

L_2 -Approximation mit radialen Basisfunktionen

Diplomarbeit
vorgelegt von
Svenja Lowitzsch
aus
Kiel

angefertigt am
Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
der Georg-August-Universität Göttingen
1996

Vorwort

Mehrdimensionale Approximation findet auf dem Gebiet des CAD häufige Anwendung. Beispiele lassen sich u.a. in der medizinischen Forschung, sowie in der Signalverarbeitung finden.

Das Prinzip der L_2 -Approximation mit radialen Basisfunktionen ist nun folgendes:

Sei $X := \{x_1, \dots, x_N\}$ eine Menge paarweise verschiedener Punkte aus einem kompakten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, welches so gewählt sei, daß für jedes x_k , $1 \leq k \leq N$, der d -dimensionale Würfel $W(x_k)$ mit Mittelpunkt x_k und Seitenlänge $2qd^{-1/2}$ ganz in Ω enthalten ist. Dabei beschreibt $q := \frac{1}{2} \min_{j \neq l} \|x_j - x_l\| > 0$ die *Separationsdistanz*. Es sei eine Funktion $f \in L_2(\Omega)$ gegeben. Zu einer *bedingt positiv definiten Funktion* Φ der *Ordnung* m (siehe Kapitel 1.3) wähle man als Approximationsraum S_X die Menge der Linearkombinationen von Translaten von Φ um Punkte aus X . Die Koeffizienten sollen dabei die Nebenbedingung der bedingt positiven Definitheit erfüllen. Dies bedeutet $S_X := \{\sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi(\cdot - x_j) : \sum_{j=1}^N \alpha_j p(x_j) = 0 \text{ für } p \in \mathbb{P}_m^d\}$, wobei \mathbb{P}_m^d die Menge der Polynome in d Variablen mit Gesamtgrad kleiner als m darstellt. Es ist eine beste Approximierende $s^* \in S_X$ gesucht, welche $\|f - s^*\|_{L_2(\Omega)} = \inf_{s \in S_X} \|f - s\|_{L_2(\Omega)}$ erfüllt. Die Existenz einer besten Approximierenden folgt aufgrund des Projektionssatzes.

Die Intention dieser Arbeit ist die Bestimmung einer unteren Schranke der quadratischen Form $\langle A_X \alpha, \alpha \rangle_{L_2(\Omega)}$ bezüglich der Approximationsmatrix A_X , wobei α der Nebenbedingung der bedingt positiven Definitheit genügt. Dabei wird das Approximationsproblem in ein Interpolationsproblem auf S_X zu überführt. Dieses lautet wie folgt:

Seien X und Ω wie in dem Approximationsproblem gegeben. Sei $Y := \{y_1, \dots, y_N\} \in \Omega$ eine Menge paarweise verschiedener Punkte, welche $x_i - y_i = D \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ für $1 \leq i \leq N$ erfüllen. Der Verschiebungsvektor D ist somit von i , $1 \leq i \leq N$, unabhängig. Zu $f := \{f(y_i)\}_{i=1}^N$ ist eine Interpolante $s \in S_X$ gesucht, so daß $s(y_i) = f(y_i)$ gilt. Als positiven Nebeneffekt erhält man hierbei Aussagen über die untere Schranke der quadratischen Form bezüglich der Interpolationsmatrix, wobei die *Aufpunkte* y_i (kleine) Verschiebungen der *Zentren* x_i für $1 \leq i \leq n$ bilden.

Ich habe den Ansatz von Quak, Sivakumar, Ward [8], der sich auf positiv definite Funktionen Φ und bedingt positiv definite Funktionen $-\Phi$ der Ordnung 1 beschränkt (Kapitel 2.2), mit Hilfe von (verallgemeinerter) Fouriertransformation auf bedingt positiv definite Funktionen Φ beliebiger Ordnung $m \in \mathbb{N}_0$ erweitert (Kapitel 2.1). Quak, Sivakumar, Ward benutzen *Laplace-Stieltjes - Integrale* zur Darstellung von Φ , ich verwende hingegen *Fourier-Stieltjes - Integrale*. Die jeweiligen Ergebnisse sind gegenübergestellt.

Die Arbeit besitzt folgende Gliederung: In Kapitel 1 werden nach der Einführung von Grundlagen und der (verallgemeinerten) Fouriertransformation das Interpolationsproblem sowie das L_2 -Approximationsproblem beschrieben.

In Kapitel 2 werden untere Schranken quadratischer Formen bezüglich Interpolationsmatrizen hergeleitet, wobei die Aufpunkte des Interpolationsproblems (kleine) Verschie-

bungen der Zentren darstellen. Dabei wird der Ansatz von Quak, Sivakumar, Ward [8] (Kapitel 2.2) auf bedingt positiv definite Funktionen Φ beliebiger Ordnung $m \in \mathbb{N}_0$ erweitert (Kapitel 2.1). Die Hauptaussagen dieses Kapitels, in Form von Theorem 1 und 2, dienen der Vorbereitung für Kapitel 3, da sie in der Beweisführung von Theorem 3 und 4 benötigt werden.

Den Schwerpunkt der Arbeit bildet Kapitel 3. Hier wird eine untere Schranke der quadratischen Form $\langle A_X \alpha, \alpha \rangle_{L_2(\Omega)}$ des Approximationsproblems bestimmt. Da Φ stetig ist, lassen sich die vorkommenden Integrale durch Riemann–Summen abschätzen. Die benötigten Stützstellen bilden gewisse Gitterpunkte des jeweiligen Würfels $W(x_k)$, $1 \leq k \leq N$. Durch die Betrachtung einer bestimmten Teilmenge der Stützpunkte läßt sich sodann explizit eine untere Schranke der quadratischen Form angeben. Das Approximationsproblem läßt sich hierbei auf das in Kapitel 2 betrachtete Interpolationsproblem überführen. Damit das L_2 –Skalarprodukt für beliebige Ordnung m von Φ existiert, wird als Integrationsgebiet ein kompaktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ gewählt (Kapitel 3.1 und Kapitel 3.2). Ist Φ positiv definit, so ist $\Omega = \mathbb{R}^d$ zulässig (Kapitel 3.3).

In Kapitel 4 wird ein konkretes Beispiel berechnet, den Abschluß bildet ein Ausblick in Kapitel 5.

Für die numerische Stabilität des L_2 –Approximationsproblems ist der Einfluß der *Separationsdistanz* q maßgeblich. Anhand der Beispielfunktionen wird deutlich, daß die in der Arbeit erstellten unteren Schranken nur von geringfügig schlechterer Ordnung für $q \rightarrow 0$ sind als die des Ansatzes von Quak, Sivakumar, Ward [8]. Zum Teil sind sie sogar von gleicher Ordnung. Deshalb ist der verallgemeinerte Ansatz zu bevorzugen, da hier alle gängigen radialen Basisfunktionen betrachtet werden können.

Für die Betreuung dieses interessanten und aktuellen Themas danke ich Herrn Prof. Dr. R. Schaback. Ein ganz besonderer Dank gilt außerdem meinen Eltern für ihre liebe Unterstützung während meines Studiums.

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlagen und Notationen	1
1.1	Allgemeines	1
1.2	Fouriertransformation im klassischen und verallgemeinerten Sinn	2
1.2.1	Die klassische Fouriertransformation	2
1.2.2	Distributionen und verallgemeinerte Fouriertransformation	3
1.3	Interpolation mit radialen Basisfunktionen	6
1.4	Approximation mit radialen Basisfunktionen	9
2	Untere Schranken einiger quadratischer Formen	14
2.1	Der Fall $\Phi \in BPD(m)$ mit $m \in \mathbb{N}_0$	15
2.2	Der Fall $\Phi \in BPD(0)$ oder $-\Phi \in BPD(1)$	24
2.3	Beispielhafte Berechnung von $I'(\Phi)$	27
2.3.1	Polynomials	27
2.3.2	Multiquadrics	28
2.3.3	Inverse Multiquadrics	28
2.3.4	Gaußglocken	29
2.4	Beispielhafte Berechnung von $I'(\mu)$ und Vergleich von $I'(\Phi)$ und $I'(\mu)$	30
2.4.1	Polynomials	30
2.4.2	Multiquadrics	30
2.4.3	Inverse Multiquadrics	31
2.4.4	Gaußglocken	31
2.4.5	Beispielhafter Vergleich von $I'(\Phi)$ und $I'(\mu)$	31
2.5	Abschätzungen für $\tilde{J}_i(\Phi, D)$ und $\ A_1(\Phi_i)\alpha\ $, $1 \leq i \leq 4$	33
2.6	Abschätzungen für $\tilde{J}_i(\mu, D)$ und $\ A_1(\Phi_i)\alpha\ $, $1 \leq i \leq 4$	44
3	Untere Schranken der quadratischen Form des L_2-Approximationsproblems	47
3.1	Der Fall $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ kompakt und $\Phi \in BPD(m)$, $m \in \mathbb{N}_0$	48
3.2	Der Fall $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ kompakt und $\Phi \in BPD(0)$ oder $-\Phi \in BPD(1)$	54
3.3	Der Fall $\Omega = \mathbb{R}^d$ und $\Phi \in BPD(0)$	55
3.4	Abschätzung von $\langle A_x \alpha, \alpha \rangle$ für Φ_i , $1 \leq i \leq 4$ (Fourier-Stieltjes – Theorie)	61
3.5	Abschätzung von $\langle A_x \alpha, \alpha \rangle$ für Φ_i , $1 \leq i \leq 4$ (Laplace-Stieltjes – Theorie)	62
3.6	Beispielhafte Berechnung von $\tilde{I}'(\Phi)$	63
3.6.1	Inverse Multiquadrics	63
3.6.2	Gaußglocken	64
4	Ein Beispiel	66
4.1	Das Interpolationsproblem	66
4.2	Das L_2 -Approximationsproblem	67
4.3	Graphische Darstellung der betrachteten Funktionen	69
5	Ausblick	72

1 Grundlagen und Notationen

1.1 Allgemeines

In diesem Abschnitt sollen die in der Arbeit verwendeten Notationen dargestellt werden.

\mathbb{P}_m^d bezeichne die Menge aller Polynome in d Variablen mit einem Gesamtgrad kleiner als m .

Die Funktionenräume $C^k(\Omega)$ mit $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, $L_1^{loc}(\Omega)$ und $L_p(\Omega)$ mit $p \geq 1$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ seien wie gewöhnlich definiert.

$\|\cdot\|$ sei die *euklidische Norm*, d.h. $\|x\| \equiv \|x\|_2 := (\sum_{j=1}^d x_j^2)^{1/2}$ für $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$.

Für Funktionen $f, g \in L_2(\mathbb{R}^d)$ sei durch $\langle f, g \rangle \equiv \langle f, g \rangle_{L_2} := \int_{\mathbb{R}^d} f(x)g(x) dx$ das L_2 -Skalarprodukt definiert, das die Norm $\|f\| \equiv \|f\|_{L_2} := (\int_{\mathbb{R}^d} f(x)^2 dx)^{1/2}$ induziert. Alle anderen verwendeten Normen werden als solche gekennzeichnet.

$[a]$ beschreibe den ganzzahligen Teil von a , $\lceil a \rceil$ sei gleich $[a] + 1$ für $a \in \mathbb{R}_{\geq 0} \setminus \mathbb{N}$. Für $a \in \mathbb{N}$ gelte $[a] = \lceil a \rceil = a$.

$K_d(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^d : \|x - y\| < r\}$ sei die d -dimensionale Kugel um $x \in \mathbb{R}^d$ mit Radius r und dem Volumen

$$\omega_d(r) = \frac{r^d \pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2} + 1)}.$$

Ein Beweis dafür wird zum Beispiel in Fischer, Lieb [3] geführt.

Von besonderer Bedeutung ist die Gammafunktion $\Gamma(z)$.

Definition 1.1 Die für $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0, -1, -2, \dots$, erklärte Funktion

$$\Gamma(z) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! n^z}{z(z+1) \cdots (z+n)}$$

heißt *Gammafunktion*.

Satz 1.2 (*Eigenschaften der Gammafunktion*)

(a) $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$,

(b) $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ (*Funktionalgleichung*),

(c) Für $\Re(z) > 0$ gilt $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-tz} t^{z-1} dt$ (Integraldarstellung der Gammafunktion).

Einen Beweis des Satzes findet man zum Beispiel in Fischer, Lieb [3].

Es sei noch die Faltung $f * g$ für zwei Funktionen $f, g \in L_1(\mathbb{R}^d)$ mit

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x - y) dy \quad (1.1)$$

erwähnt. Für sie gilt $f * g \in L_1(\mathbb{R}^d)$ und $f * g = g * f$ (Kommutativität).

Definition 1.3 Für $\nu \in \mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ heißt

$$K_\nu(z) := \int_0^\infty e^{-z \cosh t} \cosh(\nu t) dt$$

modifizierte Besselfunktion der 2. Art der Ordnung ν oder auch Macdonald-Funktion.

1.2 Fouriertransformation im klassischen und verallgemeinerten Sinn

1.2.1 Die klassische Fouriertransformation

Definition 1.4 Sei $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ und $w \in \mathbb{R}^d$. Dann ist durch

$$\hat{f}(w) := \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix^t w} f(x) dx \equiv F(f)(w)$$

eine Abbildung $\hat{f} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ erklärt. Sie heißt *Fouriertransformierte von f* und wird auch mit Ff bezeichnet.

Diese Definition ist wegen $|\int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix^t w} f(x) dx| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| dx$ für alle $w \in \mathbb{R}^d$ sinnvoll, denn das rechts stehende Integral existiert nach Voraussetzung. Nach dem Lemma von Riemann–Lebesgue (siehe Jantscher [5]) ist \hat{f} stetig. Für die Fouriertransformation gelten zwei wichtige Aussagen:

Satz 1.5 Seien $f, g \in L_1(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt

$$1) \widehat{f * g} = \hat{f} \hat{g}$$

$$2) \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(x)g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\hat{g}(x) dx \text{ (Bessel-Parsevalsche Gleichung).}$$

Beweis: Die Resultate folgen mittels einfacher Substitution und der Vertauschung der Integrationsreihenfolge nach dem Satz von Fubini aus den Definitionen. \square

Der letzte Satz dieses Abschnittes behandelt die inverse Fouriertransformation.

Satz 1.6 (Umkehrformel)

Ist $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ eine Funktion derart, daß auch $\hat{f} \in L_1(\mathbb{R}^d)$ gilt, dann folgt nach evtl. Abänderung auf einer Nullmenge $f \in C_0(\mathbb{R}^d) := \{f \in C(\mathbb{R}^d) : \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} f(x) = 0\}$ und

$$f(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(w)e^{ix^t w} dw \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^d.$$

Der Beweis findet sich zum Beispiel in Stein, Weiss [14].

Die zu $g \in L_1(\mathbb{R}^d)$ definierte Funktion IFg , die durch

$$(IFg)(x) := (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} g(w)e^{ix^t w} dw,$$

gegeben ist, heißt *inverse Fouriertransformierte von g*. Somit folgt aufgrund des vorhergehenden Satzes, daß für $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ mit $Ff = \hat{f} \in L_1(\mathbb{R}^d)$ gilt:

$$F(IFf) = f, \quad IF(Ff) = f.$$

1.2.2 Distributionen und verallgemeinerte Fouriertransformation

Um den Begriff der Fouriertransformation auch auf Funktionen, die nicht im klassischen Sinn fouriertransformierbar sind, anwenden zu können, werden üblicherweise (temperierte) Distributionen eingeführt. Distributionen sind stetige, lineare Funktionale auf einem Funktionenraum, dem sogenannten Raum der *Testfunktionen*. In diesem Fall wird der Schwartzraum betrachtet.

Definition 1.7 Der *Schwartzraum S* ist definiert als die Menge

$$S := \{\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}^d) : \forall p, q \in \mathbb{N}_0^d \exists C_{p,q} > 0 \text{ mit } |x^q D^p \gamma(x)| < C_{p,q} < \infty, \forall x \in \mathbb{R}^d\}.$$

Andere Bedingungen, wann eine Funktion γ im Schwartzraum S liegt, ergeben sich durch den folgenden Satz.

Satz 1.8 Sei $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Dann sind äquivalent:

(a) $\gamma \in S$, $|x^q D^p \gamma(x)| < C_{p,q} < \infty$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$.

(b) Für jedes $p \in \mathbb{N}_0^d$ und jedes $m \in \mathbb{N}_0$ existiert eine Zahl $C_{p,m} > 0$, so daß für alle $x \in \mathbb{R}^d$ gilt:

$$|D^p \gamma(x)| \leq \frac{C_{p,m}}{(1 + \|x\|^2)^m} < \infty.$$

(c) Für alle $p, q \in \mathbb{N}_0^d$ gilt:

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} |x^q D^p \gamma(x)| = 0.$$

Beweis: Die Aussagen folgen sofort aufgrund der Definition von S . □

Hieraus folgt insbesondere $S \subseteq L_1(\mathbb{R}^d)$.

Für den Übergang von S zu dem topologischen Dualraum S' wird eine Topologie auf S oder zumindest der Begriff der Stetigkeit benötigt, welcher über die Folgenstetigkeit eingeführt wird.

Definition 1.9 Eine Funktionenfolge $\{\gamma_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ aus S mit den Eigenschaften

(i) $|x^q D^p \gamma_k(x)| \leq C_{p,q}$,

(ii) $D^p \gamma_k(x) \implies 0$ auf \mathbb{R}^d , $k \rightarrow \infty$

für alle $x \in \mathbb{R}^d$ ist eine Nullfolge in S , in Zeichen $\gamma_k \xrightarrow{S} 0$.

Satz 1.10 Für die Fouriertransformierte $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ gilt:

1) $F(S) \subset S$,

2) $F : S \rightarrow S$ ist stetig bezüglich der Topologie auf S und

3) F ist stetig invertierbar auf S mit Inverser $F^{-1} : S \rightarrow S$.

Beweis: Siehe Jantscher [5]. □

Daraus ergeben sich zwei weitere Definitionen.

Definition 1.11 (*Stetiges Funktional und Raum der temperierten Distributionen*)

- (i) Ein lineares Funktional T heißt *stetig auf S* , falls aus $\gamma_k \xrightarrow{S} 0$ stets auch $T(\gamma_k) \xrightarrow{\mathbb{R}} 0$ folgt.
- (ii) Der Vektorraum S' mit

$$S' := \{T : S \rightarrow \mathbb{R}, T \text{ lineares und stetiges Funktional} \}$$

heißt *Raum der temperierten Distributionen auf S* .

Ein sehr bekanntes Beispiel für eine Distribution ist das δ -Funktional. Die formale Schreibweise lautet $\delta : S \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\gamma \mapsto \gamma(0)$.

Definition 1.12 Sei $T \in S'$ eine temperierte Distribution. Dann wird die (*distributionelle*) *Fouriertransformierte* $\hat{T} \in S'$ definiert durch die Bessel-Parsevalsche Gleichung

$$\langle \hat{T}, \gamma \rangle := \langle T, \hat{\gamma} \rangle \quad \forall \gamma \in S.$$

Bemerkung 1.13 Die rechte Seite der Gleichung ist ein wohldefiniertes lineares Funktional auf S aufgrund Satz 1.10. Somit ist $\hat{T} \in S'$ eine wohldefinierte temperierte Distribution in S' .

Eine besondere Rolle spielen die sogenannten *regulären* Distributionen. Diese werden über den Begriff der temperierten Funktion eingeführt.

Definition 1.14 Es sei $f \in L_1^{loc}(\mathbb{R}^d)$ und es existiere eine Kugel $K_a(0, r)$, eine positive Zahl C_f und ein $k \in \mathbb{N}_0$, so daß für $\|x\| > r$ gilt

$$|f(x)|(1 + \|x\|)^{-k} < C_f.$$

Dann wird f eine *langsam wachsende* oder *temperierte* Funktion genannt.

Bemerkung 1.15 f temperiert bedeutet, daß die Funktion im Unendlichen höchstens polynomial anwächst.

Für eine temperierte Funktion f ist das stetige und lineare Funktional $[f] : S \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$[f]\gamma := \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\gamma(x) dx, \quad \gamma \in S,$$

wohldefiniert und ein Element aus S' . Man nennt $[f] \in S'$ eine *reguläre* Distribution.

Definition 1.16 Sei Φ eine temperierte Funktion. Dann sagt man, die Distribution $F[\Phi]$ stimmt mit einer Funktion $\varphi : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^d$ überein oder Φ besitzt die verallgemeinerte Fouriertransformierte $\varphi : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^d$, falls φ eine temperierte Funktion ist und gilt

$$F[\Phi] = [\varphi].$$

1.3 Interpolation mit radialen Basisfunktionen

Zunächst soll die übliche Form des zu betrachtenden Interpolationsproblems mit radialen Basisfunktionen eingeführt werden. Zur Lösung dieses Problems wird als einzige Einschränkung die \mathbb{P}_m^d -Regularität von $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subset \mathbb{R}^d$ gefordert. Diese Eigenschaft sichert die Eindeutigkeit bei der Interpolation mit Polynomen aus dem Raum \mathbb{P}_m^d . Sie stellt keine große Einschränkung dar.

Eine Funktion $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *radial*, wenn eine Funktion $\phi : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ existiert mit

$$\Phi(x) = \phi(\|x\|),$$

d.h. die Funktion hat auf jeder d -dimensionalen Sphäre den gleichen Funktionswert. Im Zusammenhang mit radialen Basisfunktionen stellt der Begriff der bedingt positiven Definitheit ein wichtiges Kriterium dar.

Definition 1.17

- 1) Eine stetige Abbildung $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *bedingt positiv definit der Ordnung* $m \geq 0$, kurz $\Phi \in BPD(m)$, falls für jede endliche Menge $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subset \mathbb{R}^d$ paarweise verschiedener Punkte gilt

$$\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \alpha_j \alpha_k \Phi(x_j - x_k) \geq 0, \tag{1.2}$$

wobei für $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{R}^N$

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j p(x_j) = 0 \quad \text{für alle} \quad p \in \mathbb{P}_m^d$$

erfüllt sei. Dabei trete Gleichheit in (1.2) nur im Falle $\alpha = 0$ auf.

- 2) Für $m = 0$, also $\Phi \in BPD(0)$, heißt Φ *positiv definit*.

Es ist üblich, mit der Bezeichnung $\Phi \in BPD(m)$ die Radialität von Φ zu implizieren, in dieser Arbeit wird das auch getan.

Die Menge der α , welche die Nebenbedingung der bedingt positiven Definitheit der Ordnung m erfüllen, sei gekennzeichnet durch

$$V_m^-\{X\} := \{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{R}^N : \sum_{j=1}^N \alpha_j p(x_j) = 0 \text{ für alle } p \in \mathbb{P}_m^d\}.$$

Nun soll das folgende Interpolationsproblem bezüglich radialer Basisfunktionen betrachtet werden: Sei $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subset \mathbb{R}^d$ gegeben mit paarweise verschiedenen x_j , $1 \leq j \leq N$, und ein Vektor $f := (f_j)_{j=1}^N \in \mathbb{R}^N$. Gesucht ist eine Funktion s derart, daß das System von Gleichungen

$$s(x_j) = f_j, \quad 1 \leq j \leq N$$

eine Lösung der Form

$$s(x) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi(x - x_j) + \sum_{k=1}^Q \beta_k p_k(x) \tag{1.3}$$

besitzt. Dabei sei die Funktion $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ bedingt positiv definit der Ordnung m auf \mathbb{R}^d , $Q = \binom{d+m-1}{d} = \dim \mathbb{P}_m^d$ und (p_1, \dots, p_Q) eine Basis von \mathbb{P}_m^d .

Für hinreichend große Werte von $N \in \mathbb{N}$ ergibt sich ein überbestimmtes lineares Gleichungssystem mit Q Freiheitsgraden. Um dies zu vermeiden, wird zusätzlich gefordert, daß

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j p_k(x_j) = 0, \quad 1 \leq k \leq Q$$

gelten soll.

Mit $A := (\Phi(x_i - x_j))_{\substack{i=1, \dots, N \\ j=1, \dots, N}}$, $P := (p_k(x_i))_{\substack{i=1, \dots, N \\ k=1, \dots, Q}}$, $\alpha, f \in \mathbb{R}^N$ und $\beta \in \mathbb{R}^Q$ läßt sich das Interpolationsproblem als Matrixgleichung wie folgt schreiben:

$$\begin{pmatrix} A & P \\ P^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

Für $m = 0$, d.h. $\Phi \in BPD(0)$, ist diese Matrix positiv definit und somit das System (1.4) eindeutig lösbar. In diesem Falle verringert sich (1.4) zu

$$A\alpha = y,$$

was durch $\alpha = A^{-1}y$ eindeutig gelöst wird. Für $m > 0$ existiert im allgemeinen keine eindeutige Lösung. Dies läßt sich jedoch durch eine zusätzliche Forderung erreichen:

Satz 1.18 *Sei $\Phi \in BPD(m)$ und die Matrix P injektiv. Dann ist das System (1.4) eindeutig lösbar.*

Beweis: Es reicht, zu zeigen, daß aus $\begin{pmatrix} A & P \\ P^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = 0$ notwendigerweise $\alpha = 0$ und $\beta = 0$ folgt, d.h., daß die Matrix $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & P \\ P^t & 0 \end{pmatrix}$ injektiv ist. Ist $A\alpha + P\beta = 0$ und $P^t\alpha = 0$, so ergibt sich $\alpha^t A\alpha + \alpha^t P\beta = \alpha^t A\alpha + \underbrace{(P^t\alpha)^t}_{0} \beta = \alpha^t A\alpha = 0$ und wegen $\Phi \in BPD(m)$ folgt $\alpha = 0$. Somit gilt $P\beta = 0$ und aufgrund der Injektivität von P sofort $\beta = 0$. \square

Deshalb sei im weiteren gefordert, daß X eine unisolvente Teilmenge enthalte, was der Injektivität von P entspricht. Dann heißt die Menge X *regulär bzgl. \mathbb{P}_m^d* .

Der vorhergehende Satz ist spätestens seit Micchelli [6] hinreichend bekannt. Er rechtfertigt die Bezeichnung „radiale Basisfunktion“, falls Φ zusätzlich radial ist. An dieser Stelle hat die Eigenschaft der Radialität noch keinerlei Einfluß auf das Interpolationsproblem selbst. Ist Φ radial, so existiert eine Funktion $\phi(\|x\|) = \Phi(x)$ mit $\phi : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$, d.h. die Funktion Φ läßt sich auf einen eindimensionalen Fall reduzieren, unabhängig von der Dimension d des Ausgangsraumes. Dabei kann sich das gestellte Problem verändern. Der Satz zeigt außerdem, daß die Eigenschaft der bedingt positiven Definitheit für das vorliegende Interpolationsproblem sehr wichtig ist. Mit der folgenden Definition ist ein einfaches Kriterium zur Überprüfung dieser Eigenschaft verbunden.

