

Ein Beitrag zur Interpolation mit radialen Basisfunktionen

Diplomarbeit
vorgelegt von
Holger Wendland
aus
Hildesheim

angefertigt
am Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
der Georg-August-Universität zu Göttingen
1994

Ein Beitrag zur Interpolation mit radialen Basisfunktionen

Vorwort

Mehrdimensionale Interpolation ist ein Gebiet, das gerade in der jüngsten Zeit durch Anwendungen im CAD und anderen Bereichen immer mehr an Bedeutung gewinnt. Dabei tritt das generelle Problem auf, daß es kein nichttriviales Haarsches System auf dem \mathbb{R}^d mit $d \geq 2$ gibt, d.h., es existiert kein Funktionenraum \mathcal{F} , so daß es für jede Menge von Paaren $\{x_j, y_j\}$ mit $x_j \in \mathbb{R}^d, y_j \in \mathbb{R}, 1 \leq j \leq N$ eine Funktion $f \in \mathcal{F}$ mit $f(x_j) = y_j, 1 \leq j \leq N$ gibt.

Das Prinzip der Interpolation mit radialen Basisfunktionen verknüpft daher den Funktionenraum \mathcal{F} , aus dem die Interpolante stammen soll, mit der gegebenen Menge von paarweise verschiedenen Stützstellen $X = \{x_1, \dots, x_N\}$ in dem folgenden Sinne. Man wählt eine radiale Funktion $\Phi(x) = \Phi(\|x\|)$ und sucht die Interpolante als Linearkombination der Translationen von Φ um Punkte aus X , d.h., man setzt $\mathcal{F}(X) = \text{span}\{\Phi(\cdot - x_1), \dots, \Phi(\cdot - x_N)\}$ bei vorgegebenen Datenpunkten $x_j \in X$. Es sind bereits etliche radiale Basisfunktionen bekannt (Gaußglocken, inverse Multiquadrics), für die das so gestellte Interpolationsproblem für jedes $y \in \mathbb{R}^N$ eindeutig lösbar ist.

Ein etwas allgemeinerer Zugang erlaubt es, die Interpolante als Summe einer Funktion aus $\mathcal{F}(X)$ und einem Polynom bestimmten Grades zu bilden. Dies liefert dann auch Polynom-Reproduktion bis zu diesem Grad. Auch zu diesem Problem wurden bereits radiale Basisfunktionen (Thin-Plate-Splines, Multiquadrics) ausführlich untersucht.

Der Begriff, mit dem man alle radialen Basisfunktionen am geeignetsten charakterisieren kann, ist der Begriff der bedingten positiven Definitheit (siehe Kapitel 1).

Die Arbeit befaßt sich nach einem Grundlagenkapitel (Kapitel 1) und einer Zusammenstellung relevanter Ergebnisse aus der Theorie der Besselfunktionen (Kapitel 2) mit folgenden zwei Schwerpunkten:

In Kapitel 3 werden untere Schranken für quadratische Formen hergeleitet, die wichtig für obere Schranken der Inversen der Interpolationsmatrix sind. Dabei wird der Ansatz von Narcowich/Ward [9], der sich auf bedingt positiv definite Funktionen der Ordnung 1 beschränkte und von ihnen später auch auf andere Funktionen übertragen wurde, mit Hilfe von (verallgemeinerter) Fouriertransformation auf alle gängigen radialen Basisfunktionen erweitert.

Für große Datenmengen kann man bei allen bisher betrachteten radialen Basisfunktionen Probleme bei der effektiven Auswertung der Interpolanten bekommen, da diese aus genauso vielen Summanden besteht, wie es Interpolationspunkte gibt. In Kapitel 4 wird deshalb eine neue radiale Basisfunktion vorgestellt, die sich durch einen kompakten Träger auszeichnet. Bei jeder Auswertung der Interpolanten ist dann also nur eine geringe Zahl von Summanden relevant. Diese radiale Basisfunktion hat zusätzlich die bemerkenswerte Eigenschaft, in Räumen ungerader Dimension stückweise polynomial zu sein. In Räumen gerader Dimension besteht sie innerhalb ihres Trägers aus der Summe von einem Polynom, das mit einer Wurzel multipliziert wird, und einem arccos-Term.

Für die Betreuung bei der Bearbeitung dieses interessanten und aktuellen Themas danke ich Herrn Prof. Dr. R. Schaback.

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Grundlagen | 1 |
| 1.1 | Allgemeines | 1 |
| 1.2 | Fouriertransformation im klassischen und verallgemeinerten Sinn | 2 |
| 1.2.1 | Die klassische Fouriertransformation | 2 |
| 1.2.2 | Distributionen und verallgemeinerte Fouriertransformation | 3 |
| 1.3 | Interpolation mit radialen Basisfunktionen | 5 |
| 2 | Besselfunktionen | 7 |
| 2.1 | Definitionen und grundlegende Eigenschaften | 7 |
| 2.2 | Besselfunktionen der 1. Art | 10 |
| 2.2.1 | Allgemeines | 10 |
| 2.2.2 | Integrale über Besselfunktionen der 1. Art | 11 |
| 2.2.3 | Nullstellen von $J_\nu(z)$ | 13 |
| 2.3 | Modifizierte Besselfunktionen der 2. Art | 13 |
| 3 | Untere Schranken der quadratischen Form | 16 |
| 3.1 | Motivation | 16 |
| 3.2 | Theoretische Grundlagen | 17 |
| 3.3 | Beispiele | 22 |
| 3.3.1 | Gaußglocken | 23 |
| 3.3.2 | Thin-Plate-Splines | 23 |
| 3.3.3 | Multiquadrics | 25 |
| 3.3.4 | Inverse Multiquadrics | 26 |
| 4 | Der Euklidische Hut X_β | 28 |
| 4.1 | Allgemeines | 28 |
| 4.2 | Eine explizite Form für X_β | 29 |
| 4.3 | Glattheit von X_β | 43 |
| 4.4 | Schranken für die Norm der Inversen der Interpolationsmatrix | 44 |
| 4.5 | Güte der Approximation | 47 |
| 4.6 | Ein Beispiel | 52 |
| 4.7 | Ausblick | 56 |

1 Grundlagen

1.1 Allgemeines

In diesem Abschnitt soll auf der einen Seite die in der Arbeit verwandte Notation zusammengestellt werden. Auf der anderen Seite wird an einige, später benutzte Aussagen erinnert.

Die Funktionenräume $C^k(\Omega)$, $L_p(\Omega)$, $L_1^{loc}(\Omega)$ mit $p \geq 1$ und $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ sollen wie üblich definiert sein. Unter \mathbb{P}_m^d wird die Menge alle Polynome in d Variablen mit einem Gesamtgrad kleiner als m verstanden.

Der Träger einer Funktion $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ist die Menge $\text{supp}(\varphi) := \overline{\{x \in \mathbb{R}^d : \varphi(x) \neq 0\}}$. $\|\cdot\|$ soll immer für die euklidische Norm stehen, d.h. $\|x\| = (\sum_{j=1}^d x_j^2)^{1/2}$ für $x \in \mathbb{R}^d$, beziehungsweise für die zugeordnete Matrixnorm. Andere Normen werden entsprechend kenntlich gemacht.

Die d -dimensionale Kugel um $x \in \mathbb{R}^d$ mit Radius r wird mit $K(x, r) \equiv K_d(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^d : \|x - y\| < r\}$ notiert. Sie besitzt das Volumen

$$\tau_d(r) = \frac{r^d \pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2} + 1)} \text{ und die Oberfläche } \omega_d(r) = \frac{2r^{d-1} \pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})},$$

wobei $\Gamma(\cdot)$ für die Gammafunktion steht. Da diese Funktion im weiteren Verlauf eine gewisse Bedeutung erlangt, wird hier ihre Definition zusammen mit ihren wichtigsten Eigenschaften angegeben. Ein Beweis dafür findet sich zum Beispiel in Fischer/Lieb [3] auf S. 184ff.

Definition 1.1 Die für $z \in \mathbb{C}$ erklärte Funktion

$$\Gamma(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1) \cdot \dots \cdot (z+n)}$$

heißt Gammafunktion.

Satz 1.2 (Eigenschaften der Gammafunktion)

- (1) $\Gamma(1) = 1, \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.
- (2) $1/\Gamma(z)$ ist eine ganze Funktion.
- (3) (Funktionalgleichung) $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.
- (4) (Ergänzungssatz) $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$.
- (5) (Legendrescher Verdopplungssatz) $\Gamma(z)\Gamma(z + \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2z-1}} \Gamma(2z)$.
- (6) (Stirlingsche Formel) $\lim_{x \rightarrow \infty} \Gamma(x) / (\sqrt{2\pi} x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x}) = 1$.

(7) (Integraldarstellung der Gammafunktion) Für $\Re(z) > 0$ ist

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt.$$

(8) (Zusammenhang mit der Beta-Funktion) Für die für $\Re(z), \Re(\zeta) > 0$ definierte Beta-Funktion

$$B(z, \zeta) := \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{\zeta-1} dt$$

gilt

$$B(z, \zeta) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\zeta)}{\Gamma(z+\zeta)}.$$

□

Schließlich sei daran erinnert, daß für zwei Funktionen $f, g \in L_1(\mathbb{R}^d)$ die Faltung $f * g$ erklärt ist durch

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)dy.$$

Sie ist kommutativ, d.h. $f * g = g * f$, und liegt wieder in $L_1(\mathbb{R}^d)$, wobei sie die Abschätzung $\|f * g\|_{L_1} \leq \|f\|_{L_1}\|g\|_{L_1}$ erfüllt.

1.2 Fouriertransformation im klassischen und verallgemeinerten Sinn

1.2.1 Die klassische Fouriertransformation

Für jedes $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ und jedes $\omega \in \mathbb{R}^d$ gehört die Funktion $x \mapsto f(x)e^{-ix^T\omega}$ wieder zu $L_1(\mathbb{R}^d)$; also existiert das Integral

$$(Ff)(\omega) \equiv \hat{f}(\omega) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-ix^T\omega} dx.$$

Die dadurch definierte Funktion $\hat{f} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ heißt die *Fouriertransformierte* von f . Sie ist stetig und erfüllt für alle $\omega \in \mathbb{R}^d$ die Abschätzung $|\hat{f}(\omega)| \leq \|f\|_{L_1}$. Aus der Theorie der Fouriertransformation werden hier nur zwei Resultate – abgesehen von der Fouriertransformation radialer Funktionen, die in Kapitel 2 bereitgestellt wird – benötigt.

Bemerkung 1.3 Für f und g aus $L_1(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$(1) \widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g},$$

$$(2) \int \hat{f}(x)g(x)dx = \int f(x)\hat{g}(x)dx.$$

Beweis: Die Aussagen folgen sofort mittels einfacher Substitution und des Satzes von Fubini aus den Definitionen. \square

Der nachstehende Satz benutzt die Bezeichnung

$$C_0(\mathbb{R}^d) = \{f \in C(\mathbb{R}^d) : \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = 0\},$$

seinen Beweis entnimmt man zum Beispiel Forster [4], S. 112f.

Satz 1.4 (Umkehrformel)

Sei $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ eine Funktion derart, daß auch $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt nach evtl. Abänderung auf einer Nullmenge $f \in C_0(\mathbb{R}^d)$ und

$$f(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\omega) e^{ix^T \omega} d\omega \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^d.$$

\square

Die zu $g \in L_1(\mathbb{R}^d)$ definierte Funktion IFg , die gegeben ist durch

$$(IFg)(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} g(\omega) e^{ix^T \omega} d\omega,$$

heißt auch die *inverse Fouriertransformierte* von g . Satz 1.4 besagt also, wie man sich leicht überlegt, daß für $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ mit $Ff = \hat{f} \in L_1(\mathbb{R}^d)$ gilt:

$$F(IFf) = f, \quad IF(Ff) = f.$$

1.2.2 Distributionen und verallgemeinerte Fouriertransformation

Um den Begriff der Fouriertransformation auch für Funktionen zu haben, die nicht im klassischen Sinn fouriertransformierbar sind, führt man üblicherweise (temperierte) Distributionen ein. Distributionen sind stetige, lineare Funktionale auf einem Funktionenraum, dem sogenannten *Raum der Testfunktionen*. In diesem Fall benutzt man als Menge der Testfunktionen den Schwartzraum.

Definition 1.5 (Schwartzraum)

Die Menge S besteht aus allen $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit der folgenden Eigenschaft: Zu jedem Paar $p, q \in \mathbb{N}_0^d$ existiert eine Zahl $C_{p,q} > 0$, so daß für alle $x \in \mathbb{R}^d$ gilt

$$|x^p D^q \varphi(x)| < C_{p,q}.$$

Wie man sich überlegt, liegt eine Funktion φ im Schwartzraum S genau dann, wenn für jedes $p \in \mathbb{N}_0^d$ und jedes $m \in \mathbb{N}_0$ eine Zahl $C_{p,m} > 0$ existiert, so daß für alle $x \in \mathbb{R}^d$ gilt

$$(1 + \|x\|^m) |D^p \varphi(x)| < C_{p,m}.$$

Hieraus folgt insbesondere, daß $S \subseteq L_1$.

Um nun zu dem topologischen Dualraum S' von S überzugehen, benötigt man eine Topologie auf S oder zumindest den Begriff der Stetigkeit. Dieser soll hier über Folgenstetigkeit eingeführt werden.

Definition 1.6 (1) Eine Folge $\{\gamma_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ von Funktionen $\gamma_k \in S$ heißt Nullfolge, in Zeichen $\gamma_k \xrightarrow{S} 0$, falls für alle $p, q \in \mathbb{N}_0^d$ die Folge $\{x^p D^q \gamma_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ gleichmäßig auf \mathbb{R}^d gegen Null konvergiert.

(2) Ein lineares Funktional $T : S \rightarrow \mathbb{R}$ heißt stetig, falls aus $\gamma_k \xrightarrow{S} 0$ stets auch $T(\gamma_k) \xrightarrow{\mathbb{R}} 0$ folgt.

(3) Der Vektorraum S' aller linearen und in diesem Sinne stetigen Funktionale auf S heißt der Raum der temperierten Distributionen.

Besondere Beachtung verdienen die sogenannten *regulären Distributionen*. Sie werden erzeugt durch *langsam wachsende* oder auch *temperierte Funktionen*. Dabei heißt eine Funktion f temperiert, falls $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^d)$ und Zahlen $r > 0, C_f > 0, k \in \mathbb{N}_0$ existieren, so daß für alle $\|x\| > r$ gilt

$$|f(x)|(1 + \|x\|)^{-k} < C_f.$$

Für eine temperierte Funktion f ist das lineare Funktional $[f] : S \rightarrow \mathbb{R}$, welches gegeben ist durch

$$[f]\gamma \equiv ([f], \gamma) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\gamma(x)dx, \quad \gamma \in S,$$

wohldefiniert und ein Element aus S' .

Für eine reguläre Distribution $[f] \in S'$ und eine Testfunktion $\gamma \in S$ erhält man nun mittels partieller Integration und Bemerkung 1.3 (2):

(i) Falls f differenzierbar ist und temperierte Ableitungen besitzt, gilt

$$([\frac{\partial f}{\partial x_j}], \gamma) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \gamma(x) dx = - \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \frac{\partial \gamma}{\partial x_j} dx = -([f], \frac{\partial \gamma}{\partial x_j}).$$

(ii) Falls $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$, so gilt

$$([Ff], \gamma) = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(x)\gamma(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\hat{\gamma}(x)dx = ([f], F\gamma).$$

Dies gibt Anlaß, für Distributionen allgemein zu definieren:

Definition 1.7 (i) Die (distributionelle) Ableitung $\frac{\partial}{\partial x_j} T \in S'$ einer temperierten Distribution $T \in S'$ ist gegeben durch

$$(\frac{\partial}{\partial x_j} T, \gamma) := -(T, \frac{\partial}{\partial x_j} \gamma), \quad \gamma \in S.$$

(ii) Die (distributionelle) Fouriertransformierte $FT \in S'$ einer temperierten Distribution $T \in S'$ ist gegeben durch

$$(FT, \gamma) := (T, F\gamma), \quad \gamma \in S.$$

Bemerkung:

- (1) Höhere Ableitungen und die inverse Fouriertransformation werden entsprechend definiert.
- (2) Ist die temperierte Funktion f im gewöhnlichen Sinne fouriertransformierbar oder differenzierbar mit temperierter Ableitung, so gilt

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_j} f\right] = \frac{\partial}{\partial x_j} [f] \quad \text{bzw.} \quad F[f] = [Ff].$$

- (3) Sei Φ eine temperierte Funktion. Dann sagt man, die Distribution $F[\Phi]$ *stimmt mit einer Funktion* $\varphi : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ *überein* oder Φ *besitzt die verallgemeinerte Fouriertransformierte* $\varphi : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, falls es ein $p \in \mathbb{N}_0^d$ und eine temperierte Funktion f mit $f \in C^{[p]}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ gibt, so daß $F[\Phi] = D^p[f]$ und $\varphi = D^p f$ gilt (vgl. Buhmann [1]).

1.3 Interpolation mit radialen Basisfunktionen

Eine Funktion $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *radial*, falls es eine Funktion $\phi : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\Phi(x) = \phi(\|x\|)$ gibt.

Zu einer radialen Funktion Φ betrachtet man folgendes Interpolationsproblem. Zu gegebenen Daten $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subseteq \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^N$ mit paarweise verschiedenen x_j wird eine Funktion f gesucht, so daß das System von Gleichungen

$$f(x_j) = y_j, \quad 1 \leq j \leq N,$$

eine Lösung der Form

$$f(x) = \sum_{j=1}^N c_j \Phi(x - x_j) + p_m(x)$$

hat, wobei p_m ein Element von \mathbb{P}_m^d ist und die c_j 's der Bedingung

$$\sum_{j=1}^N c_j q(x_j) = 0 \quad \text{für alle } q \in \mathbb{P}_m^d$$

unterliegen.

Setzt man $A = (\Phi(x_j - x_k))_{1 \leq j, k \leq N}$ und $P = (p_k(x_i))_{1 \leq i \leq N, 1 \leq k \leq Q}$, wobei $Q = \dim \mathbb{P}_m^d$ und $\text{span}\{p_1, \dots, p_Q\} = \mathbb{P}_m^d$, so lautet das Interpolationsproblem als Matrixgleichung

$$\begin{pmatrix} A & P \\ P^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.1)$$

Als Vorbereitung für die folgende Definition setzt man für $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subseteq \mathbb{R}^d$

$$V_m(X) := \text{Bild}(P) = \{v \in \mathbb{R}^N : v_j = p(x_j) \text{ mit einem } p \in \mathbb{P}_m^d, 1 \leq j \leq N\}$$

mit dem orthogonalen Komplement

$$V_m(X)^\perp = \{v \in \mathbb{R}^N : \sum_{j=1}^N v_j p(x_j) = 0 \text{ für alle } p \in \mathbb{P}_m^d\}.$$

Definition 1.8 Eine stetige Funktion $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ heißt bedingt positiv definit der Ordnung m , in Zeichen $\Phi \in \text{BPD}(m)$, falls für jede endliche Menge $X = \{x_1, \dots, x_N\}$, bestehend aus paarweise verschiedenen Punkten x_j im \mathbb{R}^d , und für jedes $c \in V_m(X)^\perp$ gilt

$$\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N c_j c_k \Phi(x_j - x_k) \geq 0.$$

Dabei soll Gleichheit nur im Fall $c = 0$ auftreten. Eine bedingt positiv definite Funktion der Ordnung Null nennt man auch eine positiv definite Funktion.

In dieser Arbeit soll $\Phi \in \text{BPD}(m)$ gleichzeitig bedeuten, daß Φ auch radial ist.

Satz 1.9 Ist $\Phi \in \text{BPD}(m)$ und enthält die aus paarweise verschiedenen Punkten bestehende Menge $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subseteq \mathbb{R}^d$ eine unisolvente Teilmenge, d.h., die Matrix P ist injektiv, so ist das System (1.1) eindeutig lösbar.

Beweis: Aus $Ac + Pd = 0$ und $P^T c = 0$ folgt wegen $\Phi \in \text{BPD}(m)$ gerade $c^T Ac + (P^T c)^T d = c^T Ac = 0$, also $c = 0$. Aus der Injektivität von P erhält man dann sofort auch $d = 0$. \square

Bemerkung 1.10 Gelten die Voraussetzungen von Satz 1.9 mit Ausnahme der Forderung, daß P injektiv ist, so ist das System (1.1) immer noch lösbar, allerdings nicht notwendig eindeutig.

Beweis: (1.1) ist genau dann universell lösbar, wenn $\mathbb{R}^N = AV_m(X)^\perp + V_m(X)$. Nun gilt $AV_m(X)^\perp \cap V_m(X) = \{0\}$, denn aus $Ac \in AV_m(X)^\perp \cap V_m(X)$ folgt $Ac = Pd$ mit einem $d \in \mathbb{R}^Q$, damit $c^T Ac = (P^T c)^T d = 0$, also $c = 0$ und somit auch $Ac = 0$. Man erhält schließlich $N \geq \dim(AV_m(X)^\perp + V_m(X)) = \dim AV_m(X)^\perp + \dim V_m(X) = \dim V_m(X)^\perp + \dim V_m(X) = N$, denn $A|_{V_m(X)^\perp} : V_m(X)^\perp \rightarrow AV_m(X)^\perp$ ist bijektiv. (Siehe allgemein auch Madych/Nelson [7].) \square

Die bisher am häufigsten betrachteten radialen Basisfunktionen lauten

$$\begin{aligned} \Phi_1(x) &= e^{-\lambda \|x\|^2}, \lambda > 0, && \text{(Gaußglocken),} \\ \Phi_2(x) &= (-1)^{k+1} \|x\|^{2k} \log \|x\|, k \in \mathbb{N}, && \text{(Thin-Plate-Splines),} \\ \Phi_3(x) &= (-1)^{\lceil \frac{\nu}{2} \rceil} \|x\|^\nu, \nu > 0, \nu \notin 2\mathbb{N}, \\ \Phi_4(x) &= (-1)^{\lceil \frac{\nu}{2} \rceil} (c^2 + \|x\|^2)^{\nu/2}, \nu, c > 0, \nu \notin 2\mathbb{N}, && \text{(Multiquadrics),} \\ \Phi_5(x) &= (c^2 + \|x\|^2)^{-\nu/2}, \nu, c > 0, && \text{(Inverse Multiquadrics).} \end{aligned}$$

Wie man sofort sieht, gehören diese Funktionen alle zur Klasse der temperierten Funktionen. Ferner sind sie alle (bedingt) positiv definit und besitzen eine (verallgemeinerte) Fouriertransformierte φ (siehe Kapitel 3).

