

Interpolation mit symmetrischen Basisfunktionen
unter Berücksichtigung inhomogener
Stützstellenverteilungen

Diplomarbeit

Vorgelegt von
Carsten Franke
aus
Eschwege.

Angefertigt im
Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
der Georg-August-Universität zu Göttingen.

1995

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	v
Tabellenverzeichnis	vi
0 Einleitung	vii
I Theorie der Interpolation	1
1 Allgemeine mathematische Grundlagen	1
1.1 Grundlegende Definitionen für die Interpolation	1
1.2 Grundlagen der Theorie der Distributionen	4
1.3 Grundlagen der Bessel-Funktionen	5
1.4 Grundlagen der Fourier-Transformation	6
1.5 Norm und Kondition einer Matrix	12
2 Grundlagen der Interpolation mit symmetrischen Basisfunktionen	16
2.1 Die Funktionenräume Fun^d und \mathbb{P}_m^d	16
2.2 Die Funktionalräume PF^d und $\tilde{\text{S}}_m^{d\perp}$	16
2.3 Bedingt positiv definite Funktionen	18
2.4 Der Funktionalraum $\text{S}_m^{d\perp}(\Phi)$ und der Funktionenraum Span_{Φ}^d	19
2.5 Das allgemeine Interpolationsverfahren und seine Lösbarkeit	21
2.6 Die Lagrange-Basis $u(x)$	23
2.7 Das Fehlerfunktional $\varepsilon_{x,X,\Phi}$	25
2.8 Das Fehlerfunktional $\varepsilon_{x,u}$ in Abhängigkeit der Lagrange-Basis	26
2.9 Minimierungstheorie für das Fehlerfunktional	27
2.10 Funktionalanalytische Fehlertheorie und der Raum $\text{H}^d(\Phi)$	28
2.11 Mögliche Skalarprodukte auf $\text{H}^d(\Phi)$	31
2.12 Konstruktion eines $\Phi \in \text{SBF}^d$ zu einem gegebenen Funktionenraum	33
3 Ergebnisse durch Fourier-Transformation	35
3.1 Symmetrische Basisfunktionen	35
3.1.1 Nachweis der positiven Definitheit	36
3.1.2 Abschätzung des Interpolationsfehlers	37
3.2 Translationsinvariante Basisfunktionen	40
3.2.1 Nachweis der positiven Definitheit	42
3.2.2 Abschätzung des Interpolationsfehlers, der Funktionenraum F_{Φ}	43
3.3 Radiale Basisfunktionen: Klassische Ergebnisse für $\Phi = \phi \circ d_2$	45
3.3.1 Charakteristika positiv definiter Funktionen	46
3.3.2 Abschätzung des Interpolationsfehlers	51
3.3.3 Abschätzung der Kondition der Interpolationsmatrix	57
3.4 Die Problematik einer inhomogenen Stützstellenverteilung	58

II	Praxis der Interpolation	59
4	Vorstellung der Beispielfunktionen	59
4.1	Die Beispielfunktionen und ihre Graphen	59
4.2	Einfache Interpolanten	60
5	Ortsabhängige Skalierungsfunktionen	66
5.1	Vorüberlegung: Generische Aufwandsanalyse	66
5.2	Feste Skalierungsfaktoren	68
5.3	Auswirkung auf die Wahl der Parameter der radialen Basisfunktionen	72
5.4	Idee: Ortsabhängige Skalierung der Metrik	73
5.5	Geeignete Arten radialer Basisfunktionen	74
5.6	Betrachtung des Interpolationsfehlers	78
5.7	Konkrete Auswahl einer Funktion Q	80
5.8	Implementation, Aufwand und experimentelle Ergebnisse	80
6	Transformation von Metriken	83
6.1	Spezielle Variation der 2-Metrik	83
6.2	Der Metrik vorgeschaltete Transformationen	84
6.2.1	Idee: ‘Dekumulieren’ der Stützstellen durch Transformation des Raumes	84
6.2.2	Implementation	85
6.2.3	Experimentelle Ergebnisse	87
6.3	Der Metrik nachgeschaltete Funktionen	93
6.3.1	Idee: Verringerung zu großer Abstände durch Abschwächung der Metrik	93
6.3.2	Implementation	93
6.3.3	Experimentelle Ergebnisse	94
6.4	Dekumulieren durch Hinzufügung einer Dimension	96
6.4.1	Idee: Hinzufügen einer Dimension	96
6.4.2	Implementation	101
6.4.3	Experimentelle Ergebnisse	106
7	Iterierte Interpolation auf feiner werdenden Teilmengen von X	108
7.1	Idee des Verfahrens und Definitionen	108
7.2	Der Algorithmus zur Interpolation	109
7.3	Zerlegung von X und globaler Fehler	110
7.4	Experimentelle Ergebnisse	111
7.5	Idee eines Gesamtschrittverfahrens	114
8	Schlußbetrachtungen	116
8.1	Theoretische Ergebnisse	116
8.2	Praktische Ergebnisse	118
	Symbolverzeichnis	120
	Index	124
	Literaturverzeichnis	128

Abbildungsverzeichnis

1	Graphen der klassischen radialen Basisfunktionen	49
2	Graph der Wu-Funktion $\phi_{0,0}$ bzw. der Wendland-Funktion $\phi_{1,0}$	52
3	Graphen der Wu-Funktionen $\phi_{1,0}$ und $\phi_{1,1}$	52
4	Graphen der Wu-Funktionen $\phi_{2,0}$ und $\phi_{2,2}$	54
5	Graphen der Wu-Funktionen $\phi_{3,0}$, $\phi_{3,1}$, $\phi_{3,2}$ und $\phi_{3,3}$	55
6	Graphen der Wendland-Funktionen $\phi_{2,0}$ und $\phi_{2,1}$	56
7	Graphen der Wendland-Funktionen $\phi_{3,0}$ und $\phi_{3,1}$	56
8	Graphen der ‘Wellen-Funktion’ und der ‘Mexican-Hat-Funktion’	59
9	Stützstellenverteilungen der einfachen Interpolanten	61
10	Einfache thin-plate-spline-Interpolanten	61
11	Einfache Vershobener-Logarithmus-Interpolanten	62
12	Einfache multiquadric-Interpolanten	63
13	Einfache Gauß-Interpolanten	63
14	Einfache inverse-multiquadric-Interpolanten	64
15	Einfache Wendland- $\phi_{3,1}$ -Interpolanten	65
16	Interpolation der ‘Wellen-Funktion’ mit einer ortsabhängigen Skalierungsfunktion	81
17	Interpolation der ‘Mexican-Hat-Funktion’ mit einer ortsabhängigen Skalierungsfunktion	82
18	Entzerrte Stützstellenmengen bei vorgeschalteter Typ-(B)-Transformation	87
19	Gauß-Interpolanten mit vorgeschalteter Typ-(B)-Transformation	88
20	inverse-multiquadric-Interpolanten mit vorgeschalteter Typ-(B)-Transformation	89
21	Wendland- $\phi_{3,1}$ -Interpolanten mit vorgeschalteter Typ-(B)-Transformation	89
22	Entzerrte Stützstellenmengen bei vorgeschalteter Typ-(A)-Transformation	90
23	Gauß-Interpolanten mit vorgeschalteter Typ-(A)-Transformation	91
24	inverse-multiquadric-Interpolanten mit vorgeschalteter Typ-(A)-Transformation	92
25	Wendland- $\phi_{3,1}$ -Interpolanten mit vorgeschalteter Typ-(A)-Transformation	92
26	Graphen der gewählten Entzerrungsfunktionen	94
27	Gauß-Interpolanten mit nachgeschalteter Typ-(A)-Funktion	95
28	inverse-multiquadric-Interpolanten mit nachgeschalteter Typ-(A)-Funktion	95
29	Wendland- $\phi_{3,1}$ -Interpolanten mit nachgeschalteter Typ-(A)-Funktion	96
30	Gauß-Interpolanten mit nachgeschalteter Typ-(B)-Funktion	97
31	inverse-multiquadric-Interpolanten mit nachgeschalteter Typ-(B)-Funktion	97
32	Wendland- $\phi_{3,1}$ -Interpolanten mit nachgeschalteter Typ-(B)-Funktion	98
33	Funktion $h_0(x)$ und Interpolante zur ‘Wellen-Funktion’ nach Verfahren (A)	105
34	Funktion $h_0(x)$ und Interpolante zur ‘Mexican-Hat-Funktion’ nach Verfahren (A)	105
35	Funktion $h_0(x)$ und Interpolante zur ‘Wellen-Funktion’ nach Verfahren (B)	106
36	Funktion $h_0(x)$ und Interpolante zur ‘Mexican-Hat-Funktion’ nach Verfahren (B)	107
37	Iterierte Interpolation zur ‘Wellen-Funktion’	112
38	Iterierte Interpolation zur ‘Mexican-Hat-Funktion’	113

Tabellenverzeichnis

1	Die klassischen radialen Basisfunktionen, ihre Fourier-Transformierten und Daten	48
2	Einige radiale Basisfunktionen mit kompaktem Träger	53
3	Funktionen $F_\Phi(h)$ und $G_\Phi(q)$ einiger $\Phi \in \text{RBF}^d$	54

0 Einleitung

Bei der Interpolation mit radialen Basisfunktionen treten immer wieder Probleme auf, wenn die Stützstellen sehr ungleichmäßig verteilt liegen. Zum einen können zu dicht liegende Stützstellen die Kondition der Interpolationsmatrix verschlechtern, was in einigen Fällen zur numerischen Unlösbarkeit des Problems führen kann. Zum anderen wird im Extremfall der Fehler bei der Approximation einer Funktion durch zu weit auseinanderliegende Stützstellen so groß, daß die Interpolante nur noch wenig Ähnlichkeit mit der vorgegebenen Funktion aufweist. Die Wahl eines regelmäßigen, sehr feinen Gitters als Stützstellenmenge erscheint daher zunächst als denkbarer Kompromiß. Dieser scheitert jedoch oft an der Größe des Grundbereichs, auf dem die Interpolante definiert werden soll, da dann die Anzahl der Stützstellen, und somit der Rechenaufwand, ins Unpraktikable steigt.

Diese Arbeit untersucht, ob und wie die bekannte, ‘klassische’ Theorie der radialen Basisfunktionen in den bisher ungünstigen Fällen gewinnbringend erweitert werden kann. Dabei wird weitgehend auf die Forderung nach Radialität und Translationsinvarianz der benutzten Basisfunktionen verzichtet. Dennoch, so wird sich zeigen, bleiben viele ‘klassische’ Aussagen beweisbar.

Teil I liefert die theoretischen Grundlagen. In Kapitel 1 werden zunächst die Interpolationsaufgabe und die zu ihrer Behandlung notwendigen allgemeinmathematischen Grundlagen beschrieben.

Darauf aufbauend stellen Kapitel 2 und 3 die speziellen Grundlagen der mehrdimensionalen Interpolation dar. Dabei konzentriert sich Kapitel 2 auf die funktionalanalytischen Aspekte, wozu zunächst die im weiteren Verlauf zentrale Definition von ‘bedingt positiv definiten Funktionen’ geliefert wird. Danach wird der Zusammenhang zwischen der Interpolationsaufgabe und einem bestimmten Minimierungsproblem hergestellt. So wird eine Fehleranalyse möglich. Schließlich finden noch einige abstrakte Überlegungen über geeignete Funktionenräume ihren Platz.

In Kapitel 3 werden dann die durch Fourier-Transformation erzielbaren Aussagen betrachtet. Durch diese erst werden quantitative Aussagen über Fehler und Kondition der Interpolationsaufgabe möglich. Begonnen wird in 3.1 mit der schwächsten Voraussetzung an die Basisfunktionen — der Symmetrie. Zum ersten mal tauchen hier die Begriffe der Symbolfunktion $\text{Sym}_{X,c}(\omega)$, der Fehler-Kern-Funktion $g_{X,c}(x, \omega)$ und des Raumes G_{s_0, s_∞} auf. In 3.2 kommt die nächst stärkere Voraussetzung — die Translationsinvarianz — hinzu. Allein mit diesen Mitteln lassen sich die meisten Aussagen der ‘klassischen’, auf *radialen* Basisfunktionen beruhenden Theorie beweisen. Dieser ‘klassische’ Fall wird in 3.3 dann näher ausgeführt, wobei insbesondere konkrete Basisfunktionen mit den zugehörigen Fehler- und Konditionsabschätzungen angegeben werden.

Teil II dieser Arbeit untersucht einige praktische Anwendungsmöglichkeiten der Ergebnisse des theoretischen Teils. Dazu werden in Kapitel 4 zwei Beispielfunktionen inklusive ihrer ‘klassischen’ Interpolanten vorgestellt. Die eingangs beschriebene Problematik wird dabei durch Graphiken veranschaulicht. Unterkapitel 5.1 enthält Aussagen über den numerischen Aufwand der benötigten Algorithmen, die im Anwendungsteil der Arbeit universell verwendbar sind. Im Rest des Kapitels 5 wird der Ansatz ‘ $d_Q(x, y) := Q(x)Q(y) d(x, y)$ ’ zur Manipulation der Metrik d eingehend untersucht.

Kapitel 6 präsentiert vier unterschiedliche Verfahren zur Homogenisierung der Stützstellenabstände. Sie beruhen auf der Transformation der ursprünglichen Metrik in eine andere.

Ein ganz anderer Ansatz, die Nachteile inhomogener Stützstellenverteilungen auszugleichen, wird im Kapitel 7 beschrieben. Er beruht auf einer mehrstufigen Interpolation mit einer jeweils verfeinerten, relativ homogenen Stützstellenmenge.

Die Schlußbemerkungen des Kapitels 8 enthalten Übersichten der erzielten theoretischen und praktischen Ergebnisse. Es wird dabei nochmals deutlich, daß sich die 'klassische', auf radialen Basisfunktionen beruhende Theorie stark verallgemeinern läßt. Daraus resultiert ein viel größerer Spielraum bei der Entwicklung und Implementation konkreter Algorithmen, als er bisher genutzt wurde. So ergeben sich weitere Anwendungsfelder der Interpolation mit symmetrischen Basisfunktionen.

An dieser Stelle möchte ich mich bei Herrn Prof. Schaback für die konstruktive Kritik und Anleitung und seine Anregungen zum Aufbau der Arbeit bedanken. Weiterhin danke ich Herrn Wendland für die Überlassung einer Tabelle der von ihm entwickelten Funktionen, die im Kapitel 3.3 Verwendung findet.

Teil I

Theorie der Interpolation

1 Allgemeine mathematische Grundlagen

1.1 Grundlegende Definitionen für die Interpolation

Zunächst seien die wichtigsten Definitionen des Themengebietes angegeben. Eine allgemeine, mehrdimensionale Interpolationsaufgabe hat folgende Form:

Definition: Interpolationsaufgabe

Gegeben seien:

- $X = \{x_i\}_{i=1, \dots, N} \subset \mathbb{R}^d$ eine Menge von $N \in \mathbb{N}$ *Stützstellen* im \mathbb{R}^d .
Dabei müssen die Stützstellen paarweise verschieden sein, d. h.: $i \neq j \Rightarrow x_i \neq x_j$. Eine *regelmäßige* Anordnung wird jedoch nicht verlangt.¹
- $\{y_i\}_{i=1, \dots, N} \subset \mathbb{C}$ eine Menge von *Stützwerten*.

Abkürzend wird im folgenden $M := \{1, \dots, N\}$ benutzt. Die *Menge* der Stützwerte $\{y_i\}_{i \in M}$ faßt man der besseren ‘Handhabbarkeit’ wegen als *Vektor* auf: $y = (y_i)_{i \in M} \in \mathbb{C}^N$. Gesucht ist dann eine *Interpolante* $s : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$, die die *Interpolationsbedingung*

$$(1.1-1) \quad \forall i \in M : s(x_i) = y_i \quad \text{oder kurz:} \quad s(X) = y$$

erfüllt.²

Oft geht man davon aus, daß die Werte y_i von einer Funktion $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ vorgegeben werden:

$$y_i = f(x_i) \quad \text{für } i \in M \quad \text{oder kurz:} \quad y = f(X).$$

Dementsprechend wird die Interpolante s als zu dieser Funktion gehörend betrachtet:

$$(1.1-2) \quad s_f(x) := s(x) \quad \text{mit} \quad \forall i \in M : s_f(x_i) = y_i = f(x_i), \quad \text{kurz:} \quad s_f(X) = f(X).$$

In leichter Abwandlung der eigentlichen Interpolationsaufgabe kann man außerdem den *Interpolationsfehler* oder *Approximationsfehler* $s_f(x) - f(x)$ betrachten. Man sucht dafür Abschätzungen der Form

$$(1.1-3) \quad |f(x) - s_f(x)| \leq |f|_{F_\Phi} \cdot P_{X, \Phi}(x) \quad \forall f \in F_\Phi,$$

wobei $|\cdot|_{F_\Phi}$ eine Seminorm auf einem geeigneten, von Φ abhängigen Funktionenraum F_Φ ist. Er wird als *native space* bezeichnet. Für $P_{X, \Phi}(x)$ sind die Namen *Power-Funktion*, *Kriging-Funktion* oder auch *Güte-Funktion* gebräuchlich.

¹Die englischsprachige Literatur bezeichnet dies als *scattered data*.

²Hier wird die aus der Algebra geläufige Konvention benutzt, wonach in eine Abbildung $f : D \rightarrow B$ auch ganze Teilmengen $D' \subseteq D$ eingesetzt werden dürfen: $f(D') := \{f(x) : x \in D'\}$. Ist die Menge D' angeordnet, also ein Tupel, so sei $f(D')$ ein entsprechend angeordnetes Tupel.

Die Aufspaltung der Fehlerabschätzung laut Gleichung (1.1-3) ist sehr nützlich, da sie die Effekte von f und X trennt. Bei der Konstruktion der Interpolante gehen X und Φ ein. Diese Abhängigkeit wird im folgenden durch die Schreibweise $s_{f,X,\Phi}$ wiedergegeben.

Von Interesse ist außerdem der Raum der Funktionen f , die durch die Interpolation reproduziert werden, d. h. $\forall x \in \mathbb{R}^d : s_{f,X,\Phi}(x) = f(x)$, oder kurz: $s_{f,X,\Phi} = f$. Eine weitere Modifikation ist die Einschränkung der Definitionsbereiche aller Funktionen auf ein Gebiet Ω mit $X \subseteq \Omega \subset \mathbb{R}^d$. Mit der Analyse dieses Problems, insbesondere für $N \rightarrow \infty$, befaßt sich ein eigenes Theoriegebäude.³ In dieser Arbeit wird diese spezielle Fragestellung nicht weiter verfolgt.

Definition: symmetrische Basisfunktion

Eine symmetrische Basisfunktion ist eine Funktion der Form

$$\Phi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}; \quad (x, y) \mapsto \Phi(x, y)$$

mit der Symmetrieeigenschaft

$$(1.1-4) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d : \quad \Phi(x, y) = \overline{\Phi(y, x)}.$$

Es folgt: $\forall x \in \mathbb{R}^d : \Phi(x, x) \in \mathbb{R}$. Die Menge aller dieser Funktionen sei bezeichnet mit

$$(1.1-5) \quad \text{SBF}^d := \left\{ \Phi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C} : \quad \Phi \text{ ist eine symmetrische Basisfunktion} \right\}.$$

Wichtige Spezialfälle der symmetrischen Basisfunktionen sind die drei folgenden:

Definition: metrische Basisfunktion

Eine metrische Basisfunktion bezüglich d ist eine symmetrische Basisfunktion $\Phi \in \text{SBF}^d$ genau dann, wenn sie die Gestalt

$$\Phi(x, y) = \phi(d(x, y)) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d$$

hat, wobei

$$\phi : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$$

eine vorgegebene, meist stetige Funktion und

$$d : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$$

eine Metrik⁴ ist. Da die Metrik schon reell-symmetrisch ist, d.h. $d(x, y) = d(y, x)$ gilt, kann (1.1-4) nur erfüllt werden, wenn ϕ reellwertig ist. Es sei

$$\text{MBF}^d := \left\{ \Phi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} : \quad \Phi \text{ ist eine metrische Basisfunktion} \right\}.$$

³Vgl. [CADI] vom 06.07.93.

⁴Von den Metrik-Axiomen wird die Dreiecksungleichung nicht benötigt: [SchoenPosDef], S. 524.

Definition: translationsinvariante Basisfunktion

Eine translationsinvariante Basisfunktion ist eine symmetrische Basisfunktion $\Phi \in \text{SBF}^d$ genau dann, wenn

$$(1.1-6) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}^d : \quad \Phi(x - z, y - z) = \Phi(x, y).$$

Die Menge dieser Funktionen sei bezeichnet mit

$$\text{TBF}^d := \left\{ \Phi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C} : \quad \begin{array}{l} \Phi \text{ ist eine translations-} \\ \text{invariante Basisfunktion} \end{array} \right\}.$$

Definition: radiale Basisfunktion

Eine radiale Basisfunktion ist eine metrische Basisfunktion $\Phi \in \text{MBF}^d$ genau dann, wenn sie die 2-Metrik d_2 benutzt. Dann erhält Φ die Form $\Phi(x, y) = \phi(\|x - y\|_2)$. In der Literatur wird häufig auch ϕ schon ‘radiale Basisfunktion’ genannt. Aus dem Kontext geht dort jedoch jeweils hervor, welche Funktion gemeint ist.⁵ Im folgenden sei

$$(1.1-7) \quad \text{RBF}^d := \left\{ \Phi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} : \quad \Phi \text{ ist eine radiale Basisfunktion} \right\}.$$

Ein *metrisches* $\Phi \in \text{MBF}^d$ ist genau dann translationsinvariant, wenn es auch die Metrik ist — insbesondere, wenn die Metrik von einer Norm abstammt; z. B. gilt $\text{RBF}^d \subseteq \text{MBF}^d \cap \text{TBF}^d$.

Definition: Interpolation mit symmetrischen Basisfunktionen

Als Interpolation mit symmetrischen Basisfunktionen bezeichnet man den *Interpolationsansatz*

$$(1.1-8) \quad s(x) := \sum_{j \in M} c_j \Phi(x, x_j) + p(x),$$

wobei p ein Polynom⁶ auf \mathbb{R}^d und $c \in \mathbb{C}^N$ ein Vektor von Koeffizienten ist.⁷

Unter Verwendung der 2-Metrik erhält man so z. B. die Form

$$(1.1-9) \quad s(x) := \sum_{j \in M} c_j \Phi(\|x - x_j\|_2) + p(x).$$

Für $p = 0$ ergibt sich aus (1.1-8) mit der Interpolationsbedingung (1.1-1) sofort die Forderung:

$$(1.1-10) \quad \forall i \in M : \quad y_i = s(x_i) = \sum_{j \in M} c_j \Phi(x_i, x_j).$$

Dieses lineare Gleichungssystem, man nennt es auch das *Interpolationssystem*, erhält mit

$$(1.1-11) \quad A_\Phi := (\Phi(x_i, x_j))_{i,j \in M}$$

⁵In der ‘klassischen’ Theorie geht man nicht von Metriken aus, sondern benutzt von vornherein die Form $\Phi(x) = \phi(\|x\|_2)$. Diese ‘klassische’ Variante wird im Kapitel 3.3 näher untersucht.

⁶Dieser Polynomanteil wird nur bei bestimmten Wahlen der symmetrischen Basisfunktion Φ nötig.

⁷Eine zuverlässige und effiziente Bestimmung dieser Koeffizienten ist oft das eigentliche Problem.

die Form $y = A_{\Phi} c$.⁸ Die *Interpolationsaufgabe* ist also genau dann lösbar, wenn die *Interpolationsmatrix* A_{Φ} invertierbar ist.⁹ Das ist sicher dann der Fall, wenn A_{Φ} positiv definit ist.¹⁰ Entsprechende Überlegungen werden einen großen Teil dieser Arbeit ausmachen.

Der Fall, daß $y \in \mathbb{C}^N$ komplex ist, läßt sich wegen der Linearität des Problems sofort auf den reellen Fall zurückführen:

$$\begin{aligned} A_{\Phi} c &= y \\ \Leftrightarrow A_{\Phi} (\operatorname{Re}(c) + i \operatorname{Im}(c)) &= \operatorname{Re}(y) + i \operatorname{Im}(y) \\ \Leftrightarrow A_{\Phi} \operatorname{Re}(c) = \operatorname{Re}(y) \wedge A_{\Phi} \operatorname{Im}(c) &= \operatorname{Im}(y) . \end{aligned}$$

Einige Beweise werden deshalb nur für den reellen Fall angegeben.

Für alle oben genannten Fragestellungen benötigt man einen umfangreicheren mathematischen ‘Werkzeugkasten’, der in den Kapiteln 1.2 und 1.4 aufgebaut wird.¹¹ Auf die eigentliche Interpolation kommt dann Kapitel 2 dieser Arbeit zurück.

1.2 Grundlagen der Theorie der Distributionen

Es gibt umfangreiche Literatur über Distributionen; stellvertretend seien hier nur genannt: [Gel’fand], [Jantscher], [HörmanderI]. Die funktionalanalytischen Grundlagen findet man z. B. in [Großmann] und [HeuserFAn]. Eine ausführliche Darstellung der Theorie der Distributionen ist im Rahmen dieser zu umfangreich, deshalb folgt nur eine kurze Übersicht.

Sei F ein Raum von komplexwertigen *Testfunktionen*; im allgemeinen benutzt man $F = C_0^{\infty}(\mathbb{R}^d)$ oder $F = S(\mathbb{R}^d)$, den Raum der *Schwartzschen* oder auch *temperierten Funktionen*.¹² In diesem Zusammenhang ist von wesentlicher Bedeutung, daß die Testfunktionen im eigentlichen Sinne *Fourier-transformierbar* sind. Dieser Begriff wird im Kapitel 1.4 definiert.

Definition: Distributionsraum

Der Distributionsraum zu einem normierten, linearen Raum F wird bezeichnet mit

$$\begin{aligned} F^* &:= \text{topologischer Dualraum zu } F \\ &:= \{ T : F \rightarrow \mathbb{C} : T \text{ ist eine beschränkte, lineare Abbildung} \}. \end{aligned}$$

Ein Element T des Raumes F^* heißt *Distribution*.

Die Bedingungen bedeuten im Detail:

$$\begin{aligned} T[a\varphi + \psi] &= aT[\varphi] + T[\psi] \quad \forall a \in \mathbb{C}; \varphi, \psi \in F, \quad \text{d.h. } T \text{ ist ein } \textit{lineares}, \dots \\ \|T\| &:= \sup_{\varphi \in F: \|\varphi\|=1} |T[\varphi]| < \infty, \quad \dots \textit{beschränktes Funktional}. \end{aligned}$$

⁸In der Literatur findet man statt A_{Φ} meist nur A .

⁹Falls $p \neq 0$ ist, sind für die Existenz von A_{Φ}^{-1} nur sehr schwache weitere Voraussetzungen nötig, wie in Kapitel 2 gezeigt wird. Andererseits ist aber das lineare Gleichungssystem der Interpolation für viele ‘schöne’ Φ nur mit einem zusätzlichen Polynom lösbar.

¹⁰Da die Matrix wegen der Definition der symmetrischen Basisfunktion nach Konstruktion selbstadjungiert ist (d.h. $A_{\Phi} = \overline{A_{\Phi}^{\text{tr}}}$), lassen sich auf eine positiv definite Matrix günstigere Algorithmen anwenden, z. B. die Cholesky-Zerlegung. Weiterhin existiert eine seit den 30er Jahren ausgearbeitete Theorie positiver definiter Funktionen: [SchoenPosDef].

¹¹Eine gute Zusammenfassung davon findet man auch in [WeinrichDr], Kap. 4.2.

¹²Beim Schwartz-Raum muß man berücksichtigen, daß er nicht in natürlicher Weise mit einer Metrik oder gar mit einer Norm versehen ist. Er ist nach Laurent Schwartz benannt.

Lineare Operatoren sind genau dann stetig, wenn sie beschränkt sind. Daher gilt:

$$\varphi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{F} \varphi \quad \Rightarrow \quad T[\varphi_n] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{C}} T[\varphi].$$

Definition: reguläre Distribution

Die reguläre Distribution zu f aus dem normierten, linearen Funktionenraum F ist

$$T_f : F \rightarrow \mathbb{C}; \quad \varphi \mapsto T_f[\varphi] := \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \varphi(x) dx ,$$

falls der Ausdruck existiert und $T_f \in F^*$, insbesondere also beschränkt ist.

Definition: Ableitung von Distributionen

Zu $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ Multiindex, $T \in F^*$ und $\varphi \in F \cap C^{|\alpha|}(\mathbb{R}^d)$ setzt man, falls $T[D^\alpha \varphi]$ existiert:

$$(D^\alpha T)[\varphi] := (-1)^{|\alpha|} T[D^\alpha \varphi], \quad \text{wobei} \quad D^\alpha := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x^\alpha} \quad \text{ist.}$$

Diese Definition ist dadurch motiviert, daß nun für reguläre Distributionen gilt:

$$D^\alpha T_f = T_{D^\alpha f},$$

was normalerweise mittels partieller Integration bewiesen wird.

1.3 Grundlagen der Bessel-Funktionen

Dieses Kapitel stellt die in dieser Arbeit benötigten Definitionen und Sätze über Bessel-Funktionen zur Verfügung. In [AbramStegun], Kap. 9–11 findet sich ein umfangreiches Verzeichnis der Eigenschaften dieser Funktionen, speziell Formel 9.1.20 ist hier von Bedeutung. Als Literatur ist weiterhin auf [Bron], Kap. 3.3.1.3.4 zu verweisen.

Definition: Bessel-Funktionen erster Art J_ν

Für $\nu \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(\nu) > -\frac{1}{2}$ und $t \in \mathbb{R}_{>0}$ setzt man:¹³

$$J_\nu(t) := \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^\nu}{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \int_{-1}^1 (1-s^2)^{\nu-\frac{1}{2}} e^{its} ds .$$

Man bezeichnet J_ν als *Bessel-Funktion erster Art* zum Parameter ν .¹⁴

Die Funktionen J_ν erfüllen die *Bessel-Differentialgleichung*¹⁵ $x^2 y'' + x y' + (x^2 - \nu^2) y = 0$. Es gilt $J_\nu = J_{\perp\nu}$ für $\nu \in \mathbb{R}$. Falls $\nu = \pm\left(n + \frac{1}{2}\right)$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ ist, nennt man die Funktionen auch *sphärische Bessel-Funktionen* erster Art. Sie haben die elementaren Darstellungen

$$J_{n+\frac{1}{2}}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} (f_n(t) \sin t - g_n(t) \cos t) \quad \text{und}$$

$$J_{\perp n+\frac{1}{2}}(t) = (-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi t}} (g_n(t) \sin t + f_n(t) \cos t) ,$$

¹³Anmerkung: $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

¹⁴Diese Definition folgt der von [SteinWeiss], Kap. IV, S. 154, vgl. auch [AbramStegun], Gleichung 9.1.20.

¹⁵Der Großteil der Literatur definiert sie als Lösungen dieser Gleichung.

wobei sich die rationalen Funktionen f_n und g_n rekursiv bestimmen lassen. Am häufigsten werden $f_0(t) = 1$, $g_0(t) = 0$, $f_1(t) = 1/t$ und $g_1(t) = 1$ benötigt.

Eine weitere Spezies sind die *modifizierten Bessel-Funktionen dritter Art* K_μ .¹⁶ Man findet ebenso die Bezeichnung *McDonald-Funktionen*. Definiert werden sie in der Regel als eine Familie von Lösungen der Differentialgleichung $x^2 y'' + x y' - (x^2 + \nu^2) y = 0$. Für $\nu \in \mathbb{R}$ gilt $K_\nu = K_{-\nu}$. Die Funktionen haben die Integraldarstellung¹⁷

$$K_\mu(z) = \int_0^\infty e^{-z \cosh s} \cosh(\mu s) ds \quad \text{für } |\arg z| < \frac{\pi}{2}.$$

Für diese Funktionen gelten außerdem die Aussagen:¹⁸

$$(1.3-1) \quad K_\mu(z) = \begin{cases} \mathcal{O}\left(\ln\left(\frac{z}{2}\right)\right) & \text{für } z \rightarrow 0 \\ & \text{und } \mu = 0 \\ \mathcal{O}\left(\Gamma(\mu)\left(\frac{z}{2}\right)^{-\mu}\right) & \text{für } z \rightarrow 0 \\ & \text{und } \operatorname{Re}(\mu) > 0 \\ \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z}\right)\right) & \text{für } z \rightarrow \infty \end{cases} \begin{array}{l} \text{logarithmische} \\ \text{Singularität} \\ \text{Pol } \mu\text{-ter Ordnung} \\ \text{exponentieller Abfall} \end{array}.$$

Dabei ist \mathcal{O} das wie folgt definierte *Landau-Symbol*:

Definition: Landau-Symbol

Das Landau-Symbol \mathcal{O} wird für zwei Funktionen¹⁹ $f, g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch die folgende Äquivalenz:

$$f(z) = \mathcal{O}(g(z)) \text{ für } z \rightarrow z_0 \in \mathbb{C} \cup \{\infty\} \\ :\Leftrightarrow \exists C > 0 \quad \forall R > 0 : \left\{ \begin{array}{ll} |z - z_0| < 1/R & \text{für } z_0 \in \mathbb{C} \\ |z| > R & \text{für } z_0 = \infty \end{array} \right\} \Rightarrow |f(z)| \leq C \cdot |g(z)|.$$

1.4 Grundlagen der Fourier-Transformation

Eine umfassende Darstellung der Theorie der Fourier-Transformation ist hier auf Grund der Komplexität des Themas nicht möglich. Deshalb werden in diesem Kapitel nur die für diese Arbeit wichtigsten Definitionen und Sätze angegeben.

Dieses Kapitel geht mit uneigentlichen Integralen *rein formal* um. Es findet keine Diskussion darüber statt, ob die Umformungen im klassischen Sinne, im distributiven Sinne oder überhaupt nicht erlaubt sind. Insbesondere für Aussagen über die Existenz der Integrale ist die einschlägige Literatur heranzuziehen.²⁰ Das wird auch in allen nachfolgenden Kapiteln, in denen die Fourier-Transformation benutzt wird, so gehandhabt.

Es gibt viele gebräuchliche Varianten, die Fourier-Transformation und ihre Inverse zu definieren.²¹ Diese Definitionen gehen durch einfache Substitution und Skalierung ineinander über. In dieser Arbeit werden die folgenden Definitionen benutzt, die der Konvention von [HörmanderI] entsprechen:

¹⁶Sie tauchen unter anderem in Tabelle 1 auf.

¹⁷[AbramStegun], Gleichung 9.6.24.

¹⁸In [AbramStegun] sind diesen Funktionen die Kap. 9.6 bis 9.8 und 10.2 gewidmet, hier werden speziell die Gleichungen 9.6.9 und 9.7.2 benutzt. Entsprechende Aussagen finden sich auch in [Bron], Kap. 3.3.1.3.4 und [CADII] vom 25.05.93 und 22.06.93.

¹⁹Siehe z. B. [HämmHoff], S. 41f.

²⁰Passende Integralsätze für dieses Kapitel, z. B. den von Fubini, findet man in [BronE], Kap. 8.2.4.3.

²¹Vgl. [BarrosNeto], [HörmanderI] und [SteinWeiss].

Definition: Fourier-Transformation

Für $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ setzt man, falls der Ausdruck existiert:

$$\overset{(d)}{\text{FT}}(f)(\omega) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{\perp i x^{\text{tr}} \omega} d^d x.$$

Man nennt dann $\overset{(d)}{\text{FT}}(f)$ die *Fourier-Transformierte* von f .

Definition: inverse Fourier-Transformation

Für $\hat{f} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ setzt man, falls der Ausdruck existiert:

$$\overset{(d)}{\text{FT}}^{\perp 1}(\hat{f})(x) := (2\pi)^{\perp d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\omega) e^{+i\omega^{\text{tr}} x} d^d \omega.$$

Man nennt $\overset{(d)}{\text{FT}}^{\perp 1}(\hat{f})$ die *inverse Fourier-Transformierte* von \hat{f} .

Die Schreibweise $\overset{(d)}{\text{FT}}^{\perp 1}$ suggeriert, daß $\overset{(d)}{\text{FT}} \circ \overset{(d)}{\text{FT}}^{\perp 1} = \text{Id}$ und $\overset{(d)}{\text{FT}}^{\perp 1} \circ \overset{(d)}{\text{FT}} = \text{Id}$ gilt. Das ist aber bei weitem nicht auf jedem Funktionenraum gegeben.²² Die Operatoren $\overset{(d)}{\text{FT}}$ und $\overset{(d)}{\text{FT}}^{\perp 1}$ sind linear in f bzw. \hat{f} .

Da Mißverständnisse meistens ausgeschlossen sind, kann man die Dimensionsangabe ‘ (d) ’ weglassen. Soll eine Funktion mehrerer Variablen nur bezüglich einer Variablen transformiert werden, so verdeutlicht man das mittels einer hochgestellten Variablenangabe: $\overset{(d)}{\text{FT}}^x(f(x, y))(\omega)$ als Funktion von ω und y bzw. $\overset{(d)}{\text{FT}}^{\perp 1, \omega}(\hat{f}(\omega, \eta))(x)$ als Funktion von x und η . Die Tabelle 1 auf S. 48 enthält eine Liste der für diese Arbeit wichtigsten Fourier-Transformierten.

Statt der Fourier-Transformation kann auch jede andere bijektive Integraltransformation benutzt werden, sobald ihre Kernfunktion $k(x, \omega)$ die Anforderung $k(x, \omega_1 + \omega_2) = k(x, \omega_1) \cdot k(x, \omega_2)$ erfüllt. Dadurch bleibt de facto nur noch die Fourier-Transformation übrig.

Satz 1.4-1 (Ein Existenzsatz)

$$\begin{aligned} f \in L_1(\mathbb{R}^d) &\Rightarrow \overset{(d)}{\text{FT}}(f) \in C(\mathbb{R}^d) \quad \text{existiert.} \\ f \in S(\mathbb{R}^d) &\Rightarrow \overset{(d)}{\text{FT}}(f) \in S(\mathbb{R}^d) \quad \text{existiert.} \end{aligned}$$

Somit existiert auch $\overset{(d)}{\text{FT}}(f)$ für $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \subset S(\mathbb{R}^d)$.

Satz 1.4-2 (Zusammenhang zwischen den Operatoren $\overset{(d)}{\text{FT}}$ und $\overset{(d)}{\text{FT}}^{\perp 1}$)

Für alle Fourier-transformierbaren $\hat{f} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ gilt:

$$\overset{(d)}{\text{FT}}^{\perp 1}(\hat{f}(\omega))(x) = (2\pi)^{\perp d} \overset{(d)}{\text{FT}}(\hat{f}(\omega))(-x) = (2\pi)^{\perp d} \overset{(d)}{\text{FT}}(\hat{f}(-\omega))(x).$$

²²Mehr dazu in Satz 1.4-12 und der zugehörigen Anmerkung.

Satz 1.4-3 (Fourier-Transformation von Translaten)Für alle Fourier-transformierbaren $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ gilt:

(1.4-1) $\forall t \in \mathbb{R}^d : \quad \text{FT}(f(x-t))(\omega) = e^{\perp i t^{\text{tr}} \omega} \text{FT}(f(x))(\omega)$

(1.4-2) $\quad \text{und} \quad \text{FT}(e^{i t^{\text{tr}} x} f(x))(\omega) = \text{FT}(f(x))(\omega - t) .$

Beweis:zu Gleichung (1.4-1):

$$\begin{aligned} \text{FT}(f(x-t))(\omega) &= \int f(x-t) e^{\perp i x^{\text{tr}} \omega} dx && \text{Substitution } y := x-t \\ & && \Rightarrow \det \frac{\partial x}{\partial y} = 1 \\ &= \int f(y) e^{\perp i (y^{\text{tr}} \omega + t^{\text{tr}} \omega)} dy \\ &= e^{\perp i t^{\text{tr}} \omega} \int f(y) e^{\perp i y^{\text{tr}} \omega} dy \end{aligned}$$

zu Gleichung (1.4-2): analog.q.e.d.**Satz 1.4-4** (Fourier-Transformation von Funktionen mit skalierten Variablen)Für alle Fourier-transformierbaren $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ und alle $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt:

(1.4-3) $\text{FT}(f(ax))(\omega) = \frac{1}{|a|^d} \text{FT}(f(x))\left(\frac{1}{a}\omega\right) \quad \text{und}$

(1.4-4) $\text{FT}^{\perp 1}(f(\omega))(ax) = \frac{1}{|a|^d} \text{FT}^{\perp 1}\left(f\left(\frac{1}{a}\omega\right)\right)(x) .$

Beweis:zu Gleichung (1.4-3):

$$\begin{aligned} \text{FT}(f(ax))(\omega) &= \int f(ax) e^{\perp i x^{\text{tr}} \omega} dx && \text{Substitution } y := ax \\ & && \Rightarrow \det \frac{\partial x}{\partial y} = \left(\frac{1}{a}\right)^d \\ &= \int f(y) e^{\perp i y^{\text{tr}} \omega/a} |a|^{\perp d} dy \\ &= |a|^{\perp d} \text{FT}(f(x))(\omega/a) \end{aligned}$$

zu Gleichung (1.4-4): analog.q.e.d.**Satz 1.4-5** (Komplexe Konjugation von Fourier-Transformierten)Für alle Fourier-transformierbaren $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ gilt:

$$\overline{\text{FT}(f(x))(\omega)} = \text{FT}(\overline{f(-x)})(\omega) = \text{FT}(\overline{f(x)})(-\omega).$$

Für die inverse Fourier-Transformation gilt die analoge Aussage:

$$\overline{\text{FT}^{\perp 1}(f(x))(\omega)} = \text{FT}^{\perp 1}(\overline{f(-x)})(\omega) = \text{FT}^{\perp 1}(\overline{f(x)})(-\omega).$$

Beweis:

$$\int \overline{f(x) e^{\perp i x^{\text{tr}} \omega}} dx = \int \overline{f(x)} e^{i x^{\text{tr}} \omega} dx = \begin{cases} \int \overline{f(-x)} e^{\perp i x^{\text{tr}} \omega} dx & \text{Substitution} \\ \int \overline{f(x)} e^{\perp i x^{\text{tr}}(\perp \omega)} dx & x \mapsto -x \end{cases}$$

Die zweite Aussage folgt mit Satz 1.4-2.

q.e.d.

Satz 1.4-6 (Fourier-Transformation von radialen Funktionen)

Die Funktion $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ sei radial, d.h. $\Phi(x) = \phi(\|x\|_2)$ und Fourier-transformierbar. Dann ist auch ihre Fourier-Transformierte φ radial: $\varphi(\omega) = \varphi_0(\|\omega\|_2)$.²³ Darüber hinaus gilt für $\Phi \in L_1(\mathbb{R}^d)$ und $d \geq 2$ mit $\nu := \frac{d+2}{2}$.²⁴

$$\varphi_0(r) = 2\pi r^{-\nu} \int_0^\infty \phi(s) J_\nu(2\pi r s) s^{\nu+1} ds.$$

Dabei ist J_ν eine sphärische Bessel-Funktion erster Art.

Bemerkung:

Der Integralausdruck im Satz 1.4-6 hat die Form einer sogenannten *Hankel-Transformation erster Art*:

$$\text{HT}(f)(r) := \int_0^\infty f(s) J_\nu(rs) ds.$$

In der Literatur finden sich entsprechende Tafeln darüber.

Satz 1.4-7 (Fourier-Transformation bezüglich zweier Variablen)

Die Fourier-Transformation über \mathbb{R}^{2d} läßt sich häufig, d. h. wenn an der angegebenen Stelle im Beweis der Satz von Fubini anwendbar ist, auf die Fourier-Transformation über \mathbb{R}^d wie folgt zurückführen:

$$\begin{aligned} \text{FT}^{(2d)}(f(x, y)) &= \text{FT}^{(d)} y \circ \text{FT}^{(d)} x (f(x, y)), \\ \text{FT}^{\perp 1}(\hat{f}(\omega, \eta)) &= \text{FT}^{\perp 1, \eta} \circ \text{FT}^{\perp 1, \omega}(\hat{f}(\omega, \eta)). \end{aligned}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \text{FT}^{(2d)}(f(z))(\zeta) &= \int_{\mathbb{R}^{2d}} f(z) e^{\perp i z^{\text{tr}} \zeta} d^{2d} z && \text{mit } z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \zeta = \begin{pmatrix} \omega \\ \eta \end{pmatrix} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} f(x, y) e^{\perp i \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{\text{tr}} \begin{pmatrix} \omega \\ \eta \end{pmatrix}} d^{2d}(x, y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(x, y) e^{\perp i x^{\text{tr}} \omega} d^d x \right) e^{\perp i y^{\text{tr}} \eta} d^d y, && \text{falls Fubini} \\ &= \text{FT}^{(d)} y \left(\text{FT}^{(d)} x (f(x, y))(\omega) \right) (\eta) && \text{anwendbar ist} \end{aligned}$$

Mit Satz 1.4-2 folgt die Behauptung über die inverse Fourier-Transformation.

q.e.d.

²³Auf Grund von Satz 1.4-2 gilt ebenso die Umkehrung. Ein Beweis findet sich z. B. in [SteinWeiss], Kap. IV, Corollary 1.2.

²⁴Vgl. [SteinWeiss], Kap. IV, Theorem 3.3.

Satz 1.4-8 (Fourier-Transformation von Ableitungen und Ableitungen von Fourier-Transformierten)

Für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ und alle Fourier-transformierbaren $f \in C^{|\alpha|}(\mathbb{R}^d)$ gilt, falls die Ausdrücke existieren:

$$\begin{aligned} \text{FT}(D^\alpha f(x))(\omega) &= (i\omega)^\alpha \text{FT}(f(x))(\omega), \\ D^\alpha(\text{FT}(f(x)))(\omega) &= \text{FT}((-ix)^\alpha f(x))(\omega). \end{aligned}$$

Man beweist dies mittels $|\alpha|$ -facher partieller Integration.

Definition: Faltung von Funktionen (auch *Konvolution* genannt)

Für $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ setze, falls der Ausdruck existiert:

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) g(y) d^d y.$$

Will man verdeutlichen, daß eine *radiale* Funktion $f(r)$, die für beliebige Dimensionen d definiert werden kann, auf einem bestimmten \mathbb{R}^d gefaltet wird, so gibt man die Dimension als unteren Index am ‘*’ an, z. B. $f *_3 f$.

Satz 1.4-9 (Fourier-Transformation von gefalteten Funktionen)

Falls $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ und ihre Faltung Fourier-transformierbar sind, gilt:

$$\text{FT}(f * g) = \text{FT}(f) \text{FT}(g) \quad \text{FT}^{\perp 1}(f) \text{FT}^{\perp 1}(g) = (2\pi)^{\perp d} \text{FT}^{\perp 1}(f * g)$$

und unter analogen Voraussetzungen:

$$\text{FT}(f g) = (2\pi)^{\perp d} \text{FT}(f) * \text{FT}(g) \quad \text{FT}^{\perp 1}(f) * \text{FT}^{\perp 1}(g) = \text{FT}^{\perp 1}(f g).$$

Einen Beweis findet man in [HörmanderI], S. 163 und Satz 1.4-2.

Definition: Fourier-Transformation von Distributionen

oder *verallgemeinerte Fourier-Transformation*:

Zu $T \in F^*$ und $\varphi \in F$ setze:

$$(\text{vFT}(T))[\varphi] := T[\text{FT}(\varphi)],$$

falls $\text{FT}(\varphi) \in F$ existiert.

Die Sätze 1.4-2 und 1.4-8 können entsprechend auf die verallgemeinerte Fourier-Transformation übertragen werden.

Satz 1.4-10 (Verallgemeinerte Fourier-Transformation von regulären Distributionen)

Seien die Funktion $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ und ihre reguläre Distribution Fourier-transformierbar.²⁵ Dann gilt:

$$\text{vFT}(T_f) = T_{\text{FT}(f)} .$$

²⁵Das ist z. B. für $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ erfüllt.

Beweis:

$$\begin{aligned}
 \text{vFT}(T_f)[\varphi] &= T_f[\text{FT}(\varphi)] && \text{Definition von vFT} \\
 &= \int f(\omega) \text{FT}(\varphi)(\omega) d\omega \\
 &= \int f(\omega) \int \varphi(x) e^{\perp i x^{\text{tr}} \omega} dx d\omega && \varphi : \text{Fourier-transformierbar} \\
 &= \int \varphi(x) \int f(\omega) e^{\perp i \omega^{\text{tr}} x} d\omega dx && \text{Fubini} \\
 &= \int \varphi(x) \text{FT}(f)(x) dx \\
 &= T_{\text{FT}(f)}[\varphi]
 \end{aligned}$$

q.e.d.

Eine Verallgemeinerung davon ist:

Satz 1.4-11 (Plancherel)

$$\forall f \in L_2 \quad \exists \hat{f} \in L_2 \quad \text{so da\ss} \quad \forall \varphi \in S : \quad \int f \text{FT}(\varphi) = \int \hat{f} \varphi.$$

Ein Beweis findet sich z. B. in [DigSigVer], Kap. 1.5, Satz 2.

Hier gilt also: $\text{vFT}(T_f) = T_{\hat{f}}$, und in *diesem* Sinne ist " $\hat{f} = \text{vFT}(f)$ ". Der Sachverhalt inspiriert die folgende Definition:

Definition: verallgemeinerte Fourier-Transformation von Funktionen

Falls für eine Funktion $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ und einen Testfunktionenraum F ein $\hat{f} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ existiert, so da\ss

$$\forall \varphi \in F : \quad \int f(x) \text{FT}(\varphi)(x) dx = \int \hat{f}(\omega) \varphi(\omega) d\omega$$

gilt, so setzt man

$$\text{vFT}(f) := \hat{f}$$

und bezeichnet den Ausdruck als *verallgemeinerte Fourier-Transformierte der Funktion f* . Dabei darf man nicht vergessen, da\ss diese Definition vom Testfunktionenraum F abhängt. So sind z. B. Polynome bezüglich $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ und $S(\mathbb{R}^d)$ transformierbar, bezüglich des größeren Raumes $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ jedoch nicht.

Satz 1.4-12 (Parseval-Gleichung)

$$\forall f, g \in S : \quad \int f \bar{g} = (2\pi)^{\perp d} \int \text{FT}(f) \overline{\text{FT}(g)}.$$

$$\forall f, g \in L_2 : \quad \int f \bar{g} = (2\pi)^{\perp d} \int \text{vFT}(f) \overline{\text{vFT}(g)}.$$

Der Beweis benutzt gewöhnlich Satz 1.4-11.²⁶

²⁶Vgl. [HörmanderI], S. 163 oder [Großmann], S. 92.

Bemerkung:

Aus Satz 1.4-12 ist ersichtlich, daß die (verallgemeinerte) Fourier-Transformation auf L_2 ein *Normisomorphismus* ist, denn der Vorfaktor $(2\pi)^{\pm d}$ entfällt, wenn die Definition von FT und $\text{FT}^{\perp 1}$ symmetrisiert wird, indem beide Integrale den Faktor $(2\pi)^{\pm d/2}$ bekommen. Auf $S(\mathbb{R}^d)$ ist die Fourier-Transformation stetig, linear und bijektiv; es gilt $\text{FT}^{\perp 1} \circ \text{FT} = \text{Id} = \text{FT} \circ \text{FT}^{\perp 1}$. Dasselbe gilt für vFT auf $S(\mathbb{R}^d)^*$.

Bemerkung 1.4-13

In dieser Arbeit werden häufig Funktionen f Fourier-transformiert, die sich in *keinem* der Räume L_p , $p \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ oder S befinden. Man kann meist nur $f \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ voraussetzen. Beispiele dafür sind Polynome oder rationale Funktionen mit nicht hebbaren Polstellen. Das Produkt der ersteren mit jeder beliebigen Testfunktion $\varphi \in S$ läßt sich über \mathbb{R}^d integrieren, bei den letzteren darf man nur solche φ zulassen, die an den Polstellen von f Nullstellen von hinreichend hoher Ordnung haben.²⁷

Die Methoden der *Regularisierung*, die nötig sind, um auch solche Funktionen f zu behandeln, werden in [WeinrichDr], Kap. 4.3 sehr ausführlich erläutert. Hier sei nur ausdrücklich darauf hingewiesen, daß die Tabelle 1 auf Seite 48 in der Spalte ‘vFT(Φ)’ auch Funktionen enthält, die nur als verallgemeinerte Fourier-Transformierte der *regularisierten* Funktion f verstanden werden dürfen. Besonders bei den Funktionen f , die Polstellen haben, muß man damit rechnen, daß zusätzlich δ -Funktionalen und Ableitungen von δ -Funktionalen auftreten. Diese sind in der Tabelle *nicht* angegeben.

1.5 Norm und Kondition einer Matrix**Definition: p, q -Norm einer Matrix**

Die p, q -Norm einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{d \times d}$ ist definiert als

$$\|A\|_{p,q} := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_q} = \max_{\|x\|_q=1} \|Ax\|_p,$$

wobei $p, q \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ sind. Falls es offensichtlich ist, welche Vektornormen gemeint sind (meist sind dies die 2-Normen), läßt man die Indizes p, q weg.

Definition: größter und kleinster Betrag eines Eigenwertes

Der größte und der kleinste Betrag eines Eigenwertes einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{d \times d}$ seien bezeichnet mit:

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}(A) &:= \max\{|\lambda| : \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\} \quad \text{und} \\ \underline{\lambda}(A) &:= \min\{|\lambda| : \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\}. \end{aligned}$$

Allgemein gebräuchlich ist die Bezeichnung *Spektralradius einer Matrix* für $\bar{\lambda}(A)$. Die 2,2-Norm hat die angenehme Eigenschaft:²⁸

$$\forall A \in \mathbb{C}^{d \times d} : \|A\|_{2,2} = \sqrt{\bar{\lambda}(A^{\text{tr}} A)}.$$

²⁷Stellen innerhalb von *offenen Umgebungen*, auf denen f konstant Null ist, kann man durchaus die Nullstellenordnung ∞ zuweisen.

²⁸[HämmHoff], S. 76.

Wenn die Matrix *selbstadjungiert* ist, also $\overline{A}^{\text{tr}} = A$ gilt, vereinfacht sich die Gleichung zu:

$$(1.5-1) \quad \forall A = \overline{A}^{\text{tr}} \in \mathbb{C}^{d \times d} : \quad \|A\|_{2,2} = \overline{\lambda}(A) ,$$

denn aus der linearen Algebra kennt man für solche A :

$$(1.5-2) \quad \begin{aligned} \overline{\lambda}(A) &= \max\{ \|Ax\|_2 : x \in \mathbb{C}^d \wedge \|x\|_2 = 1 \} \quad \text{und} \\ \underline{\lambda}(A) &= \min\{ \|Ax\|_2 : x \in \mathbb{C}^d \wedge \|x\|_2 = 1 \} . \end{aligned}$$

Die Kondition eines linearen Gleichungssystems bzw. einer Matrix ist ein Maß für die numerische Stabilität²⁹ möglicher Lösungsverfahren. Sie ist definiert durch:

Definition: Kondition einer Matrix

Die Kondition einer Matrix A bezüglich der $\|\cdot\|_{p,q}$ -Norm ist

$$\text{cond}_{p,q}(A) := \begin{cases} \|A\|_{p,q} \|A^{\perp 1}\|_{q,p} & \text{falls } A^{\perp 1} \text{ existiert,} \\ \infty & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wie oben läßt man die Indizes meist weg. Man benutzt nur von Vektornormen induzierte Matrixnormen,³⁰ weil die Ungleichung $\|Ax\|_p \leq \|A\|_{p,q} \|x\|_q$ von essentieller Bedeutung ist.

Für $p = q = 2$ und $A = \overline{A}^{\text{tr}}$ ergibt sich, falls $A^{\perp 1}$ existiert:

$$(1.5-3) \quad \begin{aligned} &\text{cond}_{2,2}(A) \\ &= \overline{\lambda}(A) \cdot \overline{\lambda}(A^{\perp 1}) \\ &= \max\{ |\lambda| : \lambda \text{ ist Eigenwert von } A \} \cdot \max\{ |1/\lambda| : \lambda \text{ ist Eigenwert von } A \} \\ &= \frac{\max\{ |\lambda| : \lambda \text{ ist Eigenwert von } A \}}{\min\{ |\lambda| : \lambda \text{ ist Eigenwert von } A \}} \\ &= \frac{\max\{ \|Ax\|_2 : x \in \mathbb{C}^d \wedge \|x\|_2 = 1 \}}{\min\{ \|Ax\|_2 : x \in \mathbb{C}^d \wedge \|x\|_2 = 1 \}} \quad \text{analog (1.5-2).} \end{aligned}$$

Weitere grundlegende Eigenschaften der Kondition findet man in jedem Buch über Numerik. Eine typische Aussage ist etwa:

Satz 1.5-1 (Fehlerfortpflanzung bei der Lösung eines linearen Gleichungssystems)

Aus $Ax = b$ und $(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b + \Delta b$ folgt, falls $\|\Delta A\|_{p,q} \cdot \|A^{\perp 1}\|_{q,p} < 1$ gilt:³¹

$$\frac{\|\Delta x\|_q}{\|x\|_q} \leq \frac{\text{cond}_{p,q}(A)}{1 - \text{cond}_{p,q}(A) \frac{\|\Delta A\|_{p,q}}{\|A\|_{p,q}}} \left(\frac{\|\Delta A\|_{p,q}}{\|A\|_{p,q}} + \frac{\|\Delta b\|_p}{\|b\|_p} \right) .$$

²⁹Das ist die Unempfindlichkeit gegenüber den unvermeidlichen Rundungsfehlern, die bei jeder einzelnen Operation auftreten.

³⁰Zumindest benutzt man mit Vektornormen verträgliche Matrixnormen. Die oben eingeführten p, q -Matrixnormen werden von den entsprechenden Vektornormen induziert und sind somit verträglich.

³¹Vgl. [HämmHoff], S. 84.

Die Kondition einer Matrix ist immer durch 1 nach unten beschränkt. Am Satz 1.5-1 ist zu erkennen, daß der relative numerische Fehler mit $\text{cond}_{p,q}(A)$ fast linear anwächst.³² Man ist also bestrebt, die Kondition nach oben abzuschätzen, wozu meist $\|A\|_{p,q}$ und $\|A^{-1}\|_{q,p}$ einzeln betrachtet werden. Im Falle der 2,2-Norm ist dafür der Satz von Gerschgorin sehr nützlich. Er lautet:

Satz 1.5-2 (Gerschgorin)

Sei $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{C}^{d \times d}$ beliebig. Dann gilt:

$$\{ \lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{ ist Eigenwert von } A \} \subseteq \bigcup_{i=1, \dots, d} K_i,$$

wobei

$$K_i := \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - \lambda_i| \leq \sum_{j=1, \dots, d, j \neq i} |a_{i,j}| \right\}$$

die Kreisscheibe um das i -te Diagonalelement der Matrix bezeichnet, deren Radius die Zeilensumme der Beträge der i -ten Zeile ohne das Diagonalelement ist. Genausogut kann man auch die entsprechende *Spaltensumme* benutzen.³³

Für selbstadjungierte Matrizen folgt mit Gleichung (1.5-1):

$$(1.5-4) \quad \|A\|_{2,2} = \bar{\lambda}(A) \leq \max_{i=1, \dots, d} \left(|a_{i,i}| + \sum_{j=1, \dots, d, j \neq i} |a_{i,j}| \right).$$

Definition: bedingt positiv definite Matrix

Eine bedingt positiv definite Matrix ist eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{d \times d}$ auf dem Untervektorraum $V \subseteq \mathbb{C}^d$ genau dann, wenn gilt:

$$\begin{aligned} & A^{\text{tr}} = \bar{A} \quad (\text{d.h. } A \text{ ist selbstadjungiert}) \\ \wedge \quad & \forall x \in V : x^{\text{tr}} A x \geq 0 \\ \wedge \quad & \forall x \in V : x^{\text{tr}} A x = 0 \Leftrightarrow x = 0. \end{aligned}$$

Für $V = \mathbb{C}^d$ nennt man die Matrix schlicht *positiv definit*.

Satz 1.5-3 (Hauptachsentransformationssatz)

Für jede *selbstadjungierte* Matrix $A = \bar{A}^{\text{tr}} \in \mathbb{C}^{d \times d}$ gibt es eine *Orthonormalbasis* B des \mathbb{C}^d aus Eigenvektoren von A . Entsprechend gibt es eine *unitäre Matrix* $P \in \mathbb{C}^{d \times d}$ mit $P^{\perp 1} = \bar{P}^{\text{tr}}$, die den Basiswechsel von B zur kanonischen Basis K vermittelt, so daß $D := P^{\perp 1} A P$ eine Diagonalmatrix ist, deren Diagonale aus den Eigenwerten von A besteht.

³²[SchwarzNum] stellt auf S. 33 die Daumenregel auf, daß man pro 10er Potenz von $\text{cond}_{p,q}(A)$ eine Dezimalstelle Genauigkeit der Lösung verliert. Nun sind Konditionen der Größenordnung 10^{10} bei großen, vollbesetzten Matrizen durchaus nichts ungewöhnliches. Solche Matrizen kommen vor — die Stützstellenzahl N kann durchaus 5000 betragen. Dünnbesetzte Matrizen wurden erst durch die radialen Basisfunktionen mit kompaktem Träger möglich. In ungünstigen Fällen hat man Präkonditionierungsmethoden zur Verfügung, die hier aber nicht behandelt werden sollen.

³³Ein Beweis findet sich z. B. in [HämmHoff], S. 110f.

Für alle $x \in \mathbb{C}^d$ folgt mit $y := P^{\text{tr}} x$ für die Quadrik $x^{\text{tr}} A \bar{x}$:

$$x^{\text{tr}} A \bar{x} = x^{\text{tr}} P D \overline{P^{\text{tr}} x} = (P^{\text{tr}} x)^{\text{tr}} D \overline{(P^{\text{tr}} x)} = y^{\text{tr}} D \bar{y} = \sum_{j=1}^d \lambda_j |y_j|^2 .$$

Für den Betrag dieser Quadrik ergeben sich wegen $\|y\|_2 = \|P^{\text{tr}} x\|_2 = \|x\|_2$ daraus die folgenden Abschätzungen:

$$(1.5-5) \quad \forall x \in \mathbb{C}^d : \quad \underline{\lambda}(A) \|x\|_2^2 \leq |x^{\text{tr}} A \bar{x}| \leq \overline{\lambda}(A) \|x\|_2^2 .$$

Weiterhin erhält man den

Satz 1.5-4

Sei $A \in \mathbb{C}^{d \times d}$ eine selbstadjungierte Matrix mit den Eigenwerten λ_j und den zugehörigen Eigenvektoren e_j . Sei $B := \{e_j\}_{j=1, \dots, d}$ deren Menge.

Sei V ein Untervektorraum von \mathbb{C}^d und $\tilde{B} \subseteq B$ die Menge der Eigenvektoren mit Komponente in Richtung V , d. h. $\tilde{B} = \{e \in B : \langle e | x \rangle \neq 0 \text{ für ein } x \in V\}$. Ohne Einschränkung sind dies die ersten \tilde{d} Elemente von B . Dann gilt:

$$\begin{aligned} & A \text{ ist bedingt positiv definit auf } V \\ \Leftrightarrow & A \text{ ist positiv definit auf } \text{span}(\tilde{B}) \\ \Leftrightarrow & \min\{|\lambda_j|\}_{j=1, \dots, \tilde{d}} > 0 . \end{aligned}$$

Insbesondere mit $V = \mathbb{C}^d$ (und entsprechend $\tilde{V} = \mathbb{C}^d$) folgt:

$$A : \text{ positiv definit auf } \mathbb{C}^d \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\lambda}(A) > 0 .$$

2 Grundlagen der Interpolation mit symmetrischen Basisfunktionen

2.1 Die Funktionenräume Fun^d und \mathbb{P}_m^d

Definition: Raum Fun^d

Der Raum Fun^d aller komplexwertigen Funktionen auf dem \mathbb{R}^d ist definiert durch

$$\text{Fun}^d := \left\{ f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C} \right\} .$$

Definition: Ordnung eines Polynoms

Die Ordnung eines Polynoms

$$p(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d: |\alpha| < m} c_\alpha x^\alpha \quad (\text{die } \alpha \text{ sind Multiindizes})$$

auf \mathbb{R}^d ist die kleinste Zahl $\text{ord}(p) := m \in \mathbb{N}_0$, die nicht mehr als Betrag eines Exponenten vorkommt, d.h. für die gilt: $|\alpha| \geq m \Rightarrow c_\alpha = 0$.

Definition: Polynomraum \mathbb{P}_m^d

$$\mathbb{P}_m^d := \left\{ p \in \text{Fun}^d : p \text{ ist ein Polynom mit } \text{ord}(p) \leq m \right\} .$$

Aus der Definition ist sofort ersichtlich:

- $\text{ord}(p) = \text{grad}(p) + 1$ für $p \neq 0$; auf \mathbb{R}^1 ist $\text{ord}(p)$ also die Anzahl der Koeffizienten.
- Eine Basis von \mathbb{P}_m^d ist $\{x^\alpha : \alpha \in \mathbb{N}_0^d \wedge |\alpha| < m\}$.

Desweiteren ergibt sich:

- $\dim \mathbb{P}_m^d = \binom{m+d-1}{d}$ für $m \geq 1$; für $\mathbb{P}_0^d = \{0\}$ setzt man $\dim \mathbb{P}_0^d := 0$.

Im folgenden wird $\dim \mathbb{P}_m^d$ mit Q bezeichnet.

2.2 Die Funktionalräume PF^d und $\tilde{\mathcal{S}}_m^{d\perp}$

Definition: Punktauswertungsfunktional

Das Punktauswertungsfunktional zu $X = \{x_i\}_{i \in M}$ und $c \in \mathbb{C}^N$ ist mit der Dirac-Distribution³⁴ δ definiert durch:

$$\lambda := \lambda_{X,c} := \sum_{j \in M} c_j \delta_{x_j} .$$

³⁴Sie wird auch *Kronecker-Symbol* genannt. Korrekter ist jedoch die Bezeichnung *Dirac-Distribution*.