Definition 1.19 Eine Funktion $\phi : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$, $\phi \in C^\infty(0, \infty)$ heißt *vollständig monoton*, wenn $(-1)^l \phi^{(l)}$ nichtnegativ für alle $l \in \mathbb{N}_0$ ist.

Damit läßt sich folgender Satz formulieren:

Satz 1.20 (BERNSTEIN): Die Funktion $\phi : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann vollständig monoton auf $(0, \infty)$, wenn ϕ eine Integraldarstellung vom Laplace-Stieltjes-Typ der Form

$$\phi(x) = \int_0^\infty e^{-x\lambda} d\mu(\lambda), \quad x \in (0, \infty)$$

mit einer monoton wachsenden Funktion μ mit $\int_0^\infty d\mu(\lambda) < \infty$ besitzt.

Beweis: Der Beweis findet sich in Bernstein [1]. \square

Die beiden folgenden Sätze werden für das L_2 -Approximationsproblem mit Funktionen $\Phi \in BPD(0)$ oder $-\Phi \in BPD(1)$ der Theorie von Quak, Sivakumar, Ward [8] benötigt. Einen Beweis der ersten Aussage findet sich in Schoenberg [11] und [12].

Satz 1.21 (SCHOENBERG): Die Funktion $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\Phi(x) = \phi(\|x\|)$ und $\Phi \not\equiv 0$ ist genau dann positiv definit auf \mathbb{R}^d , $d \in \mathbb{N}$, wenn ϕ auf $[0, \infty)$ stetig und vollständig monoton auf $(0, \infty)$ ist. \square

Schoenberg zeigt diese Aussage auch für $-\Phi \in BPD(1)$. Für $\Phi \in BPD(m)$, $m \geq 0$, beweist Micchelli in seiner Arbeit [6] den

Satz 1.22 (MICCHELLI): Sei $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\Phi(x) = \phi(\|x\|)$ und $\Phi \not\equiv 0$. Φ ist aus $BPD(m)$, falls ϕ auf $[0, \infty)$ stetig und $(-1)^m \phi^{(m)}$ vollständig monoton auf $(0, \infty)$ ist. \square

Micchelli vermutete schon, daß sich die Aussage von Schönberg für alle $m \in \mathbb{N}_0$ zeigen ließe. Den Beweis dafür fanden allerdings erst Guo, Hu, Sun [4].

Satz 1.23 (GUO, HU, SUN): Sei $\psi : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\Phi(x) = \psi(\|x\|^2)$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$ und $\Phi \not\equiv 0$. Φ ist aus $BPD(m)$ genau dann, wenn ψ auf $[0, \infty)$ stetig und $(-1)^m \psi^{(m)}$ vollständig monoton auf $(0, \infty)$ ist. \square

Der Veranschaulichung des L_2 -Approximationsproblems sollen die fünf zur Zeit bekanntesten radialen Basisfunktionen dienen:

Polynomials:	$\Phi_1(x) = (-1)^{\lceil \beta/2 \rceil} \ x\ ^\beta$	$\beta > 0, \beta \notin 2\mathbb{N}$,
Thin plate splines:	$\Phi_2(x) = (-1)^{k+1} \ x\ ^{2k} \log \ x\ $	$k \in \mathbb{N}$,
Gaussians:	$\Phi_3(x) = e^{-\rho \ x\ ^2}$	$\rho > 0$,
Multiquadrics:	$\Phi_4(x) = (-1)^{\lceil \beta/2 \rceil} (c^2 + \ x\ ^2)^{\beta/2}$	$\beta > 0, \beta \notin 2\mathbb{N}, c \neq 0$,
Inverse Multiquadrics:	$\Phi_5(x) = (c^2 + \ x\ ^2)^{\beta/2}$	$-d < \beta < 0, \beta \notin 2\mathbb{Z}, c \neq 0$.

Die Ordnung m der bedingt positiven Definitheit dieser Beispielfunktionen läßt sich mit Hilfe des Satzes von Guo, Hu, Sun bestimmen:

Φ_1 und Φ_4 sind bedingt positiv definit der Ordnung $m > \beta/2$, Φ_2 ist bedingt positiv definit der Ordnung $m > k$, Φ_3 und Φ_5 sind bedingt positiv definit der Ordnung $m \geq 0$. Die im folgenden vorgestellten Theoreme werden anhand dieser Beispiele illustriert. Diese genügen den jeweils geforderten Voraussetzungen.

1.4 Approximation mit radialen Basisfunktionen

Sei $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subset \mathbb{R}^d$ eine Menge von Zentren mit paarweise verschiedenen x_j für $1 \leq j \leq N$. Sei $q := \frac{1}{2} \min_{j \neq l} \|x_j - x_l\| > 0$ die Separationsdistanz. Zu jedem Zentrum x_k

definiere $W(x_k) := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x - x_k\|_\infty \leq qd^{-1/2}\}$ für $k = 1, \dots, N$. Dabei beschreibt $\|\cdot\|_\infty$ die Supremumsnorm in \mathbb{R}^d . Da $\|x - x_k\|_\infty \leq q$ für alle $x \in W(x_k)$ erfüllt ist, sind die $W(x_k)$, $1 \leq k \leq N$, disjunkt.

Definition 1.24 $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ist ein *zulässiges kompaktes Gebiet* bezüglich X , falls Ω kompakt und $W(x_k) \subset \Omega$ für alle $1 \leq k \leq N$ erfüllt ist.

Im folgenden sei Ω ein zulässiges kompaktes Gebiet bezüglich X .

Für $d = 2$ kann Ω zum Beispiel folgende Gestalt besitzen:

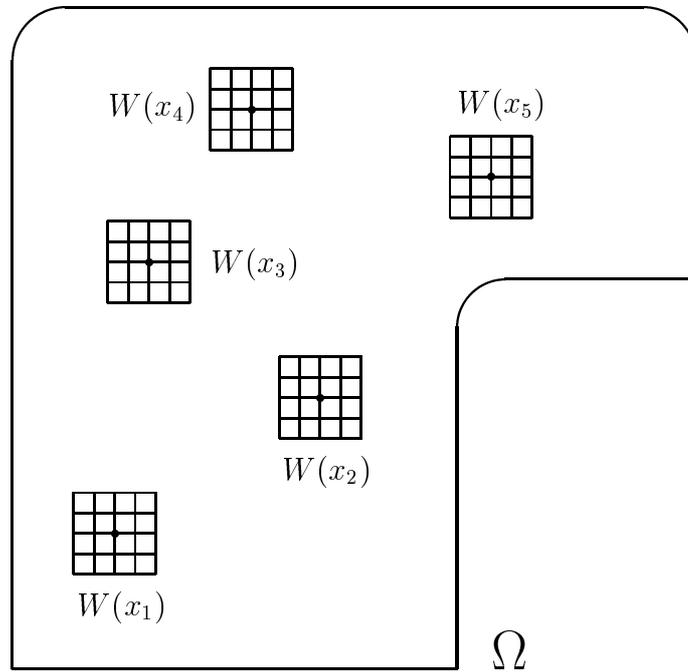


FIG. 1

Das Approximationsproblem besteht darin, die beste L_2 -Approximierende zu einer gegebenen Funktion $f \in L_2(\Omega)$ aus einem linearen Teilraum von $L_2(\Omega)$ der Dimension $\leq N$ zu bestimmen. Dieser Raum sei wie folgt definiert:

$$S_X := \left\{ \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi(\cdot - x_j) : \alpha \in V_m^-\{X\} \right\} \quad (1.5)$$

mit

$$V_m^-\{X\} := \{ \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{R}^N : \sum_{j=1}^N \alpha_j p(x_j) = 0 \text{ für } p \in \mathbb{P}_m^d \}.$$

Die Funktion $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ sei bedingt positiv definit der Ordnung m auf \mathbb{R}^d . $\alpha \in V_m^-\{X\}$ bedeutet also gerade, daß α die Nebenbedingung der Definition der bedingt positiven Definitheit der Ordnung $m \in \mathbb{N}_0$ erfüllt. Das zu betrachtende Approximationsproblem lautet nun:

Gesucht ist eine Funktion $s^* \in S_X$, $s^* = \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi(\cdot - x_j)$ mit $\alpha \in V_m^-\{X\}$, so daß gilt:

$$\|f - s^*\| = \inf_{s \in S_X} \|f - s\|. \quad (1.6)$$

Es sei $\|f\|_{L_2(\Omega)} =: \|f\| = \langle f, f \rangle^{1/2} := (\int_{\Omega} f^2(x) dx)^{1/2}$ die L_2 -Norm bezüglich Ω und $\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x)g(x) dx$ für $f, g \in L_2(\Omega)$ das dazugehörige Skalarprodukt. Eine beste Approximierende existiert nach dem Projektionssatz (vergleiche Werner [18]), da S_X konvex und bezüglich der oben definierten L_2 -Norm (S_X endlichdimensional) abgeschlossen ist.

Besitzt $\Phi \in BPD(m)$ eine klassische Fouriertransformierte, was für $m = 0$ der Fall ist, so existieren sogar die Integrale, die durch die Bildung des L_2 -Skalarproduktes über den gesamten \mathbb{R}^d entstehen. Für beliebiges $m \in \mathbb{N}_0$ benötigt man jedoch die Einschränkung auf $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ als Integrationsgebiet, damit die vorkommenden Integrale wohldefiniert sind.

Bei dem gestellten Approximationsproblem handelt es sich um die Suche nach einem Extremum unter Nebenbedingungen. Um die Lagrange Multiplikatorenregel (siehe Walter [15]) anwenden zu können, müssen zuerst die Voraussetzungen überprüft werden. Sei Q die Dimension von \mathbb{P}_m^d , (p_1, \dots, p_Q) eine Basis von \mathbb{P}_m^d . Als zu minimierende Funktion wird

$$\begin{aligned} F(\alpha) &:= \frac{1}{2} \|f - s\|^2 \\ &= \frac{1}{2} \left\| f - \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi(\cdot - x_j) \right\|^2 \end{aligned}$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}^N$ betrachtet. Nun ist $F : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, genauso wie

$$g_k(\alpha) = \sum_{j=1}^N \alpha_j p_k(x_j), \quad 1 \leq k \leq Q$$

mit $g_k : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$. Die Funktionen g_k beschreiben die Nebenbedingung des Approximationsproblems, welche sich durch das Gleichungssystem

$$g_k(\alpha) = 0 \quad \text{für } 1 \leq k \leq Q$$

mit $\alpha \in \mathbb{R}^N$ darstellen lassen. Da

$$\frac{\partial g_k}{\partial \alpha}(\alpha) = (p_k(x_j))_{j=1}^N, \quad 1 \leq k \leq Q$$

gilt und vorausgesetzt wurde, daß $P := (p_k(x_j))_{\substack{i=1,\dots,N \\ k=1,\dots,Q}}$ injektiv ist, so hat P vollen Rang Q für $N > Q$ und die Lagrange Multiplikatorenregel läßt sich anwenden. Gesucht ist also für $\alpha \in \mathbb{R}^N$ und $\tilde{\lambda} \in \mathbb{R}^Q$ ein stationärer Punkt der Funktion

$$H(\alpha, \tilde{\lambda}) := \frac{1}{2} \|f - \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi(\cdot - x_j)\|^2 + \sum_{k=1}^Q \tilde{\lambda}_k \sum_{j=1}^N \alpha_j p_k(x_j).$$

Differenzieren von $H(\alpha, \tilde{\lambda})$ nach α ergibt

$$\int_{\Omega} (s^*(x) - f(x)) \left(\sum_{j=1}^N v_j \Phi(x - x_j) \right) dx + \sum_{k=1}^Q \lambda_k \sum_{j=1}^N \alpha_j p_k(x_j) = 0$$

mit bester Approximierenden $s^* \in S_X$, $\lambda := (\lambda_k)_{k=1}^Q = -\tilde{\lambda}$ und einem beliebigen Element $\sum_{j=1}^N v_j \Phi(\cdot - x_j)$ aus S_X , wobei $v := (v_j)_{j=1}^N$ die gestellte Nebenbedingung erfüllt. Setzt man $\alpha := (\alpha_j)_{j=1}^N$ und definiert

$$\begin{aligned} A_X &:= (\langle \Phi(\cdot - x_j), \Phi(\cdot - x_k) \rangle)_{j,k=1}^N, \\ P &:= (p_k(x_j))_{\substack{i=1,\dots,N \\ k=1,\dots,Q}} \text{ und} \\ f_{\Phi} &:= (\langle f, \Phi(\cdot - x_j) \rangle)_{j=1}^N, \end{aligned}$$

so schreibt sich der Lagrange-Ansatz als

$$\alpha^t A_X v + \lambda^t P \alpha = f_{\Phi}^t v$$

für

$$\alpha \in \mathbb{R}^N, v \in V_m^- \{X\} \text{ und } \lambda \in \mathbb{R}^Q.$$

Da $\lambda^t P \alpha = 0$ durch die Nebenbedingung des gestellten Approximationsproblems gefordert ist, ergibt sich

$$(\alpha^t A_X - f_{\Phi}^t) v = 0$$

und wegen $v \in V_m^- \{X\}$ folgt $\alpha^t A_X - f_{\Phi}^t = -\mu^t P$, $\mu \in \mathbb{R}^Q$. Hiermit läßt sich das gestellte Approximationsproblem in Matrix-Schreibweise darstellen durch

$$\begin{pmatrix} A_X & P \\ P^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{\Phi}^t \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.7)$$

Wird nun eine Stabilitäts-Untersuchung durchgeführt, so ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} A_X & P \\ P^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha + \Delta\alpha \\ \mu + \Delta\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{\Phi}^t + \Delta f_{\Phi}^t \\ 0 \end{pmatrix},$$

wobei $\Delta\alpha$, $\Delta\mu$ und Δf_{Φ}^t die Störungen der jeweiligen Vektoren darstellen.

Kürzt man die sich aus (1.7) ergebenden Gleichungen, so resultiert daraus

$$A_X \Delta \alpha + P \Delta \mu = \Delta f_{\Phi}^t$$

mit

$$P^t \Delta \alpha = 0. \tag{1.8}$$

Werden beide Gleichungen von links mit $(\Delta \alpha)^t$ multipliziert, so folgt

$$(\Delta \alpha)^t A_X \Delta \alpha + (\Delta \alpha)^t P \Delta \mu = (\Delta \alpha)^t \Delta f_{\Phi}^t$$

mit

$$(\Delta \alpha)^t P^t \Delta \alpha = 0.$$

Da $(\Delta \alpha)^t P^t$ gerade die Nebenbedingung (1.8) erfüllt, also gleich Null ist, ergibt sich:

$$(\Delta \alpha)^t A_X \Delta \alpha = (\Delta \alpha)^t \Delta f_{\Phi}^t.$$

Aufgrund des Satzes von Courant (siehe Schaback, Werner [10]) läßt sich $(\Delta \alpha)^t A_X \Delta \alpha$ nach unten durch das Produkt des kleinsten Eigenwertes $\underline{\lambda}$ von A_X und der Norm von $\Delta \alpha$ zum Quadrat abschätzen und für $(\Delta \alpha)^t \Delta f_{\Phi}^t$ ist mit Hilfe der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung eine obere Schranke durch das Produkt der Normen von $\Delta \alpha$ und Δf_{Φ}^t gegeben. Daraus ergibt sich

$$\underline{\lambda}(A_X) \|\Delta \alpha\|^2 \leq \|\Delta \alpha\| \|\Delta f_{\Phi}^t\|,$$

was äquivalent ist zu

$$\|\Delta \alpha\| \leq \frac{\|\Delta f_{\Phi}^t\|}{\underline{\lambda}(A_X)}.$$

Anhand dieser Abschätzung wird deutlich, daß die Norm des absoluten Fehlers von α im wesentlichen durch den kleinsten Eigenwert der Matrix A_X nach oben beschränkt wird. Deshalb ist eine Betrachtung des Wertes $\underline{\lambda}(A_X)$ von großem Interesse, um Aussagen über die numerische Stabilität des gestellten Approximationsproblems treffen zu können. Aufgrund dieser Überlegungen reicht es folglich, eine untere Schranke der quadratischen Form $\langle A_X \alpha, \alpha \rangle$ zu bestimmen. Denn nach dem Satz von Courant gilt:

$$\underline{\lambda}(A_X) = \inf_{\alpha \in V_m^{\perp}\{X\}} \frac{\langle A_X \alpha, \alpha \rangle}{\|\alpha\|^2}.$$

Das bedeutet, falls die untere Schranke der quadratischen Form bezüglich der Approximationsmatrix A_X positiv unter der Nebenbedingung ist, daß die Matrix A_X nur positive Eigenwerte besitzt und somit invertierbar unter der Nebenbedingung ist. Daraus folgt die Existenz und Eindeutigkeit einer besten Approximierenden $s^* \in S_X$.

Die Hauptintention dieser Arbeit besteht nun darin, die quadratische Form $\langle A_X \alpha, \alpha \rangle$ nach unten abzuschätzen.

2 Untere Schranken einiger quadratischer Formen

Einleitung

Um Aussagen über das Stabilitätsverhalten der Matrix A_X des in Kapitel 1.4 gestellten L_2 -Approximationsproblems treffen zu können, besteht die Aufgabe zunächst darin, eine positive untere Schranke für $\langle A_X \alpha, \alpha \rangle$ zu finden, mit Approximationsmatrix A_X und $\alpha \in V_m^-\{X\} \subset \mathbb{R}^N$. Damit lassen sich Schlüsse bezüglich des kleinsten Eigenwertes der Matrix A_X ziehen mit α , welches die Nebenbedingung des Problems erfüllt. Die bei der Bestimmung einer unteren Schranke für $\langle A_X \alpha, \alpha \rangle$ auftretenden Integrale werden durch Riemann-Summen abgeschätzt. Die benötigten Stützpunkte stellen dabei gewisse Gitterpunkte eines d -dimensionalen Würfels um das jeweilige Zentrum x_k für $1 \leq k \leq N$ dar. Die Anzahl der Stützpunkte bezüglich eines Zentrums x_k ist endlich. Außerdem sind diese Punkte von x_k , $1 \leq k \leq N$, verschieden.

Durch die Einschränkung der Stützpunkte auf eine gewisse Teilmenge pro Würfel $W(x_k)$ läßt sich dann die Anzahl dieser Punkte berechnen, wodurch sich die so entstehende untere Schranke der quadratischen Form $\langle A_X \alpha, \alpha \rangle$ als in der Praxis berechenbare Größe ergibt.

Das betrachtete Approximationsproblem läßt sich, wie in Kapitel 3 gezeigt wird, auf ein bestimmtes Interpolationsproblem zurückführen. Somit werden als erstes quadratische Formen bezüglich bestimmter Interpolationsmatrizen betrachtet, wobei die Resultate dieses Kapitels, besonders Theorem 1 und Theorem 2, in Kapitel 3.1 und 3.2 Verwendung finden.

Die als Vorbereitung für Kapitel 3 zu betrachtenden quadratischen Formen lauten:

- 1) $\langle A_1(\Phi)\alpha, \alpha \rangle$ bzw. $\langle A_1(\mu)\alpha, \alpha \rangle$, woraus sich
- 2) $I(\Phi)$ bzw. $I(\mu)$ und
- 3) $J(\Phi, D)$ bzw. $J(\mu, D)$

ergeben, unterschieden jeweils nach Art der zugrundeliegenden Theorie (Fourier-Stieltjes – bzw. Laplace-Stieltjes – Theorie). Diese Terme werden in Kapitel 2.1 definiert.

Ausgangspunkt und Motivation

Das hier zugrundeliegende Interpolationsproblem ist im Vergleich zu (1.4) aus Kapitel 1.3 etwas modifiziert. Es lautet:

Sei $\Phi \in BPD(m)$, $m \in \mathbb{N}_0$, fest gewählt und $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subset \Omega$ eine Menge paarweise verschiedener Punkte aus dem \mathbb{R}^d , sogenannte *Zentren*. Sei $Y = \{y_1, \dots, y_N\} \subset \Omega$ eine Menge von N paarweise verschiedenen *Aufpunkten*, welche $x_j - y_j =: D \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ für alle $j = 1, \dots, N$ erfüllen, und sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein kompaktes Gebiet. Zu gegebenen reellwertigen Punkten $f(y_1), \dots, f(y_N)$ wird die eindeutige Funktion

$$s \in S_X := \left\{ \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi(\cdot - x_j) : \alpha \in V_m^- \{X\} \right\}$$

gesucht, so daß gilt

$$s(y_i) = f(y_i), \quad 1 \leq i \leq N.$$

Somit unterscheiden sich die Interpolationspunkte y_i von den Zentren x_i um einen von i unabhängigen Verschiebungsvektor D für $1 \leq i \leq N$. Für $\Phi \in BPD(0)$ hat $s \in S_X$ die gleiche Form wie (1.3), für $m \in \mathbb{N}$ entfällt hier der polynomiale Anteil der Interpolante. In diesem Kapitel wird eine untere Schranke der quadratischen Form $\langle A_1(\Phi)\alpha, \alpha \rangle$ bestimmt, wobei $A_1(\Phi)$ die in Definition 2.1 eingeführte symmetrische $N \times N$ -Matrix ist. Es ist an dieser Stelle nicht notwendig, das vorliegende Interpolationsproblem auf Existenz oder Eindeutigkeit einer Interpolante zu untersuchen.

2.1 Der Fall $\Phi \in BPD(m)$ mit $m \in \mathbb{N}_0$

Im folgenden seien $X = \{x_j\}_{j=1}^N, Y = \{y_j\}_{j=1}^N$ zwei Punktmenge aus dem \mathbb{R}^d mit

- (i) $x_j \neq x_k$ und $y_j \neq y_k$ falls $j \neq k, 1 \leq j, k \leq N$,
- (ii) $x_j - y_j =: D \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ für $1 \leq j \leq N$.

Definition 2.1 Sei $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, \Phi \in BPD(m)$. Führe folgende Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned} A(\Phi) &:= (\Phi(y_j - x_k))_{j,k=1}^N \quad \text{eine } N \times N\text{-Matrix,} \\ A_1(\Phi) &:= \frac{A(\Phi) + A(\Phi)^t}{2} \quad \text{eine symmetrische } N \times N\text{-Matrix und} \end{aligned}$$

$$V_m^- \{X\} := \left\{ \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N) \in \mathbb{R}^N : \sum_{j=1}^N \alpha_j p(x_j) = 0 \text{ für alle } p \in \mathbb{P}_m^d \right\}.$$

Dabei bedeutet $\alpha \in V_m^- \{X\}$, daß α die Nebenbedingung der Definition der bedingt positiven Definitheit der Ordnung m erfüllt.

Um das Problem der L_2 -Approximation mit radialen Basisfunktionen, welches Quak, Sivakumar, Ward in [8] für $\Phi \in BPD(0)$ und $-\Phi \in BPD(1)$ betrachten, auf den Fall $\Phi \in BPD(m), m \in \mathbb{N}_0$, übertragen zu können, ist folgende Voraussetzung notwendig:

Definition 2.2 Eine Funktion $\Phi \in BPD(m)$ erfüllt die *Voraussetzung (A)*, falls sie eine (verallgemeinerte) Fouriertransformierte $\varphi : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ besitzt, und falls für alle $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subset \mathbb{R}^d$ mit paarweise verschiedenen x_j und alle $\alpha \in V_m^-\{X\}$

$$\sum_{j,k=1}^N \alpha_j \alpha_k \Phi(x_j - x_k) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(w) \left| \sum_{j=1}^N \alpha_j e^{ix_j^t w} \right|^2 dw \quad (2.1)$$

gilt.

Diese Voraussetzung ist für $\Phi \in L_1(\mathbb{R}^d)$ mit $\hat{\Phi} = \varphi \in L_1(\mathbb{R}^d)$ aufgrund der Umkehrformel erfüllt. Eine hinreichende Bedingung für die *Voraussetzung (A)* liefert der nachstehende Satz, dessen Beweis bei Wu, Schaback [19] zu finden ist.

Satz 2.3 $\Phi \in BPD(m)$ besitze eine stetige (verallgemeinerte) Fouriertransformierte φ mit $\varphi : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$, welche das Verhalten $\varphi(w) = \mathcal{O}(\|w\|^{-d-s_0})$ für $\|w\| \rightarrow 0$ und $\varphi(w) = \mathcal{O}(\|w\|^{-d-s_\infty})$ für $\|w\| \rightarrow \infty$ mit Konstanten $s_\infty > 0$, $s_0 < 2m$ hat. Dann gilt für Φ die *Voraussetzung (A)*. \square

Als ersten wichtigen Gesichtspunkt betrachte man die quadratische Form $\langle A_1(\Phi)\alpha, \alpha \rangle$ mit

$$\langle A_1(\Phi)\alpha, \alpha \rangle := \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^N \alpha_j \alpha_k [\Phi(y_k - x_j) + \Phi(y_j - x_k)]$$

und $\alpha \in V_m^-\{X\}$, wobei $\Phi \in BPD(m)$ die *Voraussetzung (A)* erfülle. Das erste Ziel der Arbeit ist es nun, eine untere Schranke für diese Form zu bestimmen, woraus sich eine untere Abschätzung für $\|A_1(\Phi)\alpha\|$ ergibt. Die Beweisidee ist von Quak, Sivakumar, Ward [8] übernommen. Ich habe sie auf den Ansatz mit Fourier-Stieltjes – Integralen übertragen, um eine Aussage für $\Phi \in BPD(m)$, $m \in \mathbb{N}_0$, anstelle für $\Phi \in BPD(0)$ bzw. $-\Phi \in BPD(1)$ zu erhalten.

