

Hierarchische Interpolation mit radialen Basisfunktionen

Diplomarbeit
vorgelegt von
Sandro Hartmann
aus
Dingelstädt

angefertigt
am Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
der Georg-August-Universität zu Göttingen
1996

Vorwort

Multivariate Interpolation mit radialen Basisfunktionen ist ein verhältnismäßig neues Gebiet in der angewandten Mathematik. Jedoch steigt die Bedeutung dieses Bereiches stetig an. Gerade in Anwendungen im CAD oder der digitalen Bildverarbeitung wird die Interpolation mit radialen Basisfunktionen immer populärer.

In vielen Bereichen von Wissenschaft und Technik tritt das Problem auf, reellwertige Daten, die von einer Funktion über einer Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, stammen, zu interpolieren.

Das Prinzip der Interpolation mit radialen Basisfunktionen besteht nun darin, auf einer gegebenen Menge $X = \{x_1, \dots, x_N\}$ von paarweise verschiedenen Stützstellen eine Interpolante als Linearkombination der Translationen der Basisfunktionen Φ um Punkte aus X zu suchen.

Beispiele für radiale Basisfunktionen, für die das so gestellte Interpolationsproblem eindeutig lösbar ist, sind die Gaussians, die inversen Multiquadrics und der Euklidische Hut.

Für einige radiale Basisfunktionen ist es nötig, der Interpolationsfunktion Polynome bestimmten Grades hinzuzufügen. Dadurch werden dann auch Polynome bis zu diesem Grad reproduziert. Derartige radiale Basisfunktionen sind zum Beispiel die Thin-Plate Splines, die Multiquadrics oder die Funktionen r^β mit $\beta \notin 2\mathbb{N}$.

Bei der Interpolation mit bestimmten radialen Basisfunktionen, wie zum Beispiel Thin-Plate Splines, Multiquadrics oder Gaussians, wird bei großen Datensätzen eine unakzeptable Rechenzeit benötigt. Dieses Problem kann man umgehen, indem man radiale Basisfunktionen verwendet, die einen kompakten Träger aufweisen. Um gute Ergebnisse zu erzielen, ist es notwendig, die radiale Basisfunktion mit δ zu skalieren.

Die Verteilung der Stützstellen ist sehr bedeutend für die Wahl der geeignetsten Skalierung. Auch die Kondition des Interpolationsproblems hängt hiervon stark ab. Wird δ zu klein gewählt, liefert die Interpolation keine akzeptablen Ergebnisse; wird δ aber zu groß gewählt, so ist die Interpolationsmatrix nicht mehr dünn besetzt und der Vorteil der Verwendung von Funktionen mit kompaktem Träger schwindet.

Floater und Iske [3] haben an praktischen Beispielen in Erfahrung gebracht, daß eine hierarchische Interpolationsmethode kleine und große Datensätze (für $N = 2000$ oder mehr) in Bezug auf Rechenzeit und Approximationsverhalten sehr gut behandelt. Im Gegensatz dazu ist es bei der Interpolationsmethode, die radiale Basisfunktionen mit globalem Träger verwendet, oft unmöglich, daß N größer als 100 oder 200 ist.

Davon inspiriert, besteht das Hauptziel dieser Arbeit in der Fehlerabschätzung der hierarchischen Interpolation mit radialen Basisfunktionen.

Nachdem wir in Kapitel 1 einige Grundlagen und Notationen geklärt haben, stellen wir im darauffolgenden Kapitel bekannte radiale Basisfunktionen mit ihren wichtigsten Eigenschaften vor.

In Kapitel 3 werden wir die Interpolation mit radialen Basisfunktionen beschreiben. Dazu führen wir unter anderem Räume für die zu interpolierende Funktion f ein, die möglichst minimale Voraussetzungen an f stellen. Diese Räume lassen es zu, den Interpolationsfehler durch ein Produkt aus Kriging- beziehungsweise Powerfunktion und

der Norm der zu interpolierenden Funktion f abzuschätzen; weshalb wir auch der von der Funktion f unabhängigen Powerfunktion einen Abschnitt widmen.

Die gewonnenen Erkenntnisse versuchen wir in Kapitel 4 auf die hierarchische Interpolation mit radialen Basisfunktionen zu übertragen. Dabei liegt der Schwerpunkt auf einer finalen Fehlerabschätzung der iterierten Interpolation.

Schließlich werden wir noch einige Beispiele anführen. Hierbei stützen wir uns zum Teil auf die Erfahrungen von Floater und Iske [3], die bereits Interpolanten durch die hierarchische Methode mit guten Ergebnissen berechnet haben.

Wir glauben, daß die Methode der hierarchischen Interpolation, insbesondere bei der Verwendung von radialen Basisfunktionen mit kompaktem Träger, in der Praxis sehr nützlich sein wird.

An dieser Stelle möchte ich mich für die Betreuung dieses sehr aktuellen und interessanten Themas bei Herrn Prof. Dr. R. Schaback bedanken.

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlagen	1
1.1	Allgemeines	1
1.2	Fouriertransformation	3
1.2.1	Klassische Fouriertransformation	3
1.2.2	Distributionen und verallgemeinerte Fouriertransformation	5
2	Radiale Basisfunktionen	10
2.1	Grundlegendes über radiale Basisfunktionen	10
2.2	Skalierung der radialen Basisfunktion	11
2.3	Beispiele	12
2.3.1	Gaussians	12
2.3.2	Multiquadrics	12
2.3.3	Inverse Multiquadrics	12
2.3.4	Die Funktionen r^β mit $\beta \notin 2\mathbb{N}$	13
2.3.5	Thin-Plate Splines	13
2.3.6	Der Euklidische Hut X_β	13
2.3.7	Wendland-Funktionen	15
3	Interpolation mit radialen Basisfunktionen	17
3.1	Das Interpolationsverfahren	17
3.2	Der Native Space \mathcal{F}_Φ	21
3.3	Die Powerfunktion	31
3.4	Fehlerabschätzung	37
4	Hierarchische Interpolation	42
4.1	Vorstellung der hierarchischen Interpolation	42
4.2	Kondition des Interpolationsproblems	43
4.3	Fehlerabschätzung der hierarchischen Interpolation	48
4.4	Interpolation mit bandbreitenbeschränkten Funktionen	54
4.5	Beispiele	61
4.5.1	Erstes Beispiel	61
4.5.2	Zweites Beispiel	64

1 Grundlagen

1.1 Allgemeines

Dieser Abschnitt soll hauptsächlich dazu dienen, die in dieser Arbeit verwendeten Notationen zu klären. Ferner sei an grundlegende Sätze und Definitionen erinnert. Mit $C(\Omega)$ bezeichnen wir wie üblich den Vektorraum aller stetigen Funktionen $f : \Omega \rightarrow \mathcal{C}$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, wobei d im weiteren Verlauf jeweils die Raumdimension angibt. Außerdem sei $L_1^{loc}(\Omega)$ die Menge aller lokal-integrierbaren Funktionen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Die folgende Bezeichnung wird häufig von Nutzen sein. Ist $p = (p_1, \dots, p_d)$ ein Mehrfachindex, d.h. $p_i \geq 0$ und ganz, so ist

$$|p| = p_1 + \dots + p_d, \quad x^p = x_1^{p_1} \cdot \dots \cdot x_d^{p_d} \quad \text{und} \\ D^p = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{p_1} \cdot \dots \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_d} \right)^{p_d} = \frac{\partial^{|p|}}{\partial x_1^{p_1} \cdot \dots \cdot \partial x_d^{p_d}}.$$

Unter dem Träger einer Funktion $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ versteht man die abgeschlossene Hülle der Menge aller Punkte, in denen die Funktion von Null verschieden ist. Der Träger von f wird mit $\text{supp}(f)$ bezeichnet; es gilt also

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \neq 0\}}.$$

Im Verlauf dieser Arbeit sei wie üblich mit $\Gamma(x)$ die Gammafunktion gekennzeichnet. Schließlich wollen wir noch an die Faltung von Funktionen erinnern. Für zwei Funktionen $f, g \in L_1(\mathbb{R}^d)$ existiert nach dem Satz von Fubini das Integral

$$(f * g)(y) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x)g(y-x) dx$$

für alle $y \in \mathbb{R}^d$ mit Ausnahme einer Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^d$. Definiert man $(f * g)(y)$ für $y \in N$ beliebig, z.B. gleich 0, so erhält man eine integrierbare Funktion $f * g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$. Damit ist

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} (f * g)(y) dy &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)g(y-x) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)g(z) dx dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx \int_{\mathbb{R}^d} g(y) dy. \end{aligned}$$

Man nennt $f * g$ Faltung der Funktionen f und g . Mit $f, g \in L_1(\mathbb{R}^d)$ liegt $f * g$ wieder in $L_1(\mathbb{R}^d)$; man hat also eine Abbildung $L_1(\mathbb{R}^d) \times L_1(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_1(\mathbb{R}^d)$, $(f, g) \mapsto f * g$. Aus obiger Rechnung für $|f * g|$ ergibt sich die Abschätzung

$$\|f * g\|_{L_1} \leq \|f\|_{L_1} \|g\|_{L_1}.$$

Bem. Die Faltung ist kommutativ.

Beweis: Nach Definition ist $(f * g)(y) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x)f(y-x) dx$ fast überall. Substituiert man $z = y - x$, so erhält man

$$(g * f)(y) = \int_{\mathbb{R}^d} g(y-z)f(z) dz = \int_{\mathbb{R}^d} f(z)g(y-z) dz .$$

Wiederum nach Definition ist das letzte Integral gleich $(f * g)(y)$; d.h. $f * g = g * f$ fast überall. \square

Eine große Bedeutung in den nachfolgenden Kapiteln spielen die Räume $L_p(\Omega)$ mit $1 \leq p < \infty$ und $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$, speziell die Funktionenräume $L_1(\Omega)$ und $L_2(\Omega)$. Der Raum $L_p(\Omega)$ besteht aus allen auf Ω definierten meßbaren Funktionen $f(t)$, für die das Integral von $|f|^p$ endlich ist, d.h. für die

$$\int_{\Omega} |f(t)|^p dt < \infty$$

gilt. Durch die Festsetzung

$$\|f\|_{L_p(\Omega)} = \left[\int_{\Omega} |f(t)|^p dt \right]^{\frac{1}{p}}$$

wird der Raum $L_p(\Omega)$ ein normierter Raum.

Insbesondere ist $\|f\|_{L_2(\Omega)} = [\int_{\Omega} |f(t)|^2 dt]^{\frac{1}{2}}$, und die L_2 -Norm entsteht aus dem Skalarprodukt $(f, g)_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega} f(t)\overline{g(t)} dt$. Für $x \in \mathbb{R}^d$ soll immer die euklidische Norm $\|x\|^2 = \|x\|_{L_2}^2 = x_1^2 + \dots + x_d^2$ stehen. Andere Normen werden entsprechend kenntlich gemacht.

Aus der Funktionalanalysis zitieren wir hier noch einige Aussagen. Die Elemente aus $L_p(\Omega)$ sind Klassen von Funktionen, die sich nur auf einer Menge vom Maß Null voneinander unterscheiden. Aus $\|f\|_{L_2(\Omega)} = 0$ folgt nämlich, daß $f(t) = 0$ fast überall auf Ω ist und nicht, daß f identisch gleich Null ist. Ebenfalls bekannt dürfte sein, daß $L_p(\Omega)$ vollständig ist.

Lemma 1.1 (Höldersche Ungleichung) Seien p und q reelle Zahlen größer 1 mit $1/p + 1/q = 1$. Dann gilt für auf einer Menge Ω definierte, meßbare Funktionen $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$\|fg\|_{L_1(\Omega)} \leq \|f\|_{L_p(\Omega)} \|g\|_{L_q(\Omega)} .$$

Der Beweis kann der Literatur, zum Beispiel Forster [4], entnommen werden.

Im Fall $p = q = 2$ erhält man aus der Hölderschen Ungleichung die Cauchy - Schwarz'sche Ungleichung

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_{L_2(\Omega)} \|g\|_{L_2(\Omega)},$$

die wir bei der Abschätzung des Fehlers der Interpolation mit radialen Basisfunktionen benutzen werden.

1.2 Fouriertransformation

Der Schlüssel zur Beschreibung von Signalen im Frequenzbereich ist die Fouriertransformation. So wird häufig bei der Analyse verschiedener Arten von Daten die Fouriertransformierte ermittelt. In der Regel geschieht dies in der Absicht, aus den Daten Komponenten mit bestimmten Frequenzen oder Frequenzbereichen herauszuziehen. Es existieren viele gebräuchliche Definitionen einer Fouriertransformierten. Alle diese verschiedenen Schreibweisen haben ihre bestimmten Vorteile. Die Ergebnisse, die auf der einen Schreibweise beruhen, lassen sich in jedem Fall leicht in einer anderen Schreibweise ausdrücken. Wir werden uns in dieser Arbeit auf die Definition der Fouriertransformierten, wie sie Hörmander [7] vorschlägt, berufen. Man nennt die Fouriertransformierte \hat{f} einer Funktion f auch das Spektrum von f .

1.2.1 Klassische Fouriertransformation

Für jede Funktion $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ und jedes $\omega \in \mathbb{R}^d$ gehört die Funktion $x \mapsto f(x)e^{-ix^T\omega}$ wieder zu $L_1(\mathbb{R}^d)$; woraus sich auch die Existenz des Integrals

$$\hat{f}(\omega) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-ix^T\omega} dx$$

ableiten läßt.

Definition 1.2 Sei $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$. Die durch

$$(Ff)(\omega) = \hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-ix^T\omega} dx$$

definierte Funktion $\hat{f} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ heißt die klassische Fouriertransformierte von f .

Aus der Analysis wissen wir, daß \hat{f} stetig ist. Außerdem ist \hat{f} beschränkt; \hat{f} erfüllt für alle $\omega \in \mathbb{R}^d$ die Abschätzung $|\hat{f}(\omega)| \leq \|f\|_{L_1}$. Wir möchten hier einige Resultate aus der Theorie der Fouriertransformation, die zum besseren Verständnis aller nachfolgenden Aussagen in Verbindung mit der Fouriertransformation dienen, anführen.

Satz 1.3 Seien $f, g \in L_1(\mathbb{R}^d)$ und \hat{f}, \hat{g} ihre Fouriertransformierten.

1. Sei $a \in \mathbb{R}^d$ und $(\tau_a f)(x) := f(x - a)$ die um a translatierte Funktion. Dann gilt $(\tau_a f)^\wedge(\omega) = \hat{f}(\omega)e^{-ia^T\omega}$.
2. Es gilt $\widehat{f * g} = \hat{f}\hat{g}$.
3. Die Funktionen $\hat{f}g$ und $f\hat{g}$ sind integrierbar und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(x)g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\hat{g}(x) dx.$$

Beweis: Die Aussagen folgen mittels Substitution und des Satzes von Fubini aus den Definitionen. \square

Korollar Für jede Funktion $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$\lim_{\|\omega\| \rightarrow \infty} \hat{f}(\omega) = 0.$$

Der Beweis befindet sich zum Beispiel in Forster [4].

Satz 1.4 (Umkehrformel) Sei $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ eine Funktion derart, daß auch $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt nach eventueller Abänderung auf einer Nullmenge

$$f(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\omega) e^{ix^T \omega} d\omega, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

Den Beweis des Satzes entnimmt man Forster [4]. \square

Bem. Die Umkehrformel zeigt auch, daß eine Funktion $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ durch ihre Fouriertransformierte eindeutig (bis auf Nullmengen) bestimmt ist. Denn gilt $\hat{f} = \hat{g}$, so folgt aus Satz 1.4, angewandt auf die Differenz $f - g$, daß $f = g$ fast überall.

Definition 1.5 Die zu $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ definierte Funktion $IFf \equiv \check{f}$, die gegeben ist durch

$$(IFf)(x) = \check{f}(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} f(\omega) e^{ix^T \omega} d\omega,$$

heißt die inverse Fouriertransformierte von f .

Mit der Umkehrformel bekommt man somit

Bem. Ist $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ und $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R}^d)$, so gilt

$$\check{\check{f}} = f \quad \text{und} \quad \hat{\hat{f}} = f.$$

Unser nächster Schritt soll darin bestehen, die Fouriertransformation für Funktionen aus $L_2(\mathbb{R}^d)$ zu erklären. Bevor wir beginnen, \hat{f} für f aus $L_2(\mathbb{R}^d)$ zu bestimmen, werden wir zuerst voraussetzen, daß f aus $L_1(\mathbb{R}^d)$ und $L_2(\mathbb{R}^d)$ stammt. In Anlehnung an Forster [4] formulieren wir

Satz 1.6 Ist $f \in L_1(\mathbb{R}^d) \cap L_2(\mathbb{R}^d)$, so gehört \hat{f} zu $L_2(\mathbb{R}^d)$ und es gilt $\|f\|_{L_2}^2 = (2\pi)^{-d} \|\hat{f}\|_{L_2}^2$.

Der zugehörige Beweis, auf den wir an dieser Stelle verzichten wollen, kann Forster [4] (oder Hörmander [7]) entnommen werden. Dabei ist auf unterschiedliche Definitionen der Fouriertransformierten \hat{f} zu achten.

Oft verwenden werden wir die Parsevalsche Gleichung, dessen Beweis ebenfalls in Hörmander [7] zu finden ist.

Korollar (Parsevalsche Gleichung) Für alle $\varphi, \psi \in L_1(\mathbb{R}^d) \cap L_2(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x) \overline{\psi(x)} dx = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} F\varphi(\omega) \overline{F\psi(\omega)} d\omega.$$

Eliminieren wir die Forderung $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$, so gelangen wir zu

Theorem 1.7 Sei $f \in L_2(\mathbb{R}^d)$ und $f_A(x) = \begin{cases} f(x) & : \|x\|_\infty \leq A \\ 0 & : \|x\|_\infty > A \end{cases}$. Dann ist $f_A \in L_1(\mathbb{R}^d) \cap L_2(\mathbb{R}^d)$, $\hat{f}_A \in L_2(\mathbb{R}^d)$ und es gibt eine eindeutige Funktion $T(f) \in L_2(\mathbb{R}^d)$ mit $\|\hat{f}_A - T(f)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \rightarrow 0$ für $A \rightarrow \infty$.

Beweis: Da $|f_A(x)| \leq |f(x)|$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$ wird klar, daß $f_A \in L_2(\mathbb{R}^d)$. Aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung $\|f_A\|_{L_1} = \int_{\{x:\|x\|_\infty \leq A\}} |f(x)| dx \leq \|f\|_{L_2} (\sqrt{2A})^d$ folgt, daß auch $f_A \in L_1(\mathbb{R}^d)$. Mit Satz 1.6, $\hat{f}_A \in L_2(\mathbb{R}^d)$ und für $A < B$ ist dann

$$\begin{aligned} \|\hat{f}_A - \hat{f}_B\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 &= (2\pi)^d \|f_A - f_B\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \\ &= (2\pi)^d \int_{\{x=(x_1, \dots, x_d): -B \leq x_i \leq -A\}} |f(x)|^2 dx \\ &\quad + (2\pi)^d \int_{\{x=(x_1, \dots, x_d): A \leq x_i \leq B\}} |f(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Die letzten beiden Integrale streben für $A \rightarrow \infty$ und $B \rightarrow \infty$ gegen Null. Es gibt also eine eindeutige Funktion $T(f) \in L_2(\mathbb{R}^d)$, so daß $\|T(f) - \hat{f}_A\|_{L_2} \rightarrow 0$ für $A \rightarrow \infty$. \square

Theorem 1.7 erlaubt uns, \hat{f} für ein gegebenes $f \in L_2(\mathbb{R}^d)$ zu definieren. Wir setzen einfach $\hat{f} = T(f)$ wie in der letzten Zeile des Beweises angegeben.

Man beachte aber den Unterschied der Fouriertransformation auf $L_1(\mathbb{R}^d)$ und $L_2(\mathbb{R}^d)$: Während \hat{f} für $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ eine stetige Funktion ist und man eindeutig von den Werten $\hat{f}(\omega)$ sprechen kann, ist \hat{f} für $f \in L_2(\mathbb{R}^d)$ nur bis auf Gleichheit fast überall bestimmt. Von großer Bedeutung für die Fouriertransformation auf $L_2(\mathbb{R}^d)$ ist der folgende Satz von Plancherel.

Satz 1.8 Sei $f \in L_2(\mathbb{R}^d)$. Dann existiert die Fouriertransformierte \hat{f} , $\hat{f} \in L_2(\mathbb{R}^d)$. Ferner gilt

$$(2\pi)^{-d} \|\hat{f}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 = \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2.$$

Der Beweis ist in vielen Büchern, die die Fouriertransformation zum Inhalt haben, zu finden, so zum Beispiel in [15].

Korollar Für beliebige $\phi, \psi \in L_2(\mathbb{R}^d)$ gilt die Beziehung

$$\int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) \overline{\psi(x)} dx = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} F\phi(\omega) \overline{F\psi(\omega)} d\omega.$$

1.2.2 Distributionen und verallgemeinerte Fouriertransformation

Im vorigen Abschnitt haben wir die klassische Fouriertransformation auf dem Raum $L_1(\mathbb{R}^d)$ aller absolut integrierbaren Funktionen beschrieben. Um auch von der Fouriertransformation für Funktionen, die nicht im klassischen Sinn fouriertransformierbar sind, sprechen zu können, führen wir den Begriff der Distributionen ein.

Distributionen sind lineare, stetige Funktionale auf einem Funktionenraum, dem sogenannten Raum der Testfunktionen. Die Klasse der Distributionen hat viele angenehme Eigenschaften, die zum Beispiel innerhalb der Klasse der stetigen Funktionen nicht gelten.

Ein bedeutsamer Typ von Funktionalen sind die langsam wachsenden oder temperierten Distributionen. Sie werden auf dem Raum S der schnell abnehmenden oder „guten“ Funktionen erklärt. Diesen Raum S der Testfunktionen bezeichnen wir als *Schwartzraum*.

Definition 1.9 Die Menge S besteht aus allen beliebig oft differenzierbaren Funktionen (C^∞ -Funktionen) $\varphi(x)$, die für $\|x\| \rightarrow \infty$ nebst ihrer Ableitungen beliebiger Ordnung schneller als jede Potenz von $\|x\|^{-1}$ gegen Null konvergieren. Genauer: $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ gehört zu S , wenn für beliebige Multiindizes p, q

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^p D^q \varphi(x)| = C_{p,q}(\varphi) < \infty$$

gilt.

Zur Klärung von x^p und D^q sei auf den einführenden Abschnitt 1.1 verwiesen. Gleichwertig ist der

Satz 1.10 Eine Funktion $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ gehört genau dann zu S , wenn zu jedem Multiindex $p \in \mathbb{N}_0^d$ und jedem $m \in \mathbb{N}$ eine von p, m und φ abhängende Konstante $C > 0$ existiert, so daß für alle $x \in \mathbb{R}^d$

$$|D^p \varphi(x)| \leq \frac{C}{(1 + \|x\|)^m} .$$

Hieraus folgt insbesondere, daß $S \subseteq L_1(\mathbb{R}^d)$ und damit, daß alle Elemente des Raumes S fouriertransformierbar sind.

Wir gehen nun vom Raum S zu dem Dualraum S' über und führen unter anderem den Begriff der Stetigkeit ein.

Definition 1.11 Sei $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine Funktionenfolge aus S für die gilt:

1. Zu jedem $p, q \in \mathbb{N}_0^d$ gibt es eine positive Konstante $C_{p,q}$, so daß

$$|x^q D^p \varphi_k(x)| \leq C_{p,q} \quad k \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}^d$$

erfüllt ist.

2. Für jeden Multiindex $p \in \mathbb{N}_0^d$ konvergiert die Ableitung $D^p \varphi_k$ für $k \rightarrow \infty$ auf \mathbb{R}^d gleichmäßig gegen Null.

Dann heißt die Folge $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ Nullfolge aus S und wir verwenden die Schreibweise

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k = 0 \quad \text{oder} \quad \varphi_k \xrightarrow{S} 0, k \rightarrow \infty.$$

Eine Folge $\{\varphi_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ heißt konvergent gegen ein Element $\varphi \in S$, falls $\{\varphi_k - \varphi\}$ eine Nullfolge ist, kurz $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k = \varphi$.

Definition 1.12 1. Ein lineares Funktional $T : S \rightarrow \mathbb{R}$ heißt stetig, falls aus $\varphi_k \xrightarrow{S} \varphi$ stets auch $T(\varphi_k) \xrightarrow{\mathbb{R}} T(\varphi)$ folgt.

2. Der Vektorraum S' aller linearen und im obigen Sinne stetigen Funktionale auf dem Raum S der schnell abnehmenden oder „guten“ Funktionen heißt der Raum der temperierten Distributionen.

Mit anderen Worten wird ein auf dem Schwartzraum S erklärtes lineares und stetiges Funktional T

$$T : S \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi \mapsto T[\varphi]$$

temperierte Distribution genannt.

Definition 1.13 Eine Funktion f heißt langsam wachsende oder temperierte Funktion, falls $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^d)$ und Zahlen $N \in \mathbb{N}_0$, $r > 0$, $C_f > 0$ existieren, so daß für alle $\|x\| > r$ gilt

$$\frac{f(x)}{(1 + \|x\|)^N} < C_f.$$

Jeder temperierten Funktion f ist durch

$$([f], \varphi) := \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\varphi(x) dx, \quad \varphi \in S,$$

ein lineares Funktional $[f] : S \rightarrow \mathbb{R}$ aus S' zugeordnet.

Solche Distributionen $[f]$ heißen reguläre Distributionen.

Wir kommen nun zurück zur Fouriertransformation.

Satz 1.14 Die Fouriertransformation F ist ein Automorphismus auf S ; F bildet S linear, stetig und eineindeutig auf S ab.

Die Umkehrabbildung F^{-1} , die gegeben ist durch

$$F^{-1}(\hat{\gamma}(\omega))(x) = \gamma(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix^T \omega} \hat{\gamma}(\omega) d\omega,$$

hat dieselben Eigenschaften.

Der Beweis des Satzes kann zum Beispiel Jantscher [9] entnommen werden.

Für $\varphi \in S$ und $\psi \in S$ gilt die Beziehung

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{\varphi}(x)\psi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\hat{\psi}(x) dx.$$

S ist bezüglich des Faltungsprodukts $*$ abgeschlossen; es gilt

$$F(\varphi * \psi) = F\varphi F\psi \quad \text{sowie}$$

$$F(\varphi\psi) = (2\pi)^{-d}(F\varphi * F\psi).$$

Zum Beweis sei auf Walter [19] oder Hörmander [7] verwiesen.

Mit Hilfe der Theorie der (temperierten) Distributionen führen wir nun den Begriff der Fouriertransformation auch für Funktionen ein, die nicht im klassischen Sinn fouriertransformierbar sind. Dazu erklären wir die Fouriertransformation in S' .

Definition 1.15 Die distributionelle Fouriertransformation $\hat{T} = FT \in S'$ einer temperierten Distribution $T \in S'$ ist gegeben durch

$$(FT, \varphi) := (T, F\varphi), \quad \varphi \in S.$$

Dieses Funktional ist auf S' erklärt, linear und stetig.

Bem. Für eine Funktion $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ und $\varphi \in S$ können wir unter Benutzung von Satz 1.3(3) aus Abschnitt 1.2.1 zeigen, daß

$$([Ff], \varphi) = ([f], F\varphi) = (F[f], \varphi).$$

Diese Definition stimmt mit der der klassischen Fouriertransformation überein. Analog definieren wir die inverse Fouriertransformation:

Definition 1.16 Die distributionelle inverse Fouriertransformation $\check{T} = F^{-1}T \in S'$ einer temperierten Distribution $T \in S'$ ist gegeben durch

$$(F^{-1}T, \varphi) := (T, F^{-1}\varphi), \quad \varphi \in S.$$

In Jantscher [9] wird der folgende Satz bewiesen.

Satz 1.17 Die distributionelle Fouriertransformation $F : S' \longrightarrow S'$, $T \longmapsto \hat{T} = FT$ ist ein Automorphismus in S' , d.h. F und F^{-1} sind lineare, stetige und eindeutige Abbildungen von S' auf S' .