2 Besselfunktionen

2.1 Definitionen und grundlegende Eigenschaften

Besselfunktionen treten als Lösungen des Potenzreihenansatzes für die Besselsche Differentialgleichung auf. Diese lautet für komplexes ν und eine Funktion $y : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$:

$$z^2 \frac{d^2 y(z)}{dz^2} + z \frac{dy(z)}{dz} + (z^2 - \nu^2)y(z) = 0. \quad (2.1)$$

Da an dieser Stelle das Interesse bei den Besselfunktionen und nicht bei der Differentialgleichung liegt, werden die Besselfunktionen hier nicht wie üblich konstruiert, sondern explizit definiert.

Definition 2.1 Für $\nu \in \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ heißt

$$J_\nu(z) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{1}{2}z\right)^{2m+\nu}}{m! \Gamma(\nu + m + 1)}$$

Besselfunktion der 1. Art der Ordnung ν .

Die in der Definition auftretende allgemeine Potenz z^ν ist dabei erklärt als $z^\nu := \exp(\nu \operatorname{Log}(z))$, wobei $\operatorname{Log}(z)$ durch den Hauptzweig, d.h. $-\pi < \operatorname{arg} z \leq \pi$, gegeben ist. Für die Wohldefiniertheit der Definition gilt nun folgender Satz:

Satz 2.2 $J_\nu(z)$ ist bei beliebigem $\nu \in \mathbb{C}$ als Funktion von z holomorph in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ und bei beliebigem $z \in \mathbb{C}^*$ als Funktion von ν holomorph in \mathbb{C} .

Beweis: Da $1/\Gamma(z)$ eine ganze Funktion ist, sind die Summanden in den angegebenen Fällen holomorph, und es genügt, kompakte Konvergenz der Reihe in z bzw. in ν nachzuweisen. Dies zeigt man leicht mit Hilfe des Quotienten-Kriteriums. \square

Bemerkung 2.3 (1) Mit dem Quotientenkriterium kann man auch punktweise Konvergenz der Reihe für $z \in \mathbb{R}_{< 0}$ nachweisen.

(2) Falls $\nu \in \mathbb{N}$, läßt sich $J_\nu(z)$ holomorph auf ganz \mathbb{C} fortsetzen.

(3) Falls $\Re(\nu) \geq 0$, läßt sich die allgemeine Potenz stetig in Null fortsetzen und damit auch $J_\nu(z)$ als Funktion von z bis einschließlich zur $[\Re(\nu)]$ -ten Ableitung.

Bemerkung 2.4 Die Besselfunktionen erfüllen folgende Rekursionsformeln:

$$J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z} J_\nu(z), \quad (2.2)$$

$$J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z) = 2J'_\nu(z). \quad (2.3)$$

Beweis: Die Rekursionsformeln folgen durch Subtraktion, Addition und Kürzen aus

$$\frac{d}{dz} \{z^\nu J_\nu(z)\} = z^\nu J_{\nu-1}(z), \quad \frac{d}{dz} \{z^{-\nu} J_\nu(z)\} = -z^{-\nu} J_{\nu+1}(z),$$

was man sofort anhand der Definition nachprüft. \square

Mit Hilfe der Rekursionsformeln rechnet man nun nach, daß J_ν und $J_{-\nu}$ die Differentialgleichung (2.1) lösen. Wegen $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$ für $n \in \mathbb{N}_0$, können J_n, J_{-n} natürlich kein Fundamentalsystem für (2.1) bilden. Es gilt aber:

Satz 2.5 Für $\nu \notin \mathbb{Z}$ bilden $J_\nu(z)$ und $J_{-\nu}(z)$ ein Fundamentalsystem für die Besselsche Differentialgleichung (2.1) mit der Wronskideterminante

$$W(J_\nu(z), J_{-\nu}(z)) = -\frac{2 \sin \nu\pi}{\pi z}.$$

Beweis: Der Beweis findet sich in Watson [16] auf S. 42f. \square

Der Vollständigkeit halber sollen hier auch noch die Besselfunktionen 2. und 3. Art eingeführt werden, mit denen sich dann die Lücke für $\nu = n \in \mathbb{Z}$ schließen läßt, die bei der Angabe eines Fundamentalsystems für (2.1) aufgetreten ist.

Definition 2.6 Für $\nu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ und $z \in \mathbb{C}^*$ heißt

$$Y_\nu(z) := \frac{J_\nu(z) \cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu\pi)}$$

Besselfunktion der 2. Art der Ordnung ν oder auch Weberfunktion. Für $\nu = n \in \mathbb{Z}$ setzt man

$$Y_n(z) := \lim_{\nu \rightarrow n} Y_\nu(z).$$

Für $\nu \in \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}^*$ heißen

$$H_\nu^{(1)}(z) := J_\nu(z) + iY_\nu(z), \quad H_\nu^{(2)}(z) := J_\nu(z) - iY_\nu(z)$$

Besselfunktionen der 3. Art der Ordnung ν .

Die Funktionen $Y_n(z), n \in \mathbb{Z}$, sind wohldefiniert, denn es gilt (vgl. Watson [16] S. 63f)

$$Y_n(z) = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\partial}{\partial \nu} J_\nu(z) - (-1)^n \frac{\partial}{\partial \nu} J_{-\nu}(z) \right]_{\nu=n}.$$

Satz 2.7 Für $\nu \in \mathbb{C}$ bilden sowohl $\{J_\nu, Y_\nu\}$ als auch $\{H_\nu^{(1)}, H_\nu^{(2)}\}$ ein Fundamentalsystem für die Besselsche Differentialgleichung (2.1).

Beweis: Die Behauptung ist klar, falls $\nu \notin \mathbb{Z}$. Für $\nu = n \in \mathbb{Z}$ reicht es auf Grund der Stetigkeit der Wronskideterminante $W(J_\nu(z), Y_\nu(z)) = \frac{2}{\pi z}$ nachzuweisen, daß Y_n Lösung von (2.1) ist. Dies findet man zum Beispiel in Watson [16] auf S. 58f. \square

Zu den modifizierten Besselfunktionen gelangt man, indem man folgende Differentialgleichung betrachtet:

$$z^2 \frac{d^2}{dz^2} y(z) + z \frac{d}{dz} y(z) - (z^2 + \nu^2) y(z) = 0. \quad (2.4)$$

Sie unterscheidet sich von der Besselschen Differentialgleichung (2.1) nur im Koeffizienten vor $y(z)$. Daher verläuft die Theorie analog zu der für (2.1). Man rechnet zum Beispiel nach, daß die für $\nu \in \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ holomorphe *modifizierte Besselfunktion 1. Art der Ordnung ν*

$$I_\nu(z) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^{\nu+2m}}{m! \Gamma(\nu + m + 1)}$$

eine Lösung für (2.4) ist und daß $W(I_\nu(z), I_{-\nu}(z)) = -2 \sin(\nu\pi)/(\pi z)$ gilt, so daß I_ν und $I_{-\nu}$ im Fall $\nu \notin \mathbb{Z}$ ein Fundamentalsystem bilden. Berücksichtigt man, daß $-\pi < \arg(z) \leq \pi$ gilt, so erhält man als Zusammenhang zwischen Besselfunktion und modifizierter Besselfunktion

$$I_\nu(z) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{2}\nu\pi i} J_\nu(z e^{\frac{1}{2}\pi i}) & \text{für } -\pi < \arg(z) \leq \frac{\pi}{2} \\ e^{\frac{3}{2}\nu\pi i} J_\nu(z e^{-\frac{3}{2}\pi i}) & \text{für } \frac{\pi}{2} < \arg(z) \leq \pi. \end{cases}$$

Um für alle $\nu \in \mathbb{C}$ ein Fundamentalsystem zu erhalten, führt man wiederum (modifizierte) Besselfunktionen der 2. Art ein.

Definition 2.8 Für $\nu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ und $z \in \mathbb{C}^*$ heißt

$$K_\nu(z) := \frac{1}{2} \pi \frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin(\nu\pi)}$$

modifizierte Besselfunktion der 2. Art der Ordnung ν oder auch Macdonald-Funktion. Für $n \in \mathbb{Z}$ und $z \in \mathbb{C}^*$ definiert man

$$K_n(z) := \lim_{\nu \rightarrow n} K_\nu(z).$$

Genau wie im unmodifizierten Fall erkennt man, daß K_n wohldefiniert ist. Ferner gilt:

Satz 2.9 Für $\nu \in \mathbb{C}$ bilden $\{I_\nu, K_\nu\}$ ein Fundamentalsystem für (2.4) mit Wronskideterminante $W(I_\nu(z), K_\nu(z)) = -1/z$. \square

Bemerkung 2.10 Für $\nu \in \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0}$ gelten die folgenden Rekursionsformeln

$$I_{\nu-1}(z) - I_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z} I_\nu(z), \quad (2.5)$$

$$I_{\nu-1}(z) + I_{\nu+1}(z) = 2I'_\nu(z), \quad (2.6)$$

$$K_{\nu-1}(z) - K_{\nu+1}(z) = -\frac{2\nu}{z} K_\nu(z), \quad (2.7)$$

$$K_{\nu-1}(z) + K_{\nu+1}(z) = -2K'_\nu(z). \quad (2.8)$$

Aus der Definition entnimmt man außerdem sofort:

Bemerkung 2.11 Für $\nu \in \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}^*$ gilt $K_\nu(z) = K_{-\nu}(z)$.

2.2 Besselfunktionen der 1. Art

2.2.1 Allgemeines

Von den vielen Darstellungen von $J_\nu(z)$ sollen hier noch einige erwähnt werden. Die Grundidee besteht in diesen Fällen darin, die Glieder der Reihe unter Ausnutzung des Zusammenhanges zwischen Beta- und Γ -Funktion zu transformieren und dann Integration und Summation zu vertauschen. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{(-1)^m \left(\frac{1}{2}z\right)^{\nu+2m}}{m! \Gamma(\nu+m+1)} &= \frac{(-1)^m \left(\frac{1}{2}z\right)^\nu}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{z^{2m}}{(2m)!} \frac{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\Gamma(m+\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu+m+1)} \\ &= \frac{(-1)^m \left(\frac{1}{2}z\right)^\nu}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{z^{2m}}{(2m)!} \int_0^1 t^{\nu-\frac{1}{2}} (1-t)^{m-\frac{1}{2}} dt, \end{aligned}$$

solange $\Re(\nu) > -\frac{1}{2}$. Dies liefert mit einiger Zusatzüberlegung (siehe Watson [16] S. 47f):

Satz 2.12 Für $\Re(\nu) > -\frac{1}{2}$ hat $J_\nu(z)$ die Darstellungen

$$J_\nu(z) = \frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^\nu}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^\pi \cos(z \cos \theta) \sin^{2\nu} \theta \, d\theta \quad (2.9)$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^\nu}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{\nu-\frac{1}{2}} \cos(zt) \, dt \quad (2.10)$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^\nu}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^\pi e^{iz \cos \theta} \sin^{2\nu} \theta \, d\theta. \quad (2.11)$$

□

Als Folgerung aus Formel (2.11) erhält man nun:

Korollar 2.13 Für $d \geq 2$ und $x \in \mathbb{R}^d$ gilt

$$\int_{\|\xi\|=1} e^{ix^T \xi} dS(\xi) = (2\pi)^{\frac{d}{2}} \|x\|^{-\frac{d}{2}+1} J_{\frac{d}{2}-1}(\|x\|).$$

Beweis: Da das Oberflächenintegral auf der linken Seite invariant unter orthogonalen Abbildungen ist, folgert man mit $r = \|x\|$, indem man außerdem zu Polarkoordinaten

übergeht,

$$\begin{aligned}
 \int_{\|\xi\|=1} e^{ix^T \xi} dS(\xi) &= \int_{\|\xi\|=1} e^{ir\xi_1} dS(\xi) \\
 &= \frac{2\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\Gamma(\frac{d-1}{2})} \int_0^\pi e^{ir \cos \theta} \sin^{d-2} \theta d\theta \\
 &= (2\pi)^{\frac{d}{2}} r^{-\frac{d}{2}+1} J_{\frac{d}{2}-1}(r).
 \end{aligned}$$

□

Zum Abschluß dieses Unterabschnittes soll noch auf das asymptotische Verhalten von $J_\nu(z)$ in dem Spezialfall $\nu = \frac{d}{2}$ eingegangen werden.

Lemma 2.14 (*Grenzverhalten von $J_{\frac{d}{2}}(z)$*)

$$(1) \quad J_{\frac{d}{2}}^2(z) \leq \frac{2^{d+2}}{z\pi},$$

$$(2) \quad \lim_{z \rightarrow 0} z^{-d} J_{\frac{d}{2}}^2(z) = \frac{1}{2^d \Gamma^2(\frac{d}{2} + 1)}.$$

Beweis: (1) findet sich in Narcowich/Ward [10], während (2) eine direkte Folgerung aus der Definition ist. □

2.2.2 Integrale über Besselfunktionen der 1. Art

Unter einem *Integral vom Weber-Schafheitlin-Typ* versteht man ein Integral der Form

$$\int_0^\infty \frac{J_\mu(at) J_\nu(bt)}{t^\lambda} dt$$

mit positiven a und b , wobei die Parameter μ, ν, λ bestimmten Einschränkungen unterliegen, damit die Konvergenz des Integrals gesichert ist. Ein möglicher Ansatz zur expliziten Berechnung sieht folgendermaßen aus. Einerseits besteht die Identität

$$\int_0^\infty \frac{J_\mu(at) J_\nu(bt)}{t^\lambda} dt = \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_0^\infty e^{-ct} \frac{J_\mu(at) J_\nu(bt)}{t^\lambda} dt.$$

Andererseits kann man J_ν und J_μ in dem Integral auf der rechten Seite als Reihen einsetzen und Integration und Summation vertauschen, solange nur a, b und c gewisse Bedingungen erfüllen. Das hierbei entstehende Ergebnis kann dann so analytisch fortgesetzt werden, daß sich der Grenzwert rechts berechnen läßt. Diese Vorgehensweise wird in Watson [16] auf den Seiten 398ff ausgeführt.

Hier ist nur ein spezielles Weber-Schafheitlin-Integral von Interesse.

Satz 2.15 Für $\mu \in \mathbb{C}$ mit $\Re(\mu) > 0$ und $a, b > 0$ gilt

$$\int_0^{\infty} J_{\mu}(at)J_{\mu-1}(bt) dt = \begin{cases} b^{\mu-1}/a^{\mu} & \text{für } b < a \\ 1/(2b) & \text{für } b = a \\ 0 & \text{für } b > a. \end{cases}$$

□

Als Verallgemeinerung des Weber-Schafheitlin-Integrals wird später noch nachstehendes Integral über drei Besselfunktionen benötigt.

Satz 2.16 Für $a, b, c > 0$ und $\mu, \nu, \lambda \in \mathbb{C}$ mit $\Re(\nu) > -1/2$ und $\Re(\mu + \nu + 2) > \Re(\lambda + 1) > 0$ gilt mit absoluter Konvergenz auf der rechten Seite:

$$\int_0^{\infty} \frac{J_{\mu}(at)J_{\nu}(bt)J_{\nu}(ct)}{t^{\lambda+\nu}} dt = \frac{(\frac{1}{2}bc)^{\nu}}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{J_{\mu}(at)J_{\nu}(\varpi t)}{\varpi^{\nu}t^{\lambda}} \sin^{2\nu} \varphi d\varphi dt,$$

wobei $\varpi = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos \varphi}$.

Beweis: Vgl. Watson [16] S. 411.

□

Der Zusammenhang zwischen Besselfunktionen, Fouriertransformation und radialen Funktionen findet sich in folgendem, diesen Unterabschnitt abschließenden Satz:

Satz 2.17 (Fouriertransformation radialer Funktionen)

Ist $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ fouriertransformierbar und radial, $f(x) = f_0(\|x\|)$, so ist auch $\hat{f}(x) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ radial, und es gilt mit $\hat{f}(x) = F_0(\|x\|)$:

$$F_0(r) = (2\pi)^{\frac{d}{2}} r^{-\frac{d}{2}+1} \int_0^{\infty} f_0(t) J_{\frac{d}{2}-1}(rt) t^{\frac{d}{2}} dt.$$

Beweis: Für $d = 1$ verifiziert man die Behauptung vermöge $J_{-\frac{1}{2}}(z) = (\frac{2}{\pi z})^{1/2} \cos z$, was man mit dem Legendreschen Verdopplungssatz direkt aus der Definition erhält. Für $d \geq 2$ liefert Korollar 2.13

$$\begin{aligned} \hat{f}(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(\omega) e^{-ix^T \omega} d\omega = \int_0^{\infty} f_0(t) \int_{\|\xi\|=1} e^{itx^T \xi} dS(\xi) t^{d-1} dt \\ &= (2\pi)^{\frac{d}{2}} \|x\|^{-\frac{d}{2}+1} \int_0^{\infty} f_0(t) J_{\frac{d}{2}-1}(\|x\|t) t^{\frac{d}{2}} dt. \end{aligned}$$

□

2.2.3 Nullstellen von $J_\nu(z)$

In diesem Unterabschnitt sei $\nu \in \mathbb{R}$. Die erste Aussage, die hier gemacht werden soll, betrifft die Anzahl der Nullstellen von $J_\nu(z)$, ihr Beweis findet sich in Watson [16] auf S. 478.

Satz 2.18 (*Bessel-Lommel*)

Für jedes $\nu \in \mathbb{R}$ besitzt $J_\nu(z)$ unendlich viele reelle Nullstellen. \square

Als nächstes soll die Lage dieser reellen Nullstellen eingegrenzt werden. Dabei lassen sich Grenzen für die kleinste Nullstelle in jedem Fall angeben. Für $-\frac{1}{2} < \nu \leq \frac{1}{2}$ können auch für alle übrigen Nullstellen Intervalle angegeben werden, in denen diese liegen. Für $\nu > \frac{1}{2}$ ist dies dagegen nur für große Nullstellen möglich.

Satz 2.19 Sei $\nu \in \mathbb{R}$.

(1) Sei j_ν die kleinste positive Nullstelle von $J_\nu(x)$. Dann gilt

$$(i) \quad j_\nu > \nu,$$

$$(ii) \quad \sqrt{\nu(\nu+2)} < j_\nu < \sqrt{2(\nu+1)(\nu+3)}.$$

(2) (*Bessel-Lommel-Theorem*)

Sei $-\frac{1}{2} < \nu \leq \frac{1}{2}$. Dann ist $J_\nu(x)$ in den Intervallen $(m\pi, (m + \frac{1}{2})\pi)$ positiv, falls $m \in 2\mathbb{N}_0$, und negativ, falls $m \in 2\mathbb{N}_0 + 1$. Insbesondere liegt in jedem der Intervalle $((m - \frac{1}{2})\pi, m\pi)$ mit $m \in \mathbb{N}$ eine ungerade Anzahl von Nullstellen, und alle positiven Nullstellen von $J_\nu(x)$ befinden sich in der Vereinigung dieser Intervalle.

(3) (*Schafheitlin*)

Sei $\nu > \frac{1}{2}$. Dann liegen alle reellen Nullstellen von $J_\nu(x)$, die größer sind als $\frac{1}{\pi}(2\nu+1)(2\nu+3)$, in den Intervallen $(m\pi + \frac{1}{2}\nu\pi + \frac{1}{2}\pi, m\pi + \frac{1}{2}\nu\pi + \frac{3}{4}\pi)$ mit $m \in \mathbb{N}$.

Beweis: Der Beweis wird in Watson [16] für (1) auf S. 485f, für (2) auf S. 478 und für (3) auf S. 492ff geführt. \square

2.3 Modifizierte Besselfunktionen der 2. Art

Für die modifizierten Besselfunktionen der 2. Art gibt es ebenfalls verschiedene Darstellungsmöglichkeiten.

Satz 2.20 (*Darstellungen von $K_\nu(z)$*)

$$K_\nu(z) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}z)^\nu}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_1^\infty e^{-zt}(t^2 - 1)^{\nu - \frac{1}{2}} dt \quad (2.12)$$

$$= \int_0^\infty e^{-z \cosh t} \cosh \nu t dt, \quad (2.13)$$

$$K_\nu(x) = \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-x}}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_0^\infty e^{-u} u^{\nu-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{u}{2x}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} du. \quad (2.14)$$

Dabei gilt (2.12) für $\Re(\nu) > -\frac{1}{2}$ und $|\arg(z)| < \frac{1}{2}\pi$, (2.13) für $|\arg(z)| < \frac{1}{2}\pi$ und (2.14) für $\nu \geq 0, x > 0$.

