

**Substitutionsmethoden beim
Nyström – Verfahren für
Integralgleichungen zweiter Art**

Diplomarbeit

vorgelegt von

Andreas Vogt

aus

Leinefelde

angefertigt

im Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
der Georg-August-Universität zu Göttingen

1997

Danksagung

Für die Betreuung bei der Bearbeitung dieses interessanten Themas möchte ich mich bei Herrn Professor Dr.Rainer Kreß bedanken.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Grundlagen	7
2.1	Funktionalanalytische Grundlagen	7
2.2	Potentialtheoretische Grundlagen	12
3	Substitutionsmethode	21
3.1	Euler-Maclaurin Formeln	21
3.2	Beispiele von Substitutionsfunktionen	39
4	Eine singuläre Integralgleichung	67
4.1	Existenz und Eindeutigkeit	67
4.2	Ein Nyström-Verfahren	71
5	Die Elastizitätsgleichung	80
5.1	Formulierung der Randwertprobleme	80
5.2	Zur Eindeutigkeit beim inneren Dirichletproblem	81
5.3	Existenz beim inneren Dirichletproblem	88
5.4	Das Nyström-Verfahren	96
5.5	Numerische Experimente	104
	Literaturverzeichnis	113

Kapitel 1

Einleitung

Ein Körper heißt elastisch, wenn er auf irgendeine durch äußere Kräfte hervorgerufene Änderung seines Volumens oder seiner Gestalt mit inneren Zwangskräften antwortet, welche versuchen, die Änderung rückgängig zu machen.

Befindet sich ein fester Körper in seinem natürlichen ungestörten Zustand, so haben seine elementaren Bausteine (Moleküle) bestimmte Gleichgewichtslagen, welche durch die Kräfte bestimmt sind, mit denen sie aufeinander einwirken. Die Kräfte hängen außerdem von der gegenseitigen Lage der Moleküle ab. Wird diese durch äußere Einwirkungen verändert, so ist dadurch das Gleichgewicht gestört. Da es ein stabiles Gleichgewicht war, versuchen die bei der Störung auftretenden Zwangskräfte es wieder herzustellen. Diese im Körper erzeugten inneren Spannungen sind die Ursache der Elastizität der festen Stoffe.

Bei den elastischen Verformungen sind drei Grundtypen zu unterscheiden. Eine Art ist die Kompression durch einen von allen Seiten gleich stark wirkenden Druck oder eine entsprechende Dehnung durch Zug. Ein zweiter, praktisch wichtiger Fall ist die Beanspruchung in einer bestimmten Richtung. Eine dritte Art ist die Scherung.

Bei genügend kleinen Einwirkungen können die an den Körper auftretenden Deformationen in guter Näherung als linear von den Kräften abhängig angenommen werden (allgemeines Hookesches Gesetz). Während im allgemeinen Fall die elastischen Eigenschaften durch einundzwanzig Konstanten beschrieben werden, reduzieren sich diese für ein isotropes Medium auf

zwei unabhängige Stoffkonstanten λ, μ . Diese stehen mit dem Elastizitäts-, Kompressions- und Scherungsmodul in Beziehung. Dabei heißt die dimensionslose Größe μ Poisson-Zahl. Beispielsweise haben Aluminium den Wert 0.2, Stahl 0.3, Kupfer 0.34 und Eisen 0.45. Für eine detaillierte Darstellung oder eine Einführung in die Elastizitätstheorie wird auf [2] und [20] verwiesen.

Für homogene isotrope Medien mit Dichte ρ erhält man durch Vernachlässigen der Volumenkräfte für den Verschiebungsvektor $U(x, t)$, der zum Zeitpunkt t die Verschiebung des Punktes $x \in \mathbb{R}^d$, $d \in \{2, 3\}$, aus der Ruhelage angibt, die folgende Differentialgleichung

$$\sum_{k=1}^d \mu \left[\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} U_j + \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_j} U_k \right] + \lambda \frac{\partial}{\partial x_j} \operatorname{div} U = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} U_j, \quad j = 1, \dots, d.$$

Der zeitharmonische Ansatz

$$U(x, t) = u(x) \exp(-i\omega t)$$

führt auf die Gleichung

$$\mu \Delta u + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} u + \omega^2 \rho u = 0.$$

In dieser Arbeit wird lediglich der Spezialfall $\omega = 0$ behandelt.

Unter dem **inneren Dirichletproblem zur Elastizitätsgleichung** versteht man:

Sei $G \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \{2, 3\}$, ein beschränktes Gebiet derart, daß $\mathbb{R}^d \setminus G$ zusammenhängend ist. Zu gegebenen Randwerten $f \in C(\partial G)$ wird ein Vektorfeld

$$u \in C^2(G) \cap C(\overline{G})$$

als Lösung der Elastizitätsgleichung

$$\mu \Delta u + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} u = 0 \quad \text{in } G \tag{1.1}$$

gesucht, das zusätzlich die Randbedingung

$$u = f \quad \text{auf } \partial G \tag{1.2}$$

erfüllt. Hier wird nur der Fall $d = 2$ betrachtet.

Zur Lösung des Randwertproblems gibt es prinzipiell zwei Möglichkeiten. Zum einen kann (1.1), (1.2) in die schwache Formulierung überführt werden,

um mit Hilbertraummethode Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen in Sobolevräumen zu gewinnen. Anschließend ist nachzuweisen, daß die schwache Lösung auch klassische Lösung ist. Wie bei der Laplacegleichung läßt sich das Randwertproblem auch mit Integralgleichungsmethoden behandeln. In [16] werden neben dem Dirichlet- auch Neumann- und Außenraumprobleme behandelt. Dafür sind C^2 -glatte Ränder oder etwas allgemeiner Lyapunov-Ränder benötigt worden. Falls ∂G nur stückweise glatt ist, also Ecken (und im \mathbb{R}^3 Kanten) besitzt, treten zusätzliche Probleme auf, beispielsweise mit der Kompaktheit der Operatoren.

Ziel dieser Arbeit ist es, für einen Rand mit Ecke einer speziellen Form, Existenz und Eindeutigkeit von (1.1), (1.2) zu zeigen. Gewinnt man die Lösung mit einem Potentialansatz, so führt dies auf eine Integralgleichung für die unbekannte Dichte. Das singuläre Verhalten des Randes spiegelt sich in den Kerneigenschaften des zugehörigen Integraloperators wieder. Die Integralgleichung soll mit einem Nyström-Verfahren gelöst werden. Dazu sind geeignete Quadraturformeln bereitzustellen. Aufgrund des singulären Verhaltens des Integranden ist es sinnvoll, nicht sofort die Trapezregel anzuwenden, sondern zunächst eine geeignete Substitution durchzuführen. Die Untersuchung verschiedener Transformationen, die Bestimmung der Konvergenzordnung und deren Konstante stellt einen wesentlichen Bestandteil dieser Arbeit dar.

Als nächstes soll der Aufbau der Arbeit angegeben werden. Im Kapitel **Grundlagen** werden funktionalanalytische und potentialtheoretische Ergebnisse angeführt. Der erste Abschnitt ist den Operatorgleichungen und der Konvergenz von Operatorfolgen gewidmet. Zusätzlich werden der Funktionenraum $S^{m,\alpha}$ eingeführt und in Lemma 2.7 einige wichtige Abschätzungen bewiesen. Im zweiten Abschnitt werden – zunächst unabhängig vom Eckenproblem – die Greenschen Sätze und Potentiale angegeben. Die Beweise wurden teilweise, obwohl für $d = 3$ in [16] als Spezialfall enthalten, nochmals mit Beweis angeführt und damit übersichtlicher gestaltet.

Die in Kapitel **Substitutionsmethode** betrachteten Funktionen sind auf $[0, 2\pi]$ definiert. Im ersten Teil wird die Euler-Maclaurin Formel unter leicht abgeschwächten Voraussetzungen angegeben, so daß sie später auf Elemente von $S^{m,\alpha}$ anwendbar ist. Desweiteren wird für eine Klasse von Funktionen mit Endpunktsingularitäten gezeigt, daß die Rechteckregel zur numerischen Integration geeignet ist. Außerdem wird das Prinzip der Substitutionsmethode erläutert und mit Satz 3.10 der in Kapitel vier benötigte Konvergenzsatz

bereitgestellt. Im zweiten Abschnitt werden verschiedene Substitutionen hinsichtlich Konvergenzordnung und Konstante untersucht. Einige Ansätze sind so modifiziert worden, daß die Ableitung in der Intervallmitte π auch mit wachsender Nullstellenordnung der Substitutionsfunktion konstant zwei ist. Der Versuch, damit die für die Konvergenz entscheidende Konstante zu verbessern, schlug fehl. Die angegebenen numerischen Beispiele umfassen sowohl glatte als auch singuläre Integranden. Man stellt fest, daß sich bei Substitutionen w_m höherer Ordnung ($m > 10$) die Fehlerkonstante deutlich bemerkbar macht. Die Notwendigkeit, dann sehr fein zu diskretisieren, wirft auch bei Transformationen polynomialer Art overflow- und underflow-Probleme auf.

Im Kapitel **Eine singuläre Integralgleichung** wird die Gleichung zweiter Art

$$\varphi(t) - \int_0^{2\pi} K(t, \tau)\varphi(\tau) d\tau = f(t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad (1.3)$$

betrachtet, wobei der Kern K auf $]0, 2\pi[\times]0, 2\pi[$ stetig ist und in den vier Ecken des Definitionsbereichs Singularitäten aufweist. Unter geeigneten Voraussetzungen an K wird gezeigt, daß sich die linke Seite von (1.3) als Summe aus einem kompakten und einem beschränkt invertierbaren Operator, angewendet auf die Dichte φ , darstellen läßt. Die Riesztheorie liefert im Fall der Injektivität der Gleichung die Existenz einer Lösung. Unter weiteren Regularitätsvoraussetzungen an K wird gezeigt, daß die durch das Nyström-Verfahren erzeugte Folge von Näherungslösungen gegen die exakte Lösung konvergiert. Der Konvergenzbeweis geht auf R.Kreß [14] zurück. Die Idee aus [7], die Beweise so zu modifizieren, daß in Satz 4.5 der Abbruchparameter $r = 1$ gewählt werden kann und somit sich das zu lösende lineare Gleichungssystem nicht ändert, ist nicht durchführbar.

Das Kapitel **Die Elastizitätsgleichung** ist als Anwendung der Kapitel drei und vier gedacht. Im zweiten Abschnitt sind die Eindeutigkeitsbeweise beim inneren Dirichletproblem und äußeren Neumannproblem, die im ersten Abschnitt formuliert werden, angegeben worden. Da eine Lösung nicht mehr bis in die Ecke hinein differenzierbar ist, muß diese bei Verwendung der Greenschen Sätze ausgespart werden. Die Idee ist den Arbeiten [17] und [26], in denen außerhalb eines Bogens Differentialgleichungen mit Neumannrandwerten zu lösen sind, entnommen worden. Weiterhin werden die Eindeutigkeit und Darstellbarkeit der Lösungen bei C^2 -glatten Rändern als gegeben vorausgesetzt. Da sich die Grundlösung im Vergleich zum homogenen Stokes-Problem nur unwesentlich ändert, kann man die Beweise [5] entnehmen. Im dritten

Abschnitt wird mit einem Doppelschichtpotentialansatz und den Sprungbeziehungen eine Integralgleichung für die unbekannt Dichte hergeleitet. Im nachfolgenden Abschnitt wird gezeigt, daß die parametrisierte Gleichung den Voraussetzungen von Kapitel vier genügt. Abschließend werden numerische Beispiele angeführt, bei denen der Rand im Nullpunkt eine Ecke aufweist. Es wird benutzt, daß

$$u(r, \vartheta) = \begin{pmatrix} r^\delta \sin(\delta\vartheta) \\ r^\delta \cos(\delta\vartheta) \end{pmatrix}, \quad \delta > 0$$

in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x_1, x_2)^t \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \leq 0, x_2 = 0\}$ die Elastizitätsgleichung löst und damit dem Eckencharakter gerecht wird, das heißt, die Lösung im allgemeinen nicht bis in die Ecke hinein differenzierbar ist.

Kapitel 2

Grundlagen

In diesem Kapitel werden wesentliche mathematische Hilfsmittel bereitgestellt, die vor allem bei der Behandlung der Integralgleichung in Kapitel 4 ihre Anwendung finden.

2.1 Funktionalanalytische Grundlagen

Zunächst sollen für Operatorgleichungen zweiter Art

$$\varphi - A\varphi = f$$

Kriterien angegeben werden, unter denen Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung garantiert werden kann.

Satz 2.1 (Neumannsche Reihe)

Sei X ein Banachraum, $I : X \rightarrow X$ der Identitätsoperator und $A : X \rightarrow X$ ein beschränkter linearer Operator mit $\|A\| < 1$. Dann ist $I - A$ beschränkt invertierbar. Die Inverse ist durch die Neumannsche Reihe

$$(I - A)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} A^i$$

gegeben und beschränkt durch

$$\|(I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

Beweis: Siehe Theorem 2.8 in [15]. ■

In der nachfolgenden Definition wird eine wichtige Klasse von Operatoren vorgestellt.

Definition 2.2 *Seien X und Y normierte Räume. Ein linearer Operator $A : X \rightarrow Y$ heißt kompakt, wenn für jede beschränkte Menge $U \subset X$ das Bild $A(U)$ relativ kompakt in Y ist.*

Bei entsprechender Randglätte sind Integraloperatoren mit stetigen oder schwach singulären Kernen kompakt.

Satz 2.3 (Riesz)

Sei X ein normierter Raum, $A : X \rightarrow X$ ein kompakter Operator, $I : X \rightarrow X$ der Identitätsoperator und $I - A$ injektiv. Dann existiert der inverse Operator $(I - A)^{-1} : X \rightarrow X$ und ist beschränkt.

Beweis: Siehe Theorem 3.4 in [15]. ■

Für die Analysis in Kapitel 4 wird ein spezieller Funktionenraum benötigt.

Definition 2.4 *Für $m \in \mathbb{N}$ und $0 < \alpha \leq m$ wird der Raum*

$$S^{m,\alpha} := \left\{ g \in C[0, 2\pi] \cap C^m(0, 2\pi) \mid \int_0^{2\pi} [t(2\pi - t)]^{j-\alpha} |g^{(j)}(t)| dt \text{ existiert für } j = 0, \dots, m \right\} \quad (2.1)$$

erklärt. $S^{m,\alpha}$ wird mit der Norm

$$\|g\|_{m,\alpha} := \max_{j=0,\dots,m} \int_0^{2\pi} [t(2\pi - t)]^{j-\alpha} |g^{(j)}(t)| dt \quad (2.2)$$

ein normierter Raum.

Die Elemente von $S^{m,\alpha}$ haben in 0 und 2π Nullstellen höherer Ordnung. Genauer gilt

Bemerkung 2.5 *Für $n \in \mathbb{N}$, $n \leq \alpha < n + 1$ und $g \in S^{m,\alpha}$ gilt*

$$\begin{aligned} g(0) &= g'(0) = \dots = g^{(n-1)}(0) = 0, \\ g(2\pi) &= g'(2\pi) = \dots = g^{(n-1)}(2\pi) = 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Bemerkung 2.6 Seien $0 < \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq m$ und $g \in S^{m, \alpha_2}$. Dann ist g auch Element von S^{m, α_1} und es gibt eine Konstante $C = C(\alpha_1, \alpha_2)$ so, daß

$$\|g\|_{m, \alpha_1} \leq C \|g\|_{m, \alpha_2}.$$

Lemma 2.7

a) Für $g \in S^{m, \alpha}$ mit $0 < \alpha \leq m$ existiert eine positive Konstante C , so daß

$$|g^{(j)}(t)| \leq C [t(2\pi - t)]^{\alpha - (j+1)} \quad \text{für } j = 0, \dots, m-1 \text{ und } 0 < t < 2\pi. \quad (2.4)$$

b) Für $g \in S^{m, \alpha}$ mit $1 \leq \alpha \leq m$ gilt

$$|g(t)| \leq [t(2\pi - t)]^{\alpha - 1} \|g\|_{m, \alpha} \quad \text{für } 0 \leq t \leq 2\pi. \quad (2.5)$$

Beweis: Wähle $n \in \mathbb{N}_0$, so daß $n \leq \alpha < n + 1$.

a) Sei zunächst $0 \leq j < n$. Wegen (2.3) hat man $g^{(j)}(0) = g^{(j)}(2\pi) = 0$. Somit ist

$$g^{(j)}(t) = \int_0^t g^{(j+1)}(s) ds = \int_0^t [s(2\pi - s)]^{\alpha - (j+1)} [s(2\pi - s)]^{j+1-\alpha} g^{(j+1)}(s) ds.$$

Da $[s(2\pi - s)]^{\alpha - (j+1)}$ auf $[0, \pi]$ monoton wachsend ist, erhält man

$$\begin{aligned} |g^{(j)}(t)| &\leq [t(2\pi - t)]^{\alpha - (j+1)} \int_0^t [s(2\pi - s)]^{j+1-\alpha} |g^{(j+1)}(s)| ds \\ &\leq [t(2\pi - t)]^{\alpha - (j+1)} \|g\|_{m, \alpha} \quad \text{für } 0 \leq t \leq \pi. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Genauso ergibt sich wegen $g^{(j)}(t) = -\int_t^{2\pi} g^{(j+1)}(s) ds$ die Ungleichung

$$\begin{aligned} |g^{(j)}(t)| &\leq [t(2\pi - t)]^{\alpha - (j+1)} \int_t^{2\pi} [s(2\pi - s)]^{j+1-\alpha} |g^{(j+1)}(s)| ds \\ &\leq [t(2\pi - t)]^{\alpha - (j+1)} \|g\|_{m, \alpha} \quad \text{für } \pi \leq t \leq 2\pi. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Betrachte nun $n \leq j \leq m - 1$. Wegen

$$g^{(j)}(t) - g^{(j)}(\pi) = \int_\pi^t g^{(j+1)}(s) ds$$

gilt auf $[0, \pi]$

$$|g^{(j)}(t)| \leq |g^{(j)}(\pi)| + \int_t^\pi |g^{(j+1)}(s)| ds.$$

Multiplikation dieser Ungleichung mit $[t(2\pi - t)]^{j+1-\alpha} \leq c$, $0 < t \leq \pi$, liefert

$$[t(2\pi - t)]^{j+1-\alpha} |g^{(j)}(t)| \leq c |g^{(j)}(\pi)| + \int_t^\pi [s(2\pi - s)]^{j+1-\alpha} |g^{(j+1)}(s)| ds$$

und damit

$$|g^{(j)}(t)| \leq [c |g^{(j)}(\pi)| + \|g\|_{m,\alpha}] [t(2\pi - t)]^{\alpha-(j+1)} \quad \text{für } 0 < t \leq \pi. \quad (2.8)$$

Die Argumentation für $\pi \leq t < 2\pi$ verläuft analog. Zusammen mit (2.6) und (2.7) liefert dies Behauptung a).

b) Wegen $\alpha \geq 1$ ist $n \geq 1$. Durch Einsetzen von $j = 0$ in (2.6) und (2.7) ergibt sich Teil b). ■

Der nächste Abschnitt beschäftigt sich mit der Konvergenz von Operatorfolgen. Mit $L(X, Y)$ wird der Raum der linearen und beschränkten Operatoren, die X nach Y abbilden, bezeichnet.

Satz 2.8 (Banach-Steinhaus)

Seien X ein Banachraum, Y ein normierter Raum, $A \in L(X, Y)$ und (A_n) eine Folge von Elementen aus $L(X, Y)$. Dann konvergiert (A_n) punktweise gegen A genau dann, wenn

1. $A_n \varphi \rightarrow A \varphi$, $n \rightarrow \infty$ für alle φ aus einer dichten Teilmenge U von X .
2. Es gibt ein C so, daß

$$\|A_n\| \leq C$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis: Siehe Satz 40.4 in [10] ■

Der Satz soll nun auf Quadraturformeln angewandt werden.

Definition 2.9 *Eine Folge*

$$Q_n(\varphi) = \sum_{i=0}^n \alpha_i^{(n)} \varphi(x_i^{(n)})$$

von Quadraturformeln für das Integral

$$Q(\varphi) = \int_a^b \varphi(x) dx$$

heißt konvergent, wenn die Folge von Operatoren $Q_n : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ punktweise gegen $Q : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert.

Satz 2.10 (Szegö)

Eine Folge von Quadraturformeln (Q_n) konvergiert genau dann gegen Q , wenn $Q_n(\varphi) \rightarrow Q(\varphi)$, $n \rightarrow \infty$ für alle φ in einem dichten Teilraum U von $C[a, b]$ und

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{i=1}^n |\alpha_i^{(n)}| < \infty.$$

Beweis: Wegen

$$|Q_n \varphi| \leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i^{(n)}| \|\varphi\|_\infty \quad \text{für alle } \varphi \in C[a, b]$$

ist

$$\|Q_n\| \leq \sum_{i=1}^n |\alpha_i^{(n)}|.$$

Desweiteren wähle $\varphi \in C[a, b]$ so, daß

$$\|\varphi\|_\infty = 1 \quad \text{und} \quad \varphi(x_i^{(n)}) = \text{sign}(\alpha_i^{(n)}).$$

Das ist mit stückweise linearen Funktionen möglich. Damit ist

$$|Q_n \varphi| = \sum_{i=1}^n |\alpha_i^{(n)}| \quad \text{also auch} \quad \|Q_n\| \geq \sum_{i=1}^n |\alpha_i^{(n)}|.$$

Die Behauptung ergibt sich nun aus dem Satz von Banach-Steinhaus. ■

Korollar 2.11 (Steklov)

Sei (Q_n) eine Folge von Quadraturformeln mit positiven Gewichten $\alpha_i^{(n)}$ und $Q_n\varphi \rightarrow Q\varphi$ für alle Polynome φ . Dann konvergiert Q_n gegen Q .

Beweis: Nach dem Approximationssatz von Weierstraß liegt die Menge der Polynome dicht in $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$. Wegen

$$\sum_{i=1}^n |\alpha_i^{(n)}| = \sum_{i=1}^n \alpha_i^{(n)} = Q_n(1) \rightarrow Q(1), \quad n \rightarrow \infty$$

liefert der Satz von Szegö die Behauptung. ■

2.2 Potentialtheoretische Grundlagen

In diesem Kapitel sollen die wesentlichen potentialtheoretischen Hilfsmittel, die bei der Behandlung des Randwertproblems in Kapitel 5 ihre Anwendung finden, zusammengestellt werden.

Nachfolgend wird für ein beschränktes Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$ die Elastizitätsgleichung

$$\mu\Delta u + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} u = 0, \quad \mu, \lambda \in \mathbb{R}^+ \quad (2.9)$$

betrachtet. Der zu dieser Gleichung korrespondierende Differentialoperator

$$\mu\Delta + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div}$$

wird im folgenden mit Δ^* bezeichnet.

Für die Greenschen Sätze sind Regularitätsforderungen an den Rand und die auftretenden Integranden zu stellen. Auf eine möglichst allgemeine Darstellung, wie sie in [11] oder [19] zu finden ist, soll hier verzichtet werden.

Satz 2.12 (Gaußscher Satz)

Seien $G \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet mit stückweise C^1 -glattem Rand und $A \in C^1(G) \cap C(\overline{G})$ ein Vektorfeld. Dann gilt

$$\int_G \operatorname{div} A(y) \, ds(y) = \int_{\partial G} \langle A(y), n(y) \rangle \, ds(y),$$

sofern die auftretenden Integrale existieren. Dabei ist n die in den regulären Randpunkten gebildete und ins Äußere von G weisende Normale.

Beweis: Nach Voraussetzung besitzt ∂G nur endlich viele singuläre Randpunkte x_0, \dots, x_m . Der zur Dimension eins gehörende Minkowski-Inhalt von $\{x_0, \dots, x_m\}$ ist Null. Demnach stellt die obige Formulierung einen Spezialfall von [13, Folgerung 7.5] dar. ■

Zur Formulierung der Greenschen Sätze werden nachfolgende Notationen vereinbart.

Für reelle Zahlen α, β mit $\alpha + \beta = \lambda + \mu$ sind der verallgemeinerte Stresstensor

$$P : u \longrightarrow P_u = ((P_u)_{jk})_{1 \leq j, k \leq 2}$$

mit

$$(P_u)_{jk} = \delta_{jk} \beta \operatorname{div} u + \alpha \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \mu \frac{\partial u_j}{\partial x_k}$$

und die symmetrische Bilinearform

$$\begin{aligned} B(u, v) &= (\lambda + 2\mu) \sum_{k=1}^2 \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} + \mu \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right] \\ &+ \beta \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \right] + \alpha \left[\frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right] \end{aligned}$$

erklärt. Der zu den Werten $\alpha = \mu$ und $\beta = \lambda$ korrespondierende Tensor P wird mit T bezeichnet. Desweiteren soll der Tensor zu den Werten

$$\alpha = \frac{\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 3\mu}, \quad \beta = \frac{(\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu)}{\lambda + 3\mu}$$

mit N bezeichnet werden. Demnach haben T und N die Darstellung

$$\begin{aligned} T &: u \longrightarrow T_u = ((T_u)_{jk})_{1 \leq j, k \leq 2}, \\ N &: u \longrightarrow N_u = ((N_u)_{jk})_{1 \leq j, k \leq 2} \end{aligned}$$

mit den Komponenten

$$\begin{aligned} (T_u)_{jk} &= \delta_{jk} \lambda \operatorname{div} u + \mu \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right), \\ (N_u)_{jk} &= \delta_{jk} \frac{(\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu)}{\lambda + 3\mu} \operatorname{div} u + \frac{\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 3\mu} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \mu \frac{\partial u_j}{\partial x_k}. \end{aligned}$$

Für Vektoren $a, b \in \mathbb{R}^2$ wird für das Skalarprodukt anstatt $\langle a, b \rangle$ auch $a \cdot b$ geschrieben. Für die Bildung des Vektorproduktes $a \times b$ ist der \mathbb{R}^2 im \mathbb{R}^3 einzubetten. Insbesondere gilt

$$\operatorname{rot} u = \left(0, 0, \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)^t.$$

Mit diesen Bezeichnungen läßt sich der Vektor $P_u n$ durch

$$P_u n = \beta n \operatorname{div} u + (\alpha + \mu) \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha (n \times \operatorname{rot} u)$$

darstellen. Er ersetzt die in der klassischen Potentialtheorie auftretende Normalableitung von u .

Satz 2.13 (Greensche Sätze oder Betti-Formeln)

Sei G wie in Satz 2.12. Für Vektorfelder u, v mit den Eigenschaften $v \in C^2(G) \cap C^1(\bar{G})$, $u \in C^1(G) \cap C(\bar{G})$ gilt der erste Greensche Satz

$$\int_G u \cdot \Delta^* v \, dy = \int_{\partial G} u \cdot (P_v n) \, ds - \int_G B(u, v) \, dy. \quad (2.10)$$

Für $u, v \in C^2(G) \cap C^1(\bar{G})$ gilt der zweite Greensche Satz

$$\int_G (u \cdot \Delta^* v - v \cdot \Delta^* u) \, dy = \int_{\partial G} [u \cdot (P_v n) - v \cdot (P_u n)] \, ds. \quad (2.11)$$

Beweis: Um den Gaußschen Satz auf

$$(u \cdot P_v n)(y) = \langle A(y), n(y) \rangle \quad \text{mit} \quad A(y)_k = \sum_{j=1}^2 (P_v)_{jk} u_j$$

anwenden zu können, ist die Divergenz des Vektorfeldes A zu berechnen. Es gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{div} A(y) &= \sum_{j,k=1}^2 \frac{\partial}{\partial y_k} [(P_v)_{jk} u_j] \\ &= \sum_{j=1}^2 \underbrace{\left(\sum_{k=1}^2 \frac{\partial}{\partial y_k} (P_v)_{jk} \right)}_{(\Delta^* v)_j} u_j + \sum_{j,k=1}^2 (P_v)_{jk} \frac{\partial u_j}{\partial y_k} \\ &= u \cdot \Delta^* v + B(u, v), \end{aligned}$$

so daß (2.10) folgt. Gleichung (2.11) ergibt sich aus (2.10) und der Symmetrie von B . ■

Für den Darstellungssatz und die Potentialansätze wird die Grundlösung $E(x, y) = (E_{ij}(x, y))_{1 \leq i, j \leq 2}$ zu (2.9) benötigt. Diese ist durch

$$E(x, y) = A(\lambda, \mu) \ln \frac{1}{|x - y|} I_2 + B(\lambda, \mu) \frac{(x - y)(x - y)^t}{|x - y|^2} \quad (2.12)$$

mit den Konstanten

$$A(\lambda, \mu) = \frac{1}{4\pi} \frac{\lambda + 3\mu}{\mu(\lambda + 2\mu)}, \quad B(\lambda, \mu) = \frac{1}{4\pi} \frac{\lambda + \mu}{\mu(\lambda + 2\mu)} \quad (2.13)$$

gegeben. Dabei wurde mit $I_2 \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ die Einheitsmatrix bezeichnet.

Für den k -ten Spaltenvektor E_k von E gilt demnach

$$\Delta_x^* E_k(x, y) = \delta(x - y), \quad k = 1, 2.$$

Der Index am Operator Δ^* gibt die Variable an, bezüglich der zu differenzieren ist. Genauso wird anstatt P, T oder N nun $P^{(x)}, P^{(y)}, \dots$ geschrieben.

