

NEWTON-VERFAHREN
FÜR EIN INVERSES
TRANSMISSIONSPROBLEM BEI
ELEKTROMAGNETISCHEN WELLEN

Diplomarbeit
vorgelegt von
Christoph Schormann
aus
Stuttgart

angefertigt im
Institut für
Numerische und Angewandte Mathematik
der
Georg-August-Universität zu Göttingen
1996

Inhaltsverzeichnis

0	Einleitung	1
1	Physikalische Motivation	4
2	Grundlagen	8
2.1	Die Hankelfunktion	8
2.2	Die Greenschen Formeln und das Rellich-Lemma	12
2.3	Die Hölderräume $C^{0,\alpha}$ und $C^{1,\alpha}$	18
2.4	Einfach- und Doppelschichtpotential	20
3	Direktes Transmissionsproblem	40
4	Fréchet-Differenzierbarkeit	44
4.1	Fréchet-Ableitung	44
4.2	Fréchet-Differenzierbarkeit des Fernfeldoperators	47
4.3	Charakterisierung der Fréchet-Ableitung	67
5	Inverses Transmissionsproblem	70
6	Numerische Ergebnisse	75
6.1	Newton-Verfahren	75
6.2	Eine einfallende Welle	78

6.3	Eingeschränkter Meßbereich	86
6.4	Anderer Approximationsraum	88
6.5	Mehrere Einfallswellen	91
6.6	Stabilität bei stark abweichender Startnäherung	93
6.7	Fazit	96

Tabellenverzeichnis

6.1	Vertauschte Wellenzahlen	82
6.2	Komplexe Konstanten	82
6.3	Vergleich von zwei Vorgehensweisen	83
6.4	Einfluß von unterschiedlichen Wellenzahlen bei der Rekonstruktion mit Datenfehler	85

Abbildungsverzeichnis

6.1	Rekonstruktion der Bohne bei einer Einfallswelle	79
6.2	Rekonstruktion der Erdnuß bei einer Einfallswelle	80
6.3	Rekonstruktion des Drachens bei einer Einfallswelle	80
6.4	Der Einfluß des Regularisierungsparameters	81
6.5	Rekonstruktion des Drachens bei einer Einfallswelle und festem Regularisierungsparameter $\alpha = 0.1$ bzw. $\alpha = 10.0$ rechts	81
6.6	Rekonstruktion der Bohne bei Datenfehler	84
6.7	Rekonstruktion der Erdnuß bei Datenfehler	84
6.8	Rekonstruktion des Drachens bei Datenfehler	85
6.9	Rekonstruktion der Bohne bei eingeschränktem Meßbereich	86
6.10	Rekonstruktion der Erdnuß bei eingeschränktem Meßbereich	87
6.11	Rekonstruktion der Bohne bei eingeschränktem Meßbereich und Datenfehler	87
6.12	Lokale Basisfunktion	89
6.13	Lokale Basisfunktionen	89
6.14	Verschiedene Dehnparameter	89
6.15	Rekonstruktion des Drachens mit anderen Approximationsfunktionen	90
6.16	Rekonstruktion von Bohne und Erdnuß mit anderen Approximationsfunktionen	90
6.17	Rekonstruktion der Erdnuß mit einer bzw. zwei Einfallswellen	91
6.18	Rekonstruktion der Bohne mit einer bzw. zwei Einfallswellen	92

6.19	Rekonstruktion der Bohne mit einer bzw. zwei Einfallswellen bei eingeschränktem Meßbereich	92
6.20	Kreis mit Radius 0.1 als Ausgangsnäherung	93
6.21	Translation der Bohne um $(-2, -2)^t$ bzw. $(2, -2)^t$	94
6.22	Rekonstruktion von translatierten Objekten mit mehreren einfallenden Wellen	94
6.23	Rekonstruktion des translatierten Drachens	95
6.24	Rekonstruktion der translatierten Bohne bei eingeschränktem Winkelbereich und Datenfehler	95

Kapitel 0

Einleitung

Die Streuung von elektromagnetischen Feldern an Medien mit unterschiedlichen physikalischen Konstanten kann mathematisch durch ein Transmissionsproblem für die Maxwellgleichungen modelliert werden. Die Beschränkung auf homogene, isotrope Medien führt bei zeitharmonischen Wellenfeldern auf ein Randwertproblem zu den reduzierten Maxwellgleichungen. Werden zylinderförmige Gebiete betrachtet, so vereinfacht sich das Problem bei geeigneter Polarisierung des elektrischen Feldes auf ein zweidimensionales Transmissionsproblem zur Helmholtzgleichung.

Sei nun $D \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet, und $k_i, k_a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ seien Konstanten mit nichtnegativem Imaginärteil, die im folgenden als Wellenzahlen bezeichnet werden. Die ebene einfallende Welle

$$u_e(x) := e^{ik_a \langle x, d \rangle},$$

mit einem Vektor d der euklidischen Länge Eins, ist eine Lösung der Helmholtzgleichung

$$\Delta u_e + k_a^2 u_e = 0$$

im \mathbb{R}^2 mit Wellenzahl k_a . Beim zweidimensionalen Transmissionsproblem zur Helmholtzgleichung sind Funktionen u_i in \overline{D} und u_a in $\mathbb{R}^2 \setminus D$ gesucht, die die Helmholtzgleichung mit Wellenzahl k_i bzw. k_a in D bzw. $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ lösen und auf ∂D den Bedingungen

$$u_i = u_a + u_e, \quad \mu \frac{\partial u_i}{\partial n} = \frac{\partial u_a}{\partial n} + \frac{\partial u_e}{\partial n}, \quad \mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

genügen. Weiterhin erfülle u_a eine Ausstrahlungsbedingung, durch die gewährleistet ist, daß die Funktion folgendes asymptotisches Verhalten hat:

$$u_a(x) = \frac{e^{ik_a \|x\|}}{\sqrt{\|x\|}} \left\{ u_\infty(\hat{x}) + O\left(\frac{1}{\|x\|}\right) \right\}, \quad \|x\| \rightarrow \infty.$$

Hierbei ist $\hat{x} = x/\|x\|$ und $\|\cdot\|$ die euklidische Norm. Die auf dem Einheitskreis definierte Funktion u_∞ wird das Fernfeld von u_a genannt.

Neben dem eben skizzierten Problem ist auch die folgende Fragestellung von Interesse: Gegeben sei die Funktion u_e und das (gemessene) Fernfeld der Funktion u_a . Zu bestimmen ist der Rand des Gebietes D . Sei \mathfrak{F} der Operator, der den Rand des Gebietes in das Fernfeld u_∞ bei einfallender Welle u_e abbildet. Dann entspricht obige Aufgabe dem Lösen der Gleichung

$$\mathfrak{F}(\partial D) = u_\infty. \quad (1)$$

Diese Fragestellung wird auch als inverses Problem bezeichnet, während die anfangs formulierte Aufgabe das direkte Problem genannt wird.

Hierbei heißen zwei Probleme zueinander invers, wenn zur Formulierung des ersten Problems zumindest teilweise die Lösung des zweiten Problems benötigt wird und umgekehrt. In einem solchen Fall wird gewöhnlich das einfacher zu lösende und besser verstandene Problem als das direkte bezeichnet.

Dies trifft auch auf das hier betrachtete Transmissionsproblem zu. Während das direkte Problem schon gründlich untersucht wurde (vgl. z.B. [2]) und für die bestehenden numerischen Verfahren zur Approximation der Funktionen u_i und u_a befriedigende Konvergenzaussagen existieren (vgl. z.B. die Aussagen in [10] zum Approximationsverhalten der Methoden), sind bei dem inversen Problem noch eine Reihe von Fragen nicht oder nur teilweise geklärt. Auch die Konvergenzaussagen für die numerischen Algorithmen sind noch lückenhaft. Ursache hierfür ist die nichtlineare und inkorrekt gestellte Gleichung (1). Insbesondere die zweite Eigenschaft ist der Grund für die auftretenden Schwierigkeiten.

In dieser Arbeit wird nachgewiesen, daß die oben definierte Abbildung \mathfrak{F} Fréchet-differenzierbar ist. Mit Hilfe von Variationsmethoden wurde dies in [7] gezeigt. Hier wird ein anderer Zugang unter Verwendung von Integralgleichungsmethoden gewählt. Dabei wird auf Untersuchungen in [17] zum Dirichlet- und Neumannrandwertproblem aufgebaut. Die Arbeit ist im einzelnen folgendermaßen untergliedert:

Im ersten Kapitel werden die anfangs kurz skizzierten physikalischen Zusammenhänge etwas ausführlicher dargestellt. Insbesondere wird erläutert, wie sich die oben angegebenen Transmissionsrandbedingungen aus denen der reduzierten Maxwellgleichungen ableiten lassen.

Die mathematischen Grundlagen zum Nachweis von Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des direkten Transmissionsproblems mit Hilfe von Integralgleichungsmethoden werden im zweiten Kapitel dargestellt. Insbesondere werden die Regularitätseigenschaften der benötigten Randintegral- und Potentialoperatoren für den zweidimensionalen Fall bewiesen.

Das direkte Transmissionsproblem ist Thema des dritten Kapitels. Nachgewiesen wird die Eindeutigkeit der Lösung unter geeigneten Voraussetzungen an die auftretenden Konstanten. Mit Hilfe von gemischten Potentialansätzen für die Funktionen u_i und u_a kann danach auch die Existenz einer Lösung gezeigt werden.

Im vierten Kapitel wird gezeigt, daß die oben definierte Abbildung \mathfrak{F} Fréchet-differenzierbar ist. Dieses Kapitel enthält die zentralen Aussagen der Arbeit. Zunächst

werden einige Grundlagen angegeben. Danach wird ein Differentiationssatz bewiesen, mit dessen Hilfe sich die Differenzierbarkeit der Randintegral- und Potentialoperatoren nachweisen läßt. Am Ende des Kapitels wird gezeigt, daß die Fréchet-Ableitung der Lösung des direkten Transmissionsproblems wiederum die Lösung eines Transmissionsproblems ist. Der Beweis kann hierbei im Vergleich zu [17] durch die Verwendung der im zweiten Kapitel gewonnenen Aussagen wesentlich vereinfacht werden.

Das fünfte Kapitel enthält einige Anmerkungen zum inversen Transmissionsproblem. Es wird nachgewiesen, daß die Gleichung (1) nichtlinear und inkorrekt gestellt ist.

Da die Abbildung \mathfrak{F} Fréchet-differenzierbar ist, bietet sich zur näherungsweisen Lösung der Gleichung (1) das Newton-Verfahren an. Hierzu wurden eine Reihe von numerischen Experimenten durchgeführt. Diese werden im sechsten Kapitel beschrieben. Zunächst wird eine Möglichkeit der Implementation des Verfahrens erläutert und anhand einiger Beispiele getestet. Zur Approximation der Kurven werden anfangs trigonometrische Monome als Basisfunktionen verwendet. Da diese Basisfunktionen bei einem schwieriger zu rekonstruierenden Gebiet bei einer einzigen einfallenden Welle teilweise nur mäßig gute Approximationen liefern, werden außerdem auch Basisfunktionen mit kompaktem Träger verwendet und an einigen Beispielen getestet. Eine ebenfalls untersuchte Möglichkeit zur Verbesserung der Rekonstruktionsergebnisse besteht in der Verwendung von mehreren einfallenden Wellen. Dies bewirkt im Allgemeinen sowohl eine Verringerung des Approximationsfehlers als auch eine zusätzliche Stabilisierung des Verfahrens. Das Verfahren erweist sich desweiteren als robust gegenüber Störung der Daten, und auch bei eingeschränktem Meßbereich sind noch gute Rekonstruktionen möglich. Dies ist auch bei recht großen Abweichungen der Startnäherung vom gesuchten Objekt der Fall. Insbesondere ist es bei geeigneter Durchführung des Verfahrens nicht nötig, daß der Mittelpunkt der Startnäherung (hierfür wurde stets ein Kreis verwendet) innerhalb des gesuchten Gebietes liegt.

Die numerischen Experimente wurden auf einer DEC Alpha 3000 600 am Institut für Numerische und Angewandte Mathematik der Universität Göttingen durchgeführt.

Für die Betreuung dieser Arbeit danke ich Herrn Prof. Dr. R. Kreß.

Kapitel 1

Physikalische Motivation

In diesem Kapitel wird ausgehend von dem Transmissionsproblem zu den zeitharmonischen Maxwellgleichungen im \mathbb{R}^3 ein Transmissionsproblem zur skalaren Helmholtzgleichung im \mathbb{R}^2 hergeleitet. Dieses entsteht durch geeignete Polarisierung des elektrischen Feldes. Für eine ausführlichere Darstellung des physikalischen Hintergrunds sei z.B. auf [13] verwiesen.

Gegeben sei ein homogenes, isotropes Medium im \mathbb{R}^3 mit Dielektrizitätskonstante ϵ , Permeabilitätskonstante μ und elektrischer Leitfähigkeit σ . Eine elektromagnetische Welle läßt sich nun beschreiben durch ein elektrisches Feld \mathfrak{E} und ein magnetisches Feld \mathfrak{H} , die die Maxwellgleichungen

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} + \mu \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathfrak{H} - \epsilon \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = \sigma \mathfrak{E},$$

erfüllen. Bei zeitharmonischen Wellen der Form

$$\mathfrak{E}(x, t) = \operatorname{Re} \left\{ \left(\epsilon + \frac{i\sigma}{\omega} \right)^{-1/2} E(x) e^{-i\omega t} \right\}, \quad \mathfrak{H}(x, t) = \operatorname{Re} \left\{ \mu^{-1/2} H(x) e^{-i\omega t} \right\},$$

mit einer Frequenz $\omega > 0$, erfüllen die ortsabhängigen, komplexwertigen Funktionen E und H folgende (reduzierte) Maxwellgleichungen:

$$\operatorname{rot} E - ikH = 0, \quad \operatorname{rot} H + ikE = 0. \tag{1.1}$$

Hierbei erfüllt die Wellenzahl k die Gleichung

$$k^2 = \left(\epsilon + \frac{i\sigma}{\omega} \right) \mu \omega^2,$$

wobei das Vorzeichen von k so gewählt ist, daß die Ungleichung $\operatorname{Im} k \geq 0$ gilt.

Im folgenden bezeichne D ein beschränktes Gebiet im \mathbb{R}^3 mit zusammenhängendem Rand $\partial D \in C^2$. Gegeben sei in $\mathbb{R}^3 \setminus D$ ein einfallendes elektromagnetisches Feld (E_e, H_e) , das in $\mathbb{R}^3 \setminus D$ ein reflektiertes Feld (E_a, H_a) und in D ein transmittiertes Feld (E_i, H_i) erzeugt. Sei $E_1 = E_e + E_a$ und $H_1 = H_e + H_a$, so gelten auf ∂D die Gleichungen $n \times E_1 = n \times E_i$ und $n \times H_1 = n \times H_i$, da die Tangentialkomponenten der Felder stetig sind (hierbei bezeichnet n die bezüglich D nach außen weisende Normale und $a \times b$ das Kreuzprodukt im \mathbb{R}^3). Diese Felder erfüllen jeweils die Maxwellgleichungen. Es ergibt sich also im zeitharmonischen Fall folgendes

Problem 1.1 (Transmissionsproblem für die Maxwellgleichungen im \mathbb{R}^3) Seien E_e und $H_e \in C^1(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ gegebene Felder, die die Gleichungen (1.1) in $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ erfüllen und $k_i, k_a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ seien Konstanten mit nichtnegativem Imaginärteil. Gesucht sind Vektorfelder $E_a, H_a \in C^1(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ und $E_i, H_i \in C^1(\bar{D})$, die folgende Bedingungen erfüllen:

- $\operatorname{rot} E_a - ik_a H_a = 0, \operatorname{rot} H_a + ik_a E_a = 0$ in $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$;
- $\operatorname{rot} E_i - ik_i H_i = 0, \operatorname{rot} H_i + ik_i E_i = 0$ in D ;
- $n \times E_1 = n \times E_i$ und $n \times H_1 = n \times H_i$ auf ∂D mit $E_1 = E_e + E_a$ und $H_1 = H_e + H_a$;
- E_a und H_a erfüllen die Silver-Müller-Ausstrahlungsbedingung $H_a \times \frac{x}{\|x\|} - E_a = o(\frac{1}{\|x\|})$ oder alternativ $E_a \times \frac{x}{\|x\|} + H_a = o(\frac{1}{\|x\|})$, für $\|x\| \rightarrow \infty$, gleichmäßig für alle $\frac{x}{\|x\|}$;

Mit $o(\cdot)$ bzw. $O(\cdot)$ sind dabei stets die Landau-Symbole gemeint. Aus den Darstellungssätzen von Stratton und Chu (Satz 4.1 und Satz 4.5 in [2]) folgt, daß jede Lösung der Maxwellgleichungen analytische kartesische Komponenten besitzt, insbesondere also zweimal stetig differenzierbar ist. Somit gilt für eine Lösung (E, H) der Maxwellgleichungen unter Beachtung von $\operatorname{div} E = -\frac{1}{ik} \operatorname{div}(\operatorname{rot} H) = 0$, sowie unter Ausnutzung der Identität $\Delta E = \operatorname{grad} \operatorname{div} E - \operatorname{rot} \operatorname{rot} E$:

$$\begin{aligned} \Delta E + k^2 E &= -\operatorname{rot} \operatorname{rot} E + ik(-ikE) \\ &= -\operatorname{rot}(\operatorname{rot} E - ikH) = 0 \end{aligned}$$

Analog ergibt sich $\Delta H + k^2 H = 0$. Jede Lösung (E, H) der Maxwellgleichungen ist also divergenzfrei und erfüllt die vektorielle Helmholtzgleichung.

Ist andererseits E (bzw. H) Lösung der vektoriellen Helmholtzgleichung mit $\operatorname{div} E = 0$ (bzw. $\operatorname{div} H = 0$), so erfüllen E und $H := \frac{1}{ik} \operatorname{rot} E$ (bzw. H und $E := -\frac{1}{ik} \operatorname{rot} H$) die zeitharmonischen Maxwellgleichungen.

Eine Funktion $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ erfüllt die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung (SAB), wenn

$$\frac{\partial u}{\partial r} - iku = o(r^{-\frac{n-1}{2}})$$

für $r := |x| \rightarrow \infty$ gleichmäßig für alle $\frac{x}{|x|}$ gilt. Eine Lösung der skalaren Helmholtzgleichung wird *ausstrahlend* genannt, wenn sie die SAB erfüllt. Zwischen einer Lösung der Maxwellgleichungen, die der Silver-Müller-Ausstrahlungsbedingung (SMAB) genügt und einer Lösung der vektoriellen Helmholtzgleichung, deren Komponenten die Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung erfüllen, besteht ein enger Zusammenhang: Erfüllt die Lösung (E, H) der Maxwellgleichungen die SMAB, so genügen die kartesischen Komponenten von E bzw. H der SAB. Andererseits erfüllt eine divergenzfreie Lösung E der vektoriellen Helmholtzgleichung, deren Komponenten der SAB genügen, auch die SMAB, wobei $H := \frac{1}{ik} \operatorname{rot} E$ wie oben definiert ist (Korollar 4.7 und Korollar 4.14 in [2]).

Im letzten Teil dieses Kapitels soll nun gezeigt werden, daß das Problem 1.1 bei geeigneter Polarisierung des elektrischen Feldes ein Transmissionsproblem zur skalaren Helmholtzgleichung ergibt. Es gelte $E(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, u(x_1, x_2))^t$. Das Normalenfeld sei gegeben durch $n = (n_1, n_2, 0)^t$, d.h. das Gebiet D ist zylinderförmig mit Zylinderachse in Richtung der dritten Koordinatenachse. Für eine Lösung (E, H) der Maxwellgleichungen folgt somit

$$H = \frac{1}{ik} \operatorname{rot} E = \frac{1}{ik} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial u}{\partial x_1} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Funktion u ist Lösung der skalaren Helmholtzgleichung $(\Delta + k^2)u = 0$. Da andererseits ein solchermaßen gewähltes Vektorfeld E automatisch divergenzfrei ist, erfüllen E und $H := \frac{1}{ik} \operatorname{rot} E$ die Maxwellgleichungen, falls u Lösung der skalaren Helmholtzgleichung ist. Wegen der Geometrie des Gebietes D ist es sinnvoll, die zweidimensionale SAB zu verwenden.

Auf das Transmissionsproblem zurückkommend, ergeben sich die Randbedingungen für das elektrische Feld folgendermaßen:

$$\begin{aligned} n \times E_1 = n \times E_i & \Leftrightarrow \begin{pmatrix} n_2 u_1 \\ -n_1 u_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_2 u_i \\ -n_1 u_i \\ 0 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow u_1 = u_i \end{aligned}$$

Für das magnetische Feld ergibt sich eine Beziehung für die Normalableitungen von u_i

und u_1 :

$$\begin{aligned}
 n \times H_1 = n \times H_i &\Leftrightarrow \frac{1}{ik_a} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -n_1 \frac{\partial u_1}{\partial x_1} - n_2 \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \frac{1}{ik_i} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -n_1 \frac{\partial u_i}{\partial x_1} - n_2 \frac{\partial u_i}{\partial x_2} \end{pmatrix} \\
 &\Leftrightarrow \frac{1}{k_a} \langle n, \text{grad } u_1 \rangle = \frac{1}{k_i} \langle n, \text{grad } u_i \rangle \\
 &\Leftrightarrow \frac{1}{k_a} \frac{\partial u_1}{\partial n} = \frac{1}{k_i} \frac{\partial u_i}{\partial n}
 \end{aligned}$$

Die Bezeichnung $\langle \cdot, \cdot \rangle$ wird dabei für $a, b \in \mathbb{C}^2$ folgendermaßen definiert: $\langle a, b \rangle := a_1 b_1 + a_2 b_2$. Durch die Polarisierung des elektrischen Feldes und die spezielle Wahl des Gebietes entsteht also folgendes

Problem 1.2 (Transmissionsproblem für die Helmholtzgleichung im \mathbb{R}^2) Gegeben sei ein beschränktes Gebiet $D \subset \mathbb{R}^2$ mit zusammenhängendem Rand $\partial D \in C^2$ und $k_a, k_i \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $\text{Im } k_a, \text{Im } k_i \geq 0$. Weiterhin sei $u_e \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}) \cap C^1(\mathbb{R}^2 \setminus D)$ Lösung der Helmholtzgleichung in $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$. Gesucht sind Funktionen $u_a \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}) \cap C^1(\mathbb{R}^2 \setminus D)$ im Außenraum und $u_i \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$ im Innenraum, die folgende Bedingungen erfüllen:

- $(\Delta + k_a^2)u_a = 0$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ und $(\Delta + k_i^2)u_i = 0$ in D .
- $u_i = u_1$ und $\frac{1}{k_i} \frac{\partial u_i}{\partial n} = \frac{1}{k_a} \frac{\partial u_1}{\partial n}$ auf ∂D mit $u_1 := u_e + u_a$.
- u_a erfüllt die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung.

Kapitel 2

Grundlagen

In diesem Kapitel werden wichtige Hilfsmittel zur Lösung des direkten Problems hergeleitet. Im ersten Teil wird die Hankelfunktion, die eine Grundlösung der Helmholtzgleichung darstellt, eingeführt und ihre Eigenschaften angegeben. Im zweiten Teil werden wichtige Hilfsmittel für den Nachweis der Eindeutigkeit der Lösung des direkten Problems hergeleitet. Hierbei handelt es sich um die Greenschen Formeln und das Rellich-Lemma. Für die Lösung des direkten Transmissionsproblems mit Hilfe von Integralgleichungsmethoden ist es sinnvoll, Integraloperatoren in Hölderräumen zu betrachten. Hierzu werden im dritten Teil die Hölderräume $C^{0,\alpha}$ und $C^{1,\alpha}$ eingeführt. Im letzten Teil werden die benötigten Integraloperatoren und deren Abbildungseigenschaften angegeben.

2.1 Die Hankelfunktion

Dieser Teil des Kapitels ist angelehnt an [14]. Dort finden sich auch ausführliche Beweise für die folgenden Aussagen. Um die Helmholtzgleichung im \mathbb{R}^2 zu lösen, wählt man eine Funktion u durch den Ansatz $u(x) = f(kr)e^{\pm in\varphi}$ mit Polarkoordinaten (r, φ) und $n \in \mathbb{N}$. Somit folgt aus der Differentialgleichung $(\Delta + k^2)u = 0$ nun

$$\begin{aligned} (k^2 f''(kr) + \frac{k}{r} f'(kr) - \frac{n^2}{r^2} f(kr) + k^2 f(kr))e^{\pm in\varphi} \\ = \left(\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) + k^2 \right) f(kr) e^{\pm in\varphi} = 0 \end{aligned}$$

Durch Substitution mit $z := kr \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ergibt sich die Gleichung

$$z^2 f''(z) + z f'(z) + (z^2 - n^2) f(z) = 0. \quad (2.1)$$

Diese lineare Differentialgleichung heißt Besselsche Differentialgleichung der Ordnung n . Die Funktion

$$J_n(z) := \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!(n+l)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2l}, \quad z \in \mathbb{C} \quad (2.2)$$

heißt Besselfunktion der Ordnung n . Wie man mit Hilfe des Quotientenkriteriums erkennt, ist diese Reihe für alle $z \in \mathbb{C}$ absolut konvergent und J_n somit eine analytische Funktion in ganz \mathbb{C} . Durch Einsetzen zeigt sich, daß J_n die Differentialgleichung (2.1) löst. Zudem gelten folgende Rekursionsbeziehungen, die durch Differenzieren von $z^n J_n(z)$ bzw. von $z^{-n} J_n(z)$ nachgewiesen werden können.

$$J_n'(z) + \frac{n}{z} J_n(z) = J_{n-1}(z), \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.3)$$

$$J_n'(z) - \frac{n}{z} J_n(z) = -J_{n+1}(z), \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (2.4)$$

Sei $c := \lim_{l \rightarrow \infty} \left(\sum_{n=1}^l \frac{1}{n} - \ln l \right)$ die Eulersche Konstante und $\psi : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\psi(0) = 0$ und $\psi(l) = \sum_{n=1}^l \frac{1}{n}$, $l \in \mathbb{N}$. Die Neumannfunktion der Ordnung n

$$\begin{aligned} Y_n(z) &:= \frac{2}{\pi} \left\{ \ln \frac{z}{2} + c \right\} J_n(z) - \frac{1}{\pi} \sum_{l=0}^{n-1} \frac{(n-1-l)!}{l!} \left(\frac{2}{z}\right)^{n-2l} \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l (z/2)^{n+2l}}{l!(n+l)!} \{ \psi(l+n) + \psi(l) \} \end{aligned} \quad (2.5)$$

ist eine von J_n linear unabhängige Lösung von (2.1), die in $\mathbb{C}^+ := \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$ analytisch ist und den gleichen Rekursionsbeziehungen (2.3) und (2.4) wie J_n genügt. Hierbei ist mit $\ln z$ der Hauptzweig des Logarithmus gemeint, da stets von $z \in \mathbb{C}^+$ ausgegangen werden kann. Sei also $z \in \mathbb{C}^+$, d.h. $z = |z|e^{i\varphi}$ mit $-\pi < \varphi < \pi$, dann gilt somit: $\ln z = \log |z| + i\varphi$, wobei \log den reellen Logarithmus bezeichnet. Später werden Y_0 und Y_1 noch häufiger benötigt. Daher werden beide Funktionen noch einmal explizit angegeben:

$$\begin{aligned} Y_0(z) &:= \frac{2}{\pi} \left[J_0(z) \left(\ln \frac{z}{2} + c \right) - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^l (z/2)^{2l}}{(l!)^2} \psi(l) \right] \\ Y_1(z) &:= \frac{2}{\pi} \left[J_1(z) \left(\ln \frac{z}{2} + c \right) - \frac{z}{4} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l (z/2)^{2l}}{l!(l+1)!} (\psi(l) + \psi(l+1)) - \frac{1}{z} \right] \end{aligned}$$

Die Funktion

$$H_n^{(1,2)} := J_n \pm iY_n$$

heißt Hankelfunktion der ersten (bzw. zweiten) Art der Ordnung n . Durch diese Linearkombination wird erreicht, daß $H_n^{(1,2)}$ folgenden asymptotischen Beziehungen für $|z| \rightarrow \infty$ und $\pi > \delta > 0$ genügt:

$$H_n^{(1,2)}(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} e^{\pm i(z - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{|z|}\right) \right\}, \quad |\arg z| < \pi - \delta. \quad (2.6)$$

Aus den Rekursionsbeziehungen (2.3) und (2.4) und den entsprechenden Gleichungen für Y_n ergibt sich

$$\begin{aligned} H_n^{(1,2)'} &= \frac{n}{z} H_n^{(1,2)} - H_{n+1}^{(1,2)}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \\ H_n^{(1,2)'} &= -\frac{n}{z} H_n^{(1,2)} + H_{n-1}^{(1,2)}, \quad n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

so daß die Ableitung für $|z| \rightarrow \infty$ folgendes asymptotisches Verhalten hat:

$$\begin{aligned} H_n^{(1,2)'}(z) &= \frac{n}{z} \left[\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} e^{\pm i(z - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{|z|}\right) \right\} \right] \\ &\quad - \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} e^{\pm i(z - \frac{(n+1)\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{|z|}\right) \right\} \\ &= \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} e^{\pm i(z - \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4})} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{|z|}\right) \right\}, \quad |\arg z| < \pi - \delta. \quad (2.7) \end{aligned}$$

Damit die Hankelfunktion also für $|z| \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert, muß für $H_n^1 \operatorname{Im} z \geq 0$ und für $H_n^2 \operatorname{Im} z \leq 0$ gelten. Aus dem asymptotischen Verhalten der Hankelfunktion kann auch die Asymptotik der Bessel- und Neumannfunktion gefolgert werden (für $|z| \rightarrow \infty$, $|\arg z| < \pi - \delta$):

$$\begin{aligned} J_n(z) &= \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \cos\left(z - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \left(1 + O\left(\frac{1}{|z|^2}\right)\right) \\ &\quad - \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \sin\left(z - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) O\left(\frac{1}{|z|^3}\right) \quad (2.8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_n(z) &= \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \cos\left(z - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) O\left(\frac{1}{|z|^3}\right) \\ &\quad + \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \sin\left(z - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \left(1 + O\left(\frac{1}{|z|^2}\right)\right) \quad (2.9) \end{aligned}$$

Die Funktion

$$\Phi(x, y) := \frac{i}{4} H_0^1(k\|x - y\|)$$

mit $x \neq y$ und $0 \neq k \in \mathbb{C}$ nennt man Grundlösung der Helmholtzgleichung im \mathbb{R}^2 . Hierbei bezeichnet $\|\cdot\|$ die euklidische Norm im \mathbb{R}^n . Für festes y erfüllt sie $(\Delta + k^2)\Phi = 0$ im $\mathbb{R}^2 \setminus \{y\}$. Sei $v \in \mathbb{R}^2$ ein Vektor. Durch Vertauschen der Differentiationsreihenfolge sieht man, daß auch

$$\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial v} := \langle \text{grad}_y \Phi(x, y), v \rangle$$

die Helmholtzgleichung im $\mathbb{R}^2 \setminus \{y\}$ erfüllt. Für beide Lösungen gilt folgender

Satz 2.1 Sowohl Φ als auch $\frac{\partial \Phi}{\partial v}$ erfüllen für $\text{Im } k \geq 0$ die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung gleichmäßig für alle y aus einem Kompaktum.

Beweis: Seien $x, y \in \mathbb{R}^2$ und $x \neq y$. Dann gilt für $\|x\|$ hinreichend groß:

$$\begin{aligned} \frac{\langle x - y, x \rangle}{\|x - y\| \|x\|} &= \frac{1 - \frac{\langle y, x \rangle}{\|x\|^2}}{\sqrt{1 - \frac{2\langle x, y \rangle}{\|x\|^2} + \frac{\|y\|^2}{\|x\|^2}}} = \left(1 - \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|^2}\right) \\ &\quad \left(1 + \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|^2} + O\left(\frac{1}{\|x\|^2}\right)\right) = 1 + O\left(\frac{1}{\|x\|^2}\right) \end{aligned} \quad (2.10)$$

und zwar gleichmäßig für alle y aus einem Kompaktum.

Sei nun $r := \|x\|$, dann gilt für Φ folgende Beziehung (wobei die Argumente $k\|x - y\|$ der Hankelfunktionen der besseren Übersicht wegen weggelassen werden):

$$\begin{aligned} \sqrt{r} \left(\frac{\partial H_0^1}{\partial r} - ikH_0^1 \right) &= \sqrt{r} \left(-kH_1^1 \frac{\langle x - y, x \rangle}{\|x - y\| \|x\|} - ikH_0^1 \right) \\ &= \sqrt{\frac{2\|x\|}{\pi k \|x - y\|}} e^{i(k\|x - y\| - \frac{\pi}{4})} ik O\left(\frac{1}{\|x - y\|}\right) \xrightarrow{\|x\| \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Dies gilt gleichmäßig für alle $\frac{x}{\|x\|}$ und alle y aus einem Kompaktum, wie aus (2.10) ersichtlich ist. Somit ist die Behauptung für Φ bewiesen. Für $\frac{\partial \Phi}{\partial v}$ gilt:

$$\begin{aligned} &\sqrt{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial H_0^1}{\partial v} - ik \frac{\partial H_0^1}{\partial v} \right\} \\ &= \sqrt{r} \left\{ k^2 \frac{\langle x - y, v \rangle}{\|x - y\|} \left(H_0^1 \frac{\langle x - y, \frac{x}{\|x\|} \rangle}{\|x - y\|} - iH_1^1 \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{kH_1^1}{\|x - y\|} \left(\frac{2\langle x - y, v \rangle \langle x - y, \frac{x}{\|x\|} \rangle}{\|x - y\|^2} - \langle v, \frac{x}{\|x\|} \rangle \right) \right\} \\ &= \sqrt{r} \left\{ O(1) \left(H_0^1 \frac{\langle x - y, x \rangle}{\|x - y\| \|x\|} - iH_1^1 \right) + H_1^1 O\left(\frac{1}{\|x - y\|}\right) \right\} = O\left(\frac{1}{\|x - y\|}\right) \end{aligned}$$

Da auch dies gleichmäßig für alle Richtungen $\frac{x}{\|x\|}$ und alle y aus einem Kompaktum gilt, ist die Behauptung bewiesen. \square

2.2 Die Greenschen Formeln und das Rellich-Lemma

In diesem Abschnitt sollen wichtige Grundlagen für den Beweis der Eindeutigkeit des direkten Problems zusammengestellt werden. Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet mit $\partial D \in C^2$. Weiterhin bezeichnet n stets die bzgl. D nach außen weisende Normale. Seien $u \in C^1(\overline{D})$ und $v \in C^2(\overline{D})$, dann gilt der erste Greensche Satz:

$$\int_D u \Delta v \, dx = \int_{\partial D} u \frac{\partial v}{\partial n} ds - \int_D \langle \text{grad } u, \text{grad } v \rangle \, dx. \quad (2.11)$$

Für $u, v \in C^2(\overline{D})$ ist auch der zweite Greensche Satz gültig:

$$\int_D (u \Delta v - v \Delta u) \, dx = \int_{\partial D} \left(u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right) ds. \quad (2.12)$$

Bemerkung 2.2 Die Greenschen Sätze werden mit dem Satz von Gauß bewiesen. Sei $F : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein Vektorfeld, so sind die Bedingungen $F \in C(\overline{D}) \cap C^1(D)$ und $\int_D |\text{div } F| dx < \infty$ bereits hinreichend für den Gauß'schen Satz (vgl. [6], Seite 56, Satz 1). Somit kann die Voraussetzung für die Anwendung der Greenschen Sätze von $u, v \in C^2(\overline{D})$ auf $u, v \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D)$ abgeschwächt werden, falls u und v Lösungen der Helmholtzgleichung sind.

Mit Hilfe dieser Sätze ist es nun möglich, die Greenschen Darstellungsformeln zu beweisen.

Satz 2.3 Sei $u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$ eine Lösung von $(\Delta + k^2)u = 0$ in D , $0 \neq k \in \mathbb{C}$. Dann gilt

$$\int_{\partial D} \left(u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} - \frac{\partial u}{\partial n}(y) \Phi(x, y) \right) ds(y) = \begin{cases} -u(x) & \text{falls } x \in D, \\ 0 & \text{falls } x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}. \end{cases}$$

Beweis: Sei $x = (x_1, x_2)^t \in D$ beliebig, aber fest gewählt und r_0 so klein, daß für alle $r \leq r_0$ die Beziehung $K_r := \{y \in \mathbb{R}^2 : \|x - y\| \leq r\} \subset D$ gilt. Sei $D_r := D \setminus K_r$, dann folgt aus (2.12) die Gleichung

$$\int_{\partial D_r} \left(u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} - \frac{\partial u}{\partial n}(y) \Phi(x, y) \right) ds(y) = 0.$$

Unter Beachtung der Orientierung der Normalen in das Äußere eines Gebietes gilt nun:

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \left(u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} - \frac{\partial u}{\partial n}(y) \Phi(x, y) \right) ds(y) \\ = \int_{\partial K_r} \left(u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} - \frac{\partial u}{\partial n}(y) \Phi(x, y) \right) ds(y) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Auf ∂K_r ist die nach außen weisende Normale gegeben durch $n(y) = -\frac{x-y}{\|x-y\|}$. Daher folgt $\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} = -\frac{ik}{4} H_1^1(k\|x-y\|)$ auf ∂K_r . Sei $h : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Parametrisierung von ∂K_r mit $h(t) = \begin{pmatrix} r \cos t + x_1 \\ r \sin t + x_2 \end{pmatrix}$, dann gilt wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von u in \overline{D} folgende Beziehung:

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\partial K_r} u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} ds(y) &= -\frac{ik}{4} \lim_{r \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} u(h(t)) \left(O(r \ln \frac{kr}{2}) - \frac{2i}{kr\pi} \right) r dt \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lim_{r \rightarrow 0} u(h(t)) dt = -u(x) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Da $u \in C^2(D)$ und $K_r \subset D$ existiert ein $Q > 0$, so daß $\left\| \frac{\partial u}{\partial n} \right\|_\infty \leq Q \quad \forall r \leq r_0, y \in K_r$. Daher verschwindet der 2. Teil des Integrals auf der rechten Seite von (2.13) für $r \rightarrow 0$:

$$\int_{\partial K_r} \left(\frac{\partial u}{\partial n}(y) \Phi(x, y) \right) ds(y) = \int_0^{2\pi} O(\ln r) r dt = O(r \ln r) \quad (2.15)$$

Aus (2.14) und (2.15) folgt unter Beachtung von (2.13) die Behauptung des Satzes für $x \in D$. Für $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ kann die Aussage durch eine Anwendung des 2. Greenschen Satzes (2.12) gezeigt werden. \square

Für eine ausstrahlende Lösung der Helmholtzgleichung bleibt die Aussage des obigen Satzes auch im Außengebiet richtig.

Satz 2.4 Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}) \cap C^1(\mathbb{R}^2 \setminus D)$ eine ausstrahlende Lösung von $(\Delta + k^2)u = 0$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ mit $\text{Im } k \geq 0$. Dann gilt

$$\int_{\partial D} \left(u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} - \frac{\partial u}{\partial n}(y) \Phi(x, y) \right) ds(y) = \begin{cases} u(x) & \text{falls } x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}, \\ 0 & \text{falls } x \in D. \end{cases} \quad (2.16)$$

Beweis: Zuerst soll die Beziehung

$$\int_{\|y\|=R} |u|^2 ds = O(1), \quad \text{für } R \rightarrow \infty, \quad (2.17)$$

gezeigt werden. Sei $D_R := \{y \in \mathbb{R}^2 \setminus D : \|y\| < R\}$, wobei R so groß gewählt ist, daß $K_R := \{y \in \mathbb{R}^2 : \|y\| = R\} \subset \mathbb{R}^2 \setminus D$ gilt. Mit Hilfe der Ausstrahlungsbedingung folgt nun:

$$0 = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{K_R} \left| \frac{\partial u}{\partial n} - iku \right|^2 ds = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{K_R} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 + |k|^2 |u|^2 + 2 \operatorname{Im} \left(ku \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} \right) \right) ds \quad (2.18)$$

Aus dem 1. Greenschen Satz (2.11) erhält man

$$k \int_{K_R} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} ds = k \int_{\partial D} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} ds - \bar{k} |k|^2 \int_{D_R} |u|^2 dy + k \int_{D_R} \|\operatorname{grad} u\|^2 dy.$$

Setzt man dies in (2.18) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \int_{K_R} \left[\left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 + |k|^2 |u|^2 \right] ds + 2 \operatorname{Im} k \int_{D_R} [|k|^2 |u|^2 + \|\operatorname{grad} u\|^2] dy \right\} \\ = -2 \operatorname{Im} \left(k \int_{\partial D} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} ds \right). \quad (2.19) \end{aligned}$$

Da die linke Seite der Gleichung wegen $\operatorname{Im} k \geq 0$ nichtnegativ ist, folgt (2.17). Aus dem Beweis von Satz 2.1 ist ersichtlich, daß $\Phi(x, y)$ die Ausstrahlungsbedingung bei festem x auch gleichmäßig für alle $\frac{y}{\|y\|}$ erfüllt. Somit erhält man unter Ausnutzung der Ausstrahlungsbedingung, der Gleichung (2.17), der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und der Asymptotik von $\Phi(x, y)$ für hinreichend große R folgende Beziehung:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{K_R} \left(u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} - \frac{\partial u}{\partial n}(y) \Phi(x, y) \right) ds(y) \right| \\ & \leq \left| \int_{K_R} u(y) \left(\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} - ik \Phi(x, y) \right) ds(y) \right| + \\ & \quad \left| \int_{K_R} \Phi(x, y) \left(\frac{\partial u}{\partial n}(y) - iku(y) \right) ds(y) \right| \\ & = O(1) \left(\int_{K_R} O\left(\frac{1}{R^3}\right) ds \right)^{1/2} + O(1) \left(\int_{K_R} o\left(\frac{1}{R}\right) ds \right)^{1/2} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

Für $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ folgt die Behauptung nun durch Anwendung von Satz 2.3 im Gebiet D_R unter Beachtung obiger Ungleichung. Für $x \in D$ erhält man die Aussage mit dem 2. Greenschen Satz (2.12) und obiger Ungleichung. \square

Satz 2.4 zeigt auch, daß die schwächere Bedingung

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{K_R} \left| \frac{\partial u}{\partial n} - iku \right|^2 ds = 0$$

zur Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung äquivalent ist. Eine weitere Folgerung ist im nächsten Korollar festgehalten.