Für $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ gilt also:

$$\lambda_{X,c}(f) = \sum_{j \in M} c_j f(x_j) = c^{\text{tr}} f(X).$$

Die Menge aller solcher Funktionale wird mit

$$\text{PF}^d := \left\{ \lambda_{X,c} : \text{Fun}^d \rightarrow \mathbb{C} \text{ mit } X = \{x_i\}_{i \in M} \text{ und } c \in \mathbb{C}^N \text{ beliebig} \right\}$$

bezeichnet. Das komplex konjugierte Funktional sei definiert durch

$$\overline{\lambda_{X,c}} := \lambda_{X,\bar{c}}. \quad \text{Es gilt also: } \overline{\lambda_{X,c}(f)} = \lambda_{X,\bar{c}}(f) \neq \overline{\lambda_{X,c}(f)} = \lambda_{X,\bar{c}}(\bar{f}).$$

Wird ein Funktional auf eine Funktion mehrerer Variablen angewandt, so entsteht eine Mehrdeutigkeit. Man entfernt diese, indem man die Variable als oberen Index angibt, auf die sich das Funktional bezieht. Als Beispiel sei eine Funktion von x und y genannt, auf die das δ -Funktional wirkt:

$$\delta_a^y(f(x, y)) := \delta_a(f(\cdot, y)) := f(x, a).$$

Ein eindeutiger Zusammenhang zwischen einem $\lambda \in \text{PF}^d$ und einem Paar (X, c) läßt sich nur herstellen, wenn man für $c_i \in \mathbb{R}$ z. B. $c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_N$ verlangt. Tatsächlich wird ein solcher Zusammenhang aber nirgends benötigt, wenn man akzeptiert, daß z. B. das Null-Funktional durch $(X, c) = (\{\}, ())$ genauso gut repräsentiert wird wie durch $(X, c) = (\{x_1, \dots, x_N\}, (0, \dots, 0))$.

Hieraus ergibt sich:

- $\lambda_{X,c}$ ist ein lineares Funktional mit $\text{supp } \lambda_{X,c} = X \setminus \{x_j : c_j = 0\}$. Schränkt man es auf einen *normierten* Untervektorraum F von Fun^d ein und impliziert dessen Norm-Konvergenz die punktweise Konvergenz, so ist nach Kapitel 1.2 $\lambda_{X,c}$ eine Distribution.
- PF^d ist ein \mathbb{C} -Vektorraum. Seine Einschränkung $\text{PF}^d|_F$ auf den oben genannten Unterraum F ist ein Untervektorraum von F^* .
- Zum Beispiel für $F := (C(\Omega), \|\cdot\|_\infty) \subset \text{Fun}^d$ ist $\text{PF}^d|_F$ ein *normierter* Raum, und für die induzierte Norm gilt: $|\lambda_{X,c}(f)| \leq \|\lambda_{X,c}\| \cdot \|f\|_\infty$, wobei $\|\lambda_{X,c}\| = \sum_{j \in M} |c_j| = \|c\|_1$ und $\|f\|_\infty = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|$ ist.

Im folgenden ist es weitaus günstiger, einen Teilraum $S_m^{d\perp}(\Phi)$ von $\text{PF}^d|_{C(\mathbb{R}^d)}$ zu betrachten, der mit einer ganz anderen Topologie versehen ist. Diese wird von einem Skalarprodukt induziert, das wiederum von einer fest gewählten symmetrischen Basisfunktion $\Phi \in \text{SBF}^d$ abhängt.³⁵

Definition: Semisymmetrische Sesquilinearform auf PF^d

$\Phi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ habe die Symmetrieeigenschaft $\Phi(x, y) = \overline{\Phi(y, x)}$. Zu $\lambda, \mu \in \text{PF}^d$ definiert man die semisymmetrische Sesquilinearform $(\cdot, \cdot)_\Phi$ auf PF^d bezüglich Φ durch:

$$(\lambda, \mu)_\Phi := \lambda^x \circ \overline{\mu^y}(\Phi(x, y)).$$

In ‘ausgeschriebener’ Form mit $\lambda = \lambda_{X^\lambda, c^\lambda}$, $\mu = \mu_{X^\mu, c^\mu}$:

$$\left(\lambda_{X^\lambda, c^\lambda}, \mu_{X^\mu, c^\mu} \right)_\Phi = \sum_{x_i \in X^\lambda, x_j \in X^\mu} c_i^\lambda \overline{c_j^\mu} \Phi(x_i, x_j).$$

Semisymmetrie und Sesquilinearität von $(\cdot, \cdot)_\Phi$ sind evident.

³⁵Die endgültige Definition von $S_m^{d-}(\Phi)$ erfolgt erst im Kapitel 2.4.

Definition: Raum $\tilde{S}_m^{d\perp}$

$$\tilde{S}_m^{d\perp} := \left\{ \lambda_{X,c} \in \text{PF}^d|_{\mathbb{C}(\mathbb{R}^d)} : p \in \mathbb{P}_m^d \Rightarrow \lambda_{X,c}(p) = \sum_{j \in M} c_j p(x_j) = 0 \right\}.$$

Dies ist die Menge aller Punktauswertungsfunktionale, die auf den Polynomen von Ordnung $\leq m$ verschwinden. $\tilde{S}_m^{d\perp}$ ist ein \mathbb{C} -Untervektorraum von PF^d .

2.3 Bedingt positiv definite Funktionen

Definition: bedingt positiv definite Funktion

Eine bedingt positiv definite Funktion der Ordnung $m \in \mathbb{N}_0$ auf dem \mathbb{R} -Vektorraum V ist ein $\Phi : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\Phi(x, y) = \overline{\Phi(y, x)}$ und der weiteren Eigenschaft:

$$(2.3-1) \quad \forall \lambda \in \tilde{S}_m^{d\perp} : (\lambda, \lambda)_{\Phi} \geq 0 \quad \text{sowie} \quad (\lambda, \lambda)_{\Phi} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0,$$

bzw. ausführlicher formuliert:

Mit

$$\begin{aligned} N &\in \mathbb{N} \text{ beliebig, } M := \{1, \dots, N\}, \\ X &= \{x_j\}_{j \in M} \subset V \text{ paarweise verschieden und} \\ c &\in \mathbb{C}^N \text{ beliebig} \end{aligned}$$

gilt:

$$(2.3-2) \quad p \in \mathbb{P}_m^d \wedge \lambda_{X,c}(p) = c^{\text{tr}} p(X) = 0 \Rightarrow \lambda_{X,c}^x \circ \overline{\lambda_{X,c}^y}(\Phi(x, y)) \geq 0.$$

Oder in ‘ausgeschriebener’ Form mit der Matrix A_{Φ} aus (1.1-11):

$$(2.3-3) \quad \alpha \in \mathbb{N}_0^d \wedge |\alpha| < m \wedge \sum_{j \in M} c_j x_j^{\alpha} = 0 \Rightarrow c^{\text{tr}} A_{\Phi} c = \sum_{i,j \in M} c_i \overline{c_j} \Phi(x_i, x_j) \geq 0,$$

wobei jeweils ‘= 0’ nur für $c = 0$ angenommen werden darf. Ansonsten ist die Funktion nur ‘bedingt positiv *semi*definit’. Funktionen der Ordnung 0 werden schlicht ‘positiv definit’ genannt.³⁶ Der Raum der auf V bedingt positiv definiten Funktionen sei mit

$$\text{BPD}(m, V) := \left\{ \Phi : V \times V \rightarrow \mathbb{C} : \begin{array}{l} \Phi \text{ ist auf } V \text{ bedingt positiv} \\ \text{definit der Ordnung } m \end{array} \right\}$$

bezeichnet. Zur Abkürzung setzt man

$$\text{BPD}(m) := \text{BPD}(m, \mathbb{R}^d).$$

Nach Voraussetzung gilt nun $\text{BPD}(m) \subset \text{SBF}^d$.

³⁶Diese Definition findet sich schon 1938 bei [SchoenComMon], S. 184.

Bemerkung 2.3-1

- Der Raum $V_m^d := \{c \in \mathbb{C}^N : c^{\text{tr}} p(X) = 0 \ \forall p \in \mathbb{P}_m^d\}$ ist ein Untervektorraum von \mathbb{C}^N . Laut Satz 1.5-4 gilt also: $\Phi \in \text{BPD}(m) \Leftrightarrow A_{\Phi}$ ist bedingt positiv definit auf V_m^d .
- Statt $\{x^\alpha : \alpha \in \mathbb{N}_0^d \wedge |\alpha| < m\}$ kann in (2.3-3) auch jede andere Basis des \mathbb{P}_m^d benutzt werden.
- $\Phi \in \text{BPD}(0)$ erzeugen positiv definite Interpolationsmatrizen A_{Φ} , denn für $|\alpha| < m = 0$ ist die Forderung $\sum_{j \in M} c_j x_j^\alpha = 0$ leer. Dadurch ist der Name dieser Funktionenklasse inspiriert.
- Wegen $\mathbb{P}_0^d \subset \mathbb{P}_1^d \subset \dots \subset \mathbb{P}_m^d \subset \dots$ folgt $\text{BPD}(0) \subset \text{BPD}(1) \subset \dots \subset \text{BPD}(m) \subset \dots$, da von Stufe zu Stufe die Menge der zulässigen Polynome p größer, die Menge der zulässigen c kleiner und daher die Bedingung $c^{\text{tr}} A c \geq 0$ schwächer wird.
- Ist $V \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Untervektorraum, so folgt $\text{BPD}(m, V) \supseteq \text{BPD}(m, \mathbb{R}^d)$. Diese Eigenschaft ist insbesondere für $V = \mathbb{R}^{d'}$ mit $d' < d$ nützlich.

Lemma 2.3-2

Setzt man voraus, daß $\Phi \in \text{BPD}(m)$ ist, so wird aus der semisymmetrischen Sesquilinearform $(\cdot, \cdot)_{\Phi}$ ein echtes Skalarprodukt $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\Phi}$ auf $\tilde{S}_m^{d\perp}$.

Beweis:

Es ist nur die positive Definitheit von $(\cdot, \cdot)_{\Phi}$ auf $\tilde{S}_m^{d\perp}$ zu zeigen. Sie gilt laut Gleichung (2.3-1):

$$\Phi \in \text{BPD}(m) \Leftrightarrow \forall \lambda \in \tilde{S}_m^{d\perp} : (\lambda, \lambda)_{\Phi} \geq 0 \quad \wedge \quad [(\lambda, \lambda)_{\Phi} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0].$$

q.e.d.**2.4 Der Funktionalraum $S_m^{d\perp}(\Phi)$ und der Funktionenraum Span_{Φ}^d**

Definition: Raum $S_m^{d\perp}(\Phi)$ zu $\Phi \in \text{BPD}(m)$

Sei $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\Phi}$ das Skalarprodukt aus Lemma 2.3-2. Dann ist

$$S_m^{d\perp}(\Phi) := \left(\tilde{S}_m^{d\perp}, \langle \cdot | \cdot \rangle_{\Phi} \right)$$

ein komplexer *Prä-Hilbertraum*.³⁷

Wie üblich induziert das Skalarprodukt $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\Phi}$ jeweils eine Norm $\|\cdot\|_{\Phi}$, Metrik und Topologie auf $S_m^{d\perp}(\Phi)$. Für die Norm ergibt sich mit der Interpolationsmatrix aus (1.1-11) der Zusammenhang

$$(2.4-1) \quad \|\lambda_{X,c}\|_{\Phi}^2 = \langle \lambda_{X,c} | \lambda_{X,c} \rangle_{\Phi} = \sum_{i,j \in M} c_i \bar{c}_j \Phi(x_i, x_j) = c^{\text{tr}} A_{\Phi} \bar{c}.$$

³⁷Es sind auch andere Bezeichnungen geläufig. In [WeinrichDr], S. 12 z. B. heißt der entsprechende Raum $(\mathbb{P}_m^d)^{\perp}$.

Unter Anwendung des funktionalanalytischen Verfahrens der Vervollständigung gelangt man zur

Definition: Raum $\overline{S_m^{d\perp}(\Phi)}^\Phi$

Der Raum $\overline{S_m^{d\perp}(\Phi)}^\Phi$ zu $\Phi \in \text{BPD}(m)$ sei

$$\begin{aligned} \overline{S_m^{d\perp}(\Phi)}^\Phi &:= \text{Hilbertraum-Abschluß von } S_m^{d\perp}(\Phi) \text{ bezüglich der } \Phi\text{-Topologie} \\ &= \left\{ (\lambda_n) \subset S_m^{d\perp}(\Phi) : (\lambda_n) \text{ ist Cauchy-Folge} \right\} / \left\{ (\lambda_n) : \lambda_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{S_m^{d\perp}(\Phi)} 0 \right\}. \end{aligned}$$

Definition: kanonische Injektion

Dabei ist die kanonische Injektion durch³⁸

$$I : S_m^{d\perp}(\Phi) \rightarrow \overline{S_m^{d\perp}(\Phi)}^\Phi; \quad \lambda \mapsto I(\lambda) := \left\{ (\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} : \lambda_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{S_m^{d\perp}(\Phi)} \lambda \right\}$$

gegeben. Sie ist ein beschränkter, linearer Operator.

Aus der Funktionalanalysis ist bekannt, daß sich das Skalarprodukt $\langle \cdot | \cdot \rangle_\Phi$ von $S_m^{d\perp}(\Phi)$ eindeutig auf $\overline{S_m^{d\perp}(\Phi)}^\Phi$ übertragen läßt, so daß gilt:

$$\forall \lambda, \mu \in S_m^{d\perp}(\Phi) : \quad \langle I(\lambda) | I(\mu) \rangle_{\overline{S_m^{d\perp}(\Phi)}^\Phi} = \langle \lambda | \mu \rangle_\Phi.$$

Dadurch wird $S_m^{d\perp}(\Phi)$ normisomorph zu dem dichten Untervektorraum $I(S_m^{d\perp}(\Phi))$ des komplexen Hilbertraumes $\left(\overline{S_m^{d\perp}(\Phi)}^\Phi, \langle \cdot | \cdot \rangle_{\overline{S_m^{d\perp}(\Phi)}^\Phi} \right)$.

Definition: Raum Span_Φ^d

Sei SBF^d wie in Gleichung (1.1-5) definiert. Zu $\Phi \in \text{SBF}^d$ sei

$$\text{Span}_\Phi^d := \text{span} \left\{ \Phi(\cdot, y) : y \in \mathbb{R}^d \right\} \subseteq \text{Fun}^d$$

die Menge aller *endlichen* Linearkombinationen von Translaten³⁹ von Φ . Span_Φ^d ist ein komplexer Untervektorraum von Fun^d .

Oft benötigt man den Übergang zwischen einem Funktional $\lambda_{X,c}$ und der entsprechenden Funktion aus Span_Φ^d . Daher führt man die Abbildung PFtoSpan_Φ ein:⁴⁰

Definition: Abbildung PFtoSpan_Φ

Für $\Phi \in \text{SBF}^d$ setzt man

$$\text{PFtoSpan}_\Phi : \text{PF}^d \rightarrow \text{Span}_\Phi^d; \quad \lambda \mapsto f_\lambda := \text{PFtoSpan}_\Phi(\lambda) := \lambda^y \Phi(\cdot, y).$$

Für beliebige Elemente $c^{\text{tr}} \Phi(\cdot, X) \in \text{Span}_\Phi^d$ gilt also mit $\lambda := \lambda_{X,c} \in \text{PF}^d$:

$$f_\lambda(x) = \lambda^y \Phi(x, y) = \sum_{j \in M} c_j \Phi(x, x_j) = c^{\text{tr}} \Phi(x, X).$$

Daran erkennt man, daß die Abbildung surjektiv ist.

³⁸Nomenklatur laut [WeinrichDr], Kap. 3.1

³⁹Diese Bezeichnung ist eigentlich nur für translationsinvariante Basisfunktionen korrekt. Sie läßt sich aber ohne Einschränkung auf den allgemeinen Fall übertragen.

⁴⁰Einer alten Programmierertradition folgend, seien selten benutzte Objekte mit besonders aussagekräftigen und daher langen Namen bezeichnet.

Diese Abbildung induziert eine semisymmetrische Sesquilinearform auf Span_{Φ}^d wie folgt:

Definition: semisymmetrische Sesquilinearform auf Span_{Φ}^d

Die semisymmetrische Sesquilinearform auf Span_{Φ}^d ist für $f_{\lambda}, f_{\mu} \in \text{Span}_{\Phi}^d$ gegeben durch:

$$(f_{\lambda}, f_{\mu})_{\text{Span}_{\Phi}^d} := (\lambda, \mu)_{\Phi} .$$

PFtoSpan_{Φ} ist daher eine Sesquilinearformisomorphie.

2.5 Das allgemeine Interpolationsverfahren und seine Lösbarkeit

Kommen wir nun zum allgemeinen Interpolationsverfahren. Mittels der Funktionalschreibweise und den Definitionen⁴¹

$$(2.5-1) \quad \Phi(x, X) := (\Phi(x, x_i))_{i \in M} \quad \text{und} \quad S(x) := (p_k(x))_{k=1, \dots, Q}$$

erhält der Interpolationsansatz (1.1-8) die kurze Form:

$$(2.5-2) \quad \begin{aligned} s_{X, \Phi}(x) &= \lambda_{X, c}^y(\Phi(x, y)) + p(x), & \text{wobei} \\ \lambda_{X, c}^y(\Phi(x, y)) &= c^{\text{tr}} \Phi(x, X) = \sum_{j \in M} c_j \Phi(x, x_j) & \text{und} \\ p(x) &:= \beta^{\text{tr}} S(x) = \sum_{k=1}^Q \beta_k p_k(x) & \text{mit} \\ \{p_k\}_{k=1, \dots, Q} &: \text{eine beliebige Basis von } \mathbb{P}_m^d; & Q := \dim \mathbb{P}_m^d . \end{aligned}$$

Somit ist $s \in \text{Span}_{\Phi}^d + \mathbb{P}_m^d$. In Korollar 2.5-4 wird gezeigt, daß diese Summe sogar *direkt* ist. Sei nun⁴²

$$(2.5-3) \quad \begin{aligned} A_{\Phi} &:= (\Phi(x_i, x_j))_{i, j \in M} \in \mathbb{R}^{N \times N}, \\ P &:= S(X) = (p_k(x_i))_{i \in M, k=1, \dots, Q} \in \mathbb{R}^{N \times Q} . \end{aligned}$$

Dann ergibt die Interpolationsbedingung (1.1-1) $s_{X, \Phi}(X) = y$ das folgende unterbestimmte lineare Gleichungssystem:

$$(2.5-4) \quad A_{\Phi} c + P \beta = y \quad c, y \in \mathbb{C}^N, \beta \in \mathbb{C}^Q .$$

Die Forderung $\lambda_{X, c}(p) = 0 \quad \forall p \in \mathbb{P}_m^d$ aus der Definition von $\tilde{S}_m^{d \perp}$ liefert die fehlenden Bedingungen nach:

$$(2.5-5) \quad \begin{aligned} 0 &= \lambda_{X, c}(p_k) = \sum_{j \in M} c_j p_k(x_j) \quad \forall k = 1, \dots, Q \\ \Rightarrow 0 &= P^{\text{tr}} c . \end{aligned}$$

Zusammengefasst ergibt sich somit das vollständige Interpolationssystem⁴³

$$(2.5-6) \quad \begin{pmatrix} A_{\Phi} & P \\ P^{\text{tr}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} .$$

⁴¹Eine in der Literatur für $\Phi(x, X)$ gebräuchlichere Bezeichnung ist $R(x)$, siehe z. B. [WeinrichDr], S. 8. Statt $S(x)$ wäre die Bezeichnung $p(x)$ konsequenter, was aber wegen der oft auftretenden einfachen Polynome p zu Mißverständnissen führen würde.

⁴²Konsequenter Bezeichnungen wären $\Phi(X, X)$ statt A_{Φ} und $p(X)$ statt P . Sie sind aber nicht gebräuchlich.

⁴³ A_{Φ} bzw. \tilde{A}_{Φ} werden in der Literatur oft als (*generalized*) *distance matrices* bezeichnet.

Im folgenden wird die Abkürzung

$$\tilde{A}_\Phi := \begin{pmatrix} A_\Phi & P \\ P^{\text{tr}} & 0 \end{pmatrix}$$

benutzt. Darüber, unter welchen Bedingungen das System (2.5-6) lösbar ist, geben die folgenden Sätze Auskunft:

Satz 2.5-1

$$\Phi \in \text{BPD}(m) \wedge P : \text{injektiv} \Rightarrow \exists \tilde{A}_\Phi^{\perp 1}$$

Beweis:

Zu zeigen ist: Kern $\tilde{A}_\Phi = \{0\}$. Man betrachte also $\tilde{A}_\Phi \begin{pmatrix} c \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, welches als *homogenes* lineares Gleichungssystem lösbar ist. Sei $\begin{pmatrix} c_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{N+Q}$ eine beliebige Lösung. Dann kann die folgende Argumentation für Real- und Imaginärteil geführt werden; sei ohne Einschränkung $\begin{pmatrix} c_0 \\ \beta_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N+Q}$. Nun gilt:

$$\begin{aligned} & A_\Phi c_0 + P \beta_0 = 0 & \text{(I)} \\ \wedge & P^{\text{tr}} c_0 = 0 & \text{(II)} \\ \Rightarrow & c_0^{\text{tr}} A_\Phi c_0 + c_0^{\text{tr}} P \beta_0 = 0 \\ \wedge & c_0^{\text{tr}} P = 0 \\ \Rightarrow & c_0^{\text{tr}} A_\Phi c_0 = 0. \end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung $\Phi \in \text{BPD}(m)$ ist, gilt für $c \in \mathbb{R}^d$ mit $c^{\text{tr}} p(X) = 0 \forall p \in \mathbb{P}_m^d$ laut (2.3-2) und (2.3-3): $c^{\text{tr}} A_\Phi c = 0 \Leftrightarrow c = 0$. Die Bedingung $c^{\text{tr}} p(X) = 0 \forall p \in \mathbb{P}_m^d$ erfüllt c_0 aber, weil sie (II) entspricht. Daher folgt $c_0 = 0$ und mit (I): $P \beta_0 = 0$. Wegen der Injektivität von P folgt daraus $\beta_0 = 0$. Somit besteht der Kern von \tilde{A}_Φ nur aus dem Nullvektor.⁴⁴
q.e.d.

Bemerkung 2.5-2

$$\begin{aligned} & P : \text{injektiv} \\ \Leftrightarrow & P \beta = 0 \Rightarrow \beta = 0 \\ \Leftrightarrow & \sum_{k=1}^Q \beta_k p_k(x_j) = 0 \quad \forall j \in M \Rightarrow \beta = 0 \quad \text{eindeutig!} \\ \text{mit} & p \in \mathbb{P}_m^d \Rightarrow p = \sum_{k=1}^Q \beta_k p_k \\ \text{folgt} & p(x_j) = 0 \quad \forall j \in M \Rightarrow p = 0 \quad \text{eindeutig!} \end{aligned}$$

Daraus ist ersichtlich, daß auf X eindeutig mit Polynomen der Maximalordnung m interpoliert werden kann. Solche Stützstellenmengen X nennt man \mathbb{P}_m^d -*regulär* oder \mathbb{P}_m^d -*unisolvant*. Diese Eigenschaft stellt eine gewisse Anforderung an die Wahl von X dar; insbesondere muß $M = \#X \geq Q = \dim \mathbb{P}_m^d$ gelten. Allzugroß ist diese Anforderung jedoch nicht, denn schon die einfache Wahl $X := \{\alpha \in \mathbb{N}_0^d : |\alpha| < m\}$ ermöglicht eine eindeutige Polynominterpolation,⁴⁵ selbst wenn die Gitterpunkte bis zu einem gewissen Abstand verschoben werden.

⁴⁴Entnommen aus [IskeDr], Satz 2.1, S. 6.

⁴⁵Vgl. [CADI], 11.05.93.

Bemerkung 2.5-3

Sei, wie in Gleichung (1.1-2), $s_{f,X,\Phi}$ die Interpolante zu f , sei $\Phi \in \text{BPD}(m)$ und P injektiv. Dann gilt $\forall p \in \mathbb{P}_m^d : s_{p,X,\Phi} = p$. Mit anderen Worten: Die Polynome bis zur Ordnung m werden exakt reproduziert.

Beweis:

Sei $p = \sum_{k=1}^Q \beta_k p_k \in \mathbb{P}_m^d$ beliebig. Dann ist $\begin{pmatrix} 0 \\ \beta \end{pmatrix}$ offensichtlich eine Lösung des Interpolations-systems. Laut Satz 2.5-1 ist die Lösung *eindeutig* bestimmt. Die Interpolante muß daher die Form $s_{p,X,\Phi}(x) = 0^{\text{tr}} \Phi(x, X) + \beta^{\text{tr}} S(x) = p(x)$ haben.

q.e.d.

Sollen Polynome höherer Ordnung als m exakt reproduziert werden, so kommt man wegen der linearen Unabhängigkeit⁴⁶ von $\{\Phi(x, x_j)\} \cup \{p_k(x)\}$ nicht umhin, den Wert von m in \mathbb{P}_m^d zu erhöhen. Nach Gleichung (2.3-1) ist $\text{BPD}(m) \subset \text{BPD}(m+n)$ für $n \in \mathbb{N}$, deshalb kann trotzdem die symmetrische Basisfunktion Φ beibehalten werden.

Korollar 2.5-4

Sei $\Phi \in \text{BPD}(m)$ und P injektiv. Dann ist $\text{Span}_{\Phi}^d + \mathbb{P}_m^d$ eine *innere direkte* Summe $\text{Span}_{\Phi}^d \oplus \mathbb{P}_m^d$.⁴⁷

Beweis:

Sei $f \in \text{Span}_{\Phi}^d \cap \mathbb{P}_m^d$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} f(x) &= c_0^{\text{tr}} \Phi(x, X) & \text{(I)} \\ \wedge f(x) &= \beta_0^{\text{tr}} S(x) & \text{(II)} \end{aligned}$$

Laut Definition hat die Interpolante die Form $s_{f,X,\Phi}(x) = c_1^{\text{tr}} \Phi(x, X) + \beta_1^{\text{tr}} S(x)$ und erfüllt die Interpolationsbedingung $f(X) = s_{f,X,\Phi}(X) = c_1^{\text{tr}} \Phi(X, X) + \beta_1^{\text{tr}} S(X)$. Der Vergleich mit (I) liefert wegen Satz 2.5-1: $c_1 = c_0$ und $\beta_1 = 0$. Der Vergleich mit (II) liefert ebenso: $c_1 = 0$ und $\beta_1 = \beta_0$. Zusammen folgt somit: $c_0 = 0$ und $\beta_0 = 0$, also $f = 0$.

q.e.d.**2.6 Die Lagrange-Basis $u(x)$**

Für viele Zwecke ist eine Darstellung der Interpolante bezüglich einer sogenannten *Lagrange-Basis* nützlich:

Definition: Lagrange-Basis

Eine Lagrange-Basis zu $X = \{x_j\}_{j \in M} \subset \mathbb{R}^d$ ist ein Tupel von Funktionen $u(x) = (u_j(x))_{j \in M}$, $u_j : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$, genau dann, wenn

$$(2.6-1) \quad \forall i, j \in M : u_i(x_j) = \delta_{i,j} \quad \text{bzw.} \quad (u_i(x_j))_{i,j \in M} = \text{Id}_{\mathbb{R}^N} \quad .$$

⁴⁶ \tilde{A}_{Φ} ist invertierbar.

⁴⁷Die *innere direkte Summe* zweier Untervektorräume U, V des selben Vektorraumes W ist definiert als $U \oplus V := U + V$ mit der zusätzlichen Bedingung $U \cap V = \{0\}$.

Mit

$$\Phi(x, X) = (\Phi(x, x_i))_{i \in M} \quad \text{und} \quad S(x) = (p_k(x))_{k=1, \dots, Q}$$

wie in Gleichung (2.5-1) ist für jedes $x \in \mathbb{R}^d$ das Interpolationssystem

$$(2.6-2) \quad \begin{pmatrix} A_\Phi & P \\ P^{\text{tr}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi(x, X) \\ S(x) \end{pmatrix}$$

genau dann lösbar, wenn auch (2.5-6) lösbar ist. Die Interpolante erhält damit die Gestalt

$$(2.6-3) \quad s_{X, \Phi}(x) = \sum_{j \in M} c_j \Phi(x, x_j) + \sum_{k=1}^Q \beta_k p_k(x) = c^{\text{tr}} \Phi(x, X) + \beta^{\text{tr}} S(x).$$

Es gilt der

Satz 2.6-1

Falls $\Phi \in \text{BPD}(m)$, P injektiv und $u(x)$, $v(x)$ Lösungen von (2.6-2) sind, so ist

$$(2.6-4) \quad u(x) \quad \text{eine Lagrange-Basis von } X \text{ und}$$

$$(2.6-5) \quad s_{X, \Phi}(x) := \sum_{i \in M} u_i(x) y_i = y^{\text{tr}} u(x) \text{ erfüllt die Interpolationsbedingung (1.1-1).}$$

Bemerkung: Dies ist eine zunächst unerwartete Gestalt der Interpolante aus (1.1-8) bzw. (2.5-2). Sie hat den Vorteil, daß die Werte y_i bzw. $f(x_i)$ für die Interpolante $s_{f, X, \Phi}$ zu einer Funktion f explizit im Term der Interpolante erscheinen und nicht erst über ein lineares Gleichungssystem berechnet werden müssen. Es ergibt sich dann die elegante Form der *Quasi-Interpolante* von f :

$$(2.6-6) \quad s_{f, X, \Phi}(x) = f(X)^{\text{tr}} u(x).$$

Beweis:

Unter den gegebenen Voraussetzungen existiert $\tilde{A}_\Phi^{\perp 1}$, das Interpolationssystem ist also laut Satz 2.5-1 eindeutig lösbar.

zu Gleichung (2.6-4):

Unter der *Voraussetzung* $u_j(x_l) = \delta_{j,l}$ und $v_k(x_l) = 0$ gilt $\forall i, j, l \in M, k = 1, \dots, Q$:

$$\begin{aligned} (A_\Phi u(x_l) + P v(x_l))_i &= \sum_{j \in M} \Phi(x_i, x_j) u_j(x_l) + \sum_{k=1}^Q p_k(x_i) v_k(x_l) \\ &= \Phi(x_i, x_l) \\ \wedge \quad (P^{\text{tr}} u(x_l))_k &= \sum_{j \in M} p_k(x_j) u_j(x_l) \\ &= p_k(x_l) = (S(x_l))_k. \end{aligned}$$

Daher erfüllen diese Lösungen die Interpolationsbedingung (1.1-1), und wegen der Eindeutigkeit der Lösung des linearen Gleichungssystems muß dessen Lösung die Voraussetzung erfüllen.

zu Gleichung (2.6-5):

$$s_{X, \Phi}(x_j) = \sum_{i \in M} u_i(x_j) y_i = \sum_{i \in M} \delta_{i,j} y_i = y_j.$$

q.e.d.

Definition: \mathbb{P}_m^d -reproduzierend oder \mathbb{P}_m^d -exakt
ist eine Lagrange-Basis $u(x)$

$$:\Leftrightarrow \quad \forall p \in \mathbb{P}_m^d : \quad \sum_{j \in M} p(x_j) u_j(x) = p(x) .$$

Bemerkung 2.6-2

Mit $S(x) = (p_k(x))_{k=1, \dots, Q}$ wie in (2.5-1) gilt:

$$(2.6-7) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} \sum_{j \in M} p(x_j) u_j(x) &= p(x) \quad \forall p \in \mathbb{P}_m^d \\ \sum_{j \in M} p_k(x_j) u_j(x) &= p_k(x) \quad \forall k = 1, \dots, Q \\ \Leftrightarrow \quad P^{\text{tr}} u(x) &= S(x) . \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung des linearen Systems (2.6-2) besagt also, daß die daraus gewonnene Lagrange-Basis $u(x)$ \mathbb{P}_m^d -reproduzierend ist.

2.7 Das Fehlerfunktional $\varepsilon_{x,X,\Phi}$

Sollen Interpolanten bezüglich verschiedener symmetrischer Basisfunktionen Φ verglichen werden, so bietet sich die Betrachtung des Approximationsfehlers laut Gleichung (1.1-3) an:

Definition: Fehlerfunktional der Interpolation

Sei eine Funktion $f \in \text{Fun}^d$ vorgegeben, die durch die Interpolation approximiert werden soll. Sei $s_{f,X,\Phi}$ die zu f gehörige Interpolante bezüglich der angegebenen Stützstellenmenge X und der symmetrischen Basisfunktion $\Phi \in \text{SBF}^d$. Der *Interpolationsfehler*⁴⁸ im Punkt $x \in \mathbb{R}^d$ hat dann die Form:

$$(2.7-1) \quad \varepsilon_{x,X,\Phi}(f) := f(x) - s_{f,X,\Phi}(x) = f(x) - (c^{\text{tr}} \Phi(x, X) + \beta^{\text{tr}} S(x)) .$$

Bemerkung 2.7-1

Das zugehörige *Fehlerfunktional* $\varepsilon_{x,X,\Phi}$ ist linear in f , weil in obiger Gleichung c und β als Lösung eines linearen Gleichungssystems linear von f abhängen.⁴⁹ Die Koeffizientenvektoren c und β enthalten Linearkombinationen der Punktwerte $f(X)$, somit ist $\varepsilon_{x,X,\Phi}$ ein Punktauswertungsfunktional aus PF^d . Laut Bemerkung 2.5-3 gilt darüber hinaus:

$$(2.7-2) \quad \forall p \in \mathbb{P}_m^d : \quad \varepsilon_{x,X,\Phi}(p) = 0 . \quad \text{Also folgt: } \varepsilon_{x,X,\Phi} \in \text{S}_m^{d\perp}(\Phi) .$$

Laut Satz 2.5-1 gilt noch allgemeiner:

$$(2.7-3) \quad \forall f \in \text{Span}_{\Phi}^d \oplus \mathbb{P}_m^d : \quad \varepsilon_{x,X,\Phi}(f) = 0 .$$

Interessanter sind Fälle, in denen $\varepsilon_{x,X,\Phi}$ nicht automatisch verschwindet.⁵⁰

⁴⁸Eigentlich handelt es sich um einen *Approximationsfehler*.

⁴⁹In Gleichung (2.8-2) wird dies noch deutlicher zutage treten.

⁵⁰Entsprechende Funktionenräume werden in den Kapiteln 2.10 und 3.2.2 konstruiert.

2.8 Das Fehlerfunktional $\varepsilon_{x,u}$ in Abhängigkeit der Lagrange-Basis

Das Fehlerfunktional $\varepsilon_{x,X,\Phi}$ aus Kapitel 2.7 wird nun in Abhängigkeit der Lagrange-Basis u dargestellt. Es gilt der

Satz 2.8-1

Seien die zu interpolierende Funktion $f \in \text{Fun}^d$, die Stützstellenmenge X und die symmetrische Basisfunktion Φ vorgegeben. Sei $u(x)$ die Lösung von (2.6-2), also die entsprechende \mathbb{P}_m^d -reproduzierende Lagrange-Basis. Sei $s_{f,X,\Phi}$ die zu f gehörende Interpolante. Dann gilt wegen Gleichung (2.6-6) für den Interpolationsfehler im Punkt $x \in \mathbb{R}^d$:

$$(2.8-1) \quad \begin{aligned} \varepsilon_{x,u}(f) &:= \varepsilon_{x,X,\Phi}(f) = f(x) - s_{f,X,\Phi}(x) \\ &= f(x) - f(X)^{\text{tr}} u(x) = f(x) - \sum_{j \in M} f(x_j) u_j(x). \end{aligned}$$

Daher hat das zugehörige *Fehlerfunktional* die Form

$$(2.8-2) \quad \varepsilon_{x,u} = \delta_x - \sum_{j \in M} u_j(x) \delta_{x_j} = \delta_x - \lambda_{X,u(x)}.$$

Seine Abhängigkeit von X und Φ ist also nur indirekt durch $u(x)$ enthalten. Die Aussagen aus Bemerkung 2.7-1 sind nun endgültig offensichtlich.

Definition: Quadratische Form $Q_\Phi(c, R, a)$

Für $c, R \in \mathbb{C}^N$, $a \in \mathbb{R}$ und $\Phi \in \text{SBF}^d$ definiert man

$$(2.8-3) \quad Q_\Phi(c, R, a) := c^{\text{tr}} A_\Phi \bar{c} - 2 \text{Re} \left(c^{\text{tr}} \bar{R} \right) + a.$$

Da A_Φ selbstadjungiert ist, hat die *Quadrik* Q_Φ nur reelle Werte. Daher kann sie in Kapitel 2.9 minimiert werden.

Satz 2.8-2

Für eine beliebige \mathbb{P}_m^d -reproduzierende Lagrange-Basis $u(x) \in \mathbb{C}^N$ und ein $\Phi \in \text{BPD}(m)$ hat die $S_m^{d\perp}(\Phi)$ -Norm des Fehlerfunktionals die Form:

$$\forall x \in \mathbb{R}^d : \quad \|\varepsilon_{x,u}\|_\Phi = \sqrt{Q_\Phi(u(x), \Phi(x, X), \Phi(x, x))}.$$

Wegen Bemerkung 2.6-2 gilt dies insbesondere für die Lösung $u(x)$ des linearen Gleichungssystems (2.6-2).

Beweis:

Der Beweis ist analog [CADII] vom 04.05.93 ausgeführt.

$$\begin{aligned}
\|\varepsilon_{x,u}\|_{\Phi}^2 &= \varepsilon_{x,u}^z \circ \overline{\varepsilon_{x,u}^y}(\Phi(z,y)) && \text{laut Definition von } \|\cdot\|_{\Phi} \\
&= \overline{\varepsilon_{x,u}^y}(\Phi(x,y)) - \sum_{i \in M} \overline{\varepsilon_{x,u}^y} \Phi(x_i,y) u_i(x) && \text{laut Definition von } \varepsilon_{x,u}^z \\
&= \Phi(x,x) - \sum_{j \in M} \Phi(x,x_j) \overline{u_j(x)} \\
&\quad - \sum_{i \in M} \left(\Phi(x_i,x) - \sum_{j \in M} \Phi(x_i,x_j) \overline{u_j(x)} \right) u_i(x) && \text{laut Definition von } \varepsilon_{x,u}^y \\
&= \Phi(x,x) - \sum_{j \in M} \Phi(x,x_j) \overline{u_j(x)} \\
&\quad - \sum_{i \in M} \Phi(x_i,x) u_i(x) + \sum_{i,j \in M} \Phi(x_i,x_j) \overline{u_j(x)} u_i(x) \\
&= \Phi(x,x) - \overline{u(x)}^{\text{tr}} \Phi(x,X) && \Phi(x_i,x) = \overline{\Phi(x,x_i)} \\
&\quad - u(x)^{\text{tr}} \overline{\Phi(x,X)} + u(x)^{\text{tr}} A_{\Phi} \overline{u(x)} \\
&= \Phi(x,x) - 2 \operatorname{Re} \left(u(x)^{\text{tr}} \overline{\Phi(x,X)} \right) + u(x)^{\text{tr}} A_{\Phi} \overline{u(x)}.
\end{aligned}$$

q.e.d.

2.9 Minimierungstheorie für das Fehlerfunktional

In Satz 2.8-2 wurde deutlich, daß es notwendig ist, die quadratische Form Q_{Φ} — und damit die Norm des Fehlerfunktionals $\varepsilon_{x,u}$ — zu minimieren. Das folgende Kapitel stellt den Zusammenhang zwischen der Lösung des Interpolationssystems (2.6-2) und damit auch von (2.5-6) und eben dieser Minimierungsaufgabe her, wie er z. B. in [WuSchabLocErr] als Verallgemeinerung von [WuDr] beschrieben wurde. Der nächste Satz ist jedoch analog zu [CADII] vom 04.05.93 ausgeführt.

Satz 2.9-1

Sei $x \in \mathbb{R}^d$ beliebig gegeben, $\Phi \in \text{BPD}(m)$ und X so groß, daß $S_m^{d\perp}(\Phi) \neq \{\}$, wobei aber P nicht unbedingt injektiv sein muß. Sei $S(x) = (p_k(x))_{k=1,\dots,Q}$ wie in (2.5-1).

Falls das Interpolationssystem (2.6-2)

$$\begin{pmatrix} A_{\Phi} & P \\ P^{\text{tr}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi(x,X) \\ S(x) \end{pmatrix},$$

lösbar ist, gilt für alle Lösungen $u(x)$, daß sie auch das quadratische Minimierungsproblem

$$(2.9-1) \quad Q_{\Phi}(u(x), \Phi(x,X), \Phi(x,x)) = \text{Min}!, \quad \text{wobei}$$

$$(2.9-2) \quad P^{\text{tr}} u(x) = S(x)$$

lösen.⁵¹ Daher minimieren sie das zugehörige Fehlerfunktional $\|\varepsilon_{x,X,u(x)}\|_{\Phi} = \|\delta_x - \lambda_{X,u(x)}\|_{\Phi}$ unter der Nebenbedingung ‘ $u(x)$ ist \mathbb{P}_m^d -reproduzierend’ (vgl. (2.6-7)).

Falls P sogar injektiv ist, gibt es laut Satz 2.5-1 eine *eindeutige* Lösung $u(x)$ von (2.6-2). Diese ist dann auch die eindeutige Lösung der Gleichungen (2.9-1) und (2.9-2).

⁵¹ $v(x)$ spielt dabei die Rolle der Lagrange-Multiplikatoren.

Ein Beweis des Satzes findet sich für den klassischen Fall $d = d_2$ in [WuSchabLocErr], Theorem 1. Dabei wird die Methode der Lagrange-Multiplikatoren benutzt. Dadurch wird der Beweis von der speziellen Struktur der Elemente von A_Φ unabhängig. Somit läßt er sich wörtlich auf den Fall für beliebige $\Phi \in \text{SBF}^d$ übertragen. Ein anderer Zugang ergibt sich mit Mitteln der Variationsrechnung, indem man zeigt, daß jede Störung an $u(x)$ den Fehler nur vergrößern kann.⁵² Die Aussage läßt sich auch auf die Ableitungen von Φ , u und v erweitern.

Definition: Kriging-Funktion

Die Kriging-Funktion definiert man durch

$$\begin{aligned} \kappa_{X,\Phi}(x) &:= \sqrt{Q_\Phi(u_{\min}(x), \Phi(x, X), \Phi(x, x))} \\ &= \sqrt{u_{\min}(x)^{\text{tr}} A_\Phi u_{\min}(x) - 2 \operatorname{Re} \left(u_{\min}(x)^{\text{tr}} \overline{\Phi(x, X)} \right) + \Phi(x, x)}, \end{aligned}$$

wobei $u_{\min}(x)$ die Lösung von (2.9-1) bzw. (2.6-2) ist.⁵³ Für jedes x ist also $\kappa_{X,\Phi}(x)$ die Wurzel des *Minimalwertes* der quadratischen Form $Q_\Phi(u(x), \Phi(x, X), \Phi(x, x))$ und somit der minimale Wert von $\|\varepsilon_{x,u}\|_\Phi$ für alle \mathbb{P}_m^d -reproduzierenden Lagrange-Basen $u(x)$.

Bemerkung 2.9-2

Diese Minimierungstheorie ist ein gutes Werkzeug zur Abschätzung der Kriging-Funktion, denn man kann nun beliebig gut ‘handhabbare’ \mathbb{P}_m^d -reproduzierende Lagrange-Basen $u(x)$ benutzen, um $\kappa_{X,\Phi}(x)^2 \leq Q_\Phi(u(x), \Phi(x, X), \Phi(x, x))$ auszuwerten.

2.10 Funktionalanalytische Fehlertheorie und der Raum $H^d(\Phi)$

In Gleichung (2.7-2) wurde gezeigt, daß das Fehlerfunktional $\varepsilon_{x,X,\Phi}$ ein Element des Raumes $S_m^{d\perp}(\Phi)$ ist, also auf den Polynomen aus Fun^d verschwindet. Es bleibt die Frage, auf welche Funktionen aus Fun^d sich diese Funktionale außerdem noch sinnvoll anwenden lassen.

Laut Definition des Raumes $S_m^{d\perp}(\Phi)$ in Kapitel 2.4 ist er ein Prä-Hilbertraum, hat also eine induzierte Topologie. Die entsprechende Norm war mit $\|\cdot\|_\Phi$ bezeichnet worden. Daher liegt es nahe, den Raum der Funktionen zu betrachten, auf denen die Funktionale gerade noch stetig sind.⁵⁴

Definition: Raum $H_0^d(\Phi)$ zu $\Phi \in \text{BPD}(m)$

$$H_0^d(\Phi) := \left\{ f \in \text{Fun}^d : \begin{array}{l} \exists C_f \in \mathbb{R}_{\geq 0} \text{ so daß} \\ \forall \lambda \in S_m^{d\perp}(\Phi) : |\lambda(f)| \leq C_f \|\lambda\|_\Phi \end{array} \right\}.$$

Mit

$$(2.10-1) \quad |f|_{H_0^d(\Phi)} := \sup_{\lambda \in S_m^{d\perp}(\Phi): \lambda \neq 0} \frac{|\lambda(f)|}{\|\lambda\|_\Phi}$$

⁵²Siehe [CADII].

⁵³Die Funktion ist nach dem Norweger Jens Erik Kriging benannt. Die Literatur bezeichnet $\kappa_{X,\Phi}$ oft auch als *Power-Funktion*.

⁵⁴Dieser Ansatz verfolgt eine Idee, wie sie in den Oberseminaren vom 02.11.94 und 30.11.94 dargestellt wurde.

wird $(H_0^d(\Phi), |\cdot|_{H_0^d(\Phi)})$ zu einem \mathbf{C} -Untervektorraum von Fun^d mit Seminorm,⁵⁵ es gilt:

$$(2.10-2) \quad H_0^d(\Phi) = \left\{ f \in \text{Fun}^d : |f|_{H_0^d(\Phi)} < \infty \right\} .$$

Nach Definition von $S_m^{d\perp}(\Phi)$ bzw. $\tilde{S}_m^{d\perp}$ enthält der Nullraum

$$(2.10-3) \quad N(H_0^d(\Phi)) := \left\{ f \in H_0^d(\Phi) : |f|_{H_0^d(\Phi)} = 0 \right\}$$

dieser Seminorm zumindest \mathbb{P}_m^d . Es gilt aber sogar der folgende Satz.

Satz 2.10-1

$$N(H_0^d(\Phi)) = \mathbb{P}_m^d .$$

Beweis:

“ \supseteq ”:
 $\lambda \in S_m^{d\perp}(\Phi) \wedge p \in \mathbb{P}_m^d \Rightarrow \lambda(p) = 0 \Rightarrow |p|_{H_0^d(\Phi)} = 0.$

“ \subseteq ”:
 Es gibt eine \mathbb{P}_m^d -reguläre Stützstellenmenge $X \subset \mathbb{R}^d$,⁵⁶ für sie gilt also: $p(X) = 0 \Rightarrow p = 0$. Dann gibt es auch eine \mathbb{P}_m^d -reproduzierende Lagrange-Basis $u(x)$ auf X , die selber nur aus Polynomen besteht: Das heißt, es gilt $\forall p \in \mathbb{P}_m^d : p(x) = u(x)^{\text{tr}} p(X)$ und $u_j \in \mathbb{P}_m^d$. Sei nun $\varepsilon_{x,u}(f) = f(x) - u(x)^{\text{tr}} f(X)$ das übliche Fehlerfunktional. Dann rechnet man nach:

$$\begin{aligned} & f \in N(H_0^d(\Phi)) && \text{beliebig} \\ \wedge & \varepsilon_{x,u} \in S_m^{d\perp}(\Phi) && \text{laut Bemerkung 2.7-1} \\ \Rightarrow & \varepsilon_{x,u}(f) = 0 \\ \Rightarrow & f(x) = u(x)^{\text{tr}} f(X) = \sum_{j \in M} f(x_j) u_j(x) \\ \Rightarrow & f \in \mathbb{P}_m^d . \end{aligned}$$

q.e.d.

Definition: Raum $H^d(\Phi)$ zu $\Phi \in \text{BPD}(m)$

$$H^d(\Phi) := H_0^d(\Phi) / N(H_0^d(\Phi)) = H_0^d(\Phi) / \mathbb{P}_m^d .$$

Dieser *Quotientenvektorraum* enthält also *Funktionenklassen* F , deren *Repräsentanten* $f, g \in F$ sich nur um ein Polynom aus \mathbb{P}_m^d unterscheiden, d. h. $f - g \in \mathbb{P}_m^d$, und für die die Funktionale aus $S_m^{d\perp}(\Phi)$ beschränkt sind.⁵⁷ Die Abbildung $K : H_0^d(\Phi) \rightarrow H^d(\Phi); f \mapsto F$ liefert die Klasse zu einer Funktion. Sinngemäß ist sie auch auf Teilmengen von $H_0^d(\Phi)$ anwendbar.

⁵⁵Dieser Raum, allerdings über dem Grundraum $C(\Omega \subseteq \mathbb{R}^d)$, heißt in [WeinrichDr], Kap. 3.1 $\mathcal{H}_\Phi(\Omega)$, und ein entsprechender in [IskeDr], Kap. 6.2 \mathcal{F}_ψ . Siehe dazu auch Kapitel 2.11.

⁵⁶Falls der Grunddefinitionsbereich Ω nicht der ganze \mathbb{R}^d ist, muß man noch die schwache Voraussetzung stellen, daß Ω einen \mathbb{P}_m^d -regulären Punktesatz X enthält.

⁵⁷‘Theoretisch’ ist dieser Raum sehr angenehm, für ‘praktische’ Aussagen über die Approximationsgüte auf ihm muß man sich aber auf ‘handfestere’ Teilräume beschränken: Siehe Kapitel 2.11 und 3.2.2.

Falls $\Phi(x, y)$ in x beschränkt ist, gilt $K(\text{Span}_\Phi^d) \subseteq H^d(\Phi)$. Desweiteren trägt $H^d(\Phi)$ die Norm

$$(2.10-4) \quad \|F\|_{H^d(\Phi)} := \sup_{\lambda \in S_m^{d\perp}(\Phi): \lambda \neq 0} \frac{|\lambda(f)|}{\|\lambda\|_\Phi} = |f|_{H_0^d(\Phi)},$$

wobei f ein beliebiger Repräsentant von F ist. Die Norm ist wohldefiniert, da für alle $\lambda \in S_m^{d\perp}(\Phi)$ und $f, g \in F$ gilt: $\lambda(f) - \lambda(g) = \lambda(f - g) = \lambda(p) = 0$ mit einem $p \in \mathbb{P}_m^d$. Aus dem selben Grund lassen sich auch die Funktionale $\lambda \in S_m^{d\perp}(\Phi)$ auf $H^d(\Phi)$ durch $\lambda(F) := \lambda(f)$ definieren, insbesondere für das Fehlerfunktional $\varepsilon_{x, X, \Phi} \in S_m^{d\perp}(\Phi)$ gilt $\varepsilon_{x, X, \Phi}(F) = \varepsilon_{x, X, \Phi}(f)$.

Nach Konstruktion ist $H_0^d(\Phi) \cong H^d(\Phi) \oplus_a \mathbb{P}_m^d$, wobei \oplus_a die *äußere direkte Summe* bezeichnet.⁵⁸ Weiterhin gilt

$$(2.10-5) \quad \forall F \in H^d(\Phi), f \in F, \lambda \in S_m^{d\perp}(\Phi): \quad |\lambda(f)| = |\lambda(F)| \leq \|F\|_{H^d(\Phi)} \|\lambda\|_\Phi.$$

Daher ist $S_m^{d\perp}(\Phi)$ isomorph zu einem linearen Unterraum des topologischen Dualraumes $(H^d(\Phi))^*$ von $H^d(\Phi)$.

Die ‘Motivation’ vom Anfang dieses Kapitels aufgreifend wird nun das Fehlerfunktional $\varepsilon_{x, X, \Phi}$ betrachtet. Wie oben gezeigt wurde, gilt:

$$(2.10-6) \quad \forall f \in H_0^d(\Phi) \cong H^d(\Phi) \oplus_a \mathbb{P}_m^d: \quad \varepsilon_{x, X, \Phi}(f) = \varepsilon_{x, X, \Phi}(K(f)),$$

und mit der vorhergehenden Ungleichung folgt:

$$(2.10-7) \quad \forall f \in H_0^d(\Phi) \cong H^d(\Phi) \oplus_a \mathbb{P}_m^d: \quad |\varepsilon_{x, X, \Phi}(f)| \leq \|K(f)\|_{H^d(\Phi)} \|\varepsilon_{x, X, \Phi}\|_\Phi.$$

Dies ist eine Gleichung der Art, wie sie in (1.1-3): $|\varepsilon_{x, X, \Phi}(f)| \leq |f|_{\mathbb{F}_\Phi} \cdot P_{X, \Phi}(x)$ gesucht wurde.⁵⁹ Deswegen gibt man der Norm des Fehlerfunktionals einen eigenen Namen:

Definition: Power-Funktion

Die Power-Funktion (oder *Güte-Funktion*) der Interpolation mit Φ auf X ist die Norm des Fehlerfunktionals $\varepsilon_{x, X, \Phi}$ im Raum $H^d(\Phi)$:

$$P_{X, \Phi}(x) := \|\varepsilon_{x, X, \Phi}\|_\Phi.$$

Dadurch erhält die letzte Gleichung die Form:

$$(2.10-8) \quad \forall f \in H_0^d(\Phi): \quad |\varepsilon_{x, X, \Phi}(f)| \leq \|K(f)\|_{H^d(\Phi)} P_{X, \Phi}(x),$$

beziehungsweise

$$\forall f \in H_0^d(\Phi): \quad |\varepsilon_{x, X, \Phi}(f)| \leq |f|_{H_0^d(\Phi)} P_{X, \Phi}(x).$$

Die Power-Funktion nichts anderes als die Kriging-Funktion aus Kapitel 2.9.

⁵⁸Die *äußere direkte Summe* zweier beliebiger Vektorräume U, V über dem selben Grundkörper ist definiert als $U \oplus_a V := U \times V$ mit komponentenweiser Addition und skalarer Multiplikation.

⁵⁹Ein ähnliches Ergebnis findet sich in [SchabackComRBF], Theorem 2.

2.11 Mögliche Skalarprodukte auf $H^d(\Phi)$

Es ist wünschenswert, auf dem Funktionenklassenraum $H^d(\Phi)$ ein Skalarprodukt zu haben. Man erhält z. B. unter der Voraussetzung, daß die Norm auf $H^d(\Phi)$ die *Parallelogrammgleichung*

$$\|f + g\|_{H^d(\Phi)}^2 + \|f - g\|_{H^d(\Phi)}^2 = 2\|f\|_{H^d(\Phi)}^2 + 2\|g\|_{H^d(\Phi)}^2$$

erfüllt,⁶⁰ mittels

$$\begin{aligned} \langle f|g \rangle_{H^d(\Phi)} &:= \frac{1}{4} \left(\|f + g\|_{H^d(\Phi)}^2 - \|f - g\|_{H^d(\Phi)}^2 \right) \\ &\quad + \frac{i}{4} \left(\|if + g\|_{H^d(\Phi)}^2 - i\|if - g\|_{H^d(\Phi)}^2 \right) \end{aligned}$$

ein Skalarprodukt auf $H^d(\Phi)$. Die Parallelogrammgleichung ist nicht immer leicht nachzuweisen.

Ein anderer Ansatz wurde in [WeinrichDr], Kap. 3.1 ausgeführt — allerdings über dem Grundraum $C(\Omega)$ mit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ statt über Fun^d . Die meisten daraus gewonnenen Aussagen gelten aber auch auf dem größeren Raum, deswegen werden die wichtigsten davon in diesem Kapitel aufgeführt.

Der Dualraum $S_m^{d\perp}(\Phi)^*$ von $S_m^{d\perp}(\Phi)$ enthält unter anderem alle Funktionale der Form

$$(2.11-1) \quad \psi_f : S_m^{d\perp}(\Phi) \rightarrow \mathbb{C}; \quad \lambda \mapsto \psi_f(\lambda) := \lambda(f) \quad \text{mit } f \in H_0^d(\Phi)$$

und ist mit der Standardnorm

$$(2.11-2) \quad \|\psi\|_{S_m^{d\perp}(\Phi)^*} := \sup_{\lambda \in S_m^{d\perp}(\Phi): \lambda \neq 0} \frac{|\psi(\lambda)|}{\|\lambda\|_{\Phi}}$$

versehen. Für die interessanten Funktionale ψ_f folgt daher mit Gleichung (2.10-1):

$$(2.11-3) \quad \|\psi_f\|_{S_m^{d\perp}(\Phi)^*} = \sup_{\lambda \in S_m^{d\perp}(\Phi): \lambda \neq 0} \frac{|\psi_f(\lambda)|}{\|\lambda\|_{\Phi}} = \sup_{\lambda \in S_m^{d\perp}(\Phi): \lambda \neq 0} \frac{|\lambda(f)|}{\|\lambda\|_{\Phi}} = |f|_{H_0^d(\Phi)}.$$

Da $I(S_m^{d\perp}(\Phi))$ in $\overline{S_m^{d\perp}(\Phi)}^{\Phi}$ dicht liegt, gibt es von den ψ_f jeweils eine eindeutige Fortsetzung $\overline{\psi}_f \in \left(\overline{S_m^{d\perp}(\Phi)}^{\Phi}\right)^*$ mit

$$(2.11-4) \quad \forall f \in H_0^d(\Phi) : \overline{\psi}_f \circ I = \psi_f \quad \text{und} \quad \|\overline{\psi}_f\|_{\left(\overline{S_m^{d\perp}(\Phi)}^{\Phi}\right)^*} = \|\psi_f\|_{S_m^{d\perp}(\Phi)^*},$$

wobei I die kanonische Injektion aus Kapitel 2.4 ist. In [WeinrichDr] wird nun mittels des Riesz-Darstellungssatzes ein eindeutig bestimmter, beschränkter linearer Operator

$$(2.11-5) \quad L : H_0^d(\Phi) \rightarrow \overline{S_m^{d\perp}(\Phi)}^{\Phi}; \quad f \mapsto L(f)$$

konstruiert, der die Eigenschaften

$$(2.11-6) \quad \forall \overline{\lambda} \in \overline{S_m^{d\perp}(\Phi)}^{\Phi}; \quad f \in H_0^d(\Phi) : \quad \langle L(f) | \overline{\lambda} \rangle_{\overline{S_m^{d\perp}(\Phi)}^{\Phi}} = \overline{\psi}_f(\overline{\lambda})$$

⁶⁰Also insbesondere, wenn sie von einem Skalarprodukt induziert wird, vgl. [Großmann], (2.31).

und

$$(2.11-7) \quad \forall f \in H_0^d(\Phi) : \quad \|L(f)\|_{\overline{S_m^{d\perp}(\Phi)}} = \|\overline{\psi}_f\|_{\left(\overline{S_m^{d\perp}(\Phi)}\right)^*} = \|\psi_f\|_{S_m^{d\perp}(\Phi)^*} = |f|_{H_0^d(\Phi)}$$

hat. Daher folgt:

$$(2.11-8) \quad \forall \lambda \in S_m^{d\perp}(\Phi); f \in H_0^d(\Phi) : \\ \lambda(f) = \psi_f(\lambda) = \overline{\psi}_f(I(\lambda)) = \langle L(f)|I(\lambda) \rangle_{\overline{S_m^{d\perp}(\Phi)}} .$$

So wurde ein *Dualsystem* auf $S_m^{d\perp}(\Phi)$ und $H_0^d(\Phi)$ erzeugt haben, und Cauchy-Schwarz liefert nun $\forall \lambda \in S_m^{d\perp}(\Phi); f \in H_0^d(\Phi)$:

$$(2.11-9) \quad |\lambda(f)| \leq \|L(f)\|_{\overline{S_m^{d\perp}(\Phi)}} \|I(\lambda)\|_{\overline{S_m^{d\perp}(\Phi)}} = |f|_{H_0^d(\Phi)} \|\lambda\|_{\Phi} .$$

Mit Hilfe von L können wir nun eine Bilinearform auf $H_0^d(\Phi)$ konstruieren:

$$(2.11-10) \quad (f, g)_{H_0^d(\Phi)} := \langle L(f)|L(g) \rangle_{\overline{S_m^{d\perp}(\Phi)}} \quad \forall f, g \in H_0^d(\Phi) .$$

Für sie gilt laut Cauchy-Schwarz:

$$(2.11-11) \quad \forall f, g \in H_0^d(\Phi) : \quad |(f, g)_{H_0^d(\Phi)}| \leq |f|_{H_0^d(\Phi)} |g|_{H_0^d(\Phi)} ,$$

wobei für $f = g$ Gleichheit eintritt, d. h.:

$$(2.11-12) \quad \forall f \in H_0^d(\Phi) : \quad |(f, f)_{H_0^d(\Phi)}| = \|L(f)\|_{\overline{S_m^{d\perp}(\Phi)}}^2 = |f|_{H_0^d(\Phi)}^2 .$$

Satz 2.11-1

Sei $f \in H_0^d(\Phi)$ beliebig und X eine \mathbb{P}_m^d -reguläre Stützstellenmenge. Dann gilt laut Satz 2.10-1:⁶¹

$$(f, f)_{H_0^d(\Phi)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad L(f) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad |f|_{H_0^d(\Phi)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f \in \mathbb{P}_m^d .$$

Teilt man also durch Bildung des Quotientenvektorraumes den Nullraum \mathbb{P}_m^d der Bilinearform heraus, ergibt sich wieder der Raum $H^d(\Phi) = H_0^d(\Phi)/\mathbb{P}_m^d$ aus Kapitel 2.10, nun allerdings mit dem Skalarprodukt⁶²

$$\langle F|G \rangle_{H^d(\Phi)} := (f, g)_{H_0^d(\Phi)} \quad \forall F, G \in H^d(\Phi); f \in F, g \in G .$$

Mit den Gleichungen (2.11-9) und (2.11-12) ergibt sich

$$(2.11-13) \quad \forall \lambda \in S_m^{d\perp}(\Phi), \lambda \neq 0; f \in F \in H^d(\Phi) : \quad \frac{|\lambda(f)|}{\|\lambda\|_{\Phi}} \leq |f|_{H_0^d(\Phi)} = \sqrt{\langle F|F \rangle_{H^d(\Phi)}} ,$$

und mit den Gleichungen (2.11-11) und (2.10-4) rechnet man nach, daß die Norm aus Kapitel 2.10 tatsächlich von diesem Skalarprodukt induziert wird:

$$\langle F|F \rangle_{H^d(\Phi)} = |f|_{H_0^d(\Phi)}^2 = \|F\|_{H^d(\Phi)}^2 .$$

⁶¹Entnommen aus [WeinrichDr], Satz 3.3.

⁶²Auch diese Definition ist unabhängig von der Wahl der Repräsentanten $f \in F, g \in G$, wie man wegen der Linearität von L und Satz 2.11-1 leicht nachrechnet.

2.12 Konstruktion eines $\Phi \in \text{SBF}^d$ zu einem gegebenen Funktionenraum

Man kann auch die zu Kapitel 2.10 umgekehrte Vorgehensweise wählen und zu einem gegebenen Funktionenraum, der gewisse Voraussetzungen erfüllt, eine symmetrische Basisfunktion Φ konstruieren. Dieser Weg soll nun kurz skizziert werden.⁶³

Zunächst verzichtet man in der Definition von $H_0^d(\Phi)$ in Kapitel 2.10 auf die Topologie von $S_m^{d\perp}(\Phi)$, da sie ein Φ benötigt. Statt dessen betrachtet man die Funktionale aus $\tilde{S}_m^{d\perp}$ ohne jegliche Norm:

Definition: Raum \tilde{H}^d

$$\tilde{H}^d := \left\{ f \in \text{Fun}^d : \forall \lambda \in \tilde{S}_m^{d\perp} : \exists C_\lambda \in \mathbb{R}_{\geq 0} : |\lambda(f)| \leq C_\lambda \|f\|_{\tilde{H}^d} \right\}.$$

Dieser Raum sei ein Hilbertraum mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\tilde{H}^d}$.⁶⁴

Laut Definition ist $\tilde{S}_m^{d\perp}$ ein Untervektorraum des Dualraumes $(\tilde{H}^d)^*$ — für jedes $\lambda \in \tilde{S}_m^{d\perp}$ gilt: $\|\lambda\|_{(\tilde{H}^d)^*} \leq C_\lambda$. Es folgt daher aus dem Riesz-Darstellungssatz:

Satz 2.12-1

$$\forall \lambda = \lambda_{X,c} \in \tilde{S}_m^{d\perp} \quad \exists ! f_\lambda \in \tilde{H}^d : \lambda(g) = \langle f_\lambda | g \rangle_{\tilde{H}^d} \quad \forall g \in \tilde{H}^d$$

Die so gegebene injektive Abbildung $\lambda \mapsto f_\lambda$ ist isometrisch, d. h. $\forall \lambda \in \tilde{S}_m^{d\perp} : \|\lambda\|_{(\tilde{H}^d)^*} = \|f_\lambda\|_{\tilde{H}^d}$, und linear.

