

**Die numerische Lösung des inversen  
akustischen Streuproblems am schallharten  
Kurvenbogen**

**Dissertation  
zur Erlangung des Doktorgrades  
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultäten  
der Georg-August-Universität zu Göttingen**

vorgelegt von  
Lars Mönch  
aus Erfurt

Göttingen 1996

D7

Referent: Prof. Dr. R. Kreß

Korreferent: Prof. Dr. R. Schaback

Tag der mündlichen Prüfung: 04.11.1996

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2. Direktes Streuproblem für einen schallharten Bogen</b>	<b>8</b>
2.1 Formulierung des direkten Problems . . . . .	8
2.2 Eindeutigkeit für das Randwertproblem . . . . .	11
2.3 Ein Existenzbeweis für eine Lösung des direkten Streuproblems . . . . .	14
<b>3. Numerische Behandlung des direkten Streuproblems</b>	<b>31</b>
3.1 Beschreibung der numerischen Methode . . . . .	31
3.2 Konvergenz- und Fehleranalyse . . . . .	35
3.3 Ergebnisse numerischer Experimente . . . . .	39
<b>4. Inverses Streuproblem für einen schallharten Bogen</b>	<b>45</b>
4.1 Formulierung des inversen Streuproblems . . . . .	45
4.2 Eindeutigkeitsuntersuchungen für das inverse Problem . . . . .	46
4.3 Eigenschaften des Fernfeldes und des Fernfeldoperators . . . . .	49
<b>5. Fréchet-Differenzierbarkeit des Fernfeldoperators</b>	<b>53</b>
5.1 Die Fréchet-Differenzierbarkeit des Fernfeldoperators . . . . .	53
5.2 Charakterisierung der Fréchet-Ableitung des Fernfeldoperators . . . . .	65
5.3 Numerische Berechnung der Fréchet-Ableitung . . . . .	73

<b>6. Newtonverfahren zur Lösung des inversen Neumannproblems</b>	<b>79</b>
6.1 Beschreibung des Newtonverfahrens . . . . .	79
6.2 Orthogonalpolynome als Ansatzfunktionen . . . . .	81
6.3 Radiale Basisfunktionen als Ansatzfunktionen . . . . .	92
6.4 Experimente mit Quasi-Newtonverfahren . . . . .	96
6.5 Mögliche weitere Untersuchungsrichtungen . . . . .	99
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>98</b>

# 1. Einleitung

Die mathematische Modellierung der Streuung von zeitharmonischen akustischen Wellen an Hindernissen führt zu äußeren Randwertproblemen für die Helmholtzgleichung. Die Vorgabe des Druckes der akustischen Welle auf dem Rand des Hindernisses entspricht mathematisch dem Lösen eines äußeren Dirichletproblems für die Helmholtzgleichung. Falls der Druck auf dem Rand des Hindernisses verschwindet, sprechen wir von einem schallweichen Hindernis. Ist hingegen die Geschwindigkeit der akustischen Welle beim Auftreffen auf das Hindernis vorgeschrieben, so erhalten wir ein äußeres Neumannproblem für die Helmholtzgleichung. Wenn die Geschwindigkeit verschwindet, sprechen wir von einem schallharten Hindernis. In der Streutheorie interessiert man sich sowohl für das Verhalten der am Hindernis gestreuten Welle im Unendlichen als auch für eine Rekonstruktion des die Streuung verursachenden Hindernisses aus dem Verhalten der gestreuten Welle im Unendlichen. Wir bezeichnen das erste Problem als direktes Streuproblem, das zweite hingegen als inverses Streuproblem. Das direkte Problem ist im allgemeinen ein lineares, im Sinne von Hadamard gutgestelltes Problem, das inverse Problem ist nichtlinear und inkorrekt gestellt.

Im Fall geschlossener, hinreichend glatter Randkurven liegen sowohl für das direkte als auch für das inverse Streuproblem numerische Approximationsverfahren für den Fall des schallweichen als auch des schallharten Hindernisses vor (vergleiche die Monographie [7] für den Fall des schallweichen Hindernisses bzw. die Arbeiten [19, 38] für das schallharte direkte Problem und [13, 40] für das entsprechende inverse Problem). Die Lösung des direkten Problems erfolgt dabei mit Hilfe der Randintegralgleichungsmethode und führt auf die Lösung von Fredholmschen Integralgleichungen zweiter Art.

Die Methoden zur Lösung des inversen Streuproblems können wir grob in zwei Arten unterteilen: sogenannte direkte Methoden, die iterativer Natur sind, sowie nichtdirekte Verfahren, die im wesentlichen nichtlineare Optimierungsverfahren darstellen. Die direkten Methoden wie zum Beispiel Newton-artige Verfahren oder die Landweber-Iteration verlangen in jedem Iterationsschritt die Lösung direkter Probleme. Als nichtdirekte Verfahren sind die Verfahren vom Typ des Kirsch-Kress- und des Colton-Monk-Verfahrens bekannt. In den letzten Jahren

haben, durch den Fortschritt in der Rechentechnik bedingt, auch die direkten Verfahren zur Lösung von inversen Streuproblemen ihre Berechtigung erhalten (vergleiche [21, 15, 23, 10, 13, 40]). Dabei hat sich herausgestellt, daß bei Vorliegen geeigneter Startkurven bessere Rekonstruktionen als bei Verwendung von Verfahren der zweiten Gruppe erzielt werden können.

Die Situation ändert sich drastisch, wenn man von der Forderung einer hinreichenden Randglätte Abstand nimmt und zum Beispiel Gebiete mit Ecken oder offene Kurvenstücke zuläßt, an denen die Streuung erfolgt. In diesem Fall treten schon bei der Lösung des direkten Problems Schwierigkeiten auf. Die entsprechenden Integraloperatoren sind im allgemeinen nicht mehr in den Funktionenräumen kompakt, in denen wir Lösungen der Integralgleichungen suchen. In dieser Arbeit wollen wir den Fall eines offenen schallharten Kurvenbogens im  $\mathbb{R}^2$  betrachten, der als Spezialfall einer Ecke mit Öffnungswinkel  $2\pi$  angesehen werden kann. Entsprechende Untersuchungen für das direkte Problem bei einem schallweichen Bogen wurden erstmals von Hayashi [11] vorgenommen. Die Lösungen der Helmholtzgleichung weisen in den Kurvenendpunkten Wurzelsingularitäten auf, die bei einer numerischen Lösung des Problems durch Gitterverfeinerung geeignet berücksichtigt werden müssen. Entsprechende Ansätze für den einfacheren Fall der Laplacegleichung unter Verwendung der sogenannten Cosinus-Substitution sind aus der Literatur bekannt ([61, ?, ?]). Das direkte und das inverse akustische Streuproblem für einen schallweichen offenen Bogen wurden erstmals von Kress in der Arbeit [18] betrachtet. Inzwischen liegen auch entsprechende Ergebnisse für den Fall der Streuung von elastischen Wellen an einem harten elastischen Hindernis vor [22].

Ziel dieser Arbeit ist eine Ausdehnung der in [18] erzielten Ergebnisse auf einen schallharten offenen Bogen. Dabei wird das inverse Streuproblem mit einem Newtonverfahren numerisch gelöst, da Verfahren wie das Kirsch-Kress-Verfahren ein nichtleeres Inneres des die Streuung verursachenden Gebietes voraussetzen. Die Durchführung eines Newtonschrittes verlangt die Lösung von direkten Problemen. Deshalb wird im zweiten Kapitel der Arbeit zunächst das direkte Streuproblem für einen offenen schallharten Bogen ausführlich studiert. Untersuchungen zu diesem Problem findet man in den Arbeiten [32, 49, 62, ?, 26]. Allerdings werden in diesen Arbeiten jeweils Bedingungen an das Verhalten des Gradienten der Lösung gestellt, die im wesentlichen eine Anwendung des Greenschen Satzes für den Bogen gestatten. Lewis und Wickham konnten in [29] auf die Gradientenbedingung verzichten und diese durch die schwächere Forderung der Beschränktheit der Lösung in der Nähe der Kurvenendpunkte ersetzen. In der vorliegenden Arbeit verzichten wir ebenfalls auf Forderungen an den Gradienten, verlangen allerdings (auf natürliche Art und Weise), daß die Lösung in den Kurvenendpunkten stetig ist. Für den Beweis der Eindeutigkeit einer Lösung ist eine Anwendung des Greenschen Satzes erforderlich. Dabei geht man wie im Fall

---

geschlossener Randkurven mit Hilfe der Lebesgueschen Integrationstheorie vor. Der nachfolgende Existenzbeweis wird auf konstruktive Art und Weise erbracht, indem wir eine Lösung als akustisches Doppelschichtpotential suchen. Das führt auf eine hypersinguläre Integralgleichung erster Art. Durch die Wahl einer Dichte aus einem geeigneten Funktionenraum wird das singuläre Verhalten des Gradienten berücksichtigt. Nach Anwenden der Cosinus-Substitution und ungerader Fortsetzung der Dichte auf das Intervall  $[0, 2\pi]$  erhalten wir die hypersinguläre Integralgleichung

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \cot \frac{\sigma - \tau}{2} \varphi'(\sigma) + \left( K_1(\tau, \sigma) \log 4 \sin^2 \frac{\sigma - \tau}{2} + K_2(\tau, \sigma) \right) \varphi(\sigma) \right\} d\sigma = f(\tau)$$

für  $\tau \in [0, 2\pi]$ . Diese Integralgleichung steht in enger Beziehung zur entsprechenden Integralgleichung erster Art für eine geschlossenen Berandung, die in [38] sowohl theoretisch als auch numerisch untersucht wurde. Durch Anwenden der Riesz-Theorie bekommen wir dann eine Lösungstheorie, die sich in Vergleich zu anderen Arbeiten (z.B. dem Artikel [26] von Krutitskij, in dem die Existenz einer Lösung durch technisch aufwendige Diskussion von Systemen Cauchy-singulärer Integralgleichungen gezeigt wird) durch besondere Kürze auszeichnet. Wir vermeiden weiterhin eine Diskussion der hypersingulären Integralgleichung als Gleichung, die finite-part-Integrale im Hadamardschen Sinne enthält (vergleiche hierfür [32, ?]). Eine Übertragung unserer Lösungstheorie auf Systeme von paarweise disjunkten offenen Bögen ist ohne Schwierigkeiten möglich.

Die numerische Lösung der hypersingulären Integralgleichung erfolgt mit einem Quadraturformelverfahren. Dieses wird im dritten Kapitel dieser Arbeit dargestellt. Durch die Cosinus-Substitution kommt es zu einer Verfeinerung des Gitters in der Nähe der Kurvenendpunkte. Es wird eine auf einem einfachen Störungsargument aufbauende Konvergenzanalyse in Hölderräumen angegeben. Für analytische Bögen wird ein exponentielles Abklingen des Fehlers bewiesen. Numerische Experimente bestätigen die erzielten theoretischen Resultate. Die Ergebnisse des zweiten und dritten Kapitels sind in [39] veröffentlicht worden.

Das vierte Kapitel beschäftigt sich mit Eindeutigkeitsfragen zum inversen Problem. Insbesondere wird gezeigt, daß eine Ausdehnung der von Isakow [14], Kirsch und Kress [16] erzielten Ergebnisse auf den Fall der akustischen Streuung an einem offenen schallharten Bogen möglich ist. Es kann somit Eindeutigkeit für den Bogen bei Kenntnis der Fernfelder für einfallende ebene Wellen aus allen Richtungen gezeigt werden. Weiterhin werden in diesem Kapitel Eigenschaften der Fernfelder und des Fernfeldoperators untersucht. Wir erläutern die inkorrekte Gestelltheit des inversen Streuproblems.

In den letzten beiden Kapiteln dieser Arbeit beschäftigen wir uns mit der numerischen Lösung des inversen Streuproblems. Dazu beweisen wir zunächst im

fünften Kapitel die Fréchet-Differenzierbarkeit des Fernfeldoperators

$$F : \gamma \longmapsto u_\infty,$$

wobei  $\gamma$  eine (reguläre) Parametrisierung des Bogens darstellt und  $u_\infty$  das Fernfeld bezeichnet. Die Fréchet-Differenzierbarkeit des Fernfeldoperators für ein schallhartes Hindernis ist von Potthast in [51] und von Hettlich durch eine Variationsformulierung des Problems in [12] jeweils im  $\mathbb{R}^3$  gezeigt worden. Dabei vermeidet Potthast eine Untersuchung der Fréchet-Differenzierbarkeit des hypersingulären Integraloperators. Auf Grund des offenen Bogens als Streuhindernis müssen wir jedoch auch die Differenzierbarkeit dieses Operators untersuchen. Wir verwenden in Analogie zu Kress [20] die Abbildungseigenschaften der entsprechenden Integraloperatoren in Sobolevräumen periodischer Funktionen. Eine Betrachtung dieser Räume an Stelle von Hölderräumen bewirkt eine Verkürzung der entsprechenden Beweise. Anschließend charakterisieren wir die Fréchet-Ableitung als Lösung eines speziellen Neumannrandwertproblems für die Helmholtzgleichung. Wir verwenden aber im Gegensatz zu [21] und [15] nicht diese Charakterisierung zur numerischen Auswertung der Fréchet-Ableitung des Fernfeldoperators. Wir benutzen ein Quadraturformelverfahren, um Approximationen für die entsprechenden rechten Seiten der zu lösenden hypersingulären Integralgleichung bereitzustellen.

Für die numerische Behandlung ersetzen wir im sechsten Kapitel die nichtlineare, inkorrekt gestellte Gleichung  $F_\gamma = u_\infty$  durch die nachfolgende linearisierte Version

$$F'_\gamma h + F_\gamma = u_\infty.$$

Wir geben eine detaillierte Beschreibung des Newtonverfahrens. Zahlreiche numerische Experimente illustrieren die Güte des beschriebenen Verfahrens. Wir experimentieren mit unterschiedlichen Basen für die endlichdimensionalen Ansatzräume. Weiterhin versuchen wir, durch Betrachtung von Quasi-Newtonverfahren den zur Berechnung der Fréchet-Ableitung nötigen Aufwand zu reduzieren. Wir demonstrieren, daß durch die Verwendung eines modifizierten Quasi-Newtonverfahrens eine drastische Reduzierung des Rechenaufwandes vorgenommen werden kann, ohne die Güte der Rekonstruktion zu verschlechtern. Abschließend werden offene Probleme und Erweiterungsmöglichkeiten für die in dieser Arbeit entwickelten Methoden diskutiert.

Herrn Prof. Dr. R. Kreß möchte ich für die Anregung zur Beschäftigung mit dieser Thematik und für wichtige Ratschläge bei der Verfassung der vorliegenden Arbeit recht herzlich danken. Sein stetes Interesse und viele nützliche Diskussionen haben die Entstehung dieser Arbeit entscheidend gefördert. Herrn Prof. Dr. R. Schaback danke ich für die Übernahme des Korreferates. Der Deutschen Forschungsgemeinschaft möchte ich meinen Dank für die finanzielle Unterstützung im Rahmen des



---

DFG-Projekts 'Newtonverfahren für inverse Randwertprobleme bei akustischen und elektromagnetischen Wellen' aussprechen.

## 2. Das direkte Streuproblem für einen schallharten Bogen

Die Lösung eines inversen Problems setzt die gründliche Kenntnis des zugehörigen direkten Problems voraus. Deshalb werden wir in diesem Kapitel das direkte Streuproblem zunächst formulieren. Dann untersuchen wir die Eindeutigkeit dieses Problems. Im nächsten Abschnitt wird ein auf der Integralgleichungsmethode basierender Existenzbeweis gegeben. Durch die aus dem potentialtheoretischen Fall bekannte Cosinus-Substitution wird die auftretende hypersinguläre Integralgleichung erster Art in eine Integralgleichung überführt, die in enger Beziehung zur entsprechenden Integralgleichung für den Fall geschlossener Randkurven steht. Wir diskutieren die Lösbarkeit dieser hypersingulären Integralgleichung in Sobolevräumen und Hölderräumen.

### 2.1 Formulierung des direkten Problems

Wie setzen im folgenden stets voraus, daß  $\Gamma \in \mathbb{R}^2$  ein Bogen der Klasse  $C^3$  ist, d.h., es gilt:

$$\Gamma := \{\gamma(s) \mid s \in [-1, 1]\},$$

wobei die Parametrisierungsfunktion  $\gamma$  injektiv sowie dreimal stetig differenzierbar ist. Weiterhin seien die Endpunkte des Bogens mit  $x_{-1}^*$  und  $x_1^*$  bezeichnet. Wir verwenden in dieser Arbeit die Abkürzung

$$\Gamma_0 := \Gamma \setminus \{x_{-1}^*, x_1^*\}.$$

Wir durchlaufen den Bogen von  $x_{-1}^*$  nach  $x_1^*$ . Unter  $t(\gamma(s))$  verstehen wir den durch diese Orientierung des Bogens vorgegebenen Tangentenvektor. Mit  $n(\gamma(s))$  bezeichnen wir die Normale  $n(\gamma(s)) = -i\gamma'(s)/|\gamma'(s)|$  im Punkt  $\gamma(s)$  des Bogens. Wir verwenden die Bezeichnung  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  für das euklidische Skalarprodukt im  $\mathbb{R}^2$ . Die charakteristische Funktion einer Punktmenge  $G \subset \mathbb{R}^2$  bezeichnen wir im

folgenden mit  $\chi_G$ .

Im weiteren werden wir Hölderräume benötigen. Deshalb definieren wir:

**Definition 2.1** Eine Funktion  $f : D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{C}$  heißt gleichmäßig hölderstetig mit Hölderexponenten  $0 < \alpha < 1$ , falls es eine Konstante  $C$  gibt mit

$$|f(s_1) - f(s_2)| \leq C|s_1 - s_2|^\alpha, \quad s_1, s_2 \in D.$$

Mit  $C^{0,\alpha}(D)$  bezeichnen wir den Raum aller beschränkten und gleichmäßig hölderstetigen Funktionen auf  $D$ .

Der Raum  $C^{0,\alpha}(D)$ , versehen mit der Norm

$$\|f\|_{0,\alpha,D} := \sup_{s \in D} |f(s)| + \sup_{\substack{s_1, s_2 \in D \\ s_1 \neq s_2}} \frac{|f(s_1) - f(s_2)|}{|s_1 - s_2|^\alpha},$$

ist ein Banachraum.

Wir untersuchen in dieser Arbeit die Streuung einer ebenen Welle an einem schallharten Bogen. Das Verhalten der Welle wird dabei durch die Lösung  $u$  der reduzierten Wellengleichung oder Helmholtzgleichung

$$\Delta u + \kappa^2 u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$$

mit positiver Wellenzahl  $\kappa$  modelliert, falls wir noch verlangen, daß  $u$  eine Neumann-Randbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_0$$

erfüllt. Physikalisch entspricht das einem Verschwinden des Druckes auf dem Bogen. Dabei zerlegen wir das Gesamtfeld  $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma)$  in  $u = u^i + u^s$ , wobei

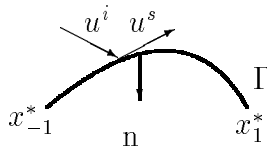


Abbildung 2.1: Offener Bogen

das aus der Richtung  $d$  einfallende Feld durch  $u^i(x) = e^{i\kappa \langle x, d \rangle}$  gegeben ist. Wir suchen das gestreute Feld  $u^s$ . Von diesem verlangen wir, daß es im Unendlichen der Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung genügt.

Dieses Problem ist für geschlossene Randkurven ausführlich theoretisch und numerisch untersucht worden (vergleiche [19, 38]). Im Falle geschlossener Randkurven führen entsprechende Formulierungen als Randintegralgleichungen mit reinen Einfach- oder Doppelschichtpotentialen zu Problemen, falls die Wellenzahl  $\kappa$  ein innerer Neumannwert ist (vergleiche [7]). Insbesondere verlangt ein reiner Doppelschichtpotentialansatz, wie in [38] dargestellt, eine Modifikation der Grundlösung.

Nach Umbenennung der gesuchten Funktion untersuchen wir in diesem Kapitel das folgende Randwertproblem für die Helmholtzgleichung.

**Definition 2.2 (Neumannproblem für einen offenen Bogen)**

Wir suchen eine Funktion  $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma) \cap C(\overline{\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma})$  mit existierenden Normalableitungen

$$(2.1) \quad \frac{\partial u_{\pm}(x)}{\partial n} := \lim_{h \rightarrow +0} \langle n(x), \text{grad } u(x \pm hn(x)) \rangle, \quad x \in \Gamma_0,$$

die in den Endpunkten  $x_i^*$  des Bogens stetig ist, die Helmholtzgleichung

$$(2.2) \quad \Delta u + \kappa^2 u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma, \quad \kappa > 0$$

mit Neumannrandbedingungen

$$(2.3) \quad \frac{\partial u_{\pm}}{\partial n} = f, \quad f \in C^{0,\alpha}(\Gamma)$$

erfüllt sowie im Unendlichen der Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung genügt, d.h., es gilt

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left( \frac{\partial u}{\partial r} - i\kappa u \right) = 0$$

gleichmäßig für alle Richtungen  $\hat{x} := \frac{x}{|x|}$  und  $r := |x|$ .

Das direkte Streuproblem für einen schallharten Bogen ist dann ein Neumannproblem für das gestreute Feld  $u^s$  mit der rechten Seite

$$f(x) := -\frac{\partial u^i}{\partial n}.$$

In der Arbeit [26] wird die folgende Bedingung für den Gradienten einer Lösung in der Nähe der Kurvenendpunkte verwendet

$$(2.4) \quad \text{grad } u(x) = O(|x - x_i^*|^\alpha), \quad i = -1, 1, \alpha > -1.$$

Eine ähnliche Bedingung findet man schon in der Arbeit von Peters und Stoker [49]. Die Bedingung (2.4) sichert  $\text{grad } u \in L^2(\Omega_R)$  für hinreichend großes  $R$ , wobei

wir mit  $\Omega_R$  einen Kreis mit Radius  $R$  um den Ursprung bezeichnen. In einer neueren Arbeit von Lewis und Wickham [29] wird lediglich die Beschränktheit der Lösung  $u$  in der Umgebung der Kurvenendpunkte gefordert.

Wir verlangen bei unserer Problemstellung außer der Stetigkeit keine weiteren Bedingungen für das Verhalten von  $u$  in der Nähe der Bogenendpunkte. Diese Forderung wurde durch die Möglichkeit der Übertragung von Techniken aus [28], die bei der Untersuchung der Eindeutigkeit des äußeren Neumannproblems in Gebieten mit Ecken angewandt wurden, motiviert.

## 2.2 Eindeutigkeit für das Randwertproblem

Wir beschäftigen uns in diesem Abschnitt mit der Eindeutigkeit des Randwertproblems aus dem letzten Abschnitt. Dabei sind die vom Fall geschlossener Randkurven bekannten Methoden nicht unmittelbar übertragbar. Insbesondere ist der Greensche Satz nicht ohne weiteres anwendbar, da die Ableitung der Lösung  $u$  in der Nähe der Endpunkte des Bogens Singularitäten besitzt. Diese Tatsache ist für den Fall von (geschlossenen) Berandungen mit Ecken wohlbekannt. Für den Fall des offenen Bogens als Randkurve findet man einen auf Anwendung der Mellintransformation beruhenden Beweis für dieses Verhalten einer Variationslösung des Neumannproblems in der Arbeit von Stephan und Wendland [58]. Zunächst beweisen wir ein Lemma, das die Anwendbarkeit des Greenschen Satzes in unserer Situation zeigt. Dabei verwenden wir eine auf Chandler-Wilde zurückgehende Idee, die eine Anwendbarkeit der Approximation von Heinz für den schallharten Bogen ermöglicht. Wir erhalten

**Lemma 2.3** *Sei  $u$  eine Lösung des homogenen Neumannproblems für den offenen Bogen. Dann gilt für genügend großes  $R$*

$$(2.5) \quad \text{grad } u \in L^2(\Omega_R),$$

und die folgende Version des Greenschen Satzes ist gültig:

$$(2.6) \quad \int_{\Omega_R} |\text{grad } u(y)|^2 dy - \kappa^2 \int_{\Omega_R} |u(y)|^2 dy = \int_{\partial\Omega_R} u(y) \frac{\partial \bar{u}(y)}{\partial n} ds(y).$$

**Beweis:** Im Beweis bezeichnen wir mit  $C$  eine universelle, positive Konstante. Dann wählen wir eine Funktion

$$(2.7) \quad v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}, \quad v \in C^2(\mathbb{R}^2), \quad v(x_i^*) = u(x_i^*), \quad i = -1, 1,$$

und wir betrachten die Funktion

$$w := u - v$$

an Stelle von  $u$ . Offensichtlich gilt  $w(x_i^*) = 0$ ,  $i = -1, 1$ . Die Idee, eine solche Funktion  $v$  zu betrachten, wurde von Chandler-Wilde [5] in Zusammenhang mit Gebieten mit Ecken verwendet. Dann können wir im wesentlichen den für geschlossene Randkurven und Dirichletrandbedingung bekannten Beweis (vergleiche [7], Lemma 3.8) auf unsere Situation übertragen.

Dazu wählen wir die ungerade, monoton wachsende Funktion  $\psi \in C^1(\mathbb{R})$ , definiert durch

$$(2.8) \quad \psi(s) := \begin{cases} 0 & : 0 \leq s \leq 1 \\ -3s^3 + 14s^2 - 19s + 8 & : 1 \leq s \leq 2 \\ s & : s \geq 2 \end{cases}.$$

Wir betrachten die Folge von Approximationsfunktionen

$$w_n := \frac{\psi(nRe w)}{n} + i \frac{\psi(nIm w)}{n},$$

die gleichmäßig gegen  $w$  konvergiert. Wir bemerken, daß die Funktionen  $w_n$  in der Nähe der Endpunkte des Bogens wegen der Wahl von  $v$  verschwinden. Der Greensche Satz ergibt dann:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_R} \{ \langle \text{grad } w_n(y), \text{grad } \bar{w}(y) \rangle + w_n(y) \Delta \bar{w}(y) \} dy \\ &= \int_{\partial\Omega_R} w_n(y) \frac{\partial \bar{w}(y)}{\partial n} ds(y) - \int_{\Gamma} \{ w_{n,+}(y) - w_{n,-}(y) \} \frac{\partial \bar{w}(y)}{\partial n} ds(y). \end{aligned}$$

Hier bezeichnen wir mit  $w_+$  und  $w_-$  für eine Funktion  $w : \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$  die Größen  $w_{\pm}(x) := \lim_{h \rightarrow +0} w(x \pm hn(x))$ ,  $x \in \Gamma$ .

Mit Hilfe des Lemmas von Fatou und mit dem Satz von der dominierten Konvergenz von Lebesgue können wir den Grenzübergang durchführen. Wir erhalten

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_R} |\text{grad } w(y)|^2 dy - \kappa^2 \int_{\Omega_R} |w(y)|^2 dy \\ &= \int_{\partial\Omega_R} w(y) \frac{\partial \bar{w}(y)}{\partial n} ds(y) - \int_{\Gamma} \{ u_+(y) - u_-(y) \} \frac{\partial \bar{v}(y)}{\partial n} ds(y). \end{aligned}$$

Daraus folgt  $\text{grad } w \in L^2(\Omega_R)$  und somit  $\text{grad } u \in L^2(\Omega_R)$ .

Für den Beweis der zweiten Aussage des Lemmas untersuchen wir die Integrale  $I_i(r) := \int_{\partial B(x_i^*, r)} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} ds$ ,  $i = -1, 1$ , und zeigen

$$(2.9) \quad I_i(r) \rightarrow 0, \quad r \rightarrow 0.$$

$B(x_i^*, r)$  steht hier für einen Kreis um  $x_i^*$  mit Radius  $r$ . Wir schätzen  $I_i(r)$  unter Verwendung der Ungleichung von Cauchy-Schwarz ab:

$$(2.10) \quad |I_i(r)| \leq C \int_{\partial B(x_i^*, r)} \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} \right| ds \leq C \sqrt{r} \left( \int_{\partial B(x_i^*, r)} \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} \right|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Wir erhalten damit:

$$(2.11) \quad C \int_0^r \frac{|I_i(s)|^2}{s} ds \leq \int_0^r \int_{\partial B(x_i^*, t)} \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} \right|^2 ds dt \leq \|\text{grad } u\|_{L^2(\Omega_R)}^2 < \infty.$$

Für die Existenz des ersten Integrals aus (2.11) ist aber die Gültigkeit der Bedingung (2.9) notwendig.

Die Anwendung des Greenschen Satzes auf das Gebiet  $\Omega_R \setminus (B(x_1^*, r) \cup B(x_{-1}^*, r))$  ergibt:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_R \setminus (B(x_1^*, r) \cup B(x_{-1}^*, r))} |\text{grad } u(y)|^2 dy - \kappa^2 \int_{\Omega_R \setminus (B(x_1^*, r) \cup B(x_{-1}^*, r))} |u(y)|^2 dy \\ &= \int_{\partial \Omega_R} u(y) \frac{\partial \bar{u}(y)}{\partial n} ds(y) - \int_{\partial B(x_{-1}^*, r)} u(y) \frac{\partial \bar{u}(y)}{\partial n} ds(y) - \int_{\partial B(x_1^*, r)} u(y) \frac{\partial \bar{u}(y)}{\partial n} ds(y). \end{aligned}$$

Der Satz von Lebesgue über dominierte Konvergenz, angewandt auf die Funktion  $\chi_{\Omega_R \setminus (B(x_1^*, r) \cup B(x_{-1}^*, r))} \left\{ |\text{grad } u|^2 - \kappa^2 |u|^2 \right\}$ , ergibt dann für  $r \rightarrow 0$  unter Verwendung von (2.9) die zweite Behauptung des Lemmas. □

Wir bemerken, daß in der Arbeit von Lewin [28] eine ähnliche Version des Satzes von Green für Gebiete mit Ecken bewiesen wurde. Dabei wurde mit Hilfe der a priori-Schauderabschätzungen das Verhalten der Lösung  $u$  explizit in der Nähe der Ecken abgeschätzt. Die dort angewandten Methoden können auch in unserer Situation benutzt werden. Der hier dargestellte Beweis ist aber wesentlich elementarer, da er außer Lebesguescher Integrationstheorie keine weiteren Hilfsmittel benötigt.

Wenn wir für das Verhalten der Lösung in der Nähe der Kurvenendpunkte explizit (2.4) fordern, erhalten wir unmittelbar die Abschätzung

$$\left| \int_{\partial B(x_i^*, \varrho_0)} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} ds \right| \leq 2\pi C \varrho_0^{1+\alpha} \longrightarrow 0, \quad \varrho_0 \rightarrow 0.$$

Wir sind nun in der Lage, einen Eindeutigkeitssatz für das direkte Streuproblem für einen schallharten offenen Bogen zu formulieren und zu beweisen. Der Beweis basiert auf der Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung und der durch das Lemma 2.2 gerechtfertigten Anwendbarkeit des Greenschen Satzes.

**Satz 2.4** *Das Neumannproblem für den offenen Bogen hat höchstens eine Lösung.*

**Beweis:** Wir bezeichnen mit  $\Omega_R$  einen hinreichend großen Kreis mit Radius  $R$  um den Ursprung, der den Bogen  $\Gamma$  enthält. Aus der Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung erhalten wir:

$$\int_{\partial\Omega_R} \left\{ \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 + \kappa^2 |u|^2 + 2\kappa \operatorname{Im} \left( u \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} \right) \right\} ds \rightarrow 0$$

für  $R \rightarrow \infty$ . Der Greensche Satz, angewandt auf das Gebiet  $\Omega_R$ , ergibt wegen  $\kappa \in \mathbb{R}$ :

$$\operatorname{Im} \left( \int_{\partial\Omega_R} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} ds \right) = 0.$$

Damit bekommen wir:

$$(2.12) \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial\Omega_R} \left\{ \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 + \kappa^2 |u|^2 \right\} ds = 0.$$

Aus Gleichung (2.12) und dem Lemma von Rellich (vergleiche [7]) erhalten wir schließlich  $u \equiv 0$ . □

Wir weisen darauf hin, daß es möglich ist, das in diesem Abschnitt erzielte Eindeutigkeitsresultat mit den gleichen Methoden auch auf das Impedanzrandwertproblem zum Bogen zu übertragen, d.h., für eine vorgegebene Funktion  $\lambda$  ersetzen wir die Randbedingung  $\frac{\partial u_{\pm}}{\partial n} := -\frac{\partial u^i}{\partial n}$  durch  $\frac{\partial u_{\pm}}{\partial n} \pm \lambda u_{\pm} := -\frac{\partial u^i}{\partial n} \mp \lambda u^i$ ,  $\lambda \in C(\Gamma)$ ,  $\operatorname{Im}(\lambda) \geq 0$ . Insbesondere erhalten wir durch die Wahl  $\lambda \equiv 0$  den Fall eines schallharten Bogens als Spezialfall.

## 2.3 Ein Existenzbeweis für eine Lösung des direkten Streuproblems

Wir beschäftigen uns im weiteren mit der Existenz einer Lösung des obigen Randwertproblems. Dabei werden wir von der Integralgleichungsmethode Gebrauch machen. Ähnliche Ansätze findet man zum Beispiel bei Lewis und Wickham [29] oder bei Krutitskij [26]. Lewis und Wickham suchen eine Lösung in Form eines Doppelschichtpotentials mit modifizierter Greenscher Funktion. Krutitskij stellt die Lösung in Form eines akustischen Doppelschichtpotentials dar.

Wir suchen ebenfalls eine Lösung in Form eines akustischen Doppelschichtpotentials:

$$(2.13) \quad u(x) := \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} \varphi(y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma,$$



mit der unbekanntem Dichte  $\varphi$  aus dem Funktionenraum

$$C^{1,\alpha,*}(\Gamma) := \left\{ \varphi \mid \varphi(x_{-1}^*) = \varphi(x_1^*) = 0, \frac{d\varphi(\gamma(s))}{ds} = \frac{\tilde{\varphi}(\arccos s)}{\sqrt{1-s^2}}, \tilde{\varphi} \in C^{0,\alpha}[0, \pi] \right\},$$

wobei  $\gamma : [-1, 1] \rightarrow \Gamma$  eine (reguläre) Parametrisierung des Bogens  $\Gamma$  darstellt. Wir bezeichnen mit

$$\Phi(x, y) := \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\kappa|x-y|), \quad x \neq y,$$

die Fundamentallösung der Helmholtzgleichung im  $\mathbb{R}^2$ , ausgedrückt durch die Hankelfunktion  $H_0^{(1)} = J_0 + iN_0$  der ersten Art und Ordnung 0 mit der Besselfunktion

$$J_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}$$

und der Neumannfunktion

$$N_0(z) = \frac{2}{\pi} \left( \log \frac{z}{2} + C \right) J_0(z) + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right\} \frac{(-1)^{n+1}}{(n!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}$$

sowie der Eulerkonstanten  $C = 0.57721\dots$

Wir geben zunächst eine heuristische Überlegung für die Wahl des Funktionenraumes  $C^{1,\alpha,*}(\Gamma)$  an. In Analogie zum Fall geschlossener Randkurven (vergleiche [38]) erwarten wir einen stark singulären Kern bei der zugehörigen hypersingulären Integralgleichung für den Bogen. Als Dichte beim Hauptbestandteil tritt die erste Ableitung der Ausgangsdichte auf. Da das entsprechende Dirichletproblem für den offenen Bogen mittels der Cosinus-Substitution gelöst wurde (siehe hierzu [18, ?]), ist es naheliegend, für die Ableitung von Dichten aus  $C^{1,\alpha,*}(\Gamma)$  ein wurzelsinguläres Verhalten vorzuschreiben.

In der Arbeit [31] zeigt Martin durch Anwendung der Mellintransformation, daß eine Lösung der hypersingulären Integralgleichung über  $[-1, 1]$ , die in den Endpunkten des Intervalls verschwindet, in der Nähe der Endpunkte notwendigerweise die Gestalt  $\varphi(s) \sim \sqrt{1 \pm s}$  besitzt, wobei  $s$  den Abstand zu einem Intervallendpunkt bezeichnet. Die Wahl des Funktionenraumes  $C^{1,\alpha,*}(\Gamma)$  ist aus diesem Grunde sinnvoll.

In der Literatur findet man eine Reihe von Arbeiten, die ebenfalls Zugang zu stark singulären Integralgleichungen in  $C^{1,\alpha,*}(\Gamma)$ -ähnlichen Funktionenräumen suchen. Genannt seien zum Beispiel die Arbeiten von Sacharow und Kalejewa [62] bzw. Sobjanina [63] und die Arbeit von Martin und Rizzo [32]. Außerdem ist auch das Studium von hyper- bzw. cauchysingulären Integralgleichungen in  $L^2$ -Räumen mit Gewicht aus der Literatur bekannt [52].

Wir beschäftigen uns zunächst mit der Untersuchung von Eigenschaften des Doppelschichtpotentials mit Dichten  $\varphi \in C^{1,\alpha,*}(\Gamma)$  und dann mit der dem Randwertproblem entsprechenden hypersingulären Integralgleichung.

Wir beginnen mit dem folgenden Satz, der die für geschlossene Kurven bekannten Sprungbeziehungen für Doppelschichtpotentiale auf ein Doppelschichtpotential über einer offenen Kurve und einer Dichte aus  $C^{1,\alpha,*}(\Gamma)$  überträgt.

**Satz 2.5** *Sei  $\Gamma$  ein Bogen der Klasse  $C^2$ . Für Dichten  $\varphi \in C^{1,\alpha,*}(\Gamma)$  ist das Doppelschichtpotential  $u$  stetig von  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  nach  $\Gamma$  fortsetzbar mit Grenzwerten*

$$(2.14) \quad u_{\pm}(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} \varphi(y) ds(y) \pm \frac{1}{2} \varphi(x), \quad x \in \Gamma.$$

*Der Gradient des Doppelschichtpotentials kann von  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  nach  $\Gamma_0$  stetig fortgesetzt werden. Die Normalableitung von  $u$  ist gegeben durch*

$$(2.15) \quad \frac{\partial u_{\pm}(x)}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial n(x)} \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} \varphi(y) ds(y), \quad x \in \Gamma_0.$$

**Beweis:** Für den Beweis der ersten Behauptung ergänzen wir die offene  $C^2$ -Kurve zu einer geschlossenen  $C^2$ -glatten Kurve  $\tilde{\Gamma}$ . Dann betrachten wir auf  $\tilde{\Gamma}$  die wegen  $\varphi(x_i^*) = 0$  stetige Dichte  $\tilde{\varphi} := \varphi \chi_{\Gamma}$ . Die Anwendung der Sprungbeziehungen für das Doppelschichtpotential über  $\tilde{\Gamma}$  mit Dichte  $\tilde{\varphi}$  ergibt die Behauptung. Zum Beweis der zweiten Beziehung nehmen wir wahr, daß für  $x \in \Gamma_0$  die Dichte  $\tilde{\varphi}$  lokal hölderstetig differenzierbar ist. Die bekannten Sprungbeziehungen für den Gradienten eines Doppelschichtpotentials mit lokal hölderstetig differenzierbarer Dichte (vergleiche [9], S.323, Zusatz 8.2.16 oder die Argumentation in Satz 2.8) liefern dann die Behauptung. □

Nun beweisen wir einen Satz, der den Zusammenhang von hypersingulärer Integralgleichung erster Art und direktem Streuproblem herstellt. Wir stellen fest, daß es auf Grund des offenen Bogens nicht möglich ist, eine Lösung des Streuproblems durch Lösen einer Integralgleichung zweiter Art zu erhalten.

