Zur Eindeutigkeit beim inversen Randwertproblem zur Helmholtzgleichung bei konduktiven und resistiven Randbedingungen

Diplomarbeit

vorgelegt von

Thomas Gerlach

aus

Bleicherode

angefertigt

im Institut für Numerische und Angewandte Mathematik

der Georg–August–Universität zu Göttingen

1995

Danksagung

Herrn Professor Rainer Kreß möchte ich für die interessante Aufgabenstellung und seine wertvollen Hinweise und Anregungen danken.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

In vielen Anwendungsgebieten treten inverse Problemstellungen auf. Dabei heißen zwei Probleme zueinander invers, falls die Formulierung des einen Problems das Ergebnis bzw. die Lösung des anderen erfordert und umgekehrt. Als direktes Problem wird dabei meist das einfachere oder das Problem, mit dem man sich schon länger beschäftigt, bezeichnet, das Gegenstück als dazu inverses Problem.

Ein wichtiges Gebiet, in dem inverse Probleme zu finden sind, ist die Streutheorie. Hierbei geht es darum, „verborgene“ oder nicht zugängliche Gebilde (z. B. Tumore oder Erdöllagerstätten) zu untersuchen, d. h. ihre Form und eventuell auch weitere physikalische Eigenschaften (z. B. elektrische Leitfähigkeit) zu bestimmen, und zwar anhand von Meßdaten von Streufeldern zu bekannten einfallenden Feldern elektromagnetischer oder akustischer Wellen an zugänglichen Stellen (bei geologischen Untersuchungen z. B. an der Erdoberfläche).

Im zeitharmonischen Fall führt dabei eine Abseparation des zeitlichen Anteils in der beschreibenden Differentialgleichung auf die Helmholtzgleichung. Die Eigenschaften der Medien im zu untersuchenden Gebilde und seiner Umgebung sowie der Grenzschicht ergeben dann unterschiedliche Randwertprobleme zur Helmholtzgleichung, zu denen die zugehörigen inversen Probleme zu lösen sind.

Die Eindeutigkeit bei solchen inversen Streuproblemen ist sowohl von theoretischem Interesse als auch für die Umsetzung in numerische Algorithmen.

In der Literatur findet man zum Beispiel Eindeutigkeitsnachweise für das Dirichlet- und Neumannproblem (vgl. [CK2]), für das Impedanzproblem (vgl. [Po]) und für das Transmissionsproblem (siehe [KiK]).

In dieser Arbeit wird die Eindeutigkeit des Streukörpers zum inversen Streuproblem bei der Helmholtzgleichung mit konduktiven Randbedingungen gezeigt. Dieses Randwertproblem tritt bei der Modellierung der Streuung elektromagnetischer Wellen an dünnen Schichten in der Geophysik auf (siehe dazu die Ausführungen in [He1] und der dort angegebenen Literatur).

Für den Eindeutigkeitsnachweis werden die Methoden und Resultate aus der Arbeit von Kirsch und Kreß [KiK] zum Transmissionsproblem verallgemeinert. Die Eindeutigkeit wurde von Hettlich [He2] für eine schwache Formulierung des direkten Problems unter ähnlichen Voraussetzungen wie in der vorliegenden Arbeit gezeigt.

Die Idee, eine Folge von geeigneten singulären Lösungen des Streuproblems zu betrachten, wird auch in dieser Arbeit verfolgt. Unter der Annahme der Existenz zweier verschiedener Streukörper, die zu beliebiger einfallender ebener Welle gleiche Fernfelder des gestreuten Feldes liefern, werden diese singulären Lösungen so konstruiert, daß die zugehörigen Streuprobleme bezüglich des zweiten Streukörpers korrekt gestellt sind und die Punktquellen, die dafür verantwortlich sind, gegen einen Randpunkt des ersten Gebietes streben.

In Anlehnung an die bekannten Nachweise beim Dirichlet-, Neumann- und Transmissionsproblem, betrachtet man eine Kombination der Grundlösung und ihrer Normalenableitung in einer Umgebung dieses Punktes auf dem Rand des ersten Gebietes und erhält ein singuläres Verhalten mindestens erster Ordnung bei Annäherung der Punktquelle.

Unter Ausnutzung der Randbedingungen kann man die betrachtete Kombination der Grundlösung und der Normalenableitung auch durch die Lösung des Streuproblems ausdrücken und unter Ausnutzung der Wohlgestelltheit des Streuproblems bezüglich des zweiten Streugebietes ein schwächeres singuläres Verhalten nachweisen. Aus dem so konstruierten Widerspruch leitet sich dann die Eindeutigkeit des Streukörpers ab.

Dieser Eindeutigkeitsnachweis weicht insofern von den Beweisen der Eindeutigkeit des Streugebietes beim Dirichlet-, Neumann- und Transmissionsproblem (siehe [CK2] bzw. [KiK]) ab, als dort aus der korrekten Gestelltheit des Streuproblems bezüglich des einen Gebietes eine gleichmäßige Beschränktheit zur Ableitung eines Widerspruches benutzt wird. Gegenüber dem Vorgehen in [KiK] wird außerdem zusätzlich zu dem eigentlich zu untersuchen Gebiet ein geeignetes „Hilfsgebiet“

gewählt, bei dem keine inneren Dirichleteigenwerte vorliegen, so daß hierfür aus einer Beschränktheit von Dirichletdaten auf eine Beschränktheit der Neumanndaten geschlossen werden kann. Auf die Verwendung des Satzes von Holmgren (in Lemma 4.4 in [KiK]) kann verzichtet werden und der zentrale Hilfssatz, Lemma 4.3., aus [KiK] braucht unter Modifikationen nur noch in einer abgeschwächten Form gezeigt zu werden.

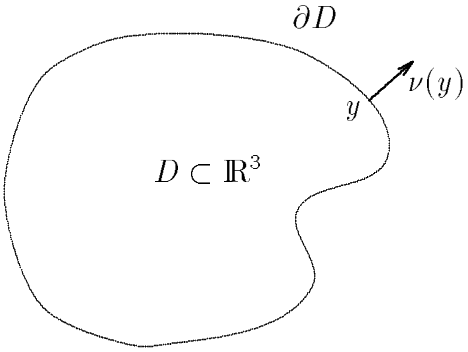
Im Kapitel **Grundlagen** werden Ergebnisse der Funktionalanalysis und der Potentialtheorie zusammengestellt, die für die weitere Behandlung relevant sind. Dabei wird für die Beweise zumeist auf die entsprechende Literatur verwiesen. Zusätzlich werden für den in [KiK] eingeführten Funktionenraum C_0 weitere Eigenschaften bewiesen.

Das folgende Kapitel **Das direkte Randwertproblem** beinhaltet die Formulierung und Behandlung der Existenz und Eindeutigkeit zweier unterschiedlicher Randwertprobleme zur Helmholtzgleichung mit Integralgleichungsmethoden sowie eine Formulierung als Streuproblem.

Im letzten Kapitel **Das inverse Streuproblem** wird für eines der im vorhergehenden Kapitel behandelten Randwertprobleme, das konduktive Problem, die Eindeutigkeit des Streukörpers beim zugehörigen inversen Streuproblem nachgewiesen.

2. Grundlagen

In diesem Kapitel sollen die mathematischen Grundlagen aus der Funktionalanalysis, der Potentialtheorie und der Theorie der Integralgleichungen, die zur Behandlung des direkten und inversen Streuproblems im weiteren benötigt werden, dargestellt werden.



In der gesamten Arbeit sei D ein beschränktes Gebiet im $\mathbb{R}^3$, dessen Komplement zusammenhängend ist. Der Rand ∂D von D sei C^2-glatt. (Die Definition findet sich etwa in [K1], Seite 21.) Es bezeichne ν die äußere Normale an ∂D.

2.1 Funktionalanalytische Grundlagen

Zunächst werden zwei fundamentale Resultate aus der Theorie der Operatorgleichungen formuliert.

Satz 2.1 (Riesz)
Sei X ein normierter Raum, I der Identitätsoperator auf X und $A : X \to X$ ein kompakter Operator. Ist $I - A$ injektiv, so existiert der inverse Operator $(I-A)^{-1} : X \to X$ und ist beschränkt.

Beweis: Siehe [K1] Theorem 3.4.

Satz 2.2 (Fredholmalternative)
Sei $\langle X, Y\rangle$ ein Dualsystem und seien $A : X \to X$, $B : Y \to Y$ kompakte zueinander adjungierte Operatoren. Dann ist
entweder

$$N(I - A) = \{0\} \qquad \text{und} \qquad N(I - B) = \{0\}$$

und

$$(I - A)(X) = X \qquad \text{und} \qquad (I - B)(Y) = Y$$

oder

$$\dim N(I - A) = \dim N(I - B) \in \mathbb{N}$$

und

$$(I - A)(X) = N(I - B)^{-} \qquad \text{und} \qquad (I - B)(Y) = N(I - A)^{-}.$$

Beweis: Siehe [K1] Theorem 4.17.

Jetzt sollen einige normierte Räume eingeführt werden, die sowohl für die Behandlung des direkten als auch des indirekten Problemes benötigt werden.

Definition 2.3 *Sei G eine kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ und $\alpha \in (0, 1)$. Als Raum $C^{0,\alpha}(G)$ der gleichmäßig hölderstetigen Funktionen über G bezeichnet man die Menge der komplexwertigen Funktionen f auf G, für die eine Konstante $c > 0$ existiert mit*

$$|f(x) - f(y)| \le c|x - y|^{\alpha}.$$

Die Menge der differenzierbaren komplexwertigen Funktionen f mit der Eigenschaft

$$|\operatorname{grad} f(x) - \operatorname{grad} f(y)| \le c|x - y|^{\alpha}$$

für eine Konstante c wird als Raum der gleichmäßig hölderstetig differenzierbaren Funktionen $C^{1,\alpha}(G)$ bezeichnet. Im Fall $G = \partial D$ ist der Gradient durch den Oberflächengradienten Grad *zu ersetzen (siehe dazu [CK1] Seite 39).*

Satz 2.4 *Der Raum $C^{0,\alpha}(G)$ bildet mit der Norm*

$$\|f\|_{0,\alpha,G} := \|f\|_{\infty,G} + |f|_{0,\alpha,G}\,,$$

wobei

$$|f|_{0,\alpha,G} := \sup_{\substack{x,y\in G\\ x\neq y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}$$

die 0-α-Halbnorm ist, einen Banachraum. Ebenso der Raum $C^{1,\alpha}(G)$ mit der Norm

$$\|f\|_{1,\alpha,G} := \|f\|_{\infty,G} + \|\operatorname{grad} f\|_{0,\alpha,G}\,,$$

wobei auch hier grad *durch* Grad *zu ersetzen ist, falls $G = \partial D$.*

Beweis: Siehe [CK1] Theorem 2.4.

Zum Rechnen mit Höldernormen wird das folgende Lemma angegeben, welches gestattet, anstelle des Oberflächengradienten den Gradienten zu benutzen, wenn Abschätzungen in der 1-α-Höldernorm benötigt werden.

Lemma 2.5 *Sei ∂D Rand der Klasse C^2 und $\Lambda \subset \partial D$ ein kompaktes zusammenhängendes Teilstück, außerdem sei $\alpha \in (0,1)$ fest.*

a) *Ist f eine auf einer Umgebung von Λ stetig differenzierbare Funktion, so daß $\|\operatorname{grad} f\|_{0,\alpha,\Lambda}$ existiert, so gibt es eine nur von Λ und ∂D abhängige Konstante C mit*

$$\|f\|_{1,\alpha,\Lambda} \leq C\left(\|f\|_{\infty,\Lambda} + \|\operatorname{grad} f\|_{0,\alpha,\Lambda}\right).$$

b) *Seien $\rho \in C^2(\partial D)$ und $\chi \in C(\partial D)$, $\varphi \in C^{0,\alpha}(\partial D)$ sowie $\psi \in C^{1,\alpha}(\partial D)$. Dann gibt es eine Konstante C, die nur von ρ, Λ und ∂D abhängt, so daß*

$$\begin{aligned} \|\rho\chi\|_{\infty,\Lambda} &\leq C\|\chi\|_{\infty,\Lambda}\,, \\ \|\rho\varphi\|_{0,\alpha,\Lambda} &\leq C\|\varphi\|_{0,\alpha,\Lambda}\,, \\ \|\rho\psi\|_{1,\alpha,\Lambda} &\leq C\|\psi\|_{1,\alpha,\Lambda}\,. \end{aligned}$$

Beweis:

a) Es gilt nach Definition der 1-α-Höldernorm auf dem Randstück Λ

$$\|f\|_{1,\alpha,\Lambda} = \|f\|_{\infty,\Lambda} + \|\operatorname{Grad} f\|_{\infty,\Lambda} + \sup_{\substack{x,y\in\Lambda\\ x\neq y}} \frac{|\operatorname{Grad} f(x) - \operatorname{Grad} f(y)|}{|x-y|^\alpha}\,.$$

Um die behauptete Beziehung nachzuweisen, müssen der zweite und dritte Summand geeignet abgeschätzt werden. Für den Oberflächengradienten gilt unter der Voraussetzung an die Funktion f (vergleiche dazu [CK2] Seite 160)

$$\operatorname{Grad} f = \operatorname{grad} f - (\operatorname{grad} f, \nu)\,\nu\,,$$

so daß sich weiter ergibt

$$\begin{aligned}\|\operatorname{Grad} f\|_{\infty,\Lambda} &\leq \sup_{x\in\Lambda} |\operatorname{grad} f(x)| + \sup_{x\in\Lambda} |(\operatorname{grad} f(x), \nu(x))\,\nu(x)| \\ &\leq 2\|\operatorname{grad} f\|_{\infty,\Lambda}\,.\end{aligned}$$

Außerdem erhält man durch Einfügen geeigneter Terme und Anwendung der Dreiecksungleichung die folgende Abschätzung

$$\begin{aligned}&|\operatorname{Grad} f(x) - \operatorname{Grad} f(y)| \leq \\ &\leq |(\operatorname{grad} f(x), \nu(x))\,\nu(x) - (\operatorname{grad} f(y), \nu(y))\,\nu(y)| + |\operatorname{grad} f(x) - \operatorname{grad} f(y)| \\ &\leq |(\operatorname{grad} f(x) - \operatorname{grad} f(y), \nu(x))\,\nu(x)| + |(\operatorname{grad} f(y), \nu(x) - \nu(y))\,\nu(x)| + \\ &\quad + |(\operatorname{grad} f(y), \nu(y))\,(\nu(x) - \nu(y))| + |\operatorname{grad} f(x) - \operatorname{grad} f(y)| \\ &\leq 2\,|\operatorname{grad} f(x) - \operatorname{grad} f(y)| + 2\,|\operatorname{grad} f(y)|\;|\nu(x) - \nu(y)| \\ &\leq 2\,|\operatorname{grad} f(x) - \operatorname{grad} f(y)| + 2L\,|x-y|\,|\operatorname{grad} f(y)|\,,\end{aligned}$$

wobei die nur von ∂D abhängende Konstante L aus der C^2-Glätte des Randes resultiert (siehe dazu [CK1] Theorem 2.2). Mit dieser Ungleichung folgt nun

$$\begin{aligned}&\sup_{\substack{x,y\in\Lambda\\ x\neq y}} \frac{|\operatorname{Grad} f(x) - \operatorname{Grad} f(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq \\ &\leq 2\sup_{\substack{x,y\in\Lambda\\ x\neq y}} \frac{|\operatorname{grad} f(x) - \operatorname{grad} f(y)|}{|x-y|^\alpha} + 2L\,\|\operatorname{grad} f\|_{\infty,\Lambda} \sup_{\substack{x,y\in\Lambda\\ x\neq y}} |x-y|^{1-\alpha} \\ &\leq \|\operatorname{grad} f\|_{0,\alpha,\Lambda}\left(2 + 2L\,(\operatorname{diam}\Lambda)^{1-\alpha}\right)\,.\end{aligned}$$

Insgesamt gilt dann also

$$\|f\|_{1,\alpha,\Lambda} \leq (2 + 2 + 2L\,(\operatorname{diam}\Lambda)^{1-\alpha})\,(\|f\|_{\infty,\Lambda} + \|\operatorname{grad} f\|_{0,\alpha,\Lambda})\,,$$

so daß sich die Behauptung mit $C = 4 + 2L\,(\operatorname{diam}\Lambda)^{1-\alpha}$ ergibt.

b) Nur für die dritte der Beziehungen sollen exemplarisch die Ideen des Beweises erläutert werden. Wie man mit Hilfe der Definition des Oberflächengradienten (siehe [CK2] Seite 160) sofort nachrechnet, gilt die Produktregel

$$\operatorname{Grad}(\rho\psi) = \psi \operatorname{Grad} \rho + \rho \operatorname{Grad} \psi\,,$$

woraus sich

$$\begin{aligned} \|\operatorname{Grad}(\rho\psi)\|_{\infty,\Lambda} &\le \|\psi\|_{\infty,\Lambda}\|\operatorname{Grad} \rho\|_{\infty,\Lambda} + \|\operatorname{Grad} \psi\|_{\infty,\Lambda}\|\rho\|_{\infty,\Lambda} \\ &\le \|\psi\|_{1,\alpha,\Lambda}\left(\|\operatorname{Grad} \rho\|_{\infty,\Lambda} + \|\rho\|_{\infty,\Lambda}\right) \end{aligned}$$

ergibt. Unter Ausnutzung der gleichen Beziehung erhält man außerdem

$$\begin{aligned} &|\operatorname{Grad}(\rho\psi)(x) - \operatorname{Grad}(\rho\psi)(y)| \le \\ &\le\ |\operatorname{Grad} \rho(x)\,(\psi(x)-\psi(y))| + |(\operatorname{Grad} \rho(x) - \operatorname{Grad} \rho(y))\,\psi(y)| + \\ &\qquad + |\operatorname{Grad} \psi(x)\,(\rho(x)-\rho(y))| + |(\operatorname{Grad} \psi(x) - \operatorname{Grad} \psi(y))\,\rho(y)|\,, \end{aligned}$$

so daß

$$\begin{aligned} &\sup_{\substack{x,y\in\Lambda\\ x\neq y}} \frac{|\operatorname{Grad}(\rho\psi)(x) - \operatorname{Grad}(\rho\psi)(y)|}{|x-y|^\alpha} \le \\ &\le\ \|\psi\|_{1,\alpha,\Lambda}\left(\|\operatorname{Grad} \rho\|_{\infty,\Lambda} + \sup_{\substack{x,y\in\Lambda\\ x\neq y}} \frac{|\operatorname{Grad} \rho(x) - \operatorname{Grad} \rho(y)|}{|x-y|^\alpha} + \right. \\ &\qquad\qquad \left. + \sup_{\substack{x,y\in\Lambda\\ x\neq y}} \frac{|\rho(x)-\rho(y)|}{|x-y|^\alpha} + \|\rho\|_{\infty,\Lambda}\right) \end{aligned}$$

folgt. Die auftretenden ∞-Normen sind dabei wegen $\rho \in C^2(\partial D)$ beschränkt. Zu untersuchen bleiben also die beiden möglicherweise singulären Terme. Es ist nun mit ähnlichen Argumenten wie im Beweis zu Theorem 2.2 in [CK1] möglich (die dort eingeführten Bezeichnungen werden auch hier benutzt, ohne sie alle noch einmal explizit einzuführen), auch deren Beschränktheit nachzuweisen. Man betrachtet dazu für einen beliebigen Punkt des Randes $z \in \partial D$ eine hinreichend kleine Umgebung V_z und deren Parametrisierung. Bezeichnen u und v die Bildpunkte von x beziehungsweise y, so gibt es ein $\gamma' > 0$ mit $\gamma'|u-v| \le |x-y|$, so daß man durch Einsetzen dieser Beziehung Abschätzungen nach oben

$$\sup_{\substack{x,y\in V_z\\ x\neq y}} \frac{|\operatorname{Grad}\,\rho(x)-\operatorname{Grad}\,\rho(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq$$

$$\leq \; \gamma'^{-\alpha}|u-v|^{1-\alpha} \sup_{\substack{u,v\in U\\ u\neq v}} \frac{|\operatorname{Grad}\,\tilde{\rho}(u)-\operatorname{Grad}\,\tilde{\rho}(v)|}{|u-v|}$$

und

$$\sup_{\substack{x,y\in V_z\\ x\neq y}} \frac{|\rho(x)-\rho(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq \gamma'^{-\alpha}|u-v|^{1-\alpha} \sup_{\substack{u,v\in U\\ u\neq v}} \frac{|\tilde{\rho}(u)-\tilde{\rho}(v)|}{|u-v|}$$

erhält, wobei $\tilde{\rho}(u) := \rho(x)$ die entsprechende Funktion auf dem Parameterbereich ist. In den Zählern treten dann höchstens erste Ableitungen nach den Parametern aus dem Parameterbereich auf, so daß aus der zweimaligen stetigen Differenzierbarkeit der Parametrisierung und der Funktion ρ mit dem Mittelwertsatz die Beschränktheit der beiden Ausdrücke folgt. Mittels eines Kompaktheitsarguments (siehe den oben zitierten Beweis) gibt es dann auch für das ganze Randstück Λ gültige obere Schranken. Insgesamt folgt damit die Behauptung. ∎

Neben den Räumen stetiger, hölderstetiger und hölderstetig differenzierbarer Funktionen soll noch eine weitere Klasse von Funktionen betrachtet werden, die an einer ausgezeichneten Stelle einen Pol höchstens erster Ordnung besitzen.