Auch die δ -Funktionale sind in $\tilde{S}_m^{d\perp}$ enthalten, denn $\forall x \in \mathbb{R}^d : \delta_x(f) = f(x) = \lambda_{\{x\},(1)}$. Nun kann man schon die gesuchte symmetrische Basisfunktion Φ konstruieren:

$$\Phi(x, y) := \langle f_{\delta_x} | f_{\delta_y} \rangle_{\tilde{H}^d} = \overline{\langle f_{\delta_y} | f_{\delta_x} \rangle_{\tilde{H}^d}} = \overline{\Phi(y, x)}.$$

Für $x, y \in \mathbb{R}^d$ gilt weiterhin mit Satz 2.12-1:

$$\Phi(x, y) = \langle f_{\delta_x} | f_{\delta_y} \rangle_{\tilde{H}^d} = \delta_x(f_{\delta_y}) = f_{\delta_y}(x) = \overline{f_{\delta_x}(y)},$$

woraus insbesondere folgt, daß $\Phi(x, \cdot)$ und $\Phi(\cdot, y) \in \tilde{H}^d \forall x, y \in \mathbb{R}^d$ sind. Durch Linearkombination folgt: $\lambda^y(\Phi(x, y)), \lambda^x(\Phi(x, y)) \in \tilde{H}^d \forall \lambda \in \tilde{S}_m^{d\perp}$. Genauer gilt z. B. für den letzten Term $\forall \lambda \in \tilde{S}_m^{d\perp}$:

$$\lambda^x(\Phi(x, y)) = \lambda^x(f_{\delta_y}(x)) = \langle f_\lambda | f_{\delta_y} \rangle_{\tilde{H}^d} = \overline{\langle f_{\delta_y} | f_\lambda \rangle_{\tilde{H}^d}} = \overline{\delta_y(f_\lambda)} = \overline{f_\lambda(y)}.$$

Durch dieses Φ wird wie in Kapitel 2.2 auf $\tilde{S}_m^{d\perp}$ eine Bilinearform induziert:

$$\left(\lambda_{X^\lambda, c^\lambda}, \lambda_{X^\mu, c^\mu} \right)_\Phi := \lambda_{X^\lambda, c^\lambda}^x \circ \overline{\lambda_{X^\mu, c^\mu}^y}(\Phi(x, y)) = c^{\lambda, \text{tr}} \Phi(X^\lambda, X^\mu) \overline{c^\mu}.$$

⁶³Dabei werden Konzepte des Oberseminarvortrages vom 19.04.95 verwendet.

⁶⁴Dessen Existenz wird hier vorausgesetzt.

Noch ist aber unklar, ob $\Phi \in \text{BPD}(m)$ gilt. Man muß also für alle $\lambda = \lambda_{X,c} \in \tilde{\mathbb{S}}_m^{d\perp}$ zeigen, daß $c^{\text{tr}} \Phi(X, X) \bar{c} \geq 0$ und $c^{\text{tr}} \Phi(X, X) \bar{c} = 0 \Leftrightarrow c = 0$ gilt. Dazu rechnet man:

$$\begin{aligned} c^{\text{tr}} \Phi(X, X) \bar{c} &= \sum_{i,j \in M} c_i \bar{c}_j \Phi(x_i, x_j) = \sum_{i,j \in M} c_i \bar{c}_j \langle f_{\delta_{x_i}} | f_{\delta_{x_j}} \rangle_{\tilde{\mathbb{H}}^d} \\ &= \left\langle \sum_{i \in M} c_i f_{\delta_{x_i}} \left| \sum_{j \in M} \bar{c}_j f_{\delta_{x_j}} \right. \right\rangle_{\tilde{\mathbb{H}}^d} = \langle f_\lambda | f_{\bar{\lambda}} \rangle_{\tilde{\mathbb{H}}^d} . \end{aligned}$$

Die quadratische Form ist als Skalarprodukt automatisch positiv definit, es folgt: $\Phi \in \text{BPD}(0)$. Möchte man $\Phi \in \text{BPD}(m)$ für $m > 0$ erreichen, kann man $\tilde{\mathbb{H}}^d \oplus \mathbb{P}_m^d$ verwenden. Ab jetzt steht somit die ganze Theorie der vorhergehenden Unterkapitel des Kapitels 2 zur Verfügung.

3 Ergebnisse durch Fourier-Transformation

Vorbemerkung:

Das Kapitel 2 hat durchgehend die positive Definitheit der Basisfunktion, also $\Phi \in \text{BPD}(m)$, als gegeben angenommen. Im nun folgenden Kapitel werden andere Eigenschaften untersucht, die die positive Definitheit nach sich ziehen. Vor allem aber ermöglichen sie eine Fehler- und Konditionsanalyse. Dazu wird vor allem die Fourier-Transformation benutzt. Die Existenz der Fourier-Transformierten wird dabei vorausgesetzt, vgl. Bemerkung 1.4-13. Betrachtet man aber die Tabelle 1 auf Seite 48, so stellt man fest, daß einige Funktionen $\Phi(x)$ für $\|x\| \rightarrow \infty$ polynomial wachsen. An der Stelle 0 sind sie stetig, also beschränkt. Für diese Funktionen muß die *verallgemeinerte* Fourier-Transformation benutzt werden, wodurch sich die Ergebnisse der klassischen Fourier-Transformation übertragen. Das polynomiale Wachstum können dabei Testfunktionen ψ ausgleichen, für die $\int p \psi dx = 0$ für alle $p \in \mathbb{P}_{2m}^d$ gilt, wobei m genau die Ordnung der positiven Definitheit ist.

Die verallgemeinerte inverse Fourier-Transformation trifft dann auf Funktionen φ , die an 0 Polstellen haben können. Dieser Fall erfordert Testfunktionen, wie sie in Bemerkung 1.4-13 beschrieben wurden.

3.1 Symmetrische Basisfunktionen

Bisher wurde die Symmetrie von Φ noch nicht konkret ausgenutzt. Im folgenden Kapitel werden darauf aufbauende Aussagen dargestellt.

Satz 3.1-1 (Charakterisierung der Fourier-Transformierten von $\Phi \in \text{SBF}^d$)

Falls die bivariate Fourier-Transformierte $\varphi(\omega, \eta) := \overset{(2d)}{\text{FT}}(\Phi(x, y))(\omega, \eta)$ von $\Phi(x, y)$ existiert, gilt:

$$\Phi \in \text{SBF}^d \Leftrightarrow \forall \omega, \eta \in \mathbb{R}^d : \varphi(\omega, \eta) = \overline{\varphi(-\eta, -\omega)} .$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \varphi(\omega, \eta) &= \overset{(2d)}{\text{FT}}(\Phi(x, y))(\omega, \eta) \\ &= \int \overline{\Phi(y, x)} e^{\perp i(x^{\text{tr}} \omega + y^{\text{tr}} \eta)} d^{2d}(x, y) && \Phi \in \text{SBF}^d \\ &= \overline{\int \Phi(y, x) e^{\perp i(x^{\text{tr}}(\perp \omega) + y^{\text{tr}}(\perp \eta))} d^{2d}(x, y)} && \text{Satz 1.4-5} \\ &= \overline{\int \Phi(x, y) e^{\perp i(y^{\text{tr}}(\perp \omega) + x^{\text{tr}}(\perp \eta))} d^{2d}(y, x)} && \text{Vertauschung } x \leftrightarrow y \\ &= \overset{(2d)}{\text{FT}}(\Phi(x, y))(-\eta, -\omega) \\ &= \overline{\varphi(-\eta, -\omega)} . \end{aligned}$$

q.e.d.

3.1.1 Nachweis der positiven Definitheit

Definition: Symbol-Funktion $\text{Sym}_{X,c}(\omega)$

Die Symbol-Funktion $\text{Sym}_{X,c}(\omega)$ eines Funktionals $\lambda_{X,c} \in \text{PF}^d$ ist definiert als

$$\text{Sym}_{X,c}(\omega) := \lambda_{X,c}^x(e^{i\omega^{\text{tr}}x}) = \sum_{j \in M} c_j e^{i\omega^{\text{tr}}x_j} .$$

Mittels Satz 2.5-1 ist das Problem der Lösbarkeit des Interpolationssystems (2.5-6) nun auf das Problem des Nachweises von ‘ $\Phi \in \text{BPD}(m)$ ’ zurückgeführt. Ein mögliches Verfahren dafür ist die weitere Auswertung der folgenden Umformung. Laut Definition von $\text{BPD}(m)$ ist nach Gleichung (2.3-1) für alle $\lambda \in \tilde{S}_m^{d\perp}$ zu zeigen: $(\lambda, \lambda)_\Phi = c^{\text{tr}} A_\Phi \bar{c} \geq 0$ und $(\lambda, \lambda)_\Phi = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$.

$$\begin{aligned}
 \Phi(x, y) &= \stackrel{(2d)}{\text{FT}}^{\perp 1}(\varphi(\omega, \eta))(x, y) \\
 &= (2\pi)^{\perp 2d} \int \varphi(\omega, \eta) e^{i\omega^{\text{tr}}x + i\eta^{\text{tr}}y} d^{2d}(\omega, \eta) \\
 \Rightarrow c^{\text{tr}} A_\Phi \bar{c} &= \sum_{i,j \in M} c_i \bar{c}_j \Phi(x_i, x_j) \\
 &= \sum_{i,j \in M} c_i \bar{c}_j (2\pi)^{\perp 2d} \int \varphi(\omega, \eta) e^{i\omega^{\text{tr}}x_i + i\eta^{\text{tr}}x_j} d^{2d}(\omega, \eta) \\
 (3.1.1-1) \quad &= (2\pi)^{\perp 2d} \int \varphi(\omega, \eta) \sum_{i,j \in M} c_i \bar{c}_j e^{i\omega^{\text{tr}}x_i + i\eta^{\text{tr}}x_j} d^{2d}(\omega, \eta) \\
 &= (2\pi)^{\perp 2d} \int \varphi(\omega, \eta) \sum_{i \in M} c_i e^{i\omega^{\text{tr}}x_i} \overline{\sum_{j \in M} c_j e^{\perp i \eta^{\text{tr}}x_j}} d^{2d}(\omega, \eta) \\
 &= (2\pi)^{\perp 2d} \int \varphi(\omega, \eta) \text{Sym}_{X,c}(\omega) \overline{\text{Sym}_{X,c}(-\eta)} d^{2d}(\omega, \eta) \\
 &\hspace{15em} \text{Substitution } \eta \mapsto -\eta \\
 &= (2\pi)^{\perp 2d} \int \varphi(\omega, -\eta) \text{Sym}_{X,c}(\omega) \overline{\text{Sym}_{X,c}(\eta)} d^{2d}(\omega, \eta) .
 \end{aligned}$$

Ist man nun in der Lage vom letzten Integranden zu zeigen, daß er weder negativ noch identisch Null ist, so ist der geforderte Nachweis erbracht. In der klassischen Theorie kann φ nicht negativ werden, so daß es schließlich nur noch auf das Produkt der Symbol-Funktionen ankommt.⁶⁵

Eine noch symmetrischere Form von (3.1.1-1) erhält man unter Ausnutzung des Satzes 3.1-1: Sei $\tilde{\varphi}(\omega, \eta) := \sqrt{\varphi(\omega, \eta)}$ ein beliebiger, im folgenden fester Zweig der komplexen Wurzel der Funktion φ . Dann gilt laut diesem Satz auch $\tilde{\varphi}(\omega, \eta) = \overline{\tilde{\varphi}(-\eta, -\omega)}$ und somit:

$$\varphi(\omega, -\eta) = \tilde{\varphi}(\omega, -\eta) \cdot \tilde{\varphi}(\omega, -\eta) = \tilde{\varphi}(\omega, -\eta) \cdot \overline{\tilde{\varphi}(\eta, -\omega)} .$$

Für $c^{\text{tr}} A_\Phi \bar{c}$ erhält man also:

$$\begin{aligned}
 c^{\text{tr}} A_\Phi \bar{c} &= (2\pi)^{\perp 2d} \int \tilde{\varphi}(\omega, -\eta) \text{Sym}_{X,c}(\omega) \overline{\tilde{\varphi}(\eta, -\omega) \text{Sym}_{X,c}(\eta)} d^{2d}(\omega, \eta) \\
 &= \int f(\omega, \eta) \overline{f(\eta, \omega)} d^{2d}(\omega, \eta) ,
 \end{aligned}$$

⁶⁵Siehe dazu Gleichung (3.2.1-1).

wobei $f(\omega, \eta) := (2\pi)^{\perp d} \tilde{\varphi}(\omega, -\eta) \cdot \text{Sym}_{X,c}(\omega)$ gesetzt wurde. Für symmetrische Funktionen f gilt dann $f(\omega, \eta) \cdot \overline{f(\eta, \omega)} \geq 0$, so daß das Integral schon positiv ist, wenn $\text{supp } f$ mehr als eine Nullmenge ist. Symmetrie ist aber für f der obigen Form eine sehr starke Bedingung, so daß die Frage interessant wird, welche f bzw. φ außerdem noch die Positivität des Integrals gewährleisten. Dieser Frage wird hier aber nicht weiter nachgegangen.

3.1.2 Abschätzung des Interpolationsfehlers

Definition: Fehler-Kern-Funktion $g_{X,c}(x, \omega)$

Zur Stützstellenmenge X , zu $c \in \mathbb{C}^N$ und $x, \omega \in \mathbb{R}^d$ setzt man:⁶⁶

$$\begin{aligned} g_{X,c}(x, \omega) &:= \left(\delta_x^{x'} - \lambda_{X,c}^{x'} \right) \left(e^{i\omega^{\text{tr}} x'} \right) \\ &= e^{i\omega^{\text{tr}} x} - \sum_{j \in M} c_j e^{i\omega^{\text{tr}} x_j} = e^{i\omega^{\text{tr}} x} - \text{Sym}_{X,c}(\omega). \end{aligned}$$

Offensichtlich gilt für die Lösung $u(x)$ von (2.6-2) bzw. (2.9-1):

$$(3.1.2-1) \quad g_{X,u(x)}(x, \omega) = \varepsilon_{x,u}^{x'} \left(e^{i\omega^{\text{tr}} x'} \right).$$

Lemma 3.1.2-1

Die Funktion $g_{X,u(x)}(x, \omega)$ verhält sich im Integranden relativ angenehm, denn für eine \mathbb{P}_m^d -reproduzierende Lagrange-Basis $u(x)$ gilt:

$$\forall x \in \mathbb{R}^d : \quad \left| g_{X,u(x)}(x, \omega) \right| = \begin{cases} \mathcal{O}(\|\omega\|^m) & \text{für } \omega \rightarrow 0 \\ \mathcal{O}(1) & \text{für } \|\omega\| \rightarrow \infty \end{cases}.$$

Dieser Satz ist entnommen aus [WuSchabLocErr], Lemma 1. Der Beweis dort benutzt die Taylor-Entwicklung der Exponential-Funktion. $u(x)$ eliminiert darin die Polynomanteile bis zur Ordnung m . Das Ergebnis ist also vollkommen unabhängig von irgendwelchen symmetrischen Basisfunktionen. Wiederum läßt sich die Aussage auf die Ableitungen verallgemeinern.

Definition: Raum G_{s_0, s_∞}

Für $s_0, s_\infty \in \mathbb{R}$ sei

$$G_{s_0, s_\infty} := \left\{ f \in L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}^d) : |f(x)| \leq \begin{cases} \mathcal{O}(\|x\|^{\perp d \perp s_0}) & \text{für } x \rightarrow 0 \\ \mathcal{O}(\|x\|^{\perp d \perp s_\infty}) & \text{für } \|x\| \rightarrow \infty \end{cases} \right\}.$$

Es handelt sich um einen \mathbb{C} -Vektorraum.

Satz 3.1.2-2

Für $\hat{f} \in G_{s_0, s_\infty}$ mit $s_\infty > 0$, $s_0 < m$ und $u(x)$ wie oben gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\omega) g_{X,u(x)}(x, \omega) d^d \omega \in \mathbb{C} \text{ existiert.}$$

G_{s_0, s_∞} ist somit der Raum der gegen $g_{X,c}(x, \omega)$ integrierbaren Funktionen. Für den Beweis siehe [WuSchabLocErr], Theorem 2. Beispiele mit $\hat{f} = \varphi$ und Werte für s_0 und s_∞ sind in der Tabelle 1 auf Seite 48 aufgeführt.

⁶⁶In [WeinrichDr], Kap. 4.4 und 5.1 heißt die entsprechende Funktion $r_{x,u}$ und wird *Multipliiert* genannt.

Ihre eigentliche Bedeutung erlangt die Funktion $g_{X,u(x)}(x, \omega)$ durch die Sätze 3.1.2-3, 3.1.2-4 und 3.2.2-1:

Satz 3.1.2-3

Falls $f = \text{FT}^{\perp 1}(\hat{f})$ mit $\hat{f} \in G_{s_0, s_\infty}$ für $s_\infty > 0$ und $s_0 < m$ zutrifft und $u(x)$ eine Lagrange-Basis von X ist, so gilt für den Approximationsfehler:⁶⁷

$$\varepsilon_{x,u}(f) = (2\pi)^{\perp d} \int \hat{f}(\omega) g_{X,u(x)}(x, \omega) d^d \omega .$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x,u}(f) &= f(x) - s_{f,X,\Phi}(x) \\ &= f(x) - f(X)^{\text{tr}} u(x) && \text{laut (2.6-6)} \\ &= f(x) - \sum_{i \in M} f(x_i) u_i(x) \\ &= (2\pi)^{\perp d} \int \left(\hat{f}(\omega) e^{i\omega^{\text{tr}} x} - \sum_{i \in M} \hat{f}(\omega) e^{i\omega^{\text{tr}} x_i} u_i(x) \right) d^d \omega && f = \text{FT}^{\perp 1}(\hat{f}) \\ &= (2\pi)^{\perp d} \int \hat{f}(\omega) \left(e^{i\omega^{\text{tr}} x} - \sum_{i \in M} u_i(x) e^{i\omega^{\text{tr}} x_i} \right) d^d \omega \\ &= (2\pi)^{\perp d} \int \hat{f}(\omega) g_{X,u(x)}(x, \omega) d^d \omega && \text{existiert laut} \\ & && \text{Satz 3.1.2-2.s} \end{aligned}$$

q.e.d.

Von hier aus kann man mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung für Integrale weiter abschätzen:

$$\begin{aligned} |\varepsilon_{x,u}(f)| &\leq (2\pi)^{\perp d} \sqrt{\int |\hat{f}(\omega)|^2 d^d \omega} \sqrt{\int |g_{X,u(x)}(x, \omega)|^2 d^d \omega} \\ &= (2\pi)^{\perp d} \|\hat{f}\|_2 \|g_{X,u(x)}(x, \cdot)\|_2 . \end{aligned}$$

In Korollar 3.2.2-3 wird sich aber eine nützlichere Abschätzung ergeben.

Für verallgemeinert Fourier-transformierbare f überträgt sich die Aussage des Satzes entsprechend. Sie gilt wegen Satz 2.9-1 ganz speziell auch für die Lösung $u(x)$ von (2.9-1) bzw. (2.6-2).

Satz 3.1.2-4 (Integraldarstellung der quadratischen Form für $\Phi \in \text{SBF}^d$)

Sei $Q_\Phi(u, \Phi(x, X), \Phi(x, x))$ die quadratische Form aus Gleichung (2.8-3), und sei $\Phi(x, y) = \text{FT}^{\perp 1}(\varphi(\omega, \eta))(x, y)$. Dabei liege φ bezüglich jeder Variablen in G_{s_0, s_∞} , d. h. $\varphi(\omega, \cdot), \varphi(\cdot, \eta) \in G_{s_0, s_\infty}$. Sei $s_\infty > 0$ und $s_0 < 2m$. Dann gilt für alle $u \in \mathbb{C}^N$, $x \in \mathbb{R}^d$:

$$Q_\Phi(u, \Phi(x, X), \Phi(x, x)) = (2\pi)^{\perp 2d} \int \varphi(\omega, -\eta) g_{X,u}(x, \omega) \overline{g_{X,u}(x, \eta)} d^{2d}(\omega, \eta) .$$

⁶⁷Vgl. [WeinrichDr], (4.3) und [WuSchabLocErr], (4.1).

Beweis:

$$\begin{aligned}
& Q_{\Phi}(u, \Phi(x, X), \Phi(x, x)) \\
&= u^{\text{tr}} A_{\Phi} \bar{u} - 2 \operatorname{Re}(u^{\text{tr}} \overline{\Phi(x, X)}) + \Phi(x, x) \quad \text{laut (2.8-3)} \\
(3.1.2-2) \quad &= \sum_{i,j \in M} u_i \bar{u}_j \Phi(x_i, x_j) - \sum_{i \in M} u_i \overline{\Phi(x, x_i)} - \sum_{j \in M} \bar{u}_j \Phi(x, x_j) + \Phi(x, x) \\
& \quad \overline{\Phi(x, x_i)} = \Phi(x_i, x) \\
&= \sum_{i,j \in M} u_i \bar{u}_j \Phi(x_i, x_j) - \sum_{i \in M} u_i \Phi(x_i, x) - \sum_{j \in M} \bar{u}_j \Phi(x, x_j) + \Phi(x, x) .
\end{aligned}$$

Und weiter mit $\Phi(x, y) = \overset{(2d)}{\text{FT}}^{\perp 1}(\varphi(\omega, \eta))(x, y)$:

$$\begin{aligned}
& Q_{\Phi}(u, \Phi(x, X), \Phi(x, x)) \\
&= (2\pi)^{\perp 2d} \int \varphi(\omega, \eta) \left(\sum_{i,j \in M} u_i \bar{u}_j e^{i(\omega^{\text{tr}} x_i + \eta^{\text{tr}} x_j)} \right. \\
& \quad \left. - \sum_{i \in M} u_i e^{i(\omega^{\text{tr}} x_i + \eta^{\text{tr}} x)} - \sum_{j \in M} \bar{u}_j e^{i(\omega^{\text{tr}} x + \eta^{\text{tr}} x_j)} + e^{i(\omega^{\text{tr}} x + \eta^{\text{tr}} x)} \right) d^{2d}(\omega, \eta) \\
&= (2\pi)^{\perp 2d} \int \varphi(\omega, \eta) \left(\operatorname{Sym}_{X,u}(\omega) \overline{\operatorname{Sym}_{X,u}(-\eta)} \right. \\
& \quad \left. - \operatorname{Sym}_{X,u}(\omega) e^{i\eta^{\text{tr}} x} - \overline{\operatorname{Sym}_{X,u}(-\eta)} e^{i\omega^{\text{tr}} x} + e^{i\omega^{\text{tr}} x} \overline{e^{i(\perp \eta)^{\text{tr}} x}} \right) d^{2d}(\omega, \eta) \\
&= (2\pi)^{\perp 2d} \int \varphi(\omega, \eta) \left(\operatorname{Sym}_{X,u}(\omega) - e^{i\omega^{\text{tr}} x} \right) \\
& \quad \cdot \left(\overline{\operatorname{Sym}_{X,u}(-\eta)} - e^{i(\perp \eta)^{\text{tr}} x} \right) d^{2d}(\omega, \eta) \\
&= (2\pi)^{\perp 2d} \int \varphi(\omega, \eta) g_{X,u}(x, \omega) \overline{g_{X,u}(x, -\eta)} d^{2d}(\omega, \eta) \\
& \quad \text{Substitution } -\eta \mapsto \eta \\
&= (2\pi)^{\perp 2d} \int \varphi(\omega, -\eta) g_{X,u}(x, \omega) \overline{g_{X,u}(x, \eta)} d^{2d}(\omega, \eta) .
\end{aligned}$$

Nach Satz 3.1.2-2 existiert das Integral.

q.e.d.

Korollar 3.1.2-5 (Integraldarstellung der Kriging-Funktion für $\Phi \in \text{SBF}^d$)

Sei $u(x)$ die Lösung von (2.6-2) bzw. (2.9-1) und $\Phi(x, y) = \overset{(2d)}{\text{FT}}^{\perp 1}(\varphi(\omega, \eta))(x, y)$ wie in Satz 3.1.2-4. Dann folgt aus der Definition der Kriging-Funktion mit obigem Satz sofort:

$$\begin{aligned}
\kappa_{X,\Phi}^2(x) &= Q_{\Phi}(u(x), \Phi(x, X), \Phi(x, x)) \\
&= (2\pi)^{\perp 2d} \int \varphi(\omega, -\eta) g_{X,u(x)}(x, \omega) \overline{g_{X,u(x)}(x, \eta)} d^{2d}(\omega, \eta) .
\end{aligned}$$

3.2 Translationsinvariante Basisfunktionen

Zunächst sei hier an die Definition der translationsinvarianten Basisfunktion aus Kapitel 1.1 erinnert:

$$\text{TBF}^d := \left\{ \Phi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C} : \begin{array}{l} \Phi(x, y) = \overline{\Phi(y, x)} \\ \wedge \Phi(x - z, y - z) = \Phi(x, y) \quad \forall z \end{array} \right\}.$$

Satz 3.2-1

$$\Phi \in \text{TBF}^d \quad \Leftrightarrow \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d : \quad \Phi(x, y) = \Phi(x - y, 0)$$

Auf Grund der Eigenschaft ‘ $\Phi(x, y) = \Phi(x - y, 0)$ ’ nennt man diese Funktionen auch ‘Basisfunktionen vom Differenz-Typ’.

Beweis:

‘ \Rightarrow ’:

$$\begin{aligned} & \forall x, y, z \in \mathbb{R}^d: \quad \Phi(x - z, y - z) = \Phi(x, y) \\ \Rightarrow & \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d: \quad \Phi(x - y, 0) = \Phi(x, y) \quad \text{durch } z := y \end{aligned}$$

‘ \Leftarrow ’:

$$\begin{aligned} & \forall x, y \in \mathbb{R}^d: \quad \Phi(x - y, 0) = \Phi(x, y) \quad \text{(I)} \\ \Rightarrow & \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}^d: \quad \Phi((x - z) - (y - z), 0) = \Phi(x - z, y - z) \\ \Rightarrow & \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}^d: \quad \Phi(x - y, 0) = \Phi(x - z, y - z) \quad \text{(II)} \\ & \quad \quad \quad \text{(I) } \wedge \quad \text{(II)} \\ \Rightarrow & \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d: \quad \Phi(x - z, y - z) = \Phi(x, y) . \end{aligned}$$

q.e.d.

Hieran sieht man, daß es für translationsinvariante Basisfunktionen völlig ausreicht, $\Phi(x, 0)$ zu untersuchen. Genau dieses geschieht in der ‘klassischen’ Theorie, die $\Phi(x) = \phi(\|x\|_2)$ benutzt. Nutzt man auch die Symmetrie noch aus, erhält man den⁶⁸

Satz 3.2-2

$$\forall \Phi \in \text{TBF}^d : \quad \Phi(x, 0) = \overline{\Phi(-x, 0)} \quad \forall x \in \mathbb{C}^d .$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \forall x = z - y \in \mathbb{C}^d : \quad \Phi(z - y, 0) &= \Phi(z, y) = \overline{\Phi(y, z)} \\ &= \overline{\Phi(y - z, 0)} = \overline{\Phi(-(z - y), 0)} . \end{aligned}$$

q.e.d.

⁶⁸Ein ähnlicher Satz wird in [BaxterSivaWard], Proposition 1.2 zitiert: Aus $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ positiv definit folgt $\Phi(x) = \Phi(\perp x)$.

Anschaulich ausgedrückt, eliminiert die Bedingung $\Phi(x - z, y - z) = \Phi(x, y)$ aus der Definitionsgleichung (1.1-6) d Freiheitsgrade, was sich bei der Fourier-Transformation bezüglich *beider* Variablen von Φ wie folgt auswirkt:

Satz 3.2-3

Sei Φ stetig. Dann gilt:

$$\Phi \in \text{TBF}^d \wedge \exists \overset{(2d)}{\text{FT}}(\Phi) \Leftrightarrow \Phi = 0 .$$

Beweis:

‘ \Leftarrow ’: Die Nullfunktion ist translationsinvariant und Fourier-transformierbar.

‘ \Rightarrow ’: Sei für fast alle $\omega, \eta \in \mathbb{R}^d$ der Ausdruck $\overset{(2d)}{\text{FT}}(\Phi)(\omega, \eta)$ definiert. Dann gilt $\forall z \in \mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned} \varphi(\omega, \eta) &= \overset{(2d)}{\text{FT}}(\Phi(x, y))(\omega, \eta) \\ &= \overset{(2d)}{\text{FT}}(\Phi(x - z, y - z))(\omega, \eta) && \text{da } \Phi \in \text{TBF}^d \\ &= e^{\perp i \binom{z}{z}^{\text{tr}} \binom{\omega}{\eta}} \overset{(2d)}{\text{FT}}(\Phi(x, y))(\omega, \eta) && \text{laut Satz 1.4-3} \\ &= e^{\perp i (z^{\text{tr}}\omega + z^{\text{tr}}\eta)} \varphi(\omega, \eta) \\ &= e^{\perp i z^{\text{tr}}(\omega + \eta)} \varphi(\omega, \eta) \\ \Rightarrow \quad \varphi(\omega, \eta) &= 0 && \text{für fast alle } \omega, \eta \\ \quad \forall z^{\text{tr}}(\omega + \eta) &\equiv 0 \pmod{2\pi} && \text{für fast alle } \omega, \eta \\ \Rightarrow \quad \Phi(x, y) &= 0 && \text{für alle } x, y, \text{ da } \Phi \text{ stetig ist.} \\ \quad \forall \quad z &= 0 . \end{aligned}$$

q.e.d.

Dieser Sachverhalt verdeutlicht, daß die Fourier-Transformation bezüglich *beider* Variablen für *translationsinvariante* Basisfunktionen kein nützliches Instrument sein kann. Im folgenden wird daher nur noch der Operator $\overset{(d)}{\text{FT}}$ für $\Phi(x, 0)$ benutzt. Mit Satz 3.2-2 erhält man nun den

Satz 3.2-4

$$\Phi \in \text{TBF}^d \wedge \exists \varphi := \overset{(d)}{\text{FT}}(\Phi(x, 0)) \Rightarrow \varphi(\omega) \in \mathbb{R} \quad \forall \omega \in \mathbb{R}^d .$$

Beweis:

Die Quadranten des \mathbb{R}^d lassen sich darstellen durch

$$G_\nu := \left\{ x \in \mathbb{R}^d : \nu_i x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \dots, d \right\} \quad \text{für } \nu \in \{-1, 1\}^d ,$$

woraus $G_{\perp\nu} = -G_\nu$ ersichtlich ist. Es gilt nun:

$$\varphi(\omega) := \stackrel{(d)}{\text{FT}}(\Phi(x, 0))(\omega) = \int_{\mathbf{R}^d} \Phi(x, 0) e^{\perp i x^{\text{tr}} \omega} d^d x$$

Die einzelnen Integrale müssen existieren.

$$= \sum_{\nu \in \{\pm 1, 1\}^d} \int_{G_\nu} \Phi(x, 0) e^{\perp i x^{\text{tr}} \omega} d^d x$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\nu \in \{\pm 1, 1\}^d} \left(\int_{G_{\perp\nu}} \Phi(x, 0) e^{\perp i x^{\text{tr}} \omega} d^d x + \int_{G_\nu} \Phi(x, 0) e^{\perp i x^{\text{tr}} \omega} d^d x \right)$$

$$G_{\perp\nu} = -G_\nu \text{ und Substitution } y := -x \Rightarrow \left| \det \frac{\partial y}{\partial x} \right| = 1$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\nu \in \{\pm 1, 1\}^d} \left(\int_{G_\nu} \Phi(-x, 0) e^{\perp i (\perp x)^{\text{tr}} \omega} d^d x + \int_{G_\nu} \Phi(x, 0) e^{\perp i x^{\text{tr}} \omega} d^d x \right)$$

Laut Satz 3.2-2 gilt: $\Phi(-x, 0) = \overline{\Phi(x, 0)}$.

$$= \frac{1}{2} \sum_{\nu \in \{\pm 1, 1\}^d} \int_{G_\nu} \left(\overline{\Phi(x, 0)} e^{\perp i x^{\text{tr}} \omega} + \Phi(x, 0) e^{\perp i x^{\text{tr}} \omega} \right) d^d x$$

$$= \text{Re} \sum_{\nu \in \{\pm 1, 1\}^d} \int_{G_\nu} \Phi(x, 0) e^{\perp i x^{\text{tr}} \omega} d^d x .$$

q.e.d.

3.2.1 Nachweis der positiven Definitheit

Die Gleichung (3.1.1-1) erhält durch die Verwendung der d -variaten Fourier-Transformation die Gestalt:⁶⁹

$$\begin{aligned} \Phi(x, 0) &= \stackrel{(d)}{\text{FT}}^{\perp 1}(\varphi(\omega))(x) \\ &= (2\pi)^{\perp d} \int \varphi(\omega) e^{i\omega^{\text{tr}} x} d\omega \\ \Rightarrow c^{\text{tr}} A_\Phi \bar{c} &= \sum_{i, j \in M} c_i \bar{c}_j \Phi(x_i, x_j) \\ &= \sum_{i, j \in M} c_i \bar{c}_j \Phi(x_i - x_j, 0) && \Phi \in \text{TBF}^d \\ (3.2.1-1) \quad &= \sum_{i, j \in M} c_i \bar{c}_j (2\pi)^{\perp d} \int \varphi(\omega) e^{i\omega^{\text{tr}}(x_i \perp x_j)} d\omega \\ &= (2\pi)^{\perp d} \int \varphi(\omega) \sum_{i \in M} c_i e^{i\omega^{\text{tr}} x_i} \sum_{j \in M} \bar{c}_j e^{\perp i \omega^{\text{tr}} x_j} d\omega \\ &= (2\pi)^{\perp d} \int \varphi(\omega) \text{Sym}_{X, c}(\omega) \overline{\text{Sym}_{X, c}(\omega)} d\omega \\ &= (2\pi)^{\perp d} \int \varphi(\omega) \left| \text{Sym}_{X, c}(\omega) \right|^2 d\omega . \end{aligned}$$

⁶⁹Schon Schoenberg ist so vorgegangen: [SchoenPosDef], S. 524. Siehe dazu auch [Micchelli86] und [Powell92], Gleichung (3.9).

Mit dieser Form der Gleichung (3.1.1-1) läßt sich besser arbeiten. Beispielsweise folgt daraus:

Satz 3.2.1-1

Für translationsinvariante Φ mit $\Phi(x, 0) = \overset{(d)}{\text{FT}}^{\perp 1}(\varphi(\omega))(x)$ gilt:

$$\begin{aligned} & \varphi \geq 0 \\ & \wedge \varphi(\omega) > 0 \text{ auf einer Nicht-Nullmenge} \\ \Rightarrow & A_{\Phi} : \text{ positiv definit .} \end{aligned}$$

Beweis:

Wegen (3.2.1-1) ist nur noch zu zeigen: Die Symbol-Funktion $\text{Sym}_{X,c}(\omega)$ verschwindet für ein X (mit $x_i \neq x_j$ für $i \neq j$ wie üblich) nur auf einer Nullmenge.

Nach Voraussetzung gibt es eine offene ε -Umgebung U_{ε} mit $\varepsilon > 0$ in \mathbb{R}^d , so daß $\forall \omega \in U_{\varepsilon} : \varphi(\omega) > \varepsilon$. Angenommen nun, es gibt ein $c \neq 0$, so daß $c^{\text{tr}} A_{\Phi} \bar{c} = 0$ gilt. Da der Integrand in Gleichung (3.2.1-1) stetig ist, folgt $\text{Sym}_{X,c}(\omega) = \sum_{j \in M} c_j e^{i\omega^{\text{tr}} x_j} = 0 \quad \forall \omega \in U_{\varepsilon}$.

Da die Funktionen $e^{i\omega^{\text{tr}} x_j}$ wegen der paarweise verschiedenen x_j auf jeder offenen Umgebung linear unabhängig sind, folgt $c = 0$ — ein Widerspruch zur Annahme.⁷⁰

q.e.d.

3.2.2 Abschätzung des Interpolationsfehlers, der Funktionenraum F_{Φ}

Satz 3.2.2-1 (Integraldarstellung der quadratischen Form für $\Phi \in \text{TBF}^d$)

Sei $Q_{\Phi}(u, \Phi(x, X), \Phi(x, x))$ die quadratische Form aus Gleichung (2.8-3), und sei $\Phi(x, y) = \overset{(2d)}{\text{FT}}^{\perp 1}(\varphi(\omega, \eta))(x, y)$. Dabei liege φ in $G_{s_0, s_{\infty}}$. Sei $s_{\infty} > 0$ und $s_0 < 2m$. Dann gilt für alle $u \in \mathbb{C}^N$, $x \in \mathbb{R}^d$:

$$Q_{\Phi}(u, \Phi(x, X), \Phi(x, x)) = (2\pi)^{\perp d} \int \varphi(\omega) |g_{X,u}(x, \omega)|^2 d\omega .$$

Dies ist für translationsinvariante Basisfunktionen das Analogon zu Satz 3.1.2-4.

Beweis:

Analog zu Satz 3.1.2-4 benutzt man die Gleichung (3.1.2-2):⁷¹

$$\begin{aligned} & Q_{\Phi}(u, \Phi(x, X), \Phi(x, x)) \\ = & \sum_{i,j \in M} u_i \bar{u}_j \Phi(x_i, x_j) - \sum_{i \in M} u_i \Phi(x_i, x) - \sum_{j \in M} \bar{u}_j \Phi(x, x_j) + \Phi(x, x) \\ & \text{laut Satz 3.2-1} \\ = & \sum_{i,j \in M} u_i \bar{u}_j \Phi(x_i - x_j, 0) \\ & - \sum_{i \in M} u_i \Phi(x_i - x, 0) - \sum_{j \in M} \bar{u}_j \Phi(x - x_j, 0) + \Phi(x - x, 0) \end{aligned}$$

⁷⁰Beweis analog [CADII], 27.04.93.

⁷¹Beweis nach [WeinrichDr], Gleichung (4.2) und Satz 4.3. Siehe auch [WuSchabLocErr] (3.2) sowie Theorem 2.

Wird $\Phi(x, 0) = \overset{(d)}{\text{FT}}^{\perp 1}(\varphi)(x)$ eingesetzt, so folgt:

$$\begin{aligned}
& Q_{\Phi}(u, \Phi(x, X), \Phi(x, x)) \\
&= (2\pi)^{\perp d} \int \varphi(\omega) \left(\sum_{i,j \in M} u_i \bar{u}_j e^{i\omega^{\text{tr}}(x_i \perp x_j)} \right. \\
&\quad \left. - \sum_{i \in M} u_i e^{i\omega^{\text{tr}}(x_i \perp x)} - \sum_{j \in M} \bar{u}_j e^{i\omega^{\text{tr}}(x \perp x_j)} + 1 \right) d\omega \\
&= (2\pi)^{\perp d} \int \varphi(\omega) \left(\text{Sym}_{X,u}(\omega) \overline{\text{Sym}_{X,u}(\omega)} \right. \\
&\quad \left. - \text{Sym}_{X,u}(\omega) \overline{e^{i\omega^{\text{tr}}x}} - e^{i\omega^{\text{tr}}x} \overline{\text{Sym}_{X,u}(\omega)} + e^{i\omega^{\text{tr}}x} \overline{e^{i\omega^{\text{tr}}x}} \right) d\omega .
\end{aligned}$$

Mittels quadratischer Ergänzung sieht man:

$$\begin{aligned}
& Q_{\Phi}(u, \Phi(x, X), \Phi(x, x)) \\
&= (2\pi)^{\perp d} \int \varphi(\omega) \left(\text{Sym}_{X,u}(\omega) - e^{i\omega^{\text{tr}}x} \right) \cdot \overline{\left(\text{Sym}_{X,u}(\omega) - e^{i\omega^{\text{tr}}x} \right)} d\omega \\
&= (2\pi)^{\perp d} \int \varphi(\omega) \left| \text{Sym}_{X,u}(\omega) - e^{i\omega^{\text{tr}}x} \right|^2 d\omega \\
&= (2\pi)^{\perp d} \int \varphi(\omega) |g_{X,u}(x, \omega)|^2 d\omega .
\end{aligned}$$

Die Existenz des Integrals ergibt sich aus Satz 3.1.2-2.⁷² Dieser Beweis ist hier zwar nur für eigentlich Fourier-transformierbare Φ angegeben, er läßt sich aber auch auf die verallgemeinerte Fourier-Transformation übertragen.⁷³

q.e.d.

Korollar 3.2.2-2 (Integraldarstellung der Kriging-Funktion für $\Phi \in \text{TBF}^d$)

Aus der Definition der Kriging-Funktion von Seite 28 folgt mit obigem Satz sofort:

$$\kappa_{X,\Phi}^2(x) = (2\pi)^{\perp d} \int \varphi(\omega) |g_{X,u(x)}(x, \omega)|^2 d\omega ,$$

wobei $u(x)$ die Lösung von (2.6-2) bzw. (2.9-1) und $\Phi(x, 0) := \overset{(d)}{\text{FT}}^{\perp 1}(\varphi)(x)$ wie in Satz 3.2.2-1 ist. Dieses Korollar ist ein Analogon zum Korollar 3.1.2-5.

Das folgende Korollar 3.2.2-3 motiviert die nächste Definition:⁷⁴

Definition: native space F_{Φ}

Der native space von $\Phi \in \text{BPD}(m)$ ist definiert als

$$F_{\Phi} := \left\{ f \in \text{Fun}^d : f = \text{vFT}^{\perp 1}(\hat{f}) \text{ mit } \hat{f} \in \text{Fun}^d \wedge \int \frac{|\hat{f}(\omega)|^2}{\text{vFT}(\Phi)(\omega)} d\omega < \infty \right\} .$$

⁷²Vgl. [WuSchabLocErr].

⁷³Vgl. [WeinrichDr], S. 28.

⁷⁴Siehe [SchabackAppRBF], S. 4, [SchabackErrCond], S. 2, [WeinrichDr], Kap. 4.1 und 5 und auch [WuSchabLocErr], Kap. 4.

Mit dem gewichteten L_2 -Skalarprodukt

$$\langle f|g \rangle_{F_\Phi} := (2\pi)^{\perp d} \int \frac{\text{vFT}(f)(\omega) \overline{\text{vFT}(g)(\omega)}}{\text{vFT}(\Phi)(\omega)} d\omega$$

bildet dieser Raum einen *Prä-Hilbertraum*.⁷⁵ Die dazu gehörende Norm sei mit $\|\cdot\|_{F_\Phi}$ bezeichnet. Die Vervollständigung $\overline{F_\Phi}$ von F_Φ eignet sich als Vorgabe \tilde{H} für das Verfahren des Kapitels 2.12.

Korollar 3.2.2-3

Für $f = \text{FT}^{\perp 1}(\hat{f})$ mit $\hat{f} \in G_{s_0, s_\infty}$, $s_\infty > 0$, $s_0 < m$, ein beliebiges φ mit $\varphi(\omega) > 0 \forall \omega$, ein $u(x)$ wie oben und jedes $\tilde{u}(x)$ mit $P^{\text{tr}} \tilde{u}(x) = S(x)$ gilt:⁷⁶

$$\begin{aligned} |f(x) - s_{f, X, \Phi}(x)| &\leq \|f\|_{F_\Phi} \cdot \kappa_{X, \Phi}(x) \\ &\leq \|f\|_{F_\Phi} \cdot \sqrt{(2\pi)^{\perp d} \int \varphi(\omega) |g_{X, \tilde{u}(x)}(x, \omega)|^2 d\omega}. \end{aligned}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} |f(x) - s_{f, X, \Phi}(x)|^2 &= |\varepsilon_{x, u}(f)|^2 \\ &= (2\pi)^{\perp 2d} \left| \int \frac{\hat{f}(\omega)}{\sqrt{\varphi(\omega)}} \sqrt{\varphi(\omega)} g_{X, u(x)}(x, \omega) d\omega \right|^2 && \text{laut Satz 3.1.2-3 und } \varphi(\omega) > 0 \\ &\leq (2\pi)^{\perp d} \int \left| \frac{\hat{f}(\omega)}{\sqrt{\varphi(\omega)}} \right|^2 d\omega && \text{Cauchy-Schwarz für Integrale} \\ &\quad \cdot (2\pi)^{\perp d} \int \left| \sqrt{\varphi(\omega)} g_{X, u(x)}(x, \omega) \right|^2 d\omega \\ &= \|f\|_{F_\Phi}^2 \cdot \kappa_{X, \Phi}^2(x) && \text{laut Korollar 3.2.2-2} \\ &\leq \|f\|_{F_\Phi}^2 \cdot (2\pi)^{\perp d} \int \left| \sqrt{\varphi(\omega)} g_{X, \tilde{u}(x)}(x, \omega) \right|^2 d\omega && \text{laut Bemerkung 2.9-2 für} \\ & && \text{jedes } \tilde{u}(x) \text{ mit } P^{\text{tr}} \tilde{u}(x) = S(x). \end{aligned}$$

Die oben verwendete Cauchy-Schwarz-Ungleichung für Integrale ist z. B. [HardyLittle] zu entnehmen. Siehe auch [WuSchabLocErr], Gleichung (4.3).

q.e.d.

3.3 Radiale Basisfunktionen: Klassische Ergebnisse für $\Phi = \phi \circ d_2$

Wie in der Definition der radialen Basisfunktionen schon erwähnt, betrachtet die ‘klassische’ Theorie den Fall, daß die Metrik d die gewöhnliche 2-Metrik d_2 ist, also

$$\Phi(x, y) = \phi(d_2(x, y)) = \phi(\|x - y\|_2).$$

⁷⁵Diese Definition geht zurück auf [WuSchabLocErr], Definition 2. Weitere Charakterisierungen des Raumes F_Φ findet man in: [IskeDr], Kap. 6.2, [WeinrichDr], Kap. 4.1, 5 und 6 und [SchabackAppRBF].

⁷⁶ $\tilde{u}(x)$ ist also eine \mathbb{P}_m^d -reproduzierende Lagrange-Basis.

Insbesondere ist diese radiale Basisfunktion ein Spezialfall der translationsinvarianten Basisfunktionen des Kapitels 3.2, denn es gilt:

$$\Phi(x, y) = \Phi(x - y, 0).$$

Daher sind die kürzeren Schreibweisen

$$\Phi(x) = \phi(\|x\|_2) \quad \text{und} \quad \varphi(\omega) := \text{vFT}(\Phi(x))(\omega) = \varphi_0(\|\omega\|_2)$$

mit $\varphi_0 : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ gebräuchlich. Die letzte Gleichheit gilt nach Satz 1.4-6. Im exakten Sinne der Definition ist also auch φ eine radiale Basisfunktion.

Als radiale Funktionen sind diese Φ invariant unter allen Transformationen des Raumes, die Längen bezüglich der 2-Norm nicht verändern. Dazu gehören außer den Translationen auch noch die Rotationen. Daher kann man diese Funktionenklasse auch als *euklidisch invariante Basisfunktionen* bezeichnen.⁷⁷

Die Ergebnisse des Kapitels 2.5 über die Lösbarkeit des Interpolationssystems und die des Kapitels 3.2 über bedingte positive Definitheit und den Interpolationsfehler übertragen sich direkt auf den oben genannten Spezialfall. Für die weitergehenden Fragestellungen findet man in der allgemeinen Theorie nicht so einfach Antworten. Die folgenden Kapitel stellen daher einige bekannte Ergebnisse der klassischen Theorie dar.

3.3.1 Charakteristika positiv definiter Funktionen

Satz 3.3.1-1

Für $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ positiv semidefinit, gerade (d.h. $\Phi(-x) = \Phi(x)$) und nicht identisch Null gilt:⁷⁸

$$\Phi(0) > 0 \quad \wedge \quad \Phi(0) \geq |\Phi(x)| \quad \forall x \in \mathbb{R}^d .$$

Definition: vollständig monoton

Vollständig monoton auf $\mathbb{R}_{>0}$ ist eine Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R}_{>0})$ genau dann, wenn für alle ihre Ableitungen gilt:

$$(3.3.1-1) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0, r \in \mathbb{R}_{>0} : \quad (-1)^n \frac{d^n f}{dr^n}(r) \geq 0 .$$

Bemerkungen:

Oft wird auch noch die Rechtsstetigkeit in 0 gefordert, so in [SchoenComMon], Gleichung (3.1'). Gilt die Gleichung (3.3.1-1) nur für $n = 0, \dots, K$, so nennt man die Funktion *unvollständig monoton*⁷⁹ oder *mehrfach monoton*⁸⁰ von Ordnung K .

⁷⁷Eine weitere abstrakte Funktionenklasse sind die *rotationsinvarianten Basisfunktionen*. Sie sind dadurch definiert, daß sie ihren Wert bei orthogonalen Transformationen beibehalten, d. h. $\forall T \in O(\mathbb{R}^d) : \Phi(Tx, Ty) = \Phi(x, y)$. Man kann zeigen, daß sie sich durch $\Phi(x, y) = \tilde{\phi}(x^{\text{tr}} y)$ darstellen lassen. Wegen $\phi(\|x\|_2) = \tilde{\phi}(x^{\text{tr}} x)$ sind die radialen Basisfunktionen die Schnittmenge aus translationsinvarianten und rotationsinvarianten Basisfunktionen. Da sich die charakteristischen Eigenschaften der Exponentialfunktion schlecht mit dem Einsetzen eines Ausdrucks vom Typ $x^{\text{tr}} y$ vertragen, ist eine genauere Untersuchung des Verhaltens von rotationsinvarianten Basisfunktionen unter Fourier-Transformation hier nicht sinnvoll.

⁷⁸Entnommen aus [IskeDr], Bemerkung 3.1.

⁷⁹Vgl. [SchabackWu].

⁸⁰Vgl. [WuCharPosDef].

Satz 3.3.1-2

Für $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\Phi(x) = \tilde{\phi}(\|x\|_2^2)$ (man beachte das Quadrat der Norm!) nicht identisch Null gilt:⁸¹

$$\begin{aligned} & \Phi \in \text{BPD}(0, \mathbb{R}^d) \quad \forall d \in \mathbb{N} \\ \Leftrightarrow & \quad \tilde{\phi} \text{ ist vollständig monoton und rechtsstetig in } 0 . \end{aligned}$$

Ganz aktuell ist die Verallgemeinerung

Satz 3.3.1-3

Für stetiges $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\Phi(x) = \tilde{\phi}(\|x\|_2^2)$ nicht identisch Null und beliebiges $m \in \mathbb{N}_0$ gilt:⁸²

$$\begin{aligned} & \Phi \in \text{BPD}(m, \mathbb{R}^d) \quad \forall d \in \mathbb{N} \\ \Leftrightarrow & \quad (-1)^m \frac{d^m \tilde{\phi}}{dr^m} \text{ ist vollständig monoton} . \end{aligned}$$

Bemerkung:

In den letzten beiden Sätzen wurden exakte Charakterisierungen der Φ gegeben, die für *alle* Dimensionen d bedingt positiv definit sind. Die neu entwickelten radialen Basisfunktionen mit kompaktem Träger sind jedoch nicht im gleichen Maße dimensionsunabhängig.⁸³ Eine andere Methode ist die weitere Auswertung der Gleichung (3.2.1-1) im Hinblick auf ein spezielles Φ bzw. φ .

Die Tabelle 1 auf Seite 48 enthält die klassischen radialen Basisfunktionen Φ , ihre verallgemeinerten Fourier-Transformierten φ (allerdings *ohne* die Angabe etwaiger Distributionsanteile, die durch nicht im gewöhnlichen Sinne existierende, uneigentliche Integrale entstehen können), die minimale Ordnung m ihrer bedingten positiven Definitheit und die minimalen Parameter s_0 und s_∞ , für die $\varphi \in G_{s_0, s_\infty}$ gilt. Die Bedeutung von s_0 und s_∞ ergibt sich aus Satz 3.1.2-2.⁸⁴ Abbildung 1 auf Seite 49 zeigt die Graphen dieser Funktionen Φ .⁸⁵ Die wichtigsten Eigenschaften der modifizierten Bessel-Funktionen dritter Art K_μ , die in der Tabelle auftauchen, findet man im Kapitel 1.3 dieser Arbeit.

Selten trifft man in der Literatur auf radiale Basisfunktionen vom Typ ‘verschobener Logarithmus’. Findet man sie, so muß man die angegebenen Eigenschaften nachprüfen. Insbesondere sind diese Funktionen nicht positiv definit, wie folgendes Korollar zeigt:

Korollar 3.3.1-4

$$\begin{aligned} & \phi(r) = \ln(c^2 + r^2) \quad \text{mit } c \in \mathbb{R}_{\neq 0} \quad \text{und} \quad \Phi(x) = \phi(\|x\|_2) \\ \Rightarrow & \quad \Phi \in \text{BPD}(2, \mathbb{R}^d) . \end{aligned}$$

⁸¹Vgl. [SchoenComMon], Theorem 3. In der Originalarbeit wird nur der Fall $d = 1$ betrachtet.

⁸²Entnommen aus [GuoHuSun], Theorem 3.1.

⁸³Dafür geeignete Methoden findet man in [IskeDr], [WendlandDip], [WuCompSupp].

⁸⁴Ähnliche Tabellen befinden sich in [SchabackErrCond], Tabellen 1 und 2, [SchabackIntApp], Tabelle 2, [SchabackLowBound], S. 2, und [SchabackRepPol], S. 2f.

⁸⁵Zu Beweisen und Literatur siehe [WeinrichDr], Kap. 4.3.4, [Micchelli86], Kap. 4, [JacksonSurvey], Kap. 3 und Tabelle 4, [SchabackAppRBF] Gleichung (3.4) und [CADII] vom 25.05.93.

Radiale Basisfunktion $\Phi(x) = \phi(\ x\ _2)$		$\varphi(\omega) := \text{vFT}(\Phi)(\omega)$		
Bezeichnung	$\phi(r) :=$	$\varphi(\omega) = \varphi_0(\ \omega\ _2)$	$\varphi_0(s) =$	$m \geq$ $s_0 >$ $s_\infty >$
polynomials	$(-1)^{[\nu/2]} r^\nu,$ $\nu \in \mathbb{R}_{>0} \setminus 2\mathbb{N}$	$C_1(d, \nu) s^{\perp d \perp \nu}$	$[\nu/2]$	ν ν
thin plate splines	$(-1)^{\nu/2+1} r^\nu \ln r,$ $\nu \in 2\mathbb{N}$	$C_2(d, \nu) s^{\perp d \perp \nu}$	$\nu/2 + 1$	ν ν
Gaußians	$e^{\perp \alpha r^2},$ $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$	$\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{d/2} e^{\perp s^2/(4\alpha)}$	0	$-d$ 0
multiquadrics	$(-1)^{[\nu/2]} (c^2 + r^2)^{\nu/2},$ $\nu \in \mathbb{R}_{>0} \setminus 2\mathbb{N}, c \in \mathbb{R}_{\neq 0}$	$(-1)^{[\nu/2]} M_{d,\nu,c}(s)$	$[\nu/2]$	ν 0
inverse multiquadrics	$(c^2 + r^2)^{\nu/2},$ $\nu \in \mathbb{R}_{<0} \setminus 2\mathbb{Z}, c \in \mathbb{R}_{\neq 0}$	$M_{d,\nu,c}(s)$ Für $\nu \leq \perp d$ ist FT möglich.	0	ν für $\nu > \perp d$ 0 $-d$ für $\nu \leq \perp d$
Sobolew-Splines	$\frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(\nu + \frac{d}{2})} K_{\perp \nu}(cr) \left(\frac{r}{2c}\right)^\nu,$ $= M_{d,\perp 2\nu \perp d,c}(r)$ $\nu \in \mathbb{R}_{>0}, c \in \mathbb{R}_{\neq 0}$	$(2\pi)^d (c^2 + s^2)^{\perp(\nu+d/2)}$	0	$-d$ ν
verschobener Logarithmus	$\ln(c^2 + r^2),$ $c \in \mathbb{R}_{\neq 0}$		2 vgl. Korollar 3.3.1-4	

Dabei ist

$$C_1(d, \nu) := 2^{d+\nu} \pi^{d/2} \frac{\Gamma\left(\frac{d+\nu}{2}\right)}{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)},$$

$$C_2(d, \nu) := 2^{d+\nu \perp 1} \pi^{d/2} \Gamma\left(\frac{d+\nu}{2}\right) \left(\frac{\nu}{2}\right)!,$$

$$M_{d,\nu,c}(s) := \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma\left(-\frac{\nu}{2}\right)} K_{\frac{d+\nu}{2}}(cs) \left(\frac{s}{2c}\right)^{\perp(d+\nu)/2}.$$

Tabelle 1: Die klassischen radialen Basisfunktionen, ihre Fourier-Transformierten und Daten

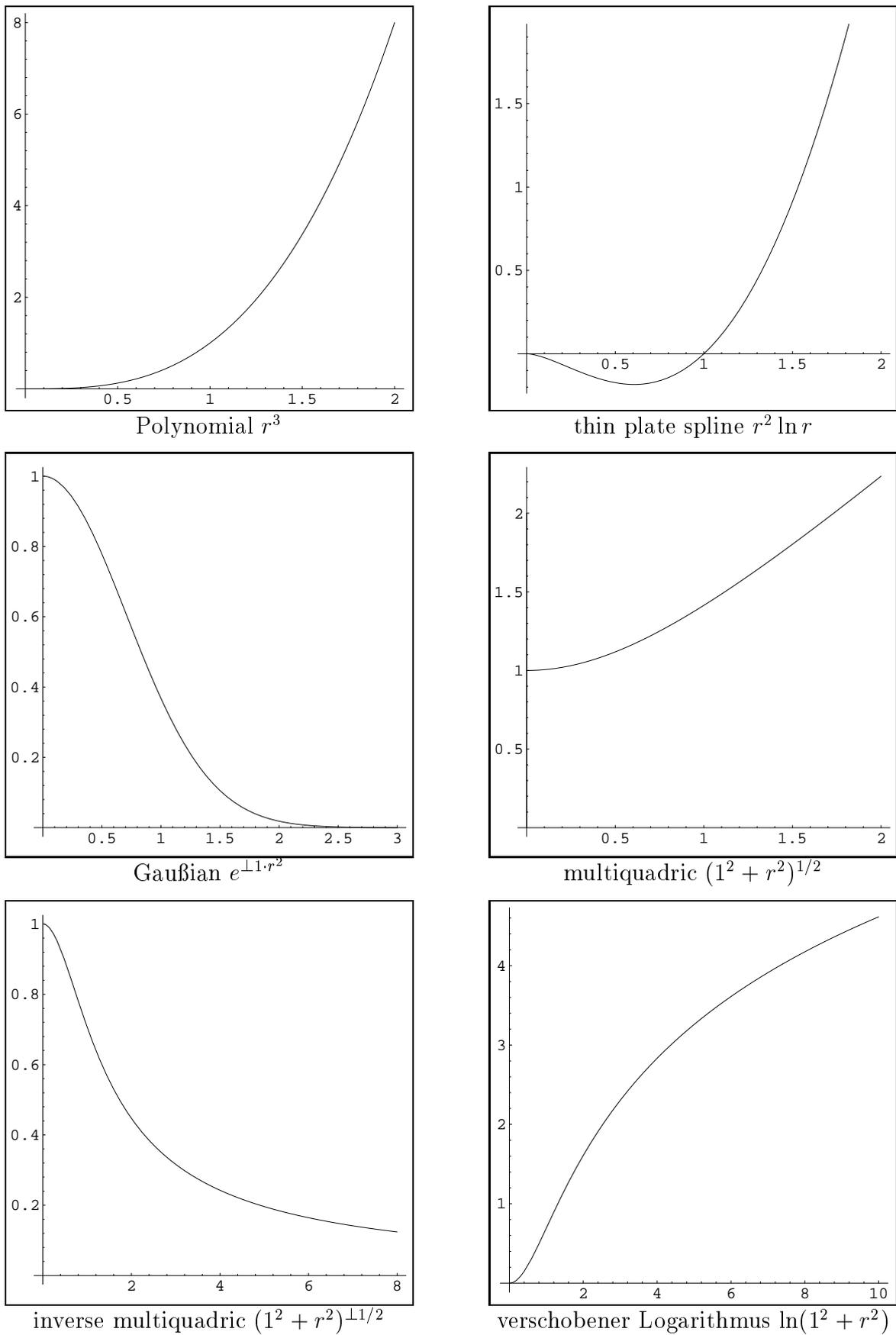


Abbildung 1: Graphen der klassischen radialen Basisfunktionen

Beweis:

Mit $\phi(r) = \tilde{\phi}(r^2)$ folgt:

$$\begin{aligned}\phi(r) &= \ln(c^2 + r^2) \\ \Rightarrow \tilde{\phi}(r) &= \ln(c^2 + r) \\ \Rightarrow \tilde{\phi}_2(r) &:= \frac{d^2 \tilde{\phi}}{dr^2}(r) = -\frac{1}{(c^2 + r)^2} = -(c^2 + r)^{-4/2}.\end{aligned}$$

Die zweite Ableitung von $\tilde{\phi}$ gehört also zur Funktion $\phi_2(r) := \tilde{\phi}_2(r^2) = -(c^2 + r^2)^{-4/2}$. Diese ist vom Typ ‘inverse multiquadric’, und somit laut Tabelle 1 positiv definit. Laut Satz 3.3.1-2 ist nun $\tilde{\phi}_2$ vollständig monoton, so daß wegen Satz 3.3.1-3 $\tilde{\phi}$ zu einer Funktion $\Phi \in \text{BPD}(2, \mathbb{R}^d)$ gehört.

q.e.d.

Etliche der Funktionen aus Tabelle 1 sind schon seit vielen Jahren im Gebrauch; so zeigte z. B. Duchon im Jahr 1977⁸⁶, daß die ‘thin plate splines’ und die ihnen verwandten ‘polynomials’ bestimmte Seminormen in Sobolew-Räumen minimieren. Die Eindeutigkeit der Lösung dieses Minimierungsproblems erklärt, warum diese beiden Typen von radialen Basisfunktionen, im Gegensatz zu allen anderen, keine Parameter enthalten. Die anschaulichste Anwendung des Satzes von Duchon ist die Erzeugung einer Fläche über dem \mathbb{R}^2 mit minimaler Krümmung, gemessen durch die L_2 -Norm der zweiten Ableitung. Diese Eigenschaft verlieh der ganzen Funktionenklasse den Namen ‘thin plate splines’. Da allgemein die zu erfüllende partielle Differentialgleichung $\Delta^m f = 0$ die ‘polyharmonische Differentialgleichung’ ist, werden ‘thin plate spline’ und ‘polynomials’ auch unter dem Namen ‘polyharmonic splines’ zusammengefaßt.

Relativ neu hingegen ist die folgende Definition.

Definition: radiale Basisfunktion mit kompaktem Träger

Eine radiale Basisfunktion mit kompaktem Träger ist eine radiale Basisfunktion $\Phi(x, y)$ der Form $\Phi(x, y) := \phi(d(x, y))$, wobei ihr Träger $\text{supp } \Phi \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt ist. Gebräuchlich ist die Bezeichnung ‘compactly supported functions’, die im folgenden verwendet wird.

Für ‘streng monotone’ Metriken (Metriken mit $\varepsilon > 0 \Rightarrow d((1 + \varepsilon)x, x) > 0 \forall x$) ist die Definition äquivalent zu: $\text{supp } \phi \subseteq \mathbb{R}^1$ ist kompakt.

Die Tabelle 2 auf Seite 53 enthält als Beispiele einige der sogenannten Wu⁸⁷- und Wendland⁸⁸-Funktionen.

Definition: Wu-Operatoren

Der *Wu-Integraloperator*

$$I : DB_I \rightarrow \text{Fun}^1; \quad f \mapsto I(f)(r) := \int_r^\infty s \cdot f(s) ds$$

⁸⁶Vgl. [Duchon77].

⁸⁷Zitiert aus [WuCompSupp], S. 9.

⁸⁸Eine Liste der Funktionen, die dem Autor dieser Arbeit von Herrn Wendland freundlicherweise zur Verfügung gestellt wurde, befindet sich in Tabelle 2.

sei auf $DB_I \subset \text{Fun}^1$ definiert, der *Wu-Differentialoperator*

$$D : DB_D \rightarrow \text{Fun}^1; \quad f \mapsto D(f)(r) := -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} f(r)$$

auf $DB_D \subset \text{Fun}^1$.

Definition: Wu-Funktionen

Sei $\Psi_l(r) := (1 - r^2)_+^l$. Dann definiert man für $l \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ die Wu-Funktionen $\phi_{l,k}$ durch:

$$\begin{aligned} \phi_{l,0} &:= \Psi_l *_{1} \Psi_l \\ \phi_{l,k} &:= D^k \phi_{l,0} \quad \text{für } k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Definition: Wendland-Funktionen

Man definiert für $l \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}_0$ die Wendland-Funktionen $\phi_{l,k}$ durch:⁸⁹

$$\begin{aligned} \phi_{l,0}(r) &:= (1 - r)_+^l \\ \phi_{l,k} &:= I^k \phi_{l,0} \quad \text{für } k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Satz 3.3.1-5 (Eigenschaften der Wendland-Funktionen)

$\phi_{l,k}$ ist auf $[0, 1]$ ein Polynom vom Grad $l + 2k$. Für $l := \lfloor \frac{d}{2} \rfloor + k + 1$ gilt:

$$\begin{aligned} \phi_{l,k} &\in \text{BPD}(0, \mathbb{R}^d) \cap C^{2k}(\mathbb{R}^d) \\ \text{und } \overset{(d)}{\text{FT}}(\phi_{l,k}) &> 0 \quad \text{für } l \geq 2. \end{aligned}$$

Außerdem gibt es kein Polynom mit kleinerem Grad, das ebenfalls diese Bedingungen erfüllt.

Aus den Graphen der Abbildungen 1 bis 7 erkennt man schon, daß die positiv definiten ϕ die Eigenschaften aus Satz 3.3.1-1 haben. Auch die Eigenschaften laut Satz 3.3.1-3 sind häufig erkennbar.

3.3.2 Abschätzung des Interpolationsfehlers

In diesem Kapitel geht es, aufbauend auf Korollar 3.2.2-3, um die weitere Abschätzung von $\kappa_{X,\Phi}(x)$ für die ‘klassischen’ $\Phi \in \text{RBF}^d$.

