fouriertransformation* IF *isometrisch isomorph zu* $\left(\overline{\mathcal{S}_m^\perp}, \|\cdot\|_\psi\right)$. □

Eine ähnliche Vorgehensweise wie hier findet man übrigens im Buch [40] von Stein & Weiss, wo die klassische Fouriertransformation auf den Hilbertraum L^2 erweitert wird. Die dortigen Überlegungen werden in einem entsprechenden Satz zusammengefaßt, der in der Fourieranalysis als *Theorem von Plancherel* geläufig ist.

Mit unseren obigen Ergebnissen folgt nun, daß Punktauswertungsfunktionale der Form

$$\epsilon_x = \delta_x - \sum_{j=1}^{N} u_j(x)\delta_{x_j} \tag{6.3}$$

im Raum $\overline{\mathcal{S}_m^\perp}$ und deren distributionelle Fouriertransformierte

$$\hat{\epsilon}_x(\omega) = e^{\perp i x^T\omega} - \sum_{j=1}^{N} u_j(x) e^{\perp i x_j^T \omega}$$

im Raum $\widehat{\overline{\mathcal{S}_m^\perp}}$ liegen, falls die Funktionen $u_j : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ $(1 \le j \le N)$ Polynome aus $\mathcal{P}_m^d$ reproduzieren, so daß ϵ_x auf $\mathcal{P}_m^d$ verschwindet:

$$p(x) = \sum_{j=1}^{N} u_j(x) p(x_j) \qquad \text{für alle } p \in \mathcal{P}_m^d.$$

Nach Wu & Schaback [44] besitzt ϵ_x die typische Gestalt eines Fehlerfunktionals für den Fall der Interpolation auf einer endlichen Datenmenge X mit einer radialen Basisfunktion $\psi \in bpd(m, d)$.

Darüberhinaus folgt mit $\|\epsilon_x\|_\psi = \|\hat{\epsilon}_x\|_\varphi$ die Gültigkeit von

$$\begin{aligned}
\|\epsilon_x\|_\psi^2 &= \psi(0) - \sum_{j=1}^{N} u_j(x)\psi(x_j - x) - \sum_{k=1}^{N} u_k(x)\psi(x - x_k) + \sum_{j,k=1}^{N} \psi(x_j - x_k) \\
&= (2\pi)^{\perp d} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\omega) \left| e^{\perp i x^T\omega} - \sum_{j=1}^{N} u_j(x) e^{\perp i x_j^T\omega} \right|^2 d\omega \\
&= \|\hat{\epsilon}_x\|_\varphi^2,
\end{aligned}$$

wie wir bereits mit (5.3) in allgemeinerer Form bemerkt haben, ohne dabei die obige Isometrieeigenschaft zu ergründen.

6.2 Die Funktionenräume $\mathcal{F}_\psi$ und $F(\mathcal{F}_\psi)$

Wir wollen nun endlich den Funktionenraum $\mathcal{F}_\psi$ mit den geforderten Eigenschaften angeben und topologisieren. Wir werden $\mathcal{F}_\psi$ als Dualraum von $\overline{\mathcal{S}_m^\perp}$ vorstellen, dessen Struktur wir bereits im vorigen Abschnitt studiert haben.

Dabei verwenden wir teilweise Ideen von Madych & Nelson [27], halten uns aber nicht an spezielle Datenvorgaben und erhalten dadurch wesentlich allgemeinere Resultate. Im Gegensatz zu Madych & Nelson behandeln wir ebenso den Raum $F(\mathcal{F}_\psi)$ der distributionellen Fouriertransformierten von $\mathcal{F}_\psi$. Wir leiten nützliche Beziehungen zwischen den Funktionenräumen $\mathcal{F}_\psi$ und $F(\mathcal{F}_\psi)$ und deren Dualräumen $\overline{\mathcal{S}_m^\perp}$ und $\widehat{\overline{\mathcal{S}_m^\perp}}$ her, die uns helfen werden, den Funktionenraum $\mathcal{F}_\psi$ zu charakterisieren.

Wir werden dabei aufzeigen, daß der Fall der Interpolation von endlich vielen chaotisch verteilten Daten, wie in Paragraph 2 behandelt, in unser Schema paßt. Wir erinnern uns, daß wir eine Fehlerabschätzung der Form (2.5) bzw. (6.1) anstreben, die mit dem Fehlerfunktional ϵ_x der obigen Form (6.3) idealerweise folgende Gestalt annimmt:

$$|\epsilon_x(f)| = \left| f(x) - \sum_{j=1}^N u_j(x) f(x_j) \right| \le \|f\|_{\mathcal{F}_\psi} \cdot \|\epsilon_x\|_\psi. \tag{6.4}$$

Weiterhin fordern wir $\epsilon_x(\mathcal{P}_m^d) = \{0\}$. Unmittelbar aus der Gültigkeit dieser Abschätzung folgt bereits per definitionem die Stetigkeit des Fehlerfunktionals ϵ_x auf dem Raum $\mathcal{F}_\psi$.

Wir bemerken, daß sich die Wirkung des Fehlerfunktionals ϵ_x auf eine Funktion f ebenso mit

$$\epsilon_x(f) = [f](\epsilon_x) =: \chi_f(\epsilon_x)$$

schreiben läßt als Anwendung eines linearen Funktionals $\chi_f : \overline{\mathcal{S}_m^\perp} \to \mathbb{R}$ auf ϵ_x.

Dabei wurde die Definition

$$[f](\gamma) := \lim_{n\to\infty} [f](\gamma_n) \qquad \text{für alle } \gamma = \lim_{n\to\infty} \gamma_n \in \overline{\mathcal{S}_m^\perp} \tag{6.5}$$

mit einer entsprechenden Folge $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{S}_m^\perp$ verwendet und deren Wohldefiniertheit unterstellt.

Da wir den größtmöglichen Funktionenraum suchen, auf dem das Fehlerfunktional stetig bzw. (6.5) definiert ist, lassen wir in $\mathcal{F}_\psi$ alle Funktionen zu, die dafür in Frage kommen, und darüberhinaus Punktauswertungen zulassen:

$$\mathcal{F}_\psi := \left\{ f \in C(\mathbb{R}^d) \,\middle|\, [f] \in \mathcal{S}' : |[f](\gamma)| \le C_f \|\gamma\|_\psi \text{ für alle } \gamma \in \mathcal{S}_m^\perp \text{ mit einem } C_f \in \mathbb{R}_{>0} \right\}.$$

Den Raum der distributionellen Fouriertransformierten aus $\mathcal{F}_\psi$ schreiben wir zunächst als

$$F(\mathcal{F}_\psi) := \left\{ F[f] \,\middle|\, f \in \mathcal{F}_\psi \right\}.$$

Für alle $f \in \mathcal{F}_\psi$ sind die linearen Abbildungen $\chi_f : \overline{\mathcal{S}_m^\perp} \to \mathbb{R}$ und $\hat{\chi}_{F[f]} : \overline{\widehat{\mathcal{S}_m^\perp}} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$\hat{\chi}_{F[f]}(\hat{\gamma}) := (2\pi)^{\perp d} F[f](\hat{\gamma}) \qquad \text{für alle } \hat{\gamma} \in \overline{\widehat{\mathcal{S}_m^\perp}},$$

wohldefiniert und wegen der Gültigkeit von

$$\begin{aligned} |\chi_f(\gamma)| &= |[f](\gamma)| \leq C_f \|\gamma\|_\psi && \text{für alle } \gamma \in \overline{\mathcal{S}_m^\perp} \\ |\hat{\chi}_{F[f]}(\hat{\gamma})| &= (2\pi)^{\perp d} |F[f](\hat{\gamma})| \leq C_f \|\hat{\gamma}\|_\varphi && \text{für alle } \hat{\gamma} \in \overline{\widehat{\mathcal{S}_m^\perp}} \end{aligned}$$

auch beschränkt. Wir wollen nun die Normen von χ_f und $\hat{\chi}_{F[f]}$ berechnen.