Satz 2.14 (Greenscher Darstellungssatz)

Seien G wie in Satz 2.12, $u \in C^2(G) \cap C^1(\overline{G})$ und $\Delta^* u = 0$ in G . Dann gilt

$$\int_{\partial G} \left[E(x, y) (P_u n)(y) - D(x, y) u(y) \right] ds(y) = \begin{cases} u(x) & : x \in G \\ 0 & : x \notin \overline{G} \end{cases}. \quad (2.14)$$

Dabei ist die Matrix $D(x, y) = (D_{ki}(x, y))_{1 \leq k, i \leq 2}$ für $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \times \partial G$, $x \neq y$, durch

$$D(x, y) = P^{(y)} E(x, y) n(y) := ((P^{(y)} E_1(x, y) n(y))^t, (P^{(y)} E_2(x, y) n(y))^t)$$

gegeben. Die Komponenten lauten

$$D_{ii}(x, y) = (\mu A - \alpha B) \frac{\langle x - y, n(y) \rangle}{|x - y|^2} + 2B(\alpha + \mu) \frac{\langle x - y, n(y) \rangle}{|x - y|^4} (x_i - y_i)^2$$

für $i \in \{1, 2\}$,

$$D_{ki}(x, y) = (\alpha A - \mu B) \frac{(x_i - y_i) n_k(y) - (x_k - y_k) n_i(y)}{|x - y|^2}$$

$$+ 2B(\alpha + \mu) \frac{\langle x - y, n(y) \rangle}{|x - y|^4} (x_i - y_i)(x_k - y_k) \text{ für } i \neq k.$$

Weiterhin gilt für reguläre Randpunkte x

$$\int_{\partial G} \left[E(x, y)(P_u n)(y) - D(x, y)u(y) \right] ds(y) = \frac{1}{2} u(x). \quad (2.15)$$

Beweis: Für $x \notin \overline{G}$ ergibt der zweite Greensche Satz (2.11) angewandt auf $u = u(y)$ und $v = v(y) := E_k(x, y)$

$$\int_{\partial G} \left[E_k(x, y) \cdot (P_u n)(y) - P^{(y)} E_k(x, y) n(y) \cdot u(y) \right] ds(y) = 0.$$

Wegen der Symmetrie von E und $D(x, y) = ((P^{(y)} E_1(x, y) n)^t, P^{(y)} E_2(x, y) n)^t$ gilt

$$\int_{\partial G} \left[E(x, y)(P_u n)(y) - D(x, y)u(y) \right] ds(y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für $x \in G$ hat $v(y) := E_k(x, y)$ eine Singularität in x . Bezeichne $B_\varepsilon = B[x, \varepsilon]$ eine Kugel um x mit Radius ε . Auf das Gebiet $G \setminus B_\varepsilon$ (mit nach außen weisender Normale n) läßt sich der zweite Greensche Satz anwenden. Demnach gilt

$$\begin{aligned} & \int_{\partial G} \left[E_k(x, y) \cdot (P_u n)(y) - P^{(y)} E_k(x, y) n(y) \cdot u(y) \right] ds(y) \\ &= \int_{\partial B_\varepsilon} \left[P^{(y)} E_k(x, y) n(y) \cdot u(y) - E_k(x, y) \cdot (P_u n)(y) \right] ds(y). \end{aligned} \quad (2.16)$$

In (2.16) ist der Grenzprozeß $\varepsilon \rightarrow 0$ durchzuführen. Wegen

$$\left| \int_{\partial B_\varepsilon} E_k(x, y) \cdot (P_u n)(y) ds(y) \right| \leq C \varepsilon \left(\ln \frac{1}{\varepsilon} + C \right) \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0$$

ist nur noch

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon} P^{(y)} E_k(x, y) n(y) \cdot u(y) ds(y) = u_k(x) \quad (2.17)$$

zu zeigen. Das Integral in (2.17) wird aufgespalten gemäß

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_\varepsilon} P^{(y)} E_k(x, y) n(y) \cdot u(y) ds(y) &= u(x) \cdot \int_{\partial B_\varepsilon} P^{(y)} E_k(x, y) n(y) ds(y) \\ &+ \int_{\partial B_\varepsilon} P^{(y)} E_k(x, y) n(y) \cdot [u(y) - u(x)] ds(y). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Da u in x stetig ist und D in $x = y$ einen Pol erster Ordnung hat, verschwindet der zweite Summand in (2.18) für $\varepsilon \rightarrow 0$. Durch

$$y(t) = x + \varepsilon \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$

ist eine Bijektion zwischen ∂B_ε und $[0, 2\pi[$ gegeben. Da $n(y)$ die auf den Mittelpunkt der Kugel B_ε gerichtete Normale ist, also

$$n(y) = \frac{x - y}{\varepsilon}$$

gilt, ergeben sich für die Komponenten von $P^{(y)}E_k(x, y)n(y)$ die Darstellungen

$$\begin{aligned} D_{kk}(x, y) &= (\mu A - \alpha B) \frac{1}{\varepsilon} + 2B(\alpha + \mu) \frac{1}{\varepsilon} \begin{cases} \cos^2 t & : k = 1 \\ \sin^2 t & : k = 2 \end{cases} , \\ D_{ki}(x, y) &= 2B(\alpha + \mu) \frac{1}{\varepsilon} \sin t \cos t \quad \text{für } k \neq i. \end{aligned}$$

Für den ersten Summanden in (2.18) gilt

$$\begin{aligned} u(x) \cdot \int_{\partial B_\varepsilon} P^{(y)}E_k(x, y)n(y) ds(y) &= u_k(x) [2\pi(\mu A - \alpha B) + 2\pi B(\alpha + \mu)] \\ &= u_k(x). \end{aligned}$$

Damit ist (2.17) bewiesen und die Behauptung ergibt sich durch Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ in (2.16). Für ein reguläres $x \in \partial G$ verläuft der Beweis ganz analog. Dabei ist (2.17) durch

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B_\varepsilon \cap G} P^{(y)}E_k(x, y)n(y) \cdot u(y) ds(y) = \frac{1}{2} u_k(x)$$

zu ersetzen. ■

Da eine bis in den Rand differenzierbare Lösung der Elastizitätsgleichung bereits durch die Werte von u und $P_u n$ auf ∂G festgelegt ist, werden im folgenden Flächenpotentiale untersucht.

Definition 2.15 Seien $\Gamma = \partial G$ und die Konstanten A, B wie in (2.13) gegeben. Für $\varphi \in C(\Gamma)$ heißt das Integral

$$\begin{aligned} U(x; \varphi) &= \int_{\Gamma} E(x, y) \varphi(y) ds(y) \\ &= \int_{\Gamma} \left[A \ln \frac{1}{|x-y|} \varphi(y) + B \frac{\langle x-y, \varphi(y) \rangle}{|x-y|^2} (x-y) \right] ds(y), \quad x \notin \Gamma \end{aligned} \quad (2.19)$$

Einfachschichtpotential mit Dichte φ im Punkt x . Für $\psi \in C(\Gamma)$ heißt das Integral

$$\begin{aligned} V(x; \psi) &= \int_{\Gamma} D(x, y) \psi(y) ds(y) \\ &= (\mu A - \alpha B) \int_{\Gamma} \frac{\langle x-y, n(y) \rangle}{|x-y|^2} \psi(y) ds(y) \\ &\quad + (\alpha A - \mu B) \int_{\Gamma} \frac{\langle x-y, \psi(y) \rangle n(y) - \langle n(y), \psi(y) \rangle (x-y)}{|x-y|^2} ds(y) \\ &\quad + 2B(\alpha + \mu) \int_{\Gamma} \frac{\langle x-y, n(y) \rangle \langle x-y, \psi(y) \rangle}{|x-y|^4} (x-y) ds(y), \quad x \notin \Gamma \end{aligned} \quad (2.20)$$

Doppelschichtpotential mit Dichte ψ im Punkt x .

Da U und V in $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ die Elastizitätsgleichung lösen, das heißt

$$\Delta^* U(x; \varphi) = 0 = \Delta^* V(x; \psi) \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$$

gilt, ist das Verhalten der Potentiale für $x \rightarrow \Gamma$ zu untersuchen. Wie in der klassischen Potentialtheorie (siehe [15]) sollen Sprungbeziehungen angegeben werden.

Zunächst ist festzustellen, daß unabhängig von der Randglätte das Doppelschichtpotential für $x \in \Gamma$ und $\psi \in C(\Gamma)$ nicht (als uneigentliches Integral) existiert, denn der Integrand des zweiten Summanden in (2.20) ist im Punkt $x = y$ stark singular. Das Problem läßt sich mit hölderstetigen Dichten ψ beheben. Darum wird die in Definition 2.15 erklärte Funktion V ab sofort mit Doppelschichtpotential erster Art bezeichnet. Hier soll ein anderer Weg besprochen werden, denn die in Kapitel 4 betrachtete Integralgleichung wird im Raum der stetigen Funktionen gelöst. In der Darstellung (2.20) lassen sich

die Parameter α, β so wählen, daß der nicht erwünschte Term verschwindet. Zusammen mit $\alpha + \beta = \lambda + \mu$ führt diese Forderung auf die Werte

$$\alpha = \frac{\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 3\mu} \quad \text{und} \quad \beta = \frac{(\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu)}{\lambda + 3\mu}.$$

Die dazu korrespondierende Matrix D wird mit \tilde{D} bezeichnet.

Definition 2.16 Für $\psi \in C(\Gamma)$ heißt das Integral

$$\begin{aligned} W(x; \psi) &= \int_{\Gamma} \tilde{D}(x, y) \psi(y) ds(y) \\ &= \tilde{A} \int_{\Gamma} \frac{\langle x - y, n(y) \rangle}{|x - y|^2} \psi(y) ds(y) \\ &\quad + \tilde{B} \int_{\Gamma} \frac{\langle x - y, n(y) \rangle \langle x - y, \psi(y) \rangle}{|x - y|^4} (x - y) ds(y), \quad x \notin \Gamma \end{aligned} \quad (2.21)$$

mit den Konstanten

$$\tilde{A} = \frac{1}{\pi} \frac{\mu}{\lambda + 3\mu}, \quad \tilde{B} = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 3\mu}$$

Doppelschichtpotential zweiter Art mit Dichte ψ im Punkt x .

Für Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^2$ werden f_- und f_+ mit

$$f_-(x) := \lim_{h \rightarrow 0, h > 0} f(x - hn(x)), \quad f_+(x) := \lim_{h \rightarrow 0, h > 0} f(x + hn(x)), \quad x \in \Gamma$$

eingeführt, vorausgesetzt die Limes existieren.

Satz 2.17 (Eigenschaften vom Einfachschichtpotential)

Sei $\Gamma = \partial G \in C^2$. Für $\varphi \in C(\Gamma)$ läßt sich das Einfachschichtpotential $U(x; \varphi)$, $x \notin \Gamma$ durch

$$U(x; \varphi) = \int_{\Gamma} E(x, y) \varphi(y) ds(y), \quad x \in \Gamma \quad (2.22)$$

zu einer in ganz \mathbb{R}^2 stetigen Funktion fortsetzen. Auf dem Rand gilt

$$U_-(x; \varphi) = U_+(x; \varphi), \quad x \in \Gamma$$

und

$$(NU(\cdot; \varphi)n(x))_{\pm}(x) = \int_{\Gamma} \overbrace{(N^{(z)}E(z, y)n(x))_{z=x}}^{\tilde{D}(y, x)} \varphi(y) ds(y) \mp \frac{1}{2} \varphi(x), \quad x \in \Gamma. \quad (2.23)$$

Die Integrale in (2.22) und (2.23) existieren als uneigentliche Integrale.

Beweis: Siehe [16, Chapter II]. ■

Satz 2.18 (Eigenschaften vom Doppelschichtpotential)

Sei $\Gamma \in C^2$. Für $\psi \in C(\Gamma)$ läßt sich das Doppelschichtpotential zweiter Art

$$W(x; \psi) = \int_{\Gamma} \tilde{D}(x, y)\psi(y) ds(y), \quad x \notin \Gamma$$

von G nach \overline{G} und von $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{G}$ nach $\mathbb{R}^2 \setminus G$ stetig fortsetzen mit den Werten

$$W_{\pm}(x; \psi) = \int_{\Gamma} \tilde{D}(x, y)\psi(y) ds(y) \pm \frac{1}{2} \psi(x), \quad x \in \Gamma. \quad (2.24)$$

Das Integral in (2.24) existiert als uneigentliches Integral. Für die Normalableitung gilt

$$(NW(\cdot; \psi)n(x))_{+}(x) = (NW(\cdot; \psi)n(x))_{-}(x), \quad x \in \Gamma. \quad (2.25)$$

Beweis: Siehe [16, Chapter II]. Beispielsweise ist für konstante Dichten ψ die Aussage (2.24) den Darstellungsformeln (2.14) und (2.15) zu entnehmen. ■

Satz 2.19 Für $\Gamma \in C^2$ hat der Randintegraloperator

$$(K\psi)(x) = 2 \int_{\Gamma} \tilde{D}(x, y)\psi(y) ds(y), \quad x \in \Gamma$$

die Abbildungseigenschaften

$$K : C(\Gamma) \longrightarrow C^{0,\alpha}(\Gamma), \quad C^{0,\alpha}(\Gamma) \longrightarrow C^{1,\alpha}(\Gamma)$$

und ist beschränkt.

Beweis: Dieses aus der klassischen Potentialtheorie (für die Helmholtzgleichung siehe [3, Chapter 2]) bekannte Resultat soll hier ohne Beweis angeführt werden. ■

Kapitel 3

Substitutionsmethode

3.1 Euler-Maclaurin Formeln

Zunächst sollen für Quadraturformeln niedriger Ordnung, zum Beispiel

$$\int_a^b g(x) dx \approx h \sum_{j=0}^n{}' g(a + jh) \quad (\text{Trapezregel}),$$

$$\int_a^b g(x) dx \approx h \sum_{j=1}^n g\left(a + \frac{2j-1}{2}h\right) \quad (\text{Mittelpunktregel})$$

mit $n \in \mathbb{N}$ und $h = (b-a)/n$, Fehlerdarstellungen hergeleitet werden. Dabei wird unter \sum' die gewöhnliche Summe verstanden, deren erster und letzter Summand halbiert wird.

Definition 3.1 *Die durch*

$$\sum_{j=0}^{m-1} \binom{m}{j} B_j(x) = mx^{m-1}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad m \in \mathbb{N},$$

rekursiv definierten Polynome $B_j(x)$ heißen Bernoullipolynome und die Werte $B_j := B_j(0)$ heißen Bernoullizahlen.

Die ersten Polynome lauten

$$B_0(x) = 1, \quad B_1(x) = x - \frac{1}{2}, \quad B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}.$$

Lemma 3.2 *Die Bernoullipolynome besitzen die folgenden Eigenschaften*

1. $\int_0^1 B_m(x) dx = \begin{cases} 1 & : m = 0 \\ 0 & : m \geq 1 \end{cases}$,
2. $B'_m(x) = mB_{m-1}(x)$,
3. $B_m(x+1) - B_m(x) = mx^{m-1}$,
4. $B_m(1-x) = (-1)^m B_m(x)$,
5. $B_m(0) = B_m(1)$ für $m \neq 1$,
6. $B_{2m+1}(0) = B_{2m+1}(1) = B_{2m+1}(\frac{1}{2}) = 0$ für $m \geq 1$.
7. *Die ungeraden Bernoullipolynome besitzen in $[0, 1]$ keine weiteren Nullstellen. Die geraden Bernoullipolynome verschwinden weder in 0 noch in $\frac{1}{2}$.*

Beweis: Für einen Beweis sei auf [25] verwiesen. ■

Die ersten von Null verschiedenen Bernoullizahlen lauten

$$\begin{aligned} B_0 &= 1, & B_1 &= -\frac{1}{2}, & B_2 &= \frac{1}{6}, & B_4 &= -\frac{1}{30}, & B_6 &= \frac{1}{42}, \\ B_8 &= -\frac{1}{30}, & B_{10} &= \frac{5}{66}, & B_{12} &= -\frac{691}{2730}, & B_{14} &= \frac{7}{6}, \\ B_{16} &= -\frac{3617}{510}, & B_{18} &= \frac{43867}{798}, & B_{20} &= -\frac{174611}{330}. \end{aligned}$$

Die Bernoullipolynome B_m werden ausgehend von $x \in [0, 1)$ periodisch mit Periode 1 fortgesetzt. Damit erhält man stückweise polynomiale Funktionen (die periodischen Bernoullifunktionen) \overline{B}_m , die für $m \neq 1$ stetig sind. \overline{B}_1 ist bis auf die Stellen $x \in \mathbb{Z}$ stetig.

Satz 3.3 (Euler-Maclaurinsche Summenformel)

Seien $n, m \in \mathbb{N}$, $0 \leq \vartheta \leq 1$ und $f \in C^m[0, n]$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{n-1} f(j + \vartheta) - \int_0^n f(x) dx \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{B_j(\vartheta)}{j!} [f^{(j-1)}(n) - f^{(j-1)}(0)] - \int_0^n \frac{\overline{B}_m(\vartheta - x)}{m!} f^{(m)}(x) dx. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Beweis: Sei zunächst $m > 1$. Durch fortlaufende partielle Integration erhält man für $k = 0, \dots, n-1$

$$\begin{aligned} & \int_k^{k+1} \frac{\overline{B}_m(\vartheta - x)}{m!} f^{(m)}(x) dx \\ &= \frac{B_m(\vartheta)}{m!} [f^{(m-1)}(k+1) - f^{(m-1)}(k)] + \int_k^{k+1} \frac{\overline{B}_{m-1}(\vartheta - x)}{(m-1)!} f^{(m-1)}(x) dx \\ &= \dots \\ &= \sum_{j=2}^m \frac{B_j(\vartheta)}{j!} [f^{(j-1)}(k+1) - f^{(j-1)}(k)] + \int_k^{k+1} \frac{\overline{B}_1(\vartheta - x)}{1!} f'(x) dx. \end{aligned}$$

Dabei sind die Periodizität von \overline{B}_m und Eigenschaft 2 von Lemma 3.2 eingegangen. Beim letzten Integral muß wegen der Unstetigkeit von \overline{B}_1 in \mathbb{Z} der Integrationsbereich aufgespalten werden.

$$\begin{aligned} & \int_k^{k+1} \overline{B}_1(\vartheta - x) f'(x) dx \\ &= \int_k^{k+\vartheta} \overline{B}_1(\vartheta - x) f'(x) dx + \int_{k+\vartheta}^{k+1} \overline{B}_1(\vartheta - x) f'(x) dx \\ &= \int_0^\vartheta \left(\vartheta - x - \frac{1}{2} \right) f'(x+k) dx + \int_\vartheta^1 \left(\vartheta - x + \frac{1}{2} \right) f'(x+k) dx \\ &= -f(\vartheta+k) + B_1(\vartheta) [f(k+1) - f(k)] + \int_k^{k+1} f(x) dx, \end{aligned}$$

denn $\overline{B}_1(x) = x - \frac{1}{2}$ für $0 \leq x < 1$. Insgesamt ergibt das

$$\begin{aligned} & f(k+\vartheta) - \int_k^{k+1} f(x) dx \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{B_j(\vartheta)}{j!} [f^{(j-1)}(k+1) - f^{(j-1)}(k)] - \int_k^{k+1} \frac{\overline{B}_m(\vartheta - x)}{m!} f^{(m)}(x) dx. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Die Gleichung stimmt offenbar auch für $m = 1$. Durch Summation $\sum_{k=0}^{n-1}$ von (3.2) erhält man (3.1). ■

Als nächstes sollen die 2 Spezialfälle $\vartheta = 0$ und $\vartheta = 1/2$ betrachtet werden.

Korollar 3.4 (Trapezregel)

Seien $n, q \in \mathbb{N}$, $h = (b - a)/n$, $g \in C^{2q-1}[a, b] \cap C^{2q+1}(a, b)$ mit $g^{(2q)}$ beschränkt auf (a, b) und $g^{(2q+1)} \in L^1[a, b]$. Der Fehler bei der Trapezregel läßt sich durch

$$\begin{aligned} E_n(g) &:= h \sum_{j=0}^{n-1} g(a + jh) - \int_a^b g(x) dx \\ &= \sum_{j=1}^q \frac{B_{2j}}{(2j)!} [g^{(2j-1)}(b) - g^{(2j-1)}(a)] h^{2j} + h^{2q+1} \int_a^b \frac{\overline{B}_{2q+1}\left(\frac{x-a}{h}\right)}{(2q+1)!} g^{(2q+1)}(x) dx \end{aligned}$$

darstellen. Sei zusätzlich $g^{(2j-1)}(b) = g^{(2j-1)}(a)$, $j = 1, \dots, q$. Dann gilt

$$|E_n(g)| \leq \frac{C}{n^{2q+1}}$$

mit einer von n unabhängigen Konstanten $C > 0$. Beispielsweise kann

$$C = 2 \left(\frac{b-a}{2\pi} \right)^{2q+1} \|g^{(2q+1)}\|_{L^1[a,b]} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2q+1}}$$

gewählt werden.

Beweis: Sei zunächst $g \in C^{2q+1}[a, b]$. Wende auf $f(y) := g(a + hy)$ und $\vartheta = 0$ die Euler-Maclaurin Formel an.

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^{n-1} g(a + jh) - \int_0^n g(a + hy) dy \\ &= \sum_{j=1}^{2q+1} \frac{B_j}{j!} [g^{(j-1)}(b) - g^{(j-1)}(a)] h^{j-1} - h^{2q+1} \int_0^n \frac{\overline{B}_{2q+1}(-y)}{(2q+1)!} g^{(2q+1)}(a + hy) dy. \end{aligned}$$

Wegen $\overline{B}_{2q+1}(-y) = \overline{B}_{2q+1}(1 - y) = (-1)^{2q+1} \overline{B}_{2q+1}(y)$, $B_1(0) = -1/2$ und dem Verschwinden der Bernoullizahlen zu ungeradem Index liefert eine Substitution $x = a + hy$ und Multiplikation mit h

$$h \sum_{j=0}^{n-1} g(a + jh) - \int_a^b g(x) dx$$

$$= \sum_{j=1}^q \frac{B_{2j}}{(2j)!} [g^{(2j-1)}(b) - g^{(2j-1)}(a)] h^{2j} + h^{2q+1} \int_a^b \frac{\overline{B}_{2q+1}\left(\frac{x-a}{h}\right)}{(2q+1)!} g^{(2q+1)}(x) dx.$$

Die partielle Integration

$$h \int_a^b \frac{\overline{B}_{2q+1}\left(\frac{x-a}{h}\right)}{(2q+1)!} g^{(2q+1)}(x) dx = - \int_a^b \frac{\overline{B}_{2q}\left(\frac{x-a}{h}\right)}{(2q)!} g^{(2q)}(x) dx$$

bleibt wegen $\overline{B}_{2q+1}(0) = 0$ auch unter den abgeschwächten Voraussetzungen an g richtig.

Die Wahl der Konstanten C ist aus der Fourierreihendarstellung der periodischen Bernoullifunktionen ablesbar. Für $j \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{\overline{B}_{2j}(x)}{(2j)!} &= (-1)^{j-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cos(2\pi kx)}{(2\pi k)^{2j}} \quad \text{und} \\ \frac{\overline{B}_{2j+1}(x)}{(2j+1)!} &= (-1)^{j-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \sin(2\pi kx)}{(2\pi k)^{2j+1}}. \end{aligned}$$

Demnach bleiben die Bernoullifunktionen durch

$$\left| \frac{\overline{B}_{2q+1}(x)}{(2q+1)!} \right| \leq \frac{2}{(2\pi)^{2q+1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2q+1}}$$

beschränkt. ■

Ein direkter Beweis der Trapezregel findet sich in [6, S.107-109].

Korollar 3.5 (Mittelpunktregel)

Seien n, q, h und g wie in Korollar 3.4. Für den Fehler bei der Mittelpunktregel gilt

$$\begin{aligned} &h \sum_{j=1}^n g\left(a + \frac{2j-1}{2}h\right) - \int_a^b g(x) dx \\ &= \sum_{j=1}^q \frac{B_{2j}\left(\frac{1}{2}\right)}{(2j)!} [g^{(2j-1)}(b) - g^{(2j-1)}(a)] h^{2j} \\ &\quad + h^{2q+1} \int_a^b \frac{\overline{B}_{2q+1}\left(\frac{1}{2} + \frac{x-a}{h}\right)}{(2q+1)!} g^{(2q+1)}(x) dx \end{aligned}$$

Beweis: Setze $\vartheta = 1/2$, $B_1(\vartheta) = 0$ und $\overline{B}_{2q+1}(\frac{1}{2} - y) = -\overline{B}_{2q+1}(\frac{1}{2} + y)$ in Satz 3.3 ein. \blacksquare

Für Funktionen mit Singularitäten am Intervallende sind die obigen Korollare nicht anwendbar. Deshalb wird für solche Integranden am Ende des Kapitels 3.1 die Substitutionsmethode vorgestellt. Dort sollen auch die Konvergenzordnung und Fehlerkonstante ermittelt werden. Deshalb ist für eine weitere Funktionenklasse der Fehler bei der Rechteckregel anzugeben. In den Arbeiten [21] und [22] von Navot wird die Euler-Maclaurin-Formel auf Integranden der Form $f(x) = x^{-s}g(x)$ und $f(x) = g(x)\ln x$ erweitert. Die Resultate werden nochmals mit Beweis angeführt.

Satz 3.6 Seien $n, q \in \mathbb{N}$, $0 < \vartheta \leq 1$, $0 < s < 1$ und $f(x) = x^{-s}g(x)$ mit $g \in C^{2q+1}[0, n]$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{n-1} f(j + \vartheta) - \int_0^n f(x) dx \\ &= \sum_{j=1}^{2q-1} \frac{B_j(\vartheta)}{j!} f^{(j-1)}(n) + \sum_{k=0}^{2q-1} \frac{c_k(s, \vartheta)}{k!} g^{(k)}(0) + R(f, \vartheta, s, q) \end{aligned} \quad (3.3)$$

mit den Konstanten

$$\begin{aligned} c_k(s, \vartheta) &:= - \sum_{j=1}^{2q} \frac{B_j(\vartheta)}{j!} \frac{d^{j-1}}{dx^{j-1}} x^{k-s} \Big|_{x=1} + \vartheta^{k-s} - \frac{1}{k-s+1} \\ &\quad - \int_1^\infty \frac{\overline{B}_{2q}(\vartheta-x)}{(2q)!} \frac{d^{2q}}{dx^{2q}} x^{k-s} dx, \quad k = 0, \dots, 2q-1 \end{aligned}$$

und dem Restglied

$$\begin{aligned} R(f, \vartheta, s, q) &:= \int_n^\infty \frac{\overline{B}_{2q}(\vartheta-x) - B_{2q}(\vartheta)}{(2q)!} \frac{d^{2q}}{dx^{2q}} [x^{-s} p_{2q-1}(x)] dx \\ &\quad - \int_0^n \frac{\overline{B}_{2q}(\vartheta-x) - B_{2q}(\vartheta)}{(2q)!} \frac{d^{2q}}{dx^{2q}} [x^{-s} r(x)] dx. \end{aligned}$$

Dabei ist

$$p_{2q-1}(x) = \sum_{j=0}^{2q-1} \frac{g^{(j)}(0)}{j!} x^j$$

das Taylorpolynom vom Grad $2q - 1$ und

$$r(x) = g(x) - p_{2q-1}(x)$$

das zugehörige Restglied.

Beweis: Es gilt die Taylorsche Formel

$$g(x) = p_{2q-1}(x) + r(x).$$

Das Restglied r hat die Integraldarstellung

$$r(x) = \frac{g^{(2q)}(0)}{(2q)!} x^{2q} + \int_0^x \frac{(x-t)^{2q}}{(2q)!} g^{(2q+1)}(t) dt.$$

Dann hat f die Gestalt

$$f(x) = x^{-s} p_{2q-1}(x) + x^{-s} r(x)$$

und

$$\sum_{j=0}^{n-1} f(j + \vartheta) - \int_0^n f(x) dx = E_n^{(1)} + E_n^{(2)} + E_n^{(3)}$$

setzt sich aus den drei Fehleranteilen

$$\begin{aligned} E_n^{(1)} &= x^{-s} p_{2q-1}(x) \Big|_{x=\vartheta} - \int_0^1 x^{-s} p_{2q-1}(x) dx, \\ E_n^{(2)} &= \sum_{j=1}^{n-1} x^{-s} p_{2q-1}(x) \Big|_{x=j+\vartheta} - \int_1^n x^{-s} p_{2q-1}(x) dx, \\ E_n^{(3)} &= \sum_{j=0}^{n-1} x^{-s} r(x) \Big|_{x=j+\vartheta} - \int_0^n x^{-s} r(x) dx \end{aligned}$$

zusammen. Dabei ist aus Notationsgründen auf die explizite Angabe der ϑ - und s -Abhängigkeit verzichtet worden. Die einzelnen Summanden werden der Reihe nach berechnet.

$$\begin{aligned} E_n^{(1)} &= \vartheta^{-s} p_{2q-1}(\vartheta) - \sum_{k=0}^{2q-1} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} \int_0^1 x^{k-s} dx \\ &= \sum_{k=0}^{2q-1} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} \left[\vartheta^{k-s} - \frac{1}{k-s+1} \right]. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Da $x^{-s}p_{2q-1}$ auf $[1, n]$ unendlich oft differenzierbar ist, liefert die Euler-Maclaurin-Formel (3.1) mit $m = 2q$

$$\begin{aligned}
E_n^{(2)} &= \sum_{j=0}^{n-2} (x+1)^{-s} p_{2q-1}(x+1) \Big|_{x=j+\vartheta} - \int_0^{n-1} (x+1)^{-s} p_{2q-1}(x+1) dx \\
&= \sum_{j=1}^{2q} \frac{B_j(\vartheta)}{j!} \frac{d^{j-1}}{dx^{j-1}} [(x+1)^{-s} p_{2q-1}(x+1)] \Big|_{x=0}^{x=n-1} \\
&\quad - \int_0^{n-1} \frac{\overline{B}_{2q}(\vartheta-x)}{(2q)!} \frac{d^{2q}}{dx^{2q}} [(x+1)^{-s} p_{2q-1}(x+1)] dx \\
&= \sum_{j=1}^{2q} \frac{B_j(\vartheta)}{j!} \frac{d^{j-1}}{dx^{j-1}} [x^{-s} p_{2q-1}(x)] \Big|_{x=1}^{x=n} \\
&\quad - \int_1^n \frac{\overline{B}_{2q}(\vartheta-x)}{(2q)!} \frac{d^{2q}}{dx^{2q}} [x^{-s} p_{2q-1}(x)] dx. \tag{3.5}
\end{aligned}$$

Offenbar ist $r \in C^{2q+1}[0, n]$ mit $r^{(j)}(0) = 0$, $j = 0, \dots, 2q-1$. Also gilt $x^{-s}r \in C^{2q}[0, n]$ mit

$$\frac{d^{j-1}}{dx^{j-1}} [x^{-s}r(x)]_{x=0} = 0, \quad j = 1, \dots, 2q-1.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
E_n^{(3)} &= \sum_{j=1}^{2q} \frac{B_j(\vartheta)}{j!} \frac{d^{j-1}}{dx^{j-1}} [x^{-s}r(x)] \Big|_{x=0}^{x=n} \\
&\quad - \int_0^n \frac{\overline{B}_{2q}(\vartheta-x)}{(2q)!} \frac{d^{2q}}{dx^{2q}} [x^{-s}r(x)] dx \\
&= \sum_{j=1}^{2q-1} \frac{B_j(\vartheta)}{j!} \frac{d^{j-1}}{dx^{j-1}} [x^{-s}r(x)] \Big|_{x=n} \\
&\quad - \int_0^n \frac{\overline{B}_{2q}(\vartheta-x) - B_{2q}(\vartheta)}{(2q)!} \frac{d^{2q}}{dx^{2q}} [x^{-s}r(x)] dx. \tag{3.6}
\end{aligned}$$

Unter Verwendung von

$$\int_n^\infty \frac{\overline{B}_{2q}(\vartheta-x)}{(2q)!} \frac{d^{2q}}{dx^{2q}} [x^{-s}p_{2q-1}(x)] dx + \frac{B_{2q}(\vartheta)}{(2q)!} \frac{d^{2q-1}}{dx^{2q-1}} [x^{-s}p_{2q-1}(x)] \Big|_{x=n}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_0^n \frac{\overline{B}_{2q}(\vartheta - x) - B_{2q}(\vartheta)}{(2q)!} \frac{d^{2q}}{dx^{2q}} [x^{-s} r(x)] dx \\
&= \int_n^\infty \frac{\overline{B}_{2q}(\vartheta - x) - B_{2q}(\vartheta)}{(2q)!} \frac{d^{2q}}{dx^{2q}} [x^{-s} p_{2q-1}(x)] dx \\
& - \int_0^n \frac{\overline{B}_{2q}(\vartheta - x) - B_{2q}(\vartheta)}{(2q)!} \frac{d^{2q}}{dx^{2q}} [x^{-s} r(x)] dx \\
&= R(f, \vartheta, s, q)
\end{aligned}$$

liefert die Addition der Gleichungen (3.4), (3.5) und (3.6)

$$\begin{aligned}
& E_n^{(1)} + E_n^{(2)} + E_n^{(3)} \\
&= \sum_{j=1}^{2q-1} \frac{B_j(\vartheta)}{j!} f^{(j-1)}(n) + \sum_{k=0}^{2q-1} \frac{c_k(s, \vartheta)}{k!} g^{(k)}(0) + R(f, \vartheta, s, q)
\end{aligned}$$

mit den bereits definierten Konstanten $c_k(s, \vartheta)$ und dem Restglied $R(f, \vartheta, s, q)$. Die uneigentlichen Integrale existieren, denn die periodischen Bernoullifunktionen sind beschränkt und damit verhalten sich die Integranden im ungünstigsten Fall wie $O(x^{-s-1})$. ■

Korollar 3.7

Seien $n, q \in \mathbb{N}$, $0 < \vartheta \leq 1$, $h = 2\pi/n$, $0 < s < 1$ und $f(x) = x^{-s} g(x)$ mit $g \in C^{2q+1}[0, 2\pi]$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
E_n(f) &:= h \sum_{j=0}^{n-1} f((j + \vartheta)h) - \int_0^{2\pi} f(x) dx \\
&= \sum_{j=1}^{2q-1} \frac{B_j(\vartheta)}{j!} f^{(j-1)}(2\pi) h^j + \sum_{k=0}^{2q-1} \frac{c_k(s, \vartheta)}{k!} g^{(k)}(0) h^{k+1-s} + h^{2q} R(f)
\end{aligned} \tag{3.7}$$

mit den Konstanten $c_k(s, \vartheta)$ wie in Satz 3.6 und

$$\begin{aligned}
R(f) &:= \int_{2\pi}^\infty \frac{\overline{B}_{2q}(\vartheta - \frac{x}{h}) - B_{2q}(\vartheta)}{(2q)!} \frac{d^{2q}}{dx^{2q}} [x^{-s} p_{2q-1}(x)] dx \\
& - \int_0^{2\pi} \frac{\overline{B}_{2q}(\vartheta - \frac{x}{h}) - B_{2q}(\vartheta)}{(2q)!} \frac{d^{2q}}{dx^{2q}} [x^{-s} r(x)] dx.
\end{aligned}$$

Beweis: Zunächst werden die Funktionen

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x) &:= f(hx), \quad 0 < x \leq n, \\ \tilde{g}(x) &:= h^{-s}g(hx), \quad 0 \leq x \leq n, \\ \tilde{p}_{2q-1}(x) &:= h^{-s}p_{2q-1}(hx), \quad 0 \leq x \leq n \\ \text{und } \tilde{r}(x) &:= h^{-s}r(hx), \quad 0 \leq x \leq n\end{aligned}$$

erklärt. Nun läßt sich der vorhergehende Satz anwenden, denn

$$\tilde{f}(x) = x^{-s}\tilde{g}(x) = x^{-s}\tilde{p}_{2q-1}(x) + x^{-s}\tilde{r}(x), \quad 0 < x \leq n$$

mit $\tilde{g} \in C^{2q+1}[0, n]$, dem Taylorpolynom \tilde{p}_{2q-1} und Restglied \tilde{r} . Unter Verwendung von

$$\begin{aligned}\tilde{f}^{(j-1)}(n) &= h^{j-1}f^{(j-1)}(2\pi), \quad j = 1, \dots, 2q-1, \\ \tilde{g}^{(k)}(0) &= h^{-s}h^k g^{(k)}(0), \quad k = 0, \dots, 2q-1\end{aligned}$$

ergibt Multiplikation von (3.3) mit h

$$\begin{aligned}E_n(f) &= \sum_{j=1}^{2q-1} \frac{B_j(\vartheta)}{j!} f^{(j-1)}(2\pi) h^j + \sum_{k=0}^{2q-1} \frac{c_k(s, \vartheta)}{k!} g^{(k)}(0) h^{k+1-s} \\ &\quad + hR(\tilde{f}, \vartheta, s, q).\end{aligned}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned}hR(\tilde{f}, \vartheta, s, q) &= h \int_n^\infty \frac{\overline{B}_{2q}(\vartheta - x) - B_{2q}(\vartheta)}{(2q)!} \frac{d^{2q}}{dx^{2q}} [x^{-s}\tilde{p}_{2q-1}(x)] dx \\ &\quad - h \int_0^n \frac{\overline{B}_{2q}(\vartheta - x) - B_{2q}(\vartheta)}{(2q)!} \frac{d^{2q}}{dx^{2q}} [x^{-s}\tilde{r}(x)] dx \\ &= h^{2q} \int_{2\pi}^\infty \frac{\overline{B}_{2q}(\vartheta - \frac{x}{h}) - B_{2q}(\vartheta)}{(2q)!} \frac{d^{2q}}{dx^{2q}} [x^{-s}p_{2q-1}(x)] dx \\ &\quad - h^{2q} \int_0^{2\pi} \frac{\overline{B}_{2q}(\vartheta - \frac{x}{h}) - B_{2q}(\vartheta)}{(2q)!} \frac{d^{2q}}{dx^{2q}} [x^{-s}r(x)] dx \\ &= h^{2q}R(f)\end{aligned}$$

mit dem oben angegebenenem $R(f)$. ■

Nun soll für Funktionen der Form $f(x) = g(x) \ln x$ ein analoges Resultat gezeigt werden.