**Satz 2.6** *Das Doppelschichtpotential mit Dichte  $\varphi \in C^{1,\alpha,*}(\Gamma)$  löst das Neumannproblem für den Bogen, falls  $\varphi$  der folgenden Integralgleichung erster Art genügt:*

$$(2.16) \quad \frac{\partial}{\partial n(x)} \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} \varphi(y) ds(y) = f(x), \quad x \in \Gamma_0.$$

**Beweis:** Zunächst erfüllt das Doppelschichtpotential  $u$  die Helmholtzgleichung in  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  und ist auch ausstrahlend. Wir haben noch zu zeigen, daß  $u$  in den Kurvenendpunkten stetig ist. Das folgt sofort aus den Sprungbeziehungen (2.14) unter Verwendung von  $\varphi(x_i^*) = 0$ . Schließlich ergibt die Anwendung der Beziehung (2.15), daß die Normalableitung von  $u$  die vorgegebenen Randwerte annimmt.  $\square$

Wir beschäftigen uns mit der eindeutigen Lösbarkeit der Integralgleichung (2.16). Es gilt der folgende Satz:

**Satz 2.7** *Die hypersinguläre Integralgleichung (2.16) hat höchstens eine Lösung.*

**Beweis:** Aus den Sprungbeziehungen (2.14) folgt:

$$(2.17) \quad \varphi = u_+ - u_-.$$

Eine Anwendung von Satz 2.4 ergibt dann  $u \equiv 0$  in  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  und somit

$$(2.18) \quad u_+ = u_- \equiv 0$$

auf  $\Gamma$ . Daraus folgt aber  $\varphi \equiv 0$  auf  $\Gamma$ .  $\square$

Der Nachweis der Existenz einer Lösung der Gleichung (2.16) wird mit Hilfe der Riesz-Theorie und der Idee der Cosinus-Substitution erbracht. Die Cosinus-Substitution erlaubt uns, wie im Falle geschlossener Randkurven zu argumentieren.

Zunächst versuchen wir, die hypersinguläre Integralgleichung in eine für unsere Zwecke günstigere Form zu bringen. Das Ziel besteht darin, den Grad der Singularität des Kernes durch partielle Integration zu verringern. Dabei werden wir ausnutzen, daß wir Dichten aus dem Funktionenraum  $C^{1,\alpha,*}(\Gamma)$  betrachten. In Analogie zum Fall geschlossener Randkurven (vgl. [6] für den dreidimensionalen und [17] für den potentialtheoretischen Fall) erhalten wir:

**Satz 2.8** *Für die Normalableitung eines Doppelschichtpotentials mit Dichten  $\varphi$  aus dem Funktionenraum  $C^{1,\alpha,*}(\Gamma)$  gilt für  $x \in \Gamma_0$ :*

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial n(x)} \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} \varphi(y) ds(y) \\ &= \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial t(x)} \frac{\partial \varphi(y)}{\partial t} ds(y) + \kappa^2 \langle n(x), \int_{\Gamma} \Phi(x, y) \varphi(y) n(y) ds(y) \rangle. \end{aligned}$$

**Beweis:** Für den Gradienten eines Doppelschichtpotentials für die Helmholtzgleichung gilt für  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ :

$$\text{grad } u(x) = \left( \frac{\partial}{\partial x_2} v(x) + v_1(x), -\frac{\partial}{\partial x_1} v(x) + v_2(x) \right),$$

wobei wir

$$\begin{aligned} (2.19) \quad v(x) &:= - \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial t(y)} \varphi(y) ds(y), \\ v_1(x) &:= \kappa^2 \int_{\Gamma} \Phi(x, y) n_1(y) \varphi(y) ds(y), \\ v_2(x) &:= \kappa^2 \int_{\Gamma} \Phi(x, y) n_2(y) \varphi(y) ds(y) \end{aligned}$$

gesetzt haben. Das folgt nach leichten Rechnungen unter Ausnutzung der Tatsache, daß die Grundlösung  $\Phi(x, y)$  die Helmholtzgleichung außerhalb des Bogens erfüllt. Nach partieller Integration können wir unter Verwendung von  $\varphi(x_1^*) = \varphi(x_{-1}^*) = 0$  schreiben:

$$(2.20) \quad v(x) = \int_{\Gamma} \Phi(x, y) \frac{\partial \varphi(y)}{\partial t} ds(y).$$

Wir übertragen nun die für den Gradienten eines Einfachschichtpotentials über einer geschlossenen Kurve bekannten Sprungbeziehungen auf unsere Situation. Wir betrachten eine feste Stelle  $x \in \Gamma_0$  und bezeichnen mit  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  Teilbögen von  $\Gamma$  mit der Eigenschaft  $x \in \Gamma_2 \subset \Gamma_1 \subset \Gamma_0$ . Den Teilbogen  $\Gamma_1$  ergänzen wir zu einer geschlossenen Kurve  $\tilde{\Gamma}$  der Klasse  $C^2$ . Dann wählen wir eine Funktion  $\rho \in C^1(\Gamma)$  mit  $\rho|_{\Gamma_2} \equiv 1$  und  $\rho|_{\Gamma \setminus \Gamma_1} \equiv 0$ . Wir schreiben

$$(2.21) \quad v(x) = w_1(x) + w_2(x)$$

mit

$$w_1(x) := \int_{\Gamma} \Phi(x, y) \rho(y) \frac{\partial \varphi(y)}{\partial t} ds(y), \quad w_2(x) := \int_{\Gamma} \Phi(x, y) (1 - \rho(y)) \frac{\partial \varphi(y)}{\partial t} ds(y).$$

Dann gilt offensichtlich

$$(2.22) \quad w_1(x) := \int_{\tilde{\Gamma}} \Phi(x, y) \rho(y) \chi_{\Gamma_1}(y) \frac{\partial \varphi(y)}{\partial t} ds(y)$$

mit  $\rho \chi_{\Gamma_1} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \in C^{0,\alpha}(\tilde{\Gamma})$  sowie

$$(2.23) \quad w_2(x) := \int_{\Gamma \setminus \Gamma_2} \Phi(x, y) (1 - \rho(y)) \frac{\partial \varphi(y)}{\partial t} ds(y).$$

Für  $x \in \Gamma_2$  ist  $w_2$  stetig differenzierbar. Die Sprungbeziehungen für den Gradienten eines Einfachschichtpotentials mit gleichmäßig hölderstetiger Dichte über einer geschlossenen Kurve, angewandt auf  $w_1$ , und für ein Einfachschichtpotential mit stetiger Dichte, angewandt auf  $v_1$  und  $v_2$ , ergeben die Behauptung des Satzes.  $\square$

Die im letzten Satz gezeigte Beziehung wird in dem zu führenden Existenzbeweis für eine Lösung wesentlich ausgenutzt. Wir können also die hypersinguläre Integralgleichung in der Form

$$(2.24) \quad \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial t(x)} \frac{\partial \varphi(y)}{\partial t} ds(y) + \kappa^2 \int_{\Gamma} \Phi(x, y) \varphi(y) \langle n(x), n(y) \rangle ds(y) = f(x)$$

mit  $x \in \Gamma_0$  schreiben. Nun benutzen wir eine Parametrisierung des Bogens  $\Gamma$  und die sogenannte Cosinus-Substitution (vergleiche [61]), um eine eindimensionale Integralgleichung mit einem Hauptbestandteil zu erhalten, der dem Integraloperator mit Hilbertkern ähnlich ist. Indem wir  $s := \cos \tau$ ,  $\tau \in (0, \pi)$  gesetzt haben und (2.16) parametrisieren, erhalten wir die folgende äquivalente Integralgleichung:

$$(2.25) \quad \int_0^{\pi} \left\{ K_1(\tau, \sigma) \frac{d}{d \cos \sigma} \varphi(\tilde{\gamma}(\sigma)) \sin \sigma + K_2(\tau, \sigma) \varphi(\tilde{\gamma}(\sigma)) \right\} d\sigma = g(\tau)$$

für  $\tau \in (0, \pi)$  mit der rechten Seite

$$g(\tau) := f(\tilde{\gamma}(\tau)) |\gamma'(\cos \tau)|$$

und mit den folgenden Kernen:

$$K_1(\tau, \sigma) := \frac{i\kappa}{4} H_0^{(1)'}(\kappa |\tilde{\gamma}(\tau) - \tilde{\gamma}(\sigma)|) \frac{\langle \tilde{\gamma}(\tau) - \tilde{\gamma}(\sigma), \gamma'(\cos \tau) \rangle}{|\tilde{\gamma}(\tau) - \tilde{\gamma}(\sigma)|},$$

$$K_2(\tau, \sigma) := \frac{i\kappa^2}{4} \langle n(\tilde{\gamma}(\tau)), n(\tilde{\gamma}(\sigma)) \rangle H_0^{(1)'}(\kappa |\tilde{\gamma}(\sigma) - \tilde{\gamma}(\tau)|) |\gamma'(\cos \tau)| |\gamma'(\cos \sigma)| \sin \sigma$$

für  $\sigma \neq \tau$ ,  $\sigma, \tau \in (0, \pi)$ . Hier haben wir zur Abkürzung die Bezeichnung  $\tilde{\gamma}(\tau) := \gamma(\cos \tau)$ ,  $\tau \in [0, \pi]$  verwendet. Für die Kerne  $K_1$  and  $K_2$  berechnen wir die folgenden expliziten Ausdrücke. Zuerst schreiben wir für  $K_2$

$$K_2(\tau, \sigma) := M_1(\tau, \sigma) \log 4(\cos \sigma - \cos \tau)^2 + M_2(\tau, \sigma), \quad \sigma \neq \tau, \quad \sigma, \tau \in (0, \pi)$$

mit den Kernen  $M_1$  und  $M_2$ :

$$M_1(\tau, \sigma) := -\frac{\kappa^2}{4\pi} J_0(\kappa |\tilde{\gamma}(\sigma) - \tilde{\gamma}(\tau)|) \sin \sigma \langle \gamma'(\cos \sigma), \gamma'(\cos \tau) \rangle,$$

$$M_2(\tau, \sigma) := K_2(\tau, \sigma) - M_1(\tau, \sigma) \log 4(\cos \sigma - \cos \tau)^2$$

und Diagonalwerten

$$\begin{aligned} M_1(\tau, \tau) &= -\frac{\kappa^2}{4\pi} |\gamma'(\cos \tau)|^2 \sin \tau, \\ M_2(\tau, \tau) &= \kappa^2 \left( \frac{i}{4} - \frac{C}{2\pi} - \frac{1}{2\pi} \log \frac{\kappa}{4} |\gamma'(\cos \tau)| \right) |\gamma'(\cos \tau)|^2 \sin \tau. \end{aligned}$$

Für die Berechnung von  $M_1(\tau, \tau)$  und  $M_2(\tau, \tau)$  haben wir die Potenzreihendarstellungen von  $J_0$  und  $N_0$  sowie die Tatsache, daß  $\frac{|\gamma(\cos \sigma) - \gamma(\cos \tau)|^2}{(\cos \sigma - \cos \tau)^2}$  zu einer glatten positiven Funktion für  $\sigma = \tau$  fortgesetzt werden kann, verwendet. Wir sehen, daß  $M_1$  und  $M_2$  zweimal stetig differenzierbar sind bezüglich beider Variablen.

Die Untersuchung von  $K_1$  ist komplizierter. Es gilt

$$K_1(\tau, \sigma) = \frac{i}{4} \frac{d}{d \cos \tau} H_0^{(1)}(\kappa |\tilde{\gamma}(\tau) - \tilde{\gamma}(\sigma)|).$$

Unser Ziel ist die Beseitigung der starken Singularität von  $K_1$ . Zu diesem Zweck definieren wir:

$$\tilde{M}(\tau, \sigma) := \frac{d^2}{d \cos \tau d \sigma} \left\{ \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\kappa |\tilde{\gamma}(\tau) - \tilde{\gamma}(\sigma)|) + \frac{1}{4\pi} \log 4 (\cos \tau - \cos \sigma)^2 \right\}.$$

Unter Verwendung der Gestalt der Hankelfunktionen spalten wir den Kern  $\tilde{M}$  wie folgt auf:

$$\tilde{M}(\tau, \sigma) := \tilde{M}_1(\tau, \sigma) \log 4 (\cos \sigma - \cos \tau)^2 + \tilde{M}_2(\tau, \sigma), \quad \sigma \neq \tau, \quad \sigma, \tau \in (0, \pi)$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{M}_1(\tau, \sigma) &:= -\frac{1}{4\pi} \frac{d^2}{d \cos \tau d \sigma} J_0(\kappa |\tilde{\gamma}(\tau) - \tilde{\gamma}(\sigma)|), \\ \tilde{M}_2(\tau, \sigma) &:= \tilde{M}(\tau, \sigma) - \tilde{M}_1(\tau, \sigma) \log 4 (\cos \sigma - \cos \tau)^2 \end{aligned}$$

und Diagonalwerten

$$\begin{aligned} \tilde{M}_1(\tau, \tau) &= \frac{1}{8\pi} \kappa^2 |\gamma'(\cos \tau)|^2 \sin \tau, \\ \tilde{M}_2(\tau, \tau) &= -\frac{1}{4\pi} \left\{ (\pi i - 1 - 2C - 2 \log \frac{\kappa |\gamma'(\cos \tau)|}{4}) \kappa^2 \frac{|\gamma'(\cos \tau)|^2}{2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\langle \gamma'(\cos \tau), \gamma''(\cos \tau) \rangle^2}{|\gamma'(\cos \tau)|^4} - \frac{|\gamma''(\cos \tau)|^2}{2 |\gamma'(\cos \tau)|^2} - \frac{\langle \gamma'(\cos \tau), \gamma'''(\cos \tau) \rangle}{3 |\gamma'(\cos \tau)|^2} \right\} \sin \tau. \end{aligned}$$

Hier haben wir zur Berechnung der stetigen Fortsetzung  $\tilde{M}_2(\tau, \tau)$  von  $\tilde{M}_2(\tau, \sigma)$  für  $s \rightarrow \tilde{s}$  die Taylorreihenentwicklung

$$\gamma(s) = \gamma(\tilde{s}) + \gamma'(\tilde{s})(s - \tilde{s}) + \gamma''(\tilde{s}) \frac{(s - \tilde{s})^2}{2} + \gamma'''(\tilde{s}) \frac{(s - \tilde{s})^3}{6}$$

der dreimal stetig differenzierbaren Parametrisierungsfunktion  $\gamma$  verwendet. Unter Benutzung von  $\varphi(x_{-1}^*) = \varphi(x_1^*) = 0$  erhalten wir :

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi K_1(\tau, \sigma) \frac{d}{d \cos \sigma} \varphi(\tilde{\gamma}(\sigma)) \sin \sigma d\sigma \\ &= \int_0^\pi \left\{ \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\cos \sigma - \cos \tau} \frac{d}{d \cos \sigma} \varphi(\tilde{\gamma}(\sigma)) \sin \sigma + \tilde{M}(\tau, \sigma) \varphi(\tilde{\gamma}(\sigma)) \right\} d\sigma, \end{aligned}$$

wobei der Kern  $\tilde{M}(\tau, \sigma)$  von der Form

$$\begin{aligned} \tilde{M}(\tau, \sigma) &= \frac{ir(\tau, \sigma)}{4} \left\{ \kappa^2 H_0^{(1)}(\kappa|\tilde{\gamma}(\tau) - \tilde{\gamma}(\sigma)|) - \frac{2\kappa H_1^{(1)}(\kappa|\tilde{\gamma}(\tau) - \tilde{\gamma}(\sigma)|)}{|\tilde{\gamma}(\tau) - \tilde{\gamma}(\sigma)|} \right\} \\ &- \sin \sigma \frac{i\kappa \langle \gamma'(\cos \tau), \gamma'(\cos \sigma) \rangle}{4|\gamma(\cos \tau) - \gamma(\cos \sigma)|} H_1^{(1)}(\kappa|\tilde{\gamma}(\tau) - \tilde{\gamma}(\sigma)|) - \frac{1}{2\pi} \frac{\sin \sigma}{(\cos \tau - \cos \sigma)^2} \end{aligned}$$

ist. Hier haben wir die wohlbekannte Beziehung  $(zH_1^{(1)}(z))' = zH_0^{(1)}(z)$  für die spezielle Funktion  $H_1^{(1)}(z) := -(H_0^{(1)}(z))'$  benutzt. Unter Ausnutzung der entsprechenden Beziehung für Besselfunktionen erhalten wir

$$\begin{aligned} \tilde{M}_1(\tau, \sigma) &= \frac{-r(\tau, \sigma)}{4\pi} \left\{ \kappa^2 J_0(\kappa|\tilde{\gamma}(\tau) - \tilde{\gamma}(\sigma)|) - \frac{2\kappa J_1(\kappa|\tilde{\gamma}(\tau) - \tilde{\gamma}(\sigma)|)}{|\tilde{\gamma}(\tau) - \tilde{\gamma}(\sigma)|} \right\} \\ &+ \frac{\kappa \sin \sigma \langle \gamma'(\cos \tau), \gamma'(\cos \sigma) \rangle}{4\pi|\gamma(\cos \tau) - \gamma(\cos \sigma)|} J_1(\kappa|\tilde{\gamma}(\tau) - \tilde{\gamma}(\sigma)|), \end{aligned}$$

wobei wir

$$r(\tau, \sigma) := -\sin \sigma \frac{\langle \gamma'(\cos \tau), \tilde{\gamma}(\sigma) - \tilde{\gamma}(\tau) \rangle \langle \gamma'(\cos \sigma), \tilde{\gamma}(\sigma) - \tilde{\gamma}(\tau) \rangle}{|\tilde{\gamma}(\tau) - \tilde{\gamma}(\sigma)|^2}.$$

gesetzt haben.

Im Falle der Streuung an einer schallharten geschlossenen Randkurve liegt eine abgeschlossene Lösungstheorie für die zugehörige hypersinguläre Integralgleichung vor, wenn wir eine Lösung des Streuproblems in Form eines Doppelschichtpotentials suchen (vergleiche [38]).

Für eine Übertragung von Teilen dieser Lösungstheorie auf den Fall einer offenen Randkurve erscheint es günstiger, an Stelle des Intervalls  $(0, \pi)$  das Intervall  $(0, 2\pi)$  zu verwenden. Im Prinzip können wir uns diesen Umweg ersparen, haben dann aber bei der Untersuchung von Abbildungseigenschaften der Operatoren über dem Intervall  $(0, \pi)$  bzw.  $[0, \pi]$  und bei der Konstruktion von Quadraturformeln jeweils  $2\pi$ -periodische ungerade Fortsetzungen der Dichten vorzunehmen. Wir betrachten deshalb die Dichte

$$(2.26) \quad \psi(\sigma) := \varphi(\gamma(\cos \sigma)) \text{sign}(\pi - \sigma), \quad \sigma \in [0, 2\pi].$$

Die Funktion  $\psi$  ist eine stetige, ungerade Fortsetzung von  $\varphi$  auf  $[0, 2\pi]$ . Es gilt:

$$(2.27) \quad \frac{d\psi(\sigma)}{d\sigma} = -\frac{d\varphi(\gamma(\cos \sigma))}{d \cos \sigma} |\sin \sigma|.$$

Unter Verwendung der Beziehung (2.27) können wir die hypersinguläre Integralgleichung (2.25) in der folgenden Form schreiben:

$$(2.28) \quad \int_0^{2\pi} \left\{ K_1(\tau, \sigma) \psi'(\sigma) - K_2(\tau, \sigma) \psi(\sigma) \right\} d\sigma = \tilde{f}(\tau),$$

wobei wir  $\tau \in (0, 2\pi) \setminus \pi$  betrachten und

$$\tilde{f}(\tau) := -2f(\gamma(\cos \tau)) |\gamma'(\cos \tau)|$$

gesetzt haben. Wir beschäftigen uns mit der Äquivalenz der Integralgleichungen (2.16) und (2.28). Dazu benötigen wir zunächst die Räume der  $2\pi$ -periodischen,  $k$ -mal gleichmäßig hölderstetig differenzierbaren Funktionen, die wir mit  $C^{k,\alpha}[0, 2\pi]$  bezeichnen. Wir definieren die Funktionenräume  $C^{k,\alpha}[0, 2\pi]$  induktiv, indem wir  $\varphi \in C^{k,\alpha}[0, 2\pi]$  schreiben, falls für die erste Ableitung von  $\varphi$  gilt  $\varphi' \in C^{k-1,\alpha}[0, 2\pi]$ ,  $k \in \mathbb{N}^+$ . Der Funktionenraum  $C^{k,\alpha}[0, 2\pi]$  wird durch Einführen der Norm

$$\|\varphi\|_{k,\alpha} := \sum_{j=0}^{k-1} \|\varphi^{(j)}\|_{\infty} + \|\varphi^{(k)}\|_{0,\alpha}$$

zu einem Banachraum. Es gilt der folgende Satz:

**Satz 2.9** Falls  $\varphi \in C^{1,\alpha,*}(\Gamma)$  eine Lösung der Ausgangsintegralgleichung (2.16) ist, so erhalten wir durch  $\psi(\sigma) := \varphi(\gamma(\cos \sigma)) \text{sign}(\pi - \sigma)$ ,  $\sigma \in [0, 2\pi]$  eine Lösung der Integralgleichung (2.28) mit  $\psi \in C^{1,\alpha}[0, 2\pi]$ , die eine ungerade Funktion ist, und umgekehrt.

**Beweis:** Aus  $\varphi \in C^{1,\alpha,*}(\Gamma)$  folgt offensichtlich, daß  $\psi$  über die zu zeigenden Eigenschaften verfügt. Umgekehrt sei nun die ungerade Dichte  $\psi \in C^{1,\alpha}[0, 2\pi]$  eine Lösung der Integralgleichung. Wegen der Ungeradheit und  $2\pi$ -Periodizität von  $\psi$  gilt  $\psi(0) = \psi(\pi) = 0$ . Wir haben zu zeigen, daß dann

$$(2.29) \quad \varphi(\gamma(t)) := \psi(\arccos t), \quad t \in [-1, 1]$$

aus dem Funktionenraum  $C^{1,\alpha,*}(\Gamma)$  ist. Es gilt offensichtlich  $\varphi(x_1^*) = \varphi(x_{-1}^*) = 0$ . Durch Differentiation erhalten wir leicht  $\varphi'(\gamma(t)) = -\frac{\psi'(\arccos t)}{\sqrt{1-t^2}}$ . Da  $\psi$  aus dem Raum  $C^{1,\alpha}[0, 2\pi]$  ist, erhalten wir  $\varphi \in C^{1,\alpha,*}(\Gamma)$ . Damit können wir dann die



Normalableitung des Doppelschichtpotentials mit den Methoden aus Satz 2.8 behandeln. Wir erhalten, daß die Dichte  $\varphi$  aus (2.29) Lösung der Integralgleichung (2.16) ist. □

Für unsere Zwecke ist es günstiger, eine Integralgleichung über dem abgeschlossenen Intervall  $[0, 2\pi]$  zu betrachten. Das ist für Kompaktheitsaussagen, die wir später treffen wollen, notwendig. Im folgenden Satz erhalten wir eine entsprechende mit der Ausgangsintegralgleichung äquivalente Integralgleichung.

**Satz 2.10** *Die Integralgleichung (2.28) und die hypersinguläre Integralgleichung*

$$(2.30) \quad \int_0^{2\pi} \sin \tau \left\{ K_1(\tau, \sigma) \psi'(\sigma) - K_2(\tau, \sigma) \psi(\sigma) \right\} d\sigma = \tilde{f}(\tau)$$

mit  $\tilde{f}(\tau) := -2f(\gamma(\cos \tau)) |\gamma'(\cos \tau)| \sin \tau$ ,  $\tau \in [0, 2\pi]$  sind äquivalent.

**Beweis:** Falls die Dichte  $\psi$  Lösung der Integralgleichung (2.30) ist, so löst  $\psi$  offensichtlich die Integralgleichung (2.28) für  $\tau \in (0, 2\pi) \setminus \pi$ . Umgekehrt sei nun  $\psi$  eine Lösung der Integralgleichung (2.28). Dann existiert für  $f \in C[0, 2\pi]$  der Grenzwert

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \left\{ K_1(\tau, \sigma) \psi'(\sigma) - K_2(\tau, \sigma) \psi(\sigma) \right\} d\sigma,$$

so daß wir nach Multiplikation mit  $\sin \tau$  und Grenzübergang  $\tau \rightarrow m\pi$ ,  $m = 0, 1, 2$  die Behauptung des Satzes erhalten. □

Satz 2.10 zeigt, daß es ausreichend ist, eine Lösung  $\psi \in C_{ung}^{1,\alpha}[0, 2\pi]$  der Integralgleichung (2.30) zu suchen, um eine (klassische) Lösung des Randwertproblems zu erhalten. Dabei verstehen wir unter  $C_{ung}^{k,\alpha}[0, 2\pi]$  den folgenden Funktionenraum:

$$C_{ung}^{k,\alpha}[0, 2\pi] := \left\{ \psi \mid \psi \text{ ungerade, } \psi \in C^{k,\alpha}[0, 2\pi] \right\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Wir bemerken, daß auf Grund der  $2\pi$ -Periodizität und der Ungeradheit von  $\psi \in C_{ung}^{k,\alpha}[0, 2\pi]$   $\psi(0) = \psi(\pi) = \psi(2\pi) = 0$  gilt. Für den im fünften Kapitel zu erbringenden Nachweis der Fréchet-Differenzierbarkeit des Fernfeldoperators bezüglich des Randes ist es ebenfalls notwendig, die Lösbarkeit der hypersingulären Integralgleichung in Sobolevräumen zu diskutieren. Deswegen definieren wir den folgenden Unterraum von  $H^p[0, 2\pi]$  (vergleiche [17] oder [53] für die Definition des Funktionenraumes  $H^p[0, 2\pi]$ ):

$$H_{ung}^p[0, 2\pi] := \left\{ \psi \mid \psi \text{ ungerade, } \sum_{m=1}^{\infty} m^{2p} |\hat{\psi}_m|^2 < \infty \right\}, \quad 0 \leq p, \quad p \in \mathbb{R},$$

wobei wir die ungerade Funktion  $\psi$  als Fourierreihe

$$\psi(\tau) := \sum_{m=1}^{\infty} \hat{\psi}_m \sin m\tau, \quad \tau \in [0, 2\pi],$$

mit den Fourierkoeffizienten  $\hat{\psi}_m := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(\sigma) \sin m\sigma d\sigma$  darstellen. Offensichtlich gilt  $H_{ung}^0[0, 2\pi] = L_{ung}^2[0, 2\pi]$ , wobei wir mit  $L_{ung}^2[0, 2\pi]$  den Raum der ungeraden quadratintegrierbaren Funktionen auf  $[0, 2\pi]$  bezeichnen.

Um eine Lösungstheorie der hypersingulären Integralgleichung erster Art in Hölder- und Sobolevräumen zu erhalten, ist es notwendig, einen in den entsprechenden Räumen beschränkt invertierbaren Anteil abzuspalten. Die weitere Argumentation kann dann in kanonischer Weise mit der Riesz-Theorie erfolgen, die für Operatorgleichungen zweiter Art zur Verfügung steht.

Wir führen zur Abkürzung die folgenden Integraloperatoren ein:

$$(2.31) \quad \begin{aligned} (T_0\psi)(\tau) &:= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \tau}{\cos \tau - \cos \sigma} \psi'(\sigma) d\sigma, \\ (A\psi)(\tau) &:= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{K}_1(\tau, \sigma) \log 4(\cos \sigma - \cos \tau)^2 \psi(\sigma) d\sigma, \\ (B\psi)(\tau) &:= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{K}_2(\tau, \sigma) \psi(\sigma) d\sigma \end{aligned}$$

mit den bezüglich beider Variablen ungeraden und stetig differenzierbaren Kernen

$$\begin{aligned} \tilde{K}_1(\tau, \sigma) &:= 2\pi \left\{ \tilde{M}_1(\tau, \sigma) - M_1(\tau, \sigma) \right\} \sin \tau, \\ \tilde{K}_2(\tau, \sigma) &:= 2\pi \left\{ \tilde{M}_2(\tau, \sigma) - M_2(\tau, \sigma) \right\} \sin \tau. \end{aligned}$$

Wir bemerken, daß auf Grund der trigonometrischen Identität

$$(2.32) \quad (\cos \tau - \cos \sigma)^2 = 4 \sin^2 \frac{\sigma - \tau}{2} \sin^2 \frac{\sigma + \tau}{2}$$

sowie wegen

$$(2.33) \quad \frac{\sin \tau}{\cos \tau - \cos \sigma} = \frac{1}{2} \left\{ \cot \frac{\sigma - \tau}{2} - \cot \frac{\tau + \sigma}{2} \right\}$$

und der Ungeradheit der Dichte  $\psi$  und des Kernes  $\tilde{K}_1$  bezüglich  $\sigma$  gilt:

$$\begin{aligned} (T_0\psi)(\tau) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cot \frac{\sigma - \tau}{2} \psi'(\sigma) d\sigma, \\ (A\psi)(\tau) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{K}_1(\tau, \sigma) \log 4 \sin^2 \frac{\sigma - \tau}{2} \psi(\sigma) d\sigma. \end{aligned}$$

Damit haben wir Integraloperatoren gewonnen, die uns schon vom Studium der hypersingulären Integralgleichung für geschlossene Randkurven her vertraut sind (vergleiche [19], [38]). Wir können die betrachtete Integralgleichung in der Form:

$$(2.34) \quad T_0\psi + A\psi + B\psi = \tilde{f}$$

schreiben. Der Integraloperator  $A$  besitzt einen Kern mit logarithmischer Singularität. Der einfacher zu behandelnde Operator  $B$  hat einen stetig differenzierbaren Kern. Wir beschäftigen uns mit Eigenschaften der Operatoren  $T_0$ ,  $A$  und  $B$ . Es gilt der folgende Satz:

**Satz 2.11** *Der Operator  $T_0 : C_{ung}^{k+1,\alpha}[0, 2\pi] \rightarrow C_{ung}^{k,\alpha}[0, 2\pi]$  ist beschränkt invertierbar. Weiterhin ist auch  $T_0$  als Operator von  $H_{ung}^{p+1}[0, 2\pi]$  nach  $H_{ung}^p[0, 2\pi]$  beschränkt invertierbar.*

**Beweis:** Es ist ausreichend, den Satz für  $k = 0$  zu zeigen, da für Dichten  $\varphi \in C^{1,\alpha}[0, 2\pi]$  gilt (vergleiche [37]):

$$(2.35) \quad \frac{d}{d\tau} \int_0^{2\pi} \cot \frac{\sigma - \tau}{2} \varphi(\sigma) d\sigma = \int_0^{2\pi} \cot \frac{\sigma - \tau}{2} \varphi'(\sigma) d\sigma.$$

Wir stellen  $\psi \in C_{ung}^{1,\alpha}[0, 2\pi]$  als gleichmäßig konvergente Fourierreihe in der Form

$$\psi(\tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \hat{\psi}_m \sin m\tau$$

dar. Unter Ausnutzung der elementaren Integrale

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cot \frac{\sigma - \tau}{2} \cos m\sigma d\sigma = -\sin m\tau, \quad \tau \in [0, 2\pi],$$

berechnen wir die folgende Fourierdarstellung des Operators  $T_0$ :

$$(2.36) \quad (T_0\psi)(\tau) = \sum_{m=1}^{\infty} m \hat{\psi}_m \sin m\tau \in C_{ung}^{0,\alpha}[0, 2\pi].$$

Offensichtlich ist  $T_0\psi$  eine ungerade Funktion. Bei der Aussage über die Abbildungseigenschaften von  $T_0$  haben wir die Abbildungseigenschaften eines Operators mit Hilbertkern (vergleiche [37] oder [17]) ausgenutzt. Damit können wir die Inverse unmittelbar angeben durch:

$$(2.37) \quad (T_0^{-1}\psi)(\tau) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\hat{\psi}_m}{m} \sin m\tau.$$

Aus dem Satz von Banach folgt ihre Beschränktheit. Die entsprechenden Abbildungs- und Invertierbarkeitseigenschaften von  $T_0$  in den Sobolewräumen  $H_{ung}^p[0, 2\pi]$  folgen unmittelbar aus den Fourierdarstellungen (2.36) und (2.37).  $\square$

Wir formulieren und beweisen einen Satz, der sich mit Abbildungs- und Kompaktheitseigenschaften der Störungen  $A$  und  $B$  des hypersingulären Integraloperators beschäftigt. Im folgenden setzen wir zur Abkürzung  $f_\tau(\sigma) := \log 4 \sin^2 \frac{\sigma-\tau}{2}$ ,  $\sigma \neq \tau$ .

**Satz 2.12** *Die Operatoren  $A$  und  $B$  verfügen über die folgenden Abbildungseigenschaften in Hölderräumen:*

$$(2.38) \quad A, B : C_{ung}^{1,\alpha}[0, 2\pi] \rightarrow C_{ung}^{0,\alpha}[0, 2\pi].$$

Weiterhin sind die Operatoren  $A$  und  $B$  in den betrachteten Hölderräumen kompakt. In Sobolewräumen besitzen die Operatoren die folgenden Abbildungseigenschaften:

$$(2.39) \quad A, B : H_{ung}^1[0, 2\pi] \rightarrow L_{ung}^2[0, 2\pi].$$

Die Operatoren  $A$  und  $B$  sind auch in diesen Räumen kompakt.

**Beweis:** Offensichtlich sind die Ausdrücke  $A\psi$  und  $B\psi$  ungerade Funktionen. Wir beschäftigen uns nur mit  $A$ , der Beweis für  $B$  ist einfacher. Wir zeigen etwas allgemeiner, daß ein Integraloperator der Gestalt

$$(H\varphi)(\tau) := \int_0^{2\pi} f_\tau(\sigma)K(\tau, \sigma)\varphi(\sigma)d\sigma, \quad \tau \in [0, 2\pi],$$

mit dem bezüglich beider Variablen zweimal stetig differenzierbarem Kern  $K$  den Raum  $C[0, 2\pi]$  beschränkt nach  $C^{0,\gamma}[0, 2\pi]$  für  $0 < \gamma < 1$  abbildet. Wir schätzen dazu die Hölderhalbnorm von  $H\varphi$  ab. Wir erhalten unter Verwendung der Hölderungleichung:

$$\begin{aligned} & |(H\varphi)(\tau_1) - (H\varphi)(\tau_2)| \leq \\ & \int_0^{2\pi} \left\{ |f_{\tau_1}(\sigma) - f_{\tau_2}(\sigma)| |K(\tau_1, \sigma)| + |f_{\tau_2}(\sigma)| |K(\tau_1, \sigma) - K(\tau_2, \sigma)| \right\} |\varphi(\sigma)| d\sigma \\ & \leq C(\|f_{\tau_1} - f_{\tau_2}\|_{L^{\frac{1}{\gamma}}[0, 2\pi]} + \|f_0\|_{L^2[0, 2\pi]}) \|K(\tau_1, \cdot) - K(\tau_2, \cdot)\|_\infty \|\varphi\|_\infty. \end{aligned}$$

Unter Verwendung von  $\|f_{\tau_1} - f_{\tau_2}\|_{L^{\frac{1}{\gamma}}[0, 2\pi]} \leq C|\tau_1 - \tau_2|^\gamma$  (vergleiche [38], Lemma 4.11) und dem Mittelwertsatz erhalten wir

$$|(H\varphi)(\tau_1) - (H\varphi)(\tau_2)| \leq C|\tau_1 - \tau_2|^\gamma \|\varphi\|_\infty.$$

Aus der Kompaktheit der Einbettung  $I : C^{1,\alpha}[0, 2\pi] \rightarrow C[0, 2\pi]$  folgt schließlich die Kompaktheit von  $A$  in den betrachteten Hölderräumen.

Zum Nachweis der Kompaktheit von  $A$  in Sobolevräumen zeigen wir, daß  $H$  den Raum  $L^2[0, 2\pi]$  beschränkt nach  $H^1[0, 2\pi]$  abbildet. Dazu definieren wir die Operatoren:

$$(H_1\varphi)(\tau) := \int_0^{2\pi} f_\tau(\sigma)\varphi(\sigma)d\sigma, \quad \tau \in [0, 2\pi]$$

und

$$(H_2\varphi)(\tau) := \int_0^{2\pi} f_\tau(\sigma)\sin(\sigma - \tau)\varphi(\sigma)d\sigma, \quad \tau \in [0, 2\pi].$$

Durch Fourierentwicklung sieht man leicht, daß die Operatoren  $H_1$  und  $H_2$  (mit speziellen glatten Kernen  $K$ ) über die zu zeigenden Abbildungseigenschaften verfügen. Wir betrachten den Integraloperator  $H_3$  mit Kern

$$K_3(\tau, \sigma) := \left\{ K(\tau, \sigma) - K(\tau, \tau) - \frac{\partial K(\tau, \tau)}{\partial \sigma} \sin(\sigma - \tau) \right\} f_\tau(\sigma), \quad \sigma \neq \tau,$$

der zu einer bezüglich beider Variablen stetig differenzierbaren Funktion fortgesetzt werden kann. Folglich ist auch der Operator  $H_3$  beschränkt von  $L^2[0, 2\pi]$  nach  $H^1[0, 2\pi]$ . Daraus folgt wegen

$$(A\varphi)(\tau) := (H_3\varphi)(\tau) + K(\tau, \tau)(H_1\varphi)(\tau) + \frac{\partial K(\tau, \tau)}{\partial \sigma}(H_2\varphi)(\tau)$$

die Beschränktheit von  $A$ . Die Kompaktheit von  $A$  ergibt sich aus der Kompaktheit der Einbettung  $I : H^1[0, 2\pi] \rightarrow L^2[0, 2\pi]$ . Daraus folgen die Abbildungseigenschaften und die Kompaktheit von  $A$  und  $B$  in den betrachteten Räumen.  $\square$

Wir sind nun in der Lage, den folgenden Existenzsatz für eine Lösung des direkten Streuproblems zu beweisen:

**Satz 2.13** *Die Operatorgleichung (2.34) hat für alle rechten Seiten  $\tilde{f}$  aus dem Funktionenraum  $C_{ung}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$  genau eine Lösung  $\psi \in C_{ung}^{1,\alpha}[0, 2\pi]$ . Diese Lösung hängt stetig von der rechten Seite ab.*

*Daraus folgt dann die Existenz einer Lösung des Neumannproblems für den offenen Bogen für Randwerte  $f \in C^{0,\alpha}(\Gamma)$ .*

**Beweis:** Wir haben bisher in Satz 2.7  $N(I + T_0^{-1}(A + B)) = \{0\}$  gezeigt. Aus der Riesz-Fredholm-Theorie für kompakte Operatoren folgt die Behauptung des Satzes unmittelbar wegen Satz 2.12 und der Äquivalenz von direktem Streuproblem und hypersingulärer Integralgleichung (2.34).  $\square$

**Folgerung 2.14** Falls der Bogen und die rechte Seite  $\tilde{f}$  sogar analytisch sind, so ist auch die Lösung der Operatorgleichung (2.34) analytisch.