Nach dem Satz von Fischer-Riesz existieren zu jedem $f \in \mathcal{F}_\psi$ und $F[f] \in F(\mathcal{F}_\psi)$ eindeutig bestimmte $\gamma_f \in \overline{\mathcal{S}_m^\perp}$ und $\hat{\gamma}_{F[f]} \in \overline{\widehat{\mathcal{S}_m^\perp}}$ mit

$$\begin{aligned} \chi_f(\gamma) &= (\gamma_f, \gamma)_\psi && \text{für alle } \gamma \in \overline{\mathcal{S}_m^\perp} \\ \hat{\chi}_{F[f]}(\hat{\gamma}) &= (\hat{\gamma}_{F[f]}, \hat{\gamma})_\varphi && \text{für alle } \hat{\gamma} \in \overline{\widehat{\mathcal{S}_m^\perp}}. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Wir stellen zu gegebenem $f \in \mathcal{F}_\psi$ und dessen distributioneller Fouriertransformierter $F[f]$ mit

$$(\gamma_f, \gamma)_\psi = [f](\gamma) = (2\pi)^{\perp d} F[f](\hat{\gamma}) = (\hat{\gamma}_{F[f]}, \hat{\gamma})_\varphi = (\gamma_{F[f]}, \gamma)_\psi$$

folgende Beziehung zwischen deren Repräsentanten γ_f und $\hat{\gamma}_{F[f]}$ her:

$$\gamma_f = \gamma_{F[f]} \quad \Longleftrightarrow \quad \hat{\gamma}_f = \hat{\gamma}_{F[f]}.$$

Wegen der Gültigkeit von

$$\begin{aligned} \chi_f(\gamma_f) &= (\gamma_f, \gamma_f)_\psi = \|\gamma_f\|_\psi \cdot \|\gamma_f\|_\psi \\ \hat{\chi}_{F[f]}(\hat{\gamma}_{F[f]}) &= (\hat{\gamma}_{F[f]}, \hat{\gamma}_{F[f]})_\varphi = \|\hat{\gamma}_{F[f]}\|_\varphi \cdot \|\hat{\gamma}_{F[f]}\|_\varphi \end{aligned}$$

besitzen χ_f und $\hat{\chi}_{F[f]}$ die gleiche Norm $\|\gamma_f\|_\psi = \|\hat{\gamma}_{F[f]}\|_\varphi$.

Für alle $f \in \mathcal{F}_\psi$ bzw. $F[f] \in F(\mathcal{F}_\psi)$ gelten somit die scharfen Abschätzungen

$$\begin{aligned} |[f](\gamma)| &\leq \|\gamma_f\|_\psi \cdot \|\gamma\|_\psi && \text{für alle } \gamma \in \overline{\mathcal{S}_m^\perp} \\ (2\pi)^{\perp d} |F[f](\hat{\gamma})| &\leq \|\hat{\gamma}_{F[f]}\|_\varphi \cdot \|\hat{\gamma}\|_\varphi && \text{für alle } \hat{\gamma} \in \overline{\widehat{\mathcal{S}_m^\perp}}. \end{aligned}$$

Durch die Anwendung des Satzes von Fischer-Riesz in (6.6) ist bereits ein natürlicher Zusammenhang zwischen den Räumen $\mathcal{F}_\psi$ und $\overline{\mathcal{S}_m^\perp}$ sowie $F(\mathcal{F}_\psi)$ und $\overline{\widehat{\mathcal{S}_m^\perp}}$ hergestellt. Wir wollen die beiden linearen Abbildungen, die durch die Anwendung des Satzes von Fischer-Riesz geliefert werden, benennen:

$$\begin{aligned} \Lambda : \mathcal{F}_\psi &\to \overline{\mathcal{S}_m^\perp} & \qquad \Lambda_F : F(\mathcal{F}_\psi) &\to \overline{\widehat{\mathcal{S}_m^\perp}} \\ f &\mapsto \Lambda(f) := \gamma_f & F[f] &\mapsto \Lambda_F(F[f]) := \hat{\gamma}_{F[f]}. \end{aligned}$$

Nun ist es naheliegend, die beiden Funktionenräume $\mathcal{F}_\psi$ und $F(\mathcal{F}_\psi)$ wie folgt mit den Semiskalarprodukten

$$\begin{aligned}(f,g)_{\mathcal{F}_\psi} &:= (\Lambda(f),\Lambda(g))_\psi = (\gamma_f,\gamma_g)_\psi \\ (F[f],F[g])_{F(\mathcal{F}_\psi)} &:= (\Lambda_F(F[f]),\Lambda_F(F[g]))_\varphi = (\hat\gamma_{F[f]},\hat\gamma_{F[g]})_\varphi = (\gamma_f,\gamma_g)_\psi\end{aligned}$$

sowie Seminormen

$$\|\cdot\|_{\mathcal{F}_\psi} = (\cdot,\cdot)^{1/2}_{\mathcal{F}_\psi} \qquad \|\cdot\|_{F(\mathcal{F}_\psi)} = (\cdot,\cdot)^{1/2}_{F(\mathcal{F}_\psi)}$$

auszustatten, so daß folgende Isometrieeigenschaft besteht:

$$(f,g)_{\mathcal{F}_\psi} = (F[f],F[g])_{F(\mathcal{F}_\psi)}.$$

Wir bestimmen die Kerne dieser beiden Bilinearformen explizit mit

Satz 6.5: *Es gilt:*

$$\begin{aligned}ker\ \Lambda &= \mathcal{P}^d_m \\ ker\ \Lambda_F &= F(\mathcal{P}^d_m).\end{aligned}$$

Beweis: Offensichtlich gilt

$$F\,(ker\ \Lambda) = ker\ \Lambda_F,$$

und daher reicht es, die erste Aussage nachzuweisen.
Trivialerweise gilt $\mathcal{P}^d_m \subset ker\ \Lambda$, denn für jedes Polynom $p \in \mathcal{P}^d_m$ folgt:

$$0 = [p](\gamma) = \chi_p(\gamma) = (\gamma_p,\gamma)_\psi \qquad \text{für alle } \gamma \in \overline{\mathcal{S}^\perp_m}$$

und somit $\gamma_p = 0$.