Korollar 2.5 *Jede zweimal stetig differenzierbare Lösung der Helmholtzgleichung ist analytisch.*

Beweis: Diese Aussage folgt aus den Darstellungssätzen und der Analytizität der Grundlösung. \square

Als nächstes wichtiges Hilfsmittel soll nun das Rellich-Lemma bewiesen werden. Im nächsten Kapitel wird sich zeigen, daß es eine entscheidende Rolle beim Beweis der Eindeutigkeit der Lösung des direkten Problems spielt.

Lemma 2.6 *Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D})$ mit $(\Delta + k^2)u = 0$, und es gelte $k > 0$ und $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\|x\|=r} |u(x)|^2 ds = 0$. Dann folgt $u \equiv 0$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$.*

Beweis: Sei $\|x\| =: r$ so groß, daß $\{x : \|x\| = r\} \subset \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$. Dann gilt bei festem r die Fourierreentwicklung $u(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(r) e^{in\varphi}$ mit $\varphi \in [0, 2\pi]$ und Koeffizienten $a_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r \cos \varphi, r \sin \varphi) e^{-in\varphi} d\varphi$, die die Parsevalsche Gleichung erfüllen (hierbei sei $v(r, \varphi) := u(r \cos \varphi, r \sin \varphi)$):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n(r)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |v(r, \varphi)|^2 d\varphi = \frac{1}{r} \int_{\|x\|=r} |u(x)|^2 ds$$

Aus der Voraussetzung folgt somit:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r |a_n(r)|^2 = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}. \quad (2.20)$$

Da $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D})$, kann in dem die Koeffizienten bestimmenden Integral Integration und Differentiation vertauscht werden, und es folgt mit Hilfe von partieller Integration (wobei $\tilde{\Delta} := \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + k^2 \right) a_n(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [(\tilde{\Delta} + k^2)v(r, \varphi)] e^{-in\varphi} d\varphi \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} v(r, \varphi) \right) e^{-in\varphi} d\varphi \\ &= \frac{n^2}{2r^2\pi} \int_0^{2\pi} v(r, \varphi) e^{-in\varphi} d\varphi = \frac{n^2}{r^2} a_n(r), \end{aligned}$$

d.h. $a_n(kr)$ ist Lösung der Besselschen Differentialgleichung und daher $a_n(r) = \alpha_n J_n(r/k) + \beta_n Y_n(r/k)$ mit Konstanten α_n, β_n . Durch Einsetzen in (2.20) folgt auf Grund des asymptotischen Verhaltens der Bessel- und Neumannfunktion nun $\alpha_n = \beta_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$. Wegen der Analytizität von u gilt dann $u = 0$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$. \square

Aus obigem Lemma folgt mit Hilfe von (2.19) sofort

Korollar 2.7 Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}) \cap C^1(\mathbb{R}^2 \setminus D)$ eine ausstrahlende Lösung der Helmholtzgleichung in $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ mit $\text{Im } k > 0$ oder $k \in \mathbb{R}_+$ und

$$\text{Im} \left(k \int_{\partial D} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} ds \right) \geq 0.$$

Dann ist $u \equiv 0$ in $\mathbb{R}^2 \setminus D$.

Beweis: Sei zunächst $\text{Im } k > 0$, dann folgt aus der Gleichung (2.19) die Beziehung $\int_{D_R} |u|^2 dy = 0$. Da dies für alle hinreichend großen R gilt, ist die Behauptung für diesen Fall bewiesen. Sei nun $k > 0$, dann ist aus (2.19) ersichtlich, daß für alle hinreichend großen R die Gleichung $\int_{K_R} |u|^2 ds = 0$ gilt. Die Behauptung folgt dann aus dem eben bewiesenen Lemma. \square

Im folgenden Satz wird das *Fernfeld* einer ausstrahlenden Lösung eingeführt. Es wird bei der Formulierung des inversen Problems von entscheidender Bedeutung sein.

Satz 2.8 Jede ausstrahlende Lösung u der Helmholtzgleichung, die die Regularitätsvoraussetzung von Satz 2.4 erfüllt, hat folgendes asymptotisches Verhalten:

$$u(x) = \frac{e^{ik\|x\|}}{\|x\|^{1/2}} u_\infty(\hat{x}) + O\left(\frac{1}{\|x\|^{3/2}}\right), \quad \|x\| \rightarrow \infty. \quad (2.21)$$

Dies gilt gleichmäßig für alle Richtungen $\hat{x} := \frac{x}{\|x\|}$. Dabei ist die Funktion u_∞ auf dem Einheitskreis Ω definiert und wird das Fernfeld von u genannt. Zudem gilt folgende Darstellung:

$$u_\infty(\hat{x}) = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{8\pi k}} \int_{\partial D} \left(u(y) \frac{\partial e^{-ik\langle \hat{x}, y \rangle}}{\partial n(y)} - \frac{\partial u}{\partial n}(y) e^{-ik\langle \hat{x}, y \rangle} \right) ds(y), \quad \hat{x} \in \Omega. \quad (2.22)$$

Beweis: Für $y \in \partial D$ und $\|x\| \rightarrow \infty$ gilt:

$$\begin{aligned} \|x - y\| &= \|x\| - \langle \hat{x}, y \rangle + O\left(\frac{1}{\|x\|}\right), & \frac{1}{\|x - y\|} &= \frac{1}{\|x\|} + O\left(\frac{1}{\|x\|^2}\right), \\ e^{O(1/\|x\|)} &= 1 + O\left(\frac{1}{\|x\|}\right), & \frac{\langle x - y, n(y) \rangle}{\|x - y\|} &= \langle \hat{x}, n(y) \rangle + O\left(\frac{1}{\|x\|}\right). \end{aligned}$$

Somit folgt für $\Phi(x, y)$ und $\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)}$ unter Benutzung des asymptotischen Verhaltens der Hankelfunktion:

$$\begin{aligned} \Phi(x, y) &= \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{8\pi k}} \frac{e^{ik\|x\|}}{\|x\|^{1/2}} e^{-ik\langle \hat{x}, y \rangle} + O\left(\frac{1}{\|x\|^{3/2}}\right) \\ \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} &= \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{8\pi k}} \frac{e^{ik\|x\|}}{\|x\|^{1/2}} \frac{\partial e^{-ik\langle \hat{x}, y \rangle}}{\partial n(y)} + O\left(\frac{1}{\|x\|^{3/2}}\right) \end{aligned}$$

Einsetzen dieser Ungleichungen in Satz 2.4 liefert dann die Behauptung. \square

Bemerkung 2.9 *Offensichtlich gilt die Darstellung (2.21) für jede ausstrahlende Lösung der Helmholtzgleichung. Satz 2.4 ist dann auf den Rand eines Kreises $B_R := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < R\}$ anzuwenden, für den $B_R \subset \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ gilt. In diesem Fall können die Regularitätsanforderungen an u also abgeschwächt werden.*

Sei nun Φ die im ersten Teil dieses Kapitels eingeführte Grundlösung der Helmholtzgleichung. Für $\varphi \in C(\partial D)$ heißt

$$u(x) := \int_{\partial D} \Phi(x, y) \varphi(y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D,$$

das *Einfachschichtpotential* mit Dichte φ . Für $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D$ kann Integration und Differentiation vertauscht werden, d.h. auch u erfüllt die Helmholtzgleichung im $\mathbb{R}^2 \setminus \partial D$. Zudem folgt aus Satz 2.1, daß u die Ausstrahlungsbedingung erfüllt. Sei $\psi \in C(\partial D)$. Dann nennt man

$$v(x) := \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} \psi(y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D,$$

das *Doppelschichtpotential* mit Dichte ψ . Ebenso wie das Einfachschichtpotential ist auch v eine Lösung der Helmholtzgleichung im $\mathbb{R}^2 \setminus \partial D$ und erfüllt die Ausstrahlungsbedingung.

Korollar 2.10 *Die Fernfelder von u und v mit Dichte $\varphi \in C(\partial D)$ sind gegeben durch*

$$u_\infty(\hat{x}) = m \int_{\partial D} e^{-ik \langle \hat{x}, y \rangle} \varphi(y) ds(y), \quad \hat{x} \in \Omega \quad (2.23)$$

$$v_\infty(\hat{x}) = m \int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial n(y)} e^{-ik \langle \hat{x}, y \rangle} \varphi(y) ds(y), \quad \hat{x} \in \Omega \quad (2.24)$$

mit $m = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{8\pi k}}$.

Beweis: Die Aussagen können genau wie im obigen Satz aus dem asymptotischen Verhalten der Hankelfunktion gefolgert werden. \square

Korollar 2.11 *Sei $k > 0$ und u eine ausstrahlende Lösung der Helmholtzgleichung mit $u_\infty \equiv 0$. Dann folgt $u \equiv 0$.*

Beweis: Da das Fernfeld von u verschwindet, gilt bei Beachtung der Bemerkung 2.9 die Ungleichung $u(x) = O\left(\frac{1}{\|x\|^{3/2}}\right)$. Mit deren Hilfe kann nun folgende Abschätzung bewiesen werden:

$$\int_{\|x\|=r} |u(x)|^2 dx \leq C \frac{1}{r^2} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0.$$

Nun folgt die Behauptung aus dem Rellich-Lemma. \square

Bemerkung 2.12 *Die Voraussetzung $k > 0$ in obigem Korollar kann auf $\text{Im } k \geq 0$ abgeschwächt werden. Vgl. hierzu [2], Korollar 3.9.*

2.3 Die Hölderräume $C^{0,\alpha}$ und $C^{1,\alpha}$

Um die Abbildungseigenschaften der Integraloperatoren, die für den Nachweis der Existenz einer Lösung des direkten Problems verwendet werden, in befriedigender Weise angeben zu können, werden spezielle Räume benötigt, die in diesem Abschnitt eingeführt werden.

Definition 2.13 Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ und $0 < \alpha \leq 1$. $\varphi : G \rightarrow \mathbb{C}$ heißt gleichmäßig hölderstetig mit Hölderexponent $\alpha : \Leftrightarrow \exists C > 0 : \forall x, y \in G : |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq C \|x - y\|^\alpha$. Der Raum $C^{0,\alpha}(G) := \{\varphi : G \rightarrow \mathbb{C} \mid \exists C_\varphi : \forall x, y \in G : \|\varphi\|_\infty \leq C_\varphi \wedge |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq C_\varphi \|x - y\|^\alpha\}$ heißt Hölderraum.

Sei $\varphi \in C^{0,\alpha}(G)$, dann ist

$$|\varphi|_\alpha := \sup_{\substack{x, y \in G \\ x \neq y}} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{\|x - y\|^\alpha}$$

offensichtlich eine Halbnorm.

Satz 2.14 $C^{0,\alpha}(G)$ ist ein Banachraum mit der Norm $\|\varphi\|_\alpha := \|\varphi\|_\infty + |\varphi|_\alpha$.

Beweis: [2], Satz 2.4 \square

Für $\alpha < \beta$ kann man die Inklusion $C^{0,\beta}(G) \subset C^{0,\alpha}(G)$ leicht nachweisen. Für diese Einbettung gilt folgender

Satz 2.15 Sei $0 < \alpha < \beta \leq 1$ und G kompakt. Dann sind die Einbettungen $I^\beta : C^{0,\beta}(G) \rightarrow C(G)$ und $I^{\alpha,\beta} : C^{0,\beta} \rightarrow C^{0,\alpha}(G)$ kompakt.

Beweis: [2] Satz 2.5 \square

Um in analoger Weise den Raum $C^{1,\alpha}$ einzuführen, soll zuerst der Gradient auf dem Rand eines Gebietes unabhängig von der Parametrisierung eingeführt werden. Dazu gelte $\partial G \in C^2$, d.h. es existiert eine zweimal stetig differenzierbare, 2π -periodisch fortsetzbare, bijektive Abbildung $z : [0, 2\pi[\rightarrow \partial G$ mit $\|z'(t)\| > 0$ für alle $t \in [0, 2\pi[$. Sei nun $\varphi : \partial G \rightarrow \mathbb{C}$ stetig differenzierbar, d.h. $\varphi(z(t))$ ist stetig differenzierbar. Dann wird der Randgradient folgendermaßen definiert:

$$\text{Grad } \varphi(z(t)) := \frac{1}{\|z'(t)\|^2} \frac{d(\varphi \circ z)(t)}{dt} z'(t).$$

Diese Darstellung ist unabhängig von der Parametrisierung und läßt sich noch vereinfachen, wenn z nach der Bogenlänge parametrisiert ist. Dann gilt die Beziehung

$$\text{Grad } \varphi(z(s)) = \frac{d(\varphi \circ z)(s)}{ds} z'(s).$$

Nun kann der Hölderraum $C^{1,\alpha}$ eingeführt werden.

Definition 2.16 Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ und $0 < \alpha \leq 1$. $\varphi \in C^1(G)$ heißt *gleichmäßig hölderstetig differenzierbar mit Hölderexponent α* : $\Leftrightarrow \exists C > 0 : \forall x, y \in G : \|\text{grad } \varphi(x) - \text{grad } \varphi(y)\| \leq C\|x - y\|^\alpha$, wobei grad durch Grad zu ersetzen ist, falls G der Rand eines Gebiets ist.

$$C^{1,\alpha}(G) := \{\varphi \in C^1(G) \mid \exists C_\varphi : \forall x, y \in G : \|\varphi\|_\infty \leq C_\varphi \wedge \|\text{grad } \varphi\|_\infty \leq C_\varphi \\ \wedge \|\text{grad } \varphi(x) - \text{grad } \varphi(y)\| \leq C_\varphi \|x - y\|^\alpha\}$$

Mit der Norm $\|\varphi\|_{1,\alpha} := \|\varphi\|_\infty + \|\text{grad } \varphi\|_\alpha$ wird $C^{1,\alpha}$ ebenfalls zu einem Banachraum, und auch die Einbettungseigenschaften übertragen sich. Für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, können induktiv auch die Hölderräume $C^{n,\alpha}$ eingeführt werden:

$$C^{n,\alpha}(G) := \{\varphi \in C^n(G) : \|\varphi\|_{n,\alpha} := \|\varphi\|_\infty + \|\text{grad } \varphi\|_{n-1,\alpha} < \infty\}.$$

Falls G hierbei der Rand eines Gebietes ist, sei dieser als hinreichend glatt vorausgesetzt.

Für $\varphi \in C^1(\partial D)$ wird noch folgende Bezeichnung eingeführt:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta}(y) := \langle \text{Grad } \varphi(y), \vartheta(y) \rangle.$$

Hierbei sei $\vartheta := (-n_2, n_1)^t$ der normierte Tangentialvektor. Insbesondere gilt somit für die Funktion ϕ :

$$\frac{\partial \phi}{\partial \vartheta}(y) = \langle \text{grad } \phi(y), \vartheta(y) \rangle,$$

falls $\text{grad } \phi(y)$ für $y \in \partial D$ definiert ist. Mit Hilfe von partieller Integration ist folgende Vertauschungsregel für φ und $\psi \in C^1(\partial D)$ leicht nachweisbar:

$$\int_{\partial D} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \psi ds = - \int_{\partial D} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} ds. \quad (2.25)$$

2.4 Einfach- und Doppelschichtpotential

In diesem Abschnitt sollen die Potentiale, die zum Nachweis der Existenz einer Lösung des Transmissionsproblems benötigt werden, eingeführt und ihre Regularitätseigenschaften dargestellt werden. Dieser Teil des Kapitels ist angelehnt an das 2. Kapitel von [2]. Dort sind die Beweise der folgenden Aussagen für den dreidimensionalen Fall zu finden. Wegen der veränderten Grundlösung erscheint es aber dennoch sinnvoll, wenigstens teilweise die Beweise für die folgenden Sätze mitanzugeben. Für den gesamten Abschnitt bezeichne D ein beschränktes, zusammenhängendes Gebiet mit zusammenhängendem Rand der Klasse C^2 , wobei der Rand durch $z : [0, 2\pi[\rightarrow \partial D$ parametrisiert sei. Zusätzlich sei z linksorientiert, so daß der nach außen weisende Normalenvektor für $y = z(\tau) \in \partial D$ stets durch

$$n(y) = \frac{1}{\|z'(\tau)\|} \begin{pmatrix} z_2'(\tau) \\ -z_1'(\tau) \end{pmatrix}$$

gegeben ist.

Lemma 2.17 $\exists L > 0 : \forall x, y \in \partial D:$

$$| \langle n(y), x - y \rangle | \leq L \|x - y\|^2, \quad \|n(y) - n(x)\| \leq L \|x - y\|.$$

Beweis: Sei $|t - \tau|_{\min} := \min\{|t - \tau|, 2\pi - |t - \tau|\}$ für $t, \tau \in [0, 2\pi[$ und $x = z(t) \in \partial D$ beliebig, aber fest gewählt. In Lemma 4.5 werden unter anderem folgende Abschätzungen hergeleitet (wobei C_z und c_z von der Parametrisierung z abhängige, positive Konstanten bezeichnen):

$$\|z(t) - z(\tau)\| \geq c_z |t - \tau|_{\min}, \quad \left| \langle z(t) - z(\tau), \begin{pmatrix} z_2'(\tau) \\ -z_1'(\tau) \end{pmatrix} \rangle \right| \leq C_z |t - \tau|_{\min}^2.$$

Sei zudem c_z so gewählt, daß die Ungleichung $\|z'(t)\| > c_z$ für alle $t \in [0, 2\pi[$ gilt, dann folgt für $x = z(t)$, $y = z(\tau)$:

$$\begin{aligned} | \langle x - y, n(y) \rangle | &= \frac{1}{\|z'(\tau)\|} \left| \left\langle z(t) - z(\tau), \begin{pmatrix} z_2'(\tau) \\ -z_1'(\tau) \end{pmatrix} \right\rangle \right| \\ &\leq \frac{C_z}{c_z^3} \|z(t) - z(\tau)\|^2 = \frac{C_z}{c_z^3} \|x - y\|^2. \end{aligned}$$

Die zweite Ungleichung kann ähnlich bewiesen werden. \square

Bei dem nächsten Satz handelt es sich eine der Situation im \mathbb{R}^2 angepaßten Version von Satz 2.7 aus [2]. Dieser Satz bildet eine entscheidende Grundlage für Regularitätsaussagen.

Satz 2.18 Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein abgeschlossenes Gebiet, $\Omega \subset G$ kompakt und $\partial D \subset \overset{\circ}{\Omega}$. $K : G \times \partial D \rightarrow \mathbb{C}$ sei stetig für alle $x \in G, y \in \partial D, x \neq y$. Weiterhin gebe es Konstanten $M_1, \dots, M_3, N_0, \dots, N_3 > 0$, so daß für $\alpha \in]0, 1[$ und $y \in \partial D$ jeweils eine der folgenden Voraussetzungen (mit Fall 1 oder 2 bezeichnet) gilt:

$$|K(x, y)| \leq \begin{cases} M_1 & \forall x \in G, x \neq y \text{ im 1. Fall,} \\ \begin{cases} N_0 \|x - y\|^{\alpha-1} & \forall x \in \Omega, x \neq y, \\ N_1 & \forall x \in G \setminus \Omega \end{cases} & \text{im 2. Fall.} \end{cases} \quad (2.26)$$

Für $x_1, x_2 \in G$ mit $x_1 \neq y \neq x_2$ und $2\|x_1 - x_2\| \leq \|x_1 - y\|$ gelte weiterhin:

$$|K(x_1, y) - K(x_2, y)| \leq \begin{cases} \begin{cases} M_2 \|x_1 - x_2\| \|x_1 - y\|^{\alpha-1} & \forall x_1, x_2 \in \Omega, \\ M_3 \|x_1 - x_2\| & \forall x_1 \in G \setminus \Omega \vee x_2 \in G \setminus \Omega \end{cases} & \text{im 1. Fall} \\ \begin{cases} N_2 \|x_1 - x_2\| \|x_1 - y\|^{\alpha-2} & \forall x_1, x_2 \in \Omega, \\ N_3 \|x_1 - x_2\| & \forall x_1 \in G \setminus \Omega \vee x_2 \in G \setminus \Omega \end{cases} & \text{im 2. Fall.} \end{cases} \quad (2.27)$$

Dann gehört das Potential

$$u(x) := \int_{\partial D} K(x, y) \varphi(y) ds(y)$$

mit $x \in G, \varphi \in C(\partial D)$ zum Hölderraum $C^{0,\beta}(G)$ mit $\|u\|_{\beta,G} \leq C_{\beta,\partial D} \|\varphi\|_{\infty,\partial D}$ und zwar für alle $\beta \in]0, 1[$ im Fall 1 und für alle $\beta \in]0, \alpha]$ im Fall 2, wobei $C_{\beta,\partial D}$ eine von ∂D und β abhängige, positive Konstante ist.

Beweis: Für eine Parametrisierung z existiert stets eine Konstante $c_z > 0$ mit $\|z(t) - z(\tau)\| \geq c_z |t - \tau|_{\min}$ für alle $(t, \tau) \in [0, 2\pi]^2$, wie in Lemma 4.5 noch gezeigt wird, wobei $|t - \tau|_{\min}$ wie im Beweis des letzten Lemmas definiert ist. Sei $\partial D_\rho := \{x \in \mathbb{R}^2 : x = z + \rho n(z), z \in \partial D\}$, $\rho \in \mathbb{R}$. Für kleine $|\rho|$ ist die Abbildung $z \rightarrow z + \rho n(z)$ injektiv, wie aus obigem Lemma gefolgert werden kann. Sei also $1 > \rho_0 > 0$ so klein, daß dies gilt und die Menge

$$D_{\rho_0} := \{x \in \mathbb{R}^2 : x = z + \rho n(z), z \in \partial D, |\rho| \leq \rho_0\}$$

in Ω enthalten ist. Sei $R \in]0, \rho_0]$ so klein, daß die Menge $S_{x,R} := \{y \in \partial D : \|y - x\| < R\}$ zusammenhängend ist für alle $x \in \partial D$. Seien $x_0, x_1, x_2 \in D_{\rho_0}$ mit $0 < \|x_1 - x_2\| < \frac{R}{4}$ und $z_i \in \partial D$ mit $x_i = z_i + \rho_i n(z_i), i = 0, 1, 2, |\rho_i| \leq \rho_0$. Für $t_i \in [0, 2\pi[$ gelte $z(t_i) = z_i$ und es seien $s_1, s_2 \in [0, 2\pi[$ mit $\|z(t_0) - z(t_0 - s_1)\| = \|z(t_0) - z(t_0 + s_2)\| = R$. Für hinreichend kleines ρ_0 folgt für $y \in \partial D$ und $x = z + \rho n(z) \in D_{\rho_0}$ mit Hilfe obigen Lemmas:

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 &= \|x - z\|^2 + 2 \langle x - z, z - y \rangle + \|z - y\|^2 \\ &\geq \|x - z\|^2 + (1 - 2|\rho|L) \|z - y\|^2 \\ &\geq \|x - z\|^2 + \frac{1}{2} \|z - y\|^2 \geq \frac{1}{2} \|z - y\|^2 \end{aligned} \quad (2.28)$$

Dann gilt im 2.Fall:

$$\begin{aligned} \left| \int_{S_{z_0, R}} K(x_0, y) \varphi(y) ds(y) \right| &\leq N_{0,1} \|\varphi\|_\infty \int_{t_0 - s_1}^{t_0 + s_2} \|z(t_0) - z(\tau)\|^{\alpha-1} \|z'(\tau)\| d\tau \\ &\leq N_{0,2} \|\varphi\|_\infty \int_{t_0 - s_1}^{t_0 + s_2} |t_0 - \tau|_{\min}^{\alpha-1} d\tau \leq N_{0,3} \|\varphi\|_\infty. \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet $N_{0,1}$ eine Konstante, die sich durch Vergrößerung von N_0 ergibt. Diese Notation wird auch in den anderen Fällen verwendet. Obige Ungleichung ist im Fall 1 (natürlich mit anderer Konstante) trivialerweise richtig. Durch Lemma 2.17 zeigt man

$$\|z_1 - z_2\| \leq 2\|x_1 - x_2\|$$

für R, ρ_0 hinreichend klein. Sei $r := 2\|x_1 - x_2\|$, d.h. $S_{z_1, r} \subset S_{z_2, 2r}$. Seien $s_{i,j} \in [0, \pi[$ mit $i, j = 1, 2$ so gewählt, daß $\|z(t_1 - s_{1,1}) - z(t_1)\| = \|z(t_1 + s_{1,2}) - z(t_1)\| = r$ und $\|z(t_2 - s_{2,1}) - z(t_2)\| = \|z(t_2 + s_{2,2}) - z(t_2)\| = 2r$ gilt. Dies kann für hinreichend kleines R stets erreicht werden. Dann gilt:

$$s_{i,1} = |(t_i - s_{i,1}) - t_i| \leq \frac{1}{c_z} \|z(t_i - s_{i,1}) - z(t_i)\| = \frac{2}{c_z} r = \frac{4}{c_z} \|x_1 - x_2\|, \quad i = 1, 2.$$

Gleiches ist natürlich auch für $s_{i,2}$, $i = 1, 2$, nachweisbar. Weiterhin sei $s_{m,i} := \max\{s_{i,1}, s_{i,2}\}$ für $i = 1, 2$, dann gilt im 2.Fall:

$$\begin{aligned} &\left| \int_{S_{z_1, r}} [K(x_1, y) - K(x_2, y)] \varphi(y) ds(y) \right| \\ &\leq N_0 \|\varphi\|_\infty \left(\int_{S_{z_1, r}} \|x_1 - y\|^{\alpha-1} ds(y) + \int_{S_{z_2, 2r}} \|x_2 - y\|^{\alpha-1} ds(y) \right) \\ &\leq N_{0,1} \|\varphi\|_\infty (s_{m,1}^\alpha + s_{m,2}^\alpha) \leq N_{0,2} \|\varphi\|_\infty r^\alpha = N_{0,3} \|\varphi\|_\infty \|x_1 - x_2\|^\alpha. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Ungleichung (2.28) folgt für $y \in S_{z_1, R} \setminus S_{z_1, r}$:

$$\|x_1 - y\|^2 \geq \frac{1}{2} \|z_1 - y\|^2 \geq 2\|x_1 - x_2\|^2,$$

d.h. bei Integration über diesen Bereich ist die Ungleichung (2.27) anwendbar und es folgt mit geeignet gewählten reellen Zahlen s_1, \dots, s_4 :

$$\begin{aligned} &\left| \int_{S_{z_1, R} \setminus S_{z_1, r}} [K(x_1, y) - K(x_2, y)] \varphi(y) ds(y) \right| \\ &\leq N_{2,1} \|\varphi\|_\infty \|x_1 - x_2\| \\ &\quad \left(\int_{t_1 - s_1}^{t_1 - s_2} \|z(t_1) - z(\tau)\|^{\alpha-2} \|z'(\tau)\| d\tau + \int_{t_1 + s_3}^{t_1 + s_4} \|z(t_1) - z(\tau)\|^{\alpha-2} \|z'(\tau)\| d\tau \right) \\ &\leq N_{2,2} \|\varphi\|_\infty \|x_1 - x_2\| \left(\int_{s_2}^{s_1} \tau^{\alpha-2} d\tau + \int_{s_3}^{s_4} \tau^{\alpha-2} d\tau \right) \\ &\leq N_{2,3} \|\varphi\|_\infty \|x_1 - x_2\| (s_2^{\alpha-1} + s_3^{\alpha-1}) \leq N_{2,4} \|\varphi\|_\infty \|x_1 - x_2\|^\alpha \end{aligned}$$

Im 1.Fall folgt durch ähnliche Rechnung:

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{S_{z_1,r}} [K(x_1, y) - K(x_2, y)] \varphi(y) ds(y) \right| \\
& \leq M_{1,1} \|\varphi\|_\infty \int_{S_{z_1,r}} ds(y) \leq M_{1,2} \|\varphi\|_\infty \|x_1 - x_2\| \\
& \left| \int_{S_{z_1,R} \setminus S_{z_1,r}} [K(x_1, y) - K(x_2, y)] \varphi(y) ds(y) \right| \\
& \leq M_{2,1} \|\varphi\|_\infty \|x_1 - x_2\| \left(\int_{s_2}^{s_1} \tau^{\alpha-1} d\tau + \int_{s_3}^{s_4} \tau^{\alpha-1} d\tau \right) \\
& = M_{2,1} \|\varphi\|_\infty \|x_1 - x_2\| (s_1^\alpha - s_2^\alpha + s_4^\alpha - s_3^\alpha) \leq M_{2,1} \|\varphi\|_\infty \|x_1 - x_2\|
\end{aligned}$$

Nun sind noch die Integrale in $\partial D \setminus S_{z_i,R}$, $i = 0, 1$ zu betrachten:

$$\begin{aligned}
& \left| \int_{\partial D \setminus S_{z_0,R}} K(x_0, y) \varphi(y) ds(y) \right| \leq N_0 \|\varphi\|_\infty \int_{\partial D \setminus S_{z_0,R}} \|x_0 - y\|^{\alpha-1} ds(y) \\
& \leq N_{0,1} R^{\alpha-1} \|\varphi\|_\infty \\
& \left| \int_{\partial D \setminus S_{z_1,R}} [K(x_1, y) - K(x_2, y)] \varphi(y) ds(y) \right| \leq N_{2,1} R^{\alpha-2} \|\varphi\|_\infty \|x_1 - x_2\|
\end{aligned}$$

Diese Ungleichungen gelten im 1.Fall mit entsprechenden Konstanten natürlich analog. Sei $|\partial D|$ die Länge des Randes von D . Für $x_0 \notin D_{\rho_0}$ gilt:

$$|u(x_0)| \leq |\partial D| \max\left\{ \frac{N_0}{\rho_0^{1-\alpha}}, N_1 \right\} \|\varphi\|_\infty \quad \text{bzw.} \quad |u(x_0)| \leq |\partial D| M_1 \|\varphi\|_\infty$$

im 1.Fall, so daß

$$|u(x)| \leq C_{\alpha, \partial D} \|\varphi\|_\infty, \quad \forall x \in G,$$

nun gezeigt ist. Aus dieser Ungleichung folgt für $\|x_1 - x_2\| \geq R/4$ die Abschätzung

$$\left| \int_{\partial D} [K(x_1, y) - K(x_2, y)] \varphi(y) ds(y) \right| \leq 2C_{\alpha, \partial D} \left(\frac{4}{R} \right)^\beta \|x_1 - x_2\|^\beta \|\varphi\|_\infty.$$

Für den Fall $\|x_1 - x_2\| < R/4$ und $x_1 \notin D_{\rho_0}$ gilt:

$$\|x_1 - y\| \geq \rho_0 \geq R > 4\|x_1 - x_2\|.$$

Für $x_2 \notin D_{\rho_0}$ folgt analog:

$$\|x_2 - y\| > 4\|x_1 - x_2\| \quad \text{und somit} \quad \|x_1 - y\| \geq \|x_2 - y\| - \|x_1 - x_2\| \geq 3\|x_1 - x_2\|.$$

Somit ist für den Fall $\|x_1 - x_2\| < R/4$ und $x_1 \notin D_{\rho_0}$ oder $x_2 \notin D_{\rho_0}$ die Ungleichung (2.27) stets anwendbar und nach ähnlicher Rechnung wie eben folgt $\|x_1 - y\| \geq 3/4\rho_0$, d.h. es gilt:

$$\left| \int_{\partial D} [K(x_1, y) - K(x_2, y)]\varphi(y)ds(y) \right| \leq |\partial D| \max\left\{ \frac{N_2}{(\frac{3}{4}\rho_0)^{2-\alpha}}, N_3 \right\} \|\varphi\|_{\infty} \|x_1 - x_2\|$$

Entsprechendes gilt im 1.Fall und somit ist die Behauptung gezeigt. \square

Korollar 2.19 Sei $K : \partial D \times \partial D \rightarrow \mathbb{C}$ ein Kern, der obige Voraussetzungen auf ∂D erfüllt. Dann ist $A : C^{0,\beta}(\partial D) \rightarrow C^{0,\beta}(\partial D)$ mit $(A\varphi)(x) := \int_{\partial D} K(x, y)\varphi(y)ds(y)$ kompakt für alle $\beta \in]0, 1[$ im Fall 1 und für alle $\beta \in]0, \alpha[$ im Fall 2.

Beweis: Aus obigem Satz folgt, daß $A : C(\partial D) \rightarrow C^{0,\beta}(\partial D)$ ein beschränkter Operator ist. Nun folgt die Behauptung durch den Einbettungssatz 2.15 und die Idealeigenschaft von kompakten Operatoren im Ring der beschränkten Operatoren (vgl. Satz 1.5 in [2]). \square

Der nächste Satz gleicht in seiner Struktur Satz 2.18 und wird für den Beweis der Sprungbeziehung des Gradienten des Einfachschichtpotentials benötigt.

Satz 2.20 Sei $K : D_{\rho_0} \times \partial D \rightarrow \mathbb{C}$ stetig $\forall x \in D_{\rho_0}, y \in \partial D, x \neq y$. Zudem gebe es Konstanten $M_0, M_1, M_2 > 0$, so daß folgende Ungleichungen gelten:

$$|K(x, y)| \leq M_0 \|x - y\|^{-1} \quad \forall x \in D_{\rho_0}, y \in \partial D, x \neq y \quad (2.29)$$

$$|K(x_1, y) - K(x_2, y)| \leq M_1 \frac{\|x_1 - x_2\|}{\|x_1 - y\|^2} \quad \forall x_1, x_2 \in D_{\rho_0}, y \in \partial D, \quad (2.30)$$

$$x_1 \neq y \neq x_2 : 2\|x_1 - x_2\| \leq \|x_1 - y\|$$

$$\left| \int_{\partial D \setminus S_{z,r}} K(x, y)ds(y) \right| \leq M_2 \quad \forall z \in \partial D, \quad (2.31)$$

$$x = z + \rho n(z) \in D_{\rho_0}, 0 < r < R,$$

wobei R wie in Satz 2.18 gewählt ist. Dann gilt $u \in C^{0,\alpha}(D_{\rho_0})$ für

$$u(x) := \int_{\partial D} K(x, y)[\varphi(y) - \varphi(z)]ds(y),$$

mit $x \in D_{\rho_0}$, $\varphi \in C^{0,\alpha}(\partial D)$, $0 < \alpha < 1$ und $\|u\|_{\alpha, D_{\rho_0}} \leq C_{\alpha, \partial D} \|\varphi\|_{\alpha, \partial D}$.

Beweis: Dieser Satz kann mit der gleichen Beweisidee wie der vorherige bewiesen werden. Auf den Beweis soll daher hier verzichtet und auf Lemma 2.10 in [2] verwiesen werden. \square

Das nächste Lemma wird für den Nachweis der Randwerte des Doppelschichtpotentials benötigt. Hierbei sei D_{ρ_0} wiederum eine Paralleelfläche zu ∂D , so daß jeder Punkt $x \in D_{\rho_0}$ eindeutig dargestellt werden kann als $x = z + \rho n(z)$, mit $z \in \partial D$ und $|\rho| \leq \rho_0$.

Lemma 2.21 Sei $\varphi \in C(\partial D)$ und $K : D_{\rho_0} \times \partial D \rightarrow \mathbb{C}$ stetig für alle $x \in D_{\rho_0}$, $y \in \partial D$ und $x \neq y$. Zudem gebe es $R, C > 0$, so daß für alle $0 \leq r \leq R$, $x \in D_{\rho_0}$, $y \in \partial D$, $x \neq y$ die Ungleichungen $\int_{S_{z,r}} |K(x, y)| ds(y) \leq C$ und $|K(x, y) - K(z, y)| \leq C \frac{\|x-z\|}{\|z-y\|^2}$ gelten. Ferner sei $u : D_{\rho_0} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$u(x) := \int_{\partial D} K(x, y) [\varphi(y) - \varphi(z)] ds(y)$$

wohldefiniert für alle $x \in D_{\rho_0}$. Dann gilt gleichmäßig für alle $x \in D_{\rho_0} : \lim_{\rho \rightarrow 0} u(x) = u(z)$.

Beweis: Sei $\epsilon > 0$ beliebig gewählt, dann existiert wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von φ ein $0 < r \leq R$, so daß für alle $z, y \in \partial D$ mit $\|z - y\| \leq r$ die Ungleichung $|\varphi(y) - \varphi(z)| \leq \frac{\epsilon}{4C}$ gilt. Sei $\delta := \frac{\epsilon r^2}{4C|\partial D|\|\varphi\|_\infty}$ und $x \in D_{\rho_0}$ mit $\|x - z\| \leq \delta$, dann gilt:

$$\begin{aligned} |u(x) - u(z)| &\leq \int_{S_{z,r}} |K(x, y) - K(z, y)| |\varphi(y) - \varphi(z)| ds(y) \\ &\quad + \int_{\partial D \setminus S_{z,r}} |K(x, y) - K(z, y)| |\varphi(y) - \varphi(z)| ds(y) \\ &\leq 2C \frac{\epsilon}{4C} + 2|\partial D| \|\varphi\|_\infty C \frac{\|x - z\|}{r^2} \leq \epsilon \quad \square \end{aligned}$$

Sei nun Φ die im ersten Teil dieses Kapitels eingeführte Grundlösung der Helmholtzgleichung, $\varphi \in C(\partial D)$ und

$$u(x) := \int_{\partial D} \Phi(x, y) \varphi(y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D$$

das in Korollar 2.10 eingeführte *Einfachschichtpotential* mit Dichte φ , dann gilt für u folgender

Satz 2.22 u ist gleichmäßig hölderstetig im \mathbb{R}^2 mit $\|u\|_{\alpha, \mathbb{R}^2} \leq C_\alpha \|\varphi\|_{\infty, \partial D}$ für alle $\alpha \in]0, 1[$.

