

Eigenwerte des Fernfeldoperators

Diplomarbeit

vorgelegt von
Karin Annette Hauenschild
aus
Bochum

angefertigt am
Institut für
Numerische und Angewandte Mathematik
der
Georg-August-Universität Göttingen
1997

(1809 auf dem Gut Sidley Park, Gespräch zwischen Thomasina Coverly und ihrem Hauslehrer Septimus Hodge aus „Arkadien“, einem Theaterstück von Tom Stoppard, 1993)

Septimus: Auf den Rand einer Seite seiner „Arithmetica“-Ausgabe hat Fermat geschrieben, daß er einen wundervollen Beweis für sein Theorem entdeckt hat, aber weil der Rand der Seite für seine Zwecke zu schmal war, hätte er keinen Platz ihn niederzuschreiben.

Die Notiz wurde nach seinem Tode aufgefunden, und von diesem Tag bis auf den heutigen -

Thomasina: Oh! Jetzt versteh ich!

Die Lösung liegt glasklar auf der Hand.

Septimus: Diesmal übernehmen Sie sich. (...)

My lady, gehen Sie mit Fermat in's Musikzimmer.

Sie bekommen einen Extra-Eßlöffel Marmelade, wenn Sie den Beweis finden.

Thomasina: Es gibt keinen Beweis, Septimus.

Was vollkommen glasklar auf der Hand liegt, ist, daß es sich bei der Notiz am Buchrand um einen Witz handelt, um alle verrückt zu machen.

ca. 200 Jahre später entdeckt man auf dem Rand ihrer Algebrafibelf:

„Ich, Thomasina Coverly, habe eine wunderbare Methode erfunden, durch die alle Formen der Natur ihre numerischen Geheimnisse preisgeben und sich alleine durch Zahlen darstellen lassen müssen. Da dieser Buchrand zu schmal für meine Zwecke ist, muß der Leser woanders nach der Neuen Geometrie Unregelmäßiger Formen suchen, die Thomasina Coverly entdeckt hat.“

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	iii
Einleitung	v
1 Physikalische Motivation	1
1.1 Mathematische Beschreibung elektromagnetischer Wellen	1
1.2 Streuung an Körpern mit einer dünnen Schicht	3
2 Potentialtheoretische Grundlagen	6
2.1 Grundleistung der Helmholtzgleichung im \mathbb{R}^2	6
2.2 Oberflächenpotentiale	8
2.3 Ausstrahlende Lösungen	11
2.4 Kompakte und Spurklasse-Operatoren	15
3 Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen	21
3.1 Das konduktive Randwertproblem	21
3.2 Das zugehörige Streuproblem	28
4 Eigenwerte des Fernfeldoperators	30
4.1 Eigenschaften des Fernfeldoperators	30
4.2 Abschätzungen beim konduktiven Randwertproblem	45
4.3 Ein Beispiel: Der Einheitskreis	49
5 Numerische Behandlung	53
5.1 Trigonometrische Interpolation mit äquidistanten Stützstellen	53
5.2 Numerische Behandlung der Integraloperatoren	56
5.3 Approximationen an den Fernfeldoperator und seine Eigenwerte	58
5.4 Numerische Beispiele	60
6 Rekonstruktion des streuenden Gebietes aus den Eigenwerten	68
6.1 Problemstellung	68
6.2 Die Fréchet-Ableitung der Eigenwerte des Fernfeldoperators	70

6.3	Eigenwerte des Fernfeldoperators zum Dirichletproblem	75
6.4	Das Newton-Verfahren	78
6.5	Implementation	80
6.6	Numerische Resultate	82
6.7	Ausblick	85
	Schlußbemerkungen	86
	Literaturverzeichnis	88

Einleitung

Betrachtet werden elektromagnetische Wellen, die an einem beschränkten, homogenen Körper D gestreut werden, der von einer dünnen Schicht mit veränderter Leitfähigkeit umgeben ist. Die mathematische Beschreibung dieses Vorgangs führt bei einem zeitharmonischen Lösungsansatz $U(x, t) = e^{-i\omega t}u(x)$ auf ein **konduktives Randwertprobleme zur Helmholtzgleichung** mit einer materialabhängigen Wellenzahl k .

Wir gehen zuerst davon aus, daß als einfallende Wellen u^i ebene Wellen mit Einfallrichtung d gegeben sind:

$$u^i(x; d) = e^{ikxd}.$$

Wenn wir Bedingungen angeben können, unter denen das Randwertproblem eindeutig lösbar ist, so können wir jeder einfallenden Welle u^i eine Lösung $u(x; d) = u^i(x; d) + u^s(x; d)$ zuordnen, wobei der gestreute Anteil u^s einer Ausstrahlungsbedingung genügt.

Felder in großer Entfernung von dem Streukörper können durch das **Fernfeld** u_∞ beschrieben werden, einer Funktion, die abhängig von der Betrachtungsrichtung \hat{x} das Abklingverhalten von ausstrahlenden Lösungen des Randwertproblems als Kugelwelle darstellt. Zum Beispiel gilt im \mathbb{R}^2 :

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} u^s(x; d) = \frac{e^{ik\|x\|}}{\sqrt{\|x\|}} u_\infty(\hat{x}; d) \quad \text{gleichmäßig für alle Richtungen } \hat{x} = \frac{x}{\|x\|}.$$

Betrachten wir nun einfallende Wellen in Form von gewichteten Überlagerungen ebenener Wellen. Dazu integrieren wir über alle Einfallrichtungen $d \in \Omega := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$ mit einer L^2 -Gewichtsfunktion g und erhalten:

$$u_g^i(x) = \int_{\Omega} u^i(x; d)g(d) ds(d).$$

Dann ergibt sich das zugehörige Fernfeld analog als gewichtete Überlagerung der Fernfelder der entsprechenden einfallenden ebenen Wellen

$$u_{\infty, g}(\hat{x}) = \int_{\Omega} u_\infty(\hat{x}; d)g(d) ds(d),$$

da sowohl die Randbedingungen als auch die Bildung des Fernfeldes linear sind und die Lösungen in stetiger Weise von der Einfallrichtung d abhängen.

Die Überlagerung von Fernfeldern läßt sich auch als linearer Integraloperator auffassen, der auf die Gewichtsfunktion $g \in L^2(\Omega)$ wirkt. Diese Idee soll in der vorliegenden Diplomarbeit näher untersucht werden.

Dazu definieren wir den **Fernfeldoperator zum konduktiven Randwertproblem** $\mathcal{F} : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ durch

$$\mathcal{F}(g)(\hat{x}) := \int_{\Omega} u_{\infty}(\hat{x}; d)g(d) ds(d) \quad \text{für } \hat{x} \in \Omega.$$

Ziel dieser Arbeit soll es sein, die **Eigenwerte des Fernfeldoperators** zu betrachten. Aus der Funktionalanalysis ist bekannt, daß die Kenntnis von Eigenwerten und Eigenvektoren eines kompakten, normalen und linearen Operators ausreicht, den Operator vollständig zu charakterisieren. Darüberhinaus sind Eigenwerte sehr interessant, da sie unter verschiedenen Darstellungen invariant bleiben.

Da \mathcal{F} ein Integraloperator mit glattem Kern ist, ist \mathcal{F} kompakt, und wir wissen, daß die Folge der Eigenwerte eine beschränkte Folge ist, die gegen Null konvergiert. Wir werden zeigen, daß es für das konduktive Randwertproblem unendlich viele verschiedene Eigenwerte gibt. Sie liegen in einem Kreis, dessen Radius von den Materialkonstanten und der Gestalt des Streukörpers abhängig ist. Das bedeutet, daß die Eigenwerte Information über den Streukörper enthalten. Es stellt sich die Frage, ob wir aus der Kenntnis der Lage der Eigenwerte und der Materialeigenschaften sogar die genaue Form und Lage des Streukörpers bestimmen können. Dazu beschreiben wir ein **Newton-Verfahren**, das mit Hilfe der **Fréchet-Ableitung der Eigenwerte** nach der Randkurve unter Umständen eine Möglichkeit zur Rekonstruktion des Gebietes liefert.

Die Arbeit ist wie folgt gegliedert:

- In **Kapitel 1** wird eine physikalische Motivation für das konduktive Randwertproblem gegeben.
- **Kapitel 2** enthält die funktionalanalytischen und potentialtheoretischen Grundlagen, die für die folgenden Kapitel von Bedeutung sind.
- Danach behandeln wir in **Kapitel 3** die Frage nach der Eindeutigkeit und Existenz von Lösungen zum konduktiven Randwertproblem mit Hilfe von Randintegralgleichungsmethoden.
- Das **Kapitel 4** beinhaltet eine Charakterisierung des Fernfeldoperators, sowie Abschätzungen für die Lage der Eigenwerte für das konduktive Randwertproblem.

- **Kapitel 5** beschreibt die Vorgehensweise zur numerischen Berechnung der Integraloperatoren und der Eigenwerte, macht Aussagen zur Konvergenz der numerischen Näherungen und wertet in mehreren Testreihen die numerischen Ergebnisse aus.
- Abschließend weisen wir in **Kapitel 6** die Fréchet-Differenzierbarkeit der Eigenwerte nach der Randkurve nach und beschreiben ein Newton-Verfahren zur Rekonstruktion des Streukörpers aus der Kenntnis der Eigenwerte.

Die Berechnungen wurden auf den DEC Alpha Workstations des Instituts für Numerische und Angewandte Mathematik der Universität Göttingen durchgeführt. Dabei wurden Routinen zur Eigenwertberechnung aus der DEC Extended Math Library (dxml) verwendet.

Kapitel 1

Physikalische Motivation

Dieses Kapitel soll eine Einführung in die mathematische Beschreibung von elektromagnetischen Wellen und die Beschreibung von Streuproblemen geben und eine physikalische Motivation für das konduktive Randwertproblem liefern.

1.1 Mathematische Beschreibung elektromagnetischer Wellen

Betrachten wir ein elektromagnetisches Feld im dreidimensionalen Raum. Wenn wir dieses mathematisch beschreiben wollen, so lehrt uns die Elektrodynamik, daß das elektrische Feld \mathcal{E} und das magnetische Feld \mathcal{H} die *Maxwellgleichungen* erfüllen müssen

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathcal{E} + \mu \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathcal{H} - \varepsilon \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} &= \sigma \mathcal{E}.\end{aligned}$$

Dabei ist ε die Dielektrizitätskonstante, μ die magnetische Permeabilität und σ die elektrische Leitfähigkeit. Diese Größen sind jeweils materialabhängig. Bei einem zeitharmonischen Ansatz mit einer Frequenz $\omega > 0$,

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(x, t) &= \operatorname{Re} \{ E(x) e^{-i\omega t} \} \\ \mathcal{H}(x, t) &= \operatorname{Re} \{ H(x) e^{-i\omega t} \},\end{aligned}$$

erhalten wir die sogenannten *reduzierten Maxwellgleichungen* für die komplexwertigen, raumabhängigen Anteile E und H :

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} E &= i\omega\mu H \\ \operatorname{rot} H &= (\sigma - i\omega\varepsilon) E.\end{aligned}$$

Nach den Sätzen von Stratton und Chu (siehe dazu [3] die Sätze 4.1 und 4.5) hat jede Lösung der Maxwellgleichung analytische kartesische Komponenten im Lösungsgebiet, ist dort also

insbesondere beliebig oft stetig differenzierbar.

Damit gilt für das elektrische Feld $\operatorname{rot}^2 E = k^2 E$ und für das magnetische Feld $\operatorname{rot}^2 H = k^2 H$ mit $k^2 = \mu\omega^2 \left(\varepsilon + \frac{i\sigma}{\omega}\right)$ und $\operatorname{Im} k \geq 0$.

Wegen $\operatorname{rot} \operatorname{rot} E = \Delta E + \nabla \operatorname{div} E$ und $\operatorname{div} E = \frac{1}{\sigma - i\omega\varepsilon} \operatorname{div} \operatorname{rot} H = 0$ gilt für die kartesischen Komponentenfunktionen $E_{(j)}$

$$\Delta E_{(j)} + k^2 E_{(j)} = 0, \quad \text{für } j = 1, 2, 3. \quad (1.1)$$

Die kartesischen Komponenten einer Lösung der Maxwellgleichung sind also Lösungen der Helmholtzgleichung.

Zur Vereinfachung betrachten wir einen Spezialfall: Seien $E(x_1, x_2, x_3)$ und $H(x_1, x_2, x_3)$ jeweils unabhängig von x_3 . Damit reduzieren sich die reduzierten Maxwellgleichungen wiederum zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_2} E_{(3)} &= ik H_{(1)} & \frac{\partial}{\partial x_2} H_{(3)} &= -ik E_{(1)} \\ -\frac{\partial}{\partial x_1} E_{(3)} &= ik H_{(2)} & -\frac{\partial}{\partial x_1} H_{(3)} &= -ik E_{(2)} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} E_{(2)} - \frac{\partial}{\partial x_2} E_{(1)} &= ik H_{(3)} & \frac{\partial}{\partial x_1} H_{(2)} - \frac{\partial}{\partial x_2} H_{(1)} &= -ik E_{(3)}. \end{aligned}$$

Die Gleichungen in $E_{(1)}, E_{(2)}, H_{(3)}$ sind also unabhängig von denen in $H_{(1)}, H_{(2)}, E_{(3)}$. Setzen wir $E_{(1)} = E_{(2)} = H_{(3)} = 0^1$, so können wir die Gleichungen für $E_{(3)}$ genauer betrachten.

Wir setzen bei geeigneter Polarisierung

$$E(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, u(x_1, x_2))^t \quad \text{an.} \quad (1.2)$$

Wir wollen nun äquivalente Ausstrahlungsbedingungen für vektorielle und skalare Lösungen betrachten. Eine skalare Lösung $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ bezeichnen wir als *ausstrahlend*, wenn sie der *Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung (SAB)* genügt, d.h.

$$\frac{\partial u}{\partial \|x\|} - ik u = o\left(\|x\|^{-\frac{n-1}{2}}\right) \quad \text{glm. für alle Richtungen } \frac{x}{\|x\|}. \quad (1.3)$$

Man kann zeigen, daß für ein divergenzfreies Feld E die Bedingungen

1. die Komponentenfunktionen $E_{(j)}$ erfüllen sämtlich die (SAB)
2. E erfüllt die *Silver-Müller Ausstrahlungsbedingung (SMAB)*

$$\frac{1}{ik} \operatorname{rot} E \times \frac{x}{\|x\|} - E = o\left(\frac{1}{\|x\|}\right) \quad \text{oder} \quad E \times \frac{x}{\|x\|} + \frac{1}{ik} \operatorname{rot} E = o\left(\frac{1}{\|x\|}\right)$$

für $\|x\| \rightarrow \infty$, glm. für alle Richtungen $\frac{x}{\|x\|}$

¹Das entspricht einer Polarisierung.

äquivalent sind (siehe dazu [3] die Korollare 4.7 und 4.14).

Daraus können wir folgende Schlußfolgerung ziehen: Löst $u(x_1, x_2)$ die Helmholtzgleichung mit Sommerfeldscher Ausstrahlungsbedingung im \mathbb{R}^2 , so lösen $E(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, u(x_1, x_2))^t$ und $H(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\sigma - i\omega\epsilon} \operatorname{rot} E(x_1, x_2, x_3)$ die Maxwellgleichungen mit Silver-Müller Ausstrahlungsbedingung im \mathbb{R}^3 . Ein so gewähltes E ist insbesondere divergenzfrei.

1.2 Streuung an Körpern mit einer dünnen Schicht

Im \mathbb{R}^3 befinde sich ein Objekt D , von dem elektromagnetische Wellen gestreut und transmittiert werden. Zur Reduktion des Problems auf den zweidimensionalen Fall betrachten wir als Objekt D einen in x_3 -Richtung unendlich ausgedehnten Zylinder. Damit gilt für den äußeren Normalenvektor ν an das Objekt: $\nu = (\nu_1, \nu_2, 0)$. Auf Grund der Geometrie von D und der Annahme, daß u nur von zwei Variablen abhängt, ist es gerechtfertigt, die (SAB) für den zweidimensionalen Fall anzuwenden. In Zukunft wollen wir mit D den Querschnitt durch den Zylinder im \mathbb{R}^2 bezeichnen.

Das elektrische Feld bestehe aus einem einfallenden Feld E^i , einem gestreuten Feld E^s und einem transmittierten Feld E_2 . Die elektromagnetischen Konstanten im Außenraum werden mit ϵ_1, μ_1 und σ_1 bezeichnet, die innerhalb des Objektes D mit ϵ_2, μ_2 und σ_2 , alle aus \mathbb{R}_+ . Dann müssen die Komponentenfunktionen des elektrischen Feldes im Innen- und Außenraum jeweils die Helmholtzgleichung lösen, jedoch mit verschiedenen Wellenzahlen k_1 und k_2 .

Wir wollen Objekte betrachten, die sich näherungsweise durch das Modell einer *dünnen Schicht* beschreiben lassen. Solche Objekte treten zum Beispiel in der Geophysik auf (siehe dazu die Arbeit von Vasseur und Weidelt [18]). Diese dünne Schicht modelliert eine singuläre Leitfähigkeitsanomalie auf der Oberfläche. Die Streuung von elektromagnetischen Wellen an einem solchen Objekt führt auf ein Randwertproblem, das einer Kombination aus Robin- und Transmissionsproblem zur Helmholtzgleichung entspricht. Im Außenraum sei die konstante Leitfähigkeit σ_1 vorgegeben. Wir beschreiben die Leitfähigkeit auf dem Rand des Objektes durch die sogenannte *integrierte Leitfähigkeit*

$$\tau(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \sigma(x + t\nu) dt, \text{ für } x \in \partial D. \quad (1.4)$$

Dabei sei in einer dünnen Schicht nahe der Oberfläche die Leitfähigkeit σ eine Funktion² des Ortes.

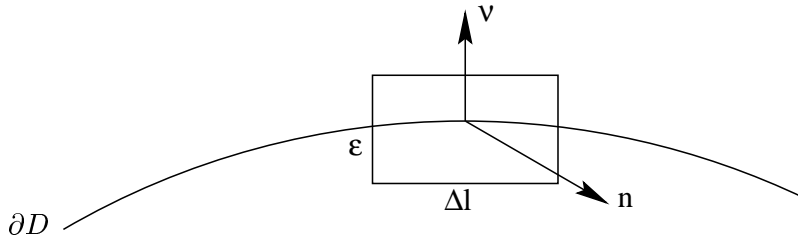
Die Polarisation des elektrischen Feldes sei wie im vorigen Abschnitt beschrieben. Wir fassen die Felder im Außenraum, das einfallende und das gestreute Feld, zusammen zu $E_1(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, u_1(x_1, x_2))$.

²nichtkonstant, positiv, singulär

Aus der Stetigkeit der Tangentialkomponenten des elektrischen Feldes auf dem Rand des Streukörpers D erhalten wir

$$\begin{aligned} \nu \times E_1 = \nu \times E_2 &\iff \begin{aligned} \nu_2 u_1 &= \nu_2 u_2 \\ -\nu_1 u_1 &= -\nu_1 u_2 \end{aligned} \\ &\iff u_1 = u_2 \quad \text{auf } \partial D. \end{aligned}$$

Um Aussagen über den Übergang der magnetischen Felder H_1, H_2 machen zu können, betrachten wir den Ausdruck $\int_K H dl$.



Dabei ist K die Randkurve eines Rechteckes, mit Länge Δl und Breite ϵ . Der Vektor entlang der Breite sei senkrecht auf der Randkurve ∂D . Mit n bezeichnen wir den Vektor, der senkrecht auf dem von K eingeschlossenen Rechteck R steht. Wenden wir nun den Gaußschen Satz in R an, so erhalten wir

$$\int_K H dl = \int_R \langle \text{rot } H, n \rangle ds = \int_R (\sigma(x) - i\omega\epsilon(x)) \langle E(x), n \rangle ds(x). \quad (1.5)$$

Für kleines Δl und $\epsilon \rightarrow 0$ erhalten wir unter Ausnutzung der Stetigkeit der Tangentialkomponente von $\mathcal{E}(x, t)$

$$\langle (n \times \nu), H_1 - H_2 \rangle \Delta l = \langle E_1, n \rangle \left(\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} (\sigma(x + \nu t) - i\omega\epsilon(x + \nu t)) dt \right) \Delta l = \langle E_1, n \rangle \tau(x) \Delta l \quad (1.6)$$

Da wir die Kurve K beliebig um die „Achse“ ∂D drehen können, gilt für alle $n \in \mathbb{R}^3$ mit $\|n\| = 1$ und $\langle \nu, n \rangle = 0$ demnach

$$\langle \nu \times (H_1 - H_2), n \rangle = \tau(x) \langle E_1, n \rangle$$

und damit für die Projektion des elektrischen Feldes auf die Tangentialebene

$$\nu \times (H_1 - H_2) = \tau(x) \nu \times (E_1 \times \nu).$$

Nun ist $\nu \times (E_1 \times \nu) = (0, 0, (\nu_1^2 + \nu_2^2) u_1(x_1, x_2))^t = (0, 0, u_1(x_1, x_2))^t$, und $\nu \times (H_1 - H_2) = (0, 0, \frac{i}{\omega\mu_1} \frac{\partial u_1}{\partial \nu} - \frac{i}{\omega\mu_2} \frac{\partial u_2}{\partial \nu})^t$, und wir erhalten die zweite Randbedingung durch

$$\frac{1}{\omega\mu_1} \frac{\partial u_1}{\partial \nu} - \frac{1}{\omega\mu_2} \frac{\partial u_2}{\partial \nu} = -i \tau(x) u_1.$$

Damit gewinnen wir bei geeigneter Polarisierung und entsprechendem Streukörper D aus dem vektoriellen Problem für die Maxwell-Gleichungen ein skalares Problem für die Helmholtzgleichung. Wir setzen $v_j = \frac{1}{\omega\mu_j}u_j$, $\widetilde{\mu}_j = \omega\mu_j$ und

$$\lambda(x) = -i\omega\mu_1 \tau(x).$$

Um zwischen der vorgegebenen einfallenden Welle v^i und der gesuchten gestreuten Welle v_1^s besser zu unterscheiden, zerlegen wir die Welle v_1 im Außenraum wieder in ihre beiden Anteile und betrachten die Ausdrücke in v^i als gegebene Inhomogenitäten der Randbedingungen für v_1^s .

Definition 1.2.1 (Das konduktive Randwertproblem für die Helmholtzgleichung im \mathbb{R}^2)

Gegeben seien $\widetilde{\mu}_j \in \mathbb{R}_+$ und $k_j \in \mathbb{C}$ mit $k_j > 0$ oder $\text{Im } k_j > 0$, $j = 1, 2$, sowie Funktionen $\lambda \in C^1(\partial D)$ und $v^i \in C^1(\mathbb{R}^2)$, eine Lösung der Helmholtzgleichung $\Delta v^i + k_1^2 v^i = 0$ in \mathbb{R}^2 . Der Rand, ∂D , sei C^2 -glatt. Dann suchen wir Funktionen $v_1^s \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}) \cap C^1(\mathbb{R}^2 \setminus D)$ und $v_2 \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$, die folgende Bedingungen erfüllen

1. $\Delta v_1^s + k_1^2 v_1^s = 0$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$
2. $\Delta v_2 + k_1^2 v_2 = 0$ in D
3. $\widetilde{\mu}_1 v_1^s - \widetilde{\mu}_2 v_2 = -\widetilde{\mu}_1 v^i$ und $\frac{\partial v_1^s}{\partial \nu} - \frac{\partial v_2}{\partial \nu} - \lambda(x)v_1^s = \lambda(x)v^i - \frac{\partial v^i}{\partial \nu}$ auf ∂D
4. v_1^s erfüllt die (SAB).

Ist λ identisch Null, so erhalten wir ein Transmissionsproblem, das den Übergang der Tangentialkomponenten des elektromagnetischen Feldes ohne eine dünne Schicht mit andersartiger Leitfähigkeit modelliert. Zu diesen Überlegungen siehe auch den Aufsatz von Kupradse über die mathematische Theorie von Wellenfeldern [14].

Kapitel 2

Potentialtheoretische Grundlagen

Wir wollen in diesem Kapitel einige, für die Behandlung der Helmholtzgleichung mit Integralgleichungsmethoden grundlegende Ergebnisse aus der Potentialtheorie und aus der Funktionalanalysis zusammenstellen, die im weiteren Verlauf der Arbeit benötigt werden.

2.1 Grundlösung der Helmholtzgleichung im \mathbb{R}^2

Führt man zur Lösung der Helmholtzgleichung Polarkoordinaten (r, φ) ein und macht den Ansatz

$$u(x) = f(kr)Y(\varphi)$$

mit komplexwertigen Funktionen f und Y , so erhält man nach einigen Umformungen aus der Helmholtzgleichung

$$\frac{1}{f(kr)} \left(r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} f(kr) + r \frac{\partial}{\partial r} f(kr) + (kr)^2 f(kr) \right) = -\frac{1}{Y(\varphi)} Y''(\varphi).$$

Da die linke Seite nur von r und die rechte nur von φ abhängt, wissen wir, daß beide Seiten gleich einer Konstanten sein müssen, die wir n^2 nennen. Man erhält also für f und Y die beiden gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} -Y''(\varphi) + n^2 Y(\varphi) &= 0 \\ t^2 f''(t) + t f'(t) + [t - n^2] f(t) &= 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Die erste Gleichung besitzt die Lösungen $Y(\varphi) = e^{\pm in\varphi}$. Damit wir 2π -periodische Lösungen erhalten, muß $n \in \mathbb{Z}$ gewählt werden. Gleichung (2.1) heißt die *Besselsche Differentialgleichung n -ter Ordnung*. Man kann zeigen, daß die Funktionen

$$J_n(t) := \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!(n+p)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{n+2p}$$

für $n = 0, 1, \dots$ Lösungen darstellen, welche für alle $t \in \mathbb{R}$ analytisch sind. Sie heißen *Bessel-funktionen der Ordnung n* .

Eine linear unabhängige Lösung für $n = 0, 1, \dots$, die in $(0, \infty)$ analytisch ist, liefert:

$$Y_n(t) := \frac{2}{\pi} \left\{ \ln \frac{t}{2} + C \right\} J_n(t) - \frac{1}{\pi} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(n-1-p)!}{p!} \left(\frac{2}{t} \right)^{n-2p} \\ - \frac{1}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!(n+p)!} \left(\frac{t}{2} \right)^{n+2p} \{ \psi(p+n) + \psi(p) \}$$

mit $\psi(0) = 0$

$$\psi(p) := \sum_{m=1}^p \frac{1}{m}, \quad p = 1, 2, \dots$$

$$C := \lim_{p \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{m=1}^p \frac{1}{m} - \ln p \right\}.$$

Y_n heißt die *Neumannfunktion der Ordnung n* .

Die komplexe Linearkombination dieser beiden, $H_n^{(1,2)} := J_n \pm i Y_n$, wird *Hankelfunktion* genannt. Im zweidimensionalen stellt die Hankelfunktion die *Grundleistung* der Helmholtzgleichung dar, d.h. sie ist eine normierte, radialsymmetrische Lösung. Ist k eine komplexe Zahl mit $\text{Im } k \geq 0$, dann ist

$$\Phi_k(x, y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|x-y|), \quad x, y, \in \mathbb{R}^2, \quad x \neq y$$

eine Lösung der Helmholtzgleichung $\Delta \Phi_k + k^2 \Phi_k = 0$ bezüglich x bei festem y und bezüglich y bei festem x . Dabei ist $H_0^{(1)}$ die *Hankelfunktion erster Art, nullter Ordnung*.

Auf Grund der Reihendarstellungen können wir leicht sehen, daß die Grundleistung der Helmholtzgleichung dasselbe asymptotische Verhalten für $|x-y| \rightarrow 0$ aufweist, wie die der Laplacegleichung, $\Phi_0(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x-y|}$.

Weiterhin ist ersichtlich, daß für Bessel- und Neumannfunktionen, und damit natürlich auch für die Hankelfunktionen, folgende Rekursionsbeziehung gilt:

$$f_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} f_n(z) - f_{n-1}(z). \quad (2.2)$$

Aus dieser Rekursionsformel ergeben sich bei Berechnung der komplexen Ableitung von $z f_n(z)$ folgende Beziehungen für die Ableitungen

$$f'_n(z) = \frac{n}{z} f_n(z) - f_{n+1}(z) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_0 \text{ und } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \\ f'_n(z) = -\frac{n}{z} f_n(z) + f_{n-1}(z) \quad \text{für } n \in \mathbb{N} \text{ und } z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \quad (2.3)$$

Betrachtet man diese Funktionenklasse rein als Lösungen von (2.1), so sieht man, daß sie nur von n^2 und nicht vom Vorzeichen von n abhängt. Wir definieren also

$$f_{-|n|} := (-1)^n f_{|n|} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}.$$

Wir stellen nun noch einige Eigenschaften dieser Funktionen zusammen, die im folgenden benötigt werden.

Für das Ausstrahlungsverhalten der Hankelfunktionen erhalten wir

$$H_n^{(1,2)}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} e^{\pm i(t - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{t}\right) \right\}, \quad \text{für } t \rightarrow \infty \quad (2.4)$$

$$\text{und } H_n^{(1)}(t) = \frac{2^n(n-1)!}{\pi i t^n} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right\}, \quad \text{für } n \rightarrow \infty, \quad (2.5)$$

glm. auf kompakten Teilmengen von $(0, \infty)$.

Weiterhin gilt eine nützliche Beziehung zwischen den Funktionen und ihren Ableitungen, die sogenannte *Wronski Determinante*

$$W(J_n(t), Y_n(t)) := J_n(t)Y_n'(t) - J_n'(t)Y_n(t) = \frac{2}{\pi t}. \quad (2.6)$$

Mit der *Jacobi-Anger Darstellung* können wir auch ebene Wellen e^{ikxd} mit $d = (\cos \varphi, \sin \varphi)$ als unendliche Linearkombination von Besselfunktionen darstellen:

$$e^{ikxd} = J_0(k|x|) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} i^n J_n(k|x|) \cos n\varphi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(k|x|) e^{in\varphi}, \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^2. \quad (2.7)$$

Dieser ganze Abschnitt folgt nach [4], S. 63 ff.

2.2 Oberflächenpotentiale

Wir wollen nun Abbildungseigenschaften von Oberflächenpotentialen betrachten. Dazu definieren wir zuerst die Räume, zwischen denen abgebildet wird.

Definition 2.2.1 *Eine reell- oder komplexwertige Funktion φ definiert auf einer Menge $G \subset \mathbb{R}^m$ heißt gleichmäßig hölderstetig mit Exponent $\alpha \in (0, 1)$, wenn es eine Konstante $C > 0$ gibt, so daß*

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq C|x - y|^\alpha \quad \text{für alle } x, y \in G.$$

Wir bezeichnen mit $C^{0,\alpha}(G)$ den linearen Raum, genannt Hölderraum, aller auf G definierten Funktionen, die beschränkt und gleichmäßig hölderstetig mit Exponent α sind.

Analog zu $C^{0,\alpha}(G)$ definieren wir für $k \in \mathbb{N}$ die Räume $C^{k,\alpha}(G)$. Funktionen aus diesen Räumen sind k -mal stetig differenzierbar, alle Ableitungen sind beschränkt, und die k -te Ableitung ist aus $C^{0,\alpha}(G)$.

Satz 2.2.2 *Der Hölderraum $C^{k,\alpha}(G)$, $k \in \mathbb{N}_0$, versehen mit der Norm:*

$$\|\varphi\|_{k,\alpha} := \sup_{\substack{x \in G \\ 0 \leq l \leq k}} |\varphi^{(l)}(x)| + \sup_{\substack{x, y \in G \\ x \neq y}} \frac{|\varphi^{(k)}(x) - \varphi^{(k)}(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

ist ein Banachraum.

Beweis: s. Satz 7.2. in [11].

Bemerkung 2.2.3 In [3] werden die folgenden Resultate ausschließlich für den \mathbb{R}^3 bewiesen. Sie können aber mit leichten Modifikationen auf den \mathbb{R}^2 übertragen werden. Siehe dazu z.B. [17].

Im folgenden sei C_α immer eine positive, nur von α und ∂D abhängige Konstante und D ein beschränktes, einfach zusammenhängendes Gebiet der Klasse C^2 im \mathbb{R}^2 . Dabei bezeichnet ν den nach außen weisenden Einheitsnormalenvektor an ∂D .

Zuerst werden wir Einfach- und Doppelschichtpotentiale definieren, die mit Hilfe der Grundlösung gebildet werden. Auf Grund der Eigenschaften der Hankelfunktionen, stellen die Potentiale Lösungen der Helmholtzgleichungen in $\mathbb{R}^2 \setminus \partial D$ dar. D.h. insbesondere, daß sie dort zweimal stetig differenzierbar sind. Diese Eigenschaft werden wir später benötigen, wenn wir das konduktive Randwertproblem zur Helmholtzgleichung mit Hilfe eines Potentialansatzes lösen wollen. Zentral ist dabei die Tatsache, daß sich die Potentiale selbst und ihre Normalableitungen trotz der logarithmischen Singularität der Kernfunktionen stetig auf den Rand fortsetzen lassen, wenn wir an die Dichten entsprechende Regularitätsanforderungen stellen.

Definition 2.2.4 Sei $\varphi \in C(\partial D)$, dann heißt die Funktion

$$u(x) := \int_{\partial D} \Phi_k(x, y) \varphi(y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D,$$

das Einfachschichtpotential mit Dichte φ .

Satz 2.2.5 Das Einfachschichtpotential u mit stetiger Dichte ist gleichmäßig hölderstetig in ganz \mathbb{R}^2 , und es gibt zu jedem $\alpha \in (0, 1)$ eine Konstante $C_\alpha > 0$, so daß gilt:

$$\|u\|_{\alpha, \mathbb{R}^2} \leq C_\alpha \|\varphi\|_{\infty, \partial D}.$$

Beweis: siehe Satz 2.12 in [3].

Definition 2.2.6 Sei $\psi \in C(\partial D)$, dann heißt die Funktion

$$v(x) := \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial \nu(y)} \psi(y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D,$$

das Doppelschichtpotential mit Dichte ψ .

Satz 2.2.7 Das Doppelschichtpotential v mit stetiger Dichte ψ kann stetig von D nach \overline{D} und von $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ nach $\mathbb{R}^2 \setminus D$ fortgesetzt werden. Die Randwerte sind durch

$$v_\pm(x) = \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial \nu(y)} \psi(y) ds(y) \pm \frac{1}{2} \psi(x), \quad x \in \partial D,$$

gegeben. Dabei ist $v_\pm(x) = \lim_{h \rightarrow 0} v(x \pm h\nu(x))$. Das Integral existiert als uneigentliches Integral. Die Werte des Doppelschichtpotentials auf dem Rand stellen eine hölderstetige Funktion dar, mit $\|v\|_{\alpha, \partial D} \leq C_\alpha \|\psi\|_{\infty, \partial D}$ für jedes $\alpha \in (0, 1)$.

Beweis: siehe Satz 2.13 in [3].

Wenn wir Dichten von höherer Regularität voraussetzen, erhalten wir auch eine höhere Regularität der Potentiale auf dem Rand.

Satz 2.2.8 *Das Doppelschichtpotential v mit gleichmäßig hölderstetiger Dichte $\psi \in C^{0,\alpha}(\partial D)$, $0 < \alpha < 1$, ist gleichmäßig hölderstetig in \overline{D} und $\mathbb{R}^2 \setminus D$ mit*

$$\|v\|_{\alpha, \mathbb{R}^2 \setminus D} \leq C_\alpha \|\psi\|_{\alpha, \partial D}, \quad \|v\|_{\alpha, \overline{D}} \leq C_\alpha \|\psi\|_{\alpha, \partial D}.$$

Beweis: siehe Satz 2.16 in [3].