Beweis: Die angegebenen Formeln werden in Watson [16] auf den Seiten 172, 181 und 206 bewiesen. \square

Formel (2.14) entnimmt man unter Verwendung von Bemerkung 2.11:

Korollar 2.21 Für $\nu \in \mathbb{R}$ und $x > 0$ gilt $K_\nu(x) > 0$. \square

Formel (2.14) erlaubt es ferner, untere Schranken für $K_\nu(x)$ anzugeben. Im Fall $|\nu| \geq \frac{1}{2}$ sind diese sogar unabhängig von $\nu \in \mathbb{R}$, denn es gilt für $\nu \geq \frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-x}}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_0^\infty e^{-u} u^{\nu-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{u}{2x}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} du &\geq \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-x}}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_0^\infty e^{-u} u^{\nu-\frac{1}{2}} du \\ &= \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-x}. \end{aligned}$$

Für $0 \leq \nu < \frac{1}{2}$ läßt sich der Faktor $(1 + \frac{u}{2x})^{\nu-\frac{1}{2}}$ nicht so einfach abschätzen. Eine Zerlegung des Integrals liefert jedoch

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-u} u^{\nu-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{u}{2x}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} du &= \int_0^1 e^{-u} u^{\nu-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{u}{2x}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} du \\ &\quad + \int_1^\infty e^{-u} u^{\nu-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{u}{2x}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} du \\ &\geq \int_0^1 e^{-u} u^{\nu-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{u}{2x}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} du \\ &\geq \left(\frac{2x}{1+2x}\right)^{\frac{1}{2}-\nu} \int_0^1 e^{-u} du \\ &= \left(\frac{2x}{1+2x}\right)^{\frac{1}{2}-\nu} \left(1 - \frac{1}{e}\right) \\ &\geq \frac{1}{2} \left(\frac{x}{1+x}\right)^{\frac{1}{2}-\nu}. \end{aligned}$$

Die somit erzielten Ergebnisse lauten zusammengefaßt:

Korollar 2.22 Für $\nu \in \mathbb{R}$ und $x > 0$ besitzt $K_\nu(x)$ die folgenden unteren Schranken.

(1) Für $|\nu| \geq \frac{1}{2}$ gilt $K_\nu(x) \geq \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-x}$.

(2) Für $|\nu| < \frac{1}{2}$ gilt $K_\nu(x) \geq \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{2}\Gamma(|\nu|+\frac{1}{2})} x^{-|\nu|}(1+x)^{|\nu|-\frac{1}{2}} e^{-x}$.

□

Die letzte Aussage dieses Kapitels bezieht sich auf das Monotonieverhalten der K_ν .

Korollar 2.23 Für $\nu \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $\mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}$, die gegeben ist durch $x \mapsto x^\nu K_\nu(x)$, monoton fallend.

Beweis:

Aus den Rekursionsformeln (2.7) und (2.8) und Korollar 2.21 erhält man

$$\frac{d}{dx}\{x^\nu K_\nu(x)\} = -x^\nu K_{\nu-1}(x) < 0.$$

□

3 Untere Schranken der quadratischen Form

3.1 Motivation

Für eine gegebene radiale Basisfunktion $\Phi \in \text{BPD}(m)$ und für gegebene Daten $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subseteq \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^N$ mit paarweise verschiedenen x_j sind für das Interpolationsproblem aus Kapitel 1 die eindeutig bestimmten $c \in \mathbb{R}^N, d \in \mathbb{R}^Q$ gesucht, die die Gleichung

$$\begin{pmatrix} A & P \\ P^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

erfüllen, wobei $A = (\Phi(x_j - x_k))_{1 \leq j, k \leq N}$ und $P = (p_k(x_l))_{1 \leq l \leq N, 1 \leq k \leq Q}$ mit $Q = \dim \mathbb{P}_m^d$ und $\text{span}\{p_1, \dots, p_Q\} = \mathbb{P}_m^d$ gesetzt war.

Ist Φ sogar positiv definit, so verringert sich (3.1) zu

$$Ac = y,$$

welches die eindeutige Lösung $c = A^{-1}y$ besitzt. In diesem Fall liefert folgende Abschätzung der zugeordneten quadratischen Form

$$\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \alpha_j \alpha_k \Phi(x_j - x_k) \geq \theta \sum_{j=1}^N \alpha_j^2 \quad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{R}^N$$

sofort die obere Schranke

$$\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{\theta},$$

sofern $\theta > 0$, denn $\|A^{-1}\|$ ist gerade das Reziproke des kleinsten Eigenwertes von A .

Ist $\Phi \in \text{BPD}(m)$ mit $m > 0$, so fordert man üblicherweise, daß X eine unisolvente Teilmenge enthält, d.h., daß P injektiv ist (vgl. Satz 1.9). Unter dieser Voraussetzung läßt sich (3.1) auf $Gx = y$ reduzieren, wobei die Matrix G mit Hilfe der Orthogonalprojektion $pr : \mathbb{R}^N \rightarrow V_m(X) := \{v \in \mathbb{R}^N : v_j = p(x_j) \text{ mit } p \in \mathbb{P}_m^d, 1 \leq j \leq N\}$ erklärt wird durch

$$G = Apr^\perp + pr.$$

(vgl. Narcowich/Ward [10]).

Ebenfalls in Narcowich/Ward [10] wird nachstehender Zusammenhang zwischen den Schranken der quadratischen Form und den Schranken der Norm von G^{-1} bewiesen.

Satz 3.1 *Mit obigen Bezeichnungen folgt aus*

$$\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \alpha_j \alpha_k \Phi(x_j - x_k) \geq \theta \sum_{j=1}^N \alpha_j^2 \quad \text{für alle } \alpha \in V_m(X)^\perp$$

mit $\theta > 0$ die Invertierbarkeit der Matrix G und die Abschätzung

$$\|G^{-1}\| \leq \frac{\sqrt{2}\Lambda}{\theta} \max\{1, \theta^{-1}\},$$

wobei $\Lambda = \|Apr^\perp\|$. □

Da sich Λ zum Beispiel durch $\Lambda \leq \|A\| \leq N \max \Phi(x_j - x_k)$ weiter abschätzen läßt, ist also die Bestimmung von θ von großem Interesse.

3.2 Theoretische Grundlagen

Ausgehend von der Grundsituation, daß $\Phi \in \text{BPD}(m)$ eine radiale Basisfunktion und $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subset \mathbb{R}^d$ eine Menge von paarweise verschiedenen Punkten ist, sollen jetzt also untere Schranken für die zugeordnete quadratische Form in der Form

$$\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \alpha_j \alpha_k \Phi(x_j - x_k) \geq \theta \sum_{j=1}^N \alpha_j^2 \quad \text{für alle } \alpha \in V_m(X)^\perp \quad (3.2)$$

mit $\theta > 0$ angegeben werden. Dabei wird der Ansatz von Narcowich/Ward [9], der sich auf bedingt positiv definite radiale Basisfunktionen der Ordnung 1 beschränkte, auf alle radialen Basisfunktionen Φ mit positiver (verallgemeinerter) Fouriertransformierten $\varphi : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ übertragen, für die zusätzlich die folgende Voraussetzung gilt.

Definition 3.2 Eine Funktion $\Phi \in \text{BPD}(m)$ erfüllt die Voraussetzung (A), falls sie eine (verallgemeinerte) Fouriertransformierte $\varphi : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt und falls für alle $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subseteq \mathbb{R}^d$ mit paarweise verschiedenen x_j und alle $\alpha \in V_m(X)^\perp = \{v \in \mathbb{R}^N : \sum_{j=1}^N v_j p(x_j) = 0 \text{ für alle } p \in \mathbb{P}_m^d\}$

$$\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \alpha_j \alpha_k \Phi(x_j - x_k) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\omega) \left| \sum_{j=1}^N \alpha_j e^{ix_j^T \omega} \right|^2 d\omega \quad (3.3)$$

gilt.

Diese Voraussetzung ist für $\Phi \in L_1(\mathbb{R}^d)$ mit $\hat{\Phi} = \varphi \in L_1(\mathbb{R}^d)$ auf Grund der Umkehrformel erfüllt. Der nachstehende Satz, dessen Beweis man bei Wu/Schaback [17] findet, liefert eine hinreichende Bedingung für Voraussetzung (A).

Satz 3.3 $\Phi \in \text{BPD}(m)$ besitze eine stetige verallgemeinerte Fouriertransformierte $\varphi : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, welche das Verhalten $\varphi(\omega) = \mathcal{O}(\|\omega\|^{-d-s_0})$ für $\|\omega\| \rightarrow 0$ und $\varphi(\omega) = \mathcal{O}(\|\omega\|^{-d-s_\infty})$ für $\|\omega\| \rightarrow \infty$ mit Konstanten $s_\infty > 0$, $s_0 < 2m$ hat. Dann gilt für Φ die Voraussetzung (A). \square

Der vorbereitende Satz stammt von Narcowich/Ward [9].

Satz 3.4 Seien $\alpha \in \mathbb{R}^N$, $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subseteq \mathbb{R}^d$, x_j paarweise verschieden. Sei $\Psi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und radial. Seien $\gamma_N := \max_{1 \leq j \leq N} \sum_{k \neq j} |\Psi(x_j - x_k)|$, $q_2 := \frac{1}{2} \min_{j \neq k} \|x_j - x_k\|$, $\kappa_n := \sup\{|\Psi(x)| : nq_2 \leq \|x\| < (n+1)q_2\}$. Es konvergiere die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n^{d-1} \kappa_n$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \alpha_j \alpha_k \Psi(x_j - x_k) &\geq (\Psi(0) - \gamma_N) \sum_{j=1}^N \alpha_j^2 \\ &\geq \left(\Psi(0) - 3^d \sum_{n=1}^{\infty} n^{d-1} \kappa_n \right) \sum_{j=1}^N \alpha_j^2. \end{aligned}$$

Beweis:

1) Man zerlegt die Summe auf der linken Seite in

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j^2 \Psi(0) + \sum_{j \neq k} \alpha_j \alpha_k \Psi(x_j - x_k)$$

und schätzt hiervon die rechte Summe mit $\alpha_j^2 - 2|\alpha_j||\alpha_k| + \alpha_k^2 \geq 0$ ab:

$$\begin{aligned} \sum_{j \neq k} \alpha_j \alpha_k \Psi(x_j - x_k) &\geq - \sum_{j \neq k} |\alpha_j| |\alpha_k| |\Psi(x_j - x_k)| \\ &\geq - \frac{1}{2} \sum_{j \neq k} (\alpha_j^2 + \alpha_k^2) |\Psi(x_j - x_k)| \\ &= - \sum_{j \neq k} \alpha_j^2 |\Psi(x_j - x_k)| \\ &\geq - \gamma_N \sum_{j=1}^N \alpha_j^2. \end{aligned}$$

2) Zu zeigen ist $\gamma_N \leq 3^d \sum_{n=1}^{\infty} n^{d-1} \kappa_n$. Da Ψ radial ist, wird o.E. das Maximum in der Definition von γ_N bei $x_1 = 0$ angenommen, d.h. $\gamma_N = \sum_{k=2}^N |\Psi(x_k)|$. Sei nun $E_n := \{x_j \in X \setminus \{x_1\} : nq_2 \leq \|x_j\| < (n+1)q_2\}$. Dann gilt

$$\bigcup_{\substack{j \in \{2, \dots, N\} \\ x_j \in E_n}} \dot{K}_d(x_j, q_2) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^d : (n-1)q_2 < \|x\| < (n+2)q_2\}.$$

Ein Volumenvergleich auf beiden Seiten zeigt nun $\text{card}(E_n) \leq (n+2)^d - (n-1)^d \leq 3^d n^{d-1}$, wobei man die letzte Ungleichung zum Beispiel mit Induktion nach d zeigt. Hieraus folgt schließlich

$$\gamma_N \leq \sum_{n=1}^{\infty} \text{card}(E_n) \kappa_n \leq 3^d \sum_{n=1}^{\infty} n^{d-1} \kappa_n.$$

□

Bemerkung: Die Aussage bleibt trivialerweise richtig, wenn die Reihe divergiert. Interessant ist das Ergebnis allerdings nur für den Fall, daß der Ausdruck in Klammern auf der rechten Seite jeweils größer als Null ist.

Betrachtet man die radialen Basisfunktionen aus Kapitel 1, so erkennt man, daß sich Satz 3.4 nur eingeschränkt direkt anwenden läßt. Folgende Zusatzüberlegung hilft hier weiter.

Die radiale Basisfunktion $\Phi \in \text{BPD}(m)$ erfülle die Voraussetzung (A). Läßt sich ihre (verallgemeinerte) Fouriertransformierte φ dann durch ein ψ nach unten abschätzen,

d.h., gilt $\varphi(\omega) \geq \psi(\omega)$, und besitzt ψ eine inverse (verallgemeinerte) Fouriertransformierte Ψ , die bedingt positiv definit der Ordnung $l \leq m$ ist und die ebenfalls die Voraussetzung (A) erfüllt, so ist jede untere Schranke der zu Ψ gehörigen quadratischen Form auch untere Schranke der zu Φ gehörigen quadratischen Form. Denn es gilt dann

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \alpha_j \alpha_k \Phi(x_j - x_k) &= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\omega) \left| \sum_{j=1}^N \alpha_j e^{ix_j^T \omega} \right|^2 d\omega \\ &\geq (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \psi(\omega) \left| \sum_{j=1}^N \alpha_j e^{ix_j^T \omega} \right|^2 d\omega \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \alpha_j \alpha_k \Psi(x_j - x_k). \end{aligned}$$

Man hat nun prinzipiell zwei Möglichkeiten.

1. Man wählt eine geeignete Funktion ψ und versucht, Ψ zu berechnen und seine quadratische Form abzuschätzen.
2. Man wählt Ψ derart, daß sich seine quadratische Form kontrollieren läßt, und versucht, die Fouriertransformierte ψ als untere Schranke für ein φ zu bekommen.

Hier soll die erste Möglichkeit weiterverfolgt werden.

Da sämtliche radiale Basisfunktionen Φ aus Kapitel 1 eine stetige und positive (verallgemeinerte) Fouriertransformierte $\varphi : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ besitzen, liegt es nahe, für ψ eine normierte Funktion mit kompakten Träger zu nehmen und φ auf diesem Kompaktum durch sein Minimum abzuschätzen. Dies soll nun ausgeführt werden. Die verwendete Funktion wurde bereits in Narcowich/Ward [10] benutzt.

Definition 3.5 1) Sei für $\beta \in \mathbb{R}_{>0}$, $x \in \mathbb{R}^d$

$$\chi_\beta(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } \|x\| \leq \beta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die charakteristische Funktion der d -dimensionalen L_2 -Kugel um Null mit Radius β .

2) Sei $\mathfrak{X}_\beta : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\mathfrak{X}_\beta(x) := \chi_\beta * \chi_\beta(x).$$

Aus der Definition folgt sofort:

Lemma 3.6 Es gilt $0 \leq \mathfrak{X}_\beta(x) \leq \text{Vol}_d(K_d(0, \beta)) = \beta^d \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}$.

Beweis:

$$\mathfrak{X}_\beta(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_\beta(y) \chi_\beta(x-y) dy \leq \int_{\mathbb{R}^d} \chi_\beta(y) dy.$$

□

Ferner benötigt man die Fouriertransformierte von \mathfrak{X}_β .

Lemma 3.7 *Es gilt $\hat{\mathfrak{X}}_\beta(\omega) = (2\pi\beta)^d \|\omega\|^{-d} J_{\frac{d}{2}}^2(\|\omega\|\beta)$.*

Beweis: Wegen $\hat{\mathfrak{X}}_\beta(\omega) = \hat{\chi}_\beta^2(\omega)$ reicht es, $\hat{\chi}_\beta(\omega) = (2\pi\beta)^{\frac{d}{2}} \|\omega\|^{-\frac{d}{2}} J_{\frac{d}{2}}(\|\omega\|\beta)$ zu zeigen. Dazu benutzt man Satz 2.17, den Satz über die majorisierte Konvergenz und $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.

$$\begin{aligned} \hat{\chi}_\beta(\omega) &= (2\pi)^{\frac{d}{2}} \|\omega\|^{-\frac{d}{2}+1} \int_0^\beta J_{\frac{d}{2}-1}(\|\omega\|t) t^{\frac{d}{2}} dt \\ &= (2\pi)^{\frac{d}{2}} \|\omega\|^{-\frac{d}{2}+1} \int_0^\beta \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{\|\omega\|}{2}\right)^{\frac{d}{2}+2m-1}}{m! \Gamma(\frac{d}{2}+m)} t^{d+2m-1} dt \\ &= (2\pi)^{\frac{d}{2}} \|\omega\|^{-\frac{d}{2}+1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{\|\omega\|}{2}\right)^{\frac{d}{2}+2m-1}}{m! \Gamma(\frac{d}{2}+m)} \int_0^\beta t^{d+2m-1} dt \\ &= (2\pi\beta)^{\frac{d}{2}} \|\omega\|^{-\frac{d}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{\|\omega\|\beta}{2}\right)^{\frac{d}{2}+2m}}{m! \Gamma(\frac{d}{2}+m) (\frac{d}{2}+m)} \\ &= (2\pi\beta)^{\frac{d}{2}} \|\omega\|^{-\frac{d}{2}} J_{\frac{d}{2}}(\|\omega\|\beta). \end{aligned}$$

□

Es kann nun der für diesen Abschnitt entscheidende Satz formuliert und bewiesen werden.

Satz 3.8 *Seien $\alpha \in V_m(X)^\perp$ und $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subseteq \mathbb{R}^d$ mit paarweise verschiedenen x_j gegeben. Für $\Phi \in \text{BPD}(m)$ und seine (verallgemeinerte) Fouriertransformierte $\varphi : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ gelte*

$$\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \alpha_j \alpha_k \Phi(x_j - x_k) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\omega) \left| \sum_{j=1}^N \alpha_j e^{ix_j^T \omega} \right|^2 d\omega.$$

Seien

$$\begin{aligned} q_2 &:= \frac{1}{2} \min_{j \neq k} \|x_j - x_k\|, \\ \beta &:= 4 \left[3^{d-1} \Gamma^2\left(\frac{d}{2}+1\right) \pi \right]^{\frac{1}{d+1}} q_2^{-1}, \\ \varphi_\beta &:= \min_{\|\omega\| \leq 2\beta} \varphi(\omega). \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \alpha_j \alpha_k \Phi(x_j - x_k) \geq \frac{\beta^d \varphi_\beta}{2^{d+1} \pi^{\frac{d}{2}} \Gamma(\frac{d}{2} + 1)} \sum_{j=1}^N \alpha_j^2.$$

Beweis: Man setze $\psi_\beta(\omega) = \varphi_\beta \Gamma(\frac{d}{2} + 1) \beta^{-d} \pi^{-\frac{d}{2}} \mathfrak{X}_\beta(\omega)$. Dann ist $\Psi_\beta(x) = IF(\psi_\beta)(x) = (2\pi)^{-d} \hat{\psi}_\beta(x) = \varphi_\beta \Gamma(\frac{d}{2} + 1) \pi^{-\frac{d}{2}} \|x\|^{-d} J_{\frac{d}{2}}^2(\|x\|\beta)$. Für das Paar $\{\Psi_\beta, \psi_\beta\}$ gilt dann:

1) $\psi_\beta(\omega) \leq \varphi(\omega)$ für $\omega \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Dies folgt für $0 < \|\omega\| \leq 2\beta$ aus der Definition von φ_β und Lemma 3.6. Für $\|\omega\| \geq 2\beta$ ist die Behauptung klar, da $\varphi(\omega) > 0$.

2) Nach (2) aus Lemma 2.14 gilt

$$\begin{aligned} \Psi_\beta(0) &= \varphi_\beta \Gamma(\frac{d}{2} + 1) \pi^{-\frac{d}{2}} \beta^d \lim_{x \rightarrow 0} (\|x\|\beta)^{-d} J_{\frac{d}{2}}^2(\|x\|\beta) \\ &= \frac{\beta^d}{2^d \pi^{\frac{d}{2}} \Gamma(\frac{d}{2} + 1)} \varphi_\beta. \end{aligned}$$

3) Man berechnet mit (1) aus Lemma 2.14

$$\begin{aligned} \kappa_n &= \sup\{\Psi_\beta(x) : nq_2 \leq \|x\| < (n+1)q_2\} \\ &= \sup\{\varphi_\beta \Gamma(\frac{d}{2} + 1) \pi^{-\frac{d}{2}} \|x\|^{-d} J_{\frac{d}{2}}^2(\|x\|\beta) : nq_2 \leq \|x\| < (n+1)q_2\} \\ &\leq \varphi_\beta \pi^{-\frac{d}{2}} \Gamma(\frac{d}{2} + 1) (nq_2)^{-d} \frac{2^{d+2}}{\pi \beta n q_2} \\ &= \Psi_\beta(0) \frac{4^{d+1} \Gamma^2(\frac{d}{2} + 1)}{\pi (nq_2 \beta)^{d+1}}. \end{aligned}$$

4) Aus $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} = \frac{\pi^2}{6}$ folgt dann

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{d-1} \kappa_n = \Psi_\beta(0) \frac{2\pi \Gamma^2(\frac{d}{2} + 1) 4^d}{3(q_2 \beta)^{d+1}}.$$

5) Mit diesen Vorbereitungen erhält man nun (noch für allgemeines β) nach Satz 3.4

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \alpha_j \alpha_k \Phi(x_j - x_k) &\geq \left(\Psi_\beta(0) - 3^d \sum_{n=1}^{\infty} n^{d-1} \kappa_n \right) \sum_{j=1}^N \alpha_j^2 \\ &= \Psi_\beta(0) \left(1 - \frac{2\pi 3^{d-1} 4^d \Gamma^2(\frac{d}{2} + 1)}{(q_2 \beta)^{d+1}} \right) \sum_{j=1}^N \alpha_j^2. \end{aligned}$$

6) Die Wahl des β liefert nun für den Ausdruck in der Klammer den Wert $\frac{1}{2}$ und damit insgesamt die Behauptung. \square

Bemerkung 3.9 Für die in der Definition von $\beta = C_d/q_2$ auftretende Konstante

$$C_d := 4 \left[3^{d-1} \Gamma^2\left(\frac{d}{2} + 1\right) \pi \right]^{\frac{1}{d+1}}$$

gilt $C_d = \mathcal{O}(d)$ für $d \rightarrow \infty$, oder genauer

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \frac{C_d}{d} = \frac{6}{e}.$$

Beweis: Aus $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ und der Stirlingschen Formel folgt

$$\begin{aligned} \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{C_d}{d} &= \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{4 \left[3^{d-1} \frac{d^2}{4} \Gamma^2\left(\frac{d}{2}\right) \pi \right]^{\frac{1}{d+1}}}{d} \\ &= \lim_{d \rightarrow \infty} 4 \left(\frac{\pi}{4} \right)^{\frac{1}{d+1}} 3^{\frac{d-1}{d+1}} (2\pi)^{\frac{1}{d+1}} 2^{-\frac{d-1}{d+1}} e^{-\frac{d}{d+1}} \frac{[\Gamma(\frac{d}{2})]^{\frac{2}{d+1}}}{(2\pi)^{\frac{1}{d+1}} \left(\frac{d}{2}\right)^{\frac{d-1}{d+1}} e^{-\frac{d}{d+1}}} \\ &= \frac{6}{e}. \end{aligned}$$

□

Tabelle 1 enthält die Werte der Konstanten C_d für die Raumdimensionen von eins bis acht.

| d | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
|-------|--------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| C_d | 6.2832 | 8.4492 | 10.6347 | 12.8285 | 15.0265 | 17.2271 | 19.4292 | 21.6325 |

Tabelle 1: C_d

3.3 Beispiele

Es sollen nun die bisher erzielten Aussagen auf die in Kapitel 1 angegebenen radialen Basisfunktionen angewandt werden. Dabei werden die Bezeichnungen aus dem letzten Abschnitt benutzt. Aussagen über die (bedingte) positive Definitheit gehen auf Resultate zurück, die sich unter anderem bei Schoenberg [14], Powell [12] und bei Micchelli [8] finden. Die (verallgemeinerten) Fouriertransformierten entnimmt man zum Beispiel Gelfand [5].