Definition 2.6 *Sei $x^* \in \partial D$ fest. Dann sei der folgende Raum von Funktionen auf ∂D definiert:*

$$C_0(\partial D) := \left\{ \varphi \in C(\partial D\setminus\{x^*\}) \,\middle|\, \exists \lim_{\substack{x\to x^*\\ x\in\partial D}} |x-x^*|\,\varphi(x) \right\}.$$

Satz 2.7 *Der Raum $C_0(\partial D)$ ist ausgestattet mit der Norm*

$$\|\varphi\|_{\infty,0} := \sup_{x\in\partial D\setminus\{x^*\}} |x-x^*|\,|\varphi(x)|\,,\ \varphi\in C_0(\partial D)$$

ein Banachraum.

Beweis: Die Normeigenschaften sowie die Linearität werden hier nicht nachgewiesen, es wird nur die Vollständigkeit gezeigt. Sei $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in

$C_0(\partial D)$. Man definiert

$$\psi_n(x) := \begin{cases} |x-x^*|\,\varphi_n(x) & , \quad x \in \partial D \setminus \{x^*\} \\ \lim_{\substack{y\to x^* \\ y\in\partial D}} |y-x^*|\varphi_n(y) & , \quad x = x^* \end{cases} .$$

Dann ist $\psi_n \in C(\partial D)$ nach Definition von $C_0(\partial D)$. Außerdem gilt

$$\|\psi_l - \psi_m\|_{\infty,\partial D} \leq \|\varphi_l - \varphi_m\|_{\infty,0}\,,$$

das heißt $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge im Banach-Raum $C(\partial D)$. Es existiert demnach ein $\psi \in C(\partial D)$ so, daß

$$\lim_{n\to\infty} \psi_n = \psi \text{ bezüglich } \|.\|_{\infty,\partial D}\,.$$

Für

$$\varphi(x) := \frac{\psi(x)}{|x-x^*|},\ x \neq x^*$$

gilt $\varphi \in C(\partial D \setminus \{x^*\})$ und $\lim_{x\to x^*} |x-x^*|\,\varphi(x) = \psi(x^*)$ und somit $\varphi \in C_0(\partial D)$. Sei $\varepsilon > 0$ vorausgestzt. Dann existiert ein $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq N(\varepsilon)$ gilt

$$\begin{aligned} \varepsilon &> \|\psi_n - \psi\|_{\infty,\partial D} \\ &= \sup_{x\in\partial D} |\psi_n(x) - \psi(x)| \\ &\geq \sup_{x\in\partial D\setminus\{x^*\}} |x-x^*|\,|\varphi_n(x) - \varphi(x)| \\ &= \|\varphi_n - \varphi\|_{\infty,0}\,. \end{aligned}$$

Es gilt also auch $\varphi_n \to \varphi, n \to \infty$ bezüglich $\|.\|_{\infty,0}$. ■

Lemma 2.8 *Sei $\Gamma \subset \partial D$ mit $\operatorname{dist}(\Gamma, x^*) =: \varepsilon > 0$. Dann existieren Konstanten c_1 und c_2 so, daß für alle Funktionen $\varphi \in C(\partial D)$ gilt*

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad \|\varphi\|_{\infty,\Gamma} \leq c_1 \|\varphi\|_{\infty,0}\,, \\ &\text{b)} \quad \|\varphi\|_{\infty,0} \leq c_2 \|\varphi\|_{\infty,\partial D}\,. \end{aligned}$$

Beweis: a) Es gilt

$$\begin{aligned}\|\varphi\|_{\infty,0} &= \sup_{x\in\partial D\setminus\{x^*\}} |x-x^*|\,|\varphi(x)| \\ &\geq \sup_{x\in\Gamma} |x-x^*|\,|\varphi(x)| \\ &\geq \sup_{x\in\Gamma} \varepsilon\,|\varphi(x)| \\ &= \varepsilon\,\|\varphi\|_{\infty,\Gamma}\,.\end{aligned}$$

Die Behauptung a) ergibt sich also für $c_1 = 1/\varepsilon$.

b) Eine kurze Rechnung ergibt

$$\begin{aligned}\|\varphi\|_{\infty,0} &= \sup_{x\in\partial D\setminus\{x^*\}} |x-x^*|\,|\varphi(x)| \\ &\leq \sup_{x\in\partial D\setminus\{x^*\}} (\mathrm{diam}\ \partial D)\,|\varphi(x)| \\ &\leq c_2\|\varphi\|_{\infty,\partial D}\end{aligned}$$

mit $c_2 = \mathrm{diam}\ \partial D$. ■

Um mit Hilfe der Fredholmschen Alternative Zusammenhänge zwischen Operatorgleichungen abzuleiten, benötigt man geeignete Dualsysteme. Bekannt ist, daß $\langle C(\partial D), C(\partial D)\rangle$, $\langle C(\partial D), L_2(\partial D)\rangle$ und $\langle L_2(\partial D), L_2(\partial D)\rangle$ mit der L_2-Bilinearform Dualsysteme bilden. $\langle C_0(\partial D), C_0(\partial D)\rangle$ ist mit dieser Bilinearform aber kein Dualsystem, da das entsprechende Integral für ein Paar von Elementen aus $C_0(\partial D)$ nicht immer existiert. Wie sich später als nützlich erweisen wird, gilt aber der folgende Satz:

Satz 2.9 $\langle C(\partial D), C_0(\partial D)\rangle$ *bildet mit der nichtentarteten Bilinearform*

$$\langle \varphi, \psi\rangle := \int_{\partial D} \varphi(x)\psi(x)\,ds(x)\,, \quad \varphi \in C(\partial D), \psi \in C_0(\partial D)$$

ein Dualsystem.

Beweis: Zuerst wird die Wohldefiniertheit des Integrals gezeigt, die Bilinearität ist offensichtlich. Seien φ, ψ wie angegeben, dann gilt

$$\left|\int_{\partial D} \varphi(x)\psi(x)\,ds(x)\right| \leq \int_{\partial D} |\varphi(x)|\,|x-x^*||\psi(x)|\frac{ds(x)}{|x-x^*|}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \|\varphi\|_{\infty,\partial D}\|\psi\|_{\infty,0}\int_{\partial D}\frac{ds(x)}{|x-x^*|}\\
&\leq C\|\varphi\|_{\infty,\partial D}\|\psi\|_{\infty,0}\\
&< \infty\,,
\end{aligned}
$$

wobei man die Existenz des Integrals $\int_{\partial D}|x-x^*|^{-1}\,ds(x)$ benutzt. Jetzt ist noch zu zeigen, daß die Bilinearform nichtentartet ist (d. h., daß zu einem von Null verschiedenen Element immer eines so existiert, daß das Dualitätsprodukt zwischen beiden nicht verschwindet). Sei $\varphi \in C(\partial D)$, $\varphi \neq 0$. Definiert man

$$\psi(x) := \overline{\varphi(x)} \;\text{ für } x \in \partial D \setminus \{x^*\}\,,$$

so ist $\psi \in C_0(\partial D)$ und

$$\langle\varphi,\psi\rangle = \int_{\partial D}|\varphi(x)|^2\,ds(x) \;> 0\,.$$

Ist nun $\psi \in C_0(\partial D)$ mit $\psi \neq 0$, so existiert ein $\tilde{x} \in \partial D \setminus \{x^*\}$ mit $\psi(\tilde{x}) \neq 0$ und wegen $\psi \in C_0(\partial D)$ auch eine Umgebung U mit $|U| =: \eta > 0$ von $\tilde{x}$, so daß $|\psi(x)|^2 \geq \varepsilon > 0$ und $|x-\tilde{x}| \geq \delta > 0$ für alle $x \in U$. Definiert man jetzt

$$\varphi(x) := \begin{cases} |x-x^*|\,\overline{\psi(x)} & ,\quad x \neq x^* \\ \lim_{x\to x^*}|x-x^*|\,\overline{\psi(x)} & ,\quad x = x^* \end{cases}\,,$$

so ist $\varphi \in C(\partial D)$ und es gilt

$$
\begin{aligned}
\langle\varphi,\psi\rangle &= \int_{\partial D}|x-x^*|\,|\psi(x)|^2\,ds(x)\\
&\geq \int_U \delta\varepsilon\,ds(x)\\
&\geq \eta\delta\varepsilon\\
&> 0\,.
\end{aligned}
$$

■

Wie im Raum der stetigen Funktionen erhält man auch für Integraloperatoren mit schwach singulärem Kern auf $C_0(\partial D)$ eine Kompaktheitsaussage. Genauer gilt das Lemma:

Lemma 2.10 *Sei $a(.,.)$ ein schwach singulärer Kern auf ∂D so, daß a stetig ist, falls $x \neq y$, und für eine Konstante M*

$$|a(x,y)| \leq \frac{M}{|x-y|}\,,\ x \neq y$$

erfüllt. Dann ist der durch

$$(A\varphi)(x) := \int_{\partial D} a(x,y)\,\varphi(y)\,ds(y)\,,\ x \in \partial D,\, x \neq x^*$$

definierte Integraloperator $A : C_0(\partial D) \to C_0(\partial D)$ kompakt.

Beweis: Zum Beweis siehe Lemma 4.2 in [KiK].

2.2 Grundlagen aus der Potentialtheorie und der Theorie der Helmholtzgleichung

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit Eigenschaften von Lösungen der Helmholtzgleichung

$$\triangle u + k^2 u = 0$$

im $\mathbb{R}^3$. Es sei $k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \mathrm{Im}(k) \geq 0$ vorausgesetzt. Eine Lösung der Helmholtzgleichung heißt ausstrahlend, falls sie der Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung (SAB)

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku\right) = 0$$

gleichmäßig in alle Richtungen $\hat{x} = x/r, r = |x|$ genügt. Aus der Theorie der Helmholtzgleichung ist die Grundlösung

$$\Phi_k(x,y) = \frac{1}{4\pi}\frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|},\ x \neq y,\ x,y \in \mathbb{R}^3$$

bekannt, wobei der Index k die zugehörige Wellenzahl kennzeichnet und im folgenden weggelassen wird, sofern keine Verwechslungen möglich sind. Die Grundlösung $\Phi_k(x,y)$ erfüllt für festes $y \in \mathbb{R}^3$ die Helmholtzgleichung bezüglich x in $\mathbb{R}^3 \setminus \{y\}$.

Ein wichtiges Hilfsmittel ist der folgende Satz:

Satz 2.11 (Greensche Formeln)
Unter den generellen Voraussetzungen an das Gebiet D und seinen Rand ∂D gelten die erste Greensche Formel

$$\int_D u \triangle v \, dx = \int_{\partial D} u \frac{\partial v}{\partial \nu} ds - \int_D (\operatorname{grad}\ u, \operatorname{grad}\ v)\, dx$$

und die zweite Greensche Formel

$$\int_D (u \triangle v - v \triangle u)\, dx = \int_{\partial D} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) ds$$

für $u, v \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$.

Aus den Greenschen Formeln ergibt sich für Lösungen der Helmholtzgleichung folgender Darstellungssatz, der es gestattet, die Lösungen als Superposition der Dirichlet- und Neumanndaten auf dem Rand darzustellen.

Satz 2.12 (Darstellungssatz)
Sei $v \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$ eine Lösung der Helmholtzgleichung $\triangle v + k^2 v = 0$ in D. Dann gilt

$$\int_{\partial D} \left[v(y) \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial v}{\partial \nu(y)}(y) \Phi(x,y) \right] ds(y) = \begin{cases} -v(x) & , \quad x \in D \\ 0 & , \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D} \end{cases} .$$

Im Außenraum gilt für eine Lösung $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}) \cap C^1(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ der Helmholtzgleichung $\triangle u + k^2 u = 0$, welche die (SAB) erfüllt,

$$\int_{\partial D} \left[u(y) \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u}{\partial \nu(y)}(y) \Phi(x,y) \right] ds(y) = \begin{cases} 0 & , \quad x \in D \\ u(x) & , \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D} \end{cases} .$$

Beweis: Siehe Theorem 3.1 und 3.3 in [CK1] .

Aus dem Verhalten der Grundlösung im Unendlichen läßt sich mit dem Darstellungssatz das asymptotische Verhalten einer ausstrahlenden Lösung der Helmholtzgleichung ableiten.

Satz 2.13 *Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}) \cap C^1(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ Lösung der Helmholtzgleichung und erfülle die (SAB). Dann gilt*

$$u(x) = \frac{e^{ik|x|}}{|x|} \left\{ u_\infty(\hat{x}) + O\left(\frac{1}{|x|}\right) \right\}, \ |x| \to \infty, \tag{2.1}$$

gleichmäßig in alle Richtungen $\hat{x} = x/|x|$, *wobei* u_∞ *auf der Einheitssphäre* Ω *definiert ist und als Fernfeld bezeichnet wird. Es gilt außerdem die Sommerfeldsche Endlichkeitsbedingung*

$$u(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right), \ |x| \to \infty\,, \tag{2.2}$$

gleichmäßig für alle Richtungen.

Beweis: Siehe [CK2] Seite 19 und Theorem 2.5.

Für die Untersuchung von Eindeutigkeitsfragen bei der Helmholtzgleichung ist das folgende Lemma von Rellich ein wichtiges Hilfsmittel.

Lemma 2.14 (Rellich-Lemma) *Sei* $k \in \mathbb{R}, k > 0$ *und* $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D})$ *Lösung der Helmholtzgleichung mit*

$$\int_{|x|=R} |u|^2 ds \to 0, \ R \to \infty.$$

Dann ist $u = 0$ *in* $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$.

Beweis: Siehe Lemma 3.14 in [CK1] .

Aus dem Rellich-Lemma ergibt sich

Folgerung 2.15 *Sei* $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}) \cap C^1(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ *Lösung von* $\triangle u + k^2 u = 0$ *in* $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ *und erfülle die (SAB). Es gelte außerdem*

$$\operatorname{Im}\left(k \int_{\partial D} u \frac{\partial \overline{u}}{\partial \nu} ds\right) \geq 0.$$

Dann ist $u = 0$ *in* $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$.

Beweis: Siehe Theorem 3.12 in [CK1] .

Eine Möglichkeit, Existenzaussagen zu Randwertaufgaben mittels Integralgleichungsmethoden zu gewinnen, besteht darin, die Lösungen in Form von Oberflächenpotentialen zu suchen (vergleiche zum Beispiel [CK1] oder [KlRo]).Diese Potentiale entsprechen einer Superposition von Grundlösungen, so daß sich Eigenschaften der Grundlösung auf diese übertragen.

Definition 2.16
Seien $\varphi, \psi \in C(\partial D)$. Dann heißt

$$u(x) = \int_{\partial D} \Phi(x,y)\varphi(y)\,ds(y),\ x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial D$$

Einfachschichtpotential (ESP) mit Dichte φ und

$$v(x) = \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(y)} \psi(y)\,ds(y),\ x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial D$$

Doppelschichtpotential (DSP) mit Dichte ψ.

Die Operatoren, die der Dichte das Einfach- und Doppelschichtpotential zuordnen, werden mit $\mathcal{E}$ beziehungsweise $\mathcal{D}$ bezeichnet.

Die beiden angegebenen Potentiale sind bei hinreichender Regularität der Dichten Lösungen der Helmholtzgleichungen und genügen im Außenraum der (SAB) (vergleiche dazu [CK1]). Im folgenden werden Zusammenhänge zwischen den Regularitäten der Dichten und der Potentiale dargestellt.

Satz 2.17 *Das Einfachschichtpotential u mit stetiger Dichte $\varphi \in C(\partial D)$ ist hölderstetig auf $\mathbb{R}^3$ und es gilt*

$$\|u\|_{0,\alpha,\mathbb{R}^3} \leq C_\alpha \|\varphi\|_{\infty,\partial D} \tag{2.3}$$

für eine von $\alpha \in (0,1)$ und ∂D abhängige Konstante C_α.

Beweis: [CK1] Theorem 2.12.

Satz 2.18 *Für die erste Ableitung des Einfachschichtpotentials zur Dichte $\varphi \in C(\partial D)$ gilt*

$$\frac{\partial u_\pm}{\partial \nu}(x) = \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(x)} \varphi(y) ds(y) \mp \frac{1}{2}\varphi(x),\ x \in \partial D$$

mit

$$\frac{\partial u_\pm}{\partial \nu}(x) = \lim_{h \downarrow 0} (\nu(x), \operatorname{grad}\ u(x \pm h\nu(x))),\ x \in \partial D$$

im Sinne gleichmäßiger Konvergenz auf ∂D. Das Integral existiert dabei als uneigentliches Integral. Ist die Dichte φ hölderstetig, so läßt sich die erste Ableitung *des Einfachschichtpotentials u gleichmäßig hölderstetig von $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ nach $\mathbb{R}^3 \setminus D$ und von D nach $\overline{D}$ fortsetzen. Es gelten die Abschätzungen*

$$\begin{aligned} \|\operatorname{grad}\, u\|_{0,\alpha,\mathbb{R}^3\setminus D} &\leq C_\alpha \|\varphi\|_{0,\alpha,\partial D}\,, \\ \|\operatorname{grad}\, u\|_{0,\alpha,\overline{D}} &\leq C_\alpha \|\varphi\|_{0,\alpha,\partial D}\,. \end{aligned}$$

Die Konstante C_α hängt nur von $\alpha \in (0,1)$ und ∂D ab.

Beweis: [CK1] Theorem 2.17 und 2.19.

Für das Doppelschichtpotential gelten nun ähnliche Beziehungen wie für das Einfachschichtpotential.