Satz 2.2.9 *Der Gradient des Einfeldschichtpotentials u mit hölderstetiger Dichte $\varphi \in C^{0,\alpha}(\partial D)$, $0 < \alpha < 1$, kann gleichmäßig hölderstetig von D nach \overline{D} und von $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ nach $\mathbb{R}^2 \setminus D$ fortgesetzt werden. Es gilt $\|\nabla u\|_{\alpha, \mathbb{R}^2 \setminus D} \leq C_\alpha \|\varphi\|_{\alpha, \partial D}$ und $\|\nabla u\|_{\alpha, \overline{D}} \leq C_\alpha \|\varphi\|_{\alpha, \partial D}$. Die Normalableitung ist durch*

$$\left[\frac{\partial u(x)}{\partial \nu} \right]_{\pm} = \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial \nu(x)} \varphi(y) ds(y) \mp \frac{1}{2} \varphi(x), \quad x \in \partial D,$$

gegeben. Dabei ist $\left[\frac{\partial u(x)}{\partial \nu} \right]_{\pm} := \lim_{h \rightarrow +0} \langle \nu(x), \nabla u(x \pm h\nu(x)) \rangle$. Das Integral existiert als uneigentliches Integral.

Beweis: siehe Satz 2.17 in [3].

Satz 2.2.10 *Für das Doppelschichtpotential v mit stetiger Dichte ψ gilt*

$$\frac{\partial v_+}{\partial \nu} = \frac{\partial v_-}{\partial \nu} \text{ auf } \partial D,$$

in dem Sinne, daß

$$\lim_{h \searrow 0} \left\{ \frac{\partial}{\partial \nu(x)} v(x + h\nu(x)) - \frac{\partial}{\partial \nu(x)} v(x - h\nu(x)) \right\} = 0,$$

gleichmäßig für alle x auf ∂D . Die Werte des Doppelschichtpotentials v auf dem Rand liefern bei hölderstetiger Dichte $\psi \in C^{0,\alpha}(\partial D)$ eine gleichmäßig hölderstetig differenzierbare Funktion für die gilt:

$$\|\text{Grad } v\|_{\alpha, \partial D} \leq C_\alpha \|\psi\|_{\alpha, \partial D}.$$

Dabei ist Grad der Oberflächengradient. Ist $\psi \in C^{1,\alpha}(\partial D)$, so kann die erste Ableitung des Doppelschichtpotentials gleichmäßig hölderstetig von D nach \overline{D} und von $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ nach $\mathbb{R}^2 \setminus D$ fortgesetzt werden.

Beweis: siehe die Sätze 2.21, 2.22 und 2.23 in [3].

Wir definieren folgende Randintegraloperatoren

$$S_k \varphi(x) := 2 \int_{\partial D} \Phi_k(x, y) \varphi(y) ds(y) \quad (2.8)$$

$$K_k \varphi(x) := 2 \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial \nu(y)} \varphi(y) ds(y) \quad (2.9)$$

$$K'_k \varphi(x) := 2 \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial \nu(x)} \varphi(y) ds(y) \quad (2.10)$$

$$T_k \varphi(x) := 2 \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial \nu(y)} \varphi(y) ds(y), \quad (2.11)$$

deren Abbildungseigenschaften wir wie folgt zusammenfassen können:

Satz 2.2.11

- S_k, K_k, K'_k und $(T_k - T_{k_0})$ bilden $C(\partial D)$ in $C^{0,\alpha}(\partial D)$ ab. Sie sind in $C(\partial D)$ kompakt.
- S_k, K_k bilden $C^{0,\alpha}(\partial D)$ in $C^{1,\alpha}(\partial D)$ ab.
- T_k ist als Abbildung von $C^{1,\alpha}(\partial D)$ nach $C^{0,\alpha}(\partial D)$ beschränkt und damit stetig.
- K_k und K'_k sind bezüglich des Skalarproduktes $\langle f, g \rangle = \int_{\partial D} f(x) g(x) ds(x)$ adjungiert zueinander. S_k und T_k sind selbstadjungiert.

Weiterhin gelten zwischen den Operatoren folgende Beziehungen

$$K_k S_k = S_k K'_k \quad \text{auf } C(\partial D) \quad (2.12)$$

$$T_k S_k = -I + K_k'^2 \quad \text{auf } C^{0,\alpha}(\partial D) \quad (2.13)$$

$$T_k K_k = K'_k T_k \quad \text{auf } C^{1,\alpha}(\partial D) \quad (2.14)$$

$$S_k T_k = -I + K_k^2 \quad \text{auf } C^{1,\alpha}(\partial D), \quad (2.15)$$

so daß wir S_k als Regularisator von T_k und umgekehrt auffassen können.

Beweis: siehe die Sätze 2.30 und 2.31 in [3] und Seite 42 in [4].

Wir erhalten also abhängig von der Regularität der Dichtefunktionen mit Hilfe der Potentialoperatoren hölderstetige oder sogar hölderstetig differenzierbare Lösungen der Helmholtzgleichung im Abschluß des Innen- und Außenraumes.

2.3 Ausstrahlende Lösungen

Die aus dem Gaußschen Satz ableitbaren Greenschen Sätze stellen einen Zusammenhang zwischen Rand- und Volumenintegralen her, der für uns von zentraler Bedeutung ist.

Satz 2.3.1 (Greensche Sätze) Für $u \in C^1(\overline{D})$ und $v \in C^2(\overline{D})$ gilt:

$$\int_D \{u \Delta v + \nabla u \cdot \nabla v\} dx = \int_{\partial D} u \frac{\partial v}{\partial \nu} ds,$$

und für $u, v \in C^2(\overline{D})$ gilt:

$$\int_D \{u \Delta v - v \Delta u\} dx = \int_{\partial D} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) ds.$$

Wir werden Lösungen im beschränkten Raum D und im unbeschränkten Raum $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ betrachten. Damit auch dort Eindeutigkeit der Lösung sichergestellt werden kann, betrachten wir ausschließlich ausstrahlende Lösungen:

Definition 2.3.2 Eine Lösung u der Helmholtzgleichung im \mathbb{R}^2 heißt *ausstrahlend*, wenn sie der Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung (SAB) genügt:

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \sqrt{|x|} \left(\frac{\partial u}{\partial |x|} - iku \right) = 0 \quad \text{glm. für alle Richtungen } \frac{x}{|x|}.$$

Diese Definition entspricht der physikalisch sinnvollen Situation, daß der Energietransport von innen nach außen stattfindet und keine Energie im Unendlichen erzeugt wird.

Für Lösungen im Innenraum, sowie für ausstrahlende Lösungen im Außenraum können wir nun Darstellungssätze angeben. Danach sind diese Lösungen der Helmholtzgleichung kombiniert mit ihren Normalableitungen automatisch Lösungen von Integralgleichungen folgender Art:

Satz 2.3.3 (Greenscher Darstellungssatz für den Innen- und Außenraum) Sei D ein beschränktes Gebiet der Klasse C^2 , ν wie oben.

(i) Innenraum

Sei $u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$ eine Funktion, deren Normalableitung auf dem Rand ∂D existiert, in dem Sinne, daß der Grenzwert

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \lim_{h \rightarrow +0} \langle \nu(x), \nabla u(x - h\nu(x)) \rangle, \quad x \in \partial D,$$

gleichmäßig auf ∂D existiert. Weiterhin sei u eine Lösung der Helmholtzgleichung:

$\Delta u + k^2 u = 0$ in D , dann gilt die Darstellung:

$$u(x) = \int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} \Phi_k(x, y) - u(y) \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial \nu(y)} \right\} ds(y), \quad \text{für } x \in D.$$

(ii) Außenraum

Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}) \cap C(\mathbb{R}^2 \setminus D)$ eine Funktion, deren Normalableitung auf dem Rand ∂D existiert, in dem Sinne, daß der Grenzwert

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \lim_{h \rightarrow +0} \langle \nu(x), \nabla u(x + h\nu(x)) \rangle, \quad x \in \partial D,$$

gleichmäßig auf ∂D existiert. Weiterhin sei u eine ausstrahlende Lösung der Helmholtzgleichung: $\Delta u + k^2 u = 0$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$, dann gilt die Darstellung:

$$u(x) = \int_{\partial D} \left\{ u(y) \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} \Phi_k(x, y) \right\} ds(y), \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D} \quad (2.16)$$

Beweis: (i) siehe Satz 2.1 in [4] (ii) siehe Satz 2.4 in [4].

Wir wollen an dieser Stelle noch erwähnen, daß für Lösungen der Helmholtzgleichung folgende Eigenschaften äquivalent sind:

- die (SAB) ist erfüllt,
- die Greensche Darstellungsformel im Außengebiet ist gültig,
- es gilt: $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\|x\|=r} \left| \frac{\partial u}{\partial r} - iku \right|^2 ds = 0$.

Für alle ausstrahlenden Lösungen der Helmholtzgleichung können wir das Verhalten im Unendlichen durch eine ausstrahlende Welle und eine richtungsabhängige Amplitudenfunktion wie folgt beschreiben.

Satz 2.3.4 (Darstellungsformel für das Fernfeld) *Jede ausstrahlende Lösung der Helmholtzgleichung hat das asymptotische Verhalten einer ausstrahlenden Welle*

$$u(x) = \frac{e^{ik\|x\|}}{\sqrt{\|x\|}} \left\{ u_\infty(\hat{x}) + O\left(\frac{1}{\|x\|}\right) \right\}, \quad \|x\| \rightarrow \infty, \quad (2.17)$$

gleichmäßig für alle Richtungen $\frac{x}{\|x\|}$, wobei die auf dem Einheitskreis Ω definierte Funktion $u_\infty \in C^\infty(\Omega)$ das Fernfeld genannt wird. Unter den Annahmen von Satz 2.3.3 (ii) erhalten wir die Darstellung:

$$u_\infty(\hat{x}) = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{8\pi k}} \int_{\partial D} \left\{ u(y) \frac{\partial e^{-ik\hat{x}y}}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} e^{-ik\hat{x}y} \right\} ds(y). \quad (2.18)$$

Beweis: siehe Satz 2.5 und Formel (3.64) in [4]

Wir können das Fernfeld eines Potentials direkt aus der Dichtefunktion berechnen, indem wir die Definition des Fernfeldes (2.17) und das Ausstrahlungsverhalten der Hankelfunktion (2.4) beachten.

Lemma 2.3.5 *Das Fernfeld des Einfachschichtpotentials im \mathbb{R}^2 ,*

$$u(x) = \int_{\partial D} \Phi(x, y) \varphi(y) ds(y)$$

ist gegeben durch

$$u_\infty(\hat{x}) = \rho \int_{\partial D} e^{-ik\hat{x}y} \varphi(y) ds(y),$$

und das Fernfeld des Doppelschichtpotentials im \mathbb{R}^2 ,

$$v(x) = \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \psi(y) ds(y)$$

ist gegeben durch

$$v_\infty(\hat{x}) = \rho \int_{\partial D} \frac{\partial e^{-ik\hat{x}y}}{\partial \nu(y)} \psi(y) ds(y)$$

mit $\rho = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{8\pi k}}$.

Ein weiterer Satz bestätigt die Wichtigkeit des Verhaltens von Lösungen im Unendlichen. Er wird vor allem für den Nachweis der Eindeutigkeit von Lösungen von Randwertproblemen häufig verwendet.

Satz 2.3.6 (Rellich-Lemma) Sei $k > 0$, und sei $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D})$ Lösung der Helmholtzgleichung in $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$. Außerdem gelte:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|x|=R} |u|^2 ds = 0.$$

Dann ist $u \equiv 0$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$.

Beweis: nach [4], Lemma 3.11

Korollar 2.3.7 Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}) \cap C^1(\mathbb{R}^2 \setminus D)$ eine ausstrahlende Lösung der Helmholtzgleichung in $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ mit $\text{Im}(k) > 0$ oder $k \in \mathbb{R}_+$, und es gelte

$$\text{Im} \left(k \int_{\partial D} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} ds \right) \geq 0.$$

Dann ist $u \equiv 0$ in $\mathbb{R}^2 \setminus D$.

Beweis: Für große R definieren wir $K_R = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = R\}$ und D_R , das Gebiet, das durch ∂D und K_R berandet wird. Aus der (SAB) erhalten wir

$$0 = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{K_R} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} - iku \right|^2 ds = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{K_R} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 + |ku|^2 + 2 \text{Im} \left(ku \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} \right) \right) ds$$

und mit Hilfe des ersten Greenschen Satzes

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \int_{K_R} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 + |ku|^2 \right) ds + 2 \operatorname{Im}(k) \int_{D_R} \left(|ku|^2 + |\nabla u|^2 \right) dy \right\} = -2 \operatorname{Im} \left(k \int_{\partial D} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} ds \right) \quad (2.19)$$

Ist nun $\operatorname{Im}(k) > 0$, so ist die linke Seite dieses Ausdrucks nicht negativ und die rechte nicht positiv. Sie sind also beide Null, und wir erhalten insbesondere, daß $u \equiv 0$ in $\mathbb{R}^2 \setminus D$ gilt.

Für $k > 0$ erhalten wir aus obiger Gleichung $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{K_R} |u|^2 ds = 0$ und damit die Behauptung mit Hilfe des Rellich Lemmas (Satz 2.3.6). \square

Zum Abschluß dieses Abschnittes wollen wir noch erwähnen, daß eine eindeutige Beziehung zwischen Fernfeld und ausstrahlender Lösung vorliegt. Nach der Definition des Fernfeldes ist die eine Abhängigkeit klar, die andere folgt aus

Satz 2.3.8 *Sei D ein beschränktes, einfach zusammenhängendes Gebiet im \mathbb{R}^2 und $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D})$ eine ausstrahlende Lösung der Helmholtzgleichung mit $k > 0$. Verschwindet das Fernfeld identisch, so gilt auch $u \equiv 0$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$.*

Beweis: Der Beweis ist eine Folgerung aus dem Rellich Lemma (Satz 2.3.6).

2.4 Kompakte und Spurklasse-Operatoren

Die Operatoren, die wir betrachten wollen, sind von ganz bestimmter Bauart. Ihre speziellen Eigenschaften vereinfachen die Lösungstheorie erheblich.

Definition 2.4.1 *Ein linearer Operator $A : X \rightarrow Y$ von einem normierten Raum X in einen normierten Raum Y heißt kompakt, wenn er jede beschränkte Menge aus X in eine relativ kompakte Menge in Y abbildet.*

Satz 2.4.2 *Die Identität $I : X \rightarrow X$ ist genau dann kompakt, wenn die Dimension des normierten Raumes X endlich ist.*

Beweis: s. Satz 2.19 aus [11].

Wir betrachten Integraloperatoren $A : C(\partial D) \rightarrow C(\partial D)$ der folgenden Art:

$$(A\varphi)(x) = \int_{\partial D} K(x, y)\varphi(y) ds(y).$$

Dabei wird die Funktion K *Kernfunktion* genannt.

Satz 2.4.3 *Integraloperatoren mit stetigem oder schwach singulärem Kern sind kompakt von $C(\partial D)$ nach $C(\partial D)$, wenn ∂D mindestens von der Klasse C^1 ist.*

Beweis: s. Satz 2.22 aus [11].

Definition 2.4.4 Sei $A : X \rightarrow X$ ein beschränkter, linearer Operator eines Banachraumes X in sich. Eine komplexe Zahl ω ist dann ein regulärer Wert für A , wenn $(\omega I - A)^{-1}$ existiert und beschränkt ist. Die Menge aller regulären Werte heißt die Resolventenmenge und wird mit $\rho(A)$ bezeichnet. Das Komplement von $\rho(A)$ in \mathbb{C} heißt das Spektrum, $\sigma(A)$.

$$r(A) := \sup_{\omega \in \sigma(A)} |\omega|$$

wird der Spektralradius von A genannt.

Kompakte Operatoren sind in verschiedener Hinsicht für uns von großer Bedeutung. Zum einen haben wir zur Lösung von Gleichungen der Art „Identität minus Kompakt“ die Riesz-Theorie zur Verfügung, und zum anderen können wir Aussagen über das Spektrum und die Eigenwerte solcher Operatoren machen. Auf Grund der Sprungbeziehungen der Oberflächenpotentiale auf dem Rand von D sind wir in der glücklichen Lage, bei der Beschreibung von Randwertproblemen Integralgleichungen zweiter Art zu erhalten.

Sei $A : X \rightarrow X$ ein kompakter, linearer Operator von einem normierten Raum X in sich. Definiere $L := I - A$, wobei I die Identität auf X ist. Dann gilt:

Satz 2.4.5 (Erster Rieszscher Satz) Der Nullraum des Operators L ,

$$N(L) := \{\varphi \in X : L\varphi = 0\},$$

ist ein endlichdimensionaler Unterraum.

Beweis: s. Satz 3.1 aus [11].

Satz 2.4.6 (Zweiter Rieszscher Satz) Das Bild des Operators L ,

$$L(X) := \{L\varphi : \varphi \in X\},$$

ist ein abgeschlossener linearer Unterraum.

Beweis: s. Satz 3.2 aus [11].

Satz 2.4.7 (Dritter Rieszscher Satz) Es gibt eine eindeutig bestimmte, nicht negative, ganze Zahl r , die sogenannte Riesz-Zahl des Operators A , so daß

$$\{0\} = N(L^0) \subsetneq N(L^1) \subsetneq \dots \subsetneq N(L^r) = N(L^{r+1}) = \dots$$

$$X = L^0(X) \supsetneq L^1(X) \supsetneq \dots \supsetneq L^r(X) = L^{r+1}(X) = \dots$$

Außerdem gilt: $X = N(L^r) \oplus L^r(X)$.

Beweis: s. Satz 3.3 aus [11].

Satz 2.4.8 Sei X ein normierter Raum, $A : X \rightarrow X$ ein kompakter, linearer Operator und $(I - A)$ injektiv. Dann existiert der inverse Operator $(I - A)^{-1} : X \rightarrow X$ und ist beschränkt.

Beweis: s. Satz 3.4 aus [11].

Satz 2.4.9 Sei X ein normierter Raum, $A : X \rightarrow X$ ein kompakter, linearer Operator, und $(I - A)$ nicht injektiv. Dann ist der Nullraum $N(I - A)$ endlichdimensional und das Bild $(I - A)X$ ist ein echter, abgeschlossener Unterraum von X .

Beweis: s. Satz 3.6 aus [11].

Korollar 2.4.10 Die Sätze 2.4.8 und 2.4.9 bleiben gültig, wenn wir $(I - A)$ durch $(S - A)$ ersetzen, falls S ein beschränkter linearer Operator ist, der eine beschränkte Inverse S^{-1} besitzt.

Beweis: s. Korollar 3.8 aus [11].

Wir brauchen also nur die Injektivität eines Operators nachzuweisen und erhalten automatisch eine Aussage über die Bijektivität. Eine solche Aussage kennen wir sonst nur im Endlichdimensionalen. Zusätzlich können wir einen Zusammenhang zwischen dem Kern eines Operators und dem Bild seines adjungierten Operators herstellen.

Satz 2.4.11 (Fredholm-Alternative) Sei $\langle X, Y \rangle$ ein duales System, und seien $A : X \rightarrow X$ und $B : Y \rightarrow Y$ kompakte und zueinander adjungierte Operatoren bezüglich der durch das duale System vorgegebenen Bilinearform. Dann gilt

entweder

$$\begin{array}{llll} N(I - A) = \{0\} & \text{und} & N(I - B) = \{0\} \\ \text{und} & (I - A)(X) = X & \text{und} & (I - B)(Y) = Y \end{array}$$

oder

$$\begin{array}{ll} \dim N(I - A) & = \dim N(I - B) \\ \text{und} & (I - A)(X) = N(I - B)^{\perp} \\ \text{und} & (I - B)(Y) = N(I - A)^{\perp}. \end{array}$$

Beweis: s. Satz 4.14 und 4.15 in [11].

Lemma 2.4.12 Seien $A : X \rightarrow X$ und $B : Y \rightarrow Y$ kompakte, bezüglich des Dualsystems $\langle X, Y \rangle$ adjungierte Operatoren mit Riesz-Zahl Eins. Sei $\{\varphi_1, \dots, \varphi_N\}$ eine Basis von $N(I - A)$ und $\{\psi_1, \dots, \psi_N\}$ eine Basis von $N(I - B)$. Dann gilt

$$\det \langle \varphi_i, \psi_j \rangle \neq 0.$$

Beweis: Nehmen wir an, es sei $\det\langle\varphi_i, \psi_j\rangle = 0$.

Dann gibt es eine nichttriviale Lösung $a_i, i = 1, \dots, n$ des Gleichungssystems

$$\sum_{i=1}^n a_i \langle\varphi_i, \psi_j\rangle = 0, \quad j = 1, \dots, n.$$

Wir definieren ein Element aus dem Nullraum des Operators $I - A$ durch $\tilde{\varphi} := \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i \neq 0$. Dann ist die Gleichung $\varphi - A\varphi = \tilde{\varphi}$ lösbar, da $\tilde{\varphi}$ nach Konstruktion die Lösbarkeitsbedingung erfüllt. D. h. $\varphi \in N((I - A)^2)$, aber $\varphi \notin N(I - A)$. Dies ist ein Widerspruch zu der Voraussetzung, daß die Riesz-Zahl des Operators $(I - A)$ Eins ist. Damit ist unsere Annahme falsch, und es folgt die Behauptung. \square

Wir wollen nun zu den Aussagen über die Eigenwerte eines kompakten Operators kommen.

Satz 2.4.13 *Sei A ein kompakter, linearer Operator auf dem unendlichdimensionalen, normierten Raum X . Dann ist das Spektrum von A , $\sigma(A)$, höchstens abzählbar, enthält die Null und hat die Null als einzig möglichen Häufungspunkt.*

Beweis: s. Satz 3.11 aus [11].

Satz 2.4.14 (Spektralsatz für kompakte normale Operatoren) *Sei A wie in Satz 2.4.13 und zusätzlich normal (bzw. selbstadjungiert im Reellen) und X ein Hilbertraum. Dann existieren ein (evtl. endliches) Orthonormalsystem e_1, e_2, \dots sowie eine (evtl. abbrechende) Nullfolge $(\omega_1, \omega_2, \dots)$ in $\mathbb{C}(\text{bzw. } \mathbb{R}) \setminus \{0\}$, so daß*

$$X = N(A) \oplus \text{closure}_X \text{span}\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$$

sowie

$$Ax = \sum_{k=1}^{\infty} \omega_k \langle x, e_k \rangle e_k \text{ für alle } x \in X;$$

und zwar sind die ω_k die von Null verschiedenen Eigenwerte, entsprechend ihrer Vielfachheit gezählt, und e_k ist ein Eigenvektor zu ω_k . Ferner gilt: $\|A\| = \sup_k |\omega_k|$.

Beweis: s. Satz VI.3.2 aus [19].

Definition 2.4.15 $\mathcal{C}^1(X)$ ist die Menge aller beschränkten Operatoren A auf dem Hilbertraum X , die die folgende Bedingung erfüllen:

Für jedes Orthonormalsystem $\{\varphi_j : j \in J\}$ in X ist

$$\sum_{j \in J} |\langle A\varphi_j, \varphi_j \rangle| < \infty.$$

Die $A \in \mathcal{C}^1(X)$ heißen Spurklasseoperatoren auf X .

Satz 2.4.16 Ist $A \in \mathcal{C}^1(X)$ und $\{\varphi_j : j \in J\}$ eine Orthonormalbasis von X , dann ist die Spur $\tau(A)$ definiert durch:

$$\tau(A) = \sum_{j \in J} \langle A\varphi_j, \varphi_j \rangle.$$

Diese Summe existiert und hängt nicht von der speziellen Wahl der Orthonormalbasis ab.

Beweis: Wir folgen den Überlegungen aus [16].

Wir können A in seinen symmetrischen Anteil $A_+ = \frac{1}{2}(A + A^*)$ und seinen antisymmetrischen Anteil $A_- = \frac{1}{2}(A - A^*)$ aufteilen. Die Eigenwerte ω_j^+ von A_+ sind alle rein reell, die von A_- , ω_j^- , sind alle rein imaginär oder Null. Zu A_+ (bzw. A_-) gibt es nach Satz 2.4.14 eine Orthonormalbasis $\{\psi_j^+ : j \in J\}$ (bzw. $\{\psi_j^- : j \in J\}$) von Eigenelementen. Wir betrachten ausschließlich den symmetrischen Anteil, der antisymmetrische Fall verläuft völlig analog. Bezüglich der Basis aus Eigenelementen gilt die Darstellung

$$\sum_{j \in J} \langle A_+ \psi_j^+, \psi_j^+ \rangle = \sum_{j \in J} \omega_j^+.$$

Da A aus $\mathcal{C}^1(X)$ ist, sind auch A_+ und A_- aus $\mathcal{C}^1(X)$, und wir wissen, daß die Reihendarstellungen konvergieren. Zu jeder beliebigen anderen Orthonormalbasis $\{\varphi_j : j \in J\}$ gibt es eine orthogonale Transformation \mathcal{O}^+ , die $\{\varphi_j\}$ bezüglich der $\{\psi_j^+\}$ darstellt:

$$\varphi_j = \sum_{k \in J} (\mathcal{O}^+)_{jk} \psi_k^+ \quad \text{und} \quad \psi_k^+ = \sum_{j \in J} (\overline{\mathcal{O}^+})_{jk} \varphi_j$$

$$\text{mit} \quad \sum_{k \in J} (\mathcal{O}^+)_{ki} (\overline{\mathcal{O}^+})_{kj} = \delta_{ij} \quad \text{für alle } i, j \in J.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J} \langle A_+ \varphi_j, \varphi_j \rangle &= \sum_{j \in J} \sum_{i \in J} \sum_{k \in J} \overline{(\mathcal{O}^+)_{jk}} (\mathcal{O}^+)_{ji} \langle A_+ \psi_k^+, \psi_i^+ \rangle = \sum_{i \in J} \sum_{k \in J} \langle A_+ \psi_k^+, \psi_i^+ \rangle \\ &= \sum_{i \in J} \sum_{k \in J} \omega_k^+ \langle \psi_k^+, \psi_i^+ \rangle = \sum_{k \in J} \omega_k^+, \end{aligned}$$

und analog $\sum_{j \in J} \langle A_- \varphi_j, \varphi_j \rangle = \sum_{j \in J} \omega_j^-$. Wir erhalten also unabhängig von der Wahl der Basis $\{\varphi_j : j \in J\}$

$$\sum_{j \in J} \langle A\varphi_j, \varphi_j \rangle = \sum_{j \in J} \langle A_+ \varphi_j, \varphi_j \rangle + \sum_{j \in J} \langle A_- \varphi_j, \varphi_j \rangle = \sum_{j \in J} (\omega_j^+ + \omega_j^-) \quad \square$$

Der nachfolgende Satz ermöglicht es, einen Spurklasseoperator einfach zu erkennen:

Satz 2.4.17 *Sei A ein beschränkter, linearer Operator auf dem Hilbertraum X . Dann ist A genau dann aus der Klasse $\mathcal{C}^1(X)$, wenn es eine Folge (A_n) von Operatoren auf X gibt, für die gilt:*

$$\text{rang } A_n \leq n, \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{und}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|A - A_n\| < \infty.$$

Beweis: s. [16], Satz 2.1.3.

Abschließend liefert der Satz von Lidskii eine orthogonale Zerlegung eines Hilbertraumes in den Kern und den verallgemeinerten Eigenraum eines beliebigen Spurklasseoperators.

Satz 2.4.18 (Satz von Lidskii) *Sei A ein Spurklasseoperator auf dem Hilbertraum X mit $\frac{i}{2}(A^* - A) \geq 0$, d.h. $\langle \frac{i}{2}(A^* - A)\varphi, \varphi \rangle \geq 0$ für alle $\varphi \in X$. Dann gilt :*

$$X = N(A) \oplus VE(A).$$

Dabei ist $N(A)$ der Nullraum des Operators A und $VE(A)$ der abgeschlossene Unterraum, der durch die verallgemeinerten Eigenvektoren von A erzeugt wird. Unter einem verallgemeinerten Eigenvektor verstehen wir ein $\varphi \in X$, zu dem es ein $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $(\omega I - A)^n \varphi = 0$ ist.

Beweis: s. [16], Satz 3.5.1

Kapitel 3

Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

3.1 Das konduktive Randwertproblem

In diesem Kapitel wird die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des konduktiven Randwertproblems im \mathbb{R}^2 unter geeigneten Voraussetzungen bewiesen.

Dazu sei D ein beschränktes, einfach zusammenhängendes Gebiet im \mathbb{R}^2 . Dann definieren wir das Transmissionsproblem mit konduktiven Randbedingungen wie folgt (vgl. Def. 1.2.1):

Definition 3.1.1 (Das konduktive Randwertproblem)

Seien $k_1, k_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $\mu_1 + \mu_2 \neq 0$, $\text{Im}(k_1), \text{Im}(k_2) > 0$ oder $k_1, k_2 > 0$, sowie $\lambda, g \in C^{0,\alpha}(\partial D)$ und $f \in C^{1,\alpha}(\partial D)$ mit $\alpha \in (0, 1)$ gegeben.

Gesucht ist ein Paar (u_1, u_2) mit:

$$u_1 \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}) \cap C^1(\mathbb{R}^2 \setminus D)$$

$$u_2 \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$$

$$\Delta u_1 + k_1^2 u_1 = 0 \text{ in } \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$$

$$\Delta u_2 + k_2^2 u_2 = 0 \text{ in } D,$$

das den konduktiven Randbedingungen:

$$\mu_1 u_1 - \mu_2 u_2 = f \text{ auf } \partial D$$

und $\frac{\partial u_1}{\partial \nu} - \frac{\partial u_2}{\partial \nu} - \lambda u_1 = g$ auf ∂D genügt.

Außerdem erfülle u_1 die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung (SAB)

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial u_1}{\partial r} - ik_1 u_1 \right) = 0, \quad r = \|x\|, \text{ glm. für alle Richtungen } \frac{x}{r}.$$

Ist $\lambda \equiv 0$, so nennen wir das konduktive Randwertproblem einfach *Transmissionsproblem*.

Wir können unter gewissen Bedingungen an die Parameter Eindeutigkeit und Existenz eines Lösungs paares zum konduktiven Randwertproblem sicherstellen.

Satz 3.1.2 *Das homogene konduktive Randwertproblem ($f = g \equiv 0$) besitzt höchstens eine Lösung, falls: $\operatorname{Im}\left(\overline{k_1} \frac{\mu_2}{\mu_1} k_2^2\right) \geq 0$,*

$$\operatorname{Im}\left(k_1 \frac{\mu_2}{\mu_1}\right) \geq 0 \text{ und}$$

$$\operatorname{Im}\left(k_1 \overline{\lambda(y)}\right) \geq 0 \text{ für alle } y \in \partial D.$$

Beweis: Sei (u_1, u_2) eine Lösung des homogenen konduktiven Randwertproblems. Mit Hilfe der Randbedingungen und der Greenschen Sätze erhalten wir folgende Aussage

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}\left(k_1 \int_{\partial D} u_1 \frac{\partial \overline{u_1}}{\partial \nu} ds\right) &= \operatorname{Im}\left(k_1 \int_{\partial D} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} u_2\right) \left(\frac{\partial \overline{u_2}}{\partial \nu} + \overline{\lambda} \frac{\overline{\mu_2}}{\mu_1} \overline{u_2} ds\right)\right) \\ &= \operatorname{Im}(k_1) \left|\frac{\mu_2}{\mu_1}\right|^2 \int_{\partial D} \overline{\lambda} |u_2|^2 ds + \operatorname{Im}\left(\overline{k_1} \frac{\overline{\mu_2}}{\mu_1} k_2^2\right) \int_D |u_2|^2 dx \\ &\quad + \operatorname{Im}\left(k_1 \frac{\mu_2}{\mu_1}\right) \int_D |\nabla u_2|^2 dx \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Damit folgt aus Korollar 2.3.7 $u_1 \equiv 0$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ und dann aus Stetigkeitsgründen $u_1 \equiv \frac{\partial u_1}{\partial \nu} \equiv 0$ auf ∂D . Aus den homogenen Randbedingungen ergibt sich daraus $u_2 \equiv \frac{\partial u_2}{\partial \nu} \equiv 0$ auf ∂D und damit aus dem Greenschen Darstellungssatz für den Innenraum $u_2 \equiv 0$ in \overline{D} . \square

Lemma 3.1.3 *Wenn das homogene konduktive Randwertproblem nur die triviale Lösung besitzt, dann hat das inhomogene konduktive Randwertproblem für jedes $f \in C^{1,\alpha}(\partial D)$ und $g \in C^{0,\alpha}(\partial D)$ höchstens eine Lösung.*

Beweis: Die Differenz zweier Lösungen zu demselben inhomogenen konduktiven Randwertproblem erfüllt die homogenen Randbedingungen. Damit ist sie nach dem vorangehenden Satz identisch Null. \square

Mit Hilfe eines gemischten Einfach- und Doppelschichtpotentialansatzes wollen wir nun zeigen, daß überhaupt Lösungen zum konduktiven Randwertproblem existieren.

Sei $\Phi_j(x, y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k_j |x - y|)$ die Grundlösung der Helmholtzgleichung im \mathbb{R}^2 . Setze die Lösungen (u_1, u_2) im Außen- und Innenraum an als

$$u_1(x) = \int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial \Phi_1(x, y)}{\partial \nu(y)} \varphi(y) + c_1 \Phi_1(x, y) \psi(y) \right\} ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D, \quad (3.1)$$

$$u_2(x) = \int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial \Phi_2(x, y)}{\partial \nu(y)} \varphi(y) + c_2 \Phi_2(x, y) \psi(y) \right\} ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D. \quad (3.2)$$

Dabei sind $\varphi, \psi \in C(\partial D)$ und $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ noch zu wählende Konstanten.

Wir betrachten nun zuerst nur $u_1 \Big|_{\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}}$ und $u_2 \Big|_D$. Mit den Sprungbeziehungen für die Potentiale gilt dann auf ∂D

$$\begin{aligned} f = \mu_1 u_1 - \mu_2 u_2 &= \frac{1}{2} [(\mu_1 + \mu_2)\varphi + (\mu_1 K_1 - \mu_2 K_2)\varphi + (\mu_1 c_1 S_1 - \mu_2 c_2 S_2)\psi] \\ -g = -\frac{\partial u_1}{\partial \nu} + \frac{\partial u_2}{\partial \nu} + \lambda u_1 &= \frac{1}{2} [(c_1 + c_2)\psi + (T_2 - T_1)\varphi - (c_1 K'_1 - c_2 K'_2)\psi] \\ &\quad + \lambda \{(K_1 + I)\varphi + c_1 S_1 \psi\} \end{aligned}$$

Wir definieren

$$\begin{aligned} \Phi &:= \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \\ F &:= \begin{pmatrix} 2f \\ -2g \end{pmatrix} \\ E_\lambda &:= \begin{bmatrix} (\mu_1 + \mu_2)I & 0 \\ \lambda I & (c_1 + c_2)I \end{bmatrix} \\ A_\lambda &:= \begin{bmatrix} \mu_1 K_1 - \mu_2 K_2 & \mu_1 c_1 S_1 - \mu_2 c_2 S_2 \\ T_2 - T_1 + \lambda K_1 & -c_1 K'_1 + c_2 K'_2 + c_1 \lambda S_1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Auf dem Produktraum $C(\partial D) \times C(\partial D)$ ist durch $\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_{max} = \max \{ \|x\|_\infty, \|y\|_\infty \}$, eine Norm gegeben, die $C(\partial D) \times C(\partial D)$ zu einem Banachraum macht. A_λ ist bezüglich dieser Norm ein kompakter Operator, E_λ ist für $(c_1 + c_2) \neq 0$ und $\mu_1 + \mu_2 \neq 0$ invertierbar. Wenn nun Φ eine Lösung der Integralgleichung

$$(E_\lambda + A_\lambda)\Phi = F \quad \text{ist,} \tag{3.4}$$

so folgt sofort aus den Sprungbeziehungen, daß die Fortsetzungen von (u_1, u_2) auf den Rand die Randbedingungen des konduktiven Randwertproblems erfüllen. Andersherum, ist (u_1, u_2) eine Lösung zum konduktiven Randwertproblem, so ist Φ eine Lösung der Integralgleichung. Wir wollen nun eine äquivalente Beziehung von Lösungen des konduktiven Randwertproblems zu Lösungen der Integralgleichung beweisen.