**Beweis:** Für einen Beweis dieser Tatsache, dessen wesentlicher Schritt der Nachweis der Kompaktheit des Operators  $A$  in einem geeigneten Banachraum holomorpher Funktionen ist, verweisen wir auf Lemma 4.26 und 4.27 sowie Folgerung 4.28 aus [38]. □

Abschließend zeigen wir noch die eindeutige Lösbarkeit der hypersingulären Integralgleichung in Sobolewräumen.

**Satz 2.15** Die Operatorgleichung (2.34) hat für alle rechten Seiten  $\tilde{f}$  aus dem Funktionenraum  $L_{ung}^2[0, 2\pi]$  genau eine Lösung  $\psi \in H_{ung}^1[0, 2\pi]$ . Die Lösung hängt stetig von der rechten Seite ab.

**Beweis:** Wir haben bisher in Satz 2.7  $N(I + T_0^{-1}(A + B))|_{C_{ung}^{1,\alpha}[0,2\pi]} = \{0\}$  gezeigt. Daraus folgt unter Verwendung der Abbildungseigenschaften von  $T_0^{-1}$ ,  $A$  und  $B$  sofort  $N(I + T_0^{-1}(A + B))|_{C_{ung}^{0,\alpha}[0,2\pi]} = \{0\}$ . Wir betrachten das Dualsystem  $\langle C_{ung}^{0,\alpha}[0, 2\pi], L_{ung}^2[0, 2\pi] \rangle$  bezüglich der Bilinearform  $\langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle := \int_0^{2\pi} \varphi_1(\sigma)\varphi_2(\sigma)d\sigma$ . Auf Grund des zweiten Fredholmschen Satzes gilt für den adjungierten Operator  $K^* := (T_0^{-1}(A + B))^*$

$$N(I + K^*)|_{L_{ung}^2[0,2\pi]} = \{0\}.$$

Erneutes Anwenden des zweiten Fredholmschen Satzes, diesmal angewandt auf das Dualsystem  $\langle L_{ung}^2[0, 2\pi], L_{ung}^2[0, 2\pi] \rangle$ , liefert

$$N(I + T_0^{-1}(A + B))|_{L_{ung}^2[0,2\pi]} = N(I + K^*)|_{L_{ung}^2[0,2\pi]} = \{0\}.$$

Die Behauptung ist eine Folge von Satz 2.12 und der Riesz-Theorie. □

Wir bemerken, daß es möglich ist, für Bögen und rechte Seite mit höheren Glattheitseigenschaften Analoga zu den Sätzen 2.13 und 2.15 in Hölderräumen und Sobolewräumen höherer Ordnung unter Verwendung von Satz 2.11 zu erhalten.

Nachdem wir die Existenz einer Lösung des Neumannproblems für die Helmholtzgleichung beim offenen Bogen gezeigt haben, geben wir nun noch eine Darstellung des Gesamtfeldes  $u := u^s + u^i$  an. Diese wird in der Physik als Huygensches Prinzip interpretiert.

**Satz 2.16** Für das Gesamtfeld  $u$  bei der Streuung einer ebenen einfallenden Welle  $u^i$  an einem schallharten offenem Bogen gilt die Darstellung:

$$(2.40) \quad u(x) = u^i(x) + \int_{\Gamma} \left\{ u_+(y) - u_-(y) \right\} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma.$$

**Beweis:** Auf Grund von Satz 2.13 können wir die eindeutige Lösung des direkten Streuproblems  $u^s$  als Doppelschichtpotential darstellen. Es gilt:

$$u(x) = u^i(x) + u^s(x) = u^i(x) + \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} \varphi(y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma.$$

Die Sprungbeziehungen (2.14) ergeben:

$$\varphi(x) = u_+^s(x) - u_-^s(x) = u_+(x) - u_-(x), \quad x \in \Gamma.$$

Daraus folgt die Behauptung des Satzes. □

Wir beschäftigen uns noch kurz mit der Frage der stetigen Abhängigkeit der gefundenen Lösung von den Randwerten. Die Korrektheit des Problems ist wichtig für die numerische Behandlung. In der Praxis sind die rechten Seiten  $f$  als Meßwerte gegeben, stellen also fehlerbehaftete Größen dar. Im Gegensatz zum inversen Problem, das wir später behandeln werden, ist das direkte Problem korrekt gestellt. Es gilt der folgende Satz:

**Satz 2.17** Die Lösung  $u$  des Neumannproblems für den offenen Bogen hängt stetig von den Randwerten  $f$  ab, d.h., es gilt:

$$\|u\|_{\infty, \bar{\Omega}} + \|\text{grad } u\|_{\infty, \bar{\Omega}} \leq C \|f\|_{0, \alpha, \Gamma}$$

für beliebiges  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  mit  $\bar{\Omega} \cap \Gamma = \emptyset$ .

**Beweis:** Auf Grund der Darstellung von  $u$  als Doppelschichtpotential mit Dichte  $\varphi$  erhalten wir:

$$(2.41) \quad \|\text{grad } u\|_{\infty, \bar{\Omega}} \leq C(\bar{\Omega}) \|\varphi\|_{\infty, [0, \pi]}.$$

Aus der Riesz-Fredholm-Theorie der zugehörigen Integralgleichung sehen wir unmittelbar, daß die folgende Abschätzung gültig ist:

$$(2.42) \quad \|\varphi\|_{\infty, [0, \pi]} \leq C \|f\|_{0, \alpha, \Gamma}.$$

Daraus folgt die Behauptung des Satzes. □

Satz 2.17 wird in Kapitel 4 beim Beweis des Eindeigkeitsatzes für das inverse Streuproblem für einen schallharten Bogen wesentlich ausgenutzt werden.

Wir möchten andeuten, daß es möglich ist, die Darstellung (2.13) für eine Lösung  $u$  zu einer Abschätzung des singulären Verhaltens des Gradienten von  $u$  zu benutzen. Die wesentliche Idee besteht darin, ausnutzen, daß der Gradient eines Doppelschichtpotentials für die Laplacegleichung durch den Cauchy-Integraloperator ausgedrückt werden kann. Das erlaubt es uns, funktionentheoretische Methoden aus [42], die für die Untersuchung des Verhaltens des Cauchy-Integraloperators in der Nähe der Kurvenendpunkte entwickelt wurden, in unserer Situation anzuwenden. In Übereinstimmung mit den Ergebnissen aus [58] erhalten wir:

$$(2.43) \quad \text{grad } u(x) = O\left(\frac{1}{|x - x_i^*|^{\gamma_0}}\right), \quad \frac{1}{2} < \gamma_0 < 1, \quad i = -1, 1.$$

Die Ergebnisse in [58] wurden unter Benutzung der Mellintransformation erzielt. Zum Abschluß dieses Abschnittes möchten wir auf einige Möglichkeiten zur Verallgemeinerung der erzielten Ergebnisse aufmerksam machen. Zum einen ist es möglich, auf den beiden Seiten des Bogens unterschiedliche Neumannrandwerte  $\frac{\partial u_+}{\partial n} := g_1$  und  $\frac{\partial u_-}{\partial n} := g_2$  mit  $g_1, g_2 \in C^{0,\alpha}(\Gamma)$  zu fordern. Mit Hilfe des kombinierten Ansatzes

$$u(x) := \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} \varphi(y) + \Phi(x, y) \psi(y) \right\} ds(y), \quad x \notin \Gamma, \quad \varphi \in C^{1,\alpha,*}(\Gamma), \quad \psi \in C^{0,\alpha}(\Gamma)$$

besteht die Möglichkeit, eine Lösungstheorie zu erhalten, die der in diesem Abschnitt dargestellten entspricht.

Wir weisen abschließend darauf hin, daß wir in der Lage sind, die in diesem Kapitel erzielten Ergebnisse auf Systeme von offenen, paarweise disjunkten schallharten Bögen zu verallgemeinern. Seien  $\Gamma_k$ ,  $k = 1, \dots, n$  die entsprechenden Bögen. Mit  $\{x_{-k}^*, x_k^*\}$  bezeichnen wir die Endpunkte des  $k$ -ten Bogens. Weiterhin sei  $\gamma_k : [-1, 1] \rightarrow \Gamma_k$  eine reguläre Parametrisierung des  $k$ -ten Bogens. Wir suchen eine Lösung als Doppelschichtpotential über  $\Gamma := \cup_{k=1}^n \Gamma_k$  mit einer Dichte der Gestalt:

$$(2.44) \quad \varphi(x_{\pm k}^*) = 0, \quad \frac{d\varphi(\gamma_k(s))}{ds} := \frac{\tilde{\varphi}_k(\arccos(s))}{\sqrt{1-s^2}}, \quad s \in (-1, 1), \quad \tilde{\varphi}_k \in C^{0,\alpha}[0, \pi]$$

für  $k = 1, \dots, n$ . Die Sprungbeziehungen für Doppelschichtpotentiale führen dann zu einem Integralgleichungssystem, dessen Hauptbestandteil der hypersinguläre Integraloperator ist. Mit Hilfe der Riesz-Theorie können wir auf die eindeutige Lösbarkeit des Systems schließen.



# 3. Die numerische Behandlung des direkten Streuproblems für einen schallharten Bogen

In diesem Kapitel werden wir uns mit der numerischen Lösung des Streuproblems durch Kombination von einem Quadraturformelverfahren und einem Kollokationsverfahren beschäftigen. Wir führen eine auf einem einfachen Störungsargument basierende Konvergenz- und Fehleranalyse durch. Wir geben punktweise Fehlerabschätzungen in Höldernormen an. Für analytische Bögen werden wir ein exponentielles Abklingen des Fehlers beweisen, so daß dieses numerische Verfahren für den Einsatz als Randintegralgleichungslöser bei Newtonverfahren als geeignet erscheint. Im letzten Abschnitt dieses Kapitels werden wir die Ergebnisse numerischer Experimente vorstellen, die die Güte des Näherungsverfahrens bestätigen.

## 3.1 Beschreibung der numerischen Methode

In diesem Abschnitt soll das numerische Verfahren zur Lösung der hypersingulären Integralgleichung für den offenen Bogen bereitgestellt werden. Wir werden dabei ein Quadraturformelverfahren anwenden, d.h., ein Verfahren vom Nyström-Typ mit einem Kollokationsverfahren koppeln. Ziel ist es dabei, die Lösung der Integralgleichung auf die Lösung eines linearen Gleichungssystems zu reduzieren, also ein vollständig diskretes Verfahren zu erhalten. Die in der Integralgleichung auftretenden Integrale werden durch Quadraturformeln ersetzt. Diese gewinnt man, indem man die glatten Teile der Integranden durch die entsprechenden trigonometrischen Interpolationspolynome ersetzt und diese danach exakt integriert.

Wir verwenden trigonometrische Interpolation mit einer geraden Knotenzahl. Sei

$n \in \mathbb{N}$  vorgegeben. Dann wählen wir die  $2n$  äquidistanten Stützstellen:

$$t_j^{(n)} := \frac{j\pi}{n}, \quad j = 0, \dots, 2n-1.$$

Als Unterraum von  $C[0, 2\pi]$ , bezüglich dem wir interpolieren, verwenden wir

$$T_n := \left\{ v \in C[0, 2\pi] \mid v(t) = \sum_{m=0}^n a_m \cos mt + \sum_{m=1}^{n-1} b_m \sin mt, \quad a_m, b_m \in \mathbb{C} \right\}.$$

Es ist bekannt, daß das Interpolationsproblem bezüglich der obigen Stützstellen und des Unterraumes  $T_n$  eindeutig lösbar ist. Wir betrachten nun den folgenden Interpolationsoperator:

$$\begin{aligned} P_n : C[0, 2\pi] &\longrightarrow T_n \\ f &\longmapsto \sum_{j=0}^{2n-1} f(t_j^{(n)}) L_j^{(n)}. \end{aligned}$$

Die Lagrangefaktoren  $L_j^{(n)}$  sind dabei gegeben durch

$$(3.1) \quad L_j^{(n)}(t) := \frac{1}{2n} \left\{ 1 + 2 \sum_{m=1}^{2n-1} \cos m(t - t_j^{(n)}) + \cos n(t - t_j^{(n)}) \right\},$$

wie man aus der Beziehung

$$(3.2) \quad 1 + 2 \sum_{j=1}^{n-1} e^{int} = i(1 - e^{int}) \cot \frac{t}{2}, \quad \tau \in (0, 2\pi)$$

leicht abliest.

Wir entwickeln nun die benötigten Quadraturformeln für den Hauptbestandteil und die Integrale, die  $\tilde{K}_1(\tau, \sigma)$  und  $\tilde{K}_2(\tau, \sigma)$  als Bestandteile des Integranden enthalten.

Als Quadraturformel für den Hauptbestandteil verwenden wir

$$(3.3) \quad -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cot \frac{\sigma - \tau}{2} \psi'(\sigma) d\sigma \sim \sum_{j=0}^{2n-1} \psi(t_j^{(n)}) R_j^{(n)}(\tau), \quad 0 \leq \tau \leq 2\pi,$$

mit

$$R_j^{(n)}(\tau) := -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cot \frac{\sigma - \tau}{2} L_j^{(n)}(\sigma) d\sigma$$

als Gewicht. Die explizite Form des Gewichtes lautet

$$R_j^{(n)}(\tau) = \frac{1}{n} \left\{ \sum_{m=1}^{n-1} m \cos m(t - t_j^{(n)}) + \frac{n}{2} \cos n(t - t_j^{(n)}) \right\}, \quad j = 0, \dots, 2n - 1,$$

wie man mit Hilfe der elementaren Integrale  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cot \frac{\sigma - \tau}{2} f'_m(\sigma) d\sigma = -|m| f_m(\tau)$  leicht erhält. Hier verwenden wir die Abkürzung  $f_m(\sigma) := e^{im\sigma}$  für die trigonometrischen Monome. Wir gewinnen diese Quadraturformel, indem wir die Dichte  $\psi$  durch ihr trigonometrisches Interpolationspolynom ersetzen und dann exakt integrieren. Um das Integral, dessen Kern eine logarithmische Singularität aufweist, geeignet behandeln zu können, entwickeln wir für  $\tau \in [0, 2\pi]$  die folgende auf Martensen [30] und Kussmaul [27] zurückgehende Quadraturformel:

$$(3.4) \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \log 4 \sin^2 \frac{\sigma - \tau}{2} \tilde{K}_1(\tau, \sigma) \psi(\sigma) d\sigma \sim \sum_{k=1}^{2n-1} F_k^{(n)}(\tau) \tilde{K}_1(\tau, t_k^{(n)}) \psi(t_k^{(n)})$$

mit den Gewichten

$$F_k^{(n)}(\tau) := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \log 4 \sin^2 \frac{\sigma - \tau}{2} L_k^{(n)}(\sigma) d\sigma$$

oder in expliziter Form

$$F_k^{(n)}(t) = -\frac{2}{n} \left\{ \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m} \cos m(t - t_k^{(n)}) + \frac{1}{2n} \cos n(t - t_k^{(n)}) \right\}, \quad k = 0, \dots, 2n - 1,$$

die wir unter Verwendung der elementaren Integrale  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log 4 \sin^2 \frac{\sigma - \tau}{2} f_m(\sigma) d\sigma = -\frac{1}{|m|} f_m(\tau)$  berechnen. Diese Quadraturformel erhält man durch Ersetzen von  $\tilde{K}_1(\tau, \sigma) \psi(\sigma)$  durch die Interpolierende bezüglich  $\sigma$  und anschließender exakter Integration.

Für die näherungsweise Berechnung der Integrale mit glattem Kern verwenden wir die Rechteckregel.

Es gilt:

$$(3.5) \quad \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{K}_2(\tau, \sigma) \psi(\sigma) d\sigma \sim \frac{1}{2n} \sum_{j=0}^{2n-1} \tilde{K}_2(\tau, t_j^{(n)}) \psi(t_j^{(n)}), \quad \tau \in [0, 2\pi],$$

wobei wir ebenfalls wieder bei festem  $\tau$  den Ausdruck  $\tilde{K}_2(\tau, \sigma) \psi(\sigma)$  bezüglich  $\sigma$  interpolieren und anschließend exakt integrieren.

Unter Verwendung dieser drei Quadraturregeln können wir die Integralgleichung für  $\tau \in [0, 2\pi]$  durch folgende Näherungsgleichung ersetzen:

$$(3.6) \quad \sum_{j=0}^{2n-1} \tilde{\psi}(t_j^{(n)}) \left\{ R_j^{(n)}(\tau) + F_j^{(n)}(\tau) \tilde{K}_1(\tau, t_j^{(n)}) + \frac{1}{2n} \tilde{K}_2(\tau, t_j^{(n)}) \right\} = \tilde{f}(\tau),$$

wobei wir eine Lösung  $\tilde{\psi}$  aus dem Raum der ungeraden trigonometrischen Polynome bis zum Grad  $n - 1$  suchen:

$$T_{n,ung} := \left\{ v \mid v \in C[0, 2\pi], \quad v(t) = \sum_{m=1}^{n-1} b_m \sin mt, \quad b_m \in \mathbb{C} \right\}.$$

Es ist bekannt, daß das Interpolationsproblem bezüglich der  $n - 1$  Stützstellen  $t_j^{(n)}$ ,  $j = 1, \dots, n - 1$ , und des  $n - 1$ -dimensionalen Unterraumes  $T_{n,ung} \subset T_n$  eindeutig lösbar ist. Den zugehörigen Interpolationsoperator bezeichnen wir mit  $P_{n,ung}$ . Es gilt  $P_n|_{C_{ung}[0,2\pi]} = P_{n,ung}$ .

Wir führen nun die folgenden numerischen Quadraturoperatoren ein:

$$(A_n \varphi)(\tau) := \sum_{j=0}^{2n-1} F_j^{(n)}(\tau) \tilde{K}_1(\tau, t_j^{(n)}) \psi(t_j^{(n)}),$$

$$(B_n \varphi)(\tau) := \frac{1}{2n} \sum_{j=0}^{2n-1} \tilde{K}_2(\tau, t_j^{(n)}) \psi(t_j^{(n)}).$$

Damit können wir die diskretisierte Gleichung in folgender Form schreiben:

$$(3.7) \quad T_0 \tilde{\psi}_n + A_n \tilde{\psi}_n + B_n \tilde{\psi}_n = \tilde{f}.$$

Dabei haben wir berücksichtigt, daß  $T_0 P_n \psi = T_0 \psi$  für  $\psi \in T_n$  gilt, da die verwendete Quadraturformel für den Hauptbestandteil  $T_0$  trigonometrische Polynome exakt integriert.

Die Anwendung einer Kollokationsmethode auf Gleichung (3.7) liefert:

$$(3.8) \quad P_{n,ung} T_0 \tilde{\psi}_n + P_{n,ung} A_n \tilde{\psi}_n + P_{n,ung} B_n \tilde{\psi}_n = P_{n,ung} \tilde{f}.$$

Aus Gleichung (3.8) bekommen wir aber unter Ausnutzung von  $T_0 \psi \in T_{n,ung}$  für  $\psi \in T_{n,ung}$  die folgende Näherungsgleichung:

$$(3.9) \quad T_0 \tilde{\psi}_n + P_{n,ung} A_n \tilde{\psi}_n + P_{n,ung} B_n \tilde{\psi}_n = P_{n,ung} \tilde{f}.$$

Offensichtlich ist Gleichung (3.9) mit dem folgenden linearen Gleichungssystem für  $k = 0, \dots, 2n - 1$  äquivalent:

$$\sum_{j=0}^{2n-1} \tilde{\psi}(t_j^{(n)}) \left\{ R_j^{(n)}(t_k^{(n)}) + F_j^{(n)}(t_k^{(n)}) \tilde{K}_1(t_k^{(n)}, t_j^{(n)}) + \frac{1}{2n} \tilde{K}_2(t_k^{(n)}, t_j^{(n)}) \right\} = \tilde{f}(t_k^{(n)}).$$

Wir geben im folgenden noch die explizite Form der Gewichte an:

$$R_j^{(n)}(t_k^{(n)}) = \frac{1}{n} \left\{ \sum_{m=1}^{n-1} m \cos\left(m \frac{\pi}{n}(j-k)\right) + \frac{n}{2}(-1)^{k-j} \right\},$$

$$F_j^{(n)}(t_k^{(n)}) = -\frac{2}{n} \left\{ \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m} \cos\left(m \frac{\pi}{n}(j-k)\right) + \frac{1}{2n}(-1)^{j-k} \right\}.$$

Diese Ausdrücke sind für konkrete numerische Implementierungen des Verfahrens von Bedeutung.

Wir bemerken, daß wegen der Eigenschaft  $\tilde{\psi}(t_j^{(n)}) = -\tilde{\psi}(t_{2n-j}^{(n)})$ ,  $j = 1, \dots, n-1$  und  $\tilde{\psi}(0) = \tilde{\psi}(\pi) = 0$  nur ein  $n-1$ -dimensionales lineares Gleichungssystem gelöst werden muß.

Damit haben wir eine vollständig diskrete Methode zur numerischen Lösung der hypersingulären Integralgleichung entwickelt. Wir müssen uns nun mit der Frage beschäftigen, ob die Näherungsgleichung (3.9) zumindest für hinreichend große  $n$  eindeutig lösbar ist. Weiterhin werden wir untersuchen, ob die Näherungslösungen (in geeigneten Normen) gegen die Lösung der Ausgangsgleichung konvergieren.

## 3.2 Konvergenz- und Fehleranalysis

In unserer Fehler- und Konvergenzanalyse nutzen wir die Eigenschaft des Hauptbestandteils  $T_0$  aus, invertierbar zu sein von  $C_{ung}^{1,\alpha}[0, 2\pi]$  nach  $C_{ung}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$ . Wir erhalten im Fall geschlossener Randkurven den entsprechenden Hauptbestandteil gerade dadurch, daß wir im potentialtheoretischen Fall  $\kappa = 0$  als spezielle Randkurve den Einheitskreis wählen. Die Integralgleichung für eine beliebige Randkurve kann dann als kompakte Störung der Randintegralgleichung über dem Einheitskreis betrachtet werden. Wir wollen diese Eigenschaft auch bei unserer Analyse des Näherungsverfahrens (3.9) ausnutzen.

Wir betrachten deshalb zuerst die ungestörten Gleichungen

$$(3.10) \quad T_0\psi = f, \quad T_0\tilde{\psi}_n = P_{n,ung}f, \quad \tilde{\psi}_n \in T_{n,ung},$$

und erhalten für die Lösbarkeit der ungestörten Näherungsgleichung das folgende Lemma:

**Lemma 3.1** *Die Gleichung  $T_0\tilde{\psi}_n = P_{n,ung}f$  hat für beliebiges  $f \in C_{ung}^{0,\beta}[0, 2\pi]$  genau eine Lösung  $\tilde{\psi}_n \in T_{n,ung}$ . Es gilt für  $0 < \alpha < \beta < 1$  die Fehlerabschätzung*

$$(3.11) \quad \|\psi - \tilde{\psi}_n\|_{1,\alpha} \leq C(\alpha, \beta) \frac{\log n}{n^{\beta-\alpha}} \|\psi\|_{1,\beta},$$

wobei wir mit  $\psi$  die Lösung der ungestörten Gleichung  $T_0\psi = f$  bezeichnen.

**Beweis:** Da  $T_0$  bijektiv ist, erhalten wir die folgende Darstellung:

$$\tilde{\psi}_n = T_0^{-1}P_{n,ung}T_0\psi.$$

Auf Grund der Abbildungseigenschaften von  $T_0^{-1}$  ist  $\tilde{\psi}_n$  ein trigonometrisches Polynom aus  $T_{n,ung}$ . Daraus folgt unter Verwendung von Fehlerabschätzungen für die trigonometrische Interpolation in Hölderräumen (vergleiche [52] oder [53]) die Abschätzung:

$$\begin{aligned} \|\psi - \tilde{\psi}_n\|_{1,\alpha} &\leq C\|P_{n,ung}T_0\psi - T_0\psi\|_{0,\alpha} = C\|P_{n,ung}f - f\|_{0,\alpha} \\ &\leq C\frac{\log n}{n^{\beta-\alpha}}\|f\|_{0,\beta} \leq C\frac{\log n}{n^{\beta-\alpha}}\|\psi\|_{1,\beta}. \end{aligned}$$

Damit ist das Lemma gezeigt. □

Wir beweisen nun ein Approximationslemma, das wir dann für die Konvergenzanalyse der gestörten Gleichung benötigen. Dabei verwenden wir die Abkürzungen  $\tilde{A} := A + B$  und  $\tilde{A}_n := A_n + B_n$ .

**Lemma 3.2** Für  $0 < \gamma < 1$  und  $\epsilon > 0$  mit  $0 < \epsilon + \gamma < 1$  sowie  $\varphi \in C_{ung}^{1,\alpha}[0, 2\pi]$  gilt:

$$(3.12) \quad \|(\tilde{A} - \tilde{A}_n)\varphi\|_{0,\gamma} \leq C(\gamma, \epsilon)\frac{\log n}{n^\epsilon}\|\varphi\|_{1,\alpha}.$$

**Beweis:** Wir schreiben zur Abkürzung  $d(\varphi)(t) := (A\varphi)(t) - (A_n\varphi)(t)$ . Dann erhalten wir unter Verwendung der Ungleichung von Cauchy-Schwarz für den Maximumnormanteil:

$$\begin{aligned} |d(\varphi)(t)| &\leq C\|f_0\|_{L^2}\|P_n(\tilde{K}_1(t, \cdot))(\cdot) - \tilde{K}_1(t, \cdot)\varphi(\cdot)\|_\infty \\ &\leq C\frac{\log n}{n^\epsilon}\left\|\tilde{K}_1(t, \cdot)\right\|_{0,\gamma+\epsilon}\|\varphi\|_{1,\alpha} \leq C\frac{\log n}{n^\epsilon}\|\varphi\|_{1,\alpha}. \end{aligned}$$

Die Abschätzung der Hölderhalbnorm ist schwieriger. Wir erhalten unter Verwendung der Hölderungleichung und der Abschätzung  $\|f_{t_1} - f_{t_2}\|_{L^{\frac{1}{\gamma}}[0,2\pi]} \leq C|t_1 - t_2|^\gamma$  die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} |d(\varphi)(t_1) - d(\varphi)(t_2)| &\leq C|t_1 - t_2|^\gamma \left\|P_n(\tilde{K}_1(t_2, \cdot)\varphi(\cdot)) - \tilde{K}_1(t_2, \cdot)\varphi(\cdot)\right\|_\infty \\ &\quad + C\left\|P_n((\tilde{K}_1(t_1, \cdot) - \tilde{K}_1(t_2, \cdot))\varphi(\cdot)) - (\tilde{K}_1(t_1, \cdot) - \tilde{K}_1(t_2, \cdot))\varphi(\cdot)\right\|_\infty \\ &\leq C\frac{\log n}{n^\epsilon} \left( |t_1 - t_2|^\gamma + \left\|\tilde{K}_1(t_1, \cdot) - \tilde{K}_1(t_2, \cdot)\right\|_{0,\gamma+\epsilon} \right) \|\varphi\|_{0,\gamma+\epsilon}. \end{aligned}$$

Der Mittelwertsatz liefert dann

$$(3.13) \quad \|d\varphi\|_{0,\gamma} \leq C \frac{\log n}{n^\epsilon} \|\varphi\|_{1,\alpha}.$$

Die entsprechenden Abschätzungen für die Operatoren  $B$  und  $B_n$  sind einfacher und werden hier nicht durchgeführt.

□

Wir sind nun in der Lage, das Hauptergebnis dieses Abschnittes zu beweisen. Dabei wird ein Störungsargument benutzt, wie dies zum Beispiel in den Arbeiten [35, 36] oder [24] für Pseudodifferentialgleichungen in Hölder- bzw. Sobolevräumen verwandt wird.

**Satz 3.3** *Für rechte Seiten  $\tilde{f} \in C_{ung}^{0,\beta}[0, 2\pi]$  ist die Näherungsgleichung (3.9), d.h. das lineare Gleichungssystem, für hinreichend große  $n$  eindeutig lösbar. Es gilt für  $0 < \alpha < \beta < 1$  die Fehlerabschätzung*

$$(3.14) \quad \|\psi - \tilde{\psi}_n\|_{1,\alpha} \leq C(\alpha, \beta) \frac{\log n}{n^{\beta-\alpha}} \|\psi\|_{1,\beta},$$

wobei wir mit  $\psi$  die wahre Lösung der Integralgleichung (2.28) bezeichnen. Dabei hängt die Konstante  $C$  nur von den Hölderkonstanten  $\alpha$  und  $\beta$  sowie der verwendeten Parametrisierung  $\gamma$  ab.

**Beweis:** Wir nehmen zunächst an, daß eine Lösung  $\tilde{\psi}_n \in T_{n,ung}$  existiert. Für  $T_0\tilde{\psi}_n$  gilt dann:

$$(3.15) \quad T_0\tilde{\psi}_n = P_{n,ung}T_0(\psi + T_0^{-1}(\tilde{A}\psi - \tilde{A}_n\tilde{\psi}_n)).$$

Durch Anwenden von Lemma 3.1 auf Gleichung (3.15) erhalten wir:

$$(3.16) \quad \|\psi - \tilde{\psi}_n + T_0^{-1}(\tilde{A}\psi - \tilde{A}_n\tilde{\psi}_n)\|_{1,\alpha} \leq C \frac{\log n}{n^{\beta-\alpha}} \|\psi + T_0^{-1}(\tilde{A}\psi - \tilde{A}_n\tilde{\psi}_n)\|_{1,\beta}.$$

Auf Grund der Riesz-Theorie und der Kompaktheit von  $\tilde{A}$  gilt die Abschätzung:

$$\begin{aligned} \|\psi - \tilde{\psi}_n\|_{1,\alpha} &\leq C \|(I + T_0^{-1}\tilde{A})(\psi - \tilde{\psi}_n)\|_{1,\alpha} \\ &\leq C \left\{ \|\psi - \tilde{\psi}_n + T_0^{-1}(\tilde{A}\psi - \tilde{A}_n\tilde{\psi}_n)\|_{1,\alpha} + \|T_0^{-1}(\tilde{A} - \tilde{A}_n)\tilde{\psi}_n\|_{1,\alpha} \right\}. \end{aligned}$$

Nach Anwenden der Dreiecksungleichung und unter Verwendung von Abschätzung (3.16) erhalten wir:

$$\begin{aligned} \|\psi - \tilde{\psi}_n\|_{1,\alpha} &\leq C \|T_0^{-1}(\tilde{A} - \tilde{A}_n)\tilde{\psi}_n\|_{1,\alpha} \\ &+ C \frac{\log n}{n^{\beta-\alpha}} \left\{ \|\psi\|_{1,\beta} + \|T_0^{-1}\tilde{A}(\psi - \tilde{\psi}_n)\|_{1,\beta} + \|T_0^{-1}(\tilde{A} - \tilde{A}_n)\tilde{\psi}_n\|_{1,\beta} \right\}. \end{aligned}$$

Indem wir die Beschränktheit des Operators  $T_0^{-1}\tilde{A} : C^{1,\alpha}[0, 2\pi] \rightarrow C^{1,\beta}[0, 2\pi]$  ausnutzen, ergibt sich die Abschätzung:

$$\begin{aligned} \|\psi - \tilde{\psi}_n\|_{1,\alpha} &\leq C \|(\tilde{A} - \tilde{A}_n)\tilde{\psi}_n\|_{0,\alpha} \\ &+ C \frac{\log n}{n^{\beta-\alpha}} \left\{ \|\psi\|_{1,\beta} + \|\psi - \tilde{\psi}_n\|_{1,\alpha} + \|(\tilde{A} - \tilde{A}_n)\tilde{\psi}_n\|_{0,\beta} \right\}. \end{aligned}$$



Schließlich erhalten wir nach Anwenden des Approximationslemmas 3.2 sowie der Ungleichung  $\|\tilde{\psi}_n\|_{1,\alpha} \leq \|\psi - \tilde{\psi}_n\|_{1,\alpha} + \|\psi\|_{1,\alpha}$  die Abschätzung

$$(3.17) \quad \|\psi - \tilde{\psi}_n\|_{1,\alpha} \leq C \frac{\log n}{n^{\beta-\alpha}} (\|\psi\|_{1,\beta} + \|\psi - \tilde{\psi}_n\|_{1,\alpha}).$$

Daraus folgt die zu zeigende Fehlerabschätzung (3.14) für hinreichend großes  $n$  unter der Voraussetzung, daß eine Näherungslösung  $\tilde{\psi}_n$  existiert.

Für die rechte Seite  $\tilde{f} = 0$  erhalten wir wegen  $\psi = 0$  aus der Fehlerabschätzung  $\tilde{\psi}_n = 0$  für hinreichend großes  $n$ , d.h., die homogene Näherungsgleichung (3.9) besitzt nur die triviale Lösung. Daraus folgt die eindeutige Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems (3.9) für inhomogene rechte Seiten  $\tilde{f}$ . □

Es ist möglich, für genügend glatte Bögen (daraus folgen entsprechende Glattheitseigenschaften für die Kerne  $\tilde{K}_i$ ,  $i = 1, 2$ ) und genügend glatte rechte Seiten die Fehlerabschätzung (3.14) zu verschärfen durch:

$$(3.18) \quad \|\psi - \tilde{\psi}_n\|_{1,\alpha} \leq C \frac{\log n}{n^{k+\beta-\alpha}} \|\psi\|_{k+1,\beta+1}$$

für  $0 < \alpha, \beta < 1$  und  $\alpha \leq k + \beta$ . Falls die Parametrisierung und die rechte Seite  $\tilde{f}$  analytisch sind (daraus folgt Analytizität der Lösung), erhalten wir die Fehlerabschätzung

$$(3.19) \quad \|\psi - \tilde{\psi}_n\|_{1,\alpha} \leq C e^{-n\tilde{\sigma}}$$

mit von  $\tilde{f}$  sowie  $\gamma$  abhängenden Konstanten  $C$  und  $\tilde{\sigma}$ , d.h., der Fehler klingt exponentiell ab. Die Fehlerabschätzungen (3.18) und (3.19) können ebenfalls mit den Methoden, die zur Gewinnung von Abschätzung (3.14) verwendet wurden, bewiesen werden. Dazu müssen wir entsprechend bessere Abschätzungen für den Interpolationsfehler heranziehen (vergleiche hierzu auch [17], S. 160 für den Fehler bei der Interpolation analytischer,  $2\pi$ -periodischer Funktionen).

Damit ist die Analyse des vollständig diskreten Lösungsverfahrens abgeschlossen. Wenn wir dieses Näherungsverfahren zur Lösung des direkten Streuproblems anwenden, so konvergieren die erhaltenen Näherungslösungen exponentiell gegen die exakte Lösung, falls der Bogen, der die Streuung verursacht, analytisch ist.

### 3.3 Ergebnisse numerischer Experimente

In diesem Abschnitt wollen wir einige numerische Testergebnisse vorstellen. In der Streutheorie ist oft das sogenannte Fernfeld von Interesse. Das Fernfeld charakterisiert das Verhalten der gestreuten Wellen im Unendlichen. Wir wollen später bei

der Lösung des inversen Problems aus der Kenntnis des Fernfeldes der gestreuten Wellen auf die Gestalt des offenen Bogens schließen. Für das numerische Verfahren ist dabei die Bestimmung des Fernfeldes für unterschiedliche Neumannrandwerte von entscheidender Bedeutung.

Unter dem Fernfeld einer ausstrahlenden Lösung  $u$  der Helmholtzgleichung verstehen wir eine komplexwertige Funktion  $u_\infty$ , die auf dem Einheitskreis definiert ist und für die

$$u(x) = \frac{e^{i\kappa|x|}}{\sqrt{|x|}} \left\{ u_\infty(\hat{x}) + O\left(\frac{1}{|x|}\right) \right\}, \quad |x| \rightarrow \infty$$

gleichmäßig für alle Richtungen  $\hat{x} = x/|x|$  gilt.

Für das Fernfeld einer Lösung der Helmholtzgleichung in Form eines Doppelschichtpotentials gilt:

$$(3.20) \quad u_\infty(\hat{x}) = \sqrt{\frac{\kappa}{8\pi}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \int_{\Gamma} \langle n(y), \hat{x} \rangle e^{-i\kappa\langle \hat{x}, y \rangle} \varphi(y) ds(y),$$

wie man leicht unter Verwendung der folgenden asymptotischen Formel für die Hankelfunktionen  $n$ -ter Ordnung und erster Art

$$(3.21) \quad H_n^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i(z - n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{z}\right) \right\}, \quad z \rightarrow \infty$$

nachrechnet. In parametrisierter Form erhalten wir für das Fernfeld:

$$u_\infty(\hat{x}) = \sqrt{\frac{\kappa}{8\pi}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \int_0^\pi \langle n(\gamma(\cos \sigma)), \hat{x} \rangle e^{-i\kappa\langle \hat{x}, \gamma(\cos \sigma) \rangle} \psi(\sigma) \sin \sigma |\gamma'(\cos \sigma)| d\sigma.$$

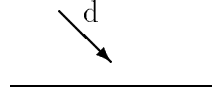
In den folgenden Beispielen werden wir das Fernfeld berechnen. Wir verwenden zur Diskretisierung  $2n$  Knoten. Zuerst bestimmen wir Näherungswerte für die Dichte an den  $n - 1$  Knoten des Intervalls  $[0, \pi]$  durch Lösen eines linearen Gleichungssystems, anschließend werten wir das Fernfeld durch Anwendung der Rechteckregel mit gleicher Knotenzahl aus.

Wir betrachten die in den Bildern 3.1 bis 3.3 dargestellten Beispiele als Randbögen:

- Geradenstück,
  - Halbkreis,
- und
- Gefäß.

Auf Grund unserer numerischen Erfahrung für den Fall geschlossener Randkurven erwarten wir besonders schnelle Konvergenz für das Geradenstück. Die Verwendung von stärker gekrümmten Bögen wird uns zu einer feineren Diskretisierung zwingen.