An dieser Stelle möchten wir noch den Begriff der verallgemeinerten Fouriertransformation einführen.

Definition 1.18 Sei ϕ eine temperierte Funktion. Wir bezeichnen $\varphi \in C(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ als verallgemeinerte Fouriertransformierte von ϕ , falls die distributionelle Fouriertransformierte $F[\phi]$ auf $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ mit einer stetigen Funktion φ übereinstimmt, das heißt $(F[\phi], \gamma) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\omega) \gamma(\omega) d\omega$ für alle $\gamma \in S$ mit $0 \notin \text{supp}(\gamma)$.

Als selbstverständliche Aussage formulieren wir die

Bem. Sei f eine Funktion, die im klassischen Sinne fouriertransformierbar ist. Dann stimmt die verallgemeinerte Fouriertransformierte von f auf $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ mit der klassischen Fouriertransformierten \hat{f} von f überein.

Auf die distributionelle oder verallgemeinerte Fouriertransformierte lassen sich frühere Eigenschaften der Fouriertransformation übertragen, so zum Beispiel die Parsevalsche Gleichung:

Satz 1.19 (Parsevalsche Gleichung im distributionellen Sinn)
Sei T eine Distribution aus S' . Dann gilt (im distributionellen Sinn)

$$(T, \gamma) = (2\pi)^{-d} (FT, \hat{\gamma}) \quad \text{für alle } \gamma \in S.$$

Die Faltung einer Distribution mit einer Testfunktion wird durch

$$(T * \varphi)(x) = (T(y), \varphi(x - y))$$

erklärt und ist eine C^∞ -Funktion.

Bem. Sei $f \in S'$ eine temperierte Distribution und $g \in S$. Somit läßt sich die Beziehung

$$F(f * g) = FfFg$$

herleiten.

Natürlich konnten in diesem Abschnitt nur die wichtigsten Grundlagen der Distributionen und der Theorie der distributionellen beziehungsweise verallgemeinerten Fouriertransformierten aufgezeigt werden.

Für Details kann die umfangreiche Literatur herangezogen werden.

2 Radiale Basisfunktionen

2.1 Grundlegendes über radiale Basisfunktionen

Zuerst wollen wir den Begriff der radialen Basisfunktion klären.

Definition 2.1 Eine stetige Funktion $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ mit höchstens polynomialem Wachstum im Unendlichen heißt radiale Basisfunktion, falls Φ im Sinne von $\Phi(x) = \phi(\|x\|)$ mit einer reellwertigen Funktion $\phi : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ erklärt ist.

Unsere Aufgabe wird es nun sein, die Fouriertransformierte zu einer radialen Basisfunktion Φ zu finden. Im Kapitel 1 haben wir bereits die klassische Fouriertransformierte kennengelernt. Sie ist für eine Funktion f aus dem Raum $L_1(\mathbb{R}^d)$ aller absolut integrierbaren Funktionen erklärt durch

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-ix^T \omega} dx .$$

Jedoch existiert nicht zu jeder radialen Basisfunktion Φ eine klassische Fouriertransformierte. So divergiert das Integral

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x) e^{-ix^T \omega} dx$$

bereits an der Stelle $\omega = 0$ für Funktionen Φ , die nicht im Raum $L_1(\mathbb{R}^d)$ liegen. Aus diesem Grund haben wir in Abschnitt 1.2.2 die distributionelle beziehungsweise die verallgemeinerte Fouriertransformierte eingeführt.

Nach den Bemerkungen aus Abschnitt 1.2.2 definiert eine stetige Funktion g mit höchstens polynomialem Wachstum im Unendlichen eine reguläre Distribution $[g]$ auf dem Raum S durch die Abbildungsvorschrift

$$([g], \varphi) := \int_{\mathbb{R}^d} g(x) \varphi(x) dx \quad \text{für alle } \varphi \in S.$$

Wir können somit jeder radialen Basisfunktion Φ eine reguläre Distribution $[\Phi]$ aus S' zuordnen. Da die distributionelle Fouriertransformation ein Automorphismus auf dem Dualraum S' ist, besitzt die reguläre Distribution $[\Phi] \in S'$ eine Fouriertransformierte $F[\Phi]$ aus S' .

Wie in Abschnitt 1.2.2 bezeichnen wir $F[\Phi]$ als distributionelle Fouriertransformierte von Φ .

Für die von uns verwendeten radialen Basisfunktionen Φ stimmt die distributionelle Fouriertransformierte $F[\Phi]$ auf $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ mit einer stetigen Funktion φ überein, d.h. es gilt

$$(F[\Phi], \gamma) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\omega) \gamma(\omega) d\omega \quad \text{für alle } \gamma \in S \text{ mit } 0 \notin \text{supp}(\gamma).$$

Wir nennen $\varphi \in C(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ wieder verallgemeinerte Fouriertransformierte von Φ . Kurz erwähnt sei hier nochmals die Aussage, daß für eine Funktion f , die im klassischen Sinn fouriertransformierbar ist, die verallgemeinerte Fouriertransformierte von f auf

$\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ mit der klassischen Fouriertransformierten \hat{f} übereinstimmt.

Im weiteren Verlauf unserer Ausführungen werden wir von der bedingten positiven Definitheit einer radialen Basisfunktion sprechen. Deshalb möchten wir schon vorweg die zugehörige Definition angeben. In dieser Definition bezeichne \mathbb{P}_m^d den Raum aller Polynome der Ordnung kleiner gleich m in d Veränderlichen.

Definition 2.2 Eine stetige Funktion $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\Phi(x) = \Phi(-x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, heißt bedingt positiv definit der Ordnung $m \geq 0$, falls für alle paarweise verschiedenen Punkte $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}^d$, $N \in \mathbb{N}$, und alle $a = (a_1, \dots, a_N)^T \in \mathbb{R}^N$ mit $\sum_{j=1}^N a_j p(x_j) = 0$ für jedes $p \in \mathbb{P}_m^d$ die quadratische Form

$$a^T A_{\Phi, X} a = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N a_j a_k \Phi(x_j - x_k)$$

mit $A_{\Phi, X} := (\Phi(x_j - x_k))_{1 \leq j, k \leq N}$ nichtnegativ ist. Dabei soll die quadratische Form nur dann verschwinden, wenn alle a_j , $j = 1, \dots, N$, gleich Null sind.

Bezeichnung: $\Phi \in BPD(m)$ heißt, daß die Funktion Φ bedingt positiv definit der Ordnung m ist.

Bem. Es gilt $BPD(m) \subset BPD(m+k)$, $k \in \mathbb{N}$.

2.2 Skalierung der radialen Basisfunktion

Im Verlauf dieser Arbeit werden wir den Nutzen zu schätzen wissen, den eine Skalierung der radialen Basisfunktion Φ mit sich bringt. Mit Blick auf die hierarchische Interpolation und hier besonders auf die Abschätzung der Kondition der einzelnen Interpolationsmatrizen werden wir die Bedeutung der skalierten Version einer Basisfunktion kennenlernen. Deshalb möchten wir in diesem Abschnitt kurz klären, wie wir eine radiale Basisfunktion Φ skalieren.

Dazu sei $\Phi \in BPD(m)$ eine radiale Basisfunktion und $\varphi : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ die (verallgemeinerte) Fouriertransformierte von Φ .

Die Basisfunktion Φ skalieren wir mit $\delta > 0$ in folgender Weise

$$\begin{aligned} \Phi_\delta(\cdot) &= \Phi(\cdot/\delta) \\ \varphi_\delta(\cdot) &= \delta^d \varphi(\delta \cdot), \end{aligned}$$

wobei φ_δ die (verallgemeinerte) Fouriertransformierte der skalierten Basisfunktion bezeichnet.

Eine Skalierung der radialen Basisfunktion Φ hat verschiedene Auswirkungen. So werden wir zum Beispiel in Abschnitt 3.3 einen dieser Effekte beleuchten.

In Abschnitt 4.2 werden wir ebenfalls den Einfluß der Skalierung von Φ durch $\Phi_\delta(\cdot) = \Phi(\cdot/\delta)$ untersuchen, aber hier hinsichtlich der quadratischen Form

$$a^T A_{\Phi_\delta, X} a$$

für $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subset \mathbb{R}^d$, $\delta > 0$, $a \in \mathbb{R}^N$ und $A_{\Phi_\delta, X} = (\Phi_\delta(x_j - x_k))_{1 \leq j, k \leq N}$.

2.3 Beispiele

Es sollen nun einige bekannte Beispiele für radiale Basisfunktionen vorgestellt werden. Dabei werden wir unter anderem Aussagen über die Ordnung der bedingten positiven Definitheit treffen. Die (verallgemeinerten) Fouriertransformierten entnimmt man zum Beispiel Gelfand [5].

Über Einzelheiten und Bedeutung dieser Aussagen werden die nachfolgenden Abschnitte informieren.

2.3.1 Gaussians

Definition 2.3 Die Gaussians (oder auch Gaußglocken genannt) sind definiert durch

$$\Phi(x) = e^{-\alpha\|x\|^2}, \quad \alpha > 0.$$

Als bekannt können die Aussagen des folgenden Satzes vorausgesetzt werden.

Satz 2.4 Die Gaussians sind (unbedingt) positiv definit und besitzen die (klassische) Fouriertransformierte

$$\hat{\Phi}(\omega) = \varphi(\omega) = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{\frac{d}{2}} e^{-\frac{\|\omega\|^2}{4\alpha}}.$$

2.3.2 Multiquadrics

Satz 2.5 Die mit

$$\Phi(x) = (-1)^{\lceil \nu/2 \rceil} (c^2 + \|x\|^2)^{\nu/2}, \quad \nu > 0, c > 0, \nu \notin 2\mathbb{N}$$

bezeichnete Funktion ist bedingt positiv definit der Ordnung $\lceil \nu/2 \rceil$.

Die verallgemeinerte Fouriertransformierte lautet

$$\varphi(\omega) = (-1)^{\lceil \nu/2 \rceil} \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(-\nu/2)} K_{\frac{d+\nu}{2}}(c\|\omega\|) \left(\frac{\|\omega\|}{2c}\right)^{-\frac{d+\nu}{2}},$$

wobei K_η die modifizierte Besselfunktion der 2. Art der Ordnung η bezeichnet.

2.3.3 Inverse Multiquadrics

Definition 2.6 Die inversen Multiquadrics sind gegeben durch

$$\Phi(x) = (c^2 + \|x\|^2)^{-\frac{\nu}{2}}, \quad c > 0, \nu \in \mathbb{R}_{\geq 0} \setminus 2\mathbb{N}.$$

Satz 2.7 Die inversen Multiquadrics besitzen die Fouriertransformierten

$$\varphi(\omega) = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} K_{\frac{d-\nu}{2}}(c\|\omega\|) \left(\frac{\|\omega\|}{2c}\right)^{-\frac{d-\nu}{2}}.$$

Dabei bezeichne K_η wiederum die modifizierte Besselfunktion. (Im Fall $\nu > d$ sind die inversen Multiquadrics im klassischen Sinn fouriertransformierbar.)

Außerdem sind die inversen Multiquadrics (unbedingt) positiv definit.

2.3.4 Die Funktionen r^β mit $\beta \notin 2\mathbb{N}$

Eine weitere radiale Basisfunktion sei definiert durch

$$\Phi(x) = (-1)^{\lceil \nu/2 \rceil} \|x\|^\nu$$

mit $\nu > 0$, $\nu \notin 2\mathbb{N}$.

Satz 2.8 Für die Funktion $\Phi(x) = (-1)^{\lceil \nu/2 \rceil} \|x\|^\nu$ mit $\nu > 0$, $\nu \notin 2\mathbb{N}$ erhalten wir die verallgemeinerte Fouriertransformierte

$$\varphi(\omega) = 2^{d+\nu} \pi^{d/2} \frac{\Gamma(\frac{d+\nu}{2})}{|\Gamma(-\frac{\nu}{2})|} \|\omega\|^{-d-\nu} .$$

Die Funktion $\Phi(x) = (-1)^{\lceil \nu/2 \rceil} \|x\|^\nu$ mit $\nu > 0$, $\nu \notin 2\mathbb{N}$ ist bedingt positiv definit der Ordnung $\lceil \nu/2 \rceil$.

2.3.5 Thin-Plate Splines

Definition 2.9 Die radiale Basisfunktion

$$\Phi(x) = (-1)^{k+1} \|x\|^{2k} \log \|x\|, \quad k \in \mathbb{N}$$

wird Thin-Plate Spline genannt.

Satz 2.10 Für die verallgemeinerte Fouriertransformierte der radialen Basisfunktion $\Phi(x) = (-1)^{k+1} \|x\|^{2k} \log \|x\|$, $k \in \mathbb{N}$, ergibt sich

$$\varphi(\omega) = 2^{d+2k-1} \pi^{d/2} \Gamma(\frac{d}{2} + k) k! \|\omega\|^{-d-2k} .$$

Ebenfalls ist die Ordnung der bedingten positiven Definitheit mit $m = k + 1$ gegeben.

2.3.6 Der Euklidische Hut X_β

In diesem Abschnitt wollen wir den Euklidischen Hut als radiale Basisfunktion mit kompaktem Träger vorstellen. Da die radialen Basisfunktionen mit kompaktem Träger relativ neu sind, möchten wir diese etwas ausführlicher betrachten. Alle hier angeführten Aussagen sind der Diplomarbeit von Wendland [21] entnommen, in der man auch mehr Einzelheiten über diese radiale Basisfunktion mit kompaktem Träger erfahren kann.

Definition 2.11 Sei für $\beta \in \mathbb{R}_{>0}$, $x \in \mathbb{R}^d$

$$\chi_\beta(x) := \left\{ \begin{array}{ll} 1 & : \|x\| \leq \beta \\ 0 & : \text{sonst} \end{array} \right\}$$

die charakteristische Funktion der d -dimensionalen L_2 -Kugel um Null mit Radius β . Dann ist der Euklidische Hut $\Upsilon_\beta : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\Upsilon_\beta(x) := \chi_\beta * \chi_\beta(x) .$$

Im Folgenden tragen wir einige Eigenschaften des Euklidischen Huts zusammen.

Bem.

1. Υ_β besitzt den Träger $\{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| \leq 2\beta\}$.

2. Die Fouriertransformierte von Υ_β lautet

$$\hat{\Upsilon}_\beta(\omega) = (2\pi\beta)^d \|\omega\|^{-d} J_{d/2}^2(\|\omega\|\beta);$$

sie liegt im Raum $L_1(\mathbb{R}^d)$. Dabei bezeichne J_η die Besselfunktion der 1. Art der Ordnung η .

3. Für fast alle $\omega \in \mathbb{R}^d$ ist $\hat{\Upsilon}_\beta(\omega) > 0$.

4. Es gilt die Identität $\Upsilon_\beta(x) = \beta^d \Upsilon_1(\frac{x}{\beta})$.

5. Da χ_β radial ist, ist auch Υ_β radial. Die zugehörige Funktion sei mit

$$X_\beta : \mathbb{R}_{\geq 0} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit } \Upsilon_\beta(x) = X_\beta(\|x\|)$$

bezeichnet.

6. Υ_β ist positiv definit.

7. Die Fouriertransformierte besitzt das Verhalten $\hat{\Upsilon}(\omega) = \mathcal{O}(\|\omega\|^{-d-1})$ für $\|\omega\| \rightarrow \infty$.

Bis zu diesem Zeitpunkt haben wir Υ_β nur über das Faltungsintegral $\Upsilon_\beta(x) = \chi_\beta * \chi_\beta(x)$ definiert. Es soll nun dieses Faltungsintegral auf ein einfacheres, eindimensionales Integral reduziert werden und so eine explizite, auswertbare Form von X_β berechnet werden. Aus [21] zitieren wir den folgenden Satz.

Satz 2.12 Für die Faltung zweier charakteristischer Funktionen der d -dimensionalen L_2 -Kugel um Null mit Radius β gilt für $0 \leq r \leq 2\beta$:

$$X_\beta(r) = \frac{2\beta^d \pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^{\frac{\sqrt{4\beta^2-r^2}}{2\beta}} \frac{t^d}{\sqrt{1-t^2}} dt.$$

Korollar Speziell für die Fälle $d = 1, 2, 3$ ergibt sich

$$\begin{aligned} d = 1 & : X_\beta(r) = 2\beta - r, \\ d = 2 & : X_\beta(r) = 2\beta^2 \arccos \frac{r}{2\beta} - \frac{1}{2}r\sqrt{4\beta^2 - r^2}, \\ d = 3 & : X_\beta(r) = \pi \left(\frac{1}{12}r^3 - \beta^2 r + \frac{4}{3}\beta^3 \right), \end{aligned}$$

jeweils für $0 \leq r \leq 2\beta$.

Die Beweise aller obigen Aussagen sind in der Arbeit von Wendland [21] nachlesbar.

2.3.7 Wendland-Funktionen

Als letztes Beispiel wollen wir die Wendland-Funktionen als neue radiale Basisfunktionen mit kompaktem Träger vorstellen. Diese Funktionen sind stückweise polynomial, positiv definit und besitzen minimalen Grad in Abhängigkeit von Glätte und Raumdimension. Wir wollen an dieser Stelle nur einige Eigenschaften dieser Funktionen aufgreifen. Einzelheiten erfährt man in [22] und wird man in Kürze in der Dissertation nachlesen können. Für den Raum aller positiven definiten Funktionen auf dem \mathbb{R}^d schreiben wir PD_d . Mit

$$\psi_l(r) := (1 - r)_+^l$$

bezeichnen wir die bekannte abgeschnittene Potenzfunktion.

Der Operator \mathcal{I} sei definiert durch

$$\mathcal{I}(f)(r) := \int_r^\infty s f(s) ds .$$

Durch

$$\psi_{l,k} := \mathcal{I}^k \psi_l$$

wird nun eine Wendland-Funktion beschrieben. Diese Funktion hat gemäß [22] unter anderem folgende Eigenschaften.

Satz 2.13

1. Die Funktion $\psi_{l,k}$ besitzt einen Träger in $[0, 1]$.
2. $\psi_{l,k} \in C^{l+k-1}(1)$.
3. $\psi_{l,k} \in C^{2k}(0)$.
4. Sei $d \in \mathbb{N}$. Wählt man $l = \lfloor \frac{d}{2} \rfloor + k + 1$, so folgt $\psi_{l,k} \in PD_d \cap C^{2k}$.

Mit $d = 2n + 1$, $m = n + k$, $l = \lfloor \frac{d}{2} \rfloor + k + 1$ bekommt man

$$\begin{aligned} F_d \psi_{l,k} &= F_{d+2k} \psi_l \\ &= F_{2m+1} \psi_{m+1} \\ &= r^{-3m-2} \int_0^r (r-t)^{m+1} t^{m+1/2} J_{m-1/2}(t) dt , \end{aligned}$$

wobei mit F_d die d -variate Fouriertransformation gemeint ist.

Tabelle 1 zeigt uns einige dieser neuen Funktionen. Dabei bedeutet \doteq Gleichheit bis auf Konstanten.

$d = 1$	$\psi_{1,0}(r) = (1 - r)_+$	C^0
	$\psi_{2,1}(r) \doteq (1 - r)_+^3(3r + 1)$	C^2
	$\psi_{3,2}(r) \doteq (1 - r)_+^5(8r^2 + 5r + 1)$	C^4
$d = 3$	$\psi_{2,0}(r) = (1 - r)_+^2$	C^0
	$\psi_{3,1}(r) \doteq (1 - r)_+^4(4r + 1)$	C^2
	$\psi_{4,2}(r) \doteq (1 - r)_+^6(35r^2 + 18r + 3)$	C^4
	$\psi_{5,3}(r) \doteq (1 - r)_+^8(32r^3 + 25r^2 + 8r + 1)$	C^6
$d = 5$	$\psi_{3,0}(r) = (1 - r)_+^3$	C^0
	$\psi_{4,1}(r) \doteq (1 - r)_+^5(5r + 1)$	C^2
	$\psi_{5,2}(r) \doteq (1 - r)_+^7(16r^2 + 7r + 1)$	C^4

Tabelle 1:

3 Interpolation mit radialen Basisfunktionen

3.1 Das Interpolationsverfahren

An dieser Stelle wollen wir die multivariate Interpolation in einem Schritt mit radialen Basisfunktionen vorstellen.

Gegeben seien paarweise verschiedene Punkte $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subset \Omega \subset \mathbb{R}^d$ und eine Abbildung $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$. Bezeichnen wir die Funktionswerte mit $y_i := f_i := f(x_i)$ für $i = 1, \dots, N$, so ergibt sich das Interpolationsproblem:

Finde zu den Daten $(x_i, f_i) \in \mathbb{R}^{d+1}$, $i = 1, \dots, N$, eine Funktion $s_f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ derart, daß die Interpolationseigenschaften

$$s_f(x_i) = f(x_i) = f_i \quad \text{für jedes } i = 1, \dots, N \quad (3.1)$$

erfüllt sind.

Sei nun $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ eine radiale Basisfunktion, die bedingt positiv definit der Ordnung m ist.

Bei der Interpolation mit radialen Basisfunktionen setzt man für die Interpolante s_f Linearkombinationen der Translationen von Φ um Punkte aus X an. Damit hat die einfachste Darstellung der Interpolationsfunktion s_f die Form

$$s_f(x) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi(x - x_j),$$

wobei $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ reelle Zahlen sind.

Mit den Bedingungen (3.1) ergibt sich so ein $N \times N$ -Gleichungssystem

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi(x_k - x_j) = f_k, \quad 1 \leq k \leq N,$$

beziehungsweise in Matrixschreibweise aufgeschrieben als

$$A\alpha = y \quad (3.2)$$

mit der symmetrischen Matrix

$$A_{\Phi, X} = A = \begin{pmatrix} \Phi(x_1 - x_1) & \Phi(x_1 - x_2) & \cdots & \Phi(x_1 - x_N) \\ \Phi(x_2 - x_1) & \Phi(x_2 - x_2) & \cdots & \Phi(x_2 - x_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi(x_N - x_1) & \Phi(x_N - x_2) & \cdots & \Phi(x_N - x_N) \end{pmatrix}$$

und $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)^T$, $y = (f_1, \dots, f_N)^T$. Das Gleichungssystem $A\alpha = y$ ist für beliebige $y = (f_1, \dots, f_n)^T$ lösbar, wenn die Matrix A nicht singular ist, d.h. wenn die Determinante der Matrix A nicht verschwindet. Dieses Kriterium ist stets erfüllt, falls A sogar positiv definit ist.

Für bedingt positiv definite radiale Basisfunktionen der Ordnung $m > 0$ ist es jedoch

notwendig, der Interpolationsfunktion s_f Polynome hinzuzufügen.

Aus diesem Grund bezeichne \mathbb{P}_m^d den Raum aller Polynome der Gesamtordnung kleiner gleich m in d Veränderlichen. Weiterhin sei $Q := \dim \mathbb{P}_m^d = \binom{m-1+d}{d}$ und p_1, \dots, p_Q eine Basis des \mathbb{P}_m^d , d.h. $\mathbb{P}_m^d = \text{span}\{p_1, \dots, p_Q\}$.

Unter Hinzufügung der Polynome ergibt sich so für die Interpolationsfunktion

$$s_f(x) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi(x - x_j) + \sum_{k=1}^Q \beta_k p_k(x). \quad (3.3)$$

Die Interpolationsbedingungen lauten dann

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi(x_l - x_j) + \sum_{k=1}^Q \beta_k p_k(x_l) = f_l, \quad 1 \leq l \leq N, \quad (3.4)$$

wobei die α_j 's der Zusatzbedingung

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j p_k(x_j) = 0, \quad 1 \leq k \leq Q, \quad (3.5)$$

unterliegen, um die überzähligen Freiheitsgrade zu binden.

Setzen wir

$$P^T := \begin{pmatrix} p_1(x_1) & \cdots & p_1(x_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_Q(x_1) & \cdots & p_Q(x_N) \end{pmatrix},$$

so schreibt sich das Interpolationsproblem als $(N + Q) \times (N + Q)$ -Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} A & P \\ P^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

mit den Vektoren

$$\begin{aligned} \alpha &:= (\alpha_1, \dots, \alpha_N)^T, \\ \beta &:= (\beta_1, \dots, \beta_Q)^T, \\ y &:= (f_1, \dots, f_N)^T. \end{aligned}$$

In Kapitel 2 haben wir bereits definiert, wann eine Funktion bedingt positiv definit der Ordnung m ist. Dabei haben wir bekannte radiale Basisfunktionen vorgestellt und erfahren, von welcher Ordnung sie bedingt positiv definit sind.

Bem. Im Fall $m = 0$, d.h. wenn die radiale Basisfunktion Φ (unbedingt) positiv definit ist, reduziert sich die Interpolationsfunktion auf die gewöhnliche Gestalt

$$s_f(x) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi(x - x_j),$$

und der polynomiale Anteil in (3.3) sowie die Zusatzbedingung (3.5) entfallen.

Es stellt sich nun die Frage nach der Lösbarkeit des Interpolationssystems (3.6).

Satz 3.1 *Ist $\Phi \in BPD(m)$ und ist die Matrix P injektiv, so ist das System (3.6) eindeutig lösbar.*

Beweis: Gelte

$$\begin{pmatrix} A & P \\ P^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Da $0 = A\alpha + P\beta = \alpha^T A\alpha + \alpha^T P\beta = \alpha^T A\alpha + \beta^T P^T\alpha$ und $P^T\alpha = 0$ ist, folgt $\alpha^T A\alpha = 0$ und wegen $\Phi \in BPD(m)$ folgt $\alpha = 0$.

Somit ist $P\beta = 0$ und mit der Injektivität von P ist $\beta = 0$. \square

Bem. *Die Injektivität der Matrix P ist gleichbedeutend damit, daß die Zeilen von P^T linear unabhängig sind, beziehungsweise der Punktsatz $X = \{x_1, \dots, x_N\}$ der Voraussetzung*

$$\text{aus } p(x_j) = 0, \quad j = 1, \dots, N, \quad p \in \mathbb{P}_m^d, \text{ folgt } p \equiv 0$$

genügt.

Beweis: Da $\mathbb{P}_m^d = \text{span}\{p_1, \dots, p_Q\}$, ist $p = \sum_{k=1}^Q \beta_k p_k$ aus \mathbb{P}_m^d . P injektiv bedeutet, daß aus $P\beta = 0$ stets $\beta = 0$ folgt. Dieses ist wiederum gleichbedeutend mit:

$$\text{Aus } \sum_{k=1}^Q \beta_k p_k(x_j) = 0, \quad j = 1, \dots, N, \text{ folgt } \beta = 0.$$

Somit folgt aus $p(x_j) = 0, \quad j = 1, \dots, N$, stets $p \equiv 0$. \square

Im weiteren nennen wir Punktsätze $X = \{x_1, \dots, x_N\}$ mit obiger Eigenschaft \mathbb{P}_m^d -regulär. Insbesondere gilt für \mathbb{P}_m^d -reguläre Punktsätze immer $N \geq Q = \dim \mathbb{P}_m^d$. Falls $N = Q$ ist, bezeichnen wir den Punktsatz als \mathbb{P}_m^d -unisolvent. In allen nachfolgenden Erläuterungen gehen wir von \mathbb{P}_m^d -regulären Punktsätzen $X = \{x_1, \dots, x_N\}$ aus.

Wir definieren

$$\begin{aligned} R(x) &:= (\Phi(x - x_1), \dots, \Phi(x - x_N))^T \text{ und} \\ S(x) &:= (p_1(x), \dots, p_Q(x))^T. \end{aligned}$$

Mit unseren Übereinkünften besitzt nun das System

$$\begin{pmatrix} A & P \\ P^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(x) \\ S(x) \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

bei festem $x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ eine eindeutige Lösung $\begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N+Q}$. Für die Gestalt der Interpolanten s_f zu $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ergibt sich

$$s_f(x) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi(x - x_j) + \sum_{k=1}^Q \beta_k p_k(x)$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha^T R(x) + \beta^T S(x) \\
&= \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} R(x) \\ S(x) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} A & P \\ P^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix} \\
&= (\alpha^T A + \beta^T P^T)u(x) + \alpha^T P v(x) \\
&= (\alpha^T A + \beta^T P^T)u(x) \\
&= y^T u(x) \\
&= \sum_{j=1}^N u_j(x) f_j . \tag{3.8}
\end{aligned}$$

Bem. $u(x)$ ist eine Lagrange-Basis zu X , d.h. $u_j(x_k) = \delta_{jk}$, $k = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, N$.