Es muß natürlich im einzelnen nachgeprüft werden, ob die Funktion Φ die Voraussetzung (A) erfüllt. Dies folgt für die Gaußglocken, da die Voraussetzung wie bereits erwähnt für L_1 -Funktionen mit Fouriertransformierten in L_1 gegeben ist. Für die übrigen nun folgenden Funktionen kann man Satz 3.3 benutzen, um Voraussetzung (A) zu verifizieren. Dabei berücksichtige man bei den (inverse) Multiquadrics das Verhalten $\mathcal{O}(\|\omega\|^{-|\nu|})$ für $\|\omega\| \rightarrow 0$ für die modifizierte Besselfunktion K_ν (bzw. $K_0(\|\omega\|) = \mathcal{O}(-\log(\|\omega\|))$, $\|\omega\| \rightarrow 0$), was man aus der Definition erhält.

Die nachstehenden Ergebnisse zeigen, daß sich bei Gaußglocken, Multiquadrics und inverse Multiquadrics nur obere Schranken für $\|A^{-1}\|$ beziehungsweise $\|G^{-1}\|$ ergeben, die mit sich verringerndem Separationsabstand q_2 exponentiell größer werden. Bei den Thin-Plate-Splines dagegen wachsen die Schranken für $q_2 \rightarrow 0$ höchstens polynomial.

3.3.1 Gaußglocken

Die Funktion

$$\Phi_1(x) = e^{-\lambda\|x\|^2}, \quad \lambda > 0,$$

ist positiv definit und besitzt die klassische Fouriertransformierte

$$\varphi(\omega) = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^{\frac{d}{2}} e^{-\frac{\|\omega\|^2}{4\lambda}}.$$

Dies liefert sofort

$$\varphi_\beta = \min_{\|\omega\| \leq 2\beta} \varphi(\omega) = \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^{\frac{d}{2}} e^{-\frac{\beta^2}{\lambda}}.$$

Korollar 3.10 Für $\Phi_1(x) = e^{-\lambda\|x\|^2}$ mit $\lambda > 0$ hat die zugehörige quadratische Form eine untere Schranke der Gestalt (3.2) mit

$$\theta = \frac{C_d^d}{2^{d+1} \lambda^{\frac{d}{2}} \Gamma(\frac{d}{2} + 1)} q_2^{-d} e^{-\frac{C_d^2}{\lambda q_2^2}}.$$

θ besitzt für $d \rightarrow \infty$ das Verhalten

$$\begin{aligned} \theta &= \mathcal{O}(1), \\ 1/\theta &= \mathcal{O}(e^{Kd^2}) \text{ mit einer Konstanten } K > 0. \end{aligned}$$

Beweis: Es bleibt nur die Asymptotik zu zeigen. Diese folgt unter Berücksichtigung von Bemerkung 3.9 in beiden Fällen aus der Dominanz des Faktors $e^{-C_d^2/(\lambda q_2^2)}$. \square

3.3.2 Thin-Plate-Splines

Die Funktion

$$\Phi_2(x) = (-1)^{k+1} \|x\|^{2k} \log \|x\|, \quad k \in \mathbb{N},$$

ist bedingt positiv definit der Ordnung $k+1$ und besitzt die verallgemeinerte Fouriertransformierte

$$\varphi(\omega) = 2^{d+2k-1} \pi^{\frac{d}{2}} \Gamma\left(\frac{d}{2} + k\right) k! \|\omega\|^{-d-2k}.$$

Die benötigte Konstante φ_β berechnet man somit zu

$$\begin{aligned} \varphi_\beta &= 2^{d+2k-1} \pi^{\frac{d}{2}} \Gamma\left(\frac{d}{2} + k\right) k! (2\beta)^{-d-2k} \\ &= \frac{1}{2} \pi^{\frac{d}{2}} \Gamma\left(\frac{d}{2} + k\right) k! \beta^{-d-2k}. \end{aligned}$$

Korollar 3.11 Die zu $\Phi_2(x) = (-1)^{k+1} \|x\|^{2k} \log \|x\|$ mit $k \in \mathbb{N}$ gehörige quadratische Form besitzt eine untere Schranke der Art (3.2) mit

$$\theta = \frac{\Gamma(\frac{d}{2} + k) k!}{2^{d+2} C_d^{2k} \Gamma(\frac{d}{2} + 1)} q_2^{2k}.$$

Ferner verhält sich θ für $d \rightarrow \infty$ wie $\mathcal{O}(2^{-d} d^{-k-1})$.

Beweis: Es muß nur noch das asymptotische Verhalten gezeigt werden. Bemerkung 3.9 und die Funktionalgleichung der Γ -Funktion liefern

$$\frac{\Gamma(\frac{d}{2} + k)}{\Gamma(\frac{d}{2} + 1)} = \mathcal{O}(d^{k-1}) \text{ und } C_d^{-2k} = \mathcal{O}(d^{-2k}),$$

womit die Behauptung folgt. □

Die Funktion

$$\Phi_3(x) = (-1)^{\lceil \frac{\nu}{2} \rceil} \|x\|^\nu, \quad \nu > 0, \nu \notin 2\mathbb{N},$$

ist bedingt positiv definit der Ordnung $\lceil \frac{\nu}{2} \rceil$ und besitzt die verallgemeinerte Fouriertransformierte

$$\varphi(\omega) = 2^{d+\nu} \pi^{\frac{d}{2}} \frac{\Gamma(\frac{d+\nu}{2})}{|\Gamma(-\frac{\nu}{2})|} \|\omega\|^{-d-\nu}.$$

Korollar 3.12 Für $\Phi_3(x) = (-1)^{\lceil \frac{\nu}{2} \rceil} \|x\|^\nu$ mit $\nu > 0, \nu \notin 2\mathbb{N}$ erhält man

$$\theta = \frac{\Gamma(\frac{d+\nu}{2})}{2^{d+1} |\Gamma(-\frac{\nu}{2})| \Gamma(\frac{d}{2} + 1) C_d^\nu} q_2^\nu$$

und $\theta = \mathcal{O}(2^{-d} d^{-\frac{\nu}{2}-1})$ für $d \rightarrow \infty$.

Beweis: Dies folgt sofort aus

$$\varphi_\beta = \pi^{\frac{d}{2}} \frac{\Gamma(\frac{d+\nu}{2})}{|\Gamma(-\frac{\nu}{2})|} \beta^{-d-\nu}$$

und aus

$$\frac{\Gamma(\frac{d+\nu}{2})}{\Gamma(\frac{d}{2} + 1)} = \mathcal{O}(d^{\frac{\nu}{2}-1}), \quad C_d^{-\nu} = \mathcal{O}(d^{-\nu}) \text{ für } d \rightarrow \infty,$$

was man mit der Stirlingschen Formel und Bemerkung 3.9 nachrechnet. □

Bemerkung: Das Verhalten von θ für $d \rightarrow \infty$ liefert in den letzten beiden Fällen (also für Φ_2 und Φ_3) auch Aussagen über das Verhalten von $1/\theta$, denn die in Korollar 3.11 bzw. Korollar 3.12 gegebenen Gleichungen $\theta = \mathcal{O}(f)$ lauten genauer

$$\lim_{d \rightarrow \infty} \theta/f = \text{const.}$$

3.3.3 Multiquadrics

Die für $\nu = 1$ als Multiquadrics bezeichneten Funktionen

$$\Phi_4(x) = (-1)^{\lceil \frac{\nu}{2} \rceil} (c^2 + \|x\|^2)^{\frac{\nu}{2}}, \quad \nu, c > 0, \nu \notin 2\mathbb{N},$$

sind bedingt positiv definit der Ordnung $\lceil \frac{\nu}{2} \rceil$. Aus ihrer verallgemeinerten Fouriertransformierten

$$\varphi(\omega) = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{|\Gamma(-\frac{\nu}{2})|} K_{\frac{d+\nu}{2}}(c\|\omega\|) \left(\frac{\|\omega\|}{2c} \right)^{-\frac{d+\nu}{2}}$$

berechnet man, da $K_{\frac{d+\nu}{2}}$ monoton fallend ist, unter Benutzung von Korollar 2.22

$$\begin{aligned} \varphi_\beta &= \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{|\Gamma(-\frac{\nu}{2})|} \left(\frac{\beta}{c} \right)^{-\frac{d+\nu}{2}} K_{\frac{d+\nu}{2}}(2c\beta) \\ &\geq \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{|\Gamma(-\frac{\nu}{2})|} \left(\frac{\beta}{c} \right)^{-\frac{d+\nu}{2}} \left(\frac{\pi}{4c\beta} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-2c\beta} \\ &= \frac{\pi^{\frac{d+1}{2}}}{|\Gamma(-\frac{\nu}{2})|} c^{\frac{d+\nu-1}{2}} \beta^{-\frac{d+\nu+1}{2}} e^{-2c\beta}. \end{aligned}$$

Korollar 3.13 Für die quadratische Form, die $\Phi_4(x) = (-1)^{\lceil \frac{\nu}{2} \rceil} (c^2 + \|x\|^2)^{\frac{\nu}{2}}$ mit $\nu, c > 0$, $\nu \notin 2\mathbb{N}$ zugeordnet ist, existiert eine Schranke der Form (3.2) mit

$$\theta = \frac{\pi^{\frac{1}{2}} c^{\frac{d+\nu-1}{2}} C_d^{\frac{d-\nu-1}{2}}}{2^{d+1} |\Gamma(-\frac{\nu}{2})| \Gamma(\frac{d}{2} + 1)} q_2^{\frac{\nu+1-d}{2}} e^{-\frac{2cC_d}{q_2}}.$$

Weiterhin existieren Konstanten $K_1, K_2 > 0$, so daß für $d \rightarrow \infty$ gilt

$$\begin{aligned} \theta &= \mathcal{O}(e^{K_1 d}), \\ 1/\theta &= \mathcal{O}(e^{K_2 d}). \end{aligned}$$

Beweis: Nur die Faktoren $C_d^{\frac{d}{2}}$ und $\Gamma(\frac{d}{2})$ lassen sich nicht durch e^{Kd} beschränken. Allerdings gilt nach der Stirlingschen Formel und Bemerkung 3.9:

$$\begin{aligned} \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(\frac{d}{2})}{C_d^{\frac{d}{2}}} &= \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2\pi} \left(\frac{d}{2} \right)^{\frac{d-1}{2}} e^{-\frac{d}{2}}}{\left(\frac{6}{e} d \right)^{\frac{d}{2}}} \\ &= \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2\pi}}{2^{\frac{d-1}{2}} 6^{\frac{d}{2}} \sqrt{d}} \\ &= 0, \end{aligned}$$

womit man die Behauptungen leicht folgern kann. □

3.3.4 Inverse Multiquadrics

Als letztes sollen die für $\nu = 1$ als inverse Multiquadrics bezeichneten Funktionen

$$\Phi_5(x) = (c^2 + \|x\|^2)^{-\frac{\nu}{2}}, \quad \nu, c > 0,$$

betrachtet werden. Sie sind positiv definit und besitzen die verallgemeinerten Fourier-transformierten

$$\varphi(\omega) = \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} K_{\frac{d-\nu}{2}}(c\|\omega\|) \left(\frac{\|\omega\|}{2c}\right)^{-\frac{d-\nu}{2}}.$$

Da die Ordnung $\frac{d-\nu}{2}$ der auftretenden modifizierten Besselfunktion dem Betrag nach kleiner als $\frac{1}{2}$ werden kann, muß man im Gegensatz zu den Multiquadrics eine Fallunterscheidung vornehmen.

Gilt $|\frac{d-\nu}{2}| \geq \frac{1}{2}$, so kann man wie im vorherigen Beispiel verfahren. Dies liefert

$$\begin{aligned} \varphi_\beta &= \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} \left(\frac{\beta}{c}\right)^{-\frac{d-\nu}{2}} K_{\frac{d-\nu}{2}}(2c\beta) \\ &\geq \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} \left(\frac{\beta}{c}\right)^{-\frac{d-\nu}{2}} \left(\frac{\pi}{4c\beta}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-2c\beta} \\ &= \frac{\pi^{\frac{d+1}{2}}}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} c^{\frac{d-\nu-1}{2}} \beta^{-\frac{d-\nu+1}{2}} e^{-2c\beta} \end{aligned}$$

und die Aussagen über das asymptotische Verhalten.

Falls $|\frac{d-\nu}{2}| < \frac{1}{2}$ bzw. $d-1 < \nu < d+1$ gilt, benutzt man die zweite Abschätzung aus Korollar 2.22 und Korollar 2.23, um

$$\begin{aligned} \varphi_\beta &= \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} \left(\frac{\beta}{c}\right)^{-\frac{d-\nu}{2}} K_{\frac{d-\nu}{2}}(2c\beta) \\ &\geq \frac{2\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} \left(\frac{\beta}{c}\right)^{-\frac{d-\nu}{2}} \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{2} \Gamma(\frac{|d-\nu|+1}{2})} \frac{e^{-2c\beta}}{(2c\beta)^{\frac{|d-\nu|}{2}} (1+2c\beta)^{\frac{1-|d-\nu|}{2}}} \\ &= \frac{\pi^{\frac{d+1}{2}} c^{\frac{d-\nu-|d-\nu|}{2}}}{2^{\frac{|d-\nu|+1}{2}} \Gamma(\frac{\nu}{2}) \Gamma(\frac{|d-\nu|+1}{2})} \beta^{-\frac{d-\nu+|d-\nu|}{2}} (1+2c\beta)^{\frac{|d-\nu|-1}{2}} e^{-2c\beta} \end{aligned}$$

zu erhalten.

Korollar 3.14 Für $\Phi_5(x) = (c^2 + \|x\|^2)^{-\frac{\nu}{2}}$ mit $\nu, c > 0$ hat die zugeordnete quadratische Form im Fall $|d-\nu| \geq 1$ eine untere Schranke der Gestalt (3.2) mit

$$\theta = \frac{\pi^{\frac{1}{2}} c^{\frac{d-\nu-1}{2}} C_d^{\frac{d+\nu-1}{2}}}{2^{d+1} \Gamma(\frac{\nu}{2}) \Gamma(\frac{d}{2} + 1)} q_2^{-\frac{d+\nu-1}{2}} e^{-\frac{2cC_d}{q_2}}.$$

Im Fall $|d - \nu| < 1$ lautet θ mit $\mu := d - \nu$

$$\theta = \frac{\pi^{\frac{1}{2}} c^{\frac{\mu-|\mu|}{2}} C_d^{\frac{d+\nu-|\mu|}{2}}}{2^{\frac{|\mu|+1}{2}+d+1} \Gamma(\frac{\nu}{2}) \Gamma(\frac{|\mu|+1}{2}) \Gamma(\frac{d}{2} + 1)} q_2^{-\frac{d+\nu-|\mu|}{2}} \left(1 + \frac{2cC_d}{q_2}\right)^{\frac{|\mu|-1}{2}} e^{-\frac{2cC_d}{q_2}}.$$

Das asymptotische Verhalten von θ und $1/\theta$ für $d \rightarrow \infty$ ist dasselbe wie bei den Multi-quadratics. Es gilt also mit Konstanten $K_1, K_2 > 0$ für $d \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \theta &= \mathcal{O}(e^{K_1 d}), \\ 1/\theta &= \mathcal{O}(e^{K_2 d}). \end{aligned}$$

□

4 Der Euklidische Hut X_β

4.1 Allgemeines

In diesem Kapitel soll die Funktion \mathfrak{X}_β , die als Hilfsmittel bei der Abschätzung quadratischer Formen bereits im letzten Kapitel auftrat, als neue radiale Basisfunktion in den Mittelpunkt der Betrachtung rücken. Zur Erinnerung sei noch einmal die Definition wiederholt.

Definition 4.1 1) Sei für $\beta \in \mathbb{R}_{>0}$, $x \in \mathbb{R}^d$

$$\chi_\beta(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } \|x\| \leq \beta \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

die charakteristische Funktion der d -dimensionalen L_2 -Kugel um Null mit Radius β .

2) Der Euklidische Hut $\mathfrak{X}_\beta : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$\mathfrak{X}_\beta(x) := \chi_\beta * \chi_\beta(x).$$

Die Funktion \mathfrak{X}_β hat an der Stelle x als Wert das Volumen des Schnittes zweier d -dimensionaler Kugeln mit Radius β , wobei die eine ihren Mittelpunkt im Ursprung und die andere ihren Mittelpunkt in x hat, denn es gilt

$$\mathfrak{X}_\beta(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_\beta(y) \chi_\beta(x-y) dy = \int_{K(x,\beta)} \chi_\beta(y) dy = \text{Vol}_d(K(x,\beta) \cap K(0,\beta)).$$

Bemerkung 4.2 1) Da χ_β den Träger $\{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| \leq \beta\}$ hat, besitzt \mathfrak{X}_β den Träger $\{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| \leq 2\beta\}$.

2) Die Fouriertransformierte von \mathfrak{X}_β lautet

$$\hat{\mathfrak{X}}_\beta(\omega) = (2\pi\beta)^d \|\omega\|^{-d} J_{\frac{d}{2}}^2(\|\omega\|\beta).$$

Sie liegt in $L_1(\mathbb{R}^d)$, da einerseits aus der Definition von J_ν das Verhalten $\hat{\mathfrak{X}}_\beta(\omega) = \mathcal{O}(1)$ für $\|\omega\| \rightarrow 0$ folgt und andererseits nach Lemma 2.14 $\hat{\mathfrak{X}}_\beta(\omega) = \mathcal{O}(\|\omega\|^{-d-1})$ für $\|\omega\| \rightarrow \infty$ gilt.

3) Da χ_β radial, ist auch \mathfrak{X}_β radial. Die zugehörige Funktion sei folgendermaßen bezeichnet:

$$X_\beta : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ mit } \mathfrak{X}_\beta(x) = X_\beta(\|x\|).$$

4) Für fast alle $\omega \in \mathbb{R}^d$ ist $\hat{\mathfrak{X}}_\beta(\omega) > 0$.

5) Es gilt die Identität $\mathfrak{X}_\beta(x) = \beta^d \mathfrak{X}_1(\frac{x}{\beta})$.

6) Falls die Abhängigkeit von der Raumdimension d deutlich gemacht werden soll, wird auch $X_\beta^{(d)}$ bzw. $\mathfrak{X}_\beta^{(d)}$ geschrieben.

Beweis: 1) folgt aus $\text{supp}(f * g) \subseteq \text{supp}(f) + \text{supp}(g)$, 2) wurde bereits im letzten Kapitel bewiesen, 3) folgt aus Satz 2.17 und Bemerkung 1.3. 4) gilt, da einerseits die Nullstellenmenge von $\hat{\mathfrak{X}}_\beta$ diskret sein muß (sonst wäre $\hat{\mathfrak{X}}_\beta$ nach dem Identitätssatz

identisch Null) und andererseits eine diskrete Menge abzählbar ist. 5) erhält man schließlich aus $\chi_\beta(x) = \chi_1(\frac{x}{\beta})$ und

$$\mathfrak{X}_\beta(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \chi_1\left(\frac{\omega}{\beta}\right) \chi_1\left(\frac{x-\omega}{\beta}\right) d\omega = \beta^d \int_{\mathbb{R}^d} \chi_1(\omega) \chi_1\left(\frac{x}{\beta} - \omega\right) d\omega = \beta^d \mathfrak{X}_1\left(\frac{x}{\beta}\right).$$

□

Entscheidend für die Betrachtung von \mathfrak{X}_β als radiale Basisfunktion ist die Eigenschaft interpolieren zu können, diese wird durch den folgenden Satz garantiert.