Satz 3.8 Seien $n, q \in \mathbb{N}$, $0 < \vartheta \leq 1$, $h = 2\pi/n$ und $f(x) = g(x) \ln x$ mit $g \in C^{2q+1}[0, 2\pi]$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
E_n(f) &:= h \sum_{j=0}^{n-1} f((j+\vartheta)h) - \int_0^{2\pi} f(x) dx \\
&= \sum_{j=1}^{2q-1} \frac{B_j(\vartheta)}{j!} [f^{(j-1)}(2\pi) - g^{(j-1)}(0) \ln h] h^j - \frac{B_{2q}(\vartheta)}{(2q)!} g^{(2q-1)}(0) h^{2q} \ln h \\
&\quad - \sum_{k=0}^{2q-1} \frac{c'_k(0, \vartheta)}{k!} g^{(k)}(0) h^{k+1} + h^{2q} \lim_{s \rightarrow 0+} \frac{d}{d(-s)} R(x^{-s} g(x)), \quad (3.8)
\end{aligned}$$

wobei

$$c'_k(0, \vartheta) := \lim_{s \rightarrow 0+} \frac{d}{d(-s)} c_k(s, \vartheta)$$

mit den Konstanten $c_k(s, \vartheta)$ und dem Restglied $R(x^{-s} g(x))$ wie in Korollar 3.7.

Beweis: Differentiation von (3.7) nach $-s$

$$\begin{aligned}
&h \sum_{j=0}^{n-1} x^{-s} g(x) \ln x \Big|_{x=(j+\vartheta)h} - \int_0^{2\pi} x^{-s} g(x) \ln x dx \\
&= \sum_{j=1}^{2q-1} \frac{B_j(\vartheta)}{j!} \frac{d^{j-1}}{dx^{j-1}} [x^{-s} g(x) \ln x]_{x=2\pi} h^j \\
&\quad + \int_{k=0}^{2q-1} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} \frac{d}{d(-s)} [c_k(s, \vartheta) h^{k+1-s}] + h^{2q} \frac{d}{d(-s)} R(x^{-s} g(x))
\end{aligned}$$

und Grenzübergang $\lim_{s \rightarrow 0+}$ liefert

$$\begin{aligned}
E_n(f) &= h \sum_{j=0}^{n-1} f((j+\vartheta)h) - \int_0^{2\pi} f(x) dx \\
&= \sum_{j=1}^{2q-1} \frac{B_j(\vartheta)}{j!} f^{(j-1)}(2\pi) h^j \\
&\quad + \int_{k=0}^{2q-1} \frac{g^{(k)}(0)}{k!} [c'_k(0, \vartheta) + c_k(0, \vartheta) \ln h] h^{k+1}
\end{aligned}$$

$$+h^{2q} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{d(-s)} R(x^{-s} g(x)), \quad (3.9)$$

wobei $c_k(0, \vartheta) := \lim_{s \rightarrow 0+} c_k(s, \vartheta)$ gesetzt wurde. Bisher sind der Satz von Schwarz (Vertauschung der Differentiationsreihenfolge),

$$\lim_{s \rightarrow 0+} \frac{d^{j-1}}{dx^{j-1}} [x^{-s} g(x) \ln x] \Big|_{x=2\pi} = \frac{d^{j-1}}{dx^{j-1}} [g(x) \ln x] \Big|_{x=2\pi}$$

(wegen Leibniz-Formel) und die klassischen Resultate über die Vertauschung von Grenzprozessen bei parameterabhängigen Integralen eingegangen. Es bleibt nur noch die Existenz der Grenzwerte

$$\lim_{s \rightarrow 0+} \frac{d}{d(-s)} R(x^{-s} g(x)), \quad \lim_{s \rightarrow 0+} \frac{d}{d(-s)} c_k(s, \vartheta) \quad \text{und} \quad \lim_{s \rightarrow 0+} c_k(s, \vartheta)$$

zu klären. Exemplarisch wird dies für $c_k(s, \vartheta)$ durchgeführt. Dazu wird

$$\lim_{s \rightarrow 0+} \int_1^\infty \frac{\overline{B}_{2q}(\vartheta - x)}{(2q)!} \frac{d^{2q}}{dx^{2q}} x^{k-s} dx = 0, \quad k = 0, \dots, 2q - 1 \quad (3.10)$$

gezeigt. Zur Vertauschung von $\lim_{s \rightarrow 0}$ und \int_1^∞ muß unter anderem der Integrand durch eine von s unabhängige integrierbare Majorante abgeschätzt werden. Im Fall $k = 2q - 1$ verhält sich dieser aber wie $O(x^{-1-s})$ und $\int_1^\infty x^{-1} dx$ existiert nicht. Wegen

$$\begin{aligned} & \int_1^\infty \frac{\overline{B}_{2q}(\vartheta - x)}{(2q)!} \frac{d^{2q}}{dx^{2q}} x^{k-s} dx \\ &= - \frac{\overline{B}_{2q+1}(\vartheta - x)}{(2q+1)!} \frac{d^{2q}}{dx^{2q}} x^{k-s} \Big|_1^\infty + \int_1^\infty \frac{\overline{B}_{2q+1}(\vartheta - x)}{(2q+1)!} \frac{d^{2q+1}}{dx^{2q+1}} x^{k-s} dx \\ &= \frac{B_{2q+1}(\vartheta)}{(2q+1)!} (k-s)(k-s-1) \cdots (k-s-2q+1) \\ & \quad + \int_1^\infty \frac{\overline{B}_{2q+1}(\vartheta - x)}{(2q+1)!} \frac{d^{2q+1}}{dx^{2q+1}} x^{k-s} dx \\ & \longrightarrow 0, \quad s \rightarrow 0, \quad k = 0, \dots, 2q - 1 \end{aligned}$$

ergibt sich (3.10), denn der letzte Integrand bleibt durch Cx^{-2} (mit einer geeigneten Konstante C unabhängig von s) beschränkt. Weiter gilt

$$\lim_{s \rightarrow 0+} c_k(s, \vartheta) = - \sum_{j=1}^{2q} \frac{B_j(\vartheta)}{j!} \lim_{s \rightarrow 0+} \frac{d^{j-1}}{dx^{j-1}} x^{k-s} \Big|_{x=1} + \vartheta^k - \frac{1}{k+1} + 0$$

$$\begin{aligned}
&= - \sum_{j=1}^{2q} \frac{B_j(\vartheta)}{j!} \frac{d^{j-1}}{dx^{j-1}} x^k \Big|_{x=0}^{x=1} - \frac{B_{k+1}(\vartheta)}{(k+1)!} \frac{d^k}{dx^k} x^k \Big|_{x=0} \\
&\quad + \vartheta^k - \frac{1}{k+1} \\
&= - \frac{B_{k+1}(\vartheta)}{k+1}. \tag{3.11}
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde von (3.2) mit $f(x) = x^k$ auf $[0, 1]$ und $m = 2q$ Gebrauch gemacht. Setzt man (3.11) in (3.9) ein, ergibt das die Behauptung. ■

Die Idee der Substitutionsmethode besteht darin, bei Integranden mit Endpunktsingularitäten nicht direkt die Trapezregel anzuwenden, sondern zunächst eine geeignete Substitution durchzuführen. Gesucht ist

$$\int_0^{2\pi} g(t) dt,$$

wobei g glatt in $]0, 2\pi[$ ist, aber Singularitäten in $t = 0$ und $t = 2\pi$ besitzt. Sei

$$w : [0, 2\pi] \rightarrow [0, 2\pi]$$

bijektiv, streng monoton wachsend und hinreichend oft differenzierbar. Desweiteren habe w in 0 und $2\pi - w$ in 2π Nullstellen höherer Ordnung. Wegen

$$\int_0^{2\pi} g(t) dt = \int_0^{2\pi} h(s) ds$$

$$\text{mit } h(s) := w'(s)g(w(s)), 0 < s < 2\pi,$$

liefert die Trapezregel angewandt auf den substituierten Integranden eine Quadraturformel

$$\int_0^{2\pi} g(t) dt \approx \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^{2n-1} \alpha_j^{(n)} g\left(s_j^{(n)}\right) = Q_n(g) \tag{3.12}$$

mit den Gewichten

$$\alpha_j^{(n)} = w' \left(\frac{j\pi}{n} \right)$$

und den Stützstellen

$$s_j^{(n)} = w \left(\frac{j\pi}{n} \right)$$

für $j = 1, \dots, 2n - 1$. Aufgrund der Wahl von w verschwindet h an den Intervallenden, so daß in (3.12) die Randterme nicht auftreten. Beispiele von Substitutionsfunktionen werden in Kapitel 3.2 behandelt.

Im folgenden soll der Quadraturformelfehler für Funktionen $g \in S^{m,\alpha}$ abgeschätzt werden. Dazu betrachte Substitutionen w , für die w in 0 und $2\pi - w$ in 2π Nullstellen der Ordnung p besitzt.

Definition 3.9 *Es sei $w : [0, 2\pi] \rightarrow [0, 2\pi]$ eine bijektive, streng monoton wachsende Funktion. Dann heißt w zulässig mit Parameter $p \in \mathbb{N}$, falls $w \in C^{p+1}[0, 2\pi]$,*

$$\begin{aligned} 2\pi - w(2\pi - t) &= w(t) \text{ auf } [0, 2\pi], \\ w^{(m)}(0) = w^{(m)}(2\pi) &= 0 \text{ für } m = 1, \dots, p - 1 \end{aligned}$$

und $w^{(p)}(0) \neq 0, w^{(p)}(2\pi) \neq 0$ ist.

Für derartige Substitutionen gibt es Konstanten c_0, c_1 so, daß gilt

$$c_0 \left(\frac{j\pi}{n}\right)^{p-1} \leq \alpha_j^{(n)}, \alpha_{2n-j}^{(n)} \leq c_1 \left(\frac{j\pi}{n}\right)^{p-1}, \quad j = 1, \dots, n, \quad (3.13)$$

$$c_0 \left(\frac{j\pi}{n}\right)^p \leq s_j^{(n)}, 2\pi - s_{2n-j}^{(n)} \leq c_1 \left(\frac{j\pi}{n}\right)^p, \quad j = 1, \dots, n. \quad (3.14)$$

Satz 3.10 *Seien $g \in S^{2q+1,\alpha}$ mit $0 < \alpha \leq q$ und w zulässig mit Parameter $p \in \mathbb{N}$ derart, daß*

$$\alpha p \geq 2q + 1 \quad \text{und} \quad p > 2q + 1.$$

Dann gilt für den Fehler

$$E_{n,p}(g) := \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^{2n-1} \alpha_j^{(n)} g\left(s_j^{(n)}\right) - \int_0^{2\pi} g(t) dt$$

in der Quadraturformel (3.12)

$$|E_{n,p}(g)| \leq \frac{C}{n^{2q+1}} \|g\|_{2q+1,\alpha}$$

mit einer Konstanten $C = C(w, \alpha, q)$.

Beweis: Wegen $h(s) = w'(s)g(w(s))$ ist $h \in C[0, 2\pi] \cap C^{2q+1}(0, 2\pi)$. Hier gehen die Voraussetzungen $w \in C^{p+1}[0, 2\pi]$, $p+1 \geq 2q+2$ und die Definition des Funktionenraums $S^{2q+1, \alpha}$ (siehe (2.1)) ein. Es sind die übrigen Voraussetzungen von Korollar 3.4 nachzuprüfen. Die Ableitungen von h haben die Gestalt

$$h^{(m)}(s) = \sum_{j=0}^m u_j^m(s) g^{(j)}(w(s)), \quad m = 0, \dots, 2q+1. \quad (3.15)$$

Wegen

$$h^{(m+1)}(s) = \sum_{j=0}^m \left[u_j^m(s) w'(s) g^{(j+1)}(w(s)) + \left(\frac{d}{ds} u_j^m(s) \right) g^{(j)}(w(s)) \right]$$

ergeben sich für die Koeffizienten u_j^m die Rekursionsformeln

$$u_j^{m+1}(s) = \begin{cases} \frac{d}{ds} u_0^m(s) & : j = 0 \\ u_{j-1}^m(s) w'(s) + \frac{d}{ds} u_j^m(s) & : j = 1, \dots, m \\ u_m^m(s) w'(s) & : j = m+1 \end{cases} \quad (3.16)$$

Insbesondere gilt

$$u_0^m(s) = w^{(m+1)}(s) \quad \text{und} \quad u_m^m(s) = [w'(s)]^{m+1}. \quad (3.17)$$

Für den Nachweis

$$h^{(2m-1)}(0) = h^{(2m-1)}(2\pi) = 0, \quad m = 1, \dots, q$$

ist das asymptotische Verhalten von u_j^m bei 0 und 2π zu untersuchen. Dazu wird gezeigt, daß mit $z_j^m = p - 1 + jp - m$

$$\begin{aligned} u_j^m(s) &= O(s^{z_j^m}), \quad s \rightarrow 0 \quad \text{und} \\ u_j^m(s) &= O((2\pi - s)^{z_j^m}), \quad s \rightarrow 2\pi \end{aligned}$$

gilt. Die Forderung $p > 2q+1$ impliziert die Positivität der z_j^m , vorausgesetzt $0 \leq j \leq m \leq 2q$.

Nach Voraussetzung hat w' am linken Intervallende eine Nullstelle der Ordnung $p-1$. Formel (3.17) entnimmt man, daß

$$\begin{aligned} u_0^m(s) &= O(s^{p-(m+1)}), \quad s \rightarrow 0, \\ u_m^m(s) &= O(s^{(p-1)(m+1)}), \quad s \rightarrow 0 \end{aligned}$$

und damit sind

$$z_0^m = p - 1 - m \quad \text{und} \quad z_m^m = p - 1 + mp - m$$

die Nullstellenordnungen von u_0^m und u_m^m im Nullpunkt.

Die gewünschten Beziehungen für die anderen Indizes ergeben sich nun durch Induktion über m . Der Induktionsanfang $m = 0$ ($\Rightarrow j = 0$) ist erledigt. Sei die Aussage für m und $1 \leq j \leq m - 1$ (\Rightarrow auch für $0 \leq j \leq m$) bewiesen. Zu zeigen ist die Aussage für $m + 1$ und $j = 1, \dots, m$. Sei $j \in \{1, \dots, m\}$ fest gewählt. Wegen (3.16) ist

$$u_j^{m+1}(s) = u_{j-1}^m(s)w'(s) + \frac{d}{ds}u_j^m(s)$$

und damit gilt für die Nullstellenordnung z_j^{m+1} von u_j^{m+1}

$$\begin{aligned} z_j^{m+1} &= \min\{z_{j-1}^m + p - 1, z_j^m - 1\} \\ &= \min\{p - 1 + (j - 1)p - m + p - 1, p - 1 + jp - m - 1\} \\ &= p - 1 + jp - (m + 1). \end{aligned}$$

Die Argumentation an der Stelle 2π ist die gleiche.

Jetzt wird gezeigt, daß sich die Ableitungen von h bis zur Ordnung $2q - 1$ in die Endpunkte durch 0 stetig fortsetzen lassen. Es werden die einzelnen Summanden von (3.15) betrachtet.

Seien dazu $0 < s < 2\pi$ und $0 \leq j \leq m \leq 2q$. Da $g \in S^{2q+1, \alpha}$ ergibt sich aus (2.4)

$$|u_j^m(s)g^{(j)}(w(s))| \leq C |u_j^m(s)| [w(s)(2\pi - w(s))]^{\alpha - (j+1)}$$

und damit

$$\begin{aligned} |u_j^m(s)g^{(j)}(w(s))| &= O\left(s^{z_j^m + p(\alpha - j - 1)}\right) \\ &= O\left(s^{\alpha p - (m+1)}\right), \quad s \rightarrow 0, \\ |u_j^m(s)g^{(j)}(w(s))| &= O\left((2\pi - s)^{\alpha p - (m+1)}\right), \quad s \rightarrow 2\pi. \end{aligned}$$

Wegen $\alpha p - (m + 1) \geq \alpha p - (2q + 1) \geq 0$ bleibt jeder Summand aus (3.15) auf $[0, 2\pi]$ beschränkt. Insbesondere lassen sich die Summanden bis $j = 2q - 1$ durch 0 stetig in die Intervallenden fortsetzen. Bisher sind

1. $h \in C^{2q-1}[0, 2\pi] \cap C^{2q+1}(0, 2\pi)$,
2. $|h^{(2q)}(s)| \leq M$, $0 < s < 2\pi$ und
3. $h^{(2j-1)}(0) = h^{(2j-1)}(2\pi) = 0$, $j = 1, \dots, q$

nachgewiesen worden. Es bleibt nur noch zu zeigen, daß unter den angegebenen Voraussetzungen auch

$$\int_0^{2\pi} |h^{(2q+1)}(s)| ds < \infty$$

erfüllt ist. Dazu betrachte

$$f_j(s) := \frac{u_j^{2q+1}(s)}{w'(s) [w(s)(2\pi - w(s))]^{j - \frac{2q+1}{p}}}, \quad 0 < s < 2\pi, \quad j = 0, \dots, 2q+1.$$

Der Nenner ist auf $(0, 2\pi)$ positiv, hat aber bei 0 und 2π Nullstellen der Ordnung $p - 1 + jp - (2q + 1)$. Der Zähler u_j^{2q+1} hat dort Nullstellen der Ordnung

$$z_j^{2q+1} = p - 1 + jp - (2q + 1).$$

Die Funktionen f_j lassen sich demnach stetig nach 0 und 2π fortsetzen, das heißt $f_j \in C[0, 2\pi]$. Mit der Darstellung (3.15) folgert man

$$\begin{aligned} h^{(2q+1)}(s) &= \sum_{j=0}^{2q+1} u_j^{2q+1}(s) g^{(j)}(w(s)) \\ &= \sum_{j=0}^{2q+1} f_j(s) w'(s) [w(s)(2\pi - w(s))]^{j - \frac{2q+1}{p}} g^{(j)}(w(s)) \end{aligned}$$

und erhält mit der Substitution $t = w(s)$ sowie Bemerkung 2.6

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |h^{(2q+1)}(s)| ds &\leq \sum_{j=0}^{2q+1} \left\{ \|f_j\|_\infty \int_0^{2\pi} [t(2\pi - t)]^{j - \frac{2q+1}{p}} |g^{(j)}(t)| dt \right\} \\ &\leq C \|g\|_{2q+1, \alpha} < \infty \end{aligned}$$

und somit die Behauptung aus Korollar 3.4. ■

Korollar 3.11 Die Quadraturformel (3.12) hat positive Gewichte und konvergiert für $\varphi \in C[0, 2\pi]$.

Beweis: Die Monome x^k liegen offenbar in $S^{2q+1, \alpha}$, $0 < \alpha < 1$. Wegen Satz 3.10 konvergiert $(Q_n \varphi)$ für Polynome φ . Das Monotonieverhalten von w impliziert die Positivität der Gewichte $\alpha_j^{(n)}$. Mit dem Satz von Steklov ergibt sich die Behauptung. ■

In [7] wurde versucht, den Beweis von Satz 3.10 unter der Voraussetzung $2q + 1 \geq \alpha p > 2q$ zu führen. Diese Modifizierung in der Wahl der Parameter hätte zur Folge gehabt, daß im Beweis von Satz 4.5 der Abbruchparameter $r = 1$ gewählt werden kann. Aus dem nachfolgenden Beispiel wird jedoch deutlich, daß sich unter der abgeschwächten Voraussetzung die Konvergenzordnung von h^{2q+1} zu $h^{\alpha p}$ verringert, also die Aussage von Satz 3.10 nicht richtig bleibt.

Beispiel 3.12 Die Funktion g mit $g(t) = [t(2\pi - t)]^{1/2}$ liegt für $m \in \mathbb{N}$ und $0 < \alpha < 3/2$ in $S^{m, \alpha}$. Demnach ist mit $q = 2$, $p = 3$ und $\alpha = 1.49$ die Voraussetzung $2q + 1 \geq \alpha p > 2q$ erfüllt. In der Tabelle ist der Fehler bei Anwendung der Quadraturformel (3.12) und der Substitution aus Beispiel 3.17 dargestellt. Es gilt $E_{n,p} = O(h^{4.5})$ und nicht $E_{n,p} = O(h^5)$.

n	v kubisch	v linear
2	0.078487569233	1.319733506581
4	0.000667473504	0.003797460608
8	0.000035388559	0.000002919768
16	0.000001667491	0.000000154411
32	0.000000075893	0.000000007349
64	0.000000003402	0.000000000336
128	0.000000000151	0.000000000015
256	0.000000000007	0.000000000001

3.2 Beispiele von Substitutionsfunktionen

In diesem Abschnitt werden Transformationen w von polynomialer und trigonometrischer Art vorgestellt und hinsichtlich der Konvergenzordnung untersucht. Auf Substitutionen exponentieller Art wird wegen der overflow-/underflow-Problematik verzichtet. Einige Ansätze werden so modifiziert, daß $w'(\pi) = 2$ ist.

Beispiel 3.13 Die polynomiale Transformation

$$w_m(t) = \frac{2m+1}{(2\pi)^{2m}} \binom{2m}{m} \int_0^t [u(2\pi-u)]^m du, \quad m \in \mathbb{N} \quad (3.18)$$

wird von Korobov vorgeschlagen. Zunächst stellt man fest, daß

$$w_m(0) = 0 \quad \text{und} \quad w_m(2\pi) = 2\pi \quad \text{gilt, denn}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} [u(2\pi-u)]^m du &= \frac{m}{m+1} \int_0^{2\pi} u^{m+1}(2\pi-u)^{m-1} du \\ &\stackrel{\text{part. Int.}}{=} \dots \\ &= \frac{m(m-1)\dots 1}{(m+1)(m+2)\dots 2m} \int_0^{2\pi} u^{2m} du \\ &= \binom{2m}{m}^{-1} \frac{(2\pi)^{2m+1}}{2m+1}. \end{aligned}$$

Weiterhin ist

$$w'_m(t) = \frac{2m+1}{(2\pi)^{2m}} \binom{2m}{m} [t(2\pi-t)]^m > 0, \quad 0 < t < 2\pi.$$

Damit ist $w_m : [0, 2\pi] \rightarrow [0, 2\pi]$ bijektiv, streng monoton wachsend und unendlich oft differenzierbar. Außerdem gilt

$$\begin{aligned} w_m^{(j)}(0) &= w_m^{(j)}(2\pi) = 0, \quad j = 1, \dots, m, \\ w_m^{(m+1)}(0) &= w_m^{(m+1)}(2\pi) \neq 0. \end{aligned}$$

Die Gewichte und Stützstellen lauten damit

$$\begin{aligned}\alpha_j^{(n)} &= w'_m \left(\frac{j\pi}{n} \right) = \frac{2m+1}{(2\pi)^{2m}} \binom{2m}{m} \left[\frac{j\pi}{n} \left(2\pi - \frac{j\pi}{n} \right) \right]^m, \\ s_j^{(n)} &= w_m \left(\frac{j\pi}{n} \right) = \frac{2m+1}{(2\pi)^{2m}} \binom{2m}{m} \sum_{k=0}^m c_k \left(\frac{j\pi}{n} \right)^{m+1+k} \left(2\pi - \frac{j\pi}{n} \right)^{m-k},\end{aligned}$$

wobei sich die Koeffizienten

$$\begin{aligned}c_0 &= \frac{1}{m+1}, \\ c_k &= c_{k-1} \frac{m+1-k}{m+1+k}, \quad k = 1, \dots, m\end{aligned}$$

durch partielle Integration ergeben.

Mit der Stirlingschen Formel $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$ erhält man für den Anstieg von w_m in π

$$\begin{aligned}w'_m(\pi) &= \frac{2m+1}{4^m} \binom{2m}{m} \\ &\sim \frac{2m+1}{4^m} \frac{1}{\sqrt{\pi m}} 4^m \\ &\sim \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{m}.\end{aligned}\tag{3.19}$$

Für große m konzentrieren sich damit die Stützstellen $w_m\left(\frac{j\pi}{n}\right)$ in der Quadraturformel (3.12) an den Intervallenden.

Der Ansatz (3.18) wird so modifiziert, daß $w'_m(\pi) = 2$ ist. Dadurch wird garantiert, daß die Hälfte der Stützstellen äquidistant auf $[0, 2\pi]$ verteilt sind und die andere Hälfte sich an den Endpunkten konzentrieren.

Beispiel 3.14 Die Modifizierung soll durch eine Linearkombination von zwei Funktionen der Form

$$\vartheta_m(t) = \int_0^t [u(2\pi - u)]^m du, \quad m \in \mathbb{N}$$

erfolgen. Es wird

$$w_m(t) = a_m \vartheta_{m+1}(t) + b_m \vartheta_m(t), \quad a_m, b_m \in \mathbb{R}\tag{3.20}$$

gesetzt.

Die Forderungen $w_m(2\pi) = 2\pi$ und $w'_m(\pi) = 2$ führen auf

$$a_m = \frac{2m+3}{\pi^{2m+2}} \left[2 - \binom{2m}{m} \frac{2m+1}{4^m} \right]$$

und $b_m = \frac{2}{\pi^{2m}} - a_m \pi^2.$

Im Fall $m = 2$ sind beide Konstanten positiv, w_2 also streng monoton wachsend. Für $m \geq 3$ ist w_m ebenfalls zulässig, denn

$$\begin{aligned} w'_m(t) &= a_m \{ [t(2\pi - t)]^{m+1} - \pi^2 [t(2\pi - t)]^m \} + (a_m \pi^2 + b_m) [t(2\pi - t)]^m \\ &= (2m+3) \left[2 - \binom{2m}{m} \frac{2m+1}{4^m} \right] \left\{ \left[\frac{t}{\pi} \left(2 - \frac{t}{\pi} \right) \right]^{m+1} - \left[\frac{t}{\pi} \left(2 - \frac{t}{\pi} \right) \right]^m \right\} \\ &\quad + \frac{2}{\pi^{2m}} [t(2\pi - t)]^m \\ &> 0 \text{ für } 0 < t < 2\pi. \end{aligned}$$

In den Tabellen 3.3 und 3.4 ist der Fehler für $f(t) = 1$ bei Verwendung der Substitution (3.18) und deren Modifizierung (3.20) dargestellt. Die Werte in den Spalten $m = 2, \dots, 8$ konvergieren wie $h^4, h^4, h^6, h^6, h^8, h^8$ und h^{10} gegen Null. Die Konvergenzordnung λ , mit

$$\lambda = \begin{cases} m+1 & : m \text{ ungerade} \\ m+2 & : m \text{ gerade} \end{cases},$$

ist in beiden Fällen die gleiche.

Nach Korollar 3.4 läßt sich der Fehler durch

$$E_{n,m}(f) = c_m n^{-\lambda} + O(n^{-\lambda-2})$$

abschätzen. Für eine Beurteilung des Konvergenzverhaltens ist nicht nur die Ordnung, sondern auch die Kenntnis der Konstanten c_m wesentlich. Bei Verwendung der Trapezregel mit $2n$ Stützstellen ergibt sich

$$c_m = \frac{B_\lambda}{\lambda!} \frac{d^{\lambda-1}}{dt^{\lambda-1}} [f(w_m(t))w'_m(t)] \Big|_{t=0}^{t=2\pi} \pi^\lambda. \quad (3.21)$$

Tabelle 3.1: Eine Liste der ersten Koeffizienten zu Beispiel 3.14

m	a_m		b_m	
	exakt	Näherung	exakt	Näherung
2	$\frac{7}{2^3} \pi^{-6}$	9.10 E-4	$\frac{9}{2^3} \pi^{-4}$	1.15 E-2
3	$-\frac{27}{2^4} \pi^{-8}$	-1.78 E-4	$\frac{59}{2^4} \pi^{-6}$	3.84 E-3
4	$-\frac{649}{2^7} \pi^{-10}$	-5.41 E-5	$\frac{905}{2^7} \pi^{-8}$	7.45 E-4
5	$-\frac{2353}{2^8} \pi^{-12}$	-9.94 E-6	$\frac{2865}{2^8} \pi^{-10}$	1.20 E-4
6	$-\frac{14325}{2^{10}} \pi^{-14}$	-1.53 E-6	$\frac{16373}{2^{10}} \pi^{-12}$	1.73 E-5
7	$-\frac{39763}{2^{11}} \pi^{-16}$	-2.16 E-7	$\frac{43859}{2^{11}} \pi^{-14}$	2.35 E-6
8	$-\frac{833321}{2^{15}} \pi^{-18}$	-2.86 E-8	$\frac{898857}{2^{15}} \pi^{-16}$	3.05 E-7
9	$-\frac{2097333}{2^{16}} \pi^{-20}$	-3.65 E-9	$\frac{2228405}{2^{16}} \pi^{-18}$	3.83 E-8

Da w in 0 und $2\pi - w$ in 2π Nullstellen der Ordnung m besitzt, ist

$$\begin{aligned} & \frac{d^{\lambda-1}}{dt^{\lambda-1}} [f(w_m(t))w'_m(t)] \Big|_{t=0}^{t=2\pi} \\ &= \sum_{j=0}^{\lambda-1} \binom{\lambda-1}{j} \frac{d^{\lambda-1-j}}{dt^{\lambda-1-j}} f(w_m(t)) \frac{d^j}{dt^j} w'_m(t) \Big|_0^{2\pi} \\ &= f(w_m(t))w_m^{(\lambda)}(t) \Big|_0^{2\pi}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Für $\vartheta_m(t) = \int_0^t [u(2\pi - u)]^m du$ gilt

$$\begin{aligned} \vartheta_m^{(\lambda)}(2\pi) &= -\vartheta_m^{(\lambda)}(0) \\ &= \begin{cases} -(2\pi)^m m! & : m \text{ ungerade} \\ (2\pi)^{m-1} m(m+1)! & : m \text{ gerade} \end{cases}. \end{aligned}$$

Für $f \in C^\lambda[0, 2\pi]$ und w_m aus Beispiel 3.13 ist

$$\begin{aligned} c_m &= \frac{B_\lambda}{\lambda!} \pi^\lambda \frac{2m+1}{(2\pi)^{2m}} \binom{2m}{m} [f(2\pi) + f(0)] \begin{cases} -(2\pi)^m m! \\ (2\pi)^{m-1} m(m+1)! \end{cases} \\ &= [f(2\pi) + f(0)] \begin{cases} -B_{m+1} \frac{\pi}{2^m} \binom{2m+1}{m} & : m \text{ ungerade} \\ B_{m+2} (m+1) \frac{\pi}{2^{m+1}} \binom{2m+1}{m+2} & : m \text{ gerade} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.23)$$

In den letzten Zeilen der Tabellen sind diese Werte angegeben. In der darüberliegenden Zeile wurde vergleichsweise $E_{n,m}(f)n^\lambda$ (für $n = 256$) eingetragen. Bei dieser Berechnung sind für $E_{n,m}(f)$ nicht nur zwei (wie in den Tabellen angegeben), sondern acht Mantissenstellen berücksichtigt worden.