Satz 2.4 Sei $\Phi \in BPD(m)$ und Φ erfülle die *Voraussetzung (A)*. Sei $\alpha \in V_m^-\{X\}$. Dann erfüllt die quadratische Form $\langle A_1(\Phi)\alpha, \alpha \rangle$ folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} \langle A_1(\Phi)\alpha, \alpha \rangle &= \sum_{j,k=1}^N \alpha_j \alpha_k \Phi(x_j - x_k) - (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(w) 2 \sin^2 \left(\frac{D^t w}{2} \right) \left| \sum_{j=1}^N \alpha_j e^{ix_j^t w} \right|^2 dw \\ &=: I(\Phi) - J(\Phi, D) \end{aligned} \quad (2.2)$$

Beweis: Mit Hilfe der Bedingung, daß Φ eine (verallgemeinerte) Fouriertransformierte besitzt, ergibt sich für die quadratische Form

$$\begin{aligned}
 \langle A_1(\Phi)\alpha, \alpha \rangle &= \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^N \alpha_j \alpha_k [\Phi(y_k - x_j) + \Phi(y_j - x_k)] \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^N \alpha_j \alpha_k (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(w) [e^{i(y_k - x_j)^t w} + e^{i(y_j - x_k)^t w}] dw.
 \end{aligned}$$

Wird dieser Ausdruck in zwei Terme aufgespalten, wobei der eine die schon in Schaback [9] behandelte quadratische Form $I(\Phi) := \sum_{j,k=1}^N \alpha_j \alpha_k \Phi(x_j - x_k)$ ist, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
 \langle A_1(\Phi)\alpha, \alpha \rangle &= \sum_{j,k=1}^N \alpha_j \alpha_k \Phi(x_j - x_k) - (2\pi)^{-d} \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^N \alpha_j \alpha_k \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(w) \\
 &\quad \times [e^{-i(x_j - x_k)^t w} - e^{-i(x_j - y_k)^t w} + e^{-i(x_k - x_j)^t w} - e^{-i(x_k - y_j)^t w}] dw \\
 &= I(\Phi) - (2\pi)^{-d} \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^N \alpha_j \alpha_k \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(w) \\
 &\quad \times [e^{-i(x_j - x_k)^t w} - e^{-i(x_j - y_k)^t w} + e^{-i(x_k - x_j)^t w} - e^{-i(x_k - y_j)^t w}] dw.
 \end{aligned}$$

Mit $x_j - y_j = D \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ für $j = 1, \dots, N$ folgt für die quadratische Form

$$\begin{aligned}
 \langle A_1(\Phi)\alpha, \alpha \rangle &= I(\Phi) - (2\pi)^{-d} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(w) \sum_{j,k=1}^N \alpha_j \alpha_k \\
 &\quad \times [e^{-i(x_j - x_k)^t w} - e^{-i(x_j - x_k + D)^t w} + e^{-i(x_k - x_j)^t w} - e^{-i(x_k - x_j + D)^t w}] dw \\
 &= I(\Phi) - (2\pi)^{-d} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(w) \sum_{j,k=1}^N \alpha_j \alpha_k \\
 &\quad \times [e^{-i(x_j - x_k)^t w} \{1 - e^{-iD^t w}\} + e^{-i(x_k - x_j)^t w} \{1 - e^{-iD^t w}\}] dw \\
 &= I(\Phi) - (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(w) \sum_{j,k=1}^N \alpha_j \alpha_k e^{-i(x_j - x_k)^t w} \{1 - e^{-iD^t w}\} dw.
 \end{aligned}$$

Man braucht nur den Realteil der Summanden zu betrachten, da die quadratische Form an sich reell ist.

$$\begin{aligned}
 \Re\left(\sum_{j,k=1}^N \alpha_j \alpha_k e^{-i(x_j - x_k)^t w} \{1 - e^{-iD^t w}\}\right) &= [1 - \cos(D^t w)] \sum_{j,k=1}^N \alpha_j \alpha_k e^{-i(x_j - x_k)^t w} \\
 &= [1 - \cos(D^t w)] \left| \sum_{j=1}^N \alpha_j e^{ix_j^t w} \right|^2 \\
 &= 2 \sin^2\left(\frac{D^t w}{2}\right) \left| \sum_{j=1}^N \alpha_j e^{ix_j^t w} \right|^2
 \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ist, wie gefordert, reell, somit folgt für den gesuchten Term

$$\begin{aligned}
 \langle A_1(\Phi)\alpha, \alpha \rangle &= I(\Phi) - (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(w) \sum_{j,k=1}^N \alpha_j \alpha_k e^{-i(x_j - x_k)^t w} \{1 - e^{-iD^t w}\} dw \\
 &= I(\Phi) - (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(w) 2 \sin^2\left(\frac{D^t w}{2}\right) \left| \sum_{j=1}^N \alpha_j e^{ix_j^t w} \right|^2 dw
 \end{aligned}$$

□

Um eine untere Schranke der quadratischen Form aus Satz 2.4 zu erhalten, werden $I(\Phi)$ und $J(\Phi, D)$ nach unten abgeschätzt. Die entsprechende Aussage wird dann in Theorem 1 formuliert.

Für den ersten Term $I(\Phi) = \langle A_I(\Phi)\alpha, \alpha \rangle$ mit $A_I(\Phi) := (\Phi(x_j - x_k))_{j,k=1}^N$ beziehe ich mich auf die Ergebnisse von Wendland [17].

Satz 2.5 *Sei $\Phi \in BPD(m)$ und $\alpha \in V_m^-\{X\}$. Voraussetzung (A) sei erfüllt. Dann gilt*

$$\begin{aligned}
 \sum_{j,k=1}^N \alpha_j \alpha_k \Phi(x_j - x_k) &\geq \frac{\beta^d \varphi_\beta}{2^{d+1} \pi^{d/2} \Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right)} \|\alpha\|^2 \\
 &= \frac{C_d^d \varphi_\beta}{2^{d+1} \pi^{d/2} \Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right) q^d} \|\alpha\|^2
 \end{aligned}$$

mit

$$q := \frac{1}{2} \min_{j \neq k} \|x_j - x_k\|,$$

$$\begin{aligned}\beta &:= 4[3^{d-1}\Gamma^2(\frac{d}{2} + 1)\pi]^{\frac{1}{d+1}}q^{-1}, \\ \varphi_\beta &:= \min_{\|w\| \leq 2\beta} \varphi(w), \\ C_d &:= \beta q.\end{aligned}$$

Bemerkung 2.6

- 1) Satz 2.5 liefert eine untere Abschätzung der quadratischen Form $I(\Phi)$ (des Interpolationsproblems) der Art $I(\Phi) \geq I'(\Phi)\|\alpha\|^2$ mit

$$I'(\Phi) := \frac{\beta^d \varphi_\beta}{2^{d+1} \pi^{d/2} \Gamma(\frac{d}{2} + 1)}. \quad (2.3)$$

- 2) Falls $\Phi \in BPD(m)$ und $I'(\Phi) > 0$ gilt, so ergibt sich sofort die Abschätzung $\|A_I(\Phi)^{-1}\| \leq \frac{1}{I'(\Phi)}$, falls $\|\alpha\| = 1$, da $\|A_I(\Phi)^{-1}\|$ das Reziproke des kleinsten Eigenwertes von $A_I(\Phi)$ ist. Daraus folgt die Invertierbarkeit der Matrix $A_I(\Phi)$ und die Existenz und Eindeutigkeit für die Interpolante s .

Für eine Abschätzung des zweiten Terms $J(\Phi, D)$ der quadratischen Form aus Satz 2.4 wird folgender Satz benutzt:

Satz 2.7 $\Phi \in BPD(m)$ erfülle die Voraussetzung (A) und ihre (verallgemeinerte) Fouriersransformierte φ habe das Verhalten $\varphi(w) = \mathcal{O}(\|w\|^{-2-n_0})$ für $\|w\| \rightarrow 0$ mit $n_0 > 0$ und $\varphi(w) = \mathcal{O}(\|w\|^{-2-n_\infty})$ für $\|w\| \rightarrow \infty$ mit $n_\infty > d$. Es sei $\alpha \in V_m^-\{X\}$. Dann folgt:

(i) Ist zusätzlich $0 < n_0 < 2m + d$, so gilt

$$\begin{aligned}J(\Phi, D) &= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(w) 2 \sin^2\left(\frac{D^t w}{2}\right) \left| \sum_{j=1}^N \alpha_j e^{ix_j^t w} \right|^2 dw \\ &\leq (2\pi)^{-d} \frac{1}{2} \|D\|^2 \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(w) \|w\|^2 \left| \sum_{j=1}^N \alpha_j e^{ix_j^t w} \right|^2 dw \\ &=: J'(\Phi, D)\end{aligned} \quad (2.4)$$

(ii) Ist $0 < n_0 < d$, so ist

$$\begin{aligned}J(\Phi, D) &\leq N \|\alpha\|^2 (2\pi)^{-d} \frac{1}{2} \|D\|^2 \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(w) \|w\|^2 dw \\ &=: N \|\alpha\|^2 \tilde{J}(\Phi, D).\end{aligned} \quad (2.5)$$

(iii) Für $D = 0 \in \mathbb{R}^d$ ist $J(\Phi, 0) = 0$, sonst $J(\Phi, D) > 0$.

Beweis:

- (i) Mit Hilfe der Ungleichung von Cauchy–Schwarz und $|\sin(x)| \leq |x|$ für alle $x \in \mathbb{R}$ folgt

$$\begin{aligned} J(\Phi, D) &= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(w) 2 \sin^2 \left(\frac{D^t w}{2} \right) \left| \sum_{j=1}^N \alpha_j e^{ix_j^t w} \right|^2 dw \\ &\leq (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(w) 2 \left(\frac{D^t w}{2} \right)^2 \left| \sum_{j=1}^N \alpha_j e^{ix_j^t w} \right|^2 dw \\ &\leq \frac{1}{2} (2\pi)^{-d} \|D\|^2 \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(w) \|w\|^2 \left| \sum_{j=1}^N \alpha_j e^{ix_j^t w} \right|^2 dw. \end{aligned}$$

Zu überprüfen bleibt die Existenz des Integrals, d.h. die Integrierbarkeit von $\varphi(w)$ in der Null und im Unendlichen. Als erstes wird die Integrierbarkeit in der Null betrachtet:

Es gilt, in $J'(\Phi, D)$ den Term $|\sum_{j=1}^N \alpha_j e^{ix_j^t w}|^2$ in Abhängigkeit von w abzuschätzen. Betrachtet wird dazu der Ausdruck $G(w) := \sum_{j=1}^N \alpha_j e^{ix_j^t w}$. Da die Exponentialfunktion unendlich oft stetig differenzierbar ist, läßt sie sich durch eine Taylorreihe um 0 entwickeln. Definiert man $k := (k_1, \dots, k_d)$, $|k| := k_1 + \dots + k_d$, $\binom{l}{k} := \frac{l!}{k_1! \dots k_d!}$ und $x^k := x_1^{k_1} \dots x_d^{k_d}$, so folgt mit dem Multinomialssatz:

$$e^{ix_j^t w} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{i^l}{l!} (x_j^t w)^l = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{i^l}{l!} \sum_{|k| \leq l} \binom{l}{k} (x_j^t w)^k = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{i^l}{l!} \sum_{|k| \leq l} p_{k,l}(x_j) w^k$$

mit $p_{k,l}(x_j) := \binom{l}{k} x_j^k$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \alpha_j e^{ix_j^t w} &= \sum_{j=1}^N \alpha_j \sum_{l=0}^{\infty} \frac{i^l}{l!} \sum_{|k| \leq l} p_{k,l}(x_j) w^k \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{i^l}{l!} \sum_{|k| \leq l} \left(\sum_{j=1}^N \alpha_j p_{k,l}(x_j) \right) w^k. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Nun gilt $G(w) = \sum_{j=1}^N \alpha_j p_{k,l}(x_j) = 0$ für $|k| \leq m - 1$, da $\alpha \in V_m^- \{X\}$ ist. Somit verringert sich (2.6) zu

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j e^{ix_j^t w} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{i^l}{l!} \sum_{m \leq |k| \leq l} \left(\sum_{j=1}^N \alpha_j p_{k,l}(x_j) \right) w^k. \quad (2.7)$$

Da $G(w) \in C^\infty(U)$, wobei U eine offene und konvexe Umgebung der Null ist, läßt sich $G(w)$ mit Hilfe der d -dimensionalen Taylorformel bis zum Grad $m - 1$ mit

einem gewissen Restglied in U entwickeln. Es folgt für $w \in U$ und $0 \leq \theta \leq 1$:

$$\begin{aligned} G(w) &= \sum_{|p| \leq m-1} \frac{D^p G(w)}{p!} w^p + \sum_{|p|=m} \frac{D^p G(\theta w)}{p!} w^p \\ &=: S_{m-1}(w) + R_m(w). \end{aligned}$$

Nun geht $R_m(w)$ für $m \rightarrow \infty$ gegen Null, da $G(w) \in C^\infty(U)$ gilt. Damit ist $R_m(w)$ für $\|w\| \leq R$ beschränkt. Benutzt man außerdem $S_{m-1}(w) = 0$ aufgrund der rechten Seite von (2.7), so läßt sich für $G(w)$ mit $R > 0$ folgende Abschätzung treffen:

$$|G(w)| = \left| \sum_{j=1}^N \alpha_j e^{ix_j^t w} \right| \leq \tilde{c} \|w\|^m, \quad \|w\| \leq R.$$

Dabei ist $\tilde{c} > 0$ eine Konstante, welche sich aus einer Abschätzung nach oben von $|\sum_{|p|=m} \frac{D^p G(\theta w)}{p!}|$ ergibt. Damit folgt

$$\left| \sum_{j=1}^N \alpha_j e^{ix_j^t w} \right|^2 \leq c \|w\|^{2m}, \quad \|w\| \leq R \quad (2.8)$$

mit einem gewissen $c > 0$. Durch Übergang zu Polarkoordinaten folgt für (2.4) mit $\|w\| \leq R$ und $\delta > 0$:

$$\begin{aligned} J'_\delta(\Phi, D) &:= (2\pi)^{-d} \frac{1}{2} \|D\|^2 \int_{\delta \leq \|w\| \leq R} \varphi(w) \|w\|^2 \left| \sum_{j=1}^N \alpha_j e^{ix_j^t w} \right|^2 dw \\ &= c (2\pi)^{-d} \frac{1}{2} \|D\|^2 \int_{S_{d+1}} \int_{\delta}^R \varphi(\theta r) (\theta r)^2 \left| \sum_{j=1}^N \alpha_j e^{ix_j^t(\theta r)} \right|^2 dr d\theta \\ &\leq c (2\pi)^{-d} \frac{1}{2} \|D\|^2 \omega_{d-1} \int_{\delta}^R r^{-2-n_o} r^2 r^{2m} r^{d-1} dr \\ &= c (2\pi)^{-d} \frac{1}{2} \|D\|^2 \omega_{d-1} \int_{\delta}^R r^{2m+d-n_o-1} dr \\ &= (2\pi)^{-d} \frac{1}{2} \|D\|^2 \frac{c \omega_{d-1}}{2m+d-n_o} [R^{2m+d-n_o} - \delta^{2m+d-n_o}]. \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet ω_{d-1} das Volumen der $(d-1)$ -dimensionalen Sphäre. Die Betrachtung des Grenzübergangs von $J'_\delta(\Phi, D)$ für $\delta \rightarrow 0$ ergibt

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} J'_\delta(\Phi, D) = \frac{c \omega_{d-1}}{2m+d-n_o} R^{2m+d-n_o},$$

falls $0 < n_o < 2m+d$ gefordert wird. Damit ist das Integral (2.4) endlich.

Bezüglich der Integrierbarkeit von φ im Unendlichen ist die Existenz des Integrals $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(w) \|w\|^2 dw$ nachzuweisen. Es ergibt sich für $\|w\| \geq \delta$ mit $\delta > 0$, $R > 0$ und durch Übergang zu Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned}
 \int_{\delta \leq \|w\| \leq R} \varphi(w) \|w\|^2 dw &= \omega_{d-1} \int_{\delta}^R \varphi(r) r^2 r^{d-1} dr \\
 &\leq \omega_{d-1} \int_{\delta}^R r^{-2-n_{\infty}} r^2 r^{d-1} dr \\
 &= \omega_{d-1} \int_{\delta}^R r^{d-n_{\infty}-1} dr \\
 &= \frac{\omega_{d-1}}{d-n_{\infty}} [R^{d-n_{\infty}} - \delta^{d-n_{\infty}}]
 \end{aligned}$$

und durch Grenzwertbetrachtung des Integrals für $R \rightarrow \infty$ folgt

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left| \frac{\omega_{d-1}}{d-n_{\infty}} (R^{d-n_{\infty}} - \delta^{d-n_{\infty}}) \right| = \frac{\omega_{d-1}}{d-n_{\infty}} \delta^{d-n_{\infty}},$$

falls $n_{\infty} > d$ gefordert wird und somit ist das Integral (2.4) endlich. Insgesamt folgt, daß das Integral (2.4) unter den an φ gestellten Voraussetzungen existent ist und (i) ist gezeigt.

(ii) Für (ii) verwende man $\left| \sum_{j=1}^N \alpha_j e^{ix_j^t w} \right|^2 \leq \left| \sum_{j=1}^N |\alpha_j| \right|^2 \leq N \|\alpha\|^2$. Mit (i) wird nun gefolgert:

$$\begin{aligned}
 J(\Phi, D) &\leq \frac{1}{2} (2\pi)^{-d} \|D\|^2 \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(w) \|w\|^2 \left| \sum_{j=1}^N \alpha_j e^{ix_j^t w} \right|^2 dw \\
 &\leq N \|\alpha\|^2 (2\pi)^{-d} \frac{1}{2} \|D\|^2 \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(w) \|w\|^2 dw.
 \end{aligned}$$

Die Existenz des Integrals für $\|w\| \rightarrow \infty$ folgt aus Teil (i) des Beweises. Für $\|w\| \rightarrow 0$ wird folgendes betrachtet: Sei $\varphi(w) = \mathcal{O}(\|w\|^{-2-n_0})$ für $\|w\| \rightarrow 0$ mit $n_0 > d$. Dann ergibt sich für $\|w\| \leq R$ mit $R > 0$ und $\delta > 0$ durch Übergang zu Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\delta \leq \|w\| \leq R} \varphi(w) \|w\|^2 dw \right| &= \left| \int_{S_{d-1}} \int_{\delta}^R \varphi(\theta r) (\theta r)^2 r^{d-1} dr d\theta \right| \\
 &\leq \omega_{d-1} \int_{\delta}^R r^{-2-n_0} r^2 r^{d-1} dr \\
 &= \omega_{d-1} \int_{\delta}^R r^{d-n_0-1} dr \\
 &= \frac{1}{d-n_0} (R^{d-n_0} - \delta^{d-n_0}).
 \end{aligned}$$

Wird nun $0 < n_0 < d$ eingeschränkt und $\lim_{\delta \rightarrow 0} \left| \int_{r \leq \|w\| \leq R} \varphi(w) \|w\|^2 dw \right|$ betrachtet, so wird ersichtlich, daß der Grenzwert unter den an n_0 gestellten Bedingungen endlich ist, was zu zeigen war.

- (iii) Die letzte Aussage folgt aus der Definition von $J(\Phi, D)$. Wegen $\sin 0 = 0$ ist der gesamte Ausdruck für $D = 0$ gleich Null. Für $D \neq 0$ gilt $J(\Phi, D) > 0$, da hier der Integrand positiv ist.

□

Aufgrund bisheriger Überlegungen ist es nun möglich, die erste Hauptaussage der Arbeit zu formulieren.

Theorem 1 Sei $\Phi \in BPD(m)$ und erfülle Voraussetzung (A), sei $\alpha \in V_m^-\{X\}$. Es seien $X = \{x_1, \dots, x_N\}$ und $Y = \{y_1, \dots, y_N\}$ zwei Mengen paarweise verschiedener Punkte aus dem \mathbb{R}^d mit $x_j - y_j = D \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ für $1 \leq j \leq N$. Die (verallgemeinerte) Fouriertransformierte φ von Φ habe das Verhalten $\varphi(w) = \mathcal{O}(\|w\|^{-2-n_0})$ für $\|w\| \rightarrow 0$ mit $0 < n_0 < d$ und $\varphi(w) = \mathcal{O}(\|w\|^{-2-n_\infty})$ für $\|w\| \rightarrow \infty$ mit $n_\infty > d$. $I'(\Phi) > N\tilde{J}(\Phi, D)$ sei erfüllt. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \|A_1(\Phi)\alpha\| &\geq \left[\frac{\beta^d \varphi_\beta}{2^{d+1} \pi^{d/2} \Gamma(\frac{d}{2} + 1)} - \frac{N}{2} (2\pi)^{-d} \|D\|^2 \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(w) \|w\|^2 dw \right] \|\alpha\| \\ &= [I'(\Phi) - N\tilde{J}(\Phi, D)] \|\alpha\| \end{aligned} \quad (2.9)$$

mit

$$\begin{aligned} q &:= \frac{1}{2} \min_{j \neq k} \|x_j - x_k\|, \\ \beta &:= 4[3^{d-1} \Gamma^2(\frac{d}{2} + 1) \pi]^{\frac{1}{d+1}} q^{-1}, \\ \varphi_\beta &:= \min_{\|w\| \leq 2\beta} \varphi(w). \end{aligned}$$

Beweis: Nach Cauchy–Schwarz gilt die Ungleichung

$$\begin{aligned} \|A_1(\Phi)\alpha\| \|\alpha\| &\geq \langle A_1(\Phi)\alpha, \alpha \rangle \\ &= I(\Phi) - J(\Phi, D), \end{aligned}$$

was sich mit Satz 2.4 ergibt. Wird zusätzlich Bemerkung 2.6 1) und Satz 2.7 (ii) angewandt, so ergibt sich die gesuchte untere Abschätzung der Norm von $A_1(\Phi)\alpha$. □

Bemerkung 2.8

- 1) Ich habe eine Abschätzung für $\|A_1(\Phi)\alpha\|$ gefunden, welche in der Beweisführung des Theorems 3 in Kapitel 3.1 weiter verwendet werden wird, um eine positive untere Schranke der quadratischen Form $\langle A_X\alpha, \alpha \rangle$ zu bestimmen. Dabei beschreibt, wie in der Einleitung dieses Kapitels schon erwähnt, A_X die L_2 -Approximationsmatrix und $\alpha \in V_m^-\{X\}$ den Lösungsvektor der besten Approximierenden.
- 2) Die Ungleichung in Theorem 1 wird durch den Distanzvektor D der gegebenen Punktmenge X und Y bestimmt, außerdem durch die Anzahl N der Elemente von X und Y , der Separationsdistanz $q > 0$, dem Faktor β , der Dimension d des zugrundeliegenden Raumes \mathbb{R}^d und durch die Funktion Φ selbst. Diese Einflußfaktoren übertragen sich, wie in Kapitel 3.1 ersichtlich wird, auf die Abschätzung von $\langle A_X\alpha, \alpha \rangle$.
- 3) Als positiver Nebeneffekt ergeben sich in Theorem 1 Abschätzungen der quadratischen Form von Interpolationsmatrizen mit voneinander verschiedenen Zentren und Stützpunkten.

2.2 Der Fall $\Phi \in BPD(0)$ oder $-\Phi \in BPD(1)$

Dieser Fall wurde von Quak, Sivakumar, Ward [8] untersucht. Der Unterschied zum Fall $\Phi \in BPD(m)$ mit $m \in \mathbb{N}_0$ beruht auf der Darstellung der Funktion Φ . Während im allgemeinen Fall auf die (verallgemeinerte) Fouriertransformierte zurückgegriffen wird, liegt in diesem Abschnitt die Darstellungsweise von Bernstein und der Begriff der vollständigen Monotonie zugrunde. Ausgangspunkt ist das am Anfang von Kapitel 2 eingeführte Interpolationsproblem. Die Thematik dieses Abschnitts ist daher die gleiche wie die von Kapitel 2.1. Ohne den Ablauf im einzelnen darzustellen, werden hier die wichtigsten Ergebnisse der Arbeit von Quak, Sivakumar, Ward [8] genannt.

Lemma 2.9 *Sei $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige und positiv definite Funktion. Dann besitzt sie eine Darstellung der Art*

$$\Phi(x) = \int_0^\infty e^{-\|x\|^2 t} d\mu(t), \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

dabei ist $d\mu(t)$ ein positives Maß, welches die Bedingungen

$$\int_0^1 d\mu(t) < \infty, \quad \int_1^\infty e^{-t} d\mu(t) < \infty$$

erfüllt.

Lemma 2.10 Sei $-\Phi$ eine bedingt positiv definite Funktion der Ordnung 1. Dann gilt

$$\Phi(x) = \Phi(0) + \int_0^\infty \frac{1 - e^{-\|x\|^2 t}}{t} d\mu(t), \quad x \in \mathbb{R}^d$$

mit positivem Maß $d\mu(t)$, für das gilt:

$$\int_0^1 d\mu(t) < \infty, \quad \int_1^\infty \frac{d\mu(t)}{t} < \infty.$$

Die Beweise der Lemmata 2.10 und 2.11 finden sich bei Schoenberg [11].

Bemerkung 2.11 Diese Darstellungen der bedingt positiv definiten Funktionen der Ordnung 0 bzw. 1 nennt man *Laplace–Stieltjes – Integrale*.

Wie man leicht verifiziert, lauten die Maße der Beispielfunktionen:

- 1) Polynomials: $\Phi_1(x) = (-1)\|x\|, \quad d\mu_1(t) := \frac{1}{2}(\pi t)^{-\frac{1}{2}} dt,$
- 2) Multiquadrics: $\Phi_2(x) = (-1)(1 + \|x\|^2)^{1/2}, \quad d\mu_2(t) := e^{-t}d\mu_1(t),$
- 3) Inverse Multiquadrics: $\Phi_3(x) = (1 + \|x\|^2)^{-1/2}, \quad d\mu_3(t) := 2d\mu_2(t),$
- 4) Gaussians: $\Phi_4(x) = e^{-\rho\|x\|^2}, \rho > 0, \quad d\mu_4(t) := \delta(t - \rho) dt.$

Dabei beschreibt $\delta(x)$ das Diracsche Maß in x .

Wird Φ durch ein Integral der Art dargestellt, wie es in Lemma 2.9 oder 2.10 eingeführt wurde, statt durch ihre Fouriertransformierte, so erhält man eine zu Theorem 1 äquivalente Aussage. Diese ist bei Quak, Sivakumar, Ward [8] bewiesen.

Theorem 2 Sei $\Phi \in BPD(0)$ oder $-\Phi \in BPD(1)$ und $d\mu$ das repräsentierende Maß. Sei $\Phi(0) \geq 0$, falls $-\Phi \in BPD(1)$. Es gelte $I'(\mu) > N\tilde{J}(\mu, D)$. Dabei seien

$$\tilde{J}(\mu, D) = \frac{2}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \sin^2\left(\frac{D^t u}{2}\right) \left[\int_0^\infty \frac{e^{-\|u\|^2/4t}}{t^{d/2+m}} d\mu(t) \right] du, \quad (2.10)$$

$$m = \begin{cases} 0 & , \quad \Phi \in BPD(0) \\ 1 & , \quad -\Phi \in BPD(1), \end{cases}$$

$$I'(\mu) = \frac{\tilde{C}_d}{q^d} \int_0^\infty \frac{e^{-\delta^2/q^2 t}}{t^{d/2+m}} d\mu(t), \quad (2.11)$$

$$\tilde{C}_d := \frac{\delta^d}{2^{d+1}\Gamma(\frac{d+2}{2})}, \quad \delta := 12 \left[\frac{\pi\Gamma^2(\frac{d+2}{2})}{9} \right]^{\frac{1}{d+1}},$$

$$2q := \min_{j \neq l} \|x_j - x_l\| > 0.$$

Dann besitzt die Norm von $A_1(\Phi)\alpha$ eine untere Schranke der Art

$$\|A_1(\Phi)\alpha\| \geq [I'(\mu) - N\tilde{J}(\mu, D)] \|\alpha\|, \quad \alpha \in \mathbb{R}^N. \quad (2.12)$$

Der Unterschied zwischen der Abschätzung (2.12) von $\|A_1(\Phi)\alpha\|$ und der unteren Schranke (2.9) aus Theorem 1 beruht auf der Darstellungsweise der Funktion Φ . Analog zu (2.9) wird die untere Schranke in (2.12) durch D , N , q , d und durch das darstellende Maß μ der Funktion Φ bestimmt. Anhand von Beispielen läßt sich der jeweilige Einfluß dieser Faktoren gut erkennen. Siehe dazu Kapitel 2.4.