Satz 4.3 \mathfrak{X}_β ist positiv definit.

Beweis: Seien $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subseteq \mathbb{R}^d$ mit paarweise verschiedenen x_j und $\alpha_j \in \mathbb{R}$ für $1 \leq j \leq N$ beliebig. Dann gilt nach der Umkehrformel

$$\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \alpha_j \alpha_k \mathfrak{X}_\beta(x_j - x_k) = (2\pi)^{-d} \int_0^\infty \hat{\mathfrak{X}}_\beta(\omega) \left| \sum_{j=1}^N \alpha_j e^{ix_j^T \omega} \right|^2 d\omega \geq 0.$$

Ist die quadratische Form gleich Null, so impliziert $\hat{\mathfrak{X}}_\beta(\omega) > 0$ fast überall, daß bereits

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j e^{ix_j^T \omega} = 0$$

fast überall gültig sein muß. Dies zieht aber $\alpha_j = 0$ für $j = 1, \dots, N$ nach sich, da die Funktionen $e^{ix_j^T \omega}$ linear unabhängig über \mathbb{R}^d sind (vgl. Powell [12]). □

4.2 Eine explizite Form für X_β

Es soll nun eine explizite, insbesondere auswertbare Form von X_β berechnet werden. Der erste Schritt besteht darin, das Faltungsintegral auf ein einfacheres eindimensionales Integral zu reduzieren.

Satz 4.4 Für die Faltung zweier charakteristischer Funktionen der d -dimensionalen L_2 -Kugel um Null mit Radius β gilt für $0 \leq r \leq 2\beta$:

$$X_\beta(r) = \frac{2\beta^d \pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^{\frac{\sqrt{4\beta^2 - r^2}}{2\beta}} \frac{t^d}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

Bemerkung: Vor dem allgemeinen Beweis sei auf den Spezialfall $r = 0$ hingewiesen. Einerseits besitzt X_β an der Stelle Null den Wert des d -dimensionalen Kugelvolumens, also $\beta^d \pi^{\frac{d}{2}} / \Gamma(\frac{d}{2} + 1)$. Andererseits liefert der Zusammenhang von Beta- und Γ -Funktion

$$\begin{aligned}
\frac{2\beta^d \pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^1 t^d (1-t^2)^{-\frac{1}{2}} dt &= \frac{\beta^d \pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^1 t^{\frac{d-1}{2}} (1-t)^{-\frac{1}{2}} dt \\
&= \frac{\beta^d \pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} B\left(\frac{d+1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{\beta^d \pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2} + 1)}.
\end{aligned}$$

Bemerkung: Es werden nun zwei unterschiedliche Beweise für den allgemeinen Fall gegeben. Der erste verwendet die Fouriertransformation radialer Funktionen, während der zweite das Cavalierische Prinzip benutzt.

Beweis: Für diesen ersten Beweis sei ohne Einschränkung $0 < r \leq 2\beta$. X_β wird über seinen radialen Anteil berechnet. Das hierbei auftretende Integral über drei Besselfunktionen wird in ein Doppelintegral über zwei Besselfunktionen transformiert. Dann wird das innere Integral gelöst. Im einzelnen sieht dies folgendermaßen aus:

1) Nach dem Satz über die Fouriertransformation von radialen Funktionen und der Umkehrformel gilt

$$\begin{aligned}
X_\beta(r) &= (2\pi)^{-\frac{d}{2}} r^{-\frac{d}{2}+1} \int_0^\infty (2\pi\beta)^d t^{-d} J_{\frac{d}{2}}^2(\beta t) J_{\frac{d}{2}-1}(rt) t^{\frac{d}{2}} dt \\
&= (2\pi)^{\frac{d}{2}} \beta^d r^{-\frac{d}{2}+1} \underbrace{\int_0^\infty t^{-\frac{d}{2}} J_{\frac{d}{2}}(\beta t) J_{\frac{d}{2}}(\beta t) J_{\frac{d}{2}-1}(rt) dt}_{I:=}.
\end{aligned}$$

2) Um I zu berechnen, setze man in Satz 2.16 $\mu = \frac{d}{2} - 1$, $\nu = \frac{d}{2}$, $\lambda = 0$, $a = r$ und $b = c = \beta$. Für diese speziellen Werte gilt dann $\Re(\nu) = \frac{d}{2} > -\frac{1}{2}$ und $\Re(\mu + \nu + 2) = d + 1 > \Re(\lambda + 1) = 1 > 0$. Also hat man mit absoluter Konvergenz auf der rechten Seite

$$\begin{aligned}
I &= \frac{(\frac{1}{2}\beta^2)^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^\infty \int_0^\pi \frac{J_{\frac{d}{2}-1}(rt) J_{\frac{d}{2}}(\varpi t)}{\varpi^{\frac{d}{2}}} \sin^d \varphi d\varphi dt \\
&= \frac{(\frac{1}{2}\beta^2)^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^\pi \varpi^{-\frac{d}{2}} \sin^d \varphi \underbrace{\int_0^\infty J_{\frac{d}{2}-1}(rt) J_{\frac{d}{2}}(\varpi t) dt}_{II(\varphi)} d\varphi
\end{aligned}$$

mit $\varpi = \sqrt{2}\beta\sqrt{1 - \cos \varphi}$.

3) Setzt man in Satz 2.15 nun $\mu = \frac{d}{2}$, $a = \varpi$, $b = r$, so erhält man

$$H(\varphi) = \begin{cases} r^{\frac{d}{2}-1}/\varpi^{\frac{d}{2}} & \text{für } r < \varpi \\ 1/(2r) & \text{für } r = \varpi \\ 0 & \text{für } r > \varpi. \end{cases}$$

Man beachte dabei, daß aus $\varphi = 0$ zwar $\varpi = 0$ folgt, dies aber auch $J_{\frac{d}{2}}(\varpi t) = 0$ impliziert, so daß die angegebene Formel auch in diesem Fall richtig bleibt.

4) Da $r > 0$ und $\beta > 0$ und die arccos-Funktion strikt monoton fallend, gelten die folgenden Äquivalenzumformungen:

$$\begin{aligned} r < \varpi &\Leftrightarrow \frac{r^2}{2\beta^2} < 1 - \cos \varphi \\ &\Leftrightarrow \cos \varphi < \frac{2\beta^2 - r^2}{2\beta^2} \\ &\Leftrightarrow \varphi > \arccos \frac{2\beta^2 - r^2}{2\beta^2} =: A. \end{aligned}$$

Damit folgt durch Einsetzen unter Vernachlässigung der Unstetigkeitsstelle

$$\begin{aligned} I &= \frac{(\frac{1}{2}\beta^2)^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^\pi H(\varphi) \varpi^{-\frac{d}{2}} \sin^d \varphi \, d\varphi \\ &= \frac{(\frac{1}{2}\beta^2)^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \int_A^\pi r^{\frac{d}{2}-1} \varpi^{-d} \sin^d \varphi \, d\varphi \\ &= \frac{r^{\frac{d}{2}-1} (\frac{1}{2}\beta^2)^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})(2\beta^2)^{\frac{d}{2}}} \int_A^\pi (1 - \cos \varphi)^{-\frac{d}{2}} \sin^d \varphi \, d\varphi \\ &= \frac{r^{\frac{d}{2}-1}}{2^d \Gamma(\frac{d+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \int_A^\pi (1 - \cos \varphi)^{-\frac{d}{2}} \sin^d \varphi \, d\varphi. \end{aligned}$$

Wegen $\varphi \in [A, \pi] \subseteq [0, \pi]$ ist $\sin \varphi \geq 0$ und damit

$$\sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \sqrt{(1 - \cos \varphi)(1 + \cos \varphi)}.$$

Also ist

$$(1 - \cos \varphi)^{-\frac{d}{2}} \sin^d \varphi = (1 + \cos \varphi)^{\frac{d}{2}},$$

und man erhält schließlich

$$I = \frac{r^{\frac{d}{2}-1}}{2^d \Gamma(\frac{d+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \int_A^\pi (1 + \cos \varphi)^{\frac{d}{2}} d\varphi.$$

Substituiert man nun $t = \sqrt{(1 + \cos \varphi)/2}$ (monoton fallend), so berechnet man für das Differential

$$\frac{dt}{d\varphi} = -\frac{1}{2\sqrt{2}}(1 + \cos \varphi)^{-\frac{1}{2}} \sin \varphi = -\frac{1}{2}\sqrt{1-t^2}.$$

Die obere Grenze transformiert sich zu Null und die untere zu

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \cos A} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1 + \frac{2\beta^2 - r^2}{2\beta^2}} = \frac{\sqrt{4\beta^2 - r^2}}{2\beta}.$$

Das Integral selbst lautet damit

$$I = \frac{r^{\frac{d}{2}-1}}{2^{\frac{d}{2}-1}\Gamma(\frac{d+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^{\frac{\sqrt{4\beta^2 - r^2}}{2\beta}} \frac{t^d}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

5) Einsetzen von I in 1) liefert dann die Behauptung. \square

Es folgt nun der zweite Beweis dieses Satzes.

Beweis: Die Motivation entnimmt man Bild 1. Es wird das Volumen des Schnittes zweier d -dimensionaler Kugeln mit Radius β bestimmt, indem es als das doppelte Volumen einer Kugelkappe K_1 nachgewiesen wird. Anschließend wird das Volumen von K_1 mittels Cavalieri über die Schnitte $K_1(t) = \{z \in \mathbb{R}^{d-1} : (z, t) \in K_1\}$ berechnet.

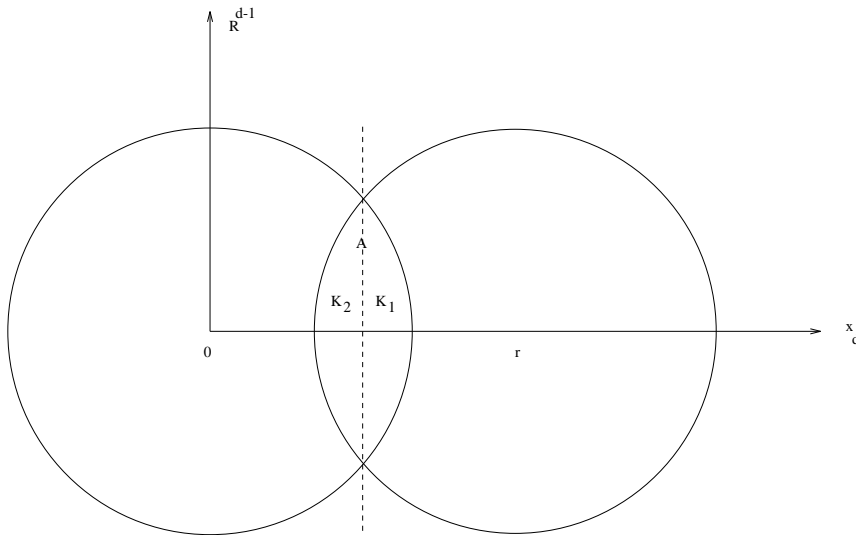


Bild 1

(1) Für $x = (0, \dots, 0, r)^T \in \mathbb{R}^d$ erhält man $X_\beta(r) = \mathfrak{X}_\beta(x) = \text{Vol}_d(A)$ mit $A := K(x, \beta) \cap K(0, \beta) = \{y \in \mathbb{R}^d : \|y\| \leq \beta, \|x - y\| \leq \beta\}$. Seien

$$K_1 := \left\{ y \in \mathbb{R}^d : \|y\| \leq \beta, y_d \geq \frac{r}{2} \right\},$$

$$K_2 := \left\{ y \in \mathbb{R}^d : \|x - y\| \leq \beta, y_d \leq \frac{r}{2} \right\}.$$

Dann gilt $A = K_1 \cup K_2$, denn ist $y \in A$, so ist $\|y\| \leq \beta$ und $\|x - y\| \leq \beta$, also $y \in K_1$ oder $y \in K_2$. Sei nun andererseits $y \in K_1$. Dann ist $\|x - y\| \leq \beta$ zu zeigen. Sei zur Abkürzung $\tilde{y} := (y_1, \dots, y_{d-1})^T \in \mathbb{R}^{d-1}$. Aus $0 \leq r \leq 2y_d$ folgt $(r - y_d)^2 = r^2 - 2y_d r + y_d^2 \leq y_d^2$ und damit $\|x - y\|^2 = \|\tilde{y}\|^2 + (r - y_d)^2 \leq \|\tilde{y}\|^2 + y_d^2 = \|y\|^2 \leq \beta^2$. Analog zeigt man, daß $y \in K_2$ auch $y \in A$ impliziert.

(2) Es gilt $m(A) = m(K_1) + m(K_2)$, wenn m das Lebesgue-Maß bezeichnet, denn $K_1 \cap K_2 = \{y \in \mathbb{R}^d : \|y\| \leq \beta, \|x - y\| \leq \beta, y_d = \frac{r}{2}\}$ ist als Teilmenge der Hyperebene $y_d = \frac{r}{2}$ eine Nullmenge.

Jetzt wird noch gezeigt, daß K_1 und K_2 das gleiche Maß besitzen, und es wird dann $m(A) = 2m(K_1)$ berechnet. Dazu benötigt man das Cavalierische Prinzip (siehe Walter [15] S. 333f):

- Ist die Menge $A \subseteq \mathbb{R}^d$ meßbar, so ist für fast alle $t \in \mathbb{R}$ der Schnitt $A(t) = \{z \in \mathbb{R}^{d-1} : (z, t) \in A\}$ in \mathbb{R}^{d-1} meßbar. Ferner ist die Funktion $t \mapsto m(A(t))$ in \mathbb{R} meßbar und

$$m(A) = \int_{\mathbb{R}} m(A(t)) dt.$$

(3) Man betrachte für $t \in \mathbb{R}$ die Schnitte

$$\begin{aligned} K_1(t) &= \left\{ z \in \mathbb{R}^{d-1} : \|z\|^2 + t^2 \leq \beta^2, t \geq \frac{r}{2} \right\}, \\ K_2(t) &= \left\{ z \in \mathbb{R}^{d-1} : \|z\|^2 + (t - r)^2 \leq \beta^2, t \leq \frac{r}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Dann erkennt man sofort mit $K_{d-1}(0, r) := \{\xi \in \mathbb{R}^{d-1} : \|\xi\| \leq r\}$

$$K_1(t) = \begin{cases} \emptyset & \text{falls } t < \frac{r}{2} \text{ oder } t > \beta \\ K_{d-1}(0, \sqrt{\beta^2 - t^2}) & \text{falls } \frac{r}{2} \leq t \leq \beta. \end{cases}$$

Für K_2 gilt andererseits $K_2(t) = \emptyset$, falls $t > \frac{r}{2}$ oder $|t - r| > \beta$, was gleichbedeutend ist mit $t > \frac{r}{2}$ oder $t < r - \beta$. Außerdem berechnet man $K_2(r - t) = \{z \in \mathbb{R}^{d-1} : \|z\|^2 + t^2 \leq \beta^2, t \geq \frac{r}{2}\} = K_1(t)$ und damit

$$m(K_2) = \int_{r-\beta}^{\frac{r}{2}} m(K_2(t)) dt = \int_{\frac{r}{2}}^{\beta} m(K_2(r - s)) ds = \int_{\frac{r}{2}}^{\beta} m(K_1(t)) dt = m(K_1).$$

(4) Letztlich erhält man nun:

$$\begin{aligned}
X_\beta(r) &= m(A) = 2m(K_1) = 2 \int_{\frac{r}{2}}^{\beta} \text{Vol}_{d-1} K_{d-1}(0, \sqrt{\beta^2 - t^2}) dt \\
&= \frac{2\pi^{\frac{d-1}{2}}}{\Gamma(\frac{d-1}{2} + 1)} \int_{\frac{r}{2}}^{\beta} (\beta^2 - t^2)^{\frac{d-1}{2}} dt \\
&= \frac{2\pi^{\frac{d}{2}} \beta^{d-1}}{\Gamma(\frac{d+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \int_{\frac{r}{2}}^{\beta} \left(1 - \left(\frac{t}{\beta}\right)^2\right)^{\frac{d-1}{2}} dt \\
&= \frac{2\pi^{\frac{d}{2}} \beta^d}{\Gamma(\frac{d+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^{\sqrt{1 - \frac{r^2}{4\beta^2}}} \frac{s^d}{\sqrt{1 - s^2}} ds.
\end{aligned}$$

Dabei wurde die Substitution

$$s = \left(1 - \left(\frac{t}{\beta}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad t = \beta\sqrt{1 - s^2}, \quad \frac{dt}{ds} = -\beta \frac{s}{\sqrt{1 - s^2}}$$

benutzt. □

Bevor das in obigem Satz auftretende Integral im allgemeinen Fall berechnet wird, seien die trivialen Fälle erwähnt.

Korollar 4.5 (Die Fälle $d=1, 2, 3$)

$$\begin{aligned}
d = 1 : \quad X_\beta^{(1)}(r) &= 2\beta - r, \\
d = 2 : \quad X_\beta^{(2)}(r) &= 2\beta^2 \arccos \frac{r}{2\beta} - \frac{1}{2} r \sqrt{4\beta^2 - r^2}, \\
d = 3 : \quad X_\beta^{(3)}(r) &= \pi \left(\frac{1}{12} r^3 - \beta^2 r + \frac{4}{3} \beta^3 \right),
\end{aligned}$$

jeweils für $0 \leq r \leq 2\beta$.

Beweis: Die behaupteten Identitäten folgen aus den nachstehenden Integralen:

$$\begin{aligned}
\int \frac{t}{\sqrt{1 - t^2}} dt &= -\sqrt{1 - t^2}, \\
\int \frac{t^2}{\sqrt{1 - t^2}} dt &= -\frac{t}{2} \sqrt{1 - t^2} + \frac{1}{2} \arcsin t, \\
\int \frac{t^3}{\sqrt{1 - t^2}} dt &= \frac{1}{3} \sqrt{(1 - t^2)^3} - \sqrt{1 - t^2}.
\end{aligned}$$

Dabei benutzt man im Fall $d = 2$ noch $\arccos r = \arcsin \sqrt{1 - r^2}$ für $0 \leq r \leq 1$. \square
 Bild 2 veranschaulicht, warum die Funktion X_β Euklidischer Hut genannt wird.

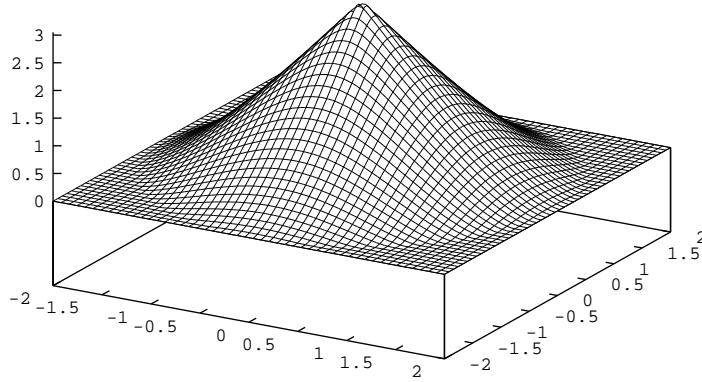


Bild 2 : $X_1^{(2)}$

Um nun das Integral aus obigem Satz allgemein zu berechnen, bedarf es einiger Vorbereitungen.

Definition 4.6 Für $d \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ mit $2(n - 1) < d$ sei:

$$\alpha_{n,k}^{(d)} := \frac{\prod_{l=1}^k (d - 2l + 1)}{\prod_{l=0}^k (d - 2l)} \quad \text{für } 0 \leq k \leq n - 1,$$

$$\alpha_{n,n}^{(d)} := \frac{\prod_{l=1}^n (d - 2l + 1)}{\prod_{l=0}^{n-1} (d - 2l)},$$

$$\alpha_{n,n+1}^{(d)} := \frac{\prod_{l=1}^{n+1} (d - 2l + 1)}{\prod_{l=0}^{n-1} (d - 2l)}.$$

Bemerkung: 1) Dem leeren Produkt soll der Wert 1 zugewiesen werden.
 2) Wegen $2(n - 1) < d$ sind die Koeffizienten wohldefiniert. Für $0 \leq k \leq n - 1$ gilt darüber hinaus auch $\alpha_{n,k}^{(d)} > 0$.

Es wird nun zuerst eine Rekursionsformel für das gesuchte Integral hergeleitet, aus der sich dann eine Stammfunktion in Abhängigkeit von der Raumdimension mod 2 folgern läßt.

Notwendig dafür sind einige Zusammenhänge zwischen den $\alpha_{n,k}^{(d)}$.