Satz 2.19 *Das Doppelschichtpotential v mit Dichte $\psi \in C(\partial D)$ läßt sich stetig fortsetzen von $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ nach $\mathbb{R}^3 \setminus D$ und von D nach $\overline{D}$ mit den Werten*

$$v_\pm(x) = \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(y)} \psi(y) ds(y) \pm \frac{1}{2}\psi(x),\ x \in \partial D\,.$$

Dabei existiert das Integral uneigentlich und

$$v_\pm(x) = \lim_{h \downarrow 0} v(x \pm h\nu(x)),\ x \in \partial D\,.$$

Es gelten die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|v\|_{\infty,\mathbb{R}^3\setminus D} &\leq C\|\psi\|_{\infty,\partial D}\,, \\ \|v\|_{\infty,\overline{D}} &\leq C\|\psi\|_{\infty,\partial D} \end{aligned} \tag{2.4}$$

mit einer nur vom Rand ∂D abhängenden Konstanten C. Für hölderstetige Dichte $\psi \in C^{0,\alpha}(\partial D)$ ist v gleichmäßig hölderstetig in $\mathbb{R}^3 \setminus D$ und in $\overline{D}$. Es gilt

$$\begin{aligned} \|v\|_{0,\alpha,\mathbb{R}^3\setminus D} &\leq C_\alpha \|\psi\|_{0,\alpha,\partial D}\,, \\ \|v\|_{0,\alpha,\overline{D}} &\leq C_\alpha \|\psi\|_{0,\alpha,\partial D} \end{aligned}$$

für eine von $\alpha \in (0,1)$ und ∂D abhängige Konstante C_α.

Beweis: Siehe [CK1] Theorem 2.13 und 2.16, sowie [CK2] Theorem 3.1.

Satz 2.20 *Für die erste Ableitung des Doppelschichtpotentials mit Dichte $\psi \in C(\partial D)$ gilt die Sprungbeziehung*

$$\frac{\partial v_+}{\partial \nu} - \frac{\partial v_-}{\partial \nu} = 0 \text{ auf } \partial D$$

im Sinne gleichmäßiger Konvergenz

$$\lim_{h \downarrow 0} \left(\frac{\partial}{\partial \nu} v(x + h\nu(x)) - \frac{\partial}{\partial \nu} v(x - h\nu(x)) \right) = 0$$

für $x \in \partial D$. Falls sogar $\psi \in C^{1,\alpha}(\partial D)$ gilt, läßt sich die erste Ableitung von v gleichmäßig hölderstetig von $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ nach $\mathbb{R}^3 \setminus D$ und von D nach $\overline{D}$ fortsetzen mit den Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|\operatorname{grad} v\|_{0,\alpha,\mathbb{R}^3 \setminus D} &\leq C_\alpha \|\psi\|_{1,\alpha,\partial D}\,, \\ \|\operatorname{grad} v\|_{0,\alpha,\overline{D}} &\leq C_\alpha \|\psi\|_{1,\alpha,\partial D}\,, \end{aligned} \tag{2.5}$$

wobei C_α wieder eine nur von $\alpha \in (0,1)$ und ∂D abhängige Konstante ist.

Beweis: [CK1] Theorem 2.21 und 2.23.

Für die Existenzanalyse sowie für die Behandlung des inversen Problems werden Randintegraloperatoren benötigt. Diese treten bei Randintegralgleichungen auf, auf die man bei der Suche nach Lösungen von Randwertaufgaben zur Helmholtzgleichung mittels Potentialansatz geführt wird.

Definition 2.21
Es seien $S_k, K_k, K_k' : C(\partial D) \to C(\partial D)$ definiert durch

$$\begin{aligned} (S_k\varphi)(x) &= 2\int_{\partial D} \Phi_k(x,y)\varphi(y)ds(y),\ x \in \partial D\,, \\ (K_k\varphi)(x) &= 2\int_{\partial D} \frac{\partial \Phi_k(x,y)}{\partial \nu(y)}\varphi(y)ds(y),\ x \in \partial D\,, \\ (K_k'\varphi)(x) &= 2\int_{\partial D} \frac{\partial \Phi_k(x,y)}{\partial \nu(x)}\varphi(y)ds(y),\ x \in \partial D \end{aligned}$$

und $T_k : C^{1,\alpha}(\partial D) \to C(\partial D)$ durch

$$(T_k\varphi)(x) = 2\frac{\partial}{\partial \nu(x)} \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi_k(x,y)}{\partial \nu(y)}\varphi(y)ds(y), x \in \partial D\,.$$

Dabei verdeutlicht der Index k wieder die Abhängigkeit von der Wellenzahl und wird, wenn keine Verwechslungen möglich sind, weggelassen.

Satz 2.22 *Die Operatoren $S, K, K', (T_k - T_{k_0})$ sind kompakt in $C(\partial D)$ und $C^{0,\alpha}(\partial D)$ und besitzen die folgenden Abbildungseigenschaften*

$$S, K, K', (T_k - T_{k_0}) \ : \ C(\partial D) \to C^{0,\alpha}(\partial D)\,, \tag{2.6}$$

$$S, K \ : \ C^{0,\alpha}(\partial D) \to C^{1,\alpha}(\partial D)\,, \tag{2.7}$$

$$T \ : \ C^{1,\alpha}(\partial D) \to C^{0,\alpha}(\partial D)\,. \tag{2.8}$$

Bezüglich der Bilinearform $\langle \varphi, \psi \rangle := \int_{\partial D} \varphi\psi \, ds$ gilt

$$\langle S\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, S\psi \rangle \text{ und } \langle K\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, K'\psi \rangle \tag{2.9}$$

für alle $\varphi, \psi \in C(\partial D)$. S und T haben die Regularisierungseigenschaft

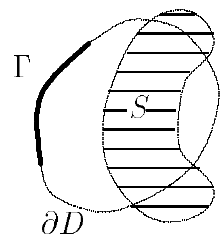
$$ST = K^2 - I \text{ und } TS = K'^2 - I\,. \tag{2.10}$$

Beweis: Siehe [CK1] Theorem 2.30 und 2.31, sowie [CK2] Seite 41 f.

Bemerkung 2.23
a) Unter dem Operator $T_k - T_{k_0}$ ist derjenige Integraloperator zu verstehen, der durch Differenzbildung der entsprechenden Integralkerne entsteht. (Man vergleiche dazu z. B. die Ausführungen in [Po] S. 9 f.) Dieser Operator ist auch für stetige Funktionen definiert, so daß der erste Teil des Satzes sinnvoll ist.
b) Aus den oben zitierten Beweisen geht hervor, daß die Integraloperatoren S, K, K' und $(T_k - T_{k_0})$ schwach singuläre Kerne, wie in den Voraussetzungen von Lemma 2.10 gefordert, besitzen, so daß sie auch kompakt in $C_0(\partial D)$ sind.
c) Der zur Wellenzahl $k = 0$ definierte Operator S_0 ist injektiv. Dies ergibt sich als Folgerung aus der eindeutigen Lösbarkeit des inneren Dirichletproblems zur Laplacegleichung $\triangle v = 0$.

Werden Integraloperatoren außerhalb ihrer Belegung ausgewertet, so übertragen sich dabei die Glattheitseigenschaften des Kernes. Insbesondere gilt das Lemma:

Lemma 2.24 *Seien $\Gamma \subset \partial D$ ein Randstück und $S \subset \mathbb{R}^3$ eine kompakte Menge* *mit* $\operatorname{dist}(S,\Gamma) > 0$. *Weiter sei A ein Integraloperator mit Kern $a(.,.)$, wobei $a(.,z)$ für alle $z \in \Gamma$ zweimal stetig differenzierbar in einer echten Umgebung U von S sei (d. h. es sei* $\operatorname{dist}(S, \mathbb{R}^3 \backslash U) > 0$*) und diese Ableitungen stetig von z abhängen.*



α sei eine reelle Zahl aus $(0,1)$ und x^* ein beliebiger aber fester Punkt des Randes ∂D. Dann existiert eine Konstante C so, daß für alle $\sigma \in C(\partial D)$ mit $\operatorname{supp}\sigma \subset \Gamma$

$$\begin{aligned} &\mathrm{a}_1) \qquad \|A\sigma\|_{\infty,S} \le C\|\sigma\|_{\infty,\Gamma}\,, \\ &\mathrm{a}_2) \qquad \|A\sigma\|_{0,\alpha,S} \le C\|\sigma\|_{\infty,\Gamma}\,, \\ &\mathrm{a}_3) \qquad \|A\sigma\|_{1,\alpha,S} \le C\|\sigma\|_{\infty,\Gamma}\,, \end{aligned}$$

beziehungsweise für alle $\sigma \in C_0(\partial D)$ mit $\operatorname{supp}\sigma \subset \Gamma$

$$\begin{aligned} &\mathrm{b}_1) \qquad \|A\sigma\|_{\infty,S} \le C\|\sigma\|_{\infty,0}\,, \\ &\mathrm{b}_2) \qquad \|A\sigma\|_{0,\alpha,S} \le C\|\sigma\|_{\infty,0}\,, \\ &\mathrm{b}_3) \qquad \|A\sigma\|_{1,\alpha,S} \le C\|\sigma\|_{\infty,0} \end{aligned}$$

gilt. Hierbei ist $\|.\|_{\infty,0}$ die bezüglich dem ausgezeichneten Punkt x^* in Satz 2.7 eingeführte Norm.

Beweis: Da der Träger von σ in Γ enthalten ist, gilt

$$\begin{aligned} \|A\sigma\|_{\infty,S} &\le \int_\Gamma \sup_{x\in S} |a(x,z)|\,|\sigma(z)|\,ds(z) \\ &\le \|a(.,.)\|_{\infty,S\times\Gamma}\,\|\sigma\|_{\infty,\Gamma} \\ &\le C\|\sigma\|_{\infty,\Gamma}\,, \end{aligned}$$

wobei die Stetigkeit des Kernes auf $S \times \Gamma$ ausgenutzt wurde. Damit ist a_1) bereits gezeigt. Analog erhält man auch b_1) aus

$$\begin{aligned} \|A\sigma\|_{\infty,S} &\le \int_\Gamma \sup_{x\in S} |a(x,z)|\,|z-x^*|\,|\sigma(z)|\,\frac{ds(z)}{|z-x^*|} \\ &\le \|a(.,.)\|_{\infty,S\times\Gamma}\,\|\sigma\|_{\infty,0}\int_\Gamma \frac{ds(z)}{|z-x^*|} \\ &\le C\|\sigma\|_{\infty,0} \end{aligned}$$

unter Verwendung der Existenz des in der vorletzten Zeile auftretenden Integrals. Man betrachtet nun die 0-α-Halbnorm auf Γ und erhält

$$|A\sigma|_{0,\alpha,S} \leq \int_\Gamma \sup_{\substack{x,y\in S\\ x\neq y}} \frac{|a(x,z)-a(y,z)|}{|x-y|^\alpha} \, |\sigma(z)| \, ds(z)\,.$$

Definiert man für $\delta = \frac{1}{3}\min\{\operatorname{dist}(S,\Gamma), \operatorname{dist}(S,\mathbb{R}^3\setminus U)\}$

$$\tilde{S} := \cup_{x\in S} B[x,\delta]\,,$$

wobei $B[x,\delta] = \{z \in \mathbb{R}^3 \mid |z-x| \leq \delta\}$ die abgeschlossene Kugel mit Mittelpunkt x und Radius δ bezeichnet, so ist $\tilde{S} \subset U$ sowie $\operatorname{dist}(\tilde{S},\Gamma) > 0$ und für $z \in \Gamma$ gilt

$$\begin{aligned}
&\sup_{\substack{x,y\in S\\ x\neq y}} \frac{|a(x,z)-a(y,z)|}{|x-y|^\alpha} \leq \\
&\leq \sup_{\substack{x,y\in S\\ |x-y|\leq\delta}} \frac{|a(x,z)-a(y,z)|}{|x-y|^\alpha} + \sup_{\substack{x,y\in S\\ |x-y|\geq\delta}} \frac{|a(x,z)-a(y,z)|}{|x-y|^\alpha} \\
&\leq \sup_{\substack{x,y\in S\\ |x-y|\leq\delta}} |x-y|^{1-\alpha} \, \|\operatorname{grad}\, a(.,z)\|_{\infty,\tilde{S}} + 2\delta^{-\alpha}\, \|a(.,z)\|_{\infty,S} \\
&\leq \delta^{1-\alpha} \|\operatorname{grad}\, a(.,.)\|_{\infty,\tilde{S}\times\Gamma} + 2\delta^{-\alpha}\, \|a(.,.)\|_{\infty,S\times\Gamma} \\
&\leq C\,.
\end{aligned}$$

Dabei wurde für den Summanden mit $|x-y| \leq \delta$ der Mittelwertsatz angewendet und benutzt, daß in diesem Fall die Verbindungsstrecke zwischen x und y ganz in $\tilde{S}$ enthalten ist. Die Stetigkeit des Kernes und seiner Ableitung liefert dann eine Schranke so, daß

$$|A\sigma|_{0,\alpha,S} \leq C\|\sigma\|_{\infty,\Gamma}$$

und folglich zusammen mit a_1) auch a_2) gilt. Der Nachweis für die Behauptung a_3) verläuft nun ganz analog, wenn man bei der Untersuchung der 0-α-Höldernorm von $\operatorname{grad} A\sigma$ in den eben vorgenommenen Abschätzungen den Kern durch seine Ableitung ersetzt. Ebenso wie bei der Übertragung des Resultats von a_1) auf b_1) lassen sich dann auch die Abschätzungen von a_2) auf b_2) und von a_3) auf b_3) übertragen. ■

Bemerkung 2.25

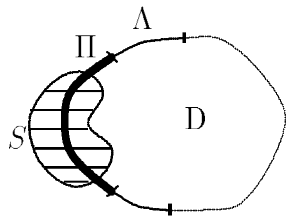
a) Für die in Definition 2.21 eingeführten Integraloperatoren und ebenso für die

Operatoren $\mathcal{E}$, $\mathcal{D}$ für das Einfach- beziehungsweise Doppelschichtpotential sind die Voraussetzungen von Lemma 2.24 erfüllt, da als Kerne nur die Grundlösung und ihre Ableitungen auftreten.
b) Ist das Kompaktum S, auf dem die entsprechende Norm ausgewertet wird, ein Teilstück des Randes ∂D, so bleibt die Behauptung des Lemmas richtig; auch im Falle der 1-α-Höldernorm, da Lemma 2.5 a) gestattet, statt des Oberflächengradienten den Gradienten zu betrachten.
c) Setzt man bezüglich der Differenzierbarkeit des Kernes höhere Regularität voraus, so ergeben sich auch entsprechende Abschätzungen. Für die in dieser Arbeit behandelten Probleme genügen aber die betrachteten Räume.
d) Hat der ausgezeichnete Punkt x^* positiven Abstand zu Γ, so folgt aus $\operatorname{supp}\sigma \subset \Gamma$ bereits $\sigma \in C_0(\partial D)$. Damit ergeben sich die Abschätzungen aus b) sofort mittels $\|\sigma\|_{\infty,\Gamma} \leq C\|\sigma\|_{\infty,0}$ aus der Behauptung a).

Das vorhergehende Resultat kann nun benutzt werden, um für die Auswertung eines Integraloperators auf einem Kompaktum ganz ähnliche Abschätzungen zu gewinnen, wobei aber auf die Eigenschaft, daß die Belegung einen Träger mit positivem Abstand zu der kompakten Menge hat, verzichtet werden soll. Zusätzlich benötigt man dann die Beschränktheit des Operators.

Lemma 2.26 *Es sei ∂D Rand eines C^2-glatten Gebietes, $\Pi \subset \Lambda \subset \partial D$ seien kompakte Randstücke und S eine kompakte Menge mit*

$$\operatorname{dist}(S, \partial D \setminus \Pi) > 0\,,$$
$$\operatorname{dist}(\Pi, \partial D \setminus \Lambda) > 0\,.$$



Weiter sei $x^* \in \partial D$ beliebig, aber fest.

Es bezeichne X einen der Räume $C(\partial D)$, $C^{0,\alpha}(\partial D)$, $C^{1,\alpha}(\partial D)$ und Y einen der Räume $C(S)$, $C^{0,\alpha}(S)$, $C^{1,\alpha}(S)$. $A : X \to Y$ sei ein beschränkter Integraloperator, das heißt es existiert eine Konstante c mit $\|A\sigma\|_Y \leq c\|\sigma\|_X$ für alle $\sigma \in X$. Für den Kern $a(.,.)$ von A gelte, daß $a(., z)$ für alle $z \in \partial D \setminus \Pi$ zweimal stetig differenzierbar in einer Umgebung von S ist.

Dann existiert eine Konstante C so, daß für alle $\sigma \in X$ gilt

$$\begin{aligned} &\text{a)} \qquad \|A\sigma\|_Y \leq C\{\|\sigma\|_{\infty,\partial D} + \|\sigma\|_{X(\Lambda)}\}\,, \\ &\text{b)} \qquad \|A\sigma\|_Y \leq C\{\|\sigma\|_{\infty,0} + \|\sigma\|_{X(\Lambda)}\}\,, \end{aligned}$$

wobei $\|.\|_{X(\Lambda)}$ bedeuten soll, daß die Norm des Raumes X nur auf dem Teilstück Λ ausgewertet wird.

Beweis: Der Integraloperator genügt offensichtlich den Voraussetzungen von Lemma 2.24 mit $\Gamma := \partial D \setminus \Pi$. Man wählt $\rho \in C^2(\partial D)$ mit

$$\begin{aligned} \operatorname{supp}\,\rho &\subset \partial D \setminus \Pi\,, \\ \rho(x) &= 1 \text{ für } x \in \partial D \setminus \Lambda\,. \end{aligned}$$

Dann gilt wegen der Linearität von A und der Dreiecksungleichung

$$\|A\sigma\|_Y \leq \|A(\rho\sigma)\|_Y + \|A((1-\rho)\sigma)\|_Y\,. \tag{2.11}$$

Für den ersten Summanden erhält man mit Lemma 2.24 a)

$$\begin{aligned} \|A(\rho\sigma)\|_Y &\leq C\|\rho\sigma\|_{\infty,\partial D\setminus\Pi}\,, \text{ da } \operatorname{supp}(\rho\sigma) \subset \partial D \setminus \Pi \\ &\leq C\|\sigma\|_{\infty,\partial D} \end{aligned} \tag{2.12}$$

beziehungsweise mit Lemma 2.24 b)

$$\|A(\rho\sigma)\|_Y \leq C\|\sigma\|_{\infty,0}\,. \tag{2.13}$$

Für den zweiten Summanden aus (2.11) ergibt sich unter Ausnutzung der Beschränktheit von A

$$\begin{aligned} \|A((1-\rho)\sigma)\|_Y &\leq c\|(1-\rho)\sigma\|_X \\ &= c\|(1-\rho)\sigma\|_{X(\Lambda)}\,, \text{ da } 1-\rho = 0 \text{ auf } \partial D \setminus \Lambda \\ &\leq C\|\sigma\|_{X(\Lambda)}\,, \end{aligned} \tag{2.14}$$

wobei hier in der letzten Abschätzung Lemma 2.5 b) benutzt wird.

Faßt man die Resultate (2.11), (2.12) bzw. (2.13) und (2.14) zusammen, so erhält man die Behauptung. ■

Wenn zusätzlich die geforderte Beschränktheit des Operators vorliegt, gilt die Bemerkung 2.25 zu Lemma 2.24 für Lemma 2.26 ganz entsprechend.

In dem folgenden Hilfssatz werden die Differenz der Grundlösung zu verschiedenen Wellenzahlen und deren Ableitung betrachtet und gleichmäßige Beschränktheit beziehungsweise für die zweiten Ableitungen ein singuläres Verhalten erster Ordnung nachgewiesen.