Beweis: Um die Aussage zu beweisen, reicht es die Bedingungen (2.26) und (2.27) aus Satz 2.18 für den zweiten Fall nachzuprüfen. Sei hierzu Ω eine kompakte Menge mit $\partial D \subset \overset{\circ}{\Omega}$ und $\alpha \in]0, 1[$. Es gilt $\Phi(x, y) = C_1 \ln \|x - y\| + f(\|x - y\|)$ mit einer auf ganz \mathbb{R} stetig fortsetzbaren Funktion f . Daher gilt für $f_{\max} := \max_{x \in \Omega, y \in \partial D} f(\|x - y\|)$ und $x \neq y$:

$$|\Phi(x, y)| \leq C_2 \|x - y\|^{\alpha-1} + f_{\max} \leq C_3 \|x - y\|^{\alpha-1} (1 + f_{\max})$$

und somit ist der 1. Teil von (2.26) gezeigt. Der 2. Teil folgt sofort aus dem asymptotischen Verhalten der Hankelfunktion. Weiterhin gilt:

$$H_0^1(z) = J_0(z) + iN_0(z) = J_0(z) + \frac{2i}{\pi}[J_0(z)(\ln \frac{z}{2} + c) - A_0(z)]$$

mit analytischen Funktionen J_0 und A_0 . Seien $x_1, x_2 \in G, y \in \partial D$ mit $x_1 \neq y \neq x_2$. Sei $J_{0,i} := J_0(k\|x_i - y\|)$ ebenso $A_{0,i} := A_0(k\|x_i - y\|)$, $\ln_i := \ln \|x_i - y\|$ für $i = 1, 2$ und $q := \ln \frac{k}{2} + c$, dann gilt:

$$\begin{aligned} & |\Phi(x_1, y) - \Phi(x_2, y)| \\ &= \frac{1}{4} |(J_{0,1} - J_{0,2})(1 + \frac{2i}{\pi}q) + \frac{2i}{\pi}(J_{0,1} - J_{0,2}) \ln_1 + \frac{2i}{\pi}J_{0,2}(\ln_1 - \ln_2) + A_{0,1} - A_{0,2}| \end{aligned}$$

und aus dem Mittelwertsatz folgt für $x_1, x_2 \in \Omega, y \in \partial D$ mit $x_1 \neq y \neq x_2$:

$$|J_{0,1} - J_{0,2}| \leq C\|x_1 - x_2\| \quad \text{und} \quad |A_{0,1} - A_{0,2}| \leq C\|x_1 - x_2\|$$

Für die logarithmischen Terme gilt:

$$\begin{aligned} \|\ln \|x_1 - y\|\| &\leq \|x_1 - y\|^{\alpha-1} \quad \forall x_1 \in \Omega, x \neq y \quad \text{und} \\ \|\ln \|x_1 - y\| - \ln \|x_2 - y\|\| &\leq C \frac{\|x_1 - x_2\|}{\|x_1 - y\|} \quad \forall x_1 \neq y \neq x_2, 2\|x_1 - x_2\| \leq \|x_1 - y\|. \end{aligned}$$

Nun ist der 1. Teil von (2.27) unter Beachtung der Kompaktheit von Ω unmittelbar einsichtig, und der zweite Teil folgt für ein hinreichend groß gewähltes Ω durch Ausnutzung des asymptotischen Verhaltens der Hankelfunktion. \square

Sei $\psi \in C(\partial D)$ und

$$v(x) := \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} \psi(y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D$$

das in Korollar 2.10 eingeführte *Doppelschichtpotential* mit Dichte ψ . Hierbei bezeichnet n wie üblich die in das Äußere von D weisende Normale. Sei weiterhin Φ_0 die Grundlösung der Laplacegleichung, d.h.

$$\Phi_0(x, y) := \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\|x - y\|},$$

dann gilt folgender

Satz 2.23 Sei $\psi \in C(\partial D)$, $K(x, y) := \frac{\partial}{\partial n(y)}(\Phi(x, y) - \Phi_0(x, y))$ und $w(x) := \int_{\partial D} K(x, y)\psi(y)ds(y)$, dann ist w gleichmäßig hölderstetig in \mathbb{R}^2 mit Hölderexponent $\beta = 1$ und $\|w\|_{\beta, \mathbb{R}^2} \leq C_{\beta, \partial D} \|\psi\|_{\infty, \partial D}$.

Beweis: Sei Ω eine kompakte Menge wie im obigen Satz und $\alpha \in]0, 1[$. Es ist

$$K(x, y) = \frac{i \langle x - y, n(y) \rangle}{4 \|x - y\|} \left(k J_1(k \|x - y\|) \right. \\ \left. + \frac{2ik}{\pi} [J_1(k \|x - y\|) (\ln \|x - y\| + \ln \frac{k}{2} + c) - \frac{k \|x - y\|}{4} A_1(k \|x - y\|)] \right)$$

Aus dem Grenzwert $\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} J_1(kt) \ln t = 0$ folgt zusammen mit der Asymptotik der Hankelfunktion die Ungleichung (2.26). Weiterhin gilt

$$|K(x_1, y) - K(x_2, y)| \leq \begin{cases} C_\alpha \|x_1 - x_2\| \|x_1 - y\|^{\alpha-1} & x_1, x_2 \in \Omega, \\ C_\alpha \|x_1 - x_2\| & \text{sonst,} \end{cases}$$

wie sich durch Nachrechnen zeigen läßt. Somit ist (2.27) gezeigt, so daß die Behauptung nun aus Satz 2.18 folgt. \square

Obiger Satz ermöglicht es nun, die nächsten drei Aussagen nur für die Grundlösung der Laplacegleichung zu beweisen. Sei hierzu der Grenzwert in Normalenrichtung gegen den Rand wie folgt definiert:

$$v_+(z) := \lim_{\substack{\rho \rightarrow 0 \\ \rho > 0}} v(z + \rho n(z)), \quad v_-(z) := \lim_{\substack{\rho \rightarrow 0 \\ \rho > 0}} v(z - \rho n(z))$$

mit $z \in \partial D$, $x \in D_{\rho_0}$ und $x = z \pm \rho n(z)$.

Satz 2.24 *Das Doppelschichtpotential v mit stetiger Dichte ψ kann von $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ nach $\mathbb{R}^2 \setminus D$ und von D nach \bar{D} stetig fortgesetzt werden mit Grenzwerten*

$$v_\pm(x) = \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} \psi(y) ds(y) \pm \frac{1}{2} \psi(x), \quad x \in \partial D \quad (2.32)$$

$$\text{und} \quad \|v\|_{\infty, \bar{D}} \leq C \|\psi\|_{\infty, \partial D}, \quad \|v\|_{\infty, \mathbb{R}^2 \setminus D} \leq C \|\psi\|_{\infty, \partial D}. \quad (2.33)$$

Beweis: Aus Lemma 2.17 folgt für $x, y \in \partial D$ die Ungleichung

$$\left| \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial n(y)} \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{\langle x - y, n(y) \rangle}{\|x - y\|^2} \right| \leq \frac{L}{2\pi}, \quad (2.34)$$

d.h. obiges Integral existiert als uneigentliches Integral. Die Aussage des Satzes soll nun zunächst für den Fall $\psi \equiv 1$ bewiesen werden, um dann den allgemeinen Fall darauf zurückzuführen. Sei hierzu

$$w(x) := \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial n(y)} ds(y),$$

dann folgt mit Hilfe des Integralsatzes von Gauß für den Außenraum und der Green-schen Darstellungsformel für den Innenraum:

$$\begin{aligned} w(x) &= \int_D \operatorname{div} \operatorname{grad} \Phi_0(x, y) ds(y) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D} \\ w(x) &= \int_{\partial D} \left(\frac{\partial 1}{\partial n(y)} \Phi_0(x, y) + 1 \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial n(y)} \right) ds(y) = -1, \quad x \in D. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Sei nun $x \in \partial D$ und $H_{x,r} := \{y \in D : \|x - y\| = r\}$. Analog zu Lemma 2.2 aus [15] zeigt man $\int_{H_{x,r}} ds(y) = \pi r + O(r^2)$, $r \rightarrow 0$ gleichmäßig auf ∂D . Durch eine weitere Anwendung des Gauß'schen Integralsatzes folgt:

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial n(y)} ds(y) &= \lim_{r \rightarrow 0} \int_{H_{x,r}} \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial n(y)} ds(y) \\ &\stackrel{n(y) = \frac{y-x}{\|x-y\|}}{=} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{-1}{2\pi r} \int_{H_{x,r}} ds(y) = -\frac{1}{2} \end{aligned} \quad (2.36)$$

Somit ist die Behauptung für eine konstante Dichte gezeigt. Sei nun ψ eine beliebige stetige Dichte und

$$u(x) := \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial n(y)} [\psi(y) - \psi(z)] ds(y), \quad x \in D_{\rho_0}, \quad x = z + \rho n(z), \quad z \in \partial D,$$

d.h. $v(x) = \psi(z)w(x) + u(x)$. Nun soll gezeigt werden, daß u stetig in D_{ρ_0} ist, womit dann die Behauptung folgt. Aus der Abschätzung (2.34) folgt, daß u auf ∂D eine stetige Funktion darstellt (vgl. auch Satz 2.6 in [2]). Somit bleibt der gleichmäßige Grenzwert $\lim_{\rho \rightarrow 0} u(z + \rho n(z)) = u(z)$, $z \in \partial D$ nachzuweisen. Mit Hilfe von Lemma 2.17 folgt für hinreichend kleines $\rho_0 > 0$, $y, z \in \partial D$, $x = z + \rho n(z) \in D_{\rho_0}$:

$$\|x - y\|^2 \geq \frac{1}{2} \{ \|x - z\|^2 + \|z - y\|^2 \},$$

wie in der Ungleichung (2.28) gezeigt wurde. Daher läßt sich mit Hilfe der Dreiecksungleichung und Lemma 2.17 nachweisen:

$$\begin{aligned} 2\pi \left| \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial n(y)} \right| &\leq \left| \frac{\langle n(y), z - y \rangle}{\|x - y\|^2} \right| + \left| \frac{\langle n(y), x - z \rangle}{\|x - y\|^2} \right| \\ &\leq 2L + \frac{2\|x - z\|}{\|z - y\|^2 + \|x - z\|^2} \end{aligned}$$

Für $r < R$ hinreichend klein (mit R wie im Beweis von Satz 2.18), $|\rho| = \|x - z\|$ und $t \in [0, 2\pi[$ mit $z(t) = z$ ergibt sich nun mit geeigneten positiven reellen Zahlen s_1, s_2, γ

und $s_m := \max\{s_1, s_2\}$ (wobei $s_m < \pi$ gelte):

$$\begin{aligned}
\int_{S_{z,r}} \left| \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial n(y)} \right| ds(y) &\leq C_1 + C_2 |\rho| \int_{t-s_1}^{t+s_2} \frac{1}{\rho^2 + \|z(t) - z(\tau)\|^2} \|z'(\tau)\| d\tau \\
&\leq C_1 + C_2 |\rho| \int_{t-s_1}^{t+s_2} \frac{1}{\rho^2 + \gamma^2 |t - \tau|^2} \|z'(\tau)\| d\tau \\
&\leq C_1 + C_{2,1} |\rho| \int_0^{s_m} \frac{1}{\frac{\rho^2}{\gamma^2} + \tau^2} d\tau \\
&\leq C_1 + C_{2,1} |\rho| \frac{\gamma}{|\rho|} \arctan \frac{\gamma}{|\rho|} \leq C
\end{aligned} \tag{2.37}$$

Weiterhin zeigt sich durch erneutes Abschätzen:

$$2\pi \left| \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial n(y)} - \frac{\partial \Phi_0(z, y)}{\partial n(y)} \right| \leq C \frac{\|x - z\|}{\|z - y\|^2}$$

Die Stetigkeit für $\rho \rightarrow 0$ folgt dann aus Lemma 2.21. Nun ist noch (2.33) zu zeigen. Mit Hilfe der Ungleichung (2.37) kann dies jedoch ähnlich wie in Satz 2.18 nachgewiesen werden. Somit ist die Behauptung gezeigt. \square

Satz 2.25 Sei v wie im obigen Satz, $\alpha \in]0, 1[$, dann ist $v \in C^{0,\alpha}(\partial D)$ mit $\|v\|_{\alpha, \partial D} \leq C_{\alpha, \partial D} \|\psi\|_{\infty, \partial D}$.

Beweis: Mit Hilfe von Lemma 2.17 zeigt man die Gültigkeit von (2.26) für den 2.Fall. (2.27) gilt dann für $2\|x_1 - x_2\| \leq \|x_1 - y\|$ wegen folgender Ungleichung:

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{\langle x_1 - y, n(y) \rangle}{\|x_1 - y\|^2} - \frac{\langle x_2 - y, n(y) \rangle}{\|x_2 - y\|^2} \right| \\
&\leq |\langle x_1 - y, n(y) \rangle| \left| \frac{1}{\|x_1 - y\|^2} - \frac{1}{\|x_2 - y\|^2} \right| + \frac{|\langle x_1 - x_2, n(y) \rangle|}{\|x_2 - y\|^2} \\
&\leq C \frac{\|x_1 - x_2\|}{\|x_1 - y\|} + \frac{|\langle x_1 - x_2, n(y) - n(x_1) \rangle| + |\langle x_1 - x_2, n(x_1) \rangle|}{\|x_2 - y\|^2} \\
&\leq C_1 \frac{\|x_1 - x_2\|}{\|x_1 - y\|}
\end{aligned}$$

Somit folgt die Behauptung aus Satz 2.18, oder genauer gesagt aus einer Version von Satz 2.18, in der die Kernfunktion nur auf den Rand definiert ist. \square

Satz 2.26 Das Doppelschichtpotential v mit gleichmäßig hölderstetiger Dichte $\psi \in C^{0,\alpha}(\partial D)$, $0 < \alpha < 1$ kann gleichmäßig hölderstetig von D nach \overline{D} und von $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ nach $\mathbb{R}^2 \setminus D$ fortgesetzt werden mit

$$\|v\|_{\alpha, \mathbb{R}^2 \setminus D} \leq C_{\alpha, \partial D} \|\psi\|_{\alpha, \partial D}, \quad \|v\|_{\alpha, \overline{D}} \leq C_{\alpha, \partial D} \|\psi\|_{\alpha, \partial D}, \tag{2.38}$$

wobei $C_{\alpha, \partial D} > 0$ eine von ∂D und α abhängige Konstante ist.

Beweis: Wiederum ist die Aussage nur für die Grundlösung der Laplacegleichung zu zeigen. Sei zuerst $x \in D_{\rho_0}$. Wie in Satz 2.24 betrachtet man die Aufspaltung $v(x) = \psi(z)w(x) + u(x)$. Nun soll gezeigt werden, daß beide Terme der Aufspaltung die Behauptung des Satzes erfüllen. Setzt man w wie in Satz 2.24 stetig fort mit $w(x) = 0$ für $x \in D_{\rho_0} \setminus D$ und $w(x) = -1$ für $x \in D_{\rho_0} \cap \overline{D}$, so erfüllt $\psi(z)w(x)$ offensichtlich wegen der gleichmäßigen Hölderstetigkeit von ψ die Behauptung. Auf u soll nun Satz 2.20 angewandt werden. Bedingung (2.29) ist offensichtlich erfüllt. (2.30) folgt durch elementares Abschätzen und die Bedingung (2.31) zeigt man wie die Ungleichung (2.37). Für $x \notin D_{\rho_0}$ folgt die Behauptung aus der Analytizität von v in $\mathbb{R}^2 \setminus \partial D$ und der Asymptotik der Hankelfunktion. \square

Satz 2.27 Sei $\varphi \in C^{0,\alpha}(\partial D)$, $0 < \alpha < 1$, dann kann der Gradient des Einfachschichtpotentials u gleichmäßig hölderstetig von D nach \overline{D} und von $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ nach $\mathbb{R}^2 \setminus D$ fortgesetzt werden mit Grenzwerten

$$\text{grad } u_{\pm}(x) = \int_{\partial D} \text{grad}_x \Phi(x, y) \varphi(y) ds(y) \mp \frac{1}{2} n(x) \varphi(x), \quad x \in \partial D, \quad (2.39)$$

wobei das Integral als Cauchyscher Hauptwert existiert. Weiterhin gelten folgende Abschätzungen:

$$\|\text{grad } u\|_{\alpha, \mathbb{R}^2 \setminus D} \leq C_{\alpha, \partial D} \|\varphi\|_{\alpha, \partial D}, \quad \|\text{grad } u\|_{\alpha, \overline{D}} \leq C_{\alpha, \partial D} \|\varphi\|_{\alpha, \partial D}, \quad (2.40)$$

wobei $C_{\alpha, \partial D}$ eine von ∂D und α abhängige, positive Konstante ist.

Beweis: Wie bei den Sprungbeziehungen des Doppelschichtpotentials soll auch hier die Aussage zuerst für $\varphi \equiv 1$ gezeigt werden. Sei also

$$w(x) := \int_{\partial D} \Phi(x, y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D,$$

dann gilt wegen $\text{grad}_x \Phi(x, y) = -\text{grad}_y \Phi(x, y)$ für $x \notin \partial D$:

$$\begin{aligned} \text{grad } w(x) &= - \int_{\partial D} \text{grad}_y \Phi(x, y) ds(y) \\ &= - \int_{\partial D} \text{Grad}_y \Phi(x, y) ds(y) - \int_{\partial D} n(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} ds(y) =: U(x) + V(x) \end{aligned}$$

Diese Integrale sind komponentenweise zu verstehen. V ist ein Doppelschichtpotential mit hölderstetiger Dichte $n \in C^{0,1}(\partial D)$. Somit gilt

$$V_{\pm}(x) = - \int_{\partial D} n(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} ds(y) \mp \frac{1}{2} n(x)$$

und die Abschätzungen 2.40 für V folgen aus Satz 2.26. Nun soll gezeigt werden, daß sich U für $x \notin \partial D$ als Einfachschichtpotential mit stetiger Dichte darstellen läßt. Sei hierzu für $y \in \partial D$ folgende Abbildung definiert:

$$\nu(y) := \frac{1}{\|z'(\tau)\|} \left(\frac{z'(\tau)}{\|z'(\tau)\|} \right)' \Big|_{\tau=z^{-1}(y)}.$$

Mit Hilfe von partieller Integration kann man nun nachweisen:

$$\int_{\partial D} \text{Grad}_y \Phi(x, y) ds(y) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial \Phi(x, z(\tau))}{\partial \tau} \frac{z'(\tau)}{\|z'(\tau)\|} d\tau = - \int_{\partial D} \Phi(x, y) \nu(y) ds(y)$$

Die Behauptung folgt nun aus Satz 2.22, wenn noch folgende Beziehung für $x \in \partial D$ nachgewiesen wird:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\partial D \setminus S_{x,r}} \text{Grad}_y \Phi(x, y) ds(y) = - \int_{\partial D} \Phi(x, y) \nu(y) ds(y)$$

Wiederum mit partieller Integration zeigt man die Gültigkeit von

$$\int_{\partial D \setminus S_{x,r}} \text{Grad}_y \Phi(x, y) ds(y) = [\vartheta(y) \Phi(x, y)]_{y_2}^{y_1} - \int_{\partial D \setminus S_{x,r}} \Phi(x, y) \nu(y) ds(y)$$

mit $\|x - y_1\| = \|x - y_2\| = r$, wobei ϑ weiterhin der bereits im Abschnitt über Hölderräume eingeführte normierte Tangentialvektor ist. Somit folgt die Behauptung unter Beachtung von $\Phi(x, y_1) = \Phi(x, y_2)$ aus folgender Ungleichung:

$$\|\vartheta(y_1) \Phi(x, y_1) - \vartheta(y_2) \Phi(x, y_2)\| \leq \underbrace{|\Phi(x, y_1)|}_{\leq C_1 |\ln r|} \underbrace{\|\vartheta(y_1) - \vartheta(y_2)\|}_{\leq C_2 r} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$$

Die Abschätzung (2.40) für U folgt somit aus Satz 2.32. Für beliebige, stetige Dichte φ folgt die Aussage des Satzes genauso wie in Satz 2.26 durch Aufspaltung $\text{grad} u(x) = \varphi(z) \text{grad} w(x) + W(x)$ und Anwendung von Satz 2.20 auf

$$W(x) := \int_{\partial D} \text{grad}_x \Phi(x, y) [\varphi(y) - \varphi(z)] ds(y). \quad \square$$

Korollar 2.28 Sei $\varphi \in C^{1,\alpha}(\partial D)$ und $\partial D \in C^{2,\alpha}$, dann können die zweiten Ableitungen des Einfachschichtpotentials u gleichmäßig hölderstetig von D nach \overline{D} und von $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ nach $\mathbb{R}^2 \setminus D$ fortgesetzt werden.

Beweis: Genau wie in Satz 2.27 zeigt man für $x \notin \partial D$:

$$\begin{aligned} \text{grad} u(x) &= - \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} n(y) \varphi(y) ds(y) \\ &\quad + \int_{\partial D} \Phi(x, y) \nu(y) \varphi(y) ds(y) + \int_{\partial D} \Phi(x, y) \text{Grad} \varphi(y) ds(y) \end{aligned} \quad (2.41)$$

Es ist $\nu \in C^{0,\alpha}(\partial D)$, $\text{Grad } \varphi \in C^{0,\alpha}(\partial D)$ und $n\varphi \in C^{1,\alpha}(\partial D)$, somit sind obiger Satz und der noch folgende Satz 2.35 anwendbar und die Behauptung ist gezeigt. \square

Sei $z \in \partial D$ und

$$\frac{\partial u_{\pm}}{\partial n}(z) := \lim_{\substack{\rho \rightarrow 0 \\ \rho > 0}} \frac{\partial u(z \pm \rho n(z))}{\partial n(z)}.$$

Wie man durch Gegenbeispiele zeigen kann, ist Satz 2.27 für stetige Dichten im allgemeinen nicht mehr richtig. Für die Normalableitung des Einfachschichtpotentials gilt jedoch bereits bei stetiger Dichte folgender

Satz 2.29 *Für das Einfachschichtpotential u mit stetiger Dichte φ gilt:*

$$\frac{\partial u_{\pm}}{\partial n}(z) = \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(z, y)}{\partial n(z)} \varphi(y) ds(y) \mp \frac{1}{2} \varphi(z). \quad (2.42)$$

Beweis: Sei $v(x) := \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} \varphi(y) ds(y)$, $x \in D_{\rho_0} \setminus \partial D$, $x = z + \rho n(z)$, $z \in \partial D$, dann gilt:

$$\begin{aligned} & \langle n(z), \text{grad } u(x) \rangle + v(x) \\ &= \int_{\partial D} [\langle n(z), \text{grad}_x \Phi(x, y) \rangle + \langle n(y), \text{grad}_y \Phi(x, y) \rangle] \varphi(y) ds(y) \\ &= \int_{\partial D} \underbrace{\langle n(y) - n(z), \text{grad}_y \Phi(x, y) \rangle}_{=: K(x, y)} \varphi(y) ds(y) \end{aligned}$$

Nun bleibt nachzuweisen, daß $\int_{\partial D} K(x, y) \varphi(y) ds(y)$ in ganz D_{ρ_0} stetig ist, womit dann die Behauptung aus der Sprungbeziehung des Doppelschichtpotentials folgt. Dies kann wiederum mit Satz 2.18 gezeigt werden. \square

Nun wird dieser Teil des Kapitels abgeschlossen durch einige Aussagen über die Ableitung des Doppelschichtpotentials. Wiederum reicht es aus, sich mit der Grundlösung der Laplacegleichung zu befassen, wie folgender Satz zeigt:

Satz 2.30 *Sei $\varphi \in C(\partial D)$, $\alpha \in]0, 1[$ und $K(x, y) := \text{grad}_x \left(\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} - \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial n(y)} \right)$, dann gilt $u_i(x) := \int_{\partial D} K_i(x, y) \varphi(y) ds(y) \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^2)$, $i = 1, 2$, wobei K_i eine Komponente des Vektors K ist. Zusätzlich gilt die Abschätzung $\|u_i\|_{\alpha, \mathbb{R}^2} \leq C_{\alpha, \partial D} \|\varphi\|_{\infty, \partial D}$.*

Beweis: Sei $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D$, $H_0^1 := H_0^1(k\|x - y\|)$ und ebenso $J_1 := J_1(k\|x - y\|)$ und $A_1 := A_1(k\|x - y\|)$, dann gilt:

$$K(x, y) = \frac{i}{4} \left\{ k^2(x-y) H_0^1 \frac{\langle x-y, n(y) \rangle}{\|x-y\|^2} + \left(\frac{n(y)}{\|x-y\|} - \frac{2 \langle x-y, n(y) \rangle (x-y)}{\|x-y\|^3} \right) \left[k J_1 + \frac{2ik}{\pi} \left(J_1 \left(\ln \left(\frac{k}{2} \|x-y\| \right) + c \right) - \frac{k\|x-y\|}{4} A_1 \right) \right] \right\}.$$

Auch für diesen Kern kann die Behauptung mit Hilfe von Satz 2.18 bewiesen werden.
□

Korollar 2.31 Sei $x \in D_{\rho_0}$, $x = z + \rho n(z)$, $K(x, y) := \frac{\partial}{\partial n(z)} \left(\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} - \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial n(y)} \right)$, $\varphi \in C(\partial D)$ und $\alpha \in]0, 1[$. Dann gilt für die Funktion $u(x) := \int_{\partial D} K(x, y) \varphi(y) ds(y)$ die Beziehung $u \in C^{0, \alpha}(D_{\rho_0})$ und $\|u\|_{\alpha, D_{\rho_0}} \leq C_{\alpha, D_{\rho_0}} \|\varphi\|_{\infty, \partial D}$.

Für das Doppelschichtpotential mit stetiger Dichte existieren die Ableitungen im Allgemeinen nicht bis in den Rand hinein. Es gilt allerdings folgender

Satz 2.32 Für das Doppelschichtpotential v mit stetiger Dichte φ gilt

$$\lim_{\substack{\rho \rightarrow 0 \\ \rho > 0}} \left(\frac{\partial}{\partial n(z)} v(z - \rho n(z)) - \frac{\partial}{\partial n(z)} v(z + \rho n(z)) \right) = 0, \quad z \in \partial D, \quad (2.43)$$

gleichmäßig für alle z auf dem Rand von D .

Beweis: Sei $\rho \in [0, \rho_0]$, $z, y \in \partial D$, $x_{\pm} := z \pm \rho n(z)$, $a_{\pm} := x_{\pm} - y$, $a_0 := z - y$ und $s_b^v := \langle a_v, n(b) \rangle$ mit $b \in \{z, y\}$ und $v \in \{0, +, -\}$. Dann gelten folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} \|a_+\|^2 - \|a_-\|^2 &= \|(x_+ - z) + a_0\|^2 - \|(x_- - z) + a_0\|^2 = 4\rho s_z^0 \\ \frac{1}{\|a_-\|^2} - \frac{1}{\|a_+\|^2} &= 4\rho \frac{s_z^0}{\|a_+\|^2 \|a_-\|^2} \\ s_z^- s_y^- - s_z^+ s_y^+ &= -2\rho (s_z^0 \langle n(z), n(y) \rangle + s_y^0) \\ \|a_+\|^4 - \|a_-\|^4 &= (\|a_+\|^2 - \|a_-\|^2)(\|a_+\|^2 + \|a_-\|^2) = 8\rho s_z^0 (\rho^2 + \|a_0\|^2) \\ \|a_+\|^4 s_z^- s_y^- - \|a_-\|^4 s_z^+ s_y^+ &= \|a_+\|^4 (s_z^- s_y^- - s_z^+ s_y^+) + (\|a_+\|^4 - \|a_-\|^4) s_z^+ s_y^+ \\ &= -2\rho \|a_+\|^4 (s_z^0 \langle n(z), n(y) \rangle + s_y^0) \\ &\quad + 8\rho s_z^0 (\rho^2 + \|a_0\|^2) s_z^+ s_y^+ \\ \frac{s_z^- s_y^-}{\|a_-\|^4} - \frac{s_z^+ s_y^+}{\|a_+\|^4} &= -2\rho \frac{s_z^0 \langle n(z), n(y) \rangle + s_y^0}{\|a_-\|^4} + 8\rho \frac{s_z^0 s_z^+ s_y^+ (\rho^2 + \|a_0\|^2)}{\|a_+\|^4 \|a_-\|^4} \end{aligned}$$

Somit gilt unter Beachtung von (2.35):

$$\begin{aligned} 2\pi \frac{\partial}{\partial n(z)} (v(x_-) - v(x_+)) &= \int_{\partial D} (\varphi(y) - \varphi(z)) \left[\left(\frac{1}{\|a_-\|^2} - \frac{1}{\|a_+\|^2} \right) \langle n(z), n(y) \rangle \right. \\ &\quad \left. - 2 \left(\frac{s_z^- s_y^-}{\|a_-\|^4} - \frac{s_z^+ s_y^+}{\|a_+\|^4} \right) \right] ds(y) \\ &= 4\rho \int_{\partial D} \langle n(z), n(y) \rangle \frac{s_z^0}{\|a_+\|^2 \|a_-\|^2} (\varphi(y) - \varphi(z)) ds(y) \\ &\quad - 2\rho \int_{\partial D} \frac{s_z^0 \langle n(z), n(y) \rangle + s_y^0}{\|a_-\|^4} (\varphi(y) - \varphi(z)) ds(y) \\ &\quad + 8\rho \int_{\partial D} \frac{s_z^0 s_z^+ s_y^+ (\rho^2 + \|a_0\|^2)}{\|a_+\|^4 \|a_-\|^4} (\varphi(y) - \varphi(z)) ds(y) \end{aligned}$$

Unter Zuhilfenahme dieser Aufspaltung folgt die Aussage des Satzes nun mit Lemma 2.21 genauso wie in Satz 2.24. \square

Korollar 2.33 *Seien Φ_i, Φ_a die Grundlösungen mit Konstanten k_i, k_a und v_i, v_a Doppelschichtpotentiale mit den den Indizes entsprechenden Grundlösungen im Innen- bzw. Außenraum und einer stetigen Dichte ψ . Dann gilt*

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\rho \rightarrow 0 \\ \rho > 0}} \left(\frac{\partial}{\partial n(z)} v_a(z + \rho n(z)) - \frac{\partial}{\partial n(z)} v_i(z - \rho n(z)) \right) \\ = \int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial n(z)} \left(\frac{\partial \Phi_a(z, y)}{\partial n(y)} - \frac{\partial \Phi_i(z, y)}{\partial n(y)} \right) \psi(y) ds(y) \quad (2.44) \end{aligned}$$

gleichmäßig für alle z aus dem Rand von D .

Beweis: Sei $x_{\pm} := z \pm \rho n(z)$,

$$v_{0,a} := \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi_0(x_+, y)}{\partial n(y)} \psi(y) ds(y), \quad v_{0,i} := \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi_0(x_-, y)}{\partial n(y)} \psi(y) ds(y),$$

dann folgt mit Hilfe von Satz 2.32 und Korollar 2.31:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n(z)} v_a(x_+) - \frac{\partial}{\partial n(z)} v_i(x_-) &= \frac{\partial}{\partial n(z)} [v_a(x_+) - v_{0,a}(x_+)] \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial n(z)} [v_{0,i}(x_-) - v_i(x_-)] + \frac{\partial}{\partial n(z)} [v_{0,a}(x_+) - v_{0,i}(x_-)] \\ &\xrightarrow{\rho \rightarrow 0} \int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial n(z)} \left(\frac{\partial \Phi_a(z, y)}{\partial n(y)} - \frac{\partial \Phi_0(z, y)}{\partial n(y)} \right) \psi(y) ds(y) \\ &\quad + \int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial n(z)} \left(\frac{\partial \Phi_0(z, y)}{\partial n(y)} - \frac{\partial \Phi_i(z, y)}{\partial n(y)} \right) \psi(y) ds(y) \\ &= \int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial n(z)} \left(\frac{\partial \Phi_a(z, y)}{\partial n(y)} - \frac{\partial \Phi_i(z, y)}{\partial n(y)} \right) \psi(y) ds(y) \quad \square \end{aligned}$$

Satz 2.34 *Sei $\psi \in C^{0,\alpha}(\partial D)$, $0 < \alpha < 1$, dann ist das Doppelschichtpotential v mit Dichte ψ eine auf ∂D gleichmäßig hölderstetig differenzierbare Funktion mit*

$$\| \text{Grad } v \|_{\alpha, \partial D} \leq C_{\alpha, \partial D} \| \psi \|_{\alpha, \partial D} \quad (2.45)$$

Beweis: Sei $x, y \in \partial D$, z die Parametrisierung von ∂D nach der Bogenlänge, $h \in]0, \pi[$, $t, \tau \in [0, 2\pi[$ mit $z(t) = x$, $y = z(\tau)$ und $x_h := z(t + h)$. Dann folgt mit Hilfe der Taylorschen Formel:

$$z(t + h) = z(t) + h z'(t) + h^2 v, \quad v \in \mathbb{R}^2.$$

Sei $a := z(t) - z(\tau)$, $a_h := z(t+h) - z(\tau)$,

$$R_{est} := 2 \langle a, z'(t) \rangle + 2h \langle a, v \rangle + h + 2h^2 \langle z'(t), v \rangle + h^3 \|v\|^2$$

und $n(\tau) = (z'_1(\tau), -z'_1(\tau))$, dann gilt:

$$\begin{aligned} 2\pi \left(\frac{\partial \Phi_0(x_h, y)}{\partial n(y)} - \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial n(y)} \right) &= \frac{\langle n(\tau), a_h \rangle}{\|a_h\|^2} - \frac{\langle n(\tau), a \rangle}{\|a\|^2} \\ &= h \frac{\langle n(\tau), z'(t) \rangle}{\|a\|^2 + hR_{est}} - 2h \frac{\langle n(\tau), a \rangle \langle a, z'(t) \rangle}{(\|a\|^2 + hR_{est})\|a\|^2} + \frac{O(h^2)}{\|a\|^2 + hR_{est}} \end{aligned}$$

Als Kandidat einer Kernfunktion für die Ableitung ergibt sich somit

$$\frac{\langle n(\tau), z'(t) \rangle}{\|a\|^2} - 2 \frac{\langle n(\tau), a \rangle \langle a, z'(t) \rangle}{\|a\|^4}.$$

Wegen $\int_{\partial D} \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial n(y)} ds(y) = -\frac{1}{2}$ (vgl. (2.36)), gilt notwendigerweise $\frac{\partial(v \circ z)}{\partial s} = 0$ für konstante Dichten. Somit erscheint folgender Ansatz für die Ableitung v' sinnvoll:

$$v'(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \left(\frac{\langle n(y), \vartheta(x) \rangle}{\|x-y\|^2} - 2 \frac{\langle n(y), x-y \rangle \langle x-y, \vartheta(x) \rangle}{\|x-y\|^4} \right) (\psi(y) - \psi(x)) ds(y).$$

Das Integral existiert unter Beachtung von $\langle n(y), \vartheta(x) \rangle = \langle n(y), \vartheta(x) - \vartheta(y) \rangle$, wie mit Hilfe von Satz 2.20 nachgewiesen werden kann. Unter Verwendung der Darstellung

$$v(x_h) - v(x) = \int_{\partial D} \left(\frac{\langle n(y), x_h - y \rangle}{\|x_h - y\|^2} - \frac{\langle n(y), x - y \rangle}{\|x - y\|^2} \right) (\psi(y) - \psi(x)) ds(y)$$

kann die Ungleichung

$$\frac{1}{h} (v(x_h) - v(x) - v'(x)) = o(1)$$

wie in Satz 2.20 durch Aufspalten der Integrale nachgewiesen werden. \square

Der letzte Satz über Regularitätseigenschaften enthält eine Aussage über die Ableitung des Doppelschichtpotentials mit gleichmäßig hölderstetig differenzierbarer Dichte:

Satz 2.35 *Die ersten Ableitungen des Doppelschichtpotentials v mit einer Dichte $\psi \in C^{1,\alpha}$ können gleichmäßig hölderstetig von D nach \overline{D} und von $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ nach $\mathbb{R}^2 \setminus D$ fortgesetzt werden mit*

$$\begin{aligned} \text{grad } v_{\pm}(x) &= k^2 \int_{\partial D} \Phi(x, y) n(y) \psi(y) ds(y) \\ &\quad + \int_{\partial D} \left(\begin{array}{c} \frac{\partial}{\partial x_2} \Phi(x, y) \\ -\frac{\partial}{\partial x_1} \Phi(x, y) \end{array} \right) \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta}(y) ds(y) \pm \frac{1}{2} \text{Grad } \psi(x), \end{aligned}$$

wobei das zweite Integral als Cauchyscher Hauptwert existiert, und es gilt:

$$\|\text{grad } v\|_{\alpha, \overline{D}} \leq C_{\alpha, \partial D} \|\psi\|_{1, \alpha, \partial D}, \quad \|\text{grad } v\|_{\alpha, \mathbb{R}^2 \setminus D} \leq C_{\alpha, \partial D} \|\psi\|_{1, \alpha, \partial D}. \quad (2.46)$$

Beweis: Für ein zweimal stetig differenzierbares Vektorfeld $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gilt:

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} A = \Delta A + \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial}{\partial x_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}.$$

Sei nun $A = \Phi(x, y)n(y)$, dann gilt unter Beachtung von $\frac{\partial}{\partial x_j}\Phi(x, y) = -\frac{\partial}{\partial y_j}\Phi(x, y)$:

$$\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} = \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x_1} n_2(y) - \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x_2} n_1(y) = \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \vartheta(y)},$$

wobei ϑ der im Abschnitt über Hölderräume eingeführte normierte Tangentialvektor ist. Für $x \notin \partial D$ sind Integration und Differentiation vertauschbar. Daher folgt unter Verwendung der in (2.25) angegebenen Rechenregel:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} v(x) &= -\operatorname{grad}_x \int_{\partial D} \langle \operatorname{grad}_x \Phi(x, y), n(y) \rangle \psi(y) ds(y) \\ &= -\operatorname{grad}_x \operatorname{div}_x \int_{\partial D} \Phi(x, y)n(y)\psi(y) ds(y) \\ &= k^2 \int_{\partial D} \Phi(x, y)n(y)\psi(y) ds(y) + \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} \\ -\frac{\partial}{\partial x_1} \end{pmatrix} \int_{\partial D} \Phi(x, y) \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta}(y) ds(y) \end{aligned}$$

Somit ergibt sich unter Verwendung der Sätze 2.22 und 2.27 für den Grenzwert gegen den Rand:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} v(x) &= k^2 \int_{\partial D} \Phi(x, y)n(y)\psi(y) ds(y) \\ &\quad + \int_{\partial D} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} \Phi(x, y) \\ -\frac{\partial}{\partial x_1} \Phi(x, y) \end{pmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta}(y) ds(y) \mp \frac{1}{2} \begin{pmatrix} n_2(x) \\ -n_1(x) \end{pmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta}(x) \\ &= k^2 \int_{\partial D} \Phi(x, y)n(y)\psi(y) ds(y) \\ &\quad + \int_{\partial D} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} \Phi(x, y) \\ -\frac{\partial}{\partial x_1} \Phi(x, y) \end{pmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta}(y) ds(y) \pm \frac{1}{2} \operatorname{Grad} \psi(x) \end{aligned}$$

Die Abschätzungen folgen ebenfalls aus oben genannten Sätzen. \square

Korollar 2.36 Sei $\psi \in C^{2,\alpha}(\partial D)$ und $\partial D \in C^{2,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, dann ist $v \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^2 \setminus D)$, bzw. $v \in C^{2,\alpha}(\overline{D})$, d.h. die zweiten Ableitungen können hölderstetig fortgesetzt werden.

Beweis: Sei $x \notin \partial D$, dann gilt wie oben gezeigt:

$$\operatorname{grad} v(x) = k^2 \int_{\partial D} \Phi(x, y)n(y)\psi(y) ds(y) + \int_{\partial D} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} \Phi(x, y) \\ -\frac{\partial}{\partial x_1} \Phi(x, y) \end{pmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta}(y) ds(y).$$

Das zweite Integral besteht aus partiellen Ableitungen des Einfachschichtpotentials. Zur Umformung wird die Gleichung (2.41) verwendet:

$$\begin{aligned} \operatorname{grad} v(x) &= k^2 \int_{\partial D} \Phi(x, y) n(y) \psi(y) ds(y) + \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} \operatorname{Grad} \psi(y) ds(y) \\ &+ \int_{\partial D} \Phi(x, y) \begin{pmatrix} \nu_2(y) \\ -\nu_1(y) \end{pmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta}(y) ds(y) \\ &+ \int_{\partial D} \Phi(x, y) \begin{pmatrix} \operatorname{Grad}_2 \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta}(y) \\ -\operatorname{Grad}_1 \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta}(y) \end{pmatrix} ds(y). \end{aligned} \quad (2.47)$$

Es sind $n\psi$, $\nu \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta}$, $\operatorname{Grad} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \in C^{0,\alpha}$ und $\operatorname{Grad} \psi \in C^{1,\alpha}$, so daß Satz 2.27 und 2.35 anwendbar sind und die Behauptung dieses Korollars gezeigt ist. \square

Sei $x \in \partial D$, $\varphi \in C(\partial D)$, $\psi \in C^{1,\alpha}(\partial D)$. Die vorangehenden Sätze ermöglichen die Einführung folgender Integraloperatoren:

$$(S\varphi)(x) := 2 \int_{\partial D} \Phi(x, y) \varphi(y) ds(y) \quad (2.48)$$

$$(K\varphi)(x) := 2 \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} \varphi(y) ds(y) \quad (2.49)$$

$$(K^*\varphi)(x) := 2 \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(x)} \varphi(y) ds(y) \quad (2.50)$$

$$(T\psi)(x) := 2 \frac{\partial}{\partial n(x)} \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} \psi(y) ds(y) \quad (2.51)$$

Der folgende Satz charakterisiert die Abbildungseigenschaften dieser Operatoren:

Satz 2.37 *Sei $\alpha \in]0, 1[$, dann sind die Operatoren S, K, K^* und $T - T_0$ kompakt in $C(\partial D)$ und $C^{0,\alpha}(\partial D)$ und beschränkt von $C(\partial D)$ nach $C^{0,\alpha}(\partial D)$. S und K sind beschränkt von $C^{0,\alpha}(\partial D)$ nach $C^{1,\alpha}(\partial D)$ und T bildet beschränkt von $C^{1,\alpha}(\partial D)$ nach $C^{0,\alpha}(\partial D)$ ab.*

Beweis: Alle Eigenschaften folgen aus den bereits bewiesenen Sätzen:

1. Die Beschränktheit von S von C nach $C^{0,\alpha}$ folgt aus Satz 2.22 und somit die Kompaktheit von S in C und $C^{0,\alpha}$ wie in Korollar 2.19. Die Beschränktheit von S von $C^{0,\alpha}$ nach $C^{1,\alpha}$ folgt aus Satz 2.27.
2. Die Beschränktheit von K und K^* von C nach $C^{0,\alpha}$ folgt aus Satz 2.25. Dieser Satz wurde zwar nur für K bewiesen, läßt sich aber für K^* ebenso beweisen. Die Kompaktheit von K und K^* in C und $C^{0,\alpha}$ zeigt man wie für S . Die Beschränktheit von K von $C^{0,\alpha}$ nach $C^{1,\alpha}$ folgt aus Satz 2.34.