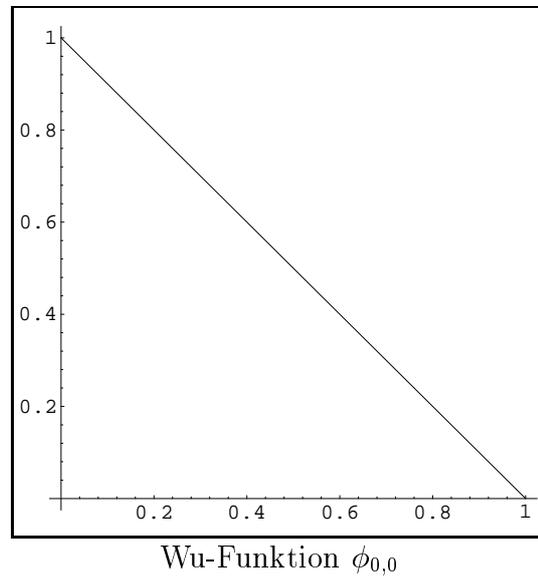
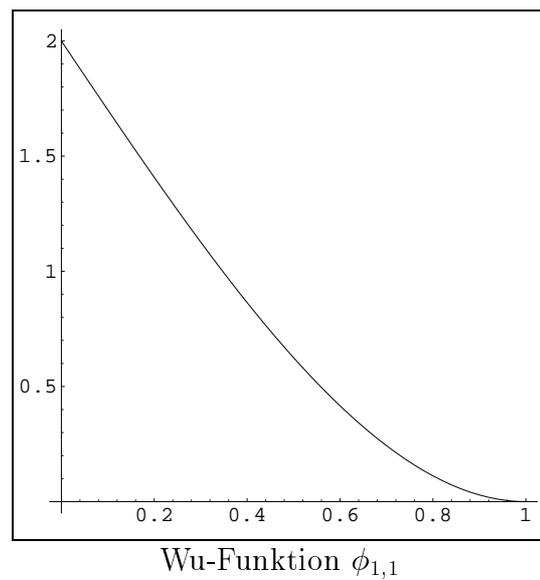
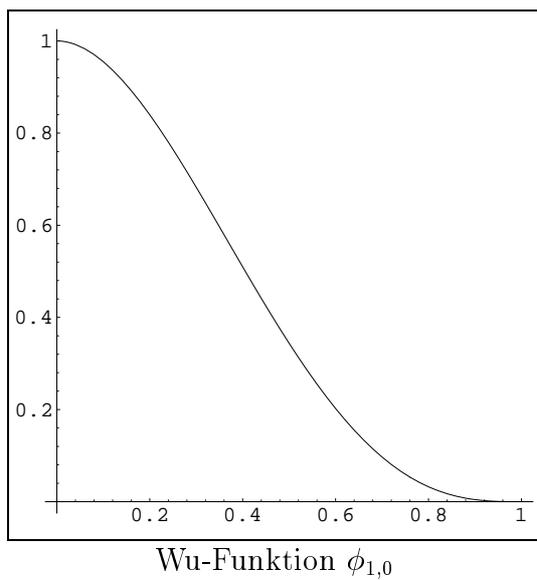
Definition: lokale Stützstellendichte

Zur Stützstellenmenge X und Metrik d definiert man für $\rho > 0$:⁹⁰

$$h_{\rho,X,d}(x) := \max_{y: d(y,x) < \rho} \min_{j \in M} d(y, x_j).$$

⁸⁹Die Definition und der folgende Satz sind zitiert aus den Oberseminarvorträgen des Herrn Wendland vom 12.04.95 und 14.06.95.

⁹⁰Diese Definition findet man schon bei Madych und Nelson: [MadychNelsConPosII], S. 224. Aktuell ist die Übersicht in [SchabackIntApp], Kap. 4.

Abbildung 2: Graph der Wu-Funktion $\phi_{0,0}$ bzw. der Wendland-Funktion $\phi_{1,0}$ Abbildung 3: Graphen der Wu-Funktionen $\phi_{1,0}$ und $\phi_{1,1}$

Bezeichnung	$\phi(r) = \text{const} \cdot \dots$	Dimension d mit $\phi \in \text{BPD}(0, \mathbb{R}^d)$
Wu $\phi_{0,0}$	$(1-r)_+$	1
Wu $\phi_{1,0}$	$(1-r)_+^3 (1+3r+r^2)$	1
Wu $\phi_{1,1}$	$(1-r)_+^2 (2+r)$	3
Wu $\phi_{2,0}$	$(1-r)_+^5 (1+5r+9r^2+5r^3+r^4)$	1
Wu $\phi_{2,1}$	$(1-r)_+^4 (4+16r+12r^2+3r^3)$	3
Wu $\phi_{2,2}$	$(1-r)_+^3 (8+9r+3r^2)$	5
Wu $\phi_{3,0}$	$(1-r)_+^7 (5+35r+101r^2+147r^3+101r^4+35r^5+5r^6)$	1
Wu $\phi_{3,1}$	$(1-r)_+^6 (6+36r+82r^2+72r^3+30r^4+5r^5)$	3
Wu $\phi_{3,2}$	$(1-r)_+^5 (8+40r+48r^2+25r^3+5r^4)$	5
Wu $\phi_{3,3}$	$(1-r)_+^4 (16+29r+20r^2+5r^3)$	7
Wendland $\phi_{1,0}$	$(1-r)_+$	1
Wendland $\phi_{2,0}$	$(1-r)_+^2$	3
Wendland $\phi_{2,1}$	$(1-r)_+^3 (1+3r)$	1
Wendland $\phi_{3,0}$	$(1-r)_+^3$	5
Wendland $\phi_{3,1}$	$(1-r)_+^4 (1+4r)$	3
Wendland $\phi_{3,2}$	$(1-r)_+^5 (1+5r+8r^2)$	1

Tabelle 2: Einige radiale Basisfunktionen mit kompaktem Träger

Für endliche Stützstellenmengen X und beschränkte Definitionsbereiche Ω , aus denen x stammt, ist die Stützstellendichte gleichmäßig beschränkt:

$$\exists h_0 > 0 : \quad h_{\rho, X, d}(x) \leq h_0 \quad \forall x \in \Omega .$$

Für $\kappa_{X, \Phi}(x)$ werden Aussagen der Form

$$(3.3.2-1) \quad \kappa_{X, \Phi}(x) = \sqrt{Q_{\Phi}(u(x), \Phi(x, X), \Phi(x, x))} \leq F_{\Phi}(h_{\rho, X, d}(x))$$

mit $F_{\Phi} : \mathbb{R}_{>0} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$; $h \mapsto F_{\Phi}(h)$ erzielt.⁹¹ Im allgemeinen ist F_{Φ} in h monoton wachsend, z. B. $F_{\Phi}(h) = \mathcal{O}(h^n)$ oder $F_{\Phi}(h) = \mathcal{O}(e^{\perp c h^{\perp n}})$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Daran erkennt man, daß sich der Fehler bei verringertem Abstand h der Stützstellen verbessert.⁹² Anschaulich muß das auch so sein, da dichter liegende Stützstellen die vorgegebene Funktion f besser ‘abtasten’. Darum wird im folgenden immer die Monotonie von $F_{\Phi}(h)$ vorausgesetzt:

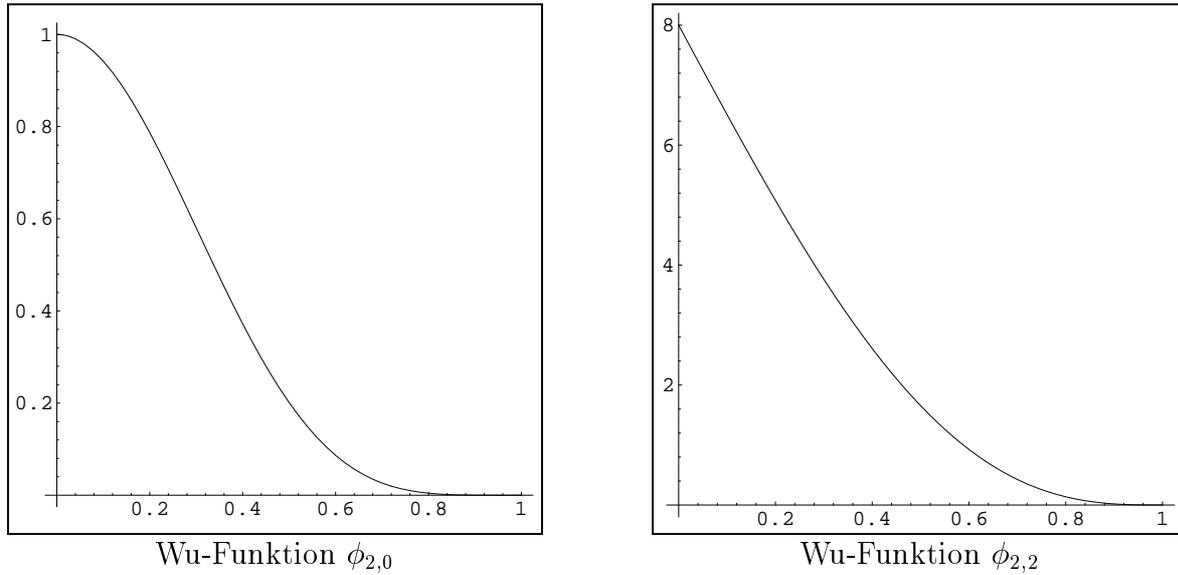
$$(3.3.2-2) \quad h_1 \leq h_2 \quad \Rightarrow \quad F_{\Phi}(h_1) \leq F_{\Phi}(h_2) .$$

Das Verhalten der Funktionen $F_{\Phi}(h)$ hängt im wesentlichen von der Art der Singularität der verallgemeinerten Fourier-Transformierten bei ∞ ab, vgl. den Parameter s_{∞} in Tabelle 1. Die Tabelle 3 auf Seite 54 gibt F_{Φ} für einige gebräuchliche Φ an.⁹³ Solche Aussagen erhält man,

⁹¹In [WeinrichDr], S. 9 findet man eine etwas andere Form:
 $h_{\rho, X, d}(x) := \max_{y \in \mathbb{R}^N : P^{\text{tr}} y = S(x)} \min_{x_i \in X} \|y \perp x_i\| \Rightarrow \kappa_{X, \Phi}(x) = \mathcal{O}(h_{\rho, X, d}(x)^{s_{\infty}/2})$

⁹²Siehe dazu [SchabackAppRBF].

⁹³Entnommen aus [SchabackErrCond], Tabellen 1 und 2 und [SchabackIntApp], Tabelle 2. Siehe auch [WuSchabLocErr], Theorems 6–8, [MadychNelsBound], Kap. 2.2.

Abbildung 4: Graphen der Wu-Funktionen $\phi_{2,0}$ und $\phi_{2,2}$

Bezeichnung	$\phi(r)$	$F_{\Phi}(h) = \mathcal{O}(\cdot)$ für $h \rightarrow \infty$	$G_{\Phi}(q) = \mathcal{O}(\cdot)$ für $q \rightarrow 0$
polynomials	$(-1)^{\lceil \nu/2 \rceil} r^{\nu}$	h^{ν}	q^{ν}
thin plate splines	$(-1)^{\nu/2+1} r^{\nu} \ln r$	h^{ν}	q^{ν}
Gaußians	$e^{-\alpha r^2}$	$e^{-\text{const}/h^2}$	$q^{-d} e^{-\text{const}/q^2}$
(inverse) multiquadrics	$(-1)^{\lceil \nu/2 \rceil} (c^2 + r^2)^{\nu/2}$	$e^{-\text{const}/h}$	$q^2 e^{-\text{const}/q}$
Sobolew-Splines	$M_{d,\perp 2\nu\perp d,c}(r)$	$h^{2\nu}$	$q^{2\nu}$
Wendland-Funktionen	$\phi_{l,k}(r)$		q^{2k+1} für $l = \lfloor \frac{d}{2} \rfloor + k + 1 \geq 2$ und d ungerade

Tabelle 3: Funktionen $F_{\Phi}(h)$ und $G_{\Phi}(q)$ einiger $\Phi \in \text{RBF}^d$

indem man eine andere \mathbb{P}_m^d -reproduzierende Lagrange-Basis $u(x)$ benutzt, die sich besser handhaben läßt.⁹⁴ Diese Konstruktionen wurden z. B. in [WuSchabLocErr], Kap. 5 und [CADII], 11.05.93 beschrieben. Mit Gleichung (3.3.2-1) erhält man so Fehlerabschätzungen der Form:

$$(3.3.2-3) \quad |f(x) - s_{f,X,\Phi}(x)| \leq \|f\|_{F_{\Phi}} \cdot \kappa_{X,\Phi}(x) \leq \|f\|_{F_{\Phi}} \cdot F_{\Phi}(h_{\rho,X,d}(x)).$$

Konkret also z. B. :

$$|f(x) - s_{f,X,\Phi}(x)| \leq \|f\|_{F_{\Phi}} \cdot h_{\rho,X,d}(x)^{s_{\infty}/2}$$

oder sogar allgemeiner für die α -te Ableitung:⁹⁵

$$|D^{\alpha} f(x) - D^{\alpha} s_{f,X,\Phi}(x)| \leq \text{const}_{f,\alpha} \cdot (h_{\rho,X,d}(x))^{s_{\infty}/2 \pm |\alpha|}.$$

Dabei ist s_{∞} wie in Satz 3.1.2-2 so bestimmt, daß $\text{vFT}(\Phi) \in G_{s_0,s_{\infty}}$ gilt.

⁹⁴Vgl. Bemerkung 2.9-2.

⁹⁵Vgl. [WuSchabLocErr], Gleichung (1.5).

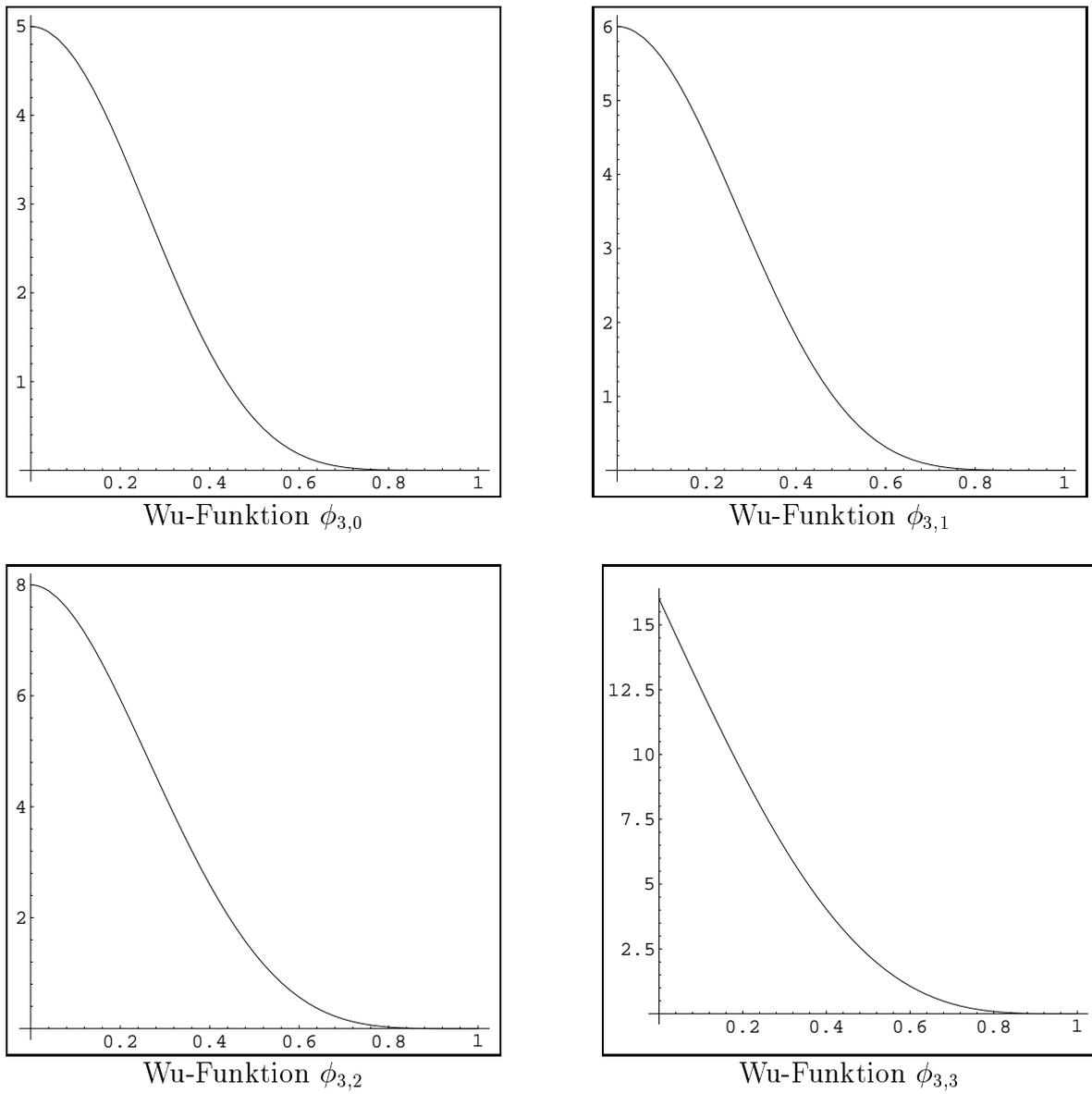
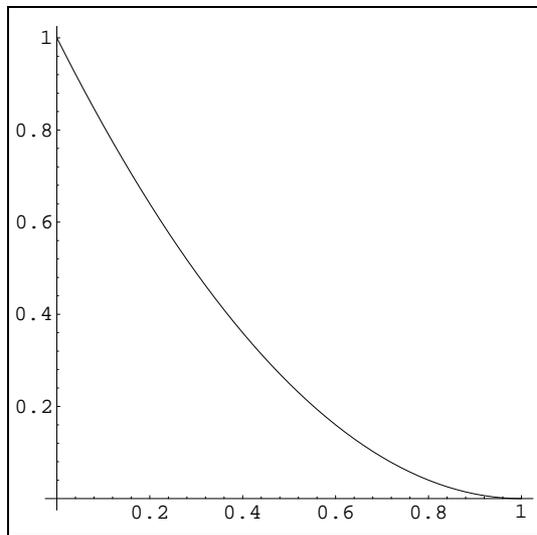
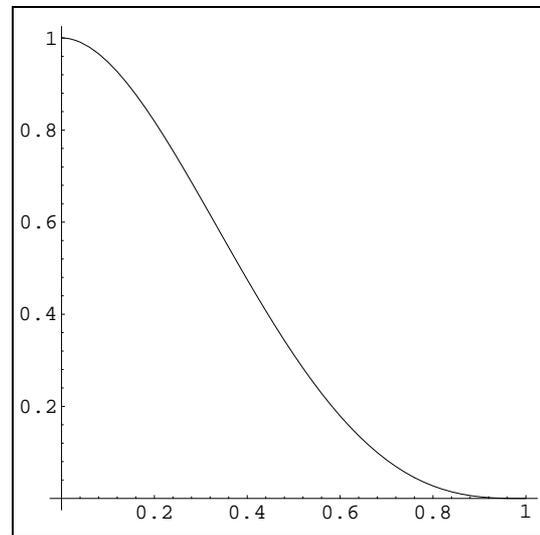
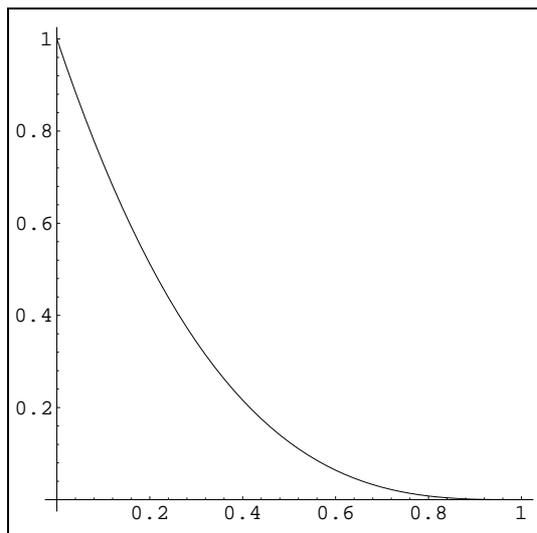
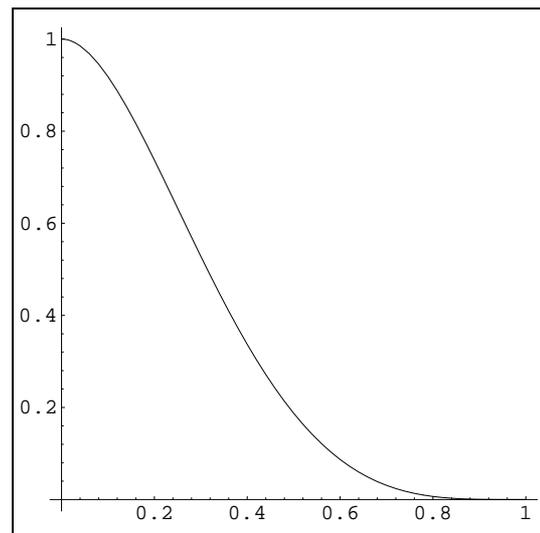


Abbildung 5: Graphen der Wu-Funktionen $\phi_{3,0}$, $\phi_{3,1}$, $\phi_{3,2}$ und $\phi_{3,3}$

Wendland-Funktion $\phi_{2,0}$ Wendland-Funktion $\phi_{2,1}$ Abbildung 6: Graphen der Wendland-Funktionen $\phi_{2,0}$ und $\phi_{2,1}$ Wendland-Funktion $\phi_{3,0}$ Wendland-Funktion $\phi_{3,1}$ Abbildung 7: Graphen der Wendland-Funktionen $\phi_{3,0}$ und $\phi_{3,1}$

3.3.3 Abschätzung der Kondition der Interpolationsmatrix

Definition: Charakteristische Größe $d_{\min}(X)$ einer Stützstellenmenge X

Für $X = \{x_i\}_{i \in M} \subset \mathbb{R}^d$ und eine Abstandsfunktion⁹⁶ d auf dem \mathbb{R}^d setzt man:

$$d_{\min}(X) := \min_{x_i \neq x_j \in X} d(x_i, x_j) .$$

Ähnlich definiert, aber seltener benötigt, wird der Gesamtdurchmesser von X :

Definition: Gesamtdurchmesser $d_{\max}(X)$ einer Stützstellenmenge X

Für $X = \{x_i\}_{i \in M} \subset \mathbb{R}^d$ und eine Abstandsfunktion d auf dem \mathbb{R}^d setzt man:

$$d_{\max}(X) := \max_{x_i, x_j \in X} d(x_i, x_j) .$$

Um die Abhängigkeit der Interpolationsmatrix A_Φ von der Stützstellenmenge X zu betonen, wird vorübergehend ein weiterer Index angebracht: $A_{\Phi, X} := \Phi(X, X)$.

Für $\text{cond } A_{\Phi, X}$ werden nun Abschätzungen der Form⁹⁷

$$\text{cond } A_{\Phi, X} = \|A_{\Phi, X}^{\perp 1}\| \cdot \|A_{\Phi, X}\| \leq G_\Phi(q)^{\perp 1} \cdot H_{\Phi, X}(q)$$

mit

$$q := \frac{1}{2} d_{\min}(X) .$$

angestrebt. Dabei werden Ergebnissen des Kapitels 1.5 herangezogen. Zur Abschätzung von $\|A_{\Phi, X}\|$ wird konkret die aus dem Satz von Gerschgorin gewonnene Folgerung aus Gleichung (1.5-4) genutzt. Da die Interpolationsmatrizen nicht nur selbstadjungiert sind, sondern für *translationsinvariante* Basisfunktionen $\Phi \in \text{TBF}^d$ auf der ganzen Diagonale den Wert $\Phi(0, 0)$ enthalten, vereinfacht sich die Aussage zu:

$$\|A_{\Phi, X}\|_{2,2} \leq |\Phi(0, 0)| + \max_{i \in M} \sum_{j \in M, j \neq i} |\Phi(x_i - x_j, 0)| .$$

Man erhält daraus für konkrete Φ globale, d. h. vom Ort x unabhängige Abschätzungen der Form $\|A_{\Phi, X}\| \leq H_{\Phi, X}(q)$, wobei $H_{\Phi, X}(q)$ meist eine in q monoton wachsende Funktion ist.⁹⁸ Sie hängt außerdem in aller Regel von $N = \#X$ ab.

Wesentlich schwieriger sind Aussagen über $\|A_{\Phi, X}^{\perp 1}\|$ zu gewinnen. Entsprechend Gleichung (1.5-3) muß der minimale Eigenwert $\underline{\lambda}(A_{\Phi, X})$ von $A_{\Phi, X}$ nach unten abgeschätzt werden. Oft ist dazu die Darstellung von Φ durch seine Fourier-Transformierte, $\Phi(x, 0) = \text{vFT}^{\perp 1}(\varphi(\omega))(x)$ verwendbar. So ergeben sich (häufig durch Abschneiden von Integralen) Aussagen der Form

$$\|A_{\Phi, X}^{\perp 1}\| \leq \text{const}_d q^{\perp d} \min_{0 \leq \|\omega\| \leq R} \varphi(\omega) \leq G_\Phi(q)^{\perp 1} \text{ mit } R = \mathcal{O}\left(\frac{1}{q}\right) \text{ für } q \rightarrow 0 .$$

Auch die $G_\Phi(q)$ sind in q monoton wachsende Funktionen, nur wachsen sie in der Regel schwächer als $H_{\Phi, X}(q)$, so daß die Kondition für dichter liegende Stützstellen unbeschränkt ist:

$$(3.3.3-1) \quad d_{\min}(X) \rightarrow 0 \quad \Rightarrow \quad \text{cond } A_{\Phi, X} \rightarrow \infty .$$

⁹⁶Z. B. eine Metrik.

⁹⁷Siehe [CADII], 28.05.93 für $\|A^{-1}\|$ und 08.06.93 für $\|A\|$.

⁹⁸Vgl. dazu die Arbeiten von Ball, Baxter, Sivakumar und Ward.

Eine Kurvendiskussion für die verallgemeinerte Fourier-Transformierte φ einer gegebenen Funktion ist nur sehr aufwendig zu betreiben.⁹⁹ Beispiele für geeignete Funktionen $G_\Phi(q)$ zu den ‘klassischen’ radialen Basisfunktionen sind in der Tabelle 3 auf Seite 54 aufgeführt.¹⁰⁰ In [SchabackLowBound] finden sich *untere* Grenzen für $\|A_{\Phi,X}^{-1}\|$, so daß man die Qualität der Abschätzungen beurteilen kann.

Insgesamt erkennt man, daß sich die Kondition bei verringertem Abstand der Stützstellen verschlechtert. Dieses Verhalten ist dem Fehlerverhalten entgegengesetzt. Es ist verständlich, da sich für stetige Φ die Zeilen der Interpolationsmatrix mit fallendem Abstand der Stützstellen annähern. Fallen zwei Stützstellen gar zusammen, so sind zwei Zeilen gleich, die Matrix kann also nicht mehr invertierbar sein.¹⁰¹

3.4 Die Problematik einer inhomogenen Stützstellenverteilung

Die negativen theoretischen Aussagen über inhomogen verteilte Stützstellen wirken sich in der Praxis sehr stark aus, wie man den Abbildungen des Kapitels 4.2 entnehmen kann. Wegen der Gleichungen (3.3.2-3) und (3.3.2-2) ist anzustreben, $h_{\rho,X,d}(x)$ auf einem Grundgebiet $\Omega \supset X$ klein zu halten, also die Stützstellen möglichst dicht anzuordnen und gegebenenfalls ihre Anzahl N zu erhöhen. Eine dichte Anordnung impliziert aber geringere Werte von $d_{\min}(X)$, was nach Gleichung (3.3.3-1) die Kondition beeinträchtigt. Die Erhöhung von N wirkt sich sehr nachteilig auf den Rechenaufwand aus, wie in Kapitel 5.1 dargestellt wird. Insgesamt ist ein Kompromiß zwischen den beiden Zielen ‘kleiner Fehler’ und ‘gute Kondition’ nötig. Dieser Kompromiß kann nur auf eine möglichst *gleichmäßig* dichte Anordnung einer modifizierten, aber nicht vergrößerten Stützstellenmenge hinauslaufen.

Der nun folgende Praxisteil dieser Arbeit wird einige Ansätze daraufhin untersuchen, ob und wie gut sie diesen Kompromiß erreichen. So werden in Kapitel 5 und 6 verschiedene Methoden betrachtet, die auf Manipulationen der Metrik beruhen. Im einzelnen sind dies

- eine ortsabhängige Skalierung der Art $d_Q(x, y) := Q(x)Q(y) d(x, y)$,
- Transformationen, die der Metrik vorgeschaltet werden: $d_T(x, y) := d(Tx, Ty)$,
- Funktionen, die der Metrik nachgeschaltet werden: $d_t(x, y) := t(d(x, y))$ und schließlich
- ein Übertragung des Interpolationsproblems auf einen Graphen im \mathbb{R}^{d+1} .

Das letzte experimentelle Kapitel erprobt dann einen Ansatz, der auf einer iterativen Interpolation auf immer feineren Teilmengen der Stützstellenmenge mit jeweils dafür optimalen Basisfunktionen beruht.

⁹⁹Vgl. [BallEigenval], [BallInvert], [BallSivaWard], [NarcowichWard91], [NarcowichWard92].

¹⁰⁰Das Ergebnis für die Wendland-Funktionen ist dem Oberseminarvortrag vom 14.06.95 entnommen.

¹⁰¹Das Phänomen wurde unter dem Stichwort ‘Unschärferelation’ eingehend in [SchabackErrCond] und [SchabackIntApp] erörtert.

Teil II

Praxis der Interpolation

4 Vorstellung der Beispielfunktionen

4.1 Die Beispielfunktionen und ihre Graphen

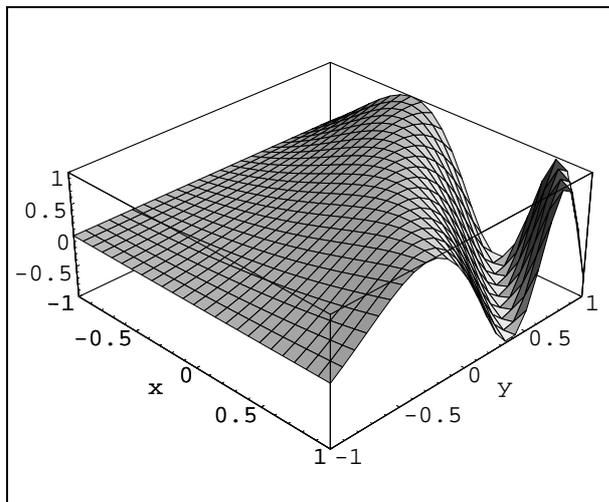
Als Beispielfunktionen werden eine wellenförmige Funktion

$$(4.1-1) \quad f : [-1, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}; \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \sin \left(\frac{1}{4} (e^{x+1} - 1) (e^{y+1} - 1) \right)$$

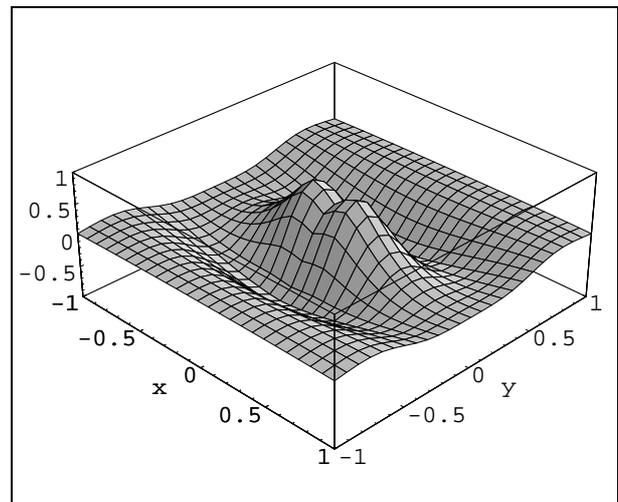
und eine deformierte ‘Mexican-Hat-Funktion’

$$(4.1-2) \quad f : [-1, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}; \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \frac{\cos \left(\pi \sqrt{x^2 + (2y)^2} \right)}{1 + (2x)^2 + (2y)^4} - \frac{1}{2} e^{\pm 20((2x)^2 + y^2)}$$

untersucht. Die Graphen der Funktionen sind in Abbildung 8 dargestellt.



‘Wellen-Funktion’



‘Mexican-Hat-Funktion’

Abbildung 8: Graphen der ‘Wellen-Funktion’ und der ‘Mexican-Hat-Funktion’

Die ‘Mexican-Hat-Funktion’ ist als Summe zweier L_1 -Funktionen auf \mathbb{R}^2 Fourier-transformierbar. Die ‘Wellen-Funktion’ ist dies nicht, denn auf Grund ihrer wesentlichen Singularität für $0 < x, y \rightarrow \infty$ ist ihre verallgemeinerte Fourier-Transformierte keine Funktion. Daher sind die native-space-Aussagen aus Kapitel 3.2.2 nur für die ‘Mexican-Hat-Funktion’ gültig.

Bemerkung:

Die Beispielfunktionen, die meisten Interpolanten und ihre Graphen wurden mit dem Programm ‘Mathematica 2.2’¹⁰² auf Rechnern des Typs ‘digital DEC 3000’ mit Alpha-Prozessor unter dem Betriebssystem ‘DEC OSF/1 Alpha V3.0’ berechnet. Die Funktionen wurden auf einem Quadratgitter mit 25×25 Gitterpunkten ausgewertet, welches das Intervall $[-1, 1] \subset \mathbb{R}^2$ überdeckt. Bei parametrisierten Basisfunktionen wurden die Konstanten *const* aus den Regeln der Gleichung (5.3-1) so gewählt, daß

- das Interpolationssystem durch ‘Mathematica’ gelöst werden kann (das Programm warnt bei zu schlechter Kondition),
- die Interpolante möglichst glatt und der Beispielfunktion ähnlich erscheint und
- sie das Werteintervall $[-1, 1]$ nicht verläßt.

Weiterhin richten sich die Konstanten für die Wahl der Parameter nach der ‘Wellen-Funktion’, da sie sich, wie oben ausgeführt, schlechter approximieren läßt. Für die ‘Mexican-Hat-Funktion’ sind häufig bessere Wahlen möglich, wie in den Anmerkungen zu den einzelnen Graphiken dargestellt werden wird.

Die Angaben über $\bar{\lambda}(A_\Phi)$, $\underline{\lambda}(A_\Phi)$ und $\text{cond}_{2,2}(A_\Phi)$ lieferte ebenfalls das Programm ‘Mathematica’. Sie wurden jeweils auf drei signifikante Stellen gerundet.

4.2 Einfache Interpolanten

Zunächst sollen die Beispielfunktionen nach dem ‘klassischen’ Verfahren interpoliert werden, um eine Vergleichsgrundlage zu schaffen. Die Graphiken dieses Kapitels präsentieren die Ergebnisse.

Bemerkungen zu Abbildung 9:

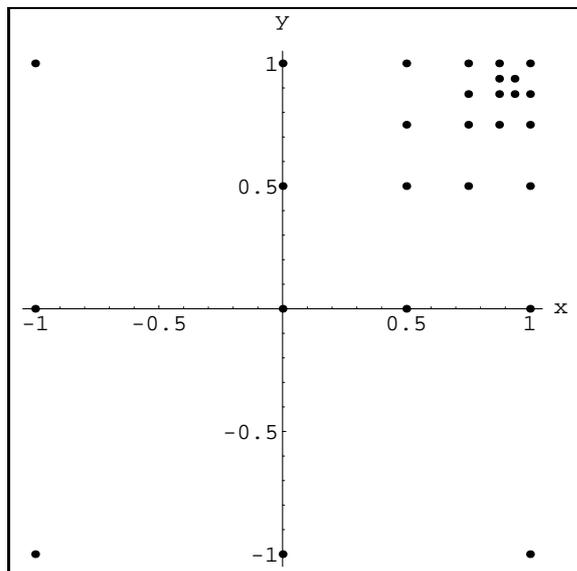
Die Stützstellenverteilungen wurden so gewählt, daß eine möglichst gute Reproduktion der Beispielfunktionen ermöglicht wird. Dazu wurden ‘von Hand’ einige Stützstellen global verteilt, nämlich für die ‘Wellen-Funktion’ $(-1, -1)^{\text{tr}}$ und $(1, 1)^{\text{tr}}$ und für die ‘Mexican-Hat-Funktion’ $(-1, -1)^{\text{tr}}$, $(-1, 1)^{\text{tr}}$, $(1, -1)^{\text{tr}}$, $(1, 1)^{\text{tr}}$, $(0, 0)^{\text{tr}}$, $(5/32, 0)^{\text{tr}}$ und $(-5/32, 0)^{\text{tr}}$. Danach wurde ein Verteilungsmuster fünf mal mit jeweils halbiertes charakteristischer Distanz iteriert, so daß diese Stützstellen bei unendlich häufiger Wiederholung gegen einen ‘Häufungspunkt’ konvergieren würden. Dieser ‘Häufungspunkt’ ist bei der ‘Wellen-Funktion’ $(1, 1)^{\text{tr}}$ und bei der ‘Mexican-Hat-Funktion’ $(0, 0)^{\text{tr}}$. Als Verteilungsmuster der ersten Stufe wurden für die ‘Wellen-Funktion’ $(-1, 1)^{\text{tr}}$, $(-1, 0)^{\text{tr}}$, $(0, 0)^{\text{tr}}$, $(0, -1)^{\text{tr}}$, $(1, -1)^{\text{tr}}$ und für die ‘Mexican-Hat-Funktion’ $(1, 0)^{\text{tr}}$, $\sqrt{2}/4(2, 1)^{\text{tr}}$, $(0, \frac{1}{2})^{\text{tr}}$, $\sqrt{2}/4(-2, 1)^{\text{tr}}$, $(-1, 0)^{\text{tr}}$, $\sqrt{2}/4(-2, -1)^{\text{tr}}$, $(0, -\frac{1}{2})^{\text{tr}}$, $\sqrt{2}/4(2, -1)^{\text{tr}}$ gewählt.

¹⁰²Dabei wurde der Befehl

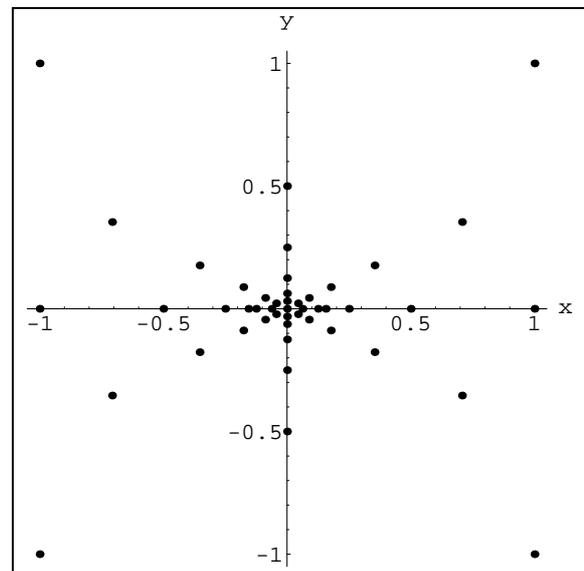
```
Plot3D[ s[x,y], { x, -1, 1 }, { y, -1, 1 },
  PlotRange -> PlotRangeVec, PlotPoints -> PlotPointVec, ViewPoint -> ViewPointVec,
  AxesStyle -> { Thickness[0.001], DefaultFont -> {"Courier", 24.} },
  AxesLabel -> { "x", "y", "" }, ColorOutput -> GrayLevel, ClipFill -> None,
  DefaultFont -> {"Courier", 24.}
];
```

verwendet. Die Optionen waren in der Regel wie folgt definiert:

```
ViewPointVec = { 3, -3, 2.5 }; PlotPointVec = { 25, 25 }; PlotRangeVec = { -1, 1 }; .
```

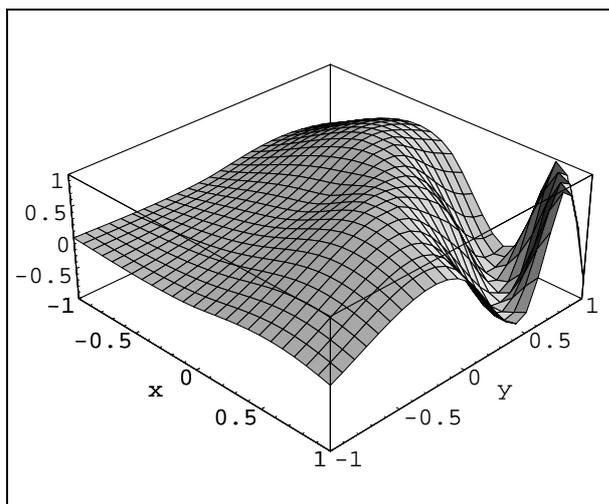


Stützstellenverteilung zur 'Wellen-Funktion'
 $d_{2, \min}(X) = 1/16 = 0.0625$, $d_{2, \max}(X) = 2\sqrt{2}$

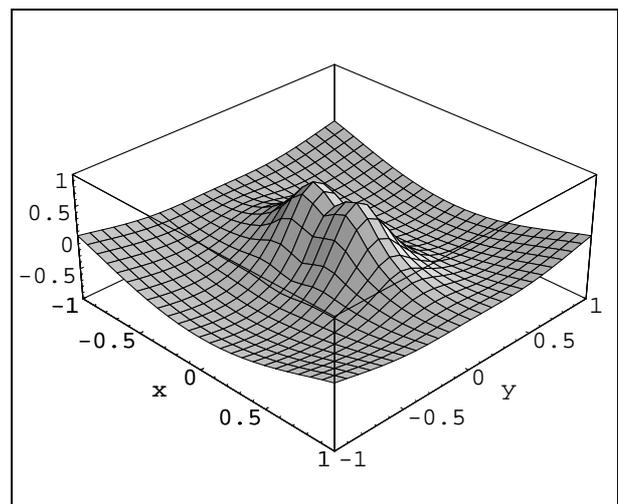


Stützstellenverteilung zur
 'Mexican-Hat-Funktion'
 $d_{2, \min}(X) \approx 0.0287$, $d_{2, \max}(X) = 2\sqrt{2}$

Abbildung 9: Stützstellenverteilungen der einfachen Interpolanten



thin-plate-spline-Interpolante zur
 'Wellen-Funktion'
 $\bar{\lambda}(A_\Phi) \approx 38.5$, $\underline{\lambda}(A_\Phi) \approx 2.07 \cdot 10^{-12}$,
 $\text{cond}_{2,2}(A_\Phi) \approx 1.86 \cdot 10^4$

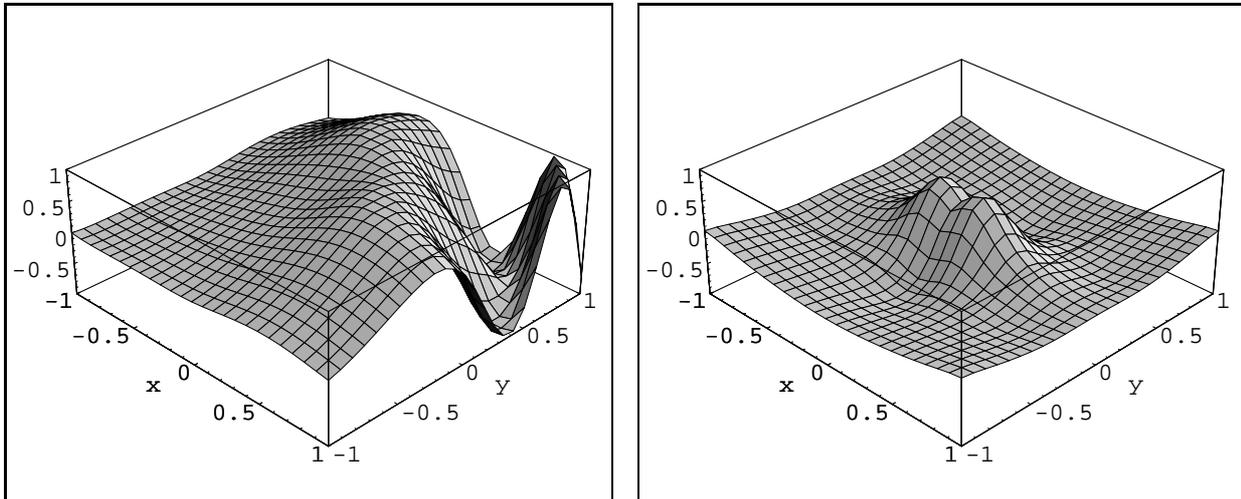


thin-plate-spline-Interpolante zur
 'Mexican-Hat-Funktion'
 $\bar{\lambda}(A_\Phi) \approx 22.5$, $\underline{\lambda}(A_\Phi) \approx 5.07 \cdot 10^{-14}$,
 $\text{cond}_{2,2}(A_\Phi) \approx 4.43 \cdot 10^4$

Abbildung 10: Einfache thin-plate-spline-Interpolanten

Bemerkungen zu Abbildung 10:

Die thin-plate-spline-Interpolanten sind nicht parametrisiert. Wie oben schon erwähnt, liefern sie in Punkto ‘minimale Krümmung’ die besten Bilder. Außerdem zeichnen sie sich durch eine relativ gute Kondition aus.



Vershobener-Logarithmus-Interpolante zur
‘Wellen-Funktion’

$$\begin{aligned} \text{Parameter } c &= 6.2 \, d_{2, \min}(X) = 0.3875, \\ \bar{\lambda}(A_{\Phi}) &\approx 31.5, \quad \underline{\lambda}(A_{\Phi}) \approx 2.87 \cdot 10^{-5}, \\ \text{cond}_{2,2}(A_{\Phi}) &\approx 1.10 \cdot 10^6 \end{aligned}$$

Vershobener-Logarithmus-Interpolante zur
‘Mexican-Hat-Funktion’

$$\begin{aligned} \text{Parameter } c &= 6.2 \, d_{2, \min}(X) \approx 0.1779, \\ \bar{\lambda}(A_{\Phi}) &\approx 88.9, \quad \underline{\lambda}(A_{\Phi}) \approx 7.34 \cdot 10^{-6}, \\ \text{cond}_{2,2}(A_{\Phi}) &\approx 1.21 \cdot 10^7 \end{aligned}$$

Abbildung 11: Einfache Vershobener-Logarithmus-Interpolanten

Bemerkungen zu Abbildung 11:

Der Parameter $c = 6.2 \, d_{2, \min}(X)$ ist für die ‘Wellen-Funktion’ optimal gewählt in dem Sinne, daß bei einem Wert von $6.4 \, d_{2, \min}(X)$ die Interpolante das Zielintervall $[-1, 1]$ verlässt. Für kleinere Werte wird die Interpolante unnötig spitz.

Für die ‘Mexican-Hat-Funktion’ ist $c = 14 \, d_{2, \min}(X)$ noch möglich und optimal, denn schon bei $c = 14.3 \, d_{2, \min}(X)$ wird die Kondition der Interpolationsmatrix zu groß. Kleinere Werte erzeugen deutlich spitzere Interpolanten.

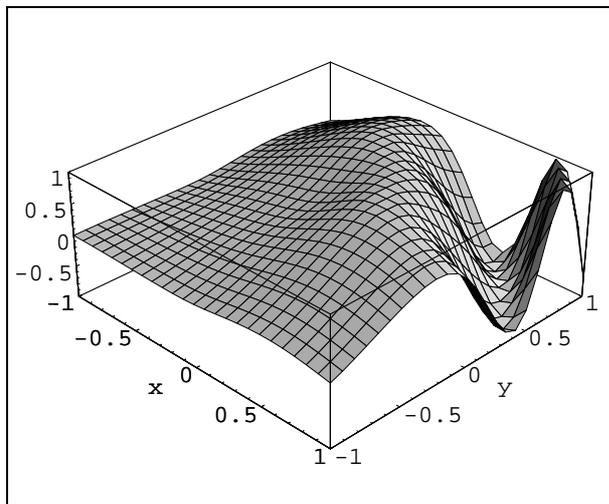
Bemerkungen zu Abbildung 12:

Der Parameter $c = 4 \, d_{2, \min}(X)$ ist für die ‘Wellen-Funktion’ optimal gewählt in dem Sinne, daß bei einem Wert von $8 \, d_{2, \min}(X)$ die Interpolante so stark schwingt, daß das Intervall $[-1, 1]$ verlassen wird. Bei Werten unter $4 \, d_{2, \min}(X)$ wird der Graph unnötig spitz.

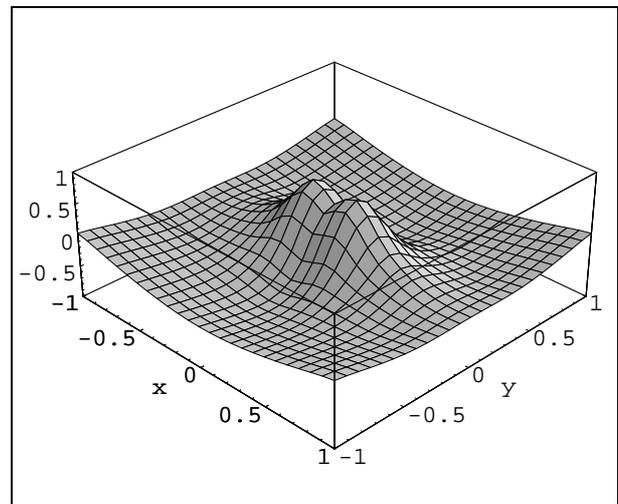
Für die ‘Mexican-Hat-Funktion’ ist $c = 9 \, d_{2, \min}(X)$ noch möglich. Darüber beginnt der Graph stark zu schwingen.

Bemerkungen zu Abbildung 13:

Für die ‘Wellen-Funktion’ ist $\alpha = 1/16 \cdot 1/d_{2, \min}(X)^2$ optimal. Für $\alpha = 1/8 \cdot 1/d_{2, \min}(X)^2$ verlässt der Graph den vorgegebenen Wertebereich, für Parameter größer $1/16 \cdot 1/d_{2, \min}(X)^2$ zerfällt er in einzelne ‘Hütchen’.

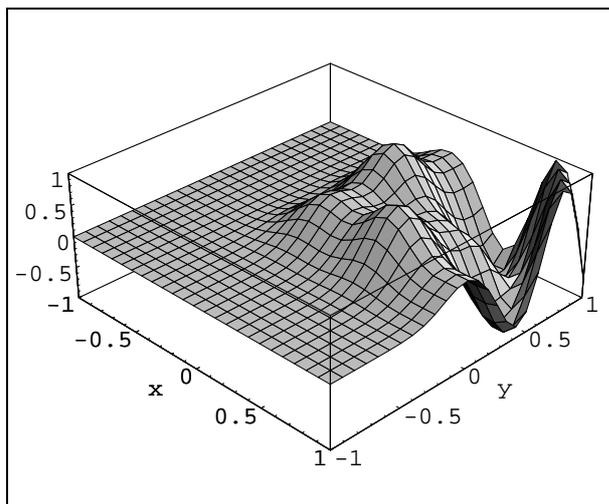


multiquadric-Interpolante zur 'Wellen-Funktion'
 Parameter $c = 4 d_{2, \min}(X) = 1/4$, $\bar{\lambda}(A_{\Phi}) \approx 32.0$,
 $\underline{\lambda}(A_{\Phi}) \approx 2.53 \cdot 10^{-5}$, $\text{cond}_{2,2}(A_{\Phi}) \approx 1.26 \cdot 10^6$

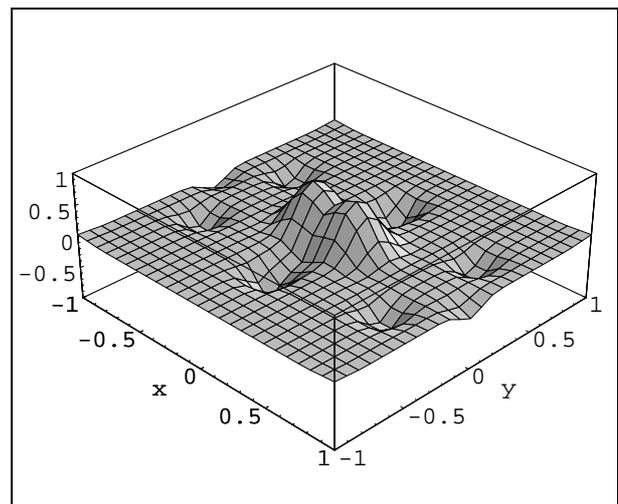


multiquadric-Interpolante zur
 'Mexican-Hat-Funktion'
 Parameter $c = 4 d_{2, \min}(X) \approx 0.115$,
 $\bar{\lambda}(A_{\Phi}) \approx 36.2$, $\underline{\lambda}(A_{\Phi}) \approx 6.56 \cdot 10^{-6}$,
 $\text{cond}_{2,2}(A_{\Phi}) \approx 5.52 \cdot 10^6$

Abbildung 12: Einfache multiquadric-Interpolanten



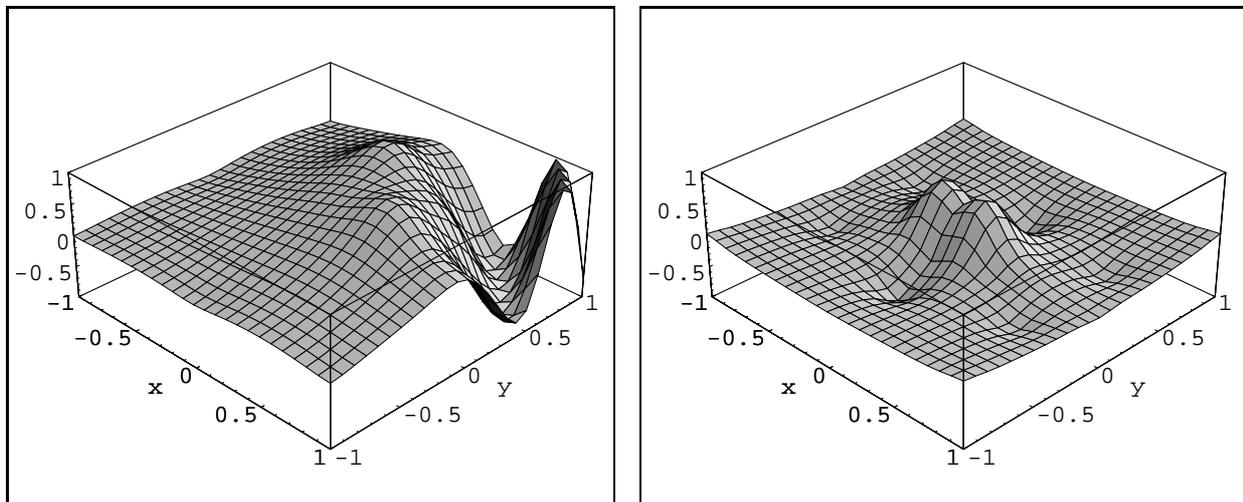
Gauß-Interpolante zur 'Wellen-Funktion'
 Parameter $\alpha = 1/16 \cdot 1/d_{2, \min}(X)^2 = 16$,
 $\bar{\lambda}(A_{\Phi}) \approx 7.96$, $\underline{\lambda}(A_{\Phi}) \approx 1.35 \cdot 10^{-4}$,
 $\text{cond}_{2,2}(A_{\Phi}) \approx 5.90 \cdot 10^4$



Gauß-Interpolante zur 'Mexican-Hat-Funktion'
 Parameter $\alpha = 1/16 \cdot 1/d_{2, \min}(X)^2 \approx 75.91$,
 $\bar{\lambda}(A_{\Phi}) \approx 10.1$, $\underline{\lambda}(A_{\Phi}) \approx 1.01 \cdot 10^{-5}$,
 $\text{cond}_{2,2}(A_{\Phi}) \approx 1.00 \cdot 10^6$

Abbildung 13: Einfache Gauß-Interpolanten

Für die ‘Mexican-Hat-Funktion’ ist $\alpha = 1/38 \cdot 1/d_{2,\min}(X)^2$ noch möglich. Beim doppelten Wert davon wird die Interpolationsmatrix schlecht konditioniert (Mathematica-Warnung). Trotzdem verschwindet der ‘Hütchen-Effekt’ nie gänzlich.



inverse-multiquadric-Interpolante zur
‘Wellen-Funktion’

Parameter $c = 4 d_{2,\min}(X) = 1/4$, $\bar{\lambda}(A_\Phi) \approx 50.1$,
 $\underline{\lambda}(A_\Phi) \approx 2.09 \cdot 10^{-13}$, $\text{cond}_{2,2}(A_\Phi) \approx 2.39 \cdot 10^4$

inverse-multiquadric-Interpolante zur
‘Mexican-Hat-Funktion’

Parameter $c = 4 d_{2,\min}(X) \approx 0.115$,
 $\bar{\lambda}(A_\Phi) \approx 166$, $\underline{\lambda}(A_\Phi) \approx 3.48 \cdot 10^{-13}$,
 $\text{cond}_{2,2}(A_\Phi) \approx 4.79 \cdot 10^4$

Abbildung 14: Einfache inverse-multiquadric-Interpolanten

Bemerkungen zu Abbildung 14:

Für die ‘Wellen-Funktion’ ist $c = 4 d_{2,\min}(X)$ angebracht. Darunter zerfällt der Graph in spitze Hütchen, darüber leidet die Kondition der Interpolationsmatrix.

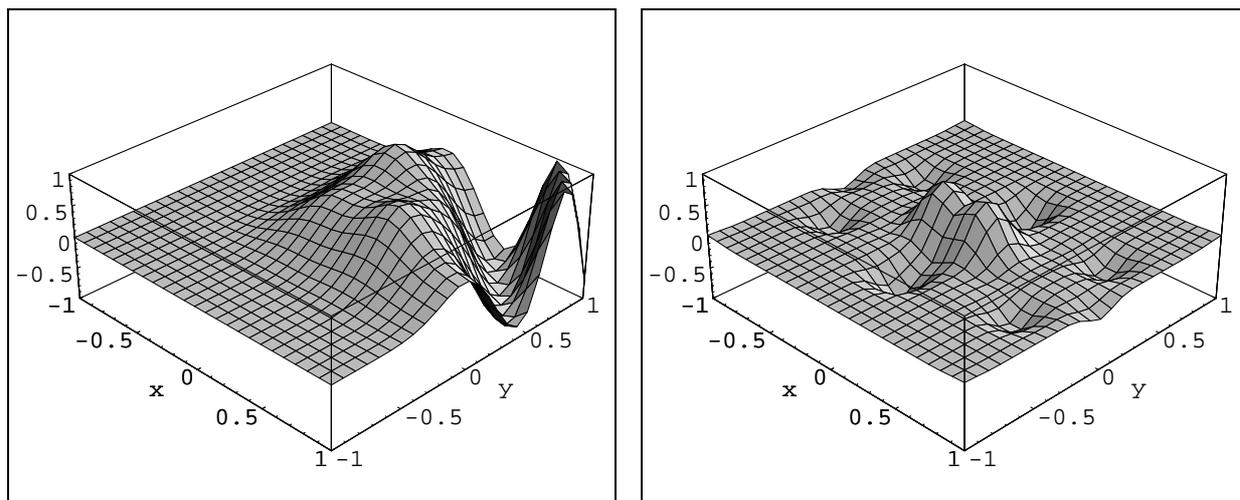
Für die ‘Mexican-Hat-Funktion’ würde $c = 8.5 d_{2,\min}(X)$ weniger starke ‘Senken’ im Graphen erzeugen, der Vergleichbarkeit wegen wurde dieser Parameter nicht benutzt. Bei $c = 17 d_{2,\min}(X)$ schwingt der Graph schon sehr stark. Zu kleine Werte erzeugen den entsprechenden Effekt wie bei der anderen Beispielfunktion.

Bemerkungen zu Abbildung 15:

Für die ‘Wellen-Funktion’ ist $c = 12 d_{2,\min}(X)$ angebracht. Bei $16 d_{2,\min}(X)$ schwingt der Graph aus dem Intervall $[-1, 1]$ heraus, bei deutlich kleineren Werten entstehen einzelne Hütchen.

Für die ‘Mexican-Hat-Funktion’ ist das Problem so erstaunlich gut konditioniert, daß es für Werte c von 70 bis 560 mal $d_{2,\min}(X)$ lösbar ist¹⁰³ und einigermaßen glatte Graphen liefert. Wiederum wurden diese Parameter der Vergleichbarkeit halber nicht benutzt.

¹⁰³Vermutlich sind noch höhere Werte möglich, was aber bisher noch nicht experimentell erprobt wurde. Die Interpolanten ändern sich für wachsende Parameter nur noch sehr wenig.



Wendland- $\phi_{3,1}$ -Interpolante zur
'Wellen-Funktion'

$$\begin{aligned} \text{Parameter } c &= 12 \, d_{2, \min}(X) = 3/4, \\ \bar{\lambda}(A_{\Phi}) &\approx 8.57, \quad \underline{\lambda}(A_{\Phi}) \approx 4.53 \cdot 10^{-13}, \\ \text{cond}_{2,2}(A_{\Phi}) &\approx 1.89 \cdot 10^3 \end{aligned}$$

Wendland- $\phi_{3,1}$ -Interpolante zur
'Mexican-Hat-Funktion'

$$\begin{aligned} \text{Parameter } c &= 12 \, d_{2, \min}(X) \approx 0.344, \\ \bar{\lambda}(A_{\Phi}) &\approx 11.3, \quad \underline{\lambda}(A_{\Phi}) \approx 5.29 \cdot 10^{-13}, \\ \text{cond}_{2,2}(A_{\Phi}) &\approx 2.14 \cdot 10^3 \end{aligned}$$

Abbildung 15: Einfache Wendland- $\phi_{3,1}$ -Interpolanten

Fazit:

Die thin-plate-spline-, verschobener-Logarithmus- und multiquadric-Interpolanten liefern so gute Approximationen, daß keine weiteren Verbesserungen mehr nötig sind. Zu bemerken ist, daß dies die einzigen *bedingt* positiv definiten der hier verglichenen sechs Basisfunktionen sind. Sie sind auch die einzigen, deren *wesentlicher Träger* nicht beschränkt ist, d. h. es gibt keine beschränkte Menge, außerhalb der sie weniger als z. B. 1% ihres Maximalwertes erreichen.

Die Interpolanten mit den anderen drei Basisfunktionen zeigen selbst für die optimalen Parameter deutliche Hütcheneffekte. Der Erfolg der in den nächsten Kapiteln beschriebenen Verfahren mißt sich also an ihrem Vermögen, diesen störenden Effekten entgegenzuwirken.

5 Ortsabhängige Skalierungsfunktionen

5.1 Vorüberlegung: Generische Aufwandsanalyse

In diesem Kapitel soll kurz der typische numerische Aufwand dargestellt werden, der sich für eine Implementation der mehrdimensionalen Interpolationsaufgabe ergibt. Dazu werden nun einige Schreibweisen eingeführt:

Definition: numerischer Aufwand

Es seien

$$\begin{aligned} \text{AwZ}(\textit{Operation}) &:= \text{der Zeitaufwand zur Ausführung der } \textit{Operation} \text{ und} \\ \text{AwS}(\textit{Operation}) &:= \text{der Speicheraufwand zur Ausführung der } \textit{Operation}. \end{aligned}$$

Die *Operation* kann dabei eine einfache Addition oder auch ein Aufruf einer komplexen Routine sein. Gemessen wird in praxisrelevanten Einheiten, wie etwa Taktzyklen der CPU, Anzahl der Aufrufe eines Maschinenbefehls oder Speicherbedarf in Bytes. Die Details sind hierbei nicht wichtig, da letztlich der Aufwand von komplexen Operationen als ‘ungefähres Vielfaches’ des Aufwandes elementarer Operationen angegeben wird. Genauere Aussagen sind nicht möglich und auch nicht sinnvoll, da der Aufwand einer solchen elementaren Operation stark maschinenabhängig ist.

‘Ungefähres Vielfaches’ wird dabei durch die folgende Definition greifbar:

Definition: Landau-Symbol

Das Landau-Symbol \mathcal{O} wird für zwei Folgen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}, (g_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ definiert durch die folgende Äquivalenz:

$$\begin{aligned} f_n &= \mathcal{O}(g_n) \text{ für } n \rightarrow \infty \\ :\Leftrightarrow \exists C > 0; n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 &\Rightarrow |f_n| \leq C \cdot |g_n|. \end{aligned}$$

Wenn keine Mißverständnisse entstehen können, läßt man den Zusatz ‘für $n \rightarrow \infty$ ’ meist weg.

Satz 5.1-1 (Aufwand der typischen Teilalgorithmen)

Sei eine Interpolationsaufgabe wie in Kapitel 1.1 definiert gegeben, also die Stützstellenmenge $X = \{x_i\}_{i \in M}$ mit der Indexmenge $M = \{1, \dots, N\}$. Sei $\Phi \in \text{SBF}^d$ eine beliebige Basisfunktion und $\{p_k\}_{k=1, \dots, Q}$ eine beliebige Basis des \mathbb{P}_m^d . Gesucht und auszuwerten sei die Interpolante der Form

$$s(x) = c^{\text{tr}} \Phi(x, X) + \beta^{\text{tr}} S(x) = \sum_{j \in M} c_j \Phi(x, x_j) + \sum_{k=1}^Q \beta_k p_k(x).$$

Dann ergibt sich für jeden Teil des Algorithmus jeweils der folgende Aufwand für $N, Q \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} &\text{AwZ}(\textit{Aufstellen der Interpolationsmatrix } A_\Phi) \\ &= \mathcal{O}(N^2) \cdot \text{AwZ}(\textit{Auswertung von } \Phi) + \mathcal{O}(NQ) \cdot \text{AwZ}(\textit{Auswertung eines } p_k). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{AwS}(\text{Aufstellen der Interpolationsmatrix } A_{\Phi}) \\ &= \mathcal{O}((N+Q)^2) \cdot \text{AwS}(\text{Speichern einer reellen Zahl}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{AwZ}(\text{Lösen des Interpolationssystems (2.5-6)}) \\ &= \mathcal{O}((N+Q)^3) \cdot \text{AwZ}(\text{Addition bzw. Multiplikation}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{AwS}(\text{Lösen des Interpolationssystems (2.5-6)}) \\ &= \mathcal{O}((N+Q)^2) \cdot \text{AwS}(\text{Speichern einer reellen Zahl}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{AwZ}(\text{Auswerten der Interpolante an einem Punkt } x) \\ &= \mathcal{O}(N) \cdot \text{AwZ}(\text{Auswertung von } \Phi, \text{ Multiplikation und Addition}) \\ &+ \mathcal{O}(Q) \cdot \text{AwZ}(\text{Auswertung eines } p_k, \text{ Multiplikation und Addition}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{AwS}(\text{Speichern der Interpolante}) \\ &= \mathcal{O}(N+Q) \cdot \text{AwS}(\text{Speichern einer reellen Zahl}). \end{aligned}$$

In der Regel ist $Q \ll N$, so daß die von Q abhängigen Terme oben vernachlässigt werden können.