Lemma 2.27 *Seien S_1, S_2 kompakte Teilmengen des $\mathbb{R}^3$. Dann gilt*

a) $\|\Phi_k(.,.) - \Phi_{k'}(.,.)\|_{\infty, S_1 \times S_2} \leq C\,,$

b) $\|\operatorname{grad}_{1.Argument}(\Phi_k(.,.) - \Phi_{k'}(.,.))\|_{\infty, S_1 \times S_2} \leq C\,,$

c) $\left|\operatorname{grad}\left(\operatorname{grad}\,(\Phi_k(x,y) - \Phi_{k'}(x,y))_{j-te\ Komponente}\right)\right| \leq \dfrac{C}{|x-y|}$

für alle $x \neq y$, $x \in S_1$, $y \in S_2$ und $j = 1, 2, 3$

für eine nur von S_1, S_2, k und k' abhängende Konstante C.

Beweis: Es soll hier nur der Nachweis für b) und c) geführt werden. Im weiteren bezeichne $r := |x-y|$ den euklidischen Abstand von $x \in S_1$ und $y \in S_2$, sowie $R := \operatorname{diam}(S_1 \cup S_2)$ den größten Abstand zwischen Punkten aus den kompakten Mengen S_1 und S_2. Der Differentialoperator „grad“ beziehe sich im folgenden immer auf das erste Argument. Dann gilt

$$4\pi \operatorname{grad} \Phi_k(x,y) = (x-y)\, e^{ikr} r^{-3} (1 - ikr)\,. \tag{2.15}$$

Es gilt also für die Differenz der Grundlösungen zu zwei Wellenzahlen k und k'

$$\begin{aligned} &|4\pi \operatorname{grad}(\Phi_k(x,y) - \Phi_{k'}(x,y))| = \\ &= \left|(x-y)\, e^{ikr} r^{-3}(1-ikr) - (x-y)\, e^{ik'r} r^{-3}(1-ik'r)\right| \\ &= \frac{1}{r^2}\left|(1-ikr)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(ikr)^j}{j!} - (1-ik'r)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(ik'r)^j}{j!}\right| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sum_{j=2}^{\infty} \frac{|k|^j + |k'|^j}{j!}\, r^{j-2} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{|k|^{j+1} + |k'|^{j+1}}{j!}\, r^{j-1} \\
&\leq 2\left(|k|^2 + |k'|^2\right)\left(e^{|k|r} + e^{|k'|r}\right) \\
&\leq 2\left(|k|^2 + |k'|^2\right)\left(e^{|k|R} + e^{|k'|R}\right) \\
&\leq C\,,
\end{aligned}
$$

und der Nachweis für b) ist erbracht.

Benutzt man (2.15) und betrachtet die erste Komponente des Gradienten, die Resultate für die anderen beiden Komponenten sind ganz analog, so erhält man weiter

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{grad}\left((x_1 - y_1)\, e^{ikr} r^{-3}(1 - ikr)\right) = \\
&= e^{ikr} r^{-3} \begin{pmatrix} 1 - ikr + (x_1 - y_1)^2 r^{-2}(k^2 r^2 + 3ikr - 3) \\ (x_1 - y_1)(x_2 - y_2) r^{-2}(k^2 r^2 + 3ikr - 3) \\ (x_1 - y_1)(x_3 - y_3) r^{-2}(k^2 r^2 + 3ikr - 3) \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Durch Ausnutzen der Reihenentwicklung der Exponentialfunktion wie oben erhält man für die Differenz der zweiten Ableitungen der Grundlösung zu zwei Wellenzahlen k und k' das folgende Verhalten

$$
\begin{aligned}
&\left|\operatorname{grad}\left\{(x_1 - y_1)\ \left(e^{ikr} r^{-3}(1 - ikr) - e^{ik'r} r^{-3}(1 - ik'r)\right)\right\}\right| \leq \\
&\leq \left| \begin{matrix} c_1 + \frac{|k^2 - k'^2|}{2r} \left|1 - \frac{|x_1 - y_1|^2}{r^2}\right| \\ c_2 + \frac{|k^2 - k'^2|}{2r} \frac{|(x_1 - y_1)(x_2 - y_2)|}{r^2} \\ c_3 + \frac{|k^2 - k'^2|}{2r} \frac{|(x_1 - y_1)(x_3 - y_3)|}{r^2} \end{matrix} \right|,
\end{aligned}
$$

wobei die Konstanten c_j $(j = 1, 2, 3)$ von Potenzreihen in r herrühren (die von Exponentialreihen majorisiert werden) und die Beschränktheit von $r = |x - y|$ durch R ausgenutzt wird. Wegen $|x_j - y_j| \leq r$ $(j = 1, 2, 3)$ existiert also eine Konstante C so, daß für $j = 1, 2, 3$ gilt

$$
\left|\operatorname{grad}\ \left(\operatorname{grad}\ (\Phi_k(x, y) - \Phi_{k'}(x, y))_{j-te\ Komponente}\right)\right| \leq \frac{C}{r} = \frac{C}{|x - y|}\,.
$$

Damit ist auch Teil c) der Behauptung gezeigt. ■

Die Ergebnisse dieses Lemmas sollen nun benutzt werden, um auf C^2-glatten Randstücken eines Gebietes Abschätzungen für die Differenz der Grundlösung zu verschiedenen Wellenzahlen in unterschiedlichen Normen auf diesem Randstück abzuleiten, sofern das zweite Argument auf einer Strecke liegt, die senkrecht auf diesem Rand steht.

Lemma 2.28 *Es sei Γ ein kompaktes Teilstück des C^2-glatten Randes ∂D eines Gebietes, $h > 0$, $\alpha \in (0,1)$ beliebig aber fest und $x^* \in \partial D$ ein Punkt mit* $\operatorname{dist}(x^*, \partial D \setminus \Gamma) > 0$. *Es bezeichne*

$$x_n := x^* + \frac{h}{n}\,\nu(x^*)\,, \quad n \in \mathbb{N}\,,$$

wobei ν die äußere Normale an das Gebiet ist. Dann gilt:
a) *Es gibt eine Konstante C, die nur von Γ und h abhängt so, daß*

$$\begin{aligned} \|\Phi_k(.,x_n) - \Phi_{k_0}(.,x_n)\|_{\infty,\Gamma} &\leq C\,, \\ \|\operatorname{grad}(\Phi_k(.,x_n) - \Phi_{k_0}(.,x_n))\|_{\infty,\Gamma} &\leq C\,, \\ \left\| \frac{\partial}{\partial\nu}(\Phi_k(.,x_n) - \Phi_{k_0}(.,x_n)) \right\|_{\infty,\Gamma} &\leq C \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
b) *Es existieren $\varepsilon > 0$ und eine Konstante $C = C(\Gamma, h, \varepsilon)$ so, daß für $\Xi := \Gamma \cap B[x^*, \varepsilon]$ die Beziehung*

$$\|\Phi_k(.,x_n) - \Phi_{k_0}(.,x_n)\|_{1,\alpha,\Xi} \leq C\,n^\alpha$$

gilt.

Beweis: Es bezeichne

$$L := \{x^* + \vartheta h \nu(x^*) \mid \vartheta \in [0,1]\}$$

die Verbindungsstrecke zwischen x^* und x_1. Teil a) der Behauptung ergibt sich sofort aus Lemma 2.27 a) bzw. b) mit $S_1 := \Gamma$ und $S_2 := L$. Nun soll der Nachweis von b) geführt werden. Wegen der C^2-Glätte gibt es ein $\varepsilon > 0$ so, daß

$$(\nu(x^*),\ \nu(y)) \geq \frac{1}{2} \text{ für alle } y \in \Gamma \text{ mit } |y - x^*| \leq \varepsilon$$

(vergleiche dazu den Beweis von Theorem 2.6 in [CK1]).

Da $\Xi := \Gamma \cap B[x^*, \varepsilon]$ außerhalb eines Kreiskegels mit Spitze x^*, Achse L und Öffnungswinkel $\pi/3$ liegt, gilt für alle Punkte x der Verbindungsstrecke L zwischen x^* und x_1

$$\operatorname{dist}(x, \Xi) \geq \frac{|x - x^*|}{2} \text{ für alle } x \in L \tag{2.16}$$

insbesondere also auch

$$\operatorname{dist}(x_n, \Xi) \geq \frac{h}{2n} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\,. \tag{2.17}$$

Unter Verwendung von Lemma 2.5 a), welches es wegen der Differenzierbarkeitseigenschaften der Grundlösung gestattet, statt des Oberflächengradienten den gewöhnlichen Gradienten zu benutzen, erhält man für die zu untersuchende 1-α-Höldernorm

$$\begin{aligned} &\|\Phi_k(.,x_n) - \Phi_{k_0}(.,x_n)\|_{1,\alpha,\Xi} \leq \\ &\leq C\Big(\|\Phi_k(.,x_n) - \Phi_{k_0}(.,x_n)\|_{\infty,\Xi} + \|\operatorname{grad}(\Phi_k(.,x_n) - \Phi_{k_0}(.,x_n))\|_{\infty,\Xi} + \\ &\qquad + |\operatorname{grad}(\Phi_k(.,x_n) - \Phi_{k_0}(.,x_n))|_{0,\alpha,\Xi}\Big)\,. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Für die ersten beiden Summanden liegt nach Teil a) gleichmäßige Beschränktheit vor. Für den dritten Summanden gilt

$$\begin{aligned} &|\operatorname{grad}(\Phi_k(.,x_n) - \Phi_{k_0}(.,x_n))|_{0,\alpha,\Xi} = \\ &= \sup_{\substack{y\neq z\\ y,z\in\Xi}} \frac{\Big|\operatorname{grad}\left[(\Phi_k(y,x_n) - \Phi_{k_0}(y,x_n)) - (\Phi_k(z,x_n) - \Phi_{k_0}(z,x_n))\right]\Big|}{|y-z|^\alpha} \\ &\leq \left(\frac{h}{4n}\right)^{1-\alpha} \sup_{\substack{|y-z|<h/4n\\ y,z\in\Xi,\, y\neq z}} \frac{\Big|\operatorname{grad}\left[(\Phi_k(y,x_n) - \Phi_{k_0}(y,x_n)) - (\Phi_k(z,x_n) - \Phi_{k_0}(z,x_n))\right]\Big|}{|y-z|} \\ &\quad + \left(\frac{h}{4n}\right)^{-\alpha} \sup_{\substack{|y-z|\geq h/4n\\ y,z\in\Xi}} \Big|\operatorname{grad}\left[(\Phi_k(y,x_n) - \Phi_{k_0}(y,x_n)) - (\Phi_k(z,x_n) - \Phi_{k_0}(z,x_n))\right]\Big| \\ &\leq \left(\frac{h}{4n}\right)^{1-\alpha} \sup_{x\in S_n} |\operatorname{grad}\operatorname{grad}(\Phi_k(x,x_n) - \Phi_{k_0}(x,x_n))| + \\ &\quad +2\left(\frac{h}{4n}\right)^{-\alpha} \|\operatorname{grad}(\Phi_k(.,.) - \Phi_{k_0}(.,.))\|_{\infty,\Xi\times L}\;, \end{aligned}$$

wobei

$$S_n := \cup_{x\in\Xi} B(x, h/4n)$$

gesetzt wurde. Im letzten Schritt der Abschätzung wurde dabei für den Ausdruck mit $|y - z| < h/4n$ der Mittelwertsatz angewendet (die benutzte Schreibweise ist so zu verstehen, daß dies komponentenweise geschieht) und benutzt, daß in diesem Fall die Verbindungsstrecke zwischen y und z ganz in S_n liegt. Verwendet man jetzt die Resultate aus Lemma 2.27 b) und c), so ergibt sich

$$|\mathrm{grad}\,(\Phi_k(.,x_n) - \Phi_{k_0}(.,x_n))|_{0,\alpha,\Xi} \leq \left(\frac{h}{4n}\right)^{1-\alpha} \sup_{x\in S_n} \frac{C}{|x - x_n|} + 2C\left(\frac{h}{4n}\right)^{-\alpha} .$$

Nach der Wahl von Ξ gilt für alle $x \in S_n$ und ein zugehöriges $y_x \in \Xi$ mit $x \in B(y_x, h/4n)$

$$|x - x_n| \geq |\,|x_n - y_x| - |x - y_x|\,| \geq \frac{h}{2n} - \frac{h}{4n} = \frac{h}{4n}$$

und folglich

$$\sup_{x\in S_n} \frac{C}{|x - x_n|} \leq \frac{4Cn}{h} .$$

Insgesamt erhält man damit

$$\begin{aligned} |\,\mathrm{grad}(\Phi_k(.,x_n) - \Phi_{k_0}(.,x_n))|_{0,\alpha,\Xi} &\leq \left(\frac{h}{4n}\right)^{1-\alpha} \frac{4Cn}{h} + 2C\left(\frac{h}{4n}\right)^{-\alpha} \\ &\leq C\, n^{\alpha} \end{aligned}$$

mit einer von n unabhängigen Konstanten C. Für die 1-α-Höldernorm der Differenz der Grundlösungen ergibt sich zusammen mit der gleichmäßigen Beschränktheit der beiden anderen Summanden aus (2.18)

$$\|\Phi_k(.,x_n) - \Phi_{k_0}(.,x_n)\|_{1,\alpha,\Xi} \leq C\, n^{\alpha}$$

für eine geeignete Konstante C. ■

Das folgende Lemma erlaubt es, die Grundlösung der Helmholtzgleichung bei reeller Wellenzahl durch Superpositionen von ebenen Wellen beliebig genau zu approximieren, was später bei der Behandlung des inversen Problemes Anwendung finden wird.

Lemma 2.29 *Es genüge D den allgemeinen Voraussetzungen, und $u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$ sei Lösung der Helmholtzgleichung zu reeller Wellenzahl k. Außerdem bezeichne*

$$u^i(x;d) := e^{ik(x,d)}, \; d \in \Omega$$

und

$$V := \mathrm{span}\{u^i(.,d) | d \in \Omega\},$$

wobei $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = 1\}$. Dann existiert eine Folge $(q_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ mit

$$q_n \to u, \; \mathrm{grad}\; q_n \to \mathrm{grad}\; u \quad \textit{für } n \to \infty$$

gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von D.

Beweis: Siehe [K2] Lemma 10.4, oder auch [CK2] Theorem 5.4 und 5.5.

Zum Abschluß dieses Abschnittes soll noch ein Resultat erwähnt werden, welches es gestattet, zu einer vorgegebenen Wellenzahl Gebiete anzugeben, wo diese kein Eigenwert des inneren Dirichletproblems zur Helmholtzgleichung ist.

Lemma 2.30 *Sei G ein beschränktes Gebiet mit Durchmesser $d = \mathrm{diam}\; G$ und $u \in C^2(G) \cap C(\overline{G})$ eine Lösung der Helmholtzgleichung zur Wellenzahl k in G mit Randbedingung $u = 0$ auf ∂G. Gilt*

$$d < \ln\left(1 + \frac{1}{2|k|^2}\right),$$

so ist $u = 0$ in G.

Beweis: Lemma 3.26 in [CK1].

3. Das direkte Randwertproblem

In diesem Kapitel wird für das Transmissionsproblem zur Helmholtzgleichung zu zwei verschiedenen Übergangsbedingungen auf dem Rand die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen untersucht. Dabei kommen Integralgleichungsmethoden zum Einsatz.

3.1 Problemstellung

Zunächst werden die beiden Randwertprobleme in der für die Behandlung von Existenz und Eindeutigkeit relevanten Form definiert.

Definition 3.1 (Resistives Problem (PR))
Gegeben sind $k, k_0, \mu, \mu_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *mit* $\mu + \mu_0 \neq 0$ *und* $\mathrm{Im}(k) \geq 0, \mathrm{Im}(k_0) \geq 0$, *sowie* $g \in C^{0,\alpha}(\partial D)$, $\lambda, 1/\lambda, f \in C^{1,\alpha}(\partial D)$ *mit* $\alpha \in (0,1)$.
Gesucht ist ein Paar (u, v) *mit*

$$u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}) \cap C^1(\mathbb{R}^3 \setminus D)\,, \tag{3.1}$$

$$v \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})\,, \tag{3.2}$$

$$\triangle u + k^2 u = 0 \text{ in } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}\,, \tag{3.3}$$

$$\triangle v + k_0^2 v = 0 \text{ in } D \tag{3.4}$$

unter den resistiven Randbedingungen

$$u - v = \lambda \frac{\partial u}{\partial \nu} + f \text{ auf } \partial D\,, \tag{3.5}$$

$$\mu \frac{\partial u}{\partial \nu} - \mu_0 \frac{\partial v}{\partial \nu} = g \text{ auf } \partial D\,. \tag{3.6}$$

Außerdem erfülle u die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung (SAB)

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku\right) = 0 \tag{3.7}$$

gleichmäßig in alle Richtungen $\hat{x} = x/r, r = |x|$.

Eine ähnliche Aufgabe, die einer Kombination aus einem Transmissions- und einem Impedanzproblem entspricht, ist durch folgende Definition gegeben. Um die Existenz und Eindeutigkeit dieses Problemes mit den hier verwendeten Methoden untersuchen zu können, ist es möglich, etwas geringere Regularitätsanforderungen an die Parameter zu stellen als beim vorangegangenen resistiven Problem.

Definition 3.2 (Konduktives Problem (PK))
Gegeben sind $k, k_0, \mu, \mu_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *mit* $\mu + \mu_0 \neq 0$ *und* $\mathrm{Im}(k) \geq 0, \mathrm{Im}(k_0) \geq 0$, *sowie* $\lambda, g \in C^{0,\alpha}(\partial D)$, $f \in C^{1,\alpha}(\partial D)$ *mit* $\alpha \in (0,1)$.
Gesucht ist ein Paar (u, v) *mit*

$$u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}) \cap C^1(\mathbb{R}^3 \setminus D), \tag{3.8}$$

$$v \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D}), \tag{3.9}$$

$$\triangle u + k^2 u = 0 \text{ in } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}, \tag{3.10}$$

$$\triangle v + k_0^2 v = 0 \text{ in } D \tag{3.11}$$

unter den konduktiven Randbedingungen

$$\mu u - \mu_0 v = f \text{ auf } \partial D, \tag{3.12}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{\partial v}{\partial \nu} = \lambda u + g \text{ auf } \partial D. \tag{3.13}$$

Außerdem erfülle u die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung (SAB)

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku\right) = 0 \tag{3.14}$$

gleichmäßig in alle Richtungen $\hat{x} = x/r, r = |x|$.

3.2 Existenz und Eindeutigkeit beim Transmissionsproblem mit resistiven Randbedingungen

In diesem Abschnitt werden erst einige Bedingungen angegeben, die Eindeutigkeit des resistiven Problems (PR) garantieren. Anschließend wird mittels Integralgleichungsmethoden eine Existenzanalyse durchgeführt.