3. Die Beschränktheit von $T - T_0$ von C nach $C^{0,\alpha}$ folgt aus Satz 2.31 und somit die Kompaktheit von $T - T_0$ in C und $C^{0,\alpha}$ wie in obigen Fällen. Die Beschränktheit von T von $C^{1,\alpha}$ nach $C^{0,\alpha}$ folgt aus Satz 2.35. \square

Im letzten Satz dieses Kapitels werden die Operatoren K^* und T durch eine Kombination von Einfach- und Doppelschichtpotentialen dargestellt. Hierbei werden die obigen Integraloperatoren für vektorwertige Dichten betrachtet. Dies ist dann immer komponentenweise zu verstehen.

Satz 2.38 Sei $\varphi \in C^{1,\alpha}(\partial D)$, $\psi \in C^{2,\alpha}(\partial D)$ und ν die in Satz 2.27 definierte Abbildung, dann gilt für $x \in \partial D$:

$$\begin{aligned} K^* \varphi(x) &= - \langle K(n\varphi)(x), n(x) \rangle + \langle S(\nu\varphi + \text{Grad } \varphi)(x), n(x) \rangle \\ T\psi(x) &= \langle K(\text{Grad } \psi)(x), n(x) \rangle \\ &\quad + \langle S(k^2 n\psi + \begin{pmatrix} \nu_2 \\ -\nu_1 \end{pmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} + \begin{pmatrix} \text{Grad}_2 \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \\ -\text{Grad}_1 \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \end{pmatrix})(x), n(x) \rangle \end{aligned}$$

Beweis: Betrachte zunächst K^* . Der Beweis wird ähnlich geführt wie in Satz 2.27. Sei hierzu $r > 0$ hinreichend klein und $S_{x,r} := \{y \in \partial D : \|x - y\| < r\}$ wie im Beweis von Satz 2.18. Nun gilt für das Integral über $\partial D \setminus S_{x,r}$:

$$\begin{aligned} &\int_{\partial D \setminus S_{x,r}} \text{grad}_x \Phi(x, y) \varphi(y) ds(y) = \\ &= - \int_{\partial D \setminus S_{x,r}} \text{Grad}_y \Phi(x, y) \varphi(y) ds(y) - \int_{\partial D \setminus S_{x,r}} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} n(y) \varphi(y) ds(y) \\ &= - [\Phi(x, y) \vartheta(y) \varphi(y)]_{y_1}^{y_2} + \int_{\partial D \setminus S_{x,r}} \Phi(x, y) [\nu(y) \varphi(y) + \text{Grad } \varphi(y)] ds(y) \\ &\quad - \int_{\partial D \setminus S_{x,r}} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial n(y)} n(y) \varphi(y) ds(y), \end{aligned}$$

wobei für die Randpunkte y_1 und y_2 die Gleichungen $\|x - y_1\| = \|x - y_2\| = r$ gelten. Das Produkt $\vartheta \varphi$ ist stetig differenzierbar, so daß sich folgende Ungleichung herleiten läßt:

$$\begin{aligned} &\| \Phi(x, y_2) \vartheta(y_2) \varphi(y_2) - \Phi(x, y_1) \vartheta(y_1) \varphi(y_1) \| \\ &\leq | \Phi(x, y_2) | \| \vartheta(y_2) \varphi(y_2) - \vartheta(y_1) \varphi(y_1) \| \leq C | \ln r | r \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Das erste Integral läßt sich im Sinne eines Cauchyschen Hauptwertes auf den gesamten Rand fortsetzen, während das zweite Integral, wie bereits gezeigt, als uneigentliches Integral existiert. Somit ist der erste Teil der Behauptung gezeigt.

Nun zum Operator T . Grundlage ist hier die in Satz 2.35 gewonnene Darstellung für den

Gradienten des Doppelschichtpotentials. Durch Skalarproduktbildung mit dem Normalenvektor ergibt sich für T folgende Darstellung:

$$T\psi(x) = \langle k^2 S(n\psi)(x), n(x) \rangle + \langle \int_{\partial D} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} \Phi(x, y) \\ -\frac{\partial}{\partial x_1} \Phi(x, y) \end{pmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta}(y) ds(y), n(x) \rangle .$$

Auf das zweite Integral wird nun die oben gewonnene Gleichung angewandt, so daß insgesamt folgt:

$$\begin{aligned} T\psi(x) &= \langle k^2 S(n\psi)(x), n(x) \rangle + \langle S \left(\begin{pmatrix} \nu_2 \\ -\nu_1 \end{pmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} + \begin{pmatrix} \text{Grad}_2 \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \\ -\text{Grad}_1 \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \end{pmatrix} \right)(x), n(x) \rangle \\ &\quad - \langle K \left(\begin{pmatrix} n_2 \\ -n_1 \end{pmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \right)(x), n(x) \rangle . \end{aligned}$$

Unter Benutzung der Identität $(n_2, -n_1)^t \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} = -\text{Grad } \psi$ folgt nun die Behauptung. \square

Kapitel 3

Direktes Transmissionsproblem

In diesem Kapitel wird die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des direkten Transmissionsproblems im \mathbb{R}^2 unter geeigneten Voraussetzungen bewiesen. Dazu soll von nun an das Problem in folgender Form betrachtet werden:

Problem 3.1 (Transmissionsproblem) *Gegeben sei ein beschränktes, zusammenhängendes Gebiet $D \subset \mathbb{R}^2$ mit zusammenhängendem Rand $\partial D \in C^2$, $k_i, k_a, \mu_i, \mu_a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\text{Im}(k_i) > 0$ oder $k_i \in \mathbb{R}_+$, $\text{Im}(k_a) > 0$ oder $k_a \in \mathbb{R}_+$, $f \in C^{1,\alpha}(\partial D)$ und $g \in C^{0,\alpha}(\partial D)$, $\alpha \in]0, 1[$. Gesucht sind Funktionen $u_i \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$ im Innenraum und $u_a \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}) \cap C^1(\mathbb{R}^2 \setminus D)$ im Außenraum, die folgende Bedingungen erfüllen:*

1. $(\Delta + k_i^2)u_i = 0$ in D , $(\Delta + k_a^2)u_a = 0$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$;
2. $u_i - u_a = f$, $\mu_i \frac{\partial u_i}{\partial n} - \mu_a \frac{\partial u_a}{\partial n} = g$ auf ∂D ;
3. u_a erfüllt die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung;

Satz 3.2 *Das Problem 3.1 hat höchstens eine Lösung, wenn die Ungleichungen*

$$\text{Im} \left(\frac{\overline{k_a} \mu_i}{\mu_a k_i^2} \right) \geq 0 \quad \text{und} \quad \text{Im} \left(k_a \frac{\overline{\mu_i}}{\mu_a} \right) \geq 0 \quad \text{gelten.}$$

Beweis: Seien (u_i, u_a) Lösungen des homogenen Problems, d.h. $f \equiv g \equiv 0$ auf ∂D , dann kann folgende Ungleichung mit Hilfe der Randbedingungen und des 1. Greenschen

Satzes gezeigt werden:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} \left(k_a \int_{\partial D} u_a \frac{\partial \bar{u}_a}{\partial n} ds \right) &= \operatorname{Im} \left(k_a \frac{\bar{\mu}_i}{\mu_a} \int_{\partial D} u_i \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial n} ds \right) \\
&= \operatorname{Im} \left(k_a \frac{\bar{\mu}_i}{\mu_a} \int_D (-\bar{k}_i^2 |u_i|^2 + \|\operatorname{grad} u_i\|^2) dx \right) \\
&= \operatorname{Im} \left(\bar{k}_a \frac{\mu_i}{\mu_a} k_i^2 \right) \int_D |u_i|^2 dx + \operatorname{Im} \left(k_a \frac{\bar{\mu}_i}{\mu_a} \right) \int_D \|\operatorname{grad} u_i\|^2 dx \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

Somit folgt aus Korollar 2.7 $u_a \equiv 0$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ und daher $u_a \equiv \frac{\partial u_a}{\partial n} \equiv 0$ auf ∂D . Aus den homogenen Randbedingungen ergibt sich nun $u_i \equiv \frac{\partial u_i}{\partial n} \equiv 0$ auf ∂D , und auf Grund der Greenschen Darstellungsformel für den Innenraum folgt schließlich $u_i \equiv 0$ in D . \square

Korollar 3.3 Für $\mu_i := \frac{1}{k_i}$, $\mu_a := \frac{1}{k_a}$ hat das Transmissionsproblem höchstens eine Lösung.

Beweis: Nachzuweisen ist, daß die obigen, hinreichenden Kriterien erfüllt sind:

1. $\bar{k}_a \frac{\mu_i}{\mu_a} k_i^2 = \bar{k}_a k_i^2 \frac{k_a}{k_i} = |k_a|^2 k_i \Rightarrow \operatorname{Im} \left(\bar{k}_a \frac{\mu_i}{\mu_a} k_i^2 \right) = |k_a|^2 \operatorname{Im}(k_i) \geq 0$
2. $k_a \frac{\bar{\mu}_i}{\mu_a} = k_a \frac{\bar{k}_i}{k_i} = |k_a|^2 \frac{k_i}{|k_i|^2} \Rightarrow \operatorname{Im} \left(k_a \frac{\bar{\mu}_i}{\mu_a} \right) = \frac{|k_a|^2}{|k_i|^2} \operatorname{Im}(k_i) \geq 0$

Somit folgt die Aussage aus obigem Satz. \square

Um nun die Existenz einer Lösung nachzuweisen, wird hier ein gemischter Potentialansatz gewählt (wobei $\varphi, \psi \in C(\partial D)$):

$$u_i(x) := \int_{\partial D} \left(\frac{d_i}{\mu_i} \Phi_i(x, y) \psi(y) + \frac{\partial \Phi_i(x, y)}{\partial n(y)} \varphi(y) \right) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D, \quad (3.1)$$

$$u_a(x) := \int_{\partial D} \left(\frac{d_a}{\mu_a} \Phi_a(x, y) \psi(y) + \frac{\mu_i}{\mu_a} \frac{\partial \Phi_a(x, y)}{\partial n(y)} \varphi(y) \right) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D. \quad (3.2)$$

Hierbei weist der Index an der Grundlösung auf die jeweilige Wellenzahl k_i bzw. k_a hin, und $d_i, d_a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ sind noch zu wählende Konstanten. u_i wird zunächst nur im Innenraum und u_a nur im Außenraum betrachtet. In Satz 3.4 wird jedoch ausgenutzt, daß u_i und u_a in ganz $\mathbb{R}^2 \setminus \partial D$ definiert sind. Mit den Sprungbeziehungen 2.24 und 2.29 folgt nun auf ∂D :

$$\begin{aligned}
u_i - u_a &= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{d_i}{\mu_i} S_i - \frac{d_a}{\mu_a} S_a \right) \psi + \left(K_i - \frac{\mu_i}{\mu_a} K_a \right) \varphi - \left(1 + \frac{\mu_i}{\mu_a} \right) \varphi \right) \\
&= \frac{1}{2\mu_a} \left(\left(\frac{d_i \mu_a}{\mu_i} S_i - d_a S_a \right) \psi + (\mu_a K_i - \mu_i K_a) \varphi - (\mu_a + \mu_i) \varphi \right) \\
\mu_i \frac{\partial u_i}{\partial n} - \mu_a \frac{\partial u_a}{\partial n} &= \frac{1}{2} \left((d_i K_i^* - d_a K_a^*) \psi + \mu_i (T_i - T_a) \varphi + (d_i + d_a) \psi \right)
\end{aligned}$$

Die exakte Bedeutung der etwas ungenauen Schreibweise $T_i - T_a$ entnehme man hierbei dem Korollar 2.33. Wiederum steht der Index an den Integraloperatoren für die jeweilige Wellenzahl k_i bzw. k_a . Auf dem Produktraum $C(\partial D) \times C(\partial D)$ ist durch $\left\| \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \right\|_\infty := \max(\|\psi\|_\infty, \|\varphi\|_\infty)$ eine Norm gegeben und auf diesem Raum seien die Integraloperatoren A und E und die Vektoren χ, h definiert durch:

$$A := \begin{pmatrix} \mu_a K_i - \mu_i K_a & \frac{d_i \mu_a}{\mu_i} S_i - d_a S_a \\ -\mu_i (T_i - T_a) & -(d_i K_i^* - d_a K_a^*) \end{pmatrix}, \quad E := \begin{pmatrix} (\mu_a + \mu_i)I & 0 \\ 0 & (d_i + d_a)I \end{pmatrix},$$

$$\chi := \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}, \quad h := \begin{pmatrix} -2\mu_a f \\ 2g \end{pmatrix}.$$

A ist mit der oben definierten Norm offensichtlich kompakt, und E ist beschränkt. Wenn χ nun Lösung der Integralgleichung

$$E\chi - A\chi = h \tag{3.3}$$

ist, dann sind u_i und u_a Lösungen des Transmissionsproblems.

Satz 3.4 *Sei $\mu_i + \mu_a, d_i + d_a \neq 0$, und sei das homogene Transmissionsproblem eindeutig lösbar. Dann hat das Transmissionsproblem genau eine Lösung.*

Beweis: Seien u_i und u_a wie oben definiert. Hinreichend für die Regularitätsforderungen an Lösungen des Transmissionsproblems sind $\varphi \in C^{1,\alpha}(\partial D)$ und $\psi \in C^{0,\alpha}(\partial D)$, denn dann gelten die Sätze 2.27 und 2.35. Falls φ und ψ Lösung der Integralgleichung (3.3) sind, so folgt diese Regularität der Dichten aus Satz 2.37, denn es gilt nach Voraussetzung:

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{d_i + d_a} [-\mu_i (T_i - T_a)\varphi + (-d_i K_i^* + d_a K_a^*)\psi + 2g] \\ \varphi &= \frac{1}{\mu_i + \mu_a} [(\mu_a K_i - \mu_i K_a)\varphi + \left(\frac{d_i \mu_a}{\mu_i} S_i - d_a S_a\right)\psi - 2\mu_a f] \end{aligned} \tag{3.4}$$

Aus der ersten Gleichung folgt also $\psi \in C^{0,\alpha}(\partial D)$ und somit aus der zweiten Gleichung $\varphi \in C^{0,\alpha}(\partial D)$. Durch erneutes Einsetzen in die zweite Gleichung ergibt sich dann $\varphi \in C^{1,\alpha}(\partial D)$.

Es bleibt also noch die eindeutige Lösbarkeit von (3.3) nachzuweisen. Sei $\chi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$ Lösung der homogenen Gleichung, d.h. φ und ψ sind nach obiger Überlegung aus $C^{1,\alpha}(\partial D)$ bzw. $C^{0,\alpha}(\partial D)$. Damit lösen u_i und u_a das homogene Transmissionsproblem. Daher gilt nach Voraussetzung $u_i = 0$ in \overline{D} und $u_a = 0$ in $\mathbb{R}^2 \setminus D$. Wie in Satz 2.22 und Satz 2.24 bzw. Satz 2.29 und Satz 2.35 gezeigt wurde, gelten für u_i und u_a folgende Beziehungen (wobei $u_{j,\pm}$ wie üblich den Grenzwert bei Annäherung an den Rand von

innen bzw. von außen bezeichnet):

$$\begin{aligned} u_{i,+} - u_{i,-} &= \varphi & u_{a,+} - u_{a,-} &= \frac{\mu_i}{\mu_a} \varphi \\ \frac{\partial u_{i,+}}{\partial n} - \frac{\partial u_{i,-}}{\partial n} &= -\frac{d_i}{\mu_i} \psi & \frac{\partial u_{a,+}}{\partial n} - \frac{\partial u_{a,-}}{\partial n} &= -\frac{d_a}{\mu_a} \psi \end{aligned}$$

Nun folgt wegen $u_i = 0$ in \overline{D} und $u_a = 0$ in $\mathbb{R}^2 \setminus D$:

$$\frac{\mu_i}{\mu_a} u_{i,+} + u_{a,-} = 0 \qquad \frac{\mu_i}{\mu_a} \frac{\partial u_{i,+}}{\partial n} + \frac{d_i}{d_a} \frac{\partial u_{a,-}}{\partial n} = 0$$

Weiterhin seien die Funktionen v_i und v_a wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} v_a(x) &= -\frac{\mu_i}{\mu_a} u_i(x), & x &\in \mathbb{R}^2 \setminus D \\ v_i(x) &= u_a(x), & x &\in \overline{D}, \end{aligned}$$

d.h. v_a ist Lösung der Helmholtzgleichung mit Wellenzahl k_i in $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ und v_i ist Lösung mit Wellenzahl k_a in D . Auf ∂D gilt weiterhin:

$$\begin{aligned} v_i - v_a &= u_{a,-} + \frac{\mu_i}{\mu_a} u_{i,+} = 0 \\ d_i \frac{\partial v_i}{\partial n} - d_a \frac{\partial v_a}{\partial n} &= d_i \frac{\partial u_{a,-}}{\partial n} + d_a \frac{\mu_i}{\mu_a} \frac{\partial u_{i,+}}{\partial n} = 0 \end{aligned}$$

Somit lösen (v_i, v_a) ein homogenes Transmissionsproblem. Wählt man nun d_i, d_a so, daß die Ungleichungen $\text{Im}(\overline{k_i} k_a^2 \frac{d_i}{d_a}), \text{Im}(k_i \frac{d_i}{d_a}) \geq 0$ gelten, so folgt aus Satz 3.2 die Beziehung $v_i \equiv 0$ in \overline{D} und $v_a \equiv 0$ in $\mathbb{R}^2 \setminus D$, d.h. $u_a \equiv 0$ in \overline{D} und $u_i \equiv 0$ in $\mathbb{R}^2 \setminus D$ und somit $\varphi \equiv \psi \equiv 0$ auf ∂D . Nun folgt die Existenz einer eindeutigen Lösung χ der Integralgleichung (3.3) aus der Riesz-Theorie. \square

Bemerkung 3.5 Eine mögliche Wahl der Konstanten ist gegeben durch $d_i := k_i$ und $d_a := k_a$. Dies kann genauso wie in Korollar 3.3 gezeigt werden.

Der hier gewählte Ansatz ist nicht der einzig mögliche. So wurde in [4] eine Idee von Kleinman und Martin untersucht. Die Verwendung des Greenschen Darstellungssatzes für eines der Gebiete führt dort auf nur eine zu lösende Integralgleichung. In [18] wurde ein Vorschlag von Engl und Lindner untersucht. Hier wird das Transmissionsproblem durch Einführung einer Hilfsfunktion in zwei Randwertprobleme entkoppelt. Beiden Ansätzen ist jedoch gemeinsam, daß in den dort entstehenden Integralgleichungen der stark singuläre Operator T auszuwerten ist. Dies wird bei der hier gewählten, bereits in [12] verwendeten Vorgehensweise umgangen.

Kapitel 4

Fréchet-Differenzierbarkeit

In diesem Kapitel wird gezeigt, daß die Abbildung $\partial D \rightarrow u_\infty$ Fréchet-differenzierbar ist. Dazu werden zunächst einige einfache Tatsachen über die Fréchet-Ableitung zusammengestellt und ein Satz über die Fréchet-Differenzierbarkeit von Integraloperatoren bewiesen. Danach wird gezeigt, daß die Abbildung $\partial D \rightarrow A(\cdot, \partial D)$ (hierbei sei A der im letzten Kapitel definierte Integraloperator) Fréchet-differenzierbar ist, wodurch dann in einem weiteren Schritt auf die Fréchet-Differenzierbarkeit der Abbildung $\partial D \rightarrow u_\infty$ geschlossen werden kann. Neben der dadurch gewonnenen Darstellung der Ableitung gibt es jedoch noch eine weitere Möglichkeit, die Ableitung zu charakterisieren, und zwar als Lösung eines direkten Transmissionsproblems. Diese Darstellung wird im letzten Abschnitt dieses Kapitels bewiesen.

4.1 Fréchet-Ableitung

Definition 4.1 *Es seien X, Y normierte Räume und $U \subset X$ eine offene Teilmenge. Sei $L(X, Y)$ der Raum der beschränkten, linearen Operatoren von X nach Y . Ein Operator $F : U \rightarrow Y$ heißt Fréchet-differenzierbar an der Stelle $\varphi \in U$, wenn es einen Operator $F'(\varphi) \in L(X, Y)$ gibt, so daß eine Nullumgebung $V \subset X$ existiert mit*

$$\lim_{\substack{h \rightarrow 0, h \neq 0 \\ h \in V}} \frac{1}{\|h\|} \|F(\varphi + h) - F(\varphi) - F'(\varphi)h\| = 0. \quad (4.1)$$

Der Operator $F'(\varphi)$ heißt die Fréchet-Ableitung von F in φ . Existiert die Fréchet-Ableitung für alle $\varphi \in U$, dann heißt die Abbildung $F' : U \rightarrow L(X, Y)$ mit $\varphi \mapsto F'(\varphi)$ die Fréchet-Ableitung von F in U .

Offensichtlich ist zu (4.1) folgende Definition äquivalent:

$$\|F(\varphi + h) - F(\varphi) - F'(\varphi)h\| = o(\|h\|).$$

Der Ausdruck $F'(\varphi; h)$ sei zu der Schreibweise $F'(\varphi)h$ äquivalent. Ebenso wie im endlichdimensionalen gelten die Ketten- und die Produktregel (vgl. z.B. [1]). Um später von der Fréchet-Differenzierbarkeit eines Operators auf die Fréchet-Differenzierbarkeit seiner Inversen zu schließen, wird die Quotientenregel benötigt:

Satz 4.2 *Sei V ein normierter Raum, X Banachraum und $U \subset V$ offen. Die Abbildung $F : U \rightarrow L(X, X)$ sei Fréchet-differenzierbar in $\varphi_0 \in U$ und $F(\varphi)$ sei beschränkt invertierbar für alle $\varphi \in U$. Dann ist*

$$F^{-1} := \begin{cases} U \rightarrow L(X, X) \\ \varphi \mapsto (F(\varphi))^{-1} \end{cases}$$

Fréchet-differenzierbar in φ_0 mit der Ableitung

$$F^{-1'}(\varphi_0; h) = -F^{-1}(\varphi_0)F'(\varphi_0; h)F^{-1}(\varphi_0).$$

Beweis: Zunächst soll gezeigt werden, daß die Abbildung

$$I_{\text{ners}} : \begin{cases} F(U) \rightarrow L(X, X) \\ G \mapsto G^{-1} \end{cases}$$

stetig ist. Sei hierzu $G \in F(U)$ und $\epsilon > 0$ beliebig, aber fest gewählt. Da G beschränkt invertierbar ist, ist der Ausdruck $\frac{1}{\|G^{-1}\|}$ wohldefiniert. Sei $\delta := \min \left\{ \frac{\epsilon/2}{\|G^{-1}\|^2}, \frac{1/2}{\|G^{-1}\|} \right\}$ und $H \in F(U)$ mit $\|G - H\| \leq \delta$. Wegen

$$\|G^{-1}(G - H)\| \leq \|G^{-1}\| \|G - H\| \leq \frac{1}{2}$$

ist $I - G^{-1}(G - H)$ nach dem Satz über die Neumannsche Reihe invertierbar mit $\|(I - G^{-1}(G - H))^{-1}\| \leq 2$. Also besitzt $H = G(I - G^{-1}(G - H))$ die Inverse

$$H^{-1} = (I - G^{-1}(G - H))^{-1}G^{-1}$$

und es gilt $\|H^{-1}\| \leq 2\|G^{-1}\|$. Mit Hilfe dieser Ungleichung, kann die Stetigkeit der Abbildung I_{ners} gezeigt werden:

$$\begin{aligned} \|G^{-1} - H^{-1}\| &= \|G^{-1}HH^{-1} - G^{-1}GH^{-1}\| \leq \|G^{-1}\| \|G - H\| \|H^{-1}\| \\ &\leq \|G^{-1}\| \frac{\epsilon/2}{\|G^{-1}\|^2} 2\|G^{-1}\| = \epsilon \end{aligned}$$

Die Aussage des Satzes gilt dann wegen folgender Ungleichung:

$$\begin{aligned}
& \|F^{-1}(\varphi_0 + h) - F^{-1}(\varphi_0) + F^{-1}(\varphi_0)F'(\varphi_0; h)F^{-1}(\varphi_0)\| \\
& \leq \underbrace{\|F^{-1}(\varphi_0)\|}_{=O(1)} \|F(\varphi_0)(F^{-1}(\varphi_0 + h) - F^{-1}(\varphi_0) \\
& \quad + F^{-1}(\varphi_0)F'(\varphi_0; h)F^{-1}(\varphi_0))F(\varphi_0)\| \underbrace{\|F^{-1}(\varphi_0)\|}_{=O(1)} \\
& = O(1) \| \underbrace{(F(\varphi_0 + h) - F(\varphi_0))}_{=O(\|h\|)} \underbrace{F^{-1}(\varphi_0 + h)}_{=O(1)} \underbrace{(F(\varphi_0 + h) - F(\varphi_0))}_{=O(\|h\|)} \\
& \quad - \underbrace{(F(\varphi_0 + h) - F(\varphi_0) - F'(\varphi_0; h))}_{=o(\|h\|)} \| = o(\|h\|) \quad \square
\end{aligned}$$

Um nun die Taylorsche Formel auf Funktionen mit einem normierten Raum als Definitionsbereich auszudehnen, wird zunächst die zweite Fréchet-Ableitung definiert:

Definition 4.3 *Es seien X, Y normierte Räume, $U \subset X$ offen und $F : U \rightarrow Y$ ein Fréchet-differenzierbarer Operator. Dann heißt F an der Stelle φ_0 zweimal Fréchet-differenzierbar, wenn die Ableitung $F' : U \rightarrow L(X, Y)$ an der Stelle φ_0 Fréchet-differenzierbar ist. Die Ableitung von F' an der Stelle φ_0 wird dann zweite Fréchet-Ableitung von F genannt und mit $F''(\varphi_0)$ bezeichnet.*

Der Operator $F''(\varphi_0)$ ist also zunächst zu verstehen als beschränkter linearer Operator aus $L(X, L(X, Y))$. Für eine weitere Interpretationsmöglichkeit gibt der nächste Satz Anlaß:

Satz 4.4 *Die Räume $L(X, L(X, Y))$ und $L(X, X; Y)$ sind isometrisch isomorph.*

Beweis: vgl. z.B. [Berger, S.71]

$F''(\varphi_0)$ kann somit auch interpretiert werden als beschränkter bilinearer Operator aus $L(X, X; Y)$. Im weiteren wird als Abkürzung folgende Notation verwendet:

$$F''(\varphi_0; h) := F''(\varphi_0; h, h).$$

Auf gleiche Weise wie in obiger Definition kann induktiv auch die n -te Fréchet-Ableitung eines Operators erklärt werden. Darauf wird hier aber nicht weiter eingegangen.

4.2 Fréchet-Differenzierbarkeit des Fernfeldoperators

In diesem Abschnitt soll ein Differentiationssatz bewiesen werden, der zum Nachweis der Differenzierbarkeit der Randintegral- und Potentialoperatoren benutzt wird. Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $G \subset \mathbb{R}$, dann gelte folgende Definition:

$$C_b^n(G, \mathbb{R}^2) := \{w : G \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid w \in C^n(G), \exists C > 0 : \|w^{(j)}\|_\infty < C \forall j = 0, \dots, n\}.$$

Hierbei sei für $w \in C_b(G, \mathbb{R}^2)$ die oben angegebene Norm folgendermaßen definiert:

$$\|w\|_\infty := \max_{t \in G} \|w(t)\|.$$

Zunächst ist es nötig, geeignete Räume für die Parametrisierungen von Rändern beschränkter Gebiete zu finden. Hierzu werden folgende Räume definiert:

$$\begin{aligned} Y &:= \{y \in C_b^2([0, 2\pi[, \mathbb{R}^2) \\ &\quad : \exists w \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) \text{ mit } w(t+2\pi) = w(t) \forall t \in \mathbb{R} \text{ und } w|_{[0, 2\pi[} = y\} \\ &\quad \text{und } \|y\|_Y := \max\{\|y\|_\infty, \|y'\|_\infty, \|y''\|_\infty\} \\ V &:= \{z \in Y : \begin{array}{l} 1. z \text{ ist injektiv} \\ 2. \|z'(t)\| > 0 \text{ für alle } t \in [0, 2\pi[\\ 3. z \text{ ist linksorientiert.} \end{array}\} \end{aligned}$$

V ist also die Menge der zulässigen Parametrisierungen. Die Eigenschaft einer Parametrisierung, linksorientiert zu sein, wird benötigt, um die Richtung des Normalenvektors eindeutig festzulegen und wird ins Satz 4.6 noch genauer definiert. Weiterhin sei

$$X := C([0, 2\pi], \mathbb{C})$$

der Raum der Dichten als Funktionen von $[0, 2\pi]$ nach \mathbb{C} betrachtet. Eine Abbildung $y \in Y$ wird teilweise auch außerhalb des halboffenen Intervalls $[0, 2\pi[$ betrachtet. Hiermit ist dann stets die periodische Fortsetzung von y gemeint. Weiterhin wird sich folgende Definition im folgenden als nützlich erweisen:

$$(t - \tau)_{\min} := \left\{ \begin{array}{ll} t - \tau & |t - \tau| \leq \pi \\ 2\pi + \tau - t & |t - \tau| > \pi \wedge t > \tau \\ \tau - 2\pi - t & |t - \tau| > \pi \wedge t < \tau \end{array} \right\} \quad (t, \tau) \in [0, 2\pi[\times [0, 2\pi[$$

Wie leicht nachzurechnen ist, gilt insbesondere $|(t - \tau)_{\min}| = |t - \tau|_{\min}$ mit dem in Lemma 2.17 eingeführten $|t - \tau|_{\min}$. In folgendem Lemma werden einige Abschätzungen zur Verfügung gestellt, die im Weiteren häufig verwendet werden.

Lemma 4.5 *Sei $z \in V$ und $h \in Y$, dann gelten folgende Abschätzungen (wobei C_z, c_z jeweils geeignete, von z abhängige, positive Konstanten bezeichnen):*

1. $\|z(t) - z(\tau)\| \geq c_z |t - \tau|_{\min}$
2. $\|h(t) - h(\tau)\| \leq \|h\|_Y |t - \tau|_{\min}$
3. $\left| \langle z(t) - z(\tau), \begin{pmatrix} z_2'(t) \\ -z_1'(t) \end{pmatrix} \rangle \right| \leq C_z |t - \tau|_{\min}^2$,
4. $\left| \langle h(t) - h(\tau), \begin{pmatrix} h_2'(t) \\ -h_1'(t) \end{pmatrix} \rangle \right| \leq \|h\|_Y^2 |t - \tau|_{\min}^2$,
5. $\left| \langle z(t) - z(\tau), \begin{pmatrix} h_2'(t) \\ -h_1'(t) \end{pmatrix} \rangle + \langle h(t) - h(\tau), \begin{pmatrix} z_2'(t) \\ -z_1'(t) \end{pmatrix} \rangle \right| \leq C_z \|h\|_Y |t - \tau|_{\min}^2$

Beweis:

1. Sei w folgendermaßen definiert:

$$w := \begin{cases} [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] & \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (t, \tau) & \mapsto \begin{cases} \frac{\|z(t) - z(\tau)\|}{|t - \tau|_{\min}}, & |t - \tau|_{\min} \neq 0 \\ \|z'(t)\|, & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$$

w ist offensichtlich gleichmäßig stetig und echt positiv. Daher existiert eine Konstante $C_z > 0$ mit $w(t, \tau) \geq C_z \forall (t, \tau) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$. Daher gilt auch $\|z(t) - z(\tau)\| \geq C_z |t - \tau|_{\min}$.

2. (a) *1.Fall:* $|t - \tau| \leq \pi$
Nach dem Mittelwertsatz folgt: $h(t) - h(\tau) = \begin{pmatrix} h_1'(\xi_1) \\ h_2'(\xi_2) \end{pmatrix} (t - \tau)$ und daraus folgt die Behauptung;
 - (b) *2.Fall:* $|t - \tau| > \pi \wedge t > \tau$
Unter Ausnutzung der Periodizität von h gilt: $h(t) - h(\tau) = h(t) - h(2\pi + \tau)$. Mit Hilfe dieser Gleichheit gilt analog zum 1.Fall: $\|h(t) - h(\tau)\| \leq \sqrt{2} \|h\|_Y |2\pi - (t - \tau)|$;
 - (c) *3.Fall:* $|t - \tau| > \pi \wedge t < \tau$
In diesem Fall wird genauso wie im vorherigen gefolgert: $\|h(t) - h(\tau)\| \leq \sqrt{2} \|h\|_Y |2\pi - (\tau - t)|$.
3. Dieser Beweis benutzt, wie auch alle folgenden in diesem Lemma die Darstellung von z oder h durch die Taylorsche Formel, wobei die Abbildungen jeweils bis zur zweiten Ableitung entwickelt werden. Durch Fallunterscheidung analog zum vorherigen Punkt, läßt sich für $(t, \tau) \in [0, 2\pi[\times [0, 2\pi[$ die Gültigkeit von

$$z_i(\tau) = z_i(t) + z_i'(t)(\tau - t)_{\min} + \frac{z_i''(\xi_i)}{2} (\tau - t)_{\min}^2$$

für eine geeignete Zwischenstelle ξ_i , $i = 1, 2$, leicht nachweisen. Somit gilt also:

$$\begin{aligned} \langle z(t) - z(\tau), \begin{pmatrix} z_2'(t) \\ -z_1'(t) \end{pmatrix} \rangle &= z_2'(t)[-z_1'(t)(\tau - t)_{\min} - \frac{z_1''(\xi_1)}{2}(\tau - t)_{\min}^2] \\ &\quad - z_1'(t)[-z_2'(t)(\tau - t)_{\min} - \frac{z_2''(\xi_2)}{2}(\tau - t)_{\min}^2] \\ &= [z_1'(t)z_2''(\xi_2) - z_2'(t)z_1''(\xi_1)]\frac{(\tau - t)_{\min}^2}{2}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Daraus folgt nun die angegebene Ungleichung.

4. Diese Ungleichung wird ebenso wie im vorherigen Punkt bewiesen.
5. Wiederum auf Grund der Taylorschen Formel gilt:

$$\begin{aligned} \langle z(t) - z(\tau), \begin{pmatrix} h_2'(t) \\ -h_1'(t) \end{pmatrix} \rangle + \langle h(t) - h(\tau), \begin{pmatrix} z_2'(t) \\ -z_1'(t) \end{pmatrix} \rangle \\ = [h_1'(t)z_2''(\xi_2) - h_2'(t)z_1''(\xi_1) + z_1'(t)h_2''(\xi_2) - z_2'(t)h_1''(\eta_1)]\frac{(\tau - t)_{\min}^2}{2}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

woraus auch hier die Behauptung folgt. \square

Sei $z \in V$, $r > 0$, dann bezeichne $B(z, r) := \{y \in Y : \|y - z\|_Y < r\}$ die offene Kugel um z mit Radius r . Ebenso ist $B[z, r] := \{y \in Y : \|y - z\|_Y \leq r\}$ die abgeschlossene Kugel um z mit Radius r . Nun soll gezeigt werden, daß V offen ist.

Satz 4.6 V ist offen.

Beweis: Sei $z \in V$ und D das von z berandete Gebiet. Nachzuweisen ist die Existenz einer Konstante $r > 0$ mit $B(z, r) \subset V$.

1. Aus Lemma 4.5 folgt die Existenz einer positiven Konstante C_z mit $\|z(t) - z(\tau)\| \geq C_z|t - \tau|_{\min}$. Sei nun $w \in Y$ mit $\|z - w\|_Y \leq \frac{C_z}{4}$, dann gilt für $t, \tau \in [0, 2\pi[$:

$$\begin{aligned} \|w(t) - w(\tau)\| &= \|w(t) - z(t) + z(\tau) - w(\tau) + z(t) - z(\tau)\| \\ &\geq \|z(t) - z(\tau)\| - 2\|z - w\|_Y|t - \tau|_{\min} \\ &\geq C_z(1 - \frac{1}{2})|t - \tau|_{\min}. \end{aligned}$$

Somit ist auch w injektiv.

2. Offensichtlich existiert weiterhin ein $D_z > 0$ mit $\|z'(t)\| \geq D_z$ für alle $t \in [0, 2\pi[$. Sei $w \in Y$ mit $\|z - w\|_Y \leq \frac{D_z}{2}$, dann gilt: $\|w'(t)\| \geq \|z'(t)\| - \|w - z\|_Y \geq \frac{D_z}{2}$, d.h. auch die zweite, für Elemente aus V geforderte Eigenschaft, überträgt sich in einer hinreichend kleinen Umgebung.

3. Aus der Funktionentheorie ist bekannt, daß folgende Äquivalenz für die hier betrachteten Gebiete gilt (wobei hier \mathbb{R}^2 mit \mathbb{C} identifiziert wird und $\xi \in D$ sei):

$$z \text{ linksorientiert} \quad \Leftrightarrow \quad N(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{z'(t)}{z(t) - \xi} dt = 1.$$

Ebenso ist z rechtsorientiert genau dann, wenn $N(z) = -1$ gilt. Sei z also linksorientiert und $E_z := \min_{x \in \partial D} \|x - \xi\|$. Dann gilt $E_z > 0$ wegen $\xi \in D$. Weiterhin sei $\lambda \in [0, 1]$, $w \in Y$ mit $\|z - w\|_Y \leq \frac{E_z}{2}$ und

$$q(t, \lambda) := \lambda z(t) + (1 - \lambda)w(t)$$

sei eine Familie von Parametrisierungen. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \|q(t, \lambda) - \xi\| &= \|z(t) - \xi + (1 - \lambda)(w(t) - z(t))\| \\ &\geq \|z(t) - \xi\| - \|w - z\|_Y \geq \frac{E_z}{2}. \end{aligned}$$

Somit ist $f : \begin{cases} [0, 1] & \rightarrow \{-1, 1\} \\ \lambda & \mapsto N(q(\cdot, \lambda)) \end{cases}$ wohldefiniert und stetig mit $f(1) = 1$. Da das stetige Bild einer zusammenhängenden Menge zusammenhängend ist, folgt $N(w) = f(0) = 1$, d.h. auch w ist linksorientiert.

Nun folgt die Behauptung des Satzes für $r := \min\{\frac{C_z}{4}, \frac{D_z}{2}, \frac{E_z}{2}\}$. \square

Bemerkung 4.7 Auch die dritte und fünfte Ungleichung aus Lemma 4.5 gelten gleichmäßig in einer hinreichend kleinen Umgebung. Dies kann ähnlich wie in obigem Satz unter Verwendung der Gleichungen (4.2) und (4.3) nachgewiesen werden.

Nach diesen Vorbemerkungen wird nun der angekündigte Differentiationssatz angegeben und bewiesen.

Satz 4.8 Sei $I := [0, 2\pi]$, $G = I$ oder $G \subset \mathbb{R}^2$ und $z_0 \in V$. Für $G = I$ sei $D := \{(t, \tau) \in I \times I : t \neq \tau\}$, andernfalls sei $D := G \times I$. Sei $f : D \times V \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, die für festes $(t, \tau) \in D$ zweimal stetig Fréchet-differenzierbar nach der dritten Variable ist. Für alle $z \in V$, $t \in I$, $h \in Y$ sei $f(t, \cdot, z)$ ebenso wie $\frac{\partial f}{\partial z}(t, \cdot, z; h)$ integrierbar. Für $\varphi \in X$, $t \in G$, $z \in V$ und $h \in Y$ seien die Abbildungen $A : V \rightarrow L(X, C_b(G))$ und $A^1(z; \cdot) : Y \rightarrow L(X, C_b(G))$ folgendermaßen definiert:

$$[[A(z)](\varphi)](t) := \int_0^{2\pi} f(t, \tau, z) \varphi(\tau) d\tau, \quad (4.4)$$

$$[[A^1(z; h)](\varphi)](t) := \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial z}(t, \tau, z; h) \varphi(\tau) d\tau. \quad (4.5)$$

Weiterhin gebe es integrierbare Funktionen $g_j : D \rightarrow \mathbb{R}$ und Konstanten $r > 0$, $C > 0$ mit $\int_0^{2\pi} g_j(t, \tau) d\tau \leq C$ für alle $t \in G$, $j = 1, 2$, so daß für alle $(t, \tau) \in D$, $h \in Y$ gilt:

$$\left| \frac{\partial^j f}{\partial z^j}(t, \tau, z; h) \right| \leq C_{z_0} g_j(t, \tau) \|h\|_Y^j, \quad z \in B[z_0, r], \quad (4.6)$$

wobei C_{z_0} eine nur von z_0 abhängige, positive Konstante ist. Dann ist die Abbildung $V \rightarrow L(X, C_b(G))$, $z \mapsto A(z)$ Fréchet-differenzierbar in z_0 mit der Ableitung $A^1(z_0; \cdot)$.