Lemma 4.7 *Für die Koeffizienten $\alpha_{n,k}^{(d)}$ gilt unter der Voraussetzung $d > 2n$*

$$(1) \quad \alpha_{n+1,k}^{(d)} = \alpha_{n,k}^{(d)} \quad \text{für } 0 \leq k \leq n-1,$$

$$(2) \quad \alpha_{n,n}^{(d)} (d-2n-1) = \alpha_{n,n+1}^{(d)},$$

$$(3) \quad \alpha_{n,n+1}^{(d)} \frac{1}{d-2n} = \alpha_{n+1,n+1}^{(d)},$$

$$(4) \quad \alpha_{n,n}^{(d)} - \alpha_{n+1,n+1}^{(d)} = \alpha_{n+1,n}^{(d)}.$$

Beweis: (1) folgt sofort aus der Definition.

$$\begin{aligned} (2) \quad \alpha_{n,n}^{(d)} (d-2n-1) &= (d-2n-1) \prod_{l=1}^n (d-2l+1) \Big/ \prod_{l=0}^{n-1} (d-2l) \\ &= \prod_{l=1}^{n+1} (d-2l+1) \Big/ \prod_{l=0}^{n-1} (d-2l) \\ &= \alpha_{n,n+1}^{(d)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \alpha_{n,n+1}^{(d)} \frac{1}{d-2n} &= \frac{1}{d-2n} \prod_{l=1}^{n+1} (d-2l+1) \Big/ \prod_{l=0}^{n-1} (d-2l) \\ &= \prod_{l=1}^{n+1} (d-2l+1) \Big/ \prod_{l=0}^n (d-2l) \\ &= \alpha_{n+1,n+1}^{(d)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) \quad \alpha_{n,n}^{(d)} - \alpha_{n+1,n+1}^{(d)} &= \prod_{l=1}^n (d-2l+1) \Big/ \prod_{l=0}^{n-1} (d-2l) \\ &\quad - \prod_{l=1}^{n+1} (d-2l+1) \Big/ \prod_{l=0}^n (d-2l) \\ &= \left\{ \prod_{l=1}^n (d-2l+1) \Big/ \prod_{l=0}^n (d-2l) \right\} [(d-2n) - (d-2n-1)] \\ &= \alpha_{n+1,n}^{(d)}. \end{aligned}$$

□

Lemma 4.8 Für $d, n \in \mathbb{N}_0$ mit $d \geq 2(n+1)$ gilt:

$$\int \frac{t^d}{\sqrt{1-t^2}} dt = -\sqrt{1-t^2} \sum_{k=0}^n \alpha_{n,k}^{(d)} t^{d-2k-1} + \alpha_{n,n+1}^{(d)} \int t^{d-2(n+1)} \sqrt{1-t^2} dt.$$

Beweis: Der Beweis wird bei festem $d \geq 2$ durch Induktion über n mittels partieller Integration geführt. Dabei werden folgende Integrale benutzt:

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt &= \arcsin t, \\ \int \arcsin t dt &= t \arcsin t + \sqrt{1-t^2}, \\ \int \sqrt{1-t^2} dt &= \frac{1}{2}(t\sqrt{1-t^2} + \arcsin t). \end{aligned}$$

Sei zur Abkürzung $\alpha_{n,k} := \alpha_{n,k}^{(d)}$.

Induktionsanfang: $n = 0$. Einmalige partielle Integration liefert

$$\int \frac{t^d}{\sqrt{1-t^2}} dt = t^d \arcsin t - d \int t^{d-1} \arcsin t dt.$$

Das Integral auf der rechten Seite berechnet sich wegen

$$\begin{aligned} \int t^{d-1} \arcsin t dt &= t^{d-1} \{t \arcsin t + \sqrt{1-t^2}\} - (d-1) \int t^{d-1} \arcsin t dt \\ &\quad - (d-1) \int t^{d-2} \sqrt{1-t^2} dt \end{aligned}$$

zu

$$d \int t^{d-1} \arcsin t dt = t^d \arcsin t + t^{d-1} \sqrt{1-t^2} - (d-1) \int t^{d-2} \sqrt{1-t^2} dt.$$

Einsetzen liefert

$$\begin{aligned} \int \frac{t^d}{\sqrt{1-t^2}} dt &= -t^{d-1} \sqrt{1-t^2} + (d-1) \int t^{d-2} \sqrt{1-t^2} dt \\ &= -\alpha_{0,0} t^{d-1} \sqrt{1-t^2} + \alpha_{0,1} \int t^{d-2} \sqrt{1-t^2} dt. \end{aligned}$$

Induktionsschritt: $n \rightarrow n+1$. Sei dazu $d \geq 2(n+2)$. Es gilt nach Induktionsvoraussetzung

$$\int \frac{t^d}{\sqrt{1-t^2}} dt = -\sqrt{1-t^2} \sum_{k=0}^n \alpha_{n,k} t^{d-2k-1} + \alpha_{n,n+1} \int t^{d-2(n+1)} \sqrt{1-t^2} dt.$$

Das rechte Integral berechnet sich analog zu oben aus

$$\begin{aligned} \int t^{d-2(n+1)} \sqrt{1-t^2} dt &= \frac{1}{2} t^{d-2(n+1)} \{t\sqrt{1-t^2} + \arcsin t\} \\ &\quad - \frac{d-2(n+1)}{2} \int t^{d-2(n+1)-1} \{t\sqrt{1-t^2} + \arcsin t\} dt \end{aligned}$$

zu

$$\begin{aligned} \int t^{d-2(n+1)} \sqrt{1-t^2} dt &= \frac{1}{d-2n} \{t^{d-2n-1} \sqrt{1-t^2} + t^{d-2(n+1)} \arcsin t\} \\ &\quad - \frac{d-2(n+1)}{d-2n} \int t^{d-2n-3} \arcsin t dt. \end{aligned}$$

Auf dieselbe Art erhält man aus

$$\begin{aligned} \int t^{d-2n-3} \arcsin t dt &= t^{d-2n-3} \{t \arcsin t + \sqrt{1-t^2}\} \\ &\quad - (d-2n-3) \int t^{d-2(n+2)} \{t \arcsin t + \sqrt{1-t^2}\} dt \end{aligned}$$

das benötigte Integral

$$\begin{aligned} \int t^{d-2n-3} \arcsin t dt &= \frac{1}{d-2(n+1)} \{t^{d-2(n+1)} \arcsin t + t^{d-2n-3} \sqrt{1-t^2}\} \\ &\quad - \frac{d-2n-3}{d-2(n+1)} \int t^{d-2(n+2)} \sqrt{1-t^2} dt. \end{aligned}$$

Mit diesem Integral gelangt man schließlich zu

$$\begin{aligned} \int t^{d-2(n+1)} \sqrt{1-t^2} dt &= \frac{1}{d-2n} \{t^{d-2n-1} \sqrt{1-t^2} - t^{d-2n-3} \sqrt{1-t^2}\} \\ &\quad + \frac{d-2n-3}{d-2n} \int t^{d-2(n+2)} \sqrt{1-t^2} dt \end{aligned}$$

und damit zu

$$\begin{aligned} \int \frac{t^d}{\sqrt{1-t^2}} dt &= -\sqrt{1-t^2} \sum_{k=0}^n \alpha_{n,k} t^{d-2k-1} + \frac{\alpha_{n,n+1}}{d-2n} \sqrt{1-t^2} \{t^{d-2n-1} - t^{d-2n-3}\} \\ &\quad + \alpha_{n,n+1} \frac{d-2n-3}{d-2n} \int t^{d-2(n+2)} \sqrt{1-t^2} dt. \end{aligned}$$

Zwischen den Koeffizienten $\alpha_{n,k}$ bestehen nun nach Lemma 4.7 die Relationen:

- (a) $\alpha_{n+1,k} = \alpha_{n,k}$ für $0 \leq k \leq n-1$,
- (b) $\alpha_{n,n+1} \frac{d-2n-3}{d-2n} = \alpha_{n+1,n+1}(d-2n-3) = \alpha_{n+1,n+2}$,
- (c) $\alpha_{n,n+1} \frac{1}{d-2n} = \alpha_{n+1,n+1}$,
- (d) $-\alpha_{n,n} + \alpha_{n,n+1} \frac{1}{d-2n} = -\alpha_{n,n} + \alpha_{n+1,n+1} = -\alpha_{n+1,n}$.

Dies bedeutet aber

$$\int \frac{t^d}{\sqrt{1-t^2}} dt = -\sqrt{1-t^2} \sum_{k=0}^{n+1} \alpha_{n+1,k} t^{d-2k-1} + \alpha_{n+1,n+2} \int t^{d-2(n+2)} \sqrt{1-t^2} dt.$$

□

Es folgt die bereits angekündigte Stammfunktion für $\int t^d / \sqrt{1-t^2} dt$, indem die ‘Raumdimension d ’ dargestellt wird als $d = 2n$ bzw. $d = 2n + 1$. Hierbei erkennt man, daß im weiteren in $\alpha_{n,k}^{(d)}$ nur noch $n = \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$ relevant ist.

Lemma 4.9 Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\begin{aligned} 1) \quad \int \frac{t^{2n}}{\sqrt{1-t^2}} dt &= -\sqrt{1-t^2} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{n,k}^{(2n)} t^{2(n-k)-1} + \alpha_{n,n}^{(2n)} \arcsin t, \\ 2) \quad \int \frac{t^{2n+1}}{\sqrt{1-t^2}} dt &= -\sqrt{1-t^2} \sum_{k=0}^n \alpha_{n,k}^{(2n+1)} t^{2(n-k)}. \end{aligned}$$

Beweis: Die Richtigkeit der Formeln läßt sich für $n=0$ unmittelbar aus

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt &= \arcsin t, \\ \int \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt &= -\sqrt{1-t^2} \end{aligned}$$

schließen, wenn man im ersten Fall berücksichtigt, daß die leere Summe als Null definiert ist und in beiden Fällen die Definition der α 's beachtet.

Für $n \geq 1$ benutzt man:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-t^2} dt &= \frac{1}{2}(t\sqrt{1-t^2} + \arcsin t), \\ \int t\sqrt{1-t^2} dt &= -\frac{1}{3}\sqrt{(1-t^2)^3}. \end{aligned}$$

Für das erste Integral gilt $2n \geq 2(n-1+1) = 2n$. Also erhält man aus Lemma 4.8

$$\begin{aligned}
\int \frac{t^{2n}}{\sqrt{1-t^2}} dt &= -\sqrt{1-t^2} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{n-1,k}^{(2n)} t^{2(n-k)-1} + \alpha_{n-1,n}^{(2n)} \int \sqrt{1-t^2} dt \\
&= -\sqrt{1-t^2} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{n-1,k}^{(2n)} t^{2(n-k)-1} + \frac{\alpha_{n-1,n}^{(2n)}}{2} \{t\sqrt{1-t^2} + \arcsin t\} \\
&= -\sqrt{1-t^2} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{n,k}^{(2n)} t^{2(n-k)-1} + \alpha_{n,n}^{(2n)} \arcsin t.
\end{aligned}$$

Dabei resultiert die letzte Identität aus den Formeln des Lemma 4.7:

- (a) $\alpha_{n,k}^{(2n)} = \alpha_{n-1,k}^{(2n)}$ für $0 \leq k \leq n-2$,
- (b) $\frac{1}{2}\alpha_{n-1,n}^{(2n)} = \alpha_{n,n}^{(2n)}$,
- (c) $\alpha_{n-1,n-1}^{(2n)} - \alpha_{n,n}^{(2n)} = \alpha_{n,n-1}^{(2n)}$.

Für das zweite Integral gilt wegen $2n+1 \geq 2(n-1+1) = 2n$ wieder nach Lemma 4.8:

$$\begin{aligned}
\int \frac{t^{2n+1}}{\sqrt{1-t^2}} dt &= -\sqrt{1-t^2} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{n-1,k}^{(2n+1)} t^{2(n-k)} + \alpha_{n-1,n}^{(2n+1)} \int t\sqrt{1+t^2} dt \\
&= -\sqrt{1-t^2} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{n-1,k}^{(2n+1)} t^{2(n-k)} - \frac{1}{3} \alpha_{n-1,n}^{(2n+1)} \sqrt{(1-t^2)^3} \\
&= -\sqrt{1-t^2} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{n-1,k}^{(2n+1)} t^{2(n-k)} + \frac{1}{3} \alpha_{n-1,n}^{(2n+1)} - \frac{1}{3} \alpha_{n-1,n}^{(2n+1)} t^2 \right\} \\
&= -\sqrt{1-t^2} \sum_{k=0}^n \alpha_{n,k}^{(2n+1)} t^{2(n-k)},
\end{aligned}$$

wobei die letzte Identität wieder aus den Beziehungen der α 's folgt, die in diesem Fall lauten:

- (a) $\alpha_{n,k}^{(2n+1)} = \alpha_{n-1,k}^{(2n+1)}$ für $0 \leq k \leq n-2$,
- (b) $\frac{1}{3}\alpha_{n-1,n}^{(2n+1)} = \alpha_{n,n}^{(2n+1)}$,
- (c) $\alpha_{n-1,n-1}^{(2n+1)} - \alpha_{n,n}^{(2n+1)} = \alpha_{n,n-1}^{(2n+1)}$.

□

Nach diesen Vorbereitungen kann man nun eine explizite Form für X_β angeben, die natürlich nach vorherigem Lemma davon abhängt, ob die Raumdimension d gerade oder ungerade ist.

Satz 4.10 Für $0 \leq r \leq 2\beta$ gilt:

$$X_\beta^{(2n)}(r) = \frac{2\beta^{2n}\pi^n}{\Gamma(n + \frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \left\{ \alpha_{n,n}^{(2n)} \arccos \frac{r}{2\beta} - \frac{r}{2\beta} \sum_{l=1}^n \alpha_{n,n-l}^{(2n)} \left(1 - \frac{r^2}{4\beta^2}\right)^{l-\frac{1}{2}} \right\},$$

$$X_\beta^{(2n+1)}(r) = \frac{2\beta^{2n+1}\pi^n}{n!} \left\{ \alpha_{n,n}^{(2n+1)} - \frac{r}{2\beta} \sum_{l=0}^n \alpha_{n,n-l}^{(2n+1)} \left(1 - \frac{r^2}{4\beta^2}\right)^l \right\}.$$

Beweis: Der Beweis benutzt Satz 4.4 und Lemma 4.9 sowie die für $0 \leq r \leq 1$ gültige Identität $\arccos r = \arcsin \sqrt{1-r^2}$.

$$\begin{aligned} X_\beta^{(2n)}(r) &= \frac{2\beta^d \pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^{\frac{\sqrt{4\beta^2-r^2}}{2\beta}} \frac{t^d}{\sqrt{1-t^2}} dt \\ &= -\frac{2\beta^{2n}\pi^n}{\Gamma(n + \frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \left[\sqrt{1-t^2} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{n,k}^{(2n)} t^{2(n-k)-1} - \alpha_{n,n}^{(2n)} \arcsin t \right]_0^{\frac{\sqrt{4\beta^2-r^2}}{2\beta}} \\ &= -\frac{2\beta^{2n}\pi^n}{\Gamma(n + \frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \left[\sqrt{1-t^2} \sum_{l=1}^n \alpha_{n,n-l}^{(2n)} t^{2l-1} - \alpha_{n,n}^{(2n)} \arcsin t \right]_0^{\frac{\sqrt{4\beta^2-r^2}}{2\beta}} \\ &= -\frac{2\beta^{2n}\pi^n}{\Gamma(n + \frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \left\{ \frac{r}{2\beta} \sum_{l=1}^n \alpha_{n,n-l}^{(2n)} \left(1 - \frac{r^2}{4\beta^2}\right)^{l-\frac{1}{2}} - \alpha_{n,n}^{(2n)} \arccos \frac{r}{2\beta} \right\}. \end{aligned}$$

Für den zweiten Teil verwendet man zusätzlich $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ und $\Gamma(n) = (n-1)!$.

$$\begin{aligned} X_\beta^{(2n+1)}(r) &= -\frac{2\beta^{2n+1}\pi^n}{\Gamma(n+1)} \sqrt{1-t^2} \sum_{k=0}^n \alpha_{n,k}^{(2n+1)} t^{2(n-k)} \Big|_0^{\frac{\sqrt{4\beta^2-r^2}}{2\beta}} \\ &= -\frac{2\beta^{2n+1}\pi^n}{n!} \sqrt{1-t^2} \sum_{l=0}^n \alpha_{n,n-l}^{(2n+1)} t^{2l} \Big|_0^{\frac{\sqrt{4\beta^2-r^2}}{2\beta}} \\ &= -\frac{2\beta^{2n+1}\pi^n}{n!} \left\{ \frac{r}{2\beta} \sum_{l=0}^n \alpha_{n,n-l}^{(2n+1)} \left(1 - \frac{r^2}{4\beta^2}\right)^l - \alpha_{n,n}^{(2n+1)} \right\}. \end{aligned}$$

□

Bemerkung: Der Koeffizient vor der Klammer im Fall gerader Raumdimension berechnet sich auch zu

$$\frac{(2\beta)^{2n} \pi^{n-1} (n-1)!}{(2n-1)!}.$$

Beweis: Nach dem Legendreschen Verdopplungssatz gilt:

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(2n)}{2^{2n-1}\Gamma(n)}.$$

Damit hat man

$$\frac{2\beta^{2n}\pi^n}{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{2\beta^{2n}\pi^n 2^{2n-1}(n-1)!}{\pi(2n-1)!} = \frac{(2\beta)^{2n}\pi^{n-1}(n-1)!}{(2n-1)!}.$$

□

Lemma 4.11 Die letztlich benötigten Koeffizienten $\alpha_{n,k}^{(d)}$ haben die explizite Form

$$\begin{aligned} \alpha_{n,k}^{(2n)} &= \frac{(2n-1)!(n-k)!(n-k-1)!}{2^{2k}n!(n-1)!(2n-2k)!} \text{ mit } 0 \leq k \leq n-1, \\ \alpha_{n,n}^{(2n)} &= \frac{(2n-1)!}{2^{2n-1}n!(n-1)!}, \\ \alpha_{n,k}^{(2n+1)} &= \frac{2^{2k}(n!)^2(2n-2k)!}{(2n+1)!((n-k)!)^2} \text{ mit } 0 \leq k \leq n-1, \\ \alpha_{n,n}^{(2n+1)} &= \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}. \end{aligned}$$

Beweis: Man verifiziert zuerst für die in der Definition auftretenden Produkte folgende explizite Formen mit $0 \leq k \leq n$.

$$\begin{aligned} \prod_{l=0}^k (2n-2l) &= 2^{k+1} \prod_{l=0}^k (n-l) = 2^{k+1} \frac{n!}{(n-k-1)!}, \\ \prod_{l=1}^k (2n-2l+1) &= \frac{(2n-1)!}{(2n-2k)!} \bigg/ \prod_{l=1}^{k-1} (2n-2l) \\ &= \frac{(2n-1)!(n-k)!}{(2n-2k)!2^{k-1}(n-1)!}. \end{aligned}$$

Hiermit erhält man sofort die angegebene Darstellung für $\alpha_{n,k}^{(2n)}$ mit $0 \leq k \leq n-1$. Auch für die übrigen Koeffizienten liefert dies die Behauptung:

$$\begin{aligned} \alpha_{n,n}^{(2n)} &= \prod_{l=1}^n (2n-2l+1) \bigg/ \prod_{l=0}^{n-1} (2n-2l) \\ &= \frac{(2n-1)!}{2^{2n-1}n!(n-1)!}, \\ \alpha_{n,k}^{(2n+1)} &= \prod_{l=0}^{k-1} (2n-2l) \bigg/ \prod_{l=0}^k (2n-2l+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2^k n!}{(n-k)!} \frac{n! (2n-2k)! 2^k}{(2n+1)! (n-k)!} \text{ mit } 0 \leq k \leq n-1, \\
\alpha_{n,n}^{(2n+1)} &= \prod_{l=0}^{n-1} (2n-2l) \Big/ \prod_{l=0}^{n-1} (2n-2l+1) \\
&= 2^n n! \frac{n! 2^n}{(2n+1)!}.
\end{aligned}$$

□

4.3 Glattheit von X_β

Da \mathfrak{X}_β durch Faltung zweier unstetiger Funktionen entsteht, kann man keine Differenzierbarkeit von X_β erwarten. Ein unterschiedliches Verhalten bezüglich der Glätte von $X_\beta(r)$ findet sich in $r = 0$, $r = 2\beta$ und dem übrigen Definitionsbereich.

Lemma 4.12 (a) Es gilt $X_\beta(r) \in C^\infty[0, 2\beta]$ und für $r \in [0, \infty]$

$$X'_\beta(r) = -\frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{2^{d-1} \Gamma(\frac{d+1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})} (4\beta^2 - r^2)^{\frac{d-1}{2}}.$$

(b) $X_\beta(r) \in C^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor}[0, \infty)$. Dabei besitzt die $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1$ -te Ableitung an der Stelle $r = 2\beta$ im Fall gerader Raumdimension einen unendlichen Sprung, im Fall ungerader Raumdimension einen endlichen Sprung.

Beweis: (a) folgt unter Benutzung der Kettenregel unmittelbar aus Satz 4.4.

(b) Kritischer Punkt ist die Stelle $r = 2\beta$. Man zeigt zunächst durch vollständige Induktion für $1 \leq k \leq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1$ und $0 \leq r < 2\beta$

$$\frac{d^k}{dr^k} X_\beta(r) = p_k(r) (4\beta^2 - r^2)^{\frac{d-2k+1}{2}},$$

wobei p_k ein Polynom mit $p_k(2\beta) \neq 0$ ist. Für $k = 1$ ist dies gerade (a). Für $k \rightarrow k+1$ gilt, sofern $k+1 \leq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor + 1$,

$$\begin{aligned}
\frac{d^{k+1}}{dr^{k+1}} X_\beta(r) &= \frac{d}{dr} \left(p_k(r) (4\beta^2 - r^2)^{\frac{d-2k+1}{2}} \right) \\
&= p'_k(r) (4\beta^2 - r^2)^{\frac{d-2k+1}{2}} - p_k(r) r (d-2k+1) (4\beta^2 - r^2)^{\frac{d-2(k+1)+1}{2}} \\
&= (4\beta^2 - r^2)^{\frac{d-2(k+1)+1}{2}} \left[p'_k(r) (4\beta^2 - r^2) - p_k(r) r (d-2k+1) \right].
\end{aligned}$$

Definiert man nun den Ausdruck in eckigen Klammern als $p_{k+1}(r)$, so sieht man $p_{k+1}(2\beta) \neq 0$.