Bemerkung 2.12

- 1) Betrachtet man die Terme $I'(\Phi)$ aus Kapitel 2.1 und $I'(\mu)$ dieses Abschnitts, um sie miteinander zu vergleichen, so wird eine Angleichung der auftauchenden konstanten Faktoren benötigt. Dieses wird durch die Gleichung

$$\tilde{C}_d = \pi^{\frac{d}{2}} \frac{I'(\Phi)}{\varphi_\beta}$$

erreicht, falls daß Minimum φ_β der (verallgemeinerten) Fouriertransformierten von Φ in der Kugel mit Radius 2β größer Null ist. Außerdem gilt:

$$C_d = \delta.$$

- 2) Ein direkter Vergleich der Ausdrücke (2.9) und (2.12) erscheint wünschenswert. Allerdings ist dabei eine Gegenüberstellung von Integralen des *Fourier-Stieltjes* – Typs

$$\Phi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix^t w} d\phi(w)$$

mit $d\phi(w) = \varphi(w) dw$ beziehungsweise des *Laplace-Stieltjes* – Typs

$$\Phi(w) = \int_0^\infty e^{-\|x\|^2 t} d\mu(t)$$

mit $d\mu(t)$ aus Lemma 2.11 für $\Phi \in BPD(0)$ und

$$\Phi(x) = \Phi(0) + \int_0^\infty \frac{1 - e^{-\|x\|^2 t}}{t} d\mu(t)$$

mit $d\mu(t)$ aus Lemma 2.12 für $-\Phi \in BPD(1)$ notwendig.

Die Aufgabe besteht deshalb darin, die auftretenden Maße zu vergleichen, was äußerst aufwendig und hier zu weitreichend wäre. Ein Einblick in dieses Thema findet sich für bedingt positiv definite Funktionen der Ordnung 0 und 1 in Schoenberg [12].

Da das Hauptanliegen der Arbeit auf dem Einfluß der Separationsdistanz q liegt, und weil q für eine große Anzahl N der Zentren auf einem kompaktem Gebiet Ω sehr kleine Werte annimmt, reicht es, anhand konkreter Beispiele die Ordnungen von $I'(\Phi)$ und $I'(\mu)$ für $q \rightarrow 0$ zu vergleichen. $\tilde{J}(\Phi, D)$ bzw. $\tilde{J}(\mu, D)$ sind von q unabhängig und damit in dieser Betrachtung zu vernachlässigen.

Eine tabellarische Gegenüberstellung der Ordnungen der unteren Schranken $I'(\Phi)$ und $I'(\mu)$ für $q \rightarrow 0$ befindet sich am Ende des Kapitels 2.4. In den folgenden zwei Abschnitten werden die Schranken der Beispielfunktionen Φ_i , $1 \leq i \leq 4$, unterschieden nach ihrer Darstellungsweise, berechnet.

2.3 Beispielhafte Berechnung von $I'(\Phi)$

Die (verallgemeinerten) Fouriertransformationen der Funktionen $\Phi_i(x)$, $1 \leq i \leq 4$, entnehme man zum Beispiel Schaback [9].

Die bei den Multiquadrics und den inversen Multiquadrics auftretenden Besselfunktionen der zweiten Art seien wie in Kapitel 1.1 definiert.

2.3.1 Polynomials

Die Funktion $\Phi_1(x) = (-1)\|x\|$ ist bedingt positiv definit der Ordnung 1 und besitzt die verallgemeinerte Fouriertransformierte

$$\varphi(w) = 2^d \pi^{\frac{d+1}{2}} \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right) \|w\|^{-d-1}.$$

Korollar 2.13 Für $\Phi_1(x) = (-1)\|x\|$ erhält man für die zugehörige quadratische Form der Art $I(\Phi_1) \geq I'(\Phi_1)\|\alpha\|^2$ aus Bemerkung 2.6 eine untere Schranke der Gestalt (2.3) mit

$$I'(\Phi_1) = \frac{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}{2^{d+2} \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right) C_d} q.$$

Dabei seien

$$\begin{aligned} q &:= \frac{1}{2} \min_{j \neq k} \|x_j - x_k\|, \\ \beta &:= 4[3^{d-1} \Gamma^2\left(\frac{d}{2} + 1\right) \pi]^{\frac{1}{d+1}} q^{-1}, \\ C_d &:= \beta q. \end{aligned}$$

Beweis: Dies folgt sofort aus der Definition von $I'(\Phi)$ und

$$\varphi_\beta := \min_{\|w\| \leq 2\beta} \varphi(w) = \pi^{\frac{d+1}{2}} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right) \beta^{-d-1}.$$

□

2.3.2 Multiquadrics

Die Funktion $\Phi_2(x) = (-1)(1 + \|x\|^2)^{1/2}$ ist bedingt positiv definit der Ordnung 1. Sie besitzt die verallgemeinerte Fouriertransformierte

$$\varphi(w) = \pi^{\frac{d+1}{2}} K_{\frac{d+1}{2}}(\|w\|) \left(\frac{\|w\|}{2} \right)^{-\frac{d+1}{2}}.$$

Nun ist $\varphi_\beta = \pi^{\frac{d+1}{2}} \beta^{-\frac{d+1}{2}} K_{\frac{d+1}{2}}(2\beta)$, da $K_{\frac{d+1}{2}}$ monoton fallend ist. Nach Satz 2.18 in Kapitel 2.5 besitzt K_ν die Darstellung

$$K_\nu(x) = \left(\frac{\pi}{2x} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-x}}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_0^\infty e^{-u} u^{\nu-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{u}{2x} \right)^{\nu-\frac{1}{2}} du,$$

weswegen mit Hilfe der Integraldarstellung der Gammafunktion aus Satz 1.2 folgt

$$K_\nu(x) \geq \left(\frac{\pi}{2x} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-x}}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_0^\infty e^{-u} u^{\nu-\frac{1}{2}} du = \left(\frac{\pi}{2x} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-x}.$$

Mit $\varphi_\beta \geq \frac{1}{2} \pi^{\frac{d}{2}} \beta^{-\frac{d+2}{2}} e^{-2\beta}$ ergibt sich sodann:

Korollar 2.14 Für $\Phi_2(x) = (-1)(1 + \|x\|^2)^{1/2}$ ergibt sich bezüglich der quadratischen Form $I(\Phi_2)$ eine untere Schranke der Art (2.3) mit

$$I'(\Phi_2) = \frac{C_d^{\frac{d+2}{2}}}{2^{d+2} \Gamma(\frac{d}{2} + 1)} q^{\frac{2+d}{2}} e^{-\frac{2C_d}{q}}.$$

□

2.3.3 Inverse Multiquadrics

Die Funktion $\Phi_3(x) = (1 + \|x\|^2)^{-1/2}$ ist positiv definit und besitzt die klassische Fouriertransformierte

$$\varphi(w) = 2\pi^{\frac{d+1}{2}} K_{\frac{d+1}{2}}(\|w\|) \left(\frac{\|w\|}{2} \right)^{-\frac{d+1}{2}}.$$

Wird die Ordnung $\frac{d-1}{2}$ der modifizierten Besselfunktion der zweiten Art kleiner als $1/2$, so wird φ_β anders abgeschätzt als im Falle $\frac{d-1}{2} \geq \frac{1}{2}$. Es ist also eine Fallunterscheidung bezüglich der Ordnung von $K_{\frac{d+1}{2}}$ notwendig. Ist $d = 1$, so ist die Ordnung gleich 0, für $d \geq 2$ ist $\frac{d-1}{2}$ größer oder gleich $\frac{1}{2}$.

Für den Fall $d = 1$ erhält man $\varphi_\beta = 2K_0(2\beta)$ und mit der Arbeit von Wendland [17] folgt für $d = 1$:

$$\varphi_\beta \geq \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + 2\beta)^{-\frac{1}{2}}e^{-2\beta}.$$

Ist $d \geq 2$, so gilt $\varphi_\beta = 2\pi^{\frac{d+1}{2}}\beta^{-\frac{d+1}{2}}K_{\frac{d+1}{2}}(2\beta)$, und mit der Abschätzung von K_ν aus dem vorherigen Beispiel folgt

$$\varphi_\beta \geq \pi^{\frac{d}{2}}\beta^{-\frac{d}{2}}e^{-2\beta}.$$

Somit ist die folgende Aussage bewiesen:

Korollar 2.15 Die zu $\Phi_3(x) = (1 + \|x\|^2)^{-1/2}$ zugehörige quadratische Form aus Bemerkung 2.6 hat im Fall $d = 1$ eine untere Schranke der Gestalt (2.3) mit

$$I'(\Phi_3) = \frac{C_1}{2^{\frac{3}{2}}\pi}q^{-1} \left(1 + \frac{2C_1}{q}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{2C_1}{q}}.$$

Im Falle $d \geq 2$ gilt

$$I'(\Phi_3) = \frac{C_d^{\frac{d}{2}}}{2^{d+1}\Gamma(\frac{d}{2} + 1)}q^{-\frac{d}{2}}e^{-\frac{2C_d}{q}}.$$

□

2.3.4 Gaußglocken

Die Funktionen der Art $\Phi_4(x) = e^{-\rho\|x\|^2}$, $\rho > 0$, sind positiv definit und haben eine klassische Fouriertransformierte der Form

$$\varphi(w) = \left(\frac{\pi}{\rho}\right)^{\frac{d}{2}} e^{-\frac{\|w\|^2}{4\rho}}.$$

Somit ergibt sich sofort

$$\varphi_\beta = \min_{\|w\| \leq 2\beta} \varphi(w) = \left(\frac{\pi}{\rho}\right)^{\frac{d}{2}} e^{-\frac{\beta^2}{\rho}}.$$

Dies führt durch Einsetzen zu

Korollar 2.16 Die Funktionen $\Phi_4(x) = e^{-\rho\|x\|^2}$ mit $\rho > 0$ haben bzgl. der quadratischen Form $I(\Phi_4)$ eine untere Schranke der Gestalt (2.3) mit

$$I'(\Phi_4) = \frac{C_d^d}{2^{d+1}\rho^{\frac{d}{2}}\Gamma(\frac{d}{2} + 1)} q^{-d} e^{-\frac{C_d^2}{\rho q^2}}.$$

□

2.4 Beispielhafte Berechnung von $I'(\mu)$ und Vergleich von $I'(\Phi)$ und $I'(\mu)$

Die Beweise der Aussagen 2.4.1 bis 2.4.4 sind in Quak, Sivakumar, Ward [8] geführt, es werden hier nur die Ergebnisse angegeben.

2.4.1 Polynomials

Für die Funktion $\Phi_1(x) = (-1)\|x\|$, welche bedingt positiv definit der Ordnung 1 ist, ergibt sich bzgl. der quadratischen Form (2.11) für $I'_1(\mu)$ folgender Term:

$$I'_1(\mu) = \frac{\tilde{C}_d \Gamma(\frac{d+1}{2})}{2\sqrt{\pi}\delta^{d+1}} q.$$

Dabei sind

$$\begin{aligned} \delta &:= 12 \left[\frac{\pi \Gamma^2(\frac{d+2}{2})}{9} \right]^{\frac{1}{d+1}}, \\ \tilde{C}_d &:= \frac{\delta^d}{2^{d+1} \Gamma(\frac{d+2}{2})}, \\ q &:= \frac{1}{2} \min_{j \neq l} \|x_j - x_l\|. \end{aligned}$$

2.4.2 Multiquadrics

Für $\Phi_2(x) = (-1)(1 + \|x\|^2)^{1/2}$, welches eine bedingt positiv definite Funktion der Ordnung 1 ist, erhält man bzgl. der quadratischen Form (2.11) den folgenden Ausdruck für $I'_2(\mu)$:

$$I'_2(\mu) = \frac{\tilde{C}_d}{2\sqrt{\pi}\delta^{\frac{d+3}{2}}} q^{\frac{3+d}{2}} e^{-\frac{2\delta}{q}}.$$

2.4.3 Inverse Multiquadrics

Für die positiv definite Funktion $\Phi_3(x) = (1 + \|x\|^2)^{-1/2}$ erhält man für $I'_3(\mu)$ den Term

$$I'_3(\mu) = \frac{\tilde{C}_d a^{\frac{d+3}{2}} (1 - e^{-\alpha\delta})}{\sqrt{\pi} \delta^{\frac{d+1}{2}}} q^{\frac{1+d}{2}} e^{-\frac{\delta}{q}(\frac{1}{a}+a)}.$$

Dabei sei a eine positive Konstante mit $2a < \delta$ und $q < 1$.

2.4.4 Gaußglocken

Werden die positiv definiten Funktionen $\Phi_4(x) = e^{-\rho\|x\|^2}$ mit $\rho > 0$ betrachtet, so erhält man bzgl. der quadratischen Form (2.11) für $I'_4(\mu)$

$$I'_4(\mu) = \frac{\tilde{C}_d}{\rho^{\frac{d}{2}}} q^{-d} e^{-\frac{\delta^2}{q^2\rho}}.$$

2.4.5 Beispielhafter Vergleich von $I'(\Phi)$ und $I'(\mu)$

Gegenüberstellung von (2.3) und (2.11) für $q \rightarrow 0$ anhand der Funktionen Φ_i , $1 \leq i \leq 4$:

$I'(\Phi_i), \quad 1 \leq i \leq 4$	$I'_i(\mu), \quad 1 \leq i \leq 4$	Vergleich für $q \rightarrow 0$
$I'(\Phi_1) = \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{2^{d+2}\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{d}{2}+1)C_d}q$	$I'_1(\mu) = \frac{\tilde{C}_d \Gamma(\frac{d+1}{2})}{2\sqrt{\pi}\delta^{d+1}}q$	$I'_1(\mu) = \mathcal{O}(I'(\Phi_1))$ $= \mathcal{O}(q)$
$I'(\Phi_2) = \frac{C_d^{\frac{d+2}{2}}}{2^{d+2}\Gamma(\frac{d}{2}+1)}q^{\frac{2+d}{2}}e^{-\frac{2C_d}{q}}$	$I'_2(\mu) = \frac{\tilde{C}_d}{2\sqrt{\pi}\delta^{\frac{d+3}{2}}}q^{\frac{3+d}{2}}e^{-\frac{2\delta}{q}}$	$I'_2(\mu) = \mathcal{O}(I'(\Phi_2))q^{\frac{1}{2}}$ $= \mathcal{O}(q^{\frac{3+d}{2}}e^{-\frac{2\delta}{q}})$
$\underline{d = 1} :$ $I'(\Phi_3) = \frac{C_1}{2^{\frac{3}{2}}\pi}q^{-1} \left(1 + \frac{2C_1}{q}\right)^{-\frac{1}{2}}$ $\quad \times e^{-\frac{2C_1}{q}}$ $\underline{d \geq 2} :$ $I'(\Phi_3) = \frac{C_d^{\frac{d}{2}}}{2^{d+1}\Gamma(\frac{d}{2}+1)}q^{-\frac{d}{2}}e^{-\frac{2C_d}{q}}$	$I'_3(\mu) = \frac{\tilde{C}_d a^{\frac{d+3}{2}}(1-e^{-a\delta})}{\sqrt{\pi}\delta^{\frac{d+1}{2}}}$ $\quad \times q^{\frac{1+d}{2}}e^{-\frac{\delta}{q}(\frac{1}{a+a})}$	$\underline{d = 1} :$ $I'_3(\mu) = \mathcal{O}(I'(\Phi_3))q^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{K}{q}}$ $= \mathcal{O}(q^{-d}e^{-\frac{\delta^2}{\rho q^2}})$ $\underline{d \geq 2} :$ $I'_3(\mu) = \mathcal{O}(I'(\Phi_3))q^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{K}{q}}$ $= \mathcal{O}(e^{-\frac{\delta}{q(\frac{1}{a}+a)}})$
$I'(\Phi_4) = \frac{C_d^d}{2^{d+1}\rho^{\frac{d}{2}}\Gamma(\frac{d}{2}+1)}q^{-d}e^{-\frac{C_d^2}{\rho q^2}}$	$I'_4(\mu) = \frac{\tilde{C}_d}{\rho^{\frac{d}{2}}}q^{-d}e^{-\frac{\delta^2}{q^2\rho}}$	$I'_4(\mu) = \mathcal{O}(I'(\Phi_4))$ $= \mathcal{O}(q^{\frac{1+d}{2}}e^{-\frac{\delta}{q(\frac{1}{a}+a)}})$

Dabei sei K eine positive Konstante, $0 < 2a < \delta$ und $q < 1$ bei den Inversen Multiquadrics ($i = 3$).

Zum Vergleich der auftretenden Faktoren siehe Kapitel 2.2, Bemerkung 2.12.

Bemerkung 2.17

- 1) Die Polynomials und die Gaussians sind bzgl. der Darstellungen (2.3) und (2.11) für $q \rightarrow 0$ jeweils von gleicher Ordnung und die Terme $I'(\Phi)$ bzw. $I'(\mu)$ unterscheiden sich nur in den Konstanten.
- 2) Bei den Multiquadrics unterscheiden sich die Schranken nur um den Faktor $q^{\frac{1}{2}}$, wodurch die Schranke, basierend auf der Laplace–Stieltjes – Theorie, nur unwesentlich schärfer ist als die für $\Phi \in BPD(m)$, $m \in \mathbb{N}_0$, verwendbare Schranke der Fourier–Stieltjes – Theorie.
- 3) Bei den inversen Multiquadrics unterscheiden sich die Terme $I'(\Phi)$ und $I'(\mu)$, welche beide unabhängig von der Raumdimension d sind, um die Ordnung $q^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{K}{q}}$,

$K > 0$. Für alle $a > 0$ geht die Abschätzung $I'_3(\mu)$ für $q \rightarrow 0$ schneller gegen Null als ihr Gegenpart.

- 4) Insgesamt läßt sich anhand der Beispiele festhalten, daß die durch die Verallgemeinerung der Theorie bedingte Verschlechterung der Abschätzung (2.2) sehr gering ist, da die Terme (2.3) zum Teil sogar von gleicher Ordnung sind. Durch die erlangte zusätzliche Anwendungsbreite der Fourier–Stieltjes – Methode erscheint es demnach angemessen, diese weiter zu benutzen. Die zusätzlich getroffene Voraussetzung (A) stellt dabei nur eine unwesentliche Einschränkung dar.

2.5 Abschätzungen für $\tilde{J}_i(\Phi, D)$ und $\|A_1(\Phi_i)\alpha\|$, $1 \leq i \leq 4$

Bei der Berechnung der Terme $\tilde{J}_2(\Phi, D)$ und $\tilde{J}_3(\Phi, D)$ werden verschiedene Darstellungen der *modifizierten Besselfunktionen zweiter Art der Ordnung ν* , auch *Macdonald–Funktionen* genannt, benötigt. Sie werden mit $K_\nu(x)$ bezeichnet und wurden in Kapitel 1.1, Definition 1.3 eingeführt.

Der folgende Satz beinhaltet die hier notwendigen Integraldarstellungen von $K_\nu(x)$. Sein Beweis findet sich in Watson [16].

Satz 2.18 (*Darstellungen von $K_\nu(x)$*)

$$K_\nu(x) = \frac{\sqrt{\pi}(\frac{1}{2}x)^\nu}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_1^\infty e^{-xt}(t^2 - 1)^{\nu - \frac{1}{2}} dt, \quad (2.13)$$

$$K_\nu(x) = \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-x}}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_0^\infty e^{-u} u^{\nu - \frac{1}{2}} \left(1 + \frac{u}{2x}\right)^{\nu - \frac{1}{2}} du. \quad (2.14)$$

Dabei gilt (2.13) für $\Re(\nu) > -\frac{1}{2}$ und (2.14) für $\nu \geq 0$, $x > 0$.

Watson [16], S.206f, gibt eine Abschätzung für (2.14) an, die in dem Beweis des Satzes 2.21 verwendet wird.

Lemma 2.19 *Sei $\nu \geq 0$, $x > 0$ und $p \in \mathbb{N}$. Falls $p \geq \nu - \frac{1}{2}$, so existiert ein Θ , $0 < \Theta \leq 1$, für das gilt*

$$\begin{aligned} K_\nu(x) &= \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-x}}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_0^\infty e^{-u} u^{\nu - \frac{1}{2}} \left(1 + \frac{u}{2x}\right)^{\nu - \frac{1}{2}} du \\ &= \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-x} \left[\sum_{j=0}^{p-1} \frac{(\nu, j)}{(2x)^j} + \Theta \frac{(\nu, p)}{(2x)^p} \right] \\ &\leq \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-x} \sum_{j=0}^p \frac{(\nu, j)}{(2x)^j}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Dabei ist (ν, j) definiert durch $(\nu, j) = \frac{\Gamma(\nu + j + \frac{1}{2})}{j! \Gamma(\nu - j + \frac{1}{2})}$.

Es lassen sich nun folgende Abschätzungen der Art (2.5) für $J_i(\Phi, D)$, $1 \leq i \leq 4$, formulieren.

Satz 2.20 Seien $J_i(\Phi, D)$, $1 \leq i \leq 4$, durch Satz 2.4 gegeben. Sei $\varphi(w)$ die jeweils zugehörige (verallgemeinerte) Fouriertransformierte aus Kapitel 2.3. Es sei ω_{d-1} das Volumen der $(d-1)$ -dimensionalen Einheitssphäre, wie in Kapitel 1.1 eingeführt. Dann ergeben sich bezüglich der Abschätzungen $J_i(\Phi, D) \leq N \|\alpha\|^2 \tilde{J}_i(\Phi, D)$ aus Satz 2.7 (ii) folgende Terme für $\tilde{J}_i(\Phi, D)$ für $i = 1, \dots, 4$:

$$1) \quad \tilde{J}_1(\Phi, D) \leq \omega_{d-1} \|D\| 2\pi^{-\frac{d+1}{2}} \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right) =: \tilde{J}'_1(\Phi, D).$$

2)

$$\begin{aligned} \tilde{J}_2(\Phi, D) &\leq \omega_{d-1} \|D\|^2 \left[\frac{\Gamma(d+1)}{\pi^{\frac{d}{2}} 2^{d+1} \Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right)} \right. \\ &\quad \left. + \begin{cases} \frac{1}{\pi^{\frac{d}{2}} 2^{\frac{d+1}{2}}} \sum_{j=0}^{\frac{d}{2}} \binom{\frac{d}{2}}{j} \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2} + 1 + j\right)}{2^j}, & d = 2n; \\ \frac{1}{\pi^{\frac{d}{2}} 2^{\frac{d+1}{2}}} \sum_{j=0}^{\frac{d+1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{d}{2} + 1 + j\right)}{j! 2^j}, & d = 2n + 1 \end{cases} \right] \\ &=: \tilde{J}'_2(\Phi, D). \end{aligned}$$

$$3) \quad i) \text{ Im Falle } d = 1: \tilde{J}_3(\Phi, D) \leq \frac{3}{4\sqrt{2}} \|D\|^2 =: \tilde{J}'_3(\Phi, D).$$

ii) Im Falle $d \geq 2$:

$$\begin{aligned} \tilde{J}_3(\Phi, D) &\leq \omega_{d-1} \|D\|^2 \left[\frac{\Gamma(d-1)}{3\pi^{d-\frac{1}{2}} 2^{\frac{3d+1}{2}} \Gamma(\frac{d}{2})} \right. \\ &\quad \left. + \begin{cases} \frac{1}{\pi^{d-\frac{1}{2}} 2^{d+\frac{3}{2}}} \frac{\Gamma(\frac{d}{2}+2)}{\Gamma(\frac{d}{2})} \sum_{j=0}^{\frac{d}{2}-1} \binom{\frac{d}{2}-1}{j} \frac{\Gamma(\frac{d}{2}+j)}{2^j}, & d = 2n; \\ \frac{1}{\pi^{d-\frac{1}{2}} 2^{d+\frac{3}{2}}} \sum_{j=0}^{\frac{d+1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{d}{2}+j) \Gamma(\frac{d}{2}-j+2)}{j! 2^j \Gamma(\frac{d}{2}-j)}, & d = 2n+1 \end{cases} \right] \\ &=: \tilde{J}_3''(\Phi, D). \end{aligned}$$

4) Sei $\rho > 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{J}_4(\Phi, D) &= \omega_{d-1} \|D\|^2 \begin{cases} \left(\frac{d}{2\pi}\right)^{\frac{d}{2}} d^{\frac{d}{2}+\frac{1}{2}} 2^{\frac{3}{2}} \sqrt{\pi} \rho^{d+\frac{3}{2}}, & d = 2n; \\ \left(\frac{d}{2\pi}\right)^{\frac{d}{2}} \rho^{d+1}, & d = 2n+1 \end{cases} \\ &=: \tilde{J}_4'(\Phi, D). \end{aligned}$$

Beweis: In Satz 2.4 wurde $\tilde{J}(\Phi, D) = (2\pi)^{-\frac{d+1}{2}} \|D\|^2 \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(w) \|w\|^2 dw$ definiert, wobei φ die zu Φ gehörige (verallgemeinerte) Fouriertransformierte ist. Für die vier Beispielfunktionen ergibt sich:

- 1) Die Funktion Φ_1 erfüllt nicht die Voraussetzungen des Satzes 2.7, weshalb in diesem Falle eine andere Abschätzung für $J_1(\Phi, D)$ gesucht wird. Wegen der Ungleichung $|\sum_{j=1}^N \alpha_j e^{ix_j^t w}|^2 \leq N \|\alpha\|^2$ aus Satz 2.7 (ii) gilt

$$\begin{aligned} J_1(\Phi, D) &= 2\pi^{-\frac{d+1}{2}} \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right) \int_{\mathbb{R}^d} \|w\|^{-d-1} \sin^2\left(\frac{D^t w}{2}\right) \left|\sum_{j=1}^N \alpha_j e^{ix_j^t w}\right|^2 dw \\ &\leq N \|\alpha\|^2 2\pi^{-\frac{d+1}{2}} \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right) \int_{\mathbb{R}^d} \|w\|^{-d-1} \sin^2\left(\frac{D^t w}{2}\right) dw. \end{aligned}$$

Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung, $\sin(x) \leq x$ für $x \geq 0$ und $\sin(x) \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$ folgt

$$\begin{aligned}
 J_1(\Phi, D) &\leq N\|\alpha\|^2 2\pi^{-\frac{d+1}{2}} \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right) \left[\frac{1}{4} \int_{\|w\| \leq \frac{2}{\|D\|}} \frac{|D^t w|^2}{\|w\|^{d+1}} dw + \int_{\|w\| > \frac{2}{\|D\|}} \frac{dw}{\|w\|^{d+1}} \right] \\
 &\leq N\|\alpha\|^2 2\pi^{-\frac{d+1}{2}} \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right) \left[\frac{\|D\|^2}{4} \int_{\|w\| \leq \frac{2}{\|D\|}} \frac{dw}{\|w\|^{d-1}} + \int_{\|w\| > \frac{2}{\|D\|}} \frac{dw}{\|w\|^{d+1}} \right]
 \end{aligned}$$

und durch Übergang zu Polarkoordinaten erhält man

$$\begin{aligned}
 J_1(\Phi, D) &\leq N\|\alpha\|^2 2\pi^{-\frac{d+1}{2}} \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right) \left[\frac{1}{4} \|D\|^2 \omega_{d-1} \int_0^{\frac{2}{\|D\|}} dr + \omega_{d-1} \int_{\frac{2}{\|D\|}}^{\infty} \frac{dr}{r^2} \right] \\
 &= 2N\|\alpha\|^2 \pi^{-\frac{d+1}{2}} \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right) \omega_{d-1} \|D\|.
 \end{aligned}$$

Damit ist die erste Behauptung des Satzes bewiesen.