Satz 5.1-2 (Aufwand für Basisfunktionen mit *kompaktem Träger*)

Die Vorgaben seien dieselben wie im letzten Satz, nur $\Phi \in \text{SBF}^d$ sei eine Basisfunktion mit *kompaktem Träger*. Bei diesen Funktionen ist die weitere Voraussetzung

$$\forall x \in \mathbb{C}^d : \quad \#\{x_j \in X : \Phi(x, x_j) \neq 0\} = \mathcal{O}(1), \text{ d.h. unabhängig von } N$$

realistisch. Bei geschickter Ausnutzung dieser Voraussetzung ergibt sich für jeden Teil des Algorithmus der folgende zeitliche Aufwand für $N, Q \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} & \text{AwZ}(\text{Aufstellen der Interpolationsmatrix } A_{\Phi}) \\ &= \mathcal{O}(N) \cdot \text{AwZ}(\text{Auswertung von } \Phi) + \mathcal{O}(NQ) \cdot \text{AwZ}(\text{Auswertung eines } p_k). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{AwZ}(\text{Lösen des Interpolationssystems (2.5-6)}) \\ &= \mathcal{O}(N \text{ bis } N^2 + Q^3) \cdot \text{AwZ}(\text{Addition bzw. Multiplikation}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{AwZ}(\text{Auswerten der Interpolante an einem Punkt } x) \\ &= \mathcal{O}(1 \text{ bis } \text{ld } N) \cdot \text{AwZ}(\text{Auswertung von } \Phi, \text{ Multiplikation und Addition}) \\ &+ \mathcal{O}(Q) \cdot \text{AwZ}(\text{Auswertung eines } p_k, \text{ Multiplikation und Addition}). \end{aligned}$$

Zum Beweis nutzt man bekannte Aussagen über optimierte Algorithmen zur Lösung von linearen Gleichungssystemen mit Bandmatrizen sowie über Algorithmen, die den Raum rekursiv in Gebiete zerlegen. Typischerweise verwenden diese Algorithmen aufwendigere Datenstrukturen, so daß $\text{AwS}(\cdot)$ gegenüber Satz 5.1-1 anwachsen kann.¹⁰⁴

¹⁰⁴Dies bestätigt wieder einmal den ‘Energieerhaltungssatz der Informatik’: $\text{AwZ} + \text{AwS} = \text{const.}$

5.2 Feste Skalierungsfaktoren

Betrachtet man das Verhalten der im Kapitel 3.3 eingeführten radialen Basisfunktionen unter einfacher Skalierung der Metrik, so erkennt man, daß aus der Skalierung meist nur eine Veränderung des Parameters resultiert. Genauer ausgeführt:

Satz 5.2-1

Sei d eine beliebige Metrik auf dem \mathbb{R}^d und $q > 0$. Dann ist auch

$$d_{(q)}(x, y) := q \cdot d(x, y) \quad \text{für } x, y \in \mathbb{R}^d$$

eine Metrik. Ist die Metrik d darüberhinaus *homogen*, z. B. weil sie von einer Norm mittels $d(x, y) = \|x - y\|$ herrührt, so gilt

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d : d_{(q)}(x, y) = q \cdot d(x, y) = d(qx, qy) .$$

Somit kann man die Skalierung der Metrik von d nach $d_{(q)}$ auch als Skalierung des \mathbb{R}^d — und dadurch auch der Menge X — auffassen. Deshalb ist klar, daß sich sämtliche bekannten Aussagen übertragen, da sie für eine *beliebige* Menge X gezeigt wurden.

Satz 5.2-2

Für $q > 0$ transformieren sich die einzelnen radialen Basisfunktionen aus Tabelle 1 wie folgt:
polynomials:

$$\begin{aligned} \phi(r) &= \pm r^\nu & \Phi &\in \text{BPD}(\lceil \nu/2 \rceil) \text{ für } \nu \in \mathbb{R}_{>0} \setminus 2\mathbb{N} \\ \Rightarrow \phi(qr) &= \pm (qr)^\nu = \pm q^\nu \phi(r) . \end{aligned}$$

Der Vorfaktor geht bei der Interpolation vollständig in die Koeffizienten c_j ein.

thin plate splines:

$$\begin{aligned} \phi(r) &= \pm r^\nu \ln r & \Phi &\in \text{BPD}\left(\frac{\nu}{2} + 1\right) \text{ für } \nu \in 2\mathbb{N}_0 \\ \Rightarrow \phi(qr) &= \pm (qr)^\nu \ln(qr) = \pm q^\nu r^\nu (\ln(r) + \ln(q)) \\ &= \pm q^\nu \phi(r) + q^\nu \ln(q) r^\nu . \end{aligned}$$

Für den Vorfaktor gilt dasselbe wie oben. Der r^ν -Anteil verschwindet bis zur Ordnung $\nu/2 + 1$ im Polynomanteil der Interpolante s , da ϕ *bedingt* positiv definit der Ordnung $\nu/2 + 1$ ist. Nur im Anteil $\|x\|_2^l$ für $\nu/2 + 1 < l \leq \nu$ wird also s durch die Skalierung beeinflusst.

(inverse) multiquadrics:

$$\begin{aligned} \phi_\alpha(r) &= \pm (\alpha^2 + r^2)^{\frac{\nu}{2}} & \Phi &\in \text{BPD}\left(\max\left(\lceil \frac{\nu}{2} \rceil, 0\right)\right) \text{ für } \alpha > 0, \\ & & & \nu > -d, \nu \notin 2\mathbb{Z} \\ \Rightarrow \phi_\alpha(qr) &= \pm (\alpha^2 + (qr)^2)^{\frac{\nu}{2}} \\ &= \pm (q^2)^{\frac{\nu}{2}} \left(\left(\frac{\alpha}{q}\right)^2 + r^2 \right)^{\frac{\nu}{2}} \\ &= \pm q^\nu \phi_{\alpha/q}(r) . \end{aligned}$$

Auch hier verschwindet der Vorfaktor. Wesentlich ist nur die Änderung des Parameters von c nach c/q . Die ‘Kontraktion des Graphen um q ’ beeinflusst die Eigenschaften von ϕ

wesentlich nachhaltiger als bei den polynomials und thin plate splines, d.h. anschaulich: Für $q > 1$ wird der Graph ‘spitzer’. Das ist auch der Grund, warum man den Parameter zur Stützstellenmenge X ‘passend’ wählen muß: Eine zu spitze radiale Basisfunktion liefert keine ‘schöne’ Interpolante, sondern ein Gebirge aus einzelnen Hütchen, die steil aus der \mathbb{R}^d -Hyperebene herausragen.

Gaußians:

$$\begin{aligned}\phi_\alpha(r) &= e^{-\alpha r^2} & \Phi \in \text{BPD}(0) \text{ für } \alpha > 0 \\ \Rightarrow \phi_\alpha(qr) &= e^{-\alpha(qr)^2} = e^{-(\alpha q^2)r^2} = \phi_{\alpha q^2}(r) .\end{aligned}$$

Der Effekt der Skalierung ähnelt dem für die multiquadrics, da sich im wesentlichen nur der Parameter der radialen Basisfunktion ändert. Auch hier wird für $q > 1$ der Graph ‘spitzer’ — und zwar sogar quadratisch in q .

compactly supported functions:

$$\begin{aligned}\phi_\alpha(r) &= \phi_1\left(\frac{r}{\alpha}\right) & \Phi \in \text{BPD}(0) \text{ für } \alpha > 0 \\ \Rightarrow \phi_\alpha(qr) &= \phi_1\left(\frac{qr}{\alpha}\right) = \phi_1\left(\frac{r}{\alpha/q}\right) = \phi_{\alpha/q}(r) .\end{aligned}$$

Der Effekt der Skalierung entspricht dem für die multiquadrics.

verschobener Logarithmus:

$$\begin{aligned}\phi_\alpha(r) &= \ln(\alpha^2 + r^2) & \Phi \in \text{BPD}(2) \text{ für } \alpha > 0 \\ \Rightarrow \phi_\alpha(qr) &= \ln(\alpha^2 + (qr)^2) = \ln\left(q^2 \left(\left(\frac{\alpha}{q}\right)^2 + r^2\right)\right) = 2 \ln q + \phi_{\alpha/q}(r) .\end{aligned}$$

Der konstante Summand verschwindet in einem \mathbb{P}_1^d -Anteil.

Sobolew-Splines: Mit $c_0 := \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(\nu + \frac{d}{2})}$ gilt:

$$\begin{aligned}\phi_\alpha(r) &= c_0 K_{\perp\nu}(\alpha r) \left(\frac{r}{2\alpha}\right)^\nu & \nu, \alpha > 0 \\ \Rightarrow \Phi_\alpha(qx) &= \text{FT}^{\perp 1} \left((\alpha^2 + \|\omega\|_2^2)^{\perp(\nu+d/2)} \right) (qx) \\ &= \frac{1}{q^d} \text{FT}^{\perp 1} \left(\left(\alpha^2 + \left\| \frac{1}{q} \omega \right\|_2^2 \right)^{\perp(\nu+d/2)} \right) (x) \quad \text{laut Gleichung (1.4-4)} \\ &= \frac{1}{q^d} \text{FT}^{\perp 1} \left((q^{\perp 2})^{\perp(\nu+d/2)} \left((q\alpha)^2 + \|\omega\|_2^2 \right)^{\perp(\nu+d/2)} \right) (x) \\ &= q^{\perp d} q^{2\nu+d} \text{FT}^{\perp 1} \left(\left((q\alpha)^2 + \|\omega\|_2^2 \right)^{\perp(\nu+d/2)} \right) (x) \\ &= q^{2\nu} c_0 K_{\perp\nu}(q\alpha \|x\|_2) \left(\frac{\|x\|_2}{2q\alpha} \right)^\nu \\ &= q^{2\nu} \Phi_{q\alpha}(x) \\ \Rightarrow \phi_\alpha(qr) &= q^{2\nu} \phi_{\alpha q}(r) .\end{aligned}$$

Die Bessel-Funktionen dritter Art K_μ haben laut Gleichung (1.3-1) an 0 Polstellen μ -ter Ordnung. Wegen $K_{\perp\nu} = K_\nu$ sind die Faktoren $\|x\|_2^\nu$ in der letzten Umformung gerade ausreichend, um aus den Polstellen hebbare Singularitäten zu machen.

Genauere, quantitative Aussagen über den Interpolationsfehler liefert folgender Satz:¹⁰⁵

Satz 5.2-3

Seien X und $\Phi \in \text{TBF}^d$ gegeben, $q > 0$. Sei $\Phi(x, 0) = \overset{(d)}{\text{FT}}^{-1}(\varphi(\omega))(x)$ und F_Φ der native space von Φ . Sei nun $\Phi_q(x) := \Phi(q \cdot x, 0)$ die skalierte Basisfunktion und $\varphi_q(\omega) := \frac{1}{q^d} \varphi\left(\frac{1}{q} \omega\right)$ deren Fourier-Transformierte.¹⁰⁶

Dann gilt:

$$(5.2-1) \quad \kappa_{X, \Phi_q}(x) = \kappa_{qX, \Phi}(qx) .$$

Falls weiterhin $\Phi = \phi \circ d \in \text{MBF}^d$ gilt und die Metrik d homogen ist, so folgt mit der Kriging-Abschätzungsfunktion $F_\Phi(h)$:

$$(5.2-2) \quad \kappa_{X, \Phi_q}(x) \leq F\left(q \cdot h_{\frac{1}{q}\rho, X, d}(x)\right) .$$

Dabei gehört $F_\Phi(h)$ zum *unskalierten* Φ , d. h. es erfüllt die Gleichung (3.3.2-1). Weiterhin stimmen die native spaces überein, d. h. $F_{\Phi_q} = F_\Phi$, und es gilt

$$(5.2-3) \quad \|f(\cdot)\|_{F_{\Phi_q}} = \left\| f\left(\frac{1}{q} \cdot\right) \right\|_{F_\Phi} \leq q^d \sup_{\eta \in \mathbb{R}^d} \left| \frac{\varphi(q\eta)}{\varphi(\eta)} \right| \cdot \|f(\cdot)\|_{F_\Phi} .$$

Zusammengefasst ergibt sich daraus mit Korollar 3.2.2-3 die Fehlerabschätzung

$$\begin{aligned} |f(x) - s_{f, X, \Phi_q}(x)| &\leq \|f\|_{F_{\Phi_q}} \cdot \kappa_{X, \Phi_q}(x) \\ &= \left\| f\left(\frac{1}{q} \cdot\right) \right\|_{F_\Phi} \cdot \kappa_{qX, \Phi}(qx) \\ &\leq q^d \sup_{\eta \in \mathbb{R}^d} \left| \frac{\varphi(q\eta)}{\varphi(\eta)} \right| \cdot \|f\|_{F_\Phi} \cdot F\left(q \cdot h_{\frac{1}{q}\rho, X, d}(x)\right) . \end{aligned}$$

Beweis:

zu Gleichung (5.2-1):

Für die Fehler-Kern-Funktion $g_{X,c}(x, \omega)$ gilt:

$$(5.2-4) \quad g_{X,c}(x, q\omega) = e^{i\omega^{\text{tr}}qx} - \sum_{j \in M} c_j e^{i\omega^{\text{tr}}qx_j} = g_{qX,c}(qx, \omega) .$$

¹⁰⁵Vgl. [SchabackIntApp], Kap. 6.

¹⁰⁶Es gilt nämlich laut Gleichung (1.4-4): $\Phi_q(x) = \overset{(d)}{\text{FT}}^{-1}(\varphi(\omega))(qx) = 1/q^d \overset{(d)}{\text{FT}}^{-1}(\varphi(1/q\omega))(x)$.

Sei nun ‘min’ das Minimum über alle \mathbb{P}_m^d -reproduzierenden Lagrange-Basen. Dann gilt wegen Satz 2.9-1:

$$\begin{aligned}
\kappa_{X, \Phi_q}(x)^2 &= \min_{u(x)} Q_{\Phi_q}(u(x), \Phi_q(x, X), \Phi_q(x, x)) \\
&= \min_{u(x)} (2\pi)^{\perp d} \int \varphi_q(\omega) \left| g_{X, u(x)}(x, \omega) \right|^2 d\omega && \text{mit Satz 3.2.2-1} \\
&= \min_{u(x)} (2\pi)^{\perp d} \int \varphi(1/q \omega) \left| g_{X, u(x)}(x, \omega) \right|^2 q^{\perp d} d\omega && \text{laut Definition v. } \varphi_q \\
&= \min_{u(x)} (2\pi)^{\perp d} \int \varphi(\eta) \left| g_{X, u(x)}(x, q\eta) \right|^2 d\eta && \text{Substitution } \eta := \frac{1}{q} \omega \\
&= \min_{u(x)} (2\pi)^{\perp d} \int \varphi(\eta) \left| g_{qX, u(x)}(qx, \eta) \right|^2 d\eta && \text{mit Gleichung (5.2-4)} \\
&= \kappa_{qX, \Phi}(qx)^2 .
\end{aligned}$$

zu Gleichung (5.2-2):

Aus der Definition der lokalen Stützstellendichte $h_{\rho, X, d}(x)$ aus Kap. 3.3.2 folgt mit der Homogenität der Metrik:

$$\begin{aligned}
(5.2-5) \quad h_{\rho, qX, d}(qx) &= \max_{y: d(y, qx) < \rho} \min_{j \in M} d(y, qx_j) \\
&= \max_{y': d(qy', qx) < \rho} \min_{j \in M} d(qy', qx_j) \\
&= q \max_{y': d(y', x) < \rho/q} \min_{j \in M} d(y', x_j) \\
&= q h_{\rho/q, X, d}(x) .
\end{aligned}$$

Gleichung (3.3.2-1) erhält so die Gestalt:

$$\kappa_{X, \Phi_q}(x) = \kappa_{qX, \Phi}(qx) \leq F_{\Phi}(h_{\rho, qX, d}(qx)) = F_{\Phi}(q h_{\rho/q, X, d}(x)) .$$

zu Gleichung (5.2-3):

Für die Norm auf dem native space F_{Φ_q} gilt:

$$\begin{aligned}
(5.2-6) \quad \|f\|_{F_{\Phi_q}} &= (2\pi)^{\perp d} \int \frac{|\text{vFT}(f)(\omega)|^2}{\varphi_q(\omega)} d\omega \\
&= (2\pi)^{\perp d} \int \frac{|\text{vFT}(f)(\omega)|^2}{\varphi(\omega/q)} q^d d\omega \\
&= (2\pi)^{\perp d} \int \frac{|\text{vFT}(f)(q\eta)|^2}{\varphi(\eta)} q^{2d} d\eta && \text{Substitution } \eta := \frac{1}{q} \omega \\
& && \Rightarrow \det \frac{\partial \omega}{\partial \eta} = q^d \\
&= (2\pi)^{\perp d} \int \frac{|q^{\perp d} \text{vFT}(f(x/q))(\eta)|^2}{\varphi(\eta)} q^{2d} d\eta && \text{mit Gleichung (1.4-3)} \\
&= \|f(\cdot/q)\|_{F_{\Phi}}
\end{aligned}$$

Nach Zeile (5.2-6) kann man auch wie folgt weiterrechnen:

$$\begin{aligned}
\|f\|_{F_{\Phi_q}} &= (2\pi)^{\perp d} \int \frac{|\text{vFT}(f)(q\eta)|^2}{\varphi(q\eta)} \frac{\varphi(q\eta)}{\varphi(\eta)} q^{2d} d\eta \\
&\leq (2\pi)^{\perp d} \int \frac{|\text{vFT}(f)(q\eta)|^2}{\varphi(q\eta)} d\eta \cdot q^{2d} \sup_{\eta \in \mathbb{R}^d} \left| \frac{\varphi(q\eta)}{\varphi(\eta)} \right| \\
&= (2\pi)^{\perp d} \int \frac{|\text{vFT}(f)(\omega)|^2}{\varphi(\omega)} d\omega \cdot q^d \sup_{\eta \in \mathbb{R}^d} \left| \frac{\varphi(q\eta)}{\varphi(\eta)} \right| \quad \text{Substitution } \omega := q\eta \\
&= (2\pi)^{\perp d} \|f\|_{F_{\Phi}} \cdot q^d \sup_{\eta \in \mathbb{R}^d} \left| \frac{\varphi(q\eta)}{\varphi(\eta)} \right|
\end{aligned}$$

q.e.d.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß eine ‘feste Skalierung’ fast die selben Effekte hat wie eine Veränderung des Parameters der radialen Basisfunktion. Sie kann somit keine wesentlich neuen Erkenntnisse liefern. Hat X eine ‘Hauptachsenstruktur’, d.h. gibt es eine Basis des \mathbb{R}^d , so daß die Koordinaten der $x_j \in X$ bezüglich dieser Basis gleichmäßig verteilt sind, so kann man durch Skalierung und Basiswechsel eine global gleichmäßige Verteilung erreichen, ohne daß neue Probleme auftreten.¹⁰⁷ Ähnliches soll nun *lokal* erreicht werden.¹⁰⁸

5.3 Auswirkung auf die Wahl der Parameter der radialen Basisfunktionen

Um die Parameter geeignet an die Stützstellenmenge X anzupassen, versucht man, bei den radialen Basisfunktionen mit kompaktem Träger den Träger in die Größenordnung des minimalen Stützstellenabstandes $d_{\min}(X)$ zu rücken.

Genauer formuliert: $\text{supp } \phi_\alpha = [-\alpha, \alpha] = \text{const} \cdot [-d_{\min}(X), d_{\min}(X)]$.

Bei den anderen parametrisierten radialen Basisfunktionen kommen analoge Überlegungen zum Tragen. Man erhält dadurch aus der Grundfunktion ϕ_1 für $K := 1/d_{\min}(X)$ jeweils den Parameter für

die (inverse) multiquadrics zu	:	$\alpha = \text{const} \cdot d_{\min}(X)$
die Gaußians zu	:	$\alpha = \text{const} \cdot 1/d_{\min}(X)^2$
(5.3-1) die compactly supported functions zu	:	$\alpha = \text{const} \cdot d_{\min}(X)$
den verschobenen Logarithmus zu	:	$\alpha = \text{const} \cdot d_{\min}(X)$
die Sobolew-Splines zu	:	$\alpha = \text{const} \cdot 1/d_{\min}(X)$.

Naheliegenderweise sind die Parameter *monoton* in $d_{\min}(X)$.

¹⁰⁷Siehe auch Kapitel 6.1.

¹⁰⁸Vielleicht führt hier auch ein ‘stochastischer’ Ansatz weiter: Man kann versuchen, die Varianz der nächsten Abstände zweier Stützstellen zu minimieren.

5.4 Idee: Ortsabhängige Skalierung der Metrik

Die in Kapitel 3.4 beschriebenen, unerwünschten Auswirkungen stark inhomogener Stützstellenverteilungen für $\Phi \in \text{TBF}^d$ führen zu der Überlegung, den Ausdruck $\|x - x_j\|_2$ aus Gleichung (1.1-9) zu manipulieren, in dem man *ortsabhängige* Skalierungsfunktionen einbaut:¹⁰⁹

$$\begin{aligned}
 s(x) &:= \sum_{j \in M} c_j \Phi(Q(x)Q(x_j)(x - x_j), 0) + p(x) \\
 (5.4-1) \quad &= \sum_{j \in M} c_j \Phi_Q(x, x_j) + p(x) \quad \text{mit} \\
 \Phi_Q(x, y) &:= \Phi(Q(x)Q(y)(x - y), 0) .
 \end{aligned}$$

Dabei ist $Q : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ eine geeignet zu wählende, stetige Funktion.¹¹⁰ Für $\Phi \in \text{MBF}^d$ entspricht dies der Verwendung einer Abstandsfunktion $d_Q(x, y) := Q(x)Q(y)d(x, y)$ anstelle der Metrik d . Es ist allerdings nicht offensichtlich, für welche Q auch d_Q eine Metrik ist: d_Q ist zwar symmetrisch und, da Q rein positiv ist,¹¹¹ auch positiv definit, doch die Dreiecksungleichung läßt sich im allgemeinen nicht nachweisen.¹¹² Das Auftreten von Q als Produkt in x und x_j gewährleistet die Symmetrie der neuen Basisfunktion, also $\Phi_Q \in \text{SBF}^d$, und somit der erzeugten Interpolationsmatrix:

$$A_{\Phi_Q} = (\Phi_Q(x_i, x_j))_{i,j \in M} = (\Phi(Q(x_i)Q(x_j)(x_i - x_j), 0))_{i,j \in M} .$$

Die positive Definitheit der Matrix läßt sich nur für wenige der gebräuchlichen translationsinvarianten Basisfunktionen Φ auf einfache Art nachweisen. Dafür, und um zu weiteren Aussagen zu gelangen, benötigt man die Darstellung von Φ_Q als inverse Fourier-Transformierte:

Lemma 5.4-1 (Darstellung von Φ_Q mittels $\text{FT}^{\perp 1}(\Phi)$)

Für $\Phi(x, 0) = \overset{(d)}{\text{FT}^{\perp 1}}(\varphi(\omega))(x) \in \text{TBF}^d$ und $\Phi_Q(x, y) = \Phi(Q(x)Q(y)(x - y), 0)$ wie oben gilt:

$$\Phi_Q(x, y) = (2\pi)^{\perp d} (Q(x)Q(y))^{\perp d} \int \varphi((Q(x)Q(y))^{\perp 1} \eta) e^{i\eta^{\text{tr}}(x \perp y)} d\eta .$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
 \Phi(x, 0) &= \overset{(d)}{\text{FT}^{\perp 1}}(\varphi(\omega))(x) \\
 \Rightarrow \Phi_Q(x, y) &= \Phi(Q(x)Q(y)(x - y), 0) \\
 &= (2\pi)^{\perp d} \int \varphi(\omega) e^{i\omega^{\text{tr}}Q(x)Q(y)(x \perp y)} d\omega \\
 &\quad \text{Substitution } \eta := Q(x)Q(y)\omega \Rightarrow \det \frac{\partial \omega}{\partial \eta} = \left(\frac{1}{Q(x)Q(y)} \right)^d \\
 &= (2\pi)^{\perp d} (Q(x)Q(y))^{\perp d} \int \varphi((Q(x)Q(y))^{\perp 1} \eta) e^{i\eta^{\text{tr}}(x \perp y)} d\eta
 \end{aligned}$$

q.e.d.

¹⁰⁹Hier sei daran erinnert, daß laut Satz 3.2-1 gilt: $\Phi \in \text{TBF}^d \Leftrightarrow \Phi(x, y) = \Phi(x \perp y, 0)$.

¹¹⁰Sie darf nicht mehrere verschiedene Nullstellen haben, weil diese als Stützstellen jeweils eine Zeile und Spalte der Interpolationsmatrix mit dem Wert $\Phi(0, 0)$ füllen würden. Die Matrix wäre so nicht invertierbar. Außerdem werden wir später durch $Q(x)$ teilen.

¹¹¹Ebensogut kann man auch ein rein negatives $Q(x)$ benutzen.

¹¹²Die Dreiecksungleichung ist aber nicht wesentlich, vgl. Kap. 3.1 und 3.2.

Diese Vorgehensweise ist nötig, da der Versuch, den Term $e^{i\omega^{\text{tr}} Q(x_i)Q(x_j)(x_i \perp x_j)}$ in ein Produkt der Form $e^{i\omega^{\text{tr}} a_i} e^{\perp i\omega^{\text{tr}} a_j}$ mit $a_i \in \mathbb{C}^d$ zu zerlegen, für nichttriviale Fälle scheitern muß. Das belegt die folgende Überlegung: Mit der Abkürzung $q_i := Q(x_i) > 0$ folgt aus dem Ansatz

$$a_i - a_j = q_i q_j (x_i - x_j) \quad \forall i, j \in M$$

durch Subtraktion $\forall i, j, k \in M$:

$$\begin{aligned} (a_i - a_j) - (a_i - a_k) &= q_i q_j (x_i - x_j) - q_i q_k (x_i - x_k) \\ \Rightarrow a_k - a_j &= q_i q_j x_i - q_i q_j x_j - q_i q_k x_i + q_i q_k x_k \\ \text{mit } a_k - a_j &= q_k q_j x_k - q_k q_j x_j && \text{laut Ansatz} \\ \Rightarrow (q_i - q_k) q_j x_j &= (q_j - q_k) q_i x_i + (q_i - q_j) q_k x_k \end{aligned}$$

Im allgemeinen sind die Gewichte q_i paarweise verschieden. Die letzte Gleichung besagt dann, daß jeweils drei Stützstellen linear abhängig sind, die Stützstellenmenge X also gänzlich innerhalb einer Ebene liegt. Für Dimensionen $d > 2$ ist das eine unhaltbare Forderung.

5.5 Geeignete Arten radialer Basisfunktionen

In diesem Kapitel wird gezeigt, daß sich die $\Phi \in \text{TBF}^d$ mit einer *richtungshomogenen* verallgemeinerten Fourier-Transformierten für die in Kapitel 5.4 geschilderte Idee eignen. Es sei $\mathbb{R}^\times := \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}^{d^\times} := \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, $\mathbb{C}^\times := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $\mathbb{C}^{d^\times} := \mathbb{C}^d \setminus \{0\}$.

Lemma 5.5-1

$$\begin{aligned} f(az) \cdot f(bz) &= f(abz) \cdot f(z) \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^\times; z \in \mathbb{C}^{d^\times} \text{ mit } f(z) \neq 0 \\ (5.5-1) \quad \Rightarrow f(a^r z) &= \left(\frac{f(az)}{f(z)} \right)^r f(z) \quad \forall r \in \mathbb{R}; a \in \mathbb{R}^\times; z \in \mathbb{C}^{d^\times} \text{ mit } f(z) \neq 0 \end{aligned}$$

Beweis:

Für $r \in \mathbb{N}_0$ ist folgende vollständige Induktion möglich:

Induktionsanfang: Für $r = 0$ ist die Aussage trivial.

Induktionsschritt: $r \mapsto r + 1$:

Nach Induktionsvoraussetzung gilt $f(a^r z) = (f(az)/f(z))^r f(z)$, woraus mit der Funktionalgleichung (5.5-4) und der Voraussetzung $f(z) \neq 0$ folgt: $f(a^{r+1} z) = f(a a^r z) = f(az) f(a^r z) / f(z) = f(az) (f(az)/f(z))^r f(z) / f(z) = (f(az)/f(z))^{r+1} f(z)$. \square

Für $r \in -\mathbb{N}$ benutzt man die Substitution $a \mapsto 1/a$ und betrachtet $(1/a)^{\perp r}$. So überträgt sich die Aussage für $r \in \mathbb{N}_0$ auf diesen Fall, und somit auf ganz \mathbb{Z} . \square

Für $r = p/q \in \mathbb{Q}$, $q \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}$ betrachtet man die q -te Potenz der Aussage und erhält mit dem Ergebnis für $rq = p \in \mathbb{Z}$: $(f(a^r z)/f(z))^q f(z) = f((a^r)^q z) = (f(az)/f(z))^p f(z)$. Kürzen mit $f(z)$ und Ziehen der q -ten Wurzel liefert $f(a^r z)/f(z) = (f(az)/f(z))^{p/q}$. Dies ist die Behauptung für $r \in \mathbb{Q}$. \square

Da die Potenzierung mit r stetig ist, und auch f nach Voraussetzung stetig ist, kann man von \mathbb{Q} auf \mathbb{R} schließen. \square

q.e.d.

Definition: richtungshomogene Funktion

Eine richtungshomogene Funktion ist eine *reellwertige* Funktion $f : \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann, wenn gilt:

$$(5.5-2) \quad \forall \rho \in \mathbb{C}^d, \|\rho\| = 1 \quad \exists \lambda(\rho) \in \mathbb{R} : \quad r \in \mathbb{R}^\times \wedge z \in \mathbb{R}^\times \cdot \rho \Rightarrow f(rz) = r^{\lambda(\rho)} f(z) .$$

Dabei spielt ρ die Rolle einer Richtung im \mathbb{R}^d , und $\mathbb{R}^\times \cdot \rho$ ist die punktierte Gerade in eben dieser Richtung. Falls $\lambda(\rho)$ konstant ist, erhält man den bekannten Fall der *homogenen Funktionen*. Für $f(\rho) = 0$ ist $\lambda(\rho)$ nicht eindeutig bestimmt.

Satz 5.5-2 (Charakterisierung richtungshomogener Funktionen)

Sei eine stetige Funktion $f : \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Dann gilt:

$$(5.5-3) \quad \begin{aligned} & f \text{ ist richtungshomogen} \\ \Leftrightarrow & \exists \tilde{g} : \mathbb{R} \times \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup i\mathbb{R} : \\ & \forall a, b \in \mathbb{R}^\times; z \in \mathbb{C}^{d \times} : f(abz) = \tilde{g}(a; z) \cdot \overline{\tilde{g}(b; z)}. \end{aligned}$$

Beweis:

' \Rightarrow ': Für $(u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^{d \times}$ definiere man die Funktion

$$\tilde{g}(u; v) := u^{\lambda(\frac{1}{\|v\|}v)} \sqrt{f(v)} ,$$

wobei $\sqrt{\cdot}$ der Zweig der komplexen Wurzel sei, für den $f \in \mathbb{R}_{\geq 0} \Rightarrow \sqrt{f} \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ und $f \in \mathbb{R}_{< 0} \Rightarrow \sqrt{f} = i\sqrt{-f} \in i\mathbb{R}_{> 0}$ gilt. Daher gilt für beliebige $f \in \mathbb{R}$: $\sqrt{f} \in \mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$. $\lambda(\cdot)$ existiert nach Voraussetzung.¹¹³ Dann folgt $\forall a, b \in \mathbb{R}^\times; z \in \mathbb{C}^{d \times}$:

$$\begin{aligned} \tilde{g}(a; z) \cdot \overline{\tilde{g}(b; z)} &= a^{\lambda(\frac{1}{\|z\|}z)} \sqrt{f(z)} \cdot \overline{b^{\lambda(\frac{1}{\|z\|}z)} \sqrt{f(z)}} \\ & \quad \text{wegen } b, \lambda(\rho), f(z) \in \mathbb{R} \\ &= (ab)^{\lambda(\frac{1}{\|z\|}z)} f(z) \\ & \quad \text{laut (5.5-2) mit } r := ab; \rho := \frac{1}{\|z\|}z \\ &= f((ab)z) . \end{aligned}$$

' \Leftarrow ': Es gilt $\forall a, b \in \mathbb{R}^\times; z \in \mathbb{C}^{d \times}$ die Funktionalgleichung

$$(5.5-4) \quad \begin{aligned} f(az) \cdot f(bz) &= f(a \cdot 1 \cdot z) \cdot f(1 \cdot b \cdot z) \\ &= \tilde{g}(a; z) \overline{\tilde{g}(1; z)} \cdot \tilde{g}(1; z) \overline{\tilde{g}(b; z)} \quad \text{zweimal (5.5-3)} \\ &= \tilde{g}(a; z) \overline{\tilde{g}(b; z)} \cdot \tilde{g}(1; z) \overline{\tilde{g}(1; z)} \\ &= f(abz) \cdot f(1 \cdot 1z) \quad \text{zweimal (5.5-3)} \\ &= f(abz) \cdot f(z) . \end{aligned}$$

Sollte $f(z) = 0$ sein, so folgt mit $b := a$ für $a \in \mathbb{R}^\times$: $f(az)^2 = f(a^2z) \cdot f(z) = 0$. Das bedeutet, daß $f(az) = 0$ gilt und somit f entlang der ganzen punktierten Geraden $\mathbb{R}^\times \cdot z$ verschwindet, also in Richtung z richtungshomogen ist. Sei nun also $f(z) \neq 0$ vorausgesetzt. Dann ist $f(\zeta) \neq 0 \forall \zeta \in \mathbb{R}^\times \cdot z$, also sind alle Faktoren in obiger Gleichung ungleich Null.

¹¹³Für $u = 0$ sei $u^{\lambda(\cdot)} := 1$ wie üblich.

Das Lemma 5.5-1 wendet man nun auf die Funktionalgleichung (5.5-4) an. Dabei wird a durch e und r durch $\ln r$ ersetzt, wobei ein Zweig des komplexen Logarithmus zu verwenden ist.¹¹⁴ So folgt $\forall r \in \mathbb{R}^\times; z \in \mathbb{C}^{d \times}$:

$$\begin{aligned} f(rz) &= \left(\frac{f(ez)}{f(z)} \right)^{\ln r} f(z) = e^{\ln \frac{f(ez)}{f(z)} \cdot \ln r} f(z) \\ &= \left(e^{\ln r} \right)^{\ln \frac{f(ez)}{f(z)}} f(z) = r^{\tilde{\lambda}(z)} f(z), \end{aligned}$$

wobei $\tilde{\lambda}(z) := \ln \frac{f(ez)}{f(z)}$ gesetzt wurde. Es bleibt noch die Betragsunabhängigkeit von $\tilde{\lambda}$ — also $\tilde{\lambda}(z) = \tilde{\lambda}(\rho)$ für $\rho := \frac{1}{\|z\|} z$ — zu zeigen: Mittels der Funktionalgleichung (5.5-4) ergibt sich, da $f(z) \neq 0$ vorausgesetzt wurde:

$$\begin{aligned} f(ez) \cdot f(\rho) &= f(e\|z\|\rho) \cdot f(\rho) = f(e\rho) \cdot f(\|z\|\rho) = f(e\rho) \cdot f(z) \\ \Rightarrow \tilde{\lambda}(z) &= \ln \frac{f(ez)}{f(z)} = \ln \frac{f(e\rho)}{f(\rho)} = \tilde{\lambda}(\rho). \end{aligned}$$

Es ist also nun unter den genannten Voraussetzungen die Gleichung (5.5-2) bewiesen:

$$\rho := \frac{1}{\|z\|} z \wedge \lambda(\rho) := \ln \frac{f(e\rho)}{f(\rho)} \Rightarrow f(rz) = r^{\lambda(\rho)} f(z).$$

q.e.d.

Bemerkung:

Aus Gleichung (5.5-3) $f(abz) = \tilde{g}(a; z) \cdot \overline{\tilde{g}(b; z)}$ folgt, falls f und $\tilde{g}(a; \cdot)$ als inverse Fourier-Transformierte darstellbar sind, d. h. $f = \text{FT}^{\perp 1}(\hat{f})$ und $\tilde{g}(a; z) = \text{FT}^{\perp 1}(\tilde{G}(a; \omega))(z)$ für $a, b \neq 0$ die Umformung:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{|ab|^d} \text{FT}^{\perp 1} \left(\hat{f} \left(\frac{1}{ab} \omega \right) \right) (z) \\ &= \text{FT}^{\perp 1}(\hat{f})(abz) \quad \text{laut Gleichung (1.4-4)} \\ &= f(abz) = \tilde{g}(a; z) \cdot \overline{\tilde{g}(b; z)} \\ &= \text{FT}^{\perp 1}(\tilde{G}(a; \omega))(z) \cdot \overline{\text{FT}^{\perp 1}(\tilde{G}(b; \omega))(z)} \\ &= \text{FT}^{\perp 1}(\tilde{G}(a; \omega))(z) \cdot \text{FT}^{\perp 1}(\overline{\tilde{G}(b; -\omega)})(z) \quad \text{laut Satz 1.4-5} \\ &= (2\pi)^{\perp d} \text{FT}^{\perp 1}(\tilde{G}(a; \omega) * \overline{\tilde{G}(b; -\omega)})(z) \quad \text{laut Satz 1.4-9.} \end{aligned}$$

Das heißt, daß Gleichung (5.5-3) unter diesen Voraussetzungen aus der *Faltungsgleichung*

$$\frac{1}{|ab|^d} \hat{f} \left(\frac{1}{ab} \eta \right) = (2\pi)^{\perp d} \tilde{G}(a; \omega) * \overline{\tilde{G}(b; -\omega)}(\eta)$$

hergeleitet werden kann.

¹¹⁴Das bedeutet nichts anderes, als daß man für $r < 0$ mit $\ln|r| + i\pi$ arbeitet.

Nun ist es sinnvoll, unseren Begriff der ‘Symbol-Funktion $\text{Sym}_{X,c}(\omega)$ ’ zu erweitern:

Definition: erweiterte Symbol-Funktion $\text{Sym}_{X,c,E}(\omega)$

Die erweiterte Symbol-Funktion $\text{Sym}_{X,c,E}(\omega)$ eines Funktionals $\lambda_{X,c} \in \text{PF}^d$ zum Transformationskern $E : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$; $(\omega, x) \mapsto E(\omega, x)$ sei

$$\text{Sym}_{X,c,E}(\omega) := \lambda_{X,c}^x(E(\omega, x)) = \sum_{j \in M} c_j E(\omega, x_j) .$$

Für den speziellen Transformationskern $E_0(\omega, x) := e^{i\omega^{\text{tr}}x}$ der Fourier-Transformation gilt $\text{Sym}_{X,c,E_0} = \text{Sym}_{X,c}$.

Zerfällt ein Transformationskern E in das Produkt $E(\omega, x) = F(\omega, x) e^{i\omega^{\text{tr}}x}$, so ergibt sich mit $\tilde{c}_i(\omega) := c_i F(\omega, x_i)$ für $i \in M$ der folgende Zusammenhang mit der bekannten Symbol-Funktion:

$$\text{Sym}_{X,c,E}(\omega) = \text{Sym}_{X,\tilde{c}(\omega)}(\omega) .$$

Satz 5.5-3

Sei $\Phi(x, 0) = \text{FT}^{\perp 1}(\varphi(\omega))(x) \in \text{TBF}^d$ und φ richtungshomogen.¹¹⁵ Weiter gelte $\varphi(\omega) \neq 0$ auf einer Nicht-Nullmenge des \mathbb{R}^d . Sei $Q : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ stetig. Dann ist A_{Φ_Q} positiv definit bzw. $\Phi_Q \in \text{BPD}(0)$.

Beweis:

Zu zeigen ist, daß das Nachweisverfahren für positive Definitheit von $\Phi \in \text{TBF}^d$ aus Kapitel 3.2.1, Gleichung (3.2.1-1) für A_{Φ_Q} funktioniert.

Seien M , X und c beliebig vorgegeben. Da φ nach Voraussetzung richtungshomogen ist, gibt es nach Satz 5.5-2, angewandt auf den reellen Definitionsbereich \mathbb{R}^d , eine Funktion $\tilde{g} : \mathbb{R}^\times \times \mathbb{R}^{d^\times} \rightarrow \mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$ mit $\varphi(ab\eta) = \tilde{g}(a, \eta) \cdot \overline{\tilde{g}(b, \eta)}$. Für alle $x \in \mathbb{R}^d$ existiert nach Voraussetzung $Q(x)^{\perp 1}$. Somit kann man für $i, j \in M$ folgern:

$$(5.5-5) \quad \varphi \left(Q(x_i)^{\perp 1} Q(x_j)^{\perp 1} \eta \right) = \tilde{g} \left(Q(x_i)^{\perp 1}; \eta \right) \cdot \overline{\tilde{g} \left(Q(x_j)^{\perp 1}; \eta \right)} .$$

Während der Rechnung ergibt sich der Transformationskern

$$(5.5-6) \quad E(\eta, x) := Q(x)^{\perp d} \tilde{g} \left(Q(x)^{\perp 1}; \eta \right) e^{i\eta^{\text{tr}}x} .$$

Wie oben schon erwähnt, folgt:

$$\begin{aligned} \tilde{c}_i(\eta) &:= c_i Q(x_i)^{\perp d} \tilde{g} \left(Q(x_i)^{\perp 1}; \eta \right) \quad \text{für } i \in M \\ \Rightarrow \text{Sym}_{X,c,E}(\omega) &= \text{Sym}_{X,\tilde{c}(\eta)}(\omega) . \end{aligned}$$

Analog zur Umformung (3.2.1-1) rechnet man nun:

$$\begin{aligned} c^{\text{tr}} A_{\Phi_Q} \bar{c} &= \sum_{i,j \in M} c_i \bar{c}_j \Phi_Q(x_i, x_j) \\ &\quad \text{mit Lemma 5.4-1} \\ &= (2\pi)^{\perp d} \sum_{i,j \in M} \int c_i \bar{c}_j (Q(x_i)Q(x_j))^{\perp d} \varphi \left((Q(x_i)Q(x_j))^{\perp 1} \eta \right) e^{i\eta^{\text{tr}}(x_i \perp x_j)} d\eta \\ &\quad \text{wegen } Q(x_j) \in \mathbb{R} \text{ und Gleichung (5.5-5)} \\ &= (2\pi)^{\perp d} \int \sum_{i,j \in M} c_i Q(x_i)^{\perp d} \tilde{g} \left(Q(x_i)^{\perp 1}; \eta \right) e^{i\eta^{\text{tr}}x_i} \\ &\quad \cdot \overline{c_j Q(x_j)^{\perp d} \tilde{g} \left(Q(x_j)^{\perp 1}; \eta \right) e^{i\eta^{\text{tr}}x_j}} d\eta . \end{aligned}$$

¹¹⁵Laut Satz 3.2-4 ist φ reellwertig.

Mit $E(\eta, x) = Q(x)^{\perp d} \tilde{g}(Q(x)^{\perp 1}; \eta) e^{i\eta^{\text{tr}} x}$ folgt:

$$\begin{aligned} & c^{\text{tr}} A_{\Phi_Q} \bar{c} \\ &= (2\pi)^{\perp d} \int \sum_{i,j \in M} c_i E(\eta, x_i) \overline{c_j E(\eta, x_j)} d\eta \\ &= (2\pi)^{\perp d} \int \text{Sym}_{X,c,E}(\eta) \overline{\text{Sym}_{X,c,E}(\eta)} d\eta = (2\pi)^{\perp d} \int \left| \text{Sym}_{X,\tilde{c}(\eta)}(\omega) \right|^2 d\eta \\ &\geq 0 . \end{aligned}$$

Dieser Term kann für ein $c \in \mathbb{C}^N$ nur zu 0 werden, wenn die Symbol-Funktion $\text{Sym}_{X,\tilde{c}(\eta)}(\omega)$ auf ganz \mathbb{R}^d verschwindet. Im Ausdruck $\tilde{c}_i(\eta) = c_i Q(x_i)^{\perp d} \tilde{g}(Q(x_i)^{\perp 1}; \eta)$ ist der Wert $Q(x_i)^{\perp d}$ a priori ungleich Null. $\tilde{g}(Q(x_i)^{\perp 1}; \eta)$ spiegelt im wesentlichen das Verhalten der Fourier-Transformierten von Φ wieder, so daß sich die Argumentation aus Satz 3.2.1-1 übertragen läßt. Es folgt so aus der Voraussetzung ‘ $\varphi(\omega) \neq 0$ auf einer Nicht-Nullmenge des \mathbb{R}^d ’, die Behauptung $c^{\text{tr}} A_{\Phi_Q} \bar{c} > 0$.

q.e.d.

Satz 5.5-4

Von den ‘klassischen’ radialen Basisfunktionen der Tabelle 1 sind nur die Fourier-Transformierten der polynomials und thin plate splines richtungshomogen.

Beweis:

‘ \Rightarrow ’: Die Fourier-Transformierten sind homogene Polynome, siehe Tabelle 1.

‘ \Leftarrow ’: Der Beweis erfolgt analog zu Satz 5.2-2.

q.e.d.

Diese Ergebnisse schließen *nicht* die Verwendung von $\Phi \in \text{TBF}^d$ aus, deren positive Definitheit sich nur mit anderen Methoden zeigen läßt.

5.6 Betrachtung des Interpolationsfehlers

Analog zu Satz 3.2.2-1 und Korollar 3.2.2-2 ergibt sich mit Lemma 5.4-1:

Satz 5.6-1 (Integraldarstellung der Kriging-Funktion für Φ_Q)

Sei $\Phi(x, 0) = \overset{(d)}{\text{FT}}^{\perp 1}(\varphi(\omega))(x) \in \text{TBF}^d$ und φ richtungshomogen. Sei wie im ganzen Kapitel $\Phi_Q(x, y) = \Phi(Q(x)Q(y)(x-y), 0)$. Sei $\tilde{g} : \mathbb{R}^{\times} \times \mathbb{R}^{d^{\times}} \rightarrow \mathbb{R} \cup i\mathbb{R}$ mit $\varphi(ab\eta) = \tilde{g}(a; \eta) \cdot \tilde{g}(b; \eta)$ laut Satz 5.5-2 und $u(x)$ die Lösung von (2.6-2) bzw. (2.9-1). Sei wie in Gleichung (5.5-6) $E(\eta, x) = Q(x)^{\perp d} \tilde{g}(Q(x)^{\perp 1}; \eta) e^{i\eta^{\text{tr}} x}$. Dann gilt für die auf Seite 28 definierte Kriging-Funktion:

$$\kappa_{X,\Phi_Q}^2(x) = (2\pi)^{\perp d} \int \varphi(\omega) \left| g_{X,\tilde{u}_i(x,\eta)}(x, \omega) \right|^2 d\omega .$$

Beweis:

$$\begin{aligned} & Q_{\Phi_Q}(u, \Phi_Q(x, X), \Phi_Q(x, x)) \\ & \hspace{15em} \text{mit Gleichung (3.1.2-2)} \\ &= \sum_{i,j \in M} u_i \bar{u}_j \Phi_Q(x_i, x_j) - \sum_{i \in M} u_i \Phi_Q(x_i, x) - \sum_{j \in M} \bar{u}_j \Phi_Q(x, x_j) + \Phi_Q(x, x) \end{aligned}$$

Mit Lemma 5.4-1 folgt:

$$\begin{aligned}
& (2\pi)^d Q_{\Phi_Q}(u, \Phi_Q(x, X), \Phi_Q(x, x)) \\
&= \sum_{i,j \in M} u_i \overline{u_j} (Q(x_i)Q(x_j))^{\perp d} \int \varphi \left((Q(x_i)Q(x_j))^{\perp 1} \eta \right) e^{i\eta^{\text{tr}}(x_i \perp x_j)} d\eta \\
&\quad - \sum_{i \in M} u_i (Q(x_i)Q(x))^{\perp d} \int \varphi \left((Q(x_i)Q(x))^{\perp 1} \eta \right) e^{i\eta^{\text{tr}}(x_i \perp x)} d\eta \\
&\quad - \sum_{j \in M} \overline{u_j} (Q(x)Q(x_j))^{\perp d} \int \varphi \left((Q(x)Q(x_j))^{\perp 1} \eta \right) e^{i\eta^{\text{tr}}(x \perp x_j)} d\eta \\
&\quad + (Q(x)Q(x))^{\perp d} \int \varphi \left((Q(x)Q(x))^{\perp 1} \eta \right) e^{i\eta^{\text{tr}}(x \perp x)} d\eta \\
&\hspace{20em} \text{mit } \varphi(ab \eta) = \tilde{g}(a, \eta) \cdot \overline{\tilde{g}(b, \eta)} \\
&= \sum_{i,j \in M} u_i Q(x_i)^{\perp d} \overline{u_j Q(x_j)^{\perp d}} \int \tilde{g}(Q(x_i)^{\perp 1}; \eta) e^{i\eta^{\text{tr}} x_i} \overline{\tilde{g}(Q(x_j)^{\perp 1}; \eta) e^{i\eta^{\text{tr}} x_j}} d\eta \\
&\quad - \sum_{i \in M} u_i Q(x_i)^{\perp d} Q(x)^{\perp d} \int \tilde{g}(Q(x_i)^{\perp 1}; \eta) e^{i\eta^{\text{tr}} x_i} \overline{\tilde{g}(Q(x)^{\perp 1}; \eta) e^{i\eta^{\text{tr}} x}} d\eta \\
&\quad - \sum_{j \in M} \overline{u_j Q(x_j)^{\perp d}} Q(x)^{\perp d} \int \tilde{g}(Q(x)^{\perp 1}; \eta) e^{i\eta^{\text{tr}} x} \overline{\tilde{g}(Q(x_j)^{\perp 1}; \eta) e^{i\eta^{\text{tr}} x_j}} d\eta \\
&\quad + Q(x)^{\perp 2d} \int \tilde{g}(Q(x)^{\perp 1}; \eta) e^{i\eta^{\text{tr}} x} \overline{\tilde{g}(Q(x)^{\perp 1}; \eta) e^{i\eta^{\text{tr}} x}} d\eta
\end{aligned}$$

Mit $E(\eta, x) = Q(x)^{\perp d} \tilde{g}(Q(x)^{\perp 1}; \eta) e^{i\eta^{\text{tr}} x}$ folgt weiter:

$$\begin{aligned}
& Q_{\Phi_Q}(u, \Phi_Q(x, X), \Phi_Q(x, x)) \\
&= (2\pi)^{\perp d} \int \left(\sum_{i,j \in M} u_i E(\eta, x_i) \overline{u_j E(\eta, x_j)} - \sum_{i \in M} u_i E(\eta, x_i) \overline{E(\eta, x)} \right. \\
&\quad \left. - \sum_{j \in M} E(\eta, x) \overline{u_j E(\eta, x_j)} + E(\eta, x) \overline{E(\eta, x)} \right) d\eta \\
&= (2\pi)^{\perp d} \int \left(\sum_{i \in M} u_i E(\eta, x_i) - E(\eta, x) \right) \cdot \overline{\left(\sum_{j \in M} u_j E(\eta, x_j) - E(\eta, x) \right)} d\eta \\
&= (2\pi)^{\perp d} \int \left| \sum_{i \in M} u_i E(\eta, x_i) - E(\eta, x) \right|^2 d\eta \\
&= (2\pi)^{\perp d} \int \left| \text{Sym}_{X,u,E}(\eta) - E(\eta, x) \right|^2 d\eta .
\end{aligned}$$

Nun setzt man den Vektor $u(x)$ für u ein, um $\kappa_{X, \Phi_Q}^2(x)$ zu erhalten.

q.e.d.

5.7 Konkrete Auswahl einer Funktion Q

Ein möglicher Ansatz, eine Funktion Q auszuwählen, besteht darin, sich als Ziel

$$1 \leq d_{Q, \min}(X) \leq D \text{ mit } D > 1$$

vorzugeben.¹¹⁶ Dieses Ziel ist durch die Vorgaben

$$Q(x_i) \geq \sqrt{\frac{1}{\min_{k \neq i} d(x_k, x_i)}} = \max_{k \neq i} \sqrt{\frac{1}{d(x_k, x_i)}}$$

$$Q(x_i) \leq \sqrt{\frac{D}{\max_{k \neq i} d(x_k, x_i)}} = \min_{k \neq i} \sqrt{\frac{D}{d(x_k, x_i)}}$$

erreichbar, denn aus ihnen folgt für $i \neq j$:

$$d_Q(x_i, x_j) = Q(x_i)Q(x_j)d(x_i, x_j) \begin{cases} \geq \sqrt{\frac{1}{d(x_j, x_i)}} \sqrt{\frac{1}{d(x_i, x_j)}} d(x_i, x_j) = 1 \\ \leq \sqrt{\frac{D}{d(x_j, x_i)}} \sqrt{\frac{D}{d(x_i, x_j)}} d(x_i, x_j) = D \end{cases} .$$

Aus den Werten $\{Q(x_i)\}_{i \in M}$ konstruiert man dann die ganze Funktion $Q(x)$. Dabei ist sicherzustellen, daß überall $Q(x) > 0$ gilt. Entscheidet man sich für eine Interpolation mit radialen Basisfunktionen, so muß man sich für $\Phi \in \text{BPD}(0)$ entscheiden, da sonst die Polynombedingung $\sum_{i \in M} c_i \cdot 1 = 0$ negative Koeffizienten c_i erzwingt. Diese können zu Nullstellen von Q führen.

Benutzt man ein $\Phi > 0$ mit $\pm\Phi \in \text{BPD}(0)$, das im Verhältnis zu $d_{\min}(X)$ hinreichend schnell fällt, so erreicht man $c_j > 0$ für alle Koeffizienten. Als Summe von lauter positiven Summanden ist dann auch die Interpolante positiv.

5.8 Implementation, Aufwand und experimentelle Ergebnisse

Eine mögliche Implementation ist die folgende:

PROCEDURE CalculateInterpolantQ

Input: X : Stützstellenmenge
 ϕ : Basisfunktion für die Hauptinterpolante
 ϕ_0 : Basisfunktion für die Skalierungsfunktion Q
 d : Ausgangsmetrik, z. B. d_2
 $\{p_k\}$: Basis des \mathbb{P}_m^d
 Vec : vorgegebene Stützwerte

Output: s : Interpolante

for $i \in M$ do $q_i := (\min_{k \neq i} d(x_k, x_i))^{1/2}$ AwZ = $\mathcal{O}(N^2)$

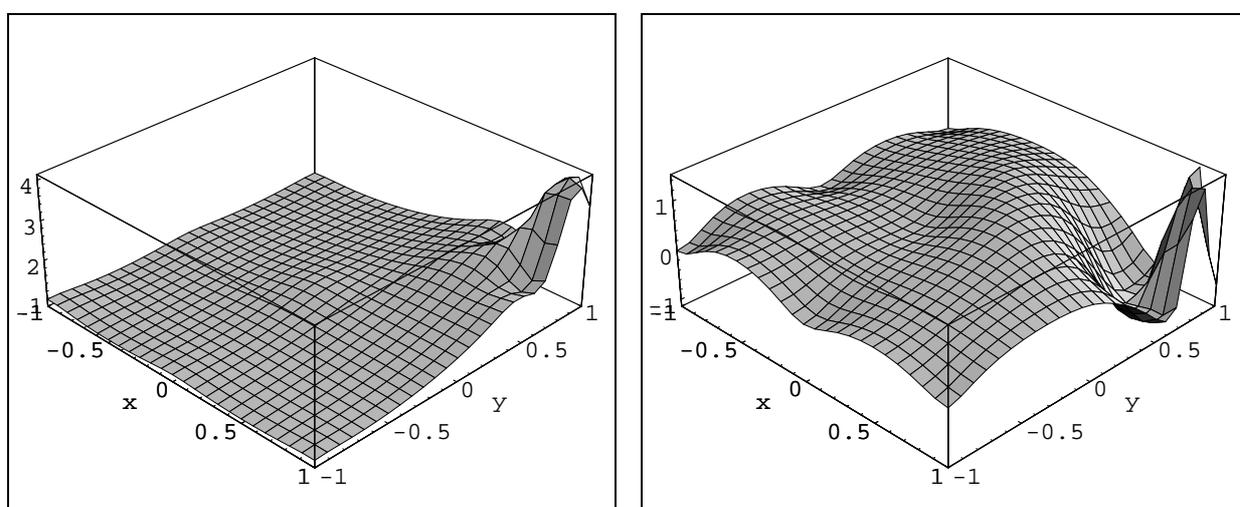
Q := Interpolante zu (q_i) mit $\phi_0 \circ d_2$ auf X
AwZ(Aufstellen und Lösen des Interpolationssystemes) = $\mathcal{O}(N^3)$

$d_Q(x, y) := Q(x)Q(y)d(x, y)$ es folgt: AwZ(eine Auswertung von d_Q) = $\mathcal{O}(2N)$

¹¹⁶Statt 1 kann man natürlich auch jede andere positive Konstante verwenden.

s := Interpolante zu Vec mit $\phi \circ d_Q$ auf X
 $\text{AwZ}(\text{Aufstellen der Interpolationsmatrix}) = \mathcal{O}(N^2) \text{AwZ}(\text{Auswertung von } d_Q) = \mathcal{O}(N^3)$
 $\text{AwZ}(\text{Lösen des Interpolationssystemes}) = \mathcal{O}(N^3)$
 end of procedure

Die Aufwandsangaben folgen aus Satz 5.1-1. Der Zeitaufwand für die *Erstellung* der Interpolante s steigt im Vergleich zum Standardverfahren um einen festen Faktor. Leider ist der Aufwand für die *Auswertung* der Interpolante um eine Größenordnung gewachsen: $\text{AwZ}(\text{Auswertung } s) = \mathcal{O}(N) \text{AwZ}(\text{Auswertung } d_Q) = \mathcal{O}(N^2)$. Das ist zu groß für viele Anwendungszwecke, zumal die im folgenden präsentierten experimentellen Ergebnisse nicht beeindrucken.



inverse-multiquadric-Interpolante für die
 Skalierungsfunktion $Q(x)$
 Parameter $c = 4 d_{2, \min}(X) = 1/4$, $\bar{\lambda}(A_\Phi) \approx 50.1$,
 $\underline{\lambda}(A_\Phi) \approx 2.09 \cdot 10^{-13}$, $\text{cond}_{2,2}(A_\Phi) \approx 2.39 \cdot 10^4$

Wendland- $\phi_{3,1}$ -Interpolante
 Parameter $c = 12 d_{Q, \min}(X) = 12$,
 $\bar{\lambda}(A_\Phi) \approx 15.7$, $\underline{\lambda}(A_\Phi) \approx 4.43 \cdot 10^{-13}$,
 $\text{cond}_{2,2}(A_\Phi) \approx 3.55 \cdot 10^3$

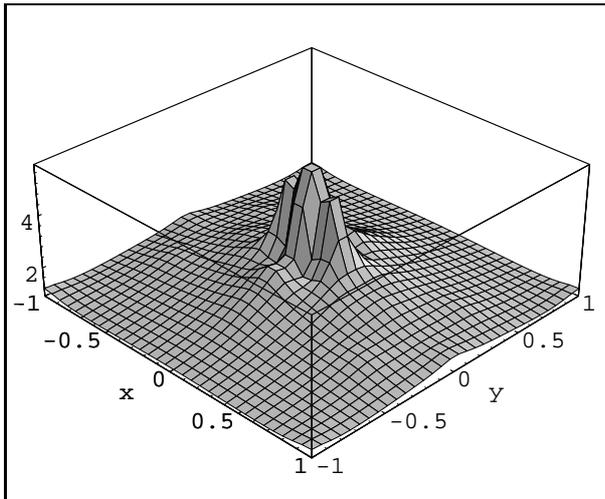
Die Graphiken wurden mit `PlotRangeVec = All`; erstellt.

Abbildung 16: Interpolation der ‘Wellen-Funktion’ mit einer ortsabhängigen Skalierungsfunktion

Bemerkungen zu Abbildung 16:

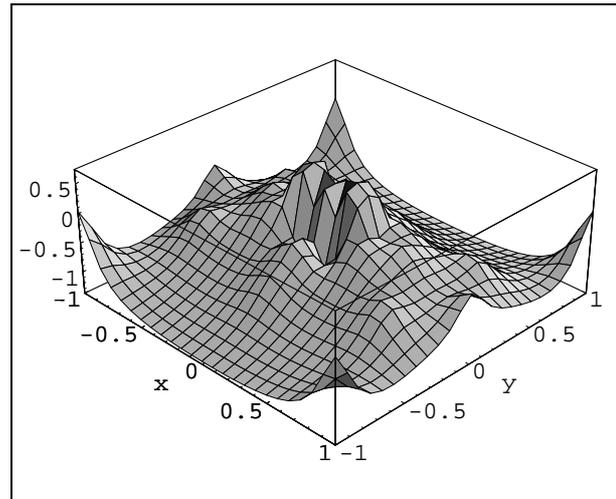
Der Graph hat besonders im flachen Teil zu wenig Ähnlichkeit mit der vorgegebenen Beispielfunktion aus Abbildung 8. Auch die Kondition der Interpolationsmatrix, die bei der direkten Interpolation mit der Wendland- $\phi_{3,1}$ -Funktion $1.89 \cdot 10^3$ betragen hat, hat sich fast verdoppelt. Man muß also feststellen, daß sich der immense Rechenaufwand für das Aufstellen der Hauptinterpolationsmatrix mit $\mathcal{O}(N^3)$ und die Berechnung der Graphik¹¹⁷ nicht lohnt.

¹¹⁷ Die Berechnung der Graphik benötigte bei gut 50% CPU-Quota ca. 2 Stunden. Genauere Aussagen sind auf einem Multiusersystem nicht möglich.



inverse-multiquadric-Interpolante für die
Skalierungsfunktion $Q(x)$
Parameter $c = 4$ $d_{2, \min}(X) \approx 0.115$,
 $\bar{\lambda}(A_\Phi) \approx 167$, $\underline{\lambda}(A_\Phi) \approx 3.48 \cdot 10^{-3}$,
 $\text{cond}_{2,2}(A_\Phi) \approx 4.79 \cdot 10^4$

Die Graphik besitzt 31×31 Gitterpunkte.



Wendland- $\phi_{3,1}$ -Interpolante
Parameter $c = 12$ $d_{Q, \min}(X) = 12$,
 $\bar{\lambda}(A_\Phi) \approx 20.8$, $\underline{\lambda}(A_\Phi) \approx 3.25 \cdot 10^{-3}$,
 $\text{cond}_{2,2}(A_\Phi) \approx 6.40 \cdot 10^3$

Die Graphiken wurden mit `PlotRangeVec = All`; erstellt.

Abbildung 17: Interpolation der ‘Mexican-Hat-Funktion’ mit einer ortsabhängigen Skalierungsfunktion

Bemerkungen zu Abbildung 17:

Dieses Ergebnis ist noch weniger befriedigend als das vorige. Der Graph hat mit der vorgegebenen Funktion nicht mehr viel gemein, sondern führt vielmehr sein ‘Eigenleben’, von dem er nur an den Stützstellen zur Erfüllung der Interpolationsbedingung abläßt.¹¹⁸ Die Kondition der Hauptinterpolationsmatrix wuchs im Vergleich zum direkten Ansatz von $2.14 \cdot 10^3$ auf $6.40 \cdot 10^3$ an, hat sich also fast verdreifacht.

¹¹⁸Hier wurden sogar ca. 4 1/2 Stunden Rechenzeit für die Erstellung der Graphik benötigt, da $\#X$ mit 47 fast doppelt so groß wie im vorhergehenden Beispiel ist. Kompliziertere Funktionen als Wendland- $\phi_{3,1}$ können den Aufwand sehr leicht nochmals verdoppeln.