Sei umgekehrt $\gamma_f = 0$. Dann gilt:

$$[f](\gamma) = \chi_f(\gamma) = (\gamma_f,\gamma)_\psi = 0 \qquad \text{für alle } \gamma \in \overline{\mathcal{S}^\perp_m}. \tag{6.7}$$

Sei nun $X = \{x_1,\dots,x_Q\}$ ein $\mathcal{P}^d_m$-unisolventer Punktsatz im $\mathbb{R}^d$ mit $Q = \binom{m-1+d}{d}$. Dann gibt es eine Lagrange-Basis $\ell_1,\dots,\ell_Q$ von $\mathcal{P}^d_m$ mit

$$p(x) = \sum_{j=1}^{Q} \ell_j(x)p(x_j) \qquad \text{für alle } p \in \mathcal{P}^d_m.$$

Insbesondere liegt für $x \in \mathbb{R}^d$ das Funktional

$$\gamma^{(x)} = \delta_x - \sum_{j=1}^{Q} \ell_j(x)\delta_{x_j} \tag{6.8}$$

im Raum $\overline{\mathcal{S}_m^\perp}$. Setzt man $\gamma^{(x)}$ in (6.7) ein, so erhält man

$$0 = (\gamma_f, \gamma^{(x)})_\psi = [f](\gamma^{(x)}) = f(x) - \sum_{j=1}^{Q} \ell_j(x) f(x_j)$$

und daraus folgt

$$f(x) = \sum_{j=1}^{Q} \ell_j(x) f(x_j).$$

Nun erkennt man, daß f mit einem Polynom aus $\mathcal{P}_m^d$ übereinstimmt. □

Wir können sofort folgenden Satz anschließen:

Satz 6.6: *Der Raum* $\left(\mathcal{F}_\psi/\mathcal{P}_m^d, \|\cdot\|_{\mathcal{F}_\psi}\right)$ *ist ein Prä-Hilbertraum und wird vermöge der Fouriertransformation F auf* $\left(F(\mathcal{F}_\psi)/F(\mathcal{P}_m^d), \|\cdot\|_{F(\mathcal{F}_\psi)}\right)$ *isometrisch isomorph abgebildet.*

□

Wir suchen eine explizitere Gestalt der Funktionenräume $\mathcal{F}_\psi$ und $F(\mathcal{F}_\psi)$. Bisher wissen wir lediglich aus dem Beweis von Satz 6.5, daß der Polynomraum $\mathcal{P}_m^d$ im Funktionenraum $\mathcal{F}_\psi$ enthalten ist. Wir wollen nun typische Funktionen aus $\mathcal{F}_\psi$ bzw. $F(\mathcal{F}_\psi)$ angeben, die für unsere weiteren Untersuchungen dieser Räume von großer Bedeutung sein werden. Dazu betrachten wir zunächst Funktionen der Gestalt

$$f_\beta(x) := (\psi * \beta)(x)$$

mit einem beliebigen $\beta \in \mathcal{S}_m^\perp$. Wegen der Abschätzung

$$|[f_\beta](\gamma)| = |[\psi * \beta](\gamma)| = |[\psi](\beta * \gamma^*)| = |(\beta, \gamma)_\psi| \leq \|\beta\|_\psi \cdot \|\gamma\|_\psi, \tag{6.9}$$

die für alle $\beta, \gamma \in \mathcal{S}_m^\perp$ gültig ist, erkennen wir sofort, daß die Funktion f_β per definitionem im Funktionenraum $\mathcal{F}_\psi$ liegt. Dementsprechend sind sämtliche Distributionen der Gestalt

$$F[f_\beta] = F[\psi * \beta] = F[\psi] \cdot \hat{\beta} \tag{6.10}$$

mit $\hat{\beta} \in \widehat{\mathcal{S}_m^\perp}$ in dem Distributionenraum $F(\mathcal{F}_\psi)$ enthalten.
Betrachtet man die Abschätzung (6.9) erneut, so bemerkt man, daß diese sich ebenso auf den Abschluß $\overline{\mathcal{S}_m^\perp}$ von $\mathcal{S}_m^\perp$ fortsetzen läßt. Schließlich gibt es zu jedem $\beta \in \overline{\mathcal{S}_m^\perp}$ eine Folge $\{\beta_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ aus $\mathcal{S}_m^\perp$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \|\beta_n\|_\psi = \|\beta\|_\psi.$$

Dadurch ist das Faltungsprodukt

$$f_\beta = \psi * \beta := \lim_{n\to\infty} \psi * \beta_n$$

ebenso für alle $\beta \in \overline{\mathcal{S}_m^\perp}$ wohldefiniert und die Funktionen f_β liegen wegen (6.9) im Funktionenraum $\mathcal{F}_\psi$. Genauso erweitert man die Menge der Distributionen in (6.10), so daß folgender Satz gilt:

Satz 6.7: *Es gilt:*

$$\mathcal{P}_m^d \quad \oplus \quad \left\{\psi * \beta \,\middle|\, \beta \in \overline{\mathcal{S}_m^\perp}\right\} \subset \mathcal{F}_\psi \tag{6.11}$$

$$F(\mathcal{P}_m^d) \quad \oplus \quad \left\{F[\psi]\cdot\hat\beta \,\middle|\, \hat\beta \in \overline{\widehat{\mathcal{S}_m^\perp}}\right\} \subset F(\mathcal{F}_\psi). \tag{6.12}$$

Beweis: Da die beiden obigen Aussagen zueinander korrespondieren, reicht es eine zu zeigen. Wir weisen ohne Einschränkung der Allgemeinheit die Gültigkeit von (6.11) nach: Wie wir bereits erwähnten, gilt die Inklusion $\mathcal{P}_m^d \subset \mathcal{F}_\psi$ trivialerweise mit dem Beweis von Satz 6.5. Daß die Menge der Funktionen $f_\beta = \psi * \beta$ mit $\beta \in \overline{\mathcal{S}_m^\perp}$ in $\mathcal{F}_\psi$ enthalten ist, folgt aus unseren Überlegungen unmittelbar vor der Formulierung dieses Satzes. Desweiteren erhalten wir wegen

$$(\beta,\gamma)_\psi = [\psi * \beta](\gamma) = \chi_{\psi*\beta}(\gamma) = (\gamma_{\psi*\beta},\gamma)_\psi \qquad \text{für alle } \gamma \in \overline{\mathcal{S}_m^\perp}$$

die wichtige Aussage

$$\beta = \gamma_{\psi*\beta} = \Lambda(\psi * \beta) \qquad \text{für alle } \beta \in \overline{\mathcal{S}_m^\perp}. \tag{6.13}$$