Satz 3.1.4 *Sei $\mu_1 + \mu_2 \neq 0$ und die Konstanten $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ erfüllen die Bedingungen $c_1 + c_2 \neq 0$, $\text{Im} \left(k_2 \frac{c_1}{c_2} \right) \geq 0$ und $\text{Im} \left(\overline{k_2 \frac{c_1}{c_2}} k_1^2 \right) \geq 0$. Wenn das homogene konduktive Randwertproblem eindeutig lösbar ist, dann hat das konduktive Randwertproblem für jede rechte Seite $f \in C^{1,\alpha}(\partial D)$ und $g \in C^{0,\alpha}(\partial D)$ genau eine Lösung.*

Beweis: Seien u_1, u_2 wie oben definiert. Wir hatten bereits gesehen, daß zwischen den Lösungen der Integralgleichung und den Randdaten eine eindeutige Zuordnung besteht. Es bleibt die Regularität und die Ausstrahlung des Ansatzes zu zeigen. Die Ausstrahlungsbedingung ist erfüllt, da die Grundlösung eine ausstrahlende Lösung ist. Hinreichend für die Regularitätsanforderungen des konduktiven Randwertproblems sind $\varphi \in C^{1,\alpha}(\partial D)$ und $\psi \in C^{0,\alpha}(\partial D)$, denn dann können die Normalableitungen von u_1 und u_2 jeweils hölderstetig bis in den Rand hinein fortgesetzt werden.

Falls φ und ψ Lösung von (3.4) sind, so folgt die gewünschte Regularität aus den Abbildungseigenschaften der Potentialoperatoren (Satz 2.2.11), denn wir erhalten

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{1}{\mu_1 + \mu_2} [(\mu_2 K_2 - \mu_1 K_1)\varphi + (\mu_2 c_2 S_2 - \mu_1 c_1 S_1)\psi] - 2f \\ \psi &= \frac{1}{c_1 + c_2} [(T_1 - T_2)\varphi + (c_1 K_1' - c_2 K_2')\psi - \lambda \{(K_1 - I)\varphi + c_1 S_1 \psi\}] + 2g.\end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt $\varphi \in C^{0,\alpha}(\partial D)$ und somit aus der zweiten $\psi \in C^{0,\alpha}(\partial D)$. Erneutes Einsetzen von φ in die erste Gleichung ergibt $\varphi \in C^{1,\alpha}(\partial D)$.

Es bleibt die eindeutige Lösbarkeit von (3.4) nachzuweisen. Dazu sei $\Phi = \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}$ eine Lösung der homogenen Integralgleichung. Nach obigen Überlegungen ist $\varphi \in C^{1,\alpha}(\partial D)$ und $\psi \in C^{0,\alpha}(\partial D)$, und damit (u_1, u_2) eine Lösung des homogenen konduktiven Randwertproblems. Da dieses nach Voraussetzung eine eindeutige Lösung besitzt, gilt $u_1 \equiv 0$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ und $u_2 \equiv 0$ in D .

Nun gelten wiederum auf Grund der Sprungbeziehungen für das Einfach- und Doppelschichtpotential, mit den Bezeichnungen $[u_j]_{\pm}$ für den Grenzwert von u_j bei Annäherung an den Rand von außen (bzw. innen), folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned}[u_2]_+ - [u_2]_- &= \varphi \quad \text{und} \quad [u_1]_+ - [u_1]_- = \varphi \\ \left[\frac{\partial u_2}{\partial \nu} \right]_+ - \left[\frac{\partial u_2}{\partial \nu} \right]_- &= -c_2 \psi \quad \text{und} \quad \left[\frac{\partial u_1}{\partial \nu} \right]_+ - \left[\frac{\partial u_1}{\partial \nu} \right]_- = -c_1 \psi.\end{aligned}$$

Aus Stetigkeitsgründen gilt $[u_2]_- \equiv [u_1]_+ \equiv 0$ und $\left[\frac{\partial u_2}{\partial \nu} \right]_- \equiv \left[\frac{\partial u_1}{\partial \nu} \right]_+ \equiv 0$ auf ∂D , und damit erhalten wir

$$\begin{aligned}[u_2]_+ + [u_1]_- &= 0 \quad \text{und} \\ c_1 \left[\frac{\partial u_2}{\partial \nu} \right]_+ + c_2 \left[\frac{\partial u_1}{\partial \nu} \right]_- &= 0 \quad \text{auf } \partial D.\end{aligned}$$

Nun definieren wir Funktionen v_1 und v_2 wie folgt

$$\begin{aligned}v_1 &= c_1 u_2 \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus D \\ v_2 &= -c_2 u_1 \quad \text{in } \overline{D}.\end{aligned}$$

Dann ist v_1 Lösung der Helmholtzgleichung mit Wellenzahl k_2 in $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ und v_2 mit Wellenzahl k_1 in D , und auf dem Rand gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{c_1}v_1 - \frac{1}{c_2}v_2 &= [u_2]_+ + [u_1]_- = 0 \\ \frac{\partial v_1}{\partial \nu} - \frac{\partial v_2}{\partial \nu} &= c_1 \left[\frac{\partial u_2}{\partial \nu} \right]_+ + c_2 \left[\frac{\partial u_1}{\partial \nu} \right]_- = 0. \end{aligned}$$

Somit lösen (v_1, v_2) ein homogenes konduktives Randwertproblem mit $\lambda \equiv 0$. Wählt man nun die Konstanten c_j , so daß die Ungleichungen aus Satz 3.1.2 erfüllt sind, so folgt ebenfalls aus Satz 3.1.2 $v_2 \equiv 0$ in $\mathbb{R}^2 \setminus D$ und $v_1 \equiv 0$ in \overline{D} , d.h., $u_2 \equiv 0$ in $\mathbb{R}^2 \setminus D$ und $u_1 \equiv 0$ in \overline{D} und damit $\varphi \equiv \psi \equiv 0$ auf ∂D .

Der Operator $(E_\lambda + A_\lambda)$ ist also injektiv, und daher folgt die eindeutige Existenz einer Lösung der Integralgleichung für jede rechten Seite aus der Riesz-Theorie. \square

Bemerkung 3.1.5 *Eine Möglichkeit, die Konstanten c_j zu wählen, ist wie man leicht nachrechnet durch $c_1 = k_1$ und $c_2 = k_2$ gegeben, da wir $\text{Im } k_1 \geq 0$ vorausgesetzt haben.*

Unter der Bedingung, daß das homogene konduktive Randwertproblem eindeutig lösbar ist, liefert die Riesz-Theorie Linearität und Beschränktheit des Operators $(E_\lambda + A_\lambda)^{-1} : C(\partial D) \times C(\partial D) \rightarrow C(\partial D) \times C(\partial D)$. Für Randdaten $f, f_n \in C^{1,\alpha}(\partial D)$ und $g, g_n \in C^{0,\alpha}(\partial D)$ mit

$$\begin{aligned} (E_\lambda + A_\lambda) \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} &= 2 \begin{pmatrix} f \\ -g \end{pmatrix} \\ \text{und} \quad (E_\lambda + A_\lambda) \begin{pmatrix} \varphi_n \\ \psi_n \end{pmatrix} &= 2 \begin{pmatrix} f_n \\ -g_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{folgt} \quad \left\| \begin{pmatrix} \varphi_n \\ \psi_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \right\|_{max} \leq 2 \|(E_\lambda + A_\lambda)^{-1}\|_{max} \left\| \begin{pmatrix} f_n \\ g_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \right\|_{max}.$$

Analog betrachten wir für feste f und g Variationen für die Parameter μ_1, μ_2 . Seien $\mu_1, \mu_{1,n}, \mu_2, \mu_{2,n} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, so gewählt, daß sie das konduktive Randwertproblem mit k_1, k_2 eindeutig lösbar machen.

$$\begin{aligned} \text{Definiere } E_n &:= \begin{bmatrix} (\mu_{1,n} + \mu_{2,n})I & 0 \\ \lambda I & (c_1 + c_2)I \end{bmatrix} \text{ und} \\ A_n &:= \begin{bmatrix} \mu_{1,n}K_1 - \mu_{2,n}K_2 & c_1\mu_{1,n}S_1 - c_2\mu_{2,n}S_2 \\ T_2 - T_1\lambda K_1 & c_2K_2' - c_1K_1' + c_1\lambda S_1 \end{bmatrix} \text{ und } \varphi_n, \psi_n \text{ als Lösungen von} \end{aligned}$$

$$(E_n + A_n) \begin{pmatrix} \varphi_n \\ \psi_n \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}.$$

E_n und A_n hängen stetig von den μ_i ab und sind beschränkt invertierbar. Deshalb können wir mit Hilfe der Neumannschen Reihe zeigen, daß $(E_n + A_n)^{-1} \rightarrow (E_\lambda + A_\lambda)^{-1}$ für $\mu_{i,n} \rightarrow \mu_i$, $i = 1, 2$, gilt.

Letztlich können wir auch die Kopplungsfunktion λ variieren und erhalten analog eine stetige Abhängigkeit der Lösungen der Integralgleichung von dieser Vorgabe.

Wegen der Stetigkeit der Grundlösung Φ_{k_i} und deren Normalableitung auf $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D} \times \partial D$ und auf $D \times \partial D$ gilt für die Potentiale $u_{(1,2),n}$, die sich bezüglich der Dichten $\varphi, \varphi_n \in C^{1,\alpha}(\partial D)$ und $\psi, \psi_n \in C^{0,\alpha}(\partial D)$ aus dem Ansatz (3.1) ergeben

$$\|u_{1,n} - u_1\|_\infty \leq M_{K_1} \left\| \begin{pmatrix} \varphi_n \\ \psi_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \right\|_{max} \quad \text{auf einem beliebigen Kompaktum } K_1 \subset \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$$

$$\text{und } \|u_{2,n} - u_2\|_\infty \leq M_{K_2} \left\| \begin{pmatrix} \varphi_n \\ \psi_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \right\|_{max} \quad \text{auf einem beliebigen Kompaktum } K_2 \subset D.$$

Wir fassen diese Aussage zusammen:

Satz 3.1.6 *Seien $f, f_n \in C^{1,\alpha}(\partial D)$, $g, g_n \in C^{0,\alpha}(\partial D)$ und $\mu_1, \mu_{1,n}, \mu_2, \mu_{2,n} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ $\lambda, \lambda_n \in C^{0,\alpha}(\partial D)$ so vorgegeben, daß das konduktive Randwertproblem eindeutig lösbar ist. Seien $(u_{1,n}, u_{2,n})$ Lösungen der zugehörigen konduktiven Randwertprobleme, und sei $\|f_n - f\|_{\infty, \partial D}, \|g_n - g\|_{\infty, \partial D} \rightarrow 0$, bzw. $|\mu_1 - \mu_{1,n}|, |\mu_2 - \mu_{2,n}| \rightarrow 0$, bzw. $\|\lambda - \lambda_n\|_{\infty, \partial D} \rightarrow 0$, jeweils für $n \rightarrow \infty$, so gilt:*

$$\|u_{1,n} - u_1\|_{\infty, K_1} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

$$\|\nabla(u_{1,n} - u_1)\|_{\infty, K_1} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

$$\|u_{2,n} - u_2\|_{\infty, K_2} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

$$\|\nabla(u_{2,n} - u_2)\|_{\infty, K_2} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

wobei $K_1 \subset \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ und $K_2 \subset D$ beliebige, kompakte Mengen sind.

Lemma 3.1.7 *Es gibt $k_1, k_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\lambda \in C^{0,\alpha}(\Omega)$, so daß das homogene konduktive Randwertproblem nicht eindeutig lösbar ist.*

Beweis: Zum Beweis des Lemmas betrachten wir ein Beispiel.

Sei $\lambda \equiv 0$. Das streuende Gebiet sei der Einheitskreis $B_1(0) := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 1\}$, die Wellenzahlen $k_1, k_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ seien beliebig aber fest vorgegeben. In Polarkoordinaten betrachten wir die Funktionen

$$\begin{aligned} u_{1,n}(r, \theta) &= a_{1,n} H_n^{(1)}(k_1 r) e^{in\theta}, & 1 \leq r < \infty \\ u_{2,n}(r, \theta) &= a_{2,n} J_n(k_2 r) e^{in\theta}, & 0 \leq r \leq 1. \end{aligned}$$

Offensichtlich stellen diese Funktionen genau dann Lösungen zum homogenen Transmissionsproblem dar, wenn

$$\begin{aligned} \mu_1 a_{1,n} H_n^{(1)}(k_1) - \mu_2 a_{2,n} J_n(k_2) &= 0 \\ k_1 a_{1,n} H_n^{(1)'}(k_1) - k_2 a_{2,n} J_n'(k_2) &= 0. \end{aligned}$$

Diese System hat genau dann nichttriviale Lösungen $(a_{1,n}, a_{2,n})$, wenn

$$\det \begin{bmatrix} \mu_1 H_n^{(1)}(k_1) & \mu_2 J_n(k_2) \\ k_1 H_n^{(1)'}(k_1) & k_2 J_n'(k_2) \end{bmatrix} = 0.$$

Da $H_n^{(1)}$ und J_n' jeweils nur abzählbar viele und für verschiedene n verschiedene Nullstellen haben, gibt es mindestens ein $n \in \mathbb{Z}$, so daß $H_n^{(1)}(k_1) \neq 0$ und $J_n'(k_2) \neq 0$ und damit Transmissionskoeffizienten μ_1, μ_2 die

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} = \frac{k_1 H_n^{(1)'}(k_1) J_n(k_2)}{k_2 H_n^{(1)}(k_1) J_n'(k_2)}$$

erfüllen. So erhalten wir neben der Null-Lösung eine weitere Lösung $(u_{1,n}, u_{2,n})$ für das homogene Transmissionsproblem und damit die Nichteindeutigkeit. \square

Bemerkung 3.1.8 *Wir wollen ausschließlich den Fall betrachten, daß das innere Medium absorbiert. Das wird durch $\text{Im } k_2 > 0$ modelliert.*

Zum Schluß wollen wir noch ein paar Beispiele angeben, in denen das konduktive Randwertproblem eindeutig lösbar ist. Diese Korollare sind einfache Folgerungen aus Satz 3.1.2.

Korollar 3.1.9 *Sind die $\mu_i, k_i \in \mathbb{R}_+$, $i=1,2$, und ist auch λ eine rein reelle Funktion, so ist das konduktive Randwertproblem eindeutig lösbar.*

Korollar 3.1.10 *Sind $k_1, k_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ so gewählt, daß $\text{Im } k_i \geq 0$ gilt. Setzen wir zusätzlich $\mu_1 = \omega \mu_{1,mg}$. und $\mu_2 = \omega \mu_{2,mg}$. mit $\mu_{i,mg} \in \mathbb{R}_+$ und*

$$\lambda(x) = -i\mu_1 \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \sigma(x + \nu t) dt,$$

dann ist das konduktive Randwertproblem eindeutig lösbar.

Das letzte Korollar beschreibt gerade die Bedingungen, die sich aus der physikalischen Motivation, Abschnitt 1.2 ergeben, wenn wir hier ausnahmsweise die magnetische Permeabilität mit $\mu_{i,mg}$ bezeichnen, um sie nicht mit den Kopplungsparametern μ_i zu verwechseln.

3.2 Das zugehörige Streuproblem

Wir betrachten nun einen speziellen Fall des konduktiven Randwertproblems. Dazu sei im Außenraum eine ebene einfallende Welle $u^i(x; d) = e^{ik_1 x d}$ mit Einfallrichtung $d \in \Omega$ vorgegeben. Damit ergeben sich die Inhomogenitäten f und g aus dem konduktiven Randwertproblem analog zu der physikalischen Motivation als

$$\begin{aligned} f(x; d) &= -\mu_1 u^i(x; d) \\ \text{und } g(x; d) &= \lambda u^i(x; d) - \frac{\partial u^i}{\partial \nu}(x; d) \end{aligned}$$

u_1^s sei die gestreute Welle, die der (SAB) genüge. Wir definieren also das konduktive Streuproblem (KP) wie folgt:

Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes, einfach zusammenhängendes Gebiet mit C^2 -glattem Rand ∂D und $k_1, k_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ sowie eine Funktion $\lambda \in C^{0,\alpha}(\partial D)$ vorgegeben.

(KP) Finde zwei Funktionen $u_1(\cdot; d) \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}) \cap C^1(\mathbb{R}^2 \setminus D)$ und $u_2(\cdot; d) \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$, so daß bei einfallender Welle $u^i(x; d) = e^{ik_1 x d}$ gilt:

$$(1) \quad \Delta u_1 + k_1^2 u_1 = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}, \quad \Delta u_2 + k_2^2 u_2 = 0 \quad \text{in } D$$

$$(2) \quad \mu_1 u_1^s - \mu_2 u_2 = -\mu_1 u^i \quad \text{auf } \partial D$$

$$(3) \quad \frac{\partial u_1^s}{\partial \nu} - \frac{\partial u_2}{\partial \nu} - \lambda u_1^s = \lambda u^i - \frac{\partial u^i}{\partial \nu} \quad \text{auf } \partial D,$$

$$(4) \quad \text{wobei } u_1 = u^i + u_1^s \quad \text{ist und}$$

$$(5) \quad u_1^s \text{ der Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung (SAB) genügt, d.h.}$$

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \sqrt{\|x\|} \left(\frac{\partial u_1^s}{\partial r} - ik_1 u_1^s \right) = 0 \quad \text{glm. für alle Richtungen } \frac{x}{\|x\|}.$$

Ein Paar (u_1, u_2) , welches (1) - (5) genügt, heißt Lösung zum konduktiven Streuproblem.

Im folgenden wollen wir stets annehmen, daß folgende Bedingungen für die Parameter erfüllt sind:

$$k_1 > 0 \quad (3.5)$$

$$\operatorname{Im} k_2 > 0 \quad (3.6)$$

$$\mu_1 + \mu_2 \neq 0 \quad (3.7)$$

$$\operatorname{Im} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right) \geq 0 \quad (3.8)$$

$$\operatorname{Im} \left(k_2^2 \frac{\overline{\mu_2}}{\mu_1} \right) \geq 0 \quad (3.9)$$

$$\operatorname{Im}(\overline{\lambda(y)}) \geq 0, \text{ für alle } y \in \partial D. \quad (3.10)$$

Unter den Bedingungen (3.5) bis (3.10) hat das Streuproblem mit konduktiven Randbedingungen eine eindeutige Lösung, da u^i und $\frac{\partial u^i}{\partial \nu}$ die Regularitätsvoraussetzungen der Sätze 3.1.2 und 3.1.4 erfüllen.

Wir sehen aus Satz 3.1.6, daß die Lösungen $(u_1(\cdot; d), u_2(\cdot; d))$ stetig von der Einfallrichtung d der einfallenden Welle abhängen.

Kapitel 4

Eigenwerte des Fernfeldoperators

Wir werden in diesem Kapitel für die Parameter k stets die Bedingungen (3.5) - (3.10) voraussetzen, die für die Eindeutigkeit der Lösungen hinreichend sind.

4.1 Eigenschaften des Fernfeldoperators

In Kapitel 2 und 3 hatten wir gesehen, daß zu jeder ausstrahlenden Lösung des konduktiven Randwertproblems zur Helmholtzgleichung bei einfallender ebener Welle $u^i(x; d) = e^{ikxd}$ in eindeutiger Weise eine Funktion $u_\infty(\cdot; d) \in C^\infty(\Omega; \mathbb{C})$ gegeben ist, die das Ausstrahlungsverhalten der Lösung $u_1^s(\cdot; d)$ beschreibt:

$$u_1^s(x; d) = \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}} \left\{ u_\infty(\hat{x}; d) + O\left(\frac{1}{\|x\|}\right) \right\} \quad \text{für } r = \|x\| \rightarrow \infty, \quad \hat{x} = \frac{x}{\|x\|}. \quad (4.1)$$

Diese eindeutig bestimmte Funktion u_∞ nennen wir das Fernfeld. Es ist abhängig von zwei Richtungen, der Einfallsrichtung d der ebenen Welle u^i , und der Betrachtungsrichtung \hat{x} . Die Abhängigkeit von der Einfallsrichtung d ist stetig, d.h. es gilt $u_\infty \in C(\Omega) \times C(\Omega)$.

Definition 4.1.1 Eine Überlagerung von ebenen Wellen definiert durch

$$v_g^i(x) := \int_{\Omega} e^{ikxd} g(d) ds(d) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^2$$

heißt Herglotz-Wellenfunktion mit Kern $g \in L^2(\Omega)$.

Betrachtet man als einfallende Welle für ein lineares Streuproblem statt einer ebenen Welle eine Herglotz-Wellenfunktion v_g^i , so ergibt sich das zugehörige Fernfeld $v_{g,\infty}$, da die Abhängigkeit von der Einfallsrichtung stetig und die Fernfeldbildung linear ist, analog zu den Überlagerungen in [4], Lemma 3.16 ebenfalls als gewichtete Überlagerung der zugehörigen Fernfelder

$$v_{g,\infty}(\hat{x}) = \int_{\Omega} u_\infty(\hat{x}; d) g(d) ds(d). \quad (4.2)$$

Wir wollen diesen Vorgang als linearen Integraloperator auf der $L^2(\Omega)$ -Gewichtsfunktion auffassen.

Definition 4.1.2 Sei $u_\infty(\cdot; d)$ das Fernfeld zu der ausstrahlenden Lösung u_1^i des konduktiven Randwertproblems zur Helmholtzgleichung mit einfallender Welle $u^i(x; d) = e^{ikxd}$. Dann definieren wir den Fernfeldoperator $\mathcal{F} : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ durch

$$(\mathcal{F}g)(\hat{x}) := \int_{\Omega} u_\infty(\hat{x}; d)g(d) ds(d). \quad (4.3)$$

Wir wollen zuerst einige Eigenschaften des Fernfeldoperators zusammenstellen.

Satz 4.1.3 Der Fernfeldoperator \mathcal{F} ist kompakt von $L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$.

Beweis: Als Integraloperator mit stetigem Kern ist \mathcal{F} kompakt von $L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$.
□

Ziel dieser Arbeit ist es, sich mit den Eigenwerten dieses Fernfeldoperators zu beschäftigen. Wir suchen also $\omega \in \mathbb{C}$, so daß für ein $h \neq 0$ gilt $\mathcal{F}h = \omega h$. Bevor wir sinnvolle Aussagen über die Lage von Eigenwerten machen können, müssen wir zeigen, daß \mathcal{F} überhaupt Eigenwerte besitzt. Unter gewissen Voraussetzungen an (KP) können wir sicherstellen, daß \mathcal{F} sogar unendlich viele Eigenwerte besitzt.

Dazu ist es unser erstes Ziel, Bedingungen anzugeben, unter denen die Fernfelder zum konduktiven Streuproblem $\{u_\infty(\cdot, d) : d \in \Omega\}$ eine vollständige Basis von $L^2(\Omega)$ darstellen. In dem Fall, daß die Fernfelder in $L^2(\Omega)$ nicht vollständig sind, können wir einen endlichdimensionalen Co-Raum zum Abschluß des Spans der Fernfelder angeben, so daß $L^2(\Omega)$ orthogonal zerlegt wird.

Zuerst wollen wir Beispiele für andere Randwertprobleme betrachten.

- Beim äußeren Dirichlet-Problem sind die Fernfelder genau dann vollständig, wenn es keine Dirichlet-Eigenfunktion für D gibt, welche eine Herglotz-Wellenfunktion ist. Siehe dazu auch [4], S.55f.
- Beim Transmissionsproblem sind die Fernfelder genau dann vollständig, wenn es zu einer nichttrivialen Herglotz-Wellenfunktion v_1 kein v_2 gibt, so daß (v_1, v_2) das innere homogene Transmissionsproblem lösen. Siehe dazu auch [10].

In beiden Fällen hängt also die Vollständigkeit der Fernfelder von den Eigenfunktionen eines zugehörigen inneren Problems ab; also im Endeffekt von dem streuenden Gebiet selbst.

Wir wollen nun eine ähnliche Aussage für den Fall des konduktiven Randwertproblems beweisen. Der oben erwähnte endlich dimensionale Co-Raum wird durch Kerne von Herglotz-Wellenfunktionen gebildet, die Lösungen zu einem zugehörigen inneren Randwertproblem sind. Dieses soll zuerst definiert werden.

Definition 4.1.4 Das *innere* homogene konduktive Randwertproblem ist gegeben durch die Bestimmung von $v_1, v_2 \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$, die folgende Bedingungen erfüllen:

$$\begin{aligned} \Delta v_i + k_i^2 v_i &= 0 & \text{in } D \quad (i = 1, 2) \\ \mu_1 v_1 &= \mu_2 v_2 & \text{auf } \partial D \\ \text{und } \frac{\partial v_1}{\partial \nu} - \lambda v_1 &= \frac{\partial v_2}{\partial \nu} & \text{auf } \partial D. \end{aligned}$$

Dazu definieren wir den Operator $G : L^2(\Omega) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^2)$ durch

$$(Gg)(x) := \int_{\Omega} g(y) e^{-ik_1 xy} ds(y), \quad (g \in L^2(\Omega), x \in \mathbb{R}^2). \quad (4.4)$$

Durch Gg ist eine Herglotz-Wellenfunktion mit Kern $h(y) = g(-y)$ gegeben. Mit Hilfe dieses Operators definieren eine Menge \mathcal{E}_{IKP} auf folgende Weise:

$$\mathcal{E}_{IKP} = \left\{ g \in L^2(\Omega) : \text{Zu } v_1 := Gg \text{ existiert eine Funktion } v_2 \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D}), \text{ so daß } (v_1, v_2) \text{ eine Lösung des inneren homogenen konduktiven Randwertproblems ist.} \right\}$$

\mathcal{E}_{IKP} ist nichtleer, denn die Nullfunktion ist trivialerweise enthalten. Wegen der Linearität des inneren homogenen konduktiven Randwertproblems ist \mathcal{E}_{IKP} ein linearer Unterraum von $L^2(\Omega)$, der nach [9], Satz 10.5 (a) endlichdimensional ist.

Mit $\text{conj } \mathcal{E}_{IKP} = \{g : \overline{g} \in \mathcal{E}_{IKP}\}$ bezeichnen wir die zu \mathcal{E}_{IKP} konjugiert komplexe Menge.

Satz 4.1.5 Mit $\mathcal{F}_{KP} := \{u_{1,\infty}(\cdot, d) : d \in \Omega\}$ bezeichnen wir die Menge der Fernfelder zum konduktiven Streuproblem. Dann gilt

$$L^2(\Omega) = \text{closure}_{L^2(\Omega)} \text{span } \mathcal{F}_{KP} \oplus \text{conj } \mathcal{E}_{IKP}. \quad (4.5)$$

Beweis: (a) Zuerst zeigen wir die Orthogonalität der beiden Mengen: Sei $g \in \mathcal{E}_{IKP}$. Wir benutzen die Darstellungsformel für das Fernfeld. Danach vertauschen wir die Integrationsreihenfolge und nutzen die Darstellung von $v_1 = Gg$ aus. Dann werden die konduktiven Randbedingungen eingesetzt und hernach der Greensche Satz im Innengebiet angewendet.

Erneutes Einsetzen der Randbedingungen liefert das gewünschte Resultat.

$$\begin{aligned}
& \mu_1 \int_{\Omega} g(\hat{x}) u_{1,\infty}(\hat{x}; d) \, ds(\hat{x}) \\
&= \mu_1 \int_{\Omega} g(\hat{x}) \left\{ \rho \int_{\partial D} u_1(y) \frac{\partial e^{-ik_1 \hat{x}y}}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u_1(y)}{\partial \nu} e^{-ik_1 \hat{x}y} \, ds(y) \right\} \, ds(\hat{x}) \\
&= \mu_1 \rho \int_{\partial D} \left\{ u_1 \frac{\partial v_1}{\partial \nu} - v_1 \frac{\partial u_1}{\partial \nu} \right\} \, ds \quad (\text{mit } \rho = \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{\sqrt{8\pi k_1}}) \\
&= \mu_2 \rho \int_{\partial D} \left\{ u_2 \left(\frac{\partial v_2}{\partial \nu} + \lambda v_1 \right) - v_2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial \nu} + \lambda u_1 \right) \right\} \, ds \\
&= \mu_2 \rho \int_{\partial D} \lambda \{ u_2 v_1 - v_2 u_1 \} \, ds \\
&= \mu_1 \rho \int_{\partial D} \lambda \{ u_1 v_1 - v_1 u_1 \} \, ds = 0
\end{aligned}$$

Damit ist $0 = \langle u_{1,\infty}, \bar{g} \rangle_{L^2} = \int_{\Omega} g(\hat{x}) u_{1,\infty}(\hat{x}; d) \, ds(\hat{x})$ für alle $d \in \Omega$, also $\bar{g} - \text{closure}_{L^2(\Omega)} \text{span } \mathcal{F}_{KP}$ für alle $g \in \mathcal{E}_{IKP}$.

(b) Wir zeigen : Ist $\bar{g} \in L^2(\Omega)$ orthogonal zum Abschluß des $\text{span } \mathcal{F}_{KP}$, so ist $g \in \mathcal{E}_{IKP}$.

Sei $\bar{g} - \text{closure}_{L^2(\Omega)} \text{span } \mathcal{F}_{KP}$. Mit $v_1 := Gg$ erhalten wir unter Verwendung der Darstellungsformel für das Fernfeld und Vertauschung der Integrationsreihenfolge:

$$0 = \frac{\mu_1}{\rho} \int_{\Omega} g u_{1,\infty} \, ds = \mu_1 \int_{\partial D} \left\{ u_1 \frac{\partial v_1}{\partial \nu} - v_1 \frac{\partial u_1}{\partial \nu} \right\} \, ds.$$

Für das weitere Vorgehen benötigen wir einen Lösungsansatz für das konduktive Randwertproblem, der aus dem Greenschen Darstellungssatz für Lösungen der Helmholtzgleichung (siehe dazu [11], S.16f) resultiert. Da u^i ganze Lösung, und damit insbesondere Lösung im Innenraum ist, erhalten wir

$$\begin{aligned}
u_1^s(x) &= \int_{\partial D} \left\{ u_1(y) \frac{\partial \Phi_1(x, y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u_1(y)}{\partial \nu} \Phi_1(x, y) \right\} \, ds(y), \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}, \\
u_2(x) &= - \int_{\partial D} \left\{ u_2(y) \frac{\partial \Phi_2(x, y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u_2(y)}{\partial \nu} \Phi_2(x, y) \right\} \, ds(y), \quad \text{für } x \in D.
\end{aligned}$$

Mit den Sprungbeziehungen für das Einfach- und Doppelschichtpotential ergibt sich damit bei Annäherung gegen den Rand ∂D :

$$\begin{aligned}
K_1 u_1 - S_1 \frac{\partial u_1}{\partial \nu} &= u_1 - 2u^i \\
T_1 u_1 - K_1' \frac{\partial u_1}{\partial \nu} &= \frac{\partial u_1}{\partial \nu} - 2 \frac{\partial u^i}{\partial \nu} \\
K_2 u_2 - S_2 \frac{\partial u_2}{\partial \nu} &= -u_2 \\
T_2 u_2 - K_2' \frac{\partial u_2}{\partial \nu} &= -\frac{\partial u_2}{\partial \nu}.
\end{aligned}$$

Wir setzen nun die Randbedingungen $u_2 = \frac{\mu_1}{\mu_2}u_1$ und $\frac{\partial u_1}{\partial \nu} = \frac{\partial u_2}{\partial \nu} + \lambda u_1$ ein.

$$u_1 - K_1 u_1 + S_1 \frac{\partial u_2}{\partial \nu} + S_1 \lambda u_1 = 2u^i \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial \nu} + \lambda u_1 + K_1' \frac{\partial u_2}{\partial \nu} + K_1' \lambda u_1 - T_1 u_1 = 2 \frac{\partial u^i}{\partial \nu} \quad (4.7)$$

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} u_1 + \frac{\mu_1}{\mu_2} K_2 u_1 - S_2 \frac{\partial u_2}{\partial \nu} = 0 \quad (4.8)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial \nu} + \frac{\mu_1}{\mu_2} T_2 u_1 - K_2' \frac{\partial u_2}{\partial \nu} = 0. \quad (4.9)$$

Nun multipliziert man (4.6) mit $\mu_1 c_1$, (4.7) mit μ_1 , (4.8) mit $\mu_2 c_2$ und (4.9) mit μ_2 , faßt dann jeweils die Gleichungen (4.6), (4.8) und (4.7), (4.9) zusammen und ordnet nach Ausdrücken in $\mu_1 u_1$ und in $\frac{\partial u_2}{\partial \nu}$. Damit erhalten wir das Gleichungssystem:

$$r_d = (E_\lambda + A_\lambda)^* a \quad \text{mit} \quad (4.10)$$

$$\begin{aligned} r_d &:= 2\mu_1 \begin{pmatrix} \frac{\partial u^i(\cdot; d)}{\partial \nu} \\ c_1 u^i(\cdot; d) \end{pmatrix} \\ (E_\lambda + A_\lambda)^* &:= \begin{bmatrix} (\mu_1 + \mu_2)I + \mu_1 K_1' - \mu_2 K_2' & \lambda I + K_1' \lambda + T_2 - T_1 \\ c_1 \mu_1 S_1 - c_2 \mu_2 S_2 & (c_1 + c_2)I - c_1 K_1 + c_2 K_2 + c_1 S_1 \lambda \end{bmatrix} \\ a &:= \begin{pmatrix} \frac{\partial u_2(\cdot; d)}{\partial \nu} \\ \mu_1 u_1(\cdot; d) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dabei ist $(E_\lambda + A_\lambda)^*$ der adjungierte Operator zu $(E_\lambda + A_\lambda)$ aus (3.1) bezüglich der Bilinearform $\langle \varphi, \psi \rangle := \int_{\partial D} [\varphi_1(y)\psi_1(y) + \varphi_2(y)\psi_2(y)] ds(y)$ mit $\varphi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}, \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \in C^{0,\alpha}(\partial D) \times C^{1,\alpha}(\partial D)$, da die S_i und T_i selbstadjungiert und die K_i und K_i' bezüglich des Skalarproduktes $\langle f, g \rangle := \int_{\partial D} f(y)g(y) ds(y)$ ($i=1,2$) zueinander adjungiert sind.