Abbildung 3.1: Geradenstück



**Beispiel 3.4** Wir wählen die folgende Parametrisierung des Geradenstückes:

$$\gamma(\tau) = (\tau, 0), \quad \tau \in [-1, 1].$$

Wir betrachten eine einfallende Welle mit Einfallrichtung  $d = \frac{1}{2}(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ . Wir erhalten die folgenden numerischen Werte:

Tabelle 1: Numerische Beispiele für das Geradenstück

	n	$Reu_\infty(d)$	$Imu_\infty(d)$	$Reu_\infty(-d)$	$Imu_\infty(-d)$
$\kappa = 1$	4	0.1092345045	0.3818946326	-0.0816025723	-0.3535683310
	8	0.1092565033	0.3818580623	-0.0815819192	-0.3534869047
	16	0.1092565033	0.3818580623	-0.0815819192	-0.3534869047
$\kappa = 5$	4	-0.9280266771	0.5722603260	0.5869857891	-0.1893508163
	8	-0.6986057247	1.1953146811	0.1058965058	-0.3311897655
	16	-0.6938719551	1.1968908118	0.1014940417	-0.3326856481
	32	-0.6938719555	1.1968908118	0.1014940420	-0.3326856479
	64	-0.6938719555	1.1968908118	0.1014940420	-0.3326856479

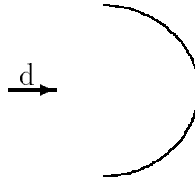
Wir erkennen deutlich in Tabelle 1 die erwartete exponentielle Konvergenz. Für größere Wellenzahlen  $\kappa$  stellen wir fest, daß wir auf Grund der stärkeren Oszillation der Hankelfunktionen feiner diskretisieren müssen.

**Beispiel 3.5** Wir verwenden die folgende Parametrisierung für den Halbkreis:

$$\gamma(\tau) = \left(\cos \frac{\pi}{2}\tau, \sin \frac{\pi}{2}\tau\right), \quad \tau \in [-1, 1].$$

Wir betrachten in diesem Beispiel eine ebene einfallende Welle mit Einfallrichtung  $d = (1, 0)$ .

Abbildung 3.2: Halbkreisförmiger Bogen



Wir erhalten für die Streuung an einem schallharten Halbkreis die folgenden numerischen Werte:

Tabelle 2: Numerische Beispiele für den Halbkreis

	n	$Reu_\infty(d)$	$Imu_\infty(d)$	$Reu_\infty(-d)$	$Imu_\infty(-d)$
$\kappa = 1$	4	-0.6574450979	1.0791934423	0.9938938113	0.8133268582
	8	-0.6787902812	1.1002278944	1.0445241202	0.7839290200
	16	-0.6787860016	1.1002247455	1.0445144311	0.7839476078
	32	-0.6787860016	1.1002247455	1.0445144311	0.7839476078
$\kappa = 5$	4	-0.7036412756	0.3598077199	-0.6629927225	-0.1637120881
	8	-0.9636127356	1.2475847393	0.1314834515	0.2967922973
	16	-0.8253685551	1.2788019070	-0.4774153530	-0.0774983339
	32	-0.8252856952	1.2786348411	-0.4779796224	-0.0773780843
	64	-0.8252856952	1.2786348411	-0.4779796224	-0.0773780843

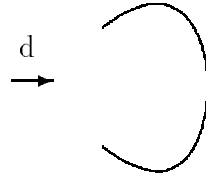
Wieder ist die exponentielle Konvergenz der Folge der Näherungsfelder deutlich erkennbar. Auch im Fall des Halbkreises zwingt uns eine Vergrößerung der Wellenzahl aus den oben beschriebenen Gründen zu einer Verfeinerung der Diskretisierung.

**Beispiel 3.6** Als letztes Beispiel betrachten wir einen Bogen, der in seiner Form einem Gefäß ähnelt. Wir wählen die folgende Parametrisierung des Bogens:

$$\gamma(\tau) = \left( 2 \sin \frac{3}{8} \pi \left( \frac{4}{3} + t \right), -\sin \frac{3}{4} \pi \left( \frac{4}{3} + t \right) \right), \quad \tau \in [-1, 1].$$

Wir betrachten eine einfallende Welle mit Einfallsrichtung  $d = (1,0)$ .

Abbildung 3.3: Gefäßförmiger Bogen



In Tabelle 3 sehen wir numerische Ergebnisse für den gefäßförmigen Bogen.

Tabelle 3: Numerische Beispiele für den gefäßförmigen Bogen

	n	$Reu_\infty(d)$	$Imu_\infty(d)$	$Reu_\infty(-d)$	$Imu_\infty(-d)$
$\kappa = 1$	4	-0.6989716785	0.3697176283	-0.6319559728	-0.3737124981
	8	-0.7401468489	0.3587784046	-0.6506053735	-0.4002382303
	16	-0.7405155596	0.3597879012	-0.6517138030	-0.3999122361
	32	-0.7405155791	0.3597879328	-0.6517138404	-0.3999122254
	64	-0.7405155791	0.3597879328	-0.6517138404	-0.3999122254
$\kappa = 5$	8	-1.0358933518	1.0713207454	1.0094363985	-0.4952657344
	16	-0.9253736796	1.2734692522	0.9837389327	-0.4169246629
	32	-0.9196850116	1.2772335431	0.9776212109	-0.4078785261
	64	-0.9196849923	1.2772335793	0.9776211245	-0.4078784563
	128	-0.9196849923	1.2772335793	0.9776211245	-0.4078784563
$\kappa = 10$	16	-1.4569708515	1.6211395674	0.5536267586	0.9953414686
	32	-1.3588045150	1.6749553970	1.1537231482	0.8834566589
	64	-1.3601310679	1.6740236619	1.1589267694	0.8666342075
	128	-1.3601310680	1.6740236618	1.1589267700	0.8666342063
	256	-1.3601310680	1.6740236618	1.1589267700	0.8666342063

Auch hier stellt sich wieder deutlich die exponentielle Konvergenz heraus. Für die Wellenzahl  $\kappa = 10$  stellen wir eine sichtliche Vergrößerung des Rechenaufwandes gegenüber den kleineren Wellenzahlen fest. Die Ursache dafür ist die schon bei den anderen Beispielen erwähnte stärkere Oszillation der Grundlösung in diesem Fall.

Beim Vorliegen von noch größeren Wellenzahlen ist die Anwendung von Mehrgitterverfahren (vergleiche [17, 9]) sinnvoll.

Auf Grund des exponentiellen Abklingens des Fehlers wird ein mehrmaliger Einsatz dieser Methode zur Fernfeldbestimmung in jedem einzelnen Schritt des Newtonverfahrens unter dem Gesichtspunkt eines geringen Rechen- und damit Zeitaufwandes möglich sein. Weiterhin werden wir diese Methode benutzen, um die für den Test des numerischen Verfahrens zur Lösung des inversen Problems benötigten synthetischen Fernfelddaten bereitzustellen.

# 4. Das inverse Streuproblem für einen schallharten Bogen

In diesem Kapitel soll das inverse Streuproblem für einen schallharten Bogen formuliert werden. Weiterhin wird die Frage der Eindeutigkeit der Lösung dieses inversen Problems untersucht. Wir werden zeigen, daß eine von Isakow [14] entwickelte und von Kirsch und Kress [16] vereinfachte Beweismethode auch im Fall der Streuung an einem schallharten Bogen anwendbar ist. Anschließend werden wir Reziprozitätsgesetze für das Fernfeld angeben und Eigenschaften des Fernfeldoperators untersuchen.

## 4.1 Formulierung des inversen Streuproblems

Das direkte Streuproblem besteht darin, bei gegebenem Rand bzw. Bogen das Verhalten der gestreuten Welle  $u^s$  im Unendlichen zu bestimmen, d.h., das Fernfeld  $u_\infty$  auszuwerten. Bei der Lösung des entsprechenden inversen Problems versuchen wir, umgekehrt aus der Kenntnis des (gemessenen) Fernfeldes und der physikalischen Beschaffenheit des Hindernisses auf die Gestalt des die Streuung verursachenden Hindernisses zu schließen. Die Richtungsabhängigkeit der einfallenden ebenen Welle  $u^i(x) := e^{i\kappa\langle x, d \rangle}$  bringen wir durch die Bezeichnung  $u^i(\cdot, d)$  zum Ausdruck.

Wir definieren das inverse Streuproblem wie folgt:

**Definition 4.1 (Inverses Streuproblem für einen schallharten Bogen)**

*Wir bezeichnen mit  $u_\infty(\cdot, d)$  das Fernfeld der Welle  $u^s(\cdot, d)$ , die durch Streuung der einfallenden ebenen Welle  $u^i(\cdot, d)$  an einem schallharten Bogen  $\Gamma$  entsteht. Dann verstehen wir unter dem inversen Streuproblem die Bestimmung des die Streuung verursachenden schallharten Bogens  $\Gamma$  aus der Kenntnis des Fernfeldes  $u_\infty(\cdot, d)$ , das für alle Einfallrichtungen  $d$  und für eine feste Wellenzahl  $\kappa > 0$  gegeben ist.*

Für den Einheitskreis verwenden wir im folgenden die Bezeichnung  $\Omega$ . Mit  $F$  bezeichnen wir den Operator, der zu einem festen einfallenden Feld  $u^i$  dem durch die Parametrisierung  $\gamma$  gegebenen Bogen  $\Gamma$  das Fernfeld  $u_\infty$  zuordnet. Der Operator

$$\begin{aligned} F : C^3[-1, 1] &\longrightarrow L^2(\Omega) \\ \gamma &\longmapsto u_\infty \end{aligned}$$

wird in naheliegender Weise als Fernfeldoperator bezeichnet. Wir verwenden, um die Abhängigkeit von der Parametrisierung auszudrücken, die Bezeichnung  $F_\gamma := F(\Gamma)$ . Wir haben die Gleichung

$$(4.1) \quad F(\Gamma) = u_\infty$$

für den unbekanntem Bogen  $\Gamma$  zu lösen.

## 4.2 Eindeutigkeitsuntersuchung zum inversen Streuproblem für einen offenen schallharten Bogen

In diesem Abschnitt übertragen wir einen für den Fall geschlossener Randkurven bekannten, auf Isakow, Kirsch und Kress [16] zurückgehenden Eindeutigkeitsbeweis auf den Fall eines offenen schallharten Bogens als Hindernis. Dabei wird die folgende Beweistechnik angewandt:

- Aus der Übereinstimmung der gestreuten Wellen für einfallende ebene Wellen wird auf die Übereinstimmung der gestreuten Wellen mit Punktquellen als einfallende Wellen geschlossen.
- Die Annahme  $\Gamma_1 \neq \Gamma_2$  wird dadurch zum Widerspruch geführt, daß eine Punktquelle gegen einen Punkt  $x \in \Gamma_2 \setminus \Gamma_1$  strebt.

Dazu benötigen wir das folgende vorbereitende Lemma, das sich mit der Approximation von Lösungen der Helmholtzgleichung durch Linearkombinationen einfallender ebener Wellen beschäftigt.

**Lemma 4.2** *Sei  $D$  ein beschränktes Gebiet mit Rand aus der Klasse  $C^2$ , so daß  $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$  zusammenhängend ist. Weiterhin sei  $u \in C^2(D) \cup C^1(\bar{D})$  eine Lösung der Helmholtzgleichung. Dann gibt es eine Folge  $\{v_n\}$  von ebenen Wellen mit*

$$v_n \in V := \text{span}\{u^i(\cdot, d) : d \in \Omega\}$$

mit der Eigenschaft

$$(4.2) \quad \left\| \frac{\partial^k v_n}{\partial x_j^k} - \frac{\partial^k u}{\partial x_j^k} \right\|_{\infty, \tilde{\Omega}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

für  $j = 1, 2$ ,  $k = 0, 1, 2$  und beliebige kompakte Teilmengen  $\tilde{\Omega} \subset D$ .



**Beweis:** Wir verweisen auf die Arbeit [16], Lemma 3.2, und geben hier nur kurz die wesentlichen Beweisideen an. Zunächst zeigen wir, daß das Funktionensystem

$$(4.3) \quad H := \left\{ \frac{\partial u^i(\cdot, d)}{\partial n} - iu^i(\cdot, d) \mid d \in \Omega \right\}$$

vollständig in  $L^2(\partial D)$  ist. Dabei nutzen wir die Wohlgestellttheit des Impedanzproblems aus. Wir betrachten nun eine Folge  $v_n \in L^2(\partial D)$  mit der Eigenschaft  $\|\frac{\partial v_n}{\partial n} - iv_n - \frac{\partial u^i}{\partial n} - iu^i\|_{L^2(\partial D)} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ . Wir definieren eine Folge von Einfachschichtpotentialen  $w_n(x) := \int_{\partial D} \Phi(x, y) \psi_n(y) ds(y)$ ,  $x \in D$ , mit einer Dichte  $\psi_n$ , die Lösung der Integralgleichung  $\psi_n + K' \psi_n - iS \psi_n = 2f_n$  mit  $f_n := \frac{\partial v_n}{\partial n} - iv_n - \frac{\partial u^i}{\partial n} - iu^i$  ist. Die Eindeutigkeit des Impedanzproblems ergibt  $w_n = v_n - u$ . Die Ungleichung von Cauchy-Schwarz liefert die Abschätzung:

$$\left\| \frac{\partial^k v_n}{\partial x_j^k} - \frac{\partial^k u}{\partial x_j^k} \right\|_{\infty, \tilde{\Omega}} \leq C \left\| \frac{\partial^k \Phi(x, \cdot)}{\partial x_j^k} \right\|_{\infty, \tilde{\Omega}} \|(I + K' - iS)^{-1} f_n\|_{L^2(\partial D)}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Daraus folgt wegen  $\|f_n\|_{L^2(\partial D)} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$  und der Beschränktheit der Inversen von  $(I + K' - iS)$  in  $L^2(\partial D)$  die Behauptung des Lemmas.  $\square$

Wir können nun den Eindeutigkeitssatz formulieren und beweisen. Im Beweis wird die in Satz 2.17 gezeigte Wohlgestellttheit des direkten Streuproblems für einen schallharten offenen Bogen zur Erzeugung des Widerspruches benutzt.

**Satz 4.3** *Es seien  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  zwei Streuung verursachende schallharte Bögen derart, daß für eine feste Wellenzahl  $\kappa > 0$  die Fernfelder  $u_{1,\infty}$  und  $u_{2,\infty}$  übereinstimmen für alle Einfallrichtungen  $d$ . Dann stimmen die beiden Bögen überein, d.h., es gilt*

$$(4.4) \quad \Gamma_1 = \Gamma_2.$$

**Beweis:** Wir führen den Beweis in zwei Schritten.

1. Wir wählen  $x_0 \in \tilde{D}$ , wobei wir mit  $\tilde{D}$  die unbeschränkte Komponente von  $\mathbb{R}^2 \setminus (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$  bezeichnen. Dann betrachten wir die beiden Neumannprobleme für ausstrahlende Lösungen der Helmholtzgleichung

$$(4.5) \quad \Delta \tilde{v}_j^s + \kappa^2 \tilde{v}_j^s = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma_j, \quad j = 1, 2$$

mit den Neumannrandbedingungen

$$(4.6) \quad \frac{\partial \tilde{v}_{j,\pm}^s}{\partial n} = -\frac{\partial \Phi(\cdot, x_0)}{\partial n} \quad \text{auf } \Gamma_j, \quad j = 1, 2.$$

Unser Ziel ist es,  $\tilde{v}_1^s = \tilde{v}_2^s$  in  $\tilde{D}$  zu zeigen. Wir wählen dazu ein Gebiet  $D$  der Klasse  $C^2$ , so daß  $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$  zusammenhängend ist und  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \subset D$  sowie  $x_0 \notin \bar{D}$  gelten. Nach Lemma 4.2 gibt es eine Folge  $\{v_n\}$  aus  $V$ , so daß für  $j = 1, 2$  und  $k = 0, 1, 2$  gilt:

$$(4.7) \quad \frac{\partial^k v_n}{\partial x_j^k} \rightarrow \frac{\partial^k \Phi(\cdot, x_0)}{\partial x_j^k}, \quad n \rightarrow \infty,$$

gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von  $D$ . Daraus folgt aber für  $j = 1, 2$  unter Verwendung des Mittelwertsatzes und der Ungleichung von Cauchy-Schwarz:

$$(4.8) \quad \left\| \frac{\partial v_n}{\partial n} - \frac{\partial \Phi(\cdot, x_0)}{\partial n} \right\|_{0, \alpha, \Gamma_j} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Die Wellen  $v_n$  sind Linearkombinationen ebener Wellen. Daraus folgt, daß die zugehörigen gestreuten Wellen  $v_{n,1}^s$  und  $v_{n,2}^s$  für die schallharten Bögen  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  auf Grund des Lemmas von Rellich in  $\tilde{D}$  übereinstimmen. Wir erhalten für  $v_n^s := v_{n,1}^s = v_{n,2}^s$

$$(4.9) \quad \frac{\partial v_{n,\pm}^s}{\partial n} + \frac{\partial v_n}{\partial n} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_j, \quad j = 1, 2.$$

Aus der in Satz 2.17 bewiesenen Stabilität des Neumannproblems für einen offenen Bogen, den Randbedingungen (4.9), (4.6) und der Konvergenzaussage (4.8) folgt für  $j = 1, 2$  die Konvergenz

$$(4.10) \quad v_n^s \rightarrow \tilde{v}_j^s, \quad n \rightarrow \infty$$

gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von  $\tilde{D}$ . Daraus ergibt sich die Behauptung des ersten Schrittes.

2. Wir nehmen nun  $\Gamma_1 \neq \Gamma_2$  an und führen diese Annahme zum Widerspruch. O.B.d.A. setzen wir die Existenz eines Punktes  $\tilde{x}$  voraus mit  $\tilde{x} \in \Gamma_1$  und  $\tilde{x} \notin \Gamma_2$ . Wir wählen eine hinreichend kleine positive Konstante  $h$ , so daß für die Punktfolge

$$x_n := \tilde{x} + \frac{h}{n}n(\tilde{x}), \quad n = 1, 2, \dots$$

gilt:

$$\inf_{x \in \Gamma_2} |x_n - x| > 0.$$

Wir betrachten nun eine Folge von Neumannproblemen, die wir erhalten, indem wir beim Neumannproblem (4.5) jeweils den Quellpunkt  $x_0$  durch den Punkt  $x_n$  ersetzen. Die Aussage des ersten Schrittes ergibt  $\tilde{v}_{n,1}^s = \tilde{v}_{n,2}^s$  in  $\tilde{D}$ . Wir betrachten  $w_n^s := \tilde{v}_{n,j}^s$  als die durch den Bogen  $\Gamma_2$  gestreute Welle. Da der Punkt  $\tilde{x}$  nicht auf dem Bogen  $\Gamma_2$  liegt, erhalten wir, daß die Neumannrandwerte

$$\frac{\partial w_{n,\pm}^s}{\partial n} = - \frac{\partial \Phi(\cdot, x_n)}{\partial n}$$

auf  $\Gamma_2$  gleichmäßig beschränkt sind bezüglich der Höldernorm  $\|\cdot\|_{0,\alpha,\Gamma_2}$ . Damit erhalten wir auf Grund von Satz 2.17

$$(4.11) \quad \left| \frac{\partial w_{n,\pm}^s(\tilde{x})}{\partial n} \right| \leq C, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Wenn wir umgekehrt  $w_n^s$  als eine durch den Bogen  $\Gamma_1$  gestreute Welle betrachten, erhalten wir

$$(4.12) \quad \left| \frac{\partial w_{n,\pm}^s(\tilde{x})}{\partial n} \right| = \left| \frac{\partial \Phi(\tilde{x}, x_n)}{\partial n} \right| = \left| \frac{1}{4} H_1^{(1)}(\kappa|\tilde{x} - x_n|) \langle n(\tilde{x}), \frac{\tilde{x} - x_n}{|\tilde{x} - x_n|} \rangle \right| \longrightarrow \infty$$

für  $n \rightarrow \infty$  auf Grund der starken Singularität von  $H_1^{(1)}$  an der Stelle 0. Die Beziehungen (4.11) und (4.12) stehen aber im Widerspruch zueinander. Damit haben wir die Behauptung des Satzes gezeigt.  $\square$

Es ist nicht bekannt, ob man das Hindernis aus der Kenntnis der Fernfelder für endlich viele einfallende Wellen rekonstruieren kann. Entsprechende Resultate für das inverse Dirichletproblem bei geschlossenen Rändern, die Apriori-Informationen über die Größe des Hindernisses voraussetzen, sind auf Grund der fehlenden Monotonie der Eigenwerte des Laplace-Operators mit homogenen Neumann-Daten bezüglich des Gebietes nicht ohne weiteres zu übertragen. Auch der von Kress [20] gefundene Eindeutigkeitsbeweis für analytische Bögen im schallweichen Fall läßt sich aus diesem Grund nicht übertragen.

Bei numerischen Rechnungen in praktischen Anwendungen sind wir natürlich nur an Rekonstruktionen aus einer endlichen (möglichst geringen) Anzahl gemessener Fernfelder interessiert, um den Rechenaufwand gering zu halten.

### 4.3 Eigenschaften des Fernfeldes und des Fernfeldoperators

In diesem Abschnitt zeigen wir, daß die für geschlossene Kurven bekannten Eigenschaften der Fernfelder und des Fernfeldoperators (siehe dazu auch [7]) bei der Streuung an einem schallharten offenen Bogen erhalten bleiben. Dabei werden wir wie in Abschnitt 4.2 auf die im Kapitel 2 erzielten Resultate für das direkte Streuproblem zurückgreifen.

Unter Benutzung der Asymptotik für Hankelfunktionen und der Darstellung des Gesamtfeldes in Satz 2.16 erhalten wir für das Fernfeld der gestreuten Welle die folgende Darstellung:

$$(4.13) \quad u_\infty(\hat{x}) = \sqrt{\frac{\kappa}{8\pi}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \int_\Gamma \left\{ u_+(y) - u_-(y) \right\} \langle n(y), \hat{x} \rangle e^{-i\kappa\langle \hat{x}, y \rangle} ds(y), \quad \hat{x} \in \Omega.$$

Zunächst entnehmen wir der Fernfelddarstellung (4.13), daß der Operator  $F$  in nichtlinearer Weise von der Randkurve  $\Gamma$  abhängt. Diese Schwierigkeit werden wir später beseitigen, indem wir das inverse Streuproblem auf geeignete Weise linearisieren.

Nun wollen wir erläutern, warum das inverse Streuproblem im Gegensatz zum direkten Streuproblem inkorrekt gestellt ist.

Wir sehen dazu aus (4.13), daß das Fernfeld analytisch von der Beobachtungsrichtung  $\hat{x}$  abhängt. Daraus folgt, daß selbst kleine Störungen von  $u_\infty$  in der  $L^2(\Omega)$ -Norm zu Funktionen führen können, die keine Fernfelder mehr darstellen. Das bedeutet, daß für gemessene Fernfelddaten das inverse Streuproblem im allgemeinen nicht lösbar ist. Falls eine Lösung des inversen Problems existiert, so hängt diese nicht stetig von den Daten ab. Diese Schlechtgestelltheit des inversen Streuproblems gilt es bei der numerischen Lösung zu berücksichtigen, d.h., wir müssen Regularisierungsverfahren für eine stabile numerische Lösung anwenden.

Im folgenden wollen wir einen Vollständigkeitssatz für das Fernfeld beweisen. Dazu zeigen wir zunächst analog zum Vorgehen im Fall geschlossener Randkurven die Gültigkeit des folgenden Reziprozitätsgesetzes.

**Satz 4.4** *Für das Fernfeld bei der Streuung einfallender ebener Wellen an einem schallharten offenen Bogen gilt das Reziprozitätsgesetz:*

$$(4.14) \quad u_\infty(\hat{x}, d) = u_\infty(-d, -\hat{x}), \quad \hat{x}, d \in \Omega.$$

**Beweis:** Wir setzen zur Abkürzung

$$\chi_d(\sigma) := i\kappa \langle n(\gamma(\cos \sigma)), d \rangle e^{i\kappa \langle d, \gamma(\cos \sigma) \rangle} |\gamma'(\cos \sigma)| \sin \sigma, \quad 0 \leq \sigma \leq \pi.$$

Für das Fernfeld einer einfallenden ebenen Welle  $u^i(x, d) := e^{i\kappa \langle d, x \rangle}$  gilt

$$(4.15) \quad u_\infty(\hat{x}, d) = e^{-i\frac{\pi}{4}} \sqrt{\frac{\kappa}{8\pi}} \int_0^\pi -\frac{\chi_{-\hat{x}}(\sigma)}{i\kappa} \psi_d(\sigma) d\sigma,$$

wobei  $\psi_d$  Lösung der hypersingulären Integralgleichung

$$(T_0 + A + B)\psi_d = 2\chi_d$$

ist. Hier benutzen wir die Bezeichnung  $\psi_d$ , um die Abhängigkeit der Dichte von der Richtung  $d$  der einfallenden Welle auszudrücken.

Die Selbstadjungiertheit des Operators  $T_0 + A + B$  bezüglich des Dualsystems  $\langle C_{ung}^{1,\alpha}[0, 2\pi], C_{ung}^{1,\alpha}[0, 2\pi] \rangle$  folgt aus den Vertauschungsformeln von Poincaré-Bertrand ([37], S. 59) und der Symmetrie der Kerne von  $A$  und  $B$ . Daraus erhalten

wir die Selbstadjungiertheit von  $(T_0 + A + B)^{-1}$  und folglich:

$$\begin{aligned} \frac{e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{8\pi\kappa}}{2} \frac{1}{i} u_\infty(\hat{x}, d) &= \int_0^\pi \chi_{-\hat{x}}(\sigma) (T^{-1}\chi_d)(\sigma) d\sigma = \int_0^\pi (T^{-1}\chi_{-\hat{x}})(\sigma) \chi_d(\sigma) d\sigma \\ &= \int_0^\pi \frac{\psi_{-\hat{x}}(\sigma)}{2} \chi_d(\sigma) d\sigma = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}} \sqrt{8\pi\kappa}}{2} \frac{1}{i} u_\infty(-d, -\hat{x}). \end{aligned}$$

Damit haben wir den Satz bewiesen. □

Wir bemerken, daß wir anders als in Satz 3.13 aus [7] auf eine Anwendung des Greenschen Satzes verzichten, da diese mit Schwierigkeiten an den Endpunkten des Bogens verbunden ist.

Wir sind nun in der Lage, den für den Fall der Streuung an geschlossenen Randkurven bekannten Vollständigkeitssatz für die Fernfelder auf den Fall des offenen schallharten Bogens zu übertragen. Dazu benötigen wir die folgende Definition:

**Definition 4.5** *Eine Funktion*

$$w(x) := \int_\Omega e^{i\kappa\langle x, d \rangle} g(d) s(d), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad g \in L^2(\Omega),$$

heißt *Herglotzwellenfunktion mit Kern  $g$* .

Herglotzwellenfunktionen sind offensichtlich ganze Lösungen der Helmholtzgleichung im  $\mathbb{R}^2$ . Sie entstehen durch Überlagerung einfallender ebener Wellen.

Wir erhalten die folgende Aussage:

**Satz 4.6** *Wir bezeichnen mit  $\{d_n\}$  eine dichte Folge von Einheitsvektoren aus  $\Omega$ . Die zugehörige Menge von Fernfeldern*

$$(4.16) \quad \mathcal{F} := \{u_\infty(\cdot, d_n) \mid n = 1, 2, \dots\}$$

*ist vollständig in  $L^2(\Omega)$  genau dann, wenn es keine nichttriviale Herglotzwellenfunktion gibt, die homogene Neumannranddaten auf  $\Gamma$  besitzt.*

**Beweis:** Wir haben zu zeigen, daß aus

$$(4.17) \quad \int_\Omega u_\infty(\hat{x}, d_n) h(\hat{x}) ds(\hat{x}) = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

für  $h \in L^2(\Omega)$  das Verschwinden von  $h$  genau dann folgt, wenn keine nichttriviale Herglotzwellenfunktion existiert, die auf dem Bogen verschwindende Neumannrandwerte hat. Unter Verwendung von Satz 4.4, der Dichtheit von  $\{d_n\}$  in  $\Omega$  und der

Stetigkeit des Fernfeldes in  $d$  erhalten wir, daß (4.17) äquivalent ist zu

$$(4.18) \quad \int_{\Omega} u_{\infty}(\hat{x}, d)g(d)ds(d) = 0, \quad \hat{x} \in \Omega$$

mit  $g(d) := h(-d)$ . Die Stetigkeit des Fernfeldes in  $d$  folgt aus der Wohlgestellttheit des direkten Problems. Aus Gleichung (4.18) ergibt sich, daß das Fernfeld  $v_{\infty}$  der gestreuten Welle  $v^s$ , die wir durch Streuung der Herglotzwellenfunktion

$$v^i(x) := \int_{\Omega} e^{i\kappa\langle x, d \rangle} g(d)ds(d), \quad x \in \mathbb{R}^2$$

am Bogen  $\Gamma$  erhalten, verschwindet. Daraus folgt für die gestreute Welle  $v^s \equiv 0$  in  $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ . Die Randbedingung  $\frac{\partial v_{\pm}}{\partial n} = 0$  für  $v := v^s + v^i$  und die Eindeutigkeit des direkten Streuproblems für einen schallharten Bogen bewirken  $\frac{\partial v_{\pm}^i}{\partial n} = 0$ . Die Beziehung  $h \neq 0$  ist äquivalent damit, daß  $v^i$  nicht trivial ist (vergleiche Satz 3.15 aus [7]). Damit ist der Satz gezeigt. □

Wir geben abschließend einige Bögen an, für die die entsprechenden Mengen  $\mathcal{F}$  nicht vollständig in  $L^2(\Omega)$  sind. Nach Satz 4.6 reicht es dazu, entsprechende Herglotzwellenfunktionen zu konstruieren. Aus der Integraldarstellung der Besselfunktionen  $n$ -ter Ordnung

$$J_n(z) = \frac{i^{-n}}{\pi} \int_0^{\pi} e^{iz \cos \theta} \cos n\theta d\theta$$

erhalten wir leicht die Beziehungen

$$\int_0^{2\pi} e^{i\kappa r \cos(\theta-\phi)} \sin n\theta d\theta = 2\pi i^n J_n(\kappa r) \sin n\phi$$

und

$$\int_0^{2\pi} e^{i\kappa r \cos(\theta-\phi)} \cos n\theta d\theta = 2\pi i^n J_n(\kappa r) \cos n\phi.$$

Das bedeutet, daß die Funktionen

$$w_{1,n}(x) := J_n(\kappa r) \sin n\phi, \quad w_{2,n}(x) := J_n(\kappa r) \cos n\phi$$

für  $x = r(\cos \phi, \sin \phi)$  in Polarkoordinaten Herglotzwellenfunktionen darstellen. Daraus folgt, daß wegen  $\frac{\partial w_{1,n}}{\partial r} = \kappa J_n'(\kappa r) \sin n\phi$  und  $\frac{\partial w_{2,n}}{\partial r} = \kappa J_n'(\kappa r) \cos n\phi$  alle Kreisbögen mit Radius  $R := \kappa r$ , wobei die Zahl  $R$  Nullstelle von  $J_n'$  ist, Beispiele für solche Bögen darstellen, für die  $\mathcal{F}$  nicht vollständig in  $L^2(\Omega)$  ist. Wir überzeugen uns ebenfalls leicht davon, daß bei der Streuung an schallharten Geradenstücken die zugehörigen Mengen  $\mathcal{F}$  nicht vollständig sind.

# 5. Fréchet-Differenzierbarkeit des Fernfeldoperators für die Streuung an einem schallharten offenen Bogen

In Kapitel 6 soll ein numerisches Lösungsverfahren für das inverse Neumannproblem entwickelt werden. Wir werden dabei wegen des offenen Bogens als Randkurve ein Newtonverfahren zur Lösung der entsprechenden inkorrekt gestellten, nichtlinearen Operatorgleichung anwenden müssen, da Verfahren wie das Kirsch-Kress- und das Colton-Monk-Verfahren ein nichtleeres Inneres des zu rekonstruierenden Gebietes voraussetzen (siehe [7, 21]). Aus diesem Grund müssen wir die Fréchet-Differenzierbarkeit des Fernfeldoperators  $F$  zeigen und die genaue Form der Fréchet-Ableitung bestimmen. Wir erhalten die Werte der Fréchet-Ableitung als Fernfeldwerte zu bestimmten Neumannschen Randwertproblemen. Anschließend beschäftigen wir uns mit einer anderen effizienten numerischen Berechnung der Fréchet-Ableitung des Fernfeldoperators.

## 5.1 Die Fréchet-Differenzierbarkeit des Fernfeldoperators

Wir versuchen, die inkorrekt gestellte, nichtlineare Operatorgleichung

$$(5.1) \quad F(\Gamma) = u_\infty$$

approximativ zu lösen, wobei der Bogen  $\Gamma$  unbekannt ist und  $u_\infty$  das (gemessene) Fernfeld darstellt. Die Operatorgleichung (5.1) soll nach einer Linearisierung mit dem Newtonverfahren gelöst werden. Daraus ergibt sich die Notwendigkeit, die Fréchet-Ableitung von  $F$  bezüglich des Randes  $\Gamma$  zu bestimmen. Für das Konzept

einer Differentialrechnung in normierten Räumen verweisen wir auf [43].

Wir folgen einem neueren, auf Integralgleichungsmethoden basierenden, Beweis von Potthast [50]. Für entsprechende Ansätze mit Hilbertraummethode verweisen wir auf die Monographie [7] bzw. die Arbeiten [15, ?] von Kirsch und Hettlich. Beweise für die Fréchet-Differenzierbarkeit des Fernfeldoperators für die Streuung an einem schallweichen offenen Bogen sind in [18, ?] von Kress erbracht worden.

Der Beweis der Fréchet-Differenzierbarkeit des Operators  $F : \gamma \mapsto u_\infty$  wird in zwei Schritten durchgeführt.

In einem ersten Schritt zeigen wir die Fréchet-Differenzierbarkeit der gestreuten Welle  $u^s$  bezüglich  $\Gamma$ . Daraus wird dann auf Grund der Fernfelddarstellung die Fréchet-Differenzierbarkeit des Operators  $F$  folgen.

Wir beweisen zunächst die Fréchet-Differenzierbarkeit von  $u^s$  bezüglich des Randes. Dazu nutzen wir die Resultate aus Kapitel 2 und stellen die gestreute Welle als Doppelschichtpotential dar:

$$(5.2) \quad u^s(x) := \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} \varphi(y) ds(y), \quad \varphi \in C^{1, \alpha, *}( \Gamma ), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma.$$

Die unbekannte Dichte  $\varphi$  muß wegen der Neumannrandbedingung

$$(5.3) \quad \frac{\partial u^i}{\partial n} + \frac{\partial u^s}{\partial n} = 0$$

auf  $\Gamma_0 := \Gamma \setminus \{x_{-1}^*, x_1^*\}$  der folgenden hypersingulären Integralgleichung genügen:

$$(5.4) \quad (T\varphi)(\gamma(\cos \tau)) = -2 \frac{\partial u^i(\gamma(\cos \tau))}{\partial n} |\gamma'(\cos \tau)| \sin \tau, \quad \tau \in [0, \pi],$$

wobei wir unter Beibehaltung der Bezeichnungen aus dem zweiten Kapitel  $T := -(T_0 + A + B)$  gesetzt haben. Diese hypersinguläre Integralgleichung erster Art ist für Dichten aus dem Funktionenraum  $C^{1, \alpha, *}( \Gamma )$  nach Satz 2.13 eindeutig lösbar. Auf Grund von Satz 2.11 ist  $T$  beschränkt invertierbar von  $H_{ung}^1[0, 2\pi]$  nach  $L_{ung}^2[0, 2\pi]$ . Diese Tatsache wird beim später zu erbringenden Beweis der Fréchet-Differenzierbarkeit von  $F$  wesentlich ausgenutzt. Wir bezeichnen mit  $R$  denjenigen Operator, der zum einfallenden Feld  $u^i$  die Neumannrandwerte bildet, d.h., es sei

$$R_\gamma(u^i)(\gamma(\cos \tau)) = \frac{\partial u^i(\gamma(\cos \tau))}{\partial n} |\gamma'(\cos \tau)| \sin \tau, \quad \tau \in [0, \pi].$$

Wir bezeichnen mit  $K$  das Doppelschichtpotential in parametrisierter Form:

$$(K\varphi)(x) := \int_0^\pi \frac{\partial \Phi(x, \gamma(\cos \sigma))}{\partial n(\gamma(\cos \sigma))} \varphi(\gamma(\cos \sigma)) |\gamma'(\cos \sigma)| \sin \sigma d\sigma, \quad x \notin \Gamma.$$



Weiterhin benötigen wir den direkten Wert eines Einfachschichtpotentials in parametrisierter Form:

$$(S\varphi)(\gamma(\cos \tau)) := \int_0^\pi \Phi(\gamma(\cos \tau), \gamma(\cos \sigma)) \varphi(\gamma(\cos \sigma)) |\gamma'(\cos \sigma)| \sin \sigma d\sigma.$$

Dann gilt für die gestreute Welle die folgende Darstellung:

$$(5.5) \quad u^s = -2KT^{-1}Ru^i, \quad x \notin \Gamma.$$

Für die Fréchet-Ableitung an der Stelle  $h \in C^3[-1, 1]$  erhalten wir nach Anwendung der Kettenregel:

$$(5.6) \quad u_\gamma^{s'}(\cdot; h) = -2K_\gamma'(T^{-1}Ru^i; h) + 2KT^{-1}T_\gamma'(T^{-1}Ru^i; h) - 2KT^{-1}R_\gamma'(u^i; h),$$

falls die Operatoren  $T, K, R$  in geeigneten Räumen Fréchet-differenzierbar sind. Dabei haben wir ausgenutzt, daß die Fréchet-Ableitung der Inversen eines Fréchet-differenzierbaren Operators  $A$  die Gestalt  $-A^{-1}A'A^{-1}$  hat (vergleiche [43]).

Wir haben also die Fréchet-Differenzierbarkeit der Operatoren  $K, R$  und  $T$  zu zeigen. Dabei bereitet zunächst der hypersinguläre Integraloperator Schwierigkeiten.