Wir haben nur noch nachzuweisen, daß die Summe der beiden Räume in (6.11) direkt ist. Dazu nehmen wir an, daß die Funktion f in $\mathcal{P}_m^d$ liege und gleichzeitig die Darstellung $f = \psi * \gamma_f$ mit $\gamma_f \in \overline{\mathcal{S}_m^\perp}$ besitze. Dann folgt aber

$$0 = \|f\|_{\mathcal{F}_\psi} = \|\psi * \gamma_f\|_{\mathcal{F}_\psi} = \|\gamma_f\|_\psi$$

und somit $\gamma_f = 0$. Der Schnitt der beiden Räume besteht nur aus der Nullfunktion. □

Bei der Beschreibung typischer Funktionen aus $\mathcal{F}_\psi$ haben wir im Hinblick auf den obigen Satz 6.7 bewußt den Ansatz $f_\beta = \psi * \beta$ verwendet. Nun können wir nämlich einsehen, daß ebenso die Funktionen

$$g_\beta(x) := (\gamma^{(x)},\beta)_\psi$$

mit einer Linearkombination $\gamma^{(x)}$ an Punktauswertungsfunktionalen der Form (6.8) sowie einem $\beta \in \overline{\mathcal{S}_m^\perp}$ in unserem Funktionenraum $\mathcal{F}_\psi$ liegen. Denn schließlich stimmt g_β bis auf Polynome aus $\mathcal{P}_m^d$ mit der Funktion f_β überein, wie aus der folgenden Rechnung hervorgeht.

$$\begin{aligned} g_\beta(x) &= (\gamma^{(x)},\beta)_\psi = [\psi](\gamma^{(x)} * \beta^*) = [\psi * \beta](\gamma^{(x)}) = [\psi * \beta]\left(\delta_x - \sum_{j=1}^{Q} \ell_j(x)\delta_{x_j}\right) \\ &= (\psi * \beta)(x) - \sum_{j=1}^{Q} \ell_j(x)(\psi * \beta)(x_j) = f_\beta(x) - \sum_{j=1}^{Q} \ell_j(x)(\psi * \beta)(x_j). \end{aligned}$$

Mit Satz 6.7 haben wir zwei umfangreiche Mengen beschrieben, die in $\mathcal{F}_\psi$ bzw. $F(\mathcal{F}_\psi)$ liegen. Wir schreiben jedes Element f der direkten Summe in (6.11) gelegentlich als

$$f = f_\beta + p_f, \qquad \text{mit } \beta \in \overline{\mathcal{S}_m^\perp}, p_f \in \mathcal{P}_m^d. \tag{6.14}$$

Da diese Zerlegung eindeutig ist, ist die Projektion von f auf den Polynomraum $\mathcal{P}_m^d$ wohldefiniert. Eine entsprechende Darstellung hat man für die Elemente der direkten Summe in (6.12) vorliegen.

Wir geben nun die jeweiligen Normen dieser Elemente an mit der folgenden zusammenfassenden

Bemerkung 6.1: *Für alle $\beta \in \overline{\mathcal{S}_m^\perp}$ und $p \in \mathcal{P}_m^d$ gilt:*

$$\psi * \beta + p \in \mathcal{F}_\psi \quad \mathit{mit} \quad \|\psi * \beta + p\|_{\mathcal{F}_\psi} = \|\beta\|_\psi$$

$$F[\psi] \cdot \hat{\beta} + F[p] \in F(\mathcal{F}_\psi) \quad \mathit{mit} \quad \|F[\psi] \cdot \hat{\beta} + F[p]\|_{F(\mathcal{F}_\psi)} = \|\hat{\beta}\|_\varphi.$$

Beweis: Die Inklusionsrelationen ergeben sich unmittelbar aus Satz 6.7. Die Berechnung Seminorm ist beispielsweise für die erste Aussage unter Verwendung der Definition und mit Satz 6.5 sowie (6.13) trivial. □

Wir betrachten nun die linearen Abbildungen

$$\widetilde{\Lambda} : \mathcal{F}_\psi / \mathcal{P}_m^d \quad \rightarrow \quad \overline{\mathcal{S}_m^\perp}$$

$$\widetilde{\Lambda}_F : F(\mathcal{F}_\psi)/F(\mathcal{P}_m^d) \quad \rightarrow \quad \widehat{\overline{\mathcal{S}_m^\perp}},$$

die als entsprechende Einschränkungen von Λ sowie Λ_F aufzufassen sind.

Wir wissen bereits mit Satz 6.5, daß $\widetilde{\Lambda}$ und $\widetilde{\Lambda}_F$ injektiv sind. Erstaunlicherweise ergibt sich aus den obigen Überlegungen sofort die Tatsache, daß diese beiden linearen Abbildungen ebenso surjektiv sind:

Denn für ein beliebiges β aus $\overline{\mathcal{S}_m^\perp}$ folgt mit $f_\beta = \psi * \beta \in \mathcal{F}_\psi / \mathcal{P}_m^d$ bereits aus (6.13)

$$\widetilde{\Lambda}(f_\beta) = \Lambda(f_\beta) = \Lambda(\psi * \beta) = \gamma_{\psi * \beta} = \beta$$

und somit die Surjektivität von $\widetilde{\Lambda}$. Die Surjektivität von $\widetilde{\Lambda}_F$ weist man auf analoge Art und Weise nach.

Wir können nun die Umkehrabbildungen von $\widetilde{\Lambda}$ und $\widetilde{\Lambda}_F$ explizit angeben:

Satz 6.8: *Die linearen Abbildungen*

$$\widetilde{\Lambda}^{\perp 1} : \overline{\mathcal{S}_m^\perp} \quad \rightarrow \quad \mathcal{F}_\psi / \mathcal{P}_m^d \qquad \beta \quad \mapsto \quad f_\beta = \psi * \beta$$

$$\widetilde{\Lambda}_F^{\perp 1} : \widehat{\overline{\mathcal{S}_m^\perp}} \quad \rightarrow \quad F(\mathcal{F}_\psi)/F(\mathcal{P}_m^d) \qquad \hat{\beta} \quad \mapsto \quad F[\psi] \cdot \hat{\beta}$$

sind die Umkehrabbildungen zu $\widetilde{\Lambda}$ bzw. $\widetilde{\Lambda}_F$. □

Nun haben wir die Struktur der Funktionenräume $\mathcal{F}_\psi$ bzw. $F(\mathcal{F}_\psi)$ hinreichend ergründet und insgesamt folgt der

Satz 6.9: *Der Raum $\left(\mathcal{F}_\psi/\mathcal{P}_m^d, \|\cdot\|_{\mathcal{F}_\psi}\right)$ ist ein Hilbertraum und wird vermöge der Fouriertransformation F isometrisch isomorph auf den Raum $\left(F(\mathcal{F}_\psi)/F(\mathcal{P}_m^d), \|\cdot\|_{F(\mathcal{F}_\psi)}\right)$ abgebildet.* □

Daraus ergibt sich unmittelbar die

Folgerung 6.1: *Der Funktionenraum $\left(\mathcal{F}_\psi/\mathcal{P}_m^d, \|\cdot\|_{\mathcal{F}_\psi}\right)$ ist vermöge $F \circ \widetilde{\Lambda}$ isometrisch isomorph zu dem gewichteten L^2-Raum $\mathcal{L}_\varphi^2$.* □