Da wir bereits in Satz 3.1.4 gezeigt haben, daß der Operator $(E_\lambda + A_\lambda)$ injektiv ist, können wir mit der Riesz-Theorie folgern, daß die Gleichung (4.10) für jede Einfallrichtung d eine eindeutige Lösung besitzt. Es gilt also

$$\begin{aligned} 0 &= \mu_1 \int_{\partial D} \left\{ u_1(\cdot; d) \frac{\partial v_1}{\partial \nu} - v_1 \frac{\partial u_1(\cdot; d)}{\partial \nu} \right\} ds \\ &= \int_{\partial D} \left\{ \mu_1 u_1(\cdot; d) \frac{\partial v_1}{\partial \nu} - \mu_1 v_1 \left(\frac{\partial u_2(\cdot; d)}{\partial \nu} + \lambda u_1(\cdot; d) \right) \right\} ds \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} \frac{\partial u_2(\cdot; d)}{\partial \nu} \\ \mu_1 u_1(\cdot; d) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\mu_1 v_1 \\ \frac{\partial v_1}{\partial \nu} - \lambda v_1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle (E_\lambda + A_\lambda)^{-1} r_d, \begin{pmatrix} -\mu_1 v_1 \\ \frac{\partial v_1}{\partial \nu} - \lambda v_1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle r_d, (E_\lambda + A_\lambda)^{-1} \begin{pmatrix} -\mu_1 v_1 \\ \frac{\partial v_1}{\partial \nu} - \lambda v_1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad (4.11) \end{aligned}$$

für alle $r_d = 2\mu_1 \left(\frac{\partial u^i}{\partial \nu}, c_1 u^i \right)^t$ mit einfallender Welle $u^i = e^{ik_1 x d}$, $d \in \Omega$.

Definiere nun $\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} := (E_\lambda + A_\lambda)^{-1} \begin{pmatrix} -\mu_1 v_1 \\ \frac{\partial v_1}{\partial \nu} - \lambda v_1 \end{pmatrix}$ und damit die Felder

$$w_j(x) := \int_{\partial D} \left(2c_j \Phi_j(x, y) \psi(y) + 2 \frac{\partial \Phi_j(x, y)}{\partial \nu(y)} \varphi(y) \right) ds(y), \quad \text{für } x \notin \partial D, j = 1, 2 \quad (4.12)$$

Aus den Sprungbeziehungen, der Definition von φ und ψ und der speziellen Gestalt von $(E_\lambda + A_\lambda)$ erhalten wir auf dem Rand ∂D :

$$\left[\frac{\partial w_2}{\partial \nu} \right]_- - \left[\frac{\partial w_1}{\partial \nu} \right]_+ + [\lambda w_1]_+ = \frac{\partial v_1}{\partial \nu} - \lambda v_1 \quad (4.13)$$

$$- [\mu_2 w_2]_- + [\mu_1 w_1]_+ = -\mu_1 v_1. \quad (4.14)$$

Wenden wir uns wieder der Gleichung (4.11) zu:

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle r_d, \begin{pmatrix} \psi \\ \varphi \end{pmatrix} \right\rangle = 2\mu_1 \int_{\partial D} \left\{ c_1 u^i(\cdot; d) \psi(y) + \frac{\partial u^i(\cdot; d)}{\partial \nu} \varphi \right\} ds \\ &= \frac{\mu_1}{\rho} w_{1, \infty}(-d), \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit mit den Identitäten aus Satz 2.3.5 folgt.

Auf Grund der eindeutigen Zuordnung zwischen Fernfeld und ausstrahlender Lösung (Satz 2.3.8) erhalten wir damit $w_1 \equiv 0$ in $\mathbb{R}^2 \setminus D$.

Abschließend setzen wir nun $v_2 := w_2$ in D und erhalten so aus den Randbedingungen für die w_j (4.13)-(4.14):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_2}{\partial \nu} &= \frac{\partial v_1}{\partial \nu} - \lambda v_1 \\ \mu_2 v_2 &= \mu_1 v_1 \end{aligned} \right\} \text{ auf } \partial D.$$

v_1 ist Lösung der Helmholtzgleichung in D , die Normalableitung $\frac{\partial v_1}{\partial \nu}$ existiert und ist stetig auf dem Rand ∂D . Nach den Abbildungseigenschaften der Potentialoperatoren sind damit φ und ψ mindestens aus $C^{0, \alpha}(\partial D)$ und daher $w_2 \in C^{1, \alpha}(\partial D)$. Als Lösung der Helmholtzgleichung in $\mathbb{R}^2 \setminus \partial D$ ist w_2 dort insbesondere zweimal stetig differenzierbar.

(v_1, v_2) ist also eine Lösung des inneren homogenen konduktiven Randwertproblems, und damit ist $g \in \mathcal{E}_{IKP}$ wie behauptet. \square

Satz 4.1.6 *Sei $(v_1, v_2) \in (C^2(D) \cap C^1(\bar{D}))^2$ eine Lösung des inneren homogenen konduktiven Randwertproblems. Wenn eine der folgenden Bedingungen an die Parameter erfüllt ist:*

$$\begin{array}{ll}
k_1 > 0 & k_1 > 0 \\
\text{Im } \frac{\mu_2}{\mu_1} \geq 0 & \text{Im } \frac{\mu_2}{\mu_1} > 0 \\
\text{(i) } \text{Im } \left(\frac{\overline{\mu_2} k_2^2}{\mu_1} \right) > 0 & \text{oder (ii) } \text{Im } \left(\frac{\overline{\mu_2} k_2^2}{\mu_1} \right) \geq 0 \\
\text{Im } (\lambda(y)) \geq 0 \quad \forall y \in \partial D & \text{Im } (\lambda(y)) \geq 0 \quad \forall y \in \partial D,
\end{array}$$

dann folgt $(v_1, v_2) \equiv (0, 0)$.

Beweis: Wir setzen die Randbedingungen ein und wenden den ersten Greenschen Satz im Innengebiet an:

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\partial D} v_1 \left(\frac{\partial \overline{v_1}}{\partial \nu} - \overline{\lambda v_1} \right) ds - \frac{\mu_2}{\mu_1} \int_{\partial D} v_2 \frac{\partial \overline{v_2}}{\partial \nu} ds \\
&= \int_D \left\{ -k_1^2 |v_1|^2 + |\nabla v_1|^2 + \frac{\mu_2 \overline{k_2^2}}{\mu_1} |v_2|^2 - \frac{\mu_2}{\mu_1} |\nabla v_2|^2 \right\} dx - \left| \frac{\mu_2}{\mu_1} \right|^2 \int_{\partial D} \overline{\lambda} |v_2|^2 ds
\end{aligned}$$

Dann betrachten wir den Imaginärteil:

$$- \text{Im} \left(\frac{\overline{\mu_2} k_2^2}{\mu_1} \right) \int_D |v_2|^2 dx = \text{Im} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right) \int_D |\nabla v_2|^2 dx + \left| \frac{\mu_2}{\mu_1} \right|^2 \int_{\partial D} \text{Im}(\overline{\lambda}) |v_2|^2 ds$$

Unter Voraussetzung (i) ist die linke Seite nicht positiv und die rechte Seite nicht negativ, sie sind also beide Null, und wir erhalten damit $\int_D |v_2|^2 dx = 0$, woraus $v_2 \equiv 0$ in D folgt. Unter Voraussetzung (ii) erhalten wir auf Grund derselben Überlegungen $\int_D |\nabla v_2|^2 dx = 0$, und damit $v_2 \equiv \text{const}$ in D . Ist nun $\text{const} \neq 0$, so ist v_2 keine Lösung der Helmholtzgleichung. Deshalb erhalten wir ebenfalls $v_2 \equiv 0$ in D . Auf Grund der stetigen Fortsetzbarkeit und der Übergangsbedingungen gilt dann auch $v_1 = \frac{\partial v_1}{\partial \nu} \equiv 0$ auf ∂D und damit wegen des Greenschen Darstellungssatzes für den Innenraum $v_1 \equiv 0$ in \overline{D} . \square

Korollar 4.1.7 *Unter den Bedingungen (i) oder (ii) von Satz 4.1.6 sind die Fernfelder zum konduktiven Streuproblem \mathcal{F}_{KP} vollständig in $L^2(\Omega)$.*

Beweis: Die Behauptung folgt sofort aus 4.1.6 und 4.1.5, denn das innere homogene konduktive Randwertproblem ist nur trivial lösbar, und deshalb gilt $L^2(\Omega) = \text{closure}_{L^2(\Omega)} \text{span}\{u_\infty(\cdot, d); d \in \Omega\}$, die Fernfelder zum Transmissionsproblem sind vollständig in $L^2(\Omega)$.

Bemerkung 4.1.8 *Wir können also gleichzeitig sicherstellen, daß sowohl das innere homogene konduktive Randwertproblem, als auch das (normale äußere) konduktive Randwertproblem höchstens eine Lösung besitzen, wenn:*

$$\begin{array}{ll}
k_1 > 0, & k_1 > 0, \\
\text{Im} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right) \geq 0, & \text{Im} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right) > 0, \\
\text{Im} \left(\frac{\overline{\mu_2} k_2^2}{\mu_1} \right) > 0 \text{ und} & \text{Im} \left(\frac{\overline{\mu_2} k_2^2}{\mu_1} \right) \geq 0 \text{ und} \\
\text{Im} (\lambda(y)) \geq 0, \text{ für alle } y \in \partial D, & \text{Im} (\lambda(y)) \geq 0, \text{ für alle } y \in \partial D.
\end{array}$$

Diese Bedingungen unterscheiden sich von denen, unter denen wir eindeutige Existenz von Lösungen des konduktiven Randwertproblems nachgewiesen haben, darin, daß eine der beiden Ungleichungen, die die Kopplungsparameter μ_i enthält strikt erfüllt sein muß.

Im folgenden seien immer die Bedingungen von 4.1.8 erfüllt.

Der nächste Satz beschreibt die Tatsache, daß ein Streuvorgang umkehrbar ist, man also die Einfallrichtung durch die negative Betrachtungsrichtung und umgekehrt ersetzen kann, ohne das Ausstrahlungsverhalten der Lösung zu verändern.

Satz 4.1.9 Für die Fernfelder $u_\infty(\hat{x}; d)$ zum konduktiven Randwertproblem (KP) gilt die Reziprozitätsrelation

$$u_\infty(\hat{x}; d) = u_\infty(-d; -\hat{x}).$$

Beweis: Für die Fernfelder gilt nach Gleichung 2.18 die folgende Darstellung:

$$u_\infty(\hat{x}; d) = \rho \int_{\partial D} \left\{ u_1^s(y; d) \frac{\partial e^{-ik_1 \hat{x} y}}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u_1^s(y; d)}{\partial \nu(y)} e^{-ik_1 \hat{x} y} \right\} dy. \quad (4.15)$$

Wenden wir den zweiten Greenschen Satz für die Funktionen $u_1^s(\cdot; d)$ und $u_1^s(\cdot; -\hat{x})$ in dem Gebiet $D_R = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < R\} \setminus \overline{D}$ an, und betrachten dann den Grenzübergang $R \rightarrow \infty$, so erhalten wir, da sowohl $u_1^s(\cdot; d)$, als auch $u_1^s(\cdot; -\hat{x})$ der (SAB) genügen,

$$0 = \rho \int_{\partial D} \left\{ u_1^s(y; d) \frac{\partial u_1^s(y; -\hat{x})}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u_1^s(y; d)}{\partial \nu(y)} u_1^s(y; -\hat{x}) \right\} dy. \quad (4.16)$$

Addieren wir nun (4.15) und (4.16) und beachten dabei, daß $e^{-ik_1 \hat{x} y} = u^i(y; -\hat{x})$ gilt, so erhalten wir

$$\begin{aligned} u_\infty(\hat{x}; d) &= \rho \int_{\partial D} \left\{ u_1^s(y; d) \frac{\partial u_1(y; -\hat{x})}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u_1^{s,d}(y)}{\partial \nu(y)} u_1(y; -\hat{x}) \right\} dy \\ &= \rho \int_{\partial D} \left\{ (u_1 - u_1^i)(y; d) \frac{\partial u_1(y; -\hat{x})}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial (u_1 - u_1^i)(y; d)}{\partial \nu(y)} u_1(y; -\hat{x}) \right\} dy \\ &= \rho \int_{\partial D} \left\{ u_1(y; d) \frac{\partial u_1(y; -\hat{x})}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u_1(y; d)}{\partial \nu(y)} u_1(y; -\hat{x}) \right\} dy \\ &+ \rho \int_{\partial D} \left\{ u_1(y; -\hat{x}) \frac{\partial e^{ik_1 y d}}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u_1(y; -\hat{x})}{\partial \nu(y)} e^{ik_1 y d} \right\} dy. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Setzen wir nun die Randbedingungen des (KP) in (4.17) ein, und wenden dann den zweiten Greenschen Satz im Innengebiet an und nutzen wieder die Darstellung des Fernfeldes (2.18)

aus, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
u_\infty(\hat{x}; d) &= \rho \int_{\partial D} \left\{ u_1(y; -\hat{x}) \frac{\partial e^{ik_1 y d}}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u_1(y; -\hat{x})}{\partial \nu(y)} e^{ik_1 y d} \right\} dy \\
&+ \rho \frac{\mu_2}{\mu_1} \int_{\partial D} \left\{ u_2(y; d) \frac{\partial u_2(y; -\hat{x})}{\partial \nu(y)} + u_2(y; d) \lambda(y) u_1(y; d) \right. \\
&\quad \left. - u_2(y; -\hat{x}) \frac{\partial u_2(y; d)}{\partial \nu(y)} - u_2(y; d) \lambda(y) u_1(y; d) \right\} dy \\
&= \rho \int_{\partial D} \left\{ u_1(y; -\hat{x}) \frac{\partial e^{ik_1 y d}}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u_1(y; -\hat{x})}{\partial \nu(y)} e^{ik_1 y d} \right\} dy \\
&= u_\infty(-d; \hat{x}). \quad \square
\end{aligned}$$

Wir wollen nun noch eine nützliche Beziehung zwischen den Lösungen und den zugehörigen Fernfeldern bei einfallenden Herglotz-Wellenfunktionen herleiten. Die Fernfelder von Herglotz-Wellenfunktionen werden wegen der Beziehung $\mathcal{F}g = v_{g,\infty}$ für unsere Untersuchungen besonders wichtig sein.

Satz 4.1.10 *Sei v_g eine Lösung der Helmholtzgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ der Form $v_g = v_g^s + v_g^i$ mit $k > 0$. Dabei genüge v_g^s der (SAB), und v_g^i sei die Herglotz-Wellenfunktion mit Kern g . $v_{g,\infty}$ sei das zugehörige Fernfeld. Für h sei die Notation jeweils analog. Dann gilt:*

$$\int_{\partial D} \left(v_g \frac{\partial \overline{v_h}}{\partial \nu} - \overline{v_h} \frac{\partial v_g}{\partial \nu} \right) ds = -2ik \langle v_{g,\infty}, v_{h,\infty} \rangle_{L^2} + \sqrt{8\pi k} \left[e^{-i\frac{\pi}{4}} \langle v_{g,\infty}, h \rangle_{L^2} - e^{i\frac{\pi}{4}} \langle g, v_{h,\infty} \rangle_{L^2} \right].$$

Dabei ist $\langle f, g \rangle_{L^2} = \int_{\Omega} f \overline{g} ds$ das Skalarprodukt auf $L^2(\Omega)$.

Beweis: Wir teilen das Integral auf und betrachten dann die Summanden einzeln.

$$\int_{\partial D} \left(v_g \frac{\partial \overline{v_h}}{\partial \nu} - \overline{v_h} \frac{\partial v_g}{\partial \nu} \right) ds = \int_{\partial D} \left(v_g^i \frac{\partial \overline{v_h^i}}{\partial \nu} - \overline{v_h^i} \frac{\partial v_g^i}{\partial \nu} \right) ds \quad (4.18)$$

$$+ \int_{\partial D} \left(v_g^s \frac{\partial \overline{v_h^s}}{\partial \nu} - \overline{v_h^s} \frac{\partial v_g^s}{\partial \nu} \right) ds \quad (4.19)$$

$$+ \int_{\partial D} \left(v_g^s \frac{\partial \overline{v_h^i}}{\partial \nu} - \overline{v_h^i} \frac{\partial v_g^s}{\partial \nu} \right) ds \quad (4.20)$$

$$+ \int_{\partial D} \left(v_g^i \frac{\partial \overline{v_h^s}}{\partial \nu} - \overline{v_h^s} \frac{\partial v_g^i}{\partial \nu} \right) ds \quad (4.21)$$

Da die Herglotz-Wellenfunktionen ganze Lösungen der Helmholtzgleichung darstellen, können wir den Greenschen Satz im Innengebiet anwenden und erhalten so, daß (4.18) gleich Null ist.

Wenden wir nun den Greenschen Satz in dem Gebiet $D_R := \{x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D} : \|x\| < R\}$ an (mit $R > R_0 := \sup_{x \in D} \|x\|$), so erhalten wir

$$\int_{\partial D} \left(v_g^s \frac{\partial \overline{v_h^s}}{\partial \nu} - \overline{v_h^s} \frac{\partial v_g^s}{\partial \nu} \right) ds = \int_{\Omega_R} \left(v_g^s \frac{\partial \overline{v_h^s}}{\partial \nu} - \overline{v_h^s} \frac{\partial v_g^s}{\partial \nu} \right) ds.$$

Mit der Normalableitung der Greenschen Formel (2.16), der Definition des Fernfeldes (4.1), der Relation für die Ableitungen (2.3) und der Asymptotik der Hankelfunktionen gilt für die Normalableitung auf Ω_R : $\frac{\partial v^s(x)}{\partial \nu} = \frac{ik}{\sqrt{R}} e^{ikR} v_\infty(\hat{x}; d) + O\left(\frac{1}{R^{\frac{3}{2}}}\right)$, und wir erhalten

$$v_g^s \frac{\partial \overline{v_h^s}}{\partial \nu} - \overline{v_h^s} \frac{\partial v_g^s}{\partial \nu} = \frac{-2ik}{R} v_{g,\infty} \overline{v_{h,\infty}} + O\left(\frac{1}{R^2}\right) \quad \text{und damit}$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_R} \left(v_g^s \frac{\partial \overline{v_h^s}}{\partial \nu} - \overline{v_h^s} \frac{\partial v_g^s}{\partial \nu} \right) ds &= -2ik \int_{\Omega_R} \left\{ \frac{1}{R} v_{g,\infty} \overline{v_{h,\infty}} + O\left(\frac{1}{R^2}\right) \right\} ds \\ &= -2ik \int_{\Omega} v_{g,\infty} \overline{v_{h,\infty}} ds + O\left(\frac{1}{R}\right). \end{aligned}$$

Betrachten wir nun den Grenzübergang für $R \rightarrow \infty$ so erhalten wir

$$\int_{\partial D} \left(v_g^s \frac{\partial \overline{v_h^s}}{\partial \nu} - \overline{v_h^s} \frac{\partial v_g^s}{\partial \nu} \right) ds = -2ik \int_{\Omega} v_{g,\infty} \overline{v_{h,\infty}} ds. \quad (4.22)$$

Für die verbleibenden zwei Integrale benötigen wir die Darstellungsformel für das Fernfeld:

$$v_\infty(\hat{x}) = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{8\pi k}} \int_{\partial D} \left(v^s(y) \frac{\partial e^{-ik\hat{x}y}}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial v^s}{\partial \nu} e^{-ik\hat{x}y} \right) ds. \quad (4.23)$$

Da v_g^i , bzw. v_h^i Herglotzfunktionen sind, können wir in der Darstellung von (4.20) und (4.21) jeweils die Integrationsreihenfolge vertauschen und erhalten mit der oben angegebenen Formel für das Fernfeld:

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \left(v_g^s \frac{\partial \overline{v_h^i}}{\partial \nu} - \overline{v_h^i} \frac{\partial v_g^s}{\partial \nu} \right) ds &= \int_{\Omega} \overline{h(y)} \int_{\partial D} \left(v_g^s(x) \frac{\partial e^{-ik\hat{x}y}}{\partial \nu(x)} - e^{-ik\hat{x}y} \frac{\partial v_g^s(x)}{\partial \nu} \right) ds(x) ds(y) \\ &= \sqrt{8\pi k} e^{-i\frac{\pi}{4}} \int_{\Omega} \overline{h} v_{g,\infty} ds. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Damit gilt also mit (4.22) und (4.24)

$$\int_{\partial D} \left(v_g \frac{\partial \overline{v_h}}{\partial \nu} - \overline{v_h} \frac{\partial v_g}{\partial \nu} \right) ds = -2ik \int_{\Omega} v_{g,\infty} \overline{v_{h,\infty}} ds + \sqrt{8\pi k} \int_{\Omega} \left[e^{-i\frac{\pi}{4}} \overline{h} v_{g,\infty} - e^{i\frac{\pi}{4}} g \overline{v_{h,\infty}} \right] ds. \quad (4.25)$$

Beachten wir die Definition des L^2 -Skalarproduktes von Funktionen auf dem Einheitskreis, so können wir (4.25) schreiben als

$$\int_{\partial D} \left(v_g \frac{\partial \overline{v_h}}{\partial \nu} - \overline{v_h} \frac{\partial v_g}{\partial \nu} \right) ds = -2ik \langle v_{g,\infty}, v_{h,\infty} \rangle_{L^2} + \sqrt{8\pi k} \left[e^{-i\frac{\pi}{4}} \langle v_{g,\infty}, h \rangle_{L^2} - e^{i\frac{\pi}{4}} \langle g, v_{h,\infty} \rangle_{L^2} \right].$$

□

Im Beweis zum nächsten Satz folgen wir der Vorgehensweise aus [5], indem wir unter Ausnutzung der Reziprozitätsrelation (Satz 4.1.9) den adjungierten Operator als die konjugiert komplexe Anwendung eines Spiegelungsoperators R auf den Fernfeldoperator \mathcal{F} auffassen.

Satz 4.1.11 *Gilt $\operatorname{Im}\left(k_2^2 \frac{\overline{\mu_2}}{\mu_1}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right) = 0$ und $\operatorname{Im}(\overline{\lambda(y)}) = 0$ für alle $y \in \partial D$, so ist der Fernfeldoperator \mathcal{F} normal.*

Beweis: Seien $(v_{g,1}, v_{g,2})$ die Lösung zum (KP) bei einfallender Herglotz-Wellenfunktion v_g^i mit Kern g . Für h sei die Notation jeweils analog.

Wir benutzen die Randbedingungen, um im Außenraum definierte Funktionen im Innenraum betrachten zu können. Dann wenden wir den Greenschen Satz an, um nach geschicktem Zusammenfassen eine andere Darstellung für den Ausdruck $\int_{\partial D} \left(v_{g,1} \frac{\partial \overline{v_{h,1}}}{\partial \nu} - \overline{v_{h,1}} \frac{\partial v_{g,1}}{\partial \nu} \right) ds$ zu erhalten.

$$\begin{aligned}
& \int_{\partial D} \left(v_{g,1} \frac{\partial \overline{v_{h,1}}}{\partial \nu} - \overline{v_{h,1}} \frac{\partial v_{g,1}}{\partial \nu} \right) ds \\
&= \int_{\partial D} \left\{ \frac{\mu_2}{\mu_1} v_{g,2} \frac{\partial \overline{v_{h,2}}}{\partial \nu} - \frac{\overline{\mu_2}}{\overline{\mu_1}} \overline{v_{h,2}} \frac{\partial v_{g,2}}{\partial \nu} + \left| \frac{\mu_2}{\mu_1} \right|^2 (\overline{\lambda} v_{g,2} \overline{v_{h,2}} - \lambda v_{g,2} v_{h,2}) \right\} ds \\
&= \int_D \left\{ \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} v_{g,2} \Delta \overline{v_{h,2}} \right) - \left(\frac{\overline{\mu_2}}{\overline{\mu_1}} \overline{v_{h,2}} \Delta v_{g,2} \right) \right\} dx + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} - \frac{\overline{\mu_2}}{\overline{\mu_1}} \right) \int_D \nabla v_{g,2} \overline{\nabla v_{h,2}} dx \\
&\quad + \left| \frac{\mu_2}{\mu_1} \right|^2 \int_{\partial D} (\overline{\lambda} - \lambda) v_{g,2} \overline{v_{h,2}} ds \\
&= \int_D \left(\frac{\overline{\mu_2}}{\overline{\mu_1}} k_2^2 - \frac{\mu_2}{\mu_1} k_2^2 \right) v_{g,2} \overline{v_{h,2}} dx + \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} - \frac{\overline{\mu_2}}{\overline{\mu_1}} \right) \int_D \nabla v_{g,2} \overline{\nabla v_{h,2}} dx \\
&\quad + \left| \frac{\mu_2}{\mu_1} \right|^2 \int_{\partial D} (\overline{\lambda} - \lambda) v_{g,2} \overline{v_{h,2}} ds \\
&= 2i \left[\operatorname{Im} \left(\frac{\overline{\mu_2}}{\overline{\mu_1}} k_2^2 \right) \int_D v_{g,2} \overline{v_{h,2}} dx + \operatorname{Im} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right) \int_D \nabla v_{g,2} \overline{\nabla v_{h,2}} dx + \left| \frac{\mu_2}{\mu_1} \right|^2 \int_{\partial D} \operatorname{Im}(\overline{\lambda}) v_{g,2} \overline{v_{h,2}} ds \right]
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Deshalb folgt mit Satz 4.1.10, wenn wir beachten, daß $\mathcal{F}h = v_{h,\infty}$ gilt:

$$\begin{aligned}
& 2i \left[\operatorname{Im} \left(\frac{\overline{\mu_2}}{\overline{\mu_1}} k_2^2 \right) \int_D v_{g,2} \overline{v_{h,2}} dx + \operatorname{Im} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right) \int_D \nabla v_{g,2} \overline{\nabla v_{h,2}} dx + \left| \frac{\mu_2}{\mu_1} \right|^2 \int_{\partial D} \operatorname{Im}(\overline{\lambda}) v_{g,2} \overline{v_{h,2}} ds \right] \\
&= -2ik_1 \langle \mathcal{F}g, \mathcal{F}h \rangle_{L^2} + \sqrt{8\pi k_1} \left[e^{-i\frac{\pi}{4}} \langle \mathcal{F}g, h \rangle_{L^2} - e^{i\frac{\pi}{4}} \langle g, \mathcal{F}h \rangle_{L^2} \right].
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Ist nun $\operatorname{Im} \left(\frac{\overline{\mu_2}}{\overline{\mu_1}} k_2^2 \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right) = 0$ und $\operatorname{Im}(\overline{\lambda}) \equiv 0$, so gilt demnach:

$$ik_1 \langle \mathcal{F}g, \mathcal{F}h \rangle = ik_1 \langle g, \mathcal{F}^* \mathcal{F}h \rangle = \sqrt{2\pi k_1} \langle g, [e^{i\frac{\pi}{4}} \mathcal{F}^* - e^{-i\frac{\pi}{4}} \mathcal{F}] h \rangle$$

für alle $g, h \in L^2(\Omega)$; also:

$$ik_1 \mathcal{F}^* \mathcal{F} = \sqrt{2\pi k_1} \left\{ e^{-i\frac{\pi}{4}} \mathcal{F} - e^{i\frac{\pi}{4}} \mathcal{F}^* \right\}. \quad (4.28)$$

Betrachte nun den zu \mathcal{F} adjungierten Operator \mathcal{F}^* . Auf Grund der Reziprozitätsrelation für die Fernfelder (Satz 4.1.9) gilt

$$(\mathcal{F}^* g)(\hat{x}) = \int_{\Omega} \overline{u_{\infty}(d; \hat{x})} g(d) ds(d) = \int_{\Omega} \overline{u_{\infty}(-\hat{x}; -d)} g(d) ds(d) = \int_{\Omega} \overline{u_{\infty}(-\hat{x}; d)} g(-d) ds(d)$$

nach Transformation der Integrationsvariablen von $d \rightarrow -d$ mit $ds(d) = ds(-d)$.

Definiere nun den Operator $R: L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ durch

$$(Rg)(\hat{x}) := g(-\hat{x}).$$

R ist eine Isometrie, denn es gilt

$$\langle Rg, Rh \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle g, h \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle \bar{h}, \bar{g} \rangle_{L^2(\Omega)} \text{ für alle } g, h \in L^2(\Omega). \quad (4.29)$$

Wir können nun \mathcal{F}^* mit Hilfe von R ausdrücken:

$$(\mathcal{F}^* g)(\hat{x}) = \overline{R\mathcal{F}R\bar{g}}(\hat{x}).$$

Mit diesen Relationen gilt

$$\langle g, \mathcal{F}\mathcal{F}^* h \rangle = \langle \mathcal{F}^* g, \mathcal{F}^* h \rangle = \langle \overline{R\mathcal{F}R\bar{g}}, \overline{R\mathcal{F}R\bar{h}} \rangle = \langle \mathcal{F}R\bar{h}, \mathcal{F}R\bar{g} \rangle = \langle R\bar{h}, \mathcal{F}^* \mathcal{F}R\bar{g} \rangle$$

$$\text{Also: } -ik_1 \langle g, \mathcal{F}\mathcal{F}^* h \rangle = -ik_1 \langle R\bar{h}, \mathcal{F}^* \mathcal{F}R\bar{g} \rangle = \sqrt{2\pi k_1} \langle R\bar{h}, \left[e^{i\frac{\pi}{4}} \mathcal{F}^* - e^{-i\frac{\pi}{4}} \mathcal{F} \right] R\bar{g} \rangle$$

$$= \sqrt{2\pi k_1} \left[e^{i\frac{\pi}{4}} \langle R\bar{h}, \mathcal{F}R\bar{g} \rangle - e^{-i\frac{\pi}{4}} \langle R\bar{h}, \mathcal{F}^* R\bar{g} \rangle \right] \stackrel{(4.29)}{=} \sqrt{8\pi k_1} \left[e^{i\frac{\pi}{4}} \langle g, \mathcal{F}h \rangle - e^{-i\frac{\pi}{4}} \langle g, \mathcal{F}^* h \rangle \right].$$

Da diese Beziehung für alle $g, h \in L^2(\Omega)$ gilt, folgt

$$ik_1 \mathcal{F}\mathcal{F}^* = \sqrt{2\pi k_1} \left\{ e^{-i\frac{\pi}{4}} \mathcal{F} - e^{i\frac{\pi}{4}} \mathcal{F}^* \right\} \stackrel{(4.28)}{=} ik_1 \mathcal{F}^* \mathcal{F}. \quad (4.30)$$

\mathcal{F} ist wegen (4.30) normal. \square

Außerdem ist \mathcal{F} kompakt und hat deshalb nach dem Spektralsatz (Satz 2.4.14) höchstens abzählbar viele Eigenwerte, die sich nur bei Null häufen können.

Um in dem Beweis über die Existenz von unendlich vielen Eigenwerten unter etwas weniger speziellen Voraussetzungen den Satz von Lidskii (Satz 2.4.18) anwenden zu können, müssen wir sicherstellen, daß die Voraussetzungen erfüllt sind. Dazu dienen die beiden folgenden Sätze.

Satz 4.1.12 *Der Fernfeldoperator \mathcal{F} ist ein Spurklasseoperator.*

Beweis: Dazu reicht es (nach Satz 2.4.17) zu zeigen, daß es eine Folge von Operatoren $\{\mathcal{F}_n; n \in \mathbb{N}\}$ gibt, so daß $\text{rang } \mathcal{F}_n \leq n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \|\mathcal{F} - \mathcal{F}_n\| < \infty$ gilt.

Sei $a > 0$ so gewählt, daß $B := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < a\} \supset \bar{D}$. Lösen wir das (KP) mit Hilfe eines Potentialansatzes, so sieht man leicht, daß $u^s(\cdot; d)$ und $\nabla u^s(\cdot; d)$ auf ∂B gleichmäßig beschränkt bezüglich d sind (siehe dazu [4], Theorem 3.9). Ist $u^s(\cdot, d)$ eine Lösung im Außenraum, so können wir den Darstellungssatz 2.3.3 (ii) auf jeder geschlossenen Kurve im Außenraum anwenden und erhalten mit der Darstellung des Fernfeldes nach (2.18):

$$u_{\infty}(\hat{x}; d) = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{8\pi k_1}} \int_{\partial B} \left\{ u^s(y; d) \frac{\partial e^{-ik_1 \hat{x}y}}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u^s(y; d)}{\partial \nu(y)} e^{-ik_1 \hat{x}y} \right\} ds(y). \quad (4.31)$$

Mit $\hat{x} = (\cos \theta, \sin \theta)$ und $y = (a \cos \varphi, a \sin \varphi)$ und der Jacobi-Anger Darstellung von $e^{-ik_1 \hat{x}y}$ (s. Formel(2.7)) gilt:

$$e^{-ik_1 \hat{x}y} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^{-m} J_m(k_1 a) e^{im(\theta-\varphi)}. \quad (4.32)$$

Dabei ist J_m die m -te Besselfunktion. Wir benötigen einige Eigenschaften der Besselfunktionen (nach [4], S.64):

$$J_{-|m|} = (-1)^{|m|} J_{|m|} \quad (4.33)$$

und als asymptotisches Verhalten für $m \rightarrow \infty$:

$$J_m(t) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!(m+p)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{m+2p} = \frac{t^m}{2^m m!} \left(1 + O\left(\frac{1}{m}\right)\right) \quad (4.34)$$

$$J'_m(t) = \frac{t^{m-1}}{2^m (m-1)!} \left(1 + O\left(\frac{1}{m}\right)\right). \quad (4.35)$$

Setzen wir (4.32) - (4.35) in die Darstellung des Fernfeldes (4.31) ein, so erhalten wir:

$$u_{\infty}(\hat{x}; d) = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{8\pi k_1}} \int_{\partial B} \left\{ u^s(y; d) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} i^{-m} J_m(k_1 a) e^{im(\theta-\varphi)} \right] - \frac{\partial u^s(y; d)}{\partial \nu(y)} \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} i^{-m} J_m(k_1 a) e^{im(\theta-\varphi)} \right] \right\} ds(y).$$

Auf ∂B gilt $\frac{\partial}{\partial \nu} = \frac{\partial}{\partial a}$. Diese Reihe sowie die Reihendarstellung der Ableitung konvergieren gleichmäßig. Deshalb darf gliedweise differenziert und die Summation mit der Integration vertauscht werden, und wir erhalten:

$$u_{\infty}(\hat{x}; d) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{im\theta} a_m(d) \quad \text{mit}$$

$$a_m(d) = \frac{e^{i\pi(\frac{1}{4}-\frac{m}{2})}}{\sqrt{8\pi k_1}} \int_{|y|=a} \left[u^s(y; d) k_1 J'_m(k_1|y|) - \frac{\partial u^s(y; d)}{\partial \nu} J_m(k_1|y|) \right] e^{-im \arg(y)} ds(y).$$

Die a_m sind als Funktionen von d gleichmäßig beschränkt, da $u^s(\cdot; d)$ und $\frac{\partial u^s}{\partial \nu}(\cdot; d)$ auf Grund des Greenschen Darstellungssatzes für Lösungen der Helmholtzgleichung bezüglich d auf ∂B gleichmäßig beschränkt sind.

$$M := \frac{1}{\sqrt{8\pi k_1}} \max_{y, d \in \partial B} \left\{ \frac{|u^s(y, d)|}{a}; \left| \frac{\partial u^s(y, d)}{\partial \nu} \right| \right\} < \infty$$

ist daher eine von d und m unabhängige Konstante.