Beweis: dieser Satz ist angelehnt an Satz 3.5 aus [17]. Auf Grund der Abschätzung

$$\left| \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial z}(t, \tau, z_0; h) \varphi(\tau) d\tau \right| \leq C_{z_0} \|h\|_Y \|\varphi\|_\infty \int_0^{2\pi} g_1(t, \tau) d\tau \leq C_{z_0} C \|h\|_Y \|\varphi\|_\infty$$

folgt die Beschränktheit der Abbildung $h \rightarrow A^1(z_0; h)$. Die Linearität dieser Abbildung folgt sofort aus der Linearität von $\frac{\partial f}{\partial z}(t, \tau, z_0; h)$. Sei nun $h \in Y$ so klein, daß $z_0 + h \in B[z_0, r] \subset V$ gilt. Nun folgt die Aussage des Satzes aus einer Anwendung der Taylorschen Formel (vgl. [1]):

$$\begin{aligned} & \|A(z_0 + h) - A(z_0) - A^1(z_0; h)\|_\infty \\ &= \sup_{\|\varphi\|_\infty=1} \left\| \int_0^{2\pi} \left(f(\cdot, \tau, z_0 + h) - f(\cdot, \tau, z_0) - \frac{\partial f}{\partial z}(\cdot, \tau, z_0; h) \right) \varphi(\tau) d\tau \right\|_\infty \\ &= \sup_{\|\varphi\|_\infty=1} \left\| \int_0^{2\pi} \int_0^1 (1-s) \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(\cdot, \tau, z_0 + sh; h) ds \varphi(\tau) d\tau \right\|_\infty \\ &\leq C_{z_0} C \|h\|_Y^2 \quad \square \end{aligned}$$

Bemerkung 4.9 1. Offensichtlich ist Satz 4.8 auch bei allgemeineren Teilmengen I, G des \mathbb{R}^n und offenen Teilmengen V eines Banachraums Y gültig.

2. Besteht die Kernfunktion f aus einem Produkt von Funktionen $\{p_i\}$, so gilt der Satz auch dann, wenn die Ungleichungen für die einzelnen p_i gelten. Dabei muß dann eine Abschätzung vom Typ (4.6) auch für die Funktionen $\{p_i\}$ selber gelten und auch die Produkte der integrierbaren Majoranten müssen noch integrierbar sein. Die Aussage folgt dann durch Anwendung der Produktregel auf f .

Als nächstes wird die Fréchet-Differenzierbarkeit einiger Abbildungen angegeben, da sie in den folgenden Sätzen benötigt werden.

Lemma 4.10 Sei $(t, \tau) \in [0, 2\pi[\times]0, 2\pi[$, $t \neq \tau$, $z \in V$, $h \in Y$ und $v \in \mathbb{R}^2$, dann sind die folgenden Abbildungen von V nach \mathbb{R} bzw. \mathbb{R}^2 Fréchet-differenzierbar mit den jeweils angegebenen Ableitungen:

1. $F_1 : z \mapsto z(t) - z(\tau) \Rightarrow F'_1(z; h) = h(t) - h(\tau)$
2. $F_2 : z \mapsto \|z(t) - z(\tau)\| \Rightarrow F'_2(z; h) = \frac{\langle z(t) - z(\tau), h(t) - h(\tau) \rangle}{\|z(t) - z(\tau)\|}$
3. $F_3 : z \mapsto z'(t) \Rightarrow F'_3(z; h) = h'(t)$
4. $F_4 : z \mapsto \|z'(t)\| \Rightarrow F'_4(z; h) = \frac{\langle z'(t), h'(t) \rangle}{\|z'(t)\|}$
5. $F_5 : z \mapsto \langle z, v \rangle \Rightarrow F'_5(z; h) = \langle h, v \rangle$
6. $F_6 : z \mapsto \frac{\langle z'(t), v \rangle}{\|z'(t)\|} \Rightarrow F'_6(z; h) = \frac{\langle h'(t), v \rangle}{\|z'(t)\|} - \frac{\langle z'(t), h'(t) \rangle \langle z'(t), v \rangle}{\|z'(t)\|^3}$

Beweis: Die Aussagen lassen sich entweder einfach durch Anwendung der Definition für die Fréchet-Ableitung, oder mit Hilfe der Kettenregel beweisen. \square

Nach diesen Vorbemerkungen, kann nun endlich die Anwendung auf den konkreten Fall beginnen. Hierzu wird in einem ersten Schritt gezeigt, daß die Abbildung $z \rightarrow A(\cdot, z)$ mit dem im letzten Kapitel definierten Integraloperator A Fréchet-differenzierbar ist. Dies soll für jede Komponente von A einzeln geschehen, wobei die Operatoren jeweils in ihrer parametrisierten Form betrachtet werden. Sei L ein Integraloperator, dann bezeichne der kalligraphische Buchstabe \mathcal{L} jeweils die parametrisierte Form dieses Integraloperators als Abbildung mit V als Definitionsbereich. Mit Hilfe des Differentiationsatzes 4.8 und der zweiten Bemerkung können nun die gewünschten Differenzierbarkeitsaussagen bewiesen werden:

Satz 4.11 Sei $\mathcal{L} \in \{\mathcal{S}, \mathcal{K}, \mathcal{K}^*, \mathcal{T}_i - \mathcal{T}_a\}$, und $f_{\mathcal{L}}$ sei die jeweilige Kernfunktion. Dann ist

$$\mathcal{L} := \begin{cases} V & \rightarrow L(X, X) \\ z & \mapsto \int_0^{2\pi} f_{\mathcal{L}}(\cdot, \tau, z)(\cdot) d\tau \end{cases}$$

Fréchet-differenzierbar mit Ableitung

$$\mathcal{L}'(z; h) := \int_0^{2\pi} \frac{\partial f_{\mathcal{L}}}{\partial z}(\cdot, \tau, z; h)(\cdot) d\tau, \quad h \in Y.$$

Insbesondere ist also die Abbildung $z \rightarrow \mathcal{A}(z)$ mit dem in Kapitel 3 definierten Integraloperator \mathcal{A} Fréchet-differenzierbar.

Beweis: Der Beweis wird für alle Operatoren getrennt geführt, wobei der erste Fall ausführlich erläutert wird, während bei den folgenden Operatoren nur noch die Änderungen dargestellt werden. Um die Übersichtlichkeit etwas zu erhöhen werden die Argumente der Hankelfunktion und ihrer Ableitungen teilweise weggelassen, es gilt also z.B.: $H_0^1 := H_0^1(k\|z(t) - z(\tau)\|)$. Weiterhin bezeichnet $H_{0,j}^1$ die Hankelfunktion mit Wellenzahl k_j für $j = i, a$.

1. Es ist

$$f_{\mathcal{S}}(t, \tau, z) := \frac{i}{2} H_0^1(k \|z(t) - z(\tau)\|) \|z'(\tau)\|$$

und, wie in Satz 2.37 gezeigt wurde, ist $\mathcal{S}(z) \in L(X, X)$ und insbesondere auch $f_{\mathcal{S}}$ eine integrierbare Funktion. Sei $p(t, \tau, z) := \frac{i}{2} H_0^1(k \|z(t) - z(\tau)\|)$, $q(t, \tau, z) := \|z'(\tau)\|$, d.h. $f_{\mathcal{S}} = pq$. Weiterhin sei $z_0 \in V$ und $r > 0$ hinreichend klein. Seien c_{z_0}, C_{z_0} von z_0 abhängige, positive, geeignet gewählte Konstanten. Offensichtlich gilt $|q(t, \tau, z)| \leq C_{z_0}$ gleichmäßig in $B[z_0, r]$. Weiterhin gilt

$$\frac{\partial}{\partial z} q(t, \tau, z; h) = \frac{\langle z'(t), h'(t) \rangle}{\|z'(t)\|},$$

d.h. mit Hilfe der Ungleichung von Cauchy-Schwarz folgt somit

$$\left| \frac{\partial}{\partial z} q(t, \tau, z; h) \right| \leq \|h\|_Y.$$

Wie in Lemma 4.5 und Satz 4.6 bewiesen, gelten für hinreichend kleines r folgende Abschätzungen:

$$\begin{aligned} \|z(t) - z(\tau)\| &\geq c_{z_0} |t - \tau|_{\min} \quad \forall z \in B[z_0, r] \\ \|z'(t)\| &\geq c_{z_0} \quad \forall z \in B[z_0, r]. \end{aligned}$$

Für die zweite Ableitung folgt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial z^2} q(t, \tau, z; h) &= \frac{\|h'(t)\|^2}{\|z'(t)\|} - \frac{\langle z'(t), h'(t) \rangle^2}{\|z'(t)\|^3}, \quad \text{d.h. es gilt:} \\ \left| \frac{\partial^2}{\partial z^2} q(t, \tau, z; h) \right| &\leq \frac{2\|h\|_Y^2}{c_{z_0}}. \end{aligned}$$

Sei $\alpha \in]0, 1[$, $t \neq \tau$, dann gilt die Ungleichung

$$|H_0^1(k \|z(t) - z(\tau)\|)| \leq C_{z_0} \frac{1}{\|z(t) - z(\tau)\|^\alpha}$$

für $z \in B[z_0, r]$. Somit gilt

$$|p(t, \tau, z)| \leq \frac{C_{z_0}}{c_{z_0}^\alpha} \frac{1}{|t - \tau|_{\min}^\alpha},$$

und die rechte Seite der Ungleichung stellt eine integrierbare Majorante dar. Für die Ableitungen kann unter Benutzung von $|H_0^{1(j)}(k \|z(t) - z(\tau)\|)| \leq C_{z_0} \frac{1}{\|z(t) - z(\tau)\|^j}$, $j \in \mathbb{N}$, für alle $z \in B[z_0, r]$ weiterhin gefolgert werden:

$$\frac{\partial}{\partial z} p(t, \tau, z; h) = \frac{ik}{2} H_0^{1'}(k \|z(t) - z(\tau)\|) \frac{\langle z(t) - z(\tau), h(t) - h(\tau) \rangle}{\|z(t) - z(\tau)\|}.$$

Somit gilt für den Betrag die Abschätzung

$$\left| \frac{\partial}{\partial z} p(t, \tau, z; h) \right| \leq \frac{|k|C_{z_0}}{c_{z_0}} \|h\|_Y.$$

Aus obigen Abschätzungen für p und q ist insbesondere ersichtlich, daß

$$\frac{\partial f_S}{\partial z}(t, \cdot, z; h) = \frac{\partial p}{\partial z}(t, \cdot, z; h)q(t, \cdot, z) + p(t, \cdot, z) \frac{\partial q}{\partial z}(t, \cdot, z; h)$$

integrierbar ist und $S'(z; h) \in L(X, X)$ gilt. Für die zweite Ableitung gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial z^2} p(t, \tau, z; h) &= \frac{ik^2}{2} H_0^{1''} \frac{\langle z(t) - z(\tau), h(t) - h(\tau) \rangle^2}{\|z(t) - z(\tau)\|^2} + \frac{ik}{2} H_0^{1'} \\ &\quad \times \left(\frac{\|h(t) - h(\tau)\|^2}{\|z(t) - z(\tau)\|} - \frac{\langle z(t) - z(\tau), h(t) - h(\tau) \rangle^2}{\|z(t) - z(\tau)\|^3} \right) \\ \left| \frac{\partial^2}{\partial z^2} p(t, \tau, z; h) \right| &\leq \left(\frac{|k|^2 C_{z_0}}{c_{z_0}^2} + \frac{2|k|C_{z_0}}{c_{z_0}^2} \right) \|h\|_Y^2 \end{aligned}$$

Offensichtlich sind die zweiten Ableitungen stetig, da sie noch weiter differenzierbar sind. Die Voraussetzungen von Satz 4.8 bzw. des zweiten Teils der Bemerkung 4.9 sind also erfüllt und die Behauptung für diesen Fall gezeigt.

2. Als nächstes wird der Operator \mathcal{K} behandelt. Hier ist

$$f_{\mathcal{K}}(t, \tau, z) := \frac{-ik}{2} H_0^{1'}(k\|z(t) - z(\tau)\|) \frac{\langle z(t) - z(\tau), \begin{pmatrix} z_2'(\tau) \\ -z_1'(\tau) \end{pmatrix} \rangle}{\|z(t) - z(\tau)\|}.$$

Sei $p(t, \tau, z) := \frac{-ik}{2} H_0^{1'}(k\|z(t) - z(\tau)\|)\|z(t) - z(\tau)\|$ und

$$q(t, \tau, z) := \frac{\langle z(t) - z(\tau), \begin{pmatrix} z_2'(\tau) \\ -z_1'(\tau) \end{pmatrix} \rangle}{\|z(t) - z(\tau)\|^2}.$$

Unter Zuhilfenahme der dritten Abschätzung aus Lemma 4.5, die wie die anderen Ungleichungen gleichmäßig in einer hinreichend kleinen Umgebung gilt (vgl. Bemerkung 4.7), folgt nun bei geeignet gewählter, von z_0 abhängiger, positiver Konstante D_{z_0} :

$$|q(t, \tau, z)| \leq D_{z_0} \frac{|t - \tau|_{\min}^2}{|t - \tau|_{\min}^2} = D_{z_0}$$

Um die Ableitung von q abzuschätzen, wird neben den bereits genannten Ungleichungen auch noch die fünfte Abschätzung von Lemma 4.5, die ebenfalls

gleichmäßig in einer hinreichend kleinen Umgebung gilt, benutzt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} q(t, \tau, z) &= \frac{\langle h(t) - h(\tau), \begin{pmatrix} z_2'(\tau) \\ -z_1'(\tau) \end{pmatrix} \rangle + \langle z(t) - z(\tau), \begin{pmatrix} h_2'(\tau) \\ -h_1'(\tau) \end{pmatrix} \rangle}{\|z(t) - z(\tau)\|^2} \\ &\quad - \frac{2 \langle z(t) - z(\tau), \begin{pmatrix} z_2'(\tau) \\ -z_1'(\tau) \end{pmatrix} \rangle \langle z(t) - z(\tau), h(t) - h(\tau) \rangle}{\|z(t) - z(\tau)\|^4}. \\ \left| \frac{\partial}{\partial z} q(t, \tau, z) \right| &\leq D_{z_0} \|h\|_Y \quad \forall z \in B[z_0, r] \end{aligned}$$

Die zweite Ableitung wird nun mit der gleichen Vorgehensweise behandelt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial z^2} q(t, \tau, z) &= \frac{2 \langle h(t) - h(\tau), \begin{pmatrix} h_2'(\tau) \\ -h_1'(\tau) \end{pmatrix} \rangle}{\|z(t) - z(\tau)\|^2} \\ &\quad - \frac{2 \langle h(t) - h(\tau), \begin{pmatrix} z_2'(\tau) \\ -z_1'(\tau) \end{pmatrix} \rangle + \langle z(t) - z(\tau), \begin{pmatrix} h_2'(\tau) \\ -h_1'(\tau) \end{pmatrix} \rangle}{\|z(t) - z(\tau)\|^2} \\ &\quad \times \frac{\langle z(t) - z(\tau), h(t) - h(\tau) \rangle}{\|z(t) - z(\tau)\|^2} \\ &\quad - \frac{2 \langle z(t) - z(\tau), \begin{pmatrix} z_2'(\tau) \\ -z_1'(\tau) \end{pmatrix} \rangle \|h(t) - h(\tau)\|^2}{\|z(t) - z(\tau)\|^4} \\ &\quad + \frac{8 \langle z(t) - z(\tau), \begin{pmatrix} z_2'(\tau) \\ -z_1'(\tau) \end{pmatrix} \rangle \langle z(t) - z(\tau), h(t) - h(\tau) \rangle >^2}{\|z(t) - z(\tau)\|^6} \\ \left| \frac{\partial^2}{\partial z^2} q(t, \tau, z) \right| &\leq D_{z_0} \|h\|_Y^2 \quad \forall z \in B[z_0, r] \end{aligned}$$

Somit erfüllt q die gewünschten Voraussetzungen. Für p folgt weiterhin unter Zuhilfenahme der oben angegebenen Abschätzungen für die Hankelfunktion:

$$\begin{aligned} |p(t, \tau, z)| &\leq C_{z_0} |k| \\ \frac{\partial}{\partial z} p(t, \tau, z) &= \frac{-ik^2}{2} H_0^{1''} \langle z(t) - z(\tau), h(t) - h(\tau) \rangle \\ &\quad + \frac{-ik}{2} H_0^{1'} \frac{\langle z(t) - z(\tau), h(t) - h(\tau) \rangle}{\|z(t) - z(\tau)\|}. \end{aligned}$$

Die erste Ableitung genügt also der Abschätzung

$$\left| \frac{\partial}{\partial z} p(t, \tau, z) \right| \leq D_{z_0} \|h\| \quad \forall z \in B[z_0, r].$$

Für die zweite Ableitung folgt weiterhin:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial z^2} p(t, \tau, z) &= \frac{-ik^3}{2} H_0^{1''' } \frac{\langle z(t) - z(\tau), h(t) - h(\tau) \rangle^2}{\|z(t) - z(\tau)\|} \\ &\quad + \frac{-ik^2}{2} H_0^{1''} \|h(t) - h(\tau)\|^2 \\ &\quad + \frac{-ik^2}{2} H_0^{1''} \frac{\langle z(t) - z(\tau), h(t) - h(\tau) \rangle^2}{\|z(t) - z(\tau)\|^2} + \frac{-ik}{2} H_0^{1'} \\ &\quad \times \left(\frac{\|h(t) - h(\tau)\|^2}{\|z(t) - z(\tau)\|} - \frac{\langle z(t) - z(\tau), h(t) - h(\tau) \rangle^2}{\|z(t) - z(\tau)\|^3} \right). \end{aligned}$$

Aus dieser Darstellung ist nun ersichtlich, daß folgende Ungleichung gilt:

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial z^2} p(t, \tau, z) \right| \leq D_{z_0} \|h\|_Y^2 \quad \forall z \in B[z_0, r].$$

Auch p erfüllt also die Voraussetzungen, so daß für \mathcal{K} Satz 4.8 anwendbar ist.

3. Der Nachweis der Differenzierbarkeit von \mathcal{K}^* ergibt sich direkt aus Punkt 2. Es ist

$$f_{\mathcal{K}^*}(t, \tau, z) := \frac{ik}{2} H_0^{1'} (k \|z(t) - z(\tau)\|) \frac{\langle z(t) - z(\tau), \begin{pmatrix} z_2'(t) \\ -z_1'(t) \end{pmatrix} \rangle \|z'(\tau)\|}{\|z(t) - z(\tau)\| \|z'(t)\|},$$

d.h. im Vergleich zum vorherigen Punkt ist nur der Term $\frac{\|z'(\tau)\|}{\|z'(t)\|}$ neu. Dieser ist aber sogar unendlich oft Fréchet-differenzierbar, so daß die Differenzierbarkeit von \mathcal{K}^* gezeigt ist.

4. Es bleibt also noch der Nachweis für $\mathcal{T}_i - \mathcal{T}_a$. Hier gilt:

$$\begin{aligned} f_{\mathcal{T}_i - \mathcal{T}_a}(t, \tau, z) &= \\ &= \frac{(k_i^2 H_{0,i}^1 - k_a^2 H_{0,a}^1) \frac{\langle z(t) - z(\tau), \begin{pmatrix} z_2'(t) \\ -z_1'(t) \end{pmatrix} \rangle \langle z(t) - z(\tau), \begin{pmatrix} z_2'(\tau) \\ -z_1'(\tau) \end{pmatrix} \rangle}{\|z(t) - z(\tau)\|^2 \|z'(t)\|}} \\ &\quad + \left(\frac{\langle \begin{pmatrix} z_2'(\tau) \\ -z_1'(\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_2'(t) \\ -z_1'(t) \end{pmatrix} \rangle}{\|z(t) - z(\tau)\| \|z'(t)\|} \right. \\ &\quad \left. - \frac{\langle z(t) - z(\tau), \begin{pmatrix} z_2'(t) \\ -z_1'(t) \end{pmatrix} \rangle \langle z(t) - z(\tau), \begin{pmatrix} z_2'(\tau) \\ -z_1'(\tau) \end{pmatrix} \rangle}{\|z(t) - z(\tau)\|^3 \|z'(t)\|} \right) \\ &\quad \times \left(c_i J_{1,i} - c_a J_{1,a} + \frac{2i}{\pi} \left((k_i J_{1,i} - k_a J_{1,a}) (\ln \|z(t) - z(\tau)\| + c) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\|z(t) - z(\tau)\|}{4} (k_i^2 A_{1,i} - k_a^2 A_{1,a}) \right) \right) \end{aligned}$$

mit $c_j := k_j + \frac{2ik_j}{\pi} \ln \frac{k_j}{2}$, $j = i, a$. Sei

$$p(t, \tau, z) := k \left[\frac{J_1}{\|z(t) - z(\tau)\|} + \frac{2i}{\pi} \left(\frac{J_1}{\|z(t) - z(\tau)\|} (\ln \frac{k}{2} \|z(t) - z(\tau)\| + c) + \frac{k}{4} A_1 \right) \right].$$

Diese Funktion hat eine logarithmische Singularität, verhält sich also beim Differenzieren wie H_0^1 , so daß hier nichts mehr zu zeigen ist. Der Term

$$\left\langle \begin{pmatrix} z_2'(\tau) \\ -z_1'(\tau) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_2'(t) \\ -z_1'(t) \end{pmatrix} \right\rangle$$

ist unendlich oft Fréchet-differenzierbar. Die anderen Terme wurden in den vorherigen Punkten behandelt, so daß die Behauptung auch in diesem Fall gilt. \square

Da die Terme $\mathcal{S}'(z; h)$ und $\mathcal{K}'_0(z; h)$ noch benötigt werden, erfolgt hier eine explizite Darstellung, wobei für die Fréchet-Ableitung des Operators $\mathcal{K}(z)$ die Grundlösung der Laplacegleichung verwendet wird, da er in dieser Form später benötigt wird. Dies wird durch den Index 0 verdeutlicht.

$$\begin{aligned} & [[\mathcal{S}'(z; h)](\varphi)](t) \\ &= \frac{ik}{2} \int_0^{2\pi} H_0^{1'}(k\|z(t) - z(\tau)\|) \frac{\langle z(t) - z(\tau), h(t) - h(\tau) \rangle}{\|z(t) - z(\tau)\|} \|z'(\tau)\| \varphi(\tau) d\tau \\ & \quad + \frac{i}{2} \int_0^{2\pi} H_0^1(k\|z(t) - z(\tau)\|) \frac{\langle z'(\tau), h'(\tau) \rangle}{\|z'(\tau)\|} \varphi(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$\begin{aligned} & [[\mathcal{K}'_0(z; h)](\varphi)](t) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\langle h(t) - h(\tau), \begin{pmatrix} z_2'(\tau) \\ -z_1'(\tau) \end{pmatrix} \rangle + \langle z(t) - z(\tau), \begin{pmatrix} h_2'(\tau) \\ -h_1'(\tau) \end{pmatrix} \rangle}{\|z(t) - z(\tau)\|^2} \varphi(\tau) d\tau \\ & \quad - \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\langle z(t) - z(\tau), h(t) - h(\tau) \rangle \langle z(t) - z(\tau), \begin{pmatrix} z_2'(\tau) \\ -z_1'(\tau) \end{pmatrix} \rangle}{\|z(t) - z(\tau)\|^4} \varphi(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (4.8)$$

Auch der Operator \mathcal{T} ist Fréchet-differenzierbar. Dies wird im folgenden Satz gezeigt. Dabei wird eine in Satz 2.38 hergeleitete Darstellung von \mathcal{T} ausgenutzt. Die ebenfalls in Satz 2.38 angegebene Form von K^* wird verwendet, um eine alternative Darstellungsmöglichkeit für $\mathcal{K}^{*'}(z; h)$ zu erlangen.

Satz 4.12 Sei $\varphi \in C^{1,\alpha}[0, 2\pi]$ und $t \in [0, 2\pi[$. Ferner seien folgende vektorwertige Dichten definiert:

$$\begin{aligned} f_e(t, z) &:= \nu(z(t))\varphi(t) + \varphi'(t) \frac{z'(t)}{\|z'(t)\|^2} \\ f_d(t, z) &:= -\varphi(t)n(z(t)). \end{aligned}$$

Dann gilt folgende Darstellung:

$$\begin{aligned} [[\mathcal{K}^{*l}(z; h)](\varphi)](t) &= \left\langle [[\mathcal{K}'(z; h)](f_d(\cdot, z))](t) + [[\mathcal{S}'(z; h)](f_e(\cdot, z))](t) \right. \\ &\quad + [[\mathcal{K}(z)](\frac{\partial}{\partial z} f_d(\cdot, z; h))](t) + [[\mathcal{S}(z; h)](\frac{\partial}{\partial z} f_e(\cdot, z; h))](t), n(z(t)) \rangle \\ &\quad + \left\langle [[\mathcal{K}(z)](f_d(\cdot, z))](t) + [[\mathcal{S}(z)](f_e(\cdot, z))](t), \frac{\partial}{\partial z} n(z(t), h) \right\rangle \end{aligned}$$

Sei $\psi \in C^{2,\alpha}[0, 2\pi]$, $t \in [0, 2\pi[$, und seien folgende vektorwertige Dichten definiert:

$$\begin{aligned} g_e(t, z) &:= k^2 n(z(t)) \psi(t) + \begin{pmatrix} \nu_2(z(t)) \\ -\nu_1(z(t)) \end{pmatrix} \psi'(t) + \frac{1}{\|z'(t)\|} n(z(t)) \psi''(t) \\ g_d(t, z) &:= \psi'(t) \frac{z'(t)}{\|z'(t)\|^2}. \end{aligned}$$

Dann ist der Operator $\mathcal{T} : V \rightarrow L(C^{2,\alpha}[0, 2\pi], X)$ Fréchet-differenzierbar mit folgender Ableitung:

$$\begin{aligned} [[\mathcal{T}'(z; h)](\psi)](t) &= \left\langle [[\mathcal{K}'(z; h)](g_d(\cdot, z))](t) + [[\mathcal{S}'(z; h)](g_e(\cdot, z))](t) \right. \\ &\quad + [[\mathcal{K}(z)](\frac{\partial}{\partial z} g_d(\cdot, z; h))](t) + [[\mathcal{S}(z; h)](\frac{\partial}{\partial z} g_e(\cdot, z; h))](t), n(z(t)) \rangle \\ &\quad + \left\langle [[\mathcal{K}(z)](g_d(\cdot, z))](t) + [[\mathcal{S}(z)](g_e(\cdot, z))](t), \frac{\partial}{\partial z} n(z(t), h) \right\rangle \end{aligned}$$

Beweis: Der Nachweis besteht in der Anwendung der Produktregel auf die in Satz 2.38 gewonnenen Darstellungen für $\mathcal{K}^*(z)$ und $\mathcal{T}(z)$. \square

Als nächstes soll nun die Differenzierbarkeit der Potentialoperatoren gezeigt werden. Sei der Operator \mathcal{P}_d der Doppelschichtpotentialoperator und \mathcal{P}_e der Einfachschichtpotentialoperator, wobei beide in bereits parametrisierter Form betrachtet werden. Mit $f_{\mathcal{P}_l}$, $l = e, d$, werden wieder die zugehörigen Kernfunktionen bezeichnet. Sei im folgenden z_0 eine Parametrisierung des Randes eines Gebietes D_0 und $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet mit $\overline{G} \subset \mathbb{R}^2 \setminus \partial D_0$. Sei $r > 0$ so gewählt, daß für $V_r := \{z \in V : \|z - z_0\|_V < r\}$ und

$$Z_r := \{x \in \mathbb{R}^2 : \exists(t, z) \in [0, 2\pi[\times V_r : x = z(t)\} \quad (4.9)$$

die Beziehung $\overline{G} \subset \mathbb{R}^2 \setminus \overline{Z}_r$ gilt. Dann ist der Differentiationssatz 4.8 für $z \in V_r$ anwendbar, und es gilt folgender

Satz 4.13 Die Operatoren $\mathcal{P}_l : V_r \rightarrow L(X, C_b(G))$, $l = e, d$, sind Fréchet-differenzierbar mit der Ableitung

$$[[\mathcal{P}'_l(z; h)](\varphi)](x) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial f_{\mathcal{P}_l}}{\partial z}(x, \tau, z; h) \varphi(\tau) d\tau.$$

Beweis: Zunächst erfolgt der Nachweis für den Einfachschichtpotentialoperator. Es ist $f_{\mathcal{P}_e}$ integrierbar, und es gilt $\mathcal{P}_e(z) \in L(X, C_b(G))$. Sei $p(x, \tau, z) := \frac{i}{4} H_0^1(k\|x - z(\tau)\|)$, $q(x, \tau, z) := \|z'(\tau)\|$. Für die Behandlung von q sei auf Satz 4.11 verwiesen. Sei

$$d := \min_{x \in G, z \in Z} \|x - z\|,$$

so ist $d > 0$ nach Voraussetzung erfüllt. Somit gilt wegen des asymptotischen Verhaltens der Hankelfunktion folgende Beziehung:

$$|H_0^{1(n)}(k\|x - z(\tau)\|)| \leq C, \quad n = 0, 1, 2. \quad (4.10)$$

Somit gelten folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen:

$$\begin{aligned} |p(x, \tau, z)| &\leq C \\ \frac{\partial p}{\partial z}(x, \tau, z; h) &= \frac{-ik}{4} H_0^{1'}(k\|x - z(\tau)\|) \frac{\langle x - z(\tau), h(\tau) \rangle}{\|x - z(\tau)\|} \\ \left| \frac{\partial p}{\partial z}(x, \tau, z; h) \right| &\leq |k|C \|h\|_Y \end{aligned}$$

Insbesondere ist $\frac{\partial f_{\mathcal{P}_e}}{\partial z}$ integrierbar, und es gilt $\mathcal{P}'_e(z; h) \in L(X, C_b(G))$. Für die zweite Ableitung folgt weiterhin:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}(x, \tau, z; h) &= \frac{ik^2}{4} H_0^{1''}(k\|x - z(\tau)\|) \frac{\langle x - z(\tau), h(\tau) \rangle^2}{\|x - z(\tau)\|^2} \\ &\quad - \frac{ik}{4} H_0^{1'}(k\|x - z(\tau)\|) \\ &\quad \times \left(-\frac{\|h(\tau)\|^2}{\|x - z(\tau)\|} + \frac{2 \langle x - z(\tau), h(\tau) \rangle^2}{\|x - z(\tau)\|^3} \right) \\ \left| \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}(x, \tau, z; h) \right| &\leq \left(|k|^2 C + \frac{3|k|C}{d} \right) \|h\|_Y^2 \end{aligned}$$

Der Nachweis für den Doppelschichtpotentialoperator verläuft sehr ähnlich und wird daher weggelassen. Die Behauptung folgt dann mit Satz 4.8. \square

Sei z weiterhin eine Parametrisierung von ∂D , und für $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D$ gelte

$$u'(x) := [[\mathcal{P}'_e(z; h)](\varphi)](x) \quad \text{und} \quad v'(x) := [[\mathcal{P}'_d(z; h)](\varphi)](x). \quad (4.11)$$

Diese Funktionen sind wohldefiniert. Denn sei $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D$ beliebig. Dann existiert stets ein hinreichend kleines $r > 0$, so daß $x \notin Z_r$ gilt (wobei Z_r in (4.9) definiert wurde). Somit folgt die Wohldefiniertheit aus der Eindeutigkeit der Fréchet-Ableitung. Sei u das im zweiten Kapitel eingeführte Einfachschichtpotential und v das Doppelschichtpotential. Für eine hölderstetige bzw. hölderstetig differenzierbare Dichte φ können die Grenzwerte u'_\pm bzw. v'_\pm bei Annäherung an den Rand betrachtet werden. Hier gilt folgender

Satz 4.14 Sei $\varphi \in C^{0,\alpha}[0, 2\pi]$, dann gilt für $x \in \partial D$, $t \in [0, 2\pi[$ mit $x = z(t)$:

$$u'_{\pm}(x) = \frac{1}{2}[[\mathcal{S}'(z; h)](\varphi)](t) - \langle \text{grad } u_{\pm}(x), h(t) \rangle. \quad (4.12)$$

Sei $\psi \in C^{1,\alpha}[0, 2\pi]$, dann gilt für $x \in \partial D$, $t \in [0, 2\pi[$ mit $x = z(t)$:

$$v'_{\pm}(x) = \frac{1}{2}[[\mathcal{K}'(z; h)](\psi)](t) - \langle \text{grad } v_{\pm}(x), h(t) \rangle. \quad (4.13)$$

Beweis: Sei $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D$, dann gilt im Fall des Einfachschichtpotentials:

$$\begin{aligned} u'(x) &= -\frac{ik}{4} \int_0^{2\pi} H_0^{1'}(k\|x - z(\tau)\|) \frac{\langle x - z(\tau), h(\tau) \rangle}{\|x - z(\tau)\|} \|z'(\tau)\| \varphi(\tau) d\tau \\ &\quad + \frac{i}{4} \int_0^{2\pi} H_0^1(k\|x - z(\tau)\|) \frac{\langle z'(\tau), h'(\tau) \rangle}{\|z'(\tau)\|} \varphi(\tau) d\tau \\ &= \frac{ik}{4} \int_0^{2\pi} H_0^{1'}(k\|x - z(\tau)\|) \frac{\langle x - z(\tau), h(t) - h(\tau) \rangle}{\|x - z(\tau)\|} \|z'(\tau)\| \varphi(\tau) d\tau \\ &\quad - \langle \text{grad } u(x), h(t) \rangle \\ &\quad + \frac{i}{4} \int_0^{2\pi} H_0^1(k\|x - z(\tau)\|) \frac{\langle z'(\tau), h'(\tau) \rangle}{\|z'(\tau)\|} \varphi(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Die Kernfunktion des ersten Integrals kann stetig fortgesetzt werden, die des letzten Integrals besitzt eine logarithmische Singularität, so daß die Parameterintegrale stetige Funktionen beschreiben. Der Gradient kann ebenfalls stetig in den Rand hinein fortgesetzt werden, wie aus Satz 2.27 ersichtlich ist. Somit gilt für den Grenzwert gegen den Rand:

$$\begin{aligned} u'_{\pm}(z(t)) &= \frac{ik}{4} \int_0^{2\pi} H_0^{1'}(k\|z(t) - z(\tau)\|) \frac{\langle z(t) - z(\tau), h(t) - h(\tau) \rangle}{\|z(t) - z(\tau)\|} \|z'(\tau)\| \varphi(\tau) d\tau \\ &\quad + \frac{i}{4} \int_0^{2\pi} H_0^1(k\|z(t) - z(\tau)\|) \frac{\langle z'(\tau), h'(\tau) \rangle}{\|z'(\tau)\|} \varphi(\tau) d\tau \\ &\quad - \langle \text{grad } u_{\pm}(z(t)), h(t) \rangle \end{aligned}$$

Aus der Darstellung (4.7) ist ersichtlich, daß dies gerade die gewünschte Gleichung ist.

Nun der Nachweis für das Doppelschichtpotential, wobei zunächst der potentialtheoretische Fall $k = 0$ betrachtet wird. Wie bereits einige Male zuvor wird v folgendermaßen dargestellt: $v(x) = w(x, z) + q(x, z)$ mit

$$\begin{aligned} w(x, z) &= \psi(t) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\langle x - z(\tau), \begin{pmatrix} z_2'(\tau) \\ -z_1'(\tau) \end{pmatrix} \rangle}{\|x - z(\tau)\|^2} d\tau, \\ q(x, z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\langle x - z(\tau), \begin{pmatrix} z_2'(\tau) \\ -z_1'(\tau) \end{pmatrix} \rangle}{\|x - z(\tau)\|^2} (\psi(\tau) - \psi(t)) d\tau. \end{aligned}$$

Hierbei ist $x \in D_{\rho_0} \setminus \partial D$ mit $x = z(t) \pm \rho n(z(t))$, wobei D_{ρ_0} im Beweis von Satz 2.18 definiert wurde. Sei $G = \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ oder $G = D$, dann gelten für $x \in G$ die Gleichungen $\frac{\partial}{\partial z} w(x, z; h) = 0$ und $\text{grad}_x w(x, z) = 0$, wie aus (2.35) ersichtlich ist — denn die Ableitung einer konstanten Abbildung ist die Nullabbildung. Somit gilt also für $x \notin \partial D$:

$$\begin{aligned}
v'(x) &= \frac{\partial}{\partial z} w(x, z; h) + \frac{\partial}{\partial z} q(x, z; h) = \frac{\partial}{\partial z} q(x, z; h) \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\langle h(\tau), \begin{pmatrix} z_2'(\tau) \\ -z_1'(\tau) \end{pmatrix} \rangle + \langle x - z(\tau), \begin{pmatrix} h_2'(\tau) \\ -h_1'(\tau) \end{pmatrix} \rangle}{\|x - z(\tau)\|^2} (\psi(\tau) - \psi(t)) d\tau \\
&\quad + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\langle x - z(\tau), h(\tau) \rangle \langle x - z(\tau), \begin{pmatrix} z_2'(\tau) \\ -z_1'(\tau) \end{pmatrix} \rangle}{\|x - z(\tau)\|^4} (\psi(\tau) - \psi(t)) d\tau \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\langle h(t) - h(\tau), \begin{pmatrix} z_2'(\tau) \\ -z_1'(\tau) \end{pmatrix} \rangle + \langle x - z(\tau), \begin{pmatrix} h_2'(\tau) \\ -h_1'(\tau) \end{pmatrix} \rangle}{\|x - z(\tau)\|^2} (\psi(\tau) - \psi(t)) d\tau \\
&\quad - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\langle x - z(\tau), h(t) - h(\tau) \rangle \langle x - z(\tau), \begin{pmatrix} z_2'(\tau) \\ -z_1'(\tau) \end{pmatrix} \rangle}{\|x - z(\tau)\|^4} (\psi(\tau) - \psi(t)) d\tau \\
&\quad - \langle \text{grad } v(x), h(t) \rangle .
\end{aligned}$$

Da ψ nach Voraussetzung stetig differenzierbar ist, können die Integranden stetig fortgesetzt werden, so daß sich die Integrale stetig in den Rand hinein fortsetzen lassen. Dies gilt auch für den Gradienten, wie aus Satz 2.35 ersichtlich ist. Für den Grenzwert gegen den Rand folgt somit:

$$\begin{aligned}
v'_\pm(z(t)) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\langle h(t) - h(\tau), \begin{pmatrix} z_2'(\tau) \\ -z_1'(\tau) \end{pmatrix} \rangle + \langle z(t) - z(\tau), \begin{pmatrix} h_2'(\tau) \\ -h_1'(\tau) \end{pmatrix} \rangle}{\|z(t) - z(\tau)\|^2} (\psi(\tau) - \psi(t)) d\tau \\
&\quad - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\langle z(t) - z(\tau), h(t) - h(\tau) \rangle \langle z(t) - z(\tau), \begin{pmatrix} z_2'(\tau) \\ -z_1'(\tau) \end{pmatrix} \rangle}{\|z(t) - z(\tau)\|^4} (\psi(\tau) - \psi(t)) d\tau \\
&\quad - \langle \text{grad } v_\pm(z(t)), h(t) \rangle .
\end{aligned}$$

Unter Beachtung der Darstellung (4.8) folgt nun weiterhin:

$$v'_\pm(z(t)) = \frac{1}{2} [[K'_0(z; h)](\psi)](t) - \frac{\partial}{\partial z} \tilde{w}(t, z; h) - \langle \text{grad } v_\pm(z(t)), h(t) \rangle$$

mit $\tilde{w}(t, z) := w(z(t), z)$. Es gilt $\tilde{w}(t, z) = -1/2$ für alle $t \in [0, 2\pi[$ und $z \in V$. Dies wurde in Gleichung (2.36) gezeigt. Somit folgt $\frac{\partial}{\partial z} \tilde{w}(t, z; h) = 0$. Daher ist die Aussage im potentialtheoretischen Fall gezeigt. Für die Helmholtzgleichung folgt die Behauptung aus der Beobachtung, daß die Differenz der Fréchet-Ableitungen der Doppelschichtpotentiale mit den Grundlösungen für die Laplace- und die Helmholtzgleichung eine hölderstetige Funktion ist. Dies kann ähnlich wie in Kapitel 2 nachgewiesen werden. \square

Satz 4.14 überträgt sich natürlich auch auf Abbildungen, die als Summe von Einzel- und Doppelschichtpotential mit vektorwertigen Dichten darstellbar sind. Dies ist im folgenden Korollar noch einmal festgehalten.