Da die rechtsseitigen Ableitungen an der Stelle $r = 2\beta$ stets den Wert Null besitzen, ist der Wert der linksseitigen Ableitungen zu überprüfen, die hier mit $\frac{d^k}{dr^k} X_\beta^{(d)}(r)$ bezeichnet werden. Die Vorbereitungen liefern dann für ungerade Raumdimensionen $\frac{d^n}{dr^n} X_\beta^{(2n+1)}(2\beta) = p_n(r)(4\beta^2 - r^2)|_{2\beta} = 0$ und $\frac{d^{n+1}}{dr^{n+1}} X_\beta^{(2n+1)}(2\beta) = p_{n+1}(r)|_{2\beta} \neq 0$. Für gerade Raumdimensionen erhält man $\frac{d^n}{dr^n} X_\beta^{(2n)}(2\beta) = p_n(r)(4\beta^2 - r^2)^{\frac{1}{2}}|_{2\beta} = 0$ und $\frac{d^{n+1}}{dr^{n+1}} X_\beta^{(2n)}(2\beta) = p_{n+1}(r)(4\beta^2 - r^2)^{-\frac{1}{2}}|_{2\beta} = \infty$. \square

Satz 4.13 Die Funktion $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $r \mapsto X_\beta(|r|)$ ist lipschitzstetig mit der Lipschitzkonstanten

$$L = \frac{\pi^{\frac{d}{2}} \beta^{d-1}}{\Gamma(\frac{d+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}.$$

Beweis: 1) Man betrachte zuerst die Funktion eingeschränkt auf $[0, 2\beta]$. Dort ist sie differenzierbar und mit obigem Lemma gilt

$$|X'_\beta(r)| \leq \frac{\pi^{\frac{d}{2}} \beta^{d-1}}{\Gamma(\frac{d+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} =: L.$$

Der Mittelwertsatz liefert dann $|X_\beta(r) - X_\beta(s)| \leq L|r - s|$ für alle $r, s \in [0, 2\beta]$.

2) Die Funktion ist lipschitzstetig auf $[0, \infty]$ mit der Lipschitzkonstanten L . Denn ist $0 < 2\beta \leq r \leq s$, so ist $X_\beta(r) = X_\beta(s) = 0$. Ist dagegen $0 \leq r < 2\beta < s$, so gilt nach 1)

$$\begin{aligned} |X_\beta(r) - X_\beta(s)| &= |X_\beta(r) - X_\beta(2\beta)| \\ &\leq L|r - 2\beta| = L(2\beta - r) \\ &\leq L(s - r) = L|s - r|. \end{aligned}$$

3) Die Funktion ist schließlich auf ganz \mathbb{R} lipschitzstetig, da

$$|X_\beta(|r|) - X_\beta(|s|)| \leq L||r| - |s|| \leq L|r - s|.$$

\square

4.4 Schranken für die Norm der Inversen der Interpolationsmatrix

Sei $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subseteq \mathbb{R}^d$ mit paarweise verschiedenen x_j . Dann ist die Interpolationsmatrix $A = (\mathfrak{X}_\beta(x_j - x_k))_{1 \leq j, k \leq N}$ regulär. Um eine obere Schranke für $\|A^{-1}\|$ zu berechnen, liegt es nahe, zuerst eine untere Schranke θ für die zugehörige quadratische Form zu finden. Denn aus

$$\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \alpha_j \alpha_k \mathfrak{X}_\beta(x_j - x_k) \geq \theta \sum_{j=1}^N \alpha_j^2 \text{ für alle } \alpha \in \mathbb{R}^N$$

mit $\theta > 0$ folgt $\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{\theta}$. Benutzt man nun die Vorgehensweise aus Kapitel 3 zum Auffinden von θ und schreibt für dortiges β hier B , setzt also

$$B = C_d q_2^{-1} \text{ mit } C_d = 4[3^{d-1} \Gamma^2(\frac{d}{2} + 1) \pi]^{\frac{1}{d+1}},$$

so besteht der entscheidende Schritt in der Bestimmung von

$$(\hat{\mathfrak{X}}_\beta)_B := \min_{\|\omega\| \leq 2B} \hat{\mathfrak{X}}_\beta(\omega) > 0.$$

Nun besitzt $\hat{\mathfrak{X}}_\beta(\omega) = (2\pi\beta)^d \|\omega\|^{-d} J_{\frac{d}{2}}^2(\|\omega\|\beta)$ gerade die Nullstellen von $\omega \mapsto J_{\frac{d}{2}}(\|\omega\|\beta)$, und diese Funktion besitzt nach Satz 2.18 unendlich viele Nullstellen unterschiedlichen Betrages. Liegt also eine dieser Nullstellen in $\|\omega\| \leq 2B$, dann ist $(\hat{\mathfrak{X}}_\beta)_B = 0$, und Satz 3.8 liefert kein verwertbares Ergebnis. Dies bedeutet also, daß man für eine Abschätzung mit Satz 3.8 β derart einschränken muß, daß $\omega \mapsto J_{\frac{d}{2}}(\|\omega\|\beta)$ in $\|\omega\| \leq 2B$ positiv ist. Verwendet man zum Beispiel die Abschätzung (1)(i) aus Satz 2.19, so gilt für die kleinste Nullstelle r_0 von $J_{\frac{d}{2}}(r\beta)$

$$r_0 > \frac{d}{2\beta}.$$

Also ist $(\hat{\mathfrak{X}}_\beta)_B > 0$, solange $2B < \frac{d}{2\beta}$ bzw. $\beta < \frac{d}{4C_d} q_2$. Da aber $\frac{d}{4C_d} < 1$ (vgl. Bemerkung 3.9 und Tabelle 1), bedeutet dies $\beta < q_2$. In diesem Fall ist eine Normabschätzung allerdings unnötig, denn A reduziert sich zu einer Diagonalmatrix und $\|A^{-1}\|$ läßt sich direkt angeben. Daher wird an dieser Stelle nicht weiter auf obere Schranken für $\|A^{-1}\|$ eingegangen.

Es soll nun eine untere Schranke für $\|A^{-1}\|$ angegeben werden. Die Idee besteht darin, die Funktion $X_\beta(\sqrt{r})$ durch ein Polynom $p \in \mathbb{P}_l^1$ auf $[0, K^2]$ mit $K = \max_{1 \leq j, k \leq N} \|x_j - x_k\|$ zu approximieren. Setzt man $A_p = (p(\|x_j - x_k\|^2))_{1 \leq j, k \leq N}$, so gilt

$$\|A - A_p\| \|A^{-1}\| \geq 1,$$

solange nur A_p singularär ist (vgl. Schaback [13]). Um eine untere Schranke für $\|A^{-1}\|$ zu bestimmen, sucht man also ein l und ein $p \in \mathbb{P}_l^1$, so daß A_p singularär und $\|A - A_p\|$ möglichst klein ist. Denn dann gilt

$$\|A^{-1}\| \geq \frac{1}{\|A - A_p\|}.$$

Die Bestimmung von l und p wurde ausführlich in Schaback [13] untersucht. Die dort erzielten Ergebnisse angewandt auf die Funktion X_β lauten:

Satz 4.14 *Seien $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subseteq \mathbb{R}^d$ mit $N \geq 2$ paarweise verschiedenen x_j und $A = (\mathfrak{X}_\beta(x_j - x_k))_{1 \leq j, k \leq N}$. Seien ferner*

$$K := \max_{1 \leq j, k \leq N} \|x_j - x_k\|,$$

$$\mu^*(X, l, d) := \max_{p \in \mathbb{P}_l^1} \dim \text{span}\{p(\|x - x_j\|^2) : x_j \in X\},$$

$$l^*(X, d) := \max\{l \geq 0 : \mu^*(X, l, d) < N\},$$

$$E(l, K) := \min_{p \in \mathbb{P}_l^1} \|X_\beta(|r|) - p(r^2)\|_{\infty[-K, K]}.$$

Dann gilt

$$\|A^{-1}\| \geq \frac{1}{NE(l^*(X, d), K)}.$$

□

Man kann natürlich den Approximationsfehler $E(l^*(X, d), K)$ mit den üblichen Methoden weiter abschätzen. Dies liefert dann:

Korollar 4.15 Mit $M := \frac{\pi^{\frac{d}{2}} \beta^{d-1}}{\Gamma(\frac{d+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}$ und den Bezeichnungen aus obigem Satz folgt

$$\|A^{-1}\| \geq \frac{l^*(X, d) - 1}{6MKN}.$$

Beweis: Man benutze den folgenden Satz vom Jackson Typ (vgl. Natanson [11] S. 112f).

- Existieren zu $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ Konstanten $M > 0$ und $\alpha \in (0, 1]$ mit $|f(x) - f(y)| \leq M|x - y|^\alpha$ für alle $x, y \in [a, b]$, so gilt für $l \in \mathbb{N}$

$$\min_{p \in \mathbb{P}_{l+1}^1} \|p - f\|_{\infty[a, b]} \leq \frac{12M}{l^\alpha} \left(\frac{b-a}{2}\right)^\alpha.$$

Hiermit berechnet man mit $l^* = l^*(X, d)$

$$\begin{aligned} E(l^*, K) &= \min_{p \in \mathbb{P}_{l^*}^1} \|X_\beta(|r|) - p(r^2)\|_{\infty[-K, K]} \\ &= \min_{p \in \mathbb{P}_{2l^*-1}^1} \|X_\beta(|r|) - p(r)\|_{\infty[-K, K]} \\ &\leq \frac{M}{l^* - 1} 6K, \end{aligned}$$

da $X_\beta(|r|)$ nach Satz 4.13 lipschitzstetig mit der Lipschitzkonstanten M ist. □

Weiterhin wurde in Schaback [13] das Verhalten der Schranke für den Fall immer größer werdender Datensätze (also $N \rightarrow \infty$) untersucht. Dazu wurde $l^{**}(N, d) := \max\{l \geq 0 : \dim \mathbb{P}_l^d + \dim \mathbb{P}_{l-1}^d < N\}$ gesetzt und gezeigt, daß $0 \leq l^{**}(N, d) \leq l^*(X, d)$ gilt. $l^{**}(N, d)$ hat nun das asymptotische Verhalten

$$l^{**}(N, d) = \left(\frac{d!}{2} N\right)^{1/d} + \mathcal{O}(1)$$

für $N = |X| \rightarrow \infty$. Benutzt man dies, so erhält man:

Korollar 4.16 Für die Inverse der Interpolationsmatrix gilt die Abschätzung

$$\|A^{-1}\| \geq \mathcal{O}(N^{\frac{1}{d}-1})$$

für $N \rightarrow \infty$. □

4.5 Güte der Approximation

In diesem Abschnitt soll untersucht werden, wie sich die Interpolante an Stellen verhält, in denen sie nicht interpoliert. Sei $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subseteq \mathbb{R}^d$ mit paarweise verschiedenen x_j , und sei $A = (\mathfrak{X}_\beta(x_j - x_k))$ die zugehörige Interpolationsmatrix. Dann bilden die Lösungen $u_j^*(x)$ von

$$A \begin{pmatrix} u_1^*(x) \\ \vdots \\ u_N^*(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathfrak{X}_\beta(x - x_1) \\ \vdots \\ \mathfrak{X}_\beta(x - x_N) \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

eine Lagrangebasis, d.h., es gilt $u_j^*(x_k) = \delta_{jk}$. Zu einer Funktion $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ läßt sich die zugehörige Interpolante s_f aus $\text{span}\{\mathfrak{X}_\beta(x - x_j) : x_j \in X\}$ also darstellen als

$$s_f(x) = \sum_{j=1}^N f(x_j) u_j^*(x).$$

Die weitere Untersuchung ist ein Spezialfall der Untersuchung, die in Wu/Schaback [17] durchgeführt wurde. Daher wird zuerst der Raum der Funktionen und dann auch die Menge der zu betrachtenden x eingeschränkt.

Definition 4.17 Sei $\mathcal{F}_{\mathfrak{X}_\beta}$ die Menge aller Funktionen $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, deren Fouriertransformierte in L_1 liegt und für die gilt

$$|f|_{\mathfrak{X}_\beta}^2 := (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(\omega)|^2 (\hat{\mathfrak{X}}_\beta(\omega))^{-1} d\omega < \infty. \quad (4.2)$$

Bemerkung: Man kann den Raum $\mathcal{F}_{\mathfrak{X}_\beta}$ erweitern, indem man von f die Existenz einer verallgemeinerten Fouriertransformierten \hat{f} verlangt, die (4.2) erfüllt (Siehe Wu/Schaback [17]).

Bemerkung: Eine Funktion f , die in $\mathcal{F}_{\mathfrak{X}_\beta}$ liegt, muß notwendigerweise eine Fouriertransformierte besitzen, die zumindest in den Nullstellen von \mathfrak{X}_β ebenfalls verschwindet. Zum Beispiel liegen sämtliche Funktionen, die gewichtete Summen von Translationen von \mathfrak{X}_β sind, in $\mathcal{F}_{\mathfrak{X}_\beta}$. Eine Funktion

$$f(x) = \sum_{j=1}^k \alpha_j \mathfrak{X}_\beta(x - y_j)$$

mit $\alpha_j \in \mathbb{R}, y_j \in \mathbb{R}^d$ besitzt nämlich die Fouriertransformierte

$$\hat{f}(\omega) = \sum_{j=1}^k \alpha_j e^{iy_j^T \omega} \hat{\mathfrak{X}}_\beta(\omega).$$

Der Integrand in (4.2) lautet damit

$$\frac{|\hat{f}(\omega)|^2}{\hat{\mathfrak{X}}_\beta(\omega)} = \left[\sum_{j=1}^k \alpha_j e^{iy_j^T \omega} \right]^2 \hat{\mathfrak{X}}_\beta(\omega),$$

woraus unter Benutzung von Bemerkung 4.2 folgt, daß er in $L_1(\mathbb{R}^d)$ liegt.

Für $f \in \mathcal{F}_{\mathfrak{X}_\beta}$ und festes $x \in \mathbb{R}^d$ gilt unter Benutzung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und der Umkehrformel

$$\begin{aligned} |s_f(x) - f(x)|^2 &= \left| (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\sum_{j=1}^N u_j^*(x) e^{ix_j^T \omega} - e^{ix^T \omega} \right) \frac{\hat{f}(\omega)}{\sqrt{\hat{\mathfrak{X}}_\beta(\omega)}} \sqrt{\hat{\mathfrak{X}}_\beta(\omega)} d\omega \right|^2 \\ &\leq (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{f}(\omega)|^2}{\hat{\mathfrak{X}}_\beta(\omega)} d\omega (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \left| \sum_{j=1}^N u_j^*(x) e^{ix_j^T \omega} - e^{ix^T \omega} \right|^2 \hat{\mathfrak{X}}_\beta(\omega) d\omega \\ &= |f|_{\mathfrak{X}_\beta}^2 P_{X,u^*,x}^2. \end{aligned}$$

Hierbei tritt die *Power- oder Kriging-Funktion* $P_{X,u^*,x}$ auf, für die auch

$$\begin{aligned} P_{X,u^*,x}^2 &= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \left| \sum_{j=1}^N u_j^*(x) e^{ix_j^T \omega} - e^{ix^T \omega} \right|^2 \hat{\mathfrak{X}}_\beta(\omega) d\omega \\ &= (2\pi)^{-d} \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N u_j^*(x) u_k^*(x) \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(x_j - x_k)^T \omega} \hat{\mathfrak{X}}_\beta(\omega) d\omega \\ &\quad - 2 \sum_{j=1}^N u_j^*(x) (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(x_j - x)^T \omega} \hat{\mathfrak{X}}_\beta(\omega) d\omega + (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\mathfrak{X}}_\beta(\omega) d\omega \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N u_j^*(x) u_k^*(x) \mathfrak{X}_\beta(x_j - x_k) - 2 \sum_{j=1}^N u_j^*(x) \mathfrak{X}_\beta(x_j - x) + \mathfrak{X}_\beta(0) \end{aligned}$$

gilt.

Man hat also die Abschätzung des Fehlerfunktional durch ein Produkt, dessen einer Faktor nur von den Funktionen f und \mathfrak{X}_β und dessen anderer Faktor nicht mehr von f abhängt.

Bis zu diesem Zeitpunkt ist es nicht nötig, daß die u_j^* eine Lagrangebasis bilden. Daß es trotzdem sinnvoll ist, gerade diese u_j^* zu betrachten, besagt der nachstehende Satz.

Satz 4.18 Der aus (4.1) resultierende Vektor $u^*(x) = (u_1^*(x), \dots, u_N^*(x))^T$ stimmt mit der Lösung des Minimierungsproblems

$$\min\{P_{X,u,x}^2 : u \in \mathbb{R}^N\}$$

überein.

Beweis: Sei für festes $x \in \mathbb{R}^d$ $R(x) := (\mathfrak{X}_\beta(x_1 - x), \dots, \mathfrak{X}_\beta(x_N - x))^T \in \mathbb{R}^N$. Dann läßt sich das Quadrat der Powerfunktion auch schreiben als

$$P_{X,u,x}^2 = \mathfrak{X}_\beta(0) + u^T A u - 2u^T R(x).$$

Da A symmetrisch und positiv definit ist, besitzt das Minimierungsproblem genau eine Lösung \tilde{u} , die durch $\nabla_u P_{X,u,x}^2 = 2A u - 2R(x) = 0$ charakterisiert ist. \square

Es wird nun eine weitergehende Abschätzung der Powerfunktion vorgenommen. Grundlage ist dabei folgendes Lemma.

Lemma 4.19 Zu $\rho > 0$ und $k \in \mathbb{N}$ existieren Konstanten $h_0, c_1, c_2 > 0$, so daß für alle Datensätze $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subseteq \mathbb{R}^d$ mit paarweise verschiedenen x_j und alle Punkte $x \in \mathbb{R}^d$, die

$$h_\rho(x) := \max_{\|y-x\| \leq \rho} \min_{1 \leq j \leq N} \|y - x_j\| \leq h_0$$

erfüllen, ein Vektor $\tilde{u}(x) := (\tilde{u}_1(x), \dots, \tilde{u}_N(x))^T$ existiert mit

- (1) $\sum_{j=1}^N \tilde{u}_j(x) p(x_j) = p(x)$ für alle $p \in \mathbb{P}_k^d$,
- (2) $\|x_j - x\| \leq c_1 h_\rho(x)$ für alle $1 \leq j \leq N$ mit $\tilde{u}_j(x) \neq 0$,
- (3) $\sum_{j=1}^N |\tilde{u}_j(x)| \leq c_2$.

Beweis: Der Beweis findet sich in etwas allgemeinerer Form in Wu/Schaback [17]. Die dort verwendeten Konstanten lauten:

$$\begin{aligned} c_1 &:= 1 + M(k-1)\sqrt{d}, \\ c_2 &:= 2(k-1)! \binom{d+k-1}{d}^2 \|R_k^{-1}\|_\infty, \\ h_0 &:= \frac{\rho}{M(k-1)}, \\ M &:= \max(1, 2(k-1)(2k-1)^k \binom{d+k-1}{d} d^{\frac{k}{2}} \|R_k^{-1}\|_\infty), \\ R_k &:= (\alpha^\mu)_{0 \leq |\mu|, |\alpha| \leq k-1}. \end{aligned}$$

\square

Mit diesem Lemma beweist man nun:

Satz 4.20 *Unter den Voraussetzungen des Lemmas gilt*

$$P_{X, \tilde{u}, x}^2 \leq \frac{\beta^{d-1} 2^{d+2} \pi^{\frac{d}{2}-1} d}{\Gamma(\frac{d}{2} + 1)} \left[\frac{c_2^2 c_1^{2k} e^{2c_1}}{2k-1} + (c_2 + 1)^2 \right] h_\rho(x).$$

Beweis: Die Powerfunktion wird in zwei Summanden aufgespalten, die dann separat abgeschätzt werden.

$$\begin{aligned} P_{X, \tilde{u}, x}^2 &= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \left| \sum_{j=1}^N \tilde{u}_j(x) e^{ix_j^T \omega} - e^{ix^T \omega} \right|^2 \hat{\mathfrak{X}}_\beta(\omega) d\omega \\ &= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \left| \sum_{j=1}^N \tilde{u}_j(x) e^{i(x_j - x)^T \omega} - 1 \right|^2 \hat{\mathfrak{X}}_\beta(\omega) d\omega \\ &= (2\pi)^{-d} \int_{\|\omega\| \leq \frac{1}{h_\rho(x)}} \left| \sum_{j=1}^N \tilde{u}_j(x) e^{i(x_j - x)^T \omega} - 1 \right|^2 \hat{\mathfrak{X}}_\beta(\omega) d\omega \\ &\quad + (2\pi)^{-d} \int_{\|\omega\| \geq \frac{1}{h_\rho(x)}} \left| \sum_{j=1}^N \tilde{u}_j(x) e^{i(x_j - x)^T \omega} - 1 \right|^2 \hat{\mathfrak{X}}_\beta(\omega) d\omega. \end{aligned}$$

Der zweite Summand läßt sich nun sofort mit (3) aus obigem Lemma und Lemma 2.14 nach oben abschätzen.

$$\begin{aligned} &(2\pi)^{-d} \int_{\|\omega\| \geq \frac{1}{h_\rho(x)}} \left| \sum_{j=1}^N \tilde{u}_j(x) e^{i(x_j - x)^T \omega} - 1 \right|^2 \hat{\mathfrak{X}}_\beta(\omega) d\omega \\ &\leq (1 + c_2)^2 (2\pi)^{-d} \int_{\|\omega\| \geq \frac{1}{h_\rho(x)}} \hat{\mathfrak{X}}_\beta(\omega) d\omega \\ &= (1 + c_2)^2 \beta^d \int_{\|\omega\| \geq \frac{1}{h_\rho(x)}} \|\omega\|^{-d} J_{\frac{d}{2}}^2(\beta \|\omega\|) d\omega \\ &\leq (1 + c_2)^2 \frac{\beta^{d-1} 2^{d+2}}{\pi} \int_{\|\omega\| \geq \frac{1}{h_\rho(x)}} \|\omega\|^{-d-1} d\omega \\ &= (1 + c_2)^2 \frac{\beta^{d-1} 2^{d+2}}{\pi} \frac{d \pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2} + 1)} h_\rho(x). \end{aligned}$$