Beweis: Für ein einzelnes $x = x_l$, $1 \leq l \leq N$, stimmt die rechte Seite von (3.7) mit der l -ten Spalte der Koeffizientenmatrix überein. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
u_j(x_l) &= \delta_{jl}, \quad 1 \leq j \leq N, \\
v_k(x_l) &= 0, \quad 1 \leq k \leq Q
\end{aligned}$$

ist eine Lösung des Systems (3.7).

Bei injektivem P ist die Lösung eindeutig. \square

Bem. Die Gleichung $P^T u(x) = S(x)$ aus (3.7) impliziert, daß Polynome aus \mathbb{P}_m^d reproduziert werden.

Beweis: $P^T u(x) = S(x)$ ist äquivalent zu

$$\sum_{j=1}^N p_k(x_j) u_j(x) = p_k(x), \quad 1 \leq k \leq Q.$$

Da $\mathbb{P}_m^d = \text{span}\{p_1, \dots, p_Q\}$, gilt für ein beliebiges p aus \mathbb{P}_m^d : $p = \sum_{k=1}^Q b_k p_k$ mit $b_k \in \mathbb{R}$. Für die Interpolante s_p zu $p \in \mathbb{P}_m^d$ folgt nun

$$\begin{aligned}
s_p(x) &= \sum_{j=1}^N u_j(x) p(x_j) \\
&= \sum_{j=1}^N u_j(x) \sum_{k=1}^Q b_k p_k(x_j) \\
&= \sum_{k=1}^Q b_k \sum_{j=1}^N u_j(x) p_k(x_j) \\
&= \sum_{k=1}^Q b_k p_k(x) \\
&= p(x) .
\end{aligned}$$

□

In Wu/Schaback [23] wird ein anderer Weg zur Bestimmung der $u_j(x)$, $1 \leq j \leq N$, besprochen.

Danach stimmt die Lösung $u(x)$ von

$$\begin{pmatrix} A & P \\ P^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(x) \\ S(x) \end{pmatrix}$$

mit der Lösung $w = u_*(x)$ des Minimierungsproblems

$$\text{Minimiere } w^T A w - 2w^T R(x) + \Phi(0)$$

unter den Nebenbedingungen $w \in \mathbb{R}^N$,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N w_j p(x_j) &= p(x) && \text{beziehungsweise} \\ P^T w &= S(x) \end{aligned}$$

überein.

In Abschnitt 3.3 werden wir die quadratische Form näher untersuchen und die Kriging-beziehungsweise Powerfunktion einführen.

Zusammenfassend haben wir also eine Form der Interpolanten s_f von (3.3) entwickelt, in der die Stützstellen $f_i = f(x_i)$, $i = 1, \dots, N$, explizit auftauchen:

$$\begin{aligned} s_f(x) &= \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi(x - x_j) + \sum_{k=1}^Q \beta_k p_k(x) \\ &= \sum_{j=1}^N u_j(x) f_j. \end{aligned}$$

3.2 Der Native Space \mathcal{F}_Φ

Dieser Abschnitt soll dazu dienen, einen Funktionenraum \mathcal{F}_Φ mit einem Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_\Phi$ zu beschreiben. Dabei stützen wir uns auf ein internes Manuskript von Herrn Prof. Dr. R. Schaback, das wir um einige ergänzende Beweise und Bemerkungen erweitern.

Definieren wir dazu zuerst den Raum $(\mathbb{P}_m^d)_\Omega^-$ für $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$.

Definition 3.2 *Wir definieren*

$$\begin{aligned} (\mathbb{P}_m^d)_\Omega^- &:= \{ \text{lineare Funktionale der Form } \lambda = \sum_{j=1}^{N_\lambda} \lambda_j \delta_{x_j^\lambda} : \\ &\lambda_j \in \mathbb{R}, N_\lambda \in \mathbb{N}, x_j^\lambda \in \Omega, j = 1, \dots, N_\lambda \text{ und} \\ &\lambda(p) = \sum_{j=1}^{N_\lambda} \lambda_j p(x_j^\lambda) = 0 \text{ für alle } p \in \mathbb{P}_m^d \}. \end{aligned}$$

Die Menge $(\mathbb{P}_m^d)_\Omega^-$ enthält also alle (endlichen) Linearkombinationen von Punktauswertungsfunktionalen, die auf Polynomen der Ordnung kleiner gleich m in d Variablen, verschwinden und endlichen Träger in Ω haben.

Lemma 3.3 $(\mathbb{P}_m^d)_\Omega^-$ ist ein \mathbb{R} -Vektorraum als Teilraum von $C(\Omega)^*$ (also des algebraischen Dualraums von $C(\Omega)$).

Satz 3.4 Sei $\Phi \in BPD(m)$. Dann ist

$$(\lambda, \mu)_\Phi := \sum_{j=1}^{N_\lambda} \sum_{k=1}^{N_\mu} \lambda_j \mu_k \Phi(x_j^\lambda - x_k^\mu) = \lambda^x \mu^y \Phi(x - y)$$

ein Skalarprodukt auf $(\mathbb{P}_m^d)_\Omega^-$, wobei λ und μ Elemente aus $(\mathbb{P}_m^d)_\Omega^-$ sind. Dabei bedeutet ν^z , daß ν bezüglich der Variablen z wirkt.

Beweis: Die Symmetrie $(\lambda, \mu)_\Phi = (\mu, \lambda)_\Phi$ folgt aus der Tatsache, daß Φ symmetrisch ist. Aus der Linearität des Dualraums läßt sich die Linearität des Skalarprodukts folgern. Positivität und Definitheit lassen sich daraus herleiten, daß Φ bedingt positiv definit der Ordnung m ist. \square

Bem. Der Raum $(\mathbb{P}_m^d)_\Omega^-$ ist mit obigem Skalarprodukt ein Prä-Hilbertraum. Mit $\|\cdot\|_\Phi$ werde die zugeordnete Norm bezeichnet.

Es ist offensichtlich, daß $(\mathbb{P}_m^d)_\Omega^-$ selbst unabhängig von Φ ist, aber durch Φ wird eine spezifische Prä-Hilbertraumstruktur auf $(\mathbb{P}_m^d)_\Omega^-$ induziert.

Mit $\overline{(\mathbb{P}_m^d)_\Omega^-}^\Phi$ bezeichnen wir die Vervollständigung des Prä-Hilbertraums $(\mathbb{P}_m^d)_\Omega^-$ zu einem Hilbertraum. Im Folgenden werden Elemente aus vervollständigtem Prä-Hilbertraum stets mit einem waagerechten Strich kenntlich gemacht. Diese Übereinkunft macht Sinn, denn wir wollen damit darauf hinweisen, daß es völlig unklar ist, daß solche Elemente als Funktionale oder Funktionen betrachtet werden können.

Wir definieren nun eine lineare Abbildung

$$L_\Phi : (\mathbb{P}_m^d)_\Omega^- \rightarrow F_{\Omega, \Phi} := L_\Phi \left((\mathbb{P}_m^d)_\Omega^- \right) ,$$

die jedem Funktional λ aus $(\mathbb{P}_m^d)_\Omega^-$ eine Funktion

$$(L_\Phi \lambda)(\cdot) := \sum_{j=1}^{N_\lambda} \lambda_j \Phi(\cdot - x_j^\lambda) =: (\lambda * \Phi)(\cdot) =: g_\lambda(\cdot)$$

zuordnet.

Das Faltungssymbol $*$ wird im Abschnitt über die Fehlerabschätzung der hierarchischen Interpolation noch einmal eine Rolle spielen.

Aufgrund der folgenden Beziehungen

$$(\lambda, \mu)_\Phi = \sum_{j=1}^{N_\lambda} \sum_{k=1}^{N_\mu} \lambda_j \mu_k \Phi(x_j^\lambda - x_k^\mu)$$

$$\begin{aligned}
&= \lambda^x \left(\sum_{k=1}^{N_\mu} \mu_k \Phi(x - x_k^\mu) \right) \\
&= \mu^y \left(\sum_{j=1}^{N_\lambda} \lambda_j \Phi(x_j^\lambda - y) \right) \\
&= \lambda(L_\Phi(\mu)) \\
&= \mu(L_\Phi(\lambda))
\end{aligned}$$

können wir das Skalarprodukt als eine Wirkung von einem Funktional auf die zugeordnete Funktion eines anderen Funktionals schreiben.

Lemma 3.5 *Die lineare Abbildung L_Φ beschreibt einen Isomorphismus zwischen den Räumen $(\mathbb{P}_m^d)_\Omega^-$ und $F_{\Omega, \Phi}$.*

Beweis: Die Surjektivität folgt aus der Definition von L_Φ . Es bleibt die Injektivität zu zeigen.

Sei $L_\Phi(\lambda) = 0$, das heißt

$$\sum_{j=1}^{N_\lambda} \lambda_j \Phi(x - x_j^\lambda) = 0 \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^d.$$

Außerdem ist $\sum_{j=1}^{N_\lambda} \lambda_j p(x_j^\lambda) = 0$, $p \in \mathbb{P}_m^d$, und $\sum_{k=1}^{N_\lambda} \lambda_k \sum_{j=1}^{N_\lambda} \lambda_j \Phi(x_k^\lambda - x_j^\lambda) = 0$. Aus der Definition der bedingten positiven Definitheit folgt, daß $\lambda_j = 0$ für alle $j = 1, \dots, N_\lambda$ und so $\lambda = 0$. \square

Auf $F_{\Omega, \Phi}$ führen wir durch

$$(L_\Phi \lambda, L_\Phi \mu)_\Phi := (\lambda, \mu)_\Phi$$

ein Innenprodukt ein, wobei wir dieselbe Notation für die Innenprodukte verwenden. Aus der jeweiligen Situation wird deutlich werden, welches Skalarprodukt gemeint ist. L_Φ wird dadurch eine Isometrie.

Wir können dann

$$(\lambda, \mu)_\Phi = \lambda(L_\Phi(\mu)) = \mu(L_\Phi(\lambda)) = (L_\Phi(\lambda), L_\Phi(\mu))_\Phi \quad \text{für } \lambda, \mu \in (\mathbb{P}_m^d)_\Omega^-$$

schreiben.

Für unsere weiteren Untersuchungen bezeichnen wir mit $\mathcal{F}_{\Omega, \Phi}$ die Vervollständigung von $F_{\Omega, \Phi}$ in Bezug auf $(\cdot, \cdot)_\Phi$. Mit \overline{L}_Φ bezeichnen wir die Abbildung von $\overline{(\mathbb{P}_m^d)_\Omega^-}^\Phi$ nach $\mathcal{F}_{\Omega, \Phi}$. Die Abbildung \overline{L}_Φ ist eine Isometrie mit

$$(\bar{\lambda}, \bar{\mu})_\Phi = (\overline{L}_\Phi \bar{\lambda}, \overline{L}_\Phi \bar{\mu})_\Phi \quad \text{für } \bar{\lambda}, \bar{\mu} \in \overline{(\mathbb{P}_m^d)_\Omega^-}^\Phi.$$

Hierbei möchten wir darauf hinweisen, daß obige Identität abstrakte Gebilde, die nicht direkt als Funktionen oder Funktionale interpretiert werden können, verbindet.

Wir versuchen nun einen Weg zu finden, der die Wirkung eines abstrakten Gebildes $\bar{\lambda} \in \overline{(\mathbb{P}_m^d)_\Omega^-}^\Phi$ auf ein $\bar{f} \in \mathcal{F}_{\Omega, \Phi}$ beschreibt. Dazu beschränken wir uns zuerst auf ein

Funktional λ aus $(\mathbb{P}_m^d)_{\Omega}^-$. Im ersten Fall betrachten wir $m = 0$. Sei δ_x das Punktauswertungsfunktional der Form $\delta_x : f \mapsto f(x)$. Dann definieren wir

$$\delta_x(\bar{f}) = \bar{f}(x) := (L_{\Phi}(\delta_x), \bar{f})_{\Phi} = (\Phi(\cdot - x), \bar{f})_{\Phi} \quad \text{für alle } x \in \Omega .$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} \lambda(\bar{f}) &= \sum_{j=1}^{N_{\lambda}} \lambda_j \bar{f}(x_j^{\lambda}) \\ &= \sum_{j=1}^{N_{\lambda}} \lambda_j \delta_{x_j^{\lambda}}(\bar{f}) \\ &= \sum_{j=1}^{N_{\lambda}} \lambda_j (L_{\Phi}(\delta_{x_j^{\lambda}}), \bar{f})_{\Phi} \\ &= \left(\sum_{j=1}^{N_{\lambda}} \lambda_j L_{\Phi}(\delta_{x_j^{\lambda}}), \bar{f} \right)_{\Phi} \\ &= \left(\sum_{j=1}^{N_{\lambda}} \lambda_j \Phi(\cdot - x_j^{\lambda}), \bar{f} \right)_{\Phi} \\ &= (L_{\Phi}(\lambda), \bar{f})_{\Phi} . \end{aligned}$$

Betrachten wir nun den Fall $m > 0$. Sei $Y := \{y_1, \dots, y_Q\} \subseteq \Omega$ ein \mathbb{P}_m^d -unisolventer Punktsatz und w_1, \dots, w_Q eine Lagrange-Basis, bestehend aus Polynomen in \mathbb{P}_m^d , für die Interpolation auf Y , das heißt $w_k(y_j) = \delta_{kj}$ für alle $k, j \in \{1, \dots, Q\}$. Dann gilt

$$p(\cdot) = \sum_{k=1}^Q w_k(\cdot) p(y_k) \quad \text{für alle } p \in \mathbb{P}_m^d ,$$

da die Polynome exakt reproduziert werden. Für ein willkürliches $x \in \Omega$ definieren wir mit

$$\epsilon_x : f \mapsto f(x) - \sum_{k=1}^Q w_k(x) f(y_k)$$

ein Funktional aus dem Raum $(\mathbb{P}_m^d)_{\Omega}^-$. Weiterhin definieren wir

$$\begin{aligned} \bar{f}(x) &:= (L_{\Phi}(\epsilon_x), \bar{f})_{\Phi} \\ &= (\Phi(\cdot - x) - \sum_{k=1}^Q w_k(x) \Phi(\cdot - y_k), \bar{f})_{\Phi} . \end{aligned}$$

Mit anderen Worten ist \bar{f} so definiert, daß es auf dem unisolventen Punktsatz Y verschwindet. Es folgt also

$$\lambda(\bar{f}) = \sum_{j=1}^{N_{\lambda}} \lambda_j \bar{f}(x_j^{\lambda})$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{N_\lambda} \lambda_j (L_\Phi(\epsilon_{x_j^\lambda}), \bar{f})_\Phi \\
&= \left(\sum_{j=1}^{N_\lambda} \lambda_j \Phi(\cdot - x_j^\lambda) - \sum_{j=1}^{N_\lambda} \sum_{k=1}^Q \lambda_j \Phi(\cdot - y_k) w_k(x_j^\lambda), \bar{f} \right)_\Phi \\
&= (L_\Phi \lambda, \bar{f})_\Phi - \left(\sum_{k=1}^Q \lambda(w_k) \Phi(\cdot - y_k), \bar{f} \right)_\Phi \\
&= (L_\Phi \lambda, \bar{f})_\Phi .
\end{aligned}$$

An dieser Stelle weisen wir darauf hin, daß Y hier einen speziellen \mathbb{P}_m^d -unisolventen Punktsatz bezeichnet, der von der Stützstellenmenge der Interpolation verschieden sein kann.

Bem. Für $\bar{\lambda} \in \overline{(\mathbb{P}_m^d)_\Omega}^\Phi$ und $\bar{f} \in \mathcal{F}_{\Omega, \Phi}$ gilt:

$$\bar{\lambda}(\bar{f}) = (\bar{L}_\Phi(\bar{\lambda}), \bar{f})_\Phi .$$

Beweis: Konvergiere die Folge $(\lambda_n) \in (\mathbb{P}_m^d)_\Omega^-$ gegen $\bar{\lambda} \in \overline{(\mathbb{P}_m^d)_\Omega}^\Phi$. Da (λ_n) eine Cauchy-Folge in $(\mathbb{P}_m^d)_\Omega^-$ ist, ist auch $L_\Phi \lambda_n$ eine Cauchy-Folge in $\mathcal{F}_{\Omega, \Phi}$ und konvergiert gegen $\bar{L}_\Phi \bar{\lambda}$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\bar{\lambda}(\bar{f}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n(\bar{f}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (L_\Phi \lambda_n, \bar{f})_\Phi \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} (\bar{L}_\Phi \lambda_n, \bar{f})_\Phi \\
&= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{L}_\Phi \lambda_n, \bar{f} \right)_\Phi \\
&= (\bar{L}_\Phi \bar{\lambda}, \bar{f})_\Phi .
\end{aligned}$$

□

Das bedeutet, daß wir einen Weg gefunden haben, der die Wirkung eines abstrakten Gebildes $\bar{\lambda}$ auf ein \bar{f} beschreibt.

Führen wir mit

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\Omega, \Phi} &:= \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad : \quad f \text{ stetig und es existiert ein } C_f \geq 0 \text{ mit} \\
&\quad |\lambda(f)| \leq C_f \cdot \|\lambda\|_\Phi \text{ für alle } \lambda \in (\mathbb{P}_m^d)_\Omega^-\}
\end{aligned}$$

eine Teilmenge von $C(\Omega)$ ein.

Als eine Ergänzung des oben genannten internen Manuskripts beweisen wir die

Bem. $f \in \mathcal{F}_{\Omega, \Phi}$ ist stetig.

Beweis: Sei $m > 0$ und $f(x) = (L_\Phi \epsilon_x, f)_\Phi$. Somit gilt

$$|f(x) - f(y)| = |(\Phi(\cdot - x) - \Phi(\cdot - y) + \sum_{k=1}^Q (w_k(y) - w_k(x)) \Phi(\cdot - y_k), f)_\Phi|.$$

Aus der Stetigkeit von Φ und w_k , $k = 1, \dots, Q$, sowie der Schwarzschen Ungleichung folgt die Stetigkeit von $f \in \mathcal{F}_{\Omega, \Phi}$. Sei nun $m = 0$ und $f(x) = (L_{\Phi} \delta_x, f)_{\Phi}$. Dann ist

$$|f(x) - f(y)| = |(\Phi(\cdot - x) - \Phi(\cdot - y), f)_{\Phi}|$$

und so folgt aus der Stetigkeit von Φ und der Schwarzschen Ungleichung die Behauptung. \square

Aus

$$\begin{aligned} |\lambda(\bar{f})| &= (L_{\Phi} \lambda, \bar{f})_{\Phi} \\ &\leq \|L_{\Phi} \lambda\|_{\Phi} \|\bar{f}\|_{\Phi} \\ &= \|\lambda\|_{\Phi} \|\bar{f}\|_{\Phi} \end{aligned}$$

erkennen wir dann, daß $\mathcal{F}_{\Omega, \Phi}$ und \mathbb{P}_m^d jeweils in $\mathcal{H}_{\Omega, \Phi}$ enthalten sind.

Bem. Der Funktionenraum $\mathcal{H}_{\Omega, \Phi}$ enthält die direkte Summe $F_{\Omega, \Phi} \oplus \mathbb{P}_m^d = \{g_{\lambda} \mid g_{\lambda} = \sum_{j=1}^{N_{\lambda}} \lambda_j \Phi(\cdot - x_j^{\lambda}), \lambda \in (\mathbb{P}_m^d)_{\Omega}^- \} \oplus \mathbb{P}_m^d$.

Beweis: Wir zeigen nur die Direktheit der Summe. Dazu sei $g_{\lambda} \in F_{\Omega, \Phi}$ und gleichzeitig $g_{\lambda} \in \mathbb{P}_m^d$. Es gilt

$$\begin{aligned} \lambda(L_{\Phi} \lambda) &= \lambda(g_{\lambda}) = 0, \text{ da } \lambda(p) = 0 \text{ für alle } p \in \mathbb{P}_m^d \\ &= (\lambda, \lambda)_{\Phi}. \end{aligned}$$

Daraus folgt $\lambda = 0 = g_{\lambda}$, was die Direktheit der Summe zeigt. \square

Bezeichnen wir mit

$$I_f := \{h \in \mathcal{H}_{\Omega, \Phi} \mid h(x_j) = f(x_j) = f_j, j = 1, \dots, N\}$$

die Menge der Interpolationsfunktionen in $\mathcal{H}_{\Omega, \Phi}$.

Es gebe die Bedingung (3.6) erfüllende Konstanten α_j, β_k . Die Funktion

$$s_f(x) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi(x - x_j) + \sum_{k=1}^Q \beta_k p_k(x) =: g_{\alpha}(x) + p(x)$$

mit $\alpha := \sum_{j=1}^N \alpha_j \delta_{x_j} \in (\mathbb{P}_m^d)^-$ und $p \in \mathbb{P}_m^d$ ist dann nach den Übereinkünften aus Abschnitt 3.1 ein Element der Menge der Interpolanten I_f .

Durch

$$\|f\|_{\Phi} := \sup_{\lambda \in (\mathbb{P}_m^d)_{\Omega}^-, \lambda \neq 0} \frac{|\lambda(f)|}{\|\lambda\|_{\Phi}}$$

erklären wir eine Norm auf $\mathcal{H}_{\Omega, \Phi} / \mathbb{P}_m^d(\Omega)$. Dabei ist

$$\mathbb{P}_m^d(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f = p|_{\Omega} \text{ mit } p \in \mathbb{P}_m^d\}.$$

Aus der Stetigkeit des Innenprodukts und der Isometrie L_{Φ} folgt, daß diese Norm auf $\mathcal{H}_{\Omega, \Phi} / \mathbb{P}_m^d(\Omega)$ mit der vorhergehenden Definition von $\|\cdot\|_{\Phi}$ auf dem Unterraum $\mathcal{F}_{\Omega, \Phi}$

übereinstimmt.

Jedes $f \in \mathcal{H}_{\Omega, \Phi}$ definiert über

$$(\Lambda_f)(\lambda) := \lambda(f), \quad \lambda \in (\mathbb{P}_m^d)_{\Omega}^{\bar{}}$$

ein lineares Funktional Λ_f auf $(\mathbb{P}_m^d)_{\Omega}^{\bar{}}$. Es gilt

$$|(\Lambda_f)(\lambda)| = |\lambda(f)| \leq C_f \cdot \|\lambda\|_{\Phi}$$

und wir erweitern Λ_f auf $\overline{(\mathbb{P}_m^d)_{\Omega}^{\bar{}}}$ mit der selben Schranke. Da $\overline{(\mathbb{P}_m^d)_{\Omega}^{\bar{}}}$ ein Hilbertraum ist und Λ_f ein beschränktes Funktional ist, existiert nach dem Satz von F.Riesz ein eindeutiges Element $\bar{\lambda}_f \in \overline{(\mathbb{P}_m^d)_{\Omega}^{\bar{}}}$, so daß für alle $\bar{\mu} \in \overline{(\mathbb{P}_m^d)_{\Omega}^{\bar{}}}$ die Beziehung

$$\begin{aligned} (\Lambda_f)(\bar{\mu}) &= (\bar{\mu}, \bar{\lambda}_f)_{\Phi} \\ &= \bar{\mu}(f) \end{aligned}$$

gilt. Wegen der Isometrie gilt

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_f(\bar{L}_{\Phi}(\bar{\mu})) &= (\bar{L}_{\Phi}(\bar{\lambda}_f), \bar{L}_{\Phi}(\bar{\mu}))_{\Phi} \\ &= (\bar{\lambda}_f, \bar{\mu})_{\Phi} \\ &= \bar{\mu}(\bar{L}_{\Phi} \bar{\lambda}_f) \\ &= (\Lambda_f)(\bar{\mu}) \\ &= \bar{\mu}(f) \end{aligned}$$

für alle $\bar{\mu} \in \overline{(\mathbb{P}_m^d)_{\Omega}^{\bar{}}}$.

An dieser Stelle möchten wir noch Folgendes verdeutlichen.

Bem. Die Abbildung $\bar{L}_{\Phi} : \overline{(\mathbb{P}_m^d)_{\Omega}^{\bar{}}} \rightarrow \mathcal{F}_{\Omega, \Phi}$ ist isometrisch isomorph.

Beweis: Die Isometrie und damit die Injektivität folgen über die Definition der Abbildung. Es bleibt die Surjektivität zu zeigen. Dazu betrachten wir zuerst den Fall $m = 0$. Es gilt $L_{\Phi} \delta_x = \bar{L}_{\Phi} \delta_x$. Mit $f \in \mathcal{F}_{\Omega, \Phi}$ folgt

$$\begin{aligned} \bar{L}_{\Phi} \lambda_f(x) &= (L_{\Phi} \delta_x, \bar{L}_{\Phi} \lambda_f)_{\Phi} \\ &= (\delta_x, \lambda_f)_{\Phi} \\ &= \delta_x(f) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Sei nun $m > 0$ und $f \in \mathcal{F}_{\Omega, \Phi}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \bar{L}_{\Phi} \lambda_f(x) &= (L_{\Phi} \epsilon_x, \bar{L}_{\Phi} \lambda_f)_{\Phi} \\ &= (\epsilon_x, \lambda_f)_{\Phi} \\ &= \epsilon_x(f) \\ &= f(x) - \sum_{k=1}^Q w_k(x) f(y_k) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Das heißt \bar{L}_Φ ist surjektiv. \square

Bem. Für $\bar{L}_\Phi(\bar{\lambda}_f) \in \mathcal{F}_{\Omega, \Phi} \subseteq \mathcal{H}_{\Omega, \Phi}$ und $f \in \mathcal{H}_{\Omega, \Phi} / \mathbb{P}_m^d(\Omega)$ liegt die Differenz $f - \bar{L}_\Phi(\bar{\lambda}_f)$ in $\mathcal{H}_{\Omega, \Phi} / \mathbb{P}_m^d(\Omega)$.

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} |\lambda(f - \bar{L}_\Phi(\bar{\lambda}_f))| &= |\lambda(f) - \lambda(\bar{L}_\Phi(\bar{\lambda}_f))| \\ &\leq C_f \cdot \|\lambda\|_\Phi + C_{\bar{L}_\Phi(\bar{\lambda}_f)} \|\lambda\|_\Phi \\ &= (C_f + C_{\bar{L}_\Phi(\bar{\lambda}_f)}) \|\lambda\|_\Phi \quad \text{für alle } \lambda \in (\mathbb{P}_m^d)_\Omega^-. \end{aligned}$$

Da $f - \bar{L}_\Phi(\bar{\lambda}_f) \in C(\Omega)$, liegt die Differenz in $\mathcal{H}_{\Omega, \Phi} / \mathbb{P}_m^d(\Omega)$. \square

Mit obiger Bemerkung formulieren wir

Bem. Die Differenz $f - \bar{L}_\Phi(\bar{\lambda}_f)$ hat im Raum $\mathcal{H}_{\Omega, \Phi} / \mathbb{P}_m^d(\Omega)$ Norm 0 und es folgt $\mathcal{H}_{\Omega, \Phi} / \mathbb{P}_m^d(\Omega) = \mathcal{F}_{\Omega, \Phi}$.