Satz 3.3 *Das resistive Problem (PR) besitzt höchstens eine Lösung, falls*

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Im}\left(\overline{k}\tfrac{\mu_0}{\mu}k_0^2\right) &\geq 0\,, \\ \operatorname{Im}\left(k\tfrac{\overline{\mu_0}}{\overline{\mu}}\right) &\geq 0\,, \\ \operatorname{Im}\left(k\lambda(y)\right) &\geq 0\,, \quad \textit{für alle } y\in\partial D\,. \end{aligned}\right\} \tag{3.15}$$

Beweis: Wegen der Linearität genügt es, das homogene Problem $f = g = 0$ zu betrachten und für dieses zu zeigen, daß es nur die triviale Lösung besitzt. Unter Ausnutzung der resistiven Randbedingungen (3.5), (3.6) ergibt sich

$$\begin{aligned} &\operatorname{Im}\left(k\int_{\partial D} u\frac{\partial\overline{u}}{\partial\nu}ds\right) = \\ &= -\frac{i}{2}\int_{\partial D}\left(ku\frac{\partial\overline{u}}{\partial\nu}-\overline{k}\overline{u}\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)ds \\ &= -\frac{i}{2}\int_{\partial D}\left[k\left(v+\lambda\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)\frac{\partial\overline{u}}{\partial\nu}-\overline{k}\left(\overline{v}+\overline{\lambda}\frac{\partial\overline{u}}{\partial\nu}\right)\frac{\partial u}{\partial\nu}\right]ds \\ &= -\frac{i}{2}\int_{\partial D}\left[k\left(v+\lambda\frac{\mu_0}{\mu}\frac{\partial v}{\partial\nu}\right)\frac{\overline{\mu_0}}{\overline{\mu}}\frac{\partial\overline{v}}{\partial\nu}-\overline{k}\left(\overline{v}+\overline{\lambda}\frac{\overline{\mu_0}}{\overline{\mu}}\frac{\partial\overline{v}}{\partial\nu}\right)\frac{\mu_0}{\mu}\frac{\partial v}{\partial\nu}\right]ds\,. \end{aligned}$$

Mit Anwendung des Greenschen Satzes 2.11 erhält man hieraus

$$\begin{aligned} &\operatorname{Im}\left(k\int_{\partial D} u\frac{\partial\overline{u}}{\partial\nu}ds\right) = \\ &= -\frac{i}{2}\int_D\left[k\frac{\overline{\mu_0}}{\overline{\mu}}\{v\triangle\overline{v}+(\operatorname{grad}\,v,\operatorname{grad}\,\overline{v})\}-\overline{k}\frac{\mu_0}{\mu}\{\overline{v}\triangle v+(\operatorname{grad}\,\overline{v},\operatorname{grad}\,v)\}\right]dx\,+ \\ &\quad -\frac{i}{2}\int_{\partial D}\left(k\lambda-\overline{k\lambda}\right)\frac{|\mu_0|^2}{|\mu|^2}\frac{\partial v}{\partial\nu}\frac{\partial\overline{v}}{\partial\nu}\,ds \\ &= -\frac{i}{2}\int_D\left[\left(-k\overline{k_0}^2\frac{\overline{\mu_0}}{\overline{\mu}}+\overline{k}k_0^2\frac{\mu_0}{\mu}\right)|v|^2+\left(k\frac{\overline{\mu_0}}{\overline{\mu}}-\overline{k}\frac{\mu_0}{\mu}\right)|\operatorname{grad}\,v|^2\right]dx\,+ \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& -\frac{i}{2}\int_{\partial D}\left(k\lambda-\overline{k\lambda}\right)\frac{|\mu_0|^2}{|\mu|^2}\left|\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|^2 ds \\
= \quad & \operatorname{Im}\left(\overline{k}k_0^2\frac{\mu_0}{\mu}\right)\int_D |v|^2 dx + Im\left(k\frac{\overline{\mu_0}}{\overline{\mu}}\right)\int_D |\operatorname{grad}\ v|^2 dx + \\
& + \int_{\partial D}\operatorname{Im}(k\lambda)\frac{|\mu_0|^2}{|\mu|^2}\left|\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|^2 ds\,.
\end{aligned}
$$

Unter der Voraussetzung (3.15) ergibt sich

$$
\operatorname{Im}\left(k\int_{\partial D} u\frac{\partial \overline{u}}{\partial \nu}ds\right) \geq 0
$$

und daraus mit Folgerung 2.15 des Rellich-Lemmas $u = 0$ in $\mathbb{R}^3 \setminus D$, folglich $u = \partial u/\partial\nu = 0$ auf ∂D und mit den Randbedingungen (3.5), (3.6) $v = \partial v/\partial \nu = 0$ auf ∂D. Der Darstellungssatz 2.12 liefert dann auch $v = 0$ in D. ■

Ein weiteres Eindeutigkeitsresultat läßt sich unter direkter Ausnutzung des Rellich-Lemmas erzielen.

Satz 3.4 *Das resistive Problem (PR) besitzt höchstens eine Lösung, falls*

$$
\left.\begin{array}{rcl}
\operatorname{Re}(k) & \neq & 0\,, \\
\operatorname{Re}(k)\operatorname{Im}\left(\frac{\mu_0}{\mu}k_0^2\right) & \geq & 0\,, \\
\operatorname{Re}(k)\operatorname{Im}\left(\frac{\overline{\mu_0}}{\overline{\mu}}\right) & \geq & 0\,, \\
\operatorname{Re}(k)\operatorname{Im}\left(\lambda(y)\right) & \geq & 0\,,\ \textit{für alle } y\in\partial D\,.
\end{array}\right\} \tag{3.16}
$$

Beweis: Sei R so gewählt, daß $D \subset B(0,R)$, und sei $G_R := B(0,R) \setminus \overline{D}$. Ω_R bezeichne die Sphäre mit Radius R und n die äußere Normale an G_R. Man betrachtet wieder das homogene Problem $f = g = 0$. Dann gilt für eine Lösung u von (PR) unter Ausnutzung der Greenschen Formel und der Randbedingungen

$$
\begin{aligned}
& \int_{G_R}\left[|\operatorname{grad}\ u|^2 - k^2|u|^2\right]dx = \\
& = \int_{G_R}\left[(\operatorname{grad}\ u, \operatorname{grad}\ \overline{u}) + (\triangle u)\,\overline{u}\right]dx \\
& = \int_{\partial G_R}\overline{u}\frac{\partial u}{\partial n}ds
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\partial D} \overline{u}\frac{\partial u}{\partial n} ds + \int_{\Omega_R} \overline{u}\frac{\partial u}{\partial n} ds \\
&= -\int_{\partial D} \overline{u}\frac{\partial u}{\partial \nu} ds + \int_{\Omega_R} \overline{u}\frac{\partial u}{\partial r} ds \\
&= -\int_{\partial D} \left(\overline{v} + \overline{\lambda}\frac{\overline{\mu_0}}{\overline{\mu}}\frac{\partial \overline{v}}{\partial \nu}\right) \frac{\mu_0}{\mu}\frac{\partial v}{\partial \nu} ds + \int_{\Omega_R} \overline{u}\frac{\partial u}{\partial r} ds .
\end{aligned}
$$

Bildung des $-2i$-fachen Imaginärteils liefert

$$
\begin{aligned}
&4i\,\mathrm{Re}(k)\,\mathrm{Im}(k) \int_{G_R} |u|^2 dx = \\
&= 2i\ \mathrm{Im}\left(\frac{\mu_0}{\mu}\int_{\partial D} \overline{v}\frac{\partial v}{\partial \nu} ds\right) + 2i\frac{|\mu_0|^2}{|\mu|^2}\,\mathrm{Im}\left(\int_{\partial D} \overline{\lambda}\left|\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|^2 ds\right) + \\
&\quad -\int_{\Omega_R}\left[\overline{u}\frac{\partial u}{\partial r} - u\frac{\partial \overline{u}}{\partial r}\right] ds .
\end{aligned}
$$

Unter Ausnutzung der Sommerfeldschen Endlichkeitsbedingung $u = O(r^{-1})$ (vergleiche (2.2) in Satz 2.13) und der (SAB) ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\overline{u}\left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku\right) &= o(r^{-2}) , \\
u\left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial r} - \overline{iku}\right) &= o(r^{-2})
\end{aligned}
$$

und damit

$$
\overline{u}\frac{\partial u}{\partial r} - u\frac{\partial \overline{u}}{\partial r} = o(r^{-2}) + 2i\ \mathrm{Re}(k)|u|^2 .
$$

Daraus folgt

$$
\int_{\Omega_R}\left[\overline{u}\frac{\partial u}{\partial r} - u\frac{\partial \overline{u}}{\partial r}\right] ds = 2i\ \mathrm{Re}(k)\int_{\Omega_R}|u|^2 ds + o(1),\ \ R \to \infty .
$$

Insgesamt erhält man

$$
\begin{aligned}
o(1) &= 4i\,\mathrm{Re}(k)\,\mathrm{Im}(k)\int_{G_R}|u|^2\,dx - 2i\ \mathrm{Im}\left(\frac{\mu_0}{\mu}\int_{\partial D}\overline{v}\frac{\partial v}{\partial \nu}\,ds\right) + \\
&\quad -2i\frac{|\mu_0|^2}{|\mu|^2}\,\mathrm{Im}\left(\int_{\partial D}\overline{\lambda}\left|\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|^2 ds\right) + 2i\ \mathrm{Re}(k)\int_{\Omega_R}|u|^2\,ds ,\ \ R \to \infty .
\end{aligned}
$$

Nach Multiplikation mit $\mathrm{Re}(k)/2i$ und Verwendung von

$$\int_{\partial D} \overline{v}\, \frac{\partial v}{\partial \nu}\, ds = \int_D \left(|\operatorname{grad}\ v|^2 - k_0^2 |v|^2 \right)\, dx$$

ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} \mathrm{o}(1) \quad = \quad & 2(\mathrm{Re}(k))^2\, \mathrm{Im}(k) \int_{G_R} |u|^2\, dx - \mathrm{Re}(k)\, \mathrm{Im}\left(\frac{\mu_0}{\mu} \int_D |\operatorname{grad}\ v|^2\, dx \right) + \\ & + \mathrm{Re}(k)\, \mathrm{Im}\left(\frac{\mu_0}{\mu} k_0^2 \int_D |v|^2\, dx \right) - \mathrm{Re}(k)\, \frac{|\mu_0|^2}{|\mu|^2}\, \mathrm{Im}\left(\int_{\partial D} \overline{\lambda} \left| \frac{\partial v}{\partial \nu} \right|^2 ds \right) + \\ & + (\mathrm{Re}(k))^2 \int_{\Omega_R} |u|^2 ds, \quad R \to \infty\,. \end{aligned}$$

Im Fall $\mathrm{Im}(k) > 0$ erhält man mit der Voraussetzung (3.16)

$$\int_{G_R} |u|^2 dx = \mathrm{o}(1), \quad R \to \infty\,,$$

folglich $u = 0$ in $\mathbb{R}^3 \setminus D$.

Ist $\mathrm{Im}(k) = 0$, so gilt mit Voraussetzung (3.16)

$$\int_{\Omega_R} |u|^2 ds = \mathrm{o}(1), \quad R \to \infty\,,$$

woraus mit dem Rellich-Lemma 2.14 $u = 0$ in $\mathbb{R}^3 \setminus D$ folgt. Mit dem Darstellungssatz 2.12 ergibt sich dann zusammen mit den Randbedingungen (3.5), (3.6) auch $v = 0$ in D. ∎

Bemerkung 3.5 Falls $\mathrm{Re}(k) = 0$, so folgt aus dem Beweis von Satz 3.4

$$\begin{aligned} \mathrm{o}(1) \quad = \quad & - \mathrm{Im}\left(\frac{\mu_0}{\mu} \int_D |\operatorname{grad}\ v|^2\, dx) \right) + \\ & + \mathrm{Im}\left(\frac{\mu_0}{\mu} k_0^2 \int_D |v|^2\, dx \right) + \\ & - \frac{|\mu_0|^2}{|\mu|^2}\, \mathrm{Im}\left(\int_{\partial D} \overline{\lambda} \left| \frac{\partial v}{\partial \nu} \right|^2 ds \right), \quad R \to \infty\,. \end{aligned}$$

Setzt man also

$$\left. \begin{array}{rcl} \mathrm{Re}(k) = 0\,, & & \\ \mathrm{Im}\left(\frac{\mu_0}{\mu} k_0^2 \right) & \geq & 0\,, \\ \mathrm{Im}\left(\frac{\overline{\mu_0}}{\overline{\mu}} \right) & \geq & 0\,, \\ \mathrm{Im}\,(\lambda(y)) & \geq & 0\,, \ \text{für alle } y \in \partial D \end{array} \right\} \tag{3.17}$$

voraus, so erhält man

$$\int_D |v|^2\, dx = 0$$

also $v = 0$ in D und mit den Randbedingungen (3.5), (3.6) und dem Darstellungssatz 2.12 auch $u = 0$ in $\mathbb{R}^3 \setminus D$.

Nun soll die Existenz von Lösungen zum resistiven Problem (PR) untersucht werden. Dazu sei vorausgesetzt, daß Eindeutigkeit des Problemes vorliegt. Dies ist dann gesichert, falls eine der drei Bedingungen (3.15), (3.16) oder (3.17) erfüllt ist. Analog zum Vorgehen in [KRo] und [He1] sucht man die Lösung als kombiniertes Einfach- und Doppelschichtpotential in der Form

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\partial D} \left\{ \mu_0 \frac{\partial \Phi_k(x,y)}{\partial \nu(y)} \psi(y) + c\Phi_k(x,y)\varphi(y) \right\} ds(y),\, x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}\,, && (3.18) \\ v(x) &= \int_{\partial D} \left\{ \mu \frac{\partial \Phi_{k_0}(x,y)}{\partial \nu(y)} \psi(y) + c_0\Phi_{k_0}(x,y)\varphi(y) \right\} ds(y),\, x \in D\,, && (3.19) \end{aligned}$$

wobei $c, c_0 \in \mathbb{C}$ geeignet zu wählen sind und die Dichtefunktionen $\varphi \in C^{0,\alpha}(\partial D)$, $\psi \in C^{1,\alpha}(\partial D)$ zu ermitteln sind. Mit diesem Ansatz erfüllen u und v die Helmholtzgleichung und u zusätzlich die (SAB).

Sollen u, v den Randbedingungen (3.5), (3.6) genügen, so müssen φ und ψ das folgende Integralgleichungssystem erfüllen

$$\begin{aligned} 2f &= 2u - 2v - 2\lambda \frac{\partial u}{\partial \nu} \\ &= (\mu_0 K_k - \mu K_{k_0} - \lambda \mu_0 T_k)\psi + (cS_k - c_0 S_{k_0} - \lambda c K_k')\varphi + \\ &\quad +(\mu + \mu_0) I\psi + \lambda c I\varphi\,, && (3.20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2g &= 2\mu \frac{\partial u}{\partial \nu} - 2\mu_0 \frac{\partial v}{\partial \nu} \\ &= \mu\mu_0 (T_k - T_{k_0})\psi + (c\mu K_k' - c_0 \mu_0 K_{k_0}')\varphi + \\ &\quad -(\mu c + \mu_0 c_0) I\varphi\,, && (3.21) \end{aligned}$$

das sich aus den Sprungbeziehungen für das Einfach- und Doppelschichtpotential (siehe Sätze 2.17, 2.18, 2.19, 2.20) ergibt.

Anwendung des injektiven Operators S_0 (siehe Bemerkung 2.23 c) auf (3.20) ergibt unter Ausnutzung der Regularisierungseigenschaft $ST = K^2 - I$ (siehe (2.10) aus Satz 2.22)

$$\begin{aligned} 2S_0 f &= \Big[\mu_0 S_0 K_k - \mu S_0 K_{k_0} - \lambda\mu_0 S_0(T_k - T_0) - \lambda\mu_0 K^2 + (\mu+\mu_0)S_0\Big]\psi + \\ &\quad + S_0(cS_k - c_0 S_{k_0} - \lambda c K_k' + \lambda c I)\varphi + \lambda\mu_0 I\psi\,. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Mit

$$\begin{aligned} M_{11} &:= \mu_0 S_0 K_k - \mu S_0 K_{k_0} - \lambda\mu_0 S_0(T_k - T_0) - \lambda\mu_0 K^2 + (\mu+\mu_0)S_0\,, \\ M_{12} &:= S_0(cS_k - c_0 S_{k_0} - \lambda c K_k' + \lambda c I)\,, \\ M_{21} &:= \mu\mu_0(T_k - T_{k_0})\,, \\ M_{22} &:= c\mu K_k' - c_0\mu_0 K_{k_0}'\,, \\ M &:= \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}, \\ L &:= \begin{pmatrix} \lambda\mu_0 I & 0 \\ 0 & -(\mu c + \mu_0 c_0)I \end{pmatrix} \end{aligned}$$

läßt sich das System in der Form

$$L\begin{pmatrix}\psi\\ \varphi\end{pmatrix} + M\begin{pmatrix}\psi\\ \varphi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2S_0 f\\ 2g\end{pmatrix}, \tag{3.23}$$

schreiben. Der Operator

$$M : C(\partial D)\times C(\partial D) \to C(\partial D)\times C(\partial D)$$

ist kompakt, da jede Komponente dies nach Satz 2.22 ist. Außerdem ist L beschränkt invertierbar, wenn man c, c_0 so wählt, daß $\mu c + \mu_0 c_0 \neq 0$ gilt. Man kann also auf $L + M$ die Riesz-Theorie anwenden.

Seien φ, ψ stetige Lösungen von (3.22), (3.21). Dann folgt wegen der Abbildungseigenschaften der Integraloperatoren nach Satz 2.22

$$\varphi \in C^{0,\alpha}(\partial D),\ \psi \in C^{1,\alpha}(\partial D)\,,$$

da $f, \lambda, \frac{1}{\lambda} \in C^{1,\alpha}(\partial D)$ und $g \in C^{0,\alpha}(\partial D)$.

Hieraus ergeben sich die notwendigen Regularitätseigenschaften für u und v. Es genügt also, nach stetigen Lösungen des Integralgleichungssystems zu suchen.