Um den ersten Summanden abzuschätzen, betrachte man zuerst die Taylorentwicklung von e^t :

$$e^t = \underbrace{\sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{l!} t^l}_{p_k(t)} + \underbrace{\frac{e^{\xi(t)}}{k!} t^k}_{r_k(t)} \text{ mit } 0 \leq \xi(t) \leq t.$$

Hieraus erhält man unter Verwendung des obigen Lemmas und $h_\rho(x) \|\omega\| \leq 1$

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=1}^N \tilde{u}_j(x) e^{i(x-x_j)^T \omega} - 1 \right| \\ &= \left| \sum_{j=1}^N \tilde{u}_j(x) \left\{ p_k(i(x-x_j)^T \omega) + (i(x-x_j)^T \omega)^k r_k(i(x-x_j)^T \omega) \right\} - 1 \right| \\ &= \left| \sum_{j=1}^N \tilde{u}_j(x) (i(x-x_j)^T \omega)^k r_k(i(x-x_j)^T \omega) \right| \\ &\leq \sum_{j=1}^N |\tilde{u}_j(x)| |(x-x_j)^T \omega|^k e^{|(x-x_j)^T \omega|} \\ &\leq c_2 c_1^k h_\rho^k(x) \|\omega\|^k e^{c_1 h_\rho(x) \|\omega\|} \\ &\leq c_2 c_1^k h_\rho^k(x) \|\omega\|^k e^{c_1}. \end{aligned}$$

Also läßt sich der erste Summand folgendermaßen begrenzen:

$$\begin{aligned} & (2\pi)^{-d} \int_{\|\omega\| \leq \frac{1}{h_\rho(x)}} \left| \sum_{j=1}^N \tilde{u}_j(x) e^{i(x_j-x)^T \omega} - 1 \right|^2 \hat{\mathfrak{X}}_\beta(\omega) d\omega \\ &\leq c_2^2 c_1^{2k} h_\rho^{2k}(x) e^{2c_1} (2\pi)^{-d} \int_{\|\omega\| \leq \frac{1}{h_\rho(x)}} \|\omega\|^{2k} \hat{\mathfrak{X}}_\beta(\omega) d\omega \\ &= c_2^2 c_1^{2k} h_\rho^{2k}(x) e^{2c_1} \beta^d \int_{\|\omega\| \leq \frac{1}{h_\rho(x)}} \|\omega\|^{2k-d} J_{\frac{d}{2}}^2(\beta \|\omega\|) d\omega \\ &\leq c_2^2 c_1^{2k} h_\rho^{2k}(x) e^{2c_1} \frac{\beta^{d-1} 2^{d+2}}{\pi} \frac{d \pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2} + 1)(2k-1)} h_\rho^{1-2k}(x). \end{aligned}$$

Zusammenfügen liefert dann die Behauptung. \square

Korollar 4.21 (*Güte der Approximation*)

Für $f \in \mathcal{F}_{x_\beta}$ gilt mit einer Konstanten $C > 0$ unter den Voraussetzungen des Lemmas

$$|f(x) - s_f(x)| \leq C |f|_{\mathfrak{X}_\beta} \sqrt{h_\rho(x)}.$$

\square

4.6 Ein Beispiel

In diesem Abschnitt wird die Funktion \mathfrak{X}_β als Interpolante quantitativ betrachtet, d.h., es werden einerseits Plots der Interpolanten bei unterschiedlichen β und unterschiedlichen Datensätzen $X \subseteq \mathbb{R}^2$ angegeben und andererseits wird aufgezeigt, welche Form die Interpolationsmatrix A hat, wobei nur zwischen Einträgen gleich Null und Einträgen ungleich Null unterschieden wird. Man erkennt hierbei gerade bei gitterförmiger Stützstellenverteilung den Vorteil des kompakten Trägers.

Als Testfunktion dient $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, welche erklärt ist durch

$$f(x, y) = \frac{1}{2} \exp \left[-\frac{(9x - 2)^2 + (9y - 2)^2}{4} \right] + \frac{3}{4} \exp \left[-\frac{(9x + 1)^2}{49} - \frac{9y + 1}{10} \right] \\ + \frac{1}{2} \exp \left[-\frac{(9x - 7)^2 + (9y - 3)^2}{4} \right] - \frac{1}{5} \exp \left[-(9x - 4)^2 - (9y - 7)^2 \right].$$

Sie wurde Dyn/Levin/Rippa [2] entnommen und ist in Bild 3 zu sehen.

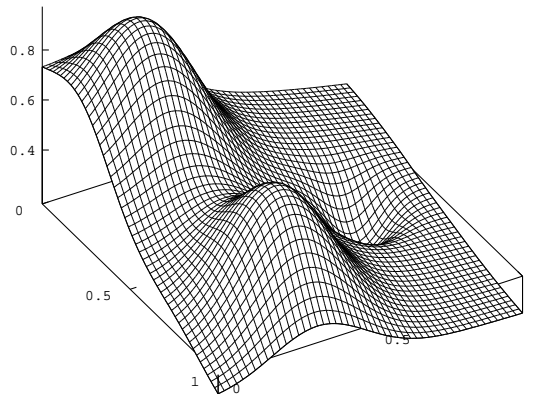


Bild 3

In den folgenden Bildsequenzen sind jeweils in Bild (a) die zugrundeliegenden Stützstellen X dargestellt. Die Bilder (b) bis (d) zeigen die Interpolante für $\beta = 0.1$, $\beta = 0.75$ und $\beta = 5$. In Bild (e) ist schließlich die Interpolationsmatrix für $\beta = 0.1$ abgebildet. Für die übrigen β 's ergibt sich jeweils eine vollbesetzte Interpolationsmatrix.

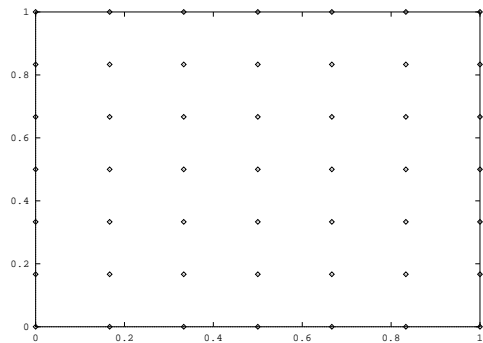


Bild 4 (a)

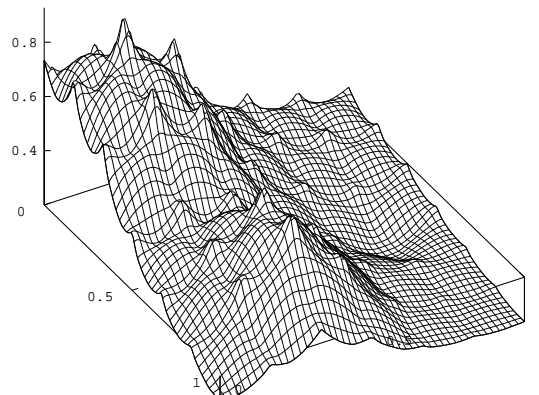


Bild 4 (b)

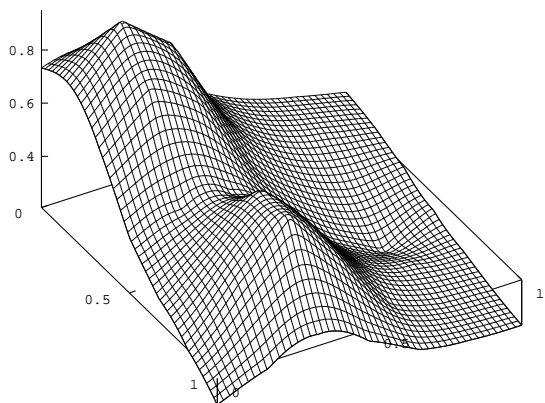


Bild 4 (c)

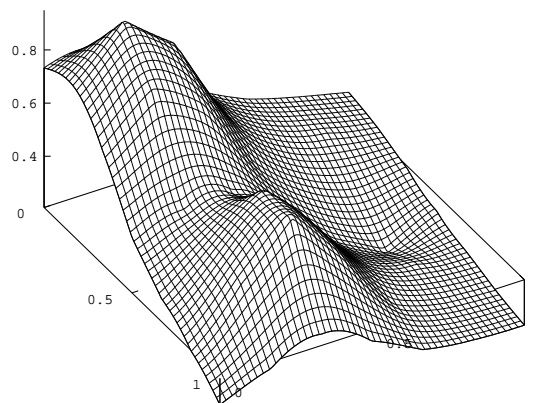


Bild 4 (d)

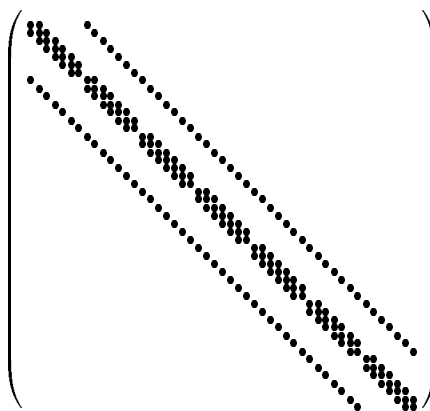


Bild 4 (e)

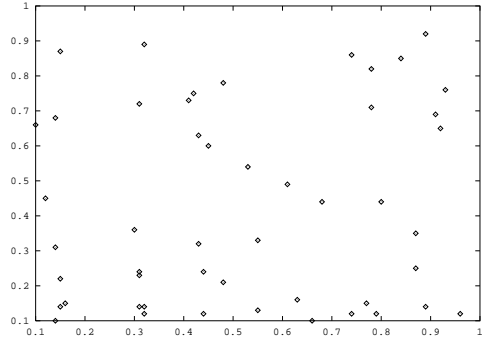


Bild 5 (a)

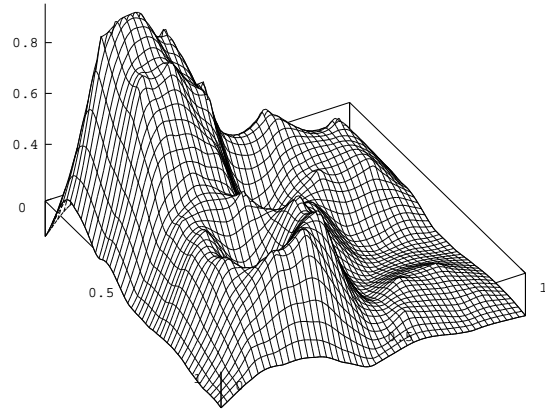


Bild 5 (b)

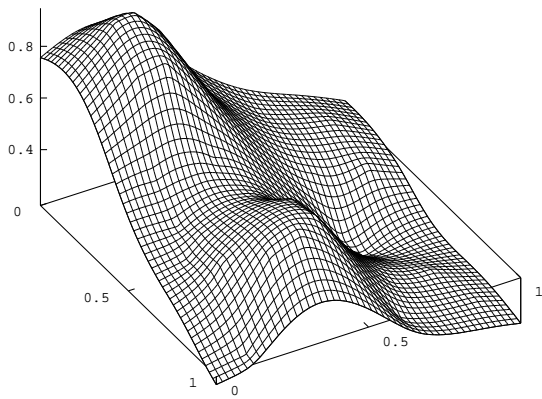


Bild 5 (c)

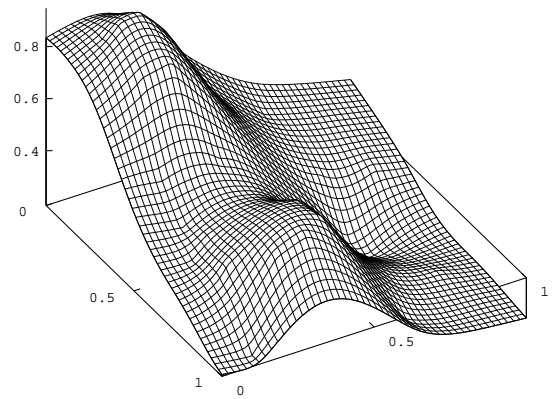


Bild 5 (d)

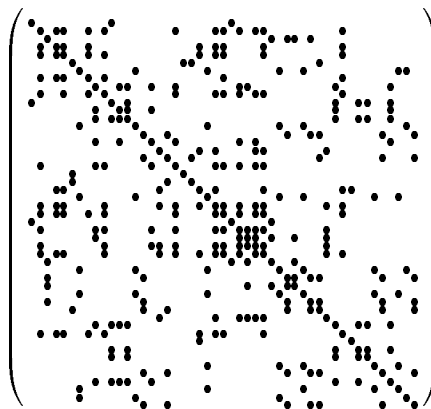


Bild 5 (e)

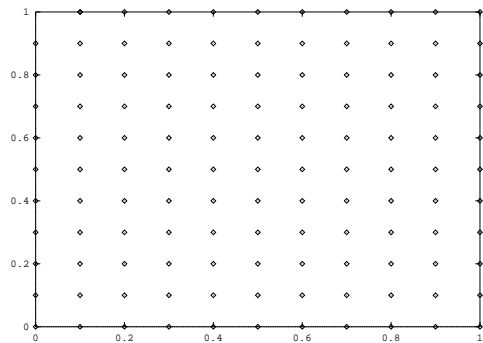


Bild 6 (a)

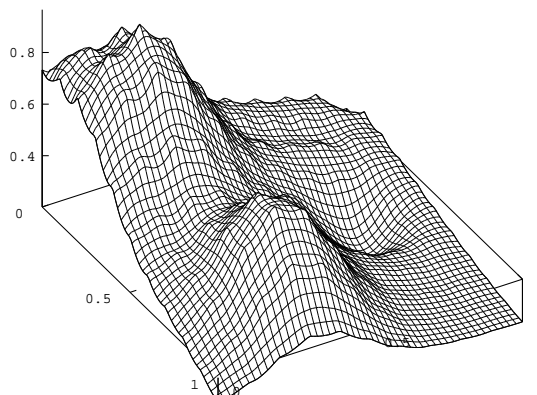


Bild 6 (b)

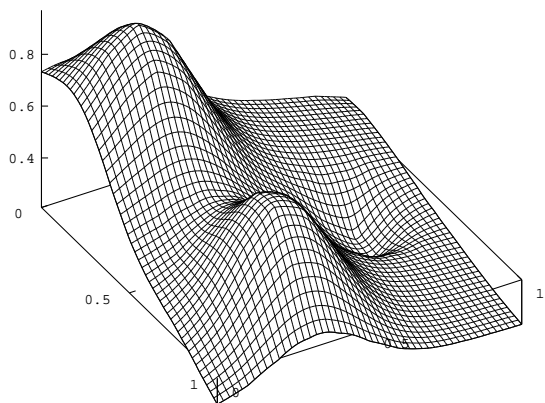


Bild 6 (c)

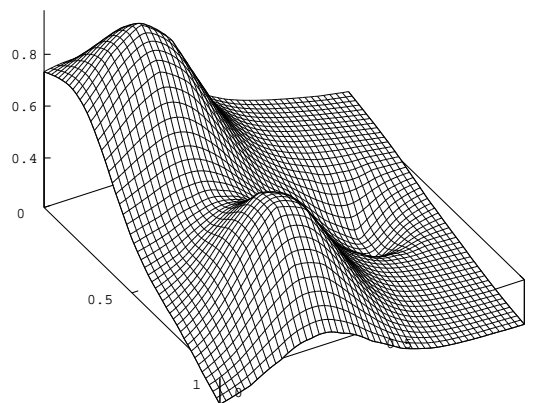


Bild 6 (d)

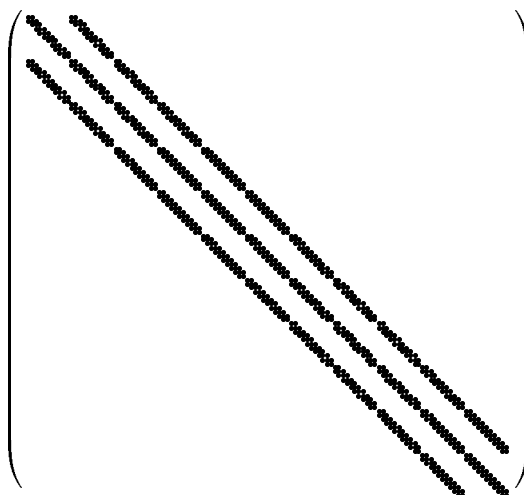


Bild 6 (e)

4.7 Ausblick

Die Arbeit läßt sich in verschiedener Weise fortsetzen. Von den vorhandenen Möglichkeiten seien hier drei erwähnt.

Zum einen kann mit der hier gegebenen Funktion \mathfrak{X}_β eine Theorie der Interpolation und Approximation in \mathbb{Z}^d durchgeführt werden, wie sie zum Beispiel Gegenstand der Arbeit von Buhmann[1] ist.

Die zweite Möglichkeit beruht auf der Beobachtung, daß im scattered data Fall die Struktur der centers X durch konstantes β nicht genügend berücksichtigt wird. Es ist naheliegend, für jeden Aufpunkt $x_j \in X$, ähnlich wie in der B-Spline Theorie, ein individuelles β_j zu wählen, welches von der "Dichte" der übrigen Aufpunkte $x_i \in X$ um x_j abhängt. Zum Beispiel könnte man $\beta_j := \min_{i \neq j} \|x_i - x_j\|$ setzen, womit man erreicht, daß jeder Kegel gerade bis zum nächstgelegenen Interpolationspunkt "lebt" und man zumindest die Bildung von isolierten "Säulen" verhindert. In jedem Fall ist es sinnvoller für dichter zusammenliegende x_j kleinere β_j zu wählen, als für x_j , in deren näherer Umgebung kein weiterer Aufpunkt liegt.

Die dritte mögliche Fortführung und damit die letzte, die hier erwähnt werden soll, besteht darin, die Funktion \mathfrak{X}_β zu verallgemeinern. Für $k \in \mathbb{N}$ betrachte man

$$\mathfrak{X}_{\beta,k}(x) := \underbrace{\mathfrak{X}_\beta * \dots * \mathfrak{X}_\beta(x)}_{k \text{ Faktoren}}.$$

Dann gilt $\mathfrak{X}_{\beta,1} = \mathfrak{X}_\beta$ und $\hat{\mathfrak{X}}_{\beta,k}(\omega) = [\hat{\mathfrak{X}}_\beta(\omega)]^k = (2\pi\beta)^{dk} \|\omega\|^{-dk} J_{\frac{d}{2}}^{2k}(\|\omega\|\beta)$. Damit läßt sich der Beweis von Satz 4.3 wörtlich auf $\mathfrak{X}_{\beta,k}$ übertragen, so daß man mit $\mathfrak{X}_{\beta,k}$ eine ganze Familie von positiv definiten Funktionen mit kompaktem Träger erhält, die mit steigendem k an Glattheit gewinnt. Das Problem besteht wiederum darin, $\mathfrak{X}_{\beta,k}(x)$ explizit auszurechnen.

Literatur

- [1] M.D. Buhmann (1989), Multivariable Interpolation using Radial Basis Functions, Ph. D. dissertation, University of Cambridge.
- [2] N. Dyn, D. Levin, S. Rippa (1986), Numerical Procedures for Surface Fitting of Scattered Data by Radial Functions, *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* 7, 639 - 659.
- [3] W. Fischer, I. Lieb (1992), *Funktionentheorie*, Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden.
- [4] O. Forster (1989), *Analysis 3: Integralrechnung im \mathbb{R}^n mit Anwendungen*, Vieweg, Braunschweig.
- [5] I.M. Gelfand, u.a. (1964-68), *Generalized Functions*, Vol. 1-5, Academic Press, New York.
- [6] L. Jantscher (1971), *Distributionen*, de Gruyter, Berlin.
- [7] W.R. Madych, S.A. Nelson (1988), Multivariate Interpolation and Conditionally Positive Definite Functions, *Approx. Theory and its Appl.* 4, 77 - 79.
- [8] C.A. Micchelli (1986), Interpolation of Scattered Data : Distance Matrices and Conditionally Positive Definite Functions, *Constr. Approx.* 2, 11 - 22.
- [9] F.J. Narcowich, J.D. Ward (1991), Norms of Inverses and Condition Numbers for Matrices Associated with Scattered Data, *J. Approx. Theory* 64, 69 - 94.
- [10] F.J. Narcowich, J.D. Ward (1992), Norm Estimates for the Inverses of a General Class of Scattered-Data Radial-Function Interpolation Matrices, *J. Approx. Theory* 69, 84 - 109.
- [11] I.P. Natanson (1955), *Konstruktive Funktionentheorie*, Akademie-Verlag, Berlin.
- [12] M.J.D. Powell (1992), The Theory of Radial Basis Function Approximation in 1990, in: W. Light, ed.: *Advances in Numerical Analysis Vol. 2 : Wavelets, Subdivision Algorithms and Radial Basis Functions*, Clarendon Press, Oxford.
- [13] R. Schaback (1992), Lower Bounds for Norms of Inverses of Interpolation Matrices for Radial Basis Functions, preprint.
- [14] I.J. Schoenberg (1938), Metric Spaces and Completely Monotone Functions, *Annals of Mathematics*, Vol. 39, 811 - 841.
- [15] W. Walter (1990), *Analysis II*, Springer-Verlag, Berlin.
- [16] G.N. Watson (1966), *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [17] Z. Wu, R. Schaback (1993), Local Error Estimates for Radial Basis Function Interpolation of Scattered Data, *IMA J. of Numer. Anal.* 13, 13 - 27.