Wir veranschaulichen die Situation mit dem folgenden Diagramm.

$$\begin{tikzcd}
\left(\mathcal{F}_\psi/\mathcal{P}_m^d, \|\cdot\|_{\mathcal{F}_\psi}\right) \arrow[r, shift left, "\widetilde{\Lambda}"] \arrow[d, shift right, "F"'] & \left(\overline{\mathcal{S}_m^\perp}, \|\cdot\|_\psi\right) \arrow[l, shift left, "\widetilde{\Lambda}^{\perp 1}"] \arrow[d, shift right, "F"'] \\
\left(F(\mathcal{F}_\psi)/F(\mathcal{P}_m^d), \|\cdot\|_{F(\mathcal{F}_\psi)}\right) \arrow[r, shift left, "\widetilde{\Lambda}_F"] \arrow[u, shift right, "IF"'] & \left(\widehat{\overline{\mathcal{S}_m^\perp}}, \|\cdot\|_\varphi\right) = \left(\mathcal{L}_\varphi^2, \|\cdot\|_\varphi\right) \arrow[l, shift left, "\widetilde{\Lambda}_F^{\perp 1}"] \arrow[u, shift right, "IF"']
\end{tikzcd}$$

Offensichtlich kommutiert das obige Diagramm, so daß wir sofort die folgende Bemerkung formulieren können.

Bemerkung 6.2:

$$\begin{aligned}
F &= \widetilde{\Lambda}_F \circ F \circ \widetilde{\Lambda}^{\perp 1} \\
F &= \widetilde{\Lambda}_F^{\perp 1} \circ F \circ \widetilde{\Lambda} \\
IF &= \widetilde{\Lambda} \circ IF \circ \widetilde{\Lambda}_F^{\perp 1} \\
IF &= \widetilde{\Lambda}^{\perp 1} \circ IF \circ \widetilde{\Lambda}_F
\end{aligned}$$

□

Wir geben die Gestalt der Funktionenräume nun explizit an mit

Satz 6.10:

$$\mathcal{F}_\psi = \left\{ \psi * \beta + p \,\middle|\, \beta \in \overline{\mathcal{S}_m^\perp}, p \in \mathcal{P}_m^d \right\} \tag{6.15}$$

$$F(\mathcal{F}_\psi) = \left\{ F[\psi] \cdot \hat{\beta} + F[p] \,\middle|\, \hat{\beta} \in \widehat{\overline{\mathcal{S}_m^\perp}}, p \in \mathcal{P}_m^d \right\}. \tag{6.16}$$

□

Wir haben bereits in Paragraph 2 behauptet, daß wir mit $\mathcal{F}_\psi$ einen Funktionenraum konstruieren, der u. a. den Raum $\left(\mathfrak{F}_\psi, \|\cdot\|_{\mathfrak{F}_\psi}\right)$ von Wu & Schaback [44] umfaßt.
Dies können wir leicht nachweisen: Nehmen wir an, daß f eine fouriertransformierbare Funktion sei, die der strikten Bedingung $\|f\|_{\mathfrak{F}_\psi} < \infty$ genüge. Da für alle $\gamma \in \mathcal{S}_m^\perp$ die Ungleichung

$$|[f](\gamma)| = \left|\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\gamma(x)\,dx\right| = (2\pi)^{\perp d}\left|\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\omega)\hat{\gamma}(\omega)\,d\omega\right| \leq \|f\|_{\mathfrak{F}_\psi}\cdot\|\hat{\gamma}\|_\varphi = \|f\|_{\mathfrak{F}_\psi}\cdot\|\gamma\|_\psi$$

erfüllt ist, liegt f per definitionem in unserem Raum $\mathcal{F}_\psi$. Da wir f als fouriertransformierbar vorausgesetzt hatten, ergeben sich mit (6.15) bzw. (6.16) die Darstellungen

$$\begin{aligned} f &= \psi * \gamma_f \\ F[f] = [\hat{f}] &= F[\psi]\cdot\hat{\gamma}_f, \end{aligned}$$

so daß wir mit der letzteren weiter folgern können:

$$\|f\|_{\mathcal{F}_\psi} = \|[\hat{f}]\|_{F(\mathcal{F}_\psi)} = \|\hat{\gamma}_f\|_\varphi = \|f\|_{\mathfrak{F}_\psi}.$$

Diese Tatsache zeigt, daß der Raum $\left(\mathfrak{F}_\psi, \|\cdot\|_{\mathfrak{F}_\psi}\right)$ von Wu & Schaback [44] sogar normisometrisch in unseren Raum $\left(\mathcal{F}_\psi, \|\cdot\|_{\mathcal{F}_\psi}\right)$ eingebettet ist.
Wie wir bereits wissen, ist unser Raum reicher an Funktionen, da dieser beispielsweise den Polynomraum $\mathcal{P}_m^d$ umfaßt. Wir können jedoch nicht erwarten, daß Polynome mit beliebig hohem Grad in $\mathcal{F}_\psi$ liegen. Wir bestätigen dies mit dem folgenden

Satz 6.11: *Für $q \in \mathbb{N}_0^d$ mit $|q| \geq d/2 + m$ liegen die Monome x^q nicht im Raum $\mathcal{F}_\psi$.*

Beweis: Man betrachte das Monom x^q mit $q \in \mathbb{N}_0^d$. Falls x^q in $\mathcal{F}_\psi$ liegt, so ist notwendigerweise die Bedingung

$$|[x^q](\gamma)| \leq C_{x^q}\|\gamma\|_\psi \qquad \text{für alle } \gamma \in \mathcal{S}_m^\perp$$

erfüllt. Äquivalent dazu ist die Gültigkeit von

$$\left|D^q\hat{\gamma}(\omega)\Big|_{\omega=0}\right| \leq C_{x^q}\|\hat{\gamma}\|_\varphi \qquad \text{für alle } \hat{\gamma} \in \widehat{\mathcal{S}_m^\perp}. \tag{6.17}$$

Wir beabsichtigen, in diese Ungleichung die Funktionen

$$\hat{\gamma}_n(\omega) = \omega^q e^{\perp n\|\omega\|^2/2}\left(\frac{n}{\pi}\right)^{d/4}$$

einzusetzen, die wir bereits in Unterabschnitt 4.3.2 betrachtet haben. Dort bemerkten wir, daß sämtliche dieser Funktionen für $|q| \geq m$ in $\widehat{\mathcal{S}_m^\perp}$ liegen. Mit Folgerung 4.1 schließen wir, daß

$$D^q\hat{\gamma}_n(\omega)\Big|_{\omega=0} = q!\left(\frac{n}{\pi}\right)^{d/4}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Die Normquadrate der einzelnen Funktionen berechnen sich zu

$$\|\hat{\gamma}_n\|_\varphi^2 = (2\pi)^{\perp d} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\omega)\, \omega^{2q} e^{\perp n\|\omega\|^2} \left(\frac{n}{\pi}\right)^{d/2} d\omega.$$