- 2) Hier ist eine Fallunterscheidung bezüglich gerader oder ungerader Raumdimension notwendig, da sich die daraus resultierenden Integrale unterschiedlich berechnen bzw. abschätzen lassen. Dies gilt für die verbleibenden drei Beispielfunktionen. Das Ziel ist es, eine obere Schranke für das Integral $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(w) \|w\|^2 dw$ zu bestimmen. Bei den Funktionen Φ_2 und Φ_3 treten bei der Fouriertransformierten Macdonald-Funktionen $K_\nu(x)$ auf, welche aufgrund ihres unterschiedlichen Grenzverhaltens für x gegen Unendlich bzw. für x nahe Null durch verschiedene Terme abgeschätzt werden müssen. Deshalb wird das Integral $\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(w) \|w\|^2 dw$ aufgeteilt in $\int_{\|w\| \leq 1} \varphi(w) \|w\|^2 dw + \int_{\|w\| > 1} \varphi(w) \|w\|^2 dw$.

$$\begin{aligned}
 \tilde{J}_2(\Phi, D) &= (2\pi)^{-d} \frac{1}{2} \|D\|^2 \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(w) \|w\|^2 dw \\
 &= (2\pi)^{-d} \frac{1}{2} \|D\|^2 \int_{\mathbb{R}^d} \pi^{\frac{d+1}{2}} K_{\frac{d+1}{2}}(\|w\|) \left(\frac{\|w\|}{2}\right)^{-\frac{d+1}{2}} \|w\|^2 dw \\
 &= (2\pi)^{-\frac{d+1}{2}} \|D\|^2 \left[\int_{\|w\| \leq 1} K_{\frac{d+1}{2}}(\|w\|) \|w\|^{-\frac{d+3}{2}} dw \right. \\
 &\quad \left. + \int_{\|w\| > 1} K_{\frac{d+1}{2}}(\|w\|) \|w\|^{-\frac{d+3}{2}} dw \right] \\
 &=: (2\pi)^{-\frac{d+1}{2}} \|D\|^2 [T_1 + T_2].
 \end{aligned}$$

Diese Integrale werden nun einzeln weiter betrachtet. In T_1 wird für K_ν die Darstellung (2.13) verwendet. Es gilt

$$\begin{aligned} K_\nu(x) &= \frac{\sqrt{\pi}(\frac{1}{2}x)^\nu}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_1^\infty e^{-xt} (t^2 - 1)^{\nu - \frac{1}{2}} dt \\ &\leq \frac{\sqrt{\pi}(\frac{1}{2}x)^\nu}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_1^\infty e^{-xt} t^{2\nu - 1} dt, \end{aligned}$$

denn es ist $t \geq 1$. Wird $s = xt$ gesetzt, so gilt mit $ds = xdt$

$$\begin{aligned} K_\nu(x) &\leq \frac{\sqrt{\pi}(\frac{1}{2}x)^\nu}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_x^\infty e^{-s} \left(\frac{s}{x}\right)^{2\nu - 1} \frac{1}{x} ds \\ &\leq \frac{\sqrt{\pi}(\frac{1}{2}x)^\nu}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} x^{-2\nu} \int_0^\infty e^{-s} s^{2\nu - 1} ds, \end{aligned}$$

da $x > 0$ und $f(s) =: e^{-s} s^{2\nu - 1} \geq 0$ für $s \in (0, \infty]$ ist. Nun folgt mit Hilfe der Darstellung $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-s} s^{z-1} ds$ aus Satz 1.2:

$$K_\nu(x) \leq \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(2\nu)}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2}) 2^\nu} x^{-\nu}. \quad (2.16)$$

Damit ist für T_1 mit $\nu = \frac{d+1}{2}$:

$$\begin{aligned} T_1 &= \int_{\|w\| \leq 1} K_{\frac{d+1}{2}}(\|w\|) \|w\|^{-\frac{d+3}{2}} dw \\ &\leq \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(d+1)}{\Gamma(\frac{d}{2} + 1) 2^{\frac{d+1}{2}}} \int_{\|w\| \leq 1} \|w\|^{-d+1} dw, \end{aligned}$$

und durch Übergang zu Polarkoordinaten ergibt sich

$$\begin{aligned} T_1 &\leq \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(d+1)}{\Gamma(\frac{d}{2} + 1) 2^{\frac{d+1}{2}}} \omega_{d-1} \int_0^1 dr \\ &= \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(d+1)}{\Gamma(\frac{d}{2} + 1) 2^{\frac{d+1}{2}}} \omega_{d-1}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Bei T_2 wird für $K_\nu(x)$ die Darstellung (2.14) benötigt, da $\|w\|$ hier große Werte annimmt.

$$\begin{aligned} K_\nu(x) &= \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-x}}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} \int_0^\infty e^{-u} u^{\nu - \frac{1}{2}} \left(1 + \frac{u}{2x}\right)^{\nu - \frac{1}{2}} du \\ &=: \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-x}}{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})} f(x). \end{aligned}$$

Es ist leicht nachprüfbar, daß $f(x)$ monoton fallend ist. Somit wird $x = 1$ in f eingesetzt, da $x \geq 1$ gegeben ist, um eine obere Abschätzung für $K_\nu(x)$ zu erhalten.

$$f(1) = \int_0^\infty e^{-u} u^{\nu-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{u}{2}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} du.$$

An dieser Stelle wird eine Fallunterscheidung bezüglich gerader oder ungerader Raumdimension notwendig, um das vorliegende Integral berechnen zu können. In T_2 ist $\nu = \frac{d+1}{2}$.

i) Sei $d = 2n$, $n \in \mathbb{N}_0$ (d.h. $\nu = \frac{d+1}{2} = n + \frac{1}{2}$):

$$\begin{aligned} f(1) &= \int_0^\infty e^{-u} u^{\nu-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{u}{2}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} du \\ &= \int_0^\infty e^{-u} u^n \left(1 + \frac{u}{2}\right)^n du, \end{aligned}$$

und mit dem Binomischen Lehrsatz folgt

$$\begin{aligned} f(1) &= \int_0^\infty e^{-u} u^n \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \left(\frac{u}{2}\right)^j du \\ &= \sum_{j=0}^n 2^{-j} \binom{n}{j} \Gamma(n + j + 1). \end{aligned}$$

Zusammenfassend besitzt $K_{\frac{d+1}{2}}(x)$ für $d = 2n$, $n \in \mathbb{N}_0$, folgende obere Schranke:

$$K_{\frac{d+1}{2}}(x) \leq \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-x}}{\Gamma(n+1)} \sum_{j=0}^n 2^{-j} \binom{n}{j} \Gamma(n+j+1). \quad (2.18)$$

Insgesamt ergibt sich dadurch für den Fall $d = 2n$:

$$\begin{aligned} T_2 &= \int_{\|w\|>1} K_{\frac{d+1}{2}}(\|w\|) \|w\|^{-\frac{d+3}{2}} dw \\ &\leq \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2} \Gamma(n+1)} \int_{\|w\|>1} e^{-\|w\|} \left[\int_0^\infty e^{-u} u^n \left(1 + \frac{u}{2}\right)^n du \right] \|w\|^{-n+1} dw \\ &\leq \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2} \Gamma(n+1)} \sum_{j=0}^n 2^{-j} \binom{n}{j} \Gamma(n+j+1) \int_{\|w\|>1} e^{-\|w\|} \|w\|^{-n+1} dw. \end{aligned}$$

Durch Übergang zu Polarkoordinaten und mit den bei der Abschätzung von T_1 verwendeten Hilfsmitteln folgt weiterhin

$$\begin{aligned}
 T_2 &\leq \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2} \Gamma(n+1)} \sum_{j=0}^n 2^{-j} \binom{n}{j} \Gamma(n+j+1) \omega_{d-1} \int_1^{\infty} e^{-r} r^n dr \\
 &\leq \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2} \Gamma(n+1)} \sum_{j=0}^n 2^{-j} \binom{n}{j} \Gamma(n+j+1) \omega_{d-1} \int_0^{\infty} e^{-r} r^n dr \\
 &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \omega_{d-1} \sum_{j=0}^n 2^{-j} \binom{n}{j} \Gamma(n+j+1), \tag{2.19}
 \end{aligned}$$

womit bei gerader Raumdimension eine obere Schranke für T_2 gefunden ist.

ii) Sei $d = 2n + 1$, $n \in \mathbb{N}_0$ (d.h. $\nu = \frac{d+1}{2} = n + 1$):

$$T_2 = \int_{\|w\|>1} K_{\frac{d+1}{2}}(\|w\|) \|w\|^{-\frac{d+3}{2}} dw$$

Um dieses Integral nach oben abzuschätzen, wird (2.15) verwendet. Setzt man $p = n + 1$, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 T_2 &\leq \int_{\|w\|>1} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \|w\|^{-\frac{1}{2}} e^{-\|w\|} \sum_{j=0}^{n+1} \frac{\Gamma(n+j+\frac{3}{2})}{j! 2^j \Gamma(n-j+\frac{3}{2})} \|w\|^{-j} \|w\|^{-n+1} dw \\
 &= \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{j=0}^{n+1} \frac{\Gamma(n+j+\frac{3}{2})}{j! 2^j \Gamma(n-j+\frac{3}{2})} \int_{\|w\|>1} e^{-\|w\|} \|w\|^{-n-j+\frac{1}{2}} dw.
 \end{aligned}$$

Durch Übergang zu Polarkoordinaten und mit Hilfe der Integraldarstellung der Gammafunktion aus Satz 1.2. c) ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned}
 T_2 &\leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{j=0}^{n+1} \frac{\Gamma(n+j+\frac{3}{2})}{j! 2^j \Gamma(n-j+\frac{3}{2})} \omega_{d-1} \int_1^{\infty} e^{-r} r^{-j+n+\frac{1}{2}} dr \\
 &\leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{j=0}^{n+1} \frac{\Gamma(n+j+\frac{3}{2})}{j! 2^j} \omega_{d-1}. \tag{2.20}
 \end{aligned}$$

Mit (2.17), (2.19) und der Abschätzung (2.20) folgt die zweite Aussage des Satzes.

3) Da die Ordnung der modifizierten Besselfunktion zweiter Art für $d = 1$ Null ist, wird dieser Fall extra betrachtet, da sonst einige entstehende Terme nicht wohldefiniert wären. Es ergibt sich für die inversen Multiquadrics:

i) Sei $d = 1$ (d.h. $\nu = \frac{d-1}{2} = 0$):

$$\tilde{J}_3(\Phi, D) = (2\pi)^{-d} \frac{1}{2} \|D\|^2 \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(w) \|w\|^2 dw$$

$$\begin{aligned}
 &= (2\pi)^{-d} \frac{1}{2} \|D\|^2 \int_{\mathbb{R}^d} 2\pi^{\frac{d+1}{2}} K_{\frac{d+1}{2}}(\|w\|) \left(\frac{\|w\|}{2}\right)^{\frac{d+1}{2}} \|w\|^2 dw \\
 &= \frac{1}{2\pi} \|D\|^2 \int_{\mathbb{R}} K_0(|w|) |w|^2 dw \tag{2.21}
 \end{aligned}$$

Zur weiteren Abschätzung von (2.21) wird die Darstellung (2.14) für $K_0(x)$ betrachtet,

$$K_0(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{2x}} \int_0^\infty e^{-u} u^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{u}{2x}\right)^{-\frac{1}{2}} du.$$

Nun ist $\left(1 + \frac{u}{2x}\right)^{-\frac{1}{2}} \leq 1$, da $\frac{u}{2x} \in [0, \infty]$, wodurch sich mit Hilfe von Satz 1.2. c) ergibt:

$$K_0(x) \leq \frac{e^{-x}}{\sqrt{2x}} \int_0^\infty e^{-u} u^{-\frac{1}{2}} du = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}.$$

Es folgt für $\tilde{J}_3(\Phi, D)$:

$$\begin{aligned}
 \tilde{J}_3(\Phi, D) &= \frac{1}{2\pi} \|D\|^2 \int_{\mathbb{R}} K_0(|w|) |w|^2 dw = \frac{1}{\pi} \|D\|^2 \int_0^\infty K_0(w) w^2 dw \\
 &\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|D\|^2 \int_0^\infty e^{-w} w^{\frac{3}{2}} dw.
 \end{aligned}$$

Und schließlich ergibt sich mit Satz 1.2. c)

$$\tilde{J}_3(\Phi, D) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \|D\|^2 = \frac{3}{4\sqrt{2}} \|D\|^2,$$

was zu zeigen war.

ii) Sei $d = n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$:

In diesem Fall ist die Ordnung der Macdonald-Funktion größer oder gleich $\frac{1}{2}$, weswegen die bei den Multiquadrics angewandten Hilfsmittel Verwendung finden können. Es gilt:

$$\begin{aligned}
 \tilde{J}_3(\Phi, D) &= (2\pi)^{-d} \frac{1}{2} \|D\|^2 \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(w) \|w\|^2 dw \\
 &= (2\pi)^{-\frac{d+1}{2}} \|D\|^2 \int_{\mathbb{R}^d} K_{\frac{d+1}{2}}(\|w\|) \|w\|^{-\frac{d+5}{2}} dw \\
 &= (2\pi)^{-\frac{d+1}{2}} \|D\|^2 \left[\int_{\|w\| \leq 1} K_{\frac{d+1}{2}}(\|w\|) \|w\|^{-\frac{d+5}{2}} dw \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left. + \int_{\|w\|>1} K_{\frac{d+1}{2}}(\|w\|) \|w\|^{-\frac{d+5}{2}} dw \right] \\
 =: & (2\pi)^{-\frac{d+1}{2}} \|D\|^2 [T_1 + T_2].
 \end{aligned}$$

Wird auch hier die Darstellung (2.13) für $K_\nu(x)$ und die Abschätzung (2.16) verwendet, so erhält man für T_1 mit $\nu = \frac{d-1}{2} \geq \frac{1}{2}$ folgende Ungleichung:

$$\begin{aligned}
 T_1 &= \int_{\|w\|\leq 1} K_{\frac{d+1}{2}}(\|w\|) \|w\|^{-\frac{d+5}{2}} dw \\
 &\leq \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(d-1)}{\Gamma(\frac{d}{2}) 2^{\frac{d+1}{2}}} \int_{\|w\|\leq 1} \|w\|^{-d+3} dw,
 \end{aligned}$$

und durch Übergang zu Polarkoordinaten ergibt sich

$$T_1 \leq \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(d-1)}{3 \Gamma(\frac{d}{2}) 2^{\frac{d+1}{2}}} \omega_{d-1}. \quad (2.22)$$

Bei der Betrachtung von T_2 ist analog zu den Multiquadrics eine Fallunterscheidung bezüglich gerader oder ungerader Raumdimension notwendig.

$$T_2 = \int_{\|w\|>1} K_{\frac{d+1}{2}}(\|w\|) \|w\|^{-\frac{d+5}{2}} dw.$$

a) Sei $d = 2n$, $n \in \mathbb{N}$ (d.h. $\nu = \frac{d-1}{2} = n - \frac{1}{2}$):

Um $K_{\frac{d+1}{2}}(x)$ abzuschätzen, wird wie bei Φ_2 vorgegangen. Analog zu (2.18) ergibt sich

$$K_{\frac{d+1}{2}}(x) \leq \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-x}}{\Gamma(n)} \sum_{j=0}^{n-1} 2^{-j} \binom{n-1}{j} \Gamma(n+j).$$

Es folgt für T_2 :

$$\begin{aligned}
 T_2 &= \int_{\|w\|>1} K_{n-\frac{1}{2}}(\|w\|) \|w\|^{-n+\frac{5}{2}} dw \\
 &\leq \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\Gamma(n)} \sum_{j=0}^{n-1} 2^{-j} \binom{n-1}{j} \Gamma(n+j) \int_{\|w\|>1} e^{-\|w\|} \|w\|^{-n+2} dw
 \end{aligned}$$

und mit Hilfe von Polarkoordinaten und Satz 1.2. c) ergibt sich sofort

$$T_2 \leq \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(n)} \omega_{d-1} \sum_{j=0}^{n-1} 2^{-j} \binom{n-1}{j} \Gamma(n+j). \quad (2.23)$$

b) Sei $d = 2n + 1$, $n \in \mathbb{N}$ (d.h. $\nu = \frac{d-1}{2} = n$):

Bei ungerader Raumdimension wird die Darstellung (2.13) für $K_\nu(x)$ benutzt, um T_2 abzuschätzen.

$$\begin{aligned} T_2 &= \int_{\|w\|>1} K_{\frac{d+1}{2}}(\|w\|) \|w\|^{-\frac{d+5}{2}} dw \\ &\leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{j=0}^n \frac{\Gamma(n+j+\frac{1}{2})}{j! 2^j \Gamma(n-j+\frac{1}{2})} \int_{\|w\|>1} e^{-\|w\|} \|w\|^{-n-j+\frac{3}{2}} dw. \end{aligned}$$

Durch Übergang zu Polarkoordinaten und mit Satz 1.2. c) folgt:

$$T_2 \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \omega_{d-1} \sum_{j=0}^n \frac{\Gamma(n+j+\frac{1}{2}) \Gamma(n-j+\frac{3}{2})}{j! 2^j \Gamma(n-j+\frac{1}{2})}. \quad (2.24)$$

Setzt man nun $d = 2n$ bzw. $d = 2n + 1$, so ergibt sich aus (2.22) und (2.23) bzw. (2.24) die dritte Behauptung.

4) Für $\tilde{J}_4(\Phi, D)$ gilt:

$$\begin{aligned} \tilde{J}_4(\Phi, D) &= (2\pi)^{-d} \frac{1}{2} \|D\|^2 \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(w) \|w\|^2 dw \\ &= (2\pi)^{-d} \frac{1}{2} \|D\|^2 \int_{\mathbb{R}^d} \left(\frac{\pi}{\rho}\right)^{\frac{d}{2}} e^{-\frac{\|w\|^2}{4\rho}} \|w\|^2 dw \end{aligned}$$

und durch Übergang zu Polarkoordinaten folgt

$$\tilde{J}_4(\Phi, D) = 2^{-d-1} \left(\frac{\pi}{\rho}\right)^{-\frac{d}{2}} \|D\|^2 \omega_{d-1} \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{4\rho}} r^{d+1} dr.$$

Mit Hilfe von partieller Integration läßt sich das vorliegende Integral berechnen. An dieser Stelle ist eine Fallunterscheidung notwendig.

i) Sei $d = 2n$, $n \in \mathbb{N}_0$:

Wie man leicht zeigt, gilt

$$\begin{aligned} \tilde{J}_4(\Phi, D) &= \frac{1}{2} \left(\frac{d}{2\pi}\right)^{\frac{d}{2}} \rho^d \|D\|^2 \omega_{d-1} \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{4\rho}} r dr \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{d}{2\pi}\right)^{\frac{d}{2}} \rho^d \|D\|^2 \omega_{d-1} 2\rho \\ &= \left(\frac{d}{2\pi}\right)^{\frac{d}{2}} \rho^{d+1} \|D\|^2 \omega_{d-1}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

ii) Sei $d = 2n + 1$, $n \in \mathbb{N}_0$:

Wird partielle Integration angewendet, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 \tilde{J}_4(\Phi, D) &= 2^{-d-1} \left(\frac{\pi}{\rho}\right)^{-\frac{d}{2}} \|D\|^2 \omega_{d-1} \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{4\rho}} r^{d+1} dr \\
 &= 2^{-(\frac{d}{2}+\frac{1}{2})} \pi^{-\frac{d}{2}} \rho^{d+\frac{1}{2}} d^{\frac{d+1}{2}} \omega_{d-1} \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{4\rho}} dr \\
 &= 2^{-(\frac{d}{2}+\frac{1}{2})} \pi^{-\frac{d}{2}} \rho^{d+\frac{1}{2}} d^{\frac{d+1}{2}} \omega_{d-1} 4\rho \sqrt{\pi} \\
 &= \left(\frac{d}{2\pi}\right)^{\frac{d}{2}} d^{\frac{d+1}{2}} 2^{\frac{3}{2}} \sqrt{\pi} \rho^{d+\frac{3}{2}} \|D\|^2 \omega_{d-1}. \tag{2.26}
 \end{aligned}$$

Mit (2.25) für gerade und (2.26) für ungerade Raumdimension folgt nun die letzte Behauptung des Satzes. \square

Für die Norm der Matrix $A_1(\Phi_i)\alpha$, $1 \leq i \leq 4$, lassen sich nun die unteren Schranken explizit angeben.

Satz 2.21 Seien $I'_i(\Phi)$ durch Abschnitt 2.3 gegeben, $\tilde{J}'_i(\Phi, D)$ durch Satz 2.20, und es gelte $I'_i(\Phi) < N\tilde{J}'_i(\Phi, D)$ für $i = 1, \dots, 4$. Es seien C_d und q wie in Satz 2.5 definiert. Dann erhält man für die Beispielfunktionen folgende Abschätzungen der Art (2.9):

1) *Polynomials*: $\|A_1(\Phi_1)\alpha\| \geq \left[\frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{2^{d+2} \sqrt{\pi} \Gamma(\frac{d}{2} + 1) C_d} q - \tilde{J}'_1(\Phi, D) \right] \|\alpha\|.$

2) *Multiquadratics*: $\|A_1(\Phi_2)\alpha\| \geq \left[\frac{C_d^{\frac{d+2}{2}}}{2^{d+2} \Gamma(\frac{d}{2} + 1)} q^{\frac{2+d}{2}} e^{-\frac{2C_d}{q}} - \tilde{J}'_2(\Phi, D) \right] \|\alpha\|.$

3) *Inverse Multiquadratics*:

Für $d = 1$ ergibt sich: $\|A_1(\Phi_3)\alpha\| \geq \left[\frac{C_1^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{\pi}} q^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{2C_1}{q}} - \tilde{J}'_3(\Phi, D) \right] \|\alpha\|.$

Für $d \geq 2$ gilt:

$$\|A_1(\Phi_3)\alpha\| \geq \left[\frac{C_d}{2^{\frac{d}{2}} \Gamma(\frac{d}{2}) \Gamma(\frac{d}{2} + 1)} q^{-1} \left(1 + \frac{2C_d}{q}\right)^{\frac{d+2}{2}} e^{-\frac{2C_d}{q}} - \tilde{J}'_3(\Phi, D) \right] \|\alpha\|.$$

4) *Gaussians*: $\|A_1(\Phi_4)\alpha\| \geq \left[\frac{C_d^d}{2^{d+1} \rho^{\frac{d}{2}} \Gamma(\frac{d}{2} + 1)} q^{-d} e^{-\frac{C_d^2}{\rho q^2}} - \tilde{J}'_4(\Phi, D) \right] \|\alpha\|$ für $\rho > 0$.

2.6 Abschätzungen für $\tilde{J}_i(\mu, D)$ und $\|A_1(\Phi_i)\alpha\|$, $1 \leq i \leq 4$

Für die Beispielfunktionen ergeben sich unter Berücksichtigung der in Theorem 2 definierten Terme $I'(\mu)$ und $\tilde{J}(\mu, D)$ folgende Abschätzungen der Art (2.12):

Satz 2.22 Beachtet man zunächst, daß für J_i , $i = 1, 2, 3$,

$$\tilde{J}_2, \tilde{J}_3 \leq \tilde{J}_1 \leq J' \|D\| := \frac{2\Gamma(\frac{d+1}{2})\omega_{d-1}}{\pi^{\frac{d+1}{2}}} \|D\|,$$

wobei ω_{d-1} das Volumen der $(d-1)$ -dimensionalen Einheitskugel ist, und für \tilde{J}_4

$$\tilde{J}_4 \leq D_d(\rho, q) \quad \text{mit} \quad D_d(\rho, q) = \pi^{-d} \rho q \left[1 + 6d \sum_{n=0}^{\infty} (n+3)^d e^{-\rho n^2 q^2} \right]$$

gilt, so folgt für die Funktionen Φ_i , $1 \leq i \leq 4$, falls $I'(\Phi_i) < N\tilde{J}(\Phi_i, D)$ erfüllt ist:

1) *Polynomials*: $\|A_1(\Phi_1)\alpha\| \geq \left[\frac{\tilde{C}_d}{2\delta^{d+1}} \frac{\Gamma(\frac{d+1}{2})}{\sqrt{\pi}q} - NJ'\|D\| \right] \|\alpha\|.$

2) *Multiquadratics*: $\|A_1(\Phi_2)\alpha\| \geq \left[\frac{\tilde{C}_d}{2\delta^{\frac{d+3}{2}}} \frac{e^{-\frac{2\delta}{q}}}{q^{\frac{d+3}{2}}\sqrt{\pi}} - NJ'\|D\| \right] \|\alpha\|.$

3) *Inverse Multiquadratics*: Für $q < 1$ und eine absolute Konstante a mit $\delta > 2a$ gilt:

$$\|A_1(\Phi_3)\alpha\| \geq \left[\frac{\tilde{C}_d}{\delta^{\frac{d+1}{2}}\sqrt{\pi}} a^{\frac{d+3}{2}} [1 - e^{-a\delta}] \frac{e^{-\frac{\delta}{q}(\frac{1}{a}+a)}}{q^{\frac{d+1}{2}}} - NJ'\|D\| \right] \|\alpha\|.$$

4) *Gaussians*: Sei $\|D\| \leq q$. Dann gilt

$$\|A_1(\Phi_4)\alpha\| \geq \left[\frac{\tilde{C}_d e^{-\frac{\delta^2}{q^2\delta}}}{q^d \delta^{\frac{d}{2}}} - D_d(\delta, q)\|D\| \right] \|\alpha\|.$$

Dabei seien \tilde{C}_d und q wie in Theorem 2 definiert.