Für die Anwendung des Rieszschen Satzes 2.1 ist zu zeigen, daß der Nullraum von $L + M$ trivial ist. Seien $\varphi, \psi \in C(\partial D)$ Lösungen von (3.23) mit verschwindender rechter Seite. Wegen der Injektivität des Operators S_0 erfüllen dann $\varphi, \psi \in C(\partial D)$ auch das System (3.20), (3.21) mit homogenen rechten Seiten. Man definiere zu diesen Dichten u und v gemäß (3.18), (3.19) (wegen der vorausgesetzten Eindeutigkeit von (PR) ist dann $(u, v) = 0$) und

$$
\begin{aligned}
U(x) &= \int_{\partial D} \left\{ \mu_0 \frac{\partial \Phi_k(x,y)}{\partial \nu(y)} \psi(y) + c\Phi_k(x,y)\varphi(y) \right\} ds(y),\ x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial D\,, \\
V(x) &= \int_{\partial D} \left\{ \mu \frac{\partial \Phi_{k_0}(x,y)}{\partial \nu(y)} \psi(y) + c_0\Phi_{k_0}(x,y)\varphi(y) \right\} ds(y),\ x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial D\,.
\end{aligned}
$$

Dann stimmen U mit u im Außengebiet und V mit v im Innengebiet überein und verschwinden dort, insbesondere gilt also auf ∂D

$$
U_+ = \frac{\partial U_+}{\partial \nu} = 0,\ \ V_- = \frac{\partial V_-}{\partial \nu} = 0\,.
$$

Wegen der Sprungbeziehungen für das Einfach- und Doppelschichtpotential (siehe Sätze 2.17, 2.18, 2.19, 2.20) gilt auf ∂D für U und V

$$
\begin{aligned}
U_+ - U_- &= \mu_0 \psi\,, \\
V_+ - V_- &= \mu \psi\,, \\
\frac{\partial U_+}{\partial \nu} - \frac{\partial U_-}{\partial \nu} &= -c\varphi\,, \\
\frac{\partial V_+}{\partial \nu} - \frac{\partial V_-}{\partial \nu} &= -c_0\varphi\,.
\end{aligned}
$$

Daraus folgt dann

$$
\begin{aligned}
\mu U_- + \mu_0 V_+ &= 0 \text{ auf } \partial D\,, \\
\frac{1}{c}\frac{\partial U_-}{\partial \nu} + \frac{1}{c_0}\frac{\partial V_+}{\partial \nu} &= 0 \text{ auf } \partial D\,.
\end{aligned}
$$

Definiert man nun

$$
\begin{aligned}
\tilde{u} &:= \frac{1}{c_0} V \text{ in } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}\,, \\
\tilde{v} &:= -\frac{1}{c} U \text{ in } D\,,
\end{aligned}
$$

so ist das Paar $(\tilde{u},\tilde{v})$ Lösung des homogenen Transmissionsproblems

$$\begin{aligned} \tilde{u} &\in C^2(\mathbb{R}^3\setminus\overline{D})\cap C^1(\mathbb{R}^3\setminus D)\,,\\ \tilde{v} &\in C^2(D)\cap C^1(\overline{D})\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangle\tilde{u}+k_0^2\tilde{u} &= 0 \text{ in } \mathbb{R}^3\setminus\overline{D}\,,\\ \triangle\tilde{v}+k^2\tilde{v} &= 0 \text{ in } D\,,\\ \mu_0c_0\tilde{u}-\mu c\tilde{v} &= 0 \text{ auf } \partial D\,,\\ \frac{\partial\tilde{u}}{\partial\nu}-\frac{\partial\tilde{v}}{\partial\nu} &= 0 \text{ auf } \partial D\,. \end{aligned}$$

Weiterhin erfüllt $\tilde{u}$ die (SAB)

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial r}-ik_0\tilde{u}\right)=0\,.$$

Dieses Transmissionsproblem ist ein Spezialfall des konduktiven Problemes (PK) mit verschwindender Impedanz λ. Wählt man jetzt $c/c_0\in\mathbb{C}$ so, daß

$$k_0\frac{\mu}{\mu_0}\frac{c}{c_0}\in\mathbb{R} \text{ und } k_0\frac{\mu}{\mu_0}\frac{c}{c_0}\,\mathrm{Im}(k_0^2)\geq 0$$

gilt, dann erfüllen die Parameter die Bedingung (3.24) aus dem noch folgenden Satz 3.7 über die Eindeutigkeit beim konduktiven Problem. (Man beachte, daß äußere und innere Wellenzahl vertauscht sind und μ durch μ_0c_0 sowie μ_0 durch μc zu ersetzen sind.) Die zusätzliche Forderung $\mu c+\mu_0c_0\neq 0$ läßt sich durch Multiplikation von c/c_0 mit einem geeigneten positiven Faktor erreichen. Für das obige Transmissionsproblem liegt dann eindeutige Lösbarkeit vor, d. h. $\tilde{u}=0$ in $\mathbb{R}^3\setminus\overline{D}$ und $\tilde{v}=0$ in D, also $U=V=0$ in $\mathbb{R}^3$. Mit den Sprungbeziehungen ergibt sich

$$\psi=\varphi=0 \text{ auf } \partial D\,.$$

Aus der Riesz-Theorie folgt damit die beschränkte Invertierbarkeit von $L+M$. Da u und v stetig von den Dichten ψ,φ abhängen, gilt zusammenfassend der Satz:

Satz 3.6 *Besitzt das resistive Problem (PR) höchstens eine Lösung, so ist es korrekt gestellt, d.h. für alle*

$$f\in C^{1,\alpha}(\partial D),\ g\in C^{0,\alpha}(\partial D)$$

existiert genau eine Lösung (u, v) *von (PR). Sei zusätzlich*

$$f_n \in C^{1,\alpha}(\partial D),\ g_n \in C^{0,\alpha}(\partial D)$$

mit Lösungen (u_n, v_n) *von (PR) und*

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_{\infty,\partial D} &\to 0,\ n \to \infty\,, \\ \|g_n - g\|_{\infty,\partial D} &\to 0,\ n \to \infty\,, \end{aligned}$$

so gilt

$$\begin{aligned} \|u_n - u\|_{\infty,K} &\to 0,\ n \to \infty\,, \\ \|\operatorname{grad}(u_n - u)\|_{\infty,K} &\to 0,\ n \to \infty\,, \\ \|v_n - v\|_{\infty,K_0} &\to 0,\ n \to \infty\,, \\ \|\operatorname{grad}(v_n - v)\|_{\infty,K_0} &\to 0,\ n \to \infty\,, \end{aligned}$$

wobei $K \subset \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ *und* $K_0 \subset D$ *beliebige kompakte Mengen sind.*

3.3 Existenz und Eindeutigkeit des Transmissionsproblems bei konduktiven Randbedingungen

In diesem Abschnitt sollen die Resultate für das Transmissionsproblem bei konduktiven Randbedingungen zusammengestellt werden. Eine ausführliche Darstellung findet sich in [He1]. Die dort benutzten Methoden entsprechen genau denen des vorangegangenen Abschnittes, wobei allerdings jetzt bei der Existenzanalyse auf eine Regularisierung verzichtet werden kann.

Satz 3.7 *Das konduktive Problem (PK) besitzt höchstens eine Lösung, falls*

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{Im}\left(\overline{k\tfrac{\mu_0}{\mu}}k_0^2\right) &\geq 0\,, \\ \operatorname{Im}\left(k\tfrac{\mu_0}{\mu}\right) &\geq 0\,, \\ \operatorname{Im}\left(k\overline{\lambda(y)}\right) &\geq 0\,,\ \textit{für alle } y \in \partial D \end{aligned}\right\} \tag{3.24}$$

oder

$$\left.\begin{array}{rcl} \mathrm{Re}(k) & \neq & 0\,, \\ \mathrm{Re}(k) Im\left(\frac{\overline{\mu_0}}{\overline{\mu}} k_0^2\right) & \geq & 0\,, \\ \mathrm{Re}(k) Im\left(\frac{\mu_0}{\mu}\right) & \geq & 0\,, \\ \mathrm{Re}(k) Im\left(\overline{\lambda(y)}\right) & \geq & 0\,,\ \textit{für alle } y \in \partial D \end{array}\right\} \tag{3.25}$$

oder

$$\left.\begin{array}{rcl} \mathrm{Re}(k) & = & 0\,, \\ \mathrm{Im}\left(\frac{\overline{\mu_0}}{\overline{\mu}} k_0^2\right) & \geq & 0\,, \\ \mathrm{Im}\left(\frac{\mu_0}{\mu}\right) & \geq & 0\,, \\ \mathrm{Im}\left(\overline{\lambda(y)}\right) & \geq & 0\,,\ \textit{für alle } y \in \partial D\,. \end{array}\right\} \tag{3.26}$$

Beweis: Zum Beweis siehe [He1] Sätze 3.3, 3.5 und die Bemerkung zu Satz 3.5.

Satz 3.8 *Besitzt das konduktive Problem höchstens eine Lösung, so ist es korrekt gestellt, d.h. für alle*

$$f \in C^{1,\alpha}(\partial D),\ g \in C^{0,\alpha}(\partial D)$$

existiert genau eine Lösung (u,v) von (PK). Sei zusätzlich

$$f_n \in C^{1,\alpha}(\partial D),\ g_n \in C^{0,\alpha}(\partial D)$$

mit Lösungen (u_n, v_n) von (PK) und

$$\begin{array}{rcl} \|f_n - f\|_{\infty,\partial D} & \to & 0,\ n \to \infty\,, \\ \|g_n - g\|_{\infty,\partial D} & \to & 0,\ n \to \infty\,, \end{array}$$

so gilt

$$\begin{array}{rcl} \|u_n - u\|_{\infty,K} & \to & 0,\ n \to \infty\,, \\ \|\,\mathrm{grad}(u_n - u)\|_{\infty,K} & \to & 0,\ n \to \infty\,, \\ \|v_n - v\|_{\infty,K_0} & \to & 0,\ n \to \infty\,, \\ \|\,\mathrm{grad}(v_n - v)\|_{\infty,K_0} & \to & 0,\ n \to \infty\,, \end{array}$$

wobei $K \subset \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$ und $K_0 \subset D$ beliebige kompakte Mengen sind.

Beweis: Die ausführliche Darstellung findet sich in [He1]. Hier soll nur kurz auf die Lösungsdarstellung mittels kombiniertem Einfach- und Doppelschichtpotential-Ansatzes eingegangen werden. Dieser hat die Form

$$u(x) = \int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial \Phi_k(x,y)}{\partial \nu(y)} \psi(y) + c\Phi_k(x,y)\varphi(y) \right\} ds(y), x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}\,, \quad (3.27)$$

$$v(x) = \int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial \Phi_{k_0}(x,y)}{\partial \nu(y)} \psi(y) + c_0\Phi_{k_0}(x,y)\varphi(y) \right\} ds(y), x \in D\,. \quad (3.28)$$

Dabei ergibt sich für (ψ, φ) aus den Randbedingungen (3.12), (3.13) das folgende Integralgleichungssystem

$$\begin{aligned} (\mu + \mu_0)\psi + (\mu K_k - \mu_0 K_{k_0})\psi + (\mu c S_k - \mu_0 c_0 S_{k_0})\varphi &= 2f\,, \\ (c + c_0)\varphi - (T_k - T_{k_0})\psi - (cK'_k - c_0 K'_{k_0})\varphi + \lambda[(K + I)\psi + cS\varphi] &= -2g \end{aligned}$$

beziehungsweise

$$(E - A)\begin{pmatrix} \psi \\ \varphi \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} f \\ -g \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} -(\mu K_k - \mu_0 K_{k_0}) & -(\mu c S_k - \mu_0 c_0 S_{k_0}) \\ (T_k - T_{k_0}) - \lambda K_k & (cK'_k - c_0 K'_{k_0}) - \lambda c S_k \end{pmatrix} \quad (3.30)$$

und

$$E = \begin{pmatrix} (\mu + \mu_0)I & 0 \\ \lambda I & (c + c_0)I \end{pmatrix}, \quad (3.31)$$

wobei E für $c + c_0 \neq 0$ invertierbar und A ein kompakter Operator ist. Es kann folglich die Riesz-Theorie angewendet werden und bei geeigneter Wahl von c, c_0 gezeigt werden, daß das Problem korrekt gestellt ist. ∎

Bemerkung 3.9 Unter den Voraussetzungen des vorangegangenen Satzes gilt auch

$$\|u_n - u\|_{1,\alpha,K} \to 0, n \to \infty$$

für eine beliebige kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}$. Dies folgt mit der Abhängigkeit von den Dichten aus der Stetigkeit der zweiten Ableitungen der Grundlösung Φ auf $K \times \partial D$.

3.4 Formulierung des Randwertproblems als Streuproblem

In diesem Abschnitt soll das Randwertproblem in der Form formuliert werden, wie es für die Behandlung des inversen Problems relevant ist. Es sei vorausgesetzt, daß λ, k, k_0 Existenz und Eindeutigkeit gewährleisten. Es bezeichne

$$u^i(x) = u^i(x; d) = e^{ik(x,d)},\ d \in \Omega,\ \Omega := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = 1\}$$

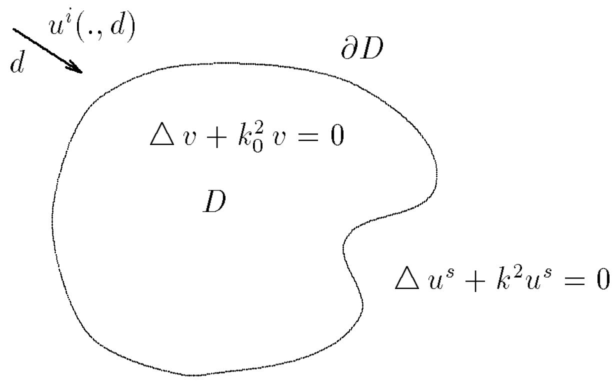
eine einfallende ebene Welle mit Wellenzahl k. Im weiteren wird die Richtungsabhängigkeit d nicht immer mit angegeben.

Definition 3.10
Beim konduktiven Streuproblem sucht man eine Lösung (u^s, v) von

$$\begin{aligned} u^s &\in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}) \cap C^1(\mathbb{R}^3 \setminus D)\,, \\ v &\in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \triangle u^s + k^2 u^s &= 0 \ \mathit{in}\ \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}\,, \\ \triangle v + k_0^2 v &= 0 \ \mathit{in}\ D\,, \\ \mu u^s - \mu_0 v &= -\mu u^i \ \mathit{auf}\ \partial D\,, \\ \frac{\partial u^s}{\partial \nu} - \frac{\partial v}{\partial \nu} &= \lambda u^s + \lambda u^i - \frac{\partial u^i}{\partial \nu} \ \mathit{auf}\ \partial D\,. \end{aligned}$$

Außerdem erfülle u^s die Sommerfeldsche Ausstrahlunsbedingung (SAB).



Auch hier wird zuweilen die Abhängigkeit der Lösung (u^s, v) von der Einfallsrichtung d der die Randbedingung festlegenden einfallenden ebenen Welle in der Form $(u^s(., d), v(., d))$ gekennzeichnet. Das oben definierte Streuproblem ist äquivalent zum konduktiven Randwertproblem (PK) in dem Sinne, daß für eine Lösung (u, v) von (PK) zu homogenen Daten $f = g = 0$ das Paar (u^s, v) mit $u^s := u - u^i$ Lösung des Streuproblems (zur gleichen Einfallsrichtung d) ist. Umgekehrt erhält man aus einer Lösung (u^s, v) des Streuproblems eine Lösung (u, v) des homogenen Randwertproblems durch $u := u^s + u^i$.

4. Das inverse Streuproblem

In diesem Kapitel wird die Eindeutigkeit des Streugebietes aus der Kenntnis der Fernfelder des Streufeldes zu allen einfallenden ebenen Wellen untersucht. Die betrachteten Streugebiete sollen wieder einen C^2-glatten Rand haben. Zusätzlich wird vorausgesetzt, daß die äußere Wellenzahl k reell ist und das konduktive Streuproblem korrekt gestellt ist. Hinreichende Bedingungen dafür an $k, k_0, \lambda, \mu, \mu_0$ sind in Satz 3.7 angegeben.

Im ersten Abschnitt werden Hilfssätze formuliert und bewiesen, im zweiten Abschnitt dann das eigentliche Eindeutigkeitsresultat nachgewiesen.

In Lemma 4.1 wird aus der Annahme, daß zwei Streukörper bei einfallenden ebenen Wellen gleiche Fernfelder liefern, eine Übereinstimmung der Streufelder bei singulärer Quelle abgeleitet.

Unter Ausnutzung der für den Raum C_0 nachgewiesenen Eigenschaften und der korrekten Gestelltheit des konduktiven Problems wird in Lemma 4.2 die Innenlösung auf einem Kompaktum erst durch die Randdaten in der ∞-0-Norm abgeschätzt und für eine Klasse von Streuproblemen mit singulärer Einfallswelle in Folgerung 4.3 die gleichmäßige Beschränktheit für diese Randdaten bewiesen.

In Lemma 4.4 wird für ein eindeutig lösbares inneres Dirichletproblem die Lösungsdarstellung mittels Doppelschichtpotential benutzt, um für die Neumanndaten auf einem Randstück eine Abschätzung durch die Dirichletdaten, ausgewertet bezüglich der 1-α-Höldernorm auf einem größeren Randstück, und bezüglich der ∞-Norm auf dem Rest des Randes zu gewinnen.

Im Eindeutigkeitssatz 4.5 wird dann aus der Annahme der Existenz zweier verschiedener Streukörper mit identischen Fernfeldern ein Widerspruch hergeleitet. Es wird eine Folge von Punktquellen betrachtet, die gegen ein Randstück des einen Streukörpers, welches im Außenraum des anderen liegt, strebt. Auf diesem Randstück untersucht man eine Kombination der Grundlösung und ihrer Normalenableitung.

Eine direkte Auswertung ergibt für diese Kombination ein Verhalten der Ordnung $O(n)$ bzw. $O(n^2)$, wobei n dem reziproken Abstand der Punktquelle zum Rand entspricht. Für die Ableitung eines Widerspruchs wird die Kombination der Grundlösungen unter Ausnutzung der Randbedingungen durch die Lösung des Streuproblems ausgedrückt und eine obere Schranke konstruiert, für die man bei Annäherung der Punktquelle an den Rand ein Verhalten der Ordnung $O(n^\alpha)$ mit $\alpha \in (0,1)$ nachweist. Dabei wendet man die Hilfssätze des ersten Abschnittes auf geeignete Randstücke an und benutzt, daß das Streuproblem bezüglich des zweiten Streukörpers korrekt gestellt ist.

4.1 Hilfssätze

Lemma 4.1 *Seien D_1, D_2 zwei Streugebiete derart, daß die Fernfelder zu beiden Streukörpern für alle Einfallsrichtungen ebener Wellen bei fester Wellenzahl k übereinstimmen. G bezeichne die unbeschränkte Komponente von $\mathbb{R}^3 \setminus \left(\overline{D_1} \cup \overline{D_2}\right)$ und $\tilde{x}$ sei aus G.*

Betrachtet man die Lösung (w_j^s, v_j) $j = 1,2$ des Streuproblems mit singulärer Einfallswelle $\Phi_k(.,\tilde{x})$

$$\begin{aligned}
\triangle w_j^s + k^2 w_j^s &= 0 \text{ in } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D_j}\,,\\
\triangle v_j + k_{0,j}^2 v_j &= 0 \text{ in } D_j\,,\\
\mu w_j^s - \mu_{0,j} v_j &= -\mu \Phi_k(.,\tilde{x}) \text{ auf } \partial D_j\,,\\
\frac{\partial w_j^s}{\partial \nu} - \frac{\partial v_j}{\partial \nu} &= \lambda_j w_j^s + \lambda_j \Phi_k(.,\tilde{x}) - \frac{\partial \Phi_k(.,\tilde{x})}{\partial \nu} \text{ auf } \partial D_j\,,
\end{aligned}$$

wobei w_j^s die (SAB) erfüllt,
so gilt

$$w_1^s = w_2^s \text{ auf } G\,.$$

Beweis: Man wählt ein C^2-glattes Gebiet D so, daß $\mathbb{R}^3 \setminus D$ zusammenhängend ist und $\overline{D_1} \cup \overline{D_2} \subset D$, sowie $\tilde{x} \notin \overline{D}$ gilt. Nach Lemma 2.29 existiert eine

Folge $(q_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset V := \text{span}\{u^i(.,d)|d \in \Omega\}$ mit

$$\begin{aligned} q_n &\to \Phi_k(.,\tilde{x}), \\ \text{grad } q_n &\to \text{grad } \Phi_k(.,\tilde{x}) \end{aligned}$$

für $n \to \infty$ gleichmäßig auf $\overline{D_1} \cup \overline{D_2}$ als kompakter Teilmenge von D. Da die q_n Linearkombinationen ebener Wellen sind, stimmen die zugehörigen Streufelder $q^s_{n,1}$ und $q^s_{n,2}$ als Lösungen von

$$\begin{aligned} \triangle q^s_{n,j} + k^2 q^s_{n,j} &= 0 \text{ in } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D_j}, \\ \triangle v_{n,j} + k^2_{0,j} v_{n,j} &= 0 \text{ in } D_j, \\ \mu q^s_{n,j} - \mu_{0,j} v_{n,j} &= -\mu q_n \text{ auf } \partial D_j, \\ \frac{\partial q^s_{n,j}}{\partial \nu} - \frac{\partial v_{n,j}}{\partial \nu} &= \lambda_j q^s_{n,j} + \lambda_j q_n - \frac{\partial q_n}{\partial \nu} \text{ auf } \partial D_j \end{aligned}$$

$(j = 1, 2;\ n \in \mathbb{N})$ auf G überein. Wegen der korrekten Gestelltheit des Problems und

$$\begin{aligned} -\mu q_n &\to -\mu \Phi_k(.,\tilde{x}), \\ \lambda_j q_n - \frac{\partial q_n}{\partial \nu} &\to \lambda_j \Phi_k(.,\tilde{x}) - \frac{\partial \Phi_k(.,\tilde{x})}{\partial \nu} \end{aligned}$$

für $n \to \infty$ gleichmäßig auf ∂D_j $(j = 1, 2)$ folgt

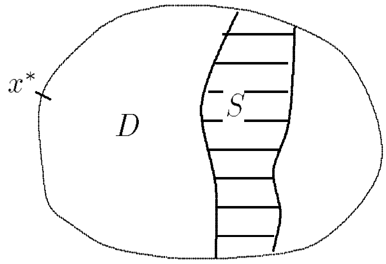
$$q^s_{n,j} \to w^s_j,\ n \to \infty$$

gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von G. Da dort $q^s_{n,1} = q^s_{n,2}$ gilt, folgt die Behauptung. ∎

Der folgende Hilfsatz gestattet zusammen mit einer Folgerung eine gleichmäßige Abschätzung der Innenlösung des konduktiven Streuproblems bei singulärer Einfallswelle, deren Quelle sich dem Rand des Streugebietes nähert. Dazu wird zuerst die Lösung im Inneren des Körpers geeignet durch die Randdaten abgeschätzt, und für diese dann die gleichmäßige Beschränktheit nachgewiesen.