Für $w_m(t) = a_m \vartheta_{m+1}(t) + b_m \vartheta_m(t)$ gemäß (3.20) gilt

$$\begin{aligned} w_m^{(\lambda)}(2\pi) &= -w_m^{(\lambda)}(0) \\ &= \begin{cases} -(2\pi)^m m! b_m & : m \text{ ungerade} \\ -(2\pi)^{m-1} (m+1)! [(2\pi)^2 a_m - m b_m] & : m \text{ gerade} \end{cases} \end{aligned}$$

und damit

$$c_m = -\frac{B_\lambda}{\lambda!} \pi^\lambda [f(2\pi) + f(0)] \begin{cases} (2\pi)^m m! b_m \\ (2\pi)^{m-1} (m+1)! [(2\pi)^2 a_m - m b_m] \end{cases}.$$

Für einen Vergleich mit den Werten aus (3.23) werden die Terme für a_m und b_m eingesetzt. Damit erhält man

$$c_m = [f(2\pi) + f(0)] \times \begin{cases} -B_{m+1} \frac{\pi}{2^m} \left[(2m+3) \binom{2m+1}{m} - 4^{m+1} \right] \\ B_{m+2} \frac{\pi}{2^{m+1}} \left[\frac{(2m+3)(m+4)(m+1)}{m} \binom{2m+1}{m+2} - 4^{m+1}(m+3) \right] \end{cases}$$

Offenbar wirkt sich die Modifizierung mit wachsendem m negativ auf die Konstante aus, denn

$$\begin{aligned} & \frac{c_{m, \text{modif}}}{c_{m, \text{alt}}} \\ &= \begin{cases} 2m+3 - 4^{m+1} \binom{2m+1}{m}^{-1} & : m \text{ ungerade} \\ (2m+3) \frac{m+4}{m} - 4^{m+1} \frac{m+3}{m+1} \binom{2m+1}{m+2}^{-1} & : m \text{ gerade} \end{cases} \\ &\sim 2m+3 - 2\sqrt{\pi m}. \end{aligned}$$

Mit $f(t) = e^t$ sind für einen weiteren glatten (analytischen) Integranden die numerischen Ergebnisse angeführt worden. Das Fehlerverhalten (siehe Tabellen 3.5 und 3.6) ist wie im vorigen Beispiel. Die Konstanten c_m lauten

$$c_m = (e^{2\pi} + 1) \begin{cases} -B_{m+1} \frac{\pi}{2^m} \binom{2m+1}{m} & : m \text{ ungerade} \\ B_{m+2} (m+1) \frac{\pi}{2^{m+1}} \binom{2m+1}{m+2} & : m \text{ gerade} \end{cases}$$

und im modifizierten Fall

$$c_m = (e^{2\pi} + 1) \times$$

$$\begin{cases} -B_{m+1} \frac{\pi}{2^m} \left[(2m+3) \binom{2m+1}{m} - 4^{m+1} \right] \\ B_{m+2} \frac{\pi}{2^{m+1}} \left[\frac{(2m+3)(m+4)(m+1)}{m} \binom{2m+1}{m+2} - 4^{m+1}(m+3) \right] \end{cases}.$$

Desweiteren wurden mit Funktionen der Form

$$f(t) = t^\alpha g(t) \quad \text{mit } \alpha > -1, g(0) \neq 0$$

und hinreichend glattem g numerische Rechnungen durchgeführt. Formel (3.7) entnimmt man, daß für die Konvergenzordnung im allgemeinen gilt

$$\lambda = \begin{cases} \min \{m+1, (m+1)(\alpha+1)\} & : m \text{ ungerade} \\ \min \{m+2, (m+1)(\alpha+1)\} & : m \text{ gerade} \end{cases}.$$

In den Tabellen 3.7 und 3.8 ist der Fehler für $f(t) = t^{-\frac{2}{3}}$ dargestellt. Die Werte in den Spalten $m = 3, \dots, 8$ konvergieren wie $h^{\frac{m+1}{3}}$ gegen Null. Die Fälle $m = 5, 8$ stellen eine Ausnahme dar, denn der substituierte Integrand ist glatt. In der letzten Zeile wurden die Werte $E_{n,m}(f)n^\lambda$ eingetragen. Wiederum macht sich der Einfluß von $w'_m(\pi) = 2$ negativ bemerkbar. Mit den Bezeichnungen

$$b_{m,alt} := \frac{2m+1}{(2\pi)^{2m}} \binom{2m}{m} \quad \text{und} \quad b_{m,modif} := b_m$$

gilt

$$\frac{c_{m,modif}}{c_{m,alt}} = \sqrt[3]{\frac{b_{m,modif}}{b_{m,alt}}}.$$

Da die Koeffizienten a_m negativ sind, ist $b_{m,modif}$ stets größer als $b_{m,alt}$ und damit die Ursache für die schlechtere Konstante.

Ähnliches ist auch für $f(t) = [t(2\pi - t)]^{-\frac{1}{2}}$ (siehe Tabellen 3.9 und 3.10) festzustellen.

Beispiel 3.15 Avram Sidi [24] hat in seiner Arbeit die trigonometrische Substitution

$$w_m(t) = 2\pi \frac{\vartheta_m(t)}{\vartheta_m(2\pi)} \tag{3.24}$$

mit

$$\vartheta_m(t) = \int_0^t \left[\sin \frac{u}{2} \right]^m du, \quad m \in \mathbb{N}_0$$

verwendet. Wegen

$$\begin{aligned} \vartheta_m(t) &= \int_0^t \sin \frac{u}{2} \left(\sin \frac{u}{2} \right)^{m-1} du \\ &= -2 \cos \frac{u}{2} \left(\sin \frac{u}{2} \right)^{m-1} \Big|_0^t + (m-1) \int_0^t \left(\sin \frac{u}{2} \right)^{m-2} \cos^2 \frac{u}{2} du \\ &= -2 \cos \frac{t}{2} \left(\sin \frac{t}{2} \right)^{m-1} + (m-1)(\vartheta_{m-2}(t) - \vartheta_m(t)) \end{aligned}$$

ergeben sich die Rekursionsformeln

$$\begin{aligned} \vartheta_m(t) &= -\frac{2}{m} \cos \frac{t}{2} \left(\sin \frac{t}{2} \right)^{m-1} + \frac{m-1}{m} \vartheta_{m-2}(t), \quad m \geq 2, \\ \vartheta_m(2\pi) &= \frac{m-1}{m} \vartheta_{m-2}(2\pi), \quad m \geq 2 \end{aligned} \quad (3.25)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} \vartheta_0(t) &= t, & \vartheta_1(t) &= 2 \left(1 - \cos \frac{t}{2} \right), \\ \vartheta_0(2\pi) &= 2\pi, & \vartheta_1(2\pi) &= 4. \end{aligned}$$

Die Terme $\vartheta_m(2\pi)$ hängen mit der Beta-Funktion zusammen (und wegen $B(x, y) = \Gamma(x)\Gamma(y)/\Gamma(x+y)$ auch mit der Γ -Funktion). Genauer gilt

$$\vartheta_m(2\pi) = 2^{m+1} B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{m+1}{2}\right) = 2^{m+1} \frac{[\Gamma(\frac{m+1}{2})]^2}{\Gamma(m+1)}.$$

Das läßt sich entweder an der Rekursionsformel (3.25), der Funktionalgleichung $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ und $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ einsehen oder mit geeigneten Substitutionen in

$$\begin{aligned} \vartheta_m(2\pi) &= \int_0^{2\pi} \sin^m \left(\frac{u}{2} \right) du = \int_0^{2\pi} \left(\frac{2 \tan \left(\frac{u}{4} \right)}{1 + \tan^2 \left(\frac{u}{4} \right)} \right)^m du \\ &= \int_0^\infty \frac{(2t)^m}{(1+t^2)^m} \frac{4}{1+t^2} dt = 2^{m+2} \int_0^\infty \frac{t^m}{(1+t^2)^{m+1}} dt \\ &= 2^{m+2} \int_0^\infty \frac{t^{\frac{m}{2}}}{(1+t)^{m+1}} \frac{dt}{2\sqrt{t}} = 2^{m+1} B\left(\frac{m+1}{2}, \frac{m+1}{2}\right) \end{aligned}$$

und der Integraldefinition der Beta-Funktion.

Die ersten Transformationen w_m lauten

$$\begin{aligned} w_0(t) &= t, \\ w_1(t) &= \pi \left(1 - \cos \frac{t}{2} \right), \\ w_2(t) &= t - \sin t, \\ w_3(t) &= \frac{\pi}{8} \left(8 - 9 \cos \frac{t}{2} + \cos \frac{3t}{2} \right), \\ w_4(t) &= \frac{1}{6} (6t - 8 \sin t + \sin 2t). \end{aligned}$$

Auch hier soll w_m hinsichtlich der Ableitung in π untersucht werden. Offenbar ist $\vartheta'_m(\pi) = 1$ und damit

$$w'_m(\pi) = \frac{2\pi}{\vartheta_m(2\pi)}.$$

Der Einfachheit halber sei m ungerade vorausgesetzt. Mit der Stirlingschen Formel ergibt sich

$$\begin{aligned} \vartheta_m(2\pi) &= 2^{m+1} \frac{\left(\frac{m-1}{2}\right)! \left(\frac{m-1}{2}\right)!}{m!} \\ &\sim 2\sqrt{\frac{2\pi}{m}} e \left(\frac{m-1}{m}\right)^m \\ &\sim 2\sqrt{\frac{2\pi}{m}}. \end{aligned}$$

Das asymptotische Verhalten ist auch für gerade m richtig. Also gilt

$$w'_m(\pi) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}m}.$$

In der Arbeit von Sidi [24] wird gezeigt, daß bei glattem Integranden f die \sin^m -Substitutionen mit geradem m eine deutlich höhere Konvergenzrate als die polynomiale in (3.18) liefert. Während bei Sidis Transformation für den Fehler

$$E_{n,m}(f) = \begin{cases} O(h^{m+1}) & : m \text{ ungerade} \\ O(h^{2m+2}) & : m \text{ gerade} \end{cases}$$

gilt, erhält man mit der Substitution (3.18) lediglich

$$E_{n,m}(f) = \begin{cases} O(h^{m+1}) & : m \text{ ungerade} \\ O(h^{m+2}) & : m \text{ gerade} \end{cases} .$$

Der Unterschied beruht auf der Tatsache, daß in der Potenzreihenentwicklung der \sin^m -Transformation nur gerade oder nur ungerade Potenzen von t auftreten. Deshalb verschwinden bei geraden m viele ungerade Ableitungen des substituierten Integranden. Für eine genauere Rechnung wird auf [24] verwiesen.

Auch hier wird Beispiel 3.15 so modifiziert, daß $w'_m(\pi) = 2$ ist.

Beispiel 3.16 Um die höhere Konvergenzordnung bei geraden m nicht zu gefährden, wird für w_m der Ansatz

$$w_m(t) = a_m \vartheta_{m+2}(t) + b_m \vartheta_m(t) \quad (3.26)$$

gemacht. Mit den Forderungen $w_m(2\pi) = 2\pi$ und $w'_m(\pi) = 2$ sind die beiden Konstanten durch

$$\begin{aligned} a_m &= 2(m+2) - 2\pi \frac{m+1}{\vartheta_{m+2}(2\pi)} \\ &= 2(m+2) - 2\pi \frac{m+2}{\vartheta_m(2\pi)}, \\ b_m &= 2\pi \frac{m+2}{\vartheta_m(2\pi)} - 2(m+1) \\ &= 2\pi \frac{m+1}{\vartheta_{m+2}(2\pi)} - 2(m+1) \end{aligned}$$

festgelegt. Da der Koeffizient a_m negativ ist, muß das Monotonieverhalten von w_m untersucht werden.

$w'_m(t)$

$$\begin{aligned} &= a_m \sin^{m+2} \left(\frac{t}{2} \right) + b_m \sin^m \left(\frac{t}{2} \right) \\ &= \left(2\pi \frac{m+1}{\vartheta_{m+2}(2\pi)} - 2(m+1) \right) \left(\sin^m \left(\frac{t}{2} \right) - \sin^{m+2} \left(\frac{t}{2} \right) \right) + 2 \sin^m \left(\frac{t}{2} \right) \\ &= 2(m+1) \left(\frac{\pi}{\vartheta_{m+2}(2\pi)} - 1 \right) \left(\sin^m \left(\frac{t}{2} \right) - \sin^{m+2} \left(\frac{t}{2} \right) \right) + 2 \sin^m \left(\frac{t}{2} \right) \end{aligned} \quad (3.27)$$

Tabelle 3.2: Eine Liste der ersten Koeffizienten zu Beispiel 3.16

m	a_m		b_m	
	exakt	Näherung	exakt	Näherung
2	0	0.000	2	2.000
3	$10 - \frac{15}{4}\pi$	-1.781	$-8 + \frac{15}{4}\pi$	3.781
4	-4	-4.000	6	6.000
5	$14 - \frac{105}{16}\pi$	-6.617	$-12 + \frac{105}{16}\pi$	8.617
6	$-\frac{48}{5}$	-9.600	$\frac{38}{5}$	11.600
7	$18 - \frac{315}{32}\pi$	-12.925	$-16 + \frac{315}{32}\pi$	14.925
8	$-\frac{116}{7}$	-16.571	$\frac{130}{7}$	18.571

Wegen $\vartheta_3(2\pi) = \frac{8}{3}$, $\vartheta_4(2\pi) = \frac{3}{4}\pi$ und der Rekursionsformel (3.25) bleibt $\vartheta_{m+2}(2\pi)$ für $m \geq 2$ durch π nach oben beschränkt und damit sind beide Summanden in (3.27) auf $(0, 2\pi)$ positiv. Demnach ist auch der modifizierte Ansatz eine zulässige Substitution.

Als nächstes soll die Konstante aus der Darstellung

$$E_{n,m}(f) = c_m n^{-\lambda} + O(n^{-\lambda-2})$$

für die Transformationen (3.24) und (3.26) ermittelt werden. Dazu ist unter anderem

$$\left. \frac{d^{\lambda-1}}{dt^{\lambda-1}} [f(w_m(t))w'_m(t)] \right|_{t=0}^{t=2\pi}$$

mit

$$\lambda = \begin{cases} m+1 & : m \text{ ungerade} \\ 2m+2 & : m \text{ gerade} \end{cases}$$

zu berechnen. Zur Reduzierung des Rechenaufwands wird

$$w_m(t) = c_{1,m}\vartheta_{m+2}(t) + c_{2,m}\vartheta_m(t), \quad c_{1,m}, c_{2,m} \in \mathbb{R}$$

gesetzt. Anschließend können die Spezialfälle

$$c_{1,m} = 0, c_{2,m} = \frac{2\pi}{\vartheta_m(2\pi)} \quad \text{und} \quad c_{1,m} = a_m, c_{2,m} = b_m$$

untersucht werden. Sei m zunächst ungerade.

$$\begin{aligned} \frac{d^m}{dt^m} [f(w_m(t))w'_m(t)]_{t=0}^{t=2\pi} &= c_{2,m} f(w_m(t))\vartheta_m^{(m+1)}(t) \Big|_0^{2\pi} \\ &= -c_{2,m} m! 2^{-m} [f(2\pi) + f(0)]. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Für gerades m ergibt sich

$$\begin{aligned} &\frac{d^{2m+1}}{dt^{2m+1}} [f(w_m(t))w'_m(t)]_{t=0}^{t=2\pi} \\ &= c_{1,m} \sum_{j=m+2}^{2m+1} \binom{2m+1}{j} \frac{d^{2m+1-j}}{dt^{2m+1-j}} f(w_m(t)) \frac{d^j}{dt^j} \vartheta'_{m+2}(t) \Big|_0^{2\pi} \\ &\quad + c_{2,m} \sum_{j=m}^{2m+1} \binom{2m+1}{j} \frac{d^{2m+1-j}}{dt^{2m+1-j}} f(w_m(t)) \frac{d^j}{dt^j} \vartheta'_m(t) \Big|_0^{2\pi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= c_{1,m} \sum_{j=m+2}^{2m} \binom{2m+1}{j} \underbrace{\frac{d^{2m-j}}{dt^{2m-j}} f'(w_m(t)) w'_m(t)}_{0 \text{ am Rand}} \frac{d^j}{dt^j} \vartheta'_{m+2}(t) \Big|_0^{2\pi} \\
&\quad + c_{2,m} \sum_{j=m+1}^{2m} \binom{2m+1}{j} \underbrace{\frac{d^{2m-j}}{dt^{2m-j}} f'(w_m(t)) w'_m(t)}_{0 \text{ am Rand}} \frac{d^j}{dt^j} \vartheta'_m(t) \Big|_0^{2\pi} \\
&\quad + c_{2,m} \binom{2m+1}{m} f'(w_m(t)) w_m^{(m+1)}(t) \vartheta_m^{(m+1)}(t) \Big|_0^{2\pi} \\
&= c_{2,m}^2 \binom{2m+1}{m} (2^{-m} m!)^2 [f'(2\pi) - f'(0)]. \tag{3.29}
\end{aligned}$$

Dabei ist die Potenzreihenentwicklung

$$\begin{aligned}
\vartheta'_m(t) &= \sin^m\left(\frac{t}{2}\right) \\
&= \left(\frac{t}{2}\right)^m + \sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j t^{m+2j}
\end{aligned}$$

und insbesondere $\vartheta_m^{(m+1)}(0) = 2^{-m} m!$ eingegangen.

Einsetzen von (3.28) und (3.29) in (3.21) ergibt

$$\begin{aligned}
c_m &= \frac{B_\lambda}{\lambda!} \pi^\lambda \begin{cases} -c_{2,m} 2^{-m} m! [f(2\pi) + f(0)] \\ c_{2,m}^2 \frac{(2m+1)!}{m+1} 2^{-2m} [f'(2\pi) - f'(0)] \end{cases} \\
&= \begin{cases} -c_{2,m} \frac{B_{m+1}}{m+1} \frac{\pi^{m+1}}{2^m} [f(2\pi) + f(0)] & : m \text{ ungerade} \\ c_{2,m}^2 \frac{B_{2m+2}}{(m+1)^2} \frac{\pi^{2m+2}}{2^{2m+1}} [f'(2\pi) - f'(0)] & : m \text{ gerade} \end{cases}
\end{aligned}$$

Auch in diesem Beispiel liefert der modifizierte Ansatz eine schlechtere Konstante, denn

$$\frac{c_{m,modif}}{c_{m,alt}} = \begin{cases} m+2 - (m+1)\pi^{-1}\vartheta_m(2\pi) & : m \text{ ungerade} \\ (m+2 - (m+1)\pi^{-1}\vartheta_m(2\pi))^2 & : m \text{ gerade} \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} m + 2 - 2(m + 1)\pi^{-1}\sqrt{\frac{2\pi}{m}} & : m \text{ ungerade} \\ \left(m + 2 - 2(m + 1)\pi^{-1}\sqrt{\frac{2\pi}{m}}\right)^2 & : m \text{ gerade} \end{cases}$$

ist linear beziehungsweise quadratisch wachsend in m . Die Ursache dafür ist wiederum in den negativen Konstanten a_m zu suchen, denn dies impliziert $b_m > 2\pi/\vartheta_m(2\pi)$.

Die Ergebnisse der numerischen Rechnungen mit der \sin^m -Transformation aus Beispiel 3.15 und deren Modifizierung aus Beispiel 3.16 sind den Tabellen 3.11 bis 3.16 zu entnehmen. Auf die Angabe der Werte für den Integranden $f(t) = 1$ wurde verzichtet, denn für gerade m wird dieser exakt integriert.

Beispiel 3.17 Betrachte die rationale Substitutionsfunktion

$$w_p(t) = 2\pi \frac{[v(t)]^p}{[v(t)]^p + [v(2\pi - t)]^p}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad p \in \mathbb{N} \quad (3.30)$$

mit einem Polynom $v : [0, 2\pi] \rightarrow [0, 2\pi]$ bijektiv und monoton wachsend. Derartige Transformationen werden in [14] und [7] verwendet. Wegen

$$w'_p(t) = 2\pi p \frac{[v(t)]^{p-1}v'(t)[v(2\pi - t)]^p + [v(t)]^p v'(2\pi - t)[v(2\pi - t)]^{p-1}}{\left\{ [v(t)]^p + [v(2\pi - t)]^p \right\}^2} > 0 \quad (3.31)$$

ist w_p eine zulässige Substitution. Falls v die Symmetrieeigenschaft

$$v(t) = 2\pi - v(2\pi - t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

besitzt, vereinfacht sich (3.31) zu

$$w'_p(t) = (2\pi)^2 p \frac{\{v(t)(2\pi - v(t))\}^{p-1}}{\left\{ [v(t)]^p + [2\pi - v(t)]^p \right\}^2} v'(t). \quad (3.32)$$

Die Ableitung von w_p in π beträgt

$$w'_p(\pi) = \pi p \frac{v'(\pi)}{v(\pi)}$$

und für symmetrisches v ($\Rightarrow v(\pi) = \pi$)

$$w'_p(\pi) = pv'(\pi).$$

Das Polynom v in (3.30) soll so gewählt werden, daß $w'_p(\pi) = 2$ ist.

Sei v linear. Wegen $v(0) = 0$ und $v(2\pi) = 2\pi$ ist v dann eindeutig bestimmt, und zwar $v(t) = t$. In dem Fall sind

$$\begin{aligned} w_p(t) &= 2\pi \frac{t^p}{t^p + (2\pi - t)^p}, \\ w'_p(t) &= (2\pi)^2 p \frac{\{t(2\pi - t)\}^{p-1}}{\{t^p + (2\pi - t)^p\}^2} \quad \text{und} \\ w'_p(\pi) &= p. \end{aligned}$$

Sei v ein quadratisches Polynom, das heißt

$$v(t) = c_2 t^2 + c_1 t + c_0, \quad c_2 \neq 0, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Da

$$\begin{aligned} v(0) = 0 &\Leftrightarrow 0 = c_0, \\ v(2\pi) = 2\pi &\Leftrightarrow 1 = 2\pi c_2 + c_1, \end{aligned}$$

hat v die Gestalt

$$v(t) = c_2 t^2 + (1 - 2\pi c_2)t. \quad (3.33)$$

Da das Polynom nicht symmetrisch bezüglich π ist, macht die Forderung $w'_p(\pi) = 2$ wenig Sinn.

Sei v ein kubisches Polynom. Mit den beiden Randbedingungen und der Symmetrieforderung sind drei der vier Freiheitsgrade festgelegt und damit

$$v(t) = (-1 - c) \frac{(\pi - t)^3}{\pi^2} + c(\pi - t) + \pi.$$

Wegen

$$w'_p(\pi) = 2 \Leftrightarrow v'(\pi) = \frac{2}{p} \Leftrightarrow c = -\frac{2}{p}$$

ist

$$v(t) = \left(\frac{2}{p} - 1\right) \frac{(\pi - t)^3}{\pi^2} + \frac{2}{p}(t - \pi) + \pi \quad \text{mit} \quad p > 2. \quad (3.34)$$

Für spätere Zwecke werden die Ausdrücke

$$v'(0) = 3 - \frac{4}{p} \quad \text{und} \quad v''(0) = \frac{6}{\pi} \left(\frac{2}{p} - 1 \right)$$

benötigt.

Möchte man die numerischen Ergebnisse bei der rationalen Transformation (3.30) mit den bisherigen Beispielen vergleichen, muß die unterschiedliche Indizierung beachtet werden. Während $w'_p(t) = O(t^{p-1})$, $t \rightarrow 0$, verhalten sich die Funktionen $w'_m(t)$ in den Beispielen 3.13 bis 3.16 wie $O(t^m)$, $t \rightarrow 0$.

Mit

$$\lambda = \begin{cases} p & : p \text{ gerade} \\ p+1 & : p \text{ ungerade} \end{cases}$$

gilt demnach im allgemeinen $E_{n,p} = c_p n^{-\lambda} + O(n^{-\lambda-1})$. Für die Berechnung der Konstanten c_p werden folgende Terme benötigt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{2\pi}{[v(t)]^p + [2\pi - v(t)]^p} \Big|_{t=0} &= p v'(0) (2\pi)^{-p}, \\ \frac{d^p}{dt^p} [v(t)]^p \Big|_{t=0} &= p! [v'(0)]^p, \\ \frac{d^{p+1}}{dt^{p+1}} [v(t)]^p \Big|_{t=0} &= (p+1)! \frac{p}{2} [v'(0)]^{p-1} v''(0). \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung läßt sich induktiv unter Verwendung von $v(t) = O(t)$ beweisen. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{d^p}{dt^p} w_p(t) \Big|_{t=0} &= \frac{2\pi}{[v(t)]^p + [2\pi - v(t)]^p} \frac{d^p}{dt^p} [v(t)]^p \Big|_{t=0} \\ &= (2\pi)^{1-p} p! [v'(0)]^p \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \frac{d^{p+1}}{dt^{p+1}} w_p(t) \Big|_{t=0} &= (p+1) \frac{d^p}{dt^p} [v(t)]^p \frac{d}{dt} \frac{2\pi}{[v(t)]^p + [2\pi - v(t)]^p} \Big|_{t=0} \\ &\quad + (2\pi)^{1-p} \frac{d^{p+1}}{dt^{p+1}} [v(t)]^p \Big|_{t=0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (2\pi)^{-p}(p+1)! \left\{ \begin{array}{ll} p & : v \text{ linear} \\ p \left(3 - \frac{4}{p}\right)^{p+1} + 6(2-p) \left(3 - \frac{4}{p}\right)^{p-1} & : v \text{ kubisch} \end{array} \right. \\
&= (2\pi)^{-p}(p+1)! \left\{ \begin{array}{ll} p & : v \text{ linear} \\ \left(3 - \frac{4}{p}\right)^{p-1} \left(3p - 12 + \frac{16}{p}\right) & : v \text{ kubisch} \end{array} \right. .
\end{aligned}$$

Einsetzen dieser Terme in

$$c_p = \frac{B_\lambda}{\lambda!} \pi^\lambda \frac{d^{\lambda-1}}{dt^{\lambda-1}} [f(w_p(t))w_p'(t)] \Big|_{t=0}^{t=2\pi}$$

ergibt für gerade p

$$c_p = -B_p [f(2\pi) + f(0)] \frac{\pi}{2^{p-1}} \left\{ \begin{array}{ll} 1 & : v \text{ linear} \\ \left(3 - \frac{4}{p}\right)^p & : v \text{ kubisch} \end{array} \right.$$

und für ungerade p

$$c_p = -B_{p+1} [f(2\pi) + f(0)] \frac{\pi}{2^p} \left\{ \begin{array}{ll} p & : v \text{ linear} \\ \left(3 - \frac{4}{p}\right)^{p-1} \left(3p - 12 + \frac{16}{p}\right) & : v \text{ kubisch} \end{array} \right. .$$

Bei glattem Integranden ist der Fehler für das kubische Polynom größer als beim linearen.

In den Tabellen 3.21 bis 3.24 sind die Fehler für $f(t) = t^{-\frac{2}{3}}$ beziehungsweise $f(t) = [t(2\pi - t)]^{-1/2}$ dargestellt. In der letzten Zeile wurde $E_{n,p} n^\lambda \approx c_p$ für $n = 1024$ beziehungsweise $n = 256$ eingetragen. In allen Fällen wird die Konstante mit wachsendem p kleiner. Auch hier erweist sich der einfache Ansatz als besser.