6 Transformation von Metriken

6.1 Spezielle Variation der 2-Metrik

Wie am Ende von Kapitel 5.2 schon angedeutet wurde, kann man eine ‘Hauptachsenstruktur’ von X ausnutzen, um die Stützstellenmenge zu entzerren. Dort wurde die Idee eines Basiswechsels angedacht. Man kann diese ‘Hauptachsenstruktur’ aber auch verwenden, indem man die 2-Metrik

$$d_2(x, y) = \|x - y\|_2 = \sqrt{(x - y)^{\text{tr}} (x - y)}$$

durch eine elliptische Metrik d_E ersetzt:

$$d_E(x, y) := \|x - y\|_E := \sqrt{(x - y)^{\text{tr}} E (x - y)},$$

wobei E eine positiv definite, selbstadjungierte Matrix ist. Die Eigenvektoren der Matrix seien dabei in Richtung der ‘Hauptachsen’ von X gerichtet,¹¹⁹ die entsprechenden Eigenwerte seien Streckfaktoren, die die ‘Punktdichten’ in der jeweiligen Richtung angleichen, etwa auf 1 normieren. Mit dem Hauptachsentransformationssatz 1.5-3 konstruiert man sich sodann eine ‘Wurzel’ aus E , d. h. eine positiv definite, selbstadjungierte Matrix W , für die $W^{\text{tr}} W = E$ gilt. Dazu stellt man E dar als $E = P^{\text{tr}} D^2 P$ mit einer Diagonalmatrix D^2 und einer unitären Matrix P . Die Diagonalelemente von D^2 sind laut Satz 1.5-4 positiv. Daher kann man die ‘Wurzel’ D aus D^2 definieren als die Diagonalmatrix, die die positiven Wurzeln der Elemente von D^2 enthält. Setzt man nun $W := P^{\text{tr}} D P$, so gilt $W^{\text{tr}} W = P^{\text{tr}} D^{\text{tr}} P P^{\text{tr}} D P = P^{\text{tr}} D^{\text{tr}} D P = P^{\text{tr}} D^2 P = E$. Dadurch erkennt man:

$$\begin{aligned} d_E(x, y)^2 &= (x - y)^{\text{tr}} E (x - y) = (W (x - y))^{\text{tr}} (W (x - y)) \\ &= \|W (x - y)\|_2^2 = \|W x - W y\|_2^2 = d_2(W x, W y)^2. \end{aligned}$$

Man hat also wieder die alte 2-Metrik, aber bezüglich einer anderen Basis. Um nun eine *neue* Theorie zu erhalten, läßt man die Matrizen W und E vom Ort abhängen:¹²⁰

$$d_{E(x,y)}(x, y) = d_2(W(x, y) x, W(x, y) y).$$

Entsprechend hängen auch P und D nun vom Ort ab: $W(x, y) = P(x, y)^{\text{tr}} D(x, y) P(x, y)$ und $E(x, y) = P(x, y)^{\text{tr}} D(x, y)^{\text{tr}} D(x, y) P(x, y)$. Damit die wohlbekannten $\Phi \in \text{RBF}^d$ weiterverwendbar sind, insbesondere also die Interpolationsmatrix A_Φ selbstadjungiert bleibt, muß $d_{E(x,y)}(x, y) = d_{E(y,x)}(y, x)$ gelten, woraus folgt:

$$\begin{aligned} (x - y)^{\text{tr}} E(x, y) (x - y) &= (y - x)^{\text{tr}} E(y, x) (y - x) \\ &= (x - y)^{\text{tr}} E(y, x) (x - y). \end{aligned}$$

Daher müssen sowohl $E(x, y)$ und $W(x, y)$ als auch $P(x, y)$ und $D(x, y)$ symmetrisch in x und y sein. Sie dürfen aber nicht linear in ihren Argumenten x und y sein,¹²¹ weil dadurch die positive Definitheit der Operatoren $E(x, y)$ und $D(x, y)$ verloren ginge. Allgemeiner sollten

¹¹⁹Hier setzt man voraus, daß die ‘Hauptachsen’ von X senkrecht aufeinander stehen. Sollte das nicht der Fall sein, so schaltet man noch einen Projektionsoperator vor das gesamte Verfahren, der die ‘Hauptachsen’ von X auf eine Orthonormalbasis transformiert. Da der Projektionsoperator die Norm 1 hat, hat er keine negativen Einflüsse. Man kann diesen Projektionsoperator dann mit der weiter unten definierten unitären Matrix P zusammenfassen.

¹²⁰Im allgemeinen wird $d_{E(x,y)}(x, y)$ nun *keine* Metrik mehr sein.

¹²¹ $(x, y, z) \mapsto W(x, y) z$ wäre dann eine *trilineare* Abbildung.

sie als Funktionen von x und y keinen ungeraden Anteil enthalten. Damit entfällt insbesondere der zunächst einleuchtende ‘Mittelwertansatz’ $E(x, y) \cong E(\frac{1}{2}(x + y))$. Eventuell führt für $D(x, y)$ ein Ansatz mit gerader Abhängigkeit von den Komponenten der Vektoren x und y und für $P(x, y)$ ein Ansatz als (stetig) parametrisierter Projektionsoperator weiter. Als Beispiel für $D(x, y)$ seien genannt: Eine quadratische Formel

$$D(x, y) := \text{Diag} \left((\|x\|^2 + \|y\|^2) \cdot \lambda_\nu; \nu = 1, \dots, d \right)$$

und eine Formel nach ‘inverse-multiquadric-Art’

$$D(x, y) := \text{Diag} \left(\left(1 + (|x_\nu - hp_\nu|^2 + |y_\nu - hp_\nu|^2 + c_\nu^2)^{\perp 1/2} \right) \cdot \lambda_\nu; \nu = 1, \dots, d \right),$$

wobei hp ein ‘Häufungspunkt’ von X und λ, c Parametervektoren seien. Dieser Ansatz soll hier nicht weiter untersucht werden.

6.2 Der Metrik vorgeschaltete Transformationen

6.2.1 Idee: ‘Dekumulieren’ der Stützstellen durch Transformation des Raumes

Um die lokale Anhäufungen von Stützstellen zu entzerren, kann man in Betracht ziehen, der Interpolation eine *Transformation des Raumes* vorzuschalten. Diese Transformation soll also zu kleine Abstände vergrößern oder zu große Abstände verkleinern. Legt man dem Ansatz eine gewöhnliche, homogene Metrik zu Grunde (z. B. die 2-Metrik), so ist klar, daß eine *lineare* Transformation die gewünschte Entzerrung nicht bewirken kann. Im folgenden werden nun Mindestanforderungen an die Transformation aufgestellt und Beispiele angegeben.

Definition: transformierte Metrik

Als transformierte Metrik d_T zu einer gegebenen Metrik $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ auf einem linearen Raum V und einer injektiven Abbildung $T : V \rightarrow V$ bezeichnet man die Abbildung

$$d_T : V \times V \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}; \quad (x, y) \mapsto d_T(x, y) := d(Tx, Ty) .$$

Der folgende Satz zeigt, daß die Bezeichnung ‘Metrik’ zutreffend ist.

Satz 6.2.1-1

Sei V ein linearer Raum und d eine Metrik auf V . Dann gilt:

$$d_T = d \circ T \text{ ist eine Metrik} \quad \Leftrightarrow \quad T : V \rightarrow V \text{ ist injektiv} .$$

Beweis:

‘ \Rightarrow ’:

- Angenommen, T ist *nicht* injektiv.
- $\Rightarrow \exists x, y \in V : x \neq y \wedge Tx = Ty$
- $\Rightarrow d_T(x, y) = d(Tx, Ty) = 0$
- \Rightarrow Widerspruch zur Voraussetzung, daß d_T eine Metrik ist.

‘ \Leftarrow ’:

- d_T ist symmetrisch: Folgt aus der Symmetrie von d .
- d_T ist positiv: Folgt aus der Positivität von d .

- d_T ist definit:

$$\begin{aligned}
 d_T(x, y) &= 0 \\
 \Leftrightarrow d(Tx, Ty) &= 0 \\
 \Leftrightarrow Tx &= Ty && d \text{ ist definit} \\
 \Leftrightarrow x &= y && T \text{ ist injektiv.}
 \end{aligned}$$

- d_T erfüllt die Dreiecksungleichung:

$$\begin{aligned}
 d_T(x, y) &= d(Tx, Ty) \\
 &\leq d(Tx, Tz) + d(Tz, Ty) && d \text{ ist Metrik} \\
 &= d_T(x, z) + d_T(z, y) .
 \end{aligned}$$

q.e.d.

Ab jetzt wird davon ausgegangen, daß T injektiv ist. Das hat den Vorteil, daß mit dem letzten Satz für $\Phi = \phi \circ d \in \text{MBF}^d$ folgt: $\Phi \circ T = \phi \circ d \circ T = \phi \circ d_T \in \text{MBF}^d$. Die Injektivität von T verhindert weiterhin, daß aus einer zulässigen Stützstellenmenge X eine Menge $T(X)$ wird, die mehrere gleiche Punkte enthält. Falls außerdem auch $T(X)$ wieder \mathbb{P}_m^d -unisolvent ist,¹²² gilt:

$$(6.2.1-1) \quad \exists \tilde{A}_\Phi^{\perp 1} \quad \Rightarrow \quad \exists (\tilde{A}_{\Phi \circ T})^{\perp 1} .$$

Auch alle anderen bekannten Sätze übertragen sich.¹²³

6.2.2 Implementation

In diesem Kapitel wird die *Verringerung* zu großer Abstände durch eine injektive Entzerrungstransformation T betrachtet. Dabei sind zwei Ansätze zu unterscheiden:

- *Ansatz 6.2.2-(A)*: Unbeschränkte Transformationen $T : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$.
- *Ansatz 6.2.2-(B)*: Beschränkte Transformationen $T : \mathbb{R}^d \rightarrow B_d(0, 1)$, wobei $B_d(0, 1) := \{x \in \mathbb{R}^d : d(0, x) \leq 1\}$ die *abgeschlossene Einheitskugel zur Metrik d* bezeichnet. Dementsprechend gilt $\forall x, y \in \mathbb{R}^d : d_T(x, y) \leq 2$.

Die Beschränkung auf die Einheitskugel als Bildmenge von T ist für die oben eingeführten *parametrisierten* Basisfunktionen möglich. Unparametrisierte Basisfunktionen, wie z. B. die *thin plate splines* oder die *polynomials*, können den ‘verfälschenden’ Einfluß der Entzerrungstransformation T nicht ausgleichen. (Es sei daran erinnert, daß diese Basisfunktionen als eindeutige Lösung der Plattengleichung auftreten, und nichtlineare Operationen diese Eigenschaft zunichte machen.) Andererseits sind die beiden genannten Typen von radialen Basisfunktionen diejenigen, die am wenigsten ‘allergisch’ auf inhomogene Stützstellenverteilungen reagieren. Deswegen und wegen der großen Vorteile bei der Auswertung sollte das Verfahren nur auf Basisfunktionen mit kompaktem Träger oder ‘quasi-kompaktem’ Träger, wie etwa Gaußians und inverse multiquadrics, angewandt werden.

Es ist nicht nur mit unwirtschaftlich hohem Aufwand verbunden, eine injektive Entzerrungstransformation T mittels d -facher, d -variater Interpolation zu erzeugen, man kann so auch

¹²²Natürlich ist diese Bedingung für $m = 0$ leer.

¹²³Insbesondere gilt das für die Sätze über Fehler- und Konditionsabschätzung aus den Kapiteln 3.3.2 und 3.3.3.

die geforderten Eigenschaften nur äußerst schwer garantieren. Daher sollte man T ‘per Hand’ konstruieren, z. B. nach dem im folgenden beschriebenen Ansatz.

Die Stützstellenmenge X habe einen ‘Häufungspunkt’¹²⁴ hp , d.h. eine Stelle hp , um die herum $h_{\rho, X, d}(x)$ besonders gering ist. Damit ist zwar auch der Fehler hier gering, aber die Kondition von A_{Φ} unnötig hoch, da der globale Wert $d_{\min}(X)$ von dieser Region bestimmt wird. Um diese Anhäufung zu entzerren, liegt ein Ansatz

$$(6.2.2-1) \quad T_{hp}(x) := T_0(x - hp)$$

mit den Eigenschaften

$$(6.2.2-2) \quad T_0(0) = 0, \quad \|T_0(x)\| \leq \mathcal{O}(\|x\|) \quad \text{für } \|x\| \rightarrow \infty$$

und der Richtungsableitung

$$(6.2.2-3) \quad \frac{\partial \|T_0(x)\|}{\partial(x/\|x\|)} > 0 \quad \forall x \neq 0$$

nahe. Diese Bedingungen besagen, daß $\|T_0(x)\|$ in alle Richtungen streng monoton, aber höchstens linear wächst. Falls T_0 auch noch die Richtung beibehält, also

$$\frac{T_0(x)}{\|T_0(x)\|} = \frac{x}{\|x\|} \quad \forall x \neq 0$$

gilt, ist die Injektivität von T_0 , und damit von T_{hp} , leicht nachweisbar. Ein beschränkter, radialer Ansatz für T_0 ist

$$T_0(x) := \frac{x}{\|x\| + 1};$$

ein nur teilweise beschränkter, der ein richtungsabhängiges ‘Häufungsverhalten’ berücksichtigt, ist für $d = 2$ z. B.

$$T_0(x) := \frac{\left| \begin{array}{c} x_{(1)}^2 \\ + 5 \left| x_{(2)}^3 \end{array} \right|}{2 \left| \begin{array}{c} x_{(1)}^2 \\ + \left| x_{(2)}^2 \end{array} \right| + 1} \cdot \frac{x}{\|x\|} \quad \text{für } x \neq 0, \quad 0 \text{ sonst.}$$

Gibt es mehrere ‘Häufungspunkte’ hp_1, \dots, hp_n von X , so kann man eine konvexe Linearkombination aus den zugehörigen Metriken $d_{T_{hp_1}}, \dots, d_{T_{hp_n}}$ benutzen.¹²⁵ Als Koeffizienten der konvexen Linearkombination bieten sich die baryzentrischen Koordinaten des aktuellen x bezüglich der nächsten $d + 1$ ‘Häufungspunkte’ hp_i an.

¹²⁴Wenn es *keinen* solchen ‘Häufungspunkt’ gibt, ist die Stützstellenverteilung homogen, und das Verfahren obsolet. Gibt es mehrere Häufungspunkte, so kann man auf das Verfahren für *einen* ‘Häufungspunkt’ aufbauen, wie weiter unten beschrieben wird.

¹²⁵Die mit positiven Faktoren gewichtete Summe von Metriken ist selber wieder eine Metrik.

6.2.3 Experimentelle Ergebnisse

Ansätze vom Typ 6.2.2-(B):

Zunächst betrachten wir als Ansatz für die Transformation

$$T_0(x) := 2 \frac{x}{1 + \|x\|_2} \quad \text{für die 'Wellen-Funktion'}$$

und $T_0(x) := \frac{x}{1 + \|x\|_2}$ für die 'Mexican-Hat-Funktion'.

Da T beschränkt ist, ist der Ansatz vom Typ 6.2.2-(B). Er berücksichtigt die Eigenheiten der Stützstellenverteilungen kaum. Der Vorfaktor '2' der ersten Transformation hebt sich durch die Wahl der Parameter der Basisfunktionen weg, denn dadurch wird die Größe des 'wesentlichen Trägers' auch verdoppelt.

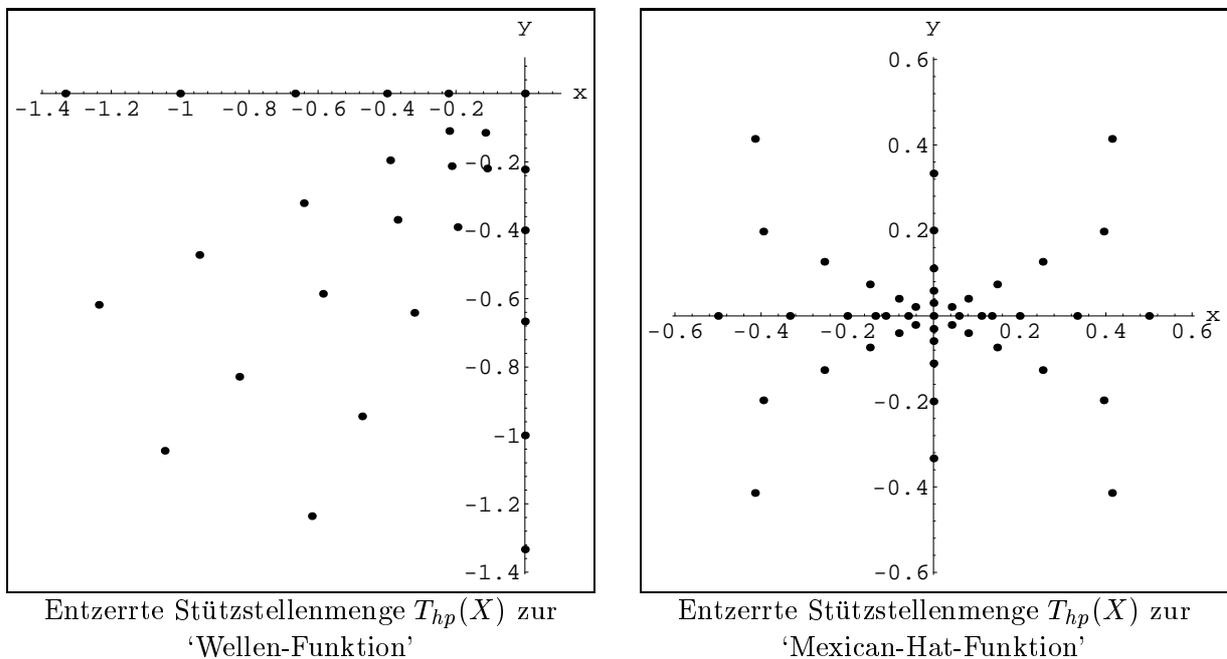
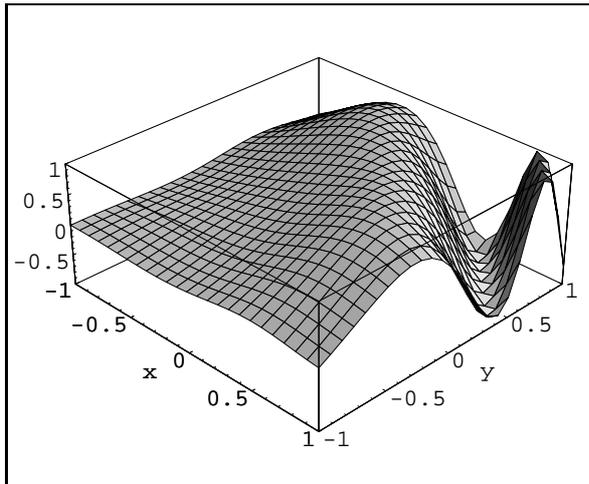


Abbildung 18: Entzerrte Stützstellenmengen bei vorgeschalteter Typ-(B)-Transformation

Bemerkungen zu Abbildung 18:

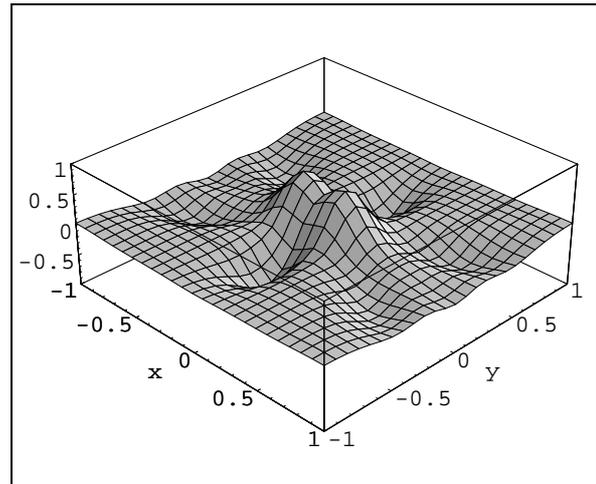
Diese entzerrten Stützstellenmengen müssen mit Abbildung 9 verglichen werden. Dabei ist eine deutliche Verbesserung erkennbar. Die geometrische Anordnung erscheint deutlich regelmäßiger; besonders die Stützstellen für die 'Wellen-Funktion' sind nahezu auf Kreissegmenten aufgereiht.

In Abbildung 9 sind die charakteristischen Parameter der Stützstellenverteilungen bezüglich der d_2 -Norm angegeben. Hier macht es Sinn, ihre Quotienten zu betrachten, da sie ein Maß für die Homogenität der Stützstellenverteilung sind. Sie betragen für die 'Wellen-Funktion' $d_{2,\max}(X)/d_{2,\min}(X) = 2\sqrt{2}/(1/16) \approx 45.3$ und für die 'Mexican-Hat-Funktion' $2\sqrt{2}/0.0287 \approx 98.6$. Die Transformation T bewirkt eine deutliche Homogenisierung, in Zahlen: $d_{T,\max}(X)/d_{T,\min}(X) \approx 1.88/0.103 \approx 18.3$ bzw. $1.172/0.0240 \approx 48.8$. Diese Quotienten wurden also um die Faktoren 2.48 bzw. 2.02 verbessert.



Gauß-Interpolante zur 'Wellen-Funktion'

$$\begin{aligned} \text{Parameter } \alpha &= 1/16 \cdot 1/d_{2, \min}(X)^2, \\ \bar{\lambda}(A_\Phi) &\approx 8.75, \quad \underline{\lambda}(A_\Phi) \approx 7.51 \cdot 10^{-5}, \\ \text{cond}_{2,2}(A_\Phi) &\approx 1.16 \cdot 10^5 \end{aligned}$$



Gauß-Interpolante zur 'Mexican-Hat-Funktion'

$$\begin{aligned} \text{Parameter } \alpha &= 1/16 \cdot 1/d_{2, \min}(X)^2, \\ \bar{\lambda}(A_\Phi) &\approx 9.32, \quad \underline{\lambda}(A_\Phi) \approx 2.51 \cdot 10^{-5}, \\ \text{cond}_{2,2}(A_\Phi) &\approx 3.71 \cdot 10^5 \end{aligned}$$

Abbildung 19: Gauß-Interpolanten mit vorgeschalteter Typ-(B)-Transformation

Bemerkungen zu Abbildung 19:

Beim Vergleich mit Abbildung 13 fällt sofort ins Auge, daß nun die Gauß-Interpolante für die 'Wellen-Funktion' die Qualität einer wesentlich glatteren Interpolante, z. B. der thin-plate-spline-Interpolante, erreicht. Die Kondition der Matrix hat sich nur etwa verdoppelt.

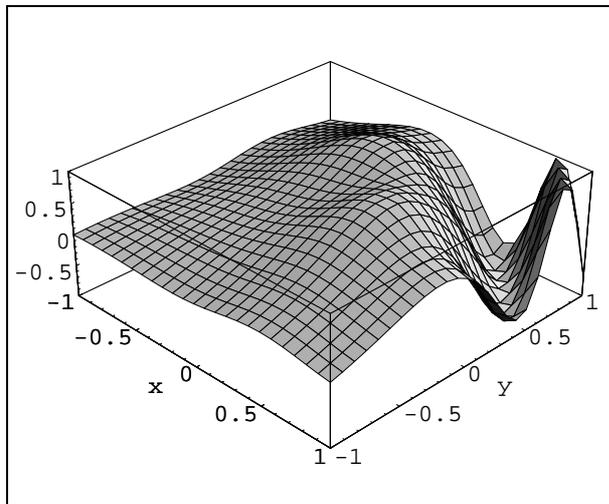
Auch die Interpolante zur 'Mexican-Hat-Funktion' wurde leicht verbessert, die Kondition sogar fast gedrittelt. Nochmals ist zu betonen, daß der Rechenaufwand nur um einen konstanten Faktor gewachsen ist, diese Verbesserungen also in den meisten Anwendungsfällen einsetzbar sind.

Bemerkungen zu Abbildung 20:

Diese Graphik muß mit Abbildung 14 verglichen werden. Die konventionelle Inverse-Multi-quadratic-Interpolante dort war schon sehr gut, trotzdem ist noch eine leichte Glättung zu erkennen. Die Kondition der Interpolationsmatrix bleibt in der selben Größenordnung wie im konventionellen Fall.

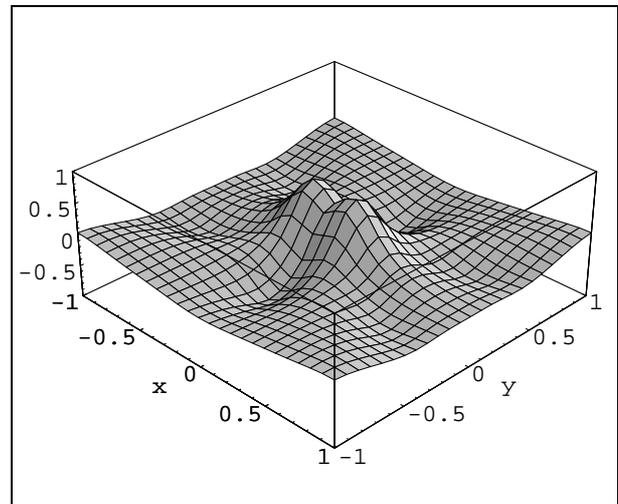
Bemerkungen zu Abbildung 21:

Hier ist die Verbesserung im Vergleich mit Abbildung 15 wieder deutlicher. Die Interpolante zur 'Wellen-Funktion' zeigt wesentlich weniger 'Hütchen-Charakteristik'. Wiederum bleibt die Kondition der Interpolationsmatrix in der selben Größenordnung.



inverse-multiquadric-Interpolante zur
'Wellen-Funktion'

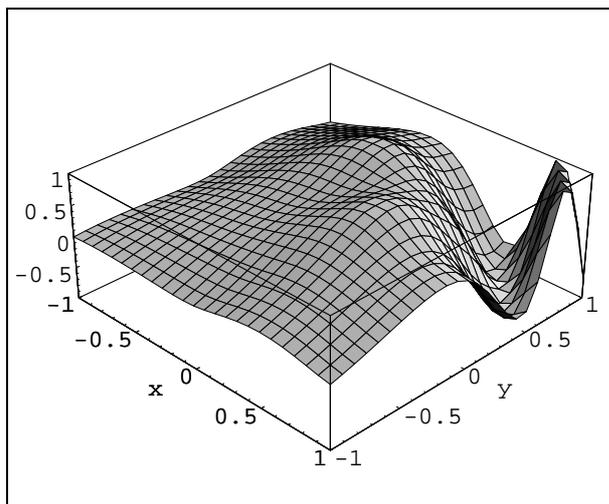
Parameter $c = 4 d_{2, \min}(X)$, $\bar{\lambda}(A_\Phi) \approx 38.1$,
 $\underline{\lambda}(A_\Phi) \approx 1.21 \cdot 10^{-3}$, $\text{cond}_{2,2}(A_\Phi) \approx 3.15 \cdot 10^4$



inverse-multiquadric-Interpolante zur
'Mexican-Hat-Funktion'

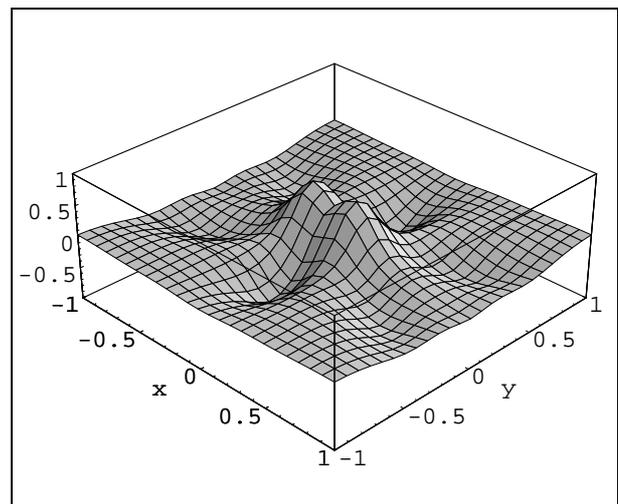
Parameter $c = 4 d_{2, \min}(X)$, $\bar{\lambda}(A_\Phi) \approx 206$,
 $\underline{\lambda}(A_\Phi) \approx 8.92 \cdot 10^{-3}$, $\text{cond}_{2,2}(A_\Phi) \approx 2.30 \cdot 10^4$

Abbildung 20: inverse-multiquadric-Interpolanten mit vorgeschalteter Typ-(B)-Transformation



Wendland- $\phi_{3,1}$ -Interpolante zur
'Wellen-Funktion'

Parameter $c = 12 d_{2, \min}(X)$, $\bar{\lambda}(A_\Phi) \approx 9.64$,
 $\underline{\lambda}(A_\Phi) \approx 4.64 \cdot 10^{-3}$, $\text{cond}_{2,2}(A_\Phi) \approx 2.08 \cdot 10^3$



Wendland- $\phi_{3,1}$ -Interpolante zur
'Mexican-Hat-Funktion'

Parameter $c = 12 d_{2, \min}(X)$, $\bar{\lambda}(A_\Phi) \approx 10.6$,
 $\underline{\lambda}(A_\Phi) \approx 7.50 \cdot 10^{-3}$, $\text{cond}_{2,2}(A_\Phi) \approx 1.14 \cdot 10^3$

Abbildung 21: Wendland- $\phi_{3,1}$ -Interpolanten mit vorgeschalteter Typ-(B)-Transformation

Ansätze vom Typ 6.2.2-(A):

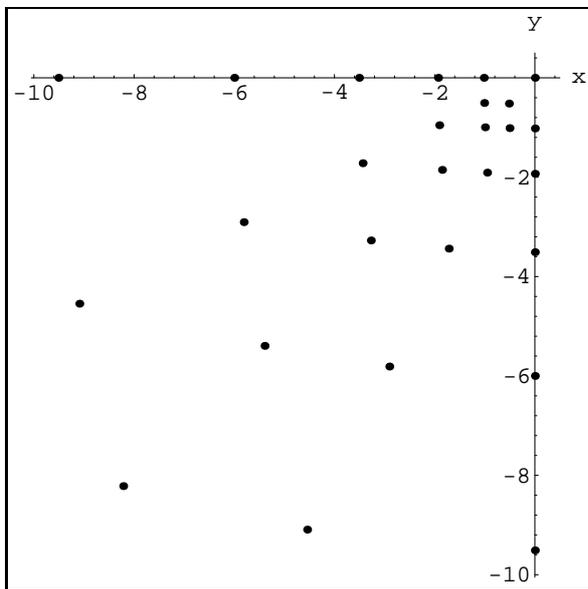
Nun betrachten wir als Ansatz für die Transformation

$$T_0(x) := \frac{x}{\|x\|_2} 6 \operatorname{ld}(1 + \|x\|_2) \quad \text{für die 'Wellen-Funktion' und}$$

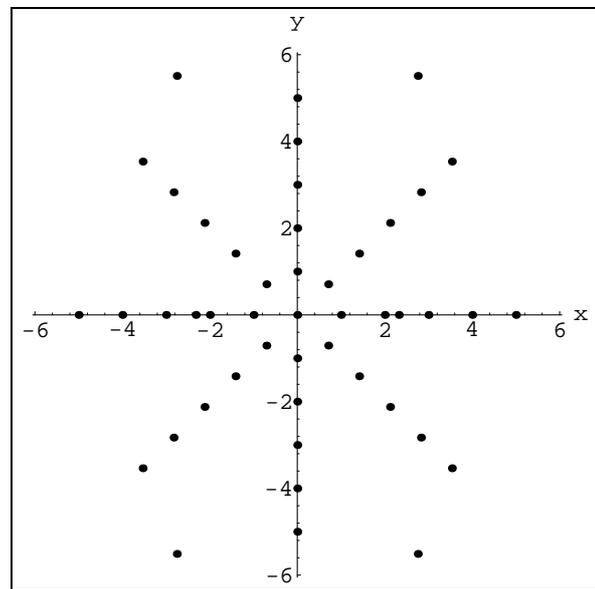
$$T_0(x) := \frac{(x_1, 2x_2)^{\operatorname{tr}}}{\sqrt{x_1^2 + (2x_2)^2}} \left(5 + \operatorname{ld} \sqrt{x_1^2 + (2x_2)^2} \right) \quad \text{für den 'Mexican-Hat' .}$$

Dabei seien $\frac{x}{\|x\|_2}$ und ähnliche Ausdrücke für $x = 0$ zu Null gesetzt, und der Logarithmus werde dann nicht ausgewertet. Da diese T_0 unbeschränkt sind, ist der Ansatz vom Typ 6.2.2-(A). Er berücksichtigt die 'ungefähre Radialität' der Stützstellenverteilungen, indem z. B. die zweite Transformation nur von $(x_1, 2x_2)^{\operatorname{tr}}$ abhängt. Vor allem aber wird die exponentielle Anhäufung der Stützstellen — der Abstand des wiederholten Verteilungsmusters zum Häufungspunkt wird von Level zu Level halbiert — durch den Logarithmus-Term stark ausgeglichen, wie die detaillierte Aufstellung unten zeigt.

Da der Streckfaktor des normierten Richtungsvektors sein Vorzeichen nicht wechseln darf,¹²⁶ muß dem Logarithmus-Term eine Konstante beigelegt werden. Bei der 'Wellen-Funktion' ist dies die '1' als Nullstelle von ld im Argument, bei der 'Mexican-Hat-Funktion' ist dies die außen addierte '5', die den extremsten negativen Wert des Logarithmus ausgleichen muß. Allgemein hat diese Konstante also die Form $\max(0, -\operatorname{ld} d_{\min}(X))$ mit der jeweils benutzten Metrik d .



Entzerrte Stützstellenmenge $T_{hp}(X)$ zur
'Wellen-Funktion'



Entzerrte Stützstellenmenge $T_{hp}(X)$ zur
'Mexican-Hat-Funktion'

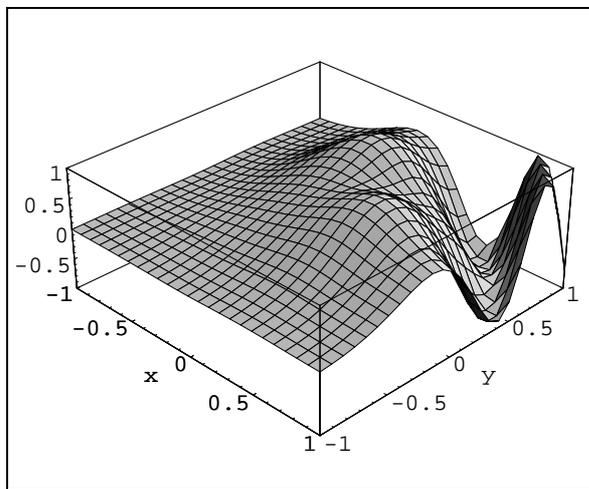
Abbildung 22: Entzerrte Stützstellenmengen bei vorgeschalteter Typ-(A)-Transformation

¹²⁶Die Transformation T_0 würde dann die Stützstellen nicht mehr bijektiv abbilden, wodurch Gleichung (6.2.1-1) verletzt würde.

Bemerkungen zu Abbildung 22:

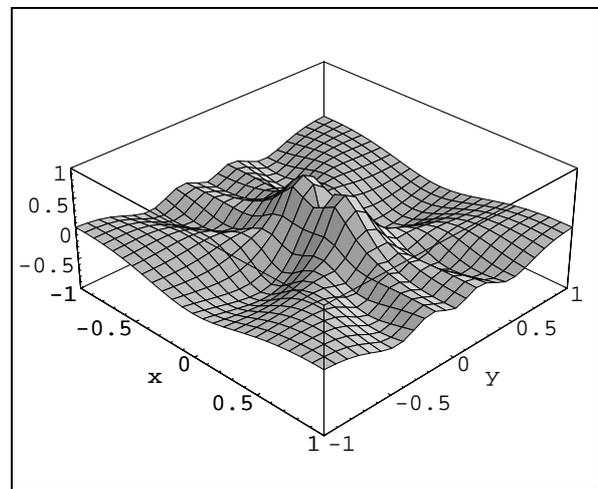
Wiederum müssen die entzerrten Stützstellenmengen mit Abbildung 9 verglichen werden. Dabei ist bei der ‘Mexican-Hat-Funktion’ eine noch deutlichere Verbesserung als beim vorigen Ansatz in Abbildung 18 erkennbar.

- Für die ‘Wellen-Funktion’ wird so aus $\{2^n \cdot d_{2,\min}(X)\}_{n=0,\dots,5} = \{0.0625, 0.125, 0.25, 0.5, 1.0, 2.0\}$ die Folge $\{6 \operatorname{ld}(1 + 2^n \cdot d_{2,\min}(X))\}_{n=0,\dots,5} = \{0.525, 1.02, 1.93, 3.51, 6.0, 9.51\}$. Für einen Vergleich besser geeignet ist die Folge der Quotienten der aufeinander folgenden Werte: aus $\{2.0, 2.0, 2.0, 2.0, 2.0\}$ wird $\{1.94, 1.89, 1.82, 1.71, 1.58\}$. Daran sieht man, daß vor allem große Abstände reduziert werden. Die charakteristischen Parameter der Stützstellenverteilungen bezüglich der d_T -Norm betragen nun $d_{T,\max}(X)/d_{T,\min}(X) \approx 13.4/0.490 \approx 27.4$ statt 45.3. Dies ist eine Verbesserung um den Faktor 1.65.
- Bei der ‘Mexican-Hat-Funktion’ sollte man zunächst den elliptischen ‘Charakter’ der Stützstellenmenge durch die Metrik $d_E(x, y) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + 2^2(x_2 - y_2)^2}$ beheben. Man erhält so $d_{E,\min}(X) = 1/32$. Mit $g_n := 5 + \operatorname{ld}(2^n \cdot d_{E,\min}(X))$ beträgt die entsprechende Folge dann: $\{g_{n+1}/g_n\}_{n=1,\dots,4} = \{2.0, 1.5, 1.33, 1.25\}$. Die charakteristischen Parameter der Stützstellenverteilungen bezüglich der d_T -Norm betragen $d_{T,\max}(X)/d_{T,\min}(X) \approx 12.3/0.322 \approx 38.3$ statt 98.6. Hier wurde also sogar eine Reduktion um den Faktor 2.57 erreicht. Die Stützstellen liegen nun völlig rotations-symmetrisch verteilt.



Gauß-Interpolante zur ‘Wellen-Funktion’

$$\begin{aligned} \text{Parameter } \alpha &= 1/16 \cdot 1/d_{2,\min}(X)^2, \\ \bar{\lambda}(A_\Phi) &\approx 8.26, \quad \underline{\lambda}(A_\Phi) \approx 1.13 \cdot 10^{-4}, \\ \operatorname{cond}_{2,2}(A_\Phi) &\approx 7.32 \cdot 10^4 \end{aligned}$$



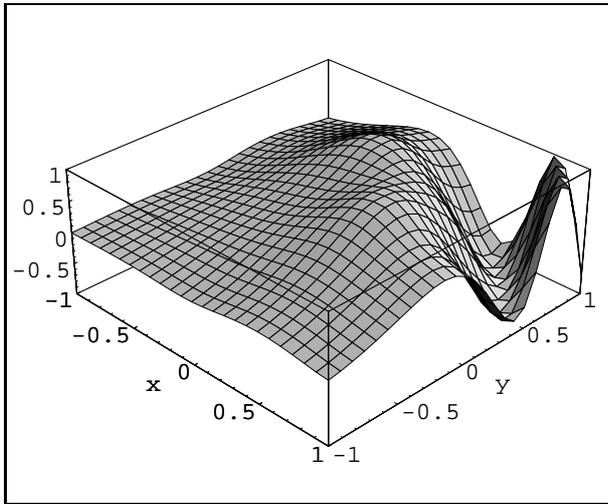
Gauß-Interpolante zur ‘Mexican-Hat-Funktion’

$$\begin{aligned} \text{Parameter } \alpha &= 1/16 \cdot 1/d_{2,\min}(X)^2, \\ \bar{\lambda}(A_\Phi) &\approx 4.75, \quad \underline{\lambda}(A_\Phi) \approx 3.03 \cdot 10^{-3}, \\ \operatorname{cond}_{2,2}(A_\Phi) &\approx 1.57 \cdot 10^3 \end{aligned}$$

Abbildung 23: Gauß-Interpolanten mit vorgeschalteter Typ-(A)-Transformation

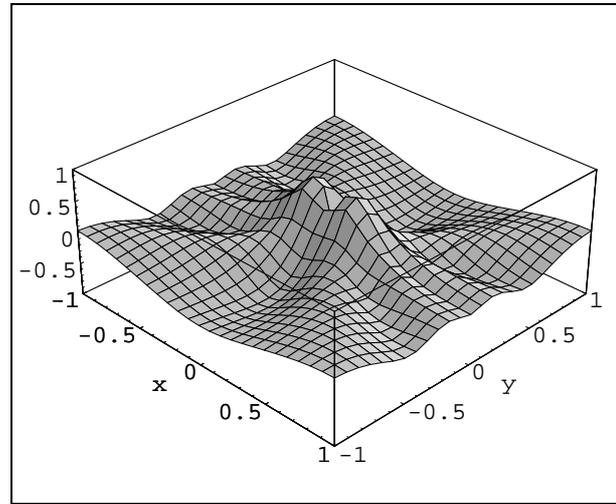
Bemerkungen zu den Abbildungen 23, 24 und 25:

Im Vergleich mit den Abbildungen 13, 14 und 15 zeigt sich, daß die Hütcheneffekte deutlich verringert wurden. Die Interpolanten zur ‘Wellen-Funktion’ erreichen fast die Glätte der multiquadric-Interpolante aus Abbildung 12, die zur ‘Mexican-Hat-Funktion’ haben nun



inverse-multiquadric-Interpolante zur
'Wellen-Funktion'

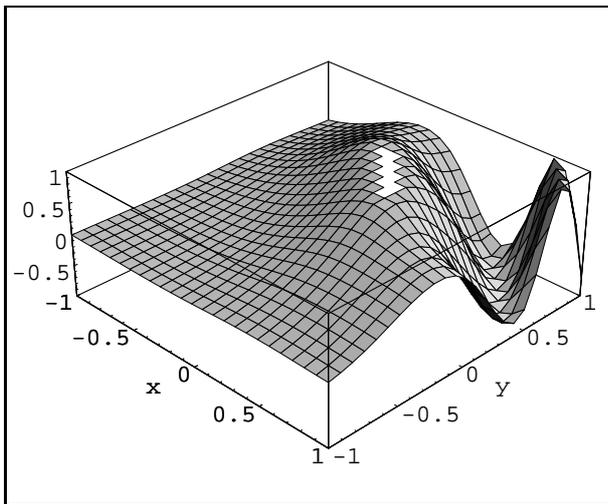
Parameter $c = 4 d_{2, \min}(X)$, $\bar{\lambda}(A_\Phi) \approx 7.07$,
 $\underline{\lambda}(A_\Phi) \approx 2.67 \cdot 10^{-4}$, $\text{cond}_{2,2}(A_\Phi) \approx 2.65 \cdot 10^4$



inverse-multiquadric-Interpolante zur
'Mexican-Hat-Funktion'

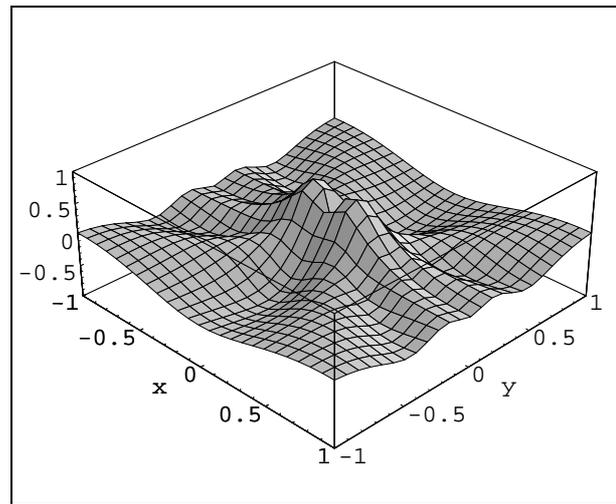
Parameter $c = 4 d_{2, \min}(X)$, $\bar{\lambda}(A_\Phi) \approx 13.2$,
 $\underline{\lambda}(A_\Phi) \approx 5.46 \cdot 10^{-3}$, $\text{cond}_{2,2}(A_\Phi) \approx 2.41 \cdot 10^3$

Abbildung 24: inverse-multiquadric-Interpolanten mit vorgeschalteter Typ-(A)-Transformation



Wendland- $\phi_{3,1}$ -Interpolante zur
'Wellen-Funktion'

Parameter $c = 12 d_{2, \min}(X)$, $\bar{\lambda}(A_\Phi) \approx 8.99$,
 $\underline{\lambda}(A_\Phi) \approx 4.60 \cdot 10^{-3}$, $\text{cond}_{2,2}(A_\Phi) \approx 1.95 \cdot 10^3$



Wendland- $\phi_{3,1}$ -Interpolante zur
'Mexican-Hat-Funktion'

Parameter $c = 12 d_{2, \min}(X)$, $\bar{\lambda}(A_\Phi) \approx 5.72$,
 $\underline{\lambda}(A_\Phi) \approx 1.75 \cdot 10^{-2}$, $\text{cond}_{2,2}(A_\Phi) \approx 326$

Abbildung 25: Wendland- $\phi_{3,1}$ -Interpolanten mit vorgeschalteter Typ-(A)-Transformation

nicht mehr einen Kranz von acht ‘Löchern’ an den äußeren Stützstellen. Leider stellt sich aber nicht die erwünschte elliptische Senke der Originalfunktion aus Abbildung 8 ein, sondern es entstehen radial nach außen strebende Senken.

Die Konditionen der Interpolationsmatrizen wachsen bei der ‘Wellen-Funktion’ unwesentlich, bei der ‘Mexican-Hat-Funktion’ sinken sie gar auf $1/5$ bis $1/20$ der Vergleichswerte.

Die weiße Stelle des linken Graphen in Abbildung 25 ist darauf zurückzuführen, daß das Intervall $[-1, 1]$ etwas nach oben verlassen wurde, und die ‘Mathematica’-Option `ClipFill -> None` in diesem Fall die entsprechenden Gitterpunkte abschneidet.

6.3 Der Metrik nachgeschaltete Funktionen

6.3.1 Idee: Verringerung zu großer Abstände durch Abschwächung der Metrik

Nun soll betrachtet werden, was passiert, wenn man der Metrik eine Entzerrungsfunktion t nachschaltet. Dieser Ansatz erhält unter Umständen die Metrikeigenschaft, wie folgender Satz belegt:¹²⁷

Satz 6.3.1-1

Für eine Funktion $t \in C^2(\mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0})$ und eine Metrik d auf \mathbb{R}^d gilt:

$$t(0) = 0 \wedge t'(0) > 0 \wedge t''(0) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad d_t := t \circ d \text{ ist auch eine Metrik.}$$

Schon in [SchoenComMon] wurde die Menge der hier zulässigen Funktionen $t(r)$ untersucht. Eine etwas genauere Betrachtung dieses Ansatzes führt zur Einsicht, daß für solche Modifikationen gilt:

$$\Phi = \phi \circ d \in \text{MBF}^d \quad \Rightarrow \quad \Phi_t = \phi \circ t \circ d = \phi \circ d_t \in \text{MBF}^d .$$

Es handelt sich also um die schon bekannten metrischen Basisfunktionen und so bleibt nur, einige experimentelle Ergebnisse darzustellen.

6.3.2 Implementation

Es sind wiederum zwei Ansätze zu unterscheiden:

- *Ansatz 6.3.2-(A)*: Unbeschränkte Funktionen $t : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$.
- *Ansatz 6.3.2-(B)*: Beschränkte Funktionen $t : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow [0, 1]$.

Hier ist, ähnlich zum Kapitel 6.2.2, die Beschränkung auf das Einheitsintervall als Bildmenge von t für parametrisierte Basisfunktionen möglich. Es ergeben sich dieselben Vor- und Nachteile.

¹²⁷Entnommen aus [Großmann], S. 26f.

6.3.3 Experimentelle Ergebnisse

Man kann sich sehr viele Funktionen überlegen, die die Bedingungen des Satzes 6.3.1-1 erfüllen. Die meisten von ihnen liefern jedoch keine guten Ergebnisse. Aus empirischer Erfahrung kann man nur grob dazu raten, Funktionen zu benutzen, die nahe Null mindestens wie der Abstand wachsen (eher deutlich stärker), und bald danach nur noch so schwach ansteigen, daß sie einen Fixpunkt bekommen.

Da dieser Ansatz nicht einer Transformation der Stützstellenmenge X entspricht, lassen sich die Effekte der nachgeschalteten Funktionen nicht so anschaulich darstellen, wie dies für die vorgeschalteten Transformationen mit den Abbildungen 18 und 22 möglich war. Daher werden in Abbildung 26 nur die Graphen der beiden Entzerrungsfunktionen über dem Intervall $[0, 1.5]$ gezeigt.

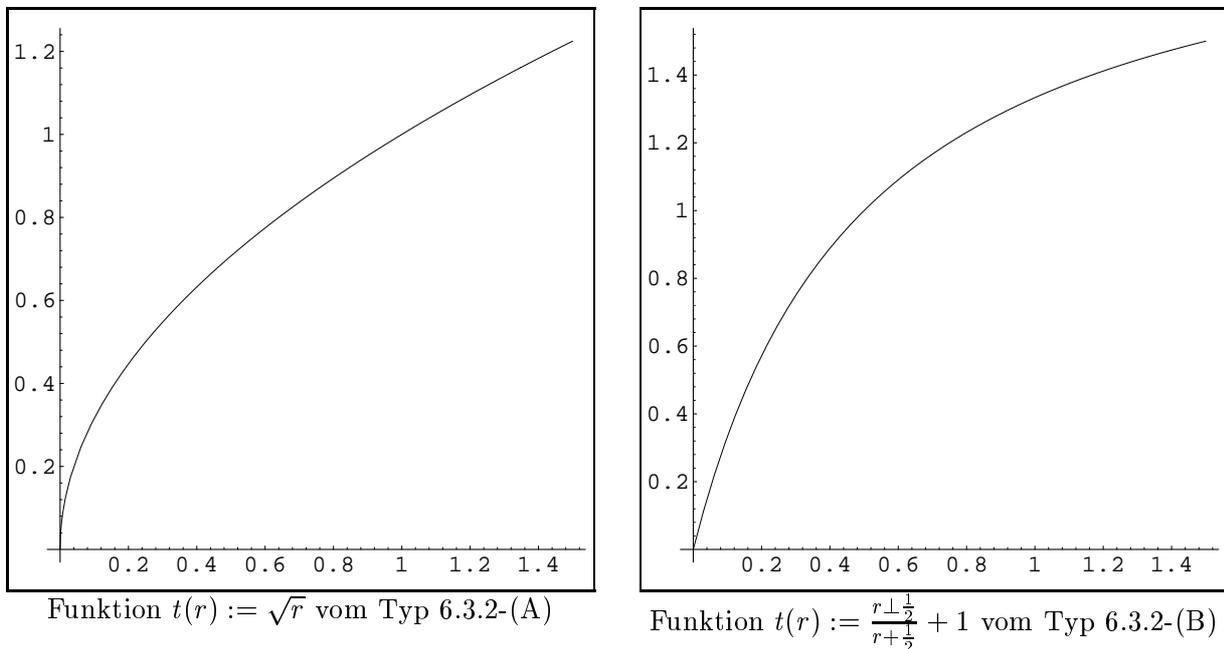


Abbildung 26: Graphen der gewählten Entzerrungsfunktionen

Ansatz vom Typ 6.3.2-(A):

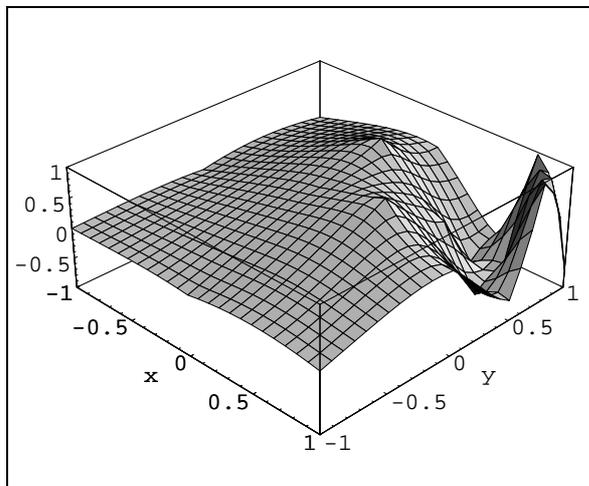
Als Beispiel für eine unbeschränkte Entzerrungsfunktion, also einen Ansatz vom Typ 6.3.2-(A), wird nun die Wurzel-Funktion

$$t(r) := \sqrt{r}$$

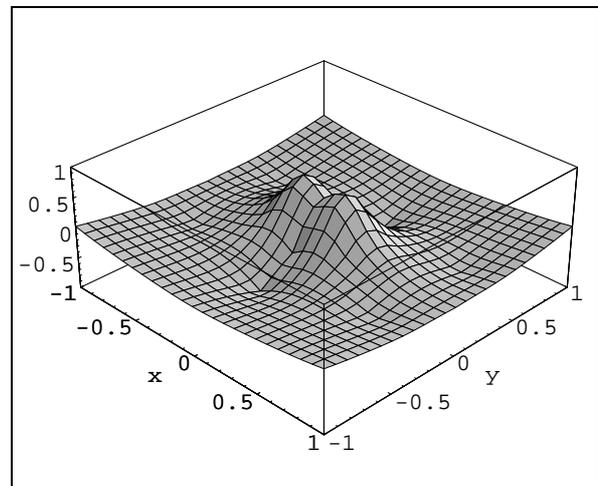
betrachtet.

Bemerkungen zu den Abbildungen 27, 28 und 29:

Im Vergleich mit den Abbildungen 13, 14 und 15 zeigt sich, daß die Hütcheneffekte deutlich verringert wurden. Außerdem wurde die Kondition bei den Gauß-Interpolanten um drei bis vier, bei den inverse-multiquadric-Interpolanten um eine Größenordnung und bei den Wendland- $\phi_{3,1}$ -Interpolanten immer noch um den Faktor drei bis vier verringert.

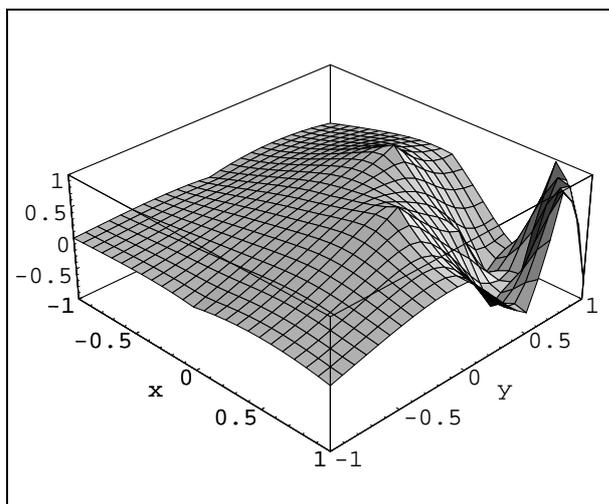


Gauß-Interpolante zur 'Wellen-Funktion'
 Parameter $\alpha = 1/16 \cdot 1/d_{2,\min}(X)^2$,
 $\bar{\lambda}(A_\Phi) \approx 14.3$, $\underline{\lambda}(A_\Phi) \approx 3.36 \cdot 10^{-12}$,
 $\text{cond}_{2,2}(A_\Phi) \approx 427$

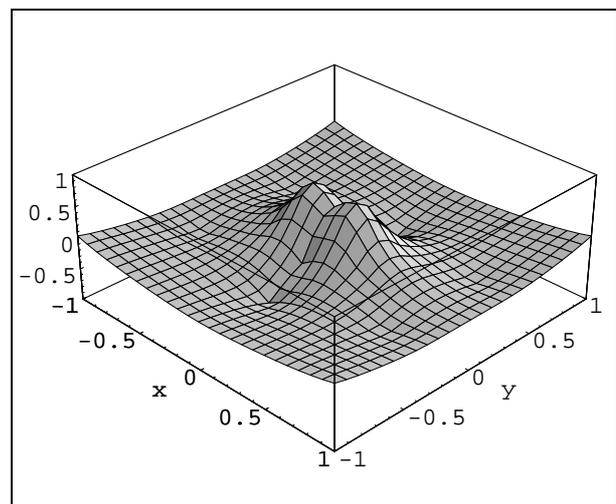


Gauß-Interpolante zur 'Mexican-Hat-Funktion'
 Parameter $\alpha = 1/16 \cdot 1/d_{2,\min}(X)^2$,
 $\bar{\lambda}(A_\Phi) \approx 22.6$, $\underline{\lambda}(A_\Phi) \approx 3.69 \cdot 10^{-12}$,
 $\text{cond}_{2,2}(A_\Phi) \approx 611$

Abbildung 27: Gauß-Interpolanten mit nachgeschalteter Typ-(A)-Funktion

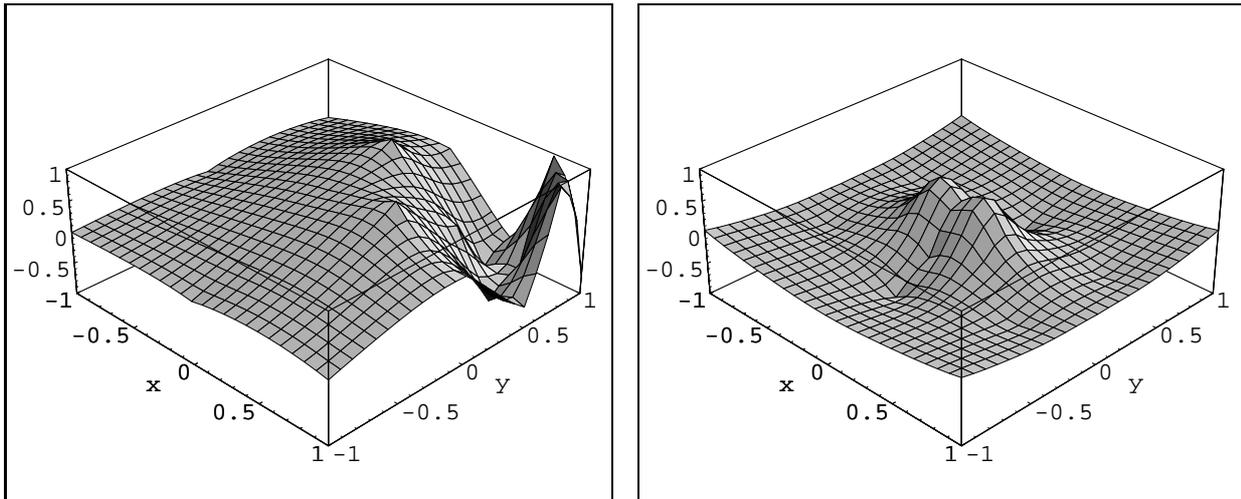


inverse-multiquadric-Interpolante zur
 'Wellen-Funktion'
 Parameter $c = 4 d_{2,\min}(X)$, $\bar{\lambda}(A_\Phi) \approx 20.4$,
 $\underline{\lambda}(A_\Phi) \approx 1.68 \cdot 10^{-12}$, $\text{cond}_{2,2}(A_\Phi) \approx 1.22 \cdot 10^3$



inverse-multiquadric-Interpolante zur
 'Mexican-Hat-Funktion'
 Parameter $c = 4 d_{2,\min}(X)$, $\bar{\lambda}(A_\Phi) \approx 49.9$,
 $\underline{\lambda}(A_\Phi) \approx 2.72 \cdot 10^{-12}$, $\text{cond}_{2,2}(A_\Phi) \approx 1.84 \cdot 10^3$

Abbildung 28: inverse-multiquadric-Interpolanten mit nachgeschalteter Typ-(A)-Funktion



Wendland- $\phi_{3,1}$ -Interpolante zur
'Wellen-Funktion'

Parameter $c = 12 d_{2,\min}(X)$, $\bar{\lambda}(A_\Phi) \approx 15.6$,
 $\underline{\lambda}(A_\Phi) \approx 3.42 \cdot 10^{-12}$, $\text{cond}_{2,2}(A_\Phi) \approx 456$

Wendland- $\phi_{3,1}$ -Interpolante zur
'Mexican-Hat-Funktion'

Parameter $c = 12 d_{2,\min}(X)$, $\bar{\lambda}(A_\Phi) \approx 24.8$,
 $\underline{\lambda}(A_\Phi) \approx 3.75 \cdot 10^{-12}$, $\text{cond}_{2,2}(A_\Phi) \approx 662$

Abbildung 29: Wendland- $\phi_{3,1}$ -Interpolanten mit nachgeschalteter Typ-(A)-Funktion

Ansatz vom Typ 6.3.2-(B):

Als beschränkte Entzerrungsfunktion für einen Ansatz vom Typ 6.3.2-(B) sei hier nur

$$t(r) := \frac{r - \frac{1}{2}}{r + \frac{1}{2}} + 1$$

genannt. In [SchoenComMon], S. 811 schon wurde eine Entzerrung dieses Typs, nämlich $t(r) = r/(r + 1)$ erwähnt. Die hier verwendete Funktion ist eine um $\frac{1}{2}$ nach links und um 1 nach oben verschobene Version hiervon. Durch diese Verschiebung wird die Steigung des Graphen nahe bei Null vergrößert.

Bemerkungen zu den Abbildungen 30, 31 und 32:

Im Vergleich mit den Abbildungen 13, 14 und 15 zeigt sich, daß die Hütcheneffekte deutlich verringert wurden. Wiederum wurde die Kondition um ein bis zwei Größenordnungen verbessert. Die Wendland- $\phi_{3,1}$ -Interpolanten hatten schon vorher eine gute Kondition, so daß hier die Verbesserung am geringsten ausfällt.

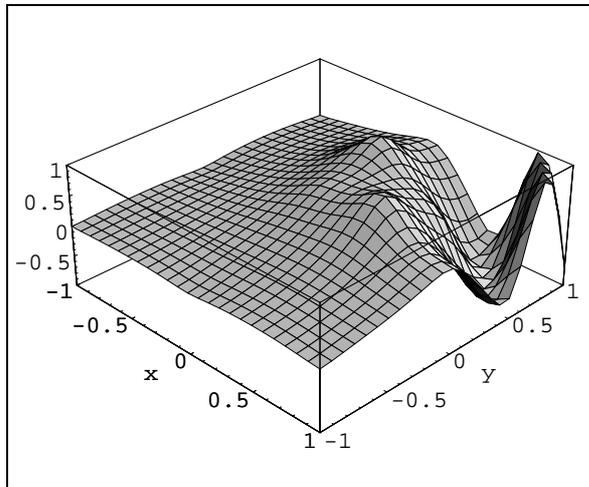
6.4 Dekumulieren durch Hinzufügung einer Dimension

6.4.1 Idee: Hinzufügen einer Dimension

In diesem Kapitel werden zu kleine Stützstellenabstände dadurch vergrößert, daß sie nicht mehr mit einer Metrik $d^{(d)}$ auf dem \mathbb{R}^d gemessen werden,¹²⁸ sondern auf einer d -dimensionalen Mannigfaltigkeit des \mathbb{R}^{1+d} mit der induzierten Metrik. Die Mannigfaltigkeit sei durch eine Karte

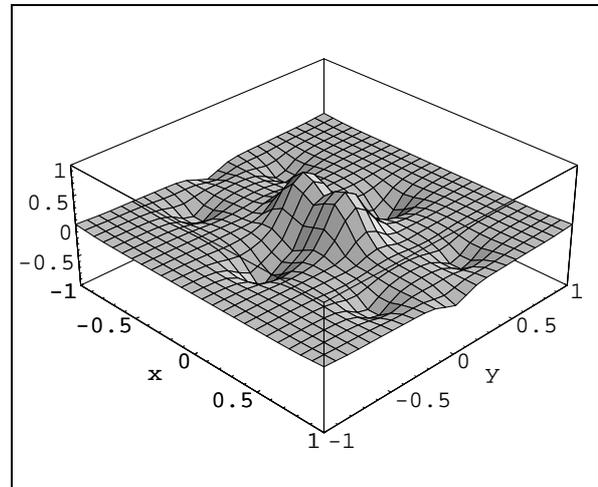
$$(6.4.1-1) \quad h : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{1+d}; \quad x \mapsto \begin{pmatrix} h_0(x) \\ x \end{pmatrix}$$

¹²⁸In diesem Kapitel erhalten die Metriken obere Indizes, um Verwechslungen vorzubeugen. So ist $d^{(d)}$ eine Metrik auf dem \mathbb{R}^d , und entsprechend sind $d^{(1+d)}$ und $d^{(1)}$ Metriken auf $\mathbb{R}^{(1+d)}$ und \mathbb{R}^1 .