Deshalb gilt auf Grund des asymptotischen Verhaltens der Besselfunktionen:

$$\begin{aligned} |a_m(d)| &\leq \frac{1}{\sqrt{8\pi k_1}} \int_{\partial B} \left\{ \|u^s\|_\infty k_1 \frac{(k_1 a)^{|m|-1}}{2^{|m|} (|m|-1)!} + \left\| \frac{\partial u^s}{\partial \nu} \right\|_\infty \frac{(k_1 a)^{|m|}}{2^{|m|} |m|!} \right\} ds \\ &\leq \frac{M}{(|m|-1)!} \left(\frac{ak_1}{2} \right)^{|m|} =: \|a_m\|, \quad \text{für } |m| > 0. \end{aligned}$$

Wir definieren Operatoren $\mathcal{F}_n : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ mit endlich dimensionalem Bild als Approximationen an \mathcal{F} durch eine abbrechende Fourierreihe:

$$(\mathcal{F}_{2n+1}g)(\hat{x}) := \int_{\Omega} \sum_{m=-n}^n a_m(d) e^{im\theta} g(d) ds(d),$$

mit $\hat{x} = (\cos \theta, \sin \theta)$. Dann folgt, da die $\{e^{im\theta} : m \in \mathbb{Z}\}$ ein Orthogonalsystem in $L^2(\Omega)$ darstellen und außerdem die Beziehung $(g, 1)_{L^2} \leq \sqrt{2\pi} \|g\|_{L^2}$ gilt:

$$\begin{aligned} \|(\mathcal{F} - \mathcal{F}_{2n+1})g\|^2 &= \int_{\Omega} \left\{ \int_{\Omega} \left[\sum_{|m|>n} a_m(d) e^{im\theta} g(d) \right] ds(d) \right. \\ &\quad \cdot \left. \int_{\Omega} \left[\sum_{|j|>n} \overline{a_j(d) e^{ij\theta} g(d)} \right] ds(d) \right\} ds(\hat{x}) \\ &\leq \sum_{|m|>n} \|a_m\|^2 \left| \int_{\Omega} g(d) ds(d) \right| \left| \int_{\Omega} \overline{g(d)} ds(d) \right| \\ &\leq 2\pi M^2 \sum_{m>n} \left[\frac{1}{(m-1)!} \left(\frac{k_1 a}{2} \right)^m \right]^2 \|g\|^2 \\ &\leq 2\pi M^2 \frac{1}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m-1)!} \left(\frac{k_1 a}{2} \right)^{2m} \|g\|^2 \\ &= \frac{\pi}{2} M^2 k_1^2 a^2 e^{\frac{k_1^2 a^2}{4}} \frac{1}{n!} \|g\|^2. \end{aligned}$$

Also $\|\mathcal{F} - \mathcal{F}_{2n+1}\|^2 \leq L \frac{1}{n!}$ mit $L := \frac{\pi}{2} M^2 k_1^2 a^2 e^{\frac{k_1^2 a^2}{4}}$.

Setzen wir nun $\mathcal{F}_{2n} := \mathcal{F}_{2n-1}$, dann erhalten wir: $\text{rang } \mathcal{F}_{2n} = \text{rang } \mathcal{F}_{2n-1} = 2n - 1 < 2n$ und außerdem

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\mathcal{F} - \mathcal{F}_n\| = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \|\mathcal{F} - \mathcal{F}_{2n-1}\| \leq 2\sqrt{L} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} < \infty.$$

\mathcal{F} ist demnach ein Spurklasseoperator. \square

Satz 4.1.13 Sei \mathcal{F} der Fernfeldoperator zum (KP) mit $k_1 > 0$, $\text{Im} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} k_2^2 \right) \geq 0$, $\text{Im} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right) \geq 0$ und $\text{Im} \left(\overline{\lambda(y)} \right) \geq 0$ für alle $y \in \partial D$. Dann gilt $\frac{i}{2}(T^* - T) \geq 0$ für $T = e^{-i\frac{\pi}{4}} \mathcal{F}$.

Beweis :

$$\begin{aligned} & \frac{i}{2} \langle e^{i\frac{\pi}{4}} \mathcal{F}^* h - e^{-i\frac{\pi}{4}} \mathcal{F} h, h \rangle = \frac{i}{2} \left[e^{i\frac{\pi}{4}} \langle h, \mathcal{F} h \rangle - e^{-i\frac{\pi}{4}} \langle \mathcal{F} h, h \rangle \right] \\ \stackrel{(4.27)}{=} & \frac{1}{\sqrt{8\pi k_1}} \left\{ \text{Im} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} k_2^2 \right) \int_D |v_{h,2}|^2 dx + \text{Im} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right) \int_D |\nabla v_{h,2}|^2 dx \right. \\ & \left. + \left| \frac{\mu_2}{\mu_1} \right|^2 \int_{\partial D} |v_{h,2}|^2 ds + k_1 \|\mathcal{F} h\|^2 \right\} \geq 0 \quad \square \end{aligned}$$

Nach diesen Vorüberlegungen sind wir jetzt in der Lage, eine Aussage über die Existenz von Eigenwerten des Fernfeldoperators zu machen.

Satz 4.1.14 Der Fernfeldoperator zum (KP) hat unendlich viele verschiedene Eigenwerte, die sich höchstens bei Null häufen.

Beweis: (i) Sei T definiert als $e^{-i\frac{\pi}{4}} \mathcal{F}$. T ist dann, ebenso wie \mathcal{F} , ein Spurklasseoperator (s. Satz 4.1.12, $\sum \|T - T_n\| = \sum \|\mathcal{F} - \mathcal{F}_n\|$, mit $T_n := e^{-i\frac{\pi}{4}} \mathcal{F}_n$). Nach Satz 4.1.13 gilt $\frac{i}{2}(T^* - T) \geq 0$ für $T = e^{-i\frac{\pi}{4}} \mathcal{F}$.

Deshalb können wir Lidskiis Satz (Satz 2.4.18) auf T anwenden und erhalten:

$$L^2(\Omega) = N \left(e^{-i\frac{\pi}{4}} \mathcal{F} \right) \oplus \text{closure}_{L^2(\Omega)} \text{span} \left\{ g : \exists n \in \mathbb{N}, \left(e^{-i\frac{\pi}{4}} \mathcal{F} - \omega I \right)^n g = 0, \omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \right\}.$$

(ii) Wir haben die Vollständigkeit der Fernfelder in $L^2(\Omega)$ (Satz 4.1.14) und die Reziprozitätsrelation (Satz 4.1.9) bewiesen. Für den adjungierten Operator $\mathcal{F}^* : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$, erklärt durch

$$(\mathcal{F}^* h)(d) := \int_{\Omega} \overline{u_{\infty}(\hat{x}, d)} h(\hat{x}) ds(\hat{x})$$

folgt aus der Reziprozitätsrelation $(\mathcal{F}^*h)(d) = \overline{(\mathcal{F}g)(-d)}$, für alle $d \in \Omega$ mit $g(\hat{x}) = \overline{h(-\hat{x})}$. Der Operator \mathcal{F} ist genau dann injektiv, wenn \mathcal{F}^* injektiv ist. In dem Hilbertraum $L^2(\Omega)$ gilt $N(\mathcal{F}^*)^- = \overline{\mathcal{F}(L^2(\Omega))}$, so daß aus der Vollständigkeit die Injektivität von \mathcal{F} folgt. Also auch

$$N(e^{-i\frac{\pi}{4}}\mathcal{F}) = \{0\}$$

Nach (i) und (ii) gilt demnach:

$$L^2(\Omega) = \text{closure}_{L^2(\Omega)} \text{span} \left\{ g : \exists n \in \mathbb{N} \left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\mathcal{F} - \omega I \right)^n g = 0, \omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \right\}.$$

(iii) Da \mathcal{F} nach Satz 4.1.3 kompakt ist und $N(e^{-i\frac{\pi}{4}}\mathcal{F}) = \{0\}$, können wir die Elemente des zugehörigen Spektrums $\sigma(e^{-i\frac{\pi}{4}}\mathcal{F})$ nach dem Spektralsatz für kompakte Operatoren (Satz 2.4.13) wie folgt anordnen:

$$|\omega_1| \geq \dots \geq |\omega_n| \geq \dots > 0 \quad \text{für alle } \omega_i \in \sigma(e^{-i\frac{\pi}{4}}\mathcal{F}) \setminus \{0\}.$$

Da \mathcal{F} kompakt ist, können wir auf $(\omega I - e^{-i\frac{\pi}{4}}\mathcal{F})$ für alle $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ die Riesz Theorie (die Sätze 2.4.5 bis 2.4.7) anwenden. Nach dem dritten Rieszschen Satz (Satz 2.4.7) gibt es zu jedem $\omega_i \in \sigma(e^{-i\frac{\pi}{4}}\mathcal{F}) \setminus \{0\}$ genau ein $r_i < \infty$, so daß

$$N \left(\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\mathcal{F} - \omega_i I \right)^n \right) = N \left(\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\mathcal{F} - \omega_i I \right)^{r_i} \right) \quad \text{für alle } n > r_i$$

Deshalb gilt:

$$L^2(\Omega) = \text{closure}_{L^2(\Omega)} \text{span} \left\{ g : \exists n \in \mathbb{N}, n \leq r_i, \left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\mathcal{F} - \omega_i I \right)^n g = 0, \omega_i \in \sigma(e^{-i\frac{\pi}{4}}\mathcal{F}) \setminus \{0\} \right\},$$

dabei bezeichnen die ω_i hier nun nicht mehr die Elemente des Spektrums gemäß ihrer Vielfachheit gezählt, sondern es gelte: $|\omega_i| > |\omega_{i+1}| > 0$.

Sei nun $n \leq r_i$ die kleinste natürliche Zahl für die gilt: $\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\mathcal{F} - \omega_i I \right)^n g = 0$, dann ist $h := \left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\mathcal{F} - \omega_i I \right)^{n-1} g \neq 0$ und $\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\mathcal{F} - \omega_i I \right) h = 0$. D.h. zu jedem $\omega_i \in \sigma(e^{-i\frac{\pi}{4}}\mathcal{F}) \setminus \{0\}$ mit verallgemeinerter Eigenfunktion g gibt es auch eine echte Eigenfunktion h . Die Dimension des Nullraumes von $\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\mathcal{F} - \omega_i I \right)$ ist nach der Riesz-Theorie endlich, nennen wir sie t_i . Das Vorkommen von ω_i im Spektrum ist dadurch auf maximal $t_i r_i$ beschränkt. Damit hat $e^{-i\frac{\pi}{4}}\mathcal{F}$ unendlich viele Eigenwerte, die sich auf Grund der Kompaktheit nur bei Null häufen können. Siehe dazu auch die Einleitung von [6]. \square

4.2 Abschätzungen beim konduktiven Randwertproblem

Wir wollen nun einen Kreis angeben, in dem die Eigenwerte des Fernfeldoperator zum konduktiven Streuproblem liegen müssen.

Satz 4.2.1 Sei h eine Eigenfunktion des Fernfeldoperators zum konduktiven Streuproblem mit Eigenwert ω ; d.h. $\mathcal{F}h = \omega h$. Sei $(v_{h,1}, v_{h,2})$ Lösung zum konduktiven Streuproblem bei einfallender Herglotz-Wellenfunktion v_h^i mit Kern h . Dann gilt:

$$\left\{ \sqrt{8\pi k_1} \operatorname{Im} \left(e^{-i\frac{\pi}{4}} \omega \right) - k_1 |\omega|^2 \right\} \|h\|_{L^2}^2 = \left| \frac{\mu_2}{\mu_1} \right|^2 \int_{\partial D} \operatorname{Im}(\bar{\lambda}) |v_{h,2}|^2 + \operatorname{Im} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} k_2^2 \right) \int_D |v_{h,2}|^2 + \operatorname{Im} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right) \int_D |\nabla v_{h,2}|^2.$$

Beweis : Wir setzen $g = h$ in (4.27) und erhalten

$$\begin{aligned} 2i & \left[\int_D \operatorname{Im} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} k_2^2 \right) |v_{h,2}|^2 dx + \operatorname{Im} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right) \int_D |\nabla v_{h,2}|^2 dx + \left| \frac{\mu_2}{\mu_1} \right|^2 \int_{\partial D} \operatorname{Im}(\bar{\lambda}) |v_{h,2}|^2 ds \right] \\ & = -2ik_1 (\mathcal{F}h, \mathcal{F}h)_{L^2} + \sqrt{8\pi k_1} \left[e^{-i\frac{\pi}{4}} (\mathcal{F}h, h)_{L^2} - e^{i\frac{\pi}{4}} (h, \mathcal{F}h)_{L^2} \right]. \end{aligned}$$

Beachtet man, daß h als Eigenfunktion zum Eigenwert ω vorausgesetzt ist, d.h. $\mathcal{F}h = \omega h$ und teilt dann durch $2i$ so erhält man:

$$\begin{aligned} & \int_D \operatorname{Im} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} k_2^2 \right) |v_{h,2}|^2 dx + \operatorname{Im} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right) \int_D |\nabla v_{h,2}|^2 dx + \left| \frac{\mu_2}{\mu_1} \right|^2 \int_{\partial D} \operatorname{Im}(\bar{\lambda}) |v_{h,2}|^2 ds \\ & = -k_1 |\omega|^2 \|h\|_{L^2}^2 + \frac{\sqrt{8\pi k_1}}{2i} \underbrace{\left[e^{-i\frac{\pi}{4}} \omega - e^{i\frac{\pi}{4}} \bar{\omega} \right]}_{= 2i \operatorname{Im} \left(e^{-i\frac{\pi}{4}} \omega \right)} \|h\|_{L^2}^2 \\ & = 2i \operatorname{Im} \left(e^{-i\frac{\pi}{4}} \omega \right) \|h\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

und damit die Behauptung des Satzes. \square

Mit Hilfe dieses Satzes gewinnen wir sofort eine Abschätzung für die Lage der Eigenwerte, wenn wir die linke Seite der Beziehung aus Satz 4.2.1 nicht negativ voraussetzen.

Korollar 4.2.2 Ist $\operatorname{Im}(\bar{\lambda}(y)) \geq 0$ für alle $y \in \partial D$, $\operatorname{Im} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} k_2^2 \right) \geq 0$ und $\operatorname{Im} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right) \geq 0$, dann liegen alle Eigenwerte des Fernfeldoperators zum konduktiven Randwertproblem in dem Kreis

$$\sqrt{8\pi k_1} \operatorname{Im} \left(\omega e^{-i\frac{\pi}{4}} \right) \geq k_1 |\omega|^2.$$

Gilt $0 = \operatorname{Im} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} k_2^2 \right) = \operatorname{Im} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right) = \operatorname{Im}(\bar{\lambda}(y))$ für alle $y \in \partial D$, so liegen die Eigenwerte auf dem Kreisrand.

Setzen wir alle vorkommenden Imaginärteile als strikt positiv voraus, so können wir eine schärfere Abschätzung angeben, die von den Imaginärteilen und dem Streukörper selbst abhängig ist.

Satz 4.2.3 Sei $\text{Im}(\overline{\lambda(y)}) > 0$ für alle $y \in \partial D$, $\text{Im}\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}k_2^2\right) > 0$, und $\text{Im}\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right) > 0$, dann liegen alle Eigenwerte des Fernfeldoperators zum konduktiven Randwertproblem in der abgeschlossenen Kreisscheibe

$$\frac{4k_1|\omega|^2}{|D|(A+B)+C} \leq \sqrt{8\pi k_1} \text{Im}\left(e^{-i\frac{\pi}{4}}\omega\right) - k_1|\omega|^2, \quad (4.36)$$

$$\text{mit } A = \frac{\left|-\frac{\mu_2}{\mu_1}k_1^2 + k_2^2\right|^2}{\text{Im}\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}k_2^2\right)} \text{ und } B = \frac{k_1^2\left|\frac{\mu_2}{\mu_1} - 1\right|^2}{\text{Im}\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)} \text{ und } C = \left|\frac{\mu_2}{\mu_1}\right|^2 \int_{\partial D} \frac{|\lambda(y)|^2}{\text{Im}\lambda(y)} ds(y),$$

d.h. in der abgeschlossenen Kreisscheibe mit Mittelpunkt auf der Geraden $\text{Im}\omega = -\text{Re}\omega$, mit $\text{Im}\omega \geq 0$, die durch den Ursprung verläuft und den Radius $r := \frac{\sqrt{2\pi k_1}}{k_1 + \gamma}$, mit $\gamma := \frac{4k_1}{|D|(A+B)+C}$ hat.

Beweis: Der Ausdruck γ ist immer wohldefiniert, denn aus $\text{Im}\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right) > 0$ folgt $\mu_1 \neq \mu_2$, weshalb stets $B > 0$ gilt.

Nach (4.23) gilt für eine ausstrahlende Lösung der Helmholtzgleichung $v^s \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}) \cap C^1(\mathbb{R}^2 \setminus D)$ mit Fernfeld v_∞ :

$$v_\infty(\hat{x}) = \rho \int_{\partial D} \left\{ v^s(y) \frac{\partial e^{-ik_1 \hat{x}y}}{\partial \nu} - \frac{\partial v^s(y)}{\partial \nu} e^{-ik_1 \hat{x}y} \right\} ds(y), \quad (4.37)$$

für alle $\hat{x} \in \Omega$ mit $\rho = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{8\pi k_1}}$.

Da v_h^i und $e^{-ik_1 \hat{x}y}$ beide ganze Lösungen der Helmholtzgleichung sind, gilt nach dem zweiten Greenschen Satz: $\int_{\partial D} \left\{ v_h^i(y) \frac{\partial e^{-ik_1 \hat{x}y}}{\partial \nu} - \frac{\partial v_h^i(y)}{\partial \nu} e^{-ik_1 \hat{x}y} \right\} ds(y) = 0$. Deshalb kann in der Darstellungsformel für das Fernfeld (4.37) v^s durch das gesamte Feld $v_{h,1} = v^s + v_h^i$ ersetzt werden.

ω ist als Eigenwert zu \mathcal{F} mit Eigenfunktion h vorausgesetzt; also:

$$\begin{aligned} \omega h &= v_{h,\infty}(\hat{x}) = \rho \int_{\partial D} \left\{ v_{h,1}(y) \frac{\partial e^{-ik_1 \hat{x}y}}{\partial \nu} - \frac{\partial v_{h,1}(y)}{\partial \nu} e^{-ik_1 \hat{x}y} \right\} ds(y) \\ &= \rho \int_{\partial D} \left\{ \frac{\mu_2}{\mu_1} \left[\frac{\partial e^{-ik_1 \hat{x}y}}{\partial \nu} - \lambda(y) e^{-ik_1 \hat{x}y} \right] v_{h,2}(y) - \frac{\partial v_{h,2}(y)}{\partial \nu} e^{-ik_1 \hat{x}y} \right\} ds(y) \\ &= -\rho \int_{\partial D} \lambda(y) e^{-ik_1 \hat{x}y} v_{h,2}(y) ds(y) \\ &\quad + \rho \int_D \left(-\frac{\mu_2}{\mu_1} k_1^2 + k_2^2 \right) e^{-ik_1 \hat{x}y} v_{h,2}(y) dy + \rho \int_D \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} - 1 \right) \nabla e^{-ik_1 \hat{x}y} \nabla v_{h,2}(y) dy. \end{aligned}$$

Wir nehmen nun das innere Produkt mit h und vertauschen die Integrationsreihenfolge.

$$\begin{aligned} \omega \|h\|_{L^2}^2 &= -\rho \int_{\partial D} \lambda(y) \overline{v_h^i(y)} v_{h,2}(y) ds(y) + \rho \int_D \left(-\frac{\mu_2}{\mu_1} k_1^2 + k_2^2 \right) \overline{v_h^i(y)} v_{h,2}(y) dy \\ &\quad + \rho \int_D \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} - 1 \right) \nabla \overline{v_h^i(y)} \nabla v_{h,2}(y) dy \end{aligned}$$

Wir wenden die Schwarzsche Ungleichung für endliche Summen und für Integrale an, schätzen auf Grund der Definition der Herglotzwellenfunktionen $|v_h^i|^2 \leq 2\pi \|h\|^2$ und $|\nabla v_h^i|^2 \leq 2\pi k_1^2 \|h\|^2$ ab, teilen durch $\|h\|^2$ und nutzen dann das Ergebnis aus Satz 4.2.1

$$\begin{aligned} |\omega|^2 \|h\|_{L^2}^2 &\leq 2\pi |\rho|^2 \left\{ \int_{\partial D} \frac{|\lambda(y)|^2}{\operatorname{Im} \overline{\lambda(y)}} ds(y) + |D| \left[\frac{\left| -\frac{\mu_2}{\mu_1} k_1^2 + k_2^2 \right|^2}{\operatorname{Im} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} k_2^2 \right)} + \frac{k_1^2 \left| \frac{\mu_2}{\mu_1} - 1 \right|^2}{\operatorname{Im} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right)} \right] \right\} \\ &\quad \cdot \left\{ \left| \frac{\mu_2}{\mu_1} \right|^2 \int_{\partial D} \operatorname{Im}(\overline{\lambda}) |v_{h,2}|^2 + \operatorname{Im} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} k_2^2 \right) \int_D |v_{h,2}|^2 + \operatorname{Im} \left(\frac{\mu_2}{\mu_1} \right) \int_D |\nabla v_{h,2}|^2 \right\} \\ &= \frac{\|h\|_{L^2}^2}{4k_1} [C + |D|(A + B)] \left\{ \sqrt{8\pi k_1} \operatorname{Im} \left(e^{-i\frac{\pi}{4}} \omega \right) - k_1 |\omega|^2 \right\}. \end{aligned}$$

Erneute Division durch $\|h\|^2$ liefert das gewünschte Ergebnis. \square

Bemerkung 4.2.4 1. Im allgemeinen können wir für den Fall, daß einer der Imaginärteile rein reell ist, keine bessere Abschätzung erhalten, als die allgemeine aus Korollar 4.2.2. Unter der Voraussetzung $\mu_1 = \mu_2$ erhalten wir jedoch die schärfere Abschätzung:

$$\frac{4k_1 |\omega|^2}{|D|A + C} \leq \sqrt{8\pi k_1} \operatorname{Im} \left(e^{-i\frac{\pi}{4}} \omega \right) - k_1 |\omega|^2.$$

2. Wenn für die Funktion λ gilt, daß sie immer dann identisch Null ist, wenn ihr Imaginärteil identisch Null ist, dann reicht die Bedingung $\operatorname{Im} \overline{\lambda(y)} \geq 0$ für alle $y \in \partial D$ für den Beweis des vorangegangenen Satzes aus.

Unter $\int_{\partial D} \frac{|\lambda(y)|^2}{\operatorname{Im} \overline{\lambda(y)}} ds(y)$ verstehen wir dann das Integral über die Menge

$\partial D_{\text{pos}} := \{y \in \partial D : \lambda(y) > 0\}$. Im allgemeinen gilt: Existiert $C = \int_{\partial D} \frac{|\lambda(y)|^2}{\operatorname{Im} \overline{\lambda(y)}} ds(y) < \infty$, so bleibt die Aussage des Satzes 4.2.3 gültig.

3. Ist $\lambda \equiv 0$ (das Transmissionsproblem), so erhalten wir die Abschätzung

$$\frac{4k_1 |\omega|^2}{|D|(A + B)} \leq \sqrt{8\pi k_1} \operatorname{Im} \left(e^{-i\frac{\pi}{4}} \omega \right) - k_1 |\omega|^2.$$

4. Wir können nun die Frage stellen, in wie weit wir aus der Kenntnis der Parameter und der Eigenwerte auf den Streukörper zurückschließen können. Im Prinzip ist dies mit der Abschätzung (4.36) möglich.

Allerdings haben wir eventuell das Problem, daß sowohl die Länge der Randkurve, als auch die Größe des Gebietes auftreten. Wir erhalten eine obere Abschätzung für das Verhältnis von Fläche zu Randkurve durch die Isoperimetrische Ungleichung. Sie besagt, daß das Verhältnis von Fläche zu Umfang nicht größer werden kann als beim Kreis, wo $\frac{|D|}{|\partial D|} = \frac{d}{4}$ beträgt. Dabei ist $d := \max_{x,y \in \partial D} |x - y|$.

5. Setzen wir wie im Falle des Transmissionsproblems $\lambda \equiv 0$, so entfällt der Randintegrationsterm. Wir erhalten dann eine Abschätzung für die Größe des Streukörpers aus der Lage der Eigenwerte. Numerische Tests belegen, daß zumindest eine richtige Größenordnung angegeben werden kann. Z.B. für $k_1 = \mu_1 = 3$ und $k_2 = \mu_2 = 3 + 2i$ mit $\lambda(z) = 0$ ergeben sich folgende Ergebnisse:

Randkurve	r_{exp}	$ D _{theo}$	$ D _{real}$
Ellipse	0.75	3.9	3.64
Drachen	0.8	2.11	4.6

Dabei bezeichnet $|D|_{theo}$ die Größe des Streukörpers, die sich durch Auflösung der Formel für den Radius nach $|D|$ aus Satz 4.2.3 berechnen läßt. Wir setzen für den Radius r_{exp} ein, den kleinstmöglichen Radius, der sich aus der Lage der berechneten Eigenwerte ergibt.

4.3 Ein Beispiel: Der Einheitskreis

Wir betrachten nun ein explizites Beispiel für die Eigenwerte des Fernfeldoperators für das konduktive Randwertproblem (KP). Als streuendes Gebiet betrachten wir den Einheitskreis $B_1 := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| < 1\}$. Wir benutzen die Polarkoordinatendarstellung:

$$x = |x|(\cos \theta, \sin \theta)$$

$$d = (\cos \theta_0, \sin \theta_0).$$

Aus der Jacobi-Anger Darstellung für die ebene Welle (siehe 2.7) erhalten wir:

$$u^i(x; d) = e^{ik_1 x d} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n J_n(k_i |x|) e^{in(\theta - \theta_0)} \quad (4.38)$$

Im \mathbb{R}^2 gibt es zwei linear unabhängige, harmonische Kugelfunktionen der Ordnung n , die durch $e^{\pm in\theta}$ dargestellt werden können.

Auf Grund der Vollständigkeit dieses Orthonormalsystems (siehe Theorem 2.7 in [4], übertragen auf den zweidimensionalen Fall) und der Eigenschaft von $H_n^{(1)}(kr)e^{\pm in\varphi}$ ausstrahlende Lösung zur Helmholtzgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ im \mathbb{R}^2 zu sein (siehe Theorem 2.9 aus [4]) kann jede ausstrahlende Lösung dargestellt werden als:

$$u^s(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{a}_n H_n^{(1)}(k|x|) e^{in\theta}.$$

Durch $a_n = \hat{a}_n i^{-n} e^{in\theta_0}$ können wir das gesamte Feld $u_1 = u^i + u_1^s$ im Außenraum $\mathbb{R}^2 \setminus B_1$ bei einfallender Welle $u^i = e^{ik_1 x d}$ schreiben als

$$u_1(x; d) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n \left\{ J_n(k_1|x|) + a_n H_n^{(1)}(k_1|x|) \right\} e^{in(\theta-\theta_0)}. \quad (4.39)$$

Für eine Lösung der Helmholtzgleichung im Innern des Kreises gilt, da die $J_n(kr)e^{\pm in\varphi}$ Lösungen der Helmholtzgleichung im Innenraum darstellen, analog zu den Überlegungen im Außenraum die Darstellung

$$u_2(x; d) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n b_n J_n(k_2|x|) e^{in(\theta-\theta_0)} \text{ gelten.}$$

Damit (u_1, u_2) eine Lösung des konduktiven Randwertproblems (KP) für den Einheitskreis darstellt, muß auf dem Rand Ω

$$\mu_1 u_1^s - \mu_2 u_2 = -\mu_1 u^i \quad \text{und} \quad \frac{\partial u_1^s}{\partial \nu} - \frac{\partial u_2}{\partial \nu} - \lambda u_1 = -\frac{\partial u^i}{\partial \nu} - \lambda u^i \quad \text{gelten.}$$

Auf $\partial D = \Omega$ ist $\frac{\partial}{\partial \nu} = \frac{\partial}{\partial r}$. Die Darstellungen von u_1 und u_2 und ihrer Ableitungen konvergieren auf Ω gleichmäßig und sind bezüglich $\theta_0 (= d)$ gleichmäßig beschränkt. Daher dürfen wir gliedweise differenzieren und erhalten als Randbedingungen

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n \left\{ \mu_1 a_n H_n^{(1)}(k_1) + \mu_1 J_n(k_1) - \mu_2 b_n J_n(k_2) \right\} e^{in(\theta-\theta_0)} = 0 \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n \left\{ k_1 a_n H_n^{(1)'}(k_1) + k_1 J_n'(k_1) - k_2 b_n J_n'(k_2) \right\} e^{in(\theta-\theta_0)} \\ & = \lambda(\theta_0) \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n \left\{ a_n H_n^{(1)}(k_1) + J_n(k_1) \right\} e^{in(\theta-\theta_0)}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Da sich diese Gleichungen so allgemein nicht auflösen lassen, wählen wir $\lambda(\theta_0) \equiv \lambda \in \mathbb{C}$ und erhalten die Koeffizienten a_n und b_n für $n \geq 0$ als:

$$a_n = \frac{-\mu_1 k_2 J_n(k_1) J_n'(k_2) + \mu_2 k_1 J_n'(k_1) J_n(k_2) - \mu_2 \lambda J_n(k_1) J_n(k_2)}{\mu_1 k_2 H_n^{(1)}(k_1) J_n'(k_2) - \mu_2 k_1 H_n^{(1)'}(k_1) J_n(k_2) + \mu_2 \lambda H_n^{(1)}(k_1) J_n(k_2)} \quad (4.42)$$

$$b_n = \frac{\mu_1 k_1 \{ J_n(k_1) H_n^{(1)'}(k_1) - J_n'(k_1) H_n^{(1)}(k_1) \}}{\mu_2 k_1 H_n^{(1)'}(k_1) J_n(k_2) - \mu_1 k_2 H_n^{(1)}(k_1) J_n'(k_2) - \mu_2 \lambda J_n(k_2) H_n^{(1)}(k_1)} \quad (4.43)$$

Für alle Hankel- und Besselfunktionen gilt die Beziehung $f_{-|n|} = (-1)^{|n|} f_{|n|}$, und wir erhalten wir $a_n = a_{-n}$ und $b_n = b_{-n}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Betrachten wir nun das asymptotische Verhalten der Hankelfunktionen (2.4) und die Definition des Fernfeldes (2.18) und beachten die Beschränktheit der einfallenden Welle $|e^{ik_1 x d}| = 1$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$, so erhalten wir:

$$u_\infty(\hat{x}; d) = \sqrt{\frac{2}{\pi k_1}} e^{-\frac{i\pi}{4}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in(\theta-\theta_0)}. \quad (4.44)$$

Für eine beliebige Funktion $g \in L^2(\Omega)$ gilt:

$$g(d) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n g_n(d) \quad \text{mit} \quad g_n(d) := e^{in\theta_0}.$$

Die Anwendung des Fernfeldoperators \mathcal{F} auf eine Funktion g läßt sich also schreiben als

$$(\mathcal{F}g)(\hat{x}) = \sqrt{\frac{2}{\pi k_1}} e^{-\frac{i\pi}{4}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_n a_m \int_{\Omega} \left\{ e^{in\theta_0} e^{im(\theta-\theta_0)} \right\} d\theta_0.$$

Man kann \mathcal{F} als eine Konvolution der Funktionen g und u_∞ auffassen; $(\mathcal{F}g) = u_\infty * g$.

Wegen der Orthogonalität der g_n gilt:

$$(\mathcal{F}g_n)(\hat{x}) = a_n e^{-\frac{i\pi}{4}} \sqrt{\frac{8\pi}{k_1}} g_n(\hat{x}).$$

Damit sind die g_n Eigenfunktionen des Fernfeldoperators zum konduktiven Randwertproblem mit den Eigenwerten

$$\omega_n = \sqrt{\frac{8\pi}{k_1}} e^{-\frac{i\pi}{4}} \frac{-\mu_1 k_2 J_n(k_1) J_n'(k_2) + \mu_2 k_1 J_n'(k_1) J_n(k_2) - \mu_2 \lambda J_n(k_1) J_n(k_2)}{\mu_1 k_2 H_n^{(1)}(k_1) J_n'(k_2) - \mu_2 k_1 H_n^{(1)'}(k_1) J_n(k_2) + \mu_2 \lambda H_n^{(1)}(k_1) J_n(k_2)}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (4.45)$$

Numerische Berechnungen zeigen, daß diese Eigenwerte in den in Satz 4.2.3 angegebenen Kreisen liegen. Wir beginnen mit einem Test für das Transmissionsproblem ($\lambda \equiv 0$). Die Eigenwerte ω_n werden gemäß der obigen Formel, der Radius r und Mittelpunkt M des Kreises gemäß Bemerkung 4.2.4, 2. berechnet.

Bsp. 1		$\omega_0 = (-1.60608, -0.13974)$	$dist(M, \omega_0) = 1.25331$
		$\omega_1 = (-2.08233, 1.26058)$	$dist(M, \omega_1) = 1.25331$
		$\omega_2 = (-1.65833, -0.101022)$	$dist(M, \omega_2) = 1.25331$
$k_1 = 4$	$M =$	$\omega_3 = (-0.41338, -0.274468)$	$dist(M, \omega_3) = 1.25331$
$k_2 = 3$	$0.886(-1 + i)$	$\omega_4 = (0.023486, 0.0241256)$	$dist(M, \omega_4) = 1.25331$
$\mu_1 = 2$		$\omega_5 = (0.0381734, 0.0398935)$	$dist(M, \omega_5) = 1.25331$
$\mu_2 = 3$	$r = 1.25331$	$\omega_6 = (0.0093929, 0.00949352)$	$dist(M, \omega_6) = 1.25331$
		$\omega_7 = (0.00124557, 0.00124732)$	$dist(M, \omega_7) = 1.25331$
		$\omega_8 = (0.000110542, 0.000110556)$	$dist(M, \omega_8) = 1.25331$
		$\omega_9 = (7.25618e - 06, 7.25624e - 06)$	$dist(M, \omega_9) = 1.25331$

Da alle Parameter rein reell gewählt wurden, liegen die Eigenwerte sämtlich auf dem Kreisrand, wie nach Korollar 4.1.11 zu erwarten war.

Wir testen die Aussagen für $\lambda \neq 0$ numerisch für zwei Beispiele. Dazu wählen wir in Beispiel 2 die Parameter μ_i und k_i wie in dem Beispiel für das Transmissionsproblem. Die Impedanzfunktion λ wählen wir zuerst ebenfalls reell und in Beispiel 3 mit negativem Imaginärteil. Der Radius und Mittelpunkt des Kreises wird nach Korollar 4.2.2 und Satz 4.2.3 bestimmt.

Bsp. 2		$\omega_0 = (-2.08482, 0.519923)$	$dist(M, \omega_0) = 1.25331$
		$\omega_1 = (-0.644095, 2.11593)$	$dist(M, \omega_1) = 1.25331$
		$\omega_2 = (-2.07572, 1.28106)$	$dist(M, \omega_2) = 1.25331$
$k_1 = 4$	$M =$	$\omega_3 = (-1.48503, -0.214789)$	$dist(M, \omega_3) = 1.25331$
$k_2 = 3$	$0.886(-1 + i)$	$\omega_4 = (-0.456292, -0.291038)$	$dist(M, \omega_4) = 1.25331$
$\mu_1 = 2$		$\omega_5 = (-0.0842237, -0.0768863)$	$dist(M, \omega_5) = 1.25331$
$\mu_2 = 3$	$r = 1.25331$	$\omega_6 = (-0.0100013, -0.00988972)$	$dist(M, \omega_6) = 1.25331$
$\lambda \equiv 3$		$\omega_7 = (-0.0007691, -0.0007685)$	$dist(M, \omega_7) = 1.25331$
		$\omega_8 = (-3.907e - 05, -3.90683e - 05)$	$dist(M, \omega_8) = 1.25331$
		$\omega_9 = (-1.19242e - 06, -1.19242e - 06)$	$dist(M, \omega_9) = 1.25331$

Wir sehen, daß gemäß der Aussage aus Korollar 4.2.2 alle Eigenwerte auf dem Kreisrand liegen.