Beweis: Aus

$$\begin{aligned} \lambda(\bar{L}_\Phi(\bar{\lambda}_f)) &= (\bar{L}_\Phi(\lambda), \bar{L}_\Phi(\bar{\lambda}_f))_\Phi \\ &= (\lambda, \bar{\lambda}_f)_\Phi \\ &= (\Lambda_f)(\lambda) \\ &= \lambda(f) \end{aligned}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \|f - \bar{L}_\Phi(\bar{\lambda}_f)\| &= \sup_{0 \neq \lambda \in (\mathbb{P}_m^d)_\Omega^-} \frac{|\lambda(f - \bar{L}_\Phi(\bar{\lambda}_f))|}{\|\lambda\|_\Phi} = \sup_{0 \neq \lambda \in (\mathbb{P}_m^d)_\Omega^-} \frac{|\lambda(f) - \lambda(\bar{L}_\Phi(\bar{\lambda}_f))|}{\|\lambda\|_\Phi} \\ &= \sup_{0 \neq \lambda \in (\mathbb{P}_m^d)_\Omega^-} \frac{|\lambda(f) - \lambda(f)|}{\|\lambda\|_\Phi} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Es gilt also $f - \bar{L}_\Phi(\bar{\lambda}_f) = 0$ beziehungsweise $f = \bar{L}_\Phi(\bar{\lambda}_f)$, woraus $\mathcal{H}_{\Omega, \Phi} / \mathbb{P}_m^d(\Omega) = \mathcal{F}_{\Omega, \Phi}$ gefolgert werden kann. \square

Seien nun Ω_1 und Ω_2 Teilmengen des \mathbb{R}^d mit $\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \subseteq \Omega$. Unsere bisherigen Erkenntnisse führen zu dem Schluß, daß dann $(\mathbb{P}_m^d)_{\Omega_1}^- \subseteq (\mathbb{P}_m^d)_{\Omega_2}^-$ sowie durch Vervollständigung und isometrische Isomorphie $F_{\Omega_1, \Phi} \subseteq F_{\Omega_2, \Phi}$ beziehungsweise $\overline{(\mathbb{P}_m^d)_{\Omega_1}^-}^\Phi \subseteq \overline{(\mathbb{P}_m^d)_{\Omega_2}^-}^\Phi$ und $\mathcal{F}_{\Omega_1, \Phi} \subseteq \mathcal{F}_{\Omega_2, \Phi}$.

Betrachten wir $\bar{f}(x) = (L_\Phi \epsilon_x, \bar{f})_\Phi$ für $x \in \Omega_2$, so ist $\epsilon_x \in (\mathbb{P}_m^d)_{\Omega_2}^-$ und $\bar{f} \in \mathcal{F}_{\Omega_2, \Phi} \supseteq \mathcal{F}_{\Omega_1, \Phi}$; es gibt also einen Weg, ein Element $\bar{f} \in \mathcal{F}_{\Omega_1, \Phi}$ als eine Funktion auf $\Omega_2 \supseteq \Omega_1$ zu interpretieren.

Drehen wir dieses Argument herum, so läßt sich ein Element $\bar{f} \in \mathcal{F}_{\Omega_2, \Phi}$ als eine Funktion auf $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$ interpretieren, denn mit

$$\bar{f}(x) = (L_\Phi \epsilon_x, \bar{f})_\Phi \quad \text{und } x \in \Omega_1, \quad \epsilon_x \in (\mathbb{P}_m^d)_{\Omega_1}^-$$

sehen wir, daß

$$\mathcal{F}_{\Omega_1, \Phi} = \{f|_{\Omega_1} : f \in \mathcal{F}_{\Omega_2, \Phi}\} =: \mathcal{F}_{\Omega_2, \Phi}|_{\Omega_1}$$

gilt.

Die Erweiterung einer Funktion $\bar{f} \in \mathcal{F}_{\Omega_1, \Phi}$ auf einen größeren Bereich $\Omega_2 \supseteq \Omega$ genügt einer zusätzlichen Bedingung, die aus $\lambda(f) = (L_\Phi \lambda, \bar{f})_\Phi$, $\lambda \in (\mathbb{P}_m^d)_{\Omega_1}^-$ folgt.

Habe $\bar{g} \in \mathcal{F}_{\Omega_2, \Phi}$ die Eigenschaft

$$\lambda(\bar{g}) = 0 \quad \text{für alle } \lambda \in (\mathbb{P}_m^d)_{\Omega_1}^- ,$$

das heißt \bar{g} besitze einen Träger nur außerhalb von Ω_1 . Dann bekommen wir für alle $L_\Phi \lambda \in F_{\Omega_1, \Phi} \subseteq F_{\Omega_2, \Phi}$ die Beziehung

$$(L_\Phi \lambda, \bar{g})_\Phi = \lambda(\bar{g}) = 0 .$$

Mit Hilfe dieser Erkenntnis formulieren wir

Theorem 3.6 *Sei Φ bedingt positiv definit der Ordnung m auf $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$. Weiterhin gelte $\Omega_1 \subseteq \Omega_2$. Dann haben alle $\bar{f} \in \mathcal{F}_{\Omega_1, \Phi}$ die Eigenschaft*

$$(\bar{f}, \bar{g})_\Phi = 0$$

für alle $\bar{g} \in \mathcal{F}_{\Omega_2, \Phi}$ mit $\lambda(\bar{g}) = 0$ für alle $\lambda \in (\mathbb{P}_m^d)_{\Omega_1}^-$.

Beweis: Für alle $f \in F_{\Omega_1, \Phi}$ haben wir den Beweis bereits oben gegeben. Durch Vervollständigung und Stetigkeit des Innenprodukts folgt die Aussage für alle $\bar{f} \in \mathcal{F}_{\Omega_1, \Phi}$. \square

Theorem 3.7 *Sei Φ bedingt positiv definit der Ordnung m auf $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$. Ferner sei $\Omega_1 \subseteq \Omega_2 \subseteq \Omega$. Dann gilt*

$$\mathcal{F}_{\Omega_2, \Phi} = \mathcal{F}_{\Omega_1, \Phi} + G_{\Omega_2, \Phi}^{\Omega_1} ,$$

wobei

$$G_{\Omega_2, \Phi}^{\Omega_1} := \{\bar{g} \in \mathcal{F}_{\Omega_2, \Phi} : \lambda(\bar{g}) = 0 \text{ für alle } \lambda \in (\mathbb{P}_m^d)_{\Omega_1}^- \} .$$

Beweis: Die Orthogonalität haben wir bereits bewiesen. Wir zeigen noch, daß jedes $\bar{g} \in \mathcal{F}_{\Omega_2, \Phi}$ durch die Summe ausgedrückt werden kann. Sei $\bar{g} \in \mathcal{F}_{\Omega_2, \Phi}$ orthogonal zu $\mathcal{F}_{\Omega_1, \Phi}$. Dann ist für alle $\lambda \in (\mathbb{P}_m^d)_{\Omega_1}^-$

$$L_\Phi(\lambda) \in F_{\Omega_1, \Phi} \quad \text{und} \quad (L_\Phi(\lambda), \bar{g})_\Phi = \lambda(\bar{g}) = 0 .$$

Das bedeutet $\bar{g} \in G_{\Omega_2, \Phi}^{\Omega_1}$, woraus die Behauptung folgt. \square

Sei nun $\Phi \in BPD(m)$ eine radiale Basisfunktion und $\varphi = \hat{\Phi}$ ihre (verallgemeinerte) Fouriertransformierte. Aus der Definition des Skalarprodukts erhalten wir

$$\begin{aligned} (\lambda, \mu)_\Phi &= \sum_{j=1}^{N_\lambda} \sum_{k=1}^{N_\mu} \lambda_j \mu_k \Phi(x_j^\lambda - x_k^\mu) \\ &= \sum_{j=1}^{N_\lambda} \sum_{k=1}^{N_\mu} \lambda_j \mu_k (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\omega) e^{i(x_j^\lambda - x_k^\mu)^T \omega} d\omega \end{aligned}$$

für alle $\lambda, \mu \in (\mathbb{P}_m^d)^-$. Mit $(f_\lambda, f_\mu)_\Phi = (\lambda, \mu)_\Phi$ und $\hat{f}_\lambda(\omega) = \sum_{k=1}^N \lambda_k \varphi(\omega) e^{-i x_k^T \omega}$ gelangen wir zu der Beziehung

$$\begin{aligned} (\lambda, \mu)_\Phi &= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\omega) \sum_{j=1}^N \lambda_j \sum_{k=1}^N \mu_k e^{i\omega^T x_j^\lambda} e^{-i\omega^T x_k^\mu} d\omega \\ &= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\omega) \sum_{j=1}^N \lambda_j e^{i\omega^T x_j^\lambda} \sum_{k=1}^N \mu_k e^{-i\omega^T x_k^\mu} d\omega \\ &= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\omega) \frac{\hat{f}_\mu(\omega)}{\varphi(\omega)} \overline{\frac{\hat{f}_\lambda(\omega)}{\varphi(\omega)}} d\omega \\ &= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\hat{f}_\mu(\omega) \overline{\hat{f}_\lambda(\omega)}}{\varphi(\omega)} d\omega . \end{aligned}$$

Diese Erkenntnis inspiriert uns dazu, im Folgenden stets das Skalarprodukt

$$(f, g)_\Phi := (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega)}}{\varphi(\omega)} d\omega \quad \text{für } f, g \in \mathcal{F}_{\Omega, \Phi}$$

zu verwenden.

Außerdem werden wir mit \mathcal{F}_Φ immer den Raum $\mathcal{F}_{\Omega, \Phi}$ bezeichnen.

Besonders große Dienste bei der Fehlerabschätzung der hierarchischen Interpolation wird uns folgender Satz erweisen.

Satz 3.8 *Für $f \in \mathcal{F}_\Phi$ gilt die Orthogonalitätsbedingung*

$$(f - s_f, s_f)_\Phi = 0 .$$

Beweis: Es gebe die Bedingung (3.6) erfüllende Konstanten α_j, β_k . Die Interpolante s_f sei gegeben durch

$$s_f(x) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi(x - x_j) + \sum_{k=1}^Q \beta_k p_k(x) =: g_\alpha(x) + p(x)$$

mit $\alpha := \sum_{j=1}^N \alpha_j \delta_{x_j} \in (\mathbb{P}_m^d)^-$ und $p \in \mathbb{P}_m^d$. Dann gilt

$$\begin{aligned} (f, s_f)_\Phi &= (f, g_\alpha + p)_\Phi \\ &= (f, g_\alpha)_\Phi \\ &= \alpha(f) \\ &= \alpha(s_f) \\ &= (s_f, g_\alpha)_\Phi \\ &= (s_f, s_f)_\Phi . \end{aligned}$$

Da $(\cdot, \cdot)_\Phi$ eine symmetrische Bilinearform ist, folgt die Behauptung. \square

3.3 Die Powerfunktion

In diesem Abschnitt wollen wir die Kriging- beziehungsweise Powerfunktion definieren und einige Eigenschaften der Powerfunktion aufzeigen.

Definition 3.9 Für jeden \mathbb{P}_m^d -regulären Punktsatz $X = \{x_1, \dots, x_N\}$ heißt die nicht-negative Funktion $\kappa_{m,\Phi,X}(x)$, die definiert ist durch

$$(\kappa_{m,\Phi,X})^2(x) := \min \left\{ u^T A u - 2u^T R(x) + \Phi(0) \mid u \in K_{m,\Phi,X}(x) \right\}$$

mit der Menge

$$K_{m,\Phi,X}(x) := \left\{ u = (u_1, \dots, u_N)^T \in \mathbb{R}^N \mid \sum_{j=1}^N u_j p(x_j) = p(x) \text{ für alle } p \in \mathbb{P}_m^d \right\},$$

die Kriging-Funktion.

Satz 3.10 Der Vektor $u(x) = (u_1(x), \dots, u_N(x))^T$ der Lagrangebasisfunktionen u_1, \dots, u_N aus der Lösung des Systems (3.7) stimmt für $x \in \mathbb{R}^d$ mit der Lösung $u_*(x)$ des Minimierungsproblems

$$\min \left\{ u^T A u - 2u^T R(x) + \Phi(0) \mid u \in \mathbb{R}^N, P^T u = S(x) \right\}$$

überein.

Der Beweis befindet sich in Wu/Schaback [23] oder Wendland [21]. \square

In Abschnitt 3.4 werden wir eine lokale Fehlerabschätzung der Form $|f(x) - s_f(x)| \leq \|f\|_\Phi \cdot P_{\Phi(x),X}$ erhalten. Dabei tritt die Powerfunktion $P_{\Phi(x),X}$ auf.

Definition 3.11 Die Powerfunktion $P_{\Phi,X}(x)$ ist gegeben durch

$$P_{\Phi,X}^2(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \left| \sum_{j=1}^N u_j(x) e^{ix_j^T \omega} - e^{ix^T \omega} \right|^2 \hat{\Phi}(\omega) d\omega. \quad (3.9)$$

Mit Hilfe von Wu/Schaback [23] formulieren wir

Theorem 3.12 Sei φ die verallgemeinerte Fouriertransformierte von Φ . Die Funktion φ besitze die Eigenschaft

$$0 < \varphi(\omega) \leq c \cdot \begin{cases} \|\omega\|^{-d-s_0} & \text{für } \|\omega\| \rightarrow 0 \\ \|\omega\|^{-d-s_\infty} & \text{für } \|\omega\| \rightarrow \infty \end{cases}$$

mit den Konstanten $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $s_0, s_\infty \in \mathbb{R}$, wobei wir zusätzlich voraussetzen, daß $s_\infty > 0$ und $s_0 < 2m$.

Dann ist das Integral (3.9) wohldefiniert.

Beweis: Wir wollen hier nur einige wichtige Beweisgedanken aufgreifen. Die Funktion $\sum_{j=1}^N u_j(x)e^{ix_j^T \omega} - e^{ix^T \omega}$ hat in $\omega = 0$ eine Nullstelle der Ordnung m , denn für $\omega = 0$ verbleiben in den Ableitungen

$$D^a \left(\sum_{j=1}^N u_j(x) e^{ix_j^T \omega} - e^{ix^T \omega} \right) = i^{|a|} \left(\sum_{j=1}^N u_j(x) x_j^a e^{ix_j^T \omega} - x^a e^{ix^T \omega} \right)$$

nur polynomiale Anteile der Ordnung a , die wegen der \mathbb{P}_m^d -reproduzierenden Eigenschaft der u_j für jedes $a \in \mathbb{N}_0^d$ mit $|a| < m$ verschwinden.

So besitzt $\left| \sum_{j=1}^N u_j(x) e^{ix_j^T \omega} - e^{ix^T \omega} \right|^2$ in Null eine Nullstelle der Ordnung $2m$. Folglich ist $\varphi \cdot \left| \sum_{j=1}^N u_j(x) e^{ix_j^T \omega} - e^{ix^T \omega} \right|^2$ in Null integrierbar. Außerdem ist mit φ auch $\varphi \cdot \left| \sum_{j=1}^N u_j(x) e^{ix_j^T \omega} - e^{ix^T \omega} \right|^2$ im Unendlichen integrierbar. \square

Bem. Im übrigen erfüllen alle von uns betrachteten radialen Basisfunktionen die obigen Bedingungen, wie Kapitel 2 zu entnehmen ist.

Für die Powerfunktion und $\Phi \in L_1(\mathbb{R}^d)$ gilt auch

$$\begin{aligned} P_{\Phi, X}^2(x) &= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \left| \sum_{j=1}^N u_j(x) e^{ix_j^T \omega} - e^{ix^T \omega} \right|^2 \hat{\Phi}(\omega) d\omega \\ &= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\Phi}(\omega) \left| \sum_{j=1}^N u_j(x) e^{i\omega^T(x-x_j)} - 1 \right|^2 d\omega \\ &= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\Phi}(\omega) \left\{ \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N u_j(x) u_k(x) e^{i(x_k-x_j)^T \omega} \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=1}^N u_j(x) e^{i(x-x_j)^T \omega} - \sum_{k=1}^N u_k(x) e^{i(x_k-x)^T \omega} + e^{i(x-x)^T \omega} \right\} d\omega \\ &= (2\pi)^{-d} \left\{ \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N u_j(x) u_k(x) \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(x_k-x_j)^T \omega} \hat{\Phi}(\omega) d\omega \right. \\ &\quad \left. - \sum_{j=1}^N u_j(x) \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(x-x_j)^T \omega} \hat{\Phi}(\omega) d\omega - \sum_{k=1}^N u_k(x) \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(x_k-x)^T \omega} \hat{\Phi}(\omega) d\omega \right. \\ &\quad \left. + \int_{\mathbb{R}^d} e^{i0 \cdot \omega} \hat{\Phi}(\omega) d\omega \right\} \\ &= \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N u_j(x) u_k(x) \Phi(x_k - x_j) - 2 \sum_{j=1}^N u_j(x) \Phi(x - x_j) + \Phi(0) \\ &= u^T A u - 2u^T R(x) + \Phi(0). \end{aligned}$$

Die Powerfunktion stimmt also für $u(x) = u_*(x)$ mit der Kriging-Funktion überein; im Folgenden werden wir meist nur noch von der Powerfunktion sprechen. Wir können also die Kriging-Funktion über ein Integral ausdrücken. Dieses erklärt auch die Wahl der additiven Konstanten $\Phi(0)$ in Definition 3.9.

Lemma 3.13 Die Powerfunktion $P_{\Phi, X}^2(x)$ ist stetig.

Beweis: Betrachten wir das lineare Gleichungssystem (3.7)

$$\begin{pmatrix} A & P \\ P^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(x) \\ S(x) \end{pmatrix}.$$

Die rechte Seite dieses Gleichungssystems hängt stetig von x ab, weil insbesondere die radiale Basisfunktion Φ stetig ist. Da wir davon ausgehen, daß das System (3.7) eindeutig lösbar ist, können wir die Lösung durch

$$\begin{pmatrix} A & P \\ P^T & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} R(x) \\ S(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix}$$

berechnen. Somit wird klar, daß $u(x) \in \mathbb{R}^N$ stetig ist. Schreiben wir die Powerfunktion als

$$P_{\Phi, X}^2(x) = u^T(x)Au(x) - 2u^T(x)R(x) + \Phi(0),$$

so erkennen wir die Stetigkeit der Powerfunktion. \square

Für unsere lokale Fehlerabschätzung messen wir die Dichte der Stützstellen x_j durch

$$h_\rho(x) := \sup_{\|x-y\| \leq \rho} \min_{1 \leq j \leq N} \|y - x_j\|$$

für festes $\rho > 0$. Bemerke, daß $h_\rho(x)$ von X und ρ abhängt, aber nicht von Φ .

Näheres über die Güte der Interpolation bei Fehlerabschätzungen der Form $|f(x) - s_f(x)| \leq \|f\|_\Phi \cdot P_{\Phi, X}(x)$ läßt sich durch Untersuchung der von der Funktion f unabhängigen Powerfunktion ermitteln. Dazu führen wir zuerst ein grundlegendes Lemma an.

Lemma 3.14 Für $\rho \in \mathbb{R}_{>0}$ und $k \in \mathbb{N}$ existieren positive reelle Konstanten h_0, c_1, c_2 , so daß für jeden Punktsatz $\{x_1, \dots, x_N\} \subset \mathbb{R}^d$ mit paarweise verschiedenen Punkten x_j und jeden Punkt $x \in \mathbb{R}^d$, der

$$h_\rho(x) = \sup_{\|x-y\| \leq \rho} \min_{1 \leq j \leq N} \|y - x_j\| \leq h_0$$

erfüllt, ein Vektor $\tilde{u}(x) = (\tilde{u}_1(x), \dots, \tilde{u}_N(x))^T \in \mathbb{R}^N$ mit $\sum_{j=1}^N \tilde{u}_j(x)p(x_j) = p(x)$, $p \in \mathbb{P}_k^d$, existiert, der den Ungleichungen

$$\begin{aligned} \|x_j - x\| &= c_1 h_\rho(x) \quad \text{für alle } j = 1, \dots, N \text{ mit } \tilde{u}_j(x) \neq 0 \text{ und} \\ \sum_{j=1}^N |\tilde{u}_j(x)| &\leq c_2 \end{aligned}$$

genügt.

Beweis: Obiges Lemma ist ein Spezialfall des Lemmas 5.1 aus Wu/Schaback [23]. Dort findet sich auch der etwas allgemeinere Beweis. Die verwendeten Konstanten lauten

$$\begin{aligned} M &:= \max \left(1, 2(k-1)(2k-1)^k \binom{d+k-1}{d} d^{k/2} \|R_k^{-1}\|_\infty \right), \\ R_k &:= (\alpha^\mu)_{0 \leq |\mu|, |\alpha| \leq k-1} \text{ (multivariate Form der klassischen Vandermonde Matrix)} \\ c_1 &:= 1 + M(k-1)\sqrt{d} \\ c_2 &:= 2(k-1)! \binom{d+k-1}{d}^2 \|R_k^{-1}\|_\infty \\ h_0 &:= \frac{\rho}{M(k-1)}. \end{aligned}$$

□

Wir gelangen auf diesem Wege zu

Theorem 3.15 *Genüge Φ der Voraussetzung von Theorem 3.12 und sei $\rho \in \mathbb{R}_{>0}$ gegeben. Dann existieren positive reelle Konstanten h_0 und C , so daß für jeden Punktsatz $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subset \mathbb{R}^d$ mit paarweise verschiedenen Punkten und jeden Punkt $x \in \mathbb{R}^d$ mit*

$$h_\rho(x) = \sup_{\|y-x\| \leq \rho} \min_{1 \leq j \leq N} \|y - x_j\| \leq h_0$$

die Kriging-Funktion durch

$$\kappa_{m,\Phi,X}(x) \leq C \cdot h_\rho^{s_\infty/2}(x)$$

beschränkt werden kann.

Beweis: Der Beweis verwendet Lemma 3.14 und befindet sich in Wu/Schaback [23]. □

Man kann also s_∞ als eine die Interpolationsgüte bestimmende Konstante ansehen. Diese Konstante hängt von der zur Interpolation verwendeten radialen Basisfunktion Φ ab. In Kapitel 2 haben wir bekannte radiale Basisfunktionen vorgestellt. Deshalb möchten wir im folgenden Satz den Wert der Konstanten s_∞ für diese radialen Basisfunktionen angeben.

Satz 3.16

1. Für die Gaussians kann der Wert der Konstanten $s_\infty > 0$ beliebig gewählt werden.
2. Die Konstante s_∞ kann für die Multiquadrics, wie auch für die inversen Multiquadrics, beliebig gewählt werden.
3. Der Wert der Konstanten $s_\infty > 0$ beläuft sich für die Funktionen $\Phi(x) = (-1)^{\lceil \nu/2 \rceil} \|x\|^\nu$ mit $\nu > 0$, $\nu \notin 2\mathbb{N}$, auf $s_\infty = \nu$.

4. Werden die Thin-Plate Splines wie in Kapitel 2 definiert, so besitzt die Konstante s_∞ den Wert $s_\infty = 2k$.
5. Die Konstante s_∞ hat für den Euklidischen Hut den Wert $s_\infty = 1$.
6. Für die Wendland-Funktionen $\psi_{l,k} := \mathcal{I}^k \psi_l$ ergibt sich $s_\infty = 2k + 1$.

Wir werden nun bekannte Schranken der Form

$$P_{\Phi, X}^2(x) \leq F_{\Phi, \rho}(h_\rho(x))$$

angeben, wobei $F_{\Phi, \rho} : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ eine für $h \rightarrow 0$ monoton fallende Funktion mit $F_{\Phi, \rho}(0) = 0$ ist.

Die Funktion $F_{\Phi, \rho}$ ist abhängig vom Verhalten der verallgemeinerten Fouriertransformierten φ von Φ im Unendlichen. Folgende Tabelle gibt uns einen Überblick über bekannte Beispiele für Funktionen $F_{\Phi, \rho}$.

$\Phi(x) = \phi(r), r = \ x\ $	$F_{\Phi, \rho}(h_\rho)$
$r^\beta, \beta \in \mathbb{R}_{>0} \setminus 2\mathbb{N}$	$const \cdot h_\rho^\beta$
$(-1)^{1+\beta/2} r^\beta \log r, \beta \in 2\mathbb{N}$ Thin-Plate Spline	$const \cdot h_\rho^\beta$
$(\gamma^2 + r^2)^{\beta/2}, \beta \in \mathbb{R} \setminus 2\mathbb{N}_{\geq 0}$ Multiquadrics	$const \cdot e^{-\frac{\delta}{h_\rho}}$ $\delta > 0$
$e^{-\beta r^2}, \beta > 0$ Gaussians	$const \cdot e^{-\frac{\delta}{h_\rho^2}}$ $\delta > 0$
$\frac{2\beta^d \pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d+1}{2})\Gamma(1/2)} \int_0^{\frac{\sqrt{4\beta^2 - r^2}}{2\beta}} \frac{t^d}{\sqrt{1-t^2}} dt, 0 \leq r \leq 2\beta$ Euklidischer Hut	$const \cdot h_\rho^1$
$\psi_{l,k}(r) = \mathcal{I}^k \psi_l(r), l = \lfloor \frac{d}{2} \rfloor + k + 1$ Wendland-Funktionen	$const \cdot h_\rho^{2k+1}$

Tabelle 2:

Wir sind also in der Lage, das Verhalten der Kriging- beziehungsweise Powerfunktion und damit nach Abschnitt 3.4 auch das Fehlerverhalten der Interpolation mit radialen

Basisfunktionen durch das Verhalten der Fouriertransformierten der Basisfunktion im Unendlichen, zu beschreiben.

Da wir die radiale Basisfunktion Φ unter Umständen skalieren werden, beleuchten wir jetzt den Effekt der Skalierung von Φ hinsichtlich der Auswirkungen auf die Powerfunktion $P_{\Phi, X}$ näher.

Dazu sei $\Phi \in BPD(m)$ eine radiale Basisfunktion mit der skalierten Version $\Phi_\delta(\cdot) = \Phi(\cdot/\delta)$, $\varphi_\delta(\cdot) = \delta^d \varphi(\delta \cdot)$, wobei wie bisher $\varphi : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ die verallgemeinerte Fouriertransformierte von Φ ist.

Wie wir bereits erkannt haben, ist die optimale Powerfunktion der Interpolation in $\mathcal{F}_{\Phi_\delta}$ gegeben durch

$$P_{\Phi_\delta, X}^2(x) = (2\pi)^{-d} \min_{u_j(x)} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\delta(\omega) \left| \sum_{j=1}^N u_j(x) e^{i\omega^T x_j} - e^{i\omega^T x} \right|^2 d\omega$$

für $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subset \mathbb{R}^d$, $x \in \mathbb{R}^d$.

Dabei sei für $u_j(x)$, $j = 1, \dots, N$, die \mathbb{P}_m^d -reproduzierende Eigenschaft wie in Abschnitt 3.1 vorausgesetzt.

Lemma 3.17 *Mit $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ und $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subset \Omega$ gilt für die Powerfunktion*

$$P_{\Phi_\delta, X}^2(x) = P_{\Phi, X/\delta}^2(x/\delta).$$

Beweis: Durch die Skalierung der radialen Basisfunktion Φ ergibt sich für das Gleichungssystem (3.7) aus Abschnitt 3.1

$$\begin{pmatrix} A_{\Phi_\delta, X} & P \\ P^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_\delta(x) \\ v_\delta(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_\delta(x) \\ S(x) \end{pmatrix}$$

mit

$$\begin{aligned} R_\delta(x) &= (\Phi_\delta(x - x_1), \dots, \Phi_\delta(x - x_N))^T \\ &= \left(\Phi\left(\frac{x - x_1}{\delta}\right), \dots, \Phi\left(\frac{x - x_N}{\delta}\right) \right)^T, \end{aligned}$$

$$A_{\Phi_\delta, X} = (\Phi_\delta(x_i - x_k))_{1 \leq i, k \leq N} \quad \text{und}$$

P und S wie bisher.