Gauß-Interpolante zur 'Wellen-Funktion'

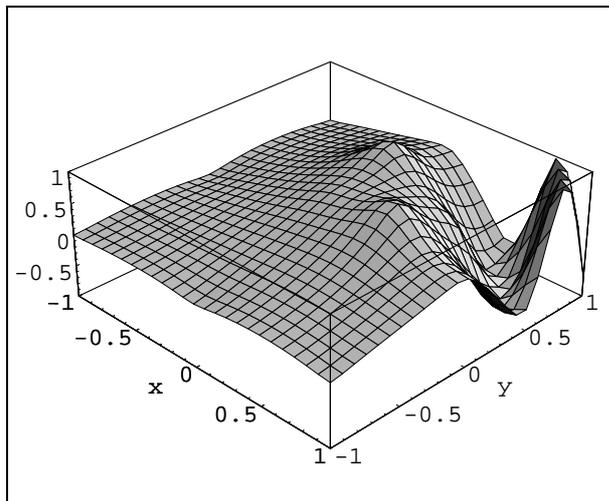
$$\begin{aligned} \text{Parameter } \alpha &= 1/16 \cdot 1/d_{2, \min}(X)^2, \\ \bar{\lambda}(A_\Phi) &\approx 10.1, \quad \underline{\lambda}(A_\Phi) \approx 8.28 \cdot 10^{-3}, \\ \text{cond}_{2,2}(A_\Phi) &\approx 1.22 \cdot 10^3 \end{aligned}$$



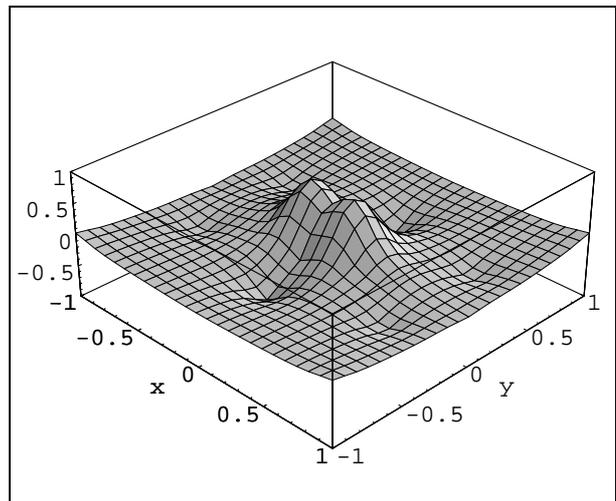
Gauß-Interpolante zur 'Mexican-Hat-Funktion'

$$\begin{aligned} \text{Parameter } \alpha &= 1/16 \cdot 1/d_{2, \min}(X)^2, \\ \bar{\lambda}(A_\Phi) &\approx 11.9, \quad \underline{\lambda}(A_\Phi) \approx 4.65 \cdot 10^{-3}, \\ \text{cond}_{2,2}(A_\Phi) &\approx 2.57 \cdot 10^3 \end{aligned}$$

Abbildung 30: Gauß-Interpolanten mit nachgeschalteter Typ-(B)-Funktion

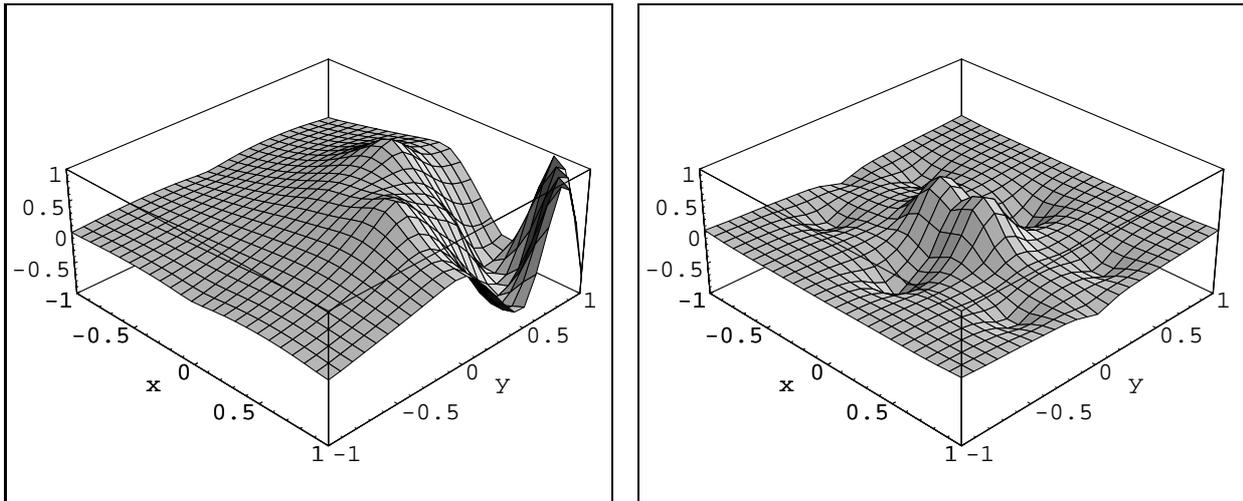
inverse-multiquadric-Interpolante zur
'Wellen-Funktion'

$$\begin{aligned} \text{Parameter } c &= 4 d_{2, \min}(X), \quad \bar{\lambda}(A_\Phi) \approx 19.8, \\ \underline{\lambda}(A_\Phi) &\approx 5.11 \cdot 10^{-3}, \quad \text{cond}_{2,2}(A_\Phi) \approx 3.87 \cdot 10^3 \end{aligned}$$

inverse-multiquadric-Interpolante zur
'Mexican-Hat-Funktion'

$$\begin{aligned} \text{Parameter } c &= 4 d_{2, \min}(X), \quad \bar{\lambda}(A_\Phi) \approx 55.2, \\ \underline{\lambda}(A_\Phi) &\approx 6.56 \cdot 10^{-3}, \quad \text{cond}_{2,2}(A_\Phi) \approx 8.42 \cdot 10^3 \end{aligned}$$

Abbildung 31: inverse-multiquadric-Interpolanten mit nachgeschalteter Typ-(B)-Funktion



Wendland- $\phi_{3,1}$ -Interpolante zur
'Wellen-Funktion'

Parameter $c = 12 d_{2, \min}(X)$, $\bar{\lambda}(A_\Phi) \approx 11.3$,
 $\underline{\lambda}(A_\Phi) \approx 1.17 \cdot 10^{12}$, $\text{cond}_{2,2}(A_\Phi) \approx 960$

Wendland- $\phi_{3,1}$ -Interpolante zur
'Mexican-Hat-Funktion'

Parameter $c = 12 d_{2, \min}(X)$, $\bar{\lambda}(A_\Phi) \approx 13.5$,
 $\underline{\lambda}(A_\Phi) \approx 9.51 \cdot 10^{13}$, $\text{cond}_{2,2}(A_\Phi) \approx 1.42 \cdot 10^3$

Abbildung 32: Wendland- $\phi_{3,1}$ -Interpolanten mit nachgeschalteter Typ-(B)-Funktion

parametrisiert. Dabei ist die reelle Funktion h_0 geeignet zu wählen.¹²⁹ Aus der Metrik $d^{(d)}$ konstruiert man die neue Metrik d_h auf eine naheliegende Weise.¹³⁰

$$(6.4.1-2) \quad d_h : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}; \quad (x, y) \mapsto d^{(1+d)}(h(x), h(y)) .$$

Für die 2-Metrik ergibt sich daher:

$$(6.4.1-3) \quad \begin{aligned} d_h(x, y)^2 &= d_2^{(1+d)} \left(\begin{pmatrix} h_0(x) \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_0(y) \\ y \end{pmatrix} \right)^2 \\ &= |h_0(x) - h_0(y)|^2 + \|x - y\|_2^2 . \end{aligned}$$

Genauso kann man natürlich auch das Maximum (der ∞ -Metrik entsprechend) oder die Summe (der 1-Metrik entsprechend) der beiden Einzelmetriken verwenden.

Sei nun die neue metrische Basisfunktion Φ_h definiert durch:

$$(6.4.1-4) \quad \begin{aligned} \Phi_h(x, y) &:= \phi \circ d_h(x, y) = \Phi^{(1+d)} \left(\begin{pmatrix} h_0(x) \\ x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} h_0(y) \\ y \end{pmatrix} \right) \\ &= \Phi^{(1+d)}(h(x), h(y)) . \end{aligned}$$

Dabei setzt man voraus, daß $\Phi^{(1+d)} = \phi \circ d^{(1+d)} \in \text{MBF}^{1+d}$ gilt. Weiterhin ist vorauszusetzen, daß $h(X)$ eine \mathbb{P}_m^{1+d} -unisolvante Stützstellenverteilung ist. Dies ist aber nur für unwahrscheinliche Wahlen von h_0 gefährdet, so z. B. für h_0 linear. Die Interpolante zu $f \in F_{\Phi_h}$ hat

¹²⁹Diese Mannigfaltigkeit ist also nichts anderes als der Graph der Funktion h_0 .

¹³⁰Die Metrikaxiome lassen sich für d_h einfach nachweisen, da sie einfach von $d^{(1+d)}$ geerbt werden.

dann die Form:

$$\begin{aligned}
s_{f,X,\Phi_h}(x) &= \sum_{j \in M} c_j \Phi_h(x, x_j) + p(x) \\
(6.4.1-5) \quad &= \sum_{j \in M} c_j \Phi^{(1+d)}(h(x), h(x_j)) + p(\text{Pr}_{1,d}(h(x))) \\
&= s_{f,h(X),\Phi^{(1+d)}}(h(x)) \\
&= s_{f^{(1+d)},h(X),\Phi^{(1+d)}}(h(x)).
\end{aligned}$$

Dabei ist $\text{Pr}_{i,j}(x) := (x_i, \dots, x_j)^{\text{tr}}$ die Projektion des Vektors x auf die Koordinaten i, \dots, j und $h(X)$ das Bild der Stützstellenmenge X unter h . Die letzte Gleichung bezieht sich auf die Interpolante $s^{(1+d)}$ über \mathbb{R}^{1+d} zu einer Funktion¹³¹ $f^{(1+d)} : \mathbb{R}^{1+d} \rightarrow \mathbb{C}$, die auf $h(\mathbb{R}^d)$ der Gleichung $f^{(1+d)}(z) = f(\text{Pr}_{1,d}(z))$ genügt.

Alle *dimensionsunabhängig* formulierten Aussagen übertragen sich so wie gehabt, z. B. folgt für die quadratische Form $c^{\text{tr}} A_{\Phi_h} \bar{c}$ analog zu Gleichung (3.2.1-1), falls $\Phi^{(1+d)} \in \text{TBF}^{1+d}$:

$$\begin{aligned}
\Phi^{(1+d)} \left(\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}, 0 \right) &= \overset{(1+d)}{\text{FT}} \perp 1 \left(\varphi \begin{pmatrix} \eta \\ \omega \end{pmatrix} \right) \left(\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}, 0 \right) \\
&= (2\pi)^{\perp 1+d} \int \varphi \begin{pmatrix} \eta \\ \omega \end{pmatrix} e^{i(\eta y + \omega^{\text{tr}} x)} d(\eta, \omega) \\
\Rightarrow c^{\text{tr}} A_{\Phi_h} \bar{c} &= \sum_{i,j \in M} c_i \bar{c}_j \Phi_h(x_i, x_j) \\
&\quad \text{mit } \Phi^{(1+d)} \in \text{TBF}^{1+d} \\
&= \sum_{i,j \in M} c_i \bar{c}_j \Phi^{(1+d)} \left(\begin{pmatrix} h(x_i) \\ x_i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} h(x_j) \\ x_j \end{pmatrix}, 0 \right) \\
&= \sum_{i,j \in M} c_i \bar{c}_j (2\pi)^{\perp 1+d} \int \varphi \begin{pmatrix} \eta \\ \omega \end{pmatrix} e^{i(\eta(h(x_i) - h(x_j)) + \omega^{\text{tr}}(x_i - x_j))} d(\eta, \omega) \\
&= (2\pi)^{\perp 1+d} \int \varphi \begin{pmatrix} \eta \\ \omega \end{pmatrix} \sum_{i \in M} c_i e^{i(\eta h(x_i) + \omega^{\text{tr}} x_i)} \\
&\quad \cdot \sum_{j \in M} \bar{c}_j e^{\perp i(\eta h(x_j) + \omega^{\text{tr}} x_j)} d(\eta, \omega) \\
&= (2\pi)^{\perp 1+d} \int \varphi \begin{pmatrix} \eta \\ \omega \end{pmatrix} \text{Sym}_{h(X),c} \begin{pmatrix} \eta \\ \omega \end{pmatrix} \overline{\text{Sym}_{h(X),c} \begin{pmatrix} \eta \\ \omega \end{pmatrix}} d(\eta, \omega) \\
&= (2\pi)^{\perp 1+d} \int \varphi \begin{pmatrix} \eta \\ \omega \end{pmatrix} \left| \text{Sym}_{h(X),c} \begin{pmatrix} \eta \\ \omega \end{pmatrix} \right|^2 d(\eta, \omega).
\end{aligned}$$

Die Fehlerabschätzungen der Form $\kappa_{X,\Phi}(x) \leq F(h_{\rho,X,d}(x))$ wie in Gleichung (3.3.2-1) sind für beliebige Stützstellenverteilungen X und *unabhängig* von der Dimension d bewiesen worden. Da die soeben geschilderte Methode das Problem auf den ‘klassischen’ Fall im \mathbb{R}^{1+d} zurückführt, lassen sie sich wie folgt übertragen:

¹³¹Es reicht auch aus, wenn $f^{(1+d)}$ nur auf $h(\mathbb{R}^d) \subset \mathbb{R}^{1+d}$ definiert ist.

Gleichung (6.4.1-3) lautet: $d_h(x, y)^2 = |h_0(x) - h_0(y)|^2 + \|x - y\|_2^2$. Mit $\text{Pr}_{i,j}$ wie oben folgt für jedes $x \in \mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned}
& \left\{ y \in \mathbb{R}^d : d_h(x, y) < \rho \right\} \\
&= \text{Pr}_{1,d} \left\{ z = \begin{pmatrix} h_0(y) \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1+d} : |h_0(x) - h_0(y)|^2 + \|x - y\|_2^2 < \rho^2 \right\} \\
&\subseteq \text{Pr}_{1,d} \left\{ z = \begin{pmatrix} z_0 \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{1+d} : |h_0(x) - z_0|^2 + \|x - y\|_2^2 < \rho^2 \right\} \\
&= \text{Pr}_{1,d} \left\{ z \in \mathbb{R}^{1+d} : \|h(x) - z\|_2^2 < \rho^2 \right\} && \text{laut (6.4.1-2)} \\
&= \text{Pr}_{1,d} \left\{ z \in \mathbb{R}^{1+d} : d^{(1+d)}(h(x), z) < \rho \right\} .
\end{aligned}$$

Nach Definition gilt für eine beliebige Metrik d : $h_{\rho, X, d}(x) = \max_{y: d(y, x) < \rho} \min_{j \in M} d(y, x_j)$. Zusammen folgt:

$$\begin{aligned}
h_{\rho, X, d_h}(x) &= \max_{y: d_h(y, x) < \rho} \min_{j \in M} d_h(y, x_j) \\
&\leq \max_{z \in \mathbb{R}^{1+d}: d^{(1+d)}(z, h(x)) < \rho} \min_{j \in M} d^{(1+d)}(z, h(x_j)) \\
&\leq h_{\rho, h(X), d^{(1+d)}}(h(x)) \\
\Rightarrow F(h_{\rho, X, d_h}(x)) &\leq F(h_{\rho, h(X), d^{(1+d)}}(h(x))) && \text{laut (3.3.2-2)}.
\end{aligned}$$

Nun überträgt sich aus der klassischen Theorie die Gleichung (3.3.2-3) $|f(x) - s_{f, X, \Phi}(x)| \leq \|f\|_{F_\Phi} \cdot F(h_{\rho, X, d}(x))$ auf den \mathbb{R}^{1+d} :

$$\begin{aligned}
|f(x) - s_{f, X, \Phi_h}(x)| &\leq \|f\|_{F_{\Phi_h}} \cdot F(h_{\rho, X, d_h}(x)) \\
&\leq \|f\|_{F_{\Phi_h}} \cdot F(h_{\rho, h(X), d^{(1+d)}}(h(x))) .
\end{aligned}$$

Falls $\|f\|_{F_{\Phi_h}} = \|f\|_{F_{\Phi^{(1+d)}}}$ gilt, hat man durch die Wahl von h Einfluß auf den Interpolationsfehler: Verringert d_h die lokale Stützstellendichte, so verringert sich auch der Fehler. Solche h sind aber nur sehr schwer zu konstruieren.

Stört der Ausdruck $\|f\|_{F_{\Phi_h}}$, weil der Raum F_{Φ_h} unbekannt ist, so bleibt mit Gleichung (6.4.1-5) $s_{f, X, \Phi_h}(x) = s_{f^{(1+d)}, h(X), \Phi^{(1+d)}}(h(x))$ mit $f^{(1+d)}(z) = f \circ \text{Pr}_{1,d}(z)$ für $z \in h(\mathbb{R}^d)$ wegen $f = f \circ \text{Pr}_{1,d} \circ h = f^{(1+d)} \circ h$ die Abschätzung:

$$\begin{aligned}
|f(x) - s_{f, X, \Phi_h}(x)| &= \left| f^{(1+d)}(h(x)) - s_{f^{(1+d)}, h(X), \Phi^{(1+d)}}(h(x)) \right| \\
&\quad \text{mit (3.3.2-3) auf } \mathbb{R}^{1+d} \\
&\leq \|f \circ \text{Pr}_{1,d}\|_{F_{\Phi^{(1+d)}}} \cdot F(h_{\rho, h(X), d^{(1+d)}}(h(x))) .
\end{aligned}$$

Da die Funktion $f \circ \text{Pr}_{1,d}(z)$ unabhängig von z_0 ist, sind jedoch Probleme bei der Berechnung des Integrals in $\|f \circ \text{Pr}_{1,d}\|_{F_{\Phi^{(1+d)}}}$ zu erwarten.

6.4.2 Implementation

In diesem Kapitel soll das angestrebte Ziel, den ‘gemessenen Abstand’ zweier Punkte mit Gleichung (6.4.1-3) zu vergrößern, genauer spezifiziert werden. Man kann sich auf Vergrößerung beschränken, da es ausreicht, die Abstände (auf erhöhtem Niveau) anzugleichen. Dazu wählt man eine Konstante $D_{\min} > 0$ aus,¹³² die den künftigen Mindestabstand zweier beliebiger Stützstellen minorisieren soll, d.h. es gilt $i \neq j \Rightarrow d_h(x_i, x_j) \geq D_{\min}$.

Dementsprechend ist nun die Funktion h_0 zu konstruieren. Dafür bestimmt man zunächst die Werte $(h_0(x_i))_{i \in M}$, z. B. mit den unten angegebenen Verfahren 6.4.2-(A) und 6.4.2-(B) für die 2-Metrik. Aus dem so gewonnenen Vektor $(h_0(x_i))_{i \in M}$ erzeugt man dann durch Interpolation die gesuchte Funktion $h_0(x)$. Dabei ist Wert auf einen möglichst glatten Verlauf zu legen, damit zwischen zwei benachbarten Stützstellen keine lokalen Minima der Metrik d_h auftreten. Entscheidet man sich z. B. mit radialen Basisfunktionen zu interpolieren, so sollte man die thin plate splines benutzen. Die Beispiele der Graphiken beruhen auf einer solchen Interpolante für h .

Verfahren 6.4.2-(A):

Man beginnt dort, wo die Stützstellen am dichtesten liegen, den Zielwert $h_0(x_i)$ aufzusummieren.

PROCEDURE CalculateAdditionalDistancesA

Input: $X, M, N, d := d^{(d)}, D_{\min}$: wie oben

Output: $y = (y_i)_{i \in M} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^N$

y wird dann $(h_0(x_i))_{i \in M}$

Local: $M' \subset M$, diverse Indizes

for $i \in M$ do $y_i := 0$ (6.4.2-1)

Suche $j_1, j_2 \in M, j_1 \neq j_2$ mit $d(x_{j_1}, x_{j_2}) = \text{Min!}$ (6.4.2-2)

if $d(x_{j_1}, x_{j_2}) \geq D_{\min}$ then exit procedure (6.4.2-3)

$y_{j_1} := 0$ Statt 0 ist jede reelle Zahl möglich, es kommt später nur auf die Differenzen an.

$y_{j_2} := \sqrt{D_{\min}^2 - d(x_{j_1}, x_{j_2})^2} + y_{j_1}$
 Zusicherung: $d^{(1+d)}((x_{j_1}, y_{j_1}), (x_{j_2}, y_{j_2}))^2 = d(x_{j_1}, x_{j_2})^2 + (y_{j_1} - y_{j_2})^2$
 $= d(x_{j_1}, x_{j_2})^2 + (D_{\min}^2 - d(x_{j_1}, x_{j_2})^2) = D_{\min}^2$ (6.4.2-4)

$M' := M \setminus \{j_1, j_2\}$

for $k := 3$ to N do (6.4.2-5)

Suche $i_k \in M \setminus M', j_k \in M'$ mit $d(x_{i_k}, x_{j_k}) + y_{i_k} = \text{Min!}$ (6.4.2-6)

y_{i_k} ist schon bekannt.

if $d(x_{i_k}, x_{j_k}) \geq D_{\min}$ then exit procedure (6.4.2-7)

$y_{j_k} := \sqrt{D_{\min}^2 - d(x_{i_k}, x_{j_k})^2} + y_{i_k}$
 Zusicherung: $d^{(1+d)}((x_{i_k}, y_{i_k}), (x_{j_k}, y_{j_k}))^2 = d(x_{i_k}, x_{j_k})^2 + (y_{i_k} - y_{j_k})^2$
 $= d(x_{i_k}, x_{j_k})^2 + (D_{\min}^2 - d(x_{i_k}, x_{j_k})^2) \geq D_{\min}^2$ (6.4.2-8)

$M' := M' \setminus \{j_k\}$

end of for

end of procedure

¹³² D_{\min} sollte etwa in der Größenordnung von 50–200% des maximalen Abstandes zweier ‘benachbarter’ Stützstellen liegen, gemessen mit der gegebenen Metrik $d^{(d)}$. Andere Möglichkeiten sind 10–50% von $d_{\max}(X)$ oder 50–200% von $d_{\max}(X)/\sqrt[d]{N}$, denn $\sqrt[d]{N}$ ist die Anzahl von Unterteilungen eines Koordinatenintervalls, falls X ein regelmäßiges, d -dimensionales Gitter bildet.

Satz 6.4.2-1

Die Prozedur ‘CalculateAdditionalDistancesA’ terminiert und erzeugt einen Vektor y , für den gilt:

$$\forall i \neq j \in M : \quad d^{(1+d)} \left(\begin{pmatrix} y_i \\ x_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_j \\ x_j \end{pmatrix} \right) \geq D_{\min} .$$

Beweis:

Die Prozedur terminiert, da die einzige Schleife (6.4.2-5) eine endliche for-Schleife ist. Für jedes $i \in M$ wird maximal einmal y_i berechnet, da M' jeweils entsprechend verkleinert wird, und die Schleife so oft ausgeführt wird, wie M' zu Beginn Elemente hat. Sollte die Prozedur in Zeile (6.4.2-3) oder (6.4.2-7) vorzeitig verlassen werden, so sind die in Zeile (6.4.2-1) erzeugten Nullen für die noch nicht behandelten i korrekt. Die Zusicherungen der Zeilen (6.4.2-4) und (6.4.2-8) garantieren, daß die ‘neue’ Stützstelle x_{j_k} bezüglich der neuen Metrik den Abstand D_{\min} zu x_{i_k} hat, wegen der Minimumssuche in den Zeilen (6.4.2-2) und (6.4.2-6) ist der Abstand zu allen anderen ‘bekannten’ Stützstellen $x_j, j \in M \setminus M'$ höchstens größer. Zum Schluß ist $M' = \{\}$, es gibt also keine weiteren ‘unbekannten’ Stützstellen.

q.e.d.

Bemerkung:

Der Zeitaufwand bei direkter Programmierung beträgt:

Für Zeile (6.4.2-2): $\mathcal{O}(N^2)$.

Für Zeile (6.4.2-6): jeweils $\mathcal{O}(\#M' \cdot (\#M - \#M')) = \mathcal{O}(N^2)$, insgesamt für alle Schleifen über k also $\mathcal{O}(N^3)$.

Verfahren 6.4.2-(B):

Man beginnt mit den verstreut liegenden Stützstellen. Nachdem die wenigen dort nötigen Manipulationen erfolgt sind, wende man sich den Stützstellen-Clustern zu.

PROCEDURE CalculateAdditionalDistancesB

Input: $X, M, N, d := d^{(d)}, D_{\min}$: wie oben

Output: $y = (y_i)_{i \in M} \in \mathbb{R}_{\geq 0}^N$

y wird dann $(h_0(x_i))_{i \in M}$

Local: $M' \subset M$

G : array[1 .. (N - 1)N/2] of record
 i, j ∈ M
 d ∈ ℝ_{>0}
 end of record

found : boolean

diverse Indizes

for $i \in M$ do $y_i := 0$

(6.4.2-9)

G := { (i, j, d(x_i, x_j)) ∈ M × M × ℝ_{>0} : i < j }

(6.4.2-10)

repeat

 found := false

 suche (i, j, d) ∈ G mit $\sqrt{d^2 + (y_i - y_j)^2} < D_{\min}$ und d dabei maximal (6.4.2-11)

Falls die Suche erfolgreich ist, wird `found=true` gesetzt und das Ergebnis als `(ifound, jfound, dfound)` zurückgegeben.

Zusicherung:

$$D_{\min}^2 > \text{dfound}^2 + (y_{\text{ifound}} - y_{\text{jfound}})^2 \Rightarrow D_{\min}^2 - \text{dfound}^2 > 0 \quad (6.4.2-12)$$

`if found then`

`if $y_{\text{ifound}} < y_{\text{jfound}}$ then` (6.4.2-13)

$$y_{\text{jfound}} := y_{\text{ifound}} + \sqrt{D_{\min}^2 - \text{dfound}^2}$$

`else`

$$y_{\text{ifound}} := y_{\text{jfound}} + \sqrt{D_{\min}^2 - \text{dfound}^2}$$

Zusicherung: (0. E. sei $y_{\text{ifound}} < y_{\text{jfound}}$) (6.4.2-14)

$$\begin{aligned} d^{(1+d)}((x_{\text{ifound}}, y_{\text{ifound}}), (x_{\text{jfound}}, y_{\text{jfound}}))^2 &= \text{dfound}^2 + (y_{\text{jfound}}^{\text{neu}} - y_{\text{ifound}})^2 \\ &= \text{dfound}^2 + D_{\min}^2 - \text{dfound}^2 \geq D_{\min}^2 \end{aligned}$$

`until not found`

`end of procedure`

Satz 6.4.2-2

Die Prozedur ‘CalculateAdditionalDistancesB’ terminiert und erzeugt einen Vektor y , für den gilt:

$$\forall i \neq j \in M: \quad d^{(1+d)}\left(\begin{pmatrix} y_i \\ x_i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_j \\ x_j \end{pmatrix}\right) \geq D_{\min}.$$

Beweis:

Es gibt zu jedem Zeitpunkt mindestens ein $i_0 \in M$ mit $y_{i_0} = 0$. Dies folgt aus der `if`-Klausel in Zeile (6.4.2-13), denn es wird immer nur genau ein y_i vergrößert, das schon größer als ein anderes y_j war. Sei also die Prozedur in der Situation angelangt, daß nur noch ein $y_{i_0} = 0$ vorliegt. Dann ist jedes andere y_i größer, und $y_{i_0} = 0$ bleibt unverändert.

Die Summe aller zu einem beliebigen y_j addierten Änderungen kann $(N - 1) \cdot D_{\min}$ nicht übersteigen. Dies folgt aus der Bedingung $\sqrt{\text{d}^2 + (y_i - y_j)^2} < D_{\min}$ an die Maximumssuche in Zeile (6.4.2-11), denn sollte sich ein y_i um mehr als D_{\min} von allen anderen y_j unterscheiden, so wird es in diesem Schleifendurchlauf garantiert nicht geändert. Angenommen nun, zu einem y_{i_n} ist im Verlauf des Verfahrens n mal ein Betrag von fast D_{\min} hinzuaddiert worden. Dann muß es ein $y_{i_{n+1}}$ geben, mit dem y_{i_n} zuletzt verglichen wurde. Von diesem hat es höchstens die Differenz D_{\min} . Für $y_{i_{n+1}}$ muß es aber wiederum ein $y_{i_{n+2}}$ geben, mit dem es wiederum zuletzt verglichen wurde. Auch hier ist die Differenz höchstens D_{\min} . Dies setzt sich induktiv weiter fort bis zu dem ersten Element y_{i_0} in der Vergleichskette, das Null ist. Oben haben wir gesehen, daß solch ein y_{i_0} existieren muß. Nun folgt $y_{i_n} = y_{i_n} - y_{i_0} < n \cdot D_{\min}$. In der ganzen Vergleichskette können aber höchstens alle N Stück einmal auftreten, so daß $n < N - 1$ gelten muß. Somit ist für jedes beliebige y_j gezeigt: $y_j \leq (N - 1) \cdot D_{\min}$.

Wurde im Ablauf der Prozedur der $d^{(1+d)}$ -Abstand eines der oben möglichen x_{i_1} zu jedem der möglichen x_{i_0} auf D_{\min} erhöht (vgl. die Zusicherung (6.4.2-14)), so wird y_{i_1} nicht mehr verändert. Dies setzt sich induktiv nach oben fort.

An dieser Argumentation erkennt man, daß im ‘worst case’ zu jeweils einem y_j genau $0, \dots, N-1$ mal ein Betrag von höchstens D_{\min} hinzuaddiert wird. Dazu sind $\mathcal{O}(N^2)$ Schleifendurchläufe nötig. Die Prozedur terminiert somit.

Die Zusicherung (6.4.2-14)) garantiert sodann, daß die zweite Behauptung des Satzes wahr ist.

q.e.d.

Bemerkungen:

Zu Zeile (6.4.2-10): G implementiert die Kanten des kompletten, ungerichteten, bewerteten Graphen, der die Ecken X hat, und dessen Kanten mit den Abständen der Ecken bewertet sind.

Zu Zeile (6.4.2-11): Die Forderung ‘d maximal’ bewirkt, daß die Änderungen in der `if`-Klausel mit $\sqrt{D_{\min}^2 - \text{dfound}^2}$ so klein wie möglich sind. Dadurch wird erreicht, daß die y_i -Werte möglichst klein bleiben, und die später daraus erzeugte Funktion $h(x)$ möglichst glatt wird.

Zum Zeitaufwand: Wie im Beweis schon erwähnt, wird die *Schleife* höchstens $\mathcal{O}(N^2)$ mal durchlaufen.¹³³ In der Regel werden aber die allermeisten y_i nur einmal ‘besucht’. Nur wenige y_i zu den besonders dicht liegenden x_i werden häufiger geändert. Deswegen darf man deutlich weniger Schleifendurchläufe als $\mathcal{O}(N^2)$ erwarten.

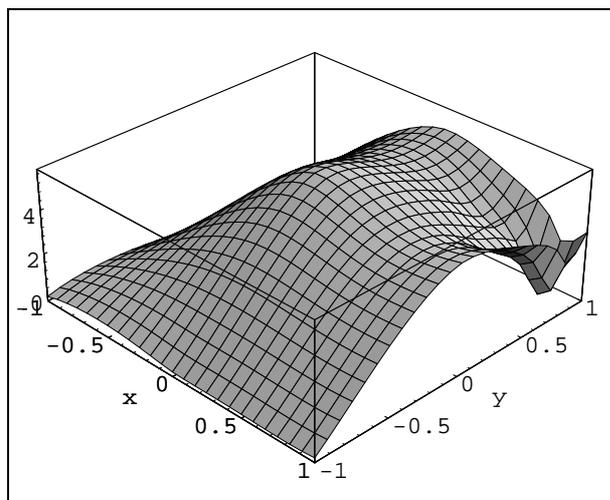
Der Zeitaufwand des *Schleifenkörpers* wird durch die Suche in Zeile (6.4.2-11) bestimmt. Bei *direkter* Programmierung der Suche benötigt sie $\mathcal{O}(N^2)$ Operationen. Besser benutzt man zur Implementation eine *Baumstruktur* B , die Einfügen, Löschen, Ändern und Sortieren mit dem Aufwand $\mathcal{O}(\#B \text{ ld } \#B)$ und Suchen mit dem Aufwand $\mathcal{O}(\text{ld } \#B)$ ermöglicht. Diese Baumstruktur enthält dann nur die Kanten des Graphen G , deren modifizierte Längen die Nebenbedingung $\sqrt{d^2 + (y_i - y_j)^2} < D_{\min}$ der Suche erfüllen. Die Anzahl der Kanten beträgt $\#G = \mathcal{O}(N^2)$, so daß die Suche immer mit $\mathcal{O}(\text{ld } N^2) = \mathcal{O}(\text{ld } N)$ Operationen bewältigt werden kann. Für das Reorganisieren des Baumes sind dann nochmal höchstens $\mathcal{O}(N^2 \text{ ld } N)$ Operationen zu erwarten. Von einer Änderung eines y_j sind immer N Kanten betroffen, von denen in der Regel aber nur $\mathcal{O}(1)$ aus B herausfallen oder hinzukommen. Die Mächtigkeit von B pendelt sich weiterhin schnell auf einem niedrigen Niveau ein (vgl. obige Bemerkung zu den häufiger geänderten y_i), so daß auch hier ein deutlich besseres Verhalten zu erwarten ist.

Zusammengefasst beträgt der Aufwand im ‘worst case’ bei ‘direkter’ Programmierung

$$\text{AwZ}(\text{CalculateAdditionalDistancesB}) = \mathcal{O}(N^4)$$

und unter guten Bedingungen bei hinreichend ‘cleverer’ Programmierung nur

$$\text{AwZ}(\text{CalculateAdditionalDistancesB}) = \mathcal{O}(N^2 \text{ ld } N) .$$



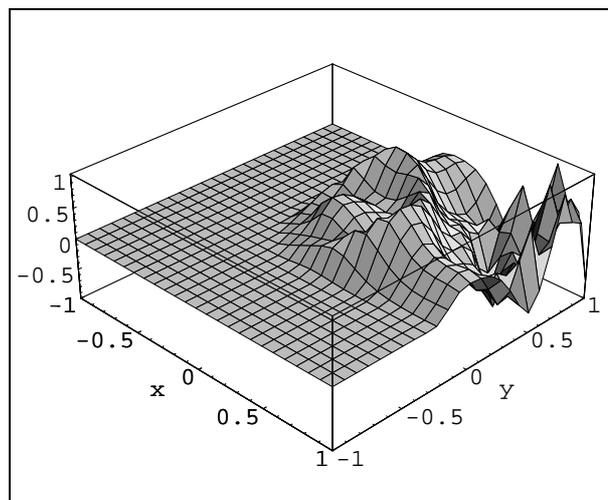
thin-plate-spline-Interpolante für die Funktion

$$h_0(x)$$

$$\bar{\lambda}(A_\Phi) \approx 38.5, \quad \underline{\lambda}(A_\Phi) \approx 2.07 \cdot 10^{12},$$

$$\text{cond}_{2,2}(A_\Phi) \approx 1.86 \cdot 10^4$$

Die Graphik wurde mit `PlotRangeVec = All;`
erstellt.

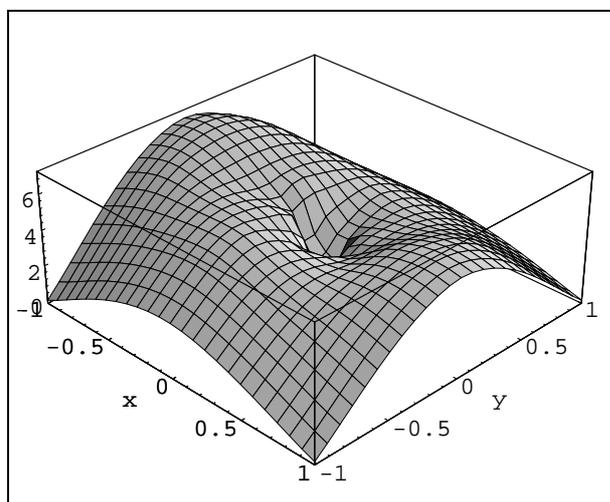


Wendland- $\phi_{3,1}$ -Interpolante

$$\text{Parameter } c = 12 d_{Q, \min}(X), \quad \bar{\lambda}(A_\Phi) \approx 3.53,$$

$$\underline{\lambda}(A_\Phi) \approx 1.12 \cdot 10^{12}, \quad \text{cond}_{2,2}(A_\Phi) \approx 316$$

Abbildung 33: Funktion $h_0(x)$ und Interpolante zur ‘Wellen-Funktion’ nach Verfahren (A)



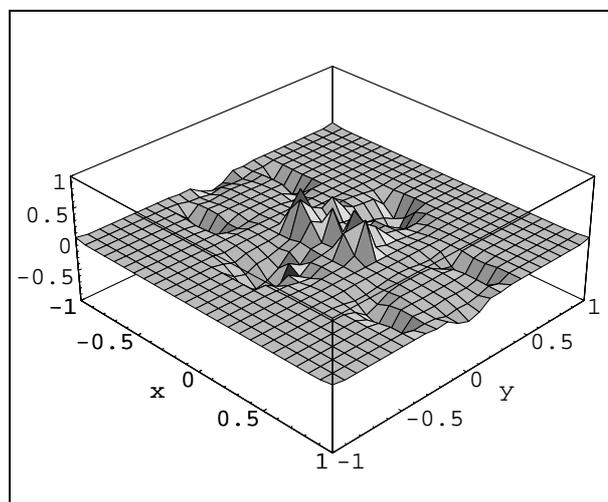
thin-plate-spline-Interpolante für die Funktion

$$h_0(x)$$

$$\bar{\lambda}(A_\Phi) \approx 22.5, \quad \underline{\lambda}(A_\Phi) \approx 5.07 \cdot 10^{14},$$

$$\text{cond}_{2,2}(A_\Phi) \approx 4.43 \cdot 10^4$$

Die Graphik wurde mit `PlotRangeVec = All;`
erstellt.



Wendland- $\phi_{3,1}$ -Interpolante

$$\text{Parameter } c = 12 d_{Q, \min}(X), \quad \bar{\lambda}(A_\Phi) \approx 3.39,$$

$$\underline{\lambda}(A_\Phi) \approx 2.47 \cdot 10^{12}, \quad \text{cond}_{2,2}(A_\Phi) \approx 137$$

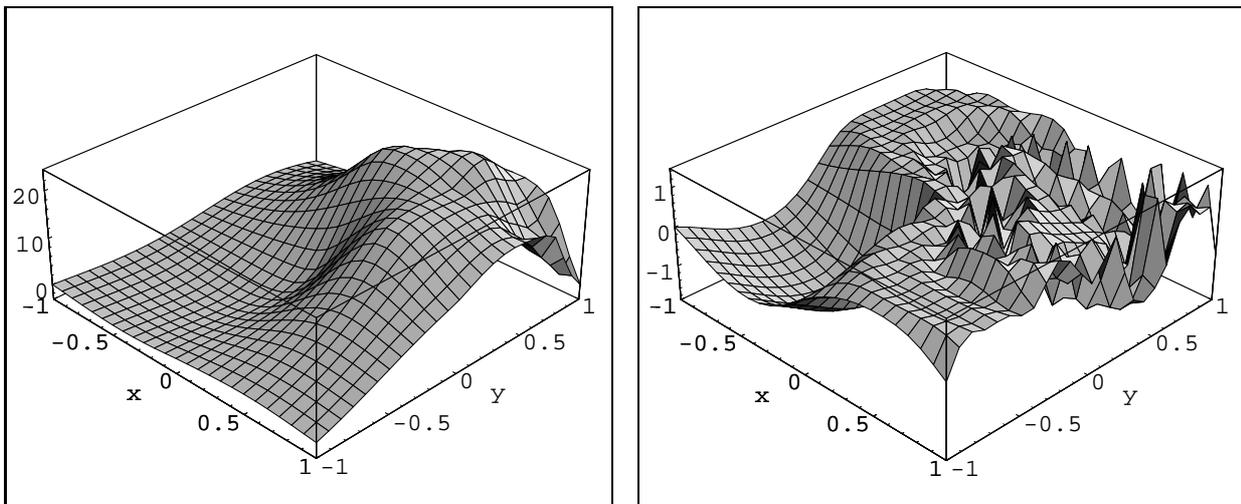
Abbildung 34: Funktion $h_0(x)$ und Interpolante zur ‘Mexican-Hat-Funktion’ nach Verfahren (A)

6.4.3 Experimentelle Ergebnisse

Für die ‘Wellen-Funktion’ wurde $D_{\min} := d_2((-1, -1)^{\text{tr}}, (-1, 0)^{\text{tr}}) = 1$ und für die ‘Mexican-Hat-Funktion’ $D_{\min} := d_2((1, 1)^{\text{tr}}, 1/\sqrt{8}(2, 1)) = \sqrt{2.625 - 3/2\sqrt{2}} \approx 0.70970$ gewählt.

Bemerkungen zu den Abbildungen 33 und 34:

Die mit dem Verfahren 6.4.2-(A) erzielten Ergebnisse¹³⁴ sind enttäuschend. Die Graphen haben nur entfernte Ähnlichkeit mit der Zielvorgabe der Abbildung 8. So ist es vollkommen unwesentlich, daß die Konditionen um die Faktoren 6 und 15 verbessert wurden.



thin-plate-spline-Interpolante für die Funktion

$$h_0(x)$$

$$\bar{\lambda}(A_\Phi) \approx 38.5, \quad \underline{\lambda}(A_\Phi) \approx 2.07 \cdot 10^{\perp 2},$$

$$\text{cond}_{2,2}(A_\Phi) \approx 1.86 \cdot 10^4$$

Wendland- $\phi_{3,1}$ -Interpolante

$$\text{Parameter } c = 12 d_{Q, \min}(X), \quad \bar{\lambda}(A_\Phi) \approx 3.53,$$

$$\underline{\lambda}(A_\Phi) \approx 1.12 \cdot 10^{\perp 2}, \quad \text{cond}_{2,2}(A_\Phi) \approx 316$$

Die Graphiken wurden mit `PlotRangeVec = All`; erstellt.

Abbildung 35: Funktion $h_0(x)$ und Interpolante zur ‘Wellen-Funktion’ nach Verfahren (B)

Bemerkungen zu den Abbildungen 35 und 36:

Durch das Verfahren 6.4.2-(B)¹³⁵ werden weder die Ausgangsfunktionen annähernd reproduziert, noch wird das Intervall $[-1, 1]$ eingehalten. Es liefert die schlechtesten Ergebnisse aller vorgestellten Verfahren.

¹³³Genauer: $N(N \perp 1)/2$ mal.

¹³⁴Rechenzeiten:

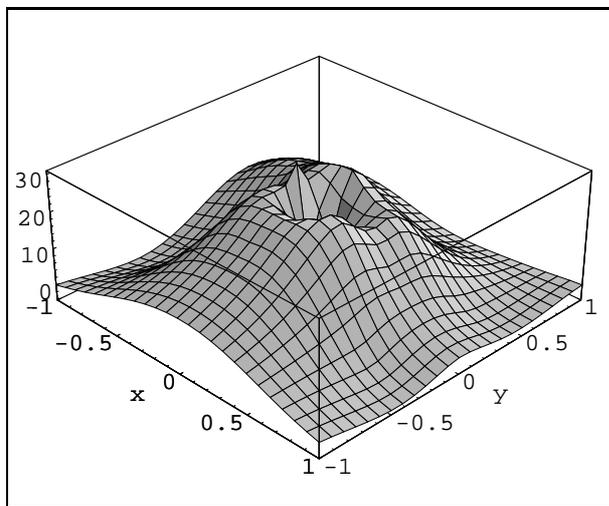
zur ‘Wellen-Funktion’: Berechnung von A_Φ : 5 min, Erzeugung der Graphik: 52 min bei 99% CPU-Last.

zur ‘Mexican-Hat-Funktion’: Berechnung von A_Φ : 17 min, Erzeugung der Graphik: 2 h 45 min bei 99% CPU-Last. (Vgl. Fußnote 117.) Man erkennt deutlich den Aufwand der Ordnung $\mathcal{O}(N^2)$, denn diese Zeiten sind etwa um den Faktor $(47/27)^2$ größer als die des vorigen Beispiels.

¹³⁵Rechenzeiten:

zur ‘Wellen-Funktion’: Berechnung von A_Φ : 15 min, Erzeugung der Graphik: 56 min bei 99% CPU-Last.

zur ‘Mexican-Hat-Funktion’: Berechnung von A_Φ : 34 min, Erzeugung der Graphik: 2 h 48 min bei 99% CPU-Last. Auch hier erkennt man wieder deutlich den Aufwand der Ordnung $\mathcal{O}(N^2)$, denn diese Zeiten sind etwa um den Faktor $(47/27)^2$ größer als die des vorigen Beispiels.

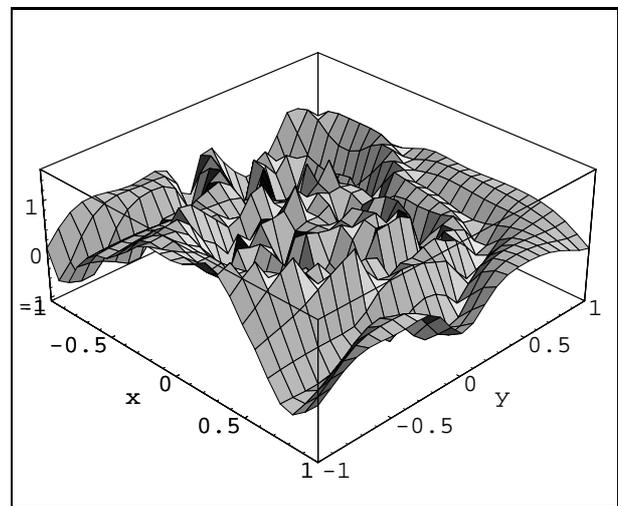


thin-plate-spline-Interpolante für die Funktion

$$h_0(x)$$

$$\bar{\lambda}(A_\Phi) \approx 22.5, \quad \underline{\lambda}(A_\Phi) \approx 5.07 \cdot 10^{-14},$$

$$\text{cond}_{2,2}(A_\Phi) \approx 4.43 \cdot 10^4$$

Wendland- $\phi_{3,1}$ -Interpolante

$$\text{Parameter } c = 12 d_{Q, \min}(X), \quad \bar{\lambda}(A_\Phi) \approx 3.39,$$

$$\underline{\lambda}(A_\Phi) \approx 2.47 \cdot 10^{-12}, \quad \text{cond}_{2,2}(A_\Phi) \approx 137$$

Die Graphiken wurden mit `PlotRangeVec = All`; erstellt.

Abbildung 36: Funktion $h_0(x)$ und Interpolante zur ‘Mexican-Hat-Funktion’ nach Verfahren (B)

7 Iterierte Interpolation auf feiner werdenden Teilmengen von X

7.1 Idee des Verfahrens und Definitionen

Aus den Kapiteln 3.3.2 und 3.3.3 ist bekannt, daß Aussagen über die Kondition der Interpolationsmatrix A_{Φ} und die Approximationsgüte an eine gegebene Funktion f vom minimal vorkommenden Abstand zweier Stützstellen $d_{\min}(X)$ abhängen, genauer von den Parametern $h_{\rho, X, d}(x)$ und $q = \frac{1}{2} d_{\min}(X)$. Man kann nun versuchen, mit einer iterierten Interpolation auf (im wesentlichen) homogen verteilten Teilmengen von X mit parametrisierten radialen Basisfunktionen ein besseres Ergebnis zu erzielen. Die oben genannten charakteristischen Parameter werden dabei immer kleiner, doch bleibt $h_{\rho, X, d}(x)$ global in der gleichen Größenordnung, so daß der Approximationsfehler global verbessert wird.

Typische Anwendungen dieser Methode sind ausgedehnte Stützstellenmengen X , die einige dicht besetzte Cluster haben, ansonsten aber sehr dünn verteilt sind. Man interpoliert dann vorzugsweise mit sehr ‘glatten’ Basisfunktionen, z. B. thin plate splines oder multiquadrics, zunächst auf der dünnverteilten Teilmenge, wobei man aus den Clustern nur eine Stützstelle benutzt, und erhält dadurch eine *globale Interpolante*. An dieser Stützstelle x_i interpoliert man direkt den vorgegebenen Stützwert y_i .

Man kann auch mehr Aufwand betreiben, und dort den Mittelwert der Stützwerte des ganzen Clusters interpolieren. Das wirkt der Gefahr entgegen, daß man einen ‘Ausreißer’ interpoliert, und so die globale Interpolante unnötig gekrümmt wird. Die entstandene Abweichung von der Interpolationsbedingung wird später automatisch beseitigt.

In weiteren Schritten — häufig reicht eine Schritt aus — nimmt man sodann die noch unbenutzten Stützstellen aus den Clustern hinzu und interpoliert dort die Differenz zur globalen Interpolante mit ‘lokalen’ Basisfunktionen, also vorzugsweise mit compactly supported functions, wodurch eine *lokale Interpolante* entsteht. Als Summe erhält man die gesuchte *gesamte Interpolante*.

Vom guten Fehlerverhalten abgesehen, bringt dieses Vorgehen noch den weiteren Vorteil der effizienten Auswertbarkeit der gesamten Interpolante mit sich: Die globale Interpolante hat in der Regel um Größenordnungen weniger Stützstellen als die gesamte Stützstellenmenge X . Wertet man die gesamte Interpolante nun außerhalb von Clustern aus, so greift man direkt auf die billige globale Interpolante zu. Wertet man innerhalb eines Clusters aus, so kommt zur globalen Interpolante meist nur noch eine lokale Interpolante hinzu, deren Summe sich auch nur über vergleichsweise wenige Stützstellen erstreckt. Theoretisch sind dadurch Interpolationen möglich, deren Auswertungsaufwand nicht mehr mit $\mathcal{O}(N)$ geht, sondern nur noch mit $\mathcal{O}(1)$.

Es soll hier keine ausführliche Fehleranalyse betrieben, sondern nur die praktische Durchführbarkeit des Ansatzes dargestellt werden, da sonst der Rahmen dieser Arbeit verlassen würde.

Um das Verfahren genauer darzustellen, sind folgende Definitionen nötig:

$$\begin{aligned}
 M &= \bigcup_{\nu=1}^{\mu} \widetilde{M}^{(\nu)} && \text{eine disjunkte Zerlegung der Indexmenge} \\
 M^{(\nu)} &:= \bigcup_{\iota=1}^{\nu} \widetilde{M}^{(\iota)} && \text{jeweils für den Level } \nu = 1, \dots, \mu \\
 \widetilde{X}^{(\nu)} &:= \{x_i\}_{i \in \widetilde{M}^{(\nu)}} \\
 X^{(\nu)} &:= \{x_i\}_{i \in M^{(\nu)}} = \bigcup_{\iota=1}^{\nu} \widetilde{X}^{(\iota)} \\
 d_{\min}(X^{(\nu)}) &:= \min_{x_i \neq x_j \in X^{(\nu)}} d(x_i, x_j) && \text{wie in Kapitel 5.3}
 \end{aligned}$$

$\{\phi_{\alpha}^{(\nu)}\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$: parametrisierte Familien von radialen Basisfunktionen,
 $\nu = 1, \dots, \mu$

$\{\Phi_{\alpha}^{(\nu)}\}_{\alpha \in \mathbb{R}} := \{\phi_{\alpha}^{(\nu)} \circ d\}_{\alpha \in \mathbb{R}}$ entsprechend für die Metrik d

$\tilde{\alpha}^{(\nu)}(d_{\min})$: für $\phi_{\alpha}^{(\nu)}$ spezifische Wahl von α zu d_{\min} laut (5.3-1)

$s^{(0)}(x) := 0$ und rekursiv für $\nu = 1, \dots, \mu$:

$$s^{(\nu)} := s^{(\nu-1)} + \tilde{s}^{(\nu)}$$

$$f^{(\nu)} := f - s^{(\nu-1)}$$

$\tilde{s}^{(\nu)}(x) :=$ Interpolante zu $f^{(\nu)}$ mit $\phi_{\alpha}^{(\nu)}$ auf $X^{(1)} \cup \dots \cup X^{(\nu)} = \{x_i\}_{i \in M^{(\nu)}}$

$$= \sum_{j \in M^{(\nu)}} c_j^{(\nu)} \Phi_{\tilde{\alpha}^{(\nu)}(d_{\min}(X^{(\nu)}))}^{(\nu)}(x, x_j) + \sum_{k=1}^Q \beta_k^{(\nu)} p_k(x)$$

$$s := s^{(\mu)} .$$

Es folgt:

$$M^{(1)} \subset M^{(2)} \subset \dots \subset M^{(\mu)} = M$$

$$X = X^{(\mu)} = \bigcup_{\nu=1}^{\mu} \widetilde{X}^{(\nu)} \text{ ist eine disjunkte Zerlegung der Stützstellenmenge}$$

$$(7.1-1) \quad s^{(\nu)} = \sum_{\iota=1}^{\nu} \tilde{s}^{(\iota)}$$

$$s(x_i) = f(x_i) \quad \forall i \in M .$$

Die letzte Gleichung wird in Kapitel 7.2 bewiesen. Die Konstruktion einer geeigneten Zerlegung von X wird in Kapitel 7.3 behandelt.

7.2 Der Algorithmus zur Interpolation

PROCEDURE CalculateIteratedInterpolant

Input: $X, \tilde{\alpha}^{(\nu)}(d_{\min}), \phi_{\alpha}^{(\nu)}(r), \{p_k\}$: wie oben

Output: s : Interpolante

Zerlege $X = \cup \widetilde{X}^{(\nu)}$ bzw. $M = \cup \widetilde{M}^{(\nu)}$

wie in Kapitel 7.3 beschrieben

```

 $s^{(0)}(x) := 0$ 
for  $\nu := 1 \dots \mu$  do
    Schleifenvoraussetzung:  $s^{(\nu\perp 1)}(x_i) = f(x_i)$  für  $i \in M^{(\nu\perp 1)}$  und  $\nu > 1$  (7.2-1)
     $\alpha := \tilde{\alpha}^{(\nu)}(d_{\min}(X^{(\nu)}))$ 
     $f^{(\nu)} := f - s^{(\nu\perp 1)}$  (7.2-2)
    Zusicherung:  $f^{(1)} = f$ ; wegen (7.2-1) gilt: (7.2-3)
         $i \in M^{(\nu\perp 1)}, \nu > 1 \Rightarrow f^{(\nu)}(x_i) = f(x_i) - s^{(\nu\perp 1)}(x_i) = 0$ 
     $\tilde{s}^{(\nu)} :=$  Interpolante zu  $f^{(\nu)}$  mit  $\phi_\alpha^{(\nu)}$  auf  $X^{(\nu)} = \{x_i\}_{i \in M^{(\nu)}}$  (7.2-4)
    Zusicherung:  $\tilde{s}^{(\nu)}(x_i) = f^{(\nu)}(x_i)$  für  $i \in M^{(\nu)}$  (Interpolationsbedingung) (7.2-5)
     $s^{(\nu)} := s^{(\nu\perp 1)} + \tilde{s}^{(\nu)}$ 
    Zusicherung: Für  $i \in M^{(\nu)}$  gilt wegen (7.2-5):  $s^{(\nu)}(x_i) = s^{(\nu\perp 1)}(x_i) + f^{(\nu)}(x_i)$ 
    mit (7.2-2) folgt:  $s^{(\nu)}(x_i) = s^{(\nu\perp 1)}(x_i) + f(x_i) - s^{(\nu\perp 1)}(x_i) = f(x_i)$  (7.2-6)
    Dies ist auch gleich die Voraussetzung (7.2-1) der nächsten Schleife.
end of for
 $s := s^{(\mu)}$ 
    Zusicherung: Wegen (7.2-6) gilt:  $s(x_i) = f(x_i)$  für alle  $i \in M = M^{(\mu)}$ 
end of procedure

```

Die enthaltenen Zusicherungen garantieren die Korrektheit des Algorithmus. In jedem Schleifendurchlauf ist eine Interpolation mit im allgemeinen $\mathcal{O}\left(\left(\#M^{(\nu)}\right)^3\right) = \mathcal{O}(N^3)$ Operationen nötig, insgesamt also $\mathcal{O}(\mu N^3)$. Wählt man $\#\tilde{M}^{(\nu)}$ in etwa konstant, so ist $\mu = \mathcal{O}(N)$, und der Gesamtaufwand steigt auf $\mathcal{O}(N^4)$. Das Verfahren des Kapitels 7.3 zur disjunkten Zerlegung von X sollte also diesen Fall vermeiden. Der Speicherbedarf für die Koeffizienten $c_j^{(\nu)}$ beträgt $\sum_{\nu=1}^{\mu} \#M^{(\nu)} = \mathcal{O}(N^2)$, allerdings sind in höheren Iterationen typischerweise viele $c_j^{(\nu)} = 0$. Bei ϕ mit kompaktem Träger ist dies offensichtlich; dort gibt es auch günstigere Verfahren zur Lösung der linearen Gleichungssysteme mit Bandmatrix. Die 'iterierte Interpolation' ist daher besonders für solche ϕ geeignet.

7.3 Zerlegung von X und globaler Fehler

$d_{\min}(X^{(\nu)})$ und $h_{\rho, X^{(\nu)}, d}(x)$ sind charakteristische Parameter von $X^{(\nu)}$. Man wählt die Zerlegung von X in $X^{(\nu)}$ bzw. M in $M^{(\nu)}$ so, daß für alle ν und alle x *gleichmäßig* gilt:

$$h_{\rho, X^{(\nu)}, d}(x) \leq \rho d_{\min}(X^{(\nu)}) \quad \text{mit } \rho > 0 \text{ fest.}$$

Dabei wird $\tilde{\alpha}^{(\nu)}(r)$ laut Gleichung (5.3-1) bestimmt, z. B. $\tilde{\alpha}^{(\nu)}(d_{\min}) := 1/d_{\min}^2$ für die Gaußians $\phi_\alpha(r) = e^{-\alpha r^2}$.

Ein Algorithmus zur Zerlegung der Stützstellenmenge X hat typischerweise die Struktur eines *Subdivisionsverfahrens*. Wenn man grobe Kenntnisse über die Struktur von X voraussetzt, ist er recht effizient zu implementieren.

Auf dem Level ν sei z. B. ein Quader gegeben, der die Ausdehnung eines typischen Clusters dieses Levels hat. Diesen Quader benutzt man nun zur Erzeugung eines Quadergitters, das ganz X überdeckt.¹³⁶ Aus jedem Quader des Gitters entnimmt man dann maximal *eine*¹³⁷

¹³⁶Alternativ dazu kann man auch bloß eine Box des Gitters vom Level $\nu \perp 1$ unterteilen. Dieser zweite Ansatz geht mehr auf lokale Strukturen von X ein, insbesondere berücksichtigt er Cluster verschiedener Dichte.

¹³⁷Enthält ein Quader keine Stützstelle, so ignoriert man ihn.

Stützstelle x_j , die möglichst zentral liegt, und stellt aus ihnen die Menge $X^{(\nu)}$ zusammen. Deren charakteristische Parameter $d_{\min}(X^{(\nu)})$ und $h_{\rho, X^{(\nu)}, d}(x)$ liegen nun in der Größenordnung der Gitterweite. Ist man auf einem Level μ angelangt, der keine typischen Cluster mehr aufweist, beendet man die Rekursion.

Auf jedem Level ν gelten die jeweiligen Fehlerabschätzungen, und mit Gleichung (3.3.2-3) folgt:

$$\begin{aligned} & \left| f^{(\nu)}(x) - \tilde{s}^{(\nu)}(x) \right| \\ &= \left| f^{(\nu)}(x) - s_{f^{(\nu)}, X^{(\nu)}, \Phi_{\alpha^{(\nu)}(d_{\min}(X^{(\nu)}))}^{(\nu)}}(x) \right| \\ &\leq \|f\|_{\mathbb{F}_{\Phi_{\alpha^{(\nu)}(d_{\min}(X^{(\nu)}))}^{(\nu)}}} \cdot F_{\Phi}(h_{\rho, X^{(\nu)}, d}(x)) . \end{aligned}$$

Der Ausdruck $h_{\rho, X^{(\nu)}, d}(x)$ ist in ν monoton fallend, da die Stützstellen nach Konstruktion immer dichter werden. Die Kriging-Abschätzungsfunktionen $F_{\Phi}(h)$ sind typischerweise monoton fallend in h , so daß bei fester Größenordnung von $\|f\|_{\mathbb{F}_{\Phi_{\alpha^{(\nu)}(d_{\min}(X^{(\nu)}))}^{(\nu)}}}$ der Fehler immer geringer wird.

Für den *globalen* Fehler gilt:

$$\begin{aligned} & f(x) - s(x) \\ &= f(x) - \sum_{\nu=1}^{\mu \perp 1} \tilde{s}^{(\nu)}(x) - \tilde{s}^{(\mu)}(x) \quad \text{wegen (7.1-1)} \\ &= f(x) - s^{(\mu \perp 1)}(x) - \tilde{s}^{(\mu)}(x) \\ &= f^{(\mu)}(x) - \tilde{s}^{(\mu)}(x) \quad \text{wegen (7.2-2)}. \end{aligned}$$

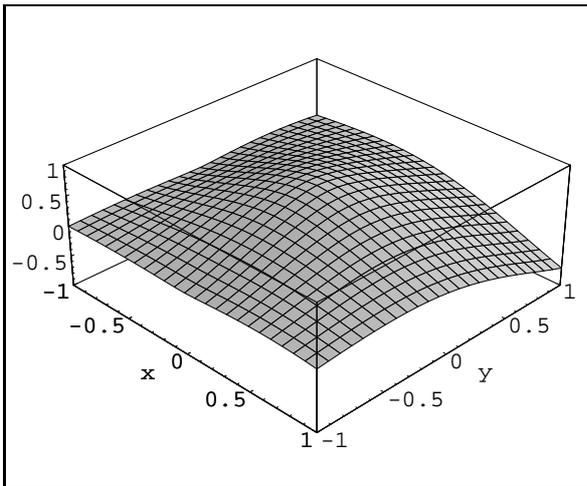
Er läßt sich also mit der Abschätzung für den letzten Level kontrollieren.

7.4 Experimentelle Ergebnisse

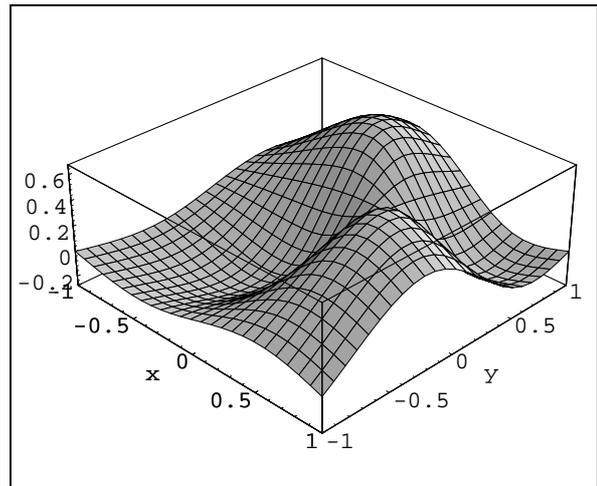
In diesem Kapitel werden einige experimentelle Ergebnisse dargestellt. Sie sollen vor allem die Durchführbarkeit des Verfahrens belegen. Eine repräsentative Darstellung mit Untersuchung aller möglichen Feinheiten, wie z. B. der optimalen Wahl der Zerlegung von X , würde an dieser Stelle zu weit führen.

Die Beispiele basieren auf den beiden zu interpolierenden Funktionen, die in Kapitel 4.2 vorgestellt wurden. Die Zerlegung der Stützstellenmenge X erfolgte entsprechend ihrer Konstruktion in Kapitel 4.2. Das bedeutet, daß $X^{(1)}$ als die Menge der ‘von Hand’ gesetzten Stützstellen und der Stützstellen des originalen Verteilungsmusters gewählt wurde. Die nächsten Level mit $X^{(2)}$ bis $X^{(5)}$ enthalten dann jeweils ein verfeinertes Verteilungsmuster mehr.

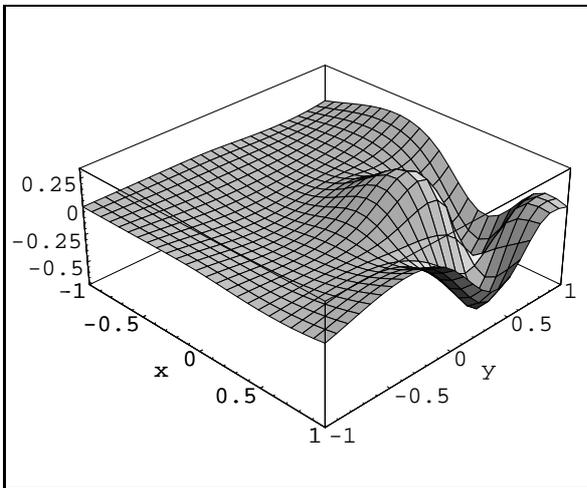
Als radiale Basisfunktion wurde auf dem ersten Level der thin plate spline $\phi(r) = r^2 \ln r$ benutzt, auf den Leveln $\nu = 2, \dots, 5$ die Wendland-Funktion $\phi_{3,1}(r/c)$ mit dem jeweils angepaßten Parameter $c = 12 d_{2, \min}(X^{(\nu)})$.