Mit $n \to \infty$ führt das zu einer Auswertung der Funktion $\varphi(\omega)\,\omega^{2q}$ an der Stelle Null. Wegen der Voraussetzung 4.2 strebt die rechte Seite von (6.17) mit $n \to \infty$ gegen Null, falls $2|q| \geq s+d$. Hinreichend dafür ist mit Satz 4.5 aber die gestellte Bedingung $|q| \geq d/2+m$. Mit der Tatsache, daß die linke Seite von (6.17) unter diesen Umständen für $n \to \infty$ divergiert, erhalten wir die Behauptung dieses Satzes. □

6.3 Interpolation auf einer endlichen Datenmenge

In diesem Paragraphen haben wir eine Hilbertraumtheorie vorgestellt, die auf Interpolationsaufgaben mit einer radialen Basisfunktion $\psi \in bpd(m,d)$ anwendbar ist. Dabei haben wir stets die Allgemeinheit unserer Untersuchungen betont und geben endlich an, wie hier die Interpolationsaufgabe aus Paragraph 2 auf natürliche Art und Weise verallgemeinert behandelt wurde:

Sei $f = \psi * \gamma_f + p_f \in \mathcal{F}_\psi$ eine Funktion gemäß Darstellung (6.14), die Werte $f(x_j) \in \mathbb{R}$ liefere , wobei die Punkte x_j in einer nicht näher spezifizierten Menge $X \subset \mathbb{R}^d$ liegen. Wir wollen die Interpolationsaufgabe

$$s_\psi(x_j) = f(x_j) \qquad x_j \in X$$

mit einer Ansatzfunktion der Form

$$s_\psi(x) = (\psi * \gamma_s)(x) + p_s(x) \in \mathcal{F}_\psi$$

lösen. Dabei ist $p_s \in \mathcal{P}_m^d$ ein Polynom und $\gamma_s \in \overline{\mathcal{S}_m^\perp}$.

Falls wir bei der Bestimmung der Interpolante keine weiteren Einschränkungen treffen, so haben wir bereits mit $\gamma_s = \gamma_f$ und $p_s = p_f$ eine Lösung gefunden, mit der die Funktion f reproduziert wird.

Die Behandlung eines solchen Falles ist somit witzlos. Daher trifft man gewisse Einschränkungen an die Gestalt von $\gamma_s \in \overline{\mathcal{S}_m^\perp}$, die aber dennoch die Existenz einer Interpolante und deren Eindeutigkeit zusichern. In diesem Fall liegt dasjenige Funktional $\epsilon_x : \mathcal{F}_\psi \to \mathbb{R}$, das mit $\epsilon_x(f) = f(x) - s_\psi(x)$ den Interpolationsfehler der zugrundeliegende Methode in einem Punkt $x \in \mathbb{R}^d \setminus X$ bestimmt, wegen $\epsilon_x(\mathcal{P}_m^d) = \{0\}$ im Raum $\overline{\mathcal{S}_m^\perp}$. Unter diesen Umständen folgt die Stetigkeit des Fehlerfunktionals ϵ_x auf dem Raum $\mathcal{F}_\psi$ und wir erhalten eine Fehlerabschätzung, über dessen Gestalt der folgende Satz Auskunft gibt:

Satz 6.12*: Sei* $\epsilon_x \in \overline{\mathcal{S}_m^\perp}$ *und* $f \in \mathcal{F}_\psi$*. Dann gilt die Abschätzung*

$$|\epsilon_x(f)| \leq \|f\|_{\mathcal{F}_\psi} \cdot \|\epsilon_x\|_\psi$$

mit Gleichheit für die Funktionen

$$f_x(y) = (\psi * \epsilon_x)(y) + p_{f_x}(y) \in \mathcal{F}_\psi.$$

Beweis: Für eine beliebige Funktion $f = \psi * \gamma_f + p_f \in \mathcal{F}_\psi$ gilt:

$$|\epsilon_x(f)| = |\chi_f(\epsilon_x)| = |(\gamma_f, \epsilon_x)_\psi| \leq \|\gamma_f\|_\psi \cdot \|\epsilon_x\|_\psi = \|f\|_{\mathcal{F}_\psi} \cdot \|\epsilon_x\|_\psi.$$

Mit $f_x = \psi * \epsilon_x + p_{f_x}$ folgt

$$|\epsilon_x(f)| = |(\epsilon_x, \epsilon_x)_\psi| = \|\epsilon_x\|_\psi \cdot \|\epsilon_x\|_\psi = \|f_x\|_{\mathcal{F}_\psi} \cdot \|\epsilon_x\|_\psi.$$

□

Wir wollen unsere Überlegungen nun auf den Fall der Interpolation auf einer endlichen Punktmenge $X := \{x_1, \ldots, x_N\} \subset \mathbb{R}^d$ mit einer Interpolante

$$s_{\psi,c,X} = \psi * \gamma_{c,X} + p_s \in \mathcal{F}_\psi$$

anwenden. Dabei gilt $p_s \in \mathcal{P}_m^d$ und die Gestalt von $\gamma_{c,X} \in \overline{\mathcal{S}_m^\perp}$ ist folgendermaßen festgelegt:

$$\gamma_{c,X} = \sum_{j=1}^N c_j \delta_{x_j}.$$

Die zu interpolierenden Funktionswerte $f(x_1), \ldots, f(x_N)$ stammen von einer Funktion $f = \psi * \gamma_f + p_f$ aus dem Funktionenraum $\mathcal{F}_\psi$. Wir wissen mit Satz 2.1, daß wir genau eine Interpolante der Form $s_{\psi,c,X}$ finden, falls X einen $\mathcal{P}_m^d$-regulären Punktesatz enthält. Unter diesen Umständen liegt das Fehlerfunktional ϵ_x im Dualraum $\overline{\mathcal{S}_m^\perp}$ und besitzt die Gestalt

$$\epsilon_x = \delta_x - \sum_{j=1}^N u_j(x)\delta_{x_j}$$

mit reellwertigen Funktionen $u_1(x), \ldots, u_N(x)$, die Polynome aus $\mathcal{P}_m^d$ im folgenden Sinne reproduzieren:

$$p(x) = \sum_{j=1}^N u_j(x)p(x_j) \qquad \text{für alle } p \in \mathcal{P}_m^d.$$

Wir wenden nun Satz 6.12 auf unseren Spezialfall an und erhalten die folgende Fehlerabschätzung

$$|\epsilon_x(f)| = |f(x) - s_{\psi,c,X}(x)| \leq \|f\|_{\mathcal{F}_\psi} \cdot \|\epsilon_x\|_\psi = \|\gamma_f\|_\psi \cdot P_{\psi,u,X}(x)$$

mit der Gütefunktion

$$P_{\psi,u,X}^2(x) = \psi(0) - \sum_{j=1}^N u_j(x)\psi(x_j - x) - \sum_{k=1}^N u_k(x)\psi(x - x_k) + \sum_{j,k=1}^N u_j(x)u_k(x)\psi(x_j - x_k).$$

Die obige Fehlerabschätzung ist nach Satz 6.12 scharf mit Gleichheit für Funktionen der Form

$$f_x(y) = (\psi * \epsilon_x)(y) + p_{f_x}(y) = \psi(y - x) - \sum_{j=1}^N u_j(x)\psi(y - x_j) + p_{f_x}(y) \in \mathcal{F}_\psi$$

mit $p_{f_x} \in \mathcal{P}_m^d$.