Eine einfache Reskalierung $\delta\omega = \eta$ ergibt nun

$$\begin{aligned} P_{\Phi_\delta, X}^2(x) &= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\delta(\omega) \left| \sum_{j=1}^N u_{\delta, j}(x) e^{i\omega^T x_j} - e^{i\omega^T x} \right|^2 d\omega \\ &= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \delta^d \varphi(\eta) \left| \sum_{j=1}^N u_{\delta, j}(x) e^{i(\eta/\delta)^T x_j} - e^{i(\eta/\delta)^T x} \right|^2 \frac{1}{\delta^d} d\eta \\ &= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\eta) \left| \sum_{j=1}^N u_{\delta, j}(x) e^{i(\eta/\delta)^T x_j} - e^{i(\eta/\delta)^T x} \right|^2 d\eta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\eta) \left| \sum_{j=1}^N u_j\left(\frac{x}{\delta}\right) e^{i\eta^T x_j/\delta} - e^{i\eta^T x/\delta} \right|^2 d\eta \\
&= P_{\Phi, X/\delta}^2(x/\delta).
\end{aligned}$$

□

Skalieren wir nun $h_{\rho, X}(x)$, so bekommen wir

$$\begin{aligned}
h_{\rho, X/\delta}(x/\delta) &= \sup_{\|y-x/\delta\| \leq \rho} \min_{1 \leq j \leq N} \|y - x_j/\delta\| \\
&= \frac{1}{\delta} \sup_{\|\delta y - x\| \leq \delta\rho} \min_{1 \leq j \leq N} \|\delta y - x_j\| \\
&= \frac{1}{\delta} \sup_{\|z-x\| \leq \delta\rho} \min_{1 \leq j \leq N} \|z - x_j\| \\
&= \frac{1}{\delta} h_{\delta\rho, X}(x).
\end{aligned}$$

Zusammenfassend ergibt sich

$$\begin{aligned}
P_{\Phi_\delta, X}^2(x) &= P_{\Phi, X/\delta}^2(x/\delta) \\
&\leq F_{\Phi, \rho}(h_{\rho, X/\delta}(x/\delta)) \\
&= F_{\Phi, \rho}\left(\frac{1}{\delta} h_{\delta\rho, X}(x)\right).
\end{aligned}$$

Die gewonnenen Erkenntnisse können wir zur lokalen Fehlerabschätzung von $|f(x) - s_f(x)|$ verwenden, wie in den Abschnitten 3.4 beziehungsweise 4.3 zu sehen sein wird.

3.4 Fehlerabschätzung

Im Folgenden sei die zu interpolierende Funktion $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ stets aus dem Funktionenraum \mathcal{F}_Φ , den wir in Abschnitt 3.2 eingeführt haben.

Mit den Erkenntnissen der vorherigen Abschnitte haben wir eine „Lagrange-artige“ Darstellung der Interpolanten s_f zu der zu approximierenden Funktion f gefunden:

$$s_f(x) = \sum_{j=1}^N u_j(x) f(x_j), \quad u_j(x_l) = \delta_{jl}, \quad 1 \leq j, l \leq N,$$

$$\text{mit } p_k(x) = \sum_{j=1}^N u_j(x) p_k(x_j), \quad 1 \leq k \leq Q$$

beziehungsweise $p(x) = \sum_{j=1}^N u_j(x) p(x_j)$ für alle $p \in \mathbb{P}_m^d$, d.h. Polynome aus \mathbb{P}_m^d werden reproduziert. Da wir von \mathbb{P}_m^d -regulären Punktsätzen ausgehen, ist die Darstellung eindeutig.

Wir möchten nun den Fehler $|f(x) - s_f(x)|$ lokal abschätzen:

Satz 3.18 Die Funktion f sei aus dem Raum \mathcal{F}_Φ . Dann gilt für den Approximationsfehler $f(x) - s_f(x)$ die Beziehung

$$f(x) - s_f(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\omega) \left(e^{ix^T \omega} - \sum_{j=1}^N u_j(x) e^{ix_j^T \omega} \right) d\omega .$$

Beweis: Genüge die Fouriertransformierte von f der Beziehung

$$f(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\omega) e^{ix^T \omega} d\omega .$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} f(x) - s_f(x) &= f(x) - \sum_{j=1}^N u_j(x) f(x_j) \\ &= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\omega) e^{ix^T \omega} d\omega - (2\pi)^{-d} \sum_{j=1}^N u_j(x) \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\omega) e^{ix_j^T \omega} d\omega \\ &= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\omega) \left(e^{ix^T \omega} - \sum_{j=1}^N u_j(x) e^{ix_j^T \omega} \right) d\omega . \end{aligned}$$

Die Behauptung läßt sich auch im Sinne der Distributionentheorie beweisen, wobei man unter anderem verwendet, daß die verallgemeinerte Fouriertransformierte einen Automorphismus in S' beschreibt. \square

Sei wie bisher der Raum \mathcal{F}_Φ mit der Norm $\|\cdot\|_\Phi$ ausgestattet. Ferner bezeichne $P_{\Phi,X}$ die Kriging- beziehungsweise Powerfunktion aus Abschnitt 3.3.

Mit diesen Übereinkünften erhalten wir für die lokale Fehlerabschätzung:

Satz 3.19 Für $f \in \mathcal{F}_\Phi$ und festes $x \in \mathbb{R}^d$ gilt

$$|f(x) - s_f(x)|^2 \leq \|f\|_\Phi^2 \cdot P_{\Phi,X}^2(x) .$$

Beweis: Nach unseren Erkenntnissen sind

$$\hat{f}/\sqrt{\varphi} \quad \text{und} \quad \sqrt{\varphi} \cdot v_{x,u}$$

mit $v_{x,u}(\omega) := e^{ix^T \omega} - \sum_{j=1}^N u_j(x) e^{ix_j^T \omega}$ Elemente des Raumes $L_2(\mathbb{R}^d)$ (vgl. auch Abschnitt über die Powerfunktion). Das Produkt

$$\frac{\hat{f}}{\sqrt{\varphi}} \cdot \sqrt{\varphi} \cdot v_{x,u}$$

ist somit aus dem Raum $L_1(\mathbb{R}^d)$ aller absolut integrierbaren Funktionen. Deshalb darf die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung verwendet werden, und wir erhalten die Fehlerabschätzung

$$|f(x) - \sum_{j=1}^N u_j(x) f(x_j)| \leq \|f\|_\Phi \cdot P_{\Phi,X}(x)$$

für jedes $f \in \mathcal{F}_\Phi$. □

Bem. Für die skalierte Version der radialen Basisfunktion Φ ergibt sich

$$|f(x) - s_f(x)|^2 \leq \|f\|_{\Phi_\delta}^2 \cdot P_{\Phi_\delta, X}^2(x),$$

wobei $\Phi_\delta(\cdot) = \Phi(\cdot/\delta)$ und $\varphi_\delta(\cdot) = \delta^d \varphi(\delta \cdot)$.

Die Ergebnisse von Abschnitt 3.3 verhelfen uns zu

$$\begin{aligned} |f(x) - s_f(x)|^2 &= \|f\|_{\Phi_\delta}^2 \cdot P_{\Phi_\delta, X}^2(x) \\ &= \|f\|_{\Phi_\delta}^2 \cdot P_{\Phi, X/\delta}^2(x/\delta) \\ &\leq \|f\|_{\Phi_\delta}^2 \cdot F_{\Phi, \rho} \left(\frac{1}{\delta} h_{\delta \rho, X}(x) \right). \end{aligned}$$

Insbesondere bei der Fehlerabschätzung der hierarchischen Interpolation werden wir das folgende Theorem benötigen. Da es aber von der hierarchischen Vorgehensweise unabhängig ist, wollen wir es bereits an dieser Stelle anfügen. Es wird sich auch eine verschärfte Fehlerabschätzung gegenüber Satz 3.19 ergeben.

Theorem 3.20 Sei $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ eine bedingt positiv definite radiale Basisfunktion der Ordnung m mit einer nichtnegativen verallgemeinerten Fouriertransformierten $\hat{\Phi} = \varphi$ auf $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ sei eine beschränkte Menge. Ferner sei $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:

1. g besitzt höchstens polynomiales Wachstum
2. die verallgemeinerte Fouriertransformierte \hat{g} von g erfüllt

$$\|g\|_{\Phi}^2 = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{g}(\omega)|^2 / \varphi(\omega) d\omega < \infty$$

und

3. $\hat{g} = \hat{\Phi} \cdot \hat{h}_g$ mit $h_g \in L_2(\mathbb{R}^d)$ und $\text{supp}(h_g) \subseteq \Omega$.

Dann gilt

$$\begin{aligned} \|h_g\|_{L_2(\Omega)}^2 &= \|h_g\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 = \|g\|_{\Phi * \Phi}^2 \\ &= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{g}(\omega)|^2 / \varphi^2(\omega) d\omega. \end{aligned}$$

Die Bedingung, daß sich \hat{g} als $\hat{g} = \hat{\Phi} \cdot \hat{h}_g$ schreiben läßt, bedeutet $g = \Phi * h_g$ im distributionellen Sinn. Es ist leicht einzusehen, daß für Funktionen der Form

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{j=1}^N c_j \Phi(x - x_j), \quad x_j \in \Omega, \quad \text{oder} \\ g(x) &= \int_{\Omega} \Phi(x - y) c(y) dy, \quad c : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$

mit geeigneten Voraussetzungen an c , die obigen Bedingungen erfüllt sind. Hierbei ist $\text{supp}(h_g) \subseteq \Omega$ durch Konstruktion. Für alle $v \in \mathcal{F}_\Phi$ und alle $\lambda \in (\mathbb{P}_m^d)^-$ mit $\lambda(v) = 0$ können wir aufgrund der Beziehungen aus Abschnitt 3.2

$$(g, v)_\Phi = (g_\lambda, v)_\Phi = \lambda(v) = 0$$

herleiten.

Geben wir nun einen kurzen Beweis des Theorems.

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} \infty > \|h_g\|_{L_2(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} |h_g(x)|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} |h_g(x)|^2 dx \\ &= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{h}_g(\omega)|^2 d\omega \\ &= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{g}(\omega)|^2}{\varphi^2(\omega)} d\omega \\ &= \|g\|_{\Phi * \Phi}^2. \end{aligned}$$

□

Wie man aus dem Beweis erkennt, steht $h_g \in L_2(\mathbb{R}^d)$ in Verbindung damit, daß $g \in \mathcal{F}_{\Phi * \Phi}$.

Wir setzen also mit Theorem 3.20 voraus, daß $g \in \mathcal{F}_\Phi$ beziehungsweise für skalierte Versionen der radialen Basisfunktion $g \in \mathcal{F}_{\Phi_\delta}$ und gleichzeitig liege g im Raum $\mathcal{F}_{\Phi * \Phi}$ beziehungsweise im Raum $\mathcal{F}_{\Phi_\delta * \Phi_\delta}$.

Im Folgenden fordern wir stets, daß die zu interpolierende Funktion $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, sowie die radiale Basisfunktion Φ beziehungsweise Φ_δ die Voraussetzungen von Theorem 3.20 erfüllen. Betrachten wir jetzt den Term $\|f - s_f\|_{\Phi_\delta}$ etwas ausführlicher.

Aufgrund der Orthogonalitätsbedingung

$$(f - s_f, f - s_f)_{\Phi_\delta} = (f - s_f, f)_{\Phi_\delta}$$

aus Satz 3.8 erhalten wir

$$\begin{aligned} \|f - s_f\|_{\Phi_\delta}^2 &= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{f} - \hat{s}_f(\omega)|^2}{\varphi_\delta(\omega)} d\omega \\ &= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{(\hat{f}(\omega) - \hat{s}_f(\omega)) \overline{\hat{f}(\omega)}}{\varphi_\delta(\omega)} d\omega \\ &= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} (\hat{f}(\omega) - \hat{s}_f(\omega)) \left(\frac{\overline{\hat{f}}}{\varphi_\delta} \right) (\omega) d\omega \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} (f(\omega) - s_f(\omega)) \overline{\left(\frac{\hat{f}}{\varphi_\delta} \right)^\vee} (\omega) d\omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\mathbb{R}^d} (f(\omega) - s_f(\omega)) \overline{h_f(\omega)} d\omega \\
&= \int_{\Omega} (f(\omega) - s_f(\omega)) \overline{h_f(\omega)} d\omega .
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir die Voraussetzungen an f und h_f benutzt, besonders in Bezug auf die Integrationsgrenzen. Unter Benutzung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung bekommen wir

$$\begin{aligned}
\|f - s_f\|_{\Phi_\delta}^2 &\leq \|f - s_f\|_{L_2(\Omega)} \cdot \|h_f\|_{L_2(\Omega)} \\
&= \|f - s_f\|_{L_2(\Omega)} \cdot \|f\|_{\Phi_\delta * \Phi_\delta} .
\end{aligned}$$

Das Ziel unserer nächsten Betrachtung ist der Term $\|f - s_f\|_{L_2(\Omega)}$.

Interpolieren wir $f - s_f$ durch die Null-Funktion auf dem Datensatz X , so erhalten wir die Abschätzung

$$|f(x) - s_f(x)| \leq \|f - s_f\|_{\Phi_\delta} \cdot P_{\Phi_\delta, X}(x) .$$

Dadurch können wir $\|f - s_f\|_{L_2(\Omega)}$ weiter abschätzen:

$$\begin{aligned}
\|f - s_f\|_{L_2(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} |f(x) - s_f(x)|^2 dx \\
&\leq \|f - s_f\|_{\Phi_\delta}^2 \cdot \int_{\Omega} 1 \cdot P_{\Phi_\delta, X}^2(x) dx \\
&= \|f - s_f\|_{\Phi_\delta}^2 \cdot \|P_{\Phi_\delta, X}\|_{L_2(\Omega)}^2 .
\end{aligned}$$

Da die Powerfunktion $P_{\Phi_\delta, X}$ stetig ist, existiert $\|P_{\Phi_\delta, X}\|_{L_2(\Omega)}^2$. Kombinieren wir dieses Ergebnis mit unserer vorherigen Ungleichung, so gelangen wir zu einer Abschätzung des Terms $\|f - s_f\|_{\Phi_\delta}$, die wir im folgenden Satz formulieren.

Satz 3.21 *Erfüllen die Funktion $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ und die radiale Basisfunktion Φ_δ die Voraussetzungen von Theorem 3.20, so folgt die Abschätzung*

$$\|f - s_f\|_{\Phi_\delta} \leq \|f\|_{\Phi_\delta * \Phi_\delta} \|P_{\Phi_\delta, X}\|_{L_2(\Omega)} .$$

Wie erwähnt bekommen wir damit eine verschärfte Fehlerabschätzung gegenüber Satz 3.19.

Satz 3.22 *Seien für die Funktion $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ und die radiale Basisfunktion Φ_δ die Voraussetzungen von Theorem 3.20 erfüllt. Dann gilt die Abschätzung*

$$|f(x) - s_f(x)|^2 \leq \|f\|_{\Phi_\delta * \Phi_\delta}^2 \|P_{\Phi_\delta, X}\|_{L_2(\Omega)}^2 \cdot P_{\Phi_\delta, X}(x)^2 .$$

Wir sind also in der Lage, den Fehler $f(x) - s_f(x)$ durch ein Produkt abzuschätzen, dessen einer Faktor von f und der radialen Basisfunktion Φ abhängt und dessen andere Faktoren von f unabhängig sind. Diese Tatsache wird uns in Kapitel 4 bei der Fehlerabschätzung der hierarchischen Interpolation mit radialen Basisfunktionen von großem Nutzen sein.

4 Hierarchische Interpolation mit radialen Basisfunktionen

4.1 Vorstellung der hierarchischen Interpolation

Die Kondition der Interpolationsmatrix und die Approximationsgüte hängen stark vom Separationsabstand des zugehörigen Datensatzes ab. Aus diesem Grund führen wir eine iterierte Interpolation mit radialen Basisfunktionen auf fortlaufend „feiner“ werdenden Datensätzen ein. Stellen wir nun die hierarchische Interpolation mit radialen Basisfunktionen vor.

Gegeben sei ein Datensatz

$$X = \{x_1, \dots, x_N\} \subset \mathbb{R}^d,$$

wobei $N \in \mathbb{N}$ groß und X eine Teilmenge der kompakten Menge Ω in \mathbb{R}^d ist.

Wir zerlegen nun den Datensatz X in fortlaufend „gröbere“ Datensätze in folgender Weise :

$$X_1 \subset \dots \subset X_{M-1} \subset X_M =: X.$$

Dieses erlaubt uns, die Interpolation in M Schritte aufzuspalten. Desweiteren führen wir folgende Definitionen ein

$$\begin{aligned} h_{X_j, \rho} &:= \sup_{x \in \Omega} \sup_{\|y-x\| \leq \rho} \min_{x_i \in X_j} \|y - x_i\| \\ q_{X_j} &:= \frac{1}{2} \min_{x_i \neq x_k \in X_j} \|x_i - x_k\| \end{aligned}$$

für $1 \leq j \leq M$. Dabei ist q_{X_j} der Separationsabstand. Das Kriterium für die Zerlegung der Datensätze ist, daß der Separationsabstand $q_{X_{i-1}}$ nach Möglichkeit größer sein sollte als q_{X_i} . Dieses impliziert, daß man das Paar von Punkten mit dem geringsten Abstand lokalisieren muß, um dann einen dieser Punkte zu entfernen. Auf einen Algorithmus, der den Datensatz X in Sätze X_k zerlegt, möchten wir nicht näher eingehen. Wir können dazu aber auf die Arbeit von Floater und Iske [3] verweisen.

$h_{X_k, \rho} \approx q_{X_k}$ bedeutet, daß der zugehörige Datensatz asymptotisch gleichmäßig verteilt ist; d.h. es treten keine „Löcher“ oder keine „Häufungen“ auf.

Kommen wir nun zur Vorgehensweise bei der hierarchischen Interpolation mit radialen Basisfunktionen. Wir wählen Φ_1 als radiale Basisfunktion zum größten Datensatz X_1 . Die Interpolante $s_{f,1}$ zu $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem Satz X_1 berechnen wir mit Hilfe der Basisfunktion Φ_1 anhand der Vorgehensweise aus Abschnitt 3.1.

In ähnlicher Weise verfahren wir weiter:

Sind die Interpolanten

$$s_{f,1}, s_{f,2}, \dots, s_{f,j}$$

berechnet, so interpolieren wir $f - s_{f,1} - s_{f,2} - \dots - s_{f,j}$ durch die radiale Basisfunktion Φ_{j+1} auf dem Datensatz X_{j+1} ; das Ergebnis sei die Interpolante $s_{f,j+1}$. Dabei ist Φ_{j+1} proportional zu $h_{X_j, \rho}$ beziehungsweise q_{X_j} zu skalieren. Obiges Verfahren wird

bis $j = \dots, M - 1, M$ wiederholt.

Das Hauptprinzip dieser Strategie besteht darin, grundlegende Eigenschaften des Graphen von f in den ersten Schritten der Interpolation zu erhalten, während die feineren Details in den letzten Schritten auftauchen.

Somit erhalten wir als Endergebnis

$$s_{f,M}(x_i) = f(x_i) - \sum_{k=1}^{M-1} s_{f,k}(x_i)$$

für $x_i^{(M)} = x_i \in X_M = X$, $1 \leq i \leq N$, d.h.

$$s_f := s_{f,1} + s_{f,2} + \dots + s_{f,M}$$

interpoliert f auf dem Datensatz X .

Ziel wird es sein, dabei die einzelnen lokalen Fehlerabschätzungen

$$|f(x) - s_{f,1}(x) - \dots - s_{f,i}(x)|, \quad 1 \leq i \leq M,$$

zu betrachten; diese können uns dann zur gesuchten finalen Fehlerabschätzung $|f(x) - s_f(x)|$ führen.

4.2 Kondition des Interpolationsproblems

Das Rechnen mit endlicher Genauigkeit hat zur Folge, daß in der Regel bereits die Koeffizienten a_{jk} und b_i des zu lösenden Gleichungssystems $Ax = b$ im Rechner nicht exakt darstellbar sind. Falls sie, wie in unserem Interpolationsfall, ihrerseits das Ergebnis einer Rechnung sind, sind sie zudem oft mit Rundungsfehlern behaftet. Deshalb soll in diesem Abschnitt die Empfindlichkeit der Lösung x auf Störungen in den Koeffizienten beleuchtet werden.

Definition 4.1 Die Norm einer Matrix A ist gegeben durch

$$\|A\|_{p,q} := \sup_{\|x\|_p \neq 0} \frac{\|Ax\|_q}{\|x\|_p},$$

wobei $p, q \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Es sollen nun zu den Normen $\|\cdot\|_p$ mit $1 \leq p \leq \infty$ auf \mathbb{R}^n beziehungsweise $\|\cdot\|_q$ mit $1 \leq q \leq \infty$ auf \mathbb{R}^m passende beziehungsweise zugeordnete Matrixnormen $\|\cdot\|_{p,q}$ aufgelistet werden.

Hierbei wird die Matrix A als $A = (a_{ij})$ geschrieben, wobei i der Zeilen- und j der Spaltenindex sei. Es ergeben sich folgende Beispiele

$$\|A\|_{\infty,\infty} := \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

$$\|A\|_{1,1} := \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}|$$

$$\|A\|_{2,2} := \max \left\{ +\sqrt{\lambda} \mid \lambda \in \mathbb{R}, A^T A x = \lambda x \text{ für ein } x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0 \right\}$$

Im Folgenden seien Vektor- und Matrixnormen stets so gewählt, daß sie multiplikativ und zueinander passend sind.

Definition 4.2 $\kappa(A) := \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$ heißt die *Konditionszahl der Matrix A bezüglich der verwendeten Matrixnorm*.

Mit Hilfe der Konditionszahl $\kappa(A)$ kann man den Störungseinfluß beziehungsweise die numerische Stabilität von Lösungen linearer Gleichungssysteme beschreiben. Grundlegende Eigenschaften von Matrixnormen und Konditionszahl findet man zum Beispiel in Schaback [17] oder Schwarz [18].

Bem. Die Konditionszahl $\kappa(A)$ ist durch Eins nach unten beschränkt, denn es gilt stets

$$1 \leq \|I\| = \|AA^{-1}\| \leq \|A\| \|A^{-1}\| = \kappa(A) .$$

Satz 4.3 (Störungstheorie linearer Gleichungssysteme) Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit $\det A \neq 0$, $b \in \mathbb{R}^n$, $b \neq 0$ und $x \in \mathbb{R}^n$ gelte $Ax = b$ und für Störungen $\Delta x \in \mathbb{R}^n$, $\Delta b \in \mathbb{R}^n$, $\Delta A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ auch $(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b + \Delta b$. Ferner gelte mit $\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$ die Abschätzung $\kappa(A) \cdot \|\Delta A\| / \|A\| < 1$. Dann folgt

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\kappa(A)}{1 - \kappa(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \right) .$$

Obiger Satz zeigt, daß man lediglich durch eine Erniedrigung der Konditionszahl der Koeffizientenmatrix den Einfluß der Eingabefehler auf die Lösung verringern kann.

Bem. Der relative Eingangsfehler $\|\Delta A\| / \|A\|$ ist mindestens so groß wie die Maschinengenauigkeit ϵ_{ps} anzusetzen, und deshalb sind Gleichungssysteme mit $\kappa(A) > 1/\epsilon_{\text{ps}}$ durch kein Verfahren auf einer Maschine mit Genauigkeit ϵ_{ps} zuverlässig lösbar.

Schwarz stellt in [18] folgende Daumenregel auf

Daumenregel Wird ein lineares Gleichungssystem $Ax + b = 0$ mit d -stelliger dezimaler Gleitkommarechnung gelöst, und beträgt die Konditionszahl $\kappa(A) \approx 10^\alpha$, so sind auf Grund der im allgemeinen unvermeidlichen Eingangsfehler in der berechneten Lösung, stets bezogen auf die betragsgrößte Komponente, nur $d - \alpha - 1$ Dezimalstellen sicher.

Man ist also bestrebt, die Kondition einer Matrix A nach oben abzuschätzen, wozu man meist $\|A\|$ und $\|A^{-1}\|$ einzeln abschätzt. Diesen Weg wollen wir nun weiter verfolgen.

Als Norm für ein $x \in \mathbb{R}^N$ soll in unserem Fall immer die euklidische Norm stehen, d.h. $\|x\| = \|x\|_2 = \left(\sum_{j=1}^N x_j^2 \right)^{1/2}$, beziehungsweise die zugeordnete Matrixnorm.

Ausgehend von der Situation, daß eine radiale Basisfunktion $\Phi \in BPD(m)$, Daten $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subset \mathbb{R}^d$ mit paarweise verschiedenen x_j , $1 \leq j \leq N$, und Stützstellen $y = \{f_1, \dots, f_N\} \in \mathbb{R}^N$ gegeben sind, suchen wir für unser Interpolationsproblem aus Abschnitt 3.1 die eindeutig bestimmten $\alpha \in \mathbb{R}^N$, $\beta \in \mathbb{R}^Q$, die das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} A & P \\ P^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

erfüllen, wobei wie bisher $A = (\Phi(x_j - x_k))_{1 \leq j, k \leq N}$ und $P = (p_k(x_l))_{1 \leq l \leq N, 1 \leq k \leq Q}$ gesetzt war.

Ist Φ sogar (unbedingt) positiv definit, so verringert sich das System (4.10), wie wir bereits erkannt haben, zu

$$A\alpha = y ,$$

welches die eindeutige Lösung $\alpha = A^{-1}y$ besitzt.

Aus der Numerik ist uns bekannt, daß $\|A^{-1}\|$ gerade das Reziproke des kleinsten Eigenwertes von A ist. Deshalb liefert im Fall der positiven Definitheit von Φ die folgende Abschätzung der zugeordneten quadratischen Form

$$a^T A a = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N a_j a_k \Phi(x_j - x_k) \geq \Theta \sum_{j=1}^N a_j^2 = \Theta a^T a \quad \text{für alle } a \in \mathbb{R}^N$$

sofort die obere Schranke

$$\|A^{-1}\| \leq \frac{1}{\Theta} ,$$

sofern $\Theta > 0$.

Im Fall $\Phi \in BPD(m)$ mit $m > 0$ fordern wir, daß die Matrix P injektiv ist, d.h. der Punktsatz $X = \{x_1, \dots, x_N\}$ ist \mathbb{P}_m^d -regulär. Unter dieser Voraussetzung läßt sich das Gleichungssystem (4.10) auf $Gx = y$ reduzieren, wobei die Matrix G mit Hilfe der Orthogonalprojektion

$$p_{V_m(X)} : \mathbb{R}^N \longrightarrow V_m(X) := \{v \in \mathbb{R}^N : v_j = p(x_j) \text{ mit } p \in \mathbb{P}_m^d, 1 \leq j \leq N\}$$

erklärt wird durch

$$G = Ap_{V_m(X)}^{-1} + p_{V_m(X)}$$

(vgl. Narcowich/Ward [13]). Das orthogonale Komplement von $V_m(X)$ bezeichnen wir mit

$$V_m(X)^- = \{v \in \mathbb{R}^N : \sum_{j=1}^N v_j p(x_j) = 0 \text{ für alle } p \in \mathbb{P}_m^d\} .$$

Ebenfalls in Narcowich/Ward [13] wird der nachstehende Zusammenhang zwischen den Schranken der quadratischen Form und den Schranken von $\|G^{-1}\|$ bewiesen.

Satz 4.4 *Mit den obigen Bezeichnungen folgt aus*

$$\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N a_j a_k \Phi(x_j - x_k) \geq \Theta \sum_{j=1}^N a_j^2 \quad \text{für alle } a \in V_m(X)^-$$

mit $\Theta > 0$ die Invertierbarkeit der Matrix G und die Abschätzung

$$\|G^{-1}\| \leq \frac{\sqrt{2}\Lambda}{\Theta} \max\{1, \Theta^{-1}\} ,$$

wobei $\Lambda = \|Ap_{V_m(X)}^{-1}\|$.

Da sich Λ unter anderem durch

$$\Lambda \leq \|A\| \leq N \max_{1 \leq j, k \leq N} \Phi(x_j - x_k)$$

weiter abschätzen läßt, ist also die Bestimmung von Θ von großem Interesse. Zur Angabe der Schranke Θ der quadratischen Form ist eine Konstante

$$C_d := 4 \left[3^{d-1} \Gamma^2\left(\frac{d}{2} + 1\right) \pi \right]^{\frac{1}{d+1}}$$

erforderlich, die von der Raumdimension d abhängt. Tabelle 3 enthält die Werte der Konstanten C_d für die Raumdimensionen von eins bis acht.

d	1	2	3	4	5	6	7	8
C_d	6.2832	8.4492	10.6347	12.8285	15.0265	17.2271	19.4292	21.6325

Tabelle 3: C_d

Ergänzend zu Kapitel 2 wollen wir nun für spezielle, von uns verwendete, radiale Basisfunktionen den Wert Θ angeben. Die Berechnung der jeweiligen Schranken Θ kann man mit Wendland [21] nachvollziehen.