Tabelle 3.3: $f(t) = 1; w$ polynomial, von Korobov

m	2	3	4	5	6	7	8
n							
4	1.5 E-03	3.5 E-03	4.7 E-04	4.4 E-04	2.0 E-04	7.2 E-05	1.1 E-04
8	9.6 E-05	2.2 E-04	7.5 E-06	7.9 E-06	8.6 E-07	5.4 E-07	1.4 E-07
16	6.0 E-06	1.4 E-05	1.2 E-07	1.3 E-07	3.4 E-09	2.4 E-09	1.5 E-10
32	3.7 E-07	8.7 E-07	1.8 E-09	2.0 E-09	1.3 E-11	9.5 E-12	1.4 E-13
64	2.3 E-08	5.5 E-08	2.9 E-11	3.1 E-11	5.2 E-14	3.7 E-14	1.3 E-16
128	1.5 E-09	3.4 E-09	4.5 E-13	4.9 E-13	2.0 E-16	1.5 E-16	1.3 E-19
256	9.1 E-11	2.1 E-10	7.0 E-15	7.7 E-15	8.0 E-19	5.8 E-19	1.3 E-22
c_m	-0.3927	0.9163	1.9628	-2.1608	-14.687	10.656	155.50
	-0.3927	0.9163	1.9635	-2.1598	-14.741	10.529	162.72

Tabelle 3.4: $f(t) = 1; w$ polynomial so modifiziert, daß $w'(\pi) = 2$ gilt.

m	2	3	4	5	6	7	8
n							
4	4.8 E-04	5.6 E-03	2.2 E-03	1.2 E-03	1.4 E-03	1.6 E-04	7.6 E-04
8	3.1 E-05	3.7 E-04	3.6 E-05	3.0 E-05	7.1 E-06	2.8 E-06	1.5 E-06
16	2.0 E-06	2.3 E-05	5.7 E-07	5.2 E-07	2.9 E-08	1.5 E-08	1.7 E-09
32	1.2 E-07	1.5 E-06	9.0 E-09	8.3 E-09	1.2 E-10	6.4 E-11	1.7 E-12
64	7.8 E-09	9.2 E-08	1.4 E-10	1.3 E-10	4.5 E-13	2.5 E-13	1.7 E-15
128	4.9 E-10	5.8 E-09	2.2 E-12	2.0 E-12	1.8 E-15	9.9 E-16	1.7 E-18
256	3.0 E-11	3.6 E-10	3.4 E-14	3.2 E-14	6.9 E-18	3.9 E-18	1.6 E-21
c_m	0.1309	1.5446	9.6862	-8.9288	-127.50	71.531	1948.5
	0.1309	1.5446	9.6866	-8.9292	-127.25	71.764	1956.8

Tabelle 3.5: $f(t) = e^t$; w polynomial, von Korobov

m n	2	3	4	5	6	7	8
4	3.2 E-01	9.3 E-01	9.5 E-02	3.6 E-01	4.0 E-01	1.7 E-01	1.5 E-00
8	2.4 E-02	6.0 E-02	2.0 E-03	2.1 E-03	2.3 E-04	1.4 E-04	6.1 E-05
16	1.6 E-03	3.7 E-03	3.1 E-05	3.4 E-05	9.2 E-07	6.3 E-07	3.9 E-08
32	1.0 E-04	2.3 E-04	4.9 E-07	5.4 E-07	3.6 E-09	2.5 E-09	3.9 E-11
64	6.3 E-06	1.5 E-05	7.7 E-09	8.4 E-09	1.4 E-11	1.0 E-11	3.5 E-14
128	3.9 E-07	9.2 E-07	1.2 E-10	1.3 E-10	5.5 E-14	4.0 E-14	3.5 E-17
256	2.5 E-08	5.7 E-08	1.9 E-12	2.1 E-12	2.1 E-16	1.6 E-16	3.5 E-20
c_m	-105.3	245.8	526.4	-579.5	-3936.0	2880.0	42071
	-105.3	245.8	526.7	-579.4	-3954.2	2824.4	43650

Tabelle 3.6: $f(t) = e^t$; w polynomial so modifiziert, daß $w'(\pi) = 2$ gilt.

m n	2	3	4	5	6	7	8
4	1.7 E-01	1.5 E-00	5.2 E-01	2.0 E-01	9.5 E-01	1.3 E-00	2.5 E-02
8	9.0 E-03	9.9 E-02	9.7 E-03	8.0 E-03	1.9 E-03	7.6 E-04	1.4 E-04
16	5.4 E-04	6.3 E-03	1.5 E-04	1.4 E-04	7.8 E-06	4.1 E-06	4.6 E-07
32	3.4 E-05	3.9 E-04	2.4 E-06	2.2 E-06	3.1 E-08	1.7 E-08	4.6 E-10
64	2.1 E-06	2.5 E-05	3.8 E-08	3.5 E-08	1.2 E-10	6.8 E-11	4.5 E-13
128	1.3 E-07	1.5 E-06	5.9 E-10	5.4 E-10	4.7 E-13	2.6 E-13	4.4 E-16
256	8.2 E-09	9.6 E-08	9.2 E-12	8.5 E-12	1.8 E-15	1.0 E-15	4.3 E-19
c_m	35.2	414.3	2598.3	-2395.5	-34092	19056	518656
	35.1	414.3	2598.4	-2395.2	-34134	19250	524911

Tabelle 3.7: $f(t) = t^{-\frac{2}{3}}$; w polynomial, von Korobov

m n	3	4	5	6	7	8
4	4.07 E-01	2.20 E-01	1.11 E-01	5.09 E-02	1.88 E-02	3.11 E-03
8	1.64 E-01	6.99 E-02	2.79 E-02	9.86 E-03	2.70 E-03	1.96 E-04
16	6.55 E-02	2.21 E-02	6.96 E-03	1.93 E-03	4.04 E-04	1.22 E-05
32	2.61 E-02	6.99 E-03	1.74 E-03	3.81 E-04	6.19 E-05	7.65 E-07
64	1.04 E-02	2.21 E-03	4.35 E-04	7.53 E-05	9.62 E-06	4.78 E-08
128	4.12 E-03	6.95 E-04	1.09 E-04	1.49 E-05	1.50 E-06	2.99 E-09
256	1.63 E-03	2.19 E-04	2.72 E-05	2.96 E-06	2.36 E-07	1.87 E-10
512	6.49 E-04	6.90 E-05	6.80 E-06	5.86 E-07	3.71 E-08	1.17 E-11
1024	2.57 E-04	2.17 E-05	1.70 E-06	1.16 E-07	5.84 E-09	7.29 E-13
c_m	-2.657	-2.261	-1.783	-1.230	-0.622	-0.802

Tabelle 3.8: $f(t) = t^{-\frac{2}{3}}$; w polynomial so modifiziert, daß $w'(\pi) = 2$ gilt.

m n	3	4	5	6	7	8
4	4.77 E-01	3.07 E-01	1.78 E-01	9.18 E-02	3.87 E-02	9.16 E-03
8	1.94 E-01	9.86 E-02	4.47 E-02	1.76 E-02	5.37 E-03	5.77 E-04
16	7.76 E-02	3.14 E-02	1.12 E-02	3.42 E-03	7.86 E-04	3.61 E-05
32	3.10 E-02	9.92 E-03	2.79 E-03	6.73 E-04	1.19 E-04	2.26 E-06
64	1.23 E-02	3.13 E-03	6.99 E-04	1.33 E-04	1.84 E-05	1.41 E-07
128	4.90 E-03	9.88 E-04	1.75 E-04	2.63 E-05	2.86 E-06	8.82 E-09
256	1.94 E-03	3.11 E-04	4.37 E-05	5.21 E-06	4.48 E-07	5.51 E-10
512	7.72 E-04	9.81 E-05	1.09 E-05	1.03 E-06	7.04 E-08	3.45 E-11
1024	3.06 E-04	3.09 E-05	2.73 E-06	2.05 E-07	1.11 E-08	2.15 E-12
c_m	-3.162	-3.214	-2.862	-2.164	-1.180	-2.368

Tabelle 3.9: $f(t) = [t(2\pi - t)]^{-\frac{1}{2}}$; w polynomial, von Korobov

m n	2	3	4	5	6	7
4	1.71 E-01	6.16 E-02	1.73 E-02	1.50 E-03	2.59 E-03	2.51 E-03
8	6.10 E-02	1.54 E-02	2.93 E-03	9.37 E-05	2.67 E-04	1.62 E-04
16	2.17 E-02	3.85 E-03	5.06 E-04	5.86 E-06	2.51 E-05	1.02 E-05
32	7.69 E-03	9.63 E-04	8.84 E-05	3.66 E-07	2.29 E-06	6.37 E-07
64	2.72 E-03	2.41 E-04	1.55 E-05	2.29 E-08	2.05 E-07	3.98 E-08
128	9.62 E-04	6.02 E-05	2.74 E-06	1.43 E-09	1.82 E-08	2.49 E-09
256	3.40 E-04	1.50 E-05	4.83 E-07	8.94 E-11	1.61 E-09	1.56 E-10
c_m	-1.3941	-0.9860	-0.5065	-0.3838	0.4322	0.6685

Tabelle 3.10: $f(t) = [t(2\pi - t)]^{-\frac{1}{2}}$; w polynomial so, daß $w'(\pi) = 2$ gilt.

m n	2	3	4	5	6	7
4	1.37 E-01	7.96 E-02	3.09 E-02	4.99 E-03	4.77 E-03	6.11 E-03
8	4.80 E-02	2.00 E-02	5.11 E-03	3.15 E-04	5.71 E-04	4.16 E-04
16	1.69 E-02	5.00 E-03	8.71 E-04	1.97 E-05	5.66 E-05	2.65 E-05
32	5.98 E-03	1.25 E-03	1.51 E-04	1.23 E-06	5.26 E-06	1.66 E-06
64	2.11 E-03	3.13 E-04	2.64 E-05	7.71 E-08	4.75 E-07	1.04 E-07
128	7.46 E-04	7.81 E-05	4.65 E-06	4.81 E-09	4.24 E-08	6.50 E-09
256	2.64 E-04	1.95 E-05	8.20 E-07	3.01 E-10	3.75 E-09	4.06 E-10
c_m	-1.0804	-1.2802	-0.8593	-1.2915	1.0057	1.7448

Tabelle 3.11: $f(t) = e^t$; \sin^m -Transformation

m n	2	3	4	5	6	7	8
4	4.5 E-02	5.1 E-01	1.9 E-01	2.8 E-01	6.1 E-01	2.6 E-00	5.5 E-00
8	6.6 E-04	3.2 E-02	2.2 E-06	7.4 E-04	4.5 E-06	1.1 E-04	2.7 E-04
16	1.0 E-05	2.0 E-03	2.0 E-09	1.1 E-05	2.2 E-12	1.4 E-07	6.3 E-15
32	1.6 E-07	1.2 E-04	1.9 E-12	1.8 E-07	1.1 E-16	5.2 E-10	2.4 E-20
64	2.5 E-09	7.6 E-06	1.8 E-15	2.7 E-09	6.8 E-21	2.0 E-12	9.2 E-26
128	3.9 E-11	4.8 E-07	1.7 E-18	4.3 E-11	4.2 E-25	7.7 E-15	————
256	6.0 E-13	3.0 E-08	1.7 E-21	6.7 E-13	————	3.0 E-17	————
c_m	169.9	128.3	2055	-188.4	133103	556.0	2.98 E+7
	169.9	128.3	2107	-188.4	145111	569.4	3.29 E+7

Tabelle 3.12: $f(t) = e^t$; modifizierte \sin^m -Transformation

m n	2	3	4	5	6	7	8
4	4.5 E-02	8.8 E-01	5.9 E-01	8.2 E-01	2.9 E-01	3.8 E-00	9.0 E-00
8	6.6 E-04	5.1 E-02	1.4 E-05	2.3 E-03	1.5 E-04	1.0 E-04	1.8 E-03
16	1.0 E-05	3.2 E-03	1.0 E-08	3.3 E-05	3.1 E-11	6.0 E-07	4.4 E-12
32	1.6 E-07	2.0 E-04	9.6 E-12	5.2 E-07	1.6 E-15	2.3 E-09	6.8 E-19
64	2.5 E-09	1.2 E-05	9.4 E-15	8.0 E-09	9.8 E-20	8.8 E-12	2.6 E-24
128	3.9 E-11	7.7 E-07	9.2 E-18	1.3 E-10	6.0 E-24	3.4 E-14	————
256	6.0 E-13	4.8 E-08	8.9 E-21	2.0 E-12	————	1.3 E-16	————
c_m	169.9	205.8	10815	-551.2	1.90 E+6	2476	8.44 E+8
	169.9	205.8	10650	-551.1	1.91 E+6	2473	8.48 E+8

Tabelle 3.13: $f(t) = t^{-\frac{2}{3}}$; \sin^m -Transformation

m n	3	4	5	6	7	8
4	3.37 E-01	1.67 E-01	7.72 E-02	3.11 E-02	9.19 E-03	5.65 E-07
8	1.34 E-01	5.26 E-02	1.92 E-02	6.12 E-03	1.43 E-03	3.40 E-13
16	5.31 E-02	1.66 E-02	4.79 E-03	1.21 E-03	2.24 E-04	————
32	2.11 E-02	5.22 E-03	1.20 E-03	2.40 E-04	3.53 E-05	————
64	8.36 E-03	1.64 E-03	2.99 E-04	4.76 E-05	5.56 E-06	————
128	3.32 E-03	5.18 E-04	7.48 E-05	9.45 E-06	8.71 E-07	————
256	1.32 E-03	1.63 E-04	1.87 E-05	1.88 E-06	1.38 E-07	————
512	5.22 E-04	5.14 E-05	4.67 E-06	3.72 E-07	2.17 E-08	————
1024	2.07 E-04	1.62 E-05	1.17 E-06	7.39 E-08	3.42 E-09	————
c_m	-2.1394	-1.6829	-1.2246	-0.7809	-0.3645	————

Tabelle 3.14: $f(t) = t^{-\frac{2}{3}}$; modifizierte \sin^m -Transformation

m n	3	4	5	6	7	8
4	3.95 E-01	2.20 E-01	1.11 E-01	4.83 E-02	1.55 E-02	1.05 E-03
8	1.57 E-01	6.90 E-02	2.75 E-02	9.42 E-03	2.34 E-03	3.24 E-08
16	6.21 E-02	2.17 E-02	6.86 E-03	1.86 E-03	3.67 E-04	9.36 E-14
32	2.47 E-02	6.84 E-03	1.71 E-03	3.69 E-04	5.76 E-05	————
64	9.78 E-03	2.15 E-03	4.28 E-04	7.32 E-05	9.07 E-06	————
128	3.88 E-03	6.78 E-04	1.07 E-04	1.45 E-05	1.43 E-06	————
256	1.54 E-03	2.14 E-04	2.68 E-05	2.88 E-06	2.25 E-07	————
512	6.12 E-04	6.73 E-05	6.69 E-06	5.72 E-07	3.54 E-08	————
1024	2.43 E-04	2.12 E-05	1.67 E-06	1.13 E-07	5.58 E-09	————
c_m	-2.5047	-2.2052	-1.7529	-1.1993	-0.5939	————

Tabelle 3.15: $f(t) = [t(2\pi - t)]^{-\frac{1}{2}}$; \sin^m -Transformation

m n	2	3	4	5	6	7
4	1.42 E-01	4.48 E-02	1.03 E-02	1.42 E-07	1.79 E-03	1.24 E-03
8	5.00 E-02	1.11 E-02	1.80 E-03	1.84 E-16	1.54 E-04	7.42 E-05
16	1.77 E-02	2.78 E-03	3.17 E-04	————	1.35 E-05	4.59 E-06
32	6.25 E-03	6.96 E-04	5.61 E-05	————	1.19 E-06	2.86 E-07
64	2.21 E-03	1.74 E-04	9.91 E-06	————	1.05 E-07	1.79 E-08
128	7.81 E-04	4.35 E-05	1.75 E-06	————	9.31 E-09	1.12 E-09
256	2.76 E-04	1.09 E-05	3.10 E-07	————	8.23 E-10	7.00 E-11
c_m	-1.1312	-0.7123	-0.3247	————	0.2209	0.3002

Tabelle 3.16: $f(t) = [t(2\pi - t)]^{-\frac{1}{2}}$; modifizierte \sin^m -Transformation

m n	2	3	4	5	6	7
4	1.42 E-01	5.70 E-02	1.56 E-02	1.54 E-05	3.41 E-03	2.41 E-03
8	5.00 E-02	1.41 E-02	2.71 E-03	1.85 E-11	2.95 E-04	1.56 E-04
16	1.77 E-02	3.53 E-03	4.76 E-04	————	2.58 E-05	9.60 E-06
32	6.25 E-03	8.81 E-04	8.41 E-05	————	2.27 E-06	5.97 E-07
64	2.21 E-03	2.20 E-04	1.48 E-05	————	2.01 E-07	3.73 E-08
128	7.81 E-04	5.51 E-05	2.63 E-06	————	1.77 E-08	2.32 E-09
256	2.76 E-04	1.38 E-05	4.65 E-07	————	1.57 E-09	1.45 E-10
c_m	-1.1312	-0.9023	-0.4871	————	0.4206	0.6239

Tabelle 3.17: $f(t) = 1$; v linear

p n	3	4	5	6	7	8	9
4	5.2 E-04	8.8 E-03	6.2 E-02	2.1 E-01	4.8 E-01	8.8 E-01	1.4 E-00
8	1.9 E-05	6.7 E-06	3.5 E-05	5.0 E-04	3.1 E-03	1.2 E-02	3.2 E-02
16	1.2 E-06	4.0 E-07	1.4 E-09	1.1 E-09	6.5 E-08	1.1 E-06	9.1 E-06
32	7.5 E-08	2.5 E-08	2.2 E-11	4.3 E-12	1.0 E-14	5.9 E-15	3.6 E-13
64	4.7 E-09	1.6 E-09	3.4 E-13	6.8 E-14	3.9 E-17	5.3 E-18	7.3 E-21
128	2.9 E-10	9.8 E-11	5.3 E-15	1.1 E-15	1.5 E-19	2.1 E-20	7.1 E-24
256	1.8 E-11	6.1 E-12	8.5 E-17	2.1 E-17	5.3 E-22	8.1 E-23	——
c_p	0.0785	0.0262	-0.0234	-0.0047	0.0109	0.0015	0.0081
	0.0785	0.0262	-0.0234	-0.0047	0.0115	0.0016	0.0084

Tabelle 3.18: $f(t) = 1$; v kubisch

p n	3	4	5	6	7	8	9
4	7.0 E-04	1.7 E-03	6.3 E-04	2.5 E-03	5.8 E-03	1.0 E-02	1.4 E-02
8	4.2 E-05	1.0 E-04	2.7 E-06	2.9 E-06	3.9 E-07	1.0 E-06	2.4 E-06
16	2.6 E-06	6.4 E-06	4.1 E-08	4.5 E-08	9.1 E-10	5.8 E-10	2.7 E-11
32	1.6 E-07	4.0 E-07	6.3 E-10	7.0 E-10	3.5 E-12	2.3 E-12	2.5 E-14
64	1.0 E-08	2.5 E-08	9.9 E-12	1.1 E-11	1.3 E-14	8.9 E-15	2.5 E-17
128	6.3 E-10	1.6 E-09	1.5 E-13	1.7 E-13	4.9 E-17	3.5 E-17	2.4 E-20
256	3.9 E-11	9.8 E-11	2.4 E-15	2.7 E-15	1.9 E-19	1.4 E-19	2.3 E-23
c_p	0.1697	0.4189	-0.6797	-0.7551	3.5020	2.4951	-28.328
	0.1697	0.4189	-0.6790	-0.7547	3.7886	2.4967	-28.376

Tabelle 3.19: $f(t) = e^t$; v linear

p n	3	4	5	6	7	8	9
4	7.0 E-01	2.3 E+00	1.4 E+01	5.9 E+01	1.2 E+02	1.8 E+02	2.2 E+02
8	5.1 E-03	1.6 E-03	9.1 E-02	6.9 E-01	1.6 E+00	9.0 E-01	4.4 E+00
16	3.2 E-04	1.1 E-04	5.6 E-07	2.3 E-05	1.9 E-04	1.6 E-03	2.2 E-02
32	2.0 E-05	6.7 E-06	5.8 E-09	1.2 E-09	6.3 E-12	1.7 E-10	8.5 E-09
64	1.3 E-06	4.2 E-07	9.1 E-11	1.8 E-11	1.1 E-14	1.5 E-15	3.9 E-16
128	7.8 E-08	2.6 E-08	1.4 E-12	2.9 E-13	4.3 E-17	6.0 E-18	1.9 E-21
256	4.9 E-09	1.6 E-09	2.3 E-14	4.5 E-15	1.7 E-19	2.3 E-20	1.9 E-24
c_p	21.068	7.0225	-6.3750	-1.2549	3.0542	0.4302	-2.2607
	21.068	7.0227	-6.2702	-1.2540	3.0724	0.4389	-2.2445

Tabelle 3.20: $f(t) = e^t$; v kubisch

p n	3	4	5	6	7	8	9
4	2.3 E-01	9.3 E-01	1.5 E+00	1.4 E+00	1.5 E+00	7.6 E+00	1.6 E+01
8	1.2 E-02	2.8 E-02	6.9 E-04	1.4 E-03	3.5 E-03	6.3 E-03	1.4 E-03
16	7.0 E-04	1.7 E-03	1.1 E-05	1.2 E-05	2.4 E-07	1.5 E-07	1.5 E-08
32	4.4 E-05	1.1 E-04	1.7 E-07	1.9 E-07	9.3 E-10	6.1 E-10	6.8 E-12
64	2.7 E-06	6.7 E-06	2.7 E-09	2.9 E-09	3.6 E-12	2.4 E-12	7.0 E-15
128	1.7 E-07	4.2 E-07	4.1 E-11	4.6 E-11	1.4 E-14	9.3 E-15	6.5 E-18
256	1.1 E-08	2.6 E-08	6.5 E-13	7.2 E-13	5.5 E-17	3.6 E-17	6.3 E-21
c_p	45.519	112.36	-182.27	-202.52	1014.9	669.47	-7609.6
	45.517	112.36	-182.14	-202.38	1016.3	669.73	-7611.8

Tabelle 3.21: $f(t) = t^{-\frac{2}{3}}$; v linear

p n	4	5	6	7	8	9
4	1.32 E-01	4.04 E-02	7.74 E-03	5.37 E-02	1.16 E-01	2.01 E-01
8	5.18 E-02	1.43 E-02	3.56 E-03	5.49 E-04	8.18 E-04	2.80 E-03
16	2.04 E-02	4.47 E-03	9.00 E-04	1.56 E-04	1.90 E-05	1.01 E-06
32	8.04 E-03	1.40 E-03	2.25 E-04	3.13 E-05	3.12 E-06	3.30 E-08
64	3.18 E-03	4.41 E-04	5.63 E-05	6.24 E-06	5.01 E-07	2.06 E-09
128	1.26 E-03	1.39 E-04	1.41 E-05	1.24 E-06	7.96 E-08	1.29 E-10
256	5.00 E-04	4.37 E-05	3.52 E-06	2.46 E-07	1.26 E-08	8.06 E-12
512	1.98 E-04	1.38 E-05	8.80 E-07	4.89 E-08	1.99 E-09	5.03 E-13
1024	7.87 E-05	4.34 E-06	2.20 E-07	9.71 E-09	3.13 E-10	3.15 E-14
c_p	-0.8125	-0.4511	-0.2307	-0.1027	-0.0334	0.0346

Tabelle 3.22: $f(t) = t^{-\frac{2}{3}}$; v kubisch

p n	4	5	6	7	8	9
4	3.29 E-01	1.70 E-01	7.92 E-02	3.12 E-02	8.79 E-03	6.08 E-04
8	1.29 E-01	5.30 E-02	1.97 E-02	6.22 E-03	1.35 E-03	1.06 E-04
16	5.10 E-02	1.66 E-02	4.91 E-03	1.25 E-03	2.25 E-04	6.47 E-06
32	2.02 E-02	5.22 E-03	1.23 E-03	2.49 E-04	3.63 E-05	4.02 E-07
64	8.01 E-03	1.64 E-03	3.07 E-04	4.95 E-05	5.80 E-06	2.51 E-08
128	3.18 E-03	5.17 E-04	7.66 E-05	9.84 E-06	9.19 E-07	1.57 E-09
256	1.26 E-03	1.63 E-04	1.92 E-05	1.95 E-06	1.45 E-07	9.81 E-11
512	5.00 E-04	5.12 E-05	4.79 E-06	3.88 E-07	2.29 E-08	6.13 E-12
1024	1.98 E-04	1.61 E-05	1.20 E-06	7.70 E-08	3.61 E-09	3.83 E-13
c_p	-2.0473	-1.6785	-1.2558	-0.8139	-0.3844	0.4212

Tabelle 3.23: $f(t) = [t(2\pi - t)]^{-\frac{1}{2}}$; v linear

p n	3	4	5	6	7	8
4	5.71 E-02	9.94 E-03	2.39 E-03	1.51 E-02	4.08 E-02	8.53 E-02
8	1.98 E-02	2.60 E-03	2.28 E-04	2.38 E-05	1.39 E-04	5.73 E-04
16	6.96 E-03	6.51 E-04	4.23 E-05	3.81 E-07	6.89 E-07	1.52 E-07
32	2.45 E-03	1.63 E-04	7.63 E-06	2.38 E-08	5.89 E-08	7.94 E-09
64	8.63 E-04	4.07 E-05	1.36 E-06	1.49 E-09	5.12 E-09	4.96 E-10
128	3.05 E-04	1.02 E-05	2.42 E-07	9.31 E-11	4.27 E-10	3.10 E-11
256	1.08 E-04	2.54 E-06	4.29 E-08	5.82 E-12	3.77 E-11	1.94 E-12
c_p	-0.4413	-0.1667	-0.0449	0.0250	0.0101	0.0083

Tabelle 3.24: $f(t) = [t(2\pi - t)]^{-\frac{1}{2}}$; v kubisch

p n	3	4	5	6	7	8
4	1.21 E-01	4.19 E-02	9.34 E-03	8.35 E-04	2.07 E-03	5.51 E-04
8	4.23 E-02	1.04 E-02	1.72 E-03	4.91 E-05	1.80 E-04	8.02 E-05
16	1.49 E-02	2.61 E-03	3.10 E-04	3.02 E-06	1.51 E-05	4.98 E-06
32	5.25 E-03	6.51 E-04	5.53 E-05	1.88 E-07	1.30 E-06	3.11 E-07
64	1.86 E-03	1.63 E-04	9.82 E-06	1.17 E-08	1.14 E-07	1.94 E-08
128	6.56 E-04	4.07 E-05	1.74 E-06	7.32 E-10	9.98 E-09	1.21 E-09
256	2.32 E-04	1.02 E-05	3.08 E-07	4.56 E-11	8.72 E-10	7.57 E-11
c_p	-0.9491	-0.6667	-0.3230	0.1960	0.2341	0.3256

Kapitel 4

Eine singuläre Integralgleichung

In diesem Kapitel wird eine Integralgleichung zweiter Art behandelt, deren Kern im Rechteck $]0, 2\pi[\times]0, 2\pi[$ stetig ist und in den vier Ecken Singularitäten von einer speziellen Form aufweist. Mit $C[0, 2\pi]$ werden hier die stetigen, 2π -periodischen Funktionen bezeichnet.

4.1 Existenz und Eindeutigkeit

Betrachte die Gleichung zweiter Art

$$\varphi(t) - \int_0^{2\pi} K(t, \tau) [\varphi(\tau) - \varphi(0)] d\tau + \gamma(t)\varphi(0) = f(t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad (4.1)$$

bei gegebenen $f, \gamma \in C[0, 2\pi]$ und Kern K mit Singularitäten in den 4 Ecken des Rechtecks. Zur Vereinfachung der Notation wird ab sofort nur noch von einer Singularität im Nullpunkt (das heißt $t = \tau = 0$) ausgegangen.

An den Kern werden die folgenden Voraussetzungen gestellt

$$K(t, \tau) = L(t, \tau) + M(t, \tau)$$

mit

- $M \in C([0, 2\pi] \times [0, 2\pi])$,

- $L \in C([0, 2\pi] \times]0, 2\pi[)$,
- $L \geq 0$ oder $L \leq 0$,
- L hat Träger in $[0, 1] \times [0, 1]$.

Weiterhin existiere eine beschränkte, stetig differenzierbare Funktion

$$k : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$$

mit beschränkter Ableitung k' und

$$k(0) = 0,$$

$$k(s) = O\left(\frac{1}{s}\right), \quad s \rightarrow \infty,$$

$$|L(t, \tau)| \leq \frac{1}{\tau} k\left(\frac{t}{\tau}\right) \quad \text{für } \tau > 0, \quad (4.2)$$

$$\int_0^\infty \frac{k(s)}{s} ds < 1. \quad (4.3)$$

Bemerkung 4.1 Die Voraussetzung an den Träger von L stellt keine wesentliche Einschränkung dar. Die gewünschte Eigenschaft ist durch Multiplikation von L mit einer geeigneten Abschneidefunktion erreichbar. Die Aufspaltung $K = L + M$ ist anschließend zu modifizieren.

Die Integralgleichung (4.1) hat die Gestalt

$$\varphi - A\varphi - B\varphi = f \quad (4.4)$$

mit den Integraloperatoren

$$(A\varphi)(t) := \int_0^{2\pi} L(t, \tau) [\varphi(\tau) - \varphi(0)] d\tau, \quad (4.5)$$

$$(B\varphi)(t) := \int_0^{2\pi} M(t, \tau) [\varphi(\tau) - \varphi(0)] d\tau + \gamma(t)\varphi(0). \quad (4.6)$$

Mit der Norm

$$\|\varphi\|_{\infty,0} := \max_{0 \leq t \leq 2\pi} |\varphi(t) - \varphi(0)| + |\varphi(0)|$$

wird $C[0, 2\pi]$ ein Banachraum, denn wegen

$$\|\varphi\|_{\infty,0} \leq 3\|\varphi\|_\infty \leq 3\|\varphi\|_{\infty,0}$$

ist diese zur gewöhnlichen Supremumsnorm äquivalent.

Satz 4.2 *Der durch (4.5) erklärte Operator A hat die Abbildungseigenschaft $A : C[0, 2\pi] \rightarrow C[0, 2\pi]$ und ist beschränkt durch*

$$\|A\|_{\infty,0} \leq \int_0^\infty \frac{k(s)}{s} ds < 1.$$

Beweis: Seien $\psi \in C[0, 2\pi]$ und $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Wegen der Stetigkeit von ψ in 0 und (4.3) existiert ein $\beta \in]0, 2\pi[$, so daß

$$2 \max_{0 \leq \sigma \leq \beta} |\psi(\sigma) - \psi(0)| \int_0^\infty \frac{k(s)}{s} ds < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.7)$$

Da L auf $[0, 2\pi] \times [\beta, 2\pi]$ gleichmäßig stetig ist, gibt es zu β und ε ein $\delta > 0$, so daß

$$\|\psi\|_{\infty,0} \int_\beta^{2\pi} |L(t_1, \tau) - L(t_2, \tau)| d\tau < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4.8)$$

für $|t_1 - t_2| < \delta$. Wähle $t_1, t_2 \in [0, 2\pi]$ mit $|t_1 - t_2| < \delta$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & |(A\psi)(t_2) - (A\psi)(t_1)| \\ &= \left| \int_0^{2\pi} [L(t_2, \tau) - L(t_1, \tau)] (\psi(\tau) - \psi(0)) d\tau \right| \\ &\leq \left(\int_0^\beta + \int_\beta^{2\pi} \right) |L(t_2, \tau) - L(t_1, \tau)| |\psi(\tau) - \psi(0)| d\tau \\ &\leq \max_{0 \leq \sigma \leq \beta} |\psi(\sigma) - \psi(0)| \int_0^\beta (|L(t_1, \tau)| + |L(t_2, \tau)|) d\tau \\ &\quad + \|\psi\|_{\infty,0} \int_\beta^{2\pi} |L(t_1, \tau) - L(t_2, \tau)| d\tau \end{aligned} \quad (4.9)$$

Wegen $k(0) = 0$ und (4.2) ist $L(0, \tau) = 0, \tau > 0$ und damit $(A\psi)(0) = 0$. Falls $t > 0$, läßt sich mit den Voraussetzungen (4.2) und (4.3)

$$\begin{aligned} \int_0^\beta |L(t, \tau)| d\tau &\leq \int_0^\beta \frac{1}{t} k\left(\frac{t}{\tau}\right) d\tau \\ &= \int_{t/\beta}^\infty \frac{k(s)}{s} ds \\ &\leq \int_0^\infty \frac{k(s)}{s} ds \end{aligned}$$

folgern und erhält damit aus (4.9)

$$\begin{aligned} & |(A\psi)(t_2) - (A\psi)(t_1)| \\ & \leq 2 \max_{0 \leq \sigma \leq \beta} |\psi(\sigma) - \psi(0)| \int_0^\infty \frac{k(s)}{s} ds + \|\psi\|_{\infty,0} \int_\beta^{2\pi} |L(t_1, \tau) - L(t_2, \tau)| d\tau \\ & \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

In der letzten Abschätzung sind die Wahl von β und δ gemäß (4.7) und (4.8) eingegangen. Damit ist die Stetigkeit von $A\psi$ gezeigt. Es verbleibt der Nachweis der Beschränktheit von A .

Sei $\psi \in C[0, 2\pi]$. Für $0 < t \leq 2\pi$ gilt

$$\begin{aligned} |(A\psi)(t)| & \leq \int_0^{2\pi} \frac{1}{\tau} k\left(\frac{t}{\tau}\right) |\psi(\tau) - \psi(0)| d\tau \\ & \leq \|\psi\|_{\infty,0} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\tau} k\left(\frac{t}{\tau}\right) d\tau \\ & \leq \|\psi\|_{\infty,0} \int_0^\infty \frac{k(s)}{s} ds \end{aligned}$$

$$\text{und } (A\psi)(0) = 0.$$

Also

$$\|A\psi\|_{\infty,0} \leq \|\psi\|_{\infty,0} \int_0^\infty \frac{k(s)}{s} ds$$

und damit

$$\|A\|_{\infty,0} \leq \int_0^\infty \frac{k(s)}{s} ds < 1.$$

■

Die Voraussetzung

$$\int_0^\infty \frac{k(s)}{s} ds < 1$$

ist demnach wegen Satz 2.1 (Neumannsche Reihe) hinreichend für die Existenz und Beschränktheit des Operators $(I - A)^{-1}$. $B : C[0, 2\pi] \rightarrow C[0, 2\pi]$ ist als Integraloperator mit stetigem Kern kompakt. Auf die zu

$$(I - A - B)\varphi = f$$

äquivalente Gleichung

$$\varphi - (I - A)^{-1}B\varphi = (I - A)^{-1}f$$

läßt sich die Riesz-Theorie anwenden. Falls $(I - A - B)\varphi = 0$ nur die triviale Lösung $\varphi = 0$ besitzt, dann hat die inhomogene Gleichung

$$(I - A - B)\varphi = f$$

für jedes $f \in C[0, 2\pi]$ genau eine Lösung $\varphi \in C[0, 2\pi]$.

4.2 Ein Nyström–Verfahren

Eine Möglichkeit die Gleichung (4.4) näherungsweise zu lösen, besteht darin, die Integrale durch Quadraturformeln zu approximieren. Dabei werden die Integrale in (4.5) und (4.6) durch die Quadraturformel (3.12) ersetzt. Für den Rest des Kapitels werden von w_p die Eigenschaften aus Definition 3.9 gefordert.