Korollar 4.15 *Seien $\varphi \in C^{0,\alpha}([0, 2\pi], \mathbb{R}^2)$, $\psi \in C^{1,\alpha}([0, 2\pi], \mathbb{R}^2)$ und*

$$\begin{aligned} m(x) &:= [[P_e(z)](\varphi)](x) + [[P_d(z)](\psi)](x) \\ m'(x) &:= [[P'_e(z; h)](\varphi)](x) + [[P'_d(z; h)](\psi)](x), \end{aligned}$$

dann hat m' folgenden Grenzwert gegen den Rand:

$$m'_\pm(x) = \frac{1}{2}[[\mathcal{S}'(z; h)](\varphi)](t) + \frac{1}{2}[[\mathcal{K}'(z; h)](\psi)](t) - \begin{pmatrix} \langle \text{grad } m_{1,\pm}(x), h(t) \rangle \\ \langle \text{grad } m_{2,\pm}(x), h(t) \rangle \end{pmatrix},$$

wobei m_1 und m_2 die Komponenten des Vektors m bezeichnen.

Auch für die Normalableitungen von u' und v' kann bei hinreichend glatten Dichten der Grenzwert gegen den Rand bestimmt werden. Hierbei kann der Nachweis unter Ausnutzung der bereits in Kapitel 2 hergeleiteten Eigenschaften von Einfach- und Doppelschichtpotential geführt werden.

Satz 4.16 *Sei u das parametrisierte Einfachschichtpotential, v das parametrisierte Doppelschichtpotential und u' und v' seien wie in (4.11) definiert. Sei $\varphi \in C^{1,\alpha}[0, 2\pi]$, $\partial D \in C^{2,\alpha}$, dann gilt für $x \in \partial D$, $t \in [0, 2\pi[$ mit $x = z(t)$:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'_\pm}{\partial n}(x) &= \frac{1}{2}[[\mathcal{K}^{*'}(z; h)]\varphi](t) - \langle \text{grad } u_\pm(x), \frac{\partial}{\partial z}n(z(t), h) \rangle \\ &\quad - \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 u_\pm}{\partial x_i \partial x_j} h_i(t) n_j(z(t)). \end{aligned}$$

Sei $\psi \in C^{2,\alpha}[0, 2\pi]$, dann gilt für $x \in \partial D$, $t \in [0, 2\pi[$ mit $x = z(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v'_\pm}{\partial n}(x) &= \frac{1}{2}[[\mathcal{T}'(z; h)]\psi](t) - \langle \text{grad } v_\pm(x), \frac{\partial}{\partial z}n(z(t), h) \rangle \\ &\quad - \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 v_\pm}{\partial x_i \partial x_j} h_i(t) n_j(z(t)). \end{aligned}$$

Beweis: Wie in Satz 4.12 werden folgende vektorwertigen Dichten betrachtet:

$$\begin{aligned} f_d(t, z) &:= -n(z(t))\varphi(t), \\ f_e(t, z) &:= \varphi'(t) \frac{z'(t)}{\|z'(t)\|^2} + \nu(z(t))\varphi(t) \end{aligned}$$

mit der im Beweis von Satz 2.27 definierten Abbildung ν . Sei $x \in D_{\rho_0} \setminus \partial D$ mit $x = z(t) \pm \rho n(z(t))$ und D_{ρ_0} wie im Beweis von Satz 2.18. Dann kann unter Ausnutzung der Darstellung (2.41) durch Verwendung der Produktregel gezeigt werden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial n}(x) &= \left\langle \frac{\partial}{\partial z} [\text{grad } u(x; z)](h), n(z(t)) \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial}{\partial z} \left([[\mathcal{P}_d(z)](f_d(\cdot, z))](x) + [[\mathcal{P}_e(z)](f_e(\cdot, z))](x) \right) (h), n(z(t)) \right\rangle \\ &= \left\langle [[\mathcal{P}'_d(z; h)](f_d(\cdot, z))](x) + [[\mathcal{P}_d(z)]\left(\frac{\partial}{\partial z} f_d(\cdot, z; h)\right)](x) \right. \\ &\quad \left. + [[\mathcal{P}'_e(z; h)](f_e(\cdot, z))](x) + [[\mathcal{P}_e(z)]\left(\frac{\partial}{\partial z} f_e(\cdot, z; h)\right)](x), n(z(t)) \right\rangle \end{aligned}$$

Nun kann obiges Korollar mit $m = \text{grad } u$ angewendet werden, so daß sich für den Grenzwert gegen den Rand unter Beachtung der Sprungbeziehung für das Doppelschichtpotential und der Stetigkeit des Einfachschichtpotentials folgendes für $x \in \partial D$, $x = z(t)$ ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'_\pm}{\partial n}(x) &= \frac{1}{2} \left\langle [[\mathcal{K}'(z; h)](f_d(\cdot, z))](t) + [[\mathcal{K}(z)]\frac{\partial}{\partial z}(f_d(\cdot, z; h))](t) \right. \\ &\quad \left. + [[\mathcal{S}'(z; h)](f_e(\cdot, z))](t) + [[\mathcal{S}(z)]\left(\frac{\partial}{\partial z} f_e(\cdot, z; h)\right)](t), n(z(t)) \right\rangle \\ &\mp \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial}{\partial z} n(z(t), h), n(z(t)) \right\rangle \varphi(t) - \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 u_\pm}{\partial x_i \partial x_j} h_i(t) n_j(z(t)). \end{aligned}$$

Die zweiten Ableitungen sind dabei wegen der vorausgesetzten Regularität des Randes und der Dichte wohldefiniert (vgl. Korollar 2.28). Um nun den gewünschten Ausdruck zu erhalten, wird noch eine Nullergänzung mit $\langle \text{grad } u_\pm(z(t)), \frac{\partial}{\partial z} n(z(t), h) \rangle$ durchgeführt, wobei für das Integral über den Gradienten der Grundlösung die Darstellung aus Satz 2.38 ausgenutzt wird. Somit gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'_\pm}{\partial n}(x) &= \frac{1}{2} \left\langle [[\mathcal{K}'(z; h)](f_d(\cdot, z))](t) + [[\mathcal{K}(z)]\frac{\partial}{\partial z}(f_d(\cdot, z; h))](t) \right. \\ &\quad \left. + [[\mathcal{S}'(z; h)](f_e(\cdot, z))](t) + [[\mathcal{S}(z)]\left(\frac{\partial}{\partial z} f_e(\cdot, z; h)\right)](t), n(z(t)) \right\rangle \\ &\mp \frac{1}{2} \left\langle \frac{\partial}{\partial z} n(z(t), h), n(z(t)) \right\rangle \varphi(t) - \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 u_\pm}{\partial x_i \partial x_j} h_i(t) n_j(z(t)). \\ &+ \frac{1}{2} \left\langle [[\mathcal{K}(z)](f_d(\cdot, z))](t) + [[\mathcal{S}(z)](f_e(\cdot, z))](t), \frac{\partial}{\partial z} n(z(t), h) \right\rangle \\ &\mp \frac{1}{2} \left\langle n(z(t)), \frac{\partial}{\partial z} n(z(t), h) \right\rangle \varphi(t) - \left\langle \text{grad } u_\pm(x), \frac{\partial}{\partial z} n(z(t), h) \right\rangle \end{aligned}$$

Es ist $\langle n(z(t)), n(z(t)) \rangle = 1$, d.h.

$$\left\langle n(z(t)), \frac{\partial}{\partial z} n(z(t), h) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial z} n(z(t), h), n(z(t)) \right\rangle = 0.$$

Mit Hilfe dieser Gleichung und der in Satz 4.12 dargestellten Form von $\mathcal{K}'(z; h)$ ist die Aussage des ersten Teils des Satzes nun ersichtlich.

Der Beweis für das Doppelschichtpotential verläuft sehr ähnlich. Ausgangspunkt ist hier die Darstellung (2.47) für den Gradienten des Doppelschichtpotentials. Seien hierzu die vektorwertigen Dichten g_d und g_e genau wie in Satz 4.12 definiert:

$$\begin{aligned} g_d(t, z) &:= \psi'(t) \frac{z'(t)}{\|z'(t)\|^2}, \\ g_e(t, z) &:= k^2 n(z(t)) \psi(t) + \begin{pmatrix} \nu_2(z(t)) \\ -\nu_1(z(t)) \end{pmatrix} \psi'(t) - \frac{1}{\|z'(t)\|} n(z(t)) \psi''(t), \end{aligned}$$

dann sind beide Dichten wiederum Fréchet-differenzierbar nach z . Sei $x \in D_{\rho_0} \setminus \partial D$ mit $x = z(t) \pm \rho n(z(t))$, dann gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v'}{\partial n}(x) &= \left\langle \frac{\partial}{\partial z} \text{grad } v(x; z), n(z(t)) \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial}{\partial z} \left([[\mathcal{P}_d(z)](g_d(\cdot, z))](x) + [[\mathcal{P}_e(z)](g_e(\cdot, z))](x) \right) (h), n(z(t)) \right\rangle. \end{aligned}$$

Nun verläuft der Beweis fast wie im ersten Teil. Für den Grenzwert gegen den Rand ergibt sich auf Grund gleicher Argumentation wie oben unter Verwendung der Nullergänzung mit $\langle \text{grad } v_{\pm}(z(t)), \frac{\partial}{\partial z} n(z(t), h) \rangle$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v'_{\pm}}{\partial n}(x) &= \frac{1}{2} \left\langle [[\mathcal{K}'(z; h)](g_d(\cdot, z))](t) + [[\mathcal{K}(z)] \frac{\partial}{\partial z} (g_d(\cdot, z; h))](t) \right. \\ &\quad \left. + [[\mathcal{S}'(z; h)](g_e(\cdot, z))](t) + [[\mathcal{S}(z)] \left(\frac{\partial}{\partial z} g_e(\cdot, z; h) \right)](t), n(z(t)) \right\rangle \\ &\quad \pm \frac{1}{2} \psi'(t) \left\langle \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z'(t)}{\|z'(t)\|^2} \right) (h), n(z(t)) \right\rangle - \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 v_{\pm}}{\partial x_i \partial x_j} h_i(t) n_j(z(t)). \\ &\quad + \frac{1}{2} \left\langle [[\mathcal{K}(z)](g_d(\cdot, z))](t) + [[\mathcal{S}(z)](g_e(\cdot, z))](t), \frac{\partial}{\partial z} n(z(t), h) \right\rangle \\ &\quad \pm \frac{1}{2} \psi'(t) \left\langle \frac{z'(t)}{\|z'(t)\|^2}, \frac{\partial}{\partial z} n(z(t), h) \right\rangle - \left\langle \text{grad } v_{\pm}(x), \frac{\partial}{\partial z} n(z(t), h) \right\rangle \end{aligned}$$

Es ist $\left\langle \frac{z'(t)}{\|z'(t)\|^2}, n(z(t)) \right\rangle = 0$, d.h.

$$\left\langle \frac{z'(t)}{\|z'(t)\|^2}, \frac{\partial}{\partial z} n(z(t), h) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{z'(t)}{\|z'(t)\|^2} \right) (h), n(z(t)) \right\rangle = 0.$$

Mit Hilfe dieser Gleichung und der in Satz 4.12 dargestellten Form von $\mathcal{T}'(z; h)$ ist auch die Aussage des zweiten Teils des Satzes ersichtlich. \square

Nun sollen die Fernfelder von u' und v' untersucht werden. Sei hierzu $R > 0$ so groß daß $Z_r \subset B(0, R)$ und $\mathbb{R}^2 \setminus B \subset G$ gilt (hierbei wurde Z_r in (4.9) definiert), d.h. G

ist ein unbeschränktes Gebiet. Aus den Darstellungen von $[\mathcal{P}'_l(z; h)](\varphi)$ ist ersichtlich, daß die Funktionen $[\mathcal{P}'_l(z; h)](\varphi)$ ausstrahlende Lösungen der Helmholtzgleichung im Gebiet G sind. In dem folgenden Satz werden die Fernfelder explizit charakterisiert:

Satz 4.17 *Die Fernfelder von $[\mathcal{P}'_l(z; h)](\varphi)$, $l = e, d$, haben folgende Gestalt:*

$$\begin{aligned} v'_\infty(\hat{x}) &= -mk \int_0^{2\pi} e^{-ik\langle \hat{x}, z(\tau) \rangle} \\ &\quad \times \left(k \langle \hat{x}, h(\tau) \rangle \langle \hat{x}, \begin{pmatrix} z'_2(\tau) \\ -z'_1(\tau) \end{pmatrix} \rangle + i \langle \hat{x}, \begin{pmatrix} h'_2(\tau) \\ -h'_1(\tau) \end{pmatrix} \rangle \right) \varphi(\tau) d\tau, \\ u'_\infty(\hat{x}) &= m \int_0^{2\pi} e^{-ik\langle \hat{x}, z(\tau) \rangle} \left(-ik \|z'(\tau)\| \langle \hat{x}, h(\tau) \rangle + \frac{\langle z'(\tau), h'(\tau) \rangle}{\|z'(\tau)\|} \right) \varphi(\tau) d\tau \end{aligned}$$

mit $m := \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{8\pi k}}$.

Beweis: Der Beweis erfolgt genau wie bei Satz 2.8 durch Ausnutzen des asymptotischen Verhaltens der Hankelfunktion. \square

In dem nächsten Satz wird gezeigt, daß für die Abbildungen \mathcal{P}_l , $l = e, d$ die Fernfeldbildung mit der Differentiation vertauschbar ist. Für die Herleitung der Fernfelddarstellung der beiden Operatoren sei auf Korollar 2.10 verwiesen.

Satz 4.18 *Die Abbildungen $\mathcal{F}_l : V \rightarrow L(X, L^2(\Omega))$, $l = e, d$, mit*

$$\begin{aligned} ((\mathcal{F}_d(z))(\varphi))(\hat{x}) &:= -ikm \int_0^{2\pi} e^{-ik\langle \hat{x}, z(\tau) \rangle} \langle \hat{x}, \begin{pmatrix} z'_2(\tau) \\ -z'_1(\tau) \end{pmatrix} \rangle \varphi(\tau) d\tau \quad \text{und} \\ ((\mathcal{F}_e(z))(\varphi))(\hat{x}) &:= m \int_0^{2\pi} e^{-ik\langle \hat{x}, z(\tau) \rangle} \|z'(\tau)\| \varphi(\tau) d\tau \end{aligned}$$

sind Fréchet-differenzierbar mit

$$(\mathcal{F}_l)' = (\mathcal{P}'_l)_\infty, \quad l = e, d. \quad (4.14)$$

Beweis: Da die Kerne der Integraloperatoren $\mathcal{F}_l(z)$, $l = e, d$, stetig differenzierbar sind, kann die Differenzierbarkeit durch eine Anwendung der Taylorschen Formel direkt nachgewiesen werden, wobei die Abbildungen zunächst als Abbildungen von V nach $C(\Omega)$ betrachtet werden. Daraus folgt dann durch Abschätzen die Fréchet-Differenzierbarkeit von V nach $L^2(\Omega)$. Durch Anwendung von Ketten- und Produktregel auf die Kernfunktionen von $(\mathcal{F}_l)(z)$, $l = e, d$ ist die Gleichheit (4.14) leicht nachzuweisen. \square

Nun können die Ergebnisse dieses Abschnitts in einem Satz zusammengefaßt werden. Sei hierzu u_e eine ebene Welle $u_e(x) = e^{ik_a \langle x, d \rangle}$, $x \in \mathbb{R}^2$, $d \in \Omega$, und die Randdaten

des direkten Transmissionsproblems seien durch $f = u_e$ und $g = \mu_a \frac{\partial u_e}{\partial n}$ gegeben. Sei $\mathcal{A}(z) \in L(X^2, X^2)$ der in Kapitel 3 eingeführte Integraloperator, der wie in den anderen Fällen als Abbildung von V nach $L(X^2, X^2)$ betrachtet wird und seien μ_i, μ_a, d_i und d_a so gewählt, daß das homogene Transmissionsproblem eindeutig lösbar und $\mathcal{E} - \mathcal{A}(z)$ beschränkt invertierbar ist. Sei der Operator $\mathcal{R} : V \rightarrow C_b([0, 2\pi[, \mathbb{C}^2)$ folgendermaßen definiert:

$$(\mathcal{R}(z))(t) = \begin{pmatrix} -2\mu_a u_e(z(t)) \\ 2\mu_a \frac{\partial}{\partial n(z(t))} u_e(z(t)) \end{pmatrix},$$

dann ist \mathcal{R} offensichtlich Fréchet-differenzierbar, da u_e sogar analytisch ist. Sei $c_{d,i} := 1$, $c_{d,a} := \frac{\mu_i}{\mu_a}$, $c_{e,i} := \frac{d_i}{\mu_i}$ und $c_{e,a} := \frac{d_a}{\mu_a}$, dann wird der Potentialoperator $\mathcal{P}_j : V_r \rightarrow L(X^2, C_b(G))$, $j = i, a$, definiert als Kombination von $\mathcal{P}_{e,j}$ und $\mathcal{P}_{d,j}$ (wobei $\mathcal{P}_{e,i}$ wie üblich den Einfachschichtpotentialoperator mit Wellenzahl k_i bezeichnet und die anderen Bezeichnungen analog gewählt sind):

$$(\mathcal{P}_j(z))(X) := c_{d,j} (\mathcal{P}_{d,j}(z))(X_1) + c_{e,j} (\mathcal{P}_{e,j}(z))(X_2), \quad j = i, a.$$

Dementsprechend sei der Fernfeldoperator $\mathcal{F} : V \rightarrow L(X^2, L^2(\Omega))$ folgendermaßen definiert:

$$(\mathcal{F}(z))(X) := c_{d,a} (\mathcal{F}_{d,a}(z))(X_1) + c_{e,a} (\mathcal{F}_{e,a}(z))(X_2).$$

Wegen Satz 4.18 gilt die Gleichheit

$$\mathcal{F}' = (\mathcal{P}'_a)_\infty.$$

Somit können sowohl die Lösungen (3.1) und (3.2) des Transmissionsproblems, als auch das Fernfeld der Lösung im Außenraum, in folgender Operatorform geschrieben werden:

$$\begin{aligned} u_j(\cdot, z) &= \mathcal{P}_j(z) \circ (\mathcal{E} - \mathcal{A}(z))^{-1} \circ \mathcal{R}(z), \quad j = i, a, \\ u_\infty(\cdot, z) &= \mathcal{F}(z) \circ (\mathcal{E} - \mathcal{A}(z))^{-1} \circ \mathcal{R}(z), \end{aligned}$$

und es gilt die Aussage:

Satz 4.19 *Der Operator $\mathfrak{P}_j : V_r \rightarrow C(G)$ mit $\mathfrak{P}_j(z) = \mathcal{P}_j(z) \circ (\mathcal{E} - \mathcal{A}(z))^{-1} \circ \mathcal{R}(z)$, $j = i, a$, ist Fréchet-differenzierbar mit*

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}'_j(z; h) &= \mathcal{P}'_j(z; h) \circ (\mathcal{E} - \mathcal{A}(z))^{-1} \circ \mathcal{R}(z) \\ &\quad + \mathcal{P}_j(z) \circ (\mathcal{E} - \mathcal{A}(z))^{-1} \circ \mathcal{A}'(z; h) \circ (\mathcal{E} - \mathcal{A}(z))^{-1} \circ \mathcal{R}(z) \\ &\quad + \mathcal{P}_j(z) \circ (\mathcal{E} - \mathcal{A}(z))^{-1} \circ \mathcal{R}'(z; h). \end{aligned} \tag{4.15}$$

Der Operator $\mathfrak{F} : V \rightarrow L^2(\Omega)$ mit $\mathfrak{F}(z) = \mathcal{F}(z) \circ (\mathcal{E} - \mathcal{A}(z))^{-1} \circ \mathcal{R}(z)$ ist Fréchet-differenzierbar mit $\mathfrak{F}' = (\mathfrak{P}'_a)_\infty$.

Beweis: Die Fréchet-Differenzierbarkeit der einzelnen Operatoren wurde in den vorhergehenden Sätzen gezeigt. Die Aussage folgt somit aus der Produktregel unter Zuhilfenahme von Satz 4.2. \square

4.3 Charakterisierung der Fréchet-Ableitung

In diesem Teil des Kapitels wird gezeigt, daß die Fréchet-Ableitung $\mathfrak{P}'_j(z; h)$ wiederum die Lösung eines Transmissionsrandwertproblems darstellt. Dies eröffnet eine weitere Möglichkeit zur numerischen Berechnung dieser Ableitung: entweder erfolgt die Ermittlung der Ableitung aus der Gleichung (4.15), oder durch Lösung eines direkten Transmissionsproblems mit noch zu ermittelten Randwerten.

Zur Vereinfachung der Notation werden für $x \in D$, bzw. $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ und $j = i, a$ noch folgende Bezeichnungen eingeführt:

$$\begin{aligned} w_{j,1}(x) &:= [\mathcal{P}'_j(z; h) \circ (\mathcal{E} - \mathcal{A}(z))^{-1} \circ \mathcal{R}(z)](x) \\ w_{j,2}(x) &:= [\mathcal{P}_j(z) \circ (\mathcal{E} - \mathcal{A}(z))^{-1} \circ \mathcal{A}'(z; h) \circ (\mathcal{E} - \mathcal{A}(z))^{-1} \circ \mathcal{R}(z)](x) \\ w_{j,3}(x) &:= [\mathcal{P}_j(z) \circ (\mathcal{E} - \mathcal{A}(z))^{-1} \circ \mathcal{R}'(z; h)](x) \\ w_j &:= \sum_{l=1}^3 w_{j,l} \end{aligned}$$

Es gilt also: $w_j = \mathfrak{P}'_j(z; h)$. Weiterhin sei D das von z berandete Gebiet, und (u_i, u_a) sei die Lösung des direkten Transmissionsproblems bzgl. D mit den Konstanten k_i und k_a . Die Funktion u_1 sei wie im 1. Kapitel definiert als $u_1 := u_a + u_e$. Mit diesen Vorbemerkungen kann nun folgende Aussage bewiesen werden:

Satz 4.20 *Sei $\partial D \in C^{2,\alpha}$, $x \in \partial D$, $t \in [0, 2\pi[$ mit $x = z(t)$, dann gilt:*

1. $(\Delta + k_i^2)w_i = 0$ in D ;
2. $(\Delta + k_a^2)w_a = 0$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$;
3. w_a erfüllt die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung;
4. auf ∂D gelten folgende Transmissionsrandbedingungen:

$$\begin{aligned} w_i(x) - w_a(x) &= \langle h(t), n(x) \rangle \left(\frac{\partial u_1}{\partial n}(x) - \frac{\partial u_i}{\partial n}(x) \right); \\ \mu_i \frac{\partial w_i}{\partial n}(x) - \mu_a \frac{\partial w_a}{\partial n}(x) &= \langle \mu_a \operatorname{grad} u_1(x) - \mu_i \operatorname{grad} u_i(x), \frac{\partial}{\partial z} n(z(t), h) \rangle \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^2 h_i(t) n_j(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (\mu_a u_1(x) - \mu_i u_i(x)). \end{aligned}$$

Beweis: Die ersten beiden Punkte der Behauptung folgen aus der Tatsache, daß in $\mathbb{R}^2 \setminus \partial D$ die Fréchet-Ableitung mit den gewöhnlichen Ableitungen vertauschbar ist. Der

dritte Punkt ist direkt aus der Darstellung von w_a ersichtlich. Sei $\chi := (\mathcal{E} - \mathcal{A}(z))^{-1} \circ \mathcal{R}(z)$. $w_{i,3}$ und $w_{a,3}$ sind nach Definition Lösungen eines Transmissionsproblems mit den Randwerten

$$\begin{aligned} f(z(t)) &= \langle \text{grad } u_e(z(t)), h(t) \rangle \\ g(z(t)) &= \mu_a \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 u_e(z(t))}{\partial x_i \partial x_j} h_i(t) n_j(z(t)) \\ &\quad + \mu_a \langle \text{grad } u_e(z(t)), \frac{\partial}{\partial z} n(z(t), h) \rangle . \end{aligned}$$

Daher folgt für die Grenzwerte gegen den Rand:

$$\begin{aligned} w_{i,3}(z(t)) - w_{a,3}(z(t)) &= \langle \text{grad } u_e(z(t)), h(t) \rangle \\ \mu_i \frac{\partial w_{i,3}}{\partial n}(z(t)) - \mu_a \frac{\partial w_{a,3}}{\partial n}(z(t)) &= \mu_a \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 u_e(z(t))}{\partial x_i \partial x_j} h_i(t) n_j(z(t)) \\ &\quad + \mu_a \langle \text{grad } u_e(z(t)), \frac{\partial}{\partial z} n(z(t), h) \rangle . \end{aligned}$$

Mit der gleichen Überlegung ergibt sich für $w_{i,2}$ und $w_{a,2}$:

$$\begin{aligned} w_{i,2}(z(t)) - w_{a,2}(z(t)) &= -\frac{1}{2\mu_a} [[\mathcal{A}'(z; h)](\chi)]_1(t) \\ \mu_i \frac{\partial w_{i,2}}{\partial n}(z(t)) - \mu_a \frac{\partial w_{a,2}}{\partial n}(z(t)) &= \frac{1}{2} [[\mathcal{A}'(z; h)](\chi)]_2(t), \end{aligned}$$

wobei die Indizes 1 und 2 die jeweiligen Komponenten des Vektors $[\mathcal{A}'(z; h)](\chi)$ bezeichnen. Nach Voraussetzung ist $D \in C^{2,\alpha}$, somit ist $n \in C^{1,\alpha}(\partial D)$ und daher auch $\frac{\partial u_e}{\partial n} \in C^{1,\alpha}(\partial D)$. Außerdem gilt $u_e \in C^{2,\alpha}(\partial D)$. Zudem gelten folgende Abbildungseigenschaften:

$$\begin{aligned} T_i - T_a &: C^{1,\alpha}(\partial D) \longrightarrow C^{1,\alpha}(\partial D) \quad \text{beschränkt} \\ K_j^* &: C^{0,\alpha}(\partial D) \longrightarrow C^{1,\alpha}(\partial D) \quad \text{beschränkt} \\ S_j, K_j &: C^{1,\alpha}(\partial D) \longrightarrow C^{2,\alpha}(\partial D) \quad \text{beschränkt} \end{aligned}$$

Beweise für diese Aussagen sind in [9] für den dreidimensionalen Fall zu finden. Mit den entsprechenden Modifikationen, die im Grundlagenkapitel ausführlich behandelt wurden, können die Aussagen auch für den zweidimensionalen Fall bewiesen werden. Somit kann wie in den Gleichungen (3.4) von Satz 3.4 auf folgende Regularität der Dichten geschlossen werden:

$$\chi_1 \in C^{2,\alpha}[0, 2\pi], \quad \chi_2 \in C^{1,\alpha}[0, 2\pi].$$

Daher können für $w_{i,1}$ und $w_{a,1}$ die Sätze 4.14 und 4.16 angewandt werden, und es

ergeben sich folgende Randwerte:

$$\begin{aligned}
& w_{i,1}(z(t)) - w_{a,1}(z(t)) \\
&= \frac{1}{2\mu_a} [[\mathcal{A}'(z; h)](\chi)]_1(t) - \langle \text{grad } u_i(z(t)) - \text{grad } u_a(z(t)), h(t) \rangle \\
& \mu_i \frac{\partial w_{i,1}}{\partial n}(z(t)) - \mu_a \frac{\partial w_{a,1}}{\partial n}(z(t)) \\
&= -\frac{1}{2} [[\mathcal{A}'(z; h)](\chi)]_2(t) - \langle \mu_i \text{grad } u_i(z(t)) - \mu_a \text{grad } u_a(z(t)), \frac{\partial}{\partial z} n(z(t), h) \rangle \\
& \quad - \mu_i \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 u_i(z(t))}{\partial x_i \partial x_j} h_i(t) n_j(z(t)) - \mu_a \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 u_a(z(t))}{\partial x_i \partial x_j} h_i(t) n_j(z(t)).
\end{aligned}$$

Durch Addition der Terme und unter Berücksichtigung von

$$\frac{\partial u_1}{\partial \vartheta}(z(t)) - \frac{\partial u_i}{\partial \vartheta}(z(t)) = 0$$

bei den Dirichlet-Randwerten ergibt sich nun die Behauptung. \square

Kapitel 5

Inverses Transmissionsproblem

Dieses Kapitel enthält einige Anmerkungen zum inversen Transmissionsproblem. Für den gesamten Abschnitt ist u_e , wie am Ende von Kapitel 4 eingeführt, eine einfallende ebene Welle: $u_e(x) = e^{ik_a \langle x, d \rangle}$, $x \in \mathbb{R}^2$, $d \in \Omega$. Betrachtet man den Fernfeldoperator als Abbildung des Randes eines Gebiets D in das Fernfeld, so wird er wie in Kapitel 4 mit $\mathfrak{F}(z)$ bezeichnet, wobei z für die Parametrisierung von ∂D steht. $\mathfrak{F}_d(z)$ bezeichnet diesen Operator, wobei die Einfallsrichtung der ebenen Welle explizit als Parameter angegeben ist. Betrachtet wird nun folgendes

Problem 5.1 (Inverses Transmissionsproblem) *Gegeben seien das Fernfeld u_∞ des gestreuten Feldes u_a der Lösung des Transmissionsproblems für eine oder mehrere einfallende ebene Wellen und die Konstanten k_a und k_i . Gesucht ist der Rand des zugehörigen Gebietes D .*

Das Problem besteht also darin, aus der Kenntnis des Fernfeldes das Streugebiet zu rekonstruieren, d.h. die Gleichung $\mathfrak{F}(z) = u_\infty$ zu lösen. Zunächst stellt sich die Frage nach der Eindeutigkeit des inversen Problems: Unter welchen Voraussetzungen läßt sich das Objekt D eindeutig aus den Fernfelddaten bestimmen? Eine Antwort darauf gibt folgender

Satz 5.2 *Gegeben seien zwei Streukörper D_1, D_2 , deren Ränder durch z_1 bzw. z_2 parametrisiert sind. Gilt*

$$[\mathfrak{F}_d(z_1)](\hat{x}) = [\mathfrak{F}_d(z_2)](\hat{x}) \quad \forall \hat{x}, d \in \Omega, k_a > 0,$$

dann folgt $D_1 = D_2$.

Beweis: Dieser Satz wurde zuerst von Isakov bewiesen (vgl. [8]). Für einen Beweis dieser Aussage unter etwas allgemeineren Randbedingungen sei auch auf [5] verwiesen. Aus dem Beweis in [5] ist ebenfalls ersichtlich, daß die Voraussetzung $k_a > 0$ zu $\text{Im } k_a \geq 0$ und $\text{Re } k_a \geq 0$ abgeschwächt werden kann. Diese Voraussetzung wurde nur benötigt, um zu zeigen, daß der Nullraum von $I + K - iS$ trivial ist. Dies gilt jedoch bereits unter den obigen, abgeschwächten Bedingungen (vgl. Satz 3.33 in [2]). Auch die erforderliche Eigenschaft, daß für ausstrahlende Lösungen aus $u_\infty \equiv 0$ die Identität $u_s \equiv 0$ folgt, gilt bereits unter den schwächeren Voraussetzungen (vgl. Korollar 2.12). \square

Definition 5.3 Sei $F : U \subset X \rightarrow Y$ ein Operator von einer Teilmenge U eines normierten Raums X in einen normierten Raum Y . Die Gleichung $F\varphi = f$ heißt korrekt gestellt, wenn F bijektiv ist und der inverse Operator $F^{-1} : Y \rightarrow U$ stetig ist. Ist dies nicht der Fall, so ist die Gleichung inkorrekt gestellt.

Im folgenden soll nun gezeigt werden, daß die Gleichung $\mathfrak{F}(z) = u_\infty$ inkorrekt gestellt ist. Die Beweisidee liegt im Nachweis der Vollstetigkeit des Operators $\mathfrak{F} : V \rightarrow L^2(\Omega)$. Hierbei ist V die im 4.Kapitel eingeführte Menge der zulässigen Parametrisierungen. Der Nachweis der Kompaktheit ist jedoch schwierig, da V kein Unterraum sondern eine offene Teilmenge von Y ist. Daher bietet es sich an, statt der Kompaktheit nur die lokale Kompaktheit nachzuweisen. Hierzu wird der Begriff zunächst definiert. Dann wird gezeigt, daß die Verknüpfung von zwei stetigen Operatoren lokal kompakt ist, wenn einer der beiden Operatoren lokal kompakt ist. Weiterhin wird nachgewiesen, daß der Identitätsoperator $I : V \rightarrow V$ nicht lokal kompakt ist. Dies wird dann in einem weiteren Schritt zum Nachweis der inkorrekten Gestelltheit der Gleichung $\mathfrak{F}(z) = u_\infty$ verwendet.

Definition 5.4 X und Y seien normierte Räume und $U \subset X$ eine offene Teilmenge. $F : U \rightarrow Y$ heißt lokal kompakt, wenn für alle $x \in U$ eine Umgebung $W \subset U$ von x existiert, so daß $F(W)$ relativ kompakt ist. $F : U \rightarrow Y$ heißt lokal folgenkompakt, wenn für alle $x \in U$ eine Umgebung $W \subset U$ von x existiert, so daß $F((x_n))$ eine konvergente Teilfolge enthält für alle $(x_n) \subset W$.

Satz 5.5 Ein Operator ist lokal kompakt genau dann, wenn er lokal folgenkompakt ist.

Beweis: Diese Aussage folgt aus der Äquivalenz von kompakten und folgenkompakten Mengen in normierten Räumen. \square

Satz 5.6 Seien X, Y, Z normierte Räume, $U \subset X$ und $V \subset Y$ offene Teilmengen, $F : U \rightarrow Y$ und $G : V \rightarrow Z$ stetige Abbildungen mit $F(U) \subset V$. Dann ist $G \circ F : U \rightarrow Z$ lokal kompakt, wenn einer der Operatoren lokal kompakt ist.

Beweis: Sei F lokal kompakt und $x \in U$ beliebig. Nach Voraussetzung existiert ein Umgebung $W \subset U$ von x , so daß für $(x_n) \subset W$ die Folge $(F(x_n))$ eine konvergente Teilfolge hat. Sei $(x_{n(k)})$ diese Teilfolge, d.h. es gilt $F(x_{n(k)}) \rightarrow y \in Y$ für $k \rightarrow \infty$. Wegen der Stetigkeit von G gilt dann auch $G(F(x_{n(k)})) \rightarrow G(y)$ für $k \rightarrow \infty$. Sei nun G lokal kompakt, $x \in U$ wiederum beliebig und $y := F(x)$. Nach Voraussetzung existiert eine Umgebung $Q \subset V$, so daß die Bildmenge $G(Q)$ relativ kompakt sind. Da F stetig ist, existiert eine Umgebung $W \subset U$ von x mit $F(W) \subset Q$. Somit ist die Bildmenge $G(F(W))$ relativ kompakt. \square

Satz 5.7 *Sei X ein normierter Raum, dann ist der Identitätsoperator $I : X \rightarrow X$ lokal kompakt genau dann, wenn X endlichdimensional ist.*

Beweis: Falls $\dim(X) < \infty$, so ist I kompakt (vgl. z.B. [10], Seite 19) und somit auch lokal kompakt. Ist die Dimension nicht endlich, so existiert, wie in eben genanntem Buch gezeigt wurde, eine Folge $(x_n) \subset X$ mit $\|x_n\| = 1$ und $\|x_n - x_m\| \geq \frac{1}{2}$ für $n \neq m$, d.h. für alle $r > 0$ existiert eine Folge $(x_n) \subset X$ mit $\|x_n\| = r$ und $\|x_n - x_m\| \geq \frac{r}{2}$ für $n \neq m$. Also existiert für $0 \in X$ keine lokal kompakte Umgebung. Daher kann I nicht lokal kompakt sein. \square

Dieser Satz soll im folgenden auf den Identitätsoperator $I : V \rightarrow V$ angewandt werden, wobei V die im 4.Kapitel definierte Teilmenge des normierten Raums Y ist. Hier ergibt sich die Schwierigkeit, daß V kein Unterraum ist und obiger Satz somit nicht direkt verwendbar ist, da die im Beweis benutzte Folge mit Hilfe eines Lemmas von Riesz konstruiert wurde, für dessen Verwendung V ein Unterraum sein müßte. Daher wurde im nächsten Satz eine geeignete Folge z_n explizit konstruiert, mit der die gewünschte Aussage bewiesen werden kann.

Satz 5.8 *Der Identitätsoperator $I : V \rightarrow V$ ist nicht lokal kompakt.*

Beweis: Sei $n \in \mathbb{N}$, $t \in [0, 2\pi[$, $1 \geq \epsilon > 0$ und

$$\begin{aligned} z_n(t) &:= \left(2 + \frac{\epsilon}{2^{2n}} \cos 2^n t\right) \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad \text{dann gilt} \\ z'_n(t) &= -\frac{\epsilon}{2^n} \sin 2^n t \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + \left(2 + \frac{\epsilon}{2^{2n}} \cos 2^n t\right) \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \\ z''_n(t) &= -\epsilon \cos 2^n t \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} - \frac{2\epsilon}{2^n} \sin 2^n t \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + \left(2 + \frac{\epsilon}{2^{2n}} \cos 2^n t\right) \begin{pmatrix} -\cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Sei $z_n(t_1) = z_n(t_2)$ für $t_1, t_2 \in [0, 2\pi[$. Dann gilt

$$\begin{aligned} 2 + \frac{\epsilon}{2^{2n}} \cos 2^n t_1 = \|z_n(t_1)\| &= \|z_n(t_2)\| = 2 + \frac{\epsilon}{2^{2n}} \cos 2^n t_2 \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} \cos t_1 \\ \sin t_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos t_2 \\ \sin t_2 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow t_1 &= t_2, \end{aligned}$$

d.h. z_n ist injektiv. Weiterhin ist $2 \leq \|z_n\|_Y \leq 2 + 3\epsilon$ und z_n linksorientiert, d.h. z_n stellt eine zulässige Parametrisierung dar. Für $n \neq m$ gilt:

$$\begin{aligned} \|z_n - z_m\|_Y &\geq \|z_n'' - z_m''\|_\infty \\ &\geq \epsilon \|\cos 2^n(\cdot) - \cos 2^m(\cdot)\|_\infty \\ &\quad - \epsilon \left\| \frac{2}{2^n} \sin 2^n(\cdot) - \frac{2}{2^m} \sin 2^m(\cdot) \right\|_\infty \\ &\quad - \epsilon \left\| \frac{1}{2^{2n}} \cos 2^n(\cdot) - \frac{1}{2^{2m}} \cos 2^m(\cdot) \right\|_\infty. \end{aligned}$$

OBdA gelte nun $n > m$. Sei $t = \frac{\pi}{2^m}$, dann gilt $\cos 2^m t = -1$, $\cos 2^n t = 1$, d.h. es gilt:

$$\|z_n - z_m\|_Y \geq \epsilon \left(2 - \frac{3}{2} - \frac{5}{16} \right) \geq \frac{3\epsilon}{16}.$$

Es ist $z(t) := 2(\cos t, \sin t)^t$ ein Element der Menge V . Sei $r > 0$ beliebig, dann existiert stets ein $\epsilon > 0$, so daß die oben definierte Folge (z_n) in $B(z, r)$ enthalten ist. Jedoch enthält sie keine konvergente Teilfolge, wie oben gezeigt wurde. Somit kann $I : V \rightarrow V$ nicht lokal kompakt sein. \square

Satz 5.9 *Das Problem 5.1 ist nichtlinear und inkorrekt gestellt.*

Beweis: Sei der Kern $K : \Omega \times \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \times \Omega \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ gegeben durch

$$K(\hat{x}, z, z', n, \chi) = \frac{d_a}{\mu_a} e^{-ik_a \langle \hat{x}, z \rangle} \chi_2 \|z'\| - \frac{ik_a \mu_i}{\mu_a} e^{-ik_a \langle \hat{x}, z \rangle} \chi_1 \langle \hat{x}, n \rangle.$$

Dann gilt für das Fernfeld der Lösung u_a des Transmissionsproblems:

$$[\mathfrak{F}(z)](\hat{x}) = m \int_0^{2\pi} K(\hat{x}, z(\tau), z'(\tau), n(z(\tau)), [\chi(z)](\tau)) d\tau$$

mit $m = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{8\pi k}}$ (vgl. Korollar 2.10) und $\chi(z) = (\mathcal{E} - \mathcal{A}(z))^{-1} \mathcal{R}(z)$. Hierbei wurden $(\mathcal{E} - \mathcal{A}(z))^{-1}$ und $\mathcal{R}(z)$ im letzten Kapitel definiert. Aus dieser Darstellung ist die Nichtlinearität ersichtlich. Nun soll gezeigt werden, daß die Abbildung $\mathfrak{F} : V \rightarrow L^2(\Omega)$ lokal kompakt ist. Hierbei wird die Abbildung zunächst von V nach $C(\Omega)$ betrachtet. Sei $z_0 \in V$ beliebig und $r_{z_0} > 0$ hinreichend klein. χ ist stetig (nachgewiesen wurde ja sogar die Differenzierbarkeit), daher existiert eine Konstante $C_1 > 0$ mit $\|\chi(z)\|_\infty \leq C_1$ für alle $z \in B(z_0, r_{z_0})$. Dann existiert weiterhin eine Konstante $C_2 > 0$ mit $|[\mathfrak{F}(z)](\hat{x})| < C_2$ für alle $z \in B(z_0, r_{z_0})$, d.h. $\mathfrak{F}(B(z_0, r_{z_0}))$ ist gleichgradig beschränkt. Aus der gleichmäßigen Stetigkeit von K auf $\Omega \times B[0, r_{z_0} + \|z_0\|_Y] \times B[0, r_{z_0} + \|z_0\|_Y] \times \Omega \times B[0, C_1]$ folgt die gleichgradige Stetigkeit von $\mathfrak{F}(B(z_0, r_{z_0}))$, d.h. nach dem Satz von Arzelà-Ascoli (vgl. Satz 1.18 in [10]) ist $\mathfrak{F}(B(z_0, r_{z_0}))$ relativ kompakt in $C(\Omega)$ und deshalb auch relativ kompakt in $L^2(\Omega)$. Somit ist $\mathfrak{F} : V \rightarrow L^2(\Omega)$ lokal kompakt und stetig. Die Stetigkeit ist hierbei eine Folge der Fréchet-Differenzierbarkeit. Daher kann die Gleichung $\mathfrak{F}(z) = u_\infty$ nicht korrekt gestellt sein. Denn wäre dies der Fall, würde eine stetige Inverse \mathfrak{F}^{-1} existieren mit $\mathfrak{F}^{-1} \mathfrak{F} = I$. Dies hätte nach Satz 5.6 die lokale Kompaktheit von $I : V \rightarrow V$ zur Folge und stünde daher im Widerspruch zu Satz 5.8. \square

Bemerkung 5.10 *Aus der lokalen Vollstetigkeit von \mathfrak{F} folgt die lokale Kompaktheit von $\mathfrak{F}'(z)$ (vgl. Satz 4.19 in [3], wobei der Beweis für lokal kompakte Operatoren genauso geführt werden kann). Der Nachweis der lokalen Kompaktheit für die Ableitung $\mathfrak{F}'(z)$ könnte auch einfacher geführt werden, da es sich hier um einen linearen Operator handelt, d.h. Satz 5.7 ist in diesem Fall direkt anwendbar.*

Die inkorrekte Gestelltheit hat zur Folge, daß die Lösung, falls sie überhaupt existiert, nicht stetig von dem Fernfeld abhängt (Stetigkeit bzgl. einer sinnvollen Norm). Dies erfordert bei der numerischen Lösung die Anwendung von Regularisierungsschemata.