Symbolverzeichnis

$\|\cdot\|$	euklidische Norm
$d \in \mathbb{N}$	Raumdimension
$m \in \mathbb{N}_0$	Ordnung der bedingten positiven Definitheit
i	$\sqrt{-1} \in \mathbb{C}$
$\pi/2$	eindeutig bestimmte Nullstelle der cos-Funktion im Intervall $[0, 2]$,
π	$\approx$ 3.1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445...
p, q	Multiindizes aus $\mathbb{N}_0^d$
$\|p\|$	$p_1 + \ldots + p_d$ für $p \in \mathbb{N}_0^d$
$p!$	$p_1! \cdot \ldots \cdot p_d!$ für $p \in \mathbb{N}_0^d$
e_j	j-ter Einheitsvektor im $\mathbb{R}^d$
$\mathcal{O}$	Landau-Symbol
$B_\alpha(x)$	$\left\{ y \in \mathbb{R}^d \,\middle|\, \|x - y\| < \alpha \right\}$ offene Kugel um $x \in \mathbb{R}^d$ mit Radius $\alpha > 0$
$\lfloor r \rfloor$	$\max\{\ell \in \mathbb{Z} \,\vert\, \ell \leq r\}$ größte ganze Zahl unterhalb von $r \in \mathbb{R}$
$\lceil r \rceil$	$\min\{\ell \in \mathbb{Z} \,\vert\, \ell \geq r\}$ kleinste ganze Zahl oberhalb von $r \in \mathbb{R}$
supp f	$\overline{\left\{ x \in \mathbb{R}^d \,\middle|\, f(x) \neq 0 \right\}}$ Träger der Funktion $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$
ker L	Kern der linearen Abbildung L
$\hat{f}$	klassische Fouriertransformation der Funktion f, $\hat{f}(\omega) = \int e^{\perp i x^T \omega} f(x)\, dx$
$[f]$	reguläre Distribution, erzeugt von der Funktion f
F	distributionelle Fouriertransformation
IF	distributionelle inverse Fouriertransformation
δ	Diracsches δ-Funktional, Punktauswertungsfunktional in Null
δ_{x_0}	$\delta(x - x_0)$ Punktauswertungsfunktional in x_0
D	Ableitungsoperator
$*$	Faltungsoperator, $(f * g)(x) = \int f(x - y) g(y)\, dy$
$\gamma * \gamma^*$	Autokorrelation von γ

Funktionenklassen

$bpd(m, d), bpsd(m, d)$	Klasse aller bedingt positiv (semi)definiten stetigen Funktionen der Ordnung m auf $\mathbb{R}^d$	*S.* 2
$BPD(m, d), BPSD(m, d)$	Klasse aller bedingt positiv (semi)definiten Distributionen der Ordnung m auf $\mathbb{R}^d$	*S.* 13

Funktionenräume

$\mathcal{P}_m^d$	$span\ \left\{x^p \,\middle|\, x \in \mathbb{R}^d,\ p \in \mathbb{N}_0^d \text{ mit } |p| < m\right\}$	
$C^\infty(\mathbb{R}^d)$	Menge aller beliebig oft differenzierbaren Funktionen	
$\mathcal{D}$	$\left\{f \in C^\infty(\mathbb{R}^d) \,\middle|\, supp\ f \subset \mathbb{R}^d \text{ kompakt }\right\}$	
$\mathcal{S}$	Schwartzscher Raum	$S.$ 12
$\mathcal{S}_m^\perp$	$\left\{\gamma \in \mathcal{S} \,\middle|\, ([x^p], \gamma) = 0,\ |p| < m\right\}$	$S.$ 14
$\widehat{\mathcal{S}_m^\perp}$	$\left\{\hat{\gamma} \,\middle|\, \gamma \in \mathcal{S}_m^\perp\right\}$	$S.$ 14
$\left(\overline{\mathcal{S}_m^\perp}, \|\cdot\|_\psi\right)$	Vervollständigung von $\mathcal{S}_m^\perp$	$S.$ 40
$\left(\overline{\widehat{\mathcal{S}_m^\perp}}, \|\cdot\|_\varphi\right)$	Vervollständigung von $\widehat{\mathcal{S}_m^\perp}$	$S.$ 39
$\left(\mathcal{L}_\varphi^2, \|\cdot\|_\varphi\right)$	gewichteter L^2-Raum	$S.$ 39
$\left(\mathcal{F}_\psi, \|\cdot\|_{\mathcal{F}_\psi}\right)$	$\left\{f \,\middle|\, |([f], \gamma)| \le \|f\|_{\mathcal{F}_\psi} \cdot \|\gamma\|_\psi \text{ für alle } \gamma \in \overline{\mathcal{S}_m^\perp}\right\}$	$S.$ 41
$\left(F(\mathcal{F}_\psi), \|\cdot\|_{F(\mathcal{F}_\psi)}\right)$	$\left\{F[f] \,\middle|\, f \in \mathcal{F}_\psi\right\}$	$S.$ 41
$\left(\mathfrak{F}_\psi, \|\cdot\|_{\mathfrak{F}_\psi}\right)$		$S.$ 7

Literatur

[1] M. Abramowitz, I. A. Stegun: *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications, New York 1970.

[2] N. Aronszajn: "Theory of reproducing kernels". *Transactions of the American Mathematical Society* **68** (1950), 337-404.

[3] S. Bernstein: "Sur les fonctions absolument monotones". *Acta Mathematica* **51** (1928), 1-66.

[4] S. Bochner: *Vorlesungen über Fouriersche Integrale*. Akademische Verlagsgesellschaft m. b. H. Leipzig, 1932.

[5] M. D. Buhmann: *Multivariable Interpolation using Radial Basis Functions*. Ph. D. Thesis, University of Cambridge 1989.

[6] M. D. Buhmann: "New developments in the theory of radial basis function interpolation". *Numerical Analysis Reports DAMTP 1993/NA9*, University of Cambridge, March 1993.

[7] J. Duchon: "Interpolation des Fonctions de deux variables suivant le principe de la flexion des plaques minces". *R.A.I.R.O. Analyse Numeriques* **10** (1976), 5-12.

[8] J. Duchon: "Splines minimizing rotation-invariant semi-norms in Sobolev spaces". *Constructive Theory of Functions of Several Variables* (W. Schempp, K. Zeller, eds.). Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1977, 85-100.

[9] J. Duchon: "Sur L'erreur d'interpolation des fonctions de plusiers variables par les D^m-splines". *R.A.I.R.O. Analyse Numeriques* **12** (1978), 325-334.

[10] N. Dyn: "Interpolation of Scattered Data by Radial Functions". *Topics in Multivariate Approximation* (C. K. Chui, L. L. Schumaker and F. I. Utreras, eds.). Academic Press, 1987, 47-61.