In Beispiel 3 können wir die Aussagen von Satz 4.2.3 und den anschließenden Bemerkungen nachvollziehen. Die Eigenwerte liegen innerhalb der angegebenen Kreise.

Bsp. 3		$\omega_0 = (-0.507953, 2.05599)$	$dist(M, \omega_0) = 1.09667$
		$\omega_1 = (-2.30943, 0.908517)$	$dist(M, \omega_1) = 1.1232$
		$\omega_2 = (-0.946016, -0.0791761)$	$dist(M, \omega_2) = 1.3451$
$k_1 = 2$	$M =$	$\omega_3 = (-0.164532, 0.0120509)$	$dist(M, \omega_3) = 1.62471$
$k_2 = 3 + i$	$1.234(-1 + i)$	$\omega_4 = (-0.0121921, 0.00698908)$	$dist(M, \omega_4) = 1.73243$
$\mu_1 = 0.5$		$\omega_5 = (-0.000450577, 0.000606243)$	$dist(M, \omega_5) = 1.74524$
$\mu_2 = 3 + i$	$r = 1.74599$	$\omega_6 = (-9.59073e - 06, 2.68186e - 05)$	$dist(M, \omega_6) = 1.74596$
$\lambda \equiv 3 - 2i$		$\omega_7 = (-1.09487e - 07, 7.63359e - 07)$	$dist(M, \omega_7) = 1.74599$
		$\omega_8 = (-5.3358e - 11, 1.5438e - 08)$	$dist(M, \omega_8) = 1.74599$
		$\omega_9 = (2.29425e - 11, 2.3571e - 10)$	$dist(M, \omega_9) = 1.74599$

Aus Formel (4.45) sehen eine weitere wichtige Tatsache:

Bemerkung 4.3.1 Die Eigenwerte für den Einheitskreis hängen stetig von allen Parametern ab, die das konduktive Randwertproblem beschreiben. Wir erwarten, daß diese Aussage auch für jede andere Randkurve gültig ist.

Kapitel 5

Numerische Behandlung

Um die Eigenwerte des Fernfeldoperators \mathcal{F} numerisch berechnen zu können, müssen wir das Problem durch ein endlichdimensionales approximieren. Zu diesem Zweck interpolieren wir mit äquidistanten Stützstellen und integrieren dann das Interpolationspolynom exakt. Als Lösungen betrachten wir wiederum nicht Funktionen, sondern nur deren Werte an den Stützstellen. So erhalten wir als Approximation an den Fernfeldoperator eine quadratische Matrix, deren Eigenwerte sich mit dem QR-Verfahren mit Shift-Strategie berechnen lassen.

5.1 Trigonometrische Interpolation mit äquidistanten Stützstellen

In diesem Abschnitt betrachten wir einige allgemeine Eigenschaften der trigonometrischen Interpolation mit äquidistanten Stützstellen sowie die Konsequenzen, die sich daraus für die resultierenden Quadraturformeln ergeben.

Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir äquidistante Stützstellen $t_j^{(n)}$ auf dem Intervall $[0, 2\pi[$ durch

$$t_j^{(n)} = \frac{j\pi}{n}, \quad j = 0, \dots, 2n - 1.$$

Nun betrachten wir folgendes Interpolationsproblem:

Zu vorgegebenen Funktionswerten $f_0, \dots, f_{2n-1} \in \mathbb{C}$ ist eine Funktion v der Form

$$v(t) = \sum_{m=0}^n a_m \cos mt + \sum_{m=1}^{n-1} b_m \sin mt$$

mit Koeffizienten $a_m, b_m \in \mathbb{C}$ so zu bestimmen, daß $v(t_j^{(n)}) = f_j$ für alle $j = 0, \dots, 2n - 1$. Dieses Problem hat für alle Koeffiziententupel $(f_j)_{j=0}^{2n-1} \in \mathbb{C}^{2n}$ in dem $2n$ -dimensionalen

Approximationsraum

$$T_n := \left\{ w(t) = \sum_{m=0}^n a_m \cos mt + \sum_{m=1}^{n-1} b_m \sin mt; a_m, b_m \in \mathbb{C} \right\}$$

eine eindeutige Lösung. Die zugehörige Lagrange-Basis ist

$$\begin{aligned} L_j^{(n)}(t) &= \frac{1}{2n} \left\{ 1 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \cos k(t - t_j^{(n)}) + \cos n(t - t_j^{(n)}) \right\} \\ &= \frac{1}{2n} \sin n(t - t_j^{(n)}) \cot \frac{n(t - t_j^{(n)})}{2}, \text{ für } t \neq t_j^{(n)} \end{aligned} \quad (5.1)$$

mit $L_j^{(n)}(t_i^{(n)}) = \delta_{ij}$ für $j = 0, \dots, 2n-1$, denn $L_j^{(n)} \in T_n$, wie man mittels trigonometrischer Identitäten leicht einsieht. Damit ist die Interpolationsfunktion gegeben durch $v(t) = \sum_{j=0}^{2n-1} f_j L_j^{(n)}(t)$.

Der trigonometrische Interpolationsoperator $P_n : C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow T_n$ ordnet jedem $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ das eindeutig bestimmte $P_n f \in T_n$ zu, das die Bedingung $P_n f(t_j^{(n)}) = f(t_j^{(n)})$ erfüllt. Eine Darstellung ist mit Hilfe der Lagrange-Basis möglich:

$$(P_n f)(t) = \sum_{j=0}^{2n-1} f(t_j^{(n)}) L_j^{(n)}(t).$$

Damit können wir gemäß [11] den Interpolationsfehler abschätzen.

Satz 5.1.1 Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine analytische, 2π -periodische Funktion, die sich in ein Gebiet $\mathbb{R} \times (-s, s) \subset \mathbb{C}$, mit $s > 0$, fortsetzen läßt.

Dann gilt die Darstellungsformel

$$f(t) - P_n f(t) = \frac{1}{2\pi} \sin nt \operatorname{Re} \left\{ \int_{i\sigma}^{i\sigma+2\pi} \frac{i \cot \frac{\tau-t}{2}}{\sin n\tau} f(\tau) d\tau \right\}$$

mit $0 < \sigma < s$.

Hieraus folgt: $\|f^{(p)} - (P_n f)^{(p)}\|_\infty \leq C e^{-n\sigma}$, $n \in \mathbb{N}$ für $p = 0, 1, 2$, mit einer nur von f abhängigen Konstanten C .

Wir betrachten Näherungen für ein (gewichtetes) Integral einer Funktion $f \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. f wird durch sein trigonometrisches Interpolationspolynom $P_n f$ ersetzt und dann exakt integriert. Da wir stetige Funktionen und Funktionen mit logarithmischen Singularitäten behandeln wollen, benötigen wir folgende Approximationen:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(\tau) d\tau &\approx \int_0^{2\pi} (P_n f)(\tau) d\tau \\ \int_0^{2\pi} \ln \left(4 \sin^2 \frac{t-\tau}{2} \right) f(\tau) d\tau &\approx \int_0^{2\pi} \ln \left(4 \sin^2 \frac{t-\tau}{2} \right) (P_n f)(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Es gilt $\int_0^{2\pi} L_j^{(n)}(\tau) d\tau = \frac{\pi}{n}$ und damit $\int_0^{2\pi} (P_n f)(\tau) d\tau = \frac{\pi}{n} \sum_{j=0}^{2n-1} f(t_j^{(n)})$, was gerade der Trapezregel für periodische Funktionen entspricht.

Weiterhin errechnen wir

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left(4 \sin^2 \frac{t-\tau}{2} \right) e^{im\tau} d\tau = \begin{cases} 0 & , m = 0 \\ -\frac{1}{m} e^{imt} & , \text{sonst.} \end{cases}$$

Beachten wir nun die Darstellung der Lagrange-Basis (5.1), so gilt

$$\int_0^{2\pi} \ln \left(4 \sin^2 \frac{t-\tau}{2} \right) (P_n f)(\tau) d\tau = \sum_{j=0}^{2n-1} R_j^{(n)}(t) f(t_j^{(n)})$$

mit den Quadraturkoeffizienten

$$R_j^{(n)}(t) := -\frac{2\pi}{n} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m} \cos m(t - t_j^{(n)}) - \frac{\pi}{n^2} \cos n(t - t_j^{(n)}).$$

Für stetige und 2π -periodische Funktionen f definieren wir die folgenden Quadraturformeln:

$$(Q_n f) = \frac{\pi}{n} \sum_{j=0}^{2n-1} f(t_j^{(n)}) \quad (5.2)$$

$$\left(Q_n f \ln \left(4 \sin^2 \frac{t-\cdot}{2} \right) \right) = \sum_{j=0}^{2n-1} R_j^{(n)}(t) f(t_j^{(n)}). \quad (5.3)$$

Wir wissen nach dem Satz von Banach-Steinhaus, daß die Quadraturformeln genau dann konvergieren, wenn die L^1 -Summe der Quadraturgewichte für alle $n \in \mathbb{N}$ gleichmäßig beschränkt ist, und die Quadraturformeln auf einer dichten Teilmenge konvergieren. Diese Bedingungen sind erfüllt:

- die Summe der Quadraturgewichte in (5.2) ist für alle n kleiner gleich 2π , die in (5.3) ist gleichmäßig beschränkt (siehe dazu Überlegungen in [11], S. 178), woraus die gleichmäßige Beschränktheit der Quadraturformeln folgt;
- die n -te Quadraturformel angewendet auf $g \in T_n$ ist nach Konstruktion identisch mit dem zu approximierenden Integral;
- es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{closure} \{T_n\} = C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$.

Daher konvergieren die angegebenen Quadraturformeln für alle stetigen, 2π -periodischen Funktionen f .

5.2 Numerische Behandlung der Integraloperatoren

Wir wollen nun die zur Lösung der konduktiven Randwertprobleme benötigten Integraloperatoren diskretisieren. Dazu ist es wichtig, zuerst das singuläre Verhalten der Kernfunktionen zu betrachten. In parametrisierter Form stellen sich die Integraloperatoren S_j , K_j , K'_j und $T_2 - T_1$ folgendermaßen dar

$$\begin{aligned} (S_j\varphi)(x(t)) &= \int_0^{2\pi} \frac{i}{2} H_0^{(1)}(k_j r(t, \tau)) |x'(\tau)| \varphi(x(\tau)) d\tau \\ (K_j\varphi)(x(t)) &= \int_0^{2\pi} \frac{ik_j}{2} r(t, \tau) H_1^{(1)}(k_j r(t, \tau)) \frac{\langle \nu(x(\tau)), (x(t) - x(\tau)) \rangle}{r^2(t, \tau)} |x'(\tau)| \varphi(x(\tau)) d\tau \\ (K'_j\varphi)(x(t)) &= \int_0^{2\pi} \frac{-ik_j}{2} r(t, \tau) H_1^{(1)}(k_j r(t, \tau)) \frac{\langle \nu(x(t)), (x(t) - x(\tau)) \rangle}{r^2(t, \tau)} |x'(\tau)| \varphi(x(\tau)) d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ((T_2 - T_1)\varphi)(x(t)) &= \\ & \int_0^{2\pi} \frac{i}{2} \left\{ \frac{\langle \nu(x(\tau)), \nu(x(t)) \rangle}{r^2(t, \tau)} \left[k_2 r(t, \tau) H_1^{(1)}(k_2 r(t, \tau)) - k_1 r(t, \tau) H_1^{(1)}(k_1 r(t, \tau)) \right] \right. \\ & - \frac{\langle \nu(x(t)), (x(t) - x(\tau)) \rangle}{r^2(t, \tau)} \cdot \frac{\langle \nu(x(\tau)), (x(\tau) - x(t)) \rangle}{r^2(t, \tau)} \\ & \cdot \left[k_2^2 r^2(t, \tau) H_0^{(1)}(k_2 r(t, \tau)) - k_1^2 r^2(t, \tau) H_0^{(1)}(k_1 r(t, \tau)) \right. \\ & \left. \left. - 2k_2 r(t, \tau) H_1^{(1)}(k_2 r(t, \tau)) + 2k_1 r(t, \tau) H_1^{(1)}(k_1 r(t, \tau)) \right] \right\} |x'(\tau)| \varphi(x(\tau)) d\tau \end{aligned}$$

Dabei ist $x(t)$, $t \in [0, 2\pi]$ eine 2π -periodische Parametrisierung der Randkurve ∂D und $r(t, \tau) = \|x(t) - x(\tau)\|$. Wir haben bei der Darstellung von $T_2 - T_1$ ausgenutzt, daß $\frac{\partial}{\partial z} H_1^{(1)}(z) = H_0^{(1)}(z) - \frac{1}{z} H_1^{(1)}(z)$ ist. Die Funktion $\frac{\langle \nu(x(t)), (x(t) - x(\tau)) \rangle}{r^2(t, \tau)}$ ist für $t \rightarrow \tau$ stetig fortsetzbar. Die Singularität des Ausdrucks $\frac{\langle \nu(x(\tau)), \nu(x(t)) \rangle}{r^2(t, \tau)}$ wird durch die nachfolgende Differenz im Limes $t \rightarrow \tau$ kompensiert.

Betrachtet man die Definitionen der Hankelfunktionen $H_n^{(1)}$, so sieht man leicht, daß sowohl $H_0^{(1)}(z)$ als auch $z H_1^{(1)}(z)$ für $|z| \rightarrow 0$ eine logarithmische Singularität aufweisen.

Damit der logarithmische Ausdruck von der speziellen Gestalt der Randkurve unabhängig wird, nutzen wir die Aufspaltung

$$\ln(r(t, \tau)) = \ln \left(\frac{r(t, \tau)}{2 \left| \sin \frac{(t-\tau)}{2} \right|} \right) + \frac{1}{2} \ln \left(4 \sin^2 \frac{(t-\tau)}{2} \right).$$

Der erste Anteil ist für $t \rightarrow \tau$ stetig fortsetzbar, der zweite Term ist unabhängig von der Randkurve und weist dasselbe Grenzwertverhalten für $t \rightarrow \tau$ auf.

Wir können die Kernfunktionen jedes Integraloperators in einen stetigen Anteil $A^{(1)}(t, \tau)$ und

einen Anteil mit logarithmischer Singularität $A^{(2)}(t, \tau)$ aufteilen, die sich nach dem vorhergehenden Abschnitt jeweils durch Quadraturformeln approximieren lassen. Wir interpolieren also mit äquidistanten Stützstellen und integrieren dann das Interpolationspolynom exakt. Als Approximation an den Operator

$$(A\varphi)(t) = \int_0^{2\pi} \left\{ A^{(1)}(t, \tau)\varphi(\tau) + A^{(2)}(t, \tau) \ln \left(4 \sin^2 \frac{t - \tau}{2} \right) \varphi(\tau) \right\} d\tau$$

erhalten wir

$$(A_n\varphi)(t) = \sum_{j=0}^{2n-1} \left(\frac{\pi}{n} A^{(1)}(t, t_j^{(n)}) + R_j^{(n)}(t) A^{(2)}(t, t_j^{(n)}) \right) \varphi(t_j^{(n)}) \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ausgehend von dem kombinierten Einfach- und Doppelschichtpotentialansatz suchen wir Lösungen der Gleichung $\varphi - A\varphi = f$, die wir durch

$$\varphi_n - A_n\varphi_n = f \tag{5.4}$$

approximieren wollen. Werten wir diesen Ausdruck nur an den Knotenstellen $t_j^{(n)}$ aus, so erhalten wir ein $2n \times 2n$ dimensionales, lineares Gleichungssystem für die Werte der Dichtefunktion an den Knotenstellen $\varphi_n(t_j^{(n)})$.

Durch $\varphi_n(t) := f(t) + \sum_{j=0}^{2n-1} \left(\frac{\pi}{n} A^{(1)}(t, t_j^{(n)}) + R_j^{(n)}(t) A^{(2)}(t, t_j^{(n)}) \right) \varphi_n(t_j^{(n)})$ erhalten wir aus den Lösungen des quadratischen Gleichungssystems wieder eine Lösung der Gleichung (5.4). Diese Vorgehensweise zur Lösung von Integralgleichungen wird das *Nyström-Verfahren* genannt und kann als eine Art „natürliche“ Interpolation aufgefaßt werden.

Beim Nyström-Verfahren ist die Folge der entstehenden Operatoren kollektiv kompakt. Wir erhalten eine Aussage über die Lösbarkeit und die Konvergenz der approximierenden Gleichungssysteme, jedoch in dem Raum $C(\partial D) \times C(\partial D)$ ausgestattet mit der Supremumsnorm keine Normkonvergenz der Operatorfolge.

Definition 5.2.1 Eine Menge \mathcal{K} von beschränkten, linearen Operatoren eines Banachraumes X in sich selbst heißt kollektiv kompakt, wenn die Menge $\{Kx : K \in \mathcal{K}, \|x\| \leq 1\}$ relativ kompakt ist.

Satz 5.2.2 Wenn die Quadraturformeln (Q_n) konvergent sind, und für die ortsabhängigen Quadraturgewichte $R_j^{(n)}(t)$ zusätzlich $\lim_{t \rightarrow \tau} \left(\sup_{n \in \mathbb{N}} \sum_{j=1}^n \left| R_j^{(n)}(t) - R_j^{(n)}(\tau) \right| \right) = 0$ gleichmäßig für alle $t \in [0, 2\pi]$ gilt (was nach Überlegungen aus [11], S.177ff. erfüllt ist), so ist die Operatorfolge $\{A_n\}$ mit stetigem und schwach singulärem Kern kollektiv kompakt und punktweise konvergent, d.h. $A_n\varphi \rightarrow A\varphi$ für $n \rightarrow \infty$. Es liegt keine Normkonvergenz vor.

Beweis: Mit den Sätzen 12.8 und 12.12 aus [11].

Mit dem nächsten Satz wollen wir aus der kollektiven Kompaktheit der Operatorfolge auf die Lösbarkeit des Gleichungssystems und die Konvergenz der Lösungen schließen.

Satz 5.2.3 Sei $\{A_n\}$ eine kollektiv kompakte Operatorfolge, sei A kompakt und A_n konvergiere punktweise gegen A . Ist $(I - A)$ invertierbar, so ist auch $(I - A_n)$ invertierbar, wenn $\|(I - A)^{-1}(A_n - A)A_n\| < 1$ gilt. Die Inversen sind gleichmäßig beschränkt durch

$$\|(I - A_n)^{-1}\| \leq \frac{1 + \|(I - A)^{-1}A_n\|}{1 - \|(I - A)^{-1}(A_n - A)A_n\|}$$

Für Lösungen der Gleichungen $\varphi - A\varphi = f$ und $\varphi_n - A_n\varphi_n = f$ gilt

$$\|\varphi_n - \varphi\| \leq \|(I - A)^{-1}\| \frac{\|(A_n - A)f\| + \|(A_n - A)A_n\varphi\|}{1 - \|(I - A)^{-1}(A_n - A)A_n\|}$$

Beweis: Mit Satz 10.9 aus [11].

Wie in Kapitel 3 gesehen, sind die von uns betrachteten Integralgleichungssysteme injektiv. Wir wissen damit aus der Riesz-Theorie, daß die Inverse existiert. Mit Hilfe dieses Satzes können wir sicherstellen, daß für große n das Gleichungssystem, das sich durch Auswertung von (5.4) an den Knotenstellen $t_i^{(n)}$ ergibt, eindeutig lösbar ist, und die Lösungen, die sich wie oben aus dem linearen Gleichungssystem ergeben, gleichmäßig gegen die wahre Lösung konvergieren.

5.3 Approximationen an den Fernfeldoperator und seine Eigenwerte

Um die Eigenwerte des Fernfeldoperators numerisch zu approximieren, ersetzen wir den Operator \mathcal{F} durch einen endlichdimensionalen Operator $\mathcal{F}_m : \mathbb{C}^{2m} \rightarrow \mathbb{C}^{2m}$. Dabei ersetzen wir die Integration durch Interpolation mit $2m$ äquidistanten Stützstellen¹ $t_j^{(m)}$ und integrieren das Interpolationspolynom exakt. Da die Kernfunktion u_∞ stetig ist, erhalten wir die Trapezregel für 2π -periodische Funktionen. Nun werten wir diesen Ausdruck nur an den Stützstellen $t_i^{(m)}$ aus und erhalten eine Matrix mit den Einträgen $\frac{\pi}{m}u_\infty(t_i^{(m)}, t_j^{(m)})$, die auf den Vektor $g_m \in \mathbb{C}^{2m}$ mit $(g_m)_i = g(t_i^{(m)})$ wirkt.

Die $\{\mathcal{F}_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ stellen eine kollektiv kompakte Operatorfolge dar. Weiterhin gilt nach Satz 5.1.1 für $(\mathcal{F}g)_m \in T_m$ mit $(\mathcal{F}g)_m(t_i^{(m)}) = (\mathcal{F}_m g_m)_i$:

$$\|(\mathcal{F}g)_m - \mathcal{F}g\|_\infty \rightarrow 0, \quad \text{für } m \rightarrow \infty.$$

Als Näherungen an die Eigenwerte des Fernfeldoperators werden die Eigenwerte der Matrix \mathcal{F}_m berechnet. Diese Vorgehensweise rechtfertigen wir mit einem Satz von Anselone [1] über die Approximation mit kollektiv kompakten Operatorfolgen.

¹Das entspricht $2m$ einfallenden Wellen.

Satz 5.3.1 Seien A und A_n beschränkte, lineare Operatoren eines Banachraumes X in sich. Die kollektiv kompakte Folge der $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiere punktweise gegen den kompakten Operator A .

Sei $\omega^{(n)} \in \sigma(A_n)$, und es gelte $\omega^{(n)} \rightarrow \omega \neq 0$. Dann gilt $\omega \in \sigma(A)$.

Ist $\{x_n\}$ eine beschränkte Folge in X und $x_n \in N(\omega^{(n)}I - A_n)$, dann gibt es Teilfolgen $\{A_{n_i}\}$, $\{x_{n_i}\}$ und $x \in X$, so daß $x_{n_i} \rightarrow x \in N(\omega I - A)$.

Beweis: Betrachten wir die Operatoren $K := \frac{A}{\omega}$ und $K_n := \frac{A_n}{\omega^{(n)}}$. Da $\omega^{(n)} \in \sigma(A_n)$ ist, existiert $(I - K_n)^{-1}$ nicht als beschränkter Operator. Das bedeutet, daß es eine Teilfolge x_{n_i} gibt, mit $(I - K_{n_i})x_{n_i} \rightarrow 0$ und $\|x_{n_i}\| = 1$. $\{K_n\}$ ist kollektiv kompakt, deshalb ist die Menge $\{K_{n_i}x : \|x\| \leq 1\}$ relativ folgenkompakt (was zu relativ kompakt äquivalent ist). Es gibt also eine Teilfolge $\{K_{n_{i_j}}\}$ und ein $x \in X$, so daß $K_{n_{i_j}}x_{n_{i_j}} \rightarrow x$. Die $x_{n_{i_j}}$ konvergieren ebenfalls gegen dieses x , denn $x_{n_{i_j}} = K_{n_{i_j}}x_{n_{i_j}} + (I - K_{n_{i_j}})x_{n_{i_j}} \rightarrow x$, $\|x\| = 1$. Wegen der punktweisen Konvergenz und der gleichmäßigen Beschränktheit der K_n und der Konvergenz der $x_{n_{i_j}}$ gilt

$$\|K_{n_{i_j}}x_{n_{i_j}} - Kx\| \leq \|K_{n_{i_j}}(x_{n_{i_j}} - x)\| + \|(K_{n_{i_j}} - K)x\| \rightarrow 0 \quad \text{für } n_{i_j} \rightarrow \infty.$$

Wir erhalten $(I - K)x = 0$, und damit $\omega \in \sigma(A)$ und $x \in N(\omega I - A)$. \square

Dieser Satz rechtfertigt also unsere Vorgehensweise zur Approximation der Eigenwerte des Fernfeldoperators. Wir definieren das $2m$ -Tupel aus den Eigenwerten von \mathcal{F}_m ,

$$\Lambda^{(m)} := (\omega_1^{(m)}, \omega_2^{(m)}, \dots, \omega_{2m}^{(m)}),$$

und die Folge der Eigenwerte von \mathcal{F} ,

$$\Lambda := (\omega_1, \omega_2, \dots).$$

Wir hatten nur solche Parameter für das konduktive Randwertproblem zugelassen, daß die Fernfelder vollständig sind, woraus $N(\mathcal{F}) = \{0\}$ folgt. Also sind auch alle Eigenwerte $|\omega_i| > 0$, und wir können aus obigem Satz insbesondere folgern

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \Lambda^{(m)} = \Lambda \quad \text{in dem Sinne, daß } \lim_{m \rightarrow \infty} \omega_j^{(m)} = \omega_j \text{ für alle } j \leq 2m.$$

Für die tatsächliche Berechnung müssen wir zusätzlich die Werte $u_\infty(t_i^{(n)}, t_j^{(n)})$ annähern, da uns die Fernfeldfunktion a priori nicht zur Verfügung steht. Die Approximation $u_{\infty, n}(\cdot, t_j^{(n)})$ berechnet man dabei aus den Approximationen an die Dichten, $\varphi_{n, j}$ und $\psi_{n, j}$. Diese ergeben sich als Lösungen aus dem Gleichungssystem

$$(E_\lambda + A_\lambda)_n \begin{pmatrix} \varphi_{n, j} \\ \psi_{n, j} \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} e^{ik_1 x^{(n)} d_j} \\ -ik_1 \langle d_j, \nu(x^{(n)}) \rangle e^{ik_1 x^{(n)} d_j} \end{pmatrix}, \quad \text{mit } x^{(n)} = \begin{pmatrix} x(t_0^{(n)}) \\ \dots \\ x(t_{2n-1}^{(n)}) \end{pmatrix}.$$

Dabei entsteht $(E_\lambda + A_\lambda)_n$ aus $(E_\lambda + A_\lambda)$ wie im vorigen Abschnitt erläutert durch Interpolation mit $2n$ äquidistanten Stützstellen. Wir benutzen die Aussage aus Satz 2.3.5 und approximieren die auftretenden Integraloperatoren mit stetigen Kernfunktionen wieder durch die Trapezregel und anschließende Auswertung an den $2m$ Knotenstellen $t_i^{(m)}$. So erhalten wir eine Approximation $\mathcal{F}_m^{(n)}$ an die Approximation \mathcal{F}_m durch $\mathcal{F}_m^{(n)} = \left(\frac{\pi}{m} u_{\infty,n}(t_i^{(m)}, t_j^{(m)})\right)$. Wieder gilt nach Satz 5.1.1: $\|u_{\infty,n} - u_\infty\| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Wir wissen aus der linearen Algebra, daß die Eigenwerte einer Matrix stetig von allen Einträgen abhängen. Benennen wir mit

$$\Lambda^{(m,n)} := \left(\omega_1^{(m,n)}, \omega_2^{(m,n)}, \dots, \omega_{2m}^{(m,n)}\right),$$

das $2m$ -Tupel aus den Eigenwerten von $\mathcal{F}_m^{(n)}$, so gilt also $\|\omega_j^{(m,n)} - \omega_j^{(m)}\| \rightarrow 0$ für $j \leq 2m$ und $n \rightarrow \infty$. Die $2m$ Eigenwerte der Matrix $\mathcal{F}_m^{(n)}$ konvergieren also für $m, n \rightarrow \infty$ gegen die $2m$ größten Eigenwerte des Fernfeldoperators.

5.4 Numerische Beispiele

Wie wir bereits aus der Kompaktheit des Operators \mathcal{F} wissen, stellt Λ eine Nullfolge dar. Allerdings zeigt sich numerisch², daß die Folge der Eigenwerte in der Regel so schnell gegen Null konvergiert, daß es genügt, nur die ersten Eigenwerte zu betrachten. Alle weiteren sind numerisch kaum von Null zu unterscheiden. Auf der anderen Seite zeigt sich, daß die Wahl einer großen Zahl von einfallenden Wellen zur Approximation des Fernfeldoperators die jeweiligen Eigenwerte genauer approximiert (siehe Satz 5.3.1). Deshalb ist es sinnvoll, zwar ein großes Gleichungssystem aufzustellen, aber höchstens die ersten zehn Eigenwerte in die Bewertung der Ergebnisse miteinzubeziehen.

Wir bezeichnen mit $STST$ die Anzahl der Stützstellen zur Berechnung des Fernfeldoperators. D.h. für jedes $0 \leq j < STST$ stellen wir ein Gleichungssystem auf mit einfallenden Wellen $e^{ik_1 x d_j}$ mit $d_j = \left(\cos \frac{2\pi j}{STST}, \sin \frac{2\pi j}{STST}\right)$. Mit AKP bezeichnen wir die Anzahl der Knotenpunkte, an denen die Dichtefunktionen $\varphi_{\frac{AKP}{2},j}$ und $\psi_{\frac{AKP}{2},j}$ berechnet werden. Diese Größen, sowie die Form des Streukörpers, sind jeweils unterhalb der Ergebnisgraphen angegeben. Auf den folgenden Seiten führen wir mehrere Testreihen durch. Damit die Ergebnisse vergleichbar sind, ist in allen Fällen ein Ausschnitt von $[-5, 1] \times [-1, 5]$ dargestellt. Für die Tests wurde stets $k_1 = \mu_1 = c_2$ und $k_2 = \mu_2 = c_1$ gewählt, soweit nicht ausdrücklich anders vermerkt.

²siehe dazu z.B. die Werte in dem Abschnitt „Ein Beispiel: Der Einheitskreis“

TEST 1

Wir beginnen damit, die Konvergenz der Eigenwerte, die sich aus der Fernfeldoperator-Approximation ergeben, gegen die Eigenwerte nachzuweisen, die wir in Abschnitt 4.3 „Ein Beispiel: Der Einheitskreis“ berechnet hatten. Dazu betrachten wir exemplarisch den größten Eigenwert $\omega_1 = (-2.082, 1.260)$.

AKP \rightarrow STST \downarrow	16	32	64	128	256
4	(-2.382, 1.155)	(-2.418, 1.092)	(-2.437, 1.059)	N/A ³	N/A
8	(-2.067, 1.327)	(-2.074, 1.294)	(-2.078, 1.278)	(-2.079, 1.270)	N/A
16	N/A	(-2.076, 1.293)	(-2.079, 1.277)	(-2.080, 1.268)	(-2.081, 1.264)
32	N/A	N/A	(-2.079, 1.277)	(-2.080, 1.268)	(-2.081, 1.264)
64	N/A	N/A	N/A	(-2.080, 1.268)	(-2.081, 1.264)

In horizontaler Richtung wird von Spalte zu Spalte die Anzahl der Stützstellen verdoppelt, durch die das Fernfeld $u_{\infty,n}$ approximiert wird. Vertikal verdoppeln wir von Zeile zu Zeile die Anzahl der einfallenden Wellen zur Approximation des Fernfeldoperators. Wir entnehmen der Tabelle, daß es für die Güte der Approximationen an die Eigenwerte offensichtlich wichtiger ist, den Fernfeldoperator selbst durch möglichst viele einfallende Wellen (STST) anzunähern, als die Integraloperatoren gut zu approximieren, indem man eine hohe Stützstellenzahl AKP zu ihrer Berechnung verwendet.

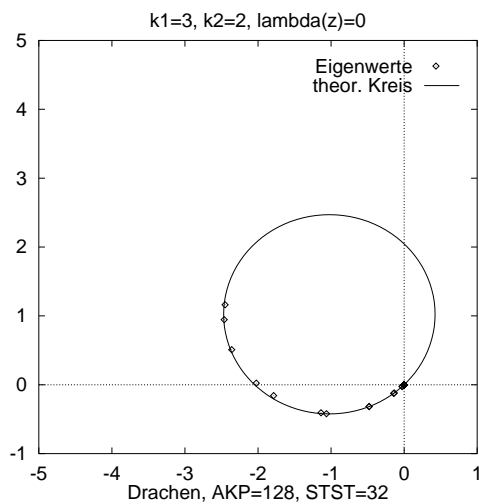
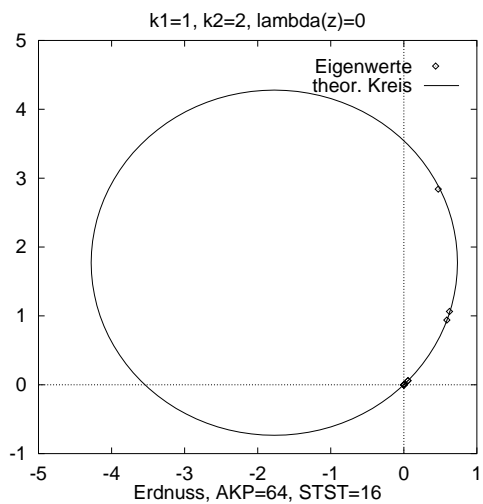
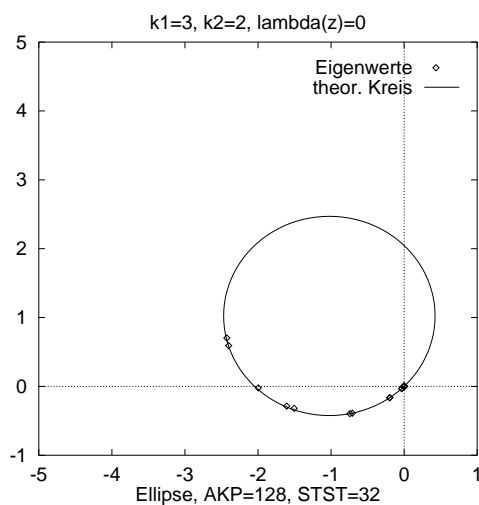
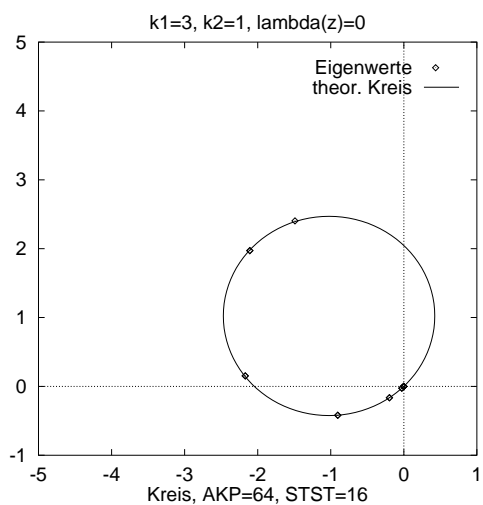
Aus der Tabelle können wir innerhalb numerischer Grenzen tatsächlich Konvergenz der Eigenwerte ablesen. Unter Umständen liegt die mangelnde Genauigkeit auch an der Tatsache, daß für den vorliegenden Fall (der Streukörper ist der Einheitskreis) nur doppelte Eigenwerte vorliegen, die sich numerisch nicht so gut berechnen lassen wie einfache Eigenwerte.

³„N/A“ bedeutet, daß die Werte nicht berechnet wurden.

Im folgenden **TEST 2** wollen wir verdeutlichen, daß die Eigenwerte im Falle rein reeller Parameter tatsächlich auf dem Rand des Kreises liegen, der sich nach der Formel aus Korollar 4.2.2 ergibt. Zu $\lambda \equiv 0$ seien k_1, k_2, μ_1 und μ_2 aus $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ so gewählt, daß $\operatorname{Im}\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right) = \operatorname{Im}\left(k_2^2 \frac{\mu_2}{\mu_1}\right) = 0$ gilt. Anhand eines Beispiels für jede Randkurve überprüfen wir diese Aussage im Rahmen der numerischen Näherung.