Korollar

1. Für $\Phi(x) = e^{-\alpha\|x\|}$ mit $\alpha > 0$ hat die zugehörige quadratische Form eine untere Schranke mit

$$\Theta = \frac{C_d^d}{2^{d+1} \alpha^{d/2} \Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right)} q_X^{-d} e^{-\frac{C_d^2}{\alpha q_X^2}}.$$

2. Die den Multiquadrics zugeordnete quadratische Form besitzt eine untere Schranke mit

$$\Theta = \frac{\pi^{1/2} c^{\frac{d+\nu-1}{2}} C_d^{\frac{d-\nu-1}{2}}}{2^{d+1} |\Gamma(-\frac{\nu}{2})| \Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right)} q_X^{\frac{\nu+1-d}{2}} e^{-\frac{2cC_d}{q_X}}.$$

3. Für $\Phi(x) = (c^2 + \|\omega\|^2)^{-\frac{\nu}{2}}$ mit $\nu, c > 0$ hat die zugeordnete quadratische Form im Fall $|d - \nu| \geq 1$ eine untere Schranke mit

$$\Theta = \frac{\pi^{1/2} c^{\frac{d-\nu-1}{2}} C_d^{\frac{d+\nu-1}{2}}}{2^{d+1} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right)} q_X^{-\frac{d+\nu-1}{2}} e^{-\frac{2cC_d}{q_X}}.$$

Im Fall $|d - \nu| < 1$ ergibt sich für Θ

$$\Theta = \frac{\pi^{1/2} c^{\frac{d-\nu-|d-\nu|}{2}} C_d^{\frac{d+\nu-|d-\nu|}{2}}}{2^{\frac{|d-\nu|+1}{2}+d+1} \Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right) \Gamma\left(\frac{|d-\nu|+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right)} q_X^{-\frac{d+\nu-|d-\nu|}{2}} \left(1 + \frac{2cC_d}{q_X}\right)^{\frac{|d-\nu|-1}{2}} e^{-\frac{2cC_d}{q_X}}.$$

4. Für $\Phi(x) = (-1)^{\lceil \nu/2 \rceil} \|x\|^\nu$ mit $\nu > 0, \nu \notin 2\mathbb{N}$ erhält man

$$\Theta = \frac{\Gamma(\frac{d+\nu}{2})}{2^{d+1} |\Gamma(-\frac{\nu}{2})| \Gamma(\frac{d}{2} + 1) C_d^\nu} q_X^\nu .$$

5. Für die quadratische Form, die $\Phi(x) = (-1)^{k+1} \|x\|^{2k} \log \|x\|$ mit $k \in \mathbb{N}$ zugeordnet ist, existiert eine untere Schranke mit

$$\Theta = \frac{\Gamma(\frac{d}{2} + k) k!}{2^{d+2} C_d^{2k} \Gamma(\frac{d}{2} + 1)} q_X^{2k} .$$

6. Da die Fouriertransformierte $\hat{\Upsilon}$ des Euklidischen Huts Nullstellen besitzt, lassen sich die gängigen Techniken zur Bestimmung der unteren Schranke der zugehörigen quadratischen Form nicht anwenden.

Die Ergebnisse zeigen, daß sich bei Gaussians, Multiquadrics und inversen Multiquadrics nur obere Schranken für $\|A^{-1}\|$ beziehungsweise $\|G^{-1}\|$ ergeben, die mit sich verringerndem Separationsabstand

$$q_X = \frac{1}{2} \min_{1 \leq j \neq k \leq N} \|x_j - x_k\|$$

exponentiell größer werden. Bei den Thin-Plate Splines und den Funktionen r^β mit $\beta \notin 2\mathbb{N}$ wachsen dagegen die Schranken für $q_X \rightarrow 0$ höchstens polynomial.

Da die untere Schranke Θ der quadratischen Form vom Separationsabstand q_X abhängt, können wir Θ als eine Funktion $G_\Phi(q_X)$ auffassen.

Untersuchen wir nun den Einfluß der Skalierung von Φ durch $\Phi_\delta(\cdot) = \Phi(\cdot/\delta)$ mit Blick auf die quadratische Form

$$a^T A_{\Phi_\delta, X} a = \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N a_j a_k \Phi_\delta(x_j - x_k)$$

für $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subset \mathbb{R}^d, \delta > 0$ und $a \in \mathbb{R}^N$. Verwenden wir $\varphi_\delta(\omega) = \delta^d \varphi(\delta\omega)$, so bekommen wir

$$\begin{aligned} a^T A_{\Phi_\delta, X} a &= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_\delta(\omega) \left| \sum_{j=1}^N a_j e^{i\omega^T x_j} \right|^2 d\omega \\ &= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\eta) \left| \sum_{j=1}^N a_j e^{i\eta^T x_j/\delta} \right|^2 d\eta \\ &= a^T A_{\Phi, X/\delta} a . \end{aligned}$$

Dabei erfülle Φ die Bedingungen des Theorems 3.12 aus Abschnitt 3.3.

Wie wir leicht erkennen, gilt die Identität $A_{\Phi_\delta, X} = A_{\Phi, X/\delta}$. Mit anderen Worten kann die Interpolation auf dem Datensatz X mit der Basisfunktion Φ_δ als Interpolation mit

Φ auf dem Satz X/δ verstanden werden.

Die Schranken für den kleinsten Eigenwert von A sind von der Form

$$a^T A_{\Phi, X} a \geq \|a\|_2^2 G_{\Phi}(q_X).$$

Durch die Skalierung bekommen wir für den Separationsabstand $q_{X/\delta} = \frac{1}{\delta} q_X$.

Zusammenfassend erhalten wir

$$\begin{aligned} a^T A_{\Phi_{\delta}, X} a &= a^T A_{\Phi, X/\delta} a \\ &\geq \|a\|_2^2 G_{\Phi}(q_{X/\delta}) \\ &= \|a\|_2^2 G_{\Phi}\left(\frac{1}{\delta} q_X\right). \end{aligned}$$

Da wir die Kondition des Interpolationsproblems nach unten abschätzen wollen, scheint es sinnvoll zu sein, δ proportional zu q_X zu wählen, insbesondere werden wir bei der hierarchischen Interpolation δ_j proportional zu q_{X_j} wählen.

Mit fortlaufend feiner werdenden Datensätzen X_1, X_2, X_3, \dots nähert sich der Separationsabstand q_{X_j} der Null; deshalb muß sich auch $\delta_j > 0, j = 1, 2, 3, \dots$, der Null annähern, um keine Verschlechterung der Kondition der Interpolationsmatrizen der einzelnen Schritte zu erfahren.

4.3 Fehlerabschätzung der hierarchischen Interpolation

In diesem Abschnitt soll eine Fehlerabschätzung für die hierarchische Interpolation mit radialen Basisfunktionen gegeben werden. Es soll also mit anderen Worten untersucht werden, wie sich die Interpolante an Stellen verhält, in denen sie nicht interpoliert.

Die nachfolgenden Untersuchungen beziehen sich meist auf den Raum \mathcal{F}_{Φ} , den wir in Abschnitt 3.2 vorgestellt haben.

Bem. Eine Funktion g , die in \mathcal{F}_{Φ} liegt, muß notwendigerweise eine Fouriertransformierte \hat{g} besitzen, die zumindest in den Nullstellen von $\hat{\Phi}$ ebenfalls verschwindet.

Um erwähnte Fehlerabschätzung durchführen zu können, benötigen wir im Gegensatz zur Interpolation in einem Schritt (vgl. dazu Abschnitt 3.6) noch einige zusätzliche Voraussetzungen.

Den Grundstein zu einer finalen Abschätzung von $|f(x) - s_{f,1}(x) - \dots - s_{f,M}(x)|$ legt das Theorem 3.20.

Im Folgenden fordern wir stets, daß die zu interpolierende Funktion $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, sowie die radiale Basisfunktion Φ_1 beziehungsweise Φ_{1,δ_1} die Voraussetzungen von Theorem 3.20 erfüllen. Die Interpolante des i -ten Interpolationsschrittes bezeichnen wir wie bisher mit $s_{f,i}$; sie stammt aus dem Raum $\mathcal{F}_{\Phi_i, \delta_i}$.

Das Ziel der finalen Abschätzung besteht ja darin, den Term $|f(x) - s_{f,1}(x) - \dots - s_{f,M}(x)|^2$ beziehungsweise $\|f - s_{f,1} - \dots - s_{f,M-1}\|_{\Phi_{M,\delta_M}}^2$ soweit abzuschätzen, daß er nicht mehr direkt von $s_{f,j}, j = 1, \dots, M$, abhängt.

Um dieses Ziel zu erreichen, ist die Ausnutzung der Orthogonalitätsbedingung

$$(f - s_{f,1} - \dots - s_{f,j}, f - s_{f,1} - \dots - s_{f,j})_{\Phi_{j,\delta_j}} = (f - s_{f,1} - \dots - s_{f,j}, f - s_{f,1} - \dots - s_{f,j-1})_{\Phi_{j,\delta_j}}$$

beziehungsweise

$$(f - s_{f,1} - \dots - s_{f,j}, s_{f,j})_{\Phi_j, \delta_j} = 0$$

sehr hilfreich.

Einzelheiten über das Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)_{\Phi}$ haben wir im Abschnitt 3.4 erfahren.

Um aber diese Orthogonalitätseigenschaft auf einen Term $\|f - s_{f,1} - \dots - s_{f,j}\|_{\Phi_{j+1}, \delta_{j+1}}$ anwenden zu können, müssen wir noch $\|f - s_{f,1} - \dots - s_{f,j}\|_{\Phi_{j+1}, \delta_{j+1}}$ auf $\|f - s_{f,1} - \dots - s_{f,j}\|_{\Phi_j, \delta_j}$ zurückführen. Dazu einige Vorbemerkungen:

Satz 4.5 *Gelte für die verallgemeinerten Fouriertransformierten*

$$\varphi_{j+1, \delta_{j+1}}(\omega) \geq K_j^2 \varphi_{j, \delta_j}(\omega) \geq 0 \text{ für alle } \omega \in \mathbb{R}^d \text{ mit } K_j > 0, j = 1, \dots, M-1.$$

Dann gilt die Inklusion

$$\mathcal{F}_{\Phi_j, \delta_j} \subseteq \mathcal{F}_{\Phi_{j+1}, \delta_{j+1}}.$$

Beweis: Mit $g \in \mathcal{F}_{\Phi_j, \delta_j}$ folgt

$$\begin{aligned} \infty &> \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{g}(\omega)|^2}{K_j^2 \varphi_{j, \delta_j}(\omega)} d\omega \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{g}(\omega)|^2}{\varphi_{j+1, \delta_{j+1}}(\omega)} d\omega \end{aligned}$$

und damit die Behauptung. \square

Lemma 4.6 *Es gelte $0 \leq K_j^2 \varphi_{j, \delta_j}(\omega) \leq \varphi_{j+1, \delta_{j+1}}(\omega)$, $K_j > 0$, $j = 1, \dots, M-1$, für alle $\omega \in \mathbb{R}^d$ und $f \in \mathcal{F}_{\Phi_1, \delta_1}$.*

Dann ist

$$f - s_{f,1} - \dots - s_{f,j} - s_{f,j+1} \in \mathcal{F}_{\Phi_{j+1}, \delta_{j+1}}.$$

Beweis: Das Lemma folgt aus Satz 4.5 und der Tatsache, daß

$$s_{f,j} \in \mathcal{F}_{\Phi_j, \delta_j}, \quad j \in \{1, \dots, M\}.$$

\square

Mit den Voraussetzungen von Satz 4.5 beziehungsweise Lemma 4.6 und der Orthogonalitätsbedingung der Interpolanten läßt sich leicht die Beziehung

$$\begin{aligned} \|f - s_{f,1} - \dots - s_{f,j}\|_{\Phi_j, \delta_j}^2 &= \|f - s_{f,1} - \dots - s_{f,j-1}\|_{\Phi_j, \delta_j}^2 - \|s_{f,j}\|_{\Phi_j, \delta_j}^2 \\ &\leq \|f - s_{f,1} - \dots - s_{f,j-1}\|_{\Phi_j, \delta_j}^2 \end{aligned}$$

herleiten.

Mit Hilfe dieser Vorbetrachtungen können wir nun das grundlegende Theorem zur finalen Fehlerabschätzung der hierarchischen Interpolation mit radialen Basisfunktionen angeben.

Theorem 4.7 Seien für $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ und die Basisfunktion Φ_{1,δ_1} die Voraussetzungen von Theorem 3.20 erfüllt. Ferner gelte für die verallgemeinerten Fouriertransformierten

$$0 \leq K_j^2 \varphi_{j,\delta_j}(\omega) \leq \varphi_{j+1,\delta_{j+1}}, \quad K_j > 0, \quad j = 1, \dots, M-1 \quad \text{für alle } \omega \in \mathbb{R}^d.$$

Dann kann der Fehler der Interpolation an f beschränkt werden durch

$$|(f - s_{f,1} - \dots - s_{f,k})(x)| \leq \frac{1}{K_1} \frac{1}{K_2} \cdots \frac{1}{K_{k-1}} \|f\|_{\Phi_{1,\delta_1} * \Phi_{1,\delta_1}} \|P_{\Phi_{1,\delta_1}, X_1}\|_{L_2(\Omega)} \cdot P_{\Phi_k, \delta_k, X_k}(x)$$

für $k \in \{1, 2, \dots, M\}$.

Beweis: Mit den angegebenen Voraussetzungen gilt

$$\begin{aligned} & |(f - s_{f,1} - \dots - s_{f,k})(x)|^2 \\ & \leq \|f - s_{f,1} - \dots - s_{f,k-1}\|_{\Phi_k, \delta_k}^2 \cdot P_{\Phi_k, \delta_k, X_k}^2(x) \\ & = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|(\hat{f} - \hat{s}_{f,1} - \dots - \hat{s}_{f,k-1})(\omega)|^2}{\varphi_{k,\delta_k}(\omega)} d\omega \cdot P_{\Phi_k, \delta_k, X_k}^2(x) \\ & \leq (2\pi)^{-d} \frac{1}{K_{k-1}^2} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|(\hat{f} - \hat{s}_{f,1} - \dots - \hat{s}_{f,k-1})(\omega)|^2}{\varphi_{k-1,\delta_{k-1}}(\omega)} d\omega \cdot P_{\Phi_k, \delta_k, X_k}^2(x) \\ & = \frac{1}{K_{k-1}^2} \|f - s_{f,1} - \dots - s_{f,k-1}\|_{\Phi_{k-1}, \delta_{k-1}}^2 \cdot P_{\Phi_k, \delta_k, X_k}^2(x) \\ & \leq \frac{1}{K_{k-1}^2} \|f - s_{f,1} - \dots - s_{f,k-2}\|_{\Phi_{k-1}, \delta_{k-1}}^2 \cdot P_{\Phi_k, \delta_k, X_k}^2(x) \\ & \leq \frac{1}{K_{k-1}^2} \frac{1}{K_{k-2}^2} \|f - s_{f,1} - \dots - s_{f,k-2}\|_{\Phi_{k-2}, \delta_{k-2}}^2 \cdot P_{\Phi_k, \delta_k, X_k}^2(x) \\ & \quad \vdots \\ & \leq \frac{1}{K_{k-1}^2} \frac{1}{K_{k-2}^2} \cdots \frac{1}{K_2^2} \|f - s_{f,1} - s_{f,2}\|_{\Phi_2, \delta_2}^2 \cdot P_{\Phi_k, \delta_k, X_k}^2(x) \\ & \leq \frac{1}{K_{k-1}^2} \cdots \frac{1}{K_2^2} \frac{1}{K_1^2} \|f - s_{f,1}\|_{\Phi_1, \delta_1}^2 \cdot P_{\Phi_k, \delta_k, X_k}^2(x) \\ & \leq \frac{1}{K_{k-1}^2} \cdots \frac{1}{K_1^2} \|f\|_{\Phi_{1,\delta_1} * \Phi_{1,\delta_1}}^2 \cdot \|P_{\Phi_{1,\delta_1}, X_1}(\cdot)\|_{L_2(\Omega)}^2 \cdot P_{\Phi_k, \delta_k, X_k}^2(x) \\ & \leq \frac{1}{K_{k-1}^2} \cdots \frac{1}{K_1^2} \|f\|_{\Phi_{1,\delta_1} * \Phi_{1,\delta_1}}^2 \cdot \|P_{\Phi_{1,\delta_1}, X_1}\|_{L_2(\Omega)}^2 \cdot F_{\Phi_k, \delta_k, \rho}(h_{\rho, X_k}(x)) \\ & \leq \frac{1}{K_{k-1}^2} \cdots \frac{1}{K_1^2} \|f\|_{\Phi_{1,\delta_1} * \Phi_{1,\delta_1}}^2 \cdot \text{vol}(\Omega) \cdot F_{\Phi_{1,\delta_1}, \rho}(h) \cdot F_{\Phi_k, \delta_k, \rho}(h_{\rho, X_k}(x)) \end{aligned}$$

mit $h = \sup_{x \in \Omega} h_{\rho, X_1}(x)$. □

Mit der Forderung, daß $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ und Φ_{1,δ_1} die Voraussetzungen des Theorems 3.20 erfüllen, läßt sich der Term $\|f - s_{f,1}\|_{\Phi_{1,\delta_1}}$ auch in einer anderen Form beschränken. Diese Form der Abschätzung wollen wir im Folgenden aufzeigen.

Korollar 4.8 Mit $f \in \mathcal{F}_{\Phi_1, \delta_1}$ gilt

$$\|f - s_{f,1}\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \|f\|_{\Phi_1, \delta_1}^2 \cdot \|P_{\Phi_1, \delta_1, X_1}\|_{L_2(\Omega)}^2.$$

Beweis: Mit der Abschätzung

$$|f(x) - s_{f,1}(x)|^2 \leq \|f\|_{\Phi_1, \delta_1}^2 \cdot P_{\Phi_1, \delta_1, X_1}^2(x)$$

aus Abschnitt 3.6 erhalten wir sofort

$$\begin{aligned} \|f - s_{f,1}\|_{L_2(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} |f(x) - s_{f,1}(x)|^2 dx \\ &\leq \|f\|_{\Phi_1, \delta_1}^2 \cdot \|P_{\Phi_1, \delta_1, X_1}\|_{L_2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

□

Satz 4.9 Erfüllen die zu interpolierende Funktion $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ und die radiale Basisfunktion Φ_{1, δ_1} die Voraussetzungen von Theorem 3.20, dann gilt

$$\|f - s_{f,1}\|_{\Phi_1, \delta_1}^2 \leq \|f\|_{\Phi_1, \delta_1} \|f\|_{\Phi_1, \delta_1 * \Phi_1, \delta_1} \|P_{\Phi_1, \delta_1, X_1}\|_{L_2(\Omega)}.$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \|f - s_{f,1}\|_{\Phi_1, \delta_1}^2 &= (f - s_{f,1}, f)_{\Phi_1, \delta_1} \\ &= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} [(\hat{f} - \hat{s}_{f,1})(\omega)] \left(\frac{\overline{\hat{f}(\omega)}}{\varphi_{1, \delta_1}(\omega)} \right) d\omega \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} [(f - s_{f,1})(\omega)] \overline{\left(\frac{\hat{f}(\omega)}{\varphi_{1, \delta_1}(\omega)} \right)} d\omega \\ &\leq \|f - s_{f,1}\|_{L_2(\Omega)} \|h_f\|_{L_2(\Omega)} \\ &= \|f - s_{f,1}\|_{L_2(\Omega)} \|f\|_{\Phi_1, \delta_1 * \Phi_1, \delta_1} \\ &\leq \|f\|_{\Phi_1, \delta_1} \|P_{\Phi_1, \delta_1, X_1}\|_{L_2(\Omega)} \|f\|_{\Phi_1, \delta_1 * \Phi_1, \delta_1} \end{aligned}$$

□

Wir erhalten somit eine im allgemeinen nicht bessere Fehlerabschätzung als in Theorem 4.7. Der Vollständigkeit halber wollen wir sie aber trotzdem angeben.

Theorem 4.10 Seien für $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ und die radiale Basisfunktion Φ_{1, δ_1} die Voraussetzungen von Theorem 3.20 erfüllt. Ferner gelte für die verallgemeinerten Fouriertransformierten

$$0 \leq K_j^2 \varphi_{j, \delta_j}(\omega) \leq \varphi_{j+1, \delta_{j+1}}(\omega), \quad K_j > 0, \quad j = 1, \dots, M-1 \quad \text{für alle } \omega \in \mathbb{R}^d.$$

Dann erhält man für die Abschätzung des Fehlers

$$\begin{aligned} |(f - s_{f,1} - \dots - s_{f,k})(x)|^2 &\leq \\ &\frac{1}{K_1^2} \cdots \frac{1}{K_{k-1}^2} \|f\|_{\Phi_1, \delta_1} \|f\|_{\Phi_1, \delta_1 * \Phi_1, \delta_1} \|P_{\Phi_1, \delta_1, X_1}\|_{L_2(\Omega)} P_{\Phi_k, \delta_k, X_k}^2(x) \end{aligned}$$

für $k \in \{2, \dots, M\}$. Im Fall $k = 1$ setze $K_1 = 1$.

Der Beweis erfolgt mit Theorem 4.7 und Korollar 4.8 sowie Satz 4.9. \square

An dieser Stelle wollen wir noch kurz auf den Fall eingehen, daß die radiale Basisfunktion Φ_{j+1} aus der radialen Basisfunktion Φ_j durch Skalierung hervorgeht. Dazu sei

$$\Phi_{j+1}(y) = \Phi_j\left(\frac{y}{\tilde{\delta}_j}\right), \quad j = 1, \dots, M.$$

Für die verallgemeinerten Fouriertransformierten ergibt sich auf diesem Wege

$$\varphi_{j+1}(\omega) = \tilde{\delta}_j^d \varphi_j(\omega \tilde{\delta}_j).$$

Aus unserer Bedingung

$$0 \leq K_j^2 \varphi_j(\omega) \leq \varphi_{j+1}(\omega), \quad K_j > 0, \quad j = 1, \dots, M-1 \quad \text{für alle } \omega \in \mathbb{R}^d$$

an die verallgemeinerten Fouriertransformierten folgt

$$\begin{aligned} K_j^2 &\leq \frac{\varphi_{j+1}(\omega)}{\varphi_j(\omega)} \\ &= \tilde{\delta}_j^d \frac{\varphi_j(\tilde{\delta}_j \omega)}{\varphi_j(\omega)}. \end{aligned}$$

Setzen wir nun

$$K_j^2(\tilde{\delta}_j) := \tilde{\delta}_j^d \inf_{\omega \in \mathbb{R}^d} \frac{\varphi_j(\tilde{\delta}_j \omega)}{\varphi_j(\omega)}$$

und stellen gleichzeitig die Forderung an die verallgemeinerten Fouriertransformierten der radialen Basisfunktionen, daß

$$0 < K_j(\tilde{\delta}_j) < \infty.$$

Mit den Voraussetzungen von Theorem 4.7 ergibt sich so die Fehlerabschätzung

$$\begin{aligned} |(f - s_{f,1} - \dots - s_{f,k})(x)|^2 &\leq \\ &\frac{1}{K_{k-1}^2(\tilde{\delta}_{k-1})} \cdots \frac{1}{K_1^2(\tilde{\delta}_1)} \|f\|_{\Phi_1 * \Phi_1}^2 \cdot \|P_{\Phi_1, X_1}\|_{L_2(\Omega)}^2 \cdot P_{\Phi_k, X_k}^2(x). \end{aligned}$$

Zum Abschluß dieses Abschnittes möchten wir eine weitere Fehlerabschätzung für die hierarchische Interpolation mit radialen Basisfunktionen angeben, deren Voraussetzungen aber zum Teil noch nicht hinreichend auf ihre Erfüllbarkeit untersucht werden konnten.

Die wichtigste dieser Voraussetzungen lehnt sich an die Bedingungen von Theorem 3.20 an. So fordern wir, daß

$$\hat{f} - \hat{s}_{f,1} - \dots - \hat{s}_{f,j} = \varphi_{j+1, \delta_{j+1}} \hat{h}_{f-s_{f,1}-\dots-s_{f,j}}$$

mit $h_{f-s_{f,1}-\dots-s_{f,j}} \in L_2(\mathbb{R}^d)$ und $\text{supp}(h_{f-s_{f,1}-\dots-s_{f,j}}) \subseteq \Omega$ für alle $j = 1, \dots, M-1$ erfüllt ist.

Mit dieser Voraussetzung können wir Satz 3.21 etwas verallgemeinern.

Satz 4.11 Sei $\hat{f} - \hat{s}_{f,1} - \dots - \hat{s}_{f,j} = \varphi_{j+1, \delta_{j+1}} \hat{h}_{f-s_{f,1}-\dots-s_{f,j}}$ mit $h_{f-s_{f,1}-\dots-s_{f,j}} \in L_2(\mathbb{R}^d)$ und $\text{supp}(h_{f-s_{f,1}-\dots-s_{f,j}}) \subseteq \Omega$ für alle $j = 0, \dots, M-1$. Dann gilt

$$\|f - s_{f,1} - \dots - s_{f,k}\|_{\Phi_{k, \delta_k}} \leq \|f - s_{f,1} - \dots - s_{f,k-1}\|_{\Phi_{k, \delta_k} * \Phi_{k, \delta_k}} \|P_{\Phi_{k, \delta_k}, X_k}\|_{L_2(\Omega)}$$

für $k \in \{1, 2, \dots, M\}$.

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} & \|f - s_{f,1} - \dots - s_{f,j}\|_{\Phi_{j, \delta_j}}^2 \\ &= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{(\hat{f} - \hat{s}_{f,1} - \dots - \hat{s}_{f,j})(\omega) \overline{(\hat{f} - \hat{s}_{f,1} - \dots - \hat{s}_{f,j-1})(\omega)}}{\varphi_{j, \delta_j}(\omega)} d\omega \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} (f - s_{f,1} - \dots - s_{f,j})(\omega) \overline{\left(\frac{\hat{f} - \hat{s}_{f,1} - \dots - \hat{s}_{f,j-1}}{\varphi_{j, \delta_j}} \right)^\vee}(\omega) d\omega \\ &= \int_{\Omega} (f(\omega) - s_{f,1}(\omega) - \dots - s_{f,j}(\omega)) \overline{h_{f-s_{f,1}-\dots-s_{f,j-1}}(\omega)} d\omega \\ &\leq \|f - s_{f,1} - \dots - s_{f,j}\|_{L_2(\Omega)} \cdot \|h_{f-s_{f,1}-\dots-s_{f,j-1}}\|_{L_2(\Omega)} \\ &= \|f - s_{f,1} - \dots - s_{f,j}\|_{L_2(\Omega)} \cdot \|f - s_{f,1} - \dots - s_{f,j-1}\|_{\Phi_{j, \delta_j} * \Phi_{j, \delta_j}}. \end{aligned}$$

Interpolieren wir $f - s_{f,1} - \dots - s_{f,j}$ auf dem Datensatz X_j durch die Null-Funktion, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \|f - s_{f,1} - \dots - s_{f,j}\|_{L_2(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} |f(x) - s_{f,1}(x) - \dots - s_{f,j}(x)|^2 dx \\ &\leq \|f - s_{f,1} - \dots - s_{f,j}\|_{\Phi_{j, \delta_j}}^2 \cdot \|P_{\Phi_{j, \delta_j}, X_j}\|_{L_2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung. \square

Das folgende Theorem zeigt uns eine neue Form der finalen Fehlerabschätzung der hierarchischen Interpolation.