Lemma 4.2

Sei D ein Gebiet mit C^2-glattem Rand und $x^* \in \partial D$, sowie S eine kompakte Teilmenge von $\overline{D}$ mit $\text{dist}(S, x^*) > 0$. *Weiter seien*



$$
\begin{aligned}
u &\in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}) \cap C^1(\mathbb{R}^3 \setminus D)\,, \\
v &\in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})\,,
\end{aligned}
$$

mit

$$
\begin{aligned}
\triangle u + k^2 u &= 0 \textit{ in } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}\,, \\
\triangle v + k_0^2 v &= 0 \textit{ in } D
\end{aligned}
$$

und u erfülle die (SAB). Bezeichne

$$
\begin{aligned}
f &:= \mu u - \mu_0 v \quad \textit{auf}\ \partial D\,, \\
g &:= \frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{\partial v}{\partial \nu} - \lambda u \quad \textit{auf}\ \partial D\,.
\end{aligned}
$$

Dann gibt es eine Konstante $C = C(\partial D, S)$ so, daß

$$
\|v\|_{\infty,S} \leq C \left(\|f\|_{\infty,0} + \|g\|_{\infty,0} \right)\,, \tag{4.1}
$$

wobei $\|.\|_{\infty,0}$ die in Satz 2.7 eingeführte Norm auf dem $C_0(\partial D)$ bezeichnet.

Beweis: Man stellt die eindeutige Lösung des Randwertproblems in der Form

$$
\begin{aligned}
u(x) &= \int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial \Phi_k(x,y)}{\partial \nu(y)} \psi(y) + c\Phi_k(x,y)\varphi(y) \right\} ds(y),\, x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}\,, \\
v(x) &= \int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial \Phi_{k_0}(x,y)}{\partial \nu(y)} \psi(y) + c_0\Phi_{k_0}(x,y)\varphi(y) \right\} ds(y),\, x \in D
\end{aligned}
$$

dar (vergleiche den Beweis zu Satz 3.8), wobei $\psi \in C^{1,\alpha}(\partial D)$ und $\varphi \in C^{0,\alpha}(\partial D)$ das eindeutige Lösungspaar des Integralgleichungssystems (3.29) ist. Der in (3.31) definierte Operator E hat unter den angegebenen Voraussetzungen die Inverse

$$
E^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu+\mu_0} I & 0 \\ \frac{-\lambda}{(\mu+\mu_0)(c+c_0)} I & \frac{1}{c+c_0} I \end{pmatrix}\,.
$$

Definiert man den Operator $V := -E^{-1}A$, wobei der Operator A gemäß (3.30) gegeben ist, so ist das Integralgleichungssystem (3.29) äqivalent zu

$$
(I+V) \begin{pmatrix} \psi \\ \varphi \end{pmatrix} = 2E^{-1} \begin{pmatrix} f \\ -g \end{pmatrix}\,. \tag{4.2}
$$

Der Operator

$$A : C_0(\partial D) \times C_0(\partial D) \to C_0(\partial D) \times C_0(\partial D)$$

ist nach Bemerkung 2.23 b) kompakt und außerdem ist

$$E^{-1} : C_0(\partial D) \times C_0(\partial D) \to C_0(\partial D) \times C_0(\partial D)$$

wegen der Stetigkeit von λ beschränkt.

Folglich ist V kompakter Operator von $C_0(\partial D) \times C_0(\partial D)$ nach $C_0(\partial D) \times C_0(\partial D)$. Wegen der eindeutigen Lösbarkeit im Raum der stetigen Funktionen folgt aus der Fredholmschen Alternative zuerst auf das Dualsystem $\langle C(\partial D) \times C(\partial D), C(\partial D) \times C(\partial D)\rangle$ und dann auf das Dualsystem $\langle C(\partial D) \times C(\partial D), C_0(\partial D) \times C_0(\partial D)\rangle$ (vergleiche Satz 2.9) angewendet:

$$\begin{aligned} 0 &= \dim N\left(I + V|_{C(\partial D)\times C(\partial D)}\right) \\ &= \dim N\left(I + V'|_{C(\partial D)\times C(\partial D)}\right) \\ &= \dim N\left(I + V|_{C_0(\partial D)\times C_0(\partial D)}\right) . \end{aligned}$$

Aus der Riesz-Theorie folgt dann die Beschränktheit des Operators $(I+V)^{-1}$ von $C_0(\partial D) \times C_0(\partial D)$ nach $C_0(\partial D) \times C_0(\partial D)$, so daß für eine geeignete Konstante C gilt

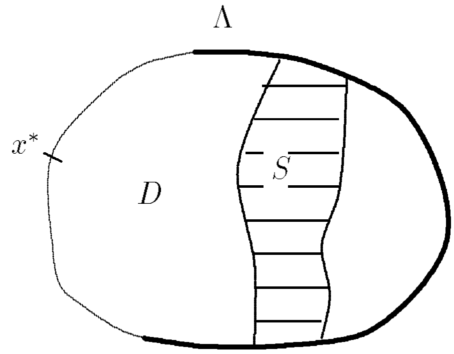
$$\|\psi\|_{\infty,0} + \|\varphi\|_{\infty,0} \leq C(\|f\|_{\infty,0} + \|g\|_{\infty,0}) . \tag{4.3}$$

Diese Abschätzung für die Dichten soll nun benutzt werden, um das gewünschte Resultat für das Potential abzuleiten.

Dazu sei nun ein Teilstück Λ des Randes ∂D so gewählt, daß

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}(S, \partial D \setminus \Lambda) &> 0 , \\ \operatorname{dist}(\Lambda, x^*) &> 0 . \end{aligned}$$

gilt.



Für $x \in D$ gilt

$$v(x) = (\mathcal{D}\,\psi)(x) + c_0(\mathcal{E}\,\varphi)(x) , \tag{4.4}$$

wobei $\mathcal{D}$ bzw. $\mathcal{E}$ den Operator für das Doppelschicht- bzw. Einfachschichtpotential (zur Wellenzahl k_0) bezeichnet.

Wegen der Abschätzung (2.3) in Satz 2.17 für das Einfachschichtpotentials durch die Randdaten gilt nach Lemma 2.26 b)

$$\| \mathcal{E}\, \varphi\|_{\infty,S} \leq C\{\|\varphi\|_{\infty,0} + \|\varphi\|_{\infty,\Lambda}\} \leq C\|\varphi\|_{\infty,0}$$

und analog wegen (2.4) in Satz 2.19 für das Doppelschichtpotential

$$\| \mathcal{D}\, \psi\|_{\infty,S} \leq C\{\|\psi\|_{\infty,0} + \|\psi\|_{\infty,\Lambda}\} \leq C\|\psi\|_{\infty,0}\,,$$

wobei hier der positive Abstand von Λ und x^* in Verbindung mit Lemma 2.8 a) ausgenutzt wurde, um die ∞-Norm auf Λ gegen die ∞-0-Norm abzuschätzen.

Insgesamt ergibt sich nun mit (4.3) und (4.4)

$$\begin{aligned} \|v\|_{\infty,S} &\leq C(\|\varphi\|_{\infty,0} + \|\psi\|_{\infty,0}) \\ &\leq C(\|f\|_{\infty,0} + \|g\|_{\infty,0})\,. \end{aligned}$$

■

Folgerung 4.3 *Seien D, x^*, S wie in Lemma 4.2, sowie $h > 0$ so, daß die Strecke*

$$L := \{x^* + \vartheta h \nu(x^*) \mid \vartheta \in [0,1]\}$$

positiven Abstand zu S hat. Es seien $u_{\tilde{x}} \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}) \cap C^1(\mathbb{R}^3 \setminus D)$, $v_{\tilde{x}} \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$ Lösungen der von $\tilde{x} \in L$ abhängigen konduktiven Streuprobleme mit singulärer Einfallswelle $\Phi_k(.,\tilde{x})$ zum Gebiet D

$$\begin{aligned} \triangle u_{\tilde{x}} + k^2 u_{\tilde{x}} &= 0 \text{ in } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D}\,, \\ \triangle v_{\tilde{x}} + k_0^2 v_{\tilde{x}} &= 0 \text{ in } D\,, \\ \mu u_{\tilde{x}} - \mu_0 v_{\tilde{x}} &= -\mu \Phi_k(.,\tilde{x}) \text{ auf } \partial D\,, && (4.5) \\ \frac{\partial u_{\tilde{x}}}{\partial \nu} - \frac{\partial v_{\tilde{x}}}{\partial \nu} &= \lambda u_{\tilde{x}} + \lambda \Phi_k(.,\tilde{x}) - \frac{\partial \Phi_k(.,\tilde{x})}{\partial \nu} \text{ auf } \partial D\,. && (4.6) \end{aligned}$$

Außerdem erfülle $u_{\tilde{x}}$ die (SAB).

Dann gibt eine Konstante C so, daß

$$\|v_{\tilde{x}} - \Phi_{k_0}(.,\tilde{x})\|_{\infty,S} \leq C \text{ für alle } \tilde{x} \in L\,. \qquad (4.7)$$

Beweis: Man betrachtet das Resultat des Lemmas 4.2 für

$$\begin{aligned} v &= v_{\tilde{x}} - \Phi_{k_0}(.,\tilde{x}), \\ u &= u_{\tilde{x}}. \end{aligned}$$

Offensichtlich genügen die so definierten u, v den Regularitätsforderungen und den Helmholtzgleichungen aus Lemma 4.2. Für die dort vorkommenden Größen f, g erhält man mit den Randbedingungen (4.5) und (4.6)

$$\begin{aligned} f = f_{\tilde{x}} &= \mu u_{\tilde{x}} - \mu_0(v_{\tilde{x}} - \Phi_{k_0}(.,\tilde{x})) \\ &= \mu_0 \Phi_{k_0}(.,\tilde{x}) - \mu \Phi_k(.,\tilde{x}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g = g_{\tilde{x}} &= \frac{\partial u_{\tilde{x}}}{\partial \nu} - \frac{\partial (v_{\tilde{x}} - \Phi_{k_0}(.,\tilde{x}))}{\partial \nu} - \lambda u_{\tilde{x}} \\ &= \lambda \Phi_k(.,\tilde{x}) + \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\Phi_{k_0}(.,\tilde{x}) - \Phi_k(.,\tilde{x})\right). \end{aligned}$$

Wegen der C^2-Glätte des Randes existiert eine Konstante M (vergleiche [KiK]) mit

$$|x - x^*| \leq M|x - \tilde{x}|$$

für alle $\tilde{x} \in L$ und alle $x \in \partial D$. Folglich gilt

$$\begin{aligned} |(x - x^*) f_{\tilde{x}}(x)| &\leq M\,|x - \tilde{x}|\,|\mu_0 \Phi_{k_0}(x,\tilde{x}) - \mu \Phi_k(x,\tilde{x})| \\ &\leq \frac{M}{4\pi}\left(\left|\mu_0 e^{ik_0|x-\tilde{x}|}\right| + \left|\mu e^{ik|x-\tilde{x}|}\right|\right) \\ &\leq M_1 \text{ für alle } \tilde{x} \in L \text{ und alle } x \in \partial D, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} &|(x - x^*) g_{\tilde{x}}(x)| \leq \\ &\leq M|\lambda(x)|\,|x - \tilde{x}|\,|\Phi_k(x,\tilde{x})| + |x - x^*| \left|\frac{\partial(\Phi_k(x,\tilde{x}) - \Phi_{k_0}(x,\tilde{x}))}{\partial \nu}\right| \\ &\leq \frac{M}{4\pi}\|\lambda\|_{\infty,\partial D}\left|e^{ik|x-\tilde{x}|}\right| + (\text{diam } D)\left\|\frac{\partial(\Phi_k(.,.) - \Phi_{k_0}(.,.))}{\partial \nu}\right\|_{\infty,\partial D \times L} \\ &\leq M_2 \text{ für alle } \tilde{x} \in L \text{ und alle } x \in \partial D. \end{aligned}$$

Dabei wurde von der Stetigkeit der Exponentialfunktion und der gleichmäßigen Beschränktheit der Normalenableitung der Differenz zweier Grundlösung (Lemma 2.28 a)) Gebrauch gemacht. Damit hat man also Abschätzungen

$$\|f_{\tilde{x}}\|_{\infty,0} \leq M_1\,, \quad \|g_{\tilde{x}}\|_{\infty,0} \leq M_2$$

mit von $\tilde{x}$ unabhängigen Konstanten M_1 und M_2.

Das vorangegangene Lemma 4.2 liefert dann die behauptete Abschätzung

$$\begin{aligned} \|v_{\tilde{x}} - \Phi_{k_0}(.,\tilde{x})\|_{\infty,S} &\leq C(\|f_{\tilde{x}}\|_{\infty,0} + \|g_{\tilde{x}}\|_{\infty,0}) \\ &\leq C(M_1 + M_2) \\ &\leq C \text{ für alle } \tilde{x} \in L\,. \end{aligned}$$

■

Aus der Theorie der Helmholtzgleichung folgt für das innere Dirichletproblem, daß sich die Lösung im Falle der eindeutigen Lösbarkeit als Doppelschichtpotential darstellen läßt, wobei die Dichte einer entsprechenden Integralgleichung genügt. Satz 2.20 liefert dann eine Abschätzung für die Neumanndaten der Lösung durch die 1-α-Höldernorm der Dichte. Interessiert man sich für eine Abschätzung der Neumanndaten nur auf einem Teilstück des Randes, so benötigt man die 1-α-Höldernorm der Dichte auch nur auf einem (etwas größeren) Teilstück, auf dem Rest des Randes genügt die Kenntnis der ∞-Norm der Dichte. Mit einer Abschätzung für die Dichte durch die Randdaten erhält man genauer das Lemma:

Lemma 4.4 *Sei Σ ein Gebiet mit C^2-glattem Rand $\partial\Sigma$ und $\Theta' \subset \partial\Sigma$ ein Teilstück, sowie $f \in C(\partial\Sigma)$ mit $f|_{\Theta'} \in C^{1,\alpha}(\Theta')$. Das innere Dirichletproblem*

$$\begin{aligned} \triangle v + k_0^2 v &= 0 \quad \text{in } \Sigma\,, \\ v &= f \quad \text{auf } \partial\Sigma \end{aligned}$$

habe die eindeutig bestimmte Lösung v. Sei $\Upsilon \subset \Theta'$ mit $\operatorname{dist}(\Upsilon, \partial\Sigma \setminus \Theta') > 0$. Dann gibt es eine Konstante $C = C(\Theta', \Upsilon)$ so, daß

$$\left\|\frac{\partial v}{\partial \nu}\right\|_{\infty,\Upsilon} \leq C\ \{\|f\|_{\infty,\partial\Sigma} + \|f\|_{1,\alpha,\Theta'}\}\ .$$

Beweis: Aus der eindeutigen Lösbarkeit folgt die korrekte Gestelltheit des inneren Dirichletproblems und die Lösung läßt sich darstellen als Doppelschichtpotential

$$v(x) = \int_{\partial\Sigma} \psi(y) \frac{\partial \Phi_{k_0}(x,y)}{\partial \nu(y)}\, ds(y)\,,$$

wobei $\psi \in C(\partial\Sigma)$ die eindeutig bestimmte Lösung der Integralgleichung

$$\psi - K\psi = -2f \tag{4.8}$$

ist, und $K = K_{k_0}$ den in Definition 2.21 eingeführten Integraloperator bezeichnet. Wegen der korrekten Gestelltheit des Problems ist $(I-K)^{-1}$ ein beschränkter Operator von $C(\partial\Sigma)$ nach $C(\partial\Sigma)$, es gibt also eine Konstante C mit

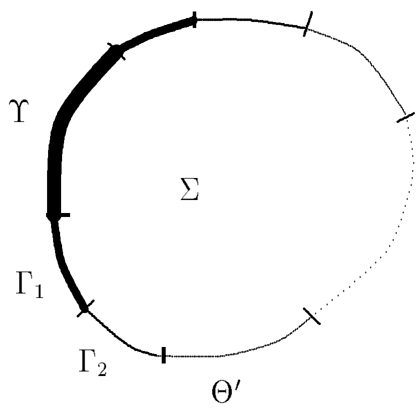
$$\|\psi\|_{\infty,\partial\Sigma} \le C\|f\|_{\infty,\partial\Sigma}\,. \tag{4.9}$$

Es seien nun Randstücke Γ_1, Γ_2 so gewählt, daß

$$\Upsilon \subset \Gamma_1 \subset \Gamma_2 \subset \Theta' \subset \partial\Sigma$$

und

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}(\Upsilon, \partial\Sigma \setminus \Gamma_1) &> 0\,, \\ \operatorname{dist}(\Gamma_1, \partial\Sigma \setminus \Gamma_2) &> 0\,, \\ \operatorname{dist}(\Gamma_2, \partial\Sigma \setminus \Theta') &> 0\,. \end{aligned}$$



Aus (4.8) und Anwendung des Lemmas 2.26 a) für den beschränkten Operator $K : C(\partial\Sigma) \to C^{0,\alpha}(\partial\Sigma)$ folgt

$$\begin{aligned} \|\psi\|_{0,\alpha,\Gamma_2} &\le \|K\psi\|_{0,\alpha,\Gamma_2} + 2\|f\|_{0,\alpha,\Gamma_2} \\ &\le C\{\|\psi\|_{\infty,\partial\Sigma} + \|\psi\|_{\infty,\Theta'}\} + 2\|f\|_{0,\alpha,\Gamma_2} \\ &\le C\{\|\psi\|_{\infty,\partial\Sigma} + \|f\|_{0,\alpha,\Theta'}\}\,, \end{aligned}$$

wobei hier die Abschätzung (4.9) benutzt wurde. Wegen der Beschränktheit von $K : C^{0,\alpha}(\partial\Sigma) \to C^{1,\alpha}(\partial\Sigma)$ erhält man mit den gleichen Hilfsmitteln und dem eben gefundenen Resultat

$$\begin{aligned}
\|\psi\|_{1,\alpha,\Gamma_1} &\leq \|K\psi\|_{1,\alpha,\Gamma_1} + 2\|f\|_{1,\alpha,\Gamma_1} \\
&\leq C\{\|\psi\|_{\infty,\partial\Sigma} + \|\psi\|_{0,\alpha,\Gamma_2}\} + 2\|f\|_{1,\alpha,\Gamma_2} \\
&\leq C\{\|\psi\|_{\infty,\partial\Sigma} + \|f\|_{1,\alpha,\Theta'}\}\,.
\end{aligned}$$

Diese Beziehung für die Dichte soll nun benutzt werden, um die Abschätzung für das Potential $v = \mathcal{D}\,\psi$ nachzuweisen. Nach (2.5) in Satz 2.20 gilt für den Gradienten des Doppelschichtpotentials zur Dichte $\sigma \in C^{1,\alpha}(\partial\Sigma)$

$$\|\operatorname{grad}\mathcal{D}\,\sigma\|_{0,\alpha,\overline{\Sigma}} \leq c\|\sigma\|_{1,\alpha,\partial\Sigma}\,,$$

insbesondere also auch $\|\operatorname{grad}\mathcal{D}\,\sigma\|_{\infty,\Upsilon} \leq c\|\sigma\|_{1,\alpha,\partial\Sigma}$, so daß sich mit Lemma 2.26 a) ergibt:

$$\|\operatorname{grad}\mathcal{D}\,\psi\|_{\infty,\Upsilon} \leq C\{\|\psi\|_{\infty,\partial\Sigma} + \|\psi\|_{1,\alpha,\Gamma_1}\}$$

Zusammenfassend erhält man

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{\partial v}{\partial \nu}\right\|_{\infty,\Upsilon} &\leq \|\operatorname{grad}\, v\|_{\infty,\Upsilon} \\
&\leq C\,\{\|\psi\|_{1,\alpha,\Gamma_1} + \|\psi\|_{\infty,\partial\Sigma}\} \\
&\leq C\,\{\|f\|_{1,\alpha,\Theta'} + \|f\|_{\infty,\partial\Sigma}\}
\end{aligned}$$

mit einer Konstanten C im Sinne der Behauptung. ■

4.2 Eindeutigkeit des Streukörpers beim inversen konduktiven Streuproblem

Mit den bereitgestellten Hilfsmitteln ist es nun möglich, nachzuweisen, daß die Gestalt des Streukörpers beim konduktiven Problem durch die Fernfelder zu allen Richtungen einfallender ebener Wellen eindeutig bestimmt ist.