Für den Operator  $T$  gilt nach Satz 2.8 die folgende Darstellung:

$$(5.7) \quad T\varphi = \frac{\partial}{\partial t} S \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \kappa^2 \langle n, S\varphi n \rangle, \quad \varphi \in C^{1,\alpha,*}(\Gamma).$$

Wir beschäftigen uns zuerst mit dem leichter zu behandelnden zweiten Anteil aus Formel (5.7). Bevor wir die entsprechende Fréchet-Ableitung berechnen, stellen wir zunächst ein dabei benötigtes Hilfsmittel zur Verfügung. Auf Grund der Gestalt der Grundlösung haben wir Integrale mit logarithmischer Singularität in der  $L^2_{ung}[0, 2\pi]$ -Norm abzuschätzen. Wir verwenden als Norm auf dem Sobolewraum  $H^p_{ung}[0, 2\pi]$ :

$$\|\varphi\|_p := \left( \sum_{m=1}^{\infty} m^{2p} |\hat{\varphi}_m|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

mit den in Kapitel 2 definierten Fourierkoeffizienten  $\hat{\varphi}_m$  für  $\varphi \in H^p_{ung}[0, 2\pi]$ . Die  $L^2_{ung}[0, 2\pi]$ -Norm ist die gewöhnliche  $L^2$ -Norm für ungerade Funktionen auf  $[0, 2\pi]$ . Wir beweisen das folgende einfache Lemma:

**Lemma 5.1** *Für den Integraloperator*

$$(A\varphi)(\tau) := \int_0^\pi \log 4(\cos \sigma - \cos \tau)^2 K(\tau, \sigma) \varphi(\sigma) d\sigma, \quad \tau \in [0, \pi],$$

*mit bezüglich beider Variablen stetigem und  $2\pi$ -periodischem sowie in  $\sigma$  und  $\tau$  ungeradem Kern  $K$  und einer Dichte  $\varphi \in L^2_{ung}[0, 2\pi]$  gilt die Abschätzung:*

$$(5.8) \quad \|A\varphi\|_{L^2_{ung}[0, 2\pi]} \leq C \|K(\cdot, \cdot)\|_\infty \|\varphi\|_{L^2_{ung}[0, 2\pi]}.$$

**Beweis:** Unter Ausnutzung der Ungeradheit von  $\varphi$  und des Kernes  $K$  erhalten wir:

$$(A\varphi)(\tau) = \int_0^{2\pi} f_\tau(\sigma)K(\tau, \sigma)\varphi(\sigma)d\sigma.$$

Die Ungleichung von Cauchy-Schwarz ergibt nach Ausnutzung der  $2\pi$ -Periodizität von  $f_\tau$ :

$$\|A\varphi\|_{L^2_{ung}[0,2\pi]} \leq C\|f_0\|_{L^2[0,2\pi]} \max_{\sigma, \tau \in [0,2\pi]} |K(\tau, \sigma)| \|\varphi\|_{L^2_{ung}[0,2\pi]}.$$

□

Es seien  $X, Y$  zwei normierte Räume. Wir bezeichnen wie üblich mit  $L(X, Y)$  den (linearen) Raum der linearen Operatoren, die den Raum  $X$  beschränkt nach  $Y$  abbilden. Nach diesen Vorbereitungen können wir nun den folgenden Satz beweisen, der sich mit der Fréchet-Differenzierbarkeit des zweiten Operators aus Formel (5.7) beschäftigt. In unserem Beweis verwenden wir eine Technik, die ähnlich ist zu der von Kress in [20] zum Nachweis der Fréchet-Differenzierbarkeit der Abbildung

$$\gamma \longmapsto \int_0^\pi \Phi(\gamma(\cos(\cdot)), \gamma(\cos \sigma))\varphi(\sigma)d\sigma$$

von  $C^2[-1, 1]$  nach  $L(L^2[0, \pi], H^1[0, \pi])$  entwickelten Technik.

Wir erhalten:

**Satz 5.2** *Die nichtlineare Abbildung*

$$\gamma \longmapsto \int_0^\pi \Phi(\gamma(\cos(\cdot)), \gamma(\cos \sigma))\langle \gamma'(\cos(\cdot)), \gamma'(\cos \sigma) \rangle \varphi(\sigma) \sin \sigma \sin(\cdot) d\sigma$$

ist Fréchet-differenzierbar von  $C^3[-1, 1]$  nach  $L(H^1_{ung}[0, 2\pi], L^2_{ung}[0, 2\pi])$ .

Die Fréchet-Ableitung an der Stelle  $\gamma$  ist gegeben durch:

$$h \longmapsto S'_\gamma(\cdot; h),$$

wobei wir mit  $S'_\gamma(\cdot; h) : H^1_{ung}[0, 2\pi] \rightarrow L^2_{ung}[0, 2\pi]$  den Integraloperator

$$S'_\gamma(\varphi; h)(\tau) := \int_0^\pi K_1(\tau, \sigma; \gamma, h) \sin \tau \sin \sigma \varphi(\sigma) d\sigma, \quad \tau \in [0, \pi],$$

mit Kern

$$\begin{aligned} K_1(\tau, \sigma; \gamma, h) := & \\ & -\langle \text{grad}_x \Phi(\gamma(\cos \tau), \gamma(\cos \sigma)), h(\cos \sigma) - h(\cos \tau) \rangle \langle \gamma'(\cos \sigma), \gamma'(\cos \tau) \rangle \\ & + \Phi(\gamma(\cos \tau), \gamma(\cos \sigma)) \left\{ \langle \gamma'(\cos \tau), h'(\cos \sigma) \rangle + \langle \gamma'(\cos \sigma), h'(\cos \tau) \rangle \right\} \end{aligned}$$

für  $\sigma \neq \tau$  bezeichnen.

**Beweis:** Wir betrachten einen festen Bogen  $\Gamma$  der Klasse  $C^3$ . Sei  $\gamma$  die entsprechende Parametrisierung. Weiterhin sei ein beliebiger Bogen der Klasse  $C^3$  mit Parametrisierung  $h$  gegeben. Falls nun  $\|h\|_{C^3[-1,1]}$  hinreichend klein ist, ist der Bogen mit Parametrisierung  $\gamma + h$  ebenfalls aus der Klasse  $C^3$ . Wir haben den Ausdruck

$$(5.9) \quad d(\gamma, h; \varphi)(\tau) := S_{\gamma+h}(\varphi)(\tau) - S_{\gamma}(\varphi)(\tau) - S_{\gamma}'(\varphi; h)(\tau)$$

gleichmäßig in  $h$  abzuschätzen. Die Taylorsche Formel, angewandt auf die glatte Funktion  $\Lambda : \mathbb{R}^2 \setminus 0 \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\Lambda(x) := \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\kappa|x|)$ , ergibt für beliebiges  $\xi$  mit der Eigenschaft  $0 \notin \{x + \lambda\xi \mid \lambda \in [0, 1]\}$

$$(5.10) \quad \Lambda(x + \xi) - \Lambda(x) - \langle \text{grad } \Lambda(x), \xi \rangle = \int_0^1 (1 - \lambda) \langle \Lambda''(x + \lambda\xi) \xi, \xi \rangle d\lambda,$$

wobei  $\Lambda''$  die Hessesche von  $\Lambda$  bezeichnet. Wir erhalten für diese Matrix die Darstellung

$$(5.11) \quad \langle \Lambda''(x) \xi, \xi \rangle = \frac{\psi_1(x) \langle x, \xi \rangle^2}{|x|^4} + \frac{\psi_2(x) |\xi|^2}{|x|^2}$$

mit

$$\psi_1(x) := \frac{i}{4} \left\{ \kappa^2 |x|^2 H_0^{(1)''}(\kappa|x|) - \kappa |x| H_0^{(1)'}(\kappa|x|) \right\}$$

und

$$\psi_2(x) := \frac{i}{4} \kappa |x| H_0^{(1)'}(\kappa|x|).$$

Für  $x := \gamma(\cos \tau) - \gamma(\cos \sigma)$  und  $\xi := h(\cos \tau) - h(\cos \sigma)$  sowie  $\sigma \neq \tau$  ergibt die Beziehung (5.10) für hinreichend kleines  $h$ :

$$\begin{aligned} & \Phi(\gamma(\cos \tau) + h(\cos \tau), \gamma(\cos \sigma) + h(\cos \sigma)) - \Phi(\gamma(\cos \tau), \gamma(\cos \sigma)) = \\ & \quad \langle \text{grad}_x \Phi(\gamma(\cos \tau), \gamma(\cos \sigma)), h(\cos \sigma) - h(\cos \tau) \rangle + \\ & \quad \int_0^1 (1 - \lambda) \langle H''(\tau, \sigma, \gamma + \lambda h)(h(\cos \sigma) - h(\cos \tau)), (h(\cos \sigma) - h(\cos \tau)) \rangle d\lambda. \end{aligned}$$

Dabei haben wir mit  $H''$  die Hessesche der Grundlösung  $\Phi$  bezeichnet, d.h. es gilt:

$$H''(\tau, \sigma; \gamma + \lambda h) := \Lambda''(\gamma(\cos \sigma) - \gamma(\cos \tau) + \lambda(h(\cos \sigma) - h(\cos \tau))), \quad \lambda \in [0, 1].$$

Unter Verwendung dieser Beziehung bekommen wir unmittelbar die folgende Darstellung der abzuschätzenden Differenz (5.9) für  $\tau \in [0, \pi]$ :

$$d(\gamma, h; \varphi)(\tau) = \int_0^\pi \Phi(\gamma(\cos \tau), \gamma(\cos \sigma)) \langle h'(\cos \tau), h'(\cos \sigma) \rangle \sin \tau \sin \sigma \varphi(\sigma) d\sigma$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^\pi \langle \text{grad}_x \Phi(\gamma(\cos \tau), \gamma(\cos \sigma)), \tilde{h}(\sigma) - \tilde{h}(\tau) \rangle \sin \sigma \sin \tau \times \\
 & \left\{ \langle \gamma'(\cos \tau), h'(\cos \sigma) \rangle + \langle \gamma'(\cos \sigma), h'(\cos \tau) \rangle + \langle h'(\cos \sigma), h'(\cos \tau) \rangle \right\} \varphi(\sigma) d\sigma \\
 & + \int_0^\pi \left( \int_0^1 (1 - \lambda) \langle H''(\tau, \sigma, \gamma + \lambda h)(\tilde{h}(\sigma) - \tilde{h}(\tau)), (\tilde{h}(\sigma) - \tilde{h}(\tau)) \rangle d\lambda \right) \varphi(\sigma) \tilde{\gamma}(\tau, \sigma) d\sigma
 \end{aligned}$$

mit  $\tilde{h}(\tau) := h(\cos \tau)$  und  $\tilde{\gamma}(\tau, \sigma) := |\gamma'(\cos \sigma)| |\gamma'(\cos \tau)| \sin \sigma \sin \tau$ .

Wir schätzen nun die drei Summanden von  $d(\gamma, h; \varphi)$  einzeln ab. Zur Abkürzung verwenden wir für die drei auftretenden Integraloperatoren die Bezeichnungen  $A_1, A_2$  und  $A_3$ .

1. Die Grundlösung  $\Phi$  hat eine logarithmische Singularität. Für eine Untersuchung von  $A_1$  nutzen wir die folgende Aufspaltung:

$$\begin{aligned}
 (A_1 \varphi)(\tau) & = \int_0^\pi g_\tau(\sigma) \langle h'(\cos \sigma), h'(\cos \tau) \rangle \sin \sigma \sin \tau \varphi(\sigma) d\sigma \\
 & + \int_0^\pi \left\{ \Phi(\gamma(\cos \tau), \gamma(\cos \sigma)) - g_\tau(\sigma) \right\} \langle h'(\cos \sigma), h'(\cos \tau) \rangle \sin \sigma \sin \tau \varphi(\sigma) d\sigma
 \end{aligned}$$

mit  $g_\tau(\sigma) := \frac{1}{2\pi} \log 4(\cos \sigma - \cos \tau)^2$ ,  $\sigma \neq \tau$ . Wir beschränken uns auf eine Abschätzung des ersten Integrals, da der Kern des zweiten Integrals zweimal differenzierbar ist. Das folgt aus der Reihenentwicklung der Hankelfunktionen und den Taylorreihenentwicklungen der Funktionen  $\gamma$  und  $h$ . Nach Anwenden des vorbereitenden Lemmas 5.1 auf den in  $\sigma$  und  $\tau$  ungeraden Kern  $K(\tau, \sigma) := \langle h'(\cos \sigma), h'(\cos \tau) \rangle \sin \sigma \sin \tau$  erhalten wir die Abschätzung:

$$(5.12) \quad \|A_1 \varphi\|_{L_{ung}^2[0, 2\pi]} \leq C \|h\|_{C^3[-1, 1]}^2 \|\varphi\|_1.$$

Das ist die gesuchte Abschätzung für die  $L_{ung}^2[0, 2\pi]$ -Norm des Integraloperators  $A_1$ .

2. Der Kern des Operators  $A_2$  hat die Gestalt

$$H_0^{(1)'}(\kappa |\gamma(\cos \sigma) - \gamma(\cos \tau)|) \frac{\langle \gamma(\cos \sigma) - \gamma(\cos \tau), h(\cos \sigma) - h(\cos \tau) \rangle}{|\gamma(\cos \sigma) - \gamma(\cos \tau)|} k(\tau, \sigma)$$

mit in beiden Variablen zweimal differenzierbarem Kern  $k$  und

$$\max_{\sigma, \tau \in [0, \pi]} |k(\cdot, \cdot)| \leq C \|h\|_{C^3[-1, 1]}.$$

Unter Ausnutzung der Gestalt der Hankelfunktionen und Taylorreihenentwicklung von  $\gamma$  und  $h$  können wir zeigen, daß der Kern insgesamt stetig auf die Diagonale  $[0, \pi] \times [0, \pi]$  fortsetzbar ist. Nach Anwendung der Ungleichung von Cauchy-Schwarz erhalten wir:

$$(5.13) \quad \|A_2 \varphi\|_{L_{ung}^2[0, 2\pi]} \leq C \|h\|_{C^3[-1, 1]}^2 \|\varphi\|_{L_{ung}^2[0, 2\pi]} \leq C \|h\|_{C^3[-1, 1]}^2 \|\varphi\|_1.$$

3. Wir untersuchen abschließend den Kern

$$k(\tau, \sigma; \gamma, h) := \langle H''(\tau, \sigma, \gamma)(h(\cos \sigma) - h(\cos \tau)), h(\cos \sigma) - h(\cos \tau) \rangle$$

des Integraloperators  $A_3$ .

Unter Benutzung der Darstellung (5.11) erhalten wir die folgende Zerlegung für den Kern  $k$ :

$$k(\tau, \sigma; \gamma, h) := \frac{i}{4} M_1(\tau, \sigma; \gamma) N_1(\tau, \sigma; \gamma, h) + \frac{i}{4} M_2(\tau, \sigma; \gamma) N_2(\tau, \sigma; \gamma, h)$$

mit

$$M_1(\tau, \sigma; \gamma) := \kappa^2 |\gamma(\cos \sigma) - \gamma(\cos \tau)|^2 H_0^{(1)''}(\kappa |\gamma(\cos \sigma) - \gamma(\cos \tau)|) - \kappa |\gamma(\cos \sigma) - \gamma(\cos \tau)| H_0^{(1)'}(\kappa |\gamma(\cos \sigma) - \gamma(\cos \tau)|),$$

$$M_2(\tau, \sigma; \gamma) := \kappa |\gamma(\cos \sigma) - \gamma(\cos \tau)| H_0^{(1)'}(\kappa |\gamma(\cos \sigma) - \gamma(\cos \tau)|),$$

$$N_1(\tau, \sigma; \gamma, h) := \frac{\langle \gamma(\cos \sigma) - \gamma(\cos \tau), h(\cos \sigma) - h(\cos \tau) \rangle^2}{|\gamma(\cos \sigma) - \gamma(\cos \tau)|^4},$$

$$N_2(\tau, \sigma; \gamma, h) := \frac{\langle h(\cos \sigma) - h(\cos \tau), h(\cos \sigma) - h(\cos \tau) \rangle}{|\gamma(\cos \sigma) - \gamma(\cos \tau)|^2}$$

für  $\sigma \neq \tau$ . Wir erkennen, daß der Kern  $k$  stetig auf  $[0, \pi] \times [0, \pi]$  fortsetzbar ist und daß gilt:

$$\|N_i(\cdot, \cdot)\|_\infty \leq C \|h\|_{C^3[-1,1]}^2, \quad i = 1, 2.$$

Mit Hilfe der Ungleichung von Cauchy-Schwarz erhalten wir:

$$(5.14) \quad \|A_2 \varphi\|_{L_{ung}^2[0, 2\pi]} \leq C \|h\|_{C^3[-1,1]}^2 \|\varphi\|_{L_{ung}^2[0, 2\pi]} \leq C \|h\|_{C^3[-1,1]}^2 \|\varphi\|_1.$$

Insgesamt erhalten wir aus (5.12), (5.13) und (5.14) die gewünschte Abschätzung:

$$(5.15) \quad \|S_{\gamma+h}(\varphi) - S_\gamma(\varphi) - S'_\gamma(\varphi; h)\|_{L_{ung}^2[0, 2\pi]} \leq C \|h\|_{C^3[-1,1]}^2 \|\varphi\|_1$$

für alle hinreichend kleinen  $h \in C^3[-1, 1]$  und einer Konstanten  $C$ . Abschließend sehen wir, daß der Operator  $S'_\gamma(\varphi; \cdot)$  im zweiten Argument linear ist. Der Operator  $S'_\gamma(\cdot; h)$  hat eine logarithmische Singularität, so daß auf Grund von Lemma 5.1  $S'_\gamma(\cdot; h) \in L(H_{ung}^1[0, 2\pi], L_{ung}^2[0, 2\pi])$  gilt. Damit ist dann der Satz gezeigt.  $\square$

Wir bemerken, daß wir die Fréchet-Ableitung  $S'_\gamma$  gerade dadurch erhalten, daß wir den Kern von  $S$  differenzieren.

Wir beschäftigen uns nun mit der Fréchet-Differenzierbarkeit des stark singulären Anteils des Operators  $T$ . Dabei wird im Beweis des folgenden Satzes eine ähnliche Technik wie im Beweis von Satz 5.2 angewandt, wobei allerdings hier an Stelle der logarithmischen Singularität eine starke Singularität auftritt, deren geeignete Behandlung mehr Sorgfalt erfordert. Wir beweisen zunächst ein vorbereitendes Lemma:

**Lemma 5.3** *Für den Integraloperator*

$$(A\varphi)(\tau) := \int_0^\pi \frac{\sin \tau}{\cos \sigma - \cos \tau} K(\tau) \varphi'(\sigma) d\sigma, \quad \tau \in [0, \pi],$$

mit stetigem, geradem,  $2\pi$ -periodischem Kern  $K$  und einer Dichte  $\varphi \in H_{ung}^1[0, 2\pi]$  gilt die Abschätzung:

$$(5.16) \quad \|A\varphi\|_{L_{ung}^2[0, 2\pi]} \leq C \|K\|_\infty \|\varphi\|_1.$$

**Beweis:** Unter Ausnutzung der Geradheit von  $\varphi'$  erhalten wir:

$$(A\varphi)(\tau) = \int_0^{2\pi} \cot \frac{\sigma - \tau}{2} K(\tau) \varphi'(\sigma) d\sigma = -2\pi K(\tau) (T_0\varphi)(\tau).$$

Durch Verwendung der Abbildungseigenschaften des Operators  $T_0$  in Sobolew-räumen (siehe Satz 2.11) bekommen wir die Abschätzung:

$$\|A\varphi\|_{L_{ung}^2[0, 2\pi]} \leq C \|K\|_\infty \|\varphi\|_1.$$

Damit haben wir die Aussage des Lemmas bewiesen. □

Wir sind nun in der Lage, den folgenden Satz zu beweisen:

**Satz 5.4** *Die nichtlineare Abbildung*

$$\gamma \longmapsto \int_0^\pi \langle \text{grad}_x \Phi(\gamma(\cos(\cdot)), \gamma(\cos \sigma)), \gamma'(\cos(\cdot)) \rangle \sin(\cdot) \varphi'(\sigma) d\sigma$$

ist Fréchet-differenzierbar von  $C^3[-1, 1]$  nach  $L(H_{ung}^1[0, 2\pi], L_{ung}^2[0, 2\pi])$ . Die Fréchet-Ableitung an der Stelle  $\gamma$  ist gegeben durch

$$h \longmapsto \tilde{T}'_\gamma(\cdot; h),$$

wobei wir mit  $\tilde{T}'_\gamma(\varphi; h) : H_{ung}^1[0, 2\pi] \rightarrow L_{ung}^2[0, 2\pi]$  den Integraloperator

$$\tilde{T}'_\gamma(\varphi; h)(\tau) := \int_0^\pi K_2(\tau, \sigma; \gamma, h) \sin \tau \varphi'(\sigma) d\sigma, \quad \tau \in [0, \pi]$$

mit Kern

$$K_2(\tau, \sigma; \gamma, h) := \langle \text{grad}_x \Phi(\gamma(\cos \sigma), \gamma(\cos \tau)), h'(\cos \tau) \rangle \\ - \langle \text{grad}_x \langle \text{grad}_x \Phi(\gamma(\cos \sigma), \gamma(\cos \tau)), h(\cos \sigma) - h(\cos \tau) \rangle, \gamma'(\cos \tau) \rangle$$

für  $\sigma \neq \tau$  bezeichnen.

**Beweis:** Wir haben für in der  $C^3[-1, 1]$ -Norm hinreichend kleines  $h$  den Ausdruck

$$(5.17) \quad \alpha(\tau; \gamma, h) := (\tilde{T}_{\gamma+h}\varphi)(\tau) - (\tilde{T}_\gamma\varphi)(\tau) - (\tilde{T}'_\gamma\varphi)(\tau)$$

gleichmäßig in  $h$  abzuschätzen. Dabei verwenden wir die Bezeichnung  $\tilde{T}\varphi := \frac{\partial}{\partial t} S \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ . Unter Verwendung der Taylorschen Formel erhalten wir für in der  $C^3[-1, 1]$ -Norm hinreichend kleines  $h$ :

$$(5.18) \quad \alpha(\tau; \gamma, h) = \int_0^\pi \left\{ - \langle \text{grad}_x \langle \text{grad}_x \Phi(\gamma(\cos \sigma), \gamma(\cos \tau)), \tilde{h}(\sigma) - \tilde{h}(\tau) \rangle, h'(\cos \sigma) \rangle \right. \\ \left. - \int_0^1 (1 - \lambda) \langle \tilde{H}''(\tau, \sigma, \gamma + \lambda h), \gamma'(\cos \tau) + h'(\cos \tau) \rangle d\lambda \right\} \sin \tau \varphi'(\sigma) d\sigma,$$

wobei wir mit  $\tilde{H}''(\tau, \sigma, \gamma + \lambda h)$  den Vektor mit den Komponenten

$$\tilde{H}''(\tau, \sigma, \gamma + \lambda h)_i := \left\langle \frac{\partial \Lambda''}{\partial x_i} \left( \gamma(\cos \sigma) - \gamma(\cos \tau) + \lambda(h(\cos \sigma) - h(\cos \tau)) \right), \tilde{h}(\sigma) - \tilde{h}(\tau), \tilde{h}(\sigma) - \tilde{h}(\tau) \right\rangle$$

für  $i = 1, 2$  bezeichnen.  $\Lambda''$  ist hier die Hessesche der in Satz 5.2 definierten Funktion  $\Lambda$ .

Die zwei Summanden aus (5.18) werden mit  $A_1$  und  $A_2$  bezeichnet. Wir schätzen die beiden Summanden einzeln ab.

1. Eine Berechnung des Kernes von  $A_1$  ergibt:

$$(5.19) \quad \langle \text{grad}_x \langle \text{grad}_x \Phi(\gamma(\cos \sigma), \gamma(\cos \tau)), h(\cos \sigma) - h(\cos \tau) \rangle, h'(\cos \sigma) \rangle \\ = \frac{i}{4} \kappa^2 H_0^{(1)''}(\kappa |\gamma(\cos \sigma) - \gamma(\cos \tau)|) \frac{\langle \gamma(\cos \sigma) - \gamma(\cos \tau), h(\cos \sigma) - h(\cos \tau) \rangle}{|\gamma(\cos \sigma) - \gamma(\cos \tau)|^2} \\ \times \langle \gamma(\cos \sigma) - \gamma(\cos \tau), h'(\cos \tau) \rangle - \frac{i}{4} \kappa H_0^{(1)'}(\kappa |\gamma(\cos \sigma) - \gamma(\cos \tau)|) \\ \times \frac{\langle h'(\cos \tau), h(\cos \sigma) - h(\cos \tau) \rangle}{|\gamma(\cos \sigma) - \gamma(\cos \tau)|} - \frac{i}{4} \kappa H_0^{(1)'}(\kappa |\gamma(\cos \sigma) - \gamma(\cos \tau)|) \\ \times \frac{\langle \gamma(\cos \sigma) - \gamma(\cos \tau), h(\cos \sigma) - h(\cos \tau) \rangle \langle \gamma(\cos \sigma) - \gamma(\cos \tau), h'(\cos \tau) \rangle}{|\gamma(\cos \sigma) - \gamma(\cos \tau)|^3}.$$

Alle drei Summanden aus (5.19) enthalten eine starke Singularität. Die Grundidee des weiteren Vorgehens besteht nun darin, geeignete Singularitäten der Art

$$\frac{f(h)(\tau) \sin \tau}{\cos \sigma - \cos \tau}$$

mit einer hinreichend glatten Funktion  $f$  abzuspalten und Lemma 5.3 auszunutzen. Wir zeigen die Einzelheiten am Beispiel der Abschätzung des ersten Summanden des Kernes (5.19). Dieser Summand wird mit  $\tilde{T}_1\varphi$  bezeichnet. Wir setzen dazu im folgenden:

$$(\tilde{T}_{0,1}\varphi)(\tau) := \frac{\langle \gamma'(\cos \tau), h'(\cos \tau) \rangle^2}{|\gamma'(\cos \tau)|^4} \int_0^\pi \frac{\sin \tau}{\cos \sigma - \cos \tau} \varphi'(\sigma) d\sigma, \quad \tau \in [0, \pi].$$

Damit können wir schreiben:

$$(\tilde{T}_1\varphi)(\tau) = (\tilde{T}_{0,1}\varphi)(\tau) + \int_0^\pi k(\tau, \sigma) \sin \tau \varphi'(\sigma) d\sigma$$

mit

$$\begin{aligned} k(\tau, \sigma) &:= \frac{i}{4} \kappa^2 H_0^{(1)''}(\kappa |\gamma(\cos \sigma) - \gamma(\cos \tau)|) \\ &\times \frac{\langle \gamma(\cos \sigma) - \gamma(\cos \tau), h(\cos \sigma) - h(\cos \tau) \rangle \langle \gamma(\cos \sigma) - \gamma(\cos \tau), h'(\cos \tau) \rangle}{|\gamma(\cos \sigma) - \gamma(\cos \tau)|^2} \\ &\quad - \frac{\langle \gamma'(\cos \tau), h'(\cos \tau) \rangle^2}{2\pi |\gamma'(\cos \tau)|^4} \frac{1}{\cos \tau - \cos \sigma} \end{aligned}$$

für  $\sigma \neq \tau$ . Durch Taylorreihenentwicklung der Störungsfunktion  $h$  und der Parametrisierungsfunktion  $\gamma$  sehen wir, daß der Kern  $k(\cdot, \cdot)$  stetig auf  $[0, \pi] \times [0, \pi]$  fortsetzbar ist und

$$\|k(\cdot, \cdot)\|_\infty \leq C \|h\|_{C^3[-1,1]}^2$$

gilt. Unter Verwendung der Ungleichung von Cauchy-Schwarz und von Lemma 5.3 erhalten wir:

$$(5.20) \quad \|T_1\varphi\|_{L^2_{\text{ang}}[0,2\pi]} \leq C \|h\|_{C^3[-1,1]}^2 \|\varphi\|_1.$$

2. Wir untersuchen nun das singuläre Verhalten des Kernes

$$(5.21) \quad \langle \tilde{H}''(\tau, \sigma, \gamma + \lambda h), \gamma'(\cos \tau) + h'(\cos \tau) \rangle \sin \tau.$$

Unter Beibehaltung der Bezeichnungen aus Satz 5.2 erhalten wir

$$\begin{aligned} (5.22) \quad \text{grad}_x \langle \Lambda''(x) \xi, \xi \rangle &= \text{grad } \psi_1(x) \frac{\langle x, \xi \rangle^2}{|x|^4} + \psi_1(x) \frac{2\langle x, \xi \rangle}{|x|^4} \xi - 4\psi_1(x) \frac{\langle x, \xi \rangle^2}{|x|^6} x \\ &\quad + \text{grad } \psi_2(x) \frac{|\xi|^2}{|x|^2} - 2\psi_2(x) \frac{|\xi|^2}{|x|^4} x. \end{aligned}$$



Aus der Gleichung (5.22) und der Gestalt der  $\psi_i$  sehen wir, daß der Kern (5.21) nur starke Singularitäten besitzt. Nach der Abspaltung von Faktoren der Gestalt  $(f(h)(\tau) \sin \tau)/(\cos \sigma - \cos \tau)$  mit  $\|f(h)\|_\infty \leq C \|h\|_{C^3[-1,1]}^2$  können wir wie im ersten Schritt argumentieren. Als Zusammenfassung des ersten und zweiten Schrittes erhalten wir die gewünschte Abschätzung:

$$(5.23) \quad \|\tilde{T}_{\gamma+h}(\varphi) - \tilde{T}_\gamma(\varphi) - T'_\gamma(\varphi; h)\|_{L^2_{ung}[0,2\pi]} \leq C \|h\|_{C^3[-1,1]}^2 \|\varphi\|_1$$

für alle hinreichend kleinen  $h \in C^3[-1, 1]$  und einer Konstanten  $C$ .

Abschließend überzeugen wir uns davon, daß  $\tilde{T}'_\gamma(\varphi; \cdot)$  linear in  $h$  ist. Da der Kern von  $\tilde{T}'_\gamma$  nur logarithmische Singularitäten besitzt, erhalten wir für festes  $h$  die Beziehung  $\tilde{T}'_\gamma(\cdot; h) \in L(H^1_{ung}[0, 2\pi], L^2_{ung}[0, 2\pi])$ . Damit ist die Behauptung des Satzes gezeigt.  $\square$

Wir sehen, daß wir wieder die Fréchet-Ableitung des hypersingulären Anteils von  $T$  gerade dadurch erhalten, daß wir den Kern differenzieren.

Für einen Nachweis der Fréchet-Differenzierbarkeit der gestreuten Welle  $u^s$  haben wir noch die Fréchet-Differenzierbarkeit der Operatoren  $K$  und  $R$  zu zeigen. Wir beschäftigen uns zunächst mit dem Operator  $K$ . Im folgenden verwenden wir die abkürzende Schreibweise  $\tilde{n}(\eta(\tau)) := (\eta'_2(\tau), -\eta'_1(\tau))$ .

Wir erhalten für die Fréchet-Differenzierbarkeit des Operators  $K$  den folgenden Satz:

**Satz 5.5** *Es sei  $D$  ein Gebiet aus dem  $\mathbb{R}^2$  mit  $\bar{D} \cap \Gamma = \emptyset$  gegeben. Dann ist die nichtlineare Abbildung*

$$\gamma \longmapsto \int_0^\pi \frac{\partial \Phi(x, \gamma(\cos \sigma))}{\partial n(\gamma(\cos \sigma))} \sin \sigma \varphi(\sigma) |\gamma'(\cos \sigma)| d\sigma$$

Fréchet-differenzierbar von  $C^3[-1, 1]$  nach  $L(H^1_{ung}[0, 2\pi], C^1(D))$ . Die Ableitung an der Stelle  $\gamma$  ist gegeben durch

$$h \mapsto K'_\gamma(\cdot; h),$$

wobei wir mit  $K'_\gamma(\cdot; h) : H^1_{ung}[0, 2\pi] \rightarrow C^1(D)$  den Integraloperator

$$\begin{aligned} K'_\gamma(\varphi; h)(x) = & - \int_0^\pi \langle \text{grad}_x \Phi(x, \gamma(\cos \sigma)), \tilde{n}(h(\cos \sigma)) \rangle \sin \sigma \varphi(\sigma) d\sigma + \\ & + \int_0^\pi \langle \text{grad}_x \langle \text{grad}_x \Phi(x, \gamma(\cos \sigma)), h(\cos \sigma) \rangle, \tilde{n}(\gamma(\cos \sigma)) \rangle \sin \sigma \varphi(\sigma) d\sigma \end{aligned}$$

für  $x \in D$  bezeichnen.

**Beweis:** Wir gehen wie im Beweis der letzten beiden Sätze vor. Für  $x \notin \Gamma$  ist der Kern des parametrisierten Doppelschichtpotentials nicht singulär, so daß wir hinreichend oft differenzieren können, um unter Verwendung der Taylorschen Formel die Abschätzung :

$$\|K_{\gamma+h}(\varphi) - K_\gamma(\varphi) - K'_\gamma(\varphi; h)\|_{C^1(D)} \leq C \|h\|_{C^3[-1,1]}^2 \|\varphi\|_1$$

zu erhalten. Damit haben wir die Aussage des Satzes bewiesen.  $\square$

Wir untersuchen abschließend die Fréchet-Differenzierbarkeit des Operators  $R$ , der die Neumannrandwerte des einfallenden Feldes bildet. Unter Verwendung der Techniken, die beim Beweis der letzten Sätze angewandt wurden, können wir zeigen, daß die nichtlineare Abbildung

$$\gamma \longmapsto R_\gamma$$

Fréchet-differenzierbar ist mit einer Ableitung  $h \mapsto R'_\gamma(\cdot, h)$  an der Stelle  $\gamma$ , die durch

$$\begin{aligned} R'_\gamma(u^i; h)(\tau) &:= \langle \tilde{n}(h(\cos \tau)), \text{grad}_x u^i(\gamma(\cos \tau)) \rangle \sin \tau \\ &+ \langle \tilde{n}(\gamma(\cos \tau)), \text{grad}_x \langle \text{grad}_x u^i(\gamma(\cos \tau)), h(\cos \tau) \rangle \rangle \sin \tau, \quad \tau \in [0, \pi] \end{aligned}$$

gegeben ist.

Wir haben nun alle Vorarbeiten geleistet, um die Fréchet-Differenzierbarkeit des Fernfeldoperators  $F$  zu beweisen. Es gilt das folgende Hauptresultat dieses Abschnittes:

**Satz 5.6** *Die nichtlineare Abbildung*

$$F : \gamma \longmapsto u_\infty$$

*ist Fréchet-differenzierbar von  $C^3[-1, 1]$  nach  $L^2(\Omega)$ .*

**Beweis:** Aus den Sätzen Sätze 5.2, 5.4, 5.5 sowie der Gleichung (5.6) erhalten wir die Existenz einer Konstanten  $C$  mit

$$(5.24) \quad \|u_{\gamma+h}^s - u_\gamma^s - u_\gamma^{s'}(\cdot; h)\|_{C^1(D)} \leq C \|h\|_{C^3[-1,1]}^2$$

für in der  $C^3[-1, 1]$ -Norm hinreichend kleines  $h$ . Aus dem Greenschen Darstellungssatz entnehmen wir die folgende Darstellung des Fernfeldes für hinreichend großes  $R$ :

$$u_\infty(\hat{x}) = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{8\pi\kappa}} \int_{\Omega_R} \left\{ u^s(y) \frac{\partial e^{-i\kappa\langle \hat{x}, y \rangle}}{\partial n(y)} - \frac{\partial u^s(y)}{\partial n} e^{-i\kappa\langle \hat{x}, y \rangle} \right\} ds(y), \quad \hat{x} \in \Omega.$$

Mit Hilfe der Ungleichung von Cauchy-Schwarz erhalten wir dann:

$$(5.25) \quad \|u_{\infty, \gamma+h} - u_{\infty, \gamma} - u'_{\infty, \gamma}(\cdot, h)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|h\|_{C^3[-1,1]}^2$$

für in der  $C^3[-1,1]$ -Norm hinreichend kleines  $h$ . Damit ist dann die Fréchet-Differenzierbarkeit des Fernfeldoperators  $F$  gezeigt.  $\square$

Der Satz 5.6 eröffnet prinzipiell die Möglichkeit, Newtonverfahren zur Lösung der inkorrekt gestellten, nichtlinearen Operatorgleichung  $F(\Gamma) = u_{\infty}$  anzuwenden.

## 5.2 Charakterisierung der Fréchet-Ableitung des Fernfeldoperators

Für die numerische Behandlung des inversen Streuproblems wird es nötig sein, den Operator  $F'_{\gamma}$  an einer Stelle  $h$  leicht auswerten zu können. Für eine effiziente Berechnung der Fréchet-Ableitung gibt es zwei prinzipielle Möglichkeiten, die wir in diesem und dem nachfolgenden Abschnitt jeweils diskutieren.

In diesem Abschnitt werden wir, Kirsch [15] folgend, versuchen, die Berechnung der Fréchet-Ableitung an einer festen Stelle  $h$  auf die Berechnung eines geeigneten Neumannproblems für die Helmholtzgleichung zurückzuführen. Heuristisch erhalten wir dabei die Neumannrandwerte, indem wir die Normalableitung des totalen Feldes  $\frac{\partial u}{\partial n}$  nach dem Rand, d.h. nach  $\gamma$ , Fréchet-ableiten.

Diese Charakterisierung der Fréchet-Ableitung ist nicht nur unter dem Aspekt der Berechenbarkeit der Ableitung von Interesse. Es ist zu erwarten, daß sie dazu verwendet werden kann, Aussagen über die Injektivität von  $F'_{\gamma}$  zu erzielen (vergleiche [18]). Damit können wir Dichtheitsätze für den Wertebereich von  $F'_{\gamma}$  beweisen (siehe dazu [23] für den Fall eines schallweichen Hindernisses), die wiederum für eine theoretische Rechtfertigung einer Tichonowregularisierung von Gleichung (6.2) benötigt werden.

Für die Fréchet-Ableitung nach dem Rand führen wir das Symbol  $\frac{\partial}{\partial \gamma}$  ein. Wir verwenden für die Fréchet-Ableitung des hypersingulären Integraloperator die Aufspaltung

$$T'_{\gamma} := \tilde{T}'_{\gamma} + S'_{\gamma},$$

wobei  $\tilde{T}'_{\gamma}$  für die Fréchet-Ableitung des stark singulären Anteils steht und  $S'_{\gamma}$  die Ableitung des schwachsingulären Anteils bezeichnet.

Wir beschreiben die Berechnung der Fréchet-Ableitung  $F'_{\gamma}$  als Lösung eines Randwertproblems durch den folgenden Satz:

**Satz 5.7** Die Fréchet-Ableitung  $F'_\gamma$  an der Stelle  $h$  erhalten wir als Fernfeld  $v_\infty$  einer ausstrahlenden Lösung  $v \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma) \cap C(\overline{\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma})$  der Helmholtzgleichung

$$\Delta v + \kappa^2 v = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$$

mit den Neumannrandwerten

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\pm(\gamma(\cos \tau))}{\partial n} &:= -\langle n(\gamma(\cos \tau)), \text{grad}_x \langle \text{grad}_x u_\pm(\gamma(\cos \tau)), h(\cos \tau) \rangle \rangle \\ &\quad - \langle \frac{\partial}{\partial \gamma} n(\gamma(\cos \tau)), \text{grad}_x u_\pm(\gamma(\cos \tau)) \rangle, \quad \tau \in (0, \pi), \end{aligned}$$

mit der Eigenschaft, daß  $v - v_0$  die Regularitätseigenschaften des Neumannproblems zum Bogen erfüllt. Dabei bezeichnen wir mit  $v_0(x)$  für  $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$  die Funktion:

$$\begin{aligned} v_0(x) &:= \int_0^\pi -\langle \text{grad}_x \Phi(x, \tilde{\gamma}(\sigma)), \tilde{h}(\sigma) \rangle \{u_+(\tilde{\gamma}(\sigma)) - u_-(\tilde{\gamma}(\sigma))\} \sin \sigma d\sigma \\ &\quad + \int_0^\pi \langle \text{grad}_x \langle \text{grad}_x \Phi(x, \tilde{\gamma}(\sigma)), \tilde{h}(\sigma) \rangle, n(\tilde{\gamma}(\sigma)) \rangle \{u_+(\tilde{\gamma}(\sigma)) - u_-(\tilde{\gamma}(\sigma))\} \sin \sigma d\sigma. \end{aligned}$$

Wir bezeichnen in den obigen Ausdrücken das totale Feld mit  $u := u^i + u^s$  und verwenden die Abkürzung  $\tilde{f}(\tau) := f(\cos \tau)$ ,  $\tau \in [0, \pi]$ .