Theorem 4.12 Seien für $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ und die radiale Basisfunktion Φ_{1, δ_1} die Voraussetzungen von Theorem 3.20 erfüllt. Weiterhin gelte

$$\hat{f} - \hat{s}_{f,1} - \dots - \hat{s}_{f,j} = \varphi_{j+1, \delta_{j+1}} \hat{h}_{f-s_{f,1}-\dots-s_{f,j}}$$

mit $h_{f-s_{f,1}-\dots-s_{f,j}} \in L_2(\mathbb{R}^d)$ und $\text{supp}(h_{f-s_{f,1}-\dots-s_{f,j}}) \subseteq \Omega$ für alle $j = 1, \dots, M-1$. Für die verallgemeinerten Fouriertransformierten gelte ferner

$$0 \leq L_j^2 \varphi_{j, \delta_j}(\omega) \leq \varphi_{j+1, \delta_{j+1}}^2, \quad L_j > 0, \quad j = 1, \dots, M-1 \quad \text{für alle } \omega \in \mathbb{R}^d.$$

Dann kann der Fehler der hierarchischen Interpolation an f abgeschätzt werden durch

$$\begin{aligned} & |(f - s_{f,1} - \dots - s_{f,k})(x)|^2 \\ & \leq \frac{1}{L_{k-1}^2} \frac{1}{L_{k-2}^2} \cdots \frac{1}{L_1^2} \|f\|_{\Phi_{1, \delta_1} * \Phi_{1, \delta_1}}^2 \|P_{\Phi_{k, \delta_k}, X_k}\|_{L_2(\Omega)}^2 \|P_{\Phi_{k-1, \delta_{k-1}}, X_{k-1}}\|_{L_2(\Omega)}^2 \cdots \\ & \quad \cdots \|P_{\Phi_{2, \delta_2}, X_2}\|_{L_2(\Omega)}^2 \|P_{\Phi_{1, \delta_1}, X_1}\|_{L_2(\Omega)}^2 P_{\Phi_{k, \delta_k}, X_k}^2(x) \end{aligned}$$

für $k \in \{1, 2, \dots, M\}$.

Beweis: Mit den obigen Voraussetzungen gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned}
& |(f - s_{f,1} - \dots - s_{f,k})(x)|^2 \\
& \leq \|f - s_{f,1} - \dots - s_{f,k}\|_{\Phi_k, \delta_k}^2 \cdot P_{\Phi_k, \delta_k, X_k}^2(x) \\
& \leq \|f - s_{f,1} - \dots - s_{f,k-1}\|_{\Phi_k, \delta_k * \Phi_k, \delta_k}^2 \|P_{\Phi_k, \delta_k, X_k}\|_{L_2(\Omega)}^2 \cdot P_{\Phi_k, \delta_k, X_k}^2(x) \\
& \leq \frac{1}{L_{k-1}^2} \|f - s_{f,1} - \dots - s_{f,k-1}\|_{\Phi_{k-1}, \delta_{k-1}}^2 \|P_{\Phi_k, \delta_k, X_k}\|_{L_2(\Omega)}^2 \cdot P_{\Phi_k, \delta_k, X_k}^2(x) \\
& \leq \frac{1}{L_{k-1}^2} \frac{1}{L_{k-2}^2} \|f - s_{f,1} - \dots - s_{f,k-2}\|_{\Phi_{k-2}, \delta_{k-2}}^2 \cdot \\
& \quad \|P_{\Phi_k, \delta_k, X_k}\|_{L_2(\Omega)}^2 \|P_{\Phi_{k-1}, \delta_{k-1}, X_{k-1}}\|_{L_2(\Omega)}^2 \cdot P_{\Phi_k, \delta_k, X_k}^2(x) \\
& \quad \vdots \\
& \leq \frac{1}{L_{k-1}^2} \frac{1}{L_{k-2}^2} \dots \frac{1}{L_1^2} \|f - s_{f,1}\|_{\Phi_1, \delta_1}^2 \cdot \\
& \quad \|P_{\Phi_k, \delta_k, X_k}\|_{L_2(\Omega)}^2 \|P_{\Phi_{k-1}, \delta_{k-1}, X_{k-1}}\|_{L_2(\Omega)}^2 \dots \|P_{\Phi_2, \delta_2, X_2}\|_{L_2(\Omega)}^2 \cdot P_{\Phi_k, \delta_k, X_k}^2(x) \\
& \leq \frac{1}{L_{k-1}^2} \frac{1}{L_{k-2}^2} \dots \frac{1}{L_1^2} \|f\|_{\Phi_1, \delta_1 * \Phi_1, \delta_1}^2 \cdot \\
& \quad \|P_{\Phi_k, \delta_k, X_k}\|_{L_2(\Omega)}^2 \dots \|P_{\Phi_2, \delta_2, X_2}\|_{L_2(\Omega)}^2 \|P_{\Phi_1, \delta_1, X_1}\|_{L_2(\Omega)}^2 \cdot P_{\Phi_k, \delta_k, X_k}^2(x).
\end{aligned}$$

□

Das Problem, unter welchen Umständen die Voraussetzungen für diese Form der Fehlerabschätzung erfüllt sind, soll hier nicht weiter betrachtet werden. Sicher wird eine nähere Untersuchung dieser Voraussetzungen Gegenstand zukünftiger Überlegungen sein.

4.4 Interpolation mit bandbreitenbeschränkten Funktionen

Einige der folgenden Resultate sind aus dem Oberseminar von Herrn Prof. Dr. R. Schaback vom WS 94/95 bekannt. Zuerst geben wir eine Funktion $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f \in L_1(\mathbb{R}^d) \cap L_2(\mathbb{R}^d)$ vor, so daß die Fouriertransformierte \hat{f} aus dem Raum $L_1(\mathbb{R}^d)$ aller absolut integrierbaren Funktionen stammt. Nach den einführenden Kapiteln über die Fouriertransformation wissen wir, daß auch $\hat{f} \in L_2(\mathbb{R}^d)$. Weiterhin sei

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(\omega)|^2 \cdot \|\omega\|^{d+\beta} d\omega =: c_{d+\beta}^2(f) < \infty$$

gefordert.

Definieren wir nun eine (bandbreitenbeschränkte) Funktion $f_K : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$\hat{f}_K(\omega) = \left\{ \begin{array}{ll} \hat{f}(\omega) & : K_0 \leq \|\omega\| < K_\infty \\ 0 & : \text{sonst} \end{array} \right\}$$

für $K_0 \in [0, \infty)$ und $K_\infty \in (K_0, \infty]$.

Infolge von $\hat{f}_K \in L_2(\mathbb{R}^d)$ haben wir $f_K \in L_2(\mathbb{R}^d)$.

Um $f - f_K$ punktweise zu beschränken, bedient man sich des folgenden Satzes.

Satz 4.13 Mit $f \in L_1(\mathbb{R}^d) \cap L_2(\mathbb{R}^d)$, $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R}^d)$, $c_{d+\beta}^2(f) < \infty$ und beliebiges $\epsilon > 0$ gilt für hinreichend kleines K_0 und hinreichend großes K_∞

$$|f(x) - f_K(x)| \leq \epsilon \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^d.$$

Beweis:

$$\begin{aligned} (2\pi)^d |f(x) - f_K(x)| &\leq \int_{\|\omega\| < K_0} |\hat{f}(\omega)| d\omega + \int_{\|\omega\| \geq K_\infty} |\hat{f}(\omega)| d\omega \\ &\leq \|\hat{f}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \cdot K_0^{d/2} \cdot \text{vol}(\mathcal{K}_1, \mathbb{R}^d)^{1/2} \\ &\quad + c_{d+\beta}(f) \left(\int_{\|\omega\| \geq K_\infty} \|\omega\|^{-d-\beta} d\omega \right)^{1/2} \end{aligned}$$

wobei $\text{vol}(\mathcal{K}_1, \mathbb{R}^d)$ das Volumen der Einheitskugel \mathcal{K}_1 ist.

Für hinreichend kleines K_0 und hinreichend großes K_∞ folgt die Behauptung. \square

Funktionen $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ approximieren wir durch Translationen der (skalierten Version der) radialen Basisfunktion Φ um Punkte aus X . Wie in den vorangegangenen Abschnitten sei die Skalierung gegeben durch $\Phi_\delta(\cdot) = \Phi(\cdot/\delta)$ beziehungsweise $\varphi_\delta(\cdot) = \delta^d \varphi(\delta \cdot)$ für $\delta > 0$.

Seien nun Konstanten $c_0 \geq 0$, $c_\infty \in (0, \infty]$, $C > 0$, $\beta > 0$ und $\gamma > 0$ vorausgesetzt, so daß mit $c_0 < c_\infty$ für die radiale Basisfunktion Φ beziehungsweise ihre (verallgemeinerte) Fouriertransformierte φ gelte

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) &\geq \gamma && \text{für } \|\omega\| \leq c_0 \\ \varphi(\omega) &\geq C^2 \|\omega\|^{-d-\beta} && \text{für } c_0 \leq \|\omega\| \leq c_\infty. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Im Fall $c_0 > 0$, $\delta \rightarrow 0$ gibt es Ärger, da dann $K_0 \geq c_0/\delta$ groß werden kann. Hier müssen wir Einschränkungen an die radiale Basisfunktion stellen; so verwenden wir zum Beispiel Basisfunktionen mit $c_0 = 0$.

Tabelle 4 gibt uns Auskunft über die Wahl der Konstanten c_0 und c_∞ für einige Basisfunktionen, wobei die Tabelle aus dem Oberseminar vom WS 94/95 um die Wendland-Funktionen und den Euklidischen Hut erweitert wurde.

$\Phi(x) = \phi(r), r = \ x\ $	c_0	c_∞
$r^\beta, \beta \notin 2\mathbb{N}$	0	∞
$r^\beta \log r$ Thin-Plate Spline	0	∞
$(c^2 + r^2)^{\beta/2}, \beta > 0$ Multiquadrics	0	$0 < \cdot < \infty$
$(c^2 + r^2)^{\beta/2}$ inverse Multiquadrics	$0 < \cdot < \infty$	$0 < \cdot < \infty$
$e^{-\alpha r^2}$ Gaussians	$0 < \cdot < \infty$	$0 < \cdot < \infty$
Wendland- Funktionen	$0 < \cdot < \infty$	∞
Euklidischer Hut	$0 < \cdot < \infty$	∞

Tabelle 4:

Um

$$\|f\|_{\Phi_\delta}^2 = \delta^{-d}(2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(\omega)|^2 / \varphi(\delta\omega) d\omega$$

abschätzen zu können, benötigen wir noch einige weitere Informationen. So ist zum Beispiel unklar, wie sich der Term $|\hat{f}(\omega)|^2 / \varphi(\delta\omega)$ im Fall $c_\infty < \infty$ für $\|\delta\omega\| > c_\infty$ verhält.

Aus diesem Grund betrachten wir nun Funktionen $g \in L_2(\mathbb{R}^d)$ mit der Forderung

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{g}(\omega)|^2 \|\omega\|^{d+\beta} d\omega = c_{d+\beta}^2(g) < \infty$$

und einer beschränkten Bandbreite

$$\hat{g}(\omega) = 0 \quad \text{für } \|\omega\| \geq K_\infty = \left\{ \begin{array}{ll} \infty & : c_\infty = \infty \\ > 0 & : \text{sonst} \end{array} \right\}. \quad (4.12)$$

Da wir den Term $|\hat{g}(\omega)|^2 / \varphi(\delta\omega)$ im Fall $c_\infty < \infty$ auch für $\delta\|\omega\| > c_\infty$ abschätzen

wollen, führt uns dieses zu der Bedingung

$$K_\infty \leq \frac{c_\infty}{\delta} \quad \text{für } c_\infty < \infty .$$

Mit $g \in \mathcal{F}_{\Phi_\delta}$ bekommen wir

$$\begin{aligned} \|g\|_{\Phi_\delta}^2 &= \delta^{-d} (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{g}(\omega)|^2 / \varphi(\delta\omega) d\omega \\ &\leq \frac{(2\pi\delta)^{-d}}{\gamma} \int_{\delta\|\omega\| \leq c_0} |\hat{g}(\omega)|^2 d\omega \\ &\quad + (2\pi)^{-d} \delta^\beta C^{-2} \int_{c_0 \leq \delta\|\omega\| \leq c_\infty} |\hat{g}(\omega)|^2 \|\omega\|^{d+\beta} d\omega \\ &\quad + (2\pi\delta)^{-d} \int_{c_\infty \leq \delta\|\omega\|} |\hat{g}(\omega)|^2 / \varphi(\delta\omega) d\omega \\ &\leq \frac{(2\pi\delta)^{-d}}{\gamma} \int_{\|\omega\| \leq c_0/\delta} |\hat{g}(\omega)|^2 d\omega \\ &\quad + (2\pi)^{-d} \delta^\beta C^{-2} \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{g}(\omega)|^2 \|\omega\|^{d+\beta} d\omega \\ &\leq \frac{(2\pi)^{-d} \delta^{-d}}{\gamma} \|\hat{g}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 (1 - \delta_{0,c_0}) + (2\pi)^{-d} \delta^\beta C^{-2} c_{d+\beta}^2(g) , \end{aligned} \quad (4.13)$$

mit geeignetem δ_{0,c_0} .

Wir sind an Voraussetzungen interessiert, die uns erlauben, $\|g\|_{\Phi_\delta}$ für $\delta \rightarrow 0$ zu beschränken. Im Fall $c_0 = 0$ ist das leicht zu erreichen, da dann der erste Summand keinen Ärger mehr bereitet. Aber für $c_0 > 0$ benötigen wir eine Beschränkung der Frequenz in folgender Weise

$$\hat{g}(\omega) = 0 \quad \text{für } \|\omega\| < K_0 \quad (4.14)$$

und die Forderung

$$K_0 \geq c_0/\delta$$

an δ , denn dann verschwindet der erste Summand in (4.13).

Folglich haben wir für $0 < c_0 < c_\infty < \infty$ die Bedingungen

$$\frac{c_0}{K_0} \leq \delta \leq \frac{c_\infty}{K_\infty} .$$

Für diese $\delta > 0$ und der Funktion $g \in L_2(\mathbb{R}^d)$, die $c_{d+\beta}^2(g) < \infty$, sowie (4.12) und (4.14) erfüllt, bekommen wir

$$\|g\|_{\Phi_\delta}^2 \leq (2\pi)^{-d} \delta^\beta C^{-2} \cdot c_{d+\beta}^2(g) .$$

Kommen wir nun zur Approximation im skalierten Funktionenraum $\mathcal{F}_{\Phi_\delta}$. Mit Hilfe unserer gewonnenen Erkenntnisse können wir die Endabschätzung des Fehlers bei der Interpolation von Funktionen $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ durch radiale Basisfunktionen Φ_δ zusammenbauen.

Ausgehend von der Definition der radialen Basisfunktion Φ nehmen wir zuerst ein $\beta > 0$ und verlangen, daß f den Bedingungen

$$f \in L_1(\mathbb{R}^d) \cap L_2(\mathbb{R}^d) \quad \text{mit } \hat{f} \in L_1(\mathbb{R}^d) \quad \text{und} \\ \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(\omega)|^2 \|\omega\|^{d+\beta} d\omega = c_{d+\beta}^2(f) < \infty$$

für dieses β genügt.

Für beliebiges $\epsilon > 0$ wählen wir K_0 und K_∞ , so daß

$$\|f - f_K\|_\infty \leq \epsilon/2$$

und

$$K_0 = 0, \quad \text{falls } c_0 = 0 \\ K_\infty = \infty, \quad \text{falls } c_\infty = \infty.$$

Im Fall $c_0 > 0$, $\delta \rightarrow 0$ können Probleme auftreten, da dann $K_0 \geq c_0/\delta$ zu groß werden kann. Dieses Problem umgehen wir, indem wir in diesem Fall die Wahl der radialen Basisfunktion einschränken und nur Basisfunktionen Φ verwenden, bei denen $c_0 = 0$. Auf die Kosten von C in (4.11) wählen wir nun die (nicht festen) Werte von c_0 und c_∞ , so daß für $\delta > 0$ ein nicht leeres Intervall existiert, wobei δ den Bedingungen

$$c_0 \leq \delta K_0, \quad \delta K_\infty \leq c_\infty$$

genüge. Falls für die gegebene Funktion Φ , $c_0 = 0$ oder $c_\infty = \infty$ vorgegeben ist, verändern wir diese Werte nicht. Durch die Bedingung (4.11) wird ebenfalls der Wert von $\gamma > 0$ festgesetzt. So bekommen wir

$$\|f_K\|_{\Phi_\delta}^2 \leq (2\pi)^{-d} \delta^\beta C^{-2} c_{d+\beta}^2(f_K).$$

Jetzt berechnen wir die Interpolante s_{f_K} zu f_K durch Φ_δ auf dem endlichen Satz $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subset \mathbb{R}^d$ von Stützstellen. Auf diese Weise erhalten wir eine Fehlerabschätzung der Form

$$|f_K(x) - s_{f_K}(x)| \leq \|f_K\|_{\Phi_\delta} \cdot P_{\Phi_\delta, X}(x) \\ \leq (2\pi)^{-d/2} \delta^{\beta/2} C^{-1} \cdot c_{d+\beta}(f_K) \cdot P_{\Phi, X/\delta}(x/\delta).$$

Eine Fehlerabschätzung für die Funktion $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f \in L_1(\mathbb{R}^d) \cap L_2(\mathbb{R}^d)$, $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R}^d)$ und $c_{d+\beta}^2(f) < \infty$ lautet somit

$$|f(x) - s_{f_K}(x)| \leq |f(x) - f_K(x) + f_K(x) - s_{f_K}(x)| \\ \leq |f(x) - f_K(x)| + |f_K(x) - s_{f_K}(x)| \\ \leq \|f - f_K\|_\infty + |f_K(x) - s_{f_K}(x)| \\ \leq \epsilon/2 + (2\pi)^{-d/2} \delta^{\beta/2} \cdot C^{-1} \cdot c_{d+\beta}(f_K) \cdot P_{\Phi, X/\delta}(x/\delta) \\ \leq \epsilon/2 + (2\pi)^{-d/2} \delta^{\beta/2} \cdot C^{-1} \cdot c_{d+\beta}(f_K) \cdot F_{\Phi, \rho}^{1/2} \left(\frac{1}{\delta} h_{\rho\delta, X}(x) \right).$$

Die monotone Funktion $F_{\Phi,\rho}^{1/2}$ besitzt eine Inverse $F_{\Phi,\rho}^{-1/2}$ und falls

$$h_{\rho\delta,X}(x) \leq \delta \cdot F_{\Phi,\rho}^{-1/2} \left(\frac{\epsilon \cdot (2\pi)^{d/2} C}{2 \cdot c_{\delta+\beta}(f_K)} \delta^{-\beta/2} \right)$$

gilt, so folgt

$$\begin{aligned} |f(x) - s_{f_K}(x)| &\leq \epsilon/2 + (2\pi)^{-d/2} \delta^{\beta/2} \cdot C^{-1} \cdot c_{d+\beta}(f_K) \cdot \\ &\quad F_{\Phi,\rho}^{1/2} \left(\frac{1}{\delta} F_{\Phi,\rho}^{-1/2} \left(\frac{\epsilon(2\pi)^{d/2} C}{2 \cdot c_{d+\beta}(f_K)} \delta^{-\beta/2} \right) \right) \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Unser nächster Schritt wird darin bestehen, die soeben gewonnenen Resultate auf die hierarchische Interpolation mit radialen Basisfunktionen anzuwenden.

Bei der Fehlerabschätzung der hierarchischen Interpolation haben wir im vorangehenden Abschnitt unter anderem vorausgesetzt, daß die zu interpolierende Funktion $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ aus dem Raum $\mathcal{F}_{\Phi_1,\delta_1}$ und gleichzeitig aus dem Funktionenraum $\mathcal{F}_{\Phi_1,\delta_1 * \Phi_1,\delta_1}$ stammt.

Da wir nun aber die bandbreitenbeschränkte Funktion f_K approximieren, müssen die Forderungen $f_K \in \mathcal{F}_{\Phi_1,\delta_1}$ und $f_K \in \mathcal{F}_{\Phi_1,\delta_1 * \Phi_1,\delta_1}$ erfüllt sein.

Bem. Mit $f \in \mathcal{F}_{\Phi_1,\delta_1}$ folgt $f_K \in \mathcal{F}_{\Phi_1,\delta_1}$.

Liegt f im Raum $\mathcal{F}_{\Phi_1,\delta_1 * \Phi_1,\delta_1}$, so liegt auch f_K in $\mathcal{F}_{\Phi_1,\delta_1 * \Phi_1,\delta_1}$.

Beweis: $f \in \mathcal{F}_{\Phi_1,\delta_1}$, d.h.

$$\infty > \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(\omega)|^2 / \varphi_{1,\delta_1}(\omega) d\omega \geq \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}_K(\omega)|^2 / \varphi_{1,\delta_1}(\omega) d\omega.$$

Hieraus ersehen wir dann $f_K \in \mathcal{F}_{\Phi_1,\delta_1}$.

Analog beweisen wir den zweiten Teil der Bemerkung. □

Außerdem setzen wir jetzt voraus, daß die folgende Voraussetzung (V_{f_K})

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}_K(\omega)|^2 \cdot \|\omega\|^{2d+2\beta} d\omega = c_{2d+2\beta}^2(f_K) < \infty$$

erfüllt sei.

Die (verallgemeinerte) Fouriertransformierte φ_{1,δ_1} von Φ_{1,δ_1} erfülle die Bedingung (4.11). Durch $c_0 \leq \delta_1 K_0$ und $\delta_1 K_\infty \leq c_\infty$ läßt sich damit die nachstehende Abschätzung zeigen:

$$\begin{aligned} \|f_K\|_{\Phi_1,\delta_1 * \Phi_1,\delta_1}^2 &= (2\pi)^{-d} \delta_1^{-d} \delta_1^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{f}_K(\omega)|^2}{\varphi_1(\delta_1\omega)\varphi_1(\delta_1\omega)} d\omega \\ &\leq \delta_1^{-2d} (2\pi)^{-d} \frac{1}{\gamma^2} \int_{\delta_1\|\omega\| \leq c_0} |\hat{f}_K(\omega)|^2 d\omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (2\pi)^{-d} \delta_1^{2\beta} C^{-4} \int_{c_0 \leq \delta_1 \|\omega\| \leq c_\infty} |\hat{f}_K(\omega)|^2 \|\omega\|^{2d+2\beta} d\omega \\
& + \delta_1^{-2d} (2\pi)^{-d} \int_{c_\infty \leq \delta_1 \|\omega\|} \frac{|\hat{f}_K(\omega)|^2}{\varphi_1(\delta_1 \omega) \varphi_1(\delta_1 \omega)} d\omega \\
\leq & \delta_1^{-2d} (2\pi)^{-d} \gamma^{-2} \int_{\delta_1 \|\omega\| \leq c_0} |\hat{f}_K(\omega)|^2 d\omega \\
& + (2\pi)^{-d} \delta_1^{2\beta} C^{-4} \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}_K(\omega)|^2 \|\omega\|^{2d+2\beta} d\omega \\
= & (2\pi)^{-d} \delta_1^{2\beta} C^{-4} \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}_K(\omega)|^2 \|\omega\|^{2d+2\beta} d\omega \\
= & (2\pi)^{-d} \delta_1^{2\beta} C^{-4} \cdot c_{2d+2\beta}^2(f_K).
\end{aligned}$$

In gleicher Weise wie in den Abschnitten 4.1 und 4.3 interpolieren wir nun die Funktion f_K . Dabei sollen alle dort getroffenen Aussagen Gültigkeit behalten. Auf diesem Wege erhalten wir für die Fehlerabschätzung der hierarchischen Interpolation unter Zuhilfenahme bandbreitenbeschränkter Funktionen das folgende Theorem.

Theorem 4.14 Sei $f_K : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$\hat{f}_K(\omega) = \left\{ \begin{array}{ll} \hat{f}(\omega) & : K_0 \leq \|\omega\| < K_\infty \\ 0 & : \text{sonst} \end{array} \right\}.$$

Für beliebiges $\epsilon > 0$ sei K_0 und K_∞ so gewählt, daß

$$\|f - f_K\|_\infty \leq \epsilon.$$

Außerdem gelte

$$\frac{c_0}{K_0} \leq \delta_1 \leq \frac{c_\infty}{K_\infty}.$$

Seien die Voraussetzung (V_{f_K}) , sowie für f_K und Φ_{1,δ_1} die Voraussetzungen von Theorem 3.20 erfüllt. Die (verallgemeinerte) Fouriertransformierte φ_{1,δ_1} von Φ_{1,δ_1} erfülle die Bedingung (4.11). Ferner gelte

$$0 \leq K_j^2 \varphi_{j,\delta_j}(\omega) \leq \varphi_{j+1,\delta_{j+1}}(\omega), \quad K_j > 0, \quad j = 1, \dots, M-1 \quad \text{für alle } \omega \in \mathbb{R}^d.$$

Daraus ergibt sich die punktweise Fehlerabschätzung

$$\begin{aligned}
& |f(x) - s_{f_K,1}(x) - \dots - s_{f_K,M}(x)| \\
& \leq \epsilon + \frac{1}{K_1} \frac{1}{K_2} \cdots \frac{1}{K_{M-1}} \|f\|_{\Phi_{1,\delta_1} * \Phi_{1,\delta_1}} \|P_{\Phi_{1,\delta_1}, X_1}\|_{L_2(\Omega)} \cdot P_{\Phi_{M,\delta_M}, X_M}(x).
\end{aligned}$$

Beweis: Mit Blick auf Theorem 4.7 des Abschnitts 4.3 erhalten wir die Behauptung:

$$\begin{aligned}
& |f(x) - s_{f_K,1}(x) - \dots - s_{f_K,M}(x)| \\
& \leq |f(x) - f_K(x)| + |f_K(x) - s_{f_K,1}(x) - \dots - s_{f_K,M}(x)| \\
& \leq \epsilon + \frac{1}{K_1} \cdots \frac{1}{K_{M-1}} P_{\Phi_{M,\delta_M}, X_M}(x) \cdot \|f_K\|_{\Phi_{1,\delta_1} * \Phi_{1,\delta_1}} \|P_{\Phi_{1,\delta_1}, X_1}\|_{L_2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

□

Wir können die obige Fehlerabschätzung noch ausweiten, indem wir die Abschätzungen

$$\|f_K\|_{\Phi_{1,\delta_1}}^2 \leq (2\pi)^{-d} \delta_1^\beta C^{-2} \cdot c_{d+\beta}^2(f_K) \quad \text{und}$$

$$\|f_K\|_{\Phi_{1,\delta_1} * \Phi_{1,\delta_1}}^2 \leq (2\pi)^{-d} \delta_1^{2\beta} C^{-4} \cdot c_{2d+2\beta}(f_K)$$

einsetzen.

4.5 Beispiele

4.5.1 Erstes Beispiel

Anhand des folgenden Beispiels wollen wir die Vorgehensweise der hierarchischen Interpolation mit radialen Basisfunktionen verdeutlichen. Zur Klärung der Vorgehensweise scheinen uns hier 3 Schritte als ausreichend, das heißt $M = 3$.

Wir werden unter anderem Plots der Interpolanten der einzelnen Schritte angeben. In den folgenden Bildsequenzen sind die zugrundeliegenden Stützstellen X_1 , X_2 und X_3 dargestellt.