Kapitel 6

Numerische Ergebnisse

In diesem Kapitel wird dargestellt, wie das Newton-Verfahren implementiert werden kann. Danach werden einige Testbeispiele vorgestellt. Die verwendete Notation ist genau wie in den letzten beiden Kapiteln.

6.1 Newton-Verfahren

Ausgangspunkt ist die Gleichung

$$\mathfrak{F}(z) = u_\infty,$$

die durch die linearisierte Gleichung

$$\mathfrak{F}(z) + \mathfrak{F}'(z)h = u_\infty \tag{6.1}$$

ersetzt wird. Somit ergibt sich ein Iterationsverfahren:

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}'(z_n)h_n &= u_\infty - \mathfrak{F}(z_n) \\ z_{n+1} &= z_n + h_n, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Die linearisierte Gleichung wird nun in einem Unterraum $Y_N = \{h_1, \dots, h_N\} \subset Y$ der Dimension N betrachtet und durch ein Kollokationsverfahren in den M Punkten $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_M \in \Omega$ auf folgendes lineare Gleichungssystem zurückgeführt (hierbei seien $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{R}$):

$$\sum_{j=1}^N a_j (\mathfrak{F}'(z)h_j)(\hat{x}_i) = u_\infty(\hat{x}_i) - \mathfrak{F}(z)(\hat{x}_i), \quad i = 1, \dots, M.$$

Diesem Gleichungssystem entsprechen $2M$ Gleichungen, wenn Real- und Imaginärteil getrennt betrachtet werden. Da normalerweise $2M > N$ gilt, ist das Gleichungssystem überbestimmt, so daß zur Lösung die Methode der kleinsten Quadrate verwendet werden kann. Zudem ist die Gleichung (6.1) inkorrekt gestellt, wie im letzten Kapitel nachgewiesen wurde. Daher ist es notwendig, eine regularisierte Form des Gleichungssystems zu betrachten. Sei hierzu $B \in \mathcal{M}(2M \times N, \mathbb{R})$, $g \in \mathbb{R}^{2M}$ mit

$$\begin{aligned} B(i, j) &:= \operatorname{Re}((\mathfrak{F}'(z)h_j)(\hat{x}_i)) & B(i + M, j) &:= \operatorname{Im}((\mathfrak{F}'(z)h_j)(\hat{x}_i)) \\ g(i) &:= \operatorname{Re}(u_\infty(\hat{x}_i) - \mathfrak{F}(z)(\hat{x}_i)) & g(i + M) &:= \operatorname{Im}(u_\infty(\hat{x}_i) - \mathfrak{F}(z)(\hat{x}_i)) \end{aligned}$$

für $i = 1, \dots, M$ und $j = 1, \dots, N$. Zusätzlich sei $W \in \mathcal{M}(N \times N, \mathbb{R})$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$ und $a = (a_1, \dots, a_N)$, dann wird folgendes regularisierte System betrachtet:

$$\alpha W a + B^t B a = B^t g. \quad (6.2)$$

Für die Wahl der Matrix W ergeben sich verschiedene Möglichkeiten: $W = I$, wobei I die Einheitsmatrix bezeichnet, führt auf die Tikhonovregularisierung (vgl. z.B. [10]), während $W = I(b_{11} \dots b_{NN})^t$ eine Variante des Levenberg-Marquardt-Algorithmus beschreibt, der durch Wahl eines größeren Regularisierungsparameters α in das Verfahren das steilsten Abstiegs übergeht (vgl. [16]). Bei den Testbeispielen wurde mit der Tikhonovregularisierung gearbeitet.

Die Verwendung von mehreren einfallenden Wellen führt, wie sich noch zeigen wird, zu besseren Rekonstruktionen. Hierbei ist das Gleichungssystem folgendermaßen zu modifizieren: Sei D die Anzahl der Einfallrichtungen $\{d_1, \dots, d_D\}$ und $B_d \in \mathcal{M}(2MD \times N, \mathbb{R})$, $g_d \in \mathbb{R}^{2MD}$ mit

$$\begin{aligned} B_d(i, j) &:= \operatorname{Re}((\mathfrak{F}'(z)h_j)(\hat{x}_i, d_1)) \\ g_d(i) &:= \operatorname{Re}(u_\infty(\hat{x}_i, d_1) - \mathfrak{F}(z)(\hat{x}_i, d_1)) \\ B_d(i + M, j) &:= \operatorname{Im}((\mathfrak{F}'(z)h_j)(\hat{x}_i, d_1)) \\ g_d(i + M) &:= \operatorname{Im}(u_\infty(\hat{x}_i, d_1) - \mathfrak{F}(z)(\hat{x}_i, d_1)) \\ &\vdots \\ B_d(i + 2(D - 1)M, j) &:= \operatorname{Re}((\mathfrak{F}'(z)h_j)(\hat{x}_i, d_D)) \\ g_d(i + 2(D - 1)M) &:= \operatorname{Re}(u_\infty(\hat{x}_i, d_D) - \mathfrak{F}(z)(\hat{x}_i, d_D)) \\ B_d(i + (2D - 1)M, j) &:= \operatorname{Im}((\mathfrak{F}'(z)h_j)(\hat{x}_i, d_D)) \\ g_d(i + (2D - 1)M) &:= \operatorname{Im}(u_\infty(\hat{x}_i, d_D) - \mathfrak{F}(z)(\hat{x}_i, d_D)) \end{aligned}$$

für $i = 1, \dots, M$ und $j = 1, \dots, N$. Somit ergibt sich analog folgendes System:

$$\alpha W a + B_d^t B_d a = B_d^t g_d.$$

Um dieses Gleichungssystem zu lösen, ist es also nötig, zunächst die Matrix B und den Vektor g zu bestimmen. Für die Berechnung von g ist die Kenntnis von $\mathfrak{F}(z)(\hat{x}_i)$

erforderlich. Dies entspricht gerade der Lösung eines direkten Transmissionsproblems. Aus der Darstellung $\mathfrak{F}(z) = \mathcal{F}(z) \circ (\mathcal{E} - \mathcal{A}(z))^{-1} \circ \mathcal{R}(z)$ ist ersichtlich, daß zunächst $\chi := (\mathcal{E} - \mathcal{A}(z))^{-1} \circ \mathcal{R}(z)$ zu berechnen ist. Im hier betrachteten zweidimensionalen Fall erweist sich das Nyström-Verfahren als das Günstigste (vgl. [10]). Hierbei handelt es sich um eine Quadraturmethode unter Verwendung von trigonometrischen Polynomen. Die logarithmischen Terme der Kerne werden dabei abgespalten und die Integrale gesondert berechnet. Bei analytischer Parametrisierung kann nachgewiesen werden, daß das Verfahren exponentiell konvergiert (vgl. [10] bzw. [18] für eine Darstellung der Methode im Fall des Transmissionsproblems). Die Berechnung von $\mathcal{F}(z)\chi$ erfolgt dann unter Verwendung der Trapezregel.

Zur Berechnung von B ist die Kenntnis von $(\mathfrak{F}'(z)h_j)(\hat{x}_i)$ erforderlich. Hierfür wird die Darstellung

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}'(z; h) &= \mathcal{F}'(z; h) \circ (\mathcal{E} - \mathcal{A}(z))^{-1} \circ \mathcal{R}(z) \\ &\quad + \mathcal{F}(z) \circ (\mathcal{E} - \mathcal{A}(z))^{-1} \circ \mathcal{A}'(z; h) \circ (\mathcal{E} - \mathcal{A}(z))^{-1} \circ \mathcal{R}(z) \\ &\quad + \mathcal{F}(z) \circ (\mathcal{E} - \mathcal{A}(z))^{-1} \circ \mathcal{R}'(z; h) \end{aligned}$$

verwendet. Die Ermittlung von $\mathcal{A}'(z; h)\chi$ erfolgt durch Abspalten der logarithmischen Singularitäten und Verwendung der obigen Quadraturformeln. $\mathcal{F}'(z; h)\chi$ wird durch die Trapezregel bestimmt. Entscheidend für die numerische Effektivität des Verfahrens ist hierbei, daß die bei der Berechnung von $\mathfrak{F}(z)$ bestimmte LU-Zerlegung von $(\mathcal{E} - \mathcal{A}(z))^{-1}$ auch für die Bestimmung von $\mathfrak{F}'(z; h)$ verwendet werden kann. Somit steigt der Aufwand für die Bestimmung der Ableitung nur quadratisch bei wachsender Stützstellenzahl.

Weiterhin ist es zum Testen der Methode zunächst nötig, synthetische Daten u_∞ zu erzeugen. Um hierbei triviale Invertierungen von endlichdimensionalen Problemen zu vermeiden, ist es wichtig, daß die gesuchte Parametrisierung z nicht in Y_N liegt und sich die Lösungsmethode beim direkten Verfahren von der des inversen Verfahrens unterscheidet. In dieser Arbeit wurde das durch Verwendung von unterschiedlichen Werten d_i, d_a in den Potentialansätzen (3.1) und (3.2) und unterschiedlichen Stützstellenzahlen bei der Approximation der Integraloperatoren erreicht. So wurden bei dem direkten Problem 128 Stützpunkte, beim inversen dagegen 64 Punkte verwendet.

Bei allen Testbeispielen wird vorausgesetzt, daß die gesuchten Randkurven sternförmig sind. Beim Dirichletproblem konnte für diesen Fall bereits nachgewiesen werden, daß die Fréchet-Ableitung injektiv ist und als Operator von $L^2[0, 2\pi]$ nach $L^2(\Omega)$ dichten Wertebereich hat (vgl. [11]). Dies konnte bisher allerdings weder beim Neumann- noch beim Transmissionsproblem nachgewiesen werden. Wegen der Sternförmigkeit der gesuchten Gebiete ist für die Abbildungen des Approximationsraums Y_n stets die Darstellung

$$h(t) = q(t) \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad 0 < t < 2\pi$$

mit einer 2π -periodisch fortsetzbaren, zweimal stetig differenzierbaren, nicht negativen Funktion q möglich. Als Approximationsraum für q wird zunächst der Raum der trigonometrischen Polynome

$$Y_N^{trig} := \left\{ a_1 + \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} a_{2n+1} \cos nt + \sum_{n=1}^{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} a_{2n} \sin nt : a_1, \dots, a_N \in \mathbb{R} \right\}$$

verwendet. Hierbei sei $\lfloor x \rfloor$ für $x \in \mathbb{R}$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich x ist. Als Testparametrisierungen werden folgende Abbildungen verwendet:

$$\begin{aligned} \text{Bohne:} \quad z(t) &= \frac{1 + 0.9 \cos t + 0.1 \sin 2t}{1 + 0.75 \cos t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, & t \in [0, 2\pi[\\ \text{Erdnuß:} \quad z(t) &= \sqrt{\cos^2 t + 0.25 \sin^2 t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, & t \in [0, 2\pi[\\ \text{Drache:} \quad z(t) &= \begin{pmatrix} \cos t + 0.65(\cos 2t - 1) \\ 1.5 \sin t \end{pmatrix}, & t \in [0, 2\pi[. \end{aligned}$$

Als Abbruchkriterium wird das Residuum

$$R_{es} := \frac{\|u_\infty - \mathfrak{F}(z)\|_{L^2(\Omega)}}{\|u_\infty\|_{L^2(\Omega)}}$$

verwendet. Dieses wird mit der Trapezregel numerisch bestimmt. Das Verfahren wird gestoppt, wenn R_{es} kleiner als ein vorgegebenes δ ist. Hierbei ist $\delta = 10^{-6}$, wobei dieser Wert nach 30 Iterationen auf $\delta = 10^{-4}$ und nach 40 Iterationen auf $\delta = 10^{-2}$ erhöht wird. Nach maximal 60 Iterationen wird das Verfahren abgebrochen. Dies geschieht ebenfalls, falls sich das Residuum in drei aufeinanderfolgenden Schritten um jeweils mindestens zehn Prozent vergrößert, da dann davon auszugehen ist, daß das Verfahren nicht konvergiert. Bei gestörten Daten ergibt sich δ aus dem Datenfehler, d.h. es wird das Diskrepanzprinzip verwendet.

Ausgangspunkt der Approximation ist der Raum Y_1 , der um eine Dimension vergrößert wird, falls das Residuum zwischen neuer und alter Approximation weniger als 10^{-3} beträgt. Der Wert des Regularisierungsparameters beträgt zu Beginn des Verfahrens 10^{-3} . Verringert sich das Residuum, so wird der Parameter durch zehn geteilt, wobei 10^{-7} der minimal mögliche Wert ist. Bei einer Vergrößerung des Residuums wird dem Parameter der Wert 10^{-2} zugewiesen.

6.2 Eine einfallende Welle

Zunächst wird das Verfahren bei einer einfallenden Welle getestet. Die gesuchte Kurve wird in den Bildern als durchgezogene Linie dargestellt, die Approximation durch

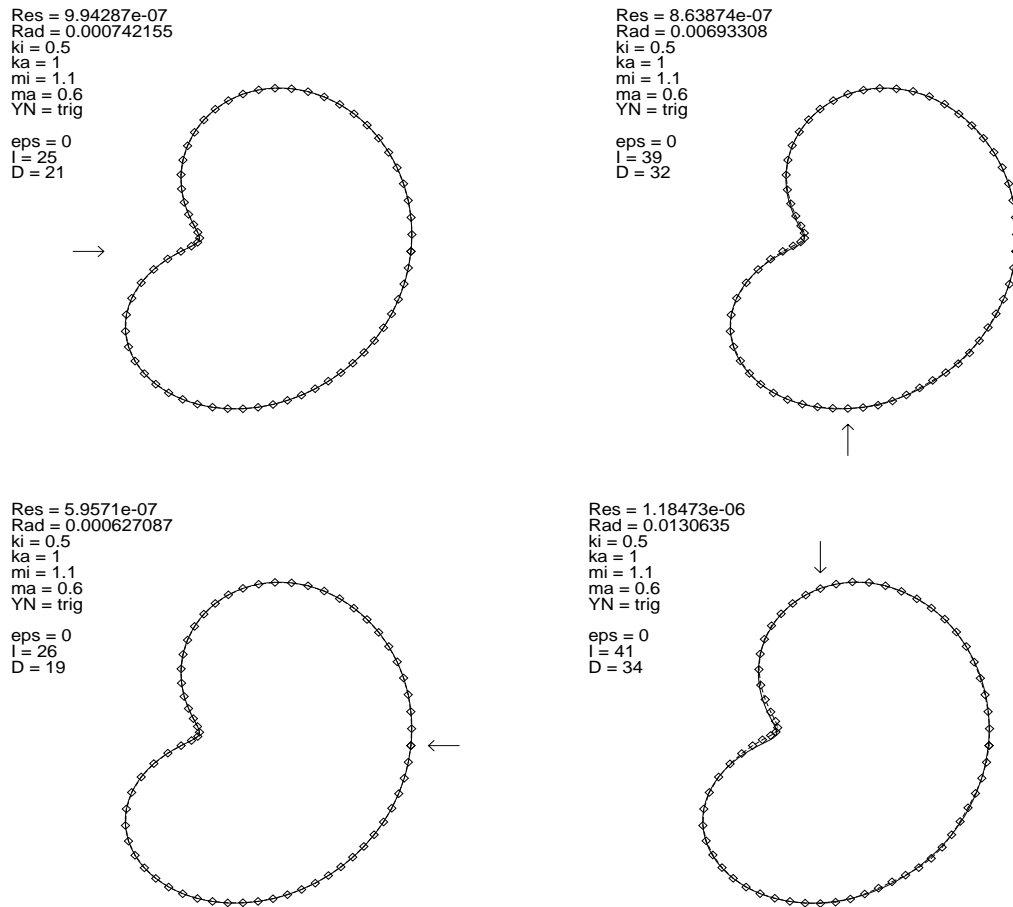


Abbildung 6.1: Rekonstruktion der Bohne bei einer Einfallswelle

eine gestrichelte Linie mit Rauten. 'Res' bezeichnet das oben definierte Residuum, während 'Rad' das L^2 -Residuum der Radialfunktionen der gesuchten Kurve und der Näherungslösung, die mit r_{exakt} bzw. r_{app} bezeichnet werden, ist:

$$Rad := \frac{\|r_{exakt} - r_{app}\|_{L^2[0,2\pi]}}{\|r_{exakt}\|_{L^2[0,2\pi]}}.$$

Zur numerischen Bestimmung wird auch hier die Trapezregel verwendet. Weiterhin kennzeichnen 'ki' und 'ka' die Wellenzahlen im Innen- und Außenraum und 'mi' und 'ma' stehen für die bei den Neumannrandwerten auftretenden Konstanten μ_i und μ_a . 'YN' klassifiziert den Approximationsraum, während 'eps' den Datenfehler beschreibt. Schließlich bezeichnen 'I' und 'D' die Anzahl der benötigten Iterationen und die Dimension des Approximationsraums. Der Pfeil in den Bildern zeigt die Einfallrichtung d der ebenen Welle u_e an. Abbildung 6.1 zeigt die Rekonstruktion der Bohne mit einer einfallenden Welle. Wegen der Symmetrie der Erdnuß bzgl. x - und y -Achse werden

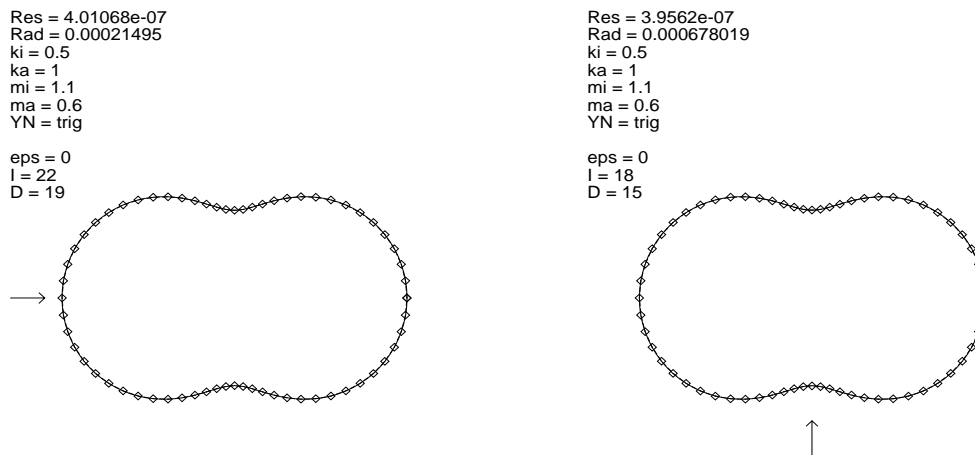


Abbildung 6.2: Rekonstruktion der Erdnuß bei einer Einfallswelle

in Abbildung 6.2 nur zwei der vier Grundrichtungen dargestellt. Die Werte der anderen beiden Richtungen sind bis auf Rundungsfehler ganz analog. Erheblich schwieriger gestaltet sich die Rekonstruktion des Drachens. Die Rekonstruktionen bei einer einfallenden Welle aus zwei verschiedenen Richtungen sind in Abbildung 6.3 dargestellt. Da der Drache nicht in der Form $r(t)(\cos t, \sin t)^t$ gegeben ist, wurde die zugehörige

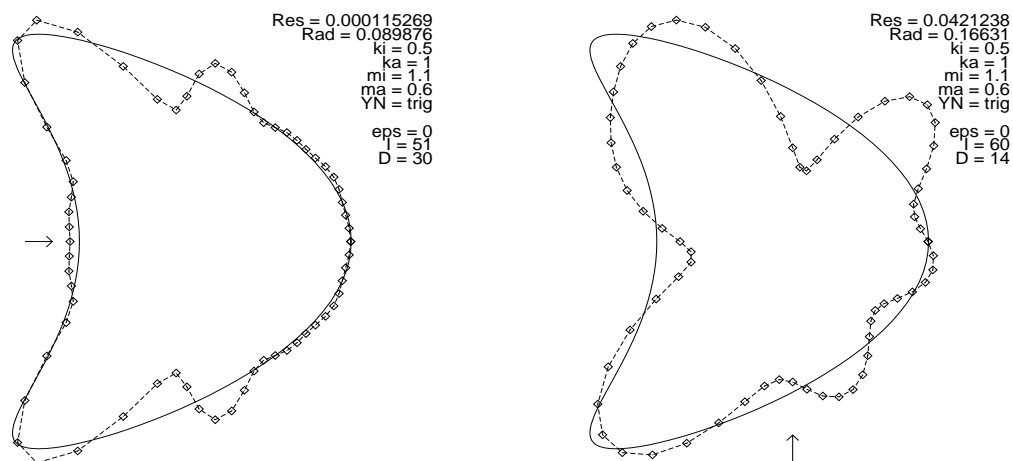


Abbildung 6.3: Rekonstruktion des Drachens bei einer Einfallswelle

Radialfunktion numerisch bestimmt. Die Schwierigkeiten bei der Rekonstruktion des Drachens sind dabei auf die sich stark ändernden Werte dieser Radialfunktion zurückzuführen. Beim Drachen erweist sich daher bei einer einfallenden Welle eine stabile Rekonstruktion als schwierig. Bei einem ersten Testlauf konvergierten von 80 Tests mit unterschiedlichen Parametern nur knapp die Hälfte. Die Stabilität des Verfahrens könnte natürlich durch einen größeren Regularisierungsparameter erhöht werden. Dies ginge

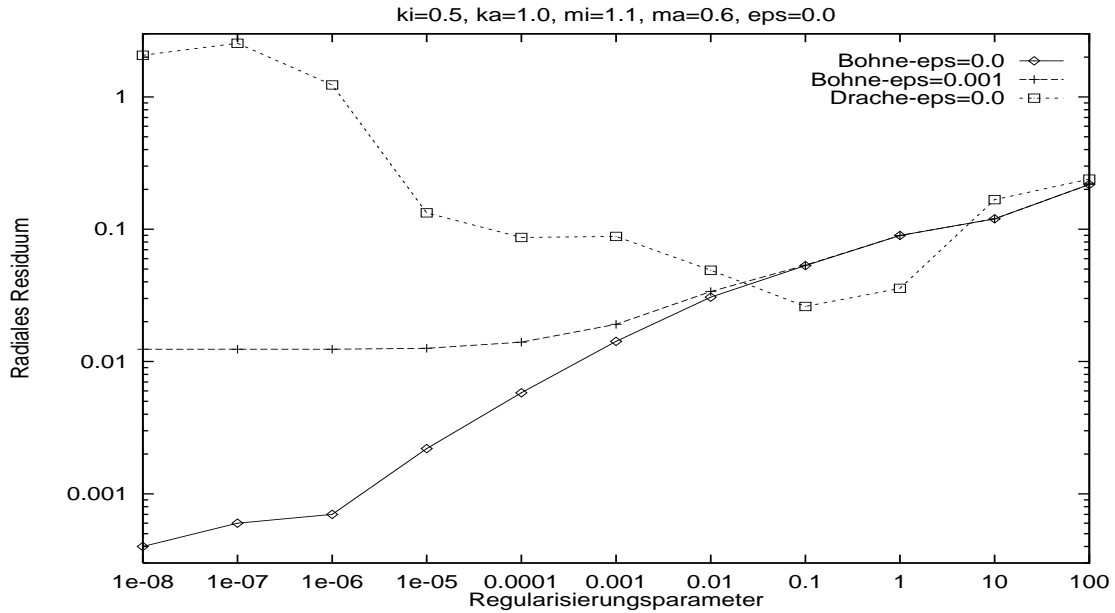
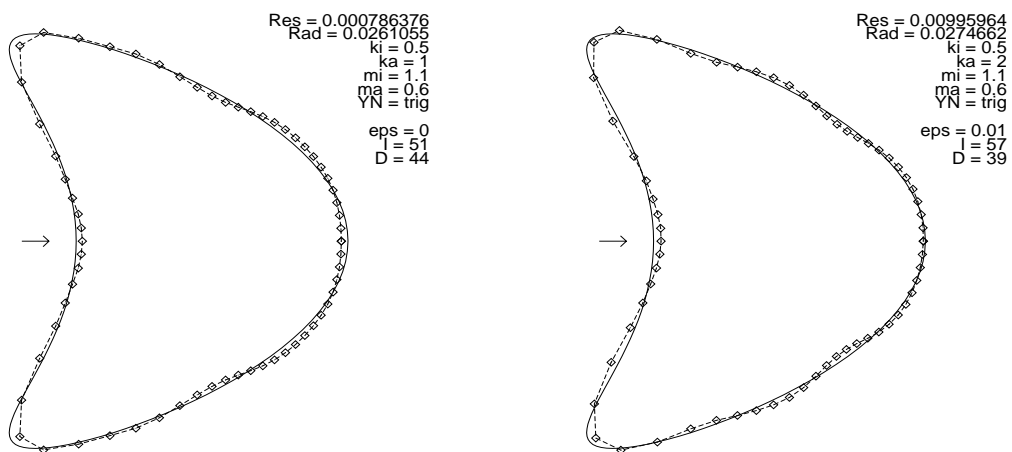


Abbildung 6.4: Der Einfluß des Regularisierungsparameters

Abbildung 6.5: Rekonstruktion des Drachens bei einer Einfallswelle und festem Regularisierungsparameter $\alpha = 0.1$ bzw. $\alpha = 10.0$ rechts

dann allerdings zu Lasten der Genauigkeiten bei einfacher zu rekonstruierenden Gebieten. Die Abhängigkeit vom Regularisierungsparameter wird in Bild 6.4 verdeutlicht. Im Unterschied zum sonstigen Vorgehen wurde hier der Regularisierungsparameter für das gesamte Verfahren konstant gewählt. Hierbei wird die Bohne einmal mit exakten Daten rekonstruiert und einmal mit um ein Promille gestörten Daten. Beim Drachen entsprechen die Ergebnisse den Erwartungen. Bei sehr großem Regularisierungsparameter ist aufgrund des Strafterms $\alpha W a$ (vgl. 6.2) keine Rekonstruktion möglich. Bei zu kleinem α verhindert die Schlechtgestelltheit des Problems eine gute Approximation. Bei der Bohne tritt dieses Verhalten bei $\alpha \rightarrow 0$ weder bei exakten noch bei gestörten Daten auf. Erstaunlich ist, daß für die Werte $\alpha = 0.1$ und $\alpha = 1.0$ die Rekonstruktion des Drachens besser gelingt als die der Bohne. Die linke Figur von Bild 6.5 zeigt hierbei die Rekonstruktion des Drachens für $\alpha = 0.1$, während bei der rechten Figur $\alpha = 10$ gewählt wurde und die Daten um ein Prozent gestört wurden. Die Güte der Rekon-

Gebiet	k_i	k_a	μ_i	μ_a	Rad	Gebiet	k_i	k_a	μ_i	μ_a	Rad
Bohne	0.5	2.5	0.5	1.0	0.0006	Erdnuß	0.3	3.0	0.8	1.3	0.0002
	2.5	0.5			1.0522		3.0	0.3			0.3369
Bohne	0.5	2.5	1.0	0.5	0.0003	Erdnuß	0.3	3.0	1.3	0.8	4.1e-5
	2.5	0.5			0.2713		3.0	0.3			0.4572
Drache	0.5	2.5	0.5	1.0	0.6039	Bohne	0.3	3.0	0.8	1.3	0.0003
	2.5	0.5			2.7125		3.0	0.3			0.3918
Drache	0.5	2.5	1.0	0.5	0.1903	Bohne	0.3	3.0	1.3	0.8	0.0002
	2.5	0.5			1.4060		3.0	0.3			2.6471

Tabelle 6.1: Vertauschte Wellenzahlen

struktion wird auch durch die Wellenzahlen k_i und k_a beeinflusst. Dies wird in Tabelle 6.1 verdeutlicht, in der sich jeweils zwei untereinanderliegende Zeilen nur durch vertauschte Wellenzahlen unterscheiden. Es zeigt sich, daß Gebiete mit größerer äußerer Wellenzahl besser rekonstruierbar sind. Bei den Rekonstruktionen in Tabelle 6.1 wurde hierbei stets mit den exakten Daten gearbeitet. Die Rekonstruktion gelingt desweiteren

Gebiet	k_i	k_a	μ_i	μ_a	Rad	eps
Bohne	0.5+1.0i	1.0+0.7i	1.1+0.9i	0.6+1.3i	0.0006	0.0
	1.0+0.6i	1.5+0.9i			0.0008	
Erdnuß	0.5+1.0i	1.0+0.7i	1.1+0.9i	0.6+1.3i	0.0007	
	1.0+0.6i	1.5+0.9i			0.0002	

Tabelle 6.2: Komplexe Konstanten

auch bei komplexwertigen Zahlen k_i , k_a , μ_i und μ_a sehr gut. In Tabelle 6.2 sind für diesen Fall vier Beispiele angegeben. Die durchschnittliche Iterationszahl beträgt bei der gewählten Vorgehensweise ungefähr 40 Iterationen. Dadurch ist der Rechenaufwand nicht unerheblich. Um diesen zu verringern, könnte z.B. die Anzahl der Stützstellen

Algorithmus	k_i	k_a	μ_i	μ_a	d	It	Rad
Alg_{alt}	0.5	1.0	1.1	0.6	$(1, 0)^t$	25	0.0007
Alg_{neu}						10	0.0005
Alg_{alt}	0.5	1.0	1.1	0.6	$(0, 1)^t$	39	0.0069
Alg_{neu}						15	0.0225
Alg_{alt}	0.5	1.0	1.1	0.6	$(-1, 0)^t$	26	0.0006
Alg_{neu}						10	0.0005
Alg_{alt}	0.5	1.0	1.1	0.6	$(0, -1)^t$	41	0.0131
Alg_{neu}						13	0.0220
Alg_{alt}	2.5	1.0	2.0	0.5	$(1, 0)^t$	51	0.0294
Alg_{neu}						6	1.6244

Tabelle 6.3: Vergleich von zwei Vorgehensweisen

halbiert werden. Die numerischen Versuche haben hier gezeigt, daß dann immer noch gute Rekonstruktionen möglich sind. Eine andere Möglichkeit besteht darin, die Dimension des Approximationsraumes in jedem Schritt zu erhöhen und ein leichter zu erfüllendes Abbruchkriterium zu wählen. Die sich dadurch ergebenden Veränderungen sind an Hand einiger Beispiele in Tabelle 6.3 festgehalten. ' Alg_{alt} ' bezeichnet hierbei den Algorithmus mit der am Anfang beschriebenen Vorgehensweise. Bei dem Algorithmus ' Alg_{neu} ' wurde die Dimension des Approximationsraumes in jedem Schritt um zwei erhöht und das Verfahren bereits bei $Res < 10^{-5}$ abgebrochen. Als Testgebiet wurde hier die Bohne gewählt, wobei mit exakten Daten gerechnet wurde. ' d ' bezeichnet die Einfallsrichtung der ebenen Welle und ' It ' die Anzahl der Iterationen. Aus der Tabelle ist zu erkennen, daß bei den einfacheren ersten vier Fällen die veränderte Vorgehensweise zu einer ungefähr genauso guten Rekonstruktion führt wie beim anfangs erklärte Verfahren. Beim schwierigeren fünften Fall versagt das zweite Verfahren allerdings, während mit der erstgenannten Vorgehensweise eine gute Rekonstruktion möglich ist.

Als nächstes wird der Einfluß eines Datenfehlers auf die Rekonstruktion analysiert. Hierbei entstand der Datenfehler durch Addition von Zufallszahlen auf die exakten Daten, d.h. das gestörte Fernfeld v_∞ entstand aus dem Fernfeld u_∞ durch $v_\infty(x_i) = u_\infty(x_i) + \gamma r_i$ mit $x_i \in \Omega$, $r_i \in \mathbb{R}$, $i=1, \dots, M$. $\gamma \in \mathbb{R}$ wurde so gewählt, daß das Residuum $\frac{\|u_\infty - v_\infty\|_{L^2}}{\|u_\infty\|_{L^2}}$ die gewünschte Größe hat. Wie bereits erwähnt, wird als Abbruchkriterium nun das Diskrepanzprinzip verwendet. Die Abbildung 6.6 zeigt die Rekonstruktion der Bohne bei ein bzw. zehn Prozent Datenfehler. Die Einfallsrichtung ist dabei ebenso wie in den folgenden Bildern der Vektor $d = (1, 0)^t$. Abbildung 6.7 zeigt die Rekonstruktion der Erdnuß bei einem bzw. 20 Prozent Datenfehler. Die Rekonstruktionen des Drachens mit den gleichen Datenfehlern wie bei der Erdnuß ist in Abbildung 6.8 zu sehen. Beim Drachen ist die Rekonstruktion nicht sehr befriedigend, was allerdings angesichts der mäßigen Rekonstruktion bei exakten Daten nicht verwundern sollte. Bei Erdnuß und Bohne übt ein einprozentiger Datenfehler kaum Einfluß auf das Ergebnis aus. Auch hier zeigt sich, daß die Rekonstruktion von den Wellenzahlen im Innen- und Außenraum

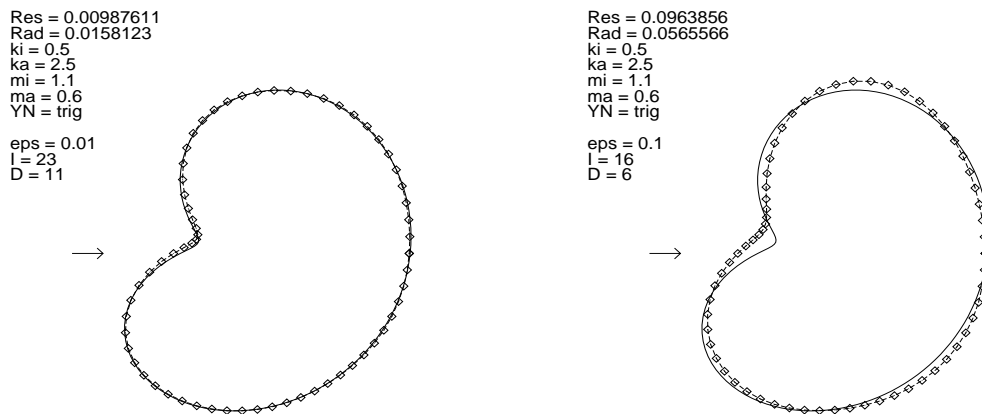


Abbildung 6.6: Rekonstruktion der Bohne bei Datenfehler

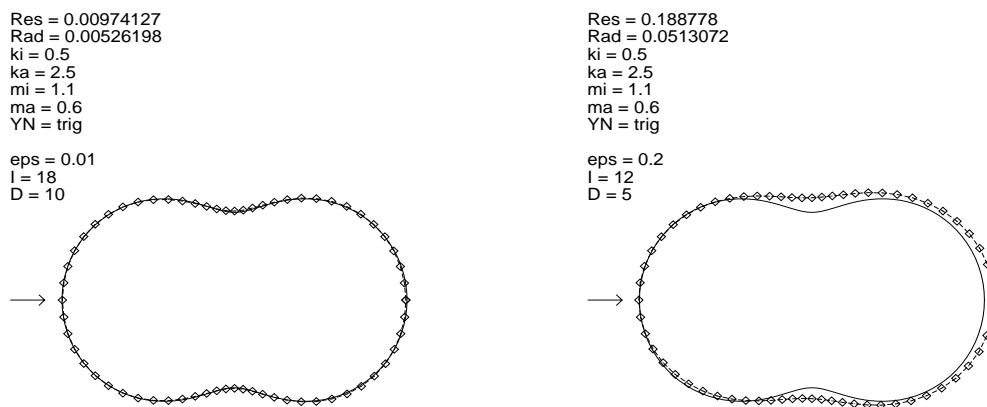


Abbildung 6.7: Rekonstruktion der Erdnuß bei Datenfehler

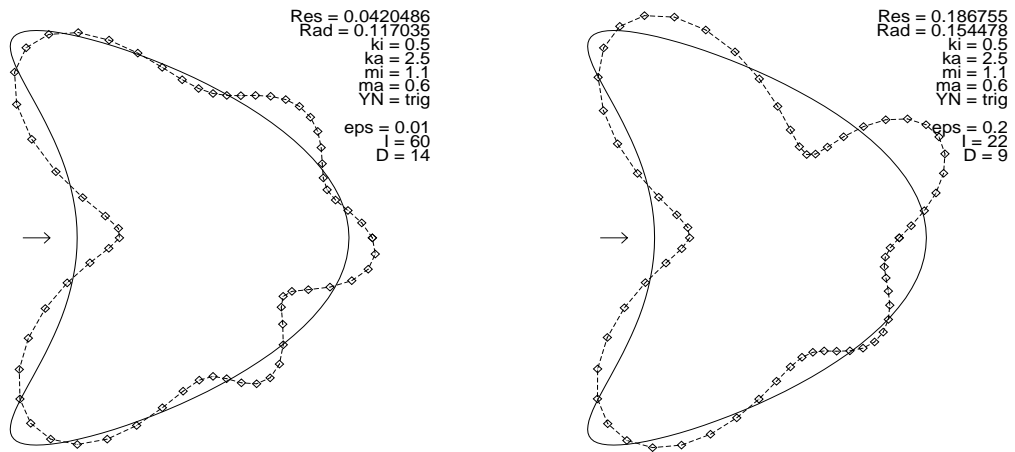


Abbildung 6.8: Rekonstruktion des Drachens bei Datenfehler

Kurve	k_i	k_a	μ_i	μ_a	eps	Rad
Bohne	0.5	1.0	1.1	0.6	0.01	0.0476
		2.5				0.0158
		3.5				0.0091
Erdnuß	0.5	1.0	1.1	0.6	0.01	0.0244
		2.5				0.0053
		3.5				0.0112
Bohne	0.5	1.0	1.1	0.6	0.2	0.1810
		2.5				0.1396
		3.5				0.1005
Erdnuß	0.5	1.0	1.1	0.6	0.2	0.2315
		2.5				0.0513
		3.5				0.0324

Tabelle 6.4: Einfluß von unterschiedlichen Wellenzahlen bei der Rekonstruktion mit Datenfehler

beeinflusst wird. In Tabelle 6.4 wird dies durch einige Beispiele verdeutlicht. Es wird wieder nur der Fall $d = (1, 0)^t$ berücksichtigt.