Der Beweis ist in Quak, Sivakumar, Ward [8] zu finden.

Wird ein weiteres Beispiel aus der Menge der Polynomials hinzugezogen und untersucht, so ergibt sich eine verallgemeinerte Aussage über Φ_1 .

Satz 2.23 Sei $\Phi_5(x) = (-1)\|x\|^{2\beta} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$, $0 < \beta < 1$. Φ_5 ist bedingt positiv definit der Ordnung 1 und besitzt das repräsentierende Maß $d\mu(t) = [\beta \Gamma(1-\beta)]^{-1} t^{-\beta} dt$. Dann gilt

$$\begin{aligned} I_5(\mu) &\geq \frac{C_d \beta \Gamma(\beta + \frac{d}{2})}{\Gamma(1-\beta) \delta^{2\beta+d}} := I'_5(\mu), \\ J_5(\mu, D) &\leq \frac{\Gamma(\frac{d+2\beta}{2}) \omega_{d-1} \|D\|^{2\beta}}{\pi^d (1-\beta) \Gamma(1-\beta)} := \tilde{J}_5(\mu, D). \end{aligned}$$

Werden die Beziehungen $I_5(\mu)$ und $J_5(\mu, D)$ in (2.12) eingesetzt, dann folgt

$$\|A_1(\Phi_5)\alpha\| \geq \left[\frac{C_d \beta \Gamma(\beta + \frac{d}{2})}{\Gamma(1 - \beta) \delta^{2\beta+d}} - \frac{\Gamma(\frac{d+2\beta}{2}) \omega_{d-1} \|D\|^{2\beta}}{\pi^d (1 - \beta) \Gamma(1 - \beta)} \right] \|\alpha\|.$$

Dabei bezeichne ω_{d-1} das Volumen der $(d - 1)$ -dimensionalen Einheitskugel.

Der Beweis findet sich in Quak, Sivakumar, Ward [8].

Korollar 2.24

- 1) Wie man leicht überprüft, gilt $\Phi_5 = \Phi_1$ für $\beta = \frac{1}{2}$.
- 2) Die Sätze 2.21 und 2.23 liefern für J_1 die gleichen Abschätzungen. Das ist darauf zurückzuführen, daß die Voraussetzungen des Satzes 2.7 für $J_1(\Phi, D)$ nicht erfüllt sind.

3 Untere Schranken der quadratischen Form des L_2 -Approximationsproblems

Vorbemerkungen

Die Grundlage bildet das L_2 -Approximationsproblem bezüglich Ω . Dieses ist in Kapitel 1.4 bereits beschrieben und lautet folgendermaßen:

Sei $X = \{x_1, \dots, x_N\}$, $x_j \in \mathbb{R}^d$, $1 \leq j \leq N$, ein gegebener Punktesatz mit Separationsdistanz $q := \frac{1}{2} \min_{j \neq l} \|x_j - x_l\| > 0$.

Es sei $W(x_k) := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x - x_k\|_\infty < qd^{-\frac{1}{2}}\}$ für jedes Zentrum x_k , $1 \leq k \leq N$, definiert, dabei bezeichnet $\|\cdot\|_\infty$ die Supremumsnorm. Diese Würfel sind disjunkt.

Im folgenden sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein *zulässiges kompaktes Gebiet bezüglich X* , das heißt, für alle x_k , $1 \leq k \leq N$, sei der d -dimensionale Würfel $W(x_k)$ mit Zentrum x_k und Seitenlänge $2qd^{-1/2}$ ganz in Ω enthalten.

Die Funktion $f \in L_2(\Omega)$ sei gegeben. Gesucht ist die *beste Approximierende* $s^* \in S_X$,

$$S_X = \left\{ \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi(\cdot - x_j) : \alpha \in V_m^-\{X\} \right\},$$

mit $s^* = \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi(\cdot - x_j)$, wobei $\alpha = (\alpha_j)_{j=1}^N$ den Koordinatenvektor einer besten Approximierenden darstellt und $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ eine bedingt positiv definite Funktion der Ordnung m mit $m \in \mathbb{N}_0$ ist, so daß gilt:

$$\|f - s^*\| = \inf_{s \in S_X} \|f - s\|. \quad (3.1)$$

Aufgrund der Resultate von Kapitel 1.4 läßt sich das gestellte Approximationsproblem in Matrix-Schreibweise darstellen als

$$\begin{pmatrix} A_X & P \\ P^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_\Phi^t \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

mit

$$\begin{aligned} A_X &:= (\langle \Phi(\cdot - x_j), \Phi(\cdot - x_k) \rangle)_{j,k=1}^N, \\ P &:= (p_k(x_j))_{\substack{i=1, \dots, N \\ k=1, \dots, Q}} \text{ und} \\ f_\Phi &:= (\langle f, \Phi(\cdot - x_j) \rangle)_{j=1}^N, \end{aligned}$$

für $\alpha := (\alpha_j)_{j=1}^N \in \mathbb{R}^N$ und $\mu := (\mu_j)_{j=1}^Q \in \mathbb{R}^Q$.

Dabei ist das vorliegende Skalarprodukt bezüglich des L_2 -Approximationsproblems definiert durch

$$\langle \Phi(\cdot - x_i), \Phi(\cdot - x_j) \rangle := \int_{\Omega} \Phi(x - x_i) \Phi(x - x_j) dx.$$

Das bedeutet, daß ein kompakter Teilraum $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ anstelle von \mathbb{R}^d als Integrationsbereich betrachtet wird, während das ursprüngliche L_2 -Skalarprodukt eine Integration über dem ganzen \mathbb{R}^d erfordern würde. Durch diese Einschränkung sind die zu betrachtenden Integrale wohldefiniert.

3.1 Der Fall $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ kompakt und $\Phi \in BPD(m)$, $m \in \mathbb{N}_0$

Den Schwerpunkt dieses Kapitels bildet die Betrachtung der quadratische Form $\langle A_X \alpha, \alpha \rangle$ bezüglich der Matrix $A_X = (\langle \Phi(\cdot - x_i), \Phi(\cdot - x_j) \rangle)_{i,j=1}^N$ des eingeführten Approximationsproblems mit $\alpha \in V_m^-\{x\}$. Ziel ist es, eine positive untere Schranke für $\langle A_X \alpha, \alpha \rangle$ zu bestimmen, welche sich für explizit gegebene Φ gut berechnen und sich zusätzlich auf das Interpolationsproblem des zweiten Kapitels zurückführen läßt. Die vorbereitenden Lemmata 3.1 bis 3.3 und ihre Beweise sind Quak, Sivakumar, Ward (siehe [8]) entnommen, sowie die Beweisidee von Theorem 3, übertragen auf den allgemeinen Fall $\Phi \in BPD(m)$, $m \in \mathbb{N}_0$. Theorem 3 beinhaltet dabei die Hauptaussage dieses Kapitels.

Lemma 3.1 *Sei $\Phi \in BPD(m)$, A_X durch (3.2) gegeben, $X = \{x_1, \dots, x_N\}$ mit paarweise verschiedenen Punkten x_j , $1 \leq j \leq N$, $\alpha \in \mathbb{R}^N$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein zulässiges kompaktes Gebiet bezüglich X . Dann existiert für die quadratische Form $\langle A_X \alpha, \alpha \rangle$ eine untere Schranke der Art*

$$\langle A_X \alpha, \alpha \rangle = \left\| \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi(\cdot - x_j) \right\|^2 \geq \sum_{k=1}^N \int_{W(x_k)} \left| \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi(x - x_j) \right|^2 dx. \quad (3.3)$$

Beweis: Die erste Gleichung ergibt sich sofort aus der Definition des Skalarproduktes. Um die untere Schranke zu erhalten, wird die quadratische Form nach unten abgeschätzt, indem man die Vereinigung der Würfel $W(x_k)$, $1 \leq k \leq N$, anstelle von Ω als Integrationsgebiet benutzt. Da der Integrand nichtnegativ ist und die Würfel disjunkt sind, folgt die gesuchte Abschätzung. \square

Der nächste Schritt besteht darin, die Integrale $\int_{W(x_k)} |\sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi(x - x_j)|^2 dx$ für alle $k \in \{1, \dots, N\}$ aus (3.3) mit Hilfe von *Riemann-Summen* nach unten abzuschätzen. Dies ist aufgrund der Stetigkeit der Funktion Φ möglich. Um die dafür notwendigen Stützpunkte zu erhalten, werden die Würfel $W(x_k)$, $1 \leq k \leq N$, mit einer Gitterstruktur versehen.

Das folgende Lemma führt die Stützpunkte $y_k^{(i)}$, $1 \leq k \leq N$, mit \mathbf{i} wie folgt, ein.

Sei $\mathbf{i} = (i_1, \dots, i_d)^t \in \mathbb{Z}^d$ ein Index-Vektor und $\mathbf{e} = (1, \dots, 1)^t$ der d -dimensionale Einheitsvektor. $\mathbf{i} \leq \mathbf{j}$ bedeute $i_l \leq j_l$ für $l = 1, \dots, d$. Es sei $r \in \mathbb{N}$.

Lemma 3.2 *Es sei A_X durch (3.2) gegeben, $\alpha \in \mathbb{R}^N$, $X = \{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbb{R}^d$ mit paarweise verschiedenen x_j für $1 \leq j \leq N$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein zulässiges kompaktes Gebiet bezüglich X . Dann gilt:*

$$\langle A_X \alpha, \alpha \rangle \geq \underline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{2q^d d^{-d/2}}{r^d} \sum_{\substack{\perp r\mathbf{e} \leq \mathbf{i} \leq (r+1)\mathbf{e} \\ 0 \leq i_l \leq r+1}} \|A_1^{(\mathbf{i})}(\Phi)\alpha\|^2$$

mit

$$\begin{aligned} A^{(\mathbf{i})}(\Phi) &:= (\Phi(y_k^{(\mathbf{i})} - x_j))_{1 \leq k, j \leq N}, \\ A_1^{(\mathbf{i})}(\Phi) &:= \frac{1}{2}(A^{(\mathbf{i})}(\Phi) + A^{(\mathbf{i})}(\Phi)^t), \\ y_k^{(\mathbf{i})} &:= x_k + \frac{qd^{-1/2}}{r}(\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{e}), \quad -r\mathbf{e} \leq \mathbf{i} \leq (r-1)\mathbf{e}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Beweis: Da Φ eine stetige Funktion ist, lassen sich die Integrale in (3.3) als Grenzwerte von Riemann-Summen darstellen. Als Stützpunkte werden $y_k^{(\mathbf{i})}$ wie in (3.4) gewählt. Diese sind jeweils ganz in $W(x_k)$ enthalten und bilden dort eine Gitterstruktur (siehe dazu auch Fig. 2 in Anschluß an Lemma 3.3). Für $r \rightarrow \infty$ ergibt sich:

$$\langle A_X \alpha, \alpha \rangle \geq \underline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{q^d d^{-d/2}}{r^d} \sum_{-r\mathbf{e} \leq \mathbf{i} \leq (r-1)\mathbf{e}} \sum_{k=1}^N \left| \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi(y_k^{(\mathbf{i})} - x_j) \right|^2.$$

Wird $A_2^{(\mathbf{i})}$ definiert durch $A_2^{(\mathbf{i})}(\Phi) := \frac{1}{2}(A^{(\mathbf{i})}(\Phi) - A^{(\mathbf{i})}(\Phi)^t)$, so gelten für die Matrizen $A_1^{(\mathbf{i})}$ und $A_2^{(\mathbf{i})}$ die Relationen $A_1^{(\mathbf{i})}(\Phi) = A_1^{(-\mathbf{i}-\mathbf{e})}(\Phi)$ und $A_2^{(\mathbf{i})}(\Phi) = -A_2^{(-\mathbf{i}-\mathbf{e})}(\Phi)$ bezüglich des Indexshifts. Mit $\sum_{k=1}^N |\sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi(y_k^{(\mathbf{i})} - x_j)|^2 = \|A^{(\mathbf{i})}(\Phi)\alpha\|^2$ und da aufgrund der Parallelogramm-Gleichung gilt $\|A^{(\mathbf{i})}(\Phi)\alpha\|^2 + \|A^{(-\mathbf{i}-\mathbf{e})}(\Phi)\alpha\|^2 = 2\|A_1^{(\mathbf{i})}(\Phi)\alpha\|^2 + 2\|A_2^{(\mathbf{i})}(\Phi)\alpha\|^2$, läßt sich nun zeigen:

$$\begin{aligned} \sum_{-r\mathbf{e} \leq \mathbf{i} \leq (r-1)\mathbf{e}} \|A^{(\mathbf{i})}(\Phi)\alpha\|^2 &= \sum_{\substack{\perp r\mathbf{e} \leq \mathbf{i} \leq (r+1)\mathbf{e} \\ 0 \leq i_l \leq r+1}} 2(\|A_1^{(\mathbf{i})}(\Phi)\alpha\|^2 + \|A_2^{(\mathbf{i})}(\Phi)\alpha\|^2) \\ &\geq 2 \sum_{\substack{\perp r\mathbf{e} \leq \mathbf{i} \leq (r+1)\mathbf{e} \\ 0 \leq i_l \leq r+1}} \|A_1^{(\mathbf{i})}(\Phi)\alpha\|^2. \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung. □

Wird die Menge der gleichmäßig verteilten $y_k^{(\mathbf{i})}$, $-r\mathbf{e} \leq \mathbf{i} \leq (r-1)\mathbf{e}$, auf eine Teilmenge sich nahe bei x_k befindender Punkte für $1 \leq k \leq N$ beschränkt, so folgt daraus eine weitere untere Abschätzung der quadratischen Form $\langle A_X \alpha, \alpha \rangle$, welche sich jedoch explizit berechnen läßt.

Lemma 3.3 Sei ε gegeben mit $0 < \varepsilon \leq 1$ und

$$P_\varepsilon(r) := \left\{ \mathbf{i} : \|\mathbf{i}\|_\infty \leq \varepsilon r - \frac{1}{2} \text{ und } i_1 \geq 0 \right\} \quad \text{für } r \in \mathbb{N}.$$

Dann gelten folgende Aussagen:

- (i) Es existiert ein Index $r_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so daß $P_\varepsilon(r) \neq \emptyset$ für alle $r \geq r_0(\varepsilon)$.
- (ii) $P_\varepsilon(r) \subset \left\{ \mathbf{i} : -\mathbf{r}\mathbf{e} \leq \mathbf{i} \leq (r-1)\mathbf{e} \text{ und } 0 \leq i_1 \leq r-1 \right\}$.
- (iii) Die Kardinalität von $P_\varepsilon(r)$ ist $(2\lfloor \varepsilon r - \frac{1}{2} \rfloor + 1)^{d-1} (\lfloor \varepsilon r - \frac{1}{2} \rfloor + 1)$ für $r \geq r_0(\varepsilon)$, wobei $\lfloor a \rfloor$ der ganzzahlige Teil von $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ist.
- (iv) $D^{(i)} := y_j^{(i)} - x_j$ ist für $1 \leq j \leq N$ unabhängig von j und es gilt

$$\|D^{(i)}\| \leq q\varepsilon, \quad \text{für } \mathbf{i} \in P_\varepsilon(r), \quad r \geq r_0(\varepsilon).$$

Beweis: (i)-(iii) folgen sofort. Um (iv) zu zeigen, betrachte man

$$D^{(i)} = x_k + \frac{qd^{-\frac{1}{2}}}{r} \left(\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{e} \right) - x_k = \frac{qd^{-\frac{1}{2}}}{r} \left(\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{e} \right),$$

mit $y_k^{(i)}$ wie in Lemma 3.2. $D^{(i)}$ ist dann unabhängig von k für $1 \leq k \leq N$. Für $\mathbf{i} \in P_\varepsilon(r)$ folgt außerdem

$$\|D^{(i)}\| = \frac{qd^{-\frac{1}{2}}}{r} \left\| \mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{e} \right\| \leq \frac{qd^{-\frac{1}{2}}}{r} \left(\|\mathbf{i}\|_\infty + \frac{1}{2}\|\mathbf{e}\|_\infty \right) d^{\frac{1}{2}} = \frac{q}{r} (\|\mathbf{i}\|_\infty + \frac{1}{2}) \leq q\varepsilon.$$

□

Die Lage der Stützpunkte sei anhand eines Beispiels verdeutlicht:

Setze $r = 2$ und $d = 2$ für $y_k^{(i)}$ aus (3.4). Wähle zusätzlich $q = 2^{\frac{3}{2}}$ und $\varepsilon = \frac{3}{4}$ für Lemma 3.3. Die daraus resultierenden Stützpunkte lauten

$$y_k^{(i)} = x_k + \left(\mathbf{i} + \frac{1}{2}\mathbf{e} \right), \quad \text{für } \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und die Seitenlänge des Würfels $W(x_k)$ beträgt 4, unabhängig von k . Die Punkte $y_k^{(i)}$ sind in FIG. 2 eingetragen.

$P_{3/4}(2) = \left\{ \mathbf{i} : \|\mathbf{y}_k^{(i)} - x_k\| \leq 1, \quad i_1 \geq 0 \right\}$ enthält die Punkte $y_k^{(0)}$ und $y_k^{(\begin{smallmatrix} 0 \\ \perp 1 \end{smallmatrix})}$, welche in der Abbildung fett gedruckt sind. Ohne die zusätzliche Restriktion $i_1 \geq 0$ wäre es die Menge der Punkte $y_k^{(\begin{smallmatrix} 0 \\ \perp 1 \end{smallmatrix})}$, $y_k^{(\begin{smallmatrix} \perp 1 \\ \perp 1 \end{smallmatrix})}$, $y_k^{(0)}$ und $y_k^{(\begin{smallmatrix} 0 \\ \perp 1 \end{smallmatrix})}$, welche durch die gestrichelten Linien dargestellt sind. Für $\varepsilon = 1$ wäre $P_1(2)$ die gesamte rechte Hälfte der $y_k^{(i)}$. Es ist an dieser Stelle sehr deutlich der Einfluß des Faktors ε auf die Größe der Teilmenge $P_\varepsilon(r)$ der zugrundegelegten Menge von Stützpunkten zu erkennen.

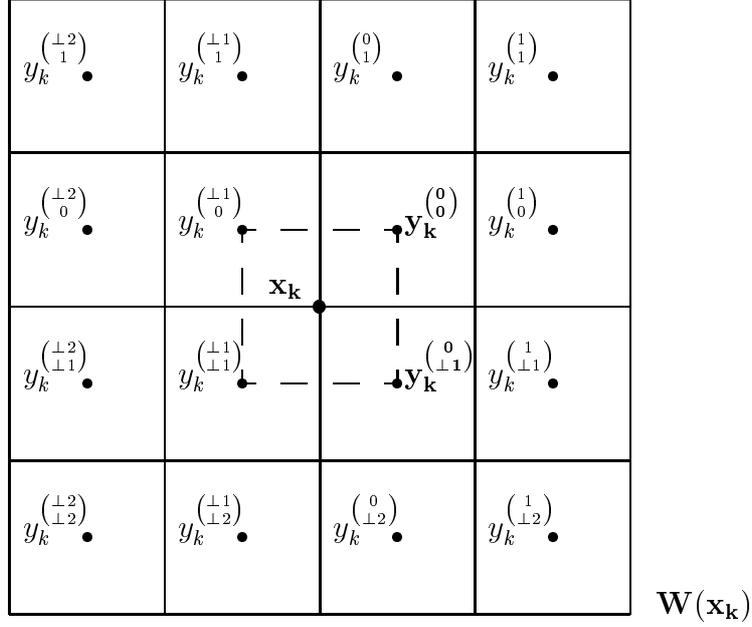


FIG. 2

Mit den getroffenen Vorbereitungen läßt sich nun die Hauptaussage dieses Kapitels formulieren.

Theorem 3 Sei $\Phi \in BPD(m)$ und Voraussetzung (A) erfüllt. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ kompakt und zulässig bezüglich $X = \{x_1, \dots, x_n\}$, x_j paarweise verschieden für $j = 1, \dots, N$ und $q := \frac{1}{2} \min_{j \neq l} \|x_j - x_l\| > 0$. Sei $I'(\Phi)$ wie in (2.3), $P_\varepsilon(r)$ und $D^{(i)}$ aus Lemma 3.3 und $\tilde{J}(\Phi, D)$ durch (2.5) unter den Voraussetzungen von Satz 2.7 gegeben. Dann gilt:

(i) Es existiert ein $\varepsilon = \varepsilon(d, q, \Phi, N)$ mit $0 < \varepsilon \leq 1$ und $r_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so daß $P_\varepsilon(r) \neq \emptyset$ für alle $r \geq r_0(\varepsilon)$ und

$$N\tilde{J}(\Phi, D^{(i)}) < \frac{1}{2}I'(\Phi) \quad \text{für } \mathbf{i} \in P_\varepsilon(r). \quad (3.5)$$

(ii) Mit ε aus (i) und $\alpha \in V_m^-\{x\}$, $\|\alpha\| = 1$, gilt

$$\langle A_X \alpha, \alpha \rangle \geq 2^{d-2} d^{-d/2} q^d I'(\Phi)^2 \varepsilon^d. \quad (3.6)$$

Beweis: (i) Nach Definition gilt $\tilde{J}(\Phi, D) \rightarrow 0$ für $D \rightarrow 0$. Somit existiert ein $\delta = \delta(D, q, \Phi, N)$, so daß

$$N\tilde{J}(\Phi, D) < \frac{1}{2}I'(\Phi) \quad \text{für } \|D\| \leq \delta. \quad (3.7)$$

Wähle $\varepsilon = \min(\delta/q, 1)$ und $r_0(\varepsilon)$ aus Lemma 3.3 (i). Wendet man nun (iv) desselben Lemmas an, so ergibt sich

$$\|D^{(i)}\| \leq q\varepsilon \leq \delta, \quad \mathbf{i} \in P_\varepsilon(r), \quad r \geq r_0(\varepsilon),$$

und mit (3.7)

$$N\tilde{J}(\Phi, D^{(i)}) < \frac{1}{2}I'(\Phi) \quad \text{für } \mathbf{i} \in P_\varepsilon(r).$$

Damit ist die erste Aussage gezeigt.

(ii) Lemma 3.2 ergab

$$\langle A_X \alpha, \alpha \rangle \geq \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{2q^d d^{-d/2}}{r^d} \sum_{\substack{\perp r\mathbf{e} \leq \mathbf{i} \leq (r+1)\mathbf{e} \\ 0 \leq i_1 \leq r+1}} \|A_1^{(i)}(\Phi)\alpha\|^2.$$

Sei ε aus (i) gegeben und $r \geq r_0(\varepsilon)$. Werden die Ergebnisse aus Teil (i) dieses Theorems, sowie aus Theorem 1 und Lemma 3.3 (ii) und (iii) benutzt, so folgt

$$\begin{aligned} \langle A_X \alpha, \alpha \rangle &\geq \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{2q^d d^{-d/2}}{r^d} \sum_{\substack{\perp r\mathbf{e} \leq \mathbf{i} \leq (r+1)\mathbf{e} \\ 0 \leq i_1 \leq r+1}} \|A_1^{(i)}(\Phi)\alpha\|^2 \\ &\geq \liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{2q^d d^{-d/2}}{r^d} \left(2 \left\lfloor \varepsilon r - \frac{1}{2} \right\rfloor + 1\right)^{d-1} \left(\left\lfloor \varepsilon r - \frac{1}{2} \right\rfloor + 1\right) \frac{I'(\Phi)^2}{4} \\ &\geq \liminf_{r \rightarrow \infty} 2^{d-2} d^{-d/2} q^d I'(\Phi)^2 \frac{\left(\left\lfloor \varepsilon r - \frac{1}{2} \right\rfloor\right)^d}{r^d} \\ &= 2^{d-2} d^{-d/2} q^d I'(\Phi)^2 \varepsilon^d, \end{aligned}$$

womit der Satz bewiesen ist. □

Bemerkung 3.4 Somit ist eine untere Schranke für die quadratische Form bezüglich der Approximationsmatrix A_X gefunden, welche sich aus einer Rückführung auf das Interpolationsproblem aus Kapitel 2.1, basierend auf zwei verschiedenen Datensätzen X und Y , ergibt. Dieses fließt in die letzte Rechnung des Beweises des Theorems 3 ein.