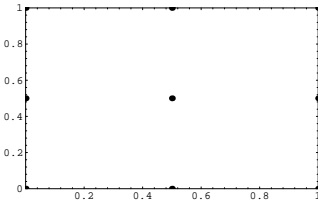


Bild 1

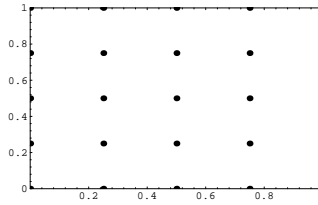


Bild 2

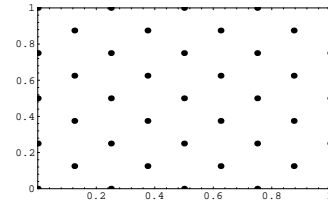


Bild 3

Als radiale Basisfunktionen wählen wir die Gaussians in der Raumdimension $d = 2$. Die einzelnen Basisfunktionen seien gegeben durch

$$\begin{aligned} \Phi_{1,\delta_1}(x) &= e^{-\|x/\delta_1\|^2}, \\ \Phi_{2,\delta_2}(x) &= e^{-\|x/\delta_2\|^2} \quad \text{und} \\ \Phi_{3,\delta_3}(x) &= e^{-\|x/\delta_3\|^2}. \end{aligned}$$

Für die zugehörigen (klassischen) Fouriertransformierten ergibt sich

$$\begin{aligned} \varphi_{1,\delta_1}(\omega) &= \pi \delta_1^2 \cdot e^{-\|\delta_1 \omega\|^2/4}, \\ \varphi_{2,\delta_2}(\omega) &= \pi \delta_2^2 \cdot e^{-\|\delta_2 \omega\|^2/4} \quad \text{und} \\ \varphi_{3,\delta_3}(\omega) &= \pi \delta_3^2 \cdot e^{-\|\delta_3 \omega\|^2/4}. \end{aligned}$$

Da die Skalierungen δ_i proportional zum jeweiligen Separationsabstand q_{X_i} , $i = 1, 2, 3$, gewählt werden sollen, setzen wir

$$\begin{aligned}\delta_1 &= 1.5 \cdot q_{X_1}, \\ \delta_2 &= 1.5 \cdot q_{X_2}, \\ \delta_3 &= 1.5 \cdot q_{X_3}.\end{aligned}$$

Weisen wir K_1^2 und K_2^2 die Werte

$$\begin{aligned}K_1^2 &= \frac{\delta_2^2}{\delta_1^2} = 0.25 \quad \text{und} \\ K_2^2 &= \frac{\delta_3^2}{\delta_2^2} = 0.50013\end{aligned}$$

zu, so sind die Bedingungen

$$\begin{aligned}K_1^2 \varphi_{1,\delta_1}(\omega) &\leq \varphi_{2,\delta_2}(\omega) \quad \text{und} \\ K_2^2 \varphi_{2,\delta_2}(\omega) &\leq \varphi_{3,\delta_3}(\omega) \quad \text{für alle } \omega \in \mathbb{R}^d\end{aligned}$$

erfüllt.

Als Testfunktion dient $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, welche erklärt ist durch

$$\begin{aligned}f(x, y) &= \frac{1}{2} \exp \left[-\frac{(9x-2)^2 + (9y-2)^2}{4} \right] + \frac{3}{4} \exp \left[-\frac{(9x+1)^2}{49} - \frac{9y+1}{10} \right] \\ &+ \frac{1}{2} \exp \left[-\frac{(9x-7)^2 + (9y-3)^2}{4} \right] - \frac{1}{5} \exp \left[-(9x-4)^2 - (9y-7)^2 \right].\end{aligned}$$

Sie wurde Dyn/Levin/Rippa [2] entnommen und ist in Bild 4 zu sehen.

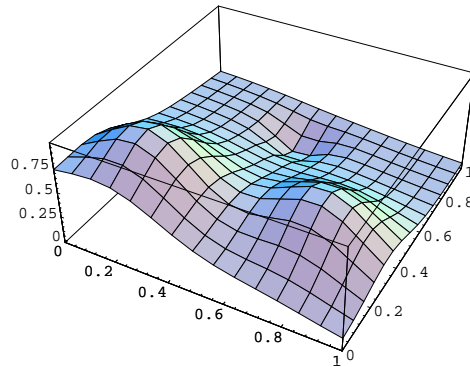


Bild 4

Die Berechnung der einzelnen Interpolanten $s_{f,1}$, $s_{f,2}$ und $s_{f,3}$ erfolgte gemäß der beschriebenen Weise aus den vorangegangenen Abschnitten mit Hilfe des Softwaresystems *Mathematica*.

Für die Fehlerabschätzung können wir Theorem 4.7 verwenden; es ergibt sich

$$|f(x) - s_{f,1}(x) - s_{f,2}(x) - s_{f,3}(x)| \leq \frac{1}{K_1} \frac{1}{K_2} \|f\|_{\Phi_{1,\delta_1} * \Phi_{1,\delta_1}} \|P_{\Phi_{1,\delta_1}, X_1}\|_{L_2(\Omega)} \cdot P_{\Phi_{3,\delta_3}, X_3}(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^d.$$

In den Bildern 5 und 6 sind die Interpolanten $s_{f,1}$ und $s_{f,1} + s_{f,2}$ zu sehen.

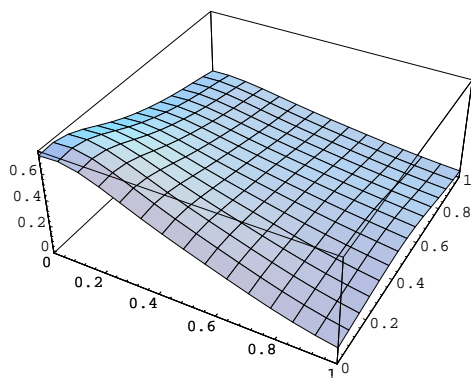


Bild 5

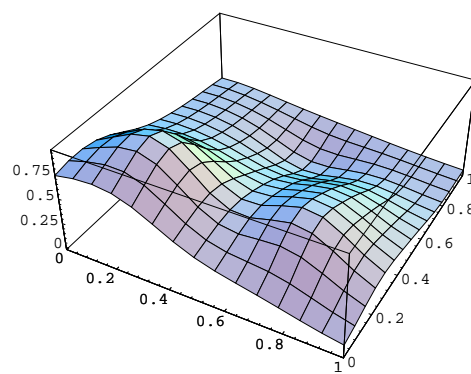


Bild 6

Bild 7 zeigt die endgültige Interpolante $s_f = s_{f,1} + s_{f,2} + s_{f,3}$ zur Funktion f .

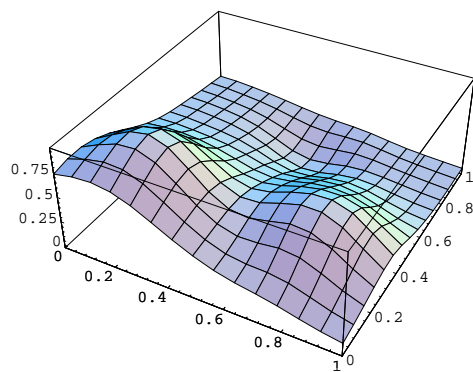


Bild 7

Der Approximationsfehler $f - s_{f,1}$, $f - (s_{f,1} + s_{f,2})$ und $f - s_f$ wird in den folgenden

3 Bildern dargestellt.

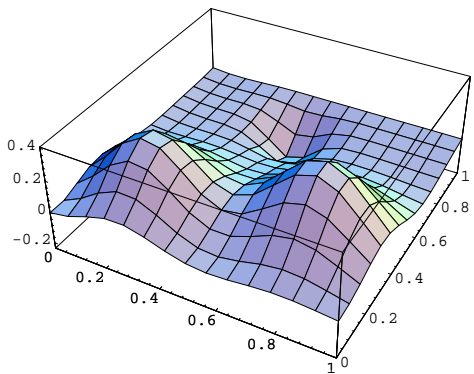


Bild 8

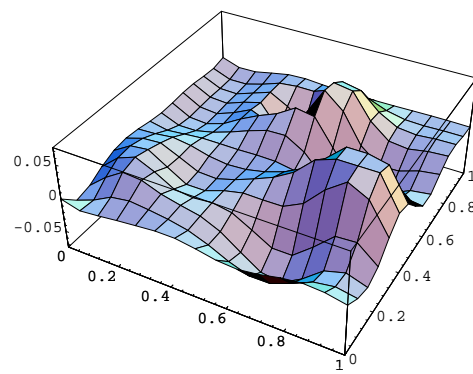


Bild 9

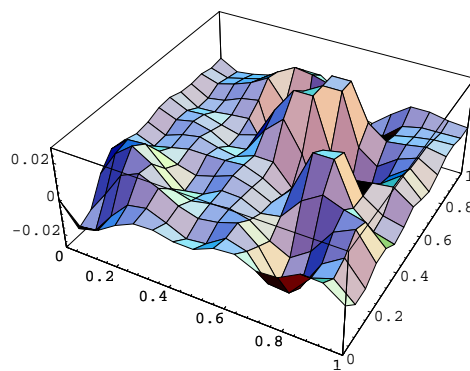


Bild 10

4.5.2 Zweites Beispiel

In unserem zweiten Beispiel verwenden wir als Testfunktion Frankes Funktion (Bild 11)

$$f(x, y) = 0.75e^{-0.25(9x-2)^2-0.25(9y-2)^2} + 0.75e^{-(9x-2)^2/49-(9y-2)^2/10} \\ + 0.5e^{-0.25(9x-7)^2-0.25(9y-3)^2} - 0.2e^{-(9x-4)^2-(9y-7)^2}$$

als eine bekannte Standardfunktion, die für Untersuchungen von Interpolationsmethoden verwendet wird.

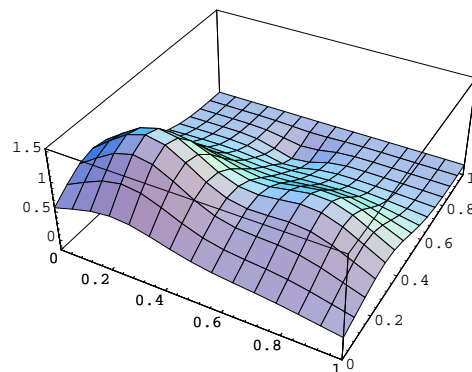


Bild 11

Wie bereits im letzten Beispiel beschränken wir uns wieder auf 3 Interpolationsschritte. In den Bildern 12, 13 und 14 sind die Datensätze $X = X_1, X_2$ und X_3 dargestellt, wobei X_1 aus einem Gitter von 9 Stützstellen, X_2 aus einem Gitter von 49 Stützstellen und X_3 aus einem Gitter von 113 Stützstellen besteht.

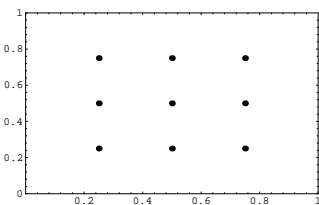


Bild 12

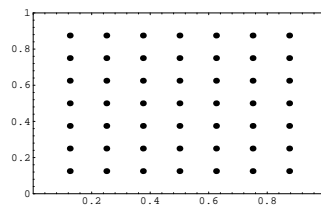


Bild 13

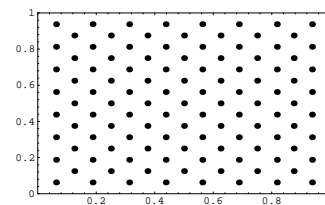


Bild 14

Als radiale Basisfunktion wählen wir die Wendland-Funktion

$$\Phi_1(r) = \Phi_2(r) = \Phi_3(r) = \Phi(r) = (1 - r)_+^4(4r - 1).$$

Die Bestimmung der Skalierung δ_i hat einen entscheidenden Einfluß auf die Rechenzeit und die Qualität der Approximation. Floater und Iske [3] haben sich mit der Wahl der optimalen Skalierung auseinandergesetzt. Wir wollen aber der Kürze wegen an dieser

Stelle nicht näher auf die optimale Wahl von δ_i eingehen und δ_i proportional zum jeweiligen Separationsabstand q_{X_i} wählen.

Die Fouriertransformierte der Wendland-Funktion

$$\Phi(r) = (1 - r)_+^4 (4r - 1)$$

lautet

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) &= \frac{2! 3! 2^{2+1/2}}{\sqrt{\pi}} \omega^{-8} f_2(\omega) \quad \text{mit} \\ f_2(\omega) &= -3 + \frac{\omega^2}{2} + 3 \cos(\omega) - \frac{\omega^2 \cos(\omega)}{8} + \frac{9\omega \sin(\omega)}{8}. \end{aligned}$$

Für die skalierten Versionen ergibt sich dementsprechend

$$\begin{aligned} \Phi_{j,\delta_j}(r) &= (1 - r/\delta_j)_+^4 (4r/\delta_j - 1) \quad \text{und} \\ \varphi_{j,\delta_j}(\omega) &= \delta_j^d \varphi(\delta_j \omega). \end{aligned}$$

Als Skalierung wählen wir

$$\begin{aligned} \delta_1 &= 15 \cdot q_{X_1} = 15 \cdot 0.125 \\ \delta_2 &= 15 \cdot q_{X_2} = 15 \cdot 0.0625 \\ \delta_3 &= 15 \cdot q_{X_3} = 15 \cdot 0.04419. \end{aligned}$$

Analog zu Abschnitt 4.3 setzen wir

$$\begin{aligned} K_1^2(\tilde{\delta}_1) &:= \frac{\delta_2^d}{\delta_1^d} \inf_{\omega \in \mathbb{R}^d} \frac{\varphi(\delta_2 \omega)}{\varphi(\delta_1 \omega)} \\ K_2^2(\tilde{\delta}_2) &:= \frac{\delta_3^d}{\delta_2^d} \inf_{\omega \in \mathbb{R}^d} \frac{\varphi(\delta_3 \omega)}{\varphi(\delta_2 \omega)} \end{aligned}$$

mit $\tilde{\delta}_j = \delta_{j+1}/\delta_j$ und $\delta_0 = 1$. Es wäre für die hierarchische Fehlerabschätzung von Vorteil, $K_j^2(\tilde{\delta}_j) > 1$ zu bekommen.

Aus diesem Grund möchten wir den Term $\delta_{j+1}^d/\delta_j^d \inf_{\omega \in \mathbb{R}^d} \frac{\varphi(\delta_{j+1}\omega)}{\varphi(\delta_j\omega)}$ etwas genauer betrachten. Dazu werden wir zuerst den Graphen $\varphi(\delta_{j+1}\omega)/\varphi(\delta_j\omega)$ plotten. In der Nähe der Null tritt bei der Berechnung der Effekt der Auslöschung auf, deshalb entwickeln wir hier $\varphi(\delta_{j+1}\omega)/\varphi(\delta_j\omega)$ in einer Potenzreihe. Bild 15 und Bild 16 zeigen das Verhalten von $\varphi(\delta_1\omega)/\varphi(\delta_0\omega)$ für $\delta_1 = 0.5$ und $\delta_0 = 1$.

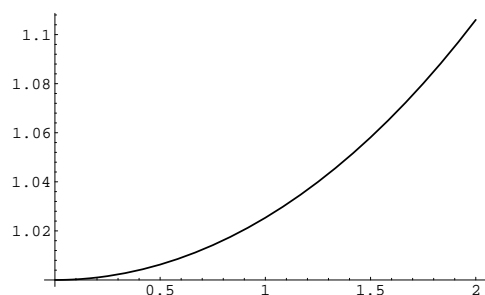


Bild 15

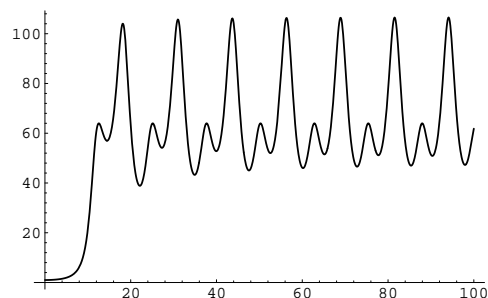


Bild 16

Aus dieser Untersuchung wird aber klar, daß das Infimum in 0 angenommen wird und somit $K_j^2(\tilde{\delta}_j) = \delta_{j+1}^d / \delta_j^d < 1$ für $\delta_{j+1} < \delta_j$ ist.

Das folgende Bild zeigt das Verhalten von

$$\varphi(\delta_{j+1}\omega) / \varphi(\delta_j\omega) = \varphi(\tilde{\delta}_j r) / \varphi(r)$$

in Abhängigkeit von $r \in \mathbb{R}^d$ und $\tilde{\delta}_j \in (0, 1]$ für $\varphi(r) = (2! 3! 2^{2+1/2} / \sqrt{\pi}) r^{-8} f_2(r)$.

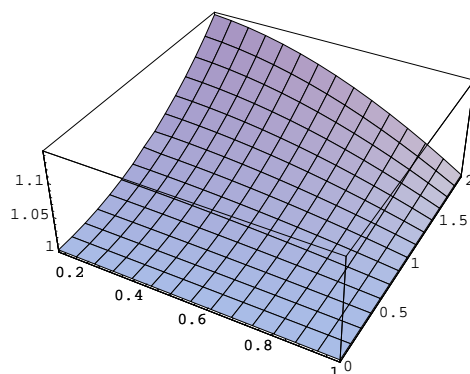


Bild 17

Durch diese Ergebnisse sind wir in der Lage, die für die Fehlerabschätzung der hierarchischen Interpolation wichtigen Werte $K_1^2(\tilde{\delta}_1)$ und $K_2^2(\tilde{\delta}_2)$ anzugeben:

$$\begin{aligned} K_1^2(\tilde{\delta}_1) &= \delta_2^d / \delta_1^d = 0.25 \\ K_2^2(\tilde{\delta}_2) &= \delta_3^d / \delta_2^d = 0.5. \end{aligned}$$

Aufgrund der Definition von $K_j^2(\tilde{\delta}_j)$ erkennen wir, daß der Wert von $K_j^2(\tilde{\delta}_j)$ durch das Verhalten der Separationsabstände $q_{X_{j+1}}$ und q_{X_j} bestimmt wird.

Die Bilder 18 bis 20 zeigen die Interpolanten s_1 , $s_1 + s_2$ und $s_f = s_1 + s_2 + s_3$.

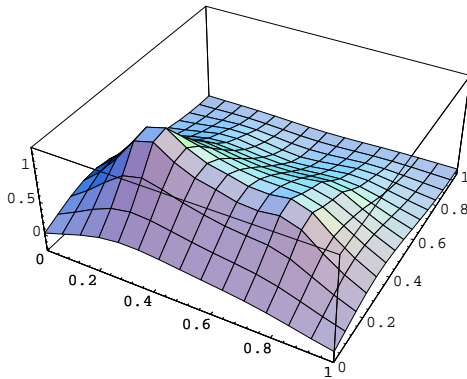


Bild 18

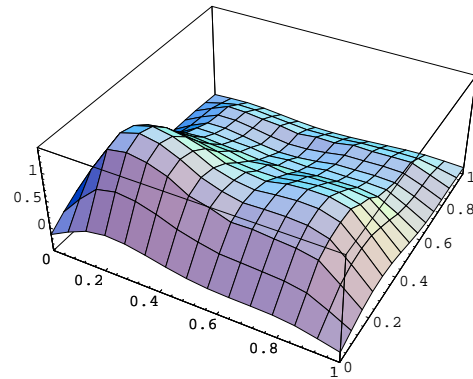


Bild 19

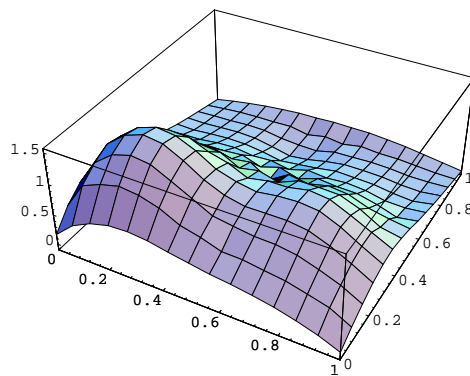


Bild 20

In den Bildern 21 bis 23 ist der Approximationsfehler $f - s_1$, $f - (s_1 + s_2)$ und $f - s_f$ dargestellt.

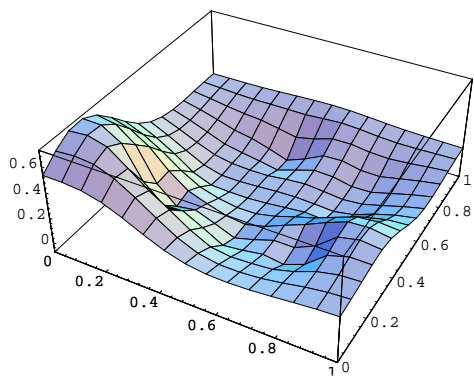


Bild 21

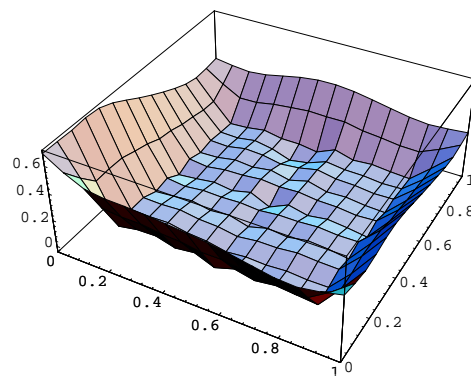


Bild 22

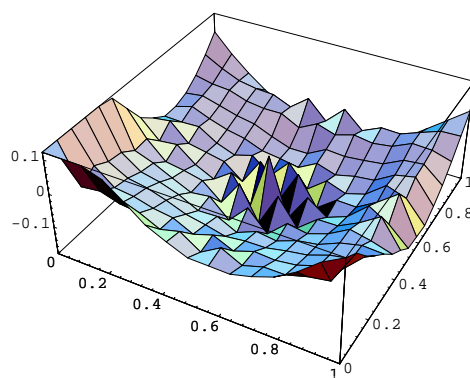


Bild 23

Bemerken möchten wir noch, daß die Interpolationsmatrix des dritten Schrittes aufgrund der Verwendung radialer Basisfunktionen mit kompaktem Träger und geeigneter Skalierung aus 3164 Nullen und 9605 Einträgen ungleich Null besteht.

Eine andere Wahl der Skalierungen δ_k , $k = 2, 3$, gemäß

$$\begin{aligned} \delta_k &= M \cdot h_{X_k, \rho} = M \sup_{x \in \Omega} \sup_{\|y-x\| \leq \rho} \min_{x_i \in X_k} \|y - x_i\| \\ &= M \sup_{x \in \Omega} h_{\rho, X_k}(x), \end{aligned}$$

ergibt $\delta_k/M \geq h_{\rho, X_k}(x)$ für alle $x \in \Omega$ und einer Konstanten M .

Unsere Erkenntnisse aus Abschnitt 3.3 führen uns so zu den Abschätzungen

$$P_{\Phi_3, \delta_3, X_3}^2(x) = P_{\Phi, X_3/\delta_3}^2(x/\delta_3)$$

$$\begin{aligned}
&\leq C^2 \cdot h_{\rho, X_3/\delta_3}^{s_\infty}(x/\delta_3) \\
&= C^2 \cdot \left(\frac{1}{\delta_3}\right)^{s_\infty} \cdot h_{\delta_3\rho, X_3}^{s_\infty}(x).
\end{aligned}$$

Ist $\delta_3 \leq 1$, so folgt $h_{\delta_3\rho, X_3}(x) \leq h_{\rho, X_3}(x)$ für alle $x \in \Omega$.

Mit Hilfe des Abschnitts 4.3 können wir bei dieser Wahl der Skalierungen den Fehler wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned}
&|(f - s_{f,1} - s_{f,2} - s_{f,3})(x)|^2 \\
&\leq \frac{1}{K_1^2(\tilde{\delta}_1)K_2^2(\tilde{\delta}_2)} \|f\|_{\Phi_{1,\delta_1} * \Phi_{1,\delta_1}}^2 \|P_{\Phi_{1,\delta_1}, X_1}\|_{L_2(\Omega)}^2 \cdot P_{\Phi_{3,\delta_3}, X_3}^2(x) \\
&\leq \frac{\delta_1^d}{M^d h_{X_{3,\rho}}^d} \|f\|_{\Phi_{1,\delta_1} * \Phi_{1,\delta_1}}^2 \|P_{\Phi_{1,\delta_1}, X_1}\|_{L_2(\Omega)}^2 \cdot C^2 \left(\frac{h_{\delta_3\rho, X_3}(x)}{\delta_3}\right)^{s_\infty} \\
&= \delta_1^d \|f\|_{\Phi_{1,\delta_1} * \Phi_{1,\delta_1}}^2 \|P_{\Phi_{1,\delta_1}, X_1}\|_{L_2(\Omega)}^2 \frac{C^2 h_{\delta_3\rho, X_3}^{s_\infty}(x)}{M^{d+s_\infty} h_{X_{3,\rho}}^{d+s_\infty}} \\
&\leq \delta_1^d \|f\|_{\Phi_{1,\delta_1} * \Phi_{1,\delta_1}}^2 \|P_{\Phi_{1,\delta_1}, X_1}\|_{L_2(\Omega)}^2 \frac{C^2 h_{X_{3,\rho}}^{s_\infty}}{M^{s_\infty} h_{X_{3,\rho}}^{s_\infty} \delta_3^d} \\
&= \frac{\delta_1^d \cdot C^2}{M^3 \delta_3^d} \|f\|_{\Phi_{1,\delta_1} * \Phi_{1,\delta_1}}^2 \|P_{\Phi_{1,\delta_1}, X_1}\|_{L_2(\Omega)}^2.
\end{aligned}$$

Bei dieser Abschätzung werden besonders gute Ergebnisse für großes M bei festem δ_1 erzielt.

Literatur

- [1] Costantinescu, F. *Distributionen und ihre Anwendungen in der Physik*. Stuttgart: Teubner, 1974.
- [2] Dyn N., D. Levin, S. Rippa. "Numerical Procedures for Surface Fitting of Scattered Data by Radial Functions". *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* Vol. 7 (April 1986): 639-659.
- [3] Floater, M. S., A. Iske. *Multistep Scattered Data Interpolation using Compactly Supported Radial Basis Functions*.
- [4] Forster, O. *Analysis 3: Integralrechnung im \mathbb{R}^n mit Anwendungen*. 3. Aufl. Braunschweig: Vieweg, 1984.
- [5] Gel'fand, Israel M., G. E. Shilov. *Generalized Functions. Vol.1: Properties and Operations*. 2. Aufl. New York: Academic Press, 1966.
- [6] Heuser, H. *Funktionalanalysis*. 3. Aufl. Stuttgart: B. G. Teubner, 1992.
- [7] Hörmander, L. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I: Distribution Theory and Fourier Analysis*. Berlin: Springer, 1983.
- [8] Iske, A. *Charakterisierung bedingt positiv definiter Funktionen für multivariate Interpolationsmethoden mit radialen Basisfunktionen*. Diss. Göttingen, 1994.
- [9] Jantscher, L. *Distributionen*. Berlin: de Gruyter, 1971.
- [10] Madych, Nelson. "Multivariate Interpolation and Conditionally Positive definite Functions". *Approximation Theory and its Applications* Vol.4.1 (März 1988): 77-89.
- [11] Madych, Nelson. "Multivariate Interpolation and Conditionally Positive definite Functions II". *Mathematics of Computation* Vol.54 (1990): 211-230.
- [12] Narcowich, Ward. "Norms of Inverses and Condition Numbers for Matrices Associated with Scattered Data". *Journal of Approximation Theory* Vol.64.1 (Januar 1991): 69-94.
- [13] Narcowich, Ward. "Norm Estimates for the Inverses of a General Class of Scattered-Data Radial-Function Interpolation Matrices". *Journal of Approximation Theory* Vol.69.1 (April 1992): 84-109.
- [14] Oberhettinger, F. *Tables of Fourier Transforms and Fourier Transforms of Distributions*. Berlin: Springer, 1990.
- [15] Rees, Charles S., S. M. Shah, Caslav V. Stanojevic. *Theory and Applications of Fourier Analysis*. Basel: Marcel Dekker, 1981.

- [16] Schaback R. *Error Estimates and Condition Numbers for Radial Basis Function Interpolation*. Revised for *Advances in Computational Mathematics*, 1994.
- [17] Schaback R., H. Werner. *Numerische Mathematik*. 4.Aufl. Berlin: Springer, 1992.
- [18] Schwarz, H. R. *Numerische Mathematik*. Stuttgart: Teubner, 1986.
- [19] Walter, W. *Einführung in die Theorie der Distributionen*. Mannheim: B.I., 1970.
- [20] Weinrich, M. *Charakterisierung von Funktionenräumen bei der Interpolation mit radialen Basisfunktionen*. Diss. Göttingen, 1994.
- [21] Wendland H. *Ein Beitrag zur Interpolation mit radialen Basisfunktionen*. Diplomarbeit. Göttingen, 1994.
- [22] Wendland H. "Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial functions of minimal degree". *Advances in Computational Mathematics* Vol.4 (Dec. 1995):389-396.
- [23] Wu Z., R.Schaback. "Local Error Estimates for Radial Basis Function Interpolation". *IMA J. of Numer. Anal.* 13 (1993): 13-17.