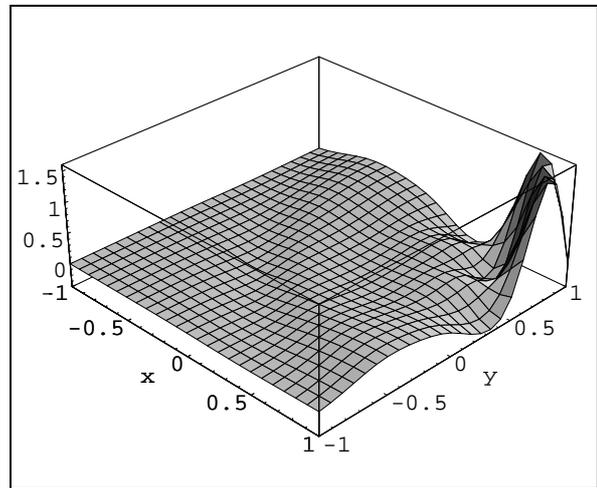
$\tilde{s}^{(1)}, \bar{\lambda}(A_\Phi) \approx 16.5, \underline{\lambda}(A_\Phi) \approx 4.19 \cdot 10^{-11},$
 $\text{cond}_{2,2}(A_\Phi) \approx 39.4$



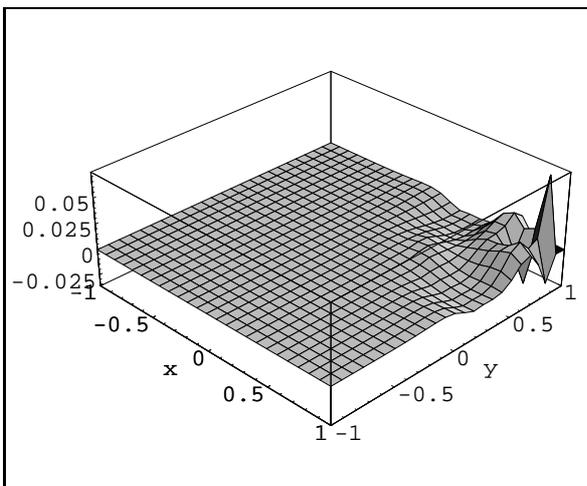
$\tilde{s}^{(2)}, \bar{\lambda}(A_\Phi) \approx 8.41, \underline{\lambda}(A_\Phi) \approx 4.54 \cdot 10^{-13},$
 $\text{cond}_{2,2}(A_\Phi) \approx 1.85 \cdot 10^3$



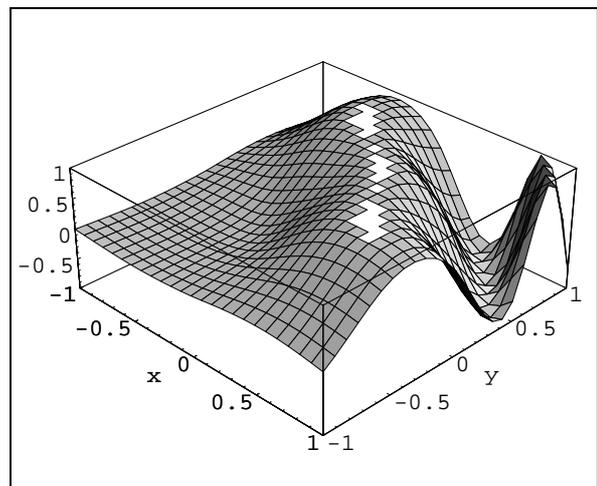
$\tilde{s}^{(3)}, \bar{\lambda}(A_\Phi) \approx 8.57, \underline{\lambda}(A_\Phi) \approx 4.53 \cdot 10^{-13},$
 $\text{cond}_{2,2}(A_\Phi) \approx 1.89 \cdot 10^3$



$\tilde{s}^{(4)}, \bar{\lambda}(A_\Phi) \approx 8.57, \underline{\lambda}(A_\Phi) \approx 4.53 \cdot 10^{-13},$
 $\text{cond}_{2,2}(A_\Phi) \approx 1.89 \cdot 10^3$

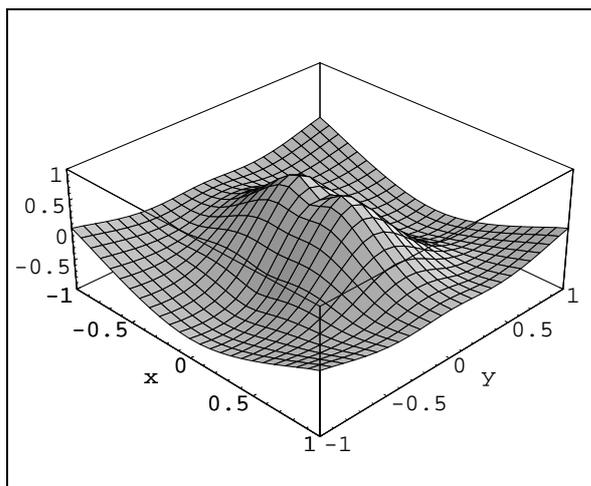


$\tilde{s}^{(5)}, \bar{\lambda}(A_\Phi) \approx 8.57, \underline{\lambda}(A_\Phi) \approx 4.53 \cdot 10^{-13},$
 $\text{cond}_{2,2}(A_\Phi) \approx 1.89 \cdot 10^3$

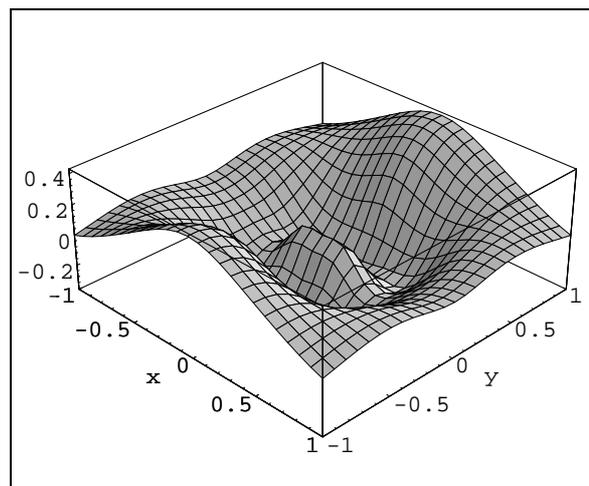


$s = \tilde{s}^{(1)} + \dots + \tilde{s}^{(5)}$

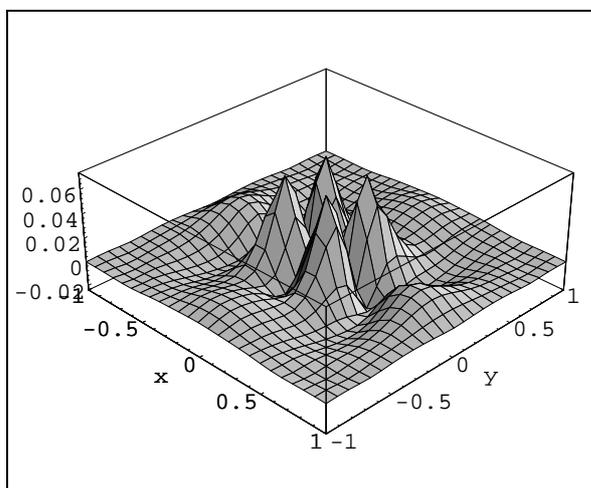
Abbildung 37: Iterierte Interpolation zur ‘Wellen-Funktion’



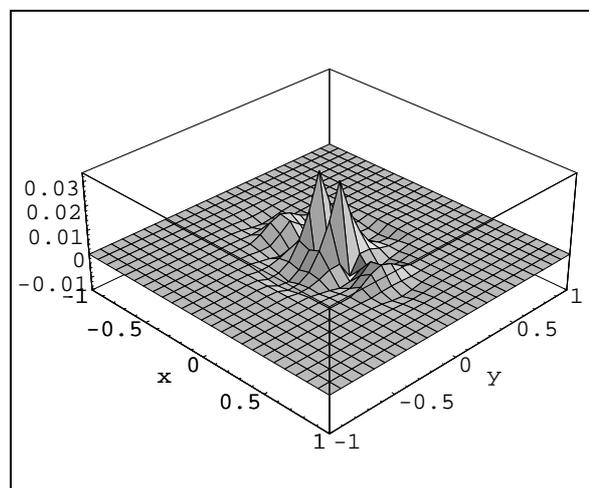
$$\tilde{s}^{(1)}, \bar{\lambda}(A_\Phi) \approx 19.8, \underline{\lambda}(A_\Phi) \approx 1.97 \cdot 10^{-12}, \\ \text{cond}_{2,2}(A_\Phi) \approx 1.01 \cdot 10^3$$



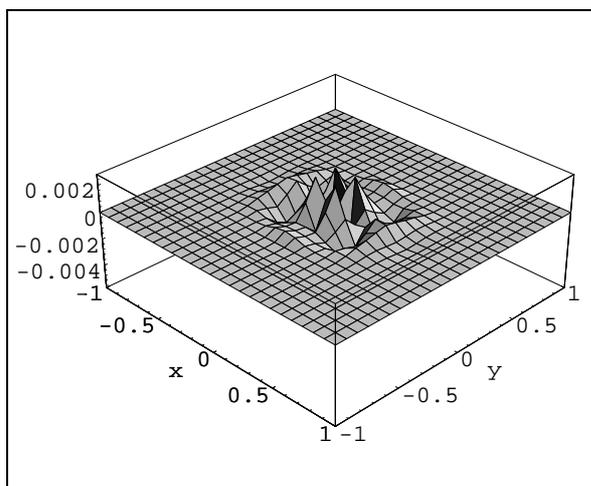
$$\tilde{s}^{(2)}, \bar{\lambda}(A_\Phi) \approx 9.12, \underline{\lambda}(A_\Phi) \approx 5.71 \cdot 10^{-13}, \\ \text{cond}_{2,2}(A_\Phi) \approx 1.60 \cdot 10^3$$



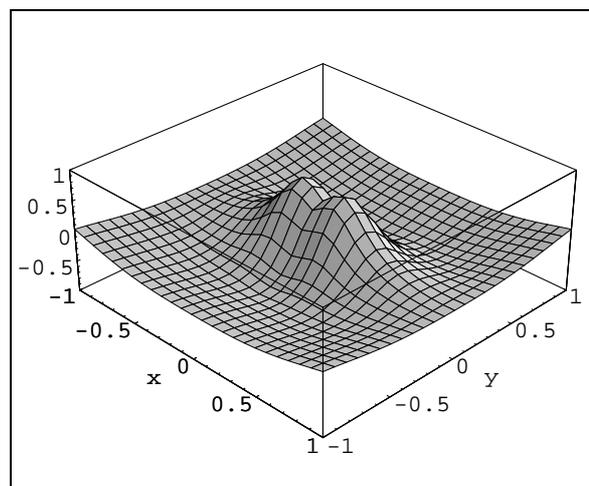
$$\tilde{s}^{(3)}, \bar{\lambda}(A_\Phi) \approx 10.3, \underline{\lambda}(A_\Phi) \approx 6.31 \cdot 10^{-13}, \\ \text{cond}_{2,2}(A_\Phi) \approx 1.64 \cdot 10^3$$



$$\tilde{s}^{(4)}, \bar{\lambda}(A_\Phi) \approx 6.49, \underline{\lambda}(A_\Phi) \approx 1.40 \cdot 10^{-12}, \\ \text{cond}_{2,2}(A_\Phi) \approx 464$$



$$\tilde{s}^{(5)}, \bar{\lambda}(A_\Phi) \approx 11.3, \underline{\lambda}(A_\Phi) \approx 5.29 \cdot 10^{-13}, \\ \text{cond}_{2,2}(A_\Phi) \approx 2.14 \cdot 10^3$$



$$s = \tilde{s}^{(1)} + \dots + \tilde{s}^{(5)}$$

Abbildung 38: Iterierte Interpolation zur 'Mexican-Hat-Funktion'

Bemerkungen zu den Abbildungen 37 und 38:

Die Abbildungen zeigen jeweils für jede Beispielfunktion die fünf Interpolanten $\tilde{s}^{(\nu)}(x)$ zu den Leveln 1 bis 5 und ihre Summe $s(x)$. Die Graphiken von $\tilde{s}^{(2)}$ bis $\tilde{s}^{(5)}$ wurden mit `PlotRangeVec = All` erstellt, um die Funktionen trotz ihrer meist kleinen Beträge darstellen zu können. Daher ist hier die Achsenbeschriftung wichtig. Die anderen Graphiken entstanden mit der Standardeinstellung `PlotRangeVec = { -1, 1 }`.

Beide Interpolanten geben die Gestalt der Beispielfunktionen gut wieder. Deutlich ist zu erkennen, daß der Beitrag der $\tilde{s}^{(\nu)}(x)$ von Level zu Level kleiner wird. Besonders bei der ‘Mexican-Hat-Funktion’ wird das Bildintervall dieser Teilinterpolanten jeweils mindestens halbiert. Lediglich bei der weniger glatten ‘Wellen-Funktion’ tritt mit $\tilde{s}^{(4)}$ noch ein ungewöhnlich großer Summand auf.¹³⁸

Da die Teilinterpolanten aus radialen Basisfunktionen mit immer kleiner werdenden, kompaktem Träger erzeugt wurden, haben sie abseits des jeweiligen Häufungspunktes den Wert 0. Diese Eigenschaft läßt sich gut zur Verringerung des Rechenaufwands bei der rekursiven Auswertung der gesamten Interpolante verwenden, da man die Rekursionstiefe abhängig vom Abstand zum Häufungspunkt beschränken kann.

Die Folge der minimalen Abstände $d_{2,\min}$ lautet für die ‘Wellen-Funktion’ $d_{2,\min}(X^{(\nu)}) = 2^{-(\nu+1)}$, $\nu = 1, \dots, 5$, während sie für die Stützstellenverteilungen der ‘Mexican-Hat-Funktion’ $\frac{1}{32} \cdot \{5, 5, 3, 1, 1\}$ beträgt. Dieser Unterschied beruht auf den verschiedenen Abständen der jeweils ‘von Hand’ eingefügten Stützstellen vom Häufungspunkt. Bei der ‘Wellen-Funktion’ sind die Stützstellen $\pm(1, 1)^{\text{tr}}$ für die d_{\min} -Werte bedeutungslos. Im Gegensatz dazu bestimmen die Stützstellen $\pm(5/32, 0)^{\text{tr}}$ bei der ‘Mexican-Hat-Funktion’ den minimalen Abstand auf den ersten vier Leveln vollständig — sie befinden sich zu dicht am Häufungspunkt $(0, 0)^{\text{tr}}$.

Die Konditionen der jeweiligen Interpolationsmatrizen liegen in der selben Größenordnung wie die der ‘konventionellen’ Methode, die in den Abbildungen 10 und 15 angegeben wurden.

Da die Interpolationsmatrizen $A_{\Phi_{\alpha^{(\nu)}(d_{\min}(X^{(\nu)}))}, X^{(\nu)}}$ nicht nur von der jeweiligen Stützstellenmenge $X^{(\nu)}$, sondern auch von der dazu *passend* parametrisierten radialen Basisfunktion $\Phi_{\alpha^{(\nu)}(d_{\min}(X^{(\nu)}))}^{(\nu)}$ abhängen, werden die Eigenwerte — und somit die Kondition — der Interpolationsmatrizen zur ‘Wellen-Funktion’ ab $\nu = 2$ stationär. Die Halbierung der minimalen Stützstellenabstände wird nämlich durch die Halbierung des Trägers der Basisfunktion jeweils ausgeglichen. Bei der ‘Mexican-Hat-Funktion’ wird dieser günstige Effekt durch die beiden ‘von Hand’ eingefügten Stützstellen $\pm(5/32, 0)^{\text{tr}}$ verhindert.

7.5 Idee eines Gesamtschrittverfahrens

Im Verfahren des Kapitels 7.2 ist auf jedem Level ν eine Interpolation auf der Stützstellenmenge $X^{(\nu)}$ zu berechnen. Der dafür nötige Aufwand bei allgemeinen radialen Basisfunktionen beträgt $\mathcal{O}((\#X^{(\nu)} + Q)^3)$. Der Gesamtaufwand bei μ Leveln ist somit $\mathcal{O}(\mu(N + Q)^3)$; falls μ linear in N ist, beträgt er sogar $\mathcal{O}(N^4 + Q^3)$. Der Speicheraufwand steigt von $\mathcal{O}(N + Q)$ für die Koeffizienten c_j und β_k auf $\mathcal{O}(\mu(N + Q))$ bzw. $\mathcal{O}(N(N + Q))$ für die Koeffizienten $c_j^{(\nu)}$ und $\beta_k^{(\nu)}$.

¹³⁸Dieses Verhalten erinnert an Fourier-Reihenentwicklungen oder Waveletzerlegungen unterschiedlich glatter Funktionen.

Dieser Anstieg läßt sich durch Verwendung von compactly supported functions zumindest auf den höheren Leveln vermeiden. Es kommen aber auch andere Ansätze dagegen in Betracht. Eine solche Idee wird abschließend geschildert.

Betrachtet man die Gestalt der gesamten Interpolante

$$s(x) = \sum_{\nu=1}^{\mu} \tilde{s}^{(\nu)}(x) = \sum_{\nu=1}^{\mu} \left(\sum_{j \in M^{(\nu)}} c_j^{(\nu)} \Phi_{\tilde{\alpha}^{(\nu)}(d_{\min}(X^{(\nu)}))}^{(\nu)}(x, x_j) + \sum_{k=1}^Q \beta_k^{(\nu)} p_k(x) \right),$$

so liegt es nahe, die Summen wie folgt umzusortieren:

$$s(x) = \sum_{j \in M} \sum_{\nu \in N(j)} c_j^{(\nu)} \Phi_{\tilde{\alpha}^{(\nu)}(d_{\min}(X^{(\nu)}))}^{(\nu)}(x, x_j) + \sum_{k=1}^Q \left(\sum_{\nu=1}^{\mu} \beta_k^{(\nu)} \right) p_k(x).$$

Dabei ist $N(j) := \{ \nu = 1, \dots, \mu : j \in \tilde{M}^{(\nu)} \}$. Mit

$$\Phi_{\nu} := \Phi_{\tilde{\alpha}^{(\nu)}(d_{\min}(X^{(\nu)}))}^{(\nu)} \quad \text{und} \quad \beta_k := \sum_{\nu=1}^{\mu} \beta_k^{(\nu)}$$

erhält man also die Form

$$s(x) = \sum_{j \in M, \nu \in N(j)} c_j^{(\nu)} \Phi_{\nu}(x, x_j) + \sum_{k=1}^Q \beta_k p_k(x),$$

die es nahelegt, ihre Koeffizienten $c_j^{(\nu)}$ und β_k durch *eine einzige* Matrix-Invertierung zu bestimmen. Die Mächtigkeit der neuen Indexmenge $\{(j, \nu) \in M \times \{1, \dots, \mu\} : \nu \in N(j)\}$ beträgt häufig weniger als $\mathcal{O}(\mu N)$, so daß sich deutliche Aufwandseinsparungen ergeben.

Leider lassen sich nur sehr schwer Aussagen über die Invertierbarkeit oder gar die Kondition der entsprechenden Interpolationsmatrix finden.

8 Schlußbetrachtungen

Vor der Darstellung der Ergebnisse dieser Arbeit soll kurz auf deren mögliche Anwendungsgebiete eingegangen werden. Die mehrdimensionale oder auch multivariate Interpolation hat in den letzten Jahren zunehmend an Bedeutung gewonnen, z. B. in der digitalen Bildverarbeitung. Dort können mit diesem Verfahren beispielsweise zu verschiedenen Zeiten aufgenommene Satellitenbilder der selben Gegend oder Röntgenbilder der selben Person verglichen werden. Auch sind die in letzter Zeit so beliebten ‘Morphing’-Effekte für Film- und Videosequenzen so erzeugbar.¹³⁹ Die Kompression von Bilddaten, topographischen Karten der Erdoberfläche und ähnlichen Signalen ist ebenso ein denkbare Anwendungsgebiet.¹⁴⁰

Speziell *inhomogene* Stützstellenverteilungen treten bei der topographischen Vermessung, beispielsweise von Ölbohrregionen, auf. Unterschiedlich stark detaillierte Werkstücke, etwa im Flugzeugbau, benötigen zur Beschreibung ebenfalls solche Stützstellenverteilungen.

8.1 Theoretische Ergebnisse

Um die praktischen Ansätze des zweiten Teils der Arbeit auf ein tragfähiges Fundament zu stellen, ist es nötig, die bekannte Theorie der Interpolation mit radialen Basisfunktionen allgemeiner zu fassen. Kapitel 1 legt dafür die allgemeinen Grundlagen. In den Kapiteln 2.5 bis 2.9 und 3.1 bis 3.3 werden dann die wichtigsten Ergebnisse unter jeweils minimalen Voraussetzungen hergeleitet. Diese Art der Darstellung findet man nicht in den hier verwendeten Publikationen. Der Aufbau der Theorie wird nun in einer Übersicht zusammengestellt.

Zu gegebenem $\Phi \in \text{BPD}(m)$, zu $X \subset \mathbb{R}^d$ und $f \in \text{Fun}^d$ sei das *Interpolationsproblem*

$$s_{f,X,\Phi}(x) = c^{\text{tr}} \Phi(x, X) + p(x) \quad \text{mit} \quad s_{f,X,\Phi}(X) = f(X) \quad \text{und} \quad p \in \mathbb{P}_m^d$$

zu lösen. Dabei erhält man das *Interpolationssystem* (2.5-6)

$$\begin{pmatrix} A_\Phi & P \\ P^{\text{tr}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit $A_\Phi := (\Phi(x_i, x_j))_{i,j \in M}$ und $P := (p_k(x_i))_{i \in M, k=1, \dots, Q}$. Für $\Phi \in \text{BPD}(m)$ und ein *injektives* P ist es laut Satz 2.5-1 eindeutig lösbar. Falls dabei $f \in \text{Span}_\Phi^d \oplus \mathbb{P}_m^d$ ist, folgt $s_{f,X,\Phi} = f$. Die Lösung $u(x)$ des linearen Gleichungssystems (2.6-2)

$$\begin{pmatrix} A_\Phi & P \\ P^{\text{tr}} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi(x, X) \\ S(x) \end{pmatrix}$$

ist eine \mathbb{P}_m^d -reproduzierende *Lagrange-Basis*, und es gilt

$$s_{f,X,\Phi}(x) = f(X)^{\text{tr}} u(x).$$

Für das *Fehlerfunktional*

$$\varepsilon_{x,u}(f) := f(x) - s_{f,X,\Phi}(x) = f(x) - f(X)^{\text{tr}} u(x)$$

¹³⁹Vgl. [c't:Morphing].

¹⁴⁰Vgl. [c't:Wavelets].

gilt mit der (für beliebige Vektoren $u, R \in \mathbb{C}^N$ und Skalare $a \in \mathbb{R}$ definierten) *quadratischen Form*

$$Q_{\Phi}(u, R, a) := u^{\text{tr}} A_{\Phi} \bar{u} - 2 \operatorname{Re} \left(u^{\text{tr}} \bar{R} \right) + a$$

für beliebige \mathbb{P}_m^d -reproduzierende Lagrange-Basen $u(x)$ von X die Gleichung

$$\|\varepsilon_{x,u}\|_{\Phi} = \sqrt{Q_{\Phi}(u(x), \Phi(x, X), \Phi(x, x))}.$$

Das *Minimierungsproblem* (2.9-1)/(2.9-2)

$$Q_{\Phi}(u(x), \Phi(x, X), \Phi(x, x)) = \operatorname{Min}!, \quad \text{wobei } P^{\text{tr}} u(x) = S(x) \text{ gilt,}$$

hat dieselbe Lösung $u^*(x)$ wie das lineare Gleichungssystem (2.6-2), sofern dieses eindeutig lösbar ist. Die *Kriging-Funktion*

$$\kappa_{X,\Phi}(x) := \sqrt{Q_{\Phi}(u^*(x), \Phi(x, X), \Phi(x, x))}$$

aus Kapitel 2.9 ist somit die für alle \mathbb{P}_m^d -reproduzierenden Lagrange-Basen $u(x)$ minimale Norm des Fehlerfunktional.

Alle oben genannten Ergebnisse werden einzig unter der Voraussetzung $\Phi \in \text{BPD}(m)$ erzielt. Kapitel 3 beleuchtet danach die Nachweismöglichkeiten für die positive Definitheit von Φ unter verschiedenen starken Voraussetzungen an Φ . Dabei wird die *Fourier-Transformation* eingesetzt. Die dadurch erzielten Integraldarstellungen erlauben darüber hinaus konkretere Fehleranalysen und Konditionsbetrachtungen. Die *Symbol-Funktion* $\operatorname{Sym}_{X,c}(\omega) := \sum_{j \in M} c_j e^{i \omega^{\text{tr}} x_j}$ aus Kapitel 3.1 verkürzt die *Integraldarstellung* von $c^{\text{tr}} A_{\Phi} \bar{c}$ nach Gleichung (3.1.1-1):

$$c^{\text{tr}} A_{\Phi} \bar{c} = (2\pi)^{\perp 2d} \int \varphi(\omega, -\eta) \operatorname{Sym}_{X,c}(\omega) \overline{\operatorname{Sym}_{X,c}(\eta)} d^{2d}(\omega, \eta).$$

Dabei geht in diesem Kapitel nur die Forderung nach *Symmetrie* der Basisfunktion Φ ein. Mit der *Fehler-Kern-Funktion*

$$g_{X,u(x)}(x, \omega) := \varepsilon_{x,X,\Phi}^{\prime} \left(e^{i \omega^{\text{tr}} x'} \right) = e^{i \omega^{\text{tr}} x} - \operatorname{Sym}_{X,c}(\omega)$$

aus Kapitel 3.1.2 ergibt sich für $f = \text{FT}^{\perp 1}(\hat{f})$ mit \hat{f} aus dem *Raum* $G_{s_0, s_{\infty}}$ die Integraldarstellung des Fehlerfunktional laut Satz 3.1.2-3:

$$\varepsilon_{x,u}(f) = (2\pi)^{\perp d} \int \hat{f}(\omega) g_{X,u(x)}(x, \omega) d^d \omega.$$

Weiterhin erhält man in Satz 3.1.2-4 Integraldarstellungen für $Q_{\Phi}(u, \Phi(x, X), \Phi(x, x))$ und daraus in Korollar 3.1.2-5 auch für $\kappa_{X,\Phi}^2(x)$:

$$\kappa_{X,\Phi}^2(x) = (2\pi)^{\perp 2d} \int \varphi(\omega, -\eta) g_{X,u(x)}(x, \omega) \overline{g_{X,u(x)}(x, \eta)} d^{2d}(\omega, \eta).$$

Dabei ist $u(x)$ die Lösung von Gleichung (2.6-2) und $\Phi(x, y) = \text{FT}^{\perp 1}(\varphi(\omega, \eta))(x, y)$. Die meisten Aussagen des Kapitels 3.1 finden sich so allgemein in keiner dem Autor bekannten Veröffentlichung.

Ab Kapitel 3.2 wird die *Translationsinvarianz* der Basisfunktion Φ vorausgesetzt. Dadurch ergeben sich die schöneren Integraldarstellungen laut Gleichung (3.2.1-1):

$$c^{\text{tr}} A_{\Phi} \bar{c} = (2\pi)^{\perp d} \int \varphi(\omega) \left| \text{Sym}_{X,c}(\omega) \right|^2 d\omega$$

und laut Korollar 3.2.2-2:

$$\kappa_{X,\Phi}^2(x) = (2\pi)^{\perp d} \int \varphi(\omega) \left| g_{X,u(x)}(x,\omega) \right|^2 d\omega .$$

Dabei ist $u(x)$ wie oben und $\Phi(x,0) = \overset{(d)}{\text{FT}}^{\perp 1}(\varphi)(x)$. Für Funktionen aus dem *native space* F_{Φ} erhält man in Korollar 3.2.2-3 die Fehlerabschätzung

$$|f(x) - s_{f,X,\Phi}(x)| \leq \|f\|_{F_{\Phi}} \cdot \kappa_{X,\Phi}(x) .$$

Die Aussagen des Kapitels 3.2 sind allgemein bekannt, doch wird gewöhnlich die stärkere Voraussetzung der Radialität an Φ gestellt.

Das Kapitel 3.3 schließlich bildet eine Art ‘Kompendium’ der altbekannten Theorie für *radiale* Basisfunktionen Φ . Für ganz konkrete Familien dieser Funktionen ergeben sich mit der *lokalen Stützstellendichte*

$$h_{\rho,X,d}(x) := \max_{y: d(y,x) < \rho} \min_{j \in M} d(y, x_j)$$

Abschätzungen der Kriging-Funktion in Form von Gleichung (3.3.2-1):

$$\kappa_{X,\Phi}(x) \leq F_{\Phi}(h_{\rho,X,d}(x)) .$$

Kapitel 3.3.3 liefert dann mit

$$d_{\min}(X) := \min_{x_i \neq x_j \in X} d(x_i, x_j)$$

auch noch *Konditionsabschätzungen* der Gestalt

$$\text{cond } A_{\Phi} \leq G_{\Phi}(q)^{\perp 1} \cdot H_{\Phi,X}(q) \quad \text{mit} \quad q := \frac{1}{2} d_{\min}(X) .$$

8.2 Praktische Ergebnisse

Im praktischen Teil dieser Arbeit werden zwei Beispielfunktionen mit ihren ‘klassischen’ Interpolanten vorgestellt. Da der lokale Detailreichtum dieser Funktionen stark wechselt, erforderten sie jeweils sehr inhomogene Stützstellenverteilungen. Diese wirken sich in Form von deutlichen ‘Hütchen’-Strukturen auf die Interpolanten aus. In fünf verschiedenen Ansätzen wird versucht, diese Effekte zu vermindern — mit unterschiedlichem Erfolg.

Die Ansätze mit ‘ortsabhängigen Skalierungsfunktionen’ sowie das ‘Hinzufügen einer Dimension’ haben sich nicht bewährt. Auf Grund der schlechten experimentellen Ergebnisse, die sich in einer absolut ungenügenden Reproduktion der vorgegebenen Funktionen zeigten, ist der immense Rechenaufwand nicht gerechtfertigt.

Erfreulicherweise haben gerade die Ansätze mit dem geringsten Rechenaufwand, nämlich ‘der Metrik vorgeschaltete Transformationen’ (Kap. 6.2), ‘der Metrik nachgeschaltete Funktionen’, (Kap. 6.3) und die ‘iterierte Interpolation’ (Kap. 7) besonders gute Ergebnisse erzielt. Die ‘Hütchen’-Effekte verschwinden oft völlig. Neue, störende Effekte sind kaum zu

verzeichnen. Der Rechenaufwand steigt nur um einen konstanten Faktor, bei der 'iterierten Interpolation' ist durch geschickte Programmierung sogar eine Reduktion gegenüber der 'klassischen' Methode möglich. Hierbei muß erwähnt werden, daß die Algorithmen noch nicht automatisch auf jede gegebene Stützstellenverteilung anwendbar sind. So müssen die entzerrende Transformation bzw. Funktion und auch die Aufteilung der Stützstellenmenge in homogene Teilmengen noch 'von Hand' bewerkstelligt werden. Die Entwicklung von Algorithmen, die aus einer Analyse der Stützstellendichte heraus selbständig geeignete und schnelle Transformationen erstellen bzw. die Stützstellenmenge aufteilen, ist eine Aufgabe für die Zukunft.

Symbolverzeichnis

- $(\cdot, \cdot)_\Phi$, semisymmetrische Sesquilinearform auf PF^d , 17, 19
- $(\cdot, \cdot)_{\text{Span}_\Phi^d}$, semisymmetrische Sesquilinearform auf Span_Φ^d , 21
- $\langle \cdot | \cdot \rangle_\Phi$, Skalarprodukt zu Φ , 19
- $\langle \cdot | \cdot \rangle_{H^d(\Phi)}$, Skalarprodukt auf $H^d(\Phi)$, 31
- $\langle \cdot | \cdot \rangle_{F_\Phi}$, Skalarprodukt auf F_Φ , 44
- $|\cdot|_{F_\Phi}$, Seminorm auf F_Φ , 1
- $|\cdot|_{H_0^d(\Phi)}$, Seminorm auf $H_0^d(\Phi)$, 28, 31
- $\|T\|$, Norm der Distribution T , 4
- $\|\cdot\|_{p,q}$, p, q -Norm einer Matrix, 12
- $\|\lambda\|_\Phi$, Φ -Norm des linearen Funktionals λ , 19
- $\|\cdot\|_{H^d(\Phi)}$, Norm auf $H^d(\Phi)$, 29
- $\|\cdot\|_{F_\Phi}$, Norm auf F_Φ , 44, 111
- $*$, Konvolution, 10, 51
- $\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{F}$, Folgen-Konvergenz bezüglich der Norm auf F , 4, 20
- $\#M$, Anzahl der Elemente einer Menge, 22, 57, 67, 102, 104, 110, 114
- \oplus , innere direkte Summe, 23, 25
- \oplus_a , äußere direkte Summe, 29
- $\lfloor x \rfloor := \max\{z \in \mathbb{Z} : z \leq x\}$ für $x \in \mathbb{R}$, 47
- $\lceil x \rceil := \min\{z \in \mathbb{Z} : z \geq x\}$ für $x \in \mathbb{R}$, 47
- \circ , Verkettungsoperator für Abbildungen, 96
- \cup , disjunkte Vereinigung, 110
- A , allgemeine Matrix, 12, 13, 14
- A^{tr} , transponierte Matrix, 3
- A_Φ , Interpolationsmatrix in Abhängigkeit von Φ , 3, 18, 21, 85, 108
- \tilde{A}_Φ , Matrix aus A_Φ und P , 21, 22, 23
- $A_{\Phi, X}$, Interpolationsmatrix in Abhängigkeit von Φ und X , 57
- $A_{\Phi Q}$, Interpolationsmatrix in Abhängigkeit von $\Phi \in \text{SBF}^d$ und $Q : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, 73, 77
- α , Multiindex aus \mathbb{N}_0^d , 4, 9, 16, 18, 54
- $\tilde{\alpha}^{(\nu)}(d_{\min})$, für $\phi_\alpha^{(\nu)}$ spezifische Wahl von α zu d_{\min} , 109, 111
- $\text{AwS}(\text{Operation})$, Speicheraufwand zur Ausführung der *Operation*, 66
- $\text{AwZ}(\text{Operation})$, Zeitaufwand zur Ausführung der *Operation*, 66
- $B_d(0, 1)$, abgeschlossene Einheitskugel zur Metrik d , 85
- β , Vektor der Gewichte der Basis-Polynome, 21
- $\text{BPD}(m)$, Menge der bedingt positiv definiten Funktionen der Ordnung m , 18
- \mathbb{C} , komplexe Zahlen, 1
- $\mathbb{C}^\times := \mathbb{C} \setminus \{0\}$, 74
- $\mathbb{C}^{d \times} := \mathbb{C}^d \setminus \{0\}$, 74
- c , Koeffizientenvektor der Interpolante, 3, 77
- $\text{cond}_{p,q}(A)$, p, q -Kondition der Matrix A , 13
- $\text{cond } A_\Phi$, Kondition der Interpolationsmatrix, 57
- $C(\mathbb{R}^d)$, Menge der auf \mathbb{R}^d stetigen Funktionen, 7
- $C^{|\alpha|}(\mathbb{R}^d)$, Raum der $|\alpha|$ mal differenzierbaren Funktionen, 9
- $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, Raum der beliebig oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger, 4
- d , Dimension des \mathbb{R}^d , 1, 10, 16
- $d(x, y)$, Metrik, 2, 45, 51, 67, 70, 93, 109
- $d_2(x, y)$, 2-Metrik, 2
- $d_{(q)}(x, y)$, skalierte Metrik, 67
- $d_Q(x, y) := Q(x)Q(y) d(x, y)$, 73
- $d_{\max}(X) := \max_{x_i, x_j \in X} d(x_i, x_j)$, 57, 87
- $d_{\min}(X) := \min_{x_i \neq x_j \in X} d(x_i, x_j)$, 57, 72, 87, 109, 111
- D^α , Ableitungsoperator, 4, 9, 54
- DB , Definitionsbereich, 50
- $D(f)$, Wu-Differentialoperator, 50
- δ , Dirac-Distribution, 16
- $\text{Diag}(\lambda_\nu; \nu = 1, \dots, d)$, Diagonalmatrix mit den Einträgen λ_ν , 84

- D_{\min} , angestrebter Mindestabstand von Stützstellen, 100
 $\varepsilon_{x,u}$, Fehlerfunktional der Interpolation bezüglich u , 26
 $\varepsilon_{x,X,\Phi}$, Fehlerfunktional der Interpolation bezüglich X und Φ , 25, 29
 $E(\omega, x)$, Transformationskern einer Integraltransformation, 76
 F , Funktionenklasse aus $H^d(\Phi)$, 29
 F , Raum von Testfunktionen, 4
 F^* , topologischer Dualraum zu F , 4
 $f(x)$, zu interpolierende Funktion, 1
 $(f(x))_+$, positiver Anteil der Funktion f , 51
 $f^{(\nu)}(x)$, noch zu interpolierende Differenz, 109, 111
 $\hat{f}(\omega)$, Funktion (vorzugsweise eine Fourier-Transformierte), 6, 7, 11
 $F_\Phi(h)$, Kriging-Abschätzungsfunktion, 51, 53, 70, 111
 F_Φ , Funktionenraum zu Φ , ‘native space’, 1, 44, 70, 71
 FT , Operator der Fourier-Transformation, 6
 $FT^{\perp 1}$, Operator der inversen Fourier-Transformation, 6, 77
 $^{(d)}$
 FT , Operator der Fourier-Transformation auf \mathbb{R}^d , 6
 $^{(d)}$
 $FT^{\perp 1}$, Operator der inversen Fourier-Transformation auf \mathbb{R}^d , 6
 $^{(d)}$
 FT^x , Operator der Fourier-Transformation bezüglich x auf \mathbb{R}^d , 6
 $^{(d)}$
 $FT^{\perp 1,\omega}$, Operator der inversen Fourier-Transformation bezüglich ω auf \mathbb{R}^d , 6
 Fun^d , Raum aller komplexwertigen Funktionen auf dem \mathbb{R}^d , 16, 28
 G , Funktionenklasse aus $H^d(\Phi)$, 29
 Γ , Gamma-Funktion, 5, 47
 $G_\Phi(q)$, Funktion zur Abschätzung von $\|A_{\Phi,X}^{\perp 1}\|^{\perp 1}$, 57
 grad , Grad eines Polynoms, 16
 $g_{X,c}(x, \omega)$, Fehler-Kern-Funktion, 37, 70
 G_{s_0,s_∞} , Raum der gegen $g_{X,c}(x, \omega)$ integrierbaren Funktionen, 37, 38, 43
 $H_0^d(\Phi)$, Raum der Funktionen, auf denen die $S_m^{d\perp}(\Phi)$ -Funktionale beschränkt sind, 28
 $H^d(\Phi) := H_0^d(\Phi)/\mathbb{P}_m^d$, 29, 32
 $(H^d(\Phi))^*$, topologischer Dualraum von $H^d(\Phi)$, 30
 \tilde{H}^d , Raum der Funktionen, auf denen die Funktionale aus $\tilde{S}_m^{d\perp}$ beschränkt sind, 33
 hp , ein ‘Häufungspunkt’ von X , 84
 $H_{\Phi,X}(q)$, Funktion zur Abschätzung von $\|A_{\Phi,X}\|$, 57
 HT , Operator der Hankel-Transformation erster Art, 8
 $h_{\rho,X,d}(x)$, lokale Stützstellendichte, 51, 71, 99, 111
 $h(x)$, Karte für eine Mannigfaltigkeit, 96, 99
 I , kanonische Injektion, 20
 $I(f)$, Wu-Integraloperator, 50, 51
 J_ν , Bessel-Funktionen erster Art, 5, 8
 $\kappa_{X,\Phi}(x)$, Kriging-Funktion, 28, 51, 99
 K_μ , modifizierte Bessel-Funktionen dritter Art, 5, 47
 $L_1(\mathbb{R}^d)$, Raum der auf \mathbb{R}^d absolut integrierbaren Funktionen(klassen), 7
 $L_1^{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, Raum der lokal integrierbaren Funktionen auf \mathbb{R}^d , 37
 $L_2(\mathbb{R}^d)$, Raum der auf \mathbb{R}^d quadratintegrierbaren Funktionen(klassen), 11
 $\lambda_{X,c}$, Punktauswertungsfunktional, 16, 21, 37
 $\bar{\lambda}(A)$, größter Betrag eines Eigenwertes der Matrix A , 12
 $\underline{\lambda}(A)$, kleinster Betrag eines Eigenwertes der Matrix A , 12
 $\text{ld} := \log_2$, 90
 \ln , natürlicher Logarithmus, 47
 M , Indexmenge der Stützstellen, 1, 77, 109
 $M^{(\nu)}$, Teilmenge von M , 109
 $\tilde{M}^{(\nu)}$, Teilmenge von M , 109

- m , Ordnung eines Polynoms, 16, 18, 47
 MBF^d , Raum der metrischen Basisfunktionen über \mathbb{R}^d , 2
 \mathbb{N} , natürliche Zahlen ohne 0, 1
 N , Anzahl der Stützstellen, 1, 3
 $\nu := \frac{d+2}{2}$, 8
 $N(j) := \{ \nu = 1, \dots, \mu : j \in \widetilde{M}^{(\nu)} \}$, 115
 \mathcal{O} , Landau-Symbol für Folgen, 66
 \mathcal{O} , Landau-Symbol für Funktionen, 6, 51
 Ω , Definitionsbereich, 1, 51
 ω , Variable einer Fourier-Transformierten, 6
 $O(\mathbb{R}^d)$, orthogonale Gruppe auf \mathbb{R}^d , 46
 ord , Ordnung eines Polynoms, 16
 \mathbb{P}_m^d , Raum der Polynome auf \mathbb{R}^d von Höchstordnung m , 16, 21, 24, 29
 P , Matrix der Polynom-Nebenbedingungen, 21, 22
 p , Polynomanteil der Interpolante, 3
 $\tilde{\phi}(r) := \phi(\sqrt{r})$, 46
 p_k , Basiselement für den \mathbb{P}_m^d , 21, 109
 PF^d , Raum der Punktauswertungsfunktionale, 16
 $(\mathbb{P}_m^d)^\perp := \text{S}_m^{d\perp}$, 19
 PFtoSpan_Φ , Abbildung $\text{PF}^d \rightarrow \text{Span}_\Phi^d$, 20
 Φ , Symmetrische, metrische, translationsinvariante oder radiale Basisfunktion auf \mathbb{R}^d , 2, 8, 21, 22, 77
 φ , Fourier-Transformierte von Φ , 8, 77
 $\Phi(x, X) := (\Phi(x, x_i))_{i \in M}$, 23, 24
 $\Phi_\alpha^{(\nu)}$, parametrisierte Familien von radialen Basisfunktionen, 109, 111
 ϕ , Basisfunktion auf \mathbb{R}^1 , 2, 8
 φ_0 , Fourier-Transformierte von ϕ , 8
 $\phi_\alpha^{(\nu)}$, parametrisierte Familien von radialen Basisfunktionen, 109
 φ, ψ , Testfunktionen, 4
 $P_{X, \Phi}(x)$, Power-Funktion, 1, 30
 $\text{Pr}_{i,j}$, Projektion auf die Koordinaten x_i, \dots, x_j , 99
 ψ_f , Funktional zur Funktion f , 31
 $\overline{\psi}_f$, Fortsetzung von ψ_f , 31
 \mathbb{Q} , rationale Zahlen, 74
 Q , Dimension des \mathbb{P}_m^d , 16, 21
 $Q_\Phi(c, R, a)$, quadratische Form, 26
 $Q(x)$, ortsabhängige Skalierungsfunktion, 73
 \mathbb{R} , reelle Zahlen, 1
 $\mathbb{R}^\times := \mathbb{R} \setminus \{0\}$, 74
 $\mathbb{R}^{d \times} := \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, 74
 RBF^d , Raum der radialen Basisfunktionen über \mathbb{R}^d , 3
 ρ , Parameter der lokalen Stützstellendichte, 51
 s_0 , Maß für die Ordnung der Singularität an 0, 37
 s_∞ , Maß für die Ordnung der Singularität an ∞ , 37
 SBF^d , Raum der symmetrischen Basisfunktionen über \mathbb{R}^d , 2
 Span_Φ^d , lineare Hülle der Translate von Φ , 20, 21
 $S(\mathbb{R}^d)$, Schwartz-Raum, 4, 7, 11
 $s(x)$, Interpolante, 1, 3, 109
 $s_f(x)$, Interpolante zur Funktion f , 1
 $s_{f, X, \Phi}(x)$, Interpolante zur Funktion f bezüglich X und Φ , 2, 22, 24–26, 111
 $s_{X, \Phi}(x)$, Interpolante bezüglich X und Φ , 21, 24
 $\tilde{s}^{(\nu)}(x)$, temporäre Interpolante, 109, 111
 $s^{(\nu)}(x)$, Summe von temporären Interpolanten, 109
 $S(x)$, Vektor der Polynome $(p_k(x))_{k=1, \dots, Q}$, 21, 23–25, 27
 $\tilde{\text{S}}_m^{d\perp}$, Raum der Punktauswertungsfunktionale, die auf den Polynomen von Ordnung $\leq m$ verschwinden, 18
 $\text{S}_m^{d\perp}(\Phi)$, Raum $\tilde{\text{S}}_m^{d\perp}$ mit $\langle \cdot | \cdot \rangle_\Phi$, 19, 28
 $\overline{\text{S}}_m^{d\perp}(\Phi)^\Phi$, Hilbertraum-Abschluß von $\text{S}_m^{d\perp}(\Phi)$, 20
 supp , Träger einer Funktion, 50
 $\text{Sym}_{X, c, E}(\omega)$, Symbol-Funktion des Funktionals $\lambda_{X, c}$ bezüglich des Transformationskernes E , 76
 $\text{Sym}_{X, c}(\omega)$, Symbol-Funktion des Funktionals $\lambda_{X, c}$, 36, 37
 T , Distribution, 4
 T_f , reguläre Distribution zu f , 4

- TBF^d, Raum der translationsinvarianten Basisfunktionen über \mathbb{R}^d , 2, 77, 78
- $u(x)$, Lagrange-Basis, 23, 25, 37–39, 44, 78, 116, 117
- $V_m^d := \{ c \in \mathbb{C}^N : c^{\text{tr}} p(X) = 0 \forall p \in \mathbb{P}_m^d \}$, 18
- $v(x)$, Vektor der Lagrange-Multiplikatoren, 23, 27
- vFT(f), verallgemeinerte Fourier-Transformierte der Funktion f , 11
- X , Menge der Stützstellen, 1, 22, 24, 51, 77, 85, 99, 108, 110
- $X^{(\nu)}$, Teilmenge von X , 109, 111
- $\widetilde{X}^{(\nu)}$, Teilmenge von X , 109
- x^{tr} , transponierter Vektor, 3
- $x^{\text{tr}} y$, Skalarprodukt der Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^d$, zur Unterscheidung vom komplexen Skalarprodukt $\langle f|g \rangle$ auf Funktionenräumen, 3
- y , Vektor der Stützwerte, 1
- \mathbb{Z} , ganze Zahlen, 74

Index

- Abbildung $\text{PFtoSpan}_{\mathbb{P}}$, 20
- abgeschlossene Einheitskugel zur Metrik d , 85
- Ableitung von Distributionen, 4
- Abstandsfunktion, 57, 73
- äußere direkte Summe, 30
- Approximation, 1, 25
- Approximationsfehler, 1, 25
- Approximationsgüte, 108

- baryzentrische Koordinaten, 86
- Basisfunktionen vom Differenz-Typ, 40
- Basiswechsel, 14
- bedingt positiv definite Funktion, 18, 47, 65, 68
- bedingt positiv definite Matrix, 14
- bedingt positiv semidefinite Funktion, 18
- beschränktes, lineares Funktional, 4
- Bessel-Differentialgleichung, 5
- Bessel-Funktionen dritter Art K_{μ} , 5, 47, 48, 70
- Bessel-Funktionen erster Art J_{ν} , 5, 9

- `CalculateAdditionalDistancesA`, 101, 102
- `CalculateAdditionalDistancesB`, 102–104
- `CalculateInterpolantQ`, 80
- `CalculateIteratedInterpolant`, 109
- Charakteristische Größe $d_{\min}(X)$ einer Stützstellenmenge X , 57
- compactly supported functions, 50, 69, 85, 108, 115

- Definitionsbereich, 2
- dekumulieren, 96
- δ -Funktional, 17
- Diagonalmatrix, 14, 83, 84
- Dirac-Distribution, 16
- direkte Summe, 21, 23, 30
- distance matrix, 21
- Distribution, 4, 17
- Distributionsraum, 4
- Dreiecksungleichung, 73
- Dualraum, 4, 30
- Dualsystem, 32

- Ecke eines Graphen, 102, 104
- Eigenvektor, 14, 15, 83
- Eigenwert, 14, 15, 83
- Einheitsintervall, 93
- Einheitskugel, 85
- elliptische Metrik d_E , 83
- Entzerrungsfunktion t , 93
- Entzerrungstransformation T , 85
- erweiterte Symbol-Funktion $\text{Sym}_{X,c,E}(\omega)$, 77
- euklidisch invariante Basisfunktion, 46

- Faltung von Funktionen, 10, 51
- Faltungsgleichung, 76
- Fehler-Kern-Funktion $g_{X,c}(x,\omega)$, 37, 70, 117
- Fehlerfunktional, 25–30, 116
- Fourier-Transformation von Distributionen, 10
- Fourier-Transformation von Funktionen, 6, 35, 117
- Fourier-transformierbar, 4, 10
- Fourier-Transformierte, 57, 58, 73, 78
- Funktion h_0 , 98
- Funktionenklasse, 29
- Funktionsraum, 1

- Gamma-Funktion Γ , 5, 48
- Gaußians, 62, 69, 85, 110
- generalized distance matrix, 21
- Gerschgorin, Kreisesatz von, 14, 57
- Gesamtdurchmesser $d_{\max}(X)$ einer Stützstellenmenge X , 57
- gesamte Interpolante, 108, 115
- globale Interpolante, 108
- Graph, 102, 104
- größter Betrag eines Eigenwertes einer Matrix, 12
- Grundfunktion, 72
- Güte-Funktion, 1, 30

- Häufungspunkt, 86
- Hankel-Transformation erster Art, 9
- Hauptachsenstruktur, 72, 83
- Hauptachsentransformationssatz, 14, 83
- Hilbertraum, 20, 33
- Hilbertraum-Abschluß, 20

- homogene Funktion, 75
- homogene Metrik, 70
- Indexmenge, 66
- induzierte Metrik, 96
- injektiv, 84, 85, 116
- innere direkte Summe, 21, 23
- Interpolante, 1, 24
- Interpolation mit symmetrischen Basisfunktionen, 3
- Interpolationsansatz, 3, 21
- Interpolationsaufgabe, 1, 3
- Interpolationsbedingung, 1, 21, 24, 108
- Interpolationsfehler, 1, 25, 26, 70, 100
- Interpolationsmatrix, 3, 19, 21, 57, 58, 62, 81–83, 108, 115
- Interpolationsproblem, 116
- Interpolationssystem, 3, 21, 23, 24, 27, 46, 60, 116
- inverse Fourier-Transformation, 6
- inverse multiquadrics, 50, 64, 68, 85, 88, 91, 94, 96
- iterierte Interpolation, 110
- kanonische Injektion, 20, 31
- Kante eines Graphen, 102, 104
- Karte, 96
- Kernfunktion, 7
- kleinster Betrag eines Eigenwertes einer Matrix, 12
- kompakter Träger, 50
- Kondition einer Matrix, 13, 86, 108, 115
- konvexe Linearkombination, 86
- Konvolution, 10
- Kreisesatz von Gerschgorin, 14, 57
- Kriging-Abschätzungsfunktion $F_{\Phi}(h)$, 53, 70, 111
- Kriging-Funktion, 1, 28, 30, 39, 44, 53, 78, 117, 118
- Kronecker-Symbol, 16
- Krümmung, 50
- Lagrange-Basis, 23–26, 28, 29, 38, 54
- Lagrange-Multiplikator, 28
- Landau-Symbol, 6, 66
- lineare Transformation, 84
- linearer Raum, 84
- lineares Funktional, 4
- lokale Interpolante, 108
- lokale Stützstellendichte, 51, 71, 118
- Mannigfaltigkeit, 96
- Mathematica, 60
- Matrix A_{Φ} , 3
- Matrixnorm, 12
- McDonald-Funktionen, 5, 48
- mehrfach monoton, 46
- Metrik, 2, 68, 73, 84, 93, 96, 98
- metrische Basisfunktion, 2
- Mexican-Hat-Funktion, 59–65, 82, 87–98, 105, 106, 113, 114
- Minimierungsproblem, 27, 117
- modifizierte Bessel-Funktionen dritter Art K_{μ} , 5, 47, 48
- Multipliiert, 37
- multiquadrics, 62, 65, 68, 108
- native space F_{Φ} , 1, 44, 59, 70, 71, 118
- Norm, 19
- Norm-Konvergenz, 17
- normisomorph, 12, 20
- Nullstellen, 12
- Nullstellenordnung, 12
- numerischer Aufwand, 66
- Operatornorm einer Matrix, 12
- Ordnung eines Polynoms, 16
- Orthonormalbasis, 14
- ortsabhängige Skalierungsfunktion, 73
- Parallelogrammgleichung, 31
- Parametrisierung, 98
- Parseval-Gleichung, 11
- Plancherel, Satz von, 11
- \mathbb{P}_m^d -exakte Lagrange-Basis, 25
- \mathbb{P}_m^d -reguläre Stützstellenmenge, 22, 29, 32
- \mathbb{P}_m^d -reproduzierende Interpolante, 23
- \mathbb{P}_m^d -reproduzierende Lagrange-Basis, 25, 26, 28, 29, 45, 54, 71, 116
- \mathbb{P}_m^d -unisolvante Stützstellenmenge, 22, 85, 98
- Polstellen, 12
- polyharmonic splines, 50
- polyharmonische Differentialgleichung, 50
- Polynom, 3, 16
- polynomials, 50, 68, 85

- Polynomraum \mathbb{P}_m^d , 16
 positiv definite Funktion, 18, 47, 68
 positiv definite Matrix, 3, 14, 19, 73, 83
 Power-Funktion, 1, 28, 30
 p, q -Norm einer Matrix, 12
 Prä-Hilbertraum, 19, 45
 Punktauswertungsfunktional, 16
 punktweise Konvergenz, 17

 quadratische Form Q_Φ , 26, 38, 43, 117
 Quadrik Q_Φ , 26
 Quasi-Interpolante, 24
 Quotientenvektorraum, 29, 32

 radiale Basisfunktion, 3, 45–47, 118
 radiale Basisfunktion mit kompaktem Träger, 47, 50, 69
 Raum $BPD(m)$, 18
 Raum F_Φ , 1, 44
 Raum Fun^d , 16
 Raum G_{s_0, s_∞} , 37, 117
 Raum $H_0^d(\Phi)$, 28
 Raum $H^d(\Phi)$, 29
 Raum \tilde{H}^d , 33
 Raum MBF^d , 2
 Raum PF^d , 17
 Raum RBF^d , 3
 Raum SBF^d , 2
 Raum $\tilde{S}_m^{d\perp}$, 18
 Raum $S_m^{d\perp}(\Phi)$, 19
 Raum $\overline{S}_m^{d\perp}(\Phi)^\Phi$, 20
 Raum Span_Φ^d , 20
 Raum TBF^d , 2
 reguläre Distribution, 4
 Regularisierung, 12
 Repräsentant, 29
 richtungshomogene Funktion, 75, 77, 78
 Riesz-Darstellungssatz, 33
 rotationsinvariante Basisfunktion, 46

 Satz von Duchon, 50
 Satz von Gerschgorin, 14, 57
 Satz von Plancherel, 11
 scattered data, 1
 Schwartz-Raum S , 4
 selbstadjungierte Matrix, 13–15, 83
 Seminorm, 1, 29, 50

 semisymmetrische Sesquilinearform auf PF^d , 17
 semisymmetrische Sesquilinearform auf Span_Φ^d , 21
 Skalarprodukt auf $H^d(\Phi)$, 31
 Skalarprodukt auf $S_m^{d\perp}(\Phi)$, 19
 Skalierung, 68
 Sobolew-Raum, 50
 Sobolew-Splines, 48, 69
 Spektralradius einer Matrix, 12
 sphärische Bessel-Funktionen erster Art $J_{\pm(n+\frac{1}{2})}$, 5, 9
 Stützstelle, 1, 58, 84, 108
 Stützstellenmenge, 53, 66, 72, 86, 110
 Stützstellenverteilung, 86
 Stützwert, 1, 108
 Subdivisionsverfahren, 110
 Symbol-Funktion $\text{Sym}_{X,c}(\omega)$, 36, 43, 77, 78, 117
 symmetrische Basisfunktion, 2, 40, 117

 temperierte Funktion, 4
 Testfunktion, 4
 thin plate splines, 50, 60, 62, 65, 68, 81, 82, 85, 101, 106, 108, 111
 topologischer Dualraum, 4, 30
 Träger, 50
 Transformation, 84
 Transformationskern, 77
 transformierte Metrik, 84
 translationsinvariante Basisfunktion, 2, 40, 57, 73, 118

 unitäre Matrix, 14, 83
 Unschärferelation, 58
 unvollständig monoton, 46

 verallgemeinerte Fourier-Transformation von Distributionen, 10
 verallgemeinerte Fourier-Transformation von Funktionen, 11, 35
 verallgemeinerte Fourier-Transformierte, 53
 verschobener Logarithmus, 47, 65, 69
 Vervollständigung, 20
 vollständig monoton, 46, 50

 Wellen-Funktion, 59–65, 87–98, 106, 112, 114

Wendland-Funktionen, 50, 51, 53, 54, 58,
64, 88, 91, 94, 96, 106, 111
wesentlicher Träger, 65, 87
Wu-Differentialoperator, 51
Wu-Funktionen, 50, 51, 53
Wu-Integraloperator, 50
Wu-Operatoren, 50

Literatur

- [AbramStegun] Milton Abramowitz, Irene A. Stegun (Editoren). *Handbook of Mathematical Functions, with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*. Dover Books on Elementary and Intermediate Mathematics, Dover, 9. Auflage, 1972. NAM-Bibliothek H/58.
- [BallEigenval] Keith Ball. Eigenvalues of Euclidean Distance Matrices. *Journal of Approximation Theory*, Vol. 68(1), S. 74–82, Januar 1992. NAM-Bibliothek Z/082/0049.
- [BallInvert] Keith Ball. Invertibility of Euclidean distance matrices and radial basis interpolation. In *CAT Report*, Volume Vol. 201. Texas A & M University, College Station, 1989.
- [BallSivaWard] Keith Ball, N. Sivakumar, J.D. Ward. On the Sensitivity of Radial Basis Interpolation to Minimal Data Separation Distance. *Constructive Approximation. An International Journal for Approximations and Expansions*, Vol. 8, S. 401–426, 1992. NAM-Bibliothek Z/044/0008.
- [BarrosNeto] José Barros-Neto. *An Introduction to the Theory of Distributions*. Marcel Dekker, 1973. NAM-Bibliothek F/191.
- [BaxterSivaWard] B.J.C. Baxter, N. Sivakumar, J.D. Ward. Regarding the p -Norms of Radial Basis Interpolation Matrices. *Constructive Approximation. An International Journal for Approximations and Expansions*, Vol. 10, S. 451–468, 1994. NAM-Bibliothek Z/044/0010.
- [Bron] Il'ja N. Bronstein, Konstantin A. Semendjajew. *Taschenbuch der Mathematik*. Harri Deutsch, B. G. Teubner - Leipzig, 24. Auflage, 1989.
- [BronE] Il'ja N. Bronstein, Konstantin A. Semendjajew. *Taschenbuch der Mathematik. Ergänzende Kapitel*. Harri Deutsch, 5. Auflage, 1988.
- [CADII] Robert Schaback. *Mathematische Methoden des Computer Aided Design II*. Vorlesung, Mathematisches Institut der Universität Göttingen, Sommersemester 1993.
- [c't:Morphing] Josef Pöpsel, Ute Claussen. Täuschend echt — Morphing mit dem PC. *c't — Magazin für Computertechnik*, S. 232–238, 11/1993.
- [c't:Wavelets] Meinrad Zeller. Flinkes Wellenspiel — Signalverarbeitung mit Wavelets. *c't — Magazin für Computertechnik*, S. 258–264, 11/1994.
- [DigSigVer] Robert Schaback. *Digitale Signalverarbeitung*. Vorlesung, Mathematisches Institut der Universität Göttingen, Sommersemester 1994.

- [Duchon77] J. Duchon. Splines minimizing rotation-invariant semi-norms in Sobolev spaces. In Walter Schempp, Karl Zeller (Editoren), *Constructive Theory of Functions of Several Variables*, S. 85–100. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1977. NAM-Bibliothek S/M/571.
- [Gel'fand] Israel M. Gel'fand, G. E. Shilov, M. I. Graev, N. Ya. Vilenkin. *Generalized Functions, Vol. 1–5*. Academic Press, New York, 1964–67. NAM-Bibliothek F/44–48.
- [Großmann] Siegfried Großmann. *Funktionalanalysis*. AULA-Verlag, 4. Auflage, 1988.
- [GuoHuSun] K. Guo, S. Hu, X. Sun. Conditionally Positive Definite Functions and Laplace-Stieltjes Integrals. *Journal of Approximation Theory*, Vol. 74(3), S. 249–265, September 1993. NAM-Bibliothek Z/082/0052.
- [HämmHoff] Günther Hämmerlin, Karl-Heinz Hoffmann. *Numerische Mathematik*. Springer, 1989.
- [HardyLittle] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, Georg Polya. *Inequalities*. Cambridge University Press, 2. Auflage, 1967. NAM-Bibliothek D/253.
- [HeuserFAn] Harro Heuser. *Funktionalanalysis*. Teubner, 3. Auflage, 1992.
- [HörmanderI] Lars Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I: Distribution Theory and Fourier Analysis*. Springer, 1983. NAM-Bibliothek G2/252.
- [IskeDr] Armin Iske. *Charakterisierung bedingt positiv definiter Funktionen für multivariate Interpolationsmethoden mit radialen Basisfunktionen*. Dissertation, NAM, Göttingen, 1994. NAM-Bibliothek E/347.
- [JacksonSurvey] I. R. H. Jackson. Radial basis functions: a survey and new results. Technical Report DAMTP 1988/NA16, Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, University of Cambridge, 1988.
- [Jantscher] Lothar Jantscher. *Distributionen*. de Gruyter, Berlin, 1971. NAM-Bibliothek F/166–167.
- [JetterBounds] Kurt Jetter. Riesz bounds in scattered data interpolation and L_2 -approximation. In Kurt Jetter, Florencio I. Utreras (Editoren), *Multivariate Approximation: From CAGD to Wavelets*, S. 167–177. World Scientific, Singapore, 1993. NAM-Bibliothek A/194.
- [KreßFAn] Rainer Kreß. *Funktionalanalysis*. Vorlesung, Mathematisches Institut der Universität Göttingen. Vgl. NAM-Bibliothek F/315, Wintersemester 1993/1994.
- [NarcowichWard91] Francis J. Narcowich, Joseph D. Ward. Norms of Inverses and Condition Numbers for Matrices Associated with Scattered Data. *Journal of Approximation Theory*, Vol. 64(1), S. 69–94, Januar 1991. NAM-Bibliothek Z/082/0047.

- [NarcowichWard92] Francis J. Narcowich, Joseph D. Ward. Norm Estimates for the Inverses of a General Class of Scattered-Data Radial-Function Interpolation Matrices. *Journal of Approximation Theory*, Vol. 69(1), S. 84–109, April 1992. NAM-Bibliothek Z/082/0049.
- [MadychNelsBound] W. R. Madych, S. A. Nelson. Bounds on Multivariate Polynomials and Exponential Error Estimates for Multiquadric Interpolation. *Journal of Approximation Theory*, Vol. 70(1), S. 94–114, Juli 1992. NAM-Bibliothek Z/082/0050.
- [MadychNelsConPosI] W. R. Madych, S. A. Nelson. Multivariate Interpolation and Conditionally Positive definite Functions. *Approximation Theory and its Applications*, Vol. 4(4), S. 77–89, Dezember 1988. NAM-Bibliothek Z/160/004.
- [MadychNelsConPosII] W. R. Madych, S. A. Nelson. Multivariate Interpolation and Conditionally Positive definite Functions II. *Mathematics of Computation*, Vol. 54(189), S. 211–230, Januar 1990. NAM-Bibliothek Z/115b/0049.
- [MadychNelsErrI] W. R. Madych, S. A. Nelson. Error bounds for multiquadric interpolation. In Charles K. Chui, Larry L. Schumaker, Joseph D. Ward (Editoren), *Approximation Theory VI, Vol. 2*, S. 413–416. Academic Press, London, 1990. NAM-Bibliothek A/113.
- [Micchelli86] C. A. Micchelli. Interpolation of Scattered Data: Distance Matrices and Conditionally Positive Definite Functions. *Constructive Approximation. An International Journal for Approximations and Expansions*, Vol. 2, S. 11–22, 1986. NAM-Bibliothek Z/044/002.
- [Powell92] M. J. D. Powell. The Theory of Radial Basis Function Approximation in 1990. In Will A. Light (Editor), *Advances in Numerical Analysis Vol. 2: Wavelets, Subdivision Algorithms, and Radial Basis Functions*, Kap. 3, S. 105–210. Clarendon Press, 1992. NAM-Bibliothek N/609.
- [SchabackAppRBF] Robert Schaback. Approximation by Radial Basis Functions with Finitely Many Centers. *Constructive Approximation. An International Journal for Approximations and Expansions*, — to appear —.
- [SchabackComRBF] Robert Schaback. Comparison of Radial Basis Function Interpolants. In Kurt Jetter, Florencio I. Utreras (Editoren), *Multivariate Approximation: From CAGD to Wavelets*, S. 293–305. World Scientific, Singapore, 1993. NAM-Bibliothek A/194.
- [SchabackErrCond] Robert Schaback. Error estimates and condition numbers for radial basis function interpolation. *Advances in Computational Mathematics*, Vol. 3(3), S. 251–264, April 1995. NAM-Bibliothek Z/175.
- [SchabackIntApp] Robert Schaback. Multivariate Interpolation and Approximation by Translates of a Basis Function. In Charles K. Chui, Larry L.

- Schumaker (Editoren), *Approximation Theory VIII*. World Scientific, Singapore, — to appear —.
- [SchabackLowBound] Robert Schaback. Lower Bounds for Norms of Inverses of Interpolation Matrices for Radial Basis Functions. *Journal of Approximation Theory*, Vol. 79(2), S. 287–306, November 1994. NAM-Bibliothek Z/082/0054.
- [SchabackRepPol] Robert Schaback. Reproduction of Polynomials by Radial Basis Functions. In Pierre-Jean Laurent, Alain Le Méhauté, Larry L. Schumaker (Editoren), *Wavelets, Images and Surface Fitting*, S. 459–466. AKPeters, 1994.
- [SchabackWu] Robert Schaback, Zongmin Wu. *Bochner like Theorem for radial functions*. NAM-Paper, Stand 18. Juli 1994.
- [SchoenPosDef] Isaac J. Schoenberg. Metric Spaces and Positiv Definite Functions. *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 44, S. 522–536, 1938.
- [SchoenComMon] Isaac J. Schoenberg. Metric Spaces and Completely Monotone Functions. *Annals of Mathematics*, Vol. 39(4), S. 811–841, October 1938.
- [SchwarzNum] Hans Rudolf Schwarz. *Numerische Mathematik*. Teubner, 2. Auflage, 1988.
- [SteinWeiss] Elias M. Stein, Guido Weiss. *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*. Princeton University Press, 1971. NAM-Bibliothek D/113.
- [WeinrichDr] Marko Weinrich. *Charakterisierung von Funktionenräumen bei der Interpolation mit radialen Basisfunktionen*. Dissertation, NAM, Göttingen, 1994. NAM-Bibliothek E/350.
- [WendlandDip] Holger Wendland. *Ein Beitrag zur Interpolation mit radialen Basisfunktionen*. NAM, Göttingen, 1994. Diplom-Arbeit, NAM-Bibliothek E/349.
- [WuCharPosDef] Zongmin Wu. Characterization of Positiv Definite Radial Functions. In T. Lyche, M. Daehlen, Larry L. Schumaker (Editoren), *Mathematical Methods for Curves and Surfaces*, S. 573–573. Vanderbilt University Press, Nashville, Tennessee, 1995.
- [WuCompSupp] Zongmin Wu. *Multivariate Compactly Supported Positive Definite Radial Functions*. NAM-Paper, Mai 1994.
- [WuDr] Zongmin Wu. *Die Kriging-Methode zur Lösung mehrdimensionaler Interpolationsprobleme*. Dissertation, NAM, Göttingen, 1986. NAM-Bibliothek E/223.

- [WuSchabLocErr] Zongmin Wu, Robert Schaback. Local error estimates for radial basis function interpolation of scattered data. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 13, S. 13–27, 1993. NAM-Bibliothek Z/095/0013.