TEST 2

ALLE IMAGINÄRTEILE NULL



Die Ergebnisse weiterer Tests werden auf den folgenden Seiten dargestellt.

In **Test 3** wurden drei verschiedene Parameterkonfigurationen (Problem (1), (2), (3)) für jeweils drei verschiedenen Randkurven berechnet. Die Werte für die Parameter und die Kopplungsfunktion sind jeweils oberhalb des Bildes angegeben und innerhalb einer Spalte gleich. Wir sehen, daß die Eigenwertverteilungen auf den jeweils untereinander angeordneten Bildern zum gleichen Problem eine hohe Ähnlichkeit aufweisen. Das ist bei den Bildern in einer Reihe, die jeweils zu derselben Randkurve gehören, nicht der Fall. Das Ergebnis zeigt, daß die Verteilung der Eigenwerte viel stärker von der Wahl der Parameter als von der Wahl der Randkurve abhängt. In Hinblick auf die Möglichkeit aus den Eigenwerten die Randkurve rekonstruieren zu wollen, stellt diese Beobachtung ein Problem dar.

Auch sehen wir, daß eine Abschätzung der Größe des Streukörpers aus der Lage der Eigenwerte problematisch ist. Denn für den Fall, daß wir gute Abschätzungen für die Lage der Eigenwerte aus Satz 4.2.3 bekommen (d.h. die Punkte nahe an den Kreisrändern liegen), können wir auf Grund einer Kombination von Volumen- und Randintegral keine richtigen Größenordnungen für das Gebiet angeben, da wir nicht wissen, in welchem Verhältnis der Umfang zur Fläche steht. Für den Fall jedoch, daß der Imaginärteil der Kopplungsfunktion λ verschwindet, sind die Abschätzungen offensichtlich erheblich schlechter.

Test 4 zeigt, daß für den Fall, daß k_1 und k_2 betragsmäßig größer werden, die Radien der theoretisch berechneten Kreise kleiner werden. Das war auf Grund der Formel für den Radius (aus Satz 4.2.3) zu erwarten. Die Beispiele sind anhand von Drachen und Ellipse mit jeweils verschiedenen Kopplungsfunktionen $\lambda(z)$ berechnet worden.

Abschließend zeigen wir in **Test 5** die Abhängigkeit der Eigenwertverteilung von der Kopplungsfunktionen $\lambda(z)$. Dazu wählen wir als Randkurve stets den Einheitskreis mit den Parametern $k_1 = 2$ und $k_2 = 1 + 2i$. Die Funktionen $\lambda(z)$ werden wie folgt variiert:

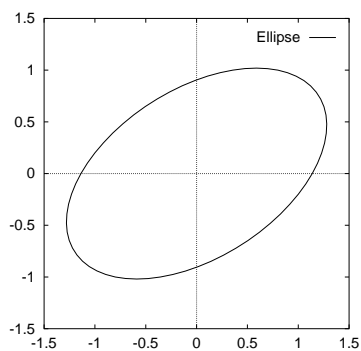
$$\begin{aligned}\lambda(z) &= 0 \\ \lambda(z) &= \sin(z) - i(z + 0.3) \\ \lambda(z) &= \cos(z) - i \\ \lambda(z) &= 3 - 2i \\ \lambda(z) &= 4\end{aligned}$$

Wir sehen, daß die Eigenwerte sich mit der Wahl der Kopplungsfunktionen erheblich verändern, obwohl die Abschätzungen für die Kreise sich nur sehr wenig unterscheiden. Damit finden wir bestätigt, daß die Eigenwerte Informationen über λ enthalten. Eine Tatsache, die man sich eventuell bei der inversen Fragestellung der Rekonstruktion von λ aus den Eigenwerten zu Nutze machen kann.

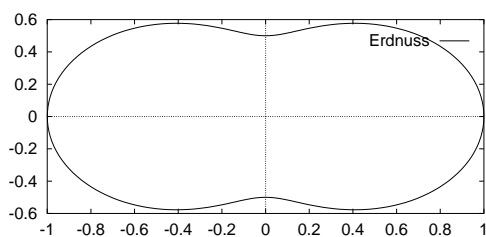
TEST 3

VERSCHIEDENE RANDKURVEN

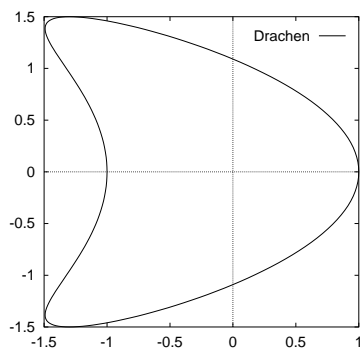
GLEICHES PROBLEM (1)



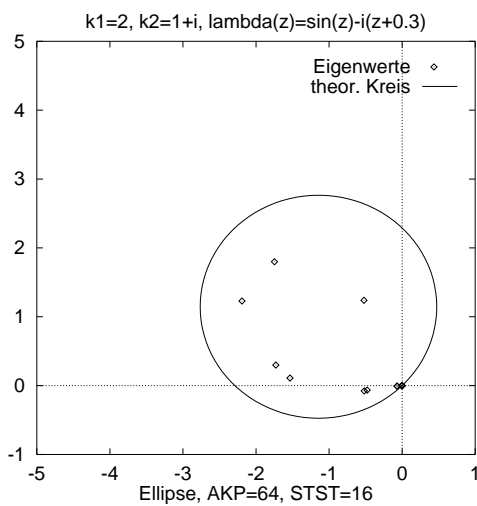
Ellipse



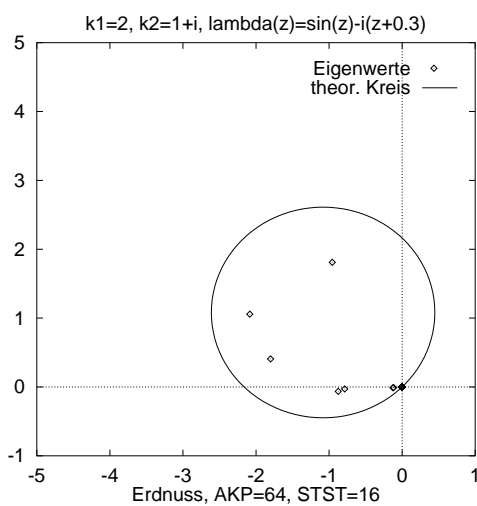
Erdnuss



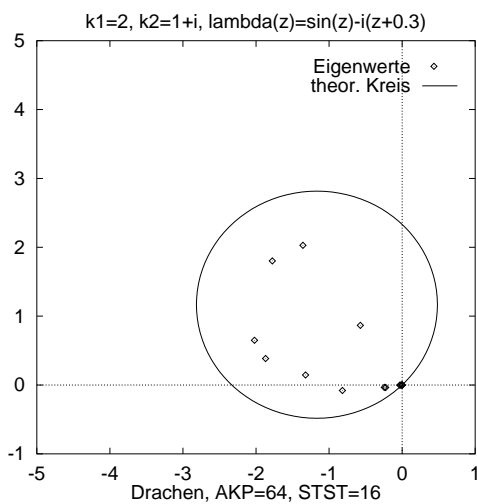
Drachen



Ellipse, AKP=64, STST=16



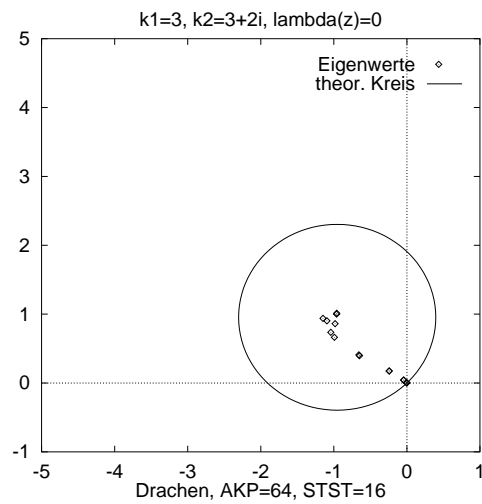
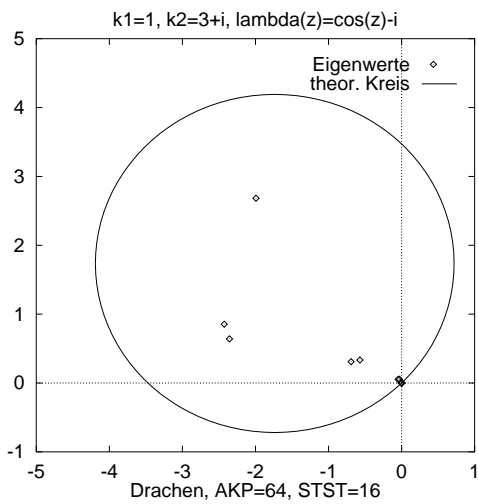
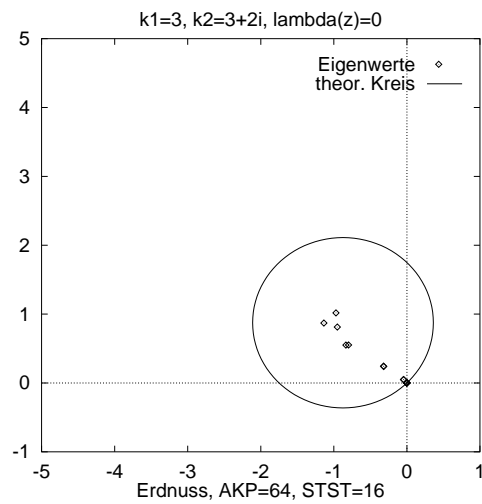
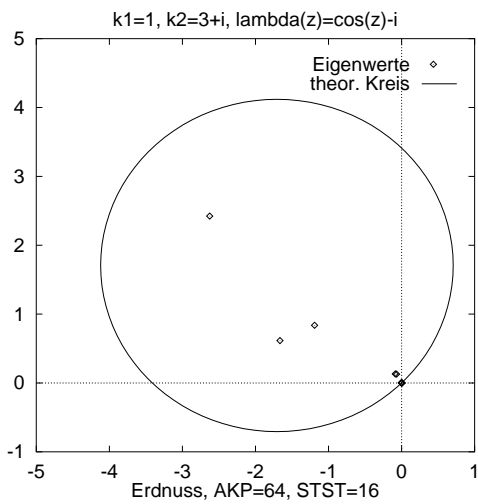
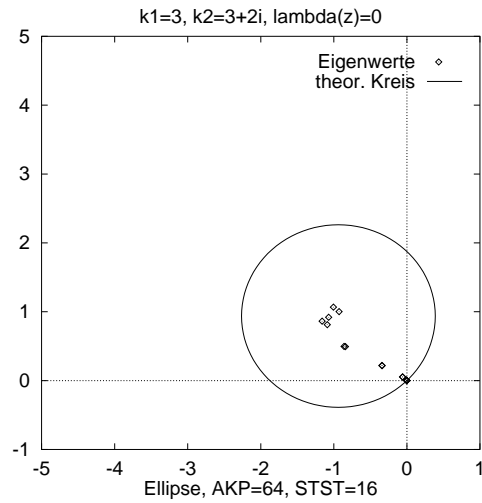
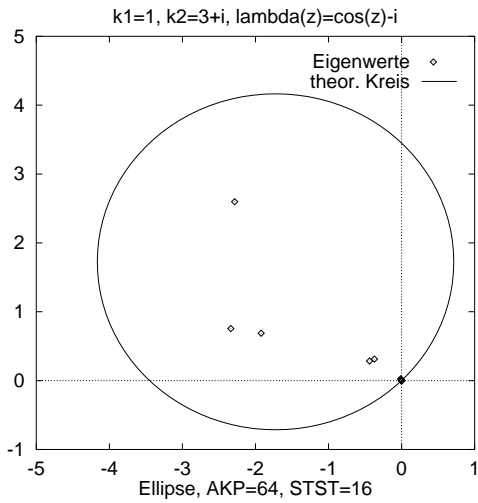
Erdnuss, AKP=64, STST=16



Drachen, AKP=64, STST=16

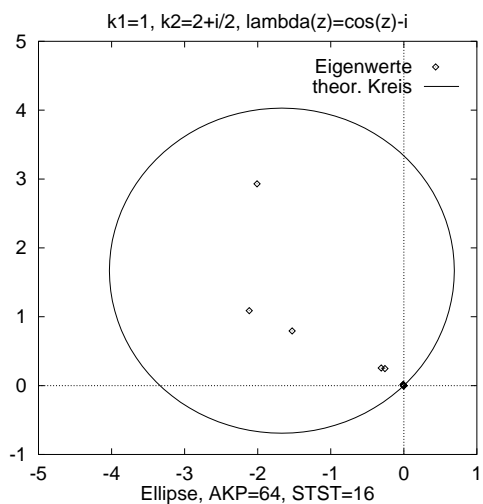
GLEICHES PROBLEM (2)

GLEICHES PROBLEM (3)

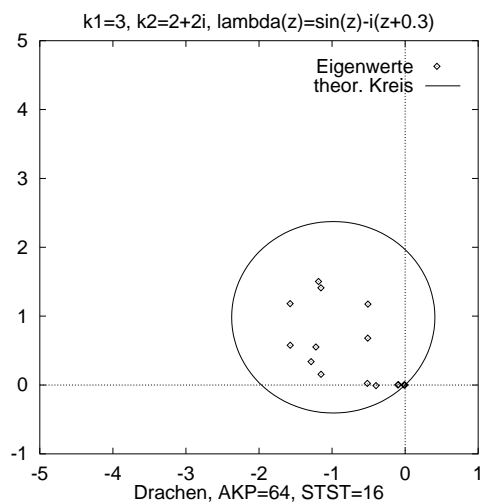
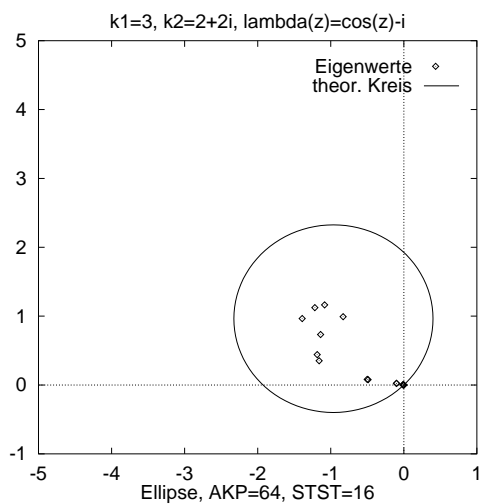
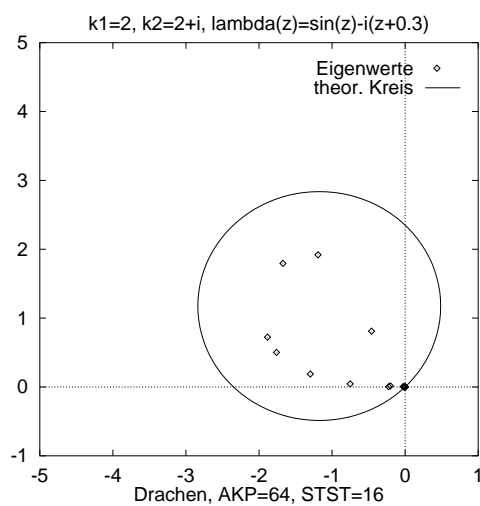
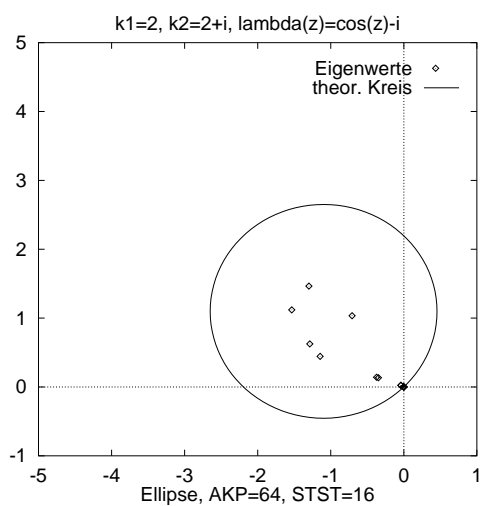
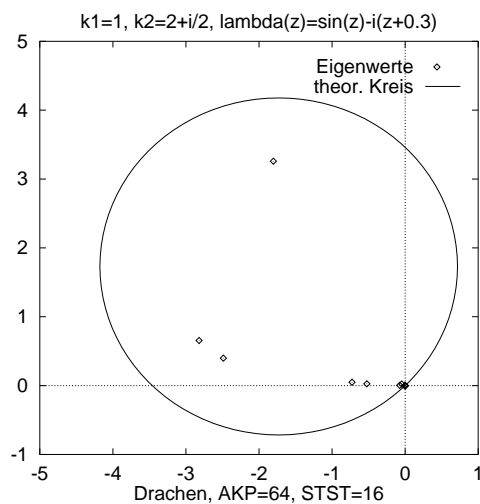


TEST 4

ELLIPSE

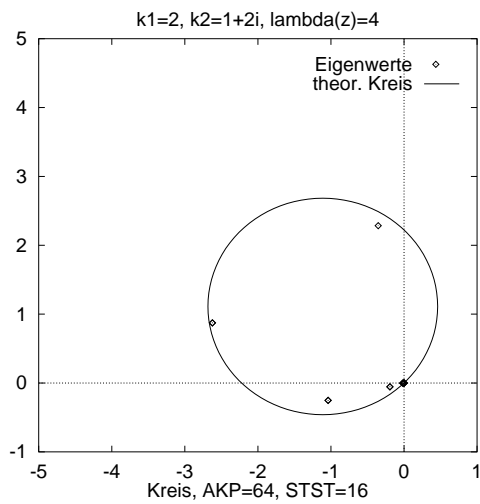
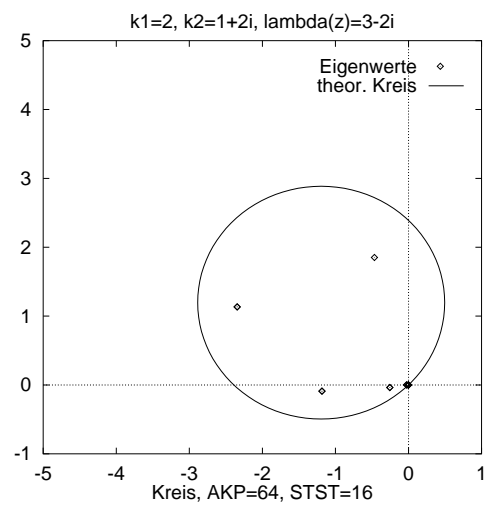
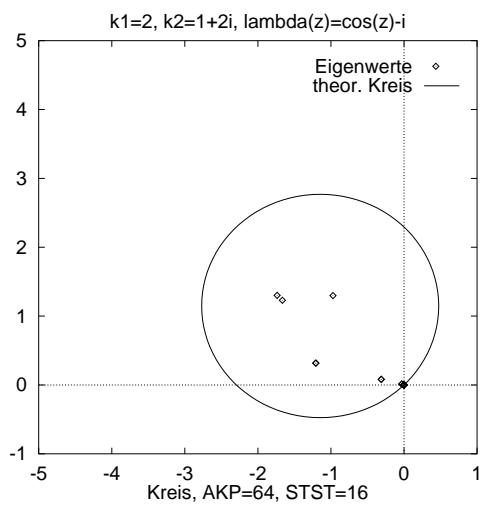
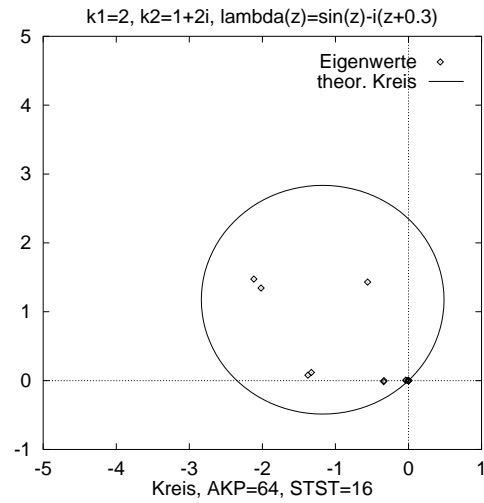
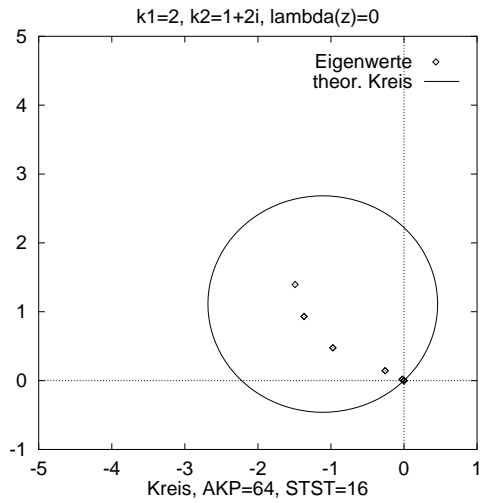


DRACHEN



TEST 5

VERSCHIEDENE LAMBDAFUNKTIONEN GLEICHE BEDINGUNGEN AM KREIS



Kapitel 6

Rekonstruktion des streuenden Gebietes aus den Eigenwerten

6.1 Problemstellung

Wir hatten in Kapitel 4 gesehen, daß wir für verschiedene Randwertprobleme Abschätzungen für die Lage der Eigenwerte angeben können, daß wir umgekehrt aber auch aus der Lage der Eigenwerte eine Abschätzung für die Größe des streuenden Gebietes erhalten können. In diesem Kapitel wollen wir nun den Versuch unternehmen, nicht nur die Größe des Streukörpers, sondern auch seine genaue Gestalt und Lage aus der Kenntnis der Eigenwerte zu rekonstruieren.¹

Wir nennen diese Fragestellung *invers* zu derjenigen, aus dem Streukörper die Eigenwerte des Fernfeldoperators berechnen zu wollen.

Was charakterisiert nun dieses Problem und unterscheidet es von anderen, sogenannten *direkten* Problemen? Zunächst einmal ist es extrem schlecht gestellt, denn wir versuchen eine $C_{2\pi}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ -Funktion aus endlich vielen Punkten zu rekonstruieren. Wir wissen, da \mathcal{F}' vollstetig ist, daß es keine stetige Abbildung gibt, die das gewünschte liefert. Außerdem ist das Problem nichtlinear. Für die Parametrisierungen z und $-z$ eines Kreises erhalten wir dasselbe Fernfeld $u_\infty(z) = u_\infty(-z)$. Dementsprechend gilt für die Eigenwerte des Fernfeldoperators $\lambda_j(z) + \lambda_j(-z) = 2\lambda_j(z)$, und nicht wie aus $z + (-z) \equiv 0$ zu erwarten $\lambda_j(0) = 0$ für alle j .

Wir werden zur Behandlung dieses Problems das Newton-Verfahren anwenden, da es sich für die Behandlung von inversen Problemen ähnlicher Art als sehr erfolgreich herausgestellt hat (siehe z.B. [17]). Dazu ist es allerdings nötig, die Fréchet-Differenzierbarkeit der auftretenden Operatoren nachzuweisen.

¹Um die Berechnungen möglichst einfach zu gestalten, betrachten wir in diesem Kapitel ausschließlich das äußere Dirichletproblem. Da beim Dirichletproblem keine Verwechslung mit einer Funktion λ zu befürchten ist, bezeichnen wir die Eigenwerte mit λ , so wie man es i.a. gewöhnt ist.

Zuerst werden wir den Operator definieren, auf den wir hernach das Newton-Verfahren anwenden wollen.

Sei $\Lambda(z)$, wie in (5.3) definiert, die absteigende Folge der Eigenwerte des Fernfeldoperators, der sich aus einem Streuproblem an einem Körper mit Randkurve z ergibt. Es gilt $\Lambda(z) \in l^1(\mathbb{C})$, da \mathcal{F} ein Spurklasseoperator ist (s. Beweis zu Satz 2.4.16). Durch

$$\Lambda_n(z) := (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \subset \Lambda(z) \quad (6.1)$$

definieren wir das n -Tupel der ersten n Eigenwerte von \mathcal{F} .

Zunächst beschreiben wir den Rand ∂D durch ein Element eines normierten Raumes, um später überhaupt von der Fréchet-Ableitung nach dem Rand sprechen zu können.

Definition 6.1.1 $C_{2\pi}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ bezeichne den Vektorraum aller zweimal stetig differenzierbaren, 2π -periodischen Funktionen von \mathbb{R} nach \mathbb{R}^2 , versehen mit der Norm $\|z\| := \max(\|z\|_\infty, \|z'\|_\infty, \|z''\|_\infty)$.

Mit $RK \subset C_{2\pi}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ bezeichnen wir die Menge aller Randkurven $z \in C_{2\pi}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ mit den Eigenschaften

1. $z|_{[0, 2\pi)}$ ist injektiv,
2. z ist regulär, d.h. $|z'(t)| > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$,
3. z ist linksorientiert, d.h. die (in der Funktionentheorie definierte) Umlaufzahl ist positiv.

Wie in [8] bewiesen, ist die Menge $RK \subset C_{2\pi}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ offen.

Unter anderem sind in RK sternförmige Gebiete enthalten, die durch $r(\varphi)(\cos \varphi, \sin \varphi)$ beschrieben werden können, wobei $r \in C_{2\pi}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $r(\varphi) > 0$ und $|r'(\varphi)| > 0$ für alle $\varphi \in [0, 2\pi]$ gilt.

Wir definieren den Operator $\mathcal{E}\mathcal{W}_n : RK \rightarrow \mathbb{C}^n$ durch

$$\mathcal{E}\mathcal{W}_n(z) = \Lambda_n(z). \quad (6.2)$$

Unser Ziel ist es nun, aus vorgegebenem Λ_n das zugehörige z zu bestimmen.

Zur besseren Strukturierung des Problems zerlegen wir den Operator $\mathcal{E}\mathcal{W}_n$.

Mit F_d bezeichnen wir den Operator von RK nach $L^2(\Omega)$, der den Rand des Streukörpers auf das Fernfeld zur einfallenden Welle $u^i(x, d) = e^{ikxd}$ abbildet: $z \mapsto u_\infty(\cdot, d)$.

Durch $I_\Omega : L^2(\Omega \times \Omega) \times L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ führen wir den Integraloperator

$$I_\Omega(f, g)(\hat{x}) := \int_\Omega f(\hat{x}, d)g(d) ds(d) \quad \text{mit } \|\hat{x}\| = 1 \quad \text{ein.}$$

Abschließend bezeichne $E_n : L(L^2(\Omega), L^2(\Omega)) \rightarrow \mathbb{C}^n$ den Operator, der einer beschränkten, linearen Abbildung von $L^2(\Omega)$ in sich ihre n betragsgrößten Eigenwerte zuordnet. Mit diesen Definitionen schreiben wir

$$\mathcal{E}\mathcal{W}_n(z) = E_n(I_\Omega(F_d(z), \cdot)). \quad (6.3)$$

Wenn wir im folgenden die Fréchet-Differenzierbarkeit des Operators $\mathcal{E}\mathcal{W}_n$ untersuchen wollen, so werden wir zuerst die einzelnen Bestandteile betrachten.

6.2 Die Fréchet-Ableitung der Eigenwerte des Fernfeldoperators

Um das Newton-Verfahren theoretisch fundieren und anwenden zu können, benötigen wir eine Verallgemeinerung des Ableitungsbegriffes und zugehörige Rechenregeln für normierte Räume.

Definition 6.2.1 (Fréchet-Ableitung) *Seien X und Y normierte Räume und $X' \subset X$ offen. Eine Abbildung $F : X' \rightarrow Y$ heißt Fréchet-differenzierbar in einem Punkt $x \in X'$, wenn es eine beschränkte, lineare Abbildung $F'(x) : X \rightarrow Y$ gibt, so daß*

$$\|F(x+h) - F(x) - F'(x)h\| = o(\|h\|), \quad (6.4)$$

für $\|h\| \rightarrow 0$, $h \in X$. Ist F in jedem Punkt $x \in X'$ Fréchet-differenzierbar, dann heißt die Abbildung $F' : X' \rightarrow L(X, Y)$, $x \mapsto F'(x)$ die Fréchet-Ableitung von F . Dabei ist $L(X, Y)$ der Raum aller beschränkten linearen Abbildungen von X nach Y versehen mit der Norm $\|F\| := \sup_{\|x\|=1} \|F(x)\|$.

Für diese verallgemeinerte Ableitung gelten dieselben Rechenregeln wie für die gewöhnliche Ableitung im \mathbb{R}^n . Wir erhalten Vorschriften für die Differentiation von Produkten, Quotienten und Hintereinanderausführungen Fréchet-differenzierbarer Funktionen. Dabei bezeichnen wir mit $F'(x; h)$ die Fréchet-Ableitung von F im Punkt x in Richtung h .

Zum Beweis der folgenden Aussagen verweisen wir z. B. auf [8].

Satz 6.2.2 (i) *Seien X und Y normierte Räume und $X' \subset X$ eine offene Teilmenge. Sei $A : X \rightarrow Y$ eine lineare Abbildung. Dann ist A Fréchet-differenzierbar, und es gilt*

$$A'(x; h) = Ah, \quad \text{für alle } x \in X' \text{ und } h \in X.$$

(ii) **(Kettenregel)**

Seien X , Y und Z normierte Räume und $X' \subset X$, $Y' \subset Y$ und $Z' \subset Z$ offene Teilmengen. Seien $G : X' \rightarrow Y'$ und $F : Y' \rightarrow Z$ Fréchet-differenzierbar, dann ist auch $F \circ G : X' \rightarrow Z$ Fréchet-differenzierbar, und es gilt

$$(F \circ G)'(x, h) = F'(G(x); G'(x; h)), \quad \text{für alle } x \in X' \text{ und } h \in X.$$

(iii) (Produktregel)

Seien X_1, X_2 und Y normierte Räume, und es gebe eine beschränkte, bilineare Abbildung von $(X_1 \times X_2) \rightarrow Y$ durch $(x_1, x_2) \mapsto [x_1, x_2]$. Sei U' eine offene Teilmenge eines weiteren normierten Raumes U , und seien $F_1 : U' \rightarrow X_1$ und $F_2 : U' \rightarrow X_2$ Fréchet-differenzierbare Abbildungen. Dann ist auch $[F_1, F_2] : U' \rightarrow Y$, $u \mapsto [F_1(u), F_2(u)]$ Fréchet-differenzierbar mit der Ableitung

$$[F_1, F_2]'(u; h) = [F_1'(u; h), F_2(u)] + [F_1(u), F_2'(u; h)], \quad \text{für alle } u \in U' \text{ und } h \in U.$$

(iv) (Quotientenregel)

Sei U ein normierter Raum, X ein Banachraum und $U' \subset U$ offen. Sei $F : U' \rightarrow L(X, X)$ Fréchet-differenzierbar und $u \in U'$ sei für alle $F(u)$ beschränkt invertierbar. Dann ist die Abbildung $F^{-1} : U' \rightarrow L(X, X)$, $u \mapsto F^{-1}(u)$ Fréchet-differenzierbar und besitzt die Ableitung

$$(F^{-1})'(u; h) = -F^{-1}(u)F'(u; h)F^{-1}(u), \quad \text{für alle } u \in U' \text{ und } h \in U.$$

(v) (Vertauschbarkeit mehrfacher Ableitungen) Seien X und Y normierte Räume und $X' \subset X$ offen. Die Abbildung $F : X' \rightarrow Y$ sei zweimal stetig Fréchet-differenzierbar. Dann gilt für alle $h_1, h_2 \in X$ und alle $x \in X'$

$$F''(x; h_1; h_2) = F''(x; h_2; h_1),$$

die Reihenfolge der Ableitungen spielt also keine Rolle.

Wir verstehen dabei unter F'' die Fréchet-Ableitung des Operators $F' : X' \rightarrow L(X, X)$. Danach ist also F'' eine Abbildung von X' nach $L(X, L(X, X))$.

Bezeichnen wir das Gebiet im \mathbb{R}^2 , welches durch die Kurve z berandet wird, mit D_z , so können wir die Fréchet-Ableitung des Operators F_d angeben. Die Tatsache, daß die Randintegraloperatoren überhaupt nach der Randkurve Fréchet-differenzierbar sind, findet man in „Fréchet differentiability of boundary integral operators in inverse acoustic scattering“ bewiesen [15].

Satz 6.2.3 Der Operator $F_d : RK \rightarrow L^2(\Omega)$ ist Fréchet-differenzierbar. Die Ableitung in Richtung $h \in RK$ ist gegeben durch

$$F_d'(z; h) = v_{\infty, z}(\cdot, d; h).$$

Dabei ist $v_{\infty, z}$ das Fernfeld zu $v_z(\cdot, d; h)$, der ausstrahlenden Lösung der Helmholtzgleichung $\Delta v + k^2 v = 0$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D_z}$, die der Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung genügt und die Randbedingung

$$v_z(\cdot, d; h) = -\nu h \frac{\partial u_z(\cdot, d)}{\partial \nu} \quad \text{auf } \partial D_z \text{ erfüllt.}$$

Beweis: z.B. Theorem 7 in [15].

Wir wollen jetzt den Fernfeldoperator differenzieren und formulieren dazu folgenden Satz:

Satz 6.2.4 Sei durch $A : RK \times L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ der Integraloperator

$$(z, g) \mapsto \int_{\Omega} f_z(\cdot, d) g(d) ds(d),$$

gegeben, mit einer Funktion $f_z \in L^2(\Omega \times \Omega)$, die bezüglich z Fréchet-differenzierbar ist mit Ableitung $f'_z(\cdot, d; h)$ und für alle $\hat{x} \in \Omega$ ein gleichmäßiges Abklingverhalten des Ausdrucks $[f_{z+h}(\hat{x}; \cdot) - f_z(\hat{x}; \cdot) - f'_z(\hat{x}; \cdot; h)]$ aufweist. Dann ist auch A Fréchet-differenzierbar mit der Ableitung

$$A'(z; h)(g) = \int_{\Omega} f'_z(\cdot; d; h) g(d) ds(d).$$

Beweis: Wir können wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} & \left\| \{A(z+h) - A(z) - A'(z; h)\} g \right\|_{L^2(\Omega)} \\ & \leq \max_{x \in \Omega} \left\| f_{z+h}(\hat{x}; \cdot) - f_z(\hat{x}; \cdot) - f'_z(\hat{x}; \cdot; h) \right\|_{L^2(\Omega)} \|g\|_{L^2(\Omega)} \\ & = o(\|h\|_{L^2(\Omega)}) \|g\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } g \in L^2(\Omega). \end{aligned}$$

Also gilt auch für die Operatornorm

$$\sup_{\|g\|=1} \left\| \{A(z) - A(z+h) - A'(z; h)\} g \right\|_{L^2(\Omega)} = o(\|h\|_{L^2(\Omega)}). \quad \square$$

Setzen wir nun $f_z(\cdot, d) = F_d(z)$ so erhalten wir die Ableitung des Fernfeldoperators $\mathcal{F}(z; h)(g) = I_{\Omega}(F_d(z), g)$ mit Hilfe dieses Satzes, der Ableitung der Funktion F_d und der Kettenregel als

$$\mathcal{F}'(z; h)(g) = \int_{\Omega} v_{\infty, z}(\cdot; d; h) g(d) ds(d), \quad (6.5)$$

wobei $v_{\infty, z}(\cdot, d; h)$ definiert ist wie in Satz 6.2.3.