**Beweis:** Wir nehmen zunächst wahr, daß die Fréchet-Ableitung  $v(x) := u_\gamma^{s'}(h)(x)$  der gestreuten Welle außerhalb des Bogens  $\Gamma$  der Helmholtzgleichung genügt und im Unendlichen die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung erfüllt. Die Fréchet-Ableitung des Fernfeldoperators  $F$  an einer festen Stelle  $h$  erhält man gerade als Fernfeld zu diesem Randwertproblem. Wir müssen also noch entsprechende Randwerte berechnen. Wir interessieren uns für das Verhalten der Normalableitung der Fréchet-Ableitung der gestreuten Welle  $u^s$

$$u_\gamma^{s'}(h)(x) = v_1(x) + v_2(x) + v_3(x), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma,$$

bezüglich des Bogens  $\Gamma$ . Dabei bezeichnen wir mit  $v_1, v_2$  und  $v_3$  die folgenden Größen:

$$\begin{aligned} v_1(x) &:= -2K'_\gamma(T^{-1}Ru^i; h)(x), \\ v_2(x) &:= 2KT^{-1}T'_\gamma(T^{-1}Ru^i; h)(x), \\ v_3(x) &:= -2KT^{-1}R'_\gamma(u^i; h)(x), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma. \end{aligned}$$

Wir bestimmen die Normalableitung von  $v$  in drei Schritten.

1. Wir beginnen mit der Berechnung der Normalableitung des Ausdruckes  $v_3$ . Wegen der Sprungbeziehungen der Normalableitung des Doppelschichtpotentials erhalten wir unmittelbar:

$$(5.26) \quad \begin{aligned} \frac{\partial v_{3,\pm}(\gamma(\cos \tau))}{\partial n} &= -\frac{R_\gamma'(u^i; h)(\gamma(\cos \tau))}{|\gamma'(\cos \tau)| \sin \tau} \\ &= -\langle n(\gamma(\cos \tau)), \text{grad}_x \langle \text{grad}_x u^i(\gamma(\cos \tau)), h(\cos \tau) \rangle \rangle \\ &\quad - \left\langle \frac{\tilde{n}(h(\cos \tau))}{|\gamma'(\cos \tau)|}, \text{grad}_x u^i(\gamma(\cos \tau)) \right\rangle, \quad \tau \in (0, \pi). \end{aligned}$$

2. Wir bestimmen die Normalableitung des Anteils  $v_2$ . Wegen der Sprungbeziehungen der Normalableitung eines Doppelschichtpotentials mit Dichte aus  $C^{1,\alpha,*}(\Gamma)$  berechnen wir:

$$(5.27) \quad \frac{\partial v_{2,\pm}(\gamma(\cos \tau))}{\partial n} = -\frac{1}{2 \sin \tau} \frac{T_\gamma'(\varphi; h)(\tau)}{|\gamma'(\cos \tau)|}, \quad \tau \in (0, \pi).$$

3. Im letzten Schritt erfolgt die Berechnung der Normalableitung von  $v_1$ . Dieser Schritt ist technisch aufwendiger als die vorherigen Schritte. Wir beschäftigen uns zunächst mit der Normalableitung des Operators  $K'_\gamma$ . Es gilt nach Definition der Normalableitung:

$$\frac{\partial K_\gamma'(\varphi; h)_\pm(\tau)}{\partial n} := \lim_{\xi \rightarrow +0} \pm \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \gamma} (K\varphi)(\gamma(\cos \tau) \pm \xi n(\gamma(\cos \tau))).$$

Für  $\xi > 0$  ist eine Vertauschung der Differentiation im Sinne von Fréchet und der partiellen Differentiation nach  $\xi$  möglich (vergleiche [43]). Wir berechnen unter Verwendung von Satz 2.8 und der Cosinus-Substitution für Dichten  $\varphi \in C_{\text{ung}}^{1,\alpha}[0, 2\pi]$ :

$$(5.28) \quad \begin{aligned} &\pm \frac{\partial}{\partial \xi} (K\varphi)(\gamma(\cos \tau) \pm \xi n(\gamma(\cos \tau))) = \\ &= - \int_0^\pi \langle \text{grad}_x \Phi(\tilde{\gamma}(\tau) \pm \xi n(\tilde{\gamma}(\tau)), \tilde{\gamma}(\sigma)), \frac{\gamma'(\cos \tau)}{|\gamma'(\cos \tau)|} \rangle \varphi'(\sigma) d\sigma \\ &\quad + \kappa^2 \int_0^\pi \Phi(\tilde{\gamma}(\tau) \pm \xi n(\tilde{\gamma}(\tau)), \tilde{\gamma}(\sigma)) \left\langle \frac{\gamma'(\cos \tau)}{|\gamma'(\cos \tau)|}, \gamma'(\cos \sigma) \right\rangle \varphi(\sigma) \sin \sigma d\sigma. \end{aligned}$$

Wir differenzieren nach dem Rand  $\gamma$  und erhalten nach Anwenden der Kettenregel:

$$(5.29) \quad \begin{aligned} \frac{\partial K_\gamma'(\varphi; h)_\pm(\tau)}{\partial n} &:= \lim_{\xi \rightarrow +0} \left\{ \pm \frac{\partial}{\partial \gamma} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} (K\varphi)(\gamma(\cos \tau) \pm \xi n(\gamma(\cos \tau))) \right\} \right. \\ &\quad \mp \langle \text{grad}_x \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ (K\varphi)(\gamma(\cos \tau) \pm \xi n(\gamma(\cos \tau))) \right\}, h(\cos \tau) \pm \xi \frac{\partial n(\gamma(\cos \tau))}{\partial \gamma} \rangle \\ &\quad \left. - \langle \text{grad}_x (K\varphi)(\gamma(\cos \tau) \pm \xi n(\gamma(\cos \tau))), \frac{\partial n(\gamma(\cos \tau))}{\partial \gamma} \rangle \right\}. \end{aligned}$$

Wir berechnen den ersten Summanden der rechten Seite von Gleichung (5.29). Wir erhalten unter Verwendung einer Taylorreihenentwicklung der Grundlösung  $\Phi$  sowie von Beziehung (5.28) für die Fréchet-Ableitung:

$$\begin{aligned}
 & \pm \frac{\partial}{\partial \gamma} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} (K\varphi)(\gamma(\cos \tau) \pm \xi n(\gamma(\cos \tau))) \right\} = \\
 & -\kappa^2 \int_0^\pi \langle \text{grad}_x \Phi(\tilde{\gamma}(\tau) \pm \xi n(\tilde{\gamma}(\tau)), \tilde{\gamma}(\sigma)), \tilde{h}(\sigma) - \tilde{h}(\tau) \rangle \langle t(\tilde{\gamma}(\tau)), \gamma'(\cos \sigma) \rangle \varphi(\sigma) \sin \sigma d\sigma \\
 & \pm \kappa^2 \xi \int_0^\pi \langle \text{grad}_x \Phi(\tilde{\gamma}(\tau) \pm \xi n(\tilde{\gamma}(\tau)), \tilde{\gamma}(\sigma)), \frac{n(\tilde{\gamma}(\tau))}{\partial \gamma} \rangle \langle t(\tilde{\gamma}(\tau)), \gamma'(\cos \sigma) \rangle \varphi(\sigma) \sin \sigma d\sigma \\
 & (5.30) + \kappa^2 \int_0^\pi \Phi(\tilde{\gamma}(\tau) \pm \xi n(\tilde{\gamma}(\tau)), \tilde{\gamma}(\sigma)) \frac{\partial}{\partial \gamma} \langle t(\tilde{\gamma}(\tau)), \gamma'(\cos \sigma) \rangle \varphi(\sigma) \sin \sigma d\sigma \\
 & - \int_0^\pi \langle \text{grad}_x \Phi(\tilde{\gamma}(\tau) \pm \xi n(\tilde{\gamma}(\tau)), \tilde{\gamma}(\sigma)), \frac{\partial t(\tilde{\gamma}(\tau))}{\partial \gamma} \rangle \varphi'(\sigma) d\sigma \\
 & + \int_0^\pi \langle \text{grad}_x \langle \text{grad}_x \Phi(\tilde{\gamma}(\tau) \pm \xi n(\tilde{\gamma}(\tau)), \tilde{\gamma}(\sigma)), \tilde{h}(\sigma) - \tilde{h}(\tau) \rangle, t(\tilde{\gamma}(\tau)) \rangle \varphi'(\sigma) d\sigma \\
 & \mp \xi \int_0^\pi \langle \text{grad}_x \langle \text{grad}_x \Phi(\tilde{\gamma}(\tau) \pm \xi n(\tilde{\gamma}(\tau)), \tilde{\gamma}(\sigma)), \frac{\partial n(\tilde{\gamma}(\tau))}{\partial \gamma} \rangle, t(\tilde{\gamma}(\tau)) \rangle \varphi'(\sigma) d\sigma.
 \end{aligned}$$

Wir berechnen zunächst den Grenzwert  $\xi \rightarrow +0$  für die ersten drei Summanden der Fréchet-Ableitung (5.30). Die Summe dieser drei Summanden sei mit  $A_1(\xi)$  bezeichnet. Unter Verwendung der Sprungbeziehungen für den Gradienten eines Einfachschichtpotentials mit lokal hölderstetiger Dichte (vergleiche Satz 2.8) und der Stetigkeit des Einfachschichtpotentials erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 \lim_{\xi \rightarrow +0} A_1(\xi) &= \frac{1}{2} \frac{S'_\gamma(\varphi; h)(\tau)}{\sin \tau |\gamma'(\cos \tau)|} - \\
 & \int_0^\pi \Phi(\tilde{\gamma}(\tau), \tilde{\gamma}(\sigma)) \frac{\langle \gamma'(\cos \tau), h'(\cos \tau) \rangle \langle \gamma'(\cos \tau), \gamma'(\cos \sigma) \rangle}{|\gamma'(\cos \tau)|^3} \varphi(\sigma) \sin \sigma d\sigma.
 \end{aligned}$$

Wir beschäftigen uns nun mit den letzten drei Summanden der rechten Seite von Gleichung (5.30). Eine Berechnung des Grenzwertes  $\xi \rightarrow +0$  ist schwieriger. Wir bezeichnen die drei Summanden der Reihe nach mit  $A_{2,1}(\xi)$ ,  $A_{2,2}(\xi)$  und  $A_{2,3}(\xi)$ . Unter Verwendung der Sprungbeziehungen für lokal hölderstetige Dichten (siehe die Argumentation in Satz 2.8) erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 \lim_{\xi \rightarrow +0} A_{2,1}(\xi) &= \\
 & - \int_0^\pi \langle \text{grad}_x \Phi(\tilde{\gamma}(\tau), \tilde{\gamma}(\sigma)), \frac{\partial t(\tilde{\gamma}(\tau))}{\partial \gamma} \rangle \varphi'(\sigma) d\sigma \pm \frac{1}{2} \langle n(\tilde{\gamma}(\tau)), \frac{\partial t(\tilde{\gamma}(\tau))}{\partial \gamma} \rangle \frac{\partial \varphi(\gamma(\cos \tau))}{\partial t}.
 \end{aligned}$$

Wir bemerken, daß der direkte Wert von  $A_{2,1}$  Bestandteil von  $\frac{1}{2} \frac{T'_\gamma}{\sin \tau |\gamma'(\cos \tau)|}$  ist. Wir formen den Ausdruck  $A_{2,2}$  mit dem Ziel der Durchführung einer partiellen

Integration zunächst wie folgt um:

$$(5.31) \quad A_{2,2}(\xi) = - \int_0^\pi \langle \text{grad}_y \langle \text{grad}_x \Phi(\tilde{\gamma}(\tau) \pm \xi n(\tilde{\gamma}(\tau)), \tilde{\gamma}(\sigma)), \tilde{h}(\sigma) - \tilde{h}(\tau) \rangle, \frac{\gamma'(\cos \sigma)}{|\gamma'(\cos \tau)|} \rangle \varphi'(\sigma) d\sigma + \int_0^\pi \langle \text{grad}_x \langle \text{grad}_x \Phi(\tilde{\gamma}(\tau) \pm \xi n(\tilde{\gamma}(\tau)), \tilde{\gamma}(\sigma)), \tilde{h}(\sigma) - \tilde{h}(\tau) \rangle, \tilde{\gamma}'(\tau) - \tilde{\gamma}'(\sigma) \rangle \frac{\varphi'(\sigma)}{|\tilde{\gamma}'(\cos \tau)|} d\sigma.$$

Für den Kern des zweiten Integrals in Formel (5.31) gilt die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} & \left| \langle \text{grad}_x \langle \text{grad}_x \Phi(\tilde{\gamma}(\tau) \pm \xi n(\tilde{\gamma}(\tau)), \tilde{\gamma}(\sigma)), \tilde{h}(\sigma) - \tilde{h}(\tau) \rangle, \tilde{\gamma}'(\tau) - \tilde{\gamma}'(\sigma) \rangle \right| \\ & \leq C \frac{|\tilde{\gamma}'(\tau) - \tilde{\gamma}'(\sigma)| |\tilde{h}(\sigma) - \tilde{h}(\tau)|}{|\tilde{\gamma}(\sigma) - \tilde{\gamma}(\tau)|^2}. \end{aligned}$$

Dabei haben wir die  $C^3$ -Glattheit des Bogens ausgenutzt, um für hinreichend kleines  $\xi$  eine in  $\xi$  gleichmäßige Abschätzung der Art

$$(5.32) \quad |\tilde{\gamma}(\tau) \pm \xi n(\tilde{\gamma}(\tau)) - \tilde{\gamma}(\sigma)|^2 \geq \frac{1}{2} |\tilde{\gamma}(\sigma) - \tilde{\gamma}(\tau)|^2$$

zu erhalten. Das Integral und der Grenzwert  $\xi \rightarrow +0$  können dann nach dem Satz von Lebesgue über dominierte Konvergenz vertauscht werden. Die Grundidee des weiteren Vorgehens besteht darin, auf das erste Integral aus Formel (5.31) partielle Integration anzuwenden, um die starke Singularität zu beseitigen. Dabei nutzen wir aus, daß die Neumannrandwerte  $\frac{\partial u^i}{\partial n}$  eine auf dem Bogen  $\Gamma$   $C^{3,\alpha}$ -glatte Funktion darstellen und somit auf Grund der Abbildungs- und Invertierungseigenschaften des Operators  $T$  (siehe Satz 2.11) die Dichte  $\varphi$  aus dem Raum  $C^{3,\alpha}[0, 2\pi]$  stammt. Sei nun  $\tau \in (0, \pi)$  fest. Wir wählen eine Umgebung  $[\tau_1, \tau_2]$  von  $\tau$  in  $(0, \pi)$ . Im folgenden bezeichnen wir mit  $\chi_{[\tau_1, \tau_2]}$  die charakteristische Funktion von  $[\tau_1, \tau_2]$  bezüglich  $[0, \pi]$ . Wir nehmen die folgende Aufspaltung der Dichte  $\varphi'$  vor:

$$(5.33) \quad \varphi' = \chi_{[\tau_1, \tau_2]} \varphi' + (1 - \chi_{[\tau_1, \tau_2]}) \varphi'.$$

Für das erste Integral erhalten wir nach partieller Integration:

$$(5.34) \quad \begin{aligned} A_{2,2}(\xi) &= \int_0^\pi \langle \text{grad}_x \Phi(\tilde{\gamma}(\tau) \pm \xi n(\tilde{\gamma}(\tau)), \tilde{\gamma}(\sigma)), \tilde{h}'(\sigma) \rangle \frac{\varphi'(\sigma)}{|\dot{\gamma}(\cos \tau)|} d\sigma \\ &- \int_{\tau_1}^{\tau_2} \langle \text{grad}_x \Phi(\tilde{\gamma}(\tau) \pm \xi n(\tilde{\gamma}(\tau)), \tilde{\gamma}(\sigma)), \tilde{h}(\sigma) - \tilde{h}(\tau) \rangle \frac{\varphi''(\sigma)}{\sin \sigma |\gamma'(\cos \tau)|} d\sigma \\ &- \langle \text{grad}_x \Phi(\tilde{\gamma}(\tau) \pm \xi n(\tilde{\gamma}(\tau)), \tilde{\gamma}(\sigma)), \tilde{h}(\sigma) - \tilde{h}(\tau) \rangle \frac{\varphi'(\sigma)}{|\gamma'(\cos \tau)| \sin \sigma} \Big|_{\tau_1}^{\tau_2} \\ &- \int_0^{\tau_1} \langle \text{grad}_y \langle \text{grad}_x \Phi(\tilde{\gamma}(\tau) \pm \xi n(\tilde{\gamma}(\tau)), \tilde{\gamma}(\sigma)), \tilde{h}(\sigma) - \tilde{h}(\tau) \rangle, \frac{\gamma'(\cos \sigma)}{|\gamma'(\cos \tau)|} \rangle \varphi'(\sigma) d\sigma \\ &- \int_{\tau_2}^\pi \langle \text{grad}_y \langle \text{grad}_x \Phi(\tilde{\gamma}(\tau) \pm \xi n(\tilde{\gamma}(\tau)), \tilde{\gamma}(\sigma)), \tilde{h}(\sigma) - \tilde{h}(\tau) \rangle, \frac{\gamma'(\cos \sigma)}{|\gamma'(\cos \tau)|} \rangle \varphi'(\sigma) d\sigma. \end{aligned}$$

Wir führen nun den Grenzübergang  $\xi \rightarrow +0$  für die einzelnen Summanden aus (5.34) durch. Für das erste Integral können wir die Sprungbeziehungen für den Gradienten eines Einfachschichtpotentials mit lokal hölderstetiger Dichte unmittelbar anwenden. Das zweite Integral können wir als Integral über  $[0, \pi]$  mit Dichte  $\frac{\varphi''}{\sin \sigma |\gamma'(\cos \tau)|} \chi_{[\tau_1, \tau_2]} \in L^\infty(\Gamma)$  auffassen. Hier steht  $L^\infty(\Gamma)$  für den Raum der auf dem Bogen  $\Gamma$  beschränkten Funktionen. Unter Beachtung der  $C^3$ -Glattheit des Bogens erhalten wir für den Kern dieses Integrals die Abschätzung

$$(5.35) \quad \left| \langle \text{grad}_x \Phi(\tilde{\gamma}(\tau) \pm \xi n(\tilde{\gamma}(\tau)), \tilde{\gamma}(\sigma)), \tilde{h}(\sigma) - \tilde{h}(\tau) \rangle \right| \leq C \frac{|\tilde{h}(\sigma) - \tilde{h}(\tau)|}{|\tilde{\gamma}(\sigma) - \tilde{\gamma}(\tau)|}.$$

Der Satz von Lebesgue rechtfertigt die Vertauschung von Integration und Grenzwertbildung. Die Kerne der beiden letzten Integrale enthalten wegen  $\tau \notin [0, \tau_1] \cup [\tau_2, \pi]$  keine Singularität. Deswegen können wir unmittelbar den Satz von Lebesgue über dominierte Konvergenz anwenden, um Integration und Grenzwertbildung zu vertauschen. Wir erhalten insgesamt nach Rückwandlung durch partielle Integration:

$$(5.36) \quad \lim_{\xi \rightarrow +0} A_{2,2}(\xi) = \int_0^\pi \langle \text{grad}_x (\text{grad}_x \Phi(\tilde{\gamma}(\tau), \tilde{\gamma}(\sigma)), \tilde{h}(\sigma) - \tilde{h}(\tau)), \frac{\gamma'(\cos \tau)}{|\gamma'(\cos \tau)|} \rangle \varphi'(\sigma) d\sigma \\ \mp \frac{1}{2} \frac{\langle n(\gamma(\cos \tau)), h'(\cos \tau) \rangle}{|\gamma'(\cos \tau)|} \frac{\partial \varphi(\gamma(\cos \tau))}{\partial t}.$$

Zusammenfassend gilt:

$$\lim_{\xi \rightarrow +0} (A_{2,1}(\xi) + A_{2,2}(\xi)) = \frac{1}{2} \frac{(\tilde{T}'_\gamma \varphi; h)(\tau)}{\sin \tau |\gamma'(\cos \tau)|} + \int_0^\pi \langle \text{grad}_x \Phi(\tilde{\gamma}(\tau), \tilde{\gamma}(\sigma)), \gamma'(\cos \tau) \rangle \frac{\langle \gamma'(\cos \tau), h'(\cos \tau) \rangle}{|\gamma'(\cos \tau)|^3} \varphi'(\sigma) d\sigma,$$

da sich die auftretenden Sprünge gerade kompensieren. Wir müssen uns nun noch mit den letzten beiden Summanden aus Gleichung (5.29) befassen. Aus der  $C^3$ -Randglätte folgt, daß die Lösung  $u^s$  des Streuproblems zweimal stetig differenzierbar auf den Bogen fortsetzbar ist. Wir erhalten

$$\lim_{\xi \rightarrow +0} \langle \text{grad}_x (K\varphi)(\gamma(\cos \tau) \pm \xi n(\gamma(\cos \tau))), \frac{\partial n(\gamma(\cos \tau))}{\partial \gamma} \rangle = \langle \text{grad}_x u_\pm^s(\gamma(\cos \tau)), \frac{\partial n(\gamma(\cos \tau))}{\partial \gamma} \rangle.$$

Für den zweiten Summanden erhalten wir zunächst

$$\lim_{\xi \rightarrow +0} \pm \langle \text{grad}_x \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ (K\varphi)(\gamma(\cos \tau) \pm \xi n(\gamma(\cos \tau))) \right\}, h(\cos \tau) \rangle = \langle \text{grad}_x \frac{\partial u_\pm^s(\gamma(\cos \tau))}{\partial n}, h(\cos \tau) \rangle.$$



Der verbleibende Anteil des zweiten Summanden kompensiert gerade  $A_{2,3}(\xi)$ . Damit haben wir die Randwerte von  $v = u_{\gamma}^{s'}$  wegen  $u = u^i + u^s$  und der Identität

$$-2 \frac{\langle \gamma'(\cos \tau), h'(\cos \tau) \rangle}{|\gamma'(\cos \tau)|^3} \langle \tilde{n}(\gamma(\cos \tau)), \text{grad}_x u^i \rangle = \frac{\langle \gamma'(\cos \tau), h'(\cos \tau) \rangle}{|\gamma'(\cos \tau)|^3 \sin \tau} (T\varphi)(\tau)$$

berechnet.

Auf Grund der Sprungbeziehungen für ein Doppelschichtpotential mit Dichte aus dem Funktionenraum  $C^{1,\alpha,*}(\Gamma)$  gilt:

$$(5.37) \quad u_+(x) - u_-(x) = \varphi(x), \quad x \in \Gamma_0.$$

Daraus erhalten wir schließlich  $v_0 = v_1$ . Wir bemerken, daß die Dichten der Doppelschichtpotentiale  $v_2$  und  $v_3$  aus dem Raum  $C^{1,\alpha,*}(\Gamma)$  stammen, insbesondere verschwinden die Dichten in den Bogenendpunkten. Daraus folgt unter Verwendung von Satz 2.5, daß die Funktion  $v - v_0$  den Regularitätsforderungen des Neumannproblems für den offenen Bogen genügt. Damit haben wir die Aussagen des Satzes bewiesen. □

Wir geben im folgenden noch eine bequemere Darstellung der Randwerte an. Ein entsprechender Charakterisierungssatz ist in [12] für den dreidimensionalen Fall und geschlossene Berandungen mit Hilbertraummethoden bewiesen worden (siehe dazu auch [13]).

**Folgerung 5.8** *Es gilt die folgende Darstellung der Neumanndaten von  $v$ :*

$$(5.38) \quad \frac{\partial v_{\pm}(\gamma(s))}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \langle h(s), n(\gamma(s)) \rangle \frac{\partial u_{\pm}(\gamma(s))}{\partial t} \right) + \kappa^2 u_{\pm}(\gamma(s)) \langle h(s), n(\gamma(s)) \rangle$$

für  $s \in (-1, 1)$ .

**Beweis:** Wir verwenden im Beweis lokale Koordinaten  $x(s, \xi) := \gamma(s) + \xi n(\gamma(s))$  für  $s \in [-1, 1]$ ,  $\xi \in \mathbb{R}$ . Für den Maßtensor berechnen wir:

$$\begin{aligned} g_{11}(s, \xi) &= \left\langle \frac{\partial x(s, \xi)}{\partial s}, \frac{\partial x(s, \xi)}{\partial s} \right\rangle = |\gamma'(s) + \xi n'(\gamma(s))|^2, \\ g_{12}(s, \xi) &= g_{21}(s, \xi) = \left\langle \frac{\partial x(s, \xi)}{\partial \xi}, \frac{\partial x(s, \xi)}{\partial s} \right\rangle = 0, \\ g_{22}(s, \xi) &= \left\langle \frac{\partial x(s, \xi)}{\partial \xi}, \frac{\partial x(s, \xi)}{\partial \xi} \right\rangle = 1. \end{aligned}$$

Weiterhin erhalten wir für die Determinante  $g$  der Matrix  $(g_{ij})$  den Wert  $g = g_{11}g_{22}$ . Wir führen die Bezeichnungen  $g^{11} = 1/g_{11}$  und  $g^{22} = 1/g_{22}$  ein. Für den Gradienten von  $u$  erhalten wir in den neuen Koordinaten:

$$\text{grad } u = g^{11} \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial s} + g^{22} \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \xi}.$$

Der Laplaceoperator kann in den lokalen Koordinaten als

$$(5.39) \quad \Delta u = g^{11} \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + g^{22} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial s} \left( g^{11} \sqrt{g} \right) \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( g^{22} \sqrt{g} \right) \frac{\partial u}{\partial \xi}.$$

geschrieben werden (siehe dazu [8], S. 30). Insbesondere ergibt sich für  $\xi = 0$  und  $\frac{\partial u_{\pm}}{\partial n} = 0$  die Beziehung

$$(5.40) \quad \Delta u = \frac{1}{|\gamma'|^2} \frac{\partial^2 u_{\pm}}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u_{\pm}}{\partial \xi^2} - \frac{\langle \gamma', \gamma'' \rangle}{|\gamma'|^4} \frac{\partial u_{\pm}}{\partial s}.$$

Wir bezeichnen die beiden Anteile der Neumannrandwerte von  $v$  aus Satz 5.7 mit  $\tilde{v}_1$  und  $\tilde{v}_2$ . Nach einfachen Rechnungen unter Ausnutzung von  $\frac{\partial u_{\pm}}{\partial n} = 0$  bekommen wir:

$$\tilde{v}_1 = -\langle \text{grad} \langle \text{grad } u_{\pm}, h \rangle, n(\gamma) \rangle = -\frac{\partial^2 u_{\pm}}{\partial \xi^2} \langle n(\gamma), h \rangle + \frac{\langle n'(\gamma), h \rangle}{|\gamma'^2|} \frac{\partial u_{\pm}}{\partial s}.$$

Für  $\tilde{v}_2$  berechnen wir ebenfalls unter Verwendung von  $\frac{\partial u_{\pm}}{\partial n} = 0$

$$\tilde{v}_2 = -\left\langle \frac{\partial n(\gamma)}{\partial \gamma}, \text{grad } u_{\pm} \right\rangle = \frac{\langle h', n(\gamma) \rangle}{|\gamma'|^2} \frac{\partial u_{\pm}}{\partial s}.$$

Insgesamt erhalten wir für die Neumannrandwerte von  $v$ :

$$(5.41) \quad \frac{\partial v}{\partial n} = -\frac{\partial^2 u_{\pm}}{\partial \xi^2} \langle n(\gamma), h \rangle + \frac{1}{|\gamma'|^2} \frac{\partial \langle n(\gamma), h \rangle}{\partial s} \frac{\partial u_{\pm}}{\partial s}.$$

Da  $u$  der Helmholtzgleichung genügt, bekommen wir unter Benutzung der Beziehung (5.40):

$$\frac{\partial^2 u_{\pm}}{\partial \xi^2} = -\frac{1}{|\gamma'|^2} \frac{\partial^2 u_{\pm}}{\partial s^2} + \frac{\langle \gamma', \gamma'' \rangle}{|\gamma'|^4} \frac{\partial u_{\pm}}{\partial s} - \kappa^2 u_{\pm}.$$

Daraus folgt dann

$$\frac{\partial v_{\pm}}{\partial n} = \frac{1}{|\gamma'|} \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\langle n(\gamma), h \rangle}{|\gamma'|} \frac{\partial u_{\pm}}{\partial s} \right) + \langle n(\gamma), h \rangle \kappa^2 u_{\pm}$$

und somit die Behauptung der Folgerung. □

Der Charakterisierungssatz ermöglicht es uns, die Fréchet-Ableitung als Lösung eines Randwertproblems zu erhalten.

## 5.3 Numerische Berechnung der Fréchet-Ableitung

Wir führen in diesem Abschnitt die Berechnung der Fréchet-Ableitung auf die Lösung von bestimmten hypersingulären Integralgleichungen und anschließender Fernfeldberechnung zurück. Damit vermeiden wir die im Abschnitt 5.2 notwendige analytische Arbeit zur Charakterisierung der Fréchet-Ableitung.

**Satz 5.9** Die Fréchet-Ableitung des Fernfeldoperators ist gegeben durch

$$(5.42) \quad F'_\gamma h = K'_{\gamma, \infty}(\varphi; h) - K_\infty(\psi),$$

wobei  $\psi$  Lösung der hypersingulären Integralgleichung

$$(5.43) \quad (T\psi)(\tau) = g(\tau), \quad \tau \in [0, 2\pi],$$

mit Randwerten

$$(5.44) \quad g(\tau) := T'_\gamma(\varphi; h)(\tau) + 2R'_\gamma(u^i, h)(\tau), \quad \tau \in [0, 2\pi],$$

ist und  $\varphi$  die Integralgleichung  $(T\varphi)(\tau) = -2\frac{\partial u^i(\tilde{\gamma}(\tau))}{\partial n} |\gamma'(\cos \tau)| \sin \tau$  löst.

**Beweis:** In Formel (5.6) ist eine direkte Auswertung des Fernfeldes für den ersten Summanden möglich. Das Fernfeld für den zweiten und dritten Summanden erhalten wir als Fernfeld eines Doppelschichtpotentials mit der im Satz beschriebenen speziellen Dichte  $\psi$ . Dabei sind die Randwerte  $g$  auf Grund der Abbildungseigenschaften von  $T'_\gamma$  und  $R'_\gamma$  aus  $C_{ung}^{0, \alpha}[0, 2\pi]$ . □

Zunächst erhalten wir für  $K'_\gamma(\varphi; h)$  in parametrisierter Form:

$$\begin{aligned} v_0(x) = & \frac{i\kappa}{4} \left\{ \int_0^\pi H_1^{(1)}(\kappa|x - \tilde{\gamma}(\sigma)|) \frac{\langle x - \tilde{\gamma}(\sigma), \tilde{n}(h(\cos \sigma)) \rangle}{|x - \gamma(\cos \sigma)|} \sin \sigma \varphi(\sigma) d\sigma + \right. \\ & \kappa \int_0^\pi H_1^{(1)'}(\kappa|x - \tilde{\gamma}(\sigma)|) \frac{\langle x - \tilde{\gamma}(\sigma), \tilde{n}(\tilde{h}(\sigma)) \rangle \langle x - \tilde{\gamma}(\sigma), \tilde{n}(\tilde{\gamma}(\sigma)) \rangle}{|x - \tilde{\gamma}(\sigma)|^2} \sin \sigma \varphi(\sigma) d\sigma - \\ & \int_0^\pi H_1^{(1)}(\kappa|x - \tilde{\gamma}(\sigma)|) \frac{\langle x - \tilde{\gamma}(\sigma), \tilde{n}(\tilde{h}(\sigma)) \rangle \langle x - \tilde{\gamma}(\sigma), \tilde{n}(\tilde{\gamma}(\sigma)) \rangle}{|x - \tilde{\gamma}(\sigma)|^3} \sin \sigma \varphi(\sigma) d\sigma + \\ & \left. \int_0^\pi H_1^{(1)}(\kappa|x - \tilde{\gamma}(\sigma)|) \frac{\langle \tilde{n}(\tilde{\gamma}(\sigma)), \tilde{n}(h(\cos \sigma)) \rangle}{|x - \tilde{\gamma}(\sigma)|} \sin \sigma \varphi(\sigma) d\sigma \right\}, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma. \end{aligned}$$

Unter Verwendung der obigen Darstellung und der Asymptotik der Hankelfunktionen erster Art berechnen wir für das Fernfeld von  $K'_\gamma(\varphi; h)$ :

$$K'_{\gamma, \infty}(\varphi; h)(\hat{x}) = \frac{\sqrt{\kappa}}{\sqrt{8\pi}} \int_0^\pi e^{-i(\kappa(\hat{x}, \gamma(\cos \sigma)) + \frac{\pi}{4})} \langle \hat{x}, \tilde{n}(h(\cos \sigma)) \rangle \sin \sigma \varphi(\sigma) d\sigma +$$

$$i\kappa \frac{\sqrt{\kappa}}{\sqrt{8\pi}} \int_0^\pi e^{-i(\kappa\langle \hat{x}, \gamma(\cos \sigma) \rangle + \frac{\pi}{4})} \langle \hat{x}, \tilde{n}(h(\cos \sigma)) \rangle \langle \hat{x}, \tilde{n}(\gamma(\cos \sigma)) \rangle \sin \sigma \varphi(\sigma) d\sigma.$$

Für  $K_\infty(\psi)$  erhalten wir mit den gleichen Überlegungen:

$$K_\infty(\psi)(\hat{x}) = \sqrt{\frac{\kappa}{8\pi}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \int_0^\pi \langle n(\tilde{\gamma}(\sigma)), \hat{x} \rangle e^{-i\kappa\langle \hat{x}, \gamma(\cos \sigma) \rangle} \psi(\sigma) |\gamma'(\cos \sigma)| \sin \sigma d\sigma.$$

Für eine Bestimmung der unbekanntenen Dichte  $\psi$  sind Näherungswerte für die rechte Seite  $g$  an den äquidistanten Knotenpunkten  $t_j^{(n)} := \frac{j\pi}{n}$ ,  $j = 1, \dots, n-1$  aus  $[0, \pi]$  notwendig. Wir erhalten für  $\tau \in (0, \pi)$  für die rechte Seite  $g$  zunächst:

$$\begin{aligned} g(\tau) &= 2\kappa^2 \int_0^\pi \left\{ -\langle \text{grad}_x \Phi(\tilde{\gamma}(\tau), \tilde{\gamma}(\sigma)), \tilde{h}(\sigma) - \tilde{h}(\tau) \rangle \langle \gamma'(\cos \sigma), \gamma'(\cos \tau) \rangle \right. \\ &\quad \left. + \Phi(\tilde{\gamma}(\tau), \tilde{\gamma}(\sigma)) \{ \langle \gamma'(\cos \tau), h'(\cos \sigma) \rangle + \langle \gamma'(\cos \sigma), h'(\cos \tau) \rangle \} \right\} \sin \sigma \sin \tau \varphi(\sigma) d\sigma \\ (5.45) \quad &\quad - 2 \int_0^\pi \left\{ \langle \text{grad}_x \Phi(\tilde{\gamma}(\sigma), \tilde{\gamma}(\tau)), h'(\cos \tau) \rangle \right. \\ &\quad \left. - \langle \text{grad}_x \langle \text{grad}_x \Phi(\tilde{\gamma}(\sigma), \tilde{\gamma}(\tau)), \tilde{h}(\sigma) - \tilde{h}(\tau) \rangle, \gamma'(\cos \tau) \rangle \right\} \sin \tau \varphi'(\sigma) d\sigma \\ &\quad + 2 \left\{ \langle \tilde{n}(\tilde{h}(\tau)), \text{grad}_x \langle \text{grad}_x u^i(\tilde{\gamma}(\tau)), \tilde{h}(\tau) \rangle \rangle + \langle \tilde{n}(\tilde{\gamma}(\tau)), \text{grad}_x u^i(\tilde{\gamma}(\tau)) \rangle \right\} \sin \tau. \end{aligned}$$

Wir sehen, daß die Kerne der Integrale aus Formel (5.45) starke und logarithmische Singularitäten besitzen. Deshalb können wir nach Fortsetzung auf  $[0, 2\pi]$  zur numerischen Approximation von  $g$  die Quadraturformeln aus dem zweiten Kapitel heranziehen.

Wir beschreiben dafür die auftretenden Singularitäten genauer. Zunächst betrachten wir das erste Integral aus Formel (5.45). Wir setzen im folgenden zur Abkürzung  $\chi(\tau, \sigma) := \kappa |\gamma(\cos \sigma) - \gamma(\cos \tau)|$ . Für den Kern des ersten Integrals aus (5.45) erhalten wir in parametrisierter Form:

$$\begin{aligned} M(\tau, \sigma) &:= \left\{ -\kappa H_1^{(1)}(\chi(\tau, \sigma)) \frac{\langle \tilde{\gamma}(\sigma) - \tilde{\gamma}(\tau), \tilde{h}(\sigma) - \tilde{h}(\tau) \rangle}{|\tilde{\gamma}(\sigma) - \tilde{\gamma}(\tau)|} \langle \gamma'(\cos \tau), \gamma'(\cos \sigma) \rangle \right. \\ &\quad \left. + H_0^{(1)}(\chi(\tau, \sigma)) r_1(\tau, \sigma) \right\} \sin \sigma \sin \tau \frac{i\kappa^2}{4}, \quad \sigma, \tau \in [0, \pi], \quad \sigma \neq \tau \end{aligned}$$

mit  $r_1(\tau, \sigma) := \langle \gamma'(\cos \tau), h'(\cos \sigma) \rangle + \langle \gamma'(\cos \sigma), h'(\cos \tau) \rangle$ . Unter Ausnutzung der Potenzreihendarstellung der Hankelfunktionen spalten wir den Kern wie folgt auf:

$$(5.46) \quad M(\tau, \sigma) := M_1(\tau, \sigma) \log 4(\cos \sigma - \cos \tau)^2 + M_2(\tau, \sigma)$$

mit

$$M_1(\tau, \sigma) := -\frac{\kappa^2 \sin \sigma \sin \tau}{4\pi} \left( J_0(\chi(\tau, \sigma)) r_1(\tau, \sigma) \right)$$

$$-\kappa J_1(\chi(\tau, \sigma)) \frac{\langle \tilde{\gamma}(\sigma) - \tilde{\gamma}(\tau), \tilde{h}(\sigma) - \tilde{h}(\tau) \rangle}{|\tilde{\gamma}(\sigma) - \tilde{\gamma}(\tau)|} \langle \gamma'(\cos \tau), \gamma'(\cos \sigma) \rangle),$$

$$M_2(\tau, \sigma) := M(\tau, \sigma) - M_1(\tau, \sigma) \log 4(\cos \sigma - \cos \tau)^2.$$

Durch Taylorreihenentwicklung von  $\gamma$  und  $h$  sehen wir, daß  $M_1$  und  $M_2$  zu stetigen Funktionen an der Stelle  $\sigma = \tau$  fortgesetzt werden können durch

$$M_1(\tau, \tau) := -\frac{\kappa^2}{2\pi} \langle \gamma'(\cos \tau), h'(\cos \tau) \rangle \sin^2 \tau,$$

$$M_2(\tau, \tau) := -\frac{\kappa^2}{\pi} \langle \gamma'(\cos \tau), h'(\cos \tau) \rangle \left( \log \frac{\kappa}{4} |\gamma'(\cos \tau)| + C + \frac{1}{2} - \frac{\pi i}{2} \right) \sin^2 \tau.$$

Die Untersuchung des zweiten Integrals aus Formel (5.45) ist wegen der auftretenden starken Singularitäten in den beiden Kernen komplizierter. Weiterhin müssen wir die Ableitung der Dichte eliminieren, da wir  $\varphi$  nur (näherungsweise) an den Stützstellen kennen.