Korollar 3.5 Gelten die Voraussetzungen des Theorems 3, so gibt es eine untere Schranke für $\|A_X \alpha\|$ mit $\alpha \in V_m^-\{X\}$, $\|\alpha\| = 1$, denn mit Cauchy–Schwarz folgt:

$$\|A_X \alpha\| \|\alpha\| \geq \langle A_X \alpha, \alpha \rangle \geq 2^{d-2} q^d d^{-d/2} I'(\Phi)^2 \varepsilon^d,$$

d.h., es ist

$$\|A_X \alpha\| \geq 2^{d-2} q^d d^{-d/2} I'(\Phi)^2 \varepsilon^d. \tag{3.8}$$

□

Bemerkung 3.6

- 1) Für die praktische Anwendung der Abschätzung (3.6) erscheint es schwierig, ε explizit anzugeben. Da jedoch ε als $\min(\delta/q, 1)$ gewählt war, wobei sich δ aus (3.7) ergibt und $q = \frac{1}{2} \min_{j \neq l} \|x_j - x_l\| > 0$, so ist offensichtlich, daß der Wert von ε genau die Beziehung zwischen $\tilde{J}(\Phi, D)$ und $\|D\|$ wiedergibt, und ε explizit bestimmbar ist. Das bedeutet konkret:
 Nach Satz 2.7 gilt $N\tilde{J}(\Phi, D) =: N\|D\|^2 J^*(\Phi)$. Die Ungleichung (3.7) ist damit äquivalent zu

$$N\|D\|^2 J^*(\Phi) \leq \frac{1}{2} I'(\Phi) \quad \text{für} \quad \|D\| \leq \delta.$$

Wird für δ

$$\delta := \sqrt{\frac{I'(\Phi)}{2N J^*(\Phi)}}$$

eingesetzt, so ist die Ungleichung (3.7) erfüllt und es ergibt sich für ε

$$\varepsilon = \min \left(\sqrt{\frac{I'(\Phi)}{2N J^*(\Phi) q^2}}, 1 \right).$$

- 2) Die Abschätzung (3.6) des Theorems 3 beinhaltet u.a. die Anzahl N der Stützstellen. Dieser Einfluß beruht auf der im Beweis des Theorems 3 auftretenden Bedingung $N\tilde{J}(\Phi, D^i) < \frac{1}{2} I'(\Phi)$.
- 3) Die untere Schranke von $\langle A_X \alpha, \alpha \rangle$ setzt sich zusammen aus dem Produkt von
- i) ε^d : ergibt sich aus der Forderung $N\tilde{J}(\Phi, D^i) < \frac{1}{2} I'(\Phi)$ für $i \in P_\varepsilon(\mathbf{r})$,
 - ii) $I'(\Phi)^2$: quadratische Form des Interpolationsproblems aus Kapitel 2.1, welche durch die Anwendung von Theorem 1 entsteht,
 - iii) $q^d d^{-\frac{d}{2}}$: erhält man durch die Bildung der Riemann-Summen, wobei der Abstand der verwendeten Stützpunkte gerade $\frac{q^d d^{-\frac{d}{2}}}{r^d}$ beträgt. Dieser Term läßt sich auf die Forderung zurückführen, daß die $W(x_k)$, $1 \leq k \leq N$, disjunkt sind.
 - iv) 2^{d-2} : entsteht aus der Anzahl der Summanden in der letzten Rechnung des Beweises von Theorem 3,
 - v) $\|\alpha\|^2 = 1$: ergibt sich aus 3) ii) mit Bemerkung 2.6 i).
- 4) Wird die numerische Stabilität der Matrix A_X mit gegebener Nebenbedingung $\alpha \in V_m^- \{X\}$ untersucht, so läßt sich feststellen, daß der kleinste Eigenwert $\underline{\lambda}$ der Matrix A_X positiv ist. Dies ist bedingt durch die Tatsache, daß die sich aus (3.6) ergebende untere Schranke selbst positiv ist und da nach Courant [10] gilt:

$$\underline{\lambda}(A_X) = \inf_{\alpha \in V_m^- \{X\}} \frac{\alpha^t A_X \alpha}{\alpha^t \alpha}.$$

- 5) Der Einfluß des Faktors $q = \min_{j \neq k} \|x_j - x_k\|$ für $q \rightarrow 0$ ist in der Abschätzung (3.6) durch die Terme q^d und $I'(\Phi)^2$ gekennzeichnet. Alle anderen Faktoren der unteren Schranke von (3.6) sind von q unabhängig. Es sei an dieser Stelle auf die Diskussion des Einflusses des Faktors $I'(\Phi)$ für $q \rightarrow 0$ in Kapitel 2.2 und anhand von Beispielen in Kapitel 2.4 verwiesen. Für q nahe 0 ist $\varepsilon = 1$ und (3.6) von $J^*(\Phi, D)$ unabhängig.

3.2 Der Fall $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ kompakt und $\Phi \in BPD(0)$ oder $-\Phi \in BPD(1)$

Es wird das Approximationsproblem aus Kapitel 3.1 betrachtet. Der Fall $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ kompakt und $\Phi \in BPD(0)$ oder $-\Phi \in BPD(1)$ unterscheidet sich allein in der Darstellung von $I'(\mu)$ und $\tilde{J}(\mu, D)$ von Kapitel 3.1. Die vorbereitenden Lemmata 3.1 bis 3.3 können somit unverändert übernommen werden, da sie nur von der Radialität und Stetigkeit der Funktion Φ abhängen. Es ergibt sich folgende zu Theorem 3 äquivalente Aussage:

Theorem 4 Sei $\Phi \in BPD(0)$ oder $-\Phi \in BPD(1)$ mit repräsentierendem Maß $d\mu$. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt und zulässig bezüglich $X = \{x_1, \dots, x_N\}$, $x_j \in \mathbb{R}^d$ paarweise verschieden für alle $j = 1, \dots, N$ und $2q := \min_{j \neq l} \|x_j - x_l\| > 0$. Sei $I'(\mu)$ wie in (2.11), $P_\varepsilon(r)$ und $D^{(i)}$ aus Lemma 3.3 und $\tilde{J}(\mu, D)$ durch (2.10) gegeben. Dann gilt:

- (i) Es existiert ein $0 < \varepsilon \leq 1$, $\varepsilon = \varepsilon(s, q, \Phi, N)$ und $r_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, so daß $P_\varepsilon(r) \neq \emptyset$ für alle $r \geq r_0(\varepsilon)$ und

$$N \tilde{J}(\mu, D^{(i)}) < \frac{1}{2} I'(\mu) \quad \text{für } i \in P_\varepsilon(r).$$

- (ii) Mit ε aus (i) und $\alpha \in \mathbb{R}^N$, $\|\alpha\| = 1$, gilt

$$\langle A_x \alpha, \alpha \rangle \geq 2^{d-2} d^{-d/2} q^d I'(\mu)^2 \varepsilon^d. \quad (3.9)$$

Der Beweis verläuft analog zu dem von Theorem 3. Er findet sich in Quak, Sivakumar, Ward [8].

Korollar 3.7 Sind die Voraussetzungen von Theorem 4 erfüllt, so folgt

$$\|A_X^{-1}\| \leq 2^{2-d} d^{d/2} q^{-d} I'(\mu)^{-2} \varepsilon^{-d}$$

und die Matrix A_X ist invertierbar.

Beweis: Aufgrund der Beschränkung auf die Fälle $\Phi \in BPD(0)$ und $-\Phi \in BPD(1)$ läßt sich im Falle $-\Phi \in BPD(1)$ die Nebenbedingung $\alpha \in V_m^-\{X\}$ des Approximationsraumes S_X wegdiskutieren (siehe Quak, Sivakumar, Ward [8]). Mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und Theorem 4 folgt sofort für alle $\alpha \in \mathbb{R}^N$ mit $\|\alpha\| = 1$:

$$\|A_X \alpha\| \geq 2^{d-2} d^{-\frac{d}{2}} q^d I'(\mu)^2 \varepsilon^d.$$

Da der Raum S_X ohne die Nebenbedingung für die in diesem Kapitel betrachteten Funktionen volle Dimension N hat (siehe Quak, Sivakumar, Ward [8]) und die untere Schranke von (3.9) positiv ist, folgt die Behauptung aufgrund

$$\|A_X^{-1}\| = \left\{ \frac{1}{\inf \|A_X \alpha\|} : \alpha \in \mathbb{R}^N, \|\alpha\| = 1 \right\}.$$

□

Bemerkung 3.8 Der Unterschied zwischen Theorem 3 und Theorem 4 liegt in der Darstellung der Terme $I'(\Phi)$ und $I'(\mu)$ beziehungsweise $\tilde{J}(\Phi, D)$ und $\tilde{J}(\mu)$. Ein Vergleich der Ausdrücke $I'(\Phi)$ und $I'(\mu)$ für $q \rightarrow 0$ wurde am Ende des Kapitels 2.2 und anhand konkreter Beispiele in Kapitel 2.4 diskutiert, worauf an dieser Stelle verwiesen sei. Da $\tilde{J}(\Phi, D)$ und $\tilde{J}(\mu)$ unabhängig von q sind, werden sie nicht weiter betrachtet.

3.3 Der Fall $\Omega = \mathbb{R}^d$ und $\Phi \in BPD(0)$

Für den Fall $\Omega = \mathbb{R}^d$ besitzt die Funktion Φ nur für $m = 0$ die für die Existenz der Integrale $\int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x - x_j) \Phi(x - x_k) dx$ notwendige, klassische Fouriertransformierte.

Das zugrundeliegende Skalarprodukt dieses Abschnitts ist das L_2 -Skalarprodukt. Wird $\Phi \in L_2(\mathbb{R}^d)$ vorausgesetzt, so sind die vorkommenden Integrale wohldefiniert.

Für $\Phi \in BPD(m)$, $m > 0$, bedarf es weiterer Voraussetzungen und anderer Verfahrensweisen. Dabei ist u.a. eine distributionelle Herangehensweise erforderlich, worauf in Kapitel 5 als Ausblick kurz eingegangen wird. Dieser Fall wird in dieser Arbeit sonst nicht weiter behandelt.

Zu betrachten ist folgendes L_2 -Approximationsproblem:

Sei $\Phi \in BPD(0)$, d.h. Φ ist positiv definit, und sei $\Phi \in L_2(\mathbb{R}^d)$. Zu einer gegebenen Funktion $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $f \in L_2(\mathbb{R}^d)$, und einem gegebenen Satz X von paarweise verschiedenen Punkten $x_j \in \mathbb{R}^d$, $1 \leq j \leq N$, wird eine *beste Approximierende* $s^* \in S_X$ mit

$$S_X := \text{span}\{\Phi(\cdot - x_j), 1 \leq j \leq N\}$$

gesucht, welche folgendes erfülle:

$$\|f - s^*\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \min_{s \in S_X} \|f - s\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Das gestellte Approximationsproblem dieses Kapitels läßt sich in Form einer *Normalengleichung* formulieren. Diese lautet:

$$\tilde{A}_X \alpha = z$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{A}_X &:= (\langle \Phi(\cdot - x_i), \Phi(\cdot - x_j) \rangle)_{i,j=1}^N, \\ \alpha &:= (\alpha_i)_{i=1}^N, \\ z &:= (\langle \Phi(\cdot - x_i), f \rangle)_{i=1}^N. \end{aligned}$$

Das heißt, die Differenz der besten Approximierenden s^* und der Funktion f steht senkrecht auf jedem beliebigen Element s aus S_X . Es stellt sich nun die Frage, wann die Matrix \tilde{A}_X invertierbar ist. Dazu sind einige Vorbemerkungen notwendig.

Wendet man sich einem beliebigen Element $\langle \Phi(\cdot - x_j), \Phi(\cdot - x_k) \rangle$ mit $j, k \in \{1, \dots, N\}$ aus \tilde{A}_X zu, so ergibt sich durch Umformen:

$$\begin{aligned} \langle \Phi(\cdot - x_j), \Phi(\cdot - x_k) \rangle &= \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x - x_j) \Phi(x - x_k) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \Phi((x - x_k) - (x_j - x_k)) \Phi(x - x_k) dx. \end{aligned}$$

Mit der Substitutionen $y := x - x_j$, $z := x - x_k$ und (1.1) folgt:

$$\langle \Phi(\cdot - x_j), \Phi(\cdot - x_k) \rangle = (\Phi * \Phi)(x_j - x_k).$$

Da dies ohne Einschränkung an $j, k \in \{1, \dots, N\}$ erfüllt ist, läßt sich die Aussage folgendermaßen verallgemeinern:

Satz 3.9 Sei $\Omega = \mathbb{R}^d$ und $\Phi \in L_2(\mathbb{R}^d)$ positiv definit, $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subset \mathbb{R}^d$ und x_j paarweise verschieden für $1 \leq j \leq N$, so gilt für die Approximationsmatrix \tilde{A}_X der Normalengleichung des L_2 -Approximationsproblems

$$(\langle \Phi(\cdot - x_i), \Phi(\cdot - x_j) \rangle)_{i,j=1}^N = ((\Phi * \Phi)(x_i - x_j))_{i,j=1}^N. \quad (3.10)$$

□

Lemma 3.10

- 1) Die Matrix \tilde{A}_X des Approximationsproblems läßt sich bezüglich der Funktion $\Psi := \Phi * \Phi$ in eine Matrix eines Interpolationsproblemles überführen.

2) Das nun zugrundeliegende Interpolationsproblem lautet:

Sei Φ positiv definit und fest gewählt, $X = \{x_1, \dots, x_N\}$ eine Menge paarweise verschiedener Punkte aus dem \mathbb{R}^d . Zu gegebenen Punkten $g(x_1), \dots, g(x_N) \in \mathbb{R}^d$ wird die eindeutige Funktion

$$s^* \in \tilde{S}_X := \text{span}\{(\Phi * \Phi)(\cdot - x_i), 1 \leq i \leq N\}$$

gesucht, so daß gilt

$$s^*(x_i) = g(x_i), \quad 1 \leq i \leq N.$$

3) Die zu interpolierende Funktion lautet $g_f := f * \Phi$.

Beweis: Die Aussagen 1) und 2) folgen aufgrund der vorangegangenen Überlegungen dieses Abschnittes, die dritte ergibt sich durch Betrachten der Normalengleichung, welche für $x_j, j \in \{1, \dots, N\}$, lautet

$$\langle \Phi(\cdot - x_j), f \rangle = \sum_{i=1}^N \alpha_i \langle \Phi(\cdot - x_i), \Phi(\cdot - x_j) \rangle = \sum_{i=1}^N \alpha_i \Phi * \Phi(x_i - x_j),$$

wodurch sich genau die Form einer Interpolante aus \tilde{S}_X mit

$$\langle \Phi(\cdot - x_j), f \rangle = f * \Phi(x_j) =: g_f(x_j)$$

ergibt. Daraus folgt die Behauptung. \square

Das Hauptinteresse dieses Abschnittes liegt darin, eine untere Schranke für die quadratische Form

$$\tilde{I}(\Phi) := \langle \tilde{A}_X \alpha, \alpha \rangle$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{A}_X &:= (\langle \Phi(\cdot - x_i), \Phi(\cdot - x_j) \rangle)_{i,j=1}^N \\ &= ((\Phi * \Phi)(x_i - x_j))_{i,j=1}^N \\ &= (\Psi(x_i - x_j))_{i,j=1}^N \end{aligned} \tag{3.11}$$

zu bestimmen. Um für $\tilde{I}(\Phi)$ Satz 2.5 anwenden zu können, müssen erst die Voraussetzungen des Satzes gezeigt werden.

Lemma 3.11 Φ erfülle die Voraussetzung (A). Dann gilt:

1) Ist $\Phi \in BPD(0)$, so folgt $\Phi * \Phi \in BPD(0)$.

2) Besitzt Φ eine Fouriertransformierte φ , so hat auch $\Phi * \Phi$ eine Fouriertransformierte, diese lautet φ^2 .

Beweis:

1) Beweis der Radialität:

Sei $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ radial. Zu zeigen ist $(\Phi * \Phi)(x) = (\Phi * \Phi)(-x)$. Sei U_x eine unitäre Matrix, so daß $U_x \frac{x}{\|x\|} = e_1$ gilt, mit $e_1 := (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^d$. Sei U_x^* ihre Inverse. Nun gilt

$$\begin{aligned} (\Phi * \Phi)(U_x x) &= \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(U_x x - y) \Phi(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(U_x x - U_x U_x^* y) \Phi(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x - U_x^* y) \Phi(U_x^* y) dy, \end{aligned}$$

da Φ radial ist. Substituiert man $z = U_x^* y$ mit $dz = |\det U_x| dy$ und berücksichtigt $|\det U_x| = 1$, da U_x eine unitäre Matrix ist, so folgt

$$\begin{aligned} (\Phi * \Phi)(U_x x) &= \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x - z) \Phi(z) dz \\ &= (\Phi * \Phi)(x). \end{aligned}$$

Die Radialität von $\Phi * \Phi$ folgt nun aufgrund der Gleichung

$$\begin{aligned} (\Phi * \Phi)(x) &= (\Phi * \Phi)(U_x x) = (\Phi * \Phi)\left(U_x \frac{x}{\|x\|} \|x\|\right) \\ &= (\Phi * \Phi)(e_1 \|x\|). \end{aligned}$$

Beweis der positiven Definitheit:

Sei Φ positiv definit. Zu zeigen ist $\sum_{j,k=1}^N \alpha_j \alpha_k (\Phi * \Phi)(x_j - x_k) \geq 0$ für $\alpha \in \mathbb{R}^N$, und Gleichheit tritt genau dann auf, wenn $\alpha = 0$ ist. Dazu wird diese quadratische Form betrachtet. Es gilt nach Satz 3.9:

$$\sum_{j,k=1}^N \alpha_j \alpha_k (\Phi * \Phi)(x_j - x_k) = \left\| \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi(\cdot - x_j) \right\|_{L_2}^2.$$

Die L_2 -Norm ist für alle $\alpha \in \mathbb{R}^N$ nichtnegativ und ist gleich Null genau dann, wenn $\alpha = 0$, da die $\Phi(\cdot - x_j)$ für $1 \leq j \leq N$ linear unabhängig vorausgesetzt wurden, weil S_X volle Dimension N hat. Somit ist 1) gezeigt.

2) Φ erfüllt die Voraussetzung (A), d.h. für Φ gilt die Gleichung

$$\sum_{j,k=1}^N \alpha_j \alpha_k \Phi(x_j - x_k) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(w) \left| \sum_{j=1}^N \alpha_j e^{ix_j^t w} \right|^2 dw.$$

Gesucht ist eine Funktion ψ , so daß für $\Psi = \Phi * \Phi$ folgt

$$\sum_{j,k=1}^N \alpha_j \alpha_k \Psi(x_j - x_k) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \psi(w) \left| \sum_{j=1}^N \alpha_j e^{ix_j^t w} \right|^2 dw.$$

Dabei sei $\hat{\Psi} = \psi$.

Wegen Bemerkung 1.4 1) ergibt sich

$$\hat{\Psi} = \widehat{\Phi * \Phi} = \hat{\Phi}^2 = \varphi^2 \in L_1(\mathbb{R}^d).$$

Da $\widehat{\Phi * \Phi}$ wohldefiniert ist, existiert die Fouriertransformierte von $\Psi = \Phi * \Phi$ und sie lautet $\psi = \varphi^2$. \square

Damit läßt sich eine Aussage über eine untere Schranke der quadratischen Form $\langle \tilde{A}_X \alpha, \alpha \rangle$ treffen.

Theorem 5 Sei $\Phi \in L_2(\mathbb{R}^d)$ eine positiv definite Funktion mit $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ und Voraussetzung (A) sei erfüllt. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{j,k=1}^N \alpha_j \alpha_k (\Phi * \Phi)(x_j - x_k) &\geq \frac{\beta^d \varphi_\beta^2}{2^{d+1} \pi^{d/2} \Gamma(\frac{d}{2} + 1)} \|\alpha\|^2 \\ &= \frac{C_d^d \varphi_\beta^2}{2^{d+1} \pi^{d/2} \Gamma(\frac{d}{2} + 1) q^d} \|\alpha\|^2 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} q &:= \frac{1}{2} \min_{j \neq k} \|x_j - x_k\|, \\ \beta &:= 4 [3^{d-1} \Gamma^2(\frac{d}{2} + 1) \pi]^{\frac{1}{d+1}} q^{-1}, \\ \varphi_\beta^2 &:= \min_{\|w\| \leq 2\beta} \varphi^2(w), \\ C_d &:= \beta q. \end{aligned}$$

\square

Korollar 3.12 Theorem 5 liefert eine untere Schranke der quadratischen Form $\tilde{I}(\Phi) := \langle \tilde{A}_X \alpha, \alpha \rangle$ der Art $\tilde{I}(\Phi) \geq \tilde{I}'(\Phi) \|\alpha\|^2$ mit

$$\tilde{I}'(\Phi) := \frac{\beta^d}{2^{d+1} \pi^{d/2} \Gamma(\frac{d}{2} + 1)} \varphi_\beta^2. \quad (3.12)$$

Somit existiert im Falle $\varphi_\beta^2 > 0$ eine eindeutige beste Approximierende des Ausgangsproblems, da der Raum S_X volle Dimension N hat und die Nebenbedingung für positiv definites Φ entfällt.

Korollar 3.13 Gilt $\|\alpha\| = 1$ zusätzlich zu den Voraussetzungen von Theorem 5, so ergibt sich eine untere Schranke für $\|\tilde{A}_X \alpha\|$, da mit Hilfe der Cauchy–Schwarzschen Ungleichung folgt

$$\|\tilde{A}_X \alpha\| \|\alpha\| \geq \langle \tilde{A}_X \alpha, \alpha \rangle \geq \frac{\beta^d}{2^{d+1} \pi^{d/2} \Gamma(\frac{d}{2} + 1)} \varphi_\beta^2$$

Es gilt somit

$$\|\tilde{A}_X \alpha\| \geq \frac{\beta^d}{2^{d+1} \pi^{d/2} \Gamma(\frac{d}{2} + 1)} \varphi_\beta^2.$$

□

Korollar 3.14 Analog zu dem Beweis von Korollar 3.7 läßt sich zeigen:

$$\begin{aligned} \|\tilde{A}_X^{-1}\| &\leq \frac{2^{d+1} \pi^{d/2} \Gamma(\frac{d}{2} + 1)}{\beta^d} \varphi_\beta^{-2} \\ &= \frac{2^{d+1} \pi^{d/2} \Gamma(\frac{d}{2} + 1)}{C_d^d} \varphi_\beta^{-2} q^d. \end{aligned}$$

□

Bemerkung 3.15 In der Abschätzung von $\langle \tilde{A}_X \alpha, \alpha \rangle$ von Theorem 5 erscheint der Term φ_β von quadratischer Ordnung, was durch die Rückführung auf das Interpolationsproblem mit gegebenem $\Psi = \Phi * \Phi$ aufgrund der Gleichung $\widehat{\Phi * \Phi} = \varphi^2$ gerechtfertigt ist. Die vergleichbaren Terme $I'(\Phi)$ in Korollar 3.5 und $I'(\mu)$ in Korollar 3.7 erscheinen analog von quadratischer Ordnung.

3.4 Abschätzung von $\langle A_x \alpha, \alpha \rangle$ für Φ_i , $1 \leq i \leq 4$ (Fourier–Stieltjes – Theorie)

In diesem Abschnitt sollen die unteren Schranken von $\langle A_X \alpha, \alpha \rangle$ bezüglich der Beispielfunktionen Φ_i für $1 \leq i \leq 4$, basierend auf den Ergebnissen aus Abschnitt 3.1 und speziell auf Theorem 3, angegeben werden.

Satz 3.16 Sei Φ_i , $1 \leq i \leq 4$, eine der Beispielfunktionen aus Kapitel 1. Es seien $I'_i(\Phi)$ aus Abschnitt 2.3 und $\tilde{J}'_i(\Phi, D)$ aus Satz 2.20 für Φ_i , $1 \leq i \leq 4$, gegeben und es sei $\alpha \in V_m^-\{X\}$ mit $\|\alpha\| = 1$. Dann besitzt $\langle A_X \alpha, \alpha \rangle$ bezüglich Φ_i , $1 \leq i \leq 4$, eine untere Schranke der Art (3.6) und diese lautet:

1) Für Φ_1 :

$$\langle A_X \alpha, \alpha \rangle \geq \begin{cases} \frac{(I'_1(\Phi))^{d+2}}{4d^{d/2}(\tilde{J}'_1(\Phi, D))^{dN^d}}, & \frac{I'_1(\Phi)}{2Nq\tilde{J}'_1(\Phi, D)} < 1; \\ \frac{q^d(I'_1(\Phi))^2}{2^{2-d}d^{d/2}}, & \frac{I'_1(\Phi)}{2Nq\tilde{J}'_1(\Phi, D)} \geq 1. \end{cases}$$

2) Für Φ_i , $i = 2, 3, 4$:

$$\langle A_X \alpha, \alpha \rangle \geq \begin{cases} \frac{(I'_i(\Phi))^{2+d/2}}{2^{2-d/2}d^{d/2}(\tilde{J}'_i(\Phi, D))^{d/2}N^{d/2}}, & \sqrt{\frac{I'_i(\Phi)}{2Nq^2\tilde{J}'_i(\Phi, D)}} < 1; \\ \frac{q^d(I'_i(\Phi))^2}{2^{2-d}d^{d/2}}, & \sqrt{\frac{I'_i(\Phi)}{2Nq^2\tilde{J}'_i(\Phi, D)}} \geq 1. \end{cases}$$

Beweis: δ ist nach Theorem 3 so zu wählen, daß in (3.7) für $\|D\| \leq \delta$ gilt:

$$N\tilde{J}'_i(\Phi, D) < \frac{1}{2}I'_i(\Phi).$$

1) Wähle δ für Φ_1 als $\frac{I'_1(\Phi)}{2N\tilde{J}'_1(\Phi, D)}$, wodurch die vorhergehende Ungleichung erfüllt ist.

Es ergibt sich $\varepsilon = \min\left\{\frac{\delta}{q}, 1\right\} = \min\left\{\frac{I'_1(\Phi)}{2Nq\tilde{J}'_1(\Phi, D)}, 1\right\}$ in Theorem 3 und damit folgt die Behauptung.

2) Für Φ_i , $2 \leq i \leq 4$, folgen durch Wahl von δ als $\sqrt{\frac{I'_i(\Phi)}{2N\tilde{J}'_i(\Phi, D)}}$ die Abschätzungen

$N\tilde{J}'_i(\Phi, D) < \frac{1}{2}I'_i(\Phi)$, $2 \leq i \leq 4$. Damit ergibt sich $\varepsilon = \min\left\{\sqrt{\frac{I'_i(\Phi)}{2Nq^2\tilde{J}'_i(\Phi, D)}}, 1\right\}$, und mit Hilfe von Theorem 3 folgt die obige Abschätzung. \square

Bemerkung 3.17 Für Φ_3 ist die Fallunterscheidung bezüglich der Raumdimension d zu beachten.

3.5 Abschätzung von $\langle A_x \alpha, \alpha \rangle$ für Φ_i , $1 \leq i \leq 4$ (Laplace–Stieltjes – Theorie)

Die quadratischen Formen von A_X bezüglich der Funktionen Φ_i , $1 \leq i \leq 4$, lassen sich mit Hilfe von Theorem 4 nach unten abschätzen. Die Beweise der Sätze 3.18 und 3.20 sind in Quak, Sivakumar, Ward [8] zu finden.

Satz 3.18

- 1) Sei Φ eine der Funktionen Φ_i , $1 \leq i \leq 3$. Seien $I'_i(\mu)$ und J' gegeben durch die Abschnitte 2.4 und 2.6 und es gelte $\|\alpha\| = 1$. Dann besitzt die zugehörige Approximationsmatrix A_X bezüglich ihrer quadratischen Form eine untere Schranke der Art

$$\langle A_X \alpha, \alpha \rangle \geq \begin{cases} \frac{(I'_i(\mu))^{d+2}}{4d^{d/2}(J')^d N^d}, & \frac{I'_i(\mu)}{2J'Nq} < 1; \\ \frac{q^d (I'_i(\mu))^2}{2^{2-d} d^{d/2}}, & \frac{I'_i(\mu)}{2J'Nq} \geq 1. \end{cases}$$

- 2) Sei $\Phi = \Phi_4$, $I'_4(\mu)$ aus Kapitel 2.4 und $D_d(\rho, q)$ aus Satz 2.22 gegeben. Dann ergibt sich für die zu Φ_4 gehörende Approximationsmatrix A_X die Abschätzung

$$\langle A_X \alpha, \alpha \rangle \geq \begin{cases} \frac{(I'_4(\mu))^{d+2}}{4d^{d/2}(D_d(\rho, q))^d}, & \frac{I'_4(\mu)}{2D_d(\rho, q)q} < 1; \\ \frac{q^d (I'_4(\mu))^2}{2^{2-d} d^{d/2}}, & \frac{I'_4(\mu)}{2D_d(\rho, q)q} \geq 1. \end{cases}$$

Bemerkung 3.19

- 1) Ist $\Phi = \Phi_i$, $1 \leq i \leq 3$, so erkennt man aus der Abschätzung von $\langle A_X \alpha, \alpha \rangle$ aus Theorem 4, daß der Faktor N , d.h. die Anzahl der Zentren, nur in Form des Terms N^d auftritt. Der Einfluß der Separationdistanz q hingegen ist von der jeweiligen Funktion abhängig.
- 2) Für $\Phi = \Phi_4$ ist die Abschätzung aus Theorem 4 von der Anzahl N der Zentren unabhängig, da der Ausdruck $D(\rho, q)$ den Faktor N nicht beinhaltet. Die gewonnene Abschätzung ist also für alle N gleich. Allerdings ist sie von q abhängig, so daß für $q \rightarrow 0$ die untere Schranke gegen 0 geht.

Bezüglich der Funktionenschar $\Phi_5 = (-1)\|x\|^{2\beta} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $0 < \beta < 1$ ergibt sich folgende Abschätzung:

Satz 3.20 *Es sei $\Phi = \Phi_5$, $I'_5(\mu)$ und $\|D\|^{2\beta} J^*(\mu) := \tilde{J}_5(\mu, D)$ für $0 < \beta < 1$ gegeben durch Satz 2.23. Es gelte $\|\alpha\| = 1$. Dann hat die quadratische Form bezüglich der zu Φ_5 gehörigen Approximationsmatrix A_X eine untere Schranke der Art*

$$\langle A_X \alpha, \alpha \rangle \geq \begin{cases} \frac{(I'_5(\mu))^{2+\frac{d}{2\beta}}}{2^{2-d+\frac{d}{2\beta}} d^{d/2} N^{\frac{d}{2\beta}} (\tilde{J}^*(\mu))^{\frac{d}{2\beta}}}, & \left(\frac{I'_5(\mu)}{2NqJ_5^*(\mu)} \right)^{\frac{1}{2\beta}} < 1; \\ \frac{q^d (I'_5(\mu))^2}{2^{2-d} d^{d/2}}, & \left(\frac{I'_5(\mu)}{2NqJ_5^*(\mu)} \right)^{\frac{1}{2\beta}} \geq 1. \end{cases}$$

3.6 Beispielhafte Berechnung von $\tilde{I}'(\Phi)$

Als letzten Abschnitt dieser Arbeit wird die untere Schranke (3.12) der quadratischen Form $\tilde{I}'(\Phi)$ des Approximationsproblems aus Kapitel 3.3 anhand von Beispielen betrachtet. Da die Abschätzung unter den gegebenen Voraussetzungen von Kapitel 3.3 nur für positiv definite Funktionen existiert, beschränkt sich die Auswahl der Beispielfunktionen auf Φ_3 und Φ_4 .

3.6.1 Inverse Multiquadrics

Die positiv definite Funktion $\Phi_3(x) = (1 + \|x\|^2)^{-1/2}$ besitzt die klassische Fouriertransformierte

$$\varphi(w) = 2\pi^{\frac{d+1}{2}} K_{\frac{d+1}{2}}(\|w\|) \left(\frac{\|w\|}{2} \right)^{-\frac{d+1}{2}},$$

wie aus Kapitel 2.3.3 schon bekannt. Es folgt damit

$$\varphi^2(w) = 4\pi^{d-1} K_{\frac{d+1}{2}}^2(\|w\|) \left(\frac{\|w\|}{2} \right)^{1-d}.$$

Hier ist eine Fallunterscheidung notwendig, da die Ordnung der modifizierten Besselfunktion für $d = 1$ kleiner als $1/2$ wird. Für $d \geq 2$ ist die Ordnung jeweils größer oder gleich $1/2$.

Für den Fall $d = 1$ ergibt sich $\varphi_\beta^2 = 4K_0^2(2\beta)$ und mit den Ergebnissen von Wendland [17] folgt $\varphi_\beta^2 \geq \frac{1}{2}(1 + 2\beta)^{-1} e^{-4\beta}$. Damit läßt sich festhalten:

Korollar 3.21 Im Falle $d = 1$ hat die zu $\Phi_3(x) = (1 + \|x\|^2)^{-1/2}$ gehörende quadratische Form $\tilde{I}(\Phi_3) = \langle A_X \alpha, \alpha \rangle$ eine untere Schranke der Art $\tilde{I}'(\Phi_3) \|\alpha\|^2$ mit

$$\tilde{I}'(\Phi_3) = \frac{C_1^2}{8\pi^2} q^{-2} \left(1 + \frac{2C_1}{q}\right)^{-1} e^{-\frac{4C_1}{q}},$$

dabei gelte

$$\begin{aligned} q &= \frac{1}{2} \min_{j \neq k} \|x_j - x_k\|, \\ \beta &= 4 [3^{d-1} \Gamma^2(\frac{d}{2} + 1) \pi]^{\frac{1}{d+1}} q^{-1}, \\ C_d &= \beta q. \end{aligned}$$

Im Falle $d \geq 2$ ergibt sich:

$$\varphi_\beta^2 = 4\pi^{d-1} \beta^{1-d} K_{\frac{d+1}{2}}^2(2\beta)$$

und mit der Abschätzung $K_\nu \geq \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-x}$ aus Kapitel 2.3.2 erlangt man die Abschätzung der Art

$$\varphi_\beta^2 \geq \pi^d \beta^{-d} e^{-4\beta}.$$

Die untere Schranke bezüglich der quadratischen Form $\tilde{I}(\Phi_3) = \langle A_X \alpha, \alpha \rangle$ lautet sodann:

Korollar 3.22 Im Falle $d \geq 2$ hat die zu $\Phi_3(x) = (1 + \|x\|^2)^{-1/2}$ gehörende quadratische Form $\tilde{I}(\Phi_3) = \langle A_X \alpha, \alpha \rangle$ eine untere Schranke der Art $I'(\Phi_3) \|\alpha\|^2$ mit

$$\tilde{I}'(\Phi_3) = \frac{C_d^d}{2^{2d+2} \Gamma^2(\frac{d}{2} + 1)} q^{-d} e^{-\frac{4C_d}{q}}.$$

3.6.2 Gaußglocken

Die positiv definiten Funktionen $\Phi_4(x) = e^{-\rho \|x\|^2}$ mit $\rho > 0$ haben eine klassische Fouriertransformierte der Form

$$\varphi(w) = \left(\frac{\pi}{\rho}\right)^{\frac{d}{2}} e^{-\frac{\|w\|^2}{4\rho}},$$

welche schon in Kapitel 2.3.4 benutzt wurde. Es gilt

$$\varphi^2(w) = \left(\frac{\pi}{\rho}\right)^d e^{-\frac{\|w\|^2}{2\rho}},$$

woraus

$$\varphi_\beta^2 = \min_{\|w\| \leq 2\beta} \varphi^2(w) = \left(\frac{\pi}{\rho}\right)^d e^{-\frac{2\beta^2}{\rho}}$$

resultiert, da e^{-x^2} für $x \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ monoton fallend ist. Dies führt durch Einsetzen zu

Korollar 3.23 Die Funktionenschar $\Phi_4(x) = e^{-\rho\|x\|^2}$ mit $\rho > 0$ hat bezüglich der quadratischen Form $\tilde{I}(\Phi_4) = \langle A_X \alpha, \alpha \rangle$ eine untere Schranke der Gestalt $\tilde{I}'(\Phi_4)\|\alpha\|^2$ mit

$$\tilde{I}'(\Phi_4) = \frac{C_d^d \pi^{\frac{d}{2}}}{2^{d+1} \rho^d \Gamma(\frac{d}{2} + 1)} q^{-d} e^{-\frac{2C^2}{\rho q^2}}.$$

4 Ein Beispiel

Die Graphiken und Vektoren des Beispiels sind mit MATHEMATICA erstellt.

4.1 Das Interpolationsproblem

Es wird das Interpolationsproblem aus Kapitel 1.3 betrachtet:

Sei $\Phi(x) = e^{-(x_1^2+x_2^2)} \in BPD(0)$ mit $x = (x_1, x_2)^t$ die positiv definite Gaussfunktion auf \mathbb{R}^2 . Sei X die Menge der äquidistanten Punkte $x_{ij} := (i/4, j/4)^t$ für $0 \leq i, j \leq 4$.

Um eine Menge von Punkten der Art x_k , $1 \leq k \leq 25$, zu erhalten, werden die Punkte x_{ij} sortiert. Man wählt $X = \{(x_k)_{k=1}^{25}\} := \{((x_{ij})_{j=0}^4)_{i=0}^4\}$. Zu $f(x) := x_1 + x_2$ ist eine Interpolante der Form

$$\tilde{s}(x) = \sum_{j=1}^{25} \tilde{\alpha}_j e^{-\|x-x_j\|^2}$$

gesucht, welche

$$\tilde{s}(x_j) = f(x_j) \quad \text{für } 1 \leq j \leq 25$$

erfülle. Da die Gaussfunktion positiv definit ist, gibt es eine eindeutige Lösung des Problems, d.h. es existiert genau ein Vektor $\tilde{\alpha}$ der Linearkombination (1.3).

Wie zu Beginn des Kapitels 2 erwähnt, stimmt die allgemeine Form der Interpolante s aus Kapitel 1.3 mit der aus Kapitel 2 für $\Phi \in BPD(0)$ überein. In Kapitel 2 sind allerdings die *Aufpunkte* von den *Zentren* verschieden, es gilt explizit $x_i = y_i + D$ für $1 \leq i \leq N$, $D \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Diese Verschiebung wirkt sich nicht auf den Punktfehler und den L_2 -Fehler aus. Deswegen kann man zur Veranschaulichung des Interpolationsproblems hier $D = 0$ setzen.

Der Eigenwertvektor $\lambda := (\lambda_i(A))_{i=1}^{25}$ der Matrix $A = (\Phi(x_i - x_j))_{i,j=1}^{25}$ lautet:

$$\begin{aligned} \lambda = & (5.87636 \cdot 10^{-9}, 2.88569 \cdot 10^{-7}, 2.88569 \cdot 10^{-7}, 6.10359 \cdot 10^{-6}, 6.10359 \cdot 10^{-6}, \\ & 0.00001417064910763399, 0.00006512472154093225, 0.00006512472154103493, \\ & 0.0002997273262889139, 0.0002997273262891862, 0.0003117643257612909, \\ & 0.0003117643257612953, 0.003198059712378556, 0.003198059712378696, \\ & 0.006339615739688393, 0.01530971505723542, 0.01530971505723544, \\ & 0.06764304723258375, 0.06764304723258396, 0.3238200258505543, \\ & 0.3238200258505547, 0.7217443496243737, 3.455126336181286, \end{aligned}$$

3.455126336181291, 16.54034147296963).

Der Lösungsvektor $\tilde{\alpha}$ des Interpolationsproblems ist nun:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} = & (-5.756758885052819, -72.75982014615996, 225.4006109556794, \\ & -254.4414037555318, 117.6392766353153, -72.75982015277038, \\ & 474.8092978559288, -1020.187234461342, 1006.138382560849, \\ & -433.6324045235843, 225.4006109795464, -1020.187234510742, \\ & 1909.844665762906, -1752.225449731244, 722.5925212097241, \\ & -254.4414037876988, 1006.138382648123, -1752.225449806061, \\ & 1537.46746734818, -615.3139881555588, 117.6392766514164, \\ & -433.6324045719122, 722.5925212640282, -615.313988178329, \\ & 241.0353121699936). \end{aligned}$$

Der L_2 -Fehler der Interpolante beträgt $\|f - \tilde{s}\| = 0.0235715$.

Im Anschluß an das Approximationsproblem ist in Kapitel 4.3 die Interpolante \tilde{s} in *Figur 1* und der Punktfehler $f(x) - \tilde{s}(x)$ des Interpolationsproblems in *Figur 2* dargestellt .

4.2 Das L_2 -Approximationsproblem

Zu betrachten ist das L_2 -Approximationsproblem aus Kapitel 3.1:

Sei weiterhin $\Phi(x) = e^{-(x_1^2+x_2^2)}$ mit $x = (x_1, x_2)^t$ die zugrundeliegende radiale Basisfunktion. Es seien $X = \{(x_{ij})_{j=0}^4\}_{i=0}^4$ und $\Omega = [-1/4, 5/4] \times [-1/4, 5/4]$ wie in 4.1 gegeben. Die Separationsdistanz q beträgt dann $q := \frac{1}{2} \min_{j \neq k} \|x_j - x_k\| = 1/8$. Damit sind die Würfel $W(x_k) := \{\|x - x_k\|_\infty \leq qd^{-\frac{1}{2}} = 2^{-7/2}\}$ disjunkt für $1 \leq k \leq 25$. Alle 25 Würfel sind in Ω enthalten und somit ist Ω ein *zulässiges Gebiet bezüglich X* .

Wird wieder die Funktion $f(x) = x_1 + x_2$ betrachtet, so ist die beste L_2 -Approximierende der Form

$$s^*(x) = \sum_{j=1}^{25} \alpha_j^* e^{-\|x-x_j\|^2}$$

gesucht, wobei $\alpha^* = (\alpha_j^*)_{j=1}^{25} \in \mathbb{R}^{25}$ den Lösungsvektor der besten Approximierenden bildet, so daß gilt:

$$\|f - s^*\| = \inf_{s \in S_X} \|f - s\|.$$

Der Eigenwertvektor $\lambda := (\lambda_i(A_X))_{i=1}^{25}$ von $A_X = (\langle e^{-\|\cdot-x_j\|^2}, e^{-\|\cdot-x_k\|^2} \rangle)_{j,k=1}^{25}$ ist:

$$\begin{aligned} \lambda = & (-6.08473 \cdot 10^{-10}, -6.08473 \cdot 10^{-10}, 3.00617 \cdot 10^{-10}, 8.07762 \cdot 10^{-10}, \\ & 1.12488 \cdot 10^{-9}, 1.48872 \cdot 10^{-9}, 6.07743 \cdot 10^{-9}, 6.07743 \cdot 10^{-9}, 6.35428 \cdot 10^{-8}, \\ & 6.35428 \cdot 10^{-8}, 1.11718 \cdot 10^{-7}, 1.11745 \cdot 10^{-7}, 4.60673 \cdot 10^{-6}, 4.60682 \cdot 10^{-6}, \\ & 0.00001410495558146344, 0.00007883243892965407, 0.00007883243893021774, \\ & 0.001006157908613683, 0.001006157908613809, 0.01721462715506312, \\ & 0.017214628123568, 0.07177603887077524, 1.228036498868317, \\ & 1.228036498868319, 21.01082327400634). \end{aligned}$$

Die negativen Werte von λ_1 und λ_2 sind dabei auf numerische Rechenungenauigkeiten zurückzuführen. Da Φ eine positiv definite Funktion ist, müssen λ_1 und λ_2 positiv sein, allerdings sehr nahe Null.

Der Lösungsvektor α^* der besten Approximation lautet sodann:

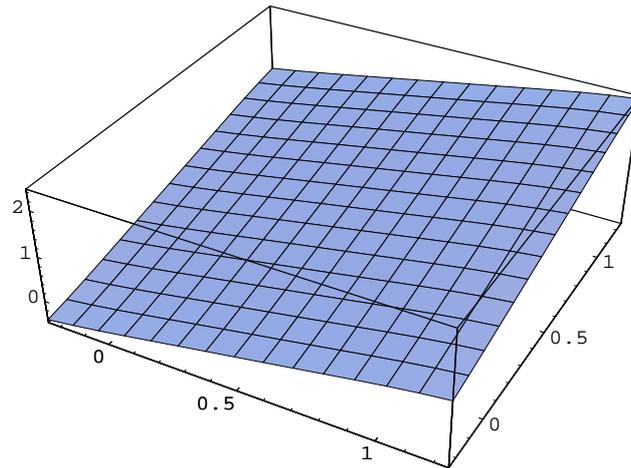
$$\begin{aligned} \alpha^* = & (-28.97723678047325, 36.64357598376442, -17.90125006442645, \\ & 4.045721501163555, 12.43142808271431, 36.64358540306642, \\ & -19.12985284246535, -2.485326516137292, -15.52595380709784, \\ & -33.17567314740809, -17.90126601658626, -2.485318081363289, \\ & 4.14758042943245, 25.22166238546755, 59.91730695818939, \\ & 4.045726979180742, -15.52593978254566, 25.22163371850462, \\ & -17.88777213584826, -62.30322424849158, 12.43143016371673, \\ & -33.17569000164356, 59.91733364866768, -62.30323715834416, \\ & 51.82139399278188). \end{aligned}$$

Damit ergibt sich der L_2 -Fehler der Approximation $\|f - s^*\| = 0.00906133$.

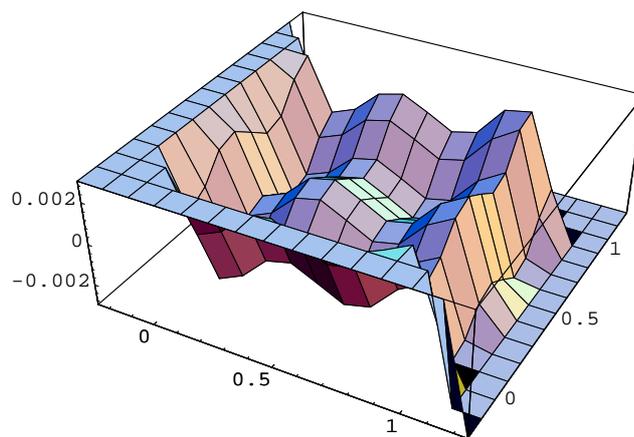
Die beste Approximierende s^* ist in Kapitel 4.3 in *Figur 3* dargestellt, der Punktfehler $f(x) - s^*(x)$ des Approximationsproblems in *Figur 4* und die Gaussfunktion zuletzt in *Figur 5*.

4.3 Graphische Darstellung der betrachteten Funktionen

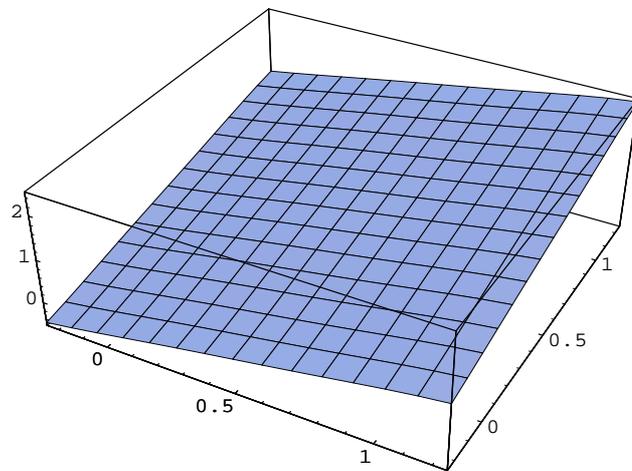
Die sich in den Kapiteln 4.1 und 4.2 ergebenden Funktionen werden in diesem Abschnitt präsentiert.



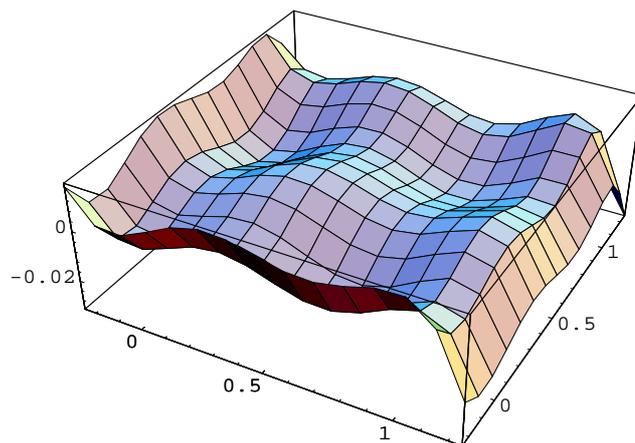
Figur 1: Die Interpolante $\tilde{s}(x) = \sum_{j=1}^{25} \tilde{\alpha}_j e^{-\|x-x_j\|^2}$



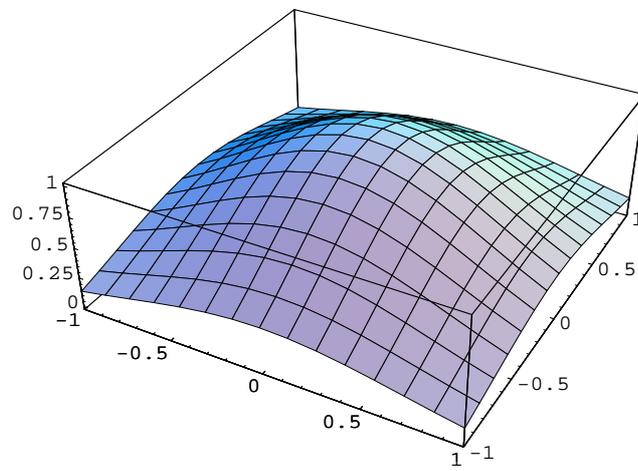
Figur 2: Der Punktfehler $\tilde{s}(x) - f(x)$ der Interpolation



Figur 3: Die beste Approximierende $s^*(x) = \sum_{j=1}^{25} \alpha_j^* e^{-\|x-x_j\|^2}$



Figur 4: Der Punktfehler $s^*(x) - f(x)$ der Approximation



Figur 5: Gaussians $\Phi(x) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\Phi(x) = e^{-\|x\|^2}$.

5 Ausblick

Diese Arbeit läßt sich in verschiedener Hinsicht fortsetzen. Es seien vier Möglichkeiten angeführt.

Zum einen läßt sich anstelle des L_2 - das diskrete l_2 -Approximationsproblem betrachten. Dabei treten in der Norm Summen statt Integrale auf. Siehe dazu zum Beispiel Sivakumar, Ward [13].

Als zweiter Ausblick sei der verbleibende Fall $\Phi \in BPD(m)$, $m > 0$, mit $\Omega = \mathbb{R}^d$ erwähnt. Legt man das L_2 -Skalarprodukt zugrunde und fordert $\Phi \in BPD(m) \cap L_2$, so gilt für beliebige $1 \leq j, k \leq N$: $\langle \Phi(\cdot - x_j), \Phi(\cdot - x_k) \rangle = (\Phi * \Phi)(x_j - x_k)$. Damit läßt sich hier wie in Kapitel 3.3 das Approximationsproblem auf ein Interpolationsproblem mit zugrundeliegender radialer Basisfunktion $(\Phi * \Phi)(x_j - x_k) \in BPD(\tilde{m})$ zurückführen. Dabei ist $\tilde{m} \in \mathbb{N}$ noch explizit zu bestimmen. Der Interpolationsraum ist dann wie folgt definiert:

$$S_X^{\tilde{m}} := \left\{ \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi * \Phi(x_j - x_k) + \sum_{l=1}^{\tilde{Q}} \beta_l p_l(\cdot), \alpha \in V_{\tilde{m}}^-, \tilde{Q} = \dim \mathbb{P}_{\tilde{m}}^d \right\}.$$

Hier sind gewisse Voraussetzungen notwendig, damit die entstehenden Integrale existieren und es bedarf einer distributionellen Betrachtung, da Φ nicht mehr positiv definit ist, d.h. Φ keine klassische Fouriertransformierte besitzt.

Drittens sei bemerkt, daß eine von der L_2 -Norm verschiedene Norm zugrundegelegt werden kann, zum Beispiel die Supremumsnorm, woraus sicherlich interessante Abschätzungen resultieren könnten.

Als letzte Fortführung sei hier das Approximationsproblem mit äquidistanten Zentren $X = \mathbb{Z}^d$ genannt, wie sie in der Theorie von Buhmann [2] benutzt werden.

Literatur

- [1] S. BERNSTEIN (1928),
Sur les Fonctions Absolument Monotones,
Acta Mathematica, Vol.68, 1-66.
- [2] M.D. BUHMANN (1993),
New Developments in the Theory of Radial Basis Funktion Interpolation,
Technical Report DAMTP 1993/ NA 9, Department of Applied Mathematics and
Theoretical Physics, University of Cambridge.
- [3] W. FISCHER, I. LIEB (1994),
Funktionentheorie,
Vieweg, Braunschweig / Wiesbaden, 184-189.
- [4] K. GUO, S. HU, X. SUN (1993),
Conditionally Positive Definite Functions and Laplace-Stieltje Integrals,
Journal of Approximation Theory, Vol. 74, 249-265.
- [5] L. JANTSCHER (1971),
Distributionen,
De Gruyter, Berlin.
- [6] C.A. MICCHELLI (1986),
*Interpolation of Scattered Data: Distance Matrices and Conditionally Positive De-
finite Functions*,
Constructive Approximation, Vol. 2, 11-22.
- [7] M.J.D. POWELL (1992),
The Theory of Radial Basis Function Approximation in 1990,
In: W. Light, ed.: *Advances in Numerical Analysis*, Vol. 2: Wavelets, Subdivision
Algorithms and Radial Basis Funktionen, Clarendon Press, Oxford.
- [8] E. QUAK, N. SIVAKUMAR, J.D. WARD (1993),
Least Square Approximation by Radial Basis Functions,
SIAM Journal on Mathematical Analysis, Vol. 24, Nr.4, 1043-1066.
- [9] R. SCHABACK (1994),
Error Estimates and Condition Numbers for Radial Basis Function Interpolation,
Advances in Computational Mathematics 3, 251-264.
- [10] R. SCHABACK, H. WERNER (1992),
Numerische Mathematik,
Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 194f.
- [11] I.J. SCHOENBERG (1938),
Metric Spaces and Completely Monotone Functions,
Anals of Mathematics, Vol. 39, 811-841.

- [12] I.J. SCHOENBERG (1938),
Metric Spaces and Positive Definite Functions,
Transaction of the American Mathematical Society, Vol. 44, 522-536.
- [13] N. SIVAKUMAR, J.D. WARD (1992),
On the Least Squares fit by Radial Functions to Multidimensional Scattered Data,
CAT Report 251, Center for Approximation Theory, Texas.
- [14] E.M. STEIN, G. WEISS (1971),
Introduction to Fourier Analysis on Euklidian Spaces,
Princetown University Press, 10f.
- [15] W. WALTER (1990),
Analysis II,
Springer–Verlag Berlin Heidelberg, 130f.
- [16] G.N. WATSON (1966),
A Treatise on the Theory of Besselfunctions,
Cambridge University Press, 172-185, 206f.
- [17] H. WENDLAND (1993),
Ein Beitrag zur Interpolation mit radialen Basisfunktionen,
Diplomarbeit, vorgelegt in Göttingen.
- [18] D. WERNER (1995),
Funktionalanalysis,
Springer–Verlag Berlin Heidelberg, 176f.
- [19] Z. WU, R. SCHABACK (1993),
Local Error Estimates for Radial Basis Function Interpolation of Scattered Data,
IMA Journal of Numerical Analysis, Vol. 13, 13-27.