Für $n \in \mathbb{N}$ ist φ_n so zu bestimmen, daß für $0 \leq t \leq 2\pi$ gilt

$$\varphi_n(t) - \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^{2n-1} \alpha_j^{(n)} K(t, s_j^{(n)}) [\varphi_n(s_j^{(n)}) - \varphi_n(0)] + \gamma(t)\varphi_n(0) = f(t). \quad (4.10)$$

Sei φ_n eine Lösung von (4.10). Dann erfüllen die Werte

$$\begin{aligned} \varphi_n^{(i)} &:= \varphi_n(s_i^{(n)}), \quad i = 1, \dots, 2n-1, \\ \varphi_n^{(0)} &:= \varphi_n(0) \end{aligned}$$

das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \varphi_n^{(i)} - \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^{2n-1} \alpha_j^{(n)} K(s_i^{(n)}, s_j^{(n)}) [\varphi_n^{(j)} - \varphi_n^{(0)}] + \gamma(s_i^{(n)})\varphi_n^{(0)} &= f(s_i^{(n)}), \\ i = 0, \dots, 2n-1. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Umgekehrt erhält man mit einer Lösung $\varphi_n^{(0)}, \dots, \varphi_n^{(2n-1)}$ des Gleichungssystems (4.11) mittels

$$\varphi_n(t) := f(t) + \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^{2n-1} \alpha_j^{(n)} K(t, s_j^{(n)}) [\varphi_n^{(j)} - \varphi_n^{(0)}] - \gamma(t) \varphi_n^{(0)}$$

eine Lösung von (4.10), denn $\varphi_n(s_i^{(n)}) \stackrel{(4.11)}{=} \varphi_n^{(i)}$.

Das Ziel dieses Abschnitts ist der Nachweis, daß unter geeigneten Voraussetzungen die Folge der „Näherungslösungen“ (φ_n) gegen die eindeutig bestimmte Lösung der ursprünglichen Gleichung konvergiert.

Dazu werden die Operatoren

$$A_n \varphi = Q_{n,p} (L(t, \cdot) \varphi(\cdot)) \quad \text{und} \quad B_n \varphi = Q_{n,p} (M(t, \cdot) \varphi(\cdot)) + \gamma \varphi(0)$$

eingeführt. Gleichung (4.10) erhält die Form

$$\varphi_n - A_n \varphi_n - B_n \varphi_n = f \tag{4.12}$$

mit den Operatoren

$$(A_n \varphi)(t) := \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^{2n-1} \alpha_j^{(n)} L(t, s_j^{(n)}) [\varphi(s_j^{(n)}) - \varphi(0)], \tag{4.13}$$

$$(B_n \varphi)(t) := \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^{2n-1} \alpha_j^{(n)} M(t, s_j^{(n)}) [\varphi(s_j^{(n)}) - \varphi(0)] - \gamma(t) \varphi(0). \tag{4.14}$$

Für den Konvergenzbeweis sind weitere Voraussetzungen an die Regularität der Kerne notwendig.

- L sei bezüglich der zweiten Variablen $2q + 1$ mal differenzierbar. Diese partiellen Ableitungen seien stetig für $t + \tau > 0$.
- Für $j = 0, \dots, 2q + 1$ seien $k_j : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ stetige Funktionen so, daß gilt

$$\left. \begin{aligned} k_j(s) &= O\left(\frac{1}{s}\right), \quad s \rightarrow \infty, \\ \left| \frac{\partial^j}{\partial \tau^j} L(t, \tau) \right| &\leq \frac{1}{\tau^{j+1}} k_j\left(\frac{t}{\tau}\right) \quad \text{für } \tau > 0. \end{aligned} \right\} \tag{4.15}$$

- M sei bezüglich der zweiten Variablen $2q + 1$ mal differenzierbar. Diese partiellen Ableitungen seien stetig auf $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$.

Insbesondere bleiben die k_j durch Konstanten K_j nach oben beschränkt.

Da M stetig ist und nach Korollar 3.11 die Folge $(Q_{n,p}\varphi)_{n \in \mathbb{N}}$ für $\varphi \in C[0, 2\pi]$ konvergiert, besagt Theorem 12.8 in [15], daß $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ kollektiv kompakt ist und punktweise gegen B konvergiert, das heißt

$$\|B\varphi - B_n\varphi\|_\infty \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \text{ für } \varphi \in C[0, 2\pi].$$

Um für die Operatoren A_n ein ähnliches Konvergenzresultat zu beweisen, werden die beiden nachfolgenden Lemmata benötigt.

Lemma 4.3 *Sei $\varphi - \varphi(0) \in S^{2q+1, \alpha+1}$ mit $0 < \alpha < 1$ und $\alpha p \geq 2q + 1$. Dann gibt es eine Konstante $C > 0$ so, daß*

$$\|(A - A_n)\varphi\|_\infty \leq \frac{C}{n^{2q+1}} \|\varphi - \varphi(0)\|_{2q+1, \alpha+1}.$$

Beweis: Sei $t \in [0, 2\pi]$ beliebig. Abzuschätzen ist

$$\begin{aligned} (A\varphi)(t) - (A_n\varphi)(t) &= E_{n,p}(g(t, \cdot)) \\ \text{mit } g(t, \tau) &:= L(t, \tau)[\varphi(\tau) - \varphi(0)]. \end{aligned}$$

Um Satz 3.10 anwenden zu können, ist $g(t, \cdot) \in S^{2q+1, \alpha}$ nachzuweisen.

Betrachte für $m = 0, \dots, 2q + 1$

$$I_m := \int_0^{2\pi} [\tau(2\pi - \tau)]^{m-\alpha} \left| \frac{\partial^m}{\partial \tau^m} g(t, \tau) \right| d\tau.$$

Zusammen mit der Leibniz-Formel ergibt sich

$$\begin{aligned} I_m &\leq \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \int_0^{2\pi} [\tau(2\pi - \tau)]^{m-\alpha} \left| \frac{\partial^j}{\partial \tau^j} L(t, \tau) \right| \left| \frac{\partial^{m-j}}{\partial \tau^{m-j}} [\varphi(\tau) - \varphi(0)] \right| d\tau \\ &\leq (2\pi)^{m+1} \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} \int_0^{2\pi} \underbrace{\left\{ \tau^{j+1} \left| \frac{\partial^j}{\partial \tau^j} L(t, \tau) \right| \right\}}_{\leq K_j} [\tau(2\pi - \tau)]^{m-j-(\alpha+1)} \\ &\quad \times \left| [\varphi(\tau) - \varphi(0)]^{(m-j)} \right| d\tau \\ &\leq (2\pi)^{m+1} \sum_{j=0}^m \binom{m}{j} K_j \|\varphi - \varphi(0)\|_{2q+1, \alpha+1}, \end{aligned}$$

also

$$I_m \leq C \|\varphi - \varphi(0)\|_{2q+1, \alpha+1} \quad \text{für } m = 0, \dots, 2q+1 \quad (4.16)$$

mit

$$C = (2\pi)^{2q+2} 2^{2q+1} \max_{j=0, \dots, 2q+1} K_j.$$

Die rechte Seite in (4.16) ist unabhängig von m , also $g(t, \cdot) \in S^{2q+1, \alpha}$. Satz 3.10 liefert

$$|(A\varphi)(t) - (A_n\varphi)(t)| \leq \frac{C}{n^{2q+1}} \|\varphi - \varphi(0)\|_{2q+1, \alpha+1}$$

mit einer von t unabhängigen Konstante C . Da $t \in [0, 2\pi]$ beliebig gewählt war, ist

$$\|A\varphi - A_n\varphi\|_\infty \leq \frac{C}{n^{2q+1}} \|\varphi - \varphi(0)\|_{2q+1, \alpha+1}. \quad \blacksquare$$

Lemma 4.4 Sei $0 < \beta < 1$. Unter den generellen Voraussetzungen an w gibt es ein positives $C = C(p, q)$ so, daß

$$\frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^{2n-1} \alpha_j^{(n)} |L(t, s_j^{(n)})| \leq \int_0^\infty \frac{k(s)}{s} ds + \frac{C}{t^\beta n^{2q+1}} \quad (4.17)$$

für alle $0 < t \leq 2\pi$, $n \in \mathbb{N}$ und q mit $\beta p \geq 2q+1$.

Beweis: Zunächst wird die Ungleichung

$$\|L(t, \cdot)\|_{2q+1, \beta} \leq \frac{C}{t^\beta}, \quad 0 < t \leq 2\pi \quad (4.18)$$

gezeigt.

Für $j = 1, \dots, 2q+1$ wird mit der Voraussetzung (4.15) und einer Substitution $s = \frac{t}{\tau}$

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} [\tau(2\pi - \tau)]^{j-\beta} \left| \frac{\partial^j}{\partial \tau^j} L(t, \tau) \right| d\tau \\ & \leq (2\pi)^{j-\beta} \frac{1}{t^\beta} \int_0^{2\pi} \left(\frac{t}{\tau}\right)^\beta k_j \left(\frac{t}{\tau}\right) \frac{d\tau}{\tau} \\ & \leq (2\pi)^{2q+1-\beta} \frac{1}{t^\beta} \int_0^\infty \frac{k_j(s)}{s^{1-\beta}} ds \\ & \leq \frac{C}{t^\beta} \end{aligned} \quad (4.19)$$

abgeschätzt. Da L außerhalb von $[0, 1] \times [0, 1]$ verschwindet, ergibt sich für $j = 0$ ebenfalls die erforderliche Ungleichung, denn

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} [\tau(2\pi - \tau)]^{-\beta} |L(t, \tau)| d\tau &\leq (2\pi - 1)^{-\beta} \int_0^1 \tau^{-\beta} |L(t, \tau)| d\tau \\ &\leq \frac{C}{t^\beta}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

(4.19) und (4.20) liefern (4.18).

Nach Voraussetzung wechselt L das Vorzeichen nicht und die Gewichte $\alpha_j^{(n)}$ sind positiv. Also gilt

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^{2n-1} \alpha_j^{(n)} |L(t, s_j^{(n)})| &= \frac{\pi}{n} \left| \sum_{j=1}^{2n-1} \alpha_j^{(n)} L(t, s_j^{(n)}) \right| \\ &\leq \left| \int_0^{2\pi} L(t, \tau) d\tau \right| + |E_{n,p}(L(t, \cdot))| \\ &\leq \int_0^\infty \frac{k(s)}{s} ds + \frac{C}{t^\beta n^{2q+1}}. \end{aligned}$$

■

Aufgrund der Singularität des Kerns K im Nullpunkt und weil die rechte Seite in (4.17) mit $t \rightarrow 0$ gegen ∞ strebt, müssen die Operatoren A_n bei 0 geglättet werden.

Wähle $g : [0, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ stetig, so daß

$$g(s) = \begin{cases} 1 & : s \geq 1 \\ 0 & : s \leq \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Für festes $r \in \mathbb{N}$ betrachte die Operatoren $A_{n,r}$ gemäß

$$(A_{n,r}\varphi)(t) := g_{n,r}(t)(A_n\varphi)(t) \quad \text{mit} \quad g_{n,r}(t) := g\left(\frac{t}{s_r^{(n)}}\right).$$

Anstatt $(I - A_n - B_n)\varphi_n = f$ wird nun $(I - A_{n,r} - B_n)\varphi = f$ gelöst. Das dazugehörige Gleichungssystem unterscheidet sich von (4.11) durch Vernachlässigung der Stützstellen $s_1^{(n)}, \dots, s_{r-1}^{(n)}$. Im Fall $r = 1$ bleibt das Gleichungssystem unverändert.

Nun zum eigentlichen Konvergenzresultat.

Satz 4.5 Sei $I - A - B$ injektiv. Es gibt ein $r \in \mathbb{N}$ so, daß für hinreichend große n die Operatoren $I - A_{n,r} - B_n$ invertierbar und die Inversen gleichmäßig beschränkt sind. Für die Lösungen von

$$\varphi - A\varphi - B\varphi = f$$

und

$$\varphi_n - A_{n,r}\varphi_n - B_n\varphi_n = f$$

gilt die Fehlerabschätzung

$$\|\varphi_n - \varphi\|_\infty \leq \frac{C}{n^{2q+1}} \|\varphi - \varphi(0)\|_{2q+1, \alpha+1}$$

mit einer Konstanten C , vorausgesetzt $\varphi - \varphi(0) \in S^{2q+1, \alpha+1}$ mit den Parametern $0 < \alpha < 1$, $\alpha p \geq 2q + 1$.

Beweis: Es sind die Voraussetzungen von Theorem 10.8 und Problem 10.3 in [15] zu überprüfen. Wie bereits erwähnt, ist $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ kollektiv kompakt und konvergiert auf $C[0, 2\pi]$ punktweise gegen den kompakten Operator B . $I - A$ ist ein beschränkter, linearer und beschränkt invertierbarer Operator. Für die Existenz und gleichmäßige Beschränktheit von $(I - A_{n,r} - B_n)^{-1}$ ist nur noch nachzuweisen, daß

1. $(I - A_{n,r})^{-1}$ für hinreichend große n existiert und gleichmäßig beschränkt ist.
2. $(I - A_{n,r})\varphi \rightarrow (I - A)\varphi$, $n \rightarrow \infty$ für alle $\varphi \in C[0, 2\pi]$.

Wähle $\beta := (2q + 1)/p$. Nach Lemma 4.4 gilt

$$\begin{aligned} & |(A_{n,r}\varphi)(t) - (A_{n,r}\varphi)(0)| \\ & \leq |g_{n,r}(t)| \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^{2n-1} \alpha_j^{(n)} |L(t, s_j^{(n)})| |\varphi(s_j^{(n)}) - \varphi(0)| \\ & \leq \|\varphi\|_{\infty, 0} |g_{n,r}(t)| \left[\int_0^\infty \frac{k(s)}{s} ds + \frac{C(p, q)}{t^\beta n^{2q+1}} \right] \\ & \leq \|\varphi\|_{\infty, 0} \left[\int_0^\infty \frac{k(s)}{s} ds + C(p, q) \left(\frac{s_r^{(n)}}{2} \right)^{-\beta} n^{-(2q+1)} \right] \end{aligned}$$

und damit wegen (3.14)

$$\begin{aligned} \|A_{n,r}\|_{\infty,0} &\leq \int_0^\infty \frac{k(s)}{s} ds + \frac{C(p, q, \beta)}{(s_r^{(n)})^\beta n^{2q+1}} \\ &\leq \underbrace{\int_0^\infty \frac{k(s)}{s} ds}_{<1} + \underbrace{\frac{C(p, q, \beta)}{r^{2q+1}}}_{\rightarrow 0, r \rightarrow \infty}. \end{aligned}$$

Die letzte Abschätzung unterscheidet sich von der gleichartigen in [7] dadurch, daß der zweite Summand für $r = 1$ und $n \rightarrow \infty$ nicht nach 0 strebt, sondern lediglich unabhängig von n ist. Wie bereits erwähnt, beruht dieses schlechtere Resultat darauf, daß die in [7] vorgeschlagene Modifizierung bei der Wahl der Parameter, das heißt $2q + 1 > \alpha p > 2q$, nicht möglich ist.

Somit existiert ein $r \in \mathbb{N}$ so, daß für $n > r$ gilt

$$\|A_{n,r}\|_{\infty,0} \leq C < 1. \quad (4.21)$$

Der Satz über die Neumannsche Reihe liefert Teil 1. Als nächstes soll mit dem Satz von Banach-Steinhaus

$$\|(A_{n,r} - A)\varphi\|_{\infty,0} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \quad \text{für alle } \varphi \in C[0, 2\pi] \quad (4.22)$$

gezeigt werden. Aus

$$(A_{n,r} - A)\varphi = g_{n,r}(A_n - A)\varphi + (g_{n,r} - 1)A\varphi$$

und

$$0 \leq g_{n,r}(t) \leq 1, \quad (A\varphi)(0) = 0$$

folgt man

$$\|(A_{n,r} - A)\varphi\|_{\infty,0} \leq \|(A_n - A)\varphi\|_{\infty,0} + \sup_{0 \leq t \leq s_r^{(n)}} |(A\varphi)(t)|. \quad (4.23)$$

Für Polynome ψ mit $\psi(0) = \psi(2\pi)$ und $0 < \alpha < 1$ gilt nach Lemma 4.4

$$\|(A_n - A)\psi\|_{\infty,0} \leq \frac{C}{n^{2q+1}} \|\psi - \psi(0)\|_{2q+1, \alpha+1}.$$

Der zweite Summand in (4.23) konvergiert wegen $s_r^{(n)} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, der Stetigkeit von $A\varphi$ und $(A\varphi)(0) = 0$ ebenfalls gegen Null. Demnach ist

das in (4.22) angegebene Konvergenzverhalten auf einem dichten Teilraum von $C[0, 2\pi]$ erfüllt. Zusammen mit (4.21) liefert dies Aussage (4.22).

Es verbleibt der Beweis der Fehlerabschätzung. Sei $n > r$.

$$\begin{aligned}\varphi_n - \varphi &= (I - A_{n,r} - B_n)^{-1} f - \varphi \\ &= (I - A_{n,r} - B_n)^{-1} (A_{n,r} + B_n - A - B)\varphi\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}\|\varphi_n - \varphi\|_{\infty,0} &\leq C \left[\|(A_{n,r} - A)\varphi\|_{\infty,0} + \|(B_n - B)\varphi\|_{\infty,0} \right] \\ &\leq C \left[\|(A_n - A)\varphi\|_{\infty,0} + \sup_{0 \leq t \leq s_r^{(n)}} |(A\varphi)(t)| + \|(B_n - B)\varphi\|_{\infty} \right].\end{aligned}$$

Die drei Fehleranteile sind abzuschätzen. Nach Lemma 4.3 gilt für den ersten Summanden

$$\|(A_n - A)\varphi\|_{\infty,0} \leq \frac{C}{n^{2q+1}} \|\varphi - \varphi(0)\|_{2q+1, \alpha+1}.$$

Da der Kern von B ebenfalls beschränkte partielle Ableitungen nach der zweiten Variablen besitzt, läßt sich Lemma 4.3 auch auf den dritten Term anwenden. Unter Verwendung von (2.5) erhält der zweite Summand ebenfalls die gewünschte Form, denn

$$\begin{aligned}|(A\varphi)(t)| &\leq \int_0^{2\pi} |L(t, \tau)| |\varphi(\tau) - \varphi(0)| d\tau \\ &\leq \|\varphi - \varphi(0)\|_{2q+1, \alpha+1} \int_0^{2\pi} [\tau(2\pi - \tau)]^\alpha |L(t, \tau)| d\tau \\ &\leq (2\pi)^\alpha \|\varphi - \varphi(0)\|_{2q+1, \alpha+1} \int_0^{2\pi} k\left(\frac{t}{\tau}\right) \tau^{\alpha-1} d\tau \\ &\leq \|\varphi - \varphi(0)\|_{2q+1, \alpha+1} t^\alpha \int_0^\infty \frac{k(s)}{s^{\alpha+1}} ds\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\sup_{0 \leq t \leq s_r^{(n)}} |(A\varphi)(t)| &\leq C (s_r^{(n)})^\alpha \|\varphi - \varphi(0)\|_{2q+1, \alpha+1} \\ &\leq \frac{C}{n^{2q+1}} \|\varphi - \varphi(0)\|_{2q+1, 2\alpha+1}.\end{aligned}$$

Die in den Abschätzungen auftretenden Konstanten sind, obgleich stets mit C bezeichnet, im allgemeinen verschieden. ■

Abschließend sei nochmals auf die Arbeit von Elliott und Pröbldorf [7] hingewiesen. Dort wird unter leicht abgeschwächten Voraussetzungen an den Kern eine Integralgleichung vom Mellin-Typ behandelt. Für die technische Durchführung der Beweise sind hier einige Ideen aus [7] übernommen worden.

Die im skalaren Fall durchgeführte Analysis ist auch auf vektorielle Probleme übertragbar. Unter $C[0, 2\pi]$ sind dann vektorwertige 2π -periodische stetige Funktionen zu verstehen. Für die Standardabschätzung der Integrale tritt anstelle $|K(t, \tau)|$ nun die Matrixnorm

$$\|K(t, \tau)\|_{\infty, \mathbb{R}^{d \times d}} = \max_{i=1, \dots, d} \sum_{j=1}^d |K_{ij}(t, \tau)|$$

und die $\|\cdot\|_{\infty, 0}$ -Norm von $\varphi \in C[0, 2\pi]$ ist durch

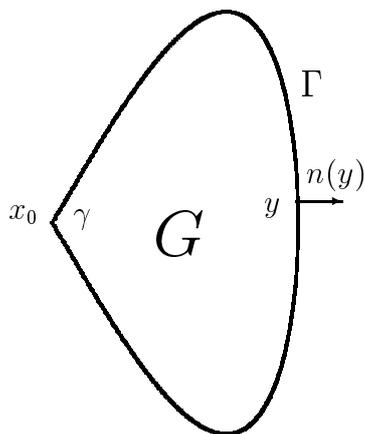
$$\|\varphi\|_{\infty, 0} := \max_{i=1, \dots, d} \left[\max_{0 \leq x \leq 2\pi} |\varphi_i(x) - \varphi_i(0)| + |\varphi_i(0)| \right]$$

erklärt.

Da Konvergenz in der neuen Norm mit komponentenweiser Konvergenz gleichbedeutend ist, wird in Kapitel 5 von den hier erzielten Resultaten stillschweigend Gebrauch gemacht.

Kapitel 5

Die Elastizitätsgleichung



Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet derart, daß $\mathbb{R}^2 \setminus G$ zusammenhängend ist. Der Rand $\partial G = \Gamma$ von G sei mit Ausnahme einer Ecke x_0 C^2 -glatt. Für den Innenwinkel γ bei x_0 gelte $0 < \gamma < 2\pi, \gamma \neq \pi$. Für einen Randpunkt y wird mit $n(y)$ die nach außen weisende Normale bezeichnet.

5.1 Formulierung der Randwertprobleme

Inneres Dirichletproblem

Gegeben sind $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^+$ und $f \in C(\Gamma)$. Gesucht wird ein aus zwei Komponenten bestehendes Vektorfeld $u \in C^2(G) \cap C(\overline{G})$ als Lösung der Elastizitätsgleichung

$$\mu \Delta u + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} u = 0 \quad \text{in } G \quad (5.1)$$

mit der Randbedingung

$$u = f \quad \text{auf } \Gamma. \quad (5.2)$$

Desweiteren ist, soweit für den Existenzbeweis notwendig, das äußere Neumannproblem zu betrachten.

Äußeres Neumannproblem

Gegeben sind $\lambda, \mu \in \mathbb{R}^+$, $a_\infty \in \mathbb{R}^2$ und $g \in C(\Gamma)$. Gesucht wird ein Vektorfeld $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{G}) \cap C(\mathbb{R}^2 \setminus G)$ so, daß neben der Differentialgleichung (5.1) in $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{G}$ noch die Randbedingung

$$N_u n = g \quad \text{auf} \quad \Gamma \quad (5.3)$$

und die Ausstrahlungsbedingungen

$$u(x) - a_\infty \ln(x) = O(1), \quad \nabla u(x) = O(|x|^{-1}), \quad |x| \rightarrow \infty \quad (5.4)$$

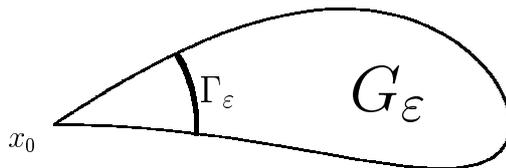
erfüllt werden. Dabei ist (5.3) in dem Sinn

$$\lim_{h \rightarrow 0, h > 0} N_u(x + hn(x))n(x) = g(x), \quad x \in \Gamma \setminus \{x_0\}$$

zu verstehen.

5.2 Zur Eindeutigkeit beim inneren Dirichletproblem

Für die Eindeutigkeitsbeweise werden die nachfolgenden Lemmata benötigt. Hierzu sind die Bezeichnungen G_ε und Γ_ε einzuführen, wobei



$$G_\varepsilon := \{x \in G : |x - x_0| > \varepsilon\},$$

$$\Gamma_\varepsilon := \{x \in G : |x - x_0| = \varepsilon\}.$$

Lemma 5.1 Sei $g \in C(\overline{G_{\varepsilon_1}})$. Dann ist

$$f(\varepsilon) := \int_{G_\varepsilon} g(x) dx, \quad \varepsilon > \varepsilon_1$$

differenzierbar mit Ableitung

$$f'(\varepsilon) = - \int_{\Gamma_\varepsilon} g(x) ds(x).$$

Beweis: Man schreibt für $\varepsilon_1 < \varepsilon_0 < \varepsilon$ den Differenzenquotienten in Polarkoordinaten und erhält

$$\begin{aligned} \frac{f(\varepsilon) - f(\varepsilon_0)}{\varepsilon - \varepsilon_0} &= -\frac{1}{\varepsilon - \varepsilon_0} \int_{x \in G, \varepsilon_0 \leq |x - x_0| \leq \varepsilon} g(x) dx \\ &= -\frac{1}{\varepsilon - \varepsilon_0} \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} \int_{v(r)}^{w(r)} g(r, \vartheta) r d\vartheta dr \end{aligned}$$

mit stetigen Funktionen v und w . Da g auf kompakten Mengen gleichmäßig stetig ist und v, w in ε_0 stetig sind, existiert zu $\sigma > 0$ ein $\delta > 0$, so daß

$$\left| \int_{v(\varepsilon_0)}^{w(\varepsilon_0)} [g(r, \vartheta) r - \varepsilon_0 g(\varepsilon_0, \vartheta)] d\vartheta \right| \leq \frac{\sigma}{2}, \quad (5.5)$$

$$\left| \int_{v(r)}^{v(\varepsilon_0)} g(r, \vartheta) r d\vartheta + \int_{w(\varepsilon_0)}^{w(r)} g(r, \vartheta) r d\vartheta \right| \leq \frac{\sigma}{2} \quad (5.6)$$

für alle $|r - \varepsilon_0| \leq \delta$. Seien $\varepsilon_1 < \varepsilon_0 < \varepsilon$ und $|\varepsilon - \varepsilon_0| \leq \delta$. Dann gilt

$$\begin{aligned} &\left| \frac{f(\varepsilon) - f(\varepsilon_0)}{\varepsilon - \varepsilon_0} + \int_{\Gamma_{\varepsilon_0}} g(x) ds(x) \right| \\ &= \frac{1}{\varepsilon - \varepsilon_0} \left| - \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} \int_{v(r)}^{w(r)} g(r, \vartheta) r d\vartheta dr + \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon} \int_{v(\varepsilon_0)}^{w(\varepsilon_0)} \varepsilon_0 g(\varepsilon_0, \vartheta) d\vartheta dr \right| \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon - \varepsilon_0} \left[\frac{\sigma}{2} (\varepsilon - \varepsilon_0) + \frac{\sigma}{2} (\varepsilon - \varepsilon_0) \right] = \sigma. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Dabei wurde das Integral

$$\int_{v(r)}^{w(r)} g(r, \vartheta) r d\vartheta$$

aufgespalten in

$$\int_{v(r)}^{v(\varepsilon_0)} \dots + \int_{v(\varepsilon_0)}^{w(\varepsilon_0)} \dots + \int_{w(\varepsilon_0)}^{w(r)} \dots$$

und von (5.5), (5.6) Gebrauch gemacht. Für $\varepsilon_1 < \varepsilon < \varepsilon_0$ und $|\varepsilon - \varepsilon_0| \leq \delta$ ist die Abschätzung (5.7) ebenfalls richtig. ■

Lemma 5.2 Sei $f :]0, \varepsilon_1] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton fallend, differenzierbar und erfülle die Differentialungleichung

$$|f(\varepsilon)| \leq C \sqrt{-\varepsilon f'(\varepsilon)}, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1 \quad (5.8)$$

mit einer von ε unabhängigen positiven Konstanten C . Dann existiert der rechtsseitige Limes

$$f(0) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} f(\varepsilon)$$

und ist Null.

Beweis: Der Beweis verläuft ganz analog zu dem in [12]. Die Behauptung wurde dort nicht für die Differentialungleichung (5.8), sondern in einer allgemeineren Form bewiesen. Wegen dem Monotonieverhalten von f sind die Fälle

1. $0 < f(0) \leq \infty$
2. $-\infty < f(0) < 0$
3. $f(0) = 0$

zu untersuchen.

1.Fall: $0 < f(0) \leq \infty$

Ohne Einschränkung sei ε_1 so klein vorausgesetzt, daß

$$|f(\varepsilon)| = f(\varepsilon) \geq f(\varepsilon_1) > 0, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1. \quad (5.9)$$

Zusammen mit (5.8) liefert das

$$0 < [f(\varepsilon)]^2 \leq -C^2 \varepsilon f'(\varepsilon), \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1.$$

Durch Integration der Ungleichung

$$0 < \frac{1}{C^2 \varepsilon} \leq -\frac{f'(\varepsilon)}{[f(\varepsilon)]^2} \quad \text{auf} \quad 0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1$$

erhält man

$$\frac{1}{C^2} \ln \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right) \leq \frac{1}{f(\varepsilon_1)} - \frac{1}{f(\varepsilon_2)}. \quad (5.10)$$

Der zweite Summand auf der rechten Seite in (5.10) ist negativ. Demnach gilt

$$f(\varepsilon_1) \leq \frac{C^2}{\ln\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)}, \quad 0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1.$$

Grenzübergang $\varepsilon_2 \rightarrow 0+$ liefert $f(\varepsilon_1) \leq 0$ und damit einen Widerspruch zu (5.9).