Zur endgültigen Ableitung des Operators $\mathcal{E}\mathcal{W}_n$ untersuchen wir vorerst ein allgemeineres Problem. Sei X ein Banachraum, Y ein Hilbertraum und $A : X \times Y \rightarrow Y$ linear bezüglich Y , d.h. $A(z) \in L(Y, Y)$ für alle $z \in X$. Betrachte das Eigenwertproblem $A(z)\varphi = \lambda\varphi$ und die Abhängigkeit des Eigenwertes λ von z .

Für eine feste Randkurve $z_0 \in X$ sei λ_0 ein einfacher Eigenwert mit Riesz-Zahl Eins. Sei φ_0 Eigenfunktion zu $A(z_0)$ zum Eigenwert λ_0 . Sei ψ_0 ein Eigelement mit Eigenwert $\overline{\lambda_0}$ zu dem adjungierten Operator $A^*(z_0)$ mit $\|\psi_0\|_X = 1$, und es gelte $\langle \varphi_0, \psi_0 \rangle_Y = 1$. Da wir Riesz-Zahl

Eins vorausgesetzt haben, ist diese Bedingung nach Lemma 2.4.12 erfüllbar. Für eine heuristische „Herleitung“ der Ableitung $\lambda'(z_0)$ entwickeln wir alle Terme um z_0 und vernachlässigen Terme von höherer Ordnung in δ . Sei also $z = z_0 + \delta$ mit $\|\delta\| \ll 1$.

$$\begin{aligned} [A(z_0) + A'(z_0)\delta] [\varphi(z_0) + \varphi'(z_0)\delta] &\approx [\lambda(z_0) + \lambda'(z_0)\delta] [\varphi(z_0) + \varphi'(z_0)\delta], \\ \text{also } A'(z_0)\delta\varphi(z_0) - \lambda'(z_0)\delta\varphi(z_0) &\approx [\lambda(z_0) - A(z_0)]\varphi'(z_0)\delta. \end{aligned}$$

Die Riesz-Theorie liefert uns die Bedingung

$$\text{span}\{\psi_0\} = \text{Kern}(\lambda I - A^*) - \text{Bild}(\lambda I - A). \quad (6.6)$$

für die Lösbarkeit. Beide Seiten der Gleichung müssen also senkrecht zu ψ_0 sein. Da $\langle \varphi, \psi_0 \rangle_Y = 1$ vorausgesetzt ist, erhalten wir

$$\lambda'(z_0)\delta = \langle A'(z_0)\delta\varphi(z_0), \psi_0 \rangle_Y. \quad (6.7)$$

Für den Beweis des nachfolgenden Satzes, der die Heuristik durch saubere Mathematik ergänzt, benötigen wir den Satz über implizite Funktionen, übertragen auf Banachräume. Dazu führen wir den Begriff der *partiellen Fréchet-Ableitung* ein.

Definition 6.2.5 Sei $f : X \times Y \rightarrow Z$ eine Abbildung zwischen Banachräumen. Dann ist durch

$$\frac{\partial f}{\partial y}((x_0, y_0); h_y) := f'((x_0, y_0); (0, h_y)),$$

mit $(0, h_y) \in X \times Y$ eine beschränkte, lineare Abbildung von Y nach Z gegeben, die partielle Fréchet-Ableitung von f nach y heißt.

Satz 6.2.6 (Satz über implizite Funktionen) Es sei U eine offene Menge in dem direkten Produkt der Banachräume X und Y und $f : U \rightarrow Z$ eine stetige Funktion mit $f(x_0, y_0) = 0$, die bezüglich beider Komponenten in (x_0, y_0) partiell Fréchet-differenzierbar ist.

Ist $\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right](x_0, y_0; \cdot)$ eine bijektive, lineare Abbildung von Y in sich, so gibt es Umgebungen $U_\delta(x_0) \subset X$ und $U_\epsilon(y_0) \subset Y$ derart, daß die Gleichung $f(x, y) = 0$ für jedes $x \in U_\delta(x_0)$ in $U_\epsilon(y_0)$ genau eine Lösung $y = g(x)$ besitzt. Die Funktion $g : U_\delta(x_0) \rightarrow U_\epsilon(y_0)$ ist stetig und Fréchet-differenzierbar mit der Ableitung

$$g'(x; h_x) = - \left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]^{-1} \left(x, g(x); \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right](x, g(x); h_x) \right).$$

Beweis: ist zum Beispiel in den Buch von Berger [2], Satz 3.1.10 und Korollar 3.1.11 nachzulesen (S. 115).

In unserem speziellen Fall setzen wir nun $X = RK$ und $Y = L^2(\Omega) \times \mathbb{C}$.

Satz 6.2.7 Wenn alle Eigenwerte λ_j einfach mit Riesz-Zahl Eins sind, dann ist der Operator $\mathcal{E}\mathcal{W}_n : RK \rightarrow \mathbb{C}^n$ Fréchet-differenzierbar. Die Fréchet-Ableitung einer einzelnen Komponente λ_j mit $j \leq n$ ist in diesem Fall gegeben durch

$$\lambda_j'(z_0; \delta) = \langle \mathcal{F}'(z_0; \delta)\varphi_j, \psi_j \rangle_{L^2(\Omega)}. \quad (6.8)$$

Bei Randkurve z_0 ist ψ_j Eigenfunktion von \mathcal{F}^* zum Eigenwert $\overline{\lambda_j}$ mit $\|\psi_j\| = 1$, und φ_j ist Eigenfunktion von \mathcal{F} zum Eigenwert λ_j mit $\langle \varphi_j, \psi_j \rangle_{L^2(\Omega)} = 1$.

Die Ableitung ist von der speziellen Wahl des Eigenelementes ψ_j unabhängig.

Die Fréchet-Ableitung von $\mathcal{E}\mathcal{W}_n$ ist damit gegeben durch

$$\mathcal{E}\mathcal{W}_n'(z_0; \delta) = (\lambda_1'(z_0; \delta), \dots, \lambda_n'(z_0; \delta)).$$

Beweis: Wir definieren eine Abbildung $G_j : RK \times L^2(\Omega) \times \mathbb{C} \rightarrow L^2(\Omega) \times \mathbb{C}$ durch

$$G_j(z, \varphi, \lambda) = \begin{pmatrix} \mathcal{F}(z)\varphi - \lambda\varphi \\ \langle \varphi, \psi_j \rangle_{L^2(\Omega)} - 1 \end{pmatrix}.$$

Dabei ist ψ_j wie in der Formulierung des Satzes gegeben. Wir können nach Lemma 2.4.12 zu festgelegtem ψ_j ein φ_j aus dem Eigenraum von \mathcal{F} bei Randkurve z_0 zum Eigenwert λ_j bestimmen, so daß $\langle \varphi_j, \psi_j \rangle_{L^2(\Omega)} = 1$ gilt. Damit hat G_j an der Stelle $(z_0, \varphi_j, \lambda_j)$ eine Nullstelle. Für $h \in L^2(\Omega)$ und $\mu \in \mathbb{C}$ ist die Fréchet-Ableitung der Funktion G_j im Punkt $(z_0, \varphi_j, \lambda_j)$ in Richtung $\begin{pmatrix} h \\ \mu \end{pmatrix}$ gegeben durch

$$\frac{\partial G_j(z_0, \varphi_j, \lambda_j)}{\partial \begin{pmatrix} \varphi \\ \lambda \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} h \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{F}(z_0)h - \lambda_j h - \mu\varphi_j \\ \langle h, \psi_j \rangle_{L^2(\Omega)} \end{pmatrix}.$$

Um den Satz über implizite Funktionen anwenden zu können, benötigen wir die Umkehrabbildung. Diese entspricht gerade dem Lösen des Gleichungssystems

$$\mathcal{F}(z_0)h - \lambda_j h - \mu\varphi_j = \tilde{g} \quad (6.9)$$

$$\langle h, \psi_j \rangle_{L^2(\Omega)} = \alpha. \quad (6.10)$$

Nehmen wir an, daß $h \in RK$ eine Lösung von (6.9) ist. Auf Grund der Lösbarkeitsbedingung (6.6) ist dann $\tilde{g} + \mu\varphi_j - \psi_j(z_0)$, also $\mu = -\langle \tilde{g}, \psi_j \rangle_{L^2(\Omega)}$.

Da λ_j als einfacher Eigenwert vorausgesetzt ist, ist die Dimension der Lösungsmenge $\{h \in L^2(\Omega) : \mathcal{F}(z_0)h - \lambda_j h = \tilde{g} + \mu\varphi_j\}$ ebenfalls Eins. Wegen Riesz-Zahl Eins läßt sich h eindeutig schreiben als $h = h_0 + \beta\varphi_j$ mit $\langle h_0, \varphi_j \rangle = 0$. Durch die zweite Bedingung (6.10) ist h bei fest

vorgegebenem α , \tilde{g} eindeutig bestimmt. Wir wissen danach, daß

$$\left(\frac{\partial G_j(z_0, \varphi_j, \lambda_j)}{\partial \begin{pmatrix} \varphi \\ \lambda \end{pmatrix}} \right)^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{g} \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ** \\ -\langle \tilde{g}, \psi_j \rangle_{L^2(\Omega)} \end{pmatrix}$$

eindeutig lösbar ist. Der Satz über implizite Funktionen liefert uns nun, daß die Gleichung $G_j(z, \varphi_j(z), \lambda_j(z)) = 0$ für kleine Störungen $\|\delta\| \ll 1$ mit $z = z_0 + \delta$ eine eindeutige Lösung besitzt. Die Ableitung $\lambda'_j(z_0)$ in Richtung δ ist gegeben durch

$$\lambda'_j(z_0) \delta = - \left(\frac{\partial G_j(z_0, \varphi_j, \lambda_j)}{\partial \begin{pmatrix} \varphi \\ \lambda \end{pmatrix}} \right)^{-1} \frac{\partial G_j}{\partial z} \begin{pmatrix} z_0 \\ \varphi_j \\ \lambda_j \end{pmatrix} \delta = \langle \mathcal{F}'(z_0; \delta) \varphi_j, \psi_j \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

Betrachten wir abschließend die Abhängigkeit dieser Ableitung von der speziellen Wahl der Eigenfunktion ψ_j . Allein durch die Bedingungen $\mathcal{F}^* \psi_j = \overline{\lambda_j} \psi_j$ und $\|\psi_j\| = 1$ ist ψ_j nicht eindeutig festgelegt. Verschiedene Lösungen unterscheiden sich jedoch nur um einen Phasenfaktor $e^{i\tau}$. Wählen wir also statt ψ_j die Funktion $\tilde{\psi}_j = e^{i\tau} \psi_j$, dann bestimmen wir gemäß den Bedingungen an die Eigenfunktionen von \mathcal{F} auch statt φ_j die Eigenfunktion $\tilde{\varphi}_j = e^{i\tau} \varphi_j$, und es gilt für die Ableitung des Eigenwertes

$$\lambda'_j(z_0) \delta = \langle \mathcal{F}'(z_0; \delta) \tilde{\varphi}_j, \tilde{\psi}_j \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle \mathcal{F}'(z_0; \delta) \varphi_j, \psi_j \rangle_{L^2(\Omega)}. \quad \square \quad (6.11)$$

Bemerkung 6.2.8 Die spezielle Abhängigkeit von dem Randwertproblem geht nur in die Berechnung von $\mathcal{F}'(z_0; \delta)$ ein. Für jedes Randwertproblem, dessen Fernfeld Fréchet-differenzierbar ist, sieht die Ableitung der Eigenwerte nach der Randkurve ansonsten so aus wie (6.11).

6.3 Eigenwerte des Fernfeldoperators zum Dirichletproblem

Wir können die Aussagen von Satz 4.1.3 und Satz 4.1.14 auch für das äußere Dirichletproblem beweisen und erhalten die Existenz von unendlich vielen Eigenwerten, die eine Nullfolge bilden. Sei h eine Eigenfunktion des Fernfeldoperators \mathcal{F} zum Dirichletproblem mit Eigenwert λ , und v_h die Lösung des Dirichletproblems bei einfallender Herglotz-Wellenfunktion mit Kern h . Wie bei den anderen Randwertproblemen auch gilt nach Satz 4.1.10 die Beziehung

$$\int_{\partial D} \left(v_h \frac{\partial \overline{v_h}}{\partial \nu} - \overline{v_h} \frac{\partial v_h}{\partial \nu} \right) ds = -2ik_1 (\mathcal{F}h, \mathcal{F}h)_{L^2} + \sqrt{8\pi k} \left[e^{-i\frac{\pi}{4}} (\mathcal{F}h, h)_{L^2} - e^{i\frac{\pi}{4}} (h, \mathcal{F}h)_{L^2} \right],$$

und damit für die Eigenwerte des Fernfeldoperators zum Dirichletproblem

$$k|\lambda|^2 = \sqrt{8\pi k} \operatorname{Im} \left(e^{-i\frac{\pi}{4}} \lambda \right).$$

D.h., die Eigenwerte liegen sämtlich auf einem Kreis mit Radius $r = \sqrt{\frac{2\pi}{k}}$ um den Mittelpunkt $M = \sqrt{\frac{\pi}{k}}(-1 + i)$. Dementsprechend kann jeder Eigenwert durch **eine** Variable $\tau_n \in \mathbb{R}$ beschrieben werden,

$$\lambda_n = r e^{i\tau_n} + M. \quad (6.12)$$

Für den Einheitskreis sei durch

$$\begin{aligned} u(x; d) &= u^i(x; d) + u^s(x; d) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} i^n \left\{ J_n(k|x|) + a_n H_n^{(1)}(k|x|) \right\} e^{in(\theta-\theta_0)} \\ \text{mit } x &= |x|(\cos \theta, \sin \theta) \text{ und } d = (\cos \theta_0, \sin \theta_0) \end{aligned}$$

die Lösung zum Dirichletproblem gegeben.

Dann müssen die Koeffizienten a_n die folgende Form haben $a_n = -\frac{J_n(k)}{H_n^{(1)}(k)}$,

woraus wegen $f_{-|n|} = (-1)^{|n|} f_{|n|}$ auch $a_n = a_{-n}$ folgt.

Wir erhalten also das zugehörige Fernfeld als

$$u_{\infty}(\hat{x}; d) = \sqrt{\frac{2}{\pi k}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in(\theta-\theta_0)}$$

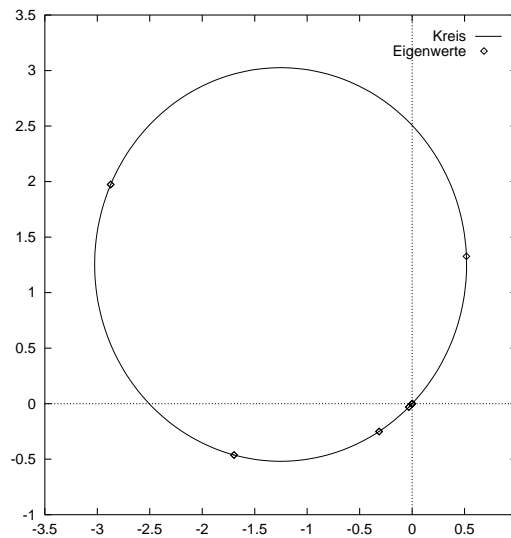
und damit wie in Abschnitt 4.3 die Eigenwerte λ_n zu den Eigenfunktionen $g_n = e^{in(\theta_0)}$ als

$$\lambda_n = -\sqrt{\frac{8\pi}{k}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \frac{J_n(k)}{H_n^{(1)}(k)} = \lambda_{-n}.$$

$\cos n\varphi = \frac{e^{in\varphi} + e^{-in\varphi}}{2}$ und $\sin n\varphi = \frac{e^{in\varphi} - e^{-in\varphi}}{2i}$ sind Eigenfunktionen zu demselben Eigenwert λ_n , der somit entgegen der Annahme, die im Beweis der Fréchet-Ableitung (Satz 6.2.7) gemacht wird, **nicht** einfach ist. Deshalb sollten wir den Kreis auch nicht als Ausgangsnäherung für die Rekonstruktion im Newton-Verfahren benutzen.

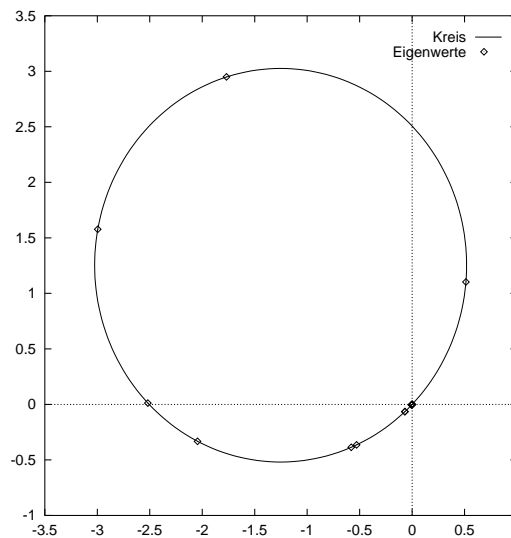
Wir können dies auch anhand eines Beispiels belegen. Sei $k = 2$. Dann erhalten wir folgende Eigenwerte zum Fernfeldoperator beim Dirichletstreuproblem am Einheitskreis:

λ_0	$0.517 + i 1.326$
λ_1	$-2.872 + i 1.973$
λ_{-1}	$-2.872 + i 1.973$
λ_2	$-1.696 - i 0.462$
λ_{-2}	$-1.696 - i 0.462$
λ_3	$-0.315 - i 0.250$
λ_{-3}	$-0.315 - i 0.250$
λ_4	$-0.0311 - i 0.0304$
λ_{-4}	$-0.0311 - i 0.0304$
λ_5	$-0.0017 - i 0.0017$
λ_{-5}	$-0.0017 - i 0.0017$
λ_6	$-6.4 \cdot 10^{-05} - i 6.4 \cdot 10^{-05}$
λ_{-6}	$-6.4 \cdot 10^{-05} - i 6.4 \cdot 10^{-05}$



Dagegen erhalten wir für den Fall, daß der Streukörper eine Ellipse ist, die durch $(\cos t + 0.8 \sin t, \sin t - 0.2 \cos t)$ gegeben ist, ausschließlich einfache Eigenwerte. Im Gegensatz zum ersten Beispiel – wo wir durch die vorherige Notation gebunden waren – haben wir hier die Eigenwerte ausschließlich der Betragsgröße nach geordnet.

λ_1	$-1.768 + i 2.949$
λ_2	$-2.995 + i 1.577$
λ_3	$-2.518 + i 0.012$
λ_4	$-2.045 - i 0.332$
λ_5	$0.513 + i 1.102$
λ_6	$-0.529 - i 0.364$
λ_7	$-0.579 - i 0.386$
λ_8	$-0.067 - i 0.064$
λ_9	$-0.069 - i 0.065$
λ_{10}	$-0.005 - i 0.005$
λ_{11}	$-0.004 - i 0.004$
λ_{12}	$-2.3 \cdot 10^{-4} - i 2.3 \cdot 10^{-4}$



Jeweils zwei der benachbarten Eigenwerte liegen teilweise sehr nahe beisammen. Wir sehen jedoch in numerischen Tests, daß die Eigenwerte besser verteilt sind, wenn der Streukörper stark unterschiedlich vom Kreis ist.

Es ist zu erwarten, daß die Struktur der doppelten Eigenwerte hauptsächlich durch die hohe Symmetrie des Kreises verursacht wird. Wir können also für andere Gebiete weiterhin die Annahme machen, daß die Eigenwerte einfach sind.

6.4 Das Newton-Verfahren

Wir wollen nun die Anwendung des Newton-Verfahrens zur Auflösung der Gleichung

$$\mathcal{E}\mathcal{W}_n(z) = \Lambda_n^{vorg.} \quad (6.13)$$

nach z bei vorgegebenen Werten $\Lambda_n^{vorg.} \in \mathbb{C}^n$ illustrieren. Dazu linearisieren wir die Gleichung um eine Ausgangsnäherung z_0 für eine kleine Störung δ .

$$\mathcal{E}\mathcal{W}_n(z_0) + \mathcal{E}\mathcal{W}_n'(z_0; \delta) = \Lambda_n^{vorg.} \quad (6.14)$$

Dies lösen wir nach δ auf, um durch $\tilde{z} = z_0 + \delta$ eine verbesserte Approximation an die Randkurve zu erhalten.

Das klassische Newton-Verfahren besteht nun in der iterativen Anwendung dieses Vorgangs, um die Nullstellen der Funktion $\mathcal{E}\mathcal{W}_n(z) - \Lambda_n^{vorg.}$ aufzufinden.

- Sei eine Ausgangsnäherung z_0 gegeben.
- Für $m = 0, 1, \dots$ berechne
 $\mathcal{E}\mathcal{W}_n(z_m) + \mathcal{E}\mathcal{W}_n'(z_m; \delta_m) = \Lambda_n^{vorg.}$ und $z_{m+1} = z_m + \delta_m$,
solange $\|\delta_m\| > \text{Rechengenauigkeit}$.

Die erste Frage, die sich nun stellt, ist die nach der eindeutigen Lösbarkeit der linearisierten Gleichung (6.14).

Wenn wir voraussetzen, daß k kein innerer Dirichlet-Eigenwert ist, dann sind die Fernfelder des äußeren Dirichletproblems vollständig in $L^2(\Omega)$ (s. dazu [4], Satz 3.17). Damit ist der Fernfeldoperator injektiv, und wir wissen aus der eineindeutigen Zuordnung von Kern- zu Herglotz-Wellenfunktion, daß $\mathcal{F}'(z; \delta) = 0$ genau dann gilt, wenn $v_{\infty, z}(\cdot, \cdot; \delta) \equiv 0$ ist. Nach Satz 12.3 aus [12] ist dies genau dann der Fall, wenn $\delta \cdot \nu(z) = 0$ ist. Wir wissen damit, daß die Menge $I := \{h \in RK : h \cdot \nu(z) = 0\}$ im Kern des Operators $\mathcal{F}'(z; \cdot)$ enthalten ist.

Betrachten wir ausschließlich sternförmige Gebiete $z(t) = r(t)(\cos t, \sin t)$ und dementsprechend auch nur sternförmige Störungen $\delta(t) = q(t)(\cos t, \sin t)$, so ist $I = \{0\}$, da hier $\delta \cdot \nu(z) = \frac{r'q}{\sqrt{r^2 + r'^2}}$ gilt, so daß nur für $\delta = 0$ dieser Ausdruck zu Null wird.

Zusätzlich liegt im Kern des Operators auch die Menge aller h , für die $\mathcal{F}'(z; h)\varphi_j$ für alle j auf ψ_j senkrecht ist, und über deren Gestalt können wir so einfach keine Aussage machen.

Eine weitere Frage, die wir hier nicht beantworten wollen, ist die nach der Injektivität des Operators $\mathcal{E}\mathcal{W}_n$: Angenommen wir kennen alle Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren – ist dadurch der Rand des Streukörpers schon eindeutig festgelegt? Dazu würde es genügen zu zeigen, daß dadurch das Fernfeld in jeder Richtung eindeutig festgelegt ist, da wir für den Operator F_d zum Dirichlet-Problem Injektivität nachweisen können (siehe z.B. Satz 10.4

in [12]). Die Beschäftigung mit diesen Problemen würde jedoch den Rahmen dieser Arbeit sprengen.

Wir wollen allgemein betrachten, unter welchen Bedingungen das Newton-Verfahren konvergiert. Ausgehend von Überlegungen aus der Numerik erhalten wir in Banachräumen:

Satz 6.4.1 *Eine Abbildung A des Banachraumes X in sich besitze in x^* eine Nullstelle; d.h. $A(x^*) = 0$. Ist*

- (i) *A auf einer Umgebung von x^* Fréchet-differenzierbar und*
- (ii) *$A'(x^*) \in L(X, X)$ ein Isomorphismus,*

dann gibt es ein $\delta > 0$, so daß für jedes $x_0 \in \{x \in X : \|x - x^\| \leq \delta\}$ die durch das Newton Verfahren gewonnene Folge $\{x_k\}$ definiert ist (d.h. $A'^{-1}(x_k) \in L(X, X)$) und quadratisch gegen x^* konvergiert. Dabei ist die Folge gegeben durch*

$$x_{k+1} = x_k - A'(x_k)^{-1}A(x_k).$$

Wie wir gerade gesehen haben, können wir über die Injektivität der Fréchet-Ableitung keine Aussage machen und demnach auch nicht auf die Konvergenz des Newton-Verfahrens im vorliegenden Fall schließen.

Weiterhin ist anzumerken, daß wir allein dadurch mit Konvergenzproblemen rechnen müssen, daß die Randfunktion, die zu den vorgegebenen Eigenwerten gehört, im allgemeinen nicht in dem endlichdimensionalen Approximationsraum liegen wird und von daher auch eine Nullstelle der Funktion $\mathcal{E}\mathcal{W}_n(z) - \Lambda_n^{vorg.}$ nicht dort gefunden werden muß.

Daß das Problem, wie in Abschnitt 6.1 gezeigt, inkorrekt gestellt ist, macht sich auch nach der Linearisierung bemerkbar. Wir müssen uns also mit der Frage der Regularisierung beschäftigen.

Auf den ersten Blick bietet es sich an, durch geschickte Wahl der Größe des Approximationsraumes zu regularisieren.

Wir wählen einen endlichdimensionalen Unterraum $Y_N \subset RK$, der durch $\{h_1, \dots, h_N\}$ aufgespannt wird. Setzen wir dann $\delta = \sum_{j=1}^N a_j h_j$ mit $a_j \in \mathbb{R}$ an, so erhalten wir aus (6.14) folgendes lineare Gleichungssystem

$$\sum_{j=1}^N a_j \lambda'_i(z; h_j) = \lambda_i^{vorg.} - \lambda_i(z), \quad i = 1, \dots, n. \quad (6.15)$$

Wählen wir $N = 2n$, so erhalten wir ein quadratisches Gleichungssystem. Wenn wir allerdings die Eigenwerte in der Darstellung $\lambda_n = r e^{i\tau n} + M$ gemäß (6.12) betrachten, dann sehen wir, daß die rechte Seite nur über n reelle Unbekannte Informationen liefert. Die Wahl $N > n$ ist daher nicht sinnvoll, weil wir nicht mehr als n Informationen aus der Kenntnis der n Eigenwerte zur Verfügung haben.² Damit ist jegliche Wahl von $N > n$ ausgeschlossen.

²Es wäre vermessen, „genauer“ approximieren zu wollen, als die Daten es ermöglichen.

Im Falle $N \leq n < 2n$ nutzen wir die Tichonow-Regularisierung. Für ein vorgegebenes $\alpha > 0$ lösen wir das Gleichungssystem

$$\alpha a + B^T B a = B^T g \quad (6.16)$$

mit $a = (a_1, \dots, a_N)^T \in \mathbb{R}^N$, $g = (\operatorname{Re}(\lambda_i^{\text{vorg.}} - \lambda_i(z)), \operatorname{Im}(\lambda_i^{\text{vorg.}} - \lambda_i(z)))^T \in \mathbb{R}^{2n}$ und $B = \begin{pmatrix} \operatorname{Re}(\lambda_i'(z; h_j)) \\ \operatorname{Im}(\lambda_i'(z; h_j)) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times N}$.

Bei entsprechender Wahl von α erhalten wir so ein lösbares Gleichungssystem, selbst wenn die Matrix $B^T B$ singulär ist.

6.5 Implementation

Es wird ein zu rekonstruierendes Gebiet vorgegeben, dessen Eigenwerte, um kein „inverse crime“ zu begehen, mit doppelt sovielen Stützstellen und einem anderen Kopplungsparameter η berechnet werden als bei dem anschließenden Newton-Verfahren. Die Vorgabe sollte kein Element des Approximationsraumes sein, um triviales Invertieren zu verhindern.

Wir nutzen die Tatsache aus, daß die Lösung des Dirichlet-Streuproblems durch

$$u(x) = u^i(x) - \int_{\partial D} \frac{\partial u(y)}{\partial \nu(y)} \Phi(x, y) ds(y). \quad (6.17)$$

charakterisiert werden kann, falls die einfallende Welle u^i eine Lösung der Helmholtzgleichung im ganzen Raum ist.

Damit läßt sich die Normalableitung der Lösung, die ja für die Fréchet-Ableitung des Fernfeldoperators benötigt wird, aus folgendem Integralgleichungssystem berechnen:

$$(I + K' - i\eta S) \frac{\partial u}{\partial \nu} = 2 \frac{\partial u^i}{\partial \nu} - 2i\eta u^i. \quad (6.18)$$

Wir betrachten ausschließlich sternförmige Gebiete, die in der Radialdarstellung $r(\varphi)(\cos \varphi, \sin \varphi)$ gegeben sind. Die Radialkurve $r(\varphi)$ wird durch trigonometrische Funktionen approximiert. Alternativ kann man auch radiale Basisfunktionen als Interpolationsfunktionen wählen und erhält so größere Genauigkeit bei lokalen Abweichungen.

Die Anzahl n der zu differenzierenden Eigenwerte darf nicht zu groß gewählt werden, da die λ_j sehr schnell gegen Null konvergieren. Daher ist auch zu erwarten, daß die Änderungen sehr klein werden. Es stellt sich heraus, daß für $n > 10$ im Rahmen der Rechengenauigkeit kein vernünftiges Ergebnis mehr zu erwarten ist.

Dies liefert eine natürliche Beschränkung für die Größe des Approximationsraumes N , die höchstens gleich n gewählt werden sollte.

Da die Eigenwerte des Kreises alle doppelt sind, können wir im Augenblick die Fréchet-Differenzierbarkeit nicht nachweisen. Daher beginnen wir mit einer Ellipse als Ausgangsnäherung z_0 , für die die Eigenwerte λ_{j,z_0} , $j = 1, \dots, n$ berechnet seien.

Wir können den Algorithmus eines Newton-Schrittes folgendermaßen angeben:

Solange die Abbruchbedingung für z_j bzw. $\Lambda_n(z_j)$ nicht erfüllt ist

Berechne für jede Einfallrichtung d_m von ebenen Wellen:

$$(I + K' - i\eta S) \frac{\partial u(x_i; d_m)}{\partial \nu} = 2 \frac{\partial u^i(x_i; d_m)}{\partial \nu} - 2i\eta u^i(x_i; d_m) \text{ an Knotenstellen } x_i,$$

daraus das Fernfeld $u_\infty(\hat{x}_i; d_m)$,

daraus eine Spalte des Fernfeldoperators FF

und die Fréchetableitung für jede Funktion h_l aus dem Approximationsraum

$$(I + K - i\eta S)\chi = -2\nu h_l \frac{\partial u(x_i; d_m)}{\partial \nu},$$

daraus das Fernfeld mit $v_{\infty,l}(\hat{x}_i; d_m)$

und daraus eine Spalte des Fernfelds FF_l .

Berechne die Eigenwerte λ_i und Eigenvektoren φ_i von FF

Berechne für jeden zu benutzenden Eigenwert λ_i

und für jede Funktion h_l :

$$\langle FF_l \varphi_i, R \overline{\varphi_i} \rangle.$$

Berechne daraus die Matrix der Tichonow-Regularisierung und bestimme die Parameter a_l aus (6.16).

Setze dann $z_{j+1} = z_j + \sum_{l=1}^N a_l h_l$.

Wenn das Abbruchkriterium erfüllt ist oder wenn das Verfahren divergiert ist abzubrechen.

Als mögliche Abbruchkriterien kann man sich $\frac{\|\Lambda_n^{vorg.} - \Lambda_n(z_j)\|}{\|\Lambda_n^{vorg.}\|} < \varepsilon_1$ oder $\frac{\|z - z_j\|_{max}}{\|z\|_{max}} < \varepsilon_2$

vorstellen. Da wir im Vorhinein keine Aussagen über eine Konvergenz des Verfahrens machen können, bietet sich das erste Kriterium eher an, denn es benutzt ausschließlich die Tatsache, daß sich das Verfahren in der Nähe einer beliebigen Nullstelle befindet, unabhängig von der Eindeutigkeit der Nullstelle.

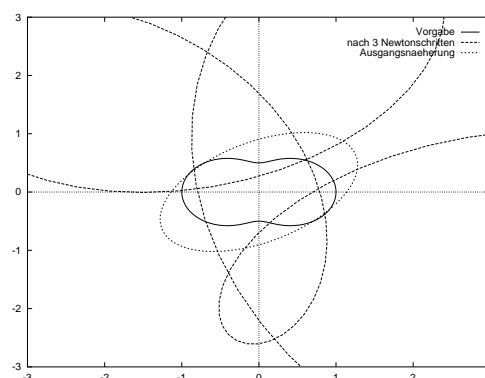
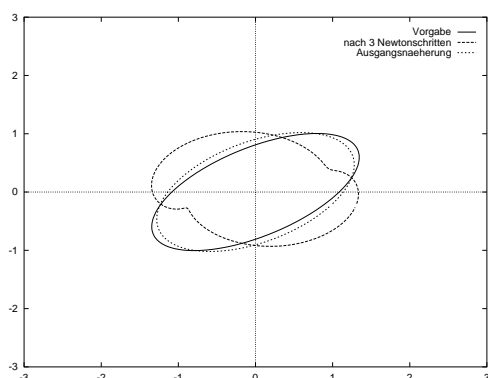
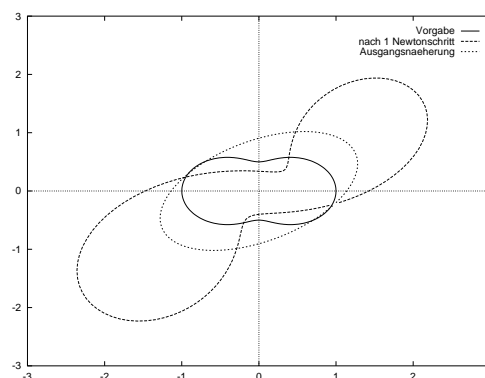
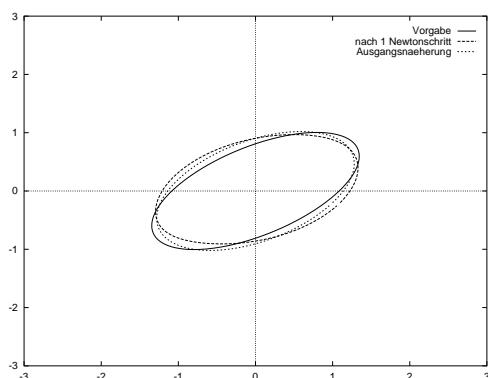
6.6 Numerische Resultate

Dieser Abschnitt zeigt Rekonstruktionsversuche mit dem Newtonverfahren für die Eigenwerte des Fernfeldoperators zum Dirichletproblem.

Für das Newton-Verfahren wurden jeweils die sieben betragsmäßig größten Eigenwerte Fréchet-differenziert. Die Radialkurve $r(\varphi)$ wurde mit trigonometrischen Funktionen approximiert, die Größe des Approximationsraumes war fünf. Für die Tichonow-Regularisierung wurde der Regularisierungsparameter $\alpha = 0.1$ gewählt. Die Wellenzahl war in beiden Fällen $k = 2$. Zuerst wurde keine Relaxation verwendet. Als Ausgangsnäherung wurde eine Ellipse verwendet.

In der oberen Zeile wurde jeweils nur ein Newton-Schritt durchgeführt, in der unteren drei. Die linke Spalte versucht einen Streukörper zu rekonstruieren, der ebenfalls in Form einer Ellipse gegeben ist und sich von der Ausgangsnäherung nicht wesentlich unterscheidet. Nach einem Schritt sieht man noch keine wesentlichen Veränderungen, nach drei Schritten deutet sich die Divergenz des Verfahrens merklich an.