Satz 4.5 *Seien D_1 und D_2 zwei Streuobjekte mit Wellenzahl $k_{0,1}$ beziehungsweise $k_{0,2}$ im Inneren und Wellenzahl k im Außenraum, zu denen die Streuung ebener* *einfallender Wellen bei konduktiven Randbedingungen mit Koeffizienten μ, $\mu_{0,j}$ und λ_j $(j = 1, 2)$ gleiche Fernfelder liefert, d. h. für alle $d \in \Omega$ gilt:*

$$u_{\infty,1}(.,d) = u_{\infty,2}(.,d)\,.$$

Weiter sei eine der beiden folgenden Voraussetzungen erfüllt

$$\begin{aligned} &\text{a)} \quad \mu_{0,j} \neq \mu, j = 1, 2\,, \\ &\text{b)} \quad \textit{falls } \mu_{0,j} = \mu \,(\textit{für } j = 1 \textit{ oder } j = 2)\,, \\ &\qquad \textit{gelte } \lambda_j(x) \neq 0 \textit{ für alle } x \in \partial D_j\,. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$D_1 = D_2.$$

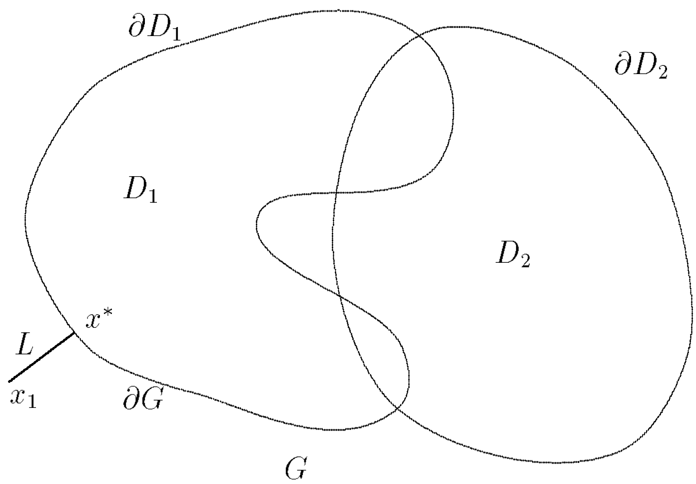
Beweis: Der Beweis wird indirekt geführt. Dazu wird angenommen, daß D_1 nicht in D_2 enthalten ist. Es bezeichne G die unbeschränkte Komponente von $\mathbb{R}^3 \setminus (\overline{D_1} \cup \overline{D_2})$. (An dem Bild unten ist zu sehen, daß G nicht notwendig mit dem Komplement von $\overline{D_1} \cup \overline{D_2}$ übereinzustimmen braucht.) Dann existiert ein $x^* \in \partial G \setminus \overline{D_2} \subset \partial D_1 \setminus \overline{D_2}$. Es sei

$$x_n := x^* + h\frac{\nu(x^*)}{n} \quad \text{für } n \in \mathbb{N}\,, \tag{4.10}$$

wobei h so klein zu wählen ist, daß die Verbindungsstrecke

$$L := \{\, x^* + \vartheta h \nu(x^*) |\, \vartheta \in [0,1]\}$$

zwischen x^* und x_1 positiven Abstand zu D_2 hat und mit D_1 nur den Punkt x^* gemeinsam besitzt.



Nach Lemma 4.1 gilt für Lösungen der Streuprobleme

$$\begin{aligned}
\triangle w_{j,n}^s + k^2 w_{j,n}^s &= 0 \text{ in } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{D_j}\,, \\
\triangle v_{j,n} + k_{0,j}^2 v_{j,n} &= 0 \text{ in } D_j\,, \\
\mu w_{j,n}^s - \mu_{0,j} v_{j,n} &= -\mu \Phi_k(.,x_n) \text{ auf } \partial D_j\,, \qquad (4.11)\\
\frac{\partial w_{j,n}^s}{\partial \nu} - \frac{\partial v_{j,n}}{\partial \nu} &= \lambda_j w_{j,n}^s + \lambda_j \Phi_k(.,x_n) - \frac{\partial \Phi_k(.,x_n)}{\partial \nu} \text{ auf } \partial D_j\,, \qquad (4.12)
\end{aligned}$$

$(j = 1,2)$ auf G die Übereinstimmung

$$w_n^s := w_{1,n}^s = w_{2,n}^s \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\,.$$

Für ein hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ folgt

$$\|w_n^s\|_{1,\alpha,\partial D_1 \cap B(x^*,\varepsilon)} \leq C_1 \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \qquad (4.13)$$

aus der korrekten Gestelltheit des Streuproblems bezüglich D_2. (Das oben eingeführte h ist klein genug, damit $\operatorname{dist}(L, D_2) > 0$ gilt. So ist sichergestellt, daß die obigen Randbedingungen bezüglich D_2 nicht singulär sind und somit für $n \to \infty$ Konvergenz der Streufelder $w_{2,n}^s$ und folglich auch gleichmäßige Beschränktheit vorliegt. Siehe dazu auch Bemerkung 3.9.)

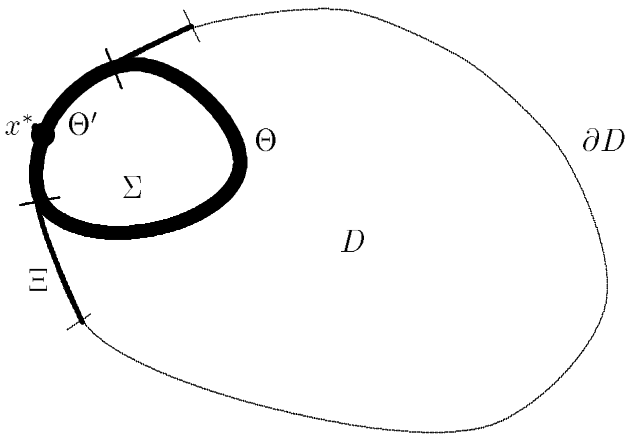
Im weiteren bezeichne $D := D_1$, $v_n := v_{1,n}$, $k_0 := k_{0,1}$, $\lambda := \lambda_1$. Lemma 2.28 b) garantiert die Existenz eines Teilstückes $\Xi \subset \partial D \cap B(x^*,\varepsilon)$ und einer Konstanten C so, daß

$$\|\Phi_k(.,x_n) - \Phi_{k_0}(.,x_n)\|_{1,\alpha,\Xi} \leq C\, n^\alpha\,. \qquad (4.14)$$

Es gilt dann für die 1-α-Höldernorm von $v_n - \frac{\mu}{\mu_0}\Phi_{k_0}(.,x_n)$ ausgewertet auf Ξ die folgende Beziehung

$$\begin{aligned}
&\left\| v_n - \frac{\mu}{\mu_0}\Phi_{k_0}(.,x_n) \right\|_{1,\alpha,\Xi} \leq \\
&\leq \left\| v_n - \frac{\mu}{\mu_0}\Phi_k(.,x_n) \right\|_{1,\alpha,\Xi} + \left|\frac{\mu}{\mu_0}\right| \|\Phi_k(.,x_n) - \Phi_{k_0}(.,x_n)\|_{1,\alpha,\Xi} \\
&= \left|\frac{\mu}{\mu_0}\right| \left(\|w_n^s\|_{1,\alpha,\Xi} + \|\Phi_k(.,x_n) - \Phi_{k_0}(.,x_n)\|_{1,\alpha,\Xi} \right) \\
&\leq \left|\frac{\mu}{\mu_0}\right| (C_1 + C n^\alpha) \\
&\leq C_2\, n^\alpha\,, \qquad (4.15)
\end{aligned}$$

mit einer geeigneten Konstanten C_2. Dabei wurde von der Randbedingung (4.11) und den Abschätzungen (4.13) und (4.14) Gebrauch gemacht.



Es seien $\Theta' \subset \Xi$ und $\Theta \subset \overline{D}$ so gewählt, daß $\Theta' \cup \Theta$ Rand der Klasse C^2 eines einfach zusammenhängenden Gebietes Σ ist, welches außerdem so klein ist, daß nach Lemma 2.30 k_0^2 kein Eigenwert des inneren Dirichletproblems zu Σ ist. Dabei umfasse Θ' eine Umgebung von x^* bezüglich ∂D.

Da das innere Dirichletproblem zum Gebiet Σ korrekt gestellt ist erhält man mit Lemma 4.4 für die Normalenableitung von $v_n - \frac{\mu}{\mu_0}\Phi_{k_0}(.,x_n)$ in einer Umgebung $\Upsilon \subset \Theta'$ von x^* die Abschätzung

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial}{\partial \nu}\left(v_n - \frac{\mu}{\mu_0}\Phi_{k_0}(.,x_n)\right)\right\|_{\infty,\Upsilon} &\leq \\ \leq \; C\left\{ \left\| v_n - \frac{\mu}{\mu_0}\Phi_{k_0}(.,x_n)\right\|_{1,\alpha,\Theta'} + \left\| v_n - \frac{\mu}{\mu_0}\Phi_{k_0}(.,x_n)\right\|_{\infty,\Theta}\right\} && (4.16) \end{aligned}$$

Für den ersten Summanden auf der rechten Seite gilt nach (4.15) die Beziehung

$$\left\| v_n - \frac{\mu}{\mu_0}\Phi_{k_0}(.,x_n)\right\|_{1,\alpha,\Theta'} \leq C_2\, n^{\alpha}\,, \qquad (4.17)$$

da Θ' in Ξ enthalten ist. Für den zweiten Summanden in (4.16) erhält man mit der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} \left\| v_n - \frac{\mu}{\mu_0}\Phi_{k_0}(.,x_n)\right\|_{\infty,\Theta} &\leq \\ \leq \; \|v_n - \Phi_{k_0}(.,x_n)\|_{\infty,\Theta} + \left|1 - \frac{\mu}{\mu_0}\right| \, \|\Phi_{k_0}(.,.)\|_{\infty,\Theta\times L}\,. && (4.18) \end{aligned}$$

Dabei sind $\|v_n - \Phi_{k_0}(.,x_n)\|_{\infty,\Theta}$ wegen der Wohlgestelltheit des konduktiven Streuproblems bezüglich des Gebietes D nach Folgerung 4.3 und $\|\Phi_{k_0}(.,.)\|_{\infty,\Theta\times L}$ wegen des positiven Abstandes von L zu Θ gleichmäßig beschränkt. Für eine hinreichend große Konstante C_3 gilt also

$$\left\| v_n - \frac{\mu}{\mu_0}\Phi_{k_0}(.,x_n)\right\|_{\infty,\Theta} \leq C_3 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}\,.$$

Dies und (4.17) in (4.16) eingesetzt, liefert

$$\left\| \frac{\partial}{\partial\nu}\left(v_n - \frac{\mu}{\mu_0}\Phi_{k_0}(.,x_n)\right)\right\|_{\infty,\Upsilon} \leq C(C_2 n^\alpha + C_3) \leq C_4 n^\alpha\,, \tag{4.19}$$

mit einer geeigneten Konstante C_4.

Unter Ausnutzung der anderen Randbedingung (4.12) erhält man für die folgende Kombination aus der Grundlösung und ihrer Normalenableitung auf ∂D

$$\begin{aligned}
&\lambda\Phi_k(.,x_n) + \frac{\mu-\mu_0}{\mu_0}\frac{\partial\Phi_k(.,x_n)}{\partial\nu} = \\
&= \frac{\partial w_n^s}{\partial\nu} - \frac{\partial v_n}{\partial\nu} - \lambda w_n^s + \frac{\mu}{\mu_0}\frac{\partial\Phi_k(.,x_n)}{\partial\nu} \\
&= \frac{\mu}{\mu_0}\frac{\partial}{\partial\nu}(\Phi_k(.,x_n) - \Phi_{k_0}(.,x_n)) - \frac{\partial}{\partial\nu}\left(v_n - \frac{\mu}{\mu_0}\Phi_{k_0}(.,x_n)\right) - \lambda w_n^s + \frac{\partial w_n^s}{\partial\nu}\,.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Die Normalenableitung der Differenz der Grundlösungen ist dabei nach Lemma 2.28 a) auf dem Randstück Υ gleichmäßig beschränkt, ebenso das Streufeld w_n^s und dessen Normalableitung wegen der Wohlgestelltheit des Streuproblems bezüglich des zweiten Streukörpers D_2 (siehe Satz 3.8). λ ist ebenfalls eine beschränkte Funktion, so daß sich zusammen mit der Ungleichung (4.19) die folgende Abschätzung auf Υ ergibt

$$\left\| \lambda\Phi_k(.,x_n) + \frac{\mu-\mu_0}{\mu_0}\frac{\partial\Phi_k(.,x_n)}{\partial\nu}\right\|_{\infty,\Upsilon} \leq C + C_4 n^\alpha \leq C_5 n^\alpha\,, \tag{4.21}$$

wobei C_5 hinreichend groß zu wählen ist. Andererseits gilt aber

$$\begin{aligned}
&4\pi \sup_{x\in\Upsilon}\left| \lambda(x)\Phi_k(x,x_n) + \frac{\mu-\mu_0}{\mu_0}\frac{\partial\Phi_k(x,x_n)}{\partial\nu(x)}\right| \geq \\
&\geq\ 4\pi \left| \lambda(x^*)\Phi_k(x^*,x_n) + \frac{\mu-\mu_0}{\mu_0}\frac{\partial\Phi_k(x^*,x_n)}{\partial\nu(x^*)}\right|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left|\lambda(x^*)\frac{e^{ik|x^*-x_n|}}{|x^*-x_n|} + \frac{\mu-\mu_0}{\mu_0}\frac{\nu(x^*)\,(x^*-x_n)}{|x^*-x_n|^3}e^{ik|x^*-x_n|}\,(1-ik|x^*-x_n|)\right| \\
&= \frac{n}{h}\left|e^{ikh/n}\right|\left|\lambda(x^*) - \frac{\mu-\mu_0}{\mu_0}\,\frac{\nu(x^*)\,h/n\,\nu(x^*)}{(h/n)^2}\left(1-ik\frac{h}{n}\right)\right| \\
&= \left|e^{ikh/n}\right|\left|\lambda(x^*)\frac{n}{h} - \frac{\mu-\mu_0}{\mu_0}\left(\frac{n^2}{h^2}-ik\frac{n}{h}\right)\right| .
\end{aligned}
$$

Für $n \to \infty$ strebt der exponentielle Term gegen 1. Unter der Voraussetzung a) geht der Betragsterm quadratisch gegen Unendlich. Ist hingegen $\mu = \mu_0 = \mu_{0,1}$, so strebt wegen Voraussetzung b) der Betragsterm linear gegen Unendlich. In beiden Fällen führt dies auf einen Widerspruch dazu, daß die betrachtete Kombination aus der Grundlösung und der Normalenableitung in der Umgebung Υ von x^* gemäß (4.21) durch $C_5\, n^\alpha$ mit $\alpha < 1$ beschränkt ist. Die Annahme, D_1 sei nicht in D_2 enthalten, ist also falsch. Es gilt folglich

$$D_1 \subset D_2 \;\;\text{und analog}\;\; D_2 \subset D_1$$

also

$$D_1 = D_2\,.$$

■

Literaturverzeichnis

[AnKi] T. S. Angell und A. Kirsch, *The conductive boundary condition for Maxwell's equation*, SIAM J. Appl. Math. 52 (1992)

[AnKlHe] T. S. Angell, R. E. Kleinman und F. Hettlich, *The Resistive and Conductive Problems for the Exterior Helmholtz Equation*, SIAM J. Appl. Math. 50 (1990)

[CK1] D. Colton und R. Kress, *Integral equation methods in scattering theory*, Wiley-Interscience Publication, New York, 1983

[CK2] D. Colton und R. Kress, *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1992

[He1] F. Hettlich, *Die Integralgleichungsmethode bei Streuung an Körpern mit einer dünnen Schicht*, Diplomarbeit, Inst. f. Num. u. Angew. Math. Universität Göttingen, Göttingen, 1989

[He2] F. Hettlich, *Ein inverses Streuproblem bei konduktiven Randbedingungen zur Helmholtzgleichung*, Dissertation, Universität Erlangen-Nürnberg, 1992

[KiK] A. Kirsch und R. Kress, *Uniqueness in inverse obstacle scattering*, Inverse Problems 9 (1993)

[KlRo] R. E. Kleinman und G. F. Roach, *Boundary Integral Equations for the Three-dimensional Helmholtz Equation*, SIAM Reviews 16 (1974)

[K1] R. Kress, *Linear Integral Equations*, Springer - Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1989

[K2] R. Kress, *Inverse Probleme*, Vorlesungsskript WS 94/95 und SS 95, Inst. f. Num. u. Angew. Math. Universität Göttingen, Göttingen, 1994/95

[KRo] R. Kress und G. F. Roach, *Transmission problems for the Helmholtz equation*, J. Math. Phys. 19 (1978)

[Po] R. Potthast, *Inverse Robinprobleme zur akustischen Wellengleichung*, Diplomarbeit, Inst. f. Num. u. Angew. Math. Universität Göttingen, Göttingen, 1992