2.Fall: $-\infty < f(0) < 0$

Es gilt

$$|f(\varepsilon)| = -f(\varepsilon) \geq |f(0)| > 0, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1. \quad (5.11)$$

Wegen $0 < [f(\varepsilon)]^2 \leq -C^2\varepsilon f'(\varepsilon)$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1$ erhält man durch Integration der Ungleichung

$$0 < \frac{1}{C^2\varepsilon} \leq -\frac{f'(\varepsilon)}{[f(\varepsilon)]^2} \quad \text{auf} \quad 0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1$$

die Abschätzung

$$\frac{1}{C^2} \ln\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right) \leq \frac{1}{f(\varepsilon_1)} - \frac{1}{f(\varepsilon_2)}, \quad 0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1. \quad (5.12)$$

Der erste Summand auf der rechten Seite in (5.12) ist negativ. Demnach gilt

$$-f(\varepsilon_2) \leq \frac{C^2}{\ln\left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right)}, \quad 0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1.$$

Grenzübergang $\varepsilon_2 \rightarrow 0+$ liefert $|f(0)| \leq 0$ und damit einen Widerspruch zu (5.11). Die Behauptung ist somit bewiesen. ■

Satz 5.3 *Das innere Dirichletproblem (5.1)-(5.2) besitzt höchstens eine Lösung.*

Beweis: Aufgrund der Linearität genügt der Nachweis der Eindeutigkeit für das homogene Problem. Sei u Lösung zu $f = 0$. Für hinreichend kleines ε ist

$$G_\varepsilon = \{x \in G : |x - x_0| > \varepsilon\}$$

ein beschränktes Gebiet mit stückweise glattem Rand. Die Anwendung des ersten Greenschen Satzes (siehe die noch folgende Bemerkung 5.4) auf u und $v = u$ liefert

$$\int_{G_\varepsilon} B(u, u) dx = \int_{\partial G_\varepsilon} u \cdot (P_u n) ds.$$

Unter Berücksichtigung der Randbedingung $u = 0$ auf Γ gilt

$$\int_{G_\varepsilon} B(u, u) dx = \int_{\Gamma_\varepsilon} u \cdot (P_u n) ds. \quad (5.13)$$

Dabei ist weiterhin $\Gamma_\varepsilon := \{x \in G : |x - x_0| = \varepsilon\}$. In der Bilinearform B sind die Konstanten α und β , unter Einhaltung von $\alpha + \beta = \lambda + \mu$, noch frei wählbar. Setze

$$\alpha := \mu, \quad \beta := \lambda \quad \text{und} \quad u_{ij} := \frac{\partial u_i}{\partial x_j}.$$

Dann gilt

$$B(u, u) = \lambda |\operatorname{div} u|^2 + \mu (u_{12} + u_{21})^2 + 2\mu (u_{11}^2 + u_{22}^2) \geq 0, \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} |P_u|^2 &= 2(\lambda + 2\mu) \lambda |\operatorname{div} u|^2 + 2\mu^2 (u_{12} + u_{21})^2 + 4\mu^2 (u_{11}^2 + u_{22}^2) \\ &\leq 2(\lambda + 2\mu) B(u, u). \end{aligned} \quad (5.15)$$

Da n normiert ist, läßt sich die euklidische Norm des Vektors $P_u n$ nach oben durch die Frobeniusnorm von P_u abschätzen, das heißt

$$|P_u n|^2 \leq |P_u|^2. \quad (5.16)$$

Die Funktion f mit

$$f(\varepsilon) := \int_{G_\varepsilon} B(u, u) dx, \quad \varepsilon > 0$$

ist wegen (5.14) monoton fallend und nach Lemma 5.1 differenzierbar mit Ableitung

$$f'(\varepsilon) = - \int_{\Gamma_\varepsilon} B(u, u) ds.$$

Aufgrund der Darstellung (5.13), den Ungleichungen (5.15), (5.16) und der Stetigkeit von u auf \overline{G} ergibt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung

$$|f(\varepsilon)| = \left| \int_{\Gamma_\varepsilon} u \cdot (P_u n) ds \right|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\int_{\Gamma_\varepsilon} |u|^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_{\Gamma_\varepsilon} |P_{un}|^2 ds \right)^{1/2} \\
&\leq \sup_{x \in \bar{G}} |u(x)| \left(\int_{\Gamma_\varepsilon} 1 ds \right)^{1/2} \left(\int_{\Gamma_\varepsilon} 2(\lambda + 2\mu) B(u, u) ds \right)^{1/2} \\
&\leq C \sqrt{-\varepsilon f'(\varepsilon)}. \tag{5.17}
\end{aligned}$$

Die Konstante $C = \sup_{x \in \bar{G}} |u(x)| \sqrt{2\pi} \sqrt{2(\lambda + 2\mu)}$ ist unabhängig von ε . Nach Lemma 5.2 implizieren die Differentialungleichung (5.17) und das Monotonieverhalten von f die Existenz von $f(0+)$ mit

$$f(0+) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} f(\varepsilon) = 0.$$

Führt man in (5.13) den Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ durch, liefert das

$$\int_G B(u, u) dx = 0.$$

Aus $B(u, u) = 0$ in G folgt zunächst

$$u \in \text{span}\{(1, 0)^t; (0, 1)^t; (x_2, -x_1)^t\}. \tag{5.18}$$

Da die Komponenten von u harmonisch sind, erhält man mit dem Maximumprinzip das gewünschte Resultat $u = 0$ in G . ■

Bemerkung 5.4 Die Anwendung des Greenschen Satzes auf das Gebiet G_ε ist noch zu rechtfertigen, da die Differenzierbarkeit von u bis in den Rand nicht explizit vorausgesetzt wurde. In einer $\varepsilon/2$ Umgebung von x_0 ist das Gebiet G so zu modifizieren, daß das neue Gebiet \tilde{G} einen C^2 -glatten Rand besitzt und $\tilde{G} \subset G$ gilt. Betrachte nun das Dirichletproblem mit Randwerten $u|_{\partial\tilde{G}}$ bezüglich \tilde{G} . Wie in der Diplomarbeit von J.Evans [5] beim Stokes-Problem durchgeführt, ist nachzuweisen, daß das Randwertproblem genau eine Lösung besitzt und diese darstellbar ist durch

$$\tilde{u}(x) = W(x; \psi), \quad x \in \tilde{G}$$

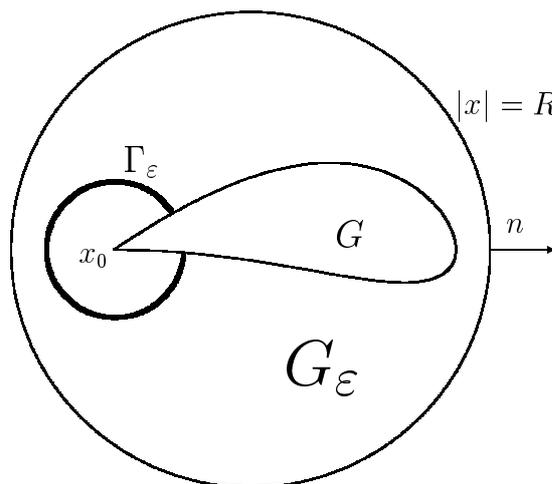
mit der eindeutig bestimmten Lösung $\psi \in C(\partial\tilde{G})$ der Integralgleichung

$$\psi - K\psi = -2u|_{\partial\tilde{G}}.$$

Da die Randwerte außerhalb einer $\varepsilon/2$ Umgebung von x_0 identisch verschwinden, insbesondere $C^{1,\alpha}$ -glatt sind, erhält man aufgrund der Abbildungseigenschaften von K , daß ψ auf $\partial\tilde{G} \setminus B[x_0, 2/3\varepsilon]$ $C^{1,\alpha}$ -glatt ist. Diese Eigenschaft überträgt sich wegen der Abbildungseigenschaft vom Doppelschichtpotential zweiter Art auf die Lösung \tilde{u} . Auf $\Gamma \setminus B[x_0, \varepsilon]$ stimmen wegen der Eindeutigkeit u und \tilde{u} überein.

Bemerkung 5.5 Mit einer einfachen geometrischen Überlegung kommt man im Beweis von Satz 5.3 auch ohne das Maximumprinzip aus. Dazu wähle eine Gerade H derart, daß $H \cap G \neq \emptyset$. $\partial G \cap H$ besteht aus mindestens zwei Punkten. Die Komponenten von u sind wegen (5.18) auf $\overline{G} \cap H$ lineare Funktionen, die in $\partial G \cap H$ verschwinden. Folglich ist $u = 0$ in G .

Nun soll das Außenraumproblem behandelt werden. Dazu wähle $R > 0$ so groß, daß $G \subset B[0, R]$.



Für das Gebiet

$$G_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{G} : |x - x_0| > \varepsilon, |x| < R\}$$

und das Kurvenstück

$$\Gamma_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{G} : |x - x_0| = \varepsilon\}$$

bleibt die Aussage von Lemma 5.1 richtig. Damit läßt sich der nachfolgende Satz beweisen.

Satz 5.6 *Das äußere Neumannproblem besitzt höchstens eine Lösung.*

Beweis: Sei u eine Lösung zu $g = 0$. Die Anwendung des ersten Greenschen Satzes (Die Differenzierbarkeit bis in den Rand ist wie bei Bemerkung 5.4 einzusehen.) auf das Gebiet G_ε und $v = u$ ergibt

$$\int_{G_\varepsilon} B(u, u) dx = \int_{\Gamma_\varepsilon} u \cdot N_u n ds + \int_{|x|=R} u \cdot N_u n ds. \quad (5.19)$$

Wie im Beweis von Satz 5.3 wird durch

$$f(\varepsilon) := \int_{G_\varepsilon} B(u, u) dx - \int_{|x|=R} u \cdot N_u n ds$$

eine monoton fallende und differenzierbare Funktion erklärt, die die Differentialungleichung (5.8) erfüllt. Damit ergibt der Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$ in (5.19)

$$\int_{x \notin \overline{G}, |x| < R} B(u, u) dx = \int_{|x|=R} u \cdot N_u n ds. \quad (5.20)$$

Mit dem bewiesenen Darstellungssatz, dem asymptotischen Verhalten der Grundlösung und den Ausstrahlungsbedingungen (5.4) läßt sich eine Darstellungsformel für unbeschränkte Gebiete herleiten (siehe [16, Gleichung 3.45]) und

$$u(x) = O(|x|^{-1}), \quad \nabla u(x) = O(|x|^{-2}), \quad |x| \rightarrow \infty$$

folgern. Insbesondere verschwindet mit $R \rightarrow \infty$ das Randintegral in (5.20). Schließlich implizieren $B(u, u) = 0$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{G}$ und $u(x) \rightarrow 0$, $|x| \rightarrow \infty$, die Behauptung $u = 0$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{G}$. ■

5.3 Existenz beim inneren Dirichletproblem

Der Einfachheit halber wird der Existenzbeweis nur für Kurven Γ geführt, die in einer Umgebung der Ecke x_0 aus zwei Geradenstücken H_1 und H_2 bestehen. Die beiden Randstücke H_1 und H_2 lassen sich durch

$$H_1 : \quad x(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq T$$

und

$$H_2 : \quad x(t) = \begin{pmatrix} (2\pi - t) \cos \gamma \\ (2\pi - t) \sin \gamma \end{pmatrix}, \quad 2\pi - T \leq t \leq 2\pi$$

mit geeignetem $T > 0$ parametrisieren. Für den Innenwinkel γ bei x_0 wird einschränkend vorausgesetzt

$$\frac{\pi}{2} \leq \gamma \leq \frac{3}{2}\pi, \quad \gamma \neq \pi.$$

Setze

$$\gamma(x) := \begin{cases} \gamma & : \quad x = x_0 \\ \pi & : \quad x \in \Gamma \setminus \{x_0\} \end{cases}.$$

Die Sprungbeziehungen für das Doppelschichtpotential sind folgendermaßen zu modifizieren. Für Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma \rightarrow \mathbb{R}^2$ werden f_- und f_+ durch

$$f_-(x) := \lim_{z \in G, z \rightarrow x} f(z), \quad f_+(x) := \lim_{z \notin \bar{G}, z \rightarrow x} f(z), \quad x \in \Gamma$$

erklärt, sofern die Limes existieren.

Satz 5.7 Für $\psi \in C(\Gamma)$ läßt sich das Doppelschichtpotential zweiter Art

$$W(x; \psi) = \int_{\Gamma} \tilde{D}(x, y) \psi(y) ds(y), \quad x \notin \Gamma$$

von G nach \bar{G} und von $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{G}$ nach $\mathbb{R}^2 \setminus G$ stetig fortsetzen mit den Werten

$$W_+(x; \psi) = \int_{\Gamma} \tilde{D}(x, y) \psi(y) ds(y) + \frac{\gamma(x)}{2\pi} \psi(x), \quad x \in \Gamma, \quad (5.21)$$

$$W_-(x; \psi) = \int_{\Gamma} \tilde{D}(x, y) \psi(y) ds(y) + \frac{\gamma(x) - 2\pi}{2\pi} \psi(x), \quad x \in \Gamma. \quad (5.22)$$

Seien $\Gamma_1 \subset \Gamma_2 \subset \Gamma$ kompakte Mengen mit $x_0 \notin \Gamma_2$ und $\psi \in C(\Gamma) \cap C^{1,\alpha}(\Gamma_2)$. Dann existiert für alle $x \in \Gamma_1$ die Normalableitung von W und es gilt

$$(NW(\cdot; \psi)n(x))_-(x) = (NW(\cdot; \psi)n(x))_+(x), \quad x \in \Gamma_1 \quad (5.23)$$

ist stetig auf Γ_1 .

Beweis: Das oben angegebene Resultat ist aus der klassischen Potentialtheorie [1] bekannt und ist entsprechend zu übertragen. ■

Satz 5.8 *Das Doppelschichtpotential zweiter Art*

$$u(x) = W(x; \psi), \quad x \in G$$

mit stetiger Dichte ψ löst das innere Dirichletproblem zu den Randwerten $f \in C(\Gamma)$, falls ψ eine Lösung der Integralgleichung

$$\psi(x) - 2 \int_{\Gamma} \tilde{D}(x, y)[\psi(y) - \psi(x_0)] ds(y) + \psi(x_0) = -2f(x), \quad x \in \Gamma \quad (5.24)$$

ist.

Beweis: u löst die Differentialgleichung (5.1) in G und läßt sich nach Satz 5.7 stetig bis in den Rand fortsetzen. Wegen (2.14) gilt

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\Gamma} \tilde{D}(x, y)[\psi(y) - \psi(x_0)] ds(y) + \int_{\Gamma} \tilde{D}(x, y)\psi(x_0) ds(y) \\ &= \int_{\Gamma} \tilde{D}(x, y)[\psi(y) - \psi(x_0)] ds(y) - \psi(x_0). \end{aligned} \quad (5.25)$$

Aufgrund der Sprungbeziehung (5.22) und der Integralgleichung (5.24) erhält man für die Randwerte von u

$$\begin{aligned} u_-(x) &= \int_{\Gamma} \tilde{D}(x, y)[\psi(y) - \psi(x_0)] ds(y) - \frac{1}{2}[\psi(x) - \psi(x_0)] - \psi(x_0) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

■

Satz 5.9 *Das innere Dirichletproblem besitzt für jedes $f \in C(\Gamma)$ genau eine Lösung.*

Beweis: Wegen der Sätze 5.3 und 5.8 ist lediglich nachzuweisen, daß die Integralgleichung (5.24) für jedes f genau eine Lösung $\psi \in C(\Gamma)$ besitzt. Diese Gleichung schreibt sich in Operatorform

$$\psi - \tilde{K}\psi = -2f$$

mit dem Randintegraloperator $\tilde{K} : C(\Gamma) \rightarrow C(\Gamma)$

$$(\tilde{K}\psi)(x) = 2 \int_{\Gamma} \tilde{D}(x, y)[\psi(y) - \psi(x_0)] ds(y) - \psi(x_0), \quad x \in \Gamma. \quad (5.26)$$

Die Abbildungseigenschaft von \tilde{K} ist eine Folgerung aus den Rechnungen in Abschnitt 5.4 und der Analysis in Kapitel 4. Die dortige Argumentation ist auch für das nicht parametrisierte Integral durchführbar.

Zunächst wird $N(I - \tilde{K}) = \{0\}$ gezeigt. Sei $\psi \in C(\Gamma)$ so, daß $\psi - \tilde{K}\psi = 0$ gilt. Zu dieser Dichte definiere

$$u(x) := W(x; \psi), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma.$$

Dann löst u das innere homogene Dirichletproblem. Nach Satz 5.3 ist damit $u = 0$ in G . Da die Abbildungseigenschaften von \tilde{K} lokale Eigenschaften sind, ist $\psi \in C(\Gamma) \cap C^{1,\alpha}(\Gamma \setminus U_\varepsilon(x_0))$ für alle $\varepsilon > 0$ und damit

$$(Nun)_+(x) = (Nun)_-(x) = 0, \quad x \in \Gamma \setminus \{x_0\}.$$

Da u dem Abklingverhalten

$$u(x) = O(1), \quad \nabla u(x) = O(|x|^{-1}), \quad |x| \rightarrow \infty$$

genügt, löst u auch das äußere homogene Neumannproblem. Die Eindeutigkeit impliziert $u = 0$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{G}$. Schließlich folgt aus

$$\psi = u_+ - u_- = 0$$

die Behauptung $N(I - \tilde{K}) = \{0\}$.

Um mit Satz 2.3 die Riesztheorie anwenden zu können, ist eine Aufspaltung $I - \tilde{K} = S_m - K_m^*$ mit beschränkt invertierbarem Operator S_m und kompaktem K_m^* anzugeben. Mit der Abschneidefunktion h , wobei

$$h(t) = \begin{cases} 0 & : & t \leq \frac{1}{2} \\ 2t - 1 & : & \frac{1}{2} < t < 1 \\ 1 & : & t \geq 1 \end{cases},$$

betrachte man die Operatoren $K_m^* : C(\Gamma) \rightarrow C(\Gamma)$ mit

$$(K_m^* \psi)(x) = 2 \int_{\Gamma} \tilde{D}(x, y) h(m|x - y|) \psi(y) ds(y)$$

und $S_m := I - (\tilde{K} - K_m^*)$. Dann gilt $I - \tilde{K} = S_m - K_m^*$. Neben den beiden geradlinigen Randstücken H_1, H_2 wird

$$H_3 := \overline{\Gamma \setminus (H_1 \cup H_2)}$$

eingeführt. Insbesondere gilt für die drei kompakten Mengen

$$H_1 \cup H_2 \cup H_3 = \Gamma \quad \text{und} \quad H_1 \cap H_2 = \{x_0\}.$$

Die C^2 -Glätte von H_j impliziert die Stetigkeit von \tilde{D} auf $H_j \times H_j$. Folglich ist der Kern des Integraloperators K_m^* stetig auf $\Gamma \times H_j$, $j \in \{1, 2, 3\}$. Im Beweis von [15, Theorem 2.20] (Kompaktheit von Integraloperatoren) geht lediglich die Beschränktheit und gleichmäßige Stetigkeit des Kerns im ersten Argument ein. Demnach ist K_m^* kompakt.

Wenn die Existenz einer natürlichen Zahl m mit $\|\tilde{K} - K_m^*\| < 1$ nachgewiesen wurde, ist der Beweis vollendet. Dazu ist

$$\begin{aligned} ((\tilde{K} - K_m^*)\psi)(x) &= 2 \int_{\Gamma} \tilde{D}(x, y) \left[1 - h(m|x - y|) \right] \psi(y) ds(y) \\ &\quad + \frac{\gamma(x) - \pi}{\pi} \psi(x_0) \end{aligned} \quad (5.27)$$

abzuschätzen. Es soll wie bei der Laplacegleichung (siehe [15, Abschnitt 6.5]) vorgegangen werden. Definiere die Konstanten

$$\begin{aligned} C_1 &:= \max_{j=1,2} \max_{x,y \in H_j \cup H_3} \|\tilde{D}(x, y)\|_{\infty, \mathbb{R}^{2 \times 2}}, \\ C_2 &:= \frac{T}{3} \left| \sin \frac{\gamma}{2} \right|, \\ C_3 &:= \inf \left\{ |x - y| : x \in H_1 \cup H_2, |x - x_0| \leq \frac{T}{2}, y \in H_3 \right\} > 0. \end{aligned}$$

Wähle $m \in \mathbb{N}$ so, daß gilt

$$m > \max\{16C_1, C_2^{-1}, C_3^{-1}\}. \quad (5.28)$$

Für $x \in \Gamma$ sind zwei Fälle zu unterscheiden.

1. Für ein $j \in \{1, 2\}$ ist $B[x, \frac{1}{m}] \cap \Gamma$ Teilmenge von $H_j \cup H_3$.
2. Weder für $j = 1$ noch $j = 2$ ist $B[x, \frac{1}{m}] \cap \Gamma$ Teilmenge von $H_j \cup H_3$.

Aufgrund der Wahl von m in (5.28) ist im zweiten Fall $B[x, \frac{1}{m}] \cap \Gamma$ Teilmenge der beiden Geradenabschnitte H_1, H_2 mit Scheitelpunkt x_0 und Länge T . Im

ersten Fall ergibt sich für $x \in H_j \cup H_3$

$$\begin{aligned}
& \|((\tilde{K} - K_m^*)\psi)(x)\|_{\infty, \mathbb{R}^2} \\
& \leq 2 \int_{\Gamma \cap B[x, \frac{1}{m}]} \|\tilde{D}(x, y)\|_{\infty, \mathbb{R}^{2 \times 2}} \|\psi(y)\|_{\infty, \mathbb{R}^2} ds(y) \\
& \leq 2C_1 \max_{y \in \Gamma} \|\psi(y)\|_{\infty, \mathbb{R}^2} \int_{\Gamma \cap B[x, \frac{1}{m}]} ds(y) \\
& \leq \frac{8C_1}{m} \|\psi\|_{\infty, \Gamma} \\
& \leq \frac{1}{2} \|\psi\|_{\infty, \Gamma}.
\end{aligned} \tag{5.29}$$

Im zweiten Fall sind einige Vorüberlegungen anzustellen. Für $x \notin H_1$ und $x \in H_2$ betrachte das Dreieck Δ mit den Eckpunkten x, x_0 und der Seite H_1 . Den Innenwinkel bei x bezeichne man mit $\alpha(x)$ und der bei x_0 beträgt

$$\alpha(x_0) = \begin{cases} \gamma(x_0) & : \gamma < \pi \\ 2\pi - \gamma(x_0) & : \gamma > \pi \end{cases}.$$

Nach Lemma 5.10 gilt für $x \in H_2$

$$\begin{aligned}
& \int_{H_1} \|\tilde{D}(x, y)\|_{\infty, \mathbb{R}^{2 \times 2}} ds(y) \\
& = \begin{cases} \left\| \int_{H_1} \tilde{D}(x, y) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} ds(y) \right\|_{\infty, \mathbb{R}^2} & : \pi < \gamma \leq \frac{3}{2}\pi \\ \left\| \int_{H_1} \tilde{D}(x, y) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} ds(y) \right\|_{\infty, \mathbb{R}^2} & : \frac{\pi}{2} \leq \gamma < \pi \end{cases}
\end{aligned}$$

und

$$\int_{H_2} \|\tilde{D}(x, y)\|_{\infty, \mathbb{R}^{2 \times 2}} ds(y) = 0.$$

Mit dem Darstellungssatz angewandt auf das Innere von Δ erhält man

$$\begin{aligned}
\int_{H_1} \|\tilde{D}(x, y)\|_{\infty, \mathbb{R}^{2 \times 2}} ds(y) & = \left\| \int_{H_1} \tilde{D}(x, y) \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix} ds(y) \right\|_{\infty, \mathbb{R}^2} \\
& = \left\| \int_{\Delta} \tilde{D}(x, y) \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix} ds(y) \right\|_{\infty, \mathbb{R}^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\| \frac{\alpha(x)}{2\pi} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm 1 \end{pmatrix} \right\|_{\infty, \mathbb{R}^2} = \frac{\alpha(x)}{2\pi} \\
&< \frac{\pi - \alpha(x_0)}{2\pi}.
\end{aligned}$$

Dabei wurde $n(y) = x - y$ für $y \in \Delta \setminus H_1$ ausgenutzt.

Insbesondere gilt

$$(\tilde{K} - K_m^*)\psi(x_0) = \frac{\gamma - \pi}{\pi} \psi(x_0). \quad (5.30)$$

Mit diesen Vorbetrachtungen gilt im zweiten Fall (ohne Einschränkung sei $x \in H_1 \setminus \{x_0\}$)

$$\begin{aligned}
\|((\tilde{K} - K_m^*)\psi)(x)\|_{\infty, \mathbb{R}^2} &\leq 2 \|\psi\|_{\infty, \Gamma} \int_{H_1 \cup H_2} \|\tilde{D}(x, y)\|_{\infty, \mathbb{R}^{2 \times 2}} ds(y) \\
&\leq \left(1 - \frac{\alpha(x_0)}{\pi}\right) \|\psi\|_{\infty, \Gamma}. \quad (5.31)
\end{aligned}$$

Aus den Abschätzungen (5.29), (5.30) und (5.31) folgt

$$\|\tilde{K} - K_m^*\| = \sup_{\|\psi\|_{\infty, \Gamma} = 1} \|(\tilde{K} - K_m^*)\psi\|_{\infty, \Gamma} \leq q$$

mit

$$q := \max \left[\frac{1}{2}, 1 - \frac{\alpha(x_0)}{\pi} \right] < 1. \quad \blacksquare$$

Aus dem Beweis des nachfolgenden Lemmas wird deutlich, warum für γ die Einschränkung $\pi/2 \leq \gamma \leq 3\pi/2$ gemacht wurde.

Lemma 5.10 *Unter den Voraussetzungen an den Innenwinkel γ bei x_0 gilt für $x \in H_2$*

$$\begin{aligned}
&\int_{H_1} \|\tilde{D}(x, y)\|_{\infty, \mathbb{R}^{2 \times 2}} ds(y) \\
&= \begin{cases} \left\| \int_{H_1} \tilde{D}(x, y) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} ds(y) \right\|_{\infty, \mathbb{R}^2} & : \pi < \gamma \leq \frac{3}{2}\pi \\ \left\| \int_{H_1} \tilde{D}(x, y) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} ds(y) \right\|_{\infty, \mathbb{R}^2} & : \frac{\pi}{2} \leq \gamma < \pi \end{cases}
\end{aligned}$$

und

$$\int_{H_2} \|\tilde{D}(x, y)\|_{\infty, \mathbb{R}^{2 \times 2}} ds(y) = 0.$$

Beweis: Die Komponenten der Matrix \tilde{D} lauten

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{ii}(x, y) &= \tilde{A} \frac{\langle x - y, n(y) \rangle}{|x - y|^2} + \tilde{B} \frac{\langle x - y, n(y) \rangle}{|x - y|^4} (x_i - y_i)^2, \quad i \in \{1, 2\}, \\ \tilde{D}_{ik}(x, y) &= \tilde{B} \frac{\langle x - y, n(y) \rangle}{|x - y|^4} (x_i - y_i)(x_k - y_k), \quad i \neq k. \end{aligned}$$

Offenbar ist $\langle x - y, n(y) \rangle = 0$ auf $H_2 \times H_2$ und damit

$$\int_{H_2} \|\tilde{D}(x, y)\|_{\infty, \mathbb{R}^{2 \times 2}} ds(y) = 0.$$

Für $(x, y) \in H_2 \times H_1$ existieren t und τ so, daß gilt

$$x = \begin{pmatrix} (2\pi - t) \cos \gamma \\ (2\pi - t) \sin \gamma \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} \tau \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Damit gilt $\langle x - y, n(y) \rangle = -(2\pi - \tau) \sin \gamma$. Für die Vorzeichen der Matrixelemente \tilde{D}_{ik} ergibt sich auf $H_2 \times H_1$

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn} \tilde{D}_{ii}(x, y) &= \operatorname{sgn}(-\sin \gamma) \quad \text{für } i \in \{1, 2\}, \\ \operatorname{sgn} \tilde{D}_{12}(x, y) &= \operatorname{sgn}(-\sin \gamma) \operatorname{sgn}[(x_1 - y_1)(x_2 - y_2)] \\ &= \operatorname{sgn}(-\sin \gamma) \operatorname{sgn}(\sin \gamma) \operatorname{sgn}(x_1 - y_1) \\ &= 1. \end{aligned}$$

Es wird angemerkt, daß in der letzten Zeile mit $\cos(\gamma) \leq 0$ die Voraussetzung an γ eingegangen ist und $\operatorname{sgn}(0) = 1$ gesetzt wurde.

Alle vier Komponenten von \tilde{D} wechseln auf $H_2 \times H_1$ das Vorzeichen nicht. Im Fall $\pi < \gamma \leq 3\pi/2$ haben die Hauptdiagonalelemente das gleiche Vorzeichen wie \tilde{D}_{12} und im Fall $\pi/2 \leq \gamma < \pi$ das entgegengesetzte Vorzeichen. Damit ergibt sich die Behauptung. ■

5.4 Das Nyström–Verfahren

Die in (5.24) angegebene Integralgleichung

$$\psi(x) - 2 \int_{\Gamma} \tilde{D}(x, y) [\psi(y) - \psi(x_0)] ds(y) + \psi(x_0) = -2f(x), \quad x \in \Gamma \quad (5.32)$$

soll mit dem Nyström-Verfahren gelöst werden. Dazu ist außer dem schon beschriebenen Verhalten des Randes bei der Ecke noch die C^{2q+3} -Glätte von $\Gamma \setminus \{x_0\}$ vorauszusetzen. Dabei ist q eine hinreichend große natürliche Zahl. In den numerischen Beispielen in Kapitel 5.5 kann $q = \infty$ gesetzt werden.

Mit den Operatoren

$$K^{(1)}, K^{(2)} : C(\Gamma) \longrightarrow C(\Gamma)$$

$$(K^{(1)}\psi)(x) := 2 \int_{\Gamma} \frac{\langle x - y, n(y) \rangle}{|x - y|^2} [\psi(y) - \psi(x_0)] ds(y), \quad (5.33)$$

$$(K^{(2)}\psi)(x) := 2 \int_{\Gamma} \frac{\langle x - y, n(y) \rangle \langle x - y, \psi(y) - \psi(x_0) \rangle}{|x - y|^4} (x - y) ds(y) \quad (5.34)$$

und den Konstanten

$$\tilde{A} = \frac{1}{\pi} \frac{\mu}{\lambda + 3\mu}, \quad \tilde{B} = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 3\mu}$$

erhält (5.32) die Form

$$\psi - \tilde{A}K^{(1)}\psi - \tilde{B}K^{(2)}\psi + \psi(x_0) = -2f. \quad (5.35)$$

Die auftretenden Integraloperatoren werden nun parametrisiert. Wähle eine im Gegenuhrzeigersinn orientierte Parametrisierung

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}$$

mit

$$x(0) = x_0 \text{ und } [x'_1(t)]^2 + [x'_2(t)]^2 > 0 \text{ für } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Durch

$$n(y) = \frac{1}{\sqrt{[x_1'(\tau)]^2 + [x_2'(\tau)]^2}} \begin{pmatrix} x_2'(\tau) \\ -x_1'(\tau) \end{pmatrix}, \quad y = y(\tau) = \begin{pmatrix} x_1(\tau) \\ x_2(\tau) \end{pmatrix}$$

wird die äußere Normale an Γ beschrieben. Damit transformieren sich (5.33) und (5.34) in

$$u^{(j)}(t) = \begin{pmatrix} u_1^{(j)}(t) \\ u_2^{(j)}(t) \end{pmatrix} = 2 \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} K_{11}^{(j)} & K_{12}^{(j)} \\ K_{21}^{(j)} & K_{22}^{(j)} \end{pmatrix} (t, \tau) \begin{pmatrix} \varphi_1(\tau) - \varphi_1(0) \\ \varphi_2(\tau) - \varphi_2(0) \end{pmatrix} d\tau. \quad (5.36)$$

Dabei sind

$$u_k^{(j)}(t) := (K^{(j)}\psi)_k(x(t)), \quad \varphi_k(t) := \psi_k(x(t)), \quad j, k \in \{1, 2\}$$

auf $[0, 2\pi]$ stetige Funktionen und die Kerne $K_{ij}^{(1)}, K_{ij}^{(2)}$ durch

$$K_{ii}^{(1)}(t, \tau) := \begin{cases} \frac{\{x_1(t) - x_1(\tau)\}x_2'(\tau) - x_1'(\tau)\{x_2(t) - x_2(\tau)\}}{\{x_1(t) - x_1(\tau)\}^2 + \{x_2(t) - x_2(\tau)\}^2} & : t \neq \tau \\ \frac{1}{2} \frac{x_1''(t)x_2'(t) - x_2''(t)x_1'(t)}{(x_1'(t))^2 + (x_2'(t))^2} & : t = \tau \end{cases}, \quad (5.37)$$

$$K_{12}^{(1)}(t, \tau) = K_{21}^{(1)}(t, \tau) := 0, \quad 0 \leq t, \tau \leq 2\pi, \quad (5.38)$$

$$K_{ij}^{(2)}(t, \tau) := \begin{cases} R_{ij}(t, \tau) \frac{\{x_1(t) - x_1(\tau)\}x_2'(\tau) - x_1'(\tau)\{x_2(t) - x_2(\tau)\}}{[\{x_1(t) - x_1(\tau)\}^2 + \{x_2(t) - x_2(\tau)\}^2]^2} & : t \neq \tau \\ R_{ij}(t, t) \frac{x_1''(t)x_2'(t) - x_2''(t)x_1'(t)}{[(x_1'(t))^2 + (x_2'(t))^2]^2} & : t = \tau \end{cases} \quad (5.39)$$

mit

$$R_{ij}(t, \tau) := \begin{cases} \{x_i(t) - x_i(\tau)\}\{x_j(t) - x_j(\tau)\} & : t \neq \tau \\ \frac{1}{2} x_i'(t)x_j'(t) & : t = \tau \end{cases} \quad (5.40)$$

gegeben. Die Randglätte wirkt sich auf die Glätte der Kerne aus. Eine Taylorentwicklung zeigt, daß außerhalb der Ecken des Quadrats die Kerne zur Klasse C^{2q+1} gehören.

Da Γ in einer Umgebung von x_0 aus zwei Geradenstücken mit Öffnungswinkel γ , $\pi/2 \leq \gamma \leq 3\pi/2$, $\gamma \neq \pi$, besteht, läßt sich bei der Ecke die Parametrisierung in der Form

$$x(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq T$$

und

$$x(t) = \begin{pmatrix} (2\pi - t) \cos \gamma \\ (2\pi - t) \sin \gamma \end{pmatrix}, \quad 2\pi - T \leq t \leq 2\pi$$

mit geeignetem $T > 0$ schreiben.

Unter Verwendung von

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$x'(t) = \begin{pmatrix} -\cos \gamma \\ -\sin \gamma \end{pmatrix}, \quad 2\pi - T \leq t \leq 2\pi$$

ergeben sich aus (5.37) bis (5.40)

$$K_{ii}^{(1)}(t, \tau) = \begin{cases} -\frac{(2\pi - t) \sin \gamma}{(2\pi - t)^2 + \tau^2 - 2\tau(2\pi - t) \cos \gamma} & : \tau \in]0, T], \\ & t \in [2\pi - T, 2\pi] \\ -\frac{t \sin \gamma}{t^2 + (2\pi - \tau)^2 - 2t(2\pi - \tau) \cos \gamma} & : t \in]0, T], \\ & \tau \in [2\pi - T, 2\pi] \end{cases},$$

$$K_{12}^{(1)}(t, \tau) = K_{21}^{(1)}(t, \tau) = 0,$$

$$K_{ij}^{(2)}(t, \tau) = \begin{cases} -\frac{\{x_i(t) - x_i(\tau)\}\{x_j(t) - x_j(\tau)\}(2\pi - t) \sin \gamma}{[(2\pi - t)^2 + \tau^2 - 2\tau(2\pi - t) \cos \gamma]^2} & : \tau \in]0, T], \\ & t \in [2\pi - T, 2\pi] \\ -\frac{\{x_i(t) - x_i(\tau)\}\{x_j(t) - x_j(\tau)\}t \sin \gamma}{[t^2 + (2\pi - \tau)^2 - 2t(2\pi - \tau) \cos \gamma]^2} & : t \in]0, T], \\ & \tau \in [2\pi - T, 2\pi] \end{cases},$$

und $K_{ij}^{(2)}(t, \tau) = 0$ für $0 \leq t, \tau \leq T$, $2\pi - T \leq t, \tau \leq 2\pi$.