[11] N. Dyn: "Interpolation and Approximation by Radial and Related Functions". *Approximation Theory VI: Vol. 1* (C. K. Chui, L. L. Schumaker, J. D. Ward, eds.). Academic Press, 1989, 211-234.

[12] N. Dyn, D. Levin, S. Rippa: "Numerical procedures for global surface fitting of scattered data by radial functions". *SIAM J. Sci. and Stat. Computing* **7** (1986), 639-659.

[13] J. L. Fields, M. E. Ismail: "On the positivity of some ${}_1F_2$'s". SIAM Journal on Mathematical Analysis **6** (1975), 551-559.

[14] R. Franke: "Scattered Data Interpolation: test of some methods". *Math. Comp.* **38** (1982), 181-200.

[15] G. Gasper: "Positive Integrals of Bessel Functions". SIAM Journal on Mathematical Analysis **6** (1975), 868-881.

[16] I. M. Gel'fand, G. E. Shilov: *Generalized Functions, Vol. 1: Properties and Operations.* Academic Press, New York 1964.

[17] I. M. Gel'fand, N. Y. Vilenkin: *Generalized Functions, Vol. 4: Applications of Harmonic Analysis.* Academic Press, New York 1964.

[18] K. Guo, S. Hu, X. Sun: "Conditionally Positive Definite Functions and Laplace-Stieltjes Integrals". *Journal of Approximation Theory* **74** (1993), 249-265.

[19] R. L. Hardy: "Multiquadric Equations of Topography and other irregular Surfaces". *J. Geophys. Res.* **76** (1971), 1905-1915.

[20] F. Hirzebruch, W. Scharlau: *Einführung in die Funktionalanalysis.* BI Hochschultaschenbücher, Mannheim-Wien-Zürich 1971.

[21] L. Hörmander: *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I: Distribution Theory and Fourier Analysis.* Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1983.

[22] I. R. H. Jackson: "An Order of Convergence for Some Radial Basis Functions". *IMA Journal of Numerical Analysis* **9** (1989), 567-587.

[23] L. Jantscher: *Distributionen.* de Gruyter, Berlin-New York 1971.

[24] K. Jetter: "Multivariate approximation: a view from cardinal interpolation". *Approximation Theory VII* (E. W. Cheney, C. K. Chui, L. L. Schumaker, eds.). Academic Press, New York 1992.

[25] W. A. Light: "Some aspects of radial basis function approximation". *Approximation Theory, Spline Functions and Applications* (S. P. Singh, ed.). Kluwer Academic Publishers, 1992, 163-190.

[26] W. R. Madych, S. A. Nelson: "Multivariate interpolation: a variational theory". unpublished preprint, 1983.

[27] W. R. Madych, S. A. Nelson: "Multivariate Interpolation and Conditionally Positive definite Functions". *Approximation Theory and its Applications* **4.4** (1988), 77-89.

[28] M. Mathias: "Über positive Fourier-Integrale". *Math. Zeit.* **16** (1923), 103-125.

[29] C. A. Micchelli: "Interpolation of Scattered Data: Distance Matrices and Conditionally positive definite Functions". *Constructive Approximation* **2** (1986), 11-22.

[30] F. J. Narcowich, J. D. Ward: "Norms of Inverses and Condition Numbers for Matrices Associated with Scattered Data". *Journal of Approximation Theory* **64** (1991), 69-94.

[31] F. J. Narcowich, J. D. Ward: “Norm Estimates for the Inverses of a General Class of Scattered-Data Radial-Function Interpolation Matrices”. *Journal of Approximation Theory* **69** (1992), 84-109.

[32] F. J. Narcowich, N. Sivakumar, J. D. Ward: “On Condition Numbers Associated With Radial-Function Interpolation”, to appear.

[33] M. J. D. Powell: “The Theory of Radial Basis Function Approximation in 1990”. *Advances in Numerical Analysis II: Wavelets, Subdivision Algorithms, and Radial Basis Functions* (W. A. Light, ed.). Oxford University Press, 1992, 105-210.

[34] R. Schaback: “Comparison of Radial Basis Function Interpolants”. *Multivariate Approximation and Wavelets* (K. Jetter and F. I. Utreras, eds.). World Scientific, Singapore 1992, 1-12.

[35] R. Schaback: “Lower Bounds for Norms of Inverses of Interpolation Matrices for Radial Basis Functions”, to appear in *Journal of Approximation Theory.*

[36] R. Schaback, H. Wendland: “Special Cases of Compactly Supported Radial Basis Functions”, Manuskript 1993.

[37] I. J. Schoenberg: “Metric spaces and positive definite functions”. *Transactions of the American Mathematical Society* **44** (1938), 522-536.

[38] I. J. Schoenberg: “Metric spaces and completely monotone functions”. *Annals of Mathematics* **39** (1938), 811-841.

[39] L. Schwartz: *Théorie des Distributions.* Hermann, Paris 1966.

[40] E. M. Stein, G. Weiss: *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces.* Princeton University Press, Princeton 1971.

[41] G. Szegö: *Orthogonal Polynomials.* In “American Mathematical Society Colloquium Publications”, Vol. **23**, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1939.

[42] W. Walter: *Analysis II.* Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1990.

[43] D. V. Widder: *An Introduction to Transform Theory.* Academic Press, New York 1971.

[44] Z. Wu, R. Schaback: “Local error estimates for radial basis function interpolation”. *IMA Journal of Numerical Analysis* **13** (1993), 13-27.

[45] K. Yosida: *Functional Analysis.* Springer, Berlin-Heidelberg-New York 1968.

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name	Armin Iske
Geburtstag	09.01.1966
Geburtsort	Kassel
Eltern	Herbert Iske, Bundesbahnamtmann
	Helga Iske, geb. Homburg, Schneidermeisterin

Schulausbildung

August 1972 – Juli 1976	Grundschule Heckershausen, Landkreis Kassel
August 1976 – Juli 1982	Gesamtschule Ahnatal in Vellmar, Landkreis Kassel
August 1982 – Juni 1985	Goethe-Gymnasium Kassel
14. Juni 1985	Abitur

Wehrdienst

Juli 1985 – September 1986	Grundwehrdienst der Bundeswehr in Kassel

Studium an der Georg-August-Universität zu Göttingen

Oktober 1986 – Februar 1992	Diplomstudiengang Mathematik mit Nebenfach Informatik
seit März 1992	Promotionsstudiengang Mathematik
seit März 1992	Diplomstudiengang Volkswirtschaftslehre

Prüfungen/Abschlüsse

31. Oktober 1988	Vordiplom Mathematik
28. Oktober 1991	Hauptdiplom Mathematik

Tätigkeiten am Fachbereich Mathematik der Georg-August-Universität zu Göttingen

April 1989 – September 1990	Zeitverträge als wissenschaftliche Hilfskraft am Mathematischen Institut
seit November 1991	Wissenschaftlicher Angestellter am Institut für Numerische und Angewandte Mathematik