Zuerst schreiben wir durch partielle Integration unter Ausnutzung von  $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$  den ersten Anteil in der Form:

$$\int_0^\pi \langle \text{grad}_x \Phi(\tilde{\gamma}(\sigma), \tilde{\gamma}(\tau)), h'(\cos \tau) \rangle \sin \tau \varphi'(\sigma) d\sigma =$$

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\langle \gamma'(\cos \tau), h'(\cos \tau) \rangle}{|\gamma'(\cos \tau)|^2} \int_0^\pi \frac{\sin \tau}{\cos \sigma - \cos \tau} \varphi'(\sigma) d\sigma - \int_0^\pi N_1(\sigma, \tau) \varphi(\sigma) d\sigma$$

mit Kern

$$N_1(\sigma, \tau) := \frac{i\kappa^2 \sin \sigma \sin \tau}{4} \left( H_0^{(1)}(\chi(\tau, \sigma)) - \frac{2 H_1^{(1)}(\chi(\tau, \sigma))}{\kappa |\tilde{\gamma}(\sigma) - \tilde{\gamma}(\tau)|} \right) s_1(\tau, \sigma)$$

$$+ \frac{i\kappa \sin \sigma \sin \tau}{4} H_1^{(1)}(\chi(\tau, \sigma)) \frac{\langle \gamma'(\cos \sigma), h'(\cos \tau) \rangle}{|\tilde{\gamma}(\sigma) - \tilde{\gamma}(\tau)|} - \frac{1}{2\pi} \frac{\langle \gamma'(\cos \tau), h'(\cos \tau) \rangle}{|\gamma'(\cos \tau)|^2} \frac{\sin \tau \sin \sigma}{(\cos \sigma - \cos \tau)^2}$$

und

$$s_1(\sigma, \tau) := \frac{\langle \tilde{\gamma}(\sigma) - \tilde{\gamma}(\tau), h'(\cos \tau) \rangle \langle \tilde{\gamma}(\sigma) - \tilde{\gamma}(\tau), \gamma'(\cos \sigma) \rangle}{|\tilde{\gamma}(\sigma) - \tilde{\gamma}(\tau)|^2}.$$

Auf Grund der Gestalt der Hankelfunktionen nehmen wir die folgende Aufspaltung von  $N_1$  vor:

$$N_1(\sigma, \tau) := N_{1,1}(\sigma, \tau) \log 4(\cos \sigma - \cos \tau)^2 + N_{1,2}(\sigma, \tau)$$

mit den Kernen

$$N_{1,1}(\sigma, \tau) :=$$

$$\frac{\kappa^2 \sin \sigma \sin \tau}{2\pi} \left( \frac{J_1(\chi(\tau, \sigma))}{\kappa |\tilde{\gamma}(\sigma) - \tilde{\gamma}(\tau)|} - J_0(\chi(\tau, \sigma)) \frac{\langle \gamma'(\cos \sigma), h'(\cos \tau) \rangle}{|\tilde{\gamma}(\sigma) - \tilde{\gamma}(\tau)|} - J_0(\chi(\tau, \sigma)) \right),$$

$$N_{1,2}(\sigma, \tau) := N_1(\tau, \sigma) - N_{1,1}(\sigma, \tau) \log 4(\cos \sigma - \cos \tau)^2.$$

Für die Diagonalwerte berechnen wir durch Taylorreihenentwicklung von  $\gamma$  und der Störungsfunktion  $h$ :

$$\begin{aligned}
 N_{1,1}(\tau, \tau) &:= -\frac{\kappa^2}{8\pi} \langle \gamma'(\cos \tau), h'(\cos \tau) \rangle \sin^2 \tau, \\
 N_{1,2}(\tau, \tau) &:= \left\{ \frac{1}{2\pi |\gamma'(\cos \tau)|^4} \left( -\frac{1}{3} \langle \gamma'(\cos \tau), h'(\cos \tau) \rangle \langle \gamma'(\cos \tau), \gamma'''(\cos \tau) \rangle \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{1}{4} \langle \gamma'(\cos \tau), h'(\cos \tau) \rangle |\gamma''(\cos \tau)|^2 + \frac{|\gamma'(\cos \tau)|^2}{6} \langle h'''(\cos \tau), \gamma'(\cos \tau) \rangle \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2\pi |\gamma'(\cos \tau)|^6} \left( \frac{1}{2} \langle \gamma''(\cos \tau), \gamma'(\cos \tau) \rangle \langle \gamma''(\cos \tau), h''(\cos \tau) \rangle \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \langle \gamma''(\cos \tau), \gamma'(\cos \tau) \rangle^2 \langle \gamma'(\cos \tau), h'(\cos \tau) \rangle \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\kappa^2 \langle \gamma'(\cos \tau), h'(\cos \tau) \rangle}{2\pi} \left( -\frac{i}{4} - \frac{C}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \log \frac{\kappa |\gamma'(\cos \tau)|}{4} \right) \right\} \sin^2 \tau.
 \end{aligned}$$

Zur Behandlung des zweiten Anteils wenden wir ebenfalls partielle Integration an und erhalten:

$$\begin{aligned}
 &\int_0^\pi \langle \text{grad}_x \langle \text{grad}_x \Phi(\tilde{\gamma}(\tau), \tilde{\gamma}(\sigma)), \tilde{h}(\sigma) - \tilde{h}(\tau) \rangle, \gamma'(\cos \tau) \rangle \varphi(\sigma) d\sigma = \\
 &\frac{1}{2\pi} \frac{\langle \gamma'(\cos \tau), h'(\cos \tau) \rangle}{|\gamma'(\cos \tau)|^2} \int_0^\pi \frac{\sin \tau}{\cos \sigma - \cos \tau} \varphi(\sigma) d\sigma - \int_0^\pi N_2(\sigma, \tau) \varphi(\sigma) d\sigma
 \end{aligned}$$

mit dem Kern

$$\begin{aligned}
 N_2(\sigma, \tau) &:= \frac{i\kappa^2 \sin \sigma \sin \tau}{4} \left\{ \left( \kappa H_0^{(1)'}(\chi(\tau, \sigma)) - \frac{2\kappa H_1^{(1)'}}{|\tilde{\gamma}(\sigma) - \tilde{\gamma}(\tau)|}(\chi(\tau, \sigma)) + \frac{2\kappa H_1^{(1)}}{|\tilde{\gamma}(\sigma) - \tilde{\gamma}(\tau)|^2}(\chi(\tau, \sigma)) \right) \times \right. \\
 &\quad s_1(\tau, \sigma) s_2(\tau, \sigma) s_3(\tau, \sigma) + \left( H_0^{(1)}(\chi(\tau, \sigma)) - \frac{2\kappa H_1^{(1)}}{|\tilde{\gamma}(\sigma) - \tilde{\gamma}(\tau)|}(\chi(\tau, \sigma)) \right) \left\{ \frac{\langle \gamma'(\cos \sigma), \gamma'(\cos \tau) \rangle}{|\tilde{\gamma}(\sigma) - \tilde{\gamma}(\tau)|} s_3(\tau, \sigma) \right. \\
 &\quad \left. + s_2(\tau, \sigma) \frac{\langle \gamma'(\cos \sigma), \tilde{h}(\sigma) - \tilde{h}(\tau) \rangle}{|\tilde{\gamma}(\sigma) - \tilde{\gamma}(\tau)|} + s_2(\tau, \sigma) \frac{\langle h'(\cos \sigma), \tilde{\gamma}(\sigma) - \tilde{\gamma}(\tau) \rangle}{|\tilde{\gamma}(\sigma) - \tilde{\gamma}(\tau)|} \right. \\
 &\quad \left. \left. - s_1(\tau, \sigma) s_2(\tau, \sigma) s_3(\tau, \sigma) \right\} \right\} + \\
 &\frac{\sin \sigma \sin \tau \kappa i}{4} \left\{ H_1^{(1)}(\chi(\tau, \sigma)) \frac{\langle \gamma'(\cos \tau), h'(\cos \sigma) \rangle - s_2(\tau, \sigma) \langle \gamma'(\cos \tau), \tilde{h}(\sigma) - \tilde{h}(\tau) \rangle}{|\tilde{\gamma}(\sigma) - \tilde{\gamma}(\tau)|} \right. \\
 &\quad \left. + H_1^{(1)''}(\chi(\tau, \sigma)) s_2(\tau, \sigma) s_3(\tau, \sigma) \frac{\langle \gamma'(\cos \tau), \tilde{h}(\sigma) - \tilde{h}(\tau) \rangle}{|\tilde{\gamma}(\sigma) - \tilde{\gamma}(\tau)|} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{2\pi} \frac{\langle \gamma'(\cos \tau), h'(\cos \tau) \rangle}{|\gamma'(\cos \tau)|^2} \frac{1}{(\cos \sigma - \cos \tau)^2} \right\}.
 \end{aligned}$$

Hier haben wir die Abkürzungen

$$s_1(\tau, \sigma) := \frac{\langle \tilde{\gamma}(\sigma) - \tilde{\gamma}(\tau), \gamma'(\cos \sigma) \rangle}{|\tilde{\gamma}(\sigma) - \tilde{\gamma}(\tau)|},$$

$$s_2(\tau, \sigma) := \frac{\langle \tilde{\gamma}(\sigma) - \tilde{\gamma}(\tau), \gamma'(\cos \tau) \rangle}{|\tilde{\gamma}(\sigma) - \tilde{\gamma}(\tau)|}$$

sowie

$$s_3(\tau, \sigma) := \frac{\langle \tilde{\gamma}(\sigma) - \tilde{\gamma}(\tau), \tilde{h}(\sigma) - \tilde{h}(\tau) \rangle}{|\tilde{\gamma}(\sigma) - \tilde{\gamma}(\tau)|}$$

benutzt. Durch die Potenzreihendarstellung der Hankelfunktionen erhalten wir die folgende Aufspaltung von  $N_2$ :

$$N_2(\sigma, \tau) := N_{2,1}(\sigma, \tau) \log 4(\cos \sigma - \cos \tau)^2 + N_{2,2}(\sigma, \tau)$$

mit den Kernen

$$N_{2,1}(\tau, \sigma) := \frac{\kappa \sin \tau \sin \sigma}{2\pi} \left\{ \frac{\langle \gamma'(\cos \tau), \tilde{h}(\sigma) - \tilde{h}(\tau) \rangle}{|\tilde{\gamma}(\sigma) - \tilde{\gamma}(\tau)|} \times \right.$$

$$J_1(\chi(\tau, \sigma)) \left( \frac{\langle \gamma'(\cos \tau), h'(\cos \sigma) \rangle}{|\tilde{\gamma}(\sigma) - \tilde{\gamma}(\tau)|} - s_2(\tau, \sigma) \right) + J_1''(\chi(\tau, \sigma)) s_2(\tau, \sigma) s_3(\tau, \sigma) \left. \right\} +$$

$$\frac{\kappa^2 \sin \sigma \sin \tau}{2\pi} \left\{ \kappa J_0'(\chi(\tau, \sigma)) s_1(\tau, \sigma) s_2(\tau, \sigma) s_3(\tau, \sigma) + \left( J_0(\chi(\tau, \sigma)) - \frac{2J_1(\chi(\tau, \sigma))}{\kappa |\tilde{\gamma}(\sigma) - \tilde{\gamma}(\tau)|} \right) \times \right.$$

$$\left\{ \frac{\langle \gamma'(\cos \sigma), \gamma'(\cos \tau) \rangle}{|\tilde{\gamma}(\sigma) - \tilde{\gamma}(\tau)|} s_3(\tau, \sigma) + s_2(\tau, \sigma) \frac{\langle \gamma'(\cos \sigma), \tilde{h}(\sigma) - \tilde{h}(\tau) \rangle}{|\tilde{\gamma}(\sigma) - \tilde{\gamma}(\tau)|} \right.$$

$$\left. \left. + s_2(\tau, \sigma) \frac{\langle h'(\cos \sigma), \tilde{\gamma}(\sigma) - \tilde{\gamma}(\tau) \rangle}{|\tilde{\gamma}(\sigma) - \tilde{\gamma}(\tau)|} - s_1(\tau, \sigma) s_2(\tau, \sigma) s_3(\tau, \sigma) \right\} \right\}$$

und

$$N_{2,2}(\sigma, \tau) := N_2(\sigma, \tau) - N_{2,1}(\sigma, \tau) \log 4(\cos \sigma - \cos \tau)^2.$$

Für die Diagonalwerte berechnen wir unter Verwendung entsprechender Taylorreihenentwicklungen von  $\gamma$  und  $h$ :

$$N_{2,1}(\tau, \tau) := -\frac{\kappa^2}{8\pi} \langle \gamma'(\cos \tau), h'(\cos \tau) \rangle \sin^2 \tau,$$

$$N_{2,2}(\tau, \tau) := -\frac{1}{2\pi} \left\{ -\frac{1}{6} \frac{\langle \gamma'(\cos \tau), h'''(\cos \tau) \rangle}{|\gamma'(\cos \tau)|^2} - \frac{\langle \gamma'(\cos \tau), h'(\cos \tau) \rangle}{|\gamma'(\cos \tau)|^2} |\gamma''(\cos \tau)|^2 \right.$$

$$\left. + \frac{7}{4} \frac{\langle \gamma''(\cos \tau), h'(\cos \tau) \rangle \langle \gamma'(\cos \tau), \gamma''(\cos \tau) \rangle}{|\gamma'(\cos \tau)|^4} \right.$$

$$\left. + \frac{7}{4} \frac{\langle \gamma'(\cos \tau), h''(\cos \tau) \rangle \langle \gamma'(\cos \tau), \gamma''(\cos \tau) \rangle^2}{|\gamma'(\cos \tau)|^6} - \frac{1}{6} \frac{\langle \gamma'''(\cos \tau), h'(\cos \tau) \rangle}{|\gamma'(\cos \tau)|^2} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{4}{3} \frac{\langle \gamma'(\cos \tau), h'(\cos \tau) \rangle \langle \gamma'(\cos \tau), \gamma'''(\cos \tau) \rangle}{|\gamma'(\cos \tau)|^4} - \frac{1}{4} \frac{\langle \gamma''(\cos \tau), h''(\cos \tau) \rangle}{|\gamma'(\cos \tau)|^2} \\
 & - 4 \frac{\langle \gamma''(\cos \tau), h'(\cos \tau) \rangle \langle \gamma'(\cos \tau), \gamma''(\cos \tau) \rangle^2}{|\gamma'(\cos \tau)|^4} \\
 & - \kappa^2 \langle \gamma'(\cos \tau), h'(\cos \tau) \rangle \left( \frac{1}{2} \log \frac{\kappa |\gamma'(\cos \tau)|}{4} - \frac{C}{2} - \frac{1}{4} - \frac{\pi i}{4} \right) \sin^2 \tau.
 \end{aligned}$$

Wir sehen, daß die Integrale aus Formel (5.45) nur logarithmische Singularitäten besitzen. Folglich können wir die im dritten Kapitel entwickelten Quadraturformeln (3.4) und (3.5) zur Berechnung von Näherungswerten für  $g$  heranziehen. Auf Grund der Abbildungseigenschaften des Operators  $T'_\gamma$  (in Hölderräumen) erhalten wir  $g \in C_{ung}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$ . Damit können wir die für analytische Bögen exponentiell konvergierende Quadraturformelmethode aus Kapitel 3 anwenden, um die hypersinguläre Integralgleichung (5.43) mit rechter Seite  $g$  zu lösen.



# 6. Das Newtonverfahren zur numerischen Lösung des inversen Neumannproblems

In diesem Kapitel werden wir ein numerisches Lösungsverfahren für das inverse Neumannproblem entwickeln. Wir werden dabei ein Newtonverfahren verwenden. Newtonverfahren zur Lösung von inversen Streuproblemen für geschlossene Randkurven sind in [15, ?, ?, ?, ?, ?] getestet worden. Der Fall der Streuung an offenen schallweichen Bögen wurde von Kress in [18] untersucht.

Wir werden uns deshalb mit der Implementierung des Newtonverfahrens beschäftigen und diese im ersten Abschnitt dieses Kapitels im Detail beschreiben. Wir werden die für analytische Bögen exponentiell konvergierende Quadraturformelmethode aus dem Kapitel 3 als Vorwärtzlöser einsetzen, so daß wir bei hinreichend glatten Bögen eine entsprechend schnelle Rekonstruktion erwarten. Dann werden wir die Ergebnisse von numerischen Versuchen bei unterschiedlicher Wahl der Basisfunktionen für die endlichdimensionalen Ansatzräumen vorstellen. In einem weiteren Abschnitt werden wir demonstrieren, wie der Aufwand in den einzelnen Newtonschritten durch die Anwendung von Quasi-Newtonverfahren reduziert werden kann.

## 6.1 Beschreibung des Newtonverfahrens

Ziel dieses Abschnittes ist eine Beschreibung der Implementation des Newtonverfahrens zur näherungsweise Lösung der Operatorgleichung

$$(6.1) \quad F(\Gamma) = u_\infty.$$

Dazu ersetzen wir Gleichung (6.1) durch die folgende linearisierte Version

$$(6.2) \quad F'_\gamma h + F_\gamma = u_\infty,$$

die wir für  $h$  lösen. Indem wir  $\tilde{\gamma} := \gamma + h$  setzen, bekommen wir eine neue Näherung  $\tilde{\gamma}$  für den Bogen. Das Newtonverfahren besteht in einer Iteration dieses Verfahrens gemäß

$$(6.3) \quad \gamma_{n+1} := \gamma_n - (F'_{\gamma_n})^{-1}(F_{\gamma_n} - u_\infty).$$

Wir beschränken uns auf Bögen der Gestalt  $\gamma(s) = (s, \eta(s))$ ,  $s \in [-1, 1]$ . Dann hat die Differenz  $h$  zweier solcher Bögen die Gestalt  $h(s) = (0, \tilde{h}(s))$ . Wir suchen  $\tilde{h}_N$  aus

$$\text{span}\{T_0, T_1, \dots, T_N\},$$

wobei wir mit  $T_k$  das  $k$ -te Basiselement des  $N + 1$ -dimensionalen Ansatzraumes bezeichnen. Wir schreiben die unbekannte Funktion  $h_N$  in der Form

$$(h_N)(s) := \sum_{k=0}^N a_k q_k(s), \quad s \in [-1, 1], \quad a_k \in \mathbb{R},$$

wobei wir zur Abkürzung  $q_k(s) := (0, T_k(s))$  setzen. Dann können wir Gleichung (6.2) in der Form

$$(6.4) \quad \sum_{k=0}^N a_k F'_\gamma q_k + F_\gamma = u_\infty$$

schreiben. Um ein vollständig diskretes Verfahren zur Lösung von Gleichung (6.4) zu erhalten, verwenden wir eine Kollokationsmethode bezüglich der  $m$  äquidistanten Punkte  $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_m$  auf  $\Omega$ . Wir haben also das lineare Gleichungssystem

$$(6.5) \quad \sum_{k=0}^N a_k (F'_\gamma q_k)(\hat{x}_k) = u_\infty(\hat{x}_j) - F_\gamma(\hat{x}_j), \quad j = 1, \dots, m,$$

für reelle  $a_k$  zu lösen. Falls wir  $m > N + 1$  wählen, liegt ein überbestimmtes lineares Gleichungssystem für die  $N + 1$  reellen Koeffizienten  $a_k$  vor. Wir lösen deshalb das System (6.5) im least-square-Sinn. Da sich die Kompaktheit von  $F$  auf  $F'_\gamma$  überträgt, haben wir Gleichung (6.5) zu regularisieren. Dazu verwenden wir eine Tichonow-Regularisierung. Wir führen das Kostenfunktional

$$(6.6) \quad K(a_0, \dots, a_N) := \sum_{i=1}^m \left| \sum_{j=0}^N b_{ij} a_j - c_i \right|^2 + \alpha \sum_{j=1}^N \theta_j a_j^2$$

mit den Koeffizienten

$$b_{jk} := (F'_\gamma q_k)(\hat{x}_j), \quad k = 0, \dots, N, \quad j = 1, \dots, m$$

und den rechten Seiten

$$c_i := u_\infty(\hat{x}_i) - F_\gamma(\hat{x}_i), \quad i = 1, \dots, m$$

sowie den positiven Gewichten

$$\Theta_j := \sum_{l=1}^m \bar{b}_{lj} b_{lj}, \quad j = 0, \dots, N$$

und einem positiven, geeignet klein gewählten Regularisierungsparameter  $\alpha$  ein. Die obige Wahl der Gewichte führt auf den Levenberg-Marquardt-Algorithmus. Eine Minimierung des Kostenfunktional  $K$  bezüglich der Unbekannten  $a_0, \dots, a_N$  kann durch Lösen des linearen Gleichungssystems

$$(6.7) \quad \sum_{l=0}^N \sum_{i=1}^m \bar{b}_{ij} b_{il} a_l + \alpha \theta_j a_j = \sum_{i=1}^m \bar{b}_{ij} c_j, \quad j = 0, \dots, N$$

erfolgen. Im folgenden geben wir eine zusammenfassende Beschreibung eines Newtonschrittes.

- Bestimme für einen gegebenen Startbogen  $\gamma$  und ein gegebenes einfallendes Feld  $u^i$  die Koeffizienten des linearen Gleichungssystems und der rechten Seiten für das direkte Streuproblem aus Kapitel 2. Bestimme eine LU-Zerlegung dieser Koeffizientenmatrix. Berechne  $F_\gamma(\hat{x}_k)$  für  $k = 1, \dots, m$ .
- Für die Bestimmung von  $F'_\gamma \tilde{q}_k$  berechne die rechten Seiten für  $k = 0, \dots, N$  mit der Quadraturformelmethode aus den Abschnitten 5.3 und 3.1. Löse die dazugehörigen  $N + 1$  direkten Probleme unter Benutzung der LU-Zerlegung. Bestimme die Koeffizienten des linearen Gleichungssystems (6.7).
- Löse das lineare Gleichungssystem (6.7) für  $a_k$ . Abschließend bestimme einen neuen Bogen durch Berechnung von  $\tilde{\gamma} := \gamma + h_N$ .

Wir sehen, daß wir in jedem Newtonschritt  $N + 2$  direkte Problem zu lösen haben. Das kann effizient mit dem im dritten Kapitel beschriebenen Quadraturformelverfahren erfolgen. Das Verfahren kann ohne Schwierigkeiten so modifiziert werden, daß es möglich ist, gleichzeitig mehrere einfallende Wellen zu betrachten. Wir erwarten, daß die so erhaltenen Rekonstruktionen besser sind als diejenigen, die wir bei Verwendung einer einfallenden Welle erhalten. Ursache dafür ist das Vorliegen von mehr Informationen über den zu rekonstruierenden Bogen bei der Verwendung mehrerer Fernfelder.

## 6.2 Numerische Experimente mit Orthogonalpolynomen als Ansatzfunktionen

In diesem Abschnitt wollen wir die Ergebnisse konkreter numerischer Rechnungen vorstellen. Um ein ‘inverse crime’ zu vermeiden, verwenden wir für die Berechnung

der synthetischen Daten jeweils  $2n = 128$  Quadraturpunkte und für das Lösen der hypersingulären Integralgleichungen innerhalb eines Newtonschrittes jeweils  $2n = 64$  Quadraturpunkte. In unseren numerischen Experimenten benutzen wir  $m = 64$  äquidistante Punkte auf dem Einheitskreis zur Fernfeldauswertung. Den Regularisierungsparameter  $\alpha$  bestimmen wir durch 'trial and error'. In unseren Experimenten verwendeten wir  $\alpha \in [0.0, 0.01]$ .

Wir wählen die Tschebyschewpolynome  $T_k(s) := \cos(k \arccos s)$  als Ansatzfunktionen. Diese Polynome haben die Eigenschaft, daß sie bezüglich des mit der Gewichtsfunktion  $\frac{1}{\sqrt{1-s^2}}$ ,  $s \in [-1, 1]$  versehenen  $L^2$ -Skalarproduktes orthogonal sind und daß für jede hinreichend glatte Funktion  $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  gleichmäßig konvergente Fourierreihenentwicklungen nach  $T_k$  existieren (vergleiche [45]).

Als Startbogen für das Newtonverfahren verwenden wir ein Geradenstück für  $N = 2$ . Dann benutzen wir den Bogen, den wir für einen festen Approximationslevel  $N$  erhalten haben, als Startbogen für die Iterationen auf dem nächsten Approximationslevel  $N + 1$ . Wir wählen als Abbruchkriterium den relativen  $L^2$ -Fehler in den Fernfeldern

$$(6.8) \quad Res := \frac{\|F_\gamma - u_\infty\|_{L^2(\Omega)}}{\|u_\infty\|_{L^2(\Omega)}}.$$

Falls der Wert von  $Res$  in zwei aufeinanderfolgenden Schritten kleiner als ein fester Wert  $\mu$  ist, dann erhöhen wir die Dimension  $N$  des Ansatzraumes um eins. Im Durchschnitt brauchen wir in Abhängigkeit vom gewählten  $\mu$  auf jedem Approximationslevel drei bis fünf Iterationen, um diesem Abbruchkriterium zu genügen. Den Fehler in unseren Rekonstruktionen messen wir durch den relativen  $L^2$ -Fehler in den Parametrisierungskurven:

$$(6.9) \quad E = \frac{\|\gamma_N - \gamma\|_{L^2[0,\pi]}}{\|\gamma\|_{L^2[0,\pi]}}.$$

Zum Testen der Stabilität unseres Verfahrens addieren wir ein zufälliges Rauschen zu den (exakten) synthetisch erzeugten Fernfeldern, welches wir als Zufallszahl aus dem Intervall  $[-\xi, \xi]$  mit  $\xi := \sqrt{2\pi} \epsilon \|u_\infty\|_{L^2(\Omega)}$  erhalten.

Zur Vermeidung von einem 'inverse crime' betrachten wir Beispielbögen, die keine Polynome über dem Intervall  $[-1, 1]$  sind, also nicht in den Ansatzräumen enthalten sind.

**Beispiel 6.1** Als erstes numerisches Beispiel benutzen wir einen Bogen mit folgender Parametrisierung:

$$(6.10) \quad y(s) := \frac{1}{2} \cos \frac{\pi s}{2} + \frac{1}{5} \sin \frac{\pi s}{2} - \frac{1}{10} \cos \frac{3\pi s}{2}, \quad s \in [-1, 1].$$

**Beispiel 6.2** Als zweites numerisches Beispiel verwenden wir einen Bogen mit folgender Parametrisierung:

$$(6.11) \quad y(s) := \frac{3}{5} \cos \frac{\pi s}{2} + \frac{1}{5} \sin \frac{\pi s}{2}, \quad s \in [-1, 1].$$

In Tabelle 6.1 untersuchen wir den Einfluß des Regularisierungsparameters und des Rauschens auf die Güte der Rekonstruktion, indem wir die Koeffizienten der Fourierreihe der Parametrisierung von Bogen 1 nach Tschebyschewpolynomen angeben. Die letzte Zeile der Tabelle enthält die Koeffizienten der besten  $L^2$ -Approximation für die zweite Komponente von  $\gamma$  bezüglich der Entwicklung nach Tschebyschewpolynomen. In Abbildung 6.1 sehen wir numerische Ergebnisse für eingeschränkte Blickwinkel, d.h., wir kennen das Fernfeld nur auf einem Teil des Einheitskreises. Dabei stellen die gestrichelten Linien die exakten Bögen dar, die durchgehenden Linien sind die rekonstruierten Bögen. In unseren Experimenten haben wir festgestellt, daß der Beobachtungswinkel  $\delta$  größer als 180 Grad sein muß, um noch akzeptable Ergebnisse zu erzielen. Für die Wellenzahlen  $\kappa = 1$  und  $\kappa = 3$  waren Rekonstruktionen nur für Beobachtungswinkel nahe bei  $2\pi$  möglich. Die Bilder 6.2, 6.4, 6.6 und 6.8 zeigen die Ergebnisse von Rekonstruktionen für exakte Fernfelder. Die Qualität der Rekonstruktion ist hoch, wenn wir einen geeignet nah liegenden Startbogen wählen. Die Bilder 6.4 und 6.8 verdeutlichen die Tatsache, daß wir für kleinere Wellenzahlen schlechtere Rekonstruktionen erwarten müssen, da die Differenzen in den Fernfeldern für unterschiedliche Bögen kleiner sind. Die verwendeten Abbruchparameter und die Dimension  $N$  der Ansatzräume werden jeweils angegeben. Die Bilder 6.3, 6.5, 6.7 und 6.9 enthalten Rekonstruktionen für 10 Prozent Rauschen. In unseren Versuchen haben wir festgestellt, daß wir für kleine Wellenzahlen ab  $N > 6$  Stabilitätsprobleme haben. Für größere  $\kappa$  beginnen diese Schwierigkeiten ab  $N = 9$ .

Die Tabellen 6.2 bis 6.9 enthalten die Größen  $Res$  und  $E$  für unterschiedliche Wellenzahlen  $\kappa$  und unterschiedlich großes Rauschen  $\epsilon$ . In Abbildung 6.11 sehen wir Rekonstruktionen bei Verwendung von  $p = 4$  einfallenden Wellen.

Wir haben auch Experimente mit anderen Ansatzfunktionen wie Tschebyschewpolynomen zweiter Art, Hermitepolynomen und Legendrepolynomen durchgeführt. Unsere Experimente ergaben, daß diese Polynome bezüglich ihrer Eigenschaften als Ansatzfunktionen nicht sehr unterschiedlich sind. Ursache dafür ist die Tatsache, daß die Fourierkoeffizienten in den entsprechenden Orthogonalentwicklungen in der gleichen Größenordnung abklingen. Im Fall der Hermitepolynome haben wir geringfügig schlechtere Rekonstruktionseigenschaften festgestellt. Insgesamt sehen wir, daß das regularisierte Newtonverfahren bei Verwendung von Orthonormalpolynomen als Ansatzfunktionen gute Ergebnisse liefert, falls wir (wie für ein Newtonverfahren zu erwarten) eine Startkurve wählen, die schon eine relativ gute Näherung für den zu rekonstruierenden Bogen darstellt.

Tabelle 6.1: Rekonstruktion für Bogen 1 mit  $\kappa = 1$

d	$\epsilon$	$\alpha$	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$
(1,0)	0.00	0.01	0.26	0.23	-0.22	-0.03	-0.06	0.00
	0.10	0.01	0.27	0.18	-0.20	-0.05	-0.07	0.01
(-1,0)	0.00	0.00	0.26	0.22	-0.23	-0.03	-0.06	0.00
	0.10	0.01	0.28	0.24	-0.22	-0.04	-0.04	0.04
(0,1)	0.00	0.00	0.26	0.23	-0.22	-0.03	-0.06	0.00
	0.10	0.01	0.27	0.19	-0.20	-0.15	-0.04	0.05
(0,-1)	0.00	0.01	0.25	0.22	-0.23	-0.04	-0.06	0.08
	0.10	0.01	0.25	0.20	-0.21	-0.12	-0.09	0.05
$\infty$			0.26	0.23	-0.22	-0.03	-0.06	0.00

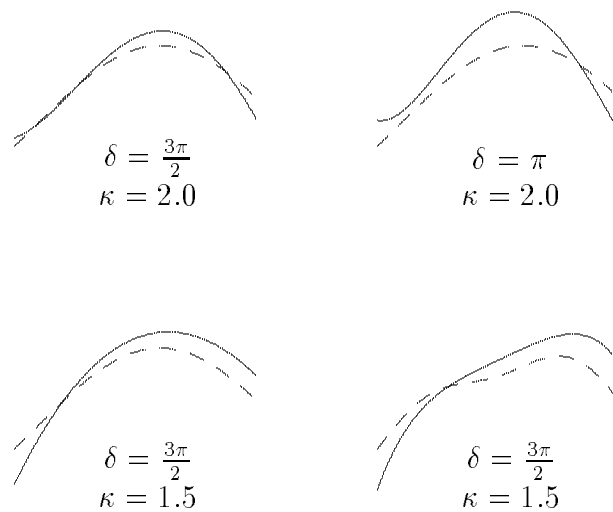


Abbildung 6.1: Rekonstruktionen für eingeschränkte Beobachtungswinkel  $\delta$  und  $N = 4, p = 4$

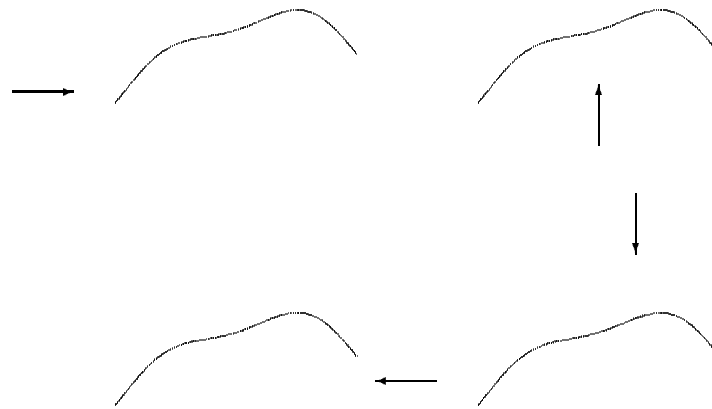


Abbildung 6.2: Rekonstruktion des Bogens 1 für  $N = 6$ ,  $\kappa = 3$ ,  $\mu = 0.003$

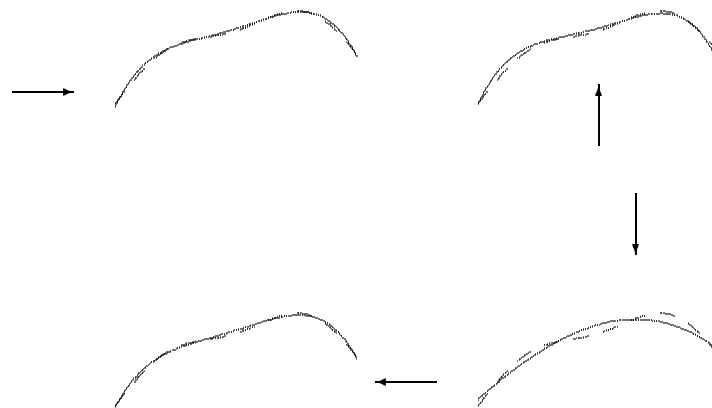


Abbildung 6.3: Rekonstruktion des Bogens 1 für  $N = 6$ ,  $\kappa = 3$ ,  $\epsilon = 0.1$ ,  $\mu = 0.8 * \epsilon$

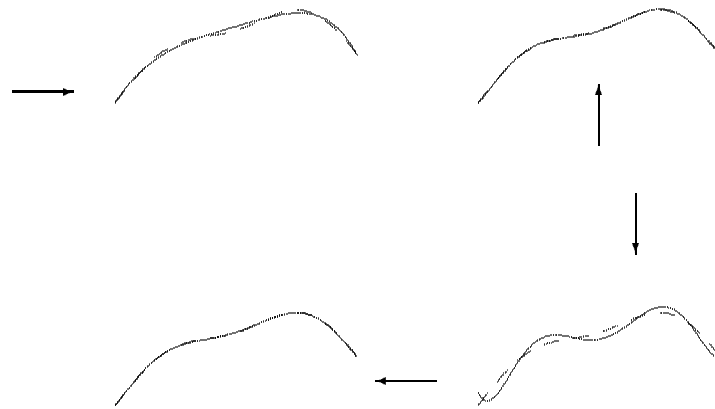


Abbildung 6.4: Rekonstruktion von Bogen 1 für  $N = 6$ ,  $\kappa = 1$ ,  $\mu = 0.003$



Abbildung 6.5: Rekonstruktion von Bogen 1 für  $N = 6$ ,  $\kappa = 1$ ,  $\epsilon = 0.1$ ,  $\mu = 0.6 * \epsilon$



Tabelle 6.2: Rekonstruktion für Bogen 1 aus exakten Daten

d	k	N	E	Res
(1,0)	3	6	0.006014	0.002866
(0,1)	3	6	0.006409	0.001307
(-1,0)	3	6	0.005934	0.002670
(0,-1)	3	6	0.006425	0.000896

Tabelle 6.3: Rekonstruktion für Bogen 1 aus gestörten Daten

d	k	$\epsilon$	N	E	Res
(1,0)	3	0.05	6	0.010821	0.042138
(0,1)	3	0.01	6	0.007987	0.008516
(-1,0)	3	0.10	6	0.018075	0.082143
(0,-1)	3	0.03	6	0.043877	0.027103

Tabelle 6.4: Rekonstruktion für Bogen 1 aus exakten Daten

d	k	N	E	Res
(1,0)	1	6	0.011115	0.007425
(0,1)	1	6	0.005816	0.000709
(-1,0)	1	6	0.006864	0.002860
(0,-1)	1	6	0.130901	0.003610

Tabelle 6.5: Rekonstruktion für Bogen 1 aus gestörten Daten

d	k	$\epsilon$	N	E	Res
(1,0)	1	0.05	6	0.045186	0.040046
(0,1)	1	0.01	6	0.120281	0.008599
(-1,0)	1	0.10	6	0.104776	0.075559
(0,-1)	1	0.03	6	0.213688	0.027291