In zwei der vier Ecken des Quadrats $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ liegen also keine Singularitäten vor. In der Nähe von $(0, 2\pi)$ und $(2\pi, 0)$ lassen sich die Kerne in geeigneter Weise durch integrierbare Funktionen abschätzen. Für die nachfolgende Rechnung beschränkt man sich auf die Ecke $(2\pi, 0)$, und ohne Einschränkung sei $\gamma < \pi$ vorausgesetzt. Es gilt für $m = 1, 2$

$$K_{ij}^{(m)}(t, \tau) = -H_{ij}^{(m)}(2\pi - t, \tau), \quad 2\pi - T \leq t \leq 2\pi, \quad 0 < \tau \leq T$$

wobei

$$H_{ij}^{(m)}(t, \tau) := \frac{1}{\tau} k_{ij}^{(m)}\left(\frac{t}{\tau}\right) \quad (5.41)$$

mit

$$k_{11}^{(1)}(s) = k_{22}^{(1)}(s) := \frac{s \sin \gamma}{s^2 - 2s \cos \gamma + 1}, \quad (5.42)$$

$$k_{12}^{(1)}(s) = k_{21}^{(1)}(s) := 0, \quad (5.43)$$

$$k_{11}^{(2)}(s) := \frac{s \sin \gamma (s \cos \gamma - 1)^2}{[s^2 - 2s \cos \gamma + 1]^2}, \quad (5.44)$$

$$k_{12}^{(2)}(s) = k_{21}^{(2)}(s) := \frac{s^2 \sin^2 \gamma (s \cos \gamma - 1)}{[s^2 - 2s \cos \gamma + 1]^2}, \quad (5.45)$$

$$k_{22}^{(2)}(s) := \frac{s^3 \sin^3 \gamma}{[s^2 - 2s \cos \gamma + 1]^2}. \quad (5.46)$$

Die partiellen Ableitungen von $H_{ij}^{(m)}$ bis zur Ordnung $2q + 1$ lassen sich ähnlich wie in (5.41) durch Mellinkerne abschätzen, so das neben (4.2) auch (4.15) erfüllt wird.

Mit den Grundintegralen (für $4b - a^2 > 0$)

$$\int \frac{1}{s^2 + as + b} ds = \frac{1}{\sigma} \arctan \left[\frac{1}{\sigma} \left(s + \frac{a}{2} \right) \right], \quad \sigma := \frac{1}{2} \sqrt{4b - a^2},$$

$$\int \frac{1}{(s^2 + as + b)^2} ds = \frac{1}{2\sigma^2} \frac{s + \frac{a}{2}}{s^2 + as + b} + \frac{1}{2\sigma^3} \arctan \left[\frac{1}{\sigma} \left(s + \frac{a}{2} \right) \right],$$

$$\int \frac{s}{(s^2 + as + b)^2} ds = -\frac{1}{2} \frac{1}{s^2 + as + b} - \frac{a}{2} \int \frac{ds}{(s^2 + as + b)^2}$$

erhält man für $a = -2 \cos \gamma, b = 1, \sigma = \sin \gamma$

$$\begin{aligned}
 \int_0^\infty \frac{A}{s^2 - 2s \cos \gamma + 1} ds &= \frac{A}{\sin \gamma} \arctan \left(\frac{s - \cos \gamma}{\sin \gamma} \right) \Big|_0^\infty \\
 &= \frac{A}{\sin \gamma} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(-\cot \gamma) \right) \\
 &= \frac{A}{\sin \gamma} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \gamma \right) \\
 &= \frac{A}{\sin \gamma} (\pi - \gamma) \tag{5.47}
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 &\int_0^\infty \frac{Bs + C}{(s^2 - 2s \cos \gamma + 1)^2} ds \\
 &= -\frac{B}{2} \frac{1}{s^2 - 2s \cos \gamma + 1} \Big|_0^\infty + (B \cos \gamma + C) \times \\
 &\quad \left[\frac{1}{2 \sin^2 \gamma} \frac{s - \cos \gamma}{s^2 - 2s \cos \gamma + 1} + \frac{1}{2 \sin^3 \gamma} \arctan \left(\frac{s - \cos \gamma}{\sin \gamma} \right) \right] \Big|_0^\infty \\
 &= \frac{B}{2} + (B \cos \gamma + C) \left(\frac{\cos \gamma}{2 \sin^2 \gamma} + \frac{\pi - \gamma}{2 \sin^3 \gamma} \right). \tag{5.48}
 \end{aligned}$$

Nun lassen sich die Integrale

$$\int_0^\infty \frac{k_{ij}^{(m)}(s)}{s} ds$$

berechnen. (Bei Anwendung des Residuensatzes verringert sich der Rechenaufwand nicht wesentlich, denn die Integranden $k_{ij}^{(2)}(s)/s$ haben in den Punkten $\cos \gamma \pm i \sin \gamma$ einen Pol zweiter Ordnung, so daß für die Bestimmung der Residuen ebenfalls eine Partialbruchzerlegung zu empfehlen ist.)

Aus (5.42), (5.43) und (5.47) folgt unmittelbar

$$\int_0^\infty \frac{k_{ij}^{(1)}(s)}{s} ds = \begin{cases} \pi - \gamma & : i = j \\ 0 & : i \neq j \end{cases}. \tag{5.49}$$

Wegen (5.44) gilt

$$\begin{aligned}\frac{k_{11}^{(2)}(s)}{s} &= \frac{s^2 \sin \gamma \cos^2 \gamma - 2s \sin \gamma \cos \gamma + \sin \gamma}{[s^2 - 2s \cos \gamma + 1]^2} \\ &= \frac{A}{s^2 - 2s \cos \gamma + 1} + \frac{Bs + C}{(s^2 - 2s \cos \gamma + 1)^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{mit } A &= \sin \gamma \cos^2 \gamma, \\ B &= -2 \sin^3 \gamma \cos \gamma, \\ C &= \sin^3 \gamma.\end{aligned}$$

Mit (5.47) und (5.48) ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{k_{11}^{(2)}(s)}{s} ds &= (\pi - \gamma) \cos^2 \gamma - \sin^3 \gamma \cos \gamma + \sin^3 \gamma (1 - 2 \cos^2 \gamma) \left(\frac{\cos \gamma}{2 \sin^2 \gamma} + \frac{\pi - \gamma}{2 \sin^3 \gamma} \right) \\ &= \frac{1}{2}(\pi - \gamma) - \sin \gamma \cos \gamma \left(\sin^2 \gamma - \frac{1 - 2 \cos^2 \gamma}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2}(\pi - \gamma - \sin \gamma \cos \gamma).\end{aligned}$$

Ganz analog erhält man für $k_{22}^{(2)}$

$$\frac{k_{22}^{(2)}(s)}{s} = \frac{A}{s^2 - 2s \cos \gamma + 1} + \frac{Bs + C}{(s^2 - 2s \cos \gamma + 1)^2}$$

$$\begin{aligned}\text{mit } A &= \sin^3 \gamma, \\ B &= 2 \sin^3 \gamma \cos \gamma, \\ C &= -\sin^3 \gamma.\end{aligned}$$

Wiederum mit (5.47) und (5.48) berechnet sich

$$\int_0^\infty \frac{k_{22}^{(2)}(s)}{s} ds$$

$$\begin{aligned}
&= (\pi - \gamma) \sin^2 \gamma + \sin^3 \gamma \cos \gamma + \sin^3 \gamma (2 \cos^2 \gamma - 1) \left(\frac{\cos \gamma}{2 \sin^2 \gamma} + \frac{\pi - \gamma}{2 \sin^3 \gamma} \right) \\
&= \frac{1}{2} (\pi - \gamma) (\cos^2 \gamma + \sin^2 \gamma) + \sin \gamma \cos \gamma \left(\sin^2 \gamma + \frac{\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma}{2} \right) \\
&= \frac{1}{2} (\pi - \gamma + \sin \gamma \cos \gamma).
\end{aligned}$$

Wie schon aus dem Beweis von Lemma 5.10 ersichtlich, wechselt die Funktion

$$k_{12}^{(2)}(s) = \frac{s^2 \sin^2 \gamma (s \cos \gamma - 1)}{(s^2 - 2s \cos \gamma + 1)^2}$$

im Fall $0 < \gamma < \pi/2$ auf $[0, \infty)$ das Vorzeichen. Deshalb wurde einschränkend $\pi/2 \leq \gamma \leq 3\pi/2$ verlangt (hier $\pi/2 \leq \gamma < \pi$). Dann majorisiert

$$\tilde{k}_{12}^{(2)}(s) := \frac{s^2 \sin^2 \gamma (-s \cos \gamma + 1)}{(s^2 - 2s \cos \gamma + 1)^2}$$

den Kern $H_{12}^{(2)}$ und hat die erforderlichen asymptotischen Eigenschaften.

$$\begin{aligned}
\frac{\tilde{k}_{12}^{(2)}(s)}{s} &= \frac{-s^2 \sin^2 \gamma \cos \gamma + s \sin^2 \gamma}{(s^2 - 2s \cos \gamma + 1)^2} \\
&= \frac{A}{s^2 - 2s \cos \gamma + 1} + \frac{Bs + C}{(s^2 - 2s \cos \gamma + 1)^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{mit } A &= -\sin^2 \gamma \cos \gamma, \\
B &= \sin^2 \gamma (1 - 2 \cos^2 \gamma), \\
C &= \sin^2 \gamma \cos \gamma
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{\tilde{k}_{12}^{(2)}(s)}{s} ds \\
&= -(\pi - \gamma) \sin \gamma \cos \gamma + \frac{1}{2} \sin^2 \gamma (1 - 2 \cos^2 \gamma)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2 \sin^2 \gamma \cos \gamma (1 - 2 \cos^2 \gamma) \left(\frac{\cos \gamma}{2 \sin^2 \gamma} + \frac{\pi - \gamma}{2 \sin^3 \gamma} \right) \\
& = \frac{1}{2} \sin^2 \gamma.
\end{aligned}$$

Für den Nachweis von $\|\tilde{A}K^{(1)} + \tilde{B}K^{(2)}\|_{\infty,0} < 1$ sind die Funktionen

$$\begin{aligned}
f_1(\gamma) & := 2\tilde{A} \int_0^\infty \frac{k_{11}^{(1)}(s) + k_{12}^{(1)}(s)}{s} ds + 2\tilde{B} \int_0^\infty \frac{k_{11}^{(2)}(s) + \tilde{k}_{12}^{(2)}(s)}{s} ds \\
& = 2\tilde{A}(\pi - \gamma) + \tilde{B}(\pi - \gamma - \sin \gamma \cos \gamma + \sin^2 \gamma), \\
f_2(\gamma) & := 2\tilde{A} \int_0^\infty \frac{k_{21}^{(1)}(s) + k_{22}^{(1)}(s)}{s} ds + 2\tilde{B} \int_0^\infty \frac{\tilde{k}_{21}^{(2)}(s) + k_{22}^{(2)}(s)}{s} ds \\
& = 2\tilde{A}(\pi - \gamma) + \tilde{B}(\pi - \gamma + \sin \gamma \cos \gamma + \sin^2 \gamma)
\end{aligned}$$

auf $[\frac{\pi}{2}, \pi)$ zu untersuchen. Eine Kurvendiskussion zeigt, daß beide Funktionen ihr Maximum in $\frac{\pi}{2}$ annehmen, und zwar gilt

$$\begin{aligned}
f_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = f_2\left(\frac{\pi}{2}\right) & = \tilde{A}\pi + \tilde{B}\left(\frac{\pi}{2} + 1\right) \\
& = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 3\mu} < 1.
\end{aligned}$$

Mit der Notation $\psi - \psi(x_0) \in S^{2q+1, \alpha+1}$ genau dann, wenn dies für die parametrisierte Form $\varphi - \varphi(0)$ gilt, läßt sich abschließend der folgende Satz formulieren.

Satz 5.11 *Unter den Voraussetzungen an den Rand Γ und*

$$\frac{\pi}{2} \leq \gamma \leq \frac{3}{2}\pi, \quad \gamma \neq \pi$$

hat die Integralgleichung

$$\psi - \tilde{A}K^{(1)}\psi - \tilde{B}K^{(2)}\psi + \psi(x_0) = -2f$$

genau eine Lösung $\psi \in C(\Gamma)$ und die durch das Nyströmverfahren erzeugte Folge $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gegen ψ , vorausgesetzt $\psi - \psi(x_0)$ liegt in $S^{2q+1, \alpha+1}$ mit $0 < \alpha < 1$, $\alpha p \geq 2q + 1$. Es gilt die Fehlerabschätzung

$$\|\psi - \psi_n\|_{\infty, \Gamma} \leq \frac{C}{n^{2q+1}} \|\psi - \psi(x_0)\|_{2q+1, \alpha+1}.$$

Beweis: Die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung wurde in Satz 5.9 bewiesen. Da der Kern der parametrisierten Integralgleichung die Eigenschaften von Kapitel 4 besitzt, liefert Satz 4.5 die Behauptung. ■

Für die Beantwortung der Frage, ob $\psi - \psi(x_0)$ für hinreichend kleines α und glatte Randwerte f in $S^{2q+1, \alpha+1}$ liegt, sind Aussagen über die Regularität von u bei x_0 notwendig. In [4] wird beschrieben, wie man nach Aufspalten von u in Tangential- und Radialkomponente die Basis des Lösungsraums zum homogenen Problem erhält. Im Fall der Elastizitätsgleichung ist diese in [8] angegeben. Aus der Darstellung kann man folgern, daß für hinreichend glatte Randwerte f die (parametrisierte) Dichte $\varphi - \varphi(0)$ im Raum $S^{m, 1+\alpha}$ liegt, vorausgesetzt $m \in \mathbb{N}$ und $0 < \alpha < \max\{1, \pi/\gamma\}$.

5.5 Numerische Experimente

Das Vektorfeld

$$u(r, \vartheta) = r^\delta \begin{pmatrix} \sin(\delta\vartheta) \\ \cos(\delta\vartheta) \end{pmatrix}, \quad \delta > 0$$

erfüllt außerhalb von $\{(x_1, x_2)^t \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \leq 0, x_2 = 0\}$ die Elastizitätsgleichung, denn wegen

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x_1} &= \cos \vartheta \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\sin \vartheta}{r} \frac{\partial u}{\partial \vartheta}, \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} &= \sin \vartheta \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\cos \vartheta}{r} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} \end{aligned}$$

ist u divergenzfrei, und beide Komponenten sind harmonisch.

Beispiel 5.12 Es wird ein tropfenförmiges Gebiet G betrachtet, dessen Rand durch die Parametrisierung

$$x(t) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{t}{2}\right), -\sin(t) \right)^t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

gegeben ist. Dieser Rand ist C^∞ -glatt bis auf die Ecke bei $t = 0$. Der Innenwinkel γ bei $x_0 = (0, 0)^t$ beträgt $2\pi/3$. Die Dirichletrandwerte werden durch

die Funktion

$$f(r, \vartheta) = r^{3/2} \left(\sin \left(\frac{3}{2} \vartheta \right), \cos \left(\frac{3}{2} \vartheta \right) \right)^t, r \geq 0, -\pi < \vartheta < \pi$$

gegeben. In den nachfolgenden Tabellen ist für verschiedene Punkte z in G und den Transformationen aus Kapitel 3 der Fehler $\|u_n(z) - u(z)\|_{2, \mathbb{R}^2}$ angegeben worden. Die Näherung u_n erhält man aus den durch Lösen eines Gleichungssystem bestimmten Näherungen $\varphi_n^{(j)} \approx \psi(x(s_j^{(n)}))$ und Quadratur von

$$u(z) = \int_{\Gamma} \tilde{D}(z, y) [\psi(y) - \psi(x_0)] ds(y) - \psi(x_0),$$

das heißt

$$u_n(z) = \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^{2n-1} \alpha_j^{(n)} \tilde{D} \left(z, x(s_j^{(n)}) \right) [\varphi_n^{(j)} - \varphi_n^{(0)}] \left\| x' \left(s_j^{(n)} \right) \right\|_{2, \mathbb{R}^2} - \varphi_n^{(0)}.$$

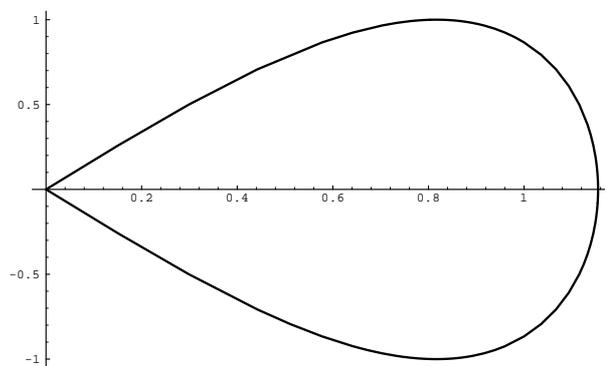
Beispiel 5.13 Der Rand Γ des Gebietes G wird durch die Parametrisierung

$$x(t) = \left(-\frac{2}{3} \sin \left(\frac{3}{2} t \right), -\sin(t) \right)^t, 0 \leq t \leq 2\pi$$

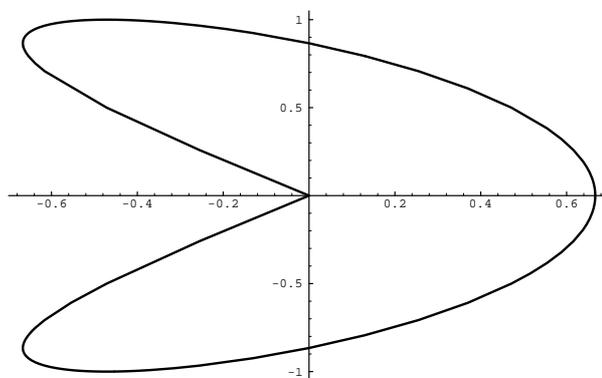
gegeben. Γ ist wiederum C^∞ -glatt bis auf die Ecke $x_0 = (0, 0)^t$ mit Innenwinkel $\gamma = 3\pi/2$. Die vorgegebenen Randwerte lauten

$$f(r, \vartheta) = r^{2/3} \left(\sin \left(\frac{2}{3} \vartheta \right), \cos \left(\frac{2}{3} \vartheta \right) \right)^t, r \geq 0, -\pi < \vartheta < \pi.$$

Es wurde numerisch festgestellt, daß für alle behandelten Transformationen das Verfahren bereits für $r = 1$ konvergiert. Bei Verwendung der modifizierten Ansätze ergeben sich für kleine n auch geringere Fehler als bei den nichtmodifizierten Transformationen. Die schlechtere Konstante wirkt sich erst bei großer Stützstellenzahl aus. Das ist insofern nicht verwunderlich, da sich für $n \leq 64$, also 128 Stützstellen, die Konvergenzordnung noch nicht eingestellt hat. Bei den nachfolgend angeführten Tabellen wurde ein Abschneideparameter von $r = 7$ (im Beispiel des konvexen Gebietes) und $r = 4$ (für das nicht konvexe Gebiet) verwendet. Dadurch wird der Vorteil der nichtmodifizierten Transformationen bereits bei kleinen n deutlich. Im Beispiel 5.12 ist eine schnellere Konvergenz als im Beispiel 5.13 zu verzeichnen. Wegen $\varphi - \varphi(0) \in S^{m, 1+\alpha}$ mit $m \in \mathbb{N}$ und $\alpha < \max(1, \pi/\gamma)$ ist die Winkelabhängigkeit bei α die Ursache für das unterschiedliche Konvergenzverhalten.



$$x(t) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \sin(t/2), -\sin(t) \right)^t$$



$$x(t) = \left(-\frac{2}{3} \sin(3/2t), -\sin(t) \right)^t$$

Tabelle 5.1: $\gamma = 2/3\pi$, $\lambda = \mu = 1$, w polynomial, von Korobov

m	n	$z = (0.2, 0)$	$z = (0.4, 0.2)$
2	8	0.18825552	0.12253198
	16	0.11862425	0.03952610
	32	0.01379070	0.00277256
	64	0.00072583	0.00013957
3	8	0.15607271	0.03738743
	16	0.04795756	0.01526340
	32	0.00107080	0.00038172
	64	0.00001846	0.00000686
4	8	0.16798413	0.09247097
	16	0.01576105	0.00579536
	32	0.00010301	0.00007727
	64	0.00000061	0.00000043

Tabelle 5.2: $\gamma = 2/3\pi$, $\lambda = \mu = 1$, Korobov modifiziert

m	n	$z = (0.2, 0)$	$z = (0.4, 0.2)$
2	8	0.17715930	0.11488754
	16	0.09493701	0.03015829
	32	0.01461019	0.00376979
	64	0.00091890	0.00021356
3	8	0.16449130	0.10125857
	16	0.07589530	0.02488538
	32	0.00190691	0.00099542
	64	0.00003136	0.00002415
4	8	0.15534613	0.04467759
	16	0.04588883	0.01531321
	32	0.00047801	0.00019392
	64	0.00000319	0.00000113

Tabelle 5.3: $\gamma = 2/3\pi$, $\lambda = \mu = 1$, \sin^m -Transformation

m	n	$z = (0.2, 0)$	$z = (0.4, 0.2)$
3	8	0.16574083	0.05776753
	16	0.02830905	0.01088641
	32	0.00051375	0.00018446
	64	0.00000883	0.00000295
4	8	0.13519167	0.12778065
	16	0.00850162	0.00188641
	32	0.00008664	0.00001078
	64	0.00000069	0.00000006
5	8	0.11821168	0.09586133
	16	0.00337036	0.00816655
	32	0.00001375	0.00002171
	64	0.00000003	0.00000004

Tabelle 5.4: $\gamma = 2/3\pi$, $\lambda = \mu = 1$, \sin^m modifiziert

m	n	$z = (0.2, 0)$	$z = (0.4, 0.2)$
3	8	0.15597500	0.05845639
	16	0.05453756	0.01829280
	32	0.00106437	0.00034819
	64	0.00001920	0.00000584
4	8	0.18250857	0.07602635
	16	0.02436623	0.00893793
	32	0.00035751	0.00006264
	64	0.00000296	0.00000038
5	8	0.19846795	0.13261671
	16	0.01043112	0.00712951
	32	0.00005629	0.00002345
	64	0.00000014	0.00000005

Tabelle 5.5: $\gamma = 2/3\pi$, $\lambda = \mu = 1$, v linear

p	n	$z = (0.2, 0)$	$z = (0.4, 0.2)$
3	8	0.11973865	0.10812233
	16	0.01258228	0.00405358
	32	0.00074013	0.00022562
	64	0.00003524	0.00000994
4	8	0.09390425	0.17132529
	16	0.01192916	0.03666166
	32	0.00039764	0.00114568
	64	0.00000603	0.00001848
5	8	0.10909587	0.35592934
	16	0.03205946	0.09354886
	32	0.00016441	0.00046517
	64	0.00000094	0.00000258

Tabelle 5.6: $\gamma = 2/3\pi$, $\lambda = \mu = 1$, v kubisch

p	n	$z = (0.2, 0)$	$z = (0.4, 0.2)$
3	8	0.16961556	0.10214301
	16	0.08261681	0.02675709
	32	0.00550779	0.00173312
	64	0.00026353	0.00008252
4	8	0.16647135	0.04115641
	16	0.03594434	0.01096394
	32	0.00143777	0.00040607
	64	0.00002247	0.00001402
5	8	0.19897115	0.11609195
	16	0.01427424	0.00895892
	32	0.00081567	0.00006278
	64	0.00000472	0.00000084

Tabelle 5.7: $\gamma = 3/2\pi$, $\lambda = 0.1$, $\mu = 0.3$, w polynomial, von Korobov

m	n	$z = (0.1, 0)$	$z = (-0.05, 0.3)$
2	8	0.23286608	0.12741783
	16	0.13695950	0.02750187
	32	0.03318281	0.00402940
	64	0.00182030	0.00054257
3	8	0.16858729	0.09063672
	16	0.06597691	0.01593101
	32	0.00529850	0.00113002
	64	0.00037813	0.00007590
4	8	0.06347819	0.16462587
	16	0.03002958	0.01647350
	32	0.00116904	0.00058521
	64	0.00003904	0.00002006

Tabelle 5.8: $\gamma = 3/2\pi$, $\lambda = 0.1$, $\mu = 0.3$, Korobov modifiziert

m	n	$z = (0.1, 0)$	$z = (-0.05, 0.3)$
2	8	0.21448669	0.15732201
	16	0.11536693	0.02515964
	32	0.03864733	0.00479098
	64	0.00536769	0.00067052
3	8	0.20891196	0.12122450
	16	0.08302975	0.02433936
	32	0.00751400	0.00176612
	64	0.00055367	0.00012004
4	8	0.19261572	0.06240462
	16	0.04802342	0.00835092
	32	0.00199087	0.00030752
	64	0.00007688	0.00001055

Tabelle 5.9: $\gamma = 3/2\pi, \lambda = 0.1, \mu = 0.3$, \sin^m -Transformation

m	n	$z = (0.1, 0)$	$z = (-0.05, 0.3)$
3	8	0.11811084	0.10009228
	16	0.05059948	0.01876695
	32	0.00422289	0.00123951
	64	0.00030501	0.00007954
4	8	0.21381851	0.14635112
	16	0.02261822	0.00626951
	32	0.00092734	0.00020865
	64	0.00003241	0.00000663
5	8	0.10543558	0.27296766
	16	0.01255295	0.02802613
	32	0.00025206	0.00054573
	64	0.00000443	0.00000569

Tabelle 5.10: $\gamma = 3/2\pi, \lambda = 0.1, \mu = 0.3$, \sin^m modifiziert

m	n	$z = (0.1, 0)$	$z = (-0.05, 0.3)$
3	8	0.19855937	0.07039577
	16	0.06451270	0.01531076
	32	0.00617897	0.00103571
	64	0.00048449	0.00006793
4	8	0.16749282	0.06376834
	16	0.02967429	0.01988190
	32	0.00123892	0.00077094
	64	0.00004438	0.00002496
5	8	0.12647973	0.26896902
	16	0.01055453	0.01158542
	32	0.00025270	0.00027405
	64	0.00000504	0.00000471

Tabelle 5.11: $\gamma = 3/2\pi$, $\lambda = 0.1$, $\mu = 0.3$, v linear

p	n	$z = (0.1, 0)$	$z = (-0.05, 0.3)$
3	8	0.03461140	0.15466645
	16	0.05549509	0.00926496
	32	0.00094800	0.00231624
	64	0.00018960	0.00077208
4	8	0.14431657	0.10056140
	16	0.01554943	0.08569772
	32	0.00189627	0.00428451
	64	0.00027323	0.00061207
5	8	0.11925245	0.20617895
	16	0.11174819	0.10644391
	32	0.00454260	0.00943500
	64	0.00026721	0.00060412

Tabelle 5.12: $\gamma = 3/2\pi$, $\lambda = 0.1$, $\mu = 0.3$, v kubisch

p	n	$z = (0.1, 0)$	$z = (-0.05, 0.3)$
3	8	0.21094267	0.13462756
	16	0.10418346	0.02665869
	32	0.02002885	0.00538321
	64	0.00416679	0.00113442
4	8	0.18377829	0.03033168
	16	0.04946451	0.01209222
	32	0.00626133	0.00232543
	64	0.00073663	0.00097009
5	8	0.14292106	0.20386187
	16	0.01967801	0.01339963
	32	0.00258921	0.00167495
	64	0.00032775	0.00055187

Literaturverzeichnis

- [1] F.Boeckh, *Die numerische Behandlung eines Randwertproblems mit einer Integralgleichungsmethode bei einem unendlich ausgedehnten Rand mit Ecken*, Diplomarbeit, Institut für Numerische und Angewandte Mathematik Universität Göttingen, Göttingen, 1988
- [2] M.F.Borodich, *Theory of elasticity*, P.Noordhoff N.V., Groningen, 1965
- [3] D.Colton and R.Kress, *Integral Equation Methods in Scattering Theory*, Wiley-Interscience Publication, New York, 1983
- [4] M.Costabel and M.Dauge, *Computation of Corner Singularities in Linear Elasticity*, In: *Boundary value problems and integral equations in nonsmooth domains*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics **167**, Marcel Dekker Inc., New York, (1995), 59-68
- [5] J.Evans, *Randintegralgleichungen bei der Stokes-Gleichung und ihre numerische Behandlung*, Diplomarbeit, Institut für Numerische und Angewandte Mathematik Universität Göttingen, Göttingen, 1997
- [6] P.J.Davis and P.Rabinowitz, *Methods of Numerical Integration*, Academic Press, New York, San Francisco, London, 1975
- [7] D.Elliott and S.Prössdorf, *An algorithm for the approximate solution of integral equations of Mellin type*, Numerische Mathematik **70**, (1995), 427-452
- [8] P.Grisvard, *Singularités en élasticité*, Archieve for Rational Mechanics and Analysis **107**, (1989), 157-180

- [9] G.C.Hsiao, E.P.Stephan and W.L.Wendland, *An integral equation formulation for a boundary value problem of elasticity in the domain exterior to an arc*, Reprint, Fachbereich Mathematik, Technische Hochschule Darmstadt, **833**, 1984
- [10] H.Heuser, *Funktionalanalysis*, Teubner, Stuttgart, 1986
- [11] O.Kellogg, *Foundations of Potential Theory*, 1929
- [12] J.K.Knowles and T.A.Pucik, *Uniqueness for plane crack problems in linear elastostatics*, Journal of Elasticity **3**, (1973), 155-160
- [13] H.König, *Jahresbericht der DMV* **66**, Teubner, Stuttgart, 1964, 119-138
- [14] R.Kress, *A Nyström method for boundary integral equations in domains with corners*, Numerical Mathematics **58**, (1990), 145-161
- [15] R.Kress, *Linear Integral Equations*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1989
- [16] V.D.Kupradze, *Potential methods in the theory of elasticity*, Israel program for scientific translations, Jerusalem, 1965
- [17] P.A.Lewis and G.R.Wickham, *The diffraction of SH waves by an arbitrary shaped crack in two dimensions*, Proceedings of the Royal Society of London **340**, (1992), 503-529
- [18] S.G.Mikhlin, N.F.Morozov and M.V.Paukshto, *The Integral Equations of the Theory of Elasticity*, Teubner-Texte zur Mathematik **135**, Stuttgart, Leipzig, 1995
- [19] C.Müller, *Grundprobleme der mathematischen Theorie elektromagnetischer Schwingungen*, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, 1957
- [20] N.I.Mußchelischwilli, *Einige Grundaufgaben zur mathematischen Elastizitätstheorie*, Carl Hanser Verlag, München, 1971
- [21] I.Navot, *An extension of the Euler-Maclaurin summation formula*, Journal of Mathematics and Physics **40**, (1961), 271-276

-
- [22] I.Navot, *A further extension of the Euler-Maclaurin summation formula*, Journal of Mathematics and Physics **41**, (1962), 155-163
- [23] S.Prössdorf and A.Rathsfeld, *On an integral equation of the first kind arising from a cruciform crack problem*, In: V.Petkov und R.Lazarov, *Integral Equations and Inverse Problems*, Longman, Coventry, (1991), 210-219
- [24] A.Sidi, *A new variable transformation for numerical integration*, In: *Numerical Integration IV*, International Series of Numerical Mathematics, Birkhäuser Verlag Basel **112**, (1993), 359-373
- [25] J.F.Steffensen, *Interpolation*, Chelsea Publishing Company, New York, 1950
- [26] G.R.Wickham, *The diffraction of stress waves by a plane finite crack in two dimensions: uniqueness and existence*, Proceedings of the Royal Society of London **378**, (1981), 241-261