6.3 Eingeschränkter Meßbereich

In diesem Teil des Kapitels wird untersucht, wie sich das Verfahren verhält, wenn die Fernfelddaten nur auf einer echten Teilmenge $\Omega' \subset \Omega$ des Einheitskreises bekannt sind. Das Newton-Verfahren läßt sich auf diesen Fall einfach übertragen, indem die Punkte $\{x_i\}_{i=1}^M$ nun aus der Teilmenge Ω' gewählt werden. Für die Rechnungen wurde ein $b \in \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2\}$ und $\beta \in \{\pi, 2\pi/3, \pi/2, \pi/3, \pi/4, \pi/6, \pi/8\}$ gewählt mit

$$\{x_i\}_{i=1}^M \subset \left\{ \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [b - \beta, b + \beta] \right\}.$$

Für den Einheitsvektor d der ebenen Welle wurde stets

$$d \in \left\{ \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [b + \pi - \beta, b + \pi + \beta] \right\}$$

gewählt, d.h. es wurde immer im angestrahlten Bereich gemessen. Dieses Vorgehen ist dadurch motiviert, daß in der Praxis Sender und Empfänger meistens über den gleichen Bereich verteilt sind. In der Graphik wird der Meßbereich durch Kreislini-

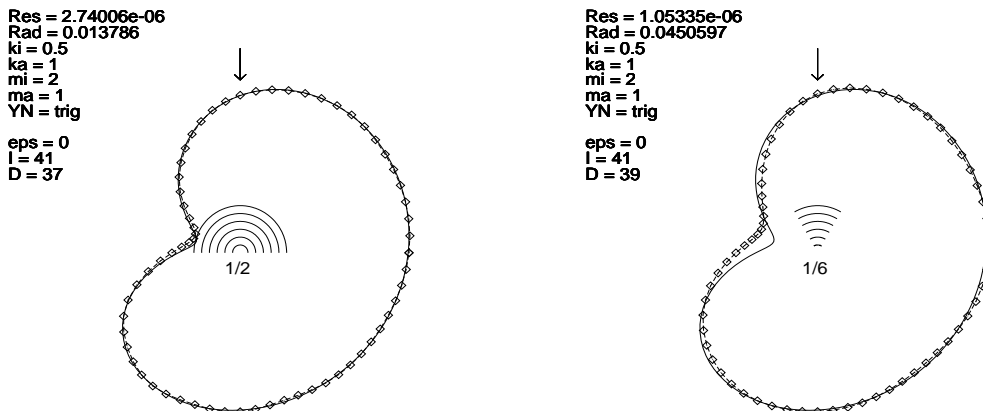


Abbildung 6.9: Rekonstruktion der Bohne bei eingeschränktem Meßbereich

ensegmente markiert. Zusätzlich bezeichnet der in der Figur dargestellte Bruch die Größe des Segments bzgl. 2π . In der Abbildung 6.9 sind zwei Rekonstruktionen der Bohne für den Winkelbereich π und $\pi/3$ zusammengestellt. Die Abbildung 6.10 zeigt zwei Rekonstruktionen der Erdnuß für die Winkelbereiche $\pi/4$ und $\pi/8$. Es zeigt sich,

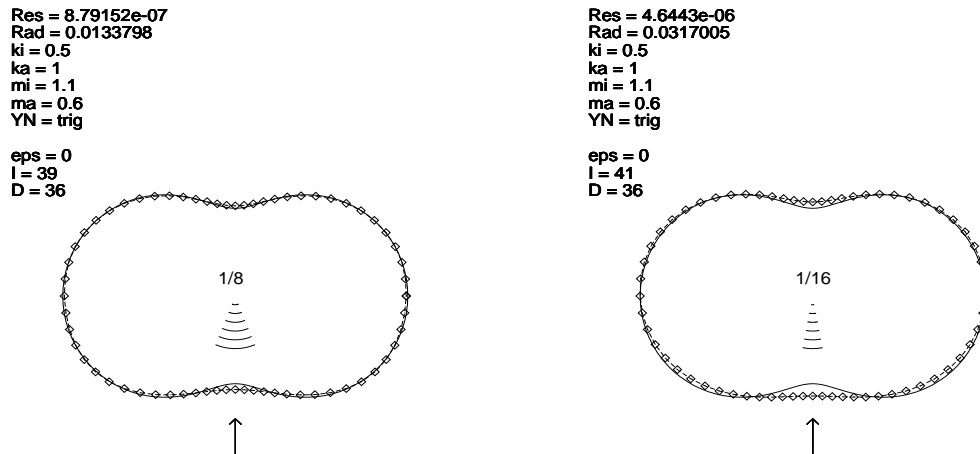


Abbildung 6.10: Rekonstruktion der Erdnuß bei eingeschränktem Meßbereich

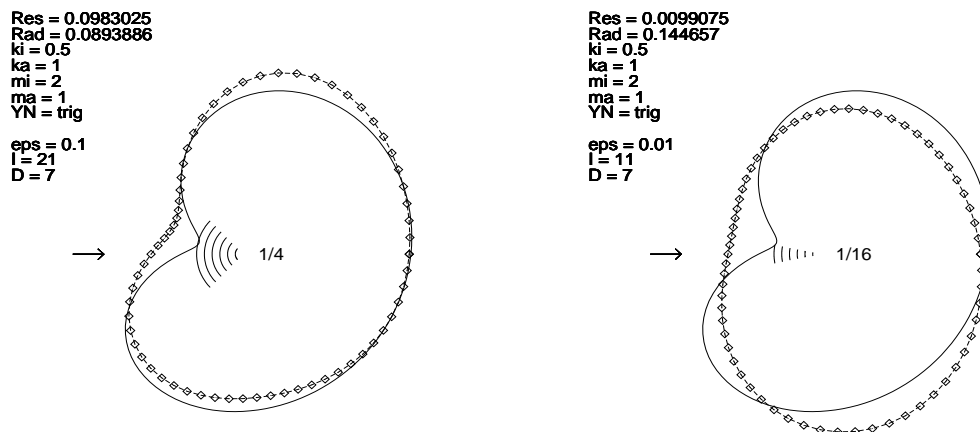


Abbildung 6.11: Rekonstruktion der Bohne bei eingeschränktem Meßbereich und Datenfehler

daß die Rekonstruktion auch bei kleinem Winkelbereich gut gelingt, wobei allerdings feinere Strukturen (z.B. die Einbuchtungen der Erdnuß) bei kleinem Meßwinkel nicht mehr erkannt werden. Die Abbildung 6.11 zeigt die Rekonstruktion der Bohne bei eingeschränktem Winkelbereich und Datenfehler. Auch mit eingeschränktem Winkelbereich ist das Diskrepanzprinzip anwendbar. Allerdings divergierte das Verfahren bei $\epsilon = 0.1$ für den Winkelbereich $\pi/8$, dies geschah jedoch auch für $d = (-1, 0)^t$ bei exakten Daten. Mit sich veringermendem Winkelbereich wird das Verfahren also zunehmend instabiler.

6.4 Anderer Approximationsraum

Ein Nachteil, der bei der Verwendung der trigonometrischen Monome als Basisfunktionen für den Raum Y_N entsteht, ist ihr globales Verhalten. Wünschenswert wären insbesondere bei der Approximation des Drachens lokale Funktionen, d.h. Funktionen mit kompaktem Träger. Durch solche Funktionen sollte es möglich sein, starke Kurvenveränderungen wie die beiden Ausbuchtungen beim Drachen besser zu rekonstruieren. Hierzu ist es nötig eine geeignete Radialfunktion zu konstruieren. Als Grundlage für diese Funktion wurde folgende Abbildung verwendet:

$$r(t) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-t^2}} & \text{für } |t| < 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da die gesuchte Funktion 2π -periodisch sein soll, wird t^2 durch $\sin^2 t$ ersetzt und $1 - \sin^2 t$ wird dann durch $\cos^2 t$ ersetzt. Sei also $t \in [0, 2\pi[$ beliebig, dann bezeichne T die Menge $T := \{\tau \in \mathbb{R} : \exists k \in \mathbb{Z} : \tau = t + k\}$. Sei weiterhin $j, n, s \in \mathbb{N}$ mit $j = 1, \dots, n$, dann wird auf $[0, 2\pi[$ die Funktion r_j folgendermaßen definiert:

$$r_j(t) := \sum_{\substack{\tau \in T \\ |\frac{n}{s}(\tau - \frac{2\pi j}{n})| < \frac{\pi}{2}}} \exp\left(\frac{-1}{\cos^2(\frac{n}{s}(\tau - \frac{2\pi j}{n}))}\right)$$

Die Summe ist hierbei immer endlich, insbesondere kann sie auch leer sein. Durch diese Definition wird erreicht, daß die Funktionen r_j lokalen Träger haben, 2π -periodisch sind und unendlich oft differenzierbar sind. Da die Definition etwas kompliziert ist, wurden die Funktionen in den Abbildungen 6.12 und 6.13 für den Fall $n = 4$ und $s = 7$ graphisch dargestellt. Abbildung 6.12 zeigt die Funktion r_4 , während in Abbildung 6.13 die Funktionen r_1, r_2, r_3 und r_4 dargestellt sind. Sei nun $N = n + 1$, dann werden folgende Abbildungen $h_l : [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2$ für $l = 1, \dots, N$ definiert:

$$h_1(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, h_2(t) := r_1(t) \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \dots, h_N(t) := r_n(t) \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

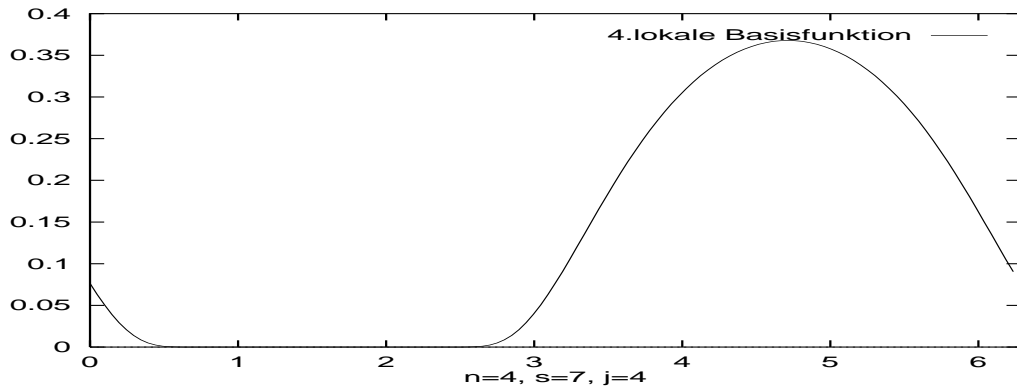


Abbildung 6.12: Lokale Basisfunktion

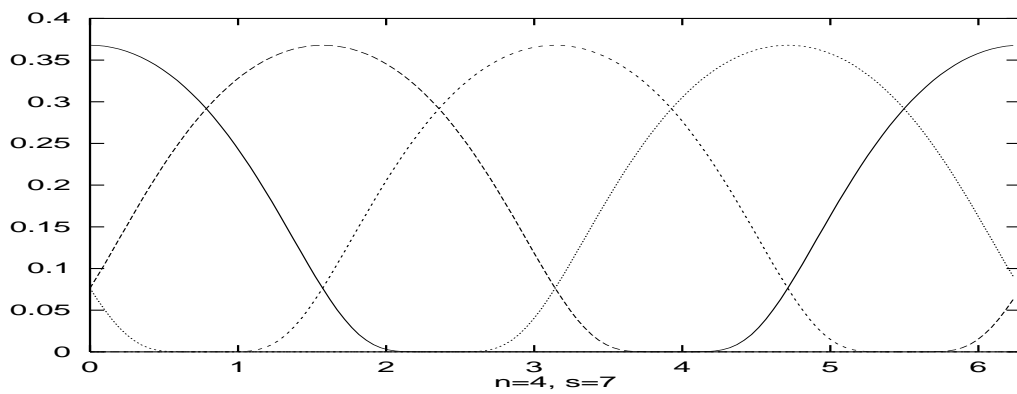


Abbildung 6.13: Lokale Basisfunktionen

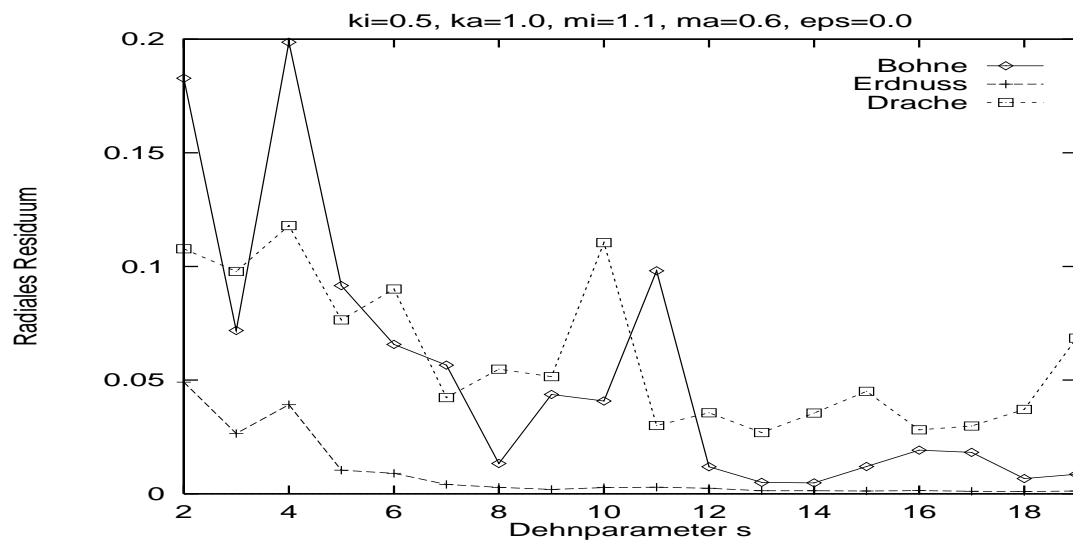


Abbildung 6.14: Verschiedene Dehnparameter

Der Raum der durch diese Funktionen aufgespannt wird, wird mit Y_N^{exp} bezeichnet. Der Parameter s gibt an, wie weit die jeweiligen lokalen Basisfunktionen gedehnt werden. Ein höherer Parameter s erhöht im Allgemeinen die Stabilität des Verfahrens. Der Einfluß des im weiteren als Dehnparameter bezeichneten Werts, wird in der Abbildung 6.14 an einigen Beispielen skizziert. Während bei Bohne und Erdnuß der

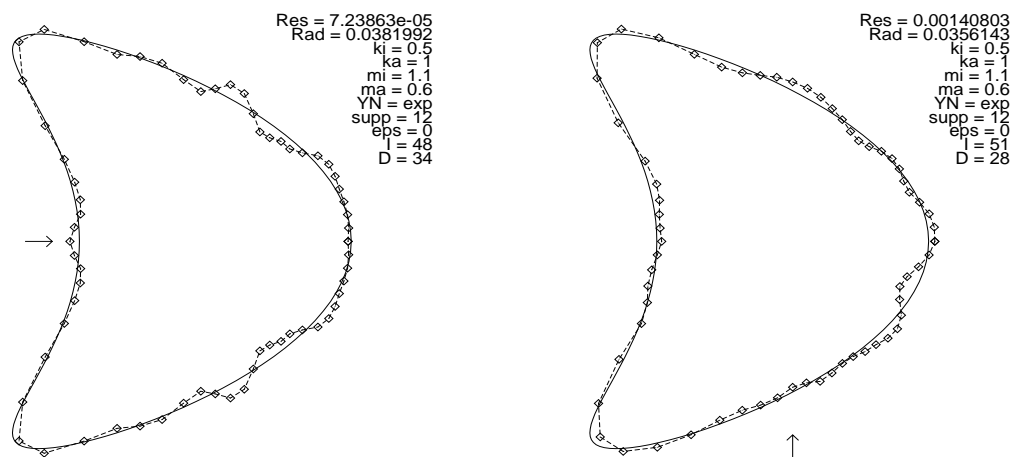


Abbildung 6.15: Rekonstruktion des Drachens mit anderen Approximationsfunktionen

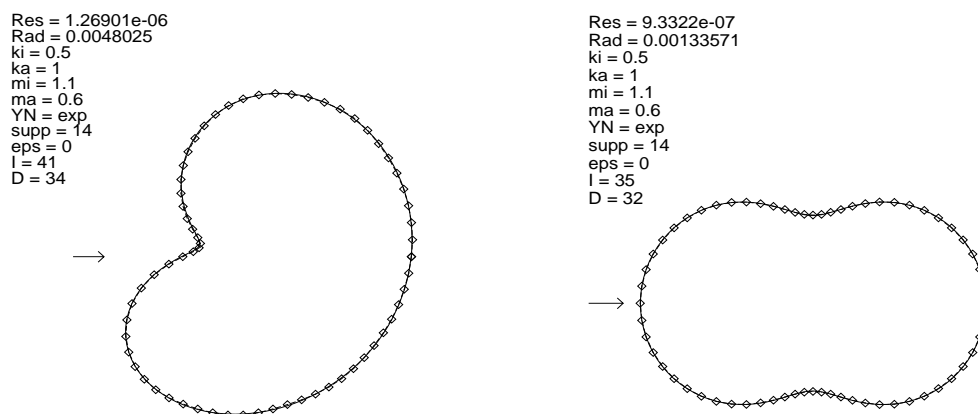


Abbildung 6.16: Rekonstruktion von Bohne und Erdnuß mit anderen Approximationsfunktionen

neue Approximationsraum keine besseren Rekonstruktionen liefert, ist dies beim Drachen der Fall. Hier sind die erzielten Rekonstruktionen zum Teil erheblich besser, wie an den Rekonstruktionen in Abbildung 6.15 zu erkennen ist. In diesem Beispiel gilt $s = 12$. Diese Information ist auch bei den Bildern vermerkt und dort mit $supp = 12$

bezeichnet. Zum Vergleich können hier die Abbildungen 6.3 herangezogen werden. In Abbildung 6.16 ist jeweils eine Rekonstruktion der Bohne und eine der Erdnuß mit diesen Approximationsfunktionen abgebildet.

6.5 Mehrere Einfallswellen

Neben dem Versuch durch eine andere Wahl des Approximationsraums bessere Rekonstruktionen zu erzielen, gibt es die am Anfang dieses Kapitels bereits angesprochene Möglichkeit, durch die Verwendung mehrerer Einfallswellen die Qualität der Rekonstruktion zu erhöhen. Hierzu werden in diesem Abschnitt einige Beispiele vorgestellt. In den Testversuchen wurden 2,3,4,5, oder 8 einfallende Wellen verwendet. Die Ein-

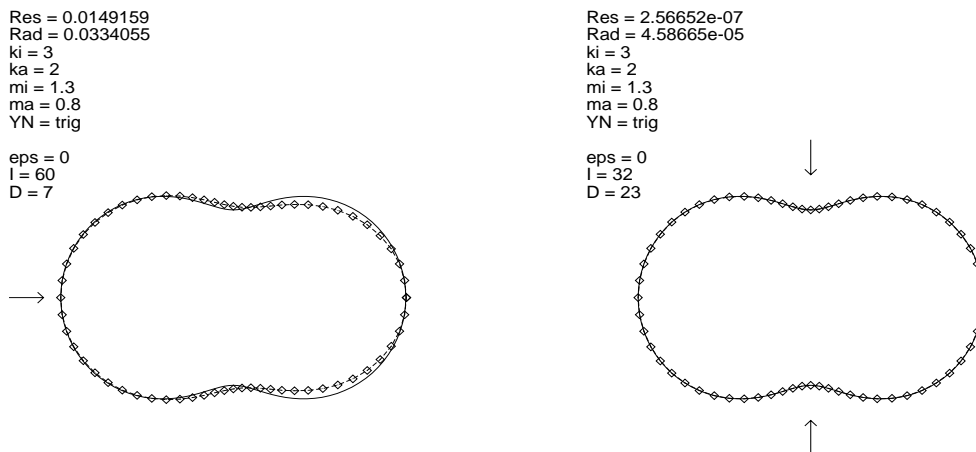


Abbildung 6.17: Rekonstruktion der Erdnuß mit einer bzw. zwei Einfallswellen

fallsrichtungen sind hierbei gleichmäßig über den Einheitskreis verteilt. Bei den Rekonstruktionen mit eingeschränktem Winkelbereich stammen die Einfallswellen ebenfalls aus einem eingeschränktem Winkelbereich und zwar so, daß im angestrahlten Bereich gemessen wird. Die Einfallswellen werden wie üblich durch Pfeile dargestellt. Als Beispiele wurden Parameterkombinationen gewählt, bei denen mit nur einer einfallenden Welle keine guten Rekonstruktionen erzielt werden konnten. So z.B. bei der Erdnuß in Bild 6.17. Während hier bei einer einfallenden Welle wegen der großen Wellenzahl im Innenraum die Rekonstruktion nur mäßig war und der Testlauf erst nach 60 Schritten abgebrochen wurde, liefert die Rekonstruktion mit zwei einfallenden Wellen schon nach 32 Iterationen ein sehr gutes Ergebnis. Ähnlich verhält es sich in Abbildung 6.18. Hier ist die Rekonstruktion mit einer einfallenden Welle unbefriedigend, das Ergebnis mit zwei Wellen dagegen bereits sehr gut. Auch bei Messungen mit eingeschränktem Winkelbereich können die Ergebnisse durch mehrere einfallende Wellen deutlich verbessert werden. In Abbildung 6.19 ist dies an Hand eines Beispiels dargestellt.

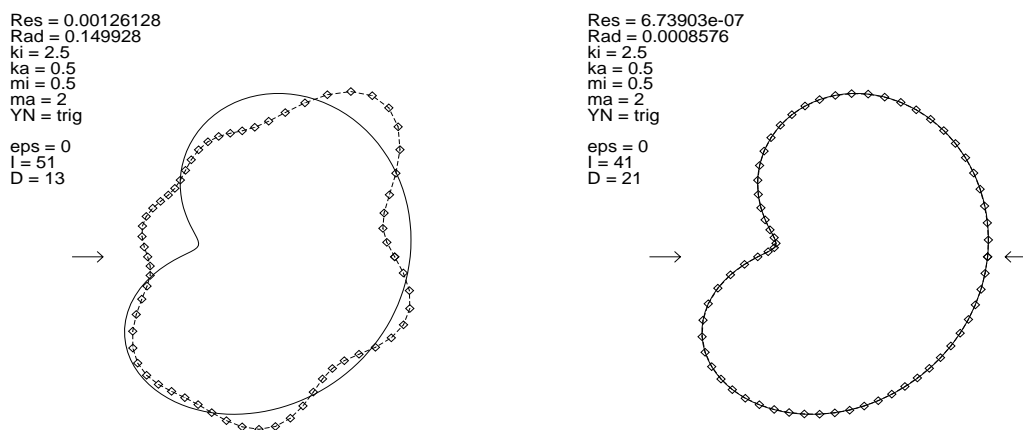


Abbildung 6.18: Rekonstruktion der Bohne mit einer bzw. zwei Einfallswellen

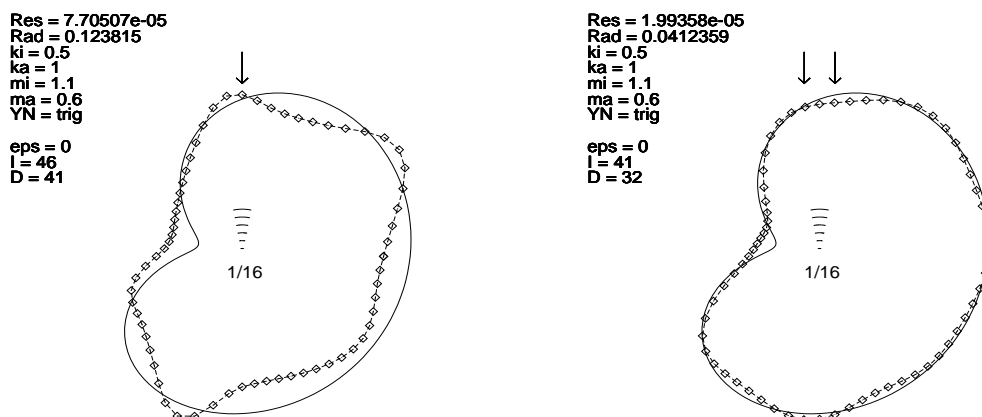


Abbildung 6.19: Rekonstruktion der Bohne mit einer bzw. zwei Einfallswellen bei eingeschränktem Meßbereich

6.6 Stabilität bei stark abweichender Startnäherung

Am Ende dieses Kapitels wird nun noch untersucht, wie sich der Algorithmus bei stärker abweichenden Startnäherungen verhält. Hierzu werden beispielhaft zwei verschiedene Situationen betrachtet. Zum einen wird das Verhalten bei einem Startkreis mit kleinem Radius untersucht. Dies entspricht der Situation, daß die Lage (z.B. der Schwerpunkt) des Gebiets bekannt ist, aber nicht dessen Größe. Hierzu sind in Abbildung 6.20 zwei

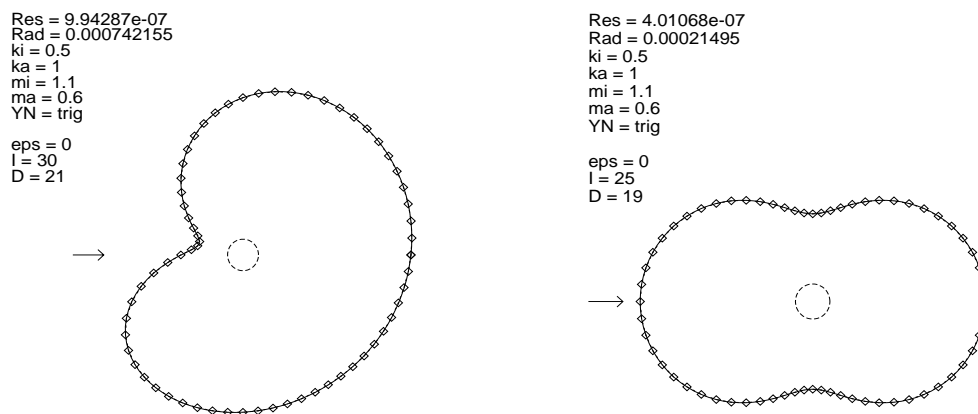


Abbildung 6.20: Kreis mit Radius 0.1 als Ausgangsnäherung

Beispiele zu sehen. Die gesuchten Objekte sind Erdnuß bzw. Bohne und die Startnäherung ist jeweils der Kreis um den Ursprung mit Radius 0.1. Dieser Kreis ist im Inneren der Kurven durch gestrichelte Linien angedeutet. Bei beiden Beispielen zeigt sich, daß die gesuchte Kurve sehr gut approximiert wird, wobei die Anzahl der benötigten Schritte nur wenig über der des Testlaufs mit Einheitskreis als Startnäherung liegt (30 statt 25 bei der Bohne und 25 statt 22 bei der Erdnuß). Der andere untersuchte Fall liegt vor, wenn die gesuchte Kurve nicht sternförmig bzgl. des Ursprungs, sondern bzgl. eines anderen Punktes ist. Hier bietet sich folgende Vorgehensweise an: In einem ersten Schritt wird das Newtonverfahren mit dem Approximationsraum

$$Y_2^{ort} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

durchgeführt. Startnäherung ist hierbei der Einheitskreis mit dem Ursprung als Mittelpunkt. Hierdurch wird (hoffentlich) ein Kreis K gefunden bzgl. dessen Mittelpunkt die gesuchte Kurve sternförmig ist. In einem zweiten Schritt wird das Newtonverfahren erneut gestartet, wobei nun der Kreis K als Ausgangsnäherung verwendet wird. In Abbildung 6.21 sind zwei Rekonstruktionen der Bohne abgebildet. Links wurde die

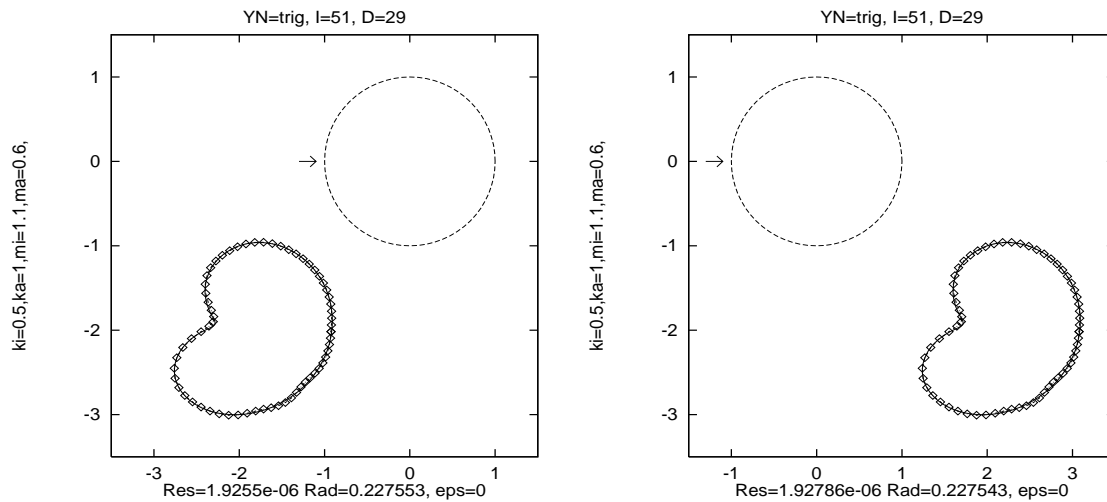


Abbildung 6.21: Translation der Bohne um $(-2, -2)^t$ bzw. $(2, -2)^t$

Bohne um den Vektor $(-2, -2)^t$, rechts um $(2, -2)^t$ verschoben. Die Angaben zum radialen L^2 -Abstand sind jetzt im Allgemeinen nicht mehr korrekt, da der Mittelpunkt des Kreises K normalerweise von dem Translationsvektor abweicht. Liegt das gesuch-

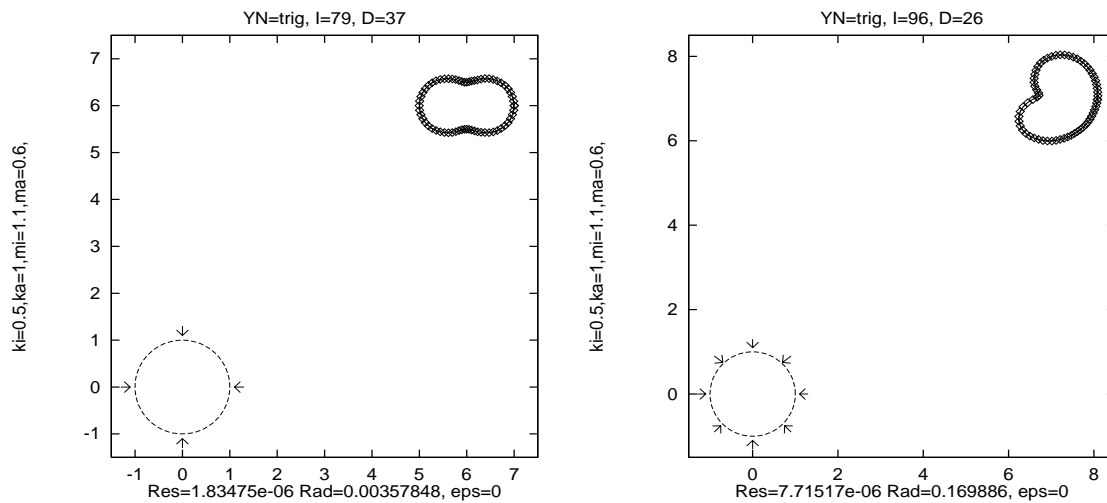


Abbildung 6.22: Rekonstruktion von translatierten Objekten mit mehreren einfallenden Wellen

te Objekt weiter vom Mittelpunkt entfernt, so ist die Rekonstruktion nur noch bei Verwendung von mehreren einfallenden Wellen möglich. Hierzu sind in Abbildung 6.22 zwei Beispiele dargestellt. Links wird die um $(6, 6)^t$ translatierte Erdnuß durch vier einfallende Wellen rekonstruiert, während rechts die um $(7, 7)^t$ verschobene Bohne durch acht einfallende Wellen approximiert wird. Auch der translatierte Drachen kann gut rekonstruiert werden. In Abbildung 6.23 geschieht dies bei Translation um $(3, -3)^t$ mit einer einfallenden Welle und Approximation durch die Exponentialradialfunktionen

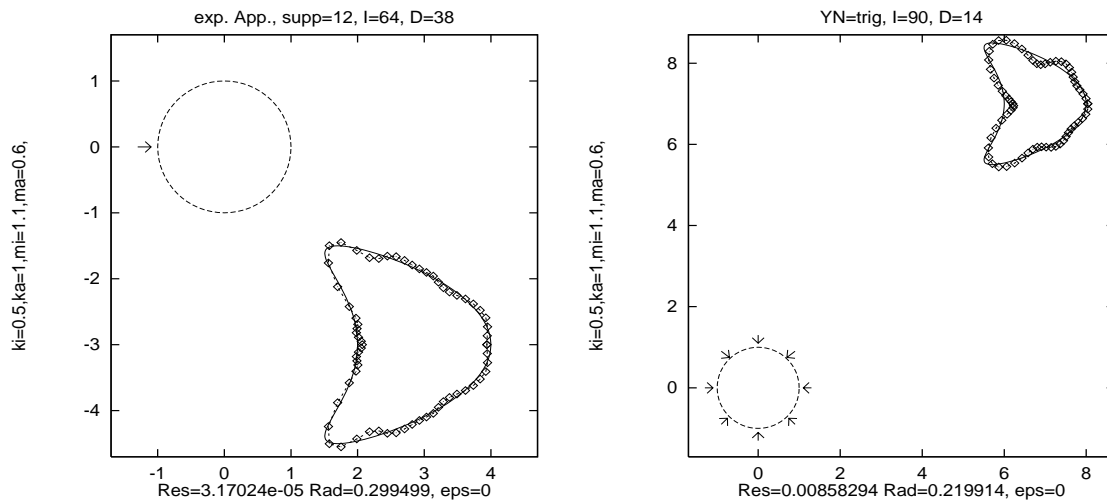


Abbildung 6.23: Rekonstruktion des translatierten Drachens

mit lokalem Träger, während auf dem rechten Bild bei einer Verschiebung um $(7, 7)^t$ mit trigonometrischer Approximation und acht einfallenden Wellen gearbeitet wird. Auch bei eingeschränktem Winkelbereich und Datenfehler ist eine Rekonstruktion sol-

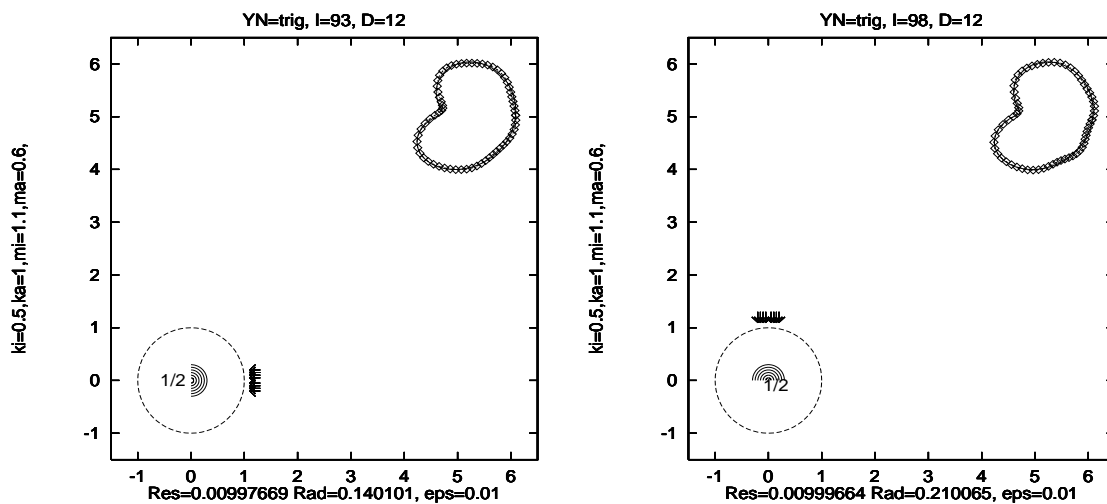


Abbildung 6.24: Rekonstruktion der translatierten Bohne bei eingeschränktem Winkelbereich und Datenfehler

cher Gebiete noch möglich. Hierzu sind in Abbildung 6.24 zwei Beispiele angegeben, in denen jeweils acht Einfallswellen verwendet wurden.

6.7 Fazit

Die Experimente haben gezeigt, daß das regularisierte Newton–Verfahren eine vielversprechende Methode zur numerischen Lösung inverser Streuprobleme darstellt. Bereits bei einer einfallenden Welle sind im Allgemeinen gute Rekonstruktionen möglich. Als wichtig erweist sich die Wahl der Basisfunktionen für den Approximationsraum. Neben trigonometrischen Monomen wurden in dieser Arbeit auch Basisfunktionen mit kompaktem Träger berücksichtigt. Dabei wurden teilweise bessere Ergebnisse erzielt. Auch bei eingeschränktem Meßbereich waren die Ergebnisse sehr gut. Für den Fall, daß die Startnäherung außerhalb des gesuchten Objekts liegt, wurde der Approximationsalgorithmus geeignet modifiziert, so daß in einem ersten Schritt die Lage des gesuchten Objekts ermittelt wurde und im zweiten Schritt die Form rekonstruiert wurde. Auch hier waren die Rekonstruktionen insbesondere bei Verwendung mehrerer einfallender Wellen sehr befriedigend. Das Verfahren erwies sich des weiteren als recht robust gegenüber Datenfehlern. So führte ein einprozentiger Datenfehler nur zu einer geringfügigen Verschlechterung des Ergebnisses und auch größere Störungen verschlechterten die Rekonstruktion nicht übermäßig. Diesen guten numerischen Ergebnissen stehen allerdings ungelöste Konvergenzfragen gegenüber. So existieren bisher — auch beim inversen Dirichletproblem — keine Konvergenzaussagen für regularisierte Newton-Verfahren bei inversen Streuproblemen. Weiterhin ist beim Transmissionsproblem, wie auch beim Neumannproblem, die Frage nach der Injektivität der Fréchet-Ableitung und der Dichtigkeit ihres Wertebereichs noch nicht geklärt.

Literaturverzeichnis

- [1] Berger, M.S. (1977) *Nonlinearity and Functional Analysis*, Academic Press, New York San Francisco.
- [2] Colton, D. & Kreß, R. (1983) *Integral equation methods in scattering theory*, Wiley-Interscience Publication, New York.
- [3] Colton, D. & Kreß, R. (1992) *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York.
- [4] Gerecke, K. (1990) *Eine Integralgleichungsmethode zur Lösung von Transmissionsproblemen bei der Helmholtzgleichung*, Diplomarbeit, Göttingen.
- [5] Gerlach, T. (1995) *Zur Eindeutigkeit beim inversen Randwertproblem zur Helmholtzgleichung bei konduktiven und resistiven Randbedingungen*, Diplomarbeit, Göttingen.
- [6] Heinz, E.(1987) *Differential- und Integralrechnung III*, Skript zur Vorlesung im Wintersemester 1986/87, Göttingen.
- [7] Hettlich, F. (1995) *Frechet derivatives in inverse obstacle scattering*, Invers Problems 11, 371-382.
- [8] Isakov, V. (1990) *On uniqueness in the inverse transmission scattering problem*, Comm. Part. Diff. Equa. 15, 1565-1587.
- [9] Kirsch, A. (1984) *Generalized boundary value- and control problems for the Helmholtz Equation*, Habilitationsschrift, Göttingen, 1984.
- [10] Kreß, R. (1989) *Linear integral equations*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York.
- [11] Kreß, R. *Inverse Probleme*, Vorlesung 1994/95, Göttingen.
- [12] Kreß, R. & Roach, G.F. (1978) *Transmission problems for the Helmholtz equation*, J. Math. Phys. 19, 1433-1437.

- [13] Kupradse, W.D. (1956) *Randwertaufgaben der Schwingungstheorie und Integralgleichungen*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaft, Berlin.
- [14] Lebedev, N.N. (1965) *Special Functions and Their Applications*, Prentice Hall, Englewood Cliffs.
- [15] Martensen, E. (1968) *Potentialtheorie*, Teubner-Verlag, Stuttgart.
- [16] Moré, J.J. (1977) *The Levenberg-Marquardt algorithm, implementation and theory*, In: Numerical analysis (Watson, ed) Springer Verlag Lecturs Notes in Mathematics 630, 105-116, Berlin Heidelberg New York.
- [17] Potthast, R. (1994) *Fréchet Differenzierbarkeit von Randintegraloperatoren und Randwertproblemen zur Helmholtzgleichung und den zeitharmonischen Maxwellgleichungen*, Dissertation, Göttingen.
- [18] Zinn, A. (1987), *Eine numerische Methode zur Lösung eines Transmissionsproblems bei der Helmholtzgleichung*, Diplomarbeit, Göttingen.