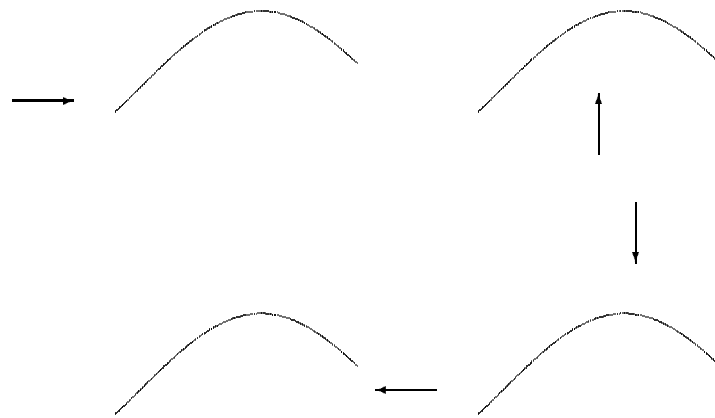


Abbildung 6.6: Rekonstruktion von Bogen 2 für  $N = 7$ ,  $\kappa = 2$ ,  $\mu = 0.0005$

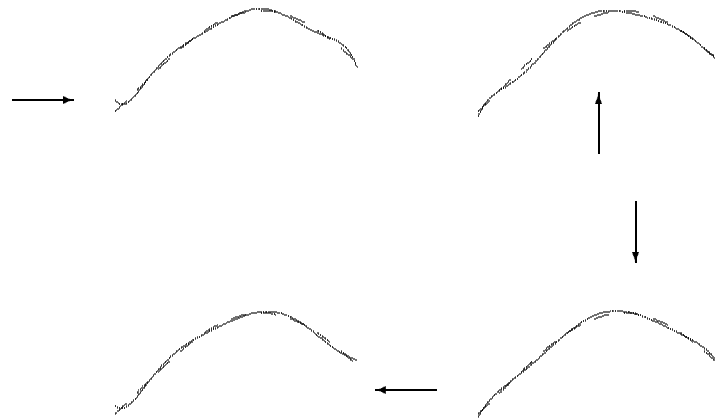


Abbildung 6.7: Rekonstruktion von Bogen 2 für  $N = 7$ ,  $k = 2$ ,  $\epsilon = 0.1$ ,  $\mu = 0.6 * \epsilon$

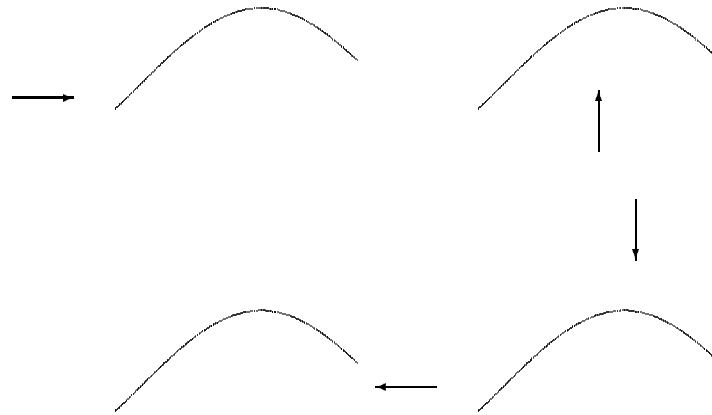


Abbildung 6.8: Rekonstruktion von Bogen 2 für  $N = 6$ ,  $\kappa = 1$ ,  $\mu = 0.003$

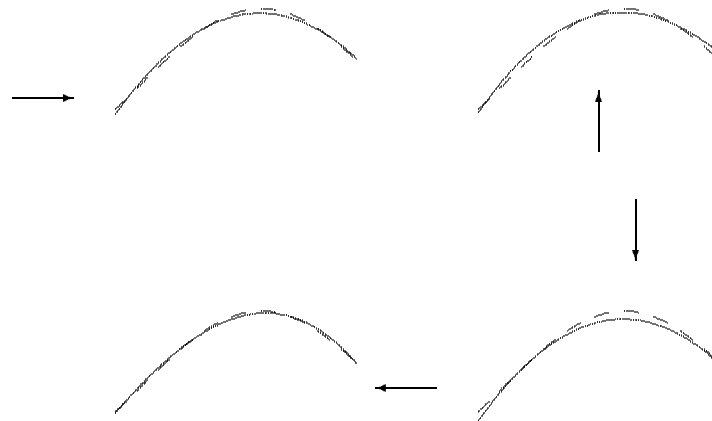


Abbildung 6.9: Rekonstruktion von Bogen 2 für  $N = 6$ ,  $k = 1$ ,  $\epsilon = 0.1$ ,  $\mu = 0.8 * \epsilon$

Tabelle 6.6: Rekonstruktion für Bogen 2 aus exakten Daten

d	k	N	E	Res
(1,0)	2	7	0.000013	0.000018
(0,1)	2	7	0.000008	0.000003
(-1,0)	2	7	0.000008	0.000005
(0,-1)	2	7	0.000008	0.000004

Tabelle 6.7: Rekonstruktion für Bogen 2 aus gestörten Daten

d	k	$\epsilon$	N	E	Res
(1,0)	2	0.05	7	0.048297	0.037521
(0,1)	2	0.01	7	0.007206	0.007569
(-1,0)	2	0.10	7	0.066199	0.075669
(0,-1)	2	0.03	7	0.015016	0.022795

Tabelle 6.8: Rekonstruktion für Bogen 2 aus exakten Daten

d	k	N	E	Res
(1,0)	1	6	0.000077	0.000149
(0,1)	1	6	0.000069	0.000060
(-1,0)	1	6	0.000154	0.000238
(0,-1)	1	6	0.000077	0.000087

Tabelle 6.9: Rekonstruktion für Bogen 2 aus gestörten Daten

d	k	$\epsilon$	N	E	Res
(1,0)	1	0.1	6	0.034147	0.079415
(0,1)	1	0.1	6	0.035374	0.079046
(-1,0)	1	0.1	6	0.028477	0.079324
(0,-1)	1	0.1	6	0.067565	0.078055

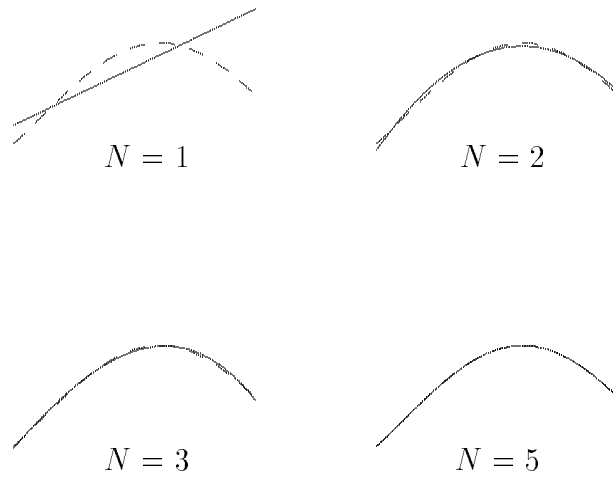


Abbildung 6.10: Rekonstruktion von Bogen 2 für  $k = 2$

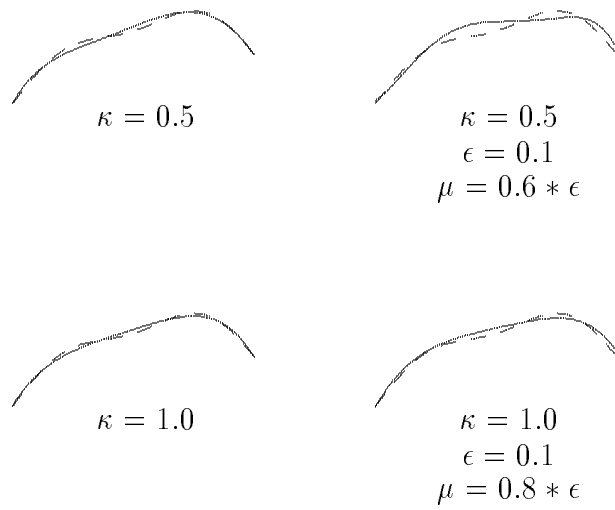


Abbildung 6.11: Rekonstruktion von Bogen 1 für  $p = 4$  einfallende Wellen

### 6.3 Ergebnisse numerischer Experimente mit radialen Basisfunktionen als Ansatzfunktionen

In diesem Abschnitt sollen Ergebnisse numerischer Experimente mit radialen Basisfunktionen als Ansatzfunktionen dargestellt werden. Diese Funktionen zeigen im Gegensatz zu den im letzten Abschnitt untersuchten Polynomen ein sehr lokales Verhalten. Aus diesem Grund erwarten wir, daß diese Funktionen besser zur lokal guten Rekonstruktion geeignet sind. Wir suchen die Funktion  $\tilde{h}_N$  in der Form

$$(6.12) \quad \tilde{h}_N(\tau) := \sum_{k=0}^N a_k \Phi(|\tau - b_k|), \quad a_k \in \mathbb{R}, \quad \tau \in [-1, 1],$$

wobei die  $a_k$  gesucht sind und die Werte  $b_k \in \mathbb{R}$  feste 'center'-Punkte aus dem Intervall  $[-1, 1]$  darstellen.

Wir wählen der Einfachheit halber die radiale Basisfunktion:

$$(6.13) \quad \Phi(x) := \exp(-cx^2), \quad c > 0.$$

Mit dem Parameter  $c$  können wir die 'Bandbreite' der Funktion  $\Phi$ , die in ihrer Form einer Gaußschen Glockenkurve ähnelt, steuern. Zur Interpolation mit solchen Funktionen gibt es einige Untersuchungen. Wir verweisen auf das Buch von Stenger [59] für den eindimensionalen Fall und auf die neueren Arbeiten von May'za und Schmidt [34] für höhere Dimensionen. Es ergeben sich eine Reihe von Fragen, die bei der Verwendung solcher radialer Basisfunktionen entstehen:

- Wie sind die 'center'  $b_k$  zu wählen?
- Wie ist die 'Bandbreite'  $c$  geeignet zu wählen?

Diese Fragen werden Gegenstand weiterer Untersuchungen sein. Insbesondere denken wir daran, die 'center' zusätzlich als zu bestimmende Größen in das least-square-Optimierungsproblem aufzunehmen.

Wir begnügen uns mit zwei Beispielen, die zeigen, daß es möglich ist, Ansatzfunktionen der Form (6.13) zu wählen, um akzeptable numerische Ergebnisse zu erhalten. Wir verwenden 'center', die gleichmäßig auf das Intervall  $[-1, 1]$  verteilt sind. In Bild 6.12 sehen wir Rekonstruktionen, die wir bei alleiniger Verwendung von Ansatzfunktionen der Form (6.12) erhalten. In unseren Experimenten benötigten wir deutlich mehr Iterationen als bei der Verwendung von Tschebyschewpolynomen. Bei nichtgeeigneter Wahl von  $c$  war oft keine zufriedenstellende Rekon-

struktion möglich. Wir sehen, daß die so erhaltenen Rekonstruktionen in Abhängigkeit von der Richtung der einfallenden Welle deutlich schlechter als die im letzten Abschnitt erhaltenen sind. Das Verfahren ist bezüglich der Wahl der 'Bandbreite'  $c$  sehr empfindlich. Das schlechte Rekonstruktionsverhalten wird dadurch verursacht, daß wir versuchen, mit lokalen Funktionen eine sowohl global als auch lokal gute Rekonstruktion zu erhalten.

Aus diesem Grund wählen wir nun Ansatzfunktionen der Gestalt:

$$(6.14) \quad \tilde{h}_N(\tau) := a_{-3}T_0(\tau) + a_{-2}T_1(\tau) + a_{-1}T_2(\tau) + \sum_{k=0}^N a_k \Phi(|\tau - b_k|), \quad a_k \in \mathbb{R},$$

wobei wir mit  $T_0, T_1, T_2$  die ersten drei Tschebyschewpolynome bezeichnen. Der durch die Linearkombination der Tschebyschewpolynome erzeugte Anteil hat die Aufgabe, für eine genügend gute globale Rekonstruktion zu sorgen. Für eine gute lokale Approximation sind dann die radialen Basisfunktionen verantwortlich.

In Bild 6.13 sehen wir die Ergebnisse numerischer Experimente für diesen Fall. Tabelle 6.10 enthält die Größen  $Res$  und  $E$  für unterschiedliche Wahl der Einfallsrichtung, des Parameters  $c$  bzw. unterschiedlich großes Rauschen. Wir erhalten Rekonstruktionen, die annähernd die gleiche Güte wie entsprechende Rekonstruktionen aus Abschnitt 6.2 haben. Die Anzahl der benötigten Iterationen ist geringfügig kleiner. Das Verfahren ist bezüglich der Wahl der Bandbreite  $c$  empfindlich. Wir erwarten, daß der Parameter  $c$  in Abhängigkeit vom Abstand der 'center'-Punkte gewählt werden muß, um gute Rekonstruktions- bzw. Approximationseigenschaften zu erhalten.

Tabelle 6.10: Rekonstruktion für Bogen 1 mit radialen Basisfunktionen

c	d	k	$\epsilon$	$\alpha$	N	E	Res
5.0	(1,0)	3	0.00	0.000	5	0.004882	0.001694
5.0	(1,0)	3	0.10	0.010	5	0.066476	0.068773
5.0	(-1,0)	2	0.00	0.001	5	0.007224	0.002045
5.0	(-1,0)	2	0.10	0.010	5	0.065610	0.068939
2.0	(0,-1)	1	0.00	0.000	4	0.047019	0.002114
5.0	(0,-1)	1	0.00	0.000	2	0.020736	0.001568
10.0	(0,-1)	1	0.00	0.000	3	0.091644	0.003014
10.0	(0,1)	1	0.00	0.001	5	0.041064	0.001243
3.0	(0,1)	1	0.00	0.001	4	0.021629	0.000817





Abbildung 6.12: Rekonstruktion von Bogen 1 mit Ansatz (6.12) für  $N = 6$  und  $\kappa = 1, \mu = 0.001, c = 1.5$

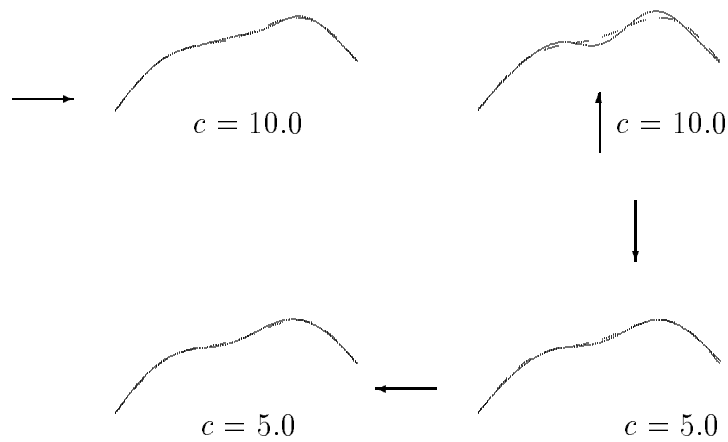


Abbildung 6.13: Rekonstruktion von Bogen 1 mit Ansatz (6.14) für  $N = 4$  und  $\kappa = 1, \mu = 0.001$

## 6.4 Experimente mit Quasi-Newtonverfahren

Eine neue Berechnung der Fréchet-Ableitung in jedem Schritt des Newtonverfahrens ist aufwendig, da in Abhängigkeit von der Dimension des Ansatzraumes jeweils eine bestimmte Anzahl direkter Probleme gelöst werden muß. Deshalb liegt es nahe, die Praktikabilität von Quasi-Newtonverfahren zu testen. Zunächst halten wir die im ersten Schritt berechnete Fréchet-Ableitung fest, d.h., wir verwenden die Iterationsvorschrift

$$(6.15) \quad \gamma_{n+1} := \gamma_n - (F'_{\gamma_0})^{-1}(F_{\gamma_n} - u_\infty)$$

an Stelle von

$$(6.16) \quad \gamma_{n+1} := \gamma_n - (F'_{\gamma_n})^{-1}(F_{\gamma_n} - u_\infty).$$

Wir benutzen als Startbogen ein Geradenstück und Tschebyschewpolynome als Ansatzfunktionen. Eine explizite Berechnung der Fréchet-Ableitung, wie dies im Fall des Einheitskreises in [23] geschehen ist, ist für das Geradenstück nicht sinnvoll, da die (exakte) Lösung dieses Streuproblems als Grenzfall der Streuung an einer Ellipse mit gegen Null gehender kleiner Halbachse Mathieufunktionen beinhaltet, für die keine geeigneten numerischen Implementationen zur Verfügung stehen. In unseren Experimenten waren 20 bis 30 Iterationen nötig, um das im Abschnitt 6.1 beschriebene Abbruchkriterium zu erfüllen. Bei der Verwendung des reinen Newtonverfahrens haben wir hingegen im Durchschnitt höchstens 15 Iterationen benötigt. Die Abbildungen 6.14 und 6.15 zeigen Rekonstruktionen mit dem Quasi-Newtonverfahren mit vier einfallenden Wellen. Rekonstruktionsversuche mit einer einfallenden Welle scheiterten, wenn sich die Startkurve nicht hinreichend nah an der zu rekonstruierenden Kurve befand. Das Verfahren ist sehr empfindlich bezüglich Rauschen, und es lieferte nur für niedrige Polynomgrade und große Wellenzahlen akzeptable Ergebnisse. Offensichtlich liegen für das Geradenstück als Startkurve doch zu wenig Informationen vor, um zufriedenstellende Rekonstruktionen zu gewährleisten. Als zweite Möglichkeit zur Aufwandssreduzierung bei der Berechnung der Fréchet-Ableitung haben wir eine Mischform von reinem Newtonverfahren und einem Quasi-Newtonverfahren getestet, indem wir die Fréchet-Ableitung nur dann neu berechnen, wenn wir die Dimension des Ansatzraumes erhöhen. Um die im Bild 6.16 und 6.17 dargestellten Rekonstruktionen zu erhalten, waren hier 20 bis 40 Iterationen nötig. Diese Variante ist stabil bezüglich Rauschen. Im Vergleich mit dem reinen Newtonverfahren wird der Aufwand stark reduziert, da die aufwendige Berechnung der Fréchet-Ableitung wesentlich seltener notwendig ist. Die Qualität der erhaltenen Rekonstruktionen ist nicht schlechter als für das reine Newtonverfahren, allerdings ist das modifizierte Quasi-Newtonverfahren nicht so stabil.

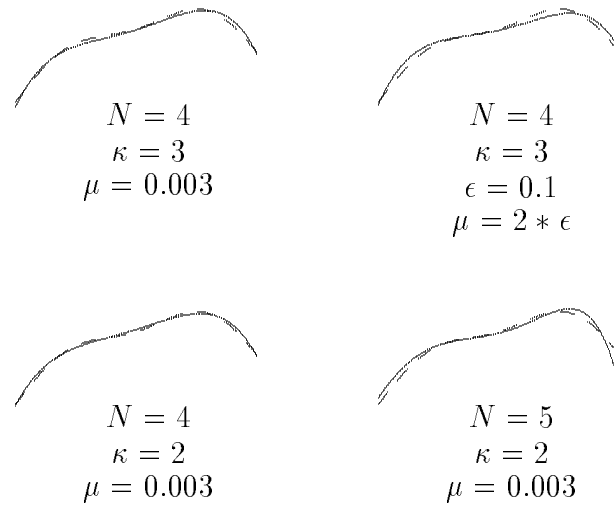


Abbildung 6.14: Rekonstruktion von Bogen 1 mit einem Quasi-Newtonverfahren für  $p = 4$

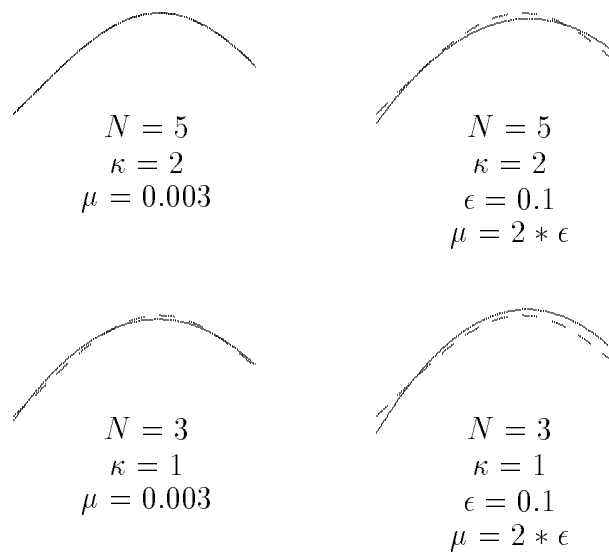


Abbildung 6.15: Rekonstruktion von Bogen 2 mit einem Quasi-Newtonverfahren für  $p = 4$

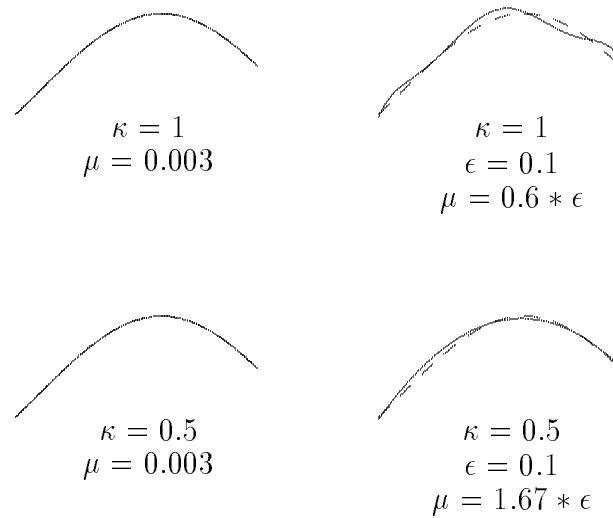


Abbildung 6.16: Rekonstruktion von Bogen 2 mit einem modifizierten Quasi-Newtonverfahren für  $N = 6$  und  $p = 4$

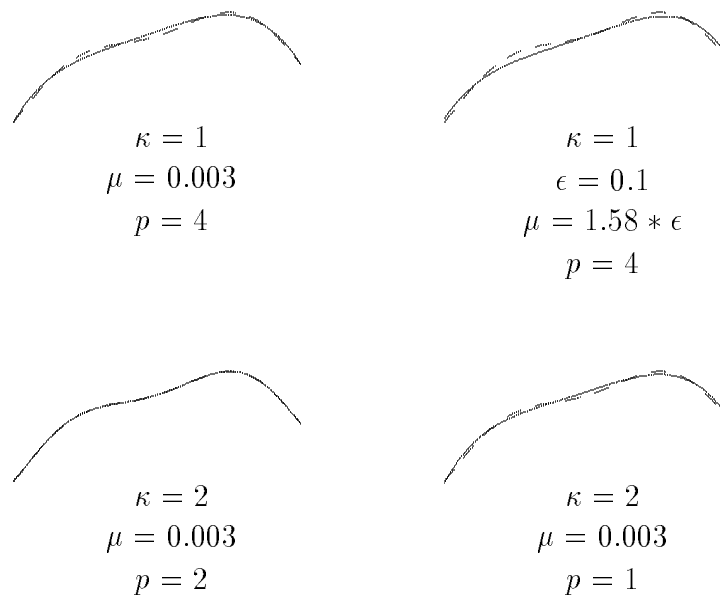


Abbildung 6.17: Rekonstruktion von Bogen 1 mit einem modifizierten Quasi-Newtonverfahren für  $N = 6$

## 6.5 Mögliche weitere Untersuchungsrichtungen

Für die Streuung an einem offenen schallweichen Bogen konnte die Form des Nullraums der Fréchet-Ableitung des Fernfeldoperators explizit angegeben werden (vergleiche [18]). Dabei wurde im wesentlichen von der Charakterisierung der Fréchet-Ableitung als Fernfeld eines bestimmten Dirichletproblems und dem Eindeutigkeitssatz von Holmgren Gebrauch gemacht. Eine Kenntnis des Nullraumes der Fréchet-Ableitung ist für die Sicherung der Durchführbarkeit des Newtonverfahrens nötig, da sie uns gestattet, solche Klassen von Parametrisierungen zu wählen, für die die Fréchet-Ableitung injektiv ist. Es ist uns nicht gelungen die Form des Nullraums der Fréchet-Ableitung des Fernfeldoperators für einen schallharten Bogen zu bestimmen. Auf Grund der komplizierteren Form der Neumanndaten im Charakterisierungssatz 5.7 ist eine Anwendung des Holmgrenschen Eindeutigkeitssatzes nicht ohne weiteres möglich.

In der vorliegenden Arbeit wurde die Durchführbarkeit von (regularisierten) Newton- und Quasi-Newtonverfahren zur Lösung des inversen Streuproblems für einen schallharten Bogen demonstriert. Es wurden aber keine Konvergenzaussagen bewiesen. Die bekannten klassischen Konvergenzaussagen für Newtonverfahren zur Lösung von nichtlinearen Operatorgleichungen setzen die Beschränktheit (und damit Stetigkeit) der Inversen der Fréchet-Ableitung voraus. In unserem Fall liegt aber gerade eine unbeschränkte Inverse der Fréchet-Ableitung  $F'_\gamma$  auf Grund der Kompaktheit von  $F$  vor. Das macht eine Anwendung von Regularisierungsstrategien notwendig. Konvergenzaspekte für Newton-artige Verfahren, die in jedem Schritt eine erneute Wahl des Regularisierungsparameters erfordern, sind in der Arbeit von Bakushinskii [2] dargestellt. Eine Konvergenzanalyse für ein modifiziertes Newtonverfahren zur Lösung von singulären Operatorgleichungen (d.h., die Fréchet-Ableitung muß nicht notwendigerweise injektiv sein), ist in [44] durchgeführt worden. Nashed und Chen benutzen dabei an Stelle der Inversen der Fréchet-Ableitung äußere Inverse. Die abgeschnittene Singulärwertzerlegung eines Operators (neben der Tichonowregularisierung eine andere Regularisierungsstrategie) hat gerade die Eigenschaft, äußere Inverse dieses Operators zu sein. Der bei der Tichonowregularisierung erhaltene Operator ist hingegen nur näherungsweise äußere Inverse des Ausgangsoperators.

Ziel weiterer Untersuchungen wird es sein, unter Benutzung von Ideen aus [44] und [2] eine Konvergenzanalyse zur Lösung von schlechtgestellten Operatorgleichungen mit dem Newtonverfahren durchzuführen. Wir verweisen in diesem Zusammenhang auch auf die Landweber-Fridman-Iteration zur Lösung inkorrekt gestellter Operatorgleichungen. Hier liegen allgemeine Konvergenzresultate vor. Die entsprechenden Bedingungen für die Konvergenzaussagen konnten bisher aber

nicht für den Fernfeldoperator verifiziert werden ([10, ?]).

Gegenstand weiterer Untersuchungen muß auch eine Ausdehnung der beim Studium von Newtonverfahren für zweidimensionale Probleme benutzten Methoden auf die aus praktischer Sichtweise realistischeren dreidimensionalen inversen Streuprobleme sein. Dabei ist das Fehlen von geeigneten effizienten Vorwärtslösern (selbst bei geschlossenen Oberflächen) ein großes Problem. Unter diesem Gesichtspunkt sind ein weiteres Studium von Quasi-Newtonverfahren und Experimente mit stärker lokalisierenden Ansatzfunktionen (wir denken hier an radiale Basisfunktionen und Funktionen vom Typ der Sinc-Funktionen) sinnvoll, da dadurch die Anzahl zu lösender Vorwärtsprobleme reduziert wird.

Wir erwarten, daß die in dieser Arbeit entwickelten Methoden zur Lösung des akustischen Streuproblems für einen schallharten Bogen auch zur Lösung des entsprechenden direkten und inversen elastischen Streuproblems genutzt werden können.

# Literaturverzeichnis

- [1] K.E. Atkinson und J.H. Sloan, *The Numerical Solution of First-Kind Integral Equations On Smooth Open Arcs*, Mathem. of Comp., Vol. 56, Nr. 193, (1991), 119-139.
- [2] A.B. Bakushinskii, *The Problem of the Convergence of the Iteratively Regularized Gauss-Newton Method*, Comput. Maths Math. Phys., Vol. 32, No.9 (1992), 1353-1359.
- [3] J. Bürger, *Die numerische Behandlung von Integralgleichungen erster Art bei Dirichletschen Randwertaufgaben zur Helmholtzgleichung* (Diplomarbeit, Göttingen, 1993).
- [4] R. Chapko und R. Kress, *On a Quadrature Method for a Logarithmic Integral Equation of the First Kind*, Contributions in Num. Mathematics, World Scientific Series in Applicable Analysis, Vol 2 (World Scientific, Singapore, 1993).
- [5] S.N. Chandler-Wilde, Private communication (1995).
- [6] D. Colton und R. Kress, *Integral Equation Methods in Scattering Theory* (Wiley-Interscience Publication, New York, 1983).
- [7] D. Colton und R. Kress, *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory* (Springer Verlag, Berlin, 1992).
- [8] O. Forster, *Analysis 3* (Vieweg Verlag, Braunschweig, 1984).
- [9] W. Hackbusch, *Theorie und Numerik der Integralgleichungen* (Teubner-Verlag, Stuttgart, 1989).
- [10] M. Hanke, F. Hettlich und O. Scherzer, *The Landweber Iteration for an Inverse Scattering Problem*, in the proceedings of the 1995 design engineering

- technical conferences, Vol.3 Part C, Vibration Control, Analysis and Identification, edited by K.-W. Wang et. al., The American Society of Mechanical Engineers, New York, (1995), 909-915.
- [11] Y. Hayashi, *The Dirichlet-Problem for the Two-Dimensional Helmholtz Equation for an Open Boundary*, J. Math. Anal. Appl. **44** (1973), 489-530.
- [12] F. Hettlich, *Fréchet Derivatives in Inverse Obstacle Scattering*, Inverse Problems **11** (1995), 371-382.
- [13] F. Hettlich, *An Iterative Method for the Inverse Scattering Problem from Sound-Hard Obstacles*, ZAMM **76** (1996) S2, 165-168.
- [14] V. Isakov, *On Uniqueness in the Inverse Transmission Scattering Problem*, Comm. Part. Diff. Eqs **15** (1990), 1565-1587.
- [15] A. Kirsch, *The Domain Derivative and Two Applications in Inverse Scattering Theory*, Inverse Problems **9** (1993), 81-96.
- [16] A. Kirsch und R. Kress, *Uniqueness in Inverse Obstacle Scattering*, Inverse Problems **9** (1993), 285-299.
- [17] R. Kress, *Linear Integral Equations* (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1989).
- [18] R. Kress, *Inverse Scattering from an Open Arc*, Math. Meth. in the Appl. Sci., Vol 18 (1995), 267-293.
- [19] R. Kress, *On the Numerical Solution of a Hypersingular Integral Equation in Scattering Theory*, J. Comp. Appl. Math. **61** (3) (1995), 345-360.
- [20] R. Kress, *Fréchet Differentiability of the Far Field Operator for Scattering from a Crack*, J. on Inverse and Ill-Posed Problems **3** (1995), 303-313.
- [21] R. Kress, *Integral Equation Methods in Inverse Obstacle Scattering*, Engineering Analysis with Boundary Elements **15** (1995), 171-179.
- [22] R. Kress *Inverse Elastic Scattering from a Crack*, Inverse Problems **12** (1996), 667-684.
- [23] R. Kress und W. Rundell, *A Quasi-Newton Method in Inverse Obstacle Scattering*, Inverse Problems **10** (1994), 1145-1157.



- 
- [24] R. Kress und I.H. Sloan, *On the Numerical Solution of a Logarithmic Integral Equation of the First Kind for the Helmholtz Equation*, Num. Math. **66**, (1993), 199-214.
- [25] P.A. Krutitskij, *Dirichlet's Problem for the Helmholtz Equation Outside Cuts in a Plane*, Comp. Maths Math. Phys., Vol. 34, No. 8/9 (1994), 1073-1090.
- [26] P.A. Krutitskij, *Neumann's Problem for the Helmholtz Equation Outside Cuts in the Plane*, Comp. Maths Math. Phys., Vol. 34, No. 11 (1994), 1421-1431.
- [27] R. Kussmaul, *Ein numerisches Verfahren zur Lösung des Neumannschen Aussenraumproblems für die Helmholtzsche Schwingungsgleichung*, Computing **4** (1969), 246-273.
- [28] L.M. Levine, *A Uniqueness Theorem for the Reduced Wave Equation*, Communications in Pure and Applied Mathematics, Vol. XVII (1964), 147-176.
- [29] P.A. Lewis und G.R. Wickham, *The Diffraction of SH Waves by an Arbitrary Shaped Crack in Two Dimensions*, Phil. Trans. Roy. Soc. A **340** (1992), 503-529.
- [30] E. Martensen, *Über eine Methode zum räumlichen Neumannschen Problem mit einer Anwendung für torusartige Berandungen*, Acta Math. **109** (1963), 75-175.
- [31] P.A. Martin, *End-Point Behaviour of Solutions to Hypersingular Integral Equations*, Proc.R.Soc. London A**432** (1991), 301-320.
- [32] P.A. Martin und F.J. Rizzo, *On Boundary Integral Equations for Crack Problems*, Proc.R.Soc.London A**421** (1989), 341-355.
- [33] P.A. Martin und F.J. Rizzo, *Hypersingular Integrals: How Smooth Must the Density be?*, Int. Journ. for Num. Meth. in Engineering, Vol. 39 (1996), 687-704.
- [34] V. Maz'ya und G. Schmidt, *On Approximate Approximations Using Gaussian Kernels*, preprint (1994).
- [35] W. McLean, S. Prössdorf und W.L. Wendland, *Pointwise Error Estimates for the Trigonometric Collocation Method Applied to Singular Integral Equations and Periodic Pseudodifferential Equations*, J. on Integral Equations and Applications, Vol. 2, Nr.1, (1989), 125-146.

- [36] W. McLean, S. Prössdorf und W.L. Wendland, *A Fully Discrete Trigonometric Collocation Method*, J. on Integral Equations and Applications, Vol. 5, Nr.1, (1993), 103-129.
- [37] S.G.Michlin und S.Prössdorf, *Singular Integraloperators* (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Toronto, 1986).
- [38] L. Mönch, *Ein Quadraturformelverfahren für eine hypersinguläre Integralgleichung bei der Helmholtzgleichung im  $\mathbb{R}^2$*  (Diplomarbeit, Göttingen, 1994).
- [39] L. Mönch, *On the Numerical Solution of the Direct Scattering Problem for a Sound-Hard Open Arc*, J. Comp. Appl. Math. 71 (2) (1996), 343-356.
- [40] L. Mönch, *A Newton Method for Solving the Inverse Scattering Problem for a Sound-Hard Obstacle*, Inverse Problems **12** (1996), 309-323.
- [41] R.D. Murch, D.G.H. Tan und D.J.N. Wall, *Newton-Kantorovich Method Applied to Two-Dimensional Inverse Scattering for an Exterior Helmholtz Problem*, Inverse Problems **4** (1988), 1117-1128.
- [42] N.I. Muschelischwili, *Singuläre Integralgleichungen* (Akademie Verlag, Berlin, 1965).
- [43] L. Nachbin, *Introduction to Functional Analysis: Banach Spaces and Differential Calculus* (Marcel Dekker, Inc., New York, 1981).
- [44] M.Z. Nashed und X. Chen, *Convergence of Newton-like Methods for Singular Operator Equations Using Outer Inverses*, Num. Math. **66** (1993), 235-257.
- [45] I.P. Natanson, *Konstruktive Funktionentheorie* (Akademie-Verlag, Berlin, 1955).
- [46] N.F. Parson und P.A. Martin, *Scattering of Water Waves by Submerged Plates Using Hypersingular Integral Equations*, Applied Ocean Research, **14** (1992), 313-321.
- [47] N.F. Parson und P.A. Martin, *Scattering of Water Waves by Submerged Curved Plates and Surface-Piercing Flat Plates Using Hypersingular Integral Equations*, Applied Ocean Research (to appear).
- [48] N.F. Parson und P.A. Martin, *Trapping of Water Waves by Submerged Plates Using Hypersingular Integral Equations*, J. Fluid Mech. (to appear).

- 
- [49] A.S. Peters und J.J. Stoker, *A Uniqueness Theorem and a New Solution for Sommerfeld's and Other Diffraction Problems*, Comm. Pure Appl. Math., Vol.7 (1954), 565-586.
- [50] R. Potthast *Fréchet Differentiability of Boundary Integral Operators in Inverse Acoustic Scattering*, Inverse Problems **10** (1994), 431-447.
- [51] R. Potthast, *Fréchet Differentiability of the Solution to the Acoustic Neumann Scattering Problem with Respect to the Domain*, J. on Inverse and Ill-posed Problems Vol.4, No.1, (1996), 67-84.
- [52] S.Prössdorf und B.Silbermann, *Projektionsverfahren und die näherungsweise Lösung singulärer Gleichungen* (Teubner-Verlag, Leipzig, 1977).
- [53] S. Prössdorf und B. Silbermann, *Numerical Analysis for Integral and Related Operator Equations* (Akademie-Verlag, Berlin, 1991).
- [54] S. Prössdorf und J. Saranen, *A Fully Discrete Approximation Method for the Exterior Neumann-Problem for the Helmholtz-Equation*, Z. Anal. Anw., Vol. 13, No. 4 (1994), 683-695.
- [55] S. Prössdorf, J.Saranen und I.H.Sloan, *A Discret Method for the Logarithmic-Kernel Integral Equation on an Open Arc*, J. Austr. Math. Soc. Ser. B 34 (1993), 401-418.
- [56] A. Rathsfeld, R. Kieser und B. Kleemann, *On a Full Discretization Scheme for a Hypersingular Boundary Integral Equation Over Smooth Curves*, Z. Anal. Anw., Vol.11, No.3 (1992), 385-396.
- [57] A. Roger, *Newton-Kantorovich Algorithm Applied to an Electromagnetic Inverse Problem*, IEEE Trans. Ant. Prop. **29** (1981), 232-238.
- [58] E.P. Stephan und W.L. Wendland, *A Hypersingular Boundary Integral Method for Two-Dimensional Screen and Crack Problems*, Arch. Rational Mech. Anal. 112 (1990), 363-390.
- [59] F. Stenger, *Numerical Methods Based on Sinc and Analytic Functions* (Springer, New York, 1993).
- [60] W. Tobocman, *Inverse Acoustic Wave Scattering in Two Dimensions from Impenetrable Targets*, Inverse Problems **5** (1989), 1131-1144.
- [61] Y. Yan und I.H. Sloan, *On Integral Equations of the First-Kind with Logarithmic Kernels*, J.Integral Equations Appl. **1** (1988), 549-579.

- [62] Ye.V. Zakharov und I.V. Khaleyewa, *Hyper-singular Integral Equations of the First Kind in Problems of the Diffraction of Electromagnetic Waves By Open Surfaces*, Comput. Maths Math. Phys., Vol.33, No.2 (1993), 281-286.
- [63] Ye.V. Zakharov und I.V. Sobyana, *One-Dimensional Integro-Differential Equations for Problems of Diffraction By Screens*, Zh. Vychisl. Mat. Fiz. **26**, 4 (1986), 632-636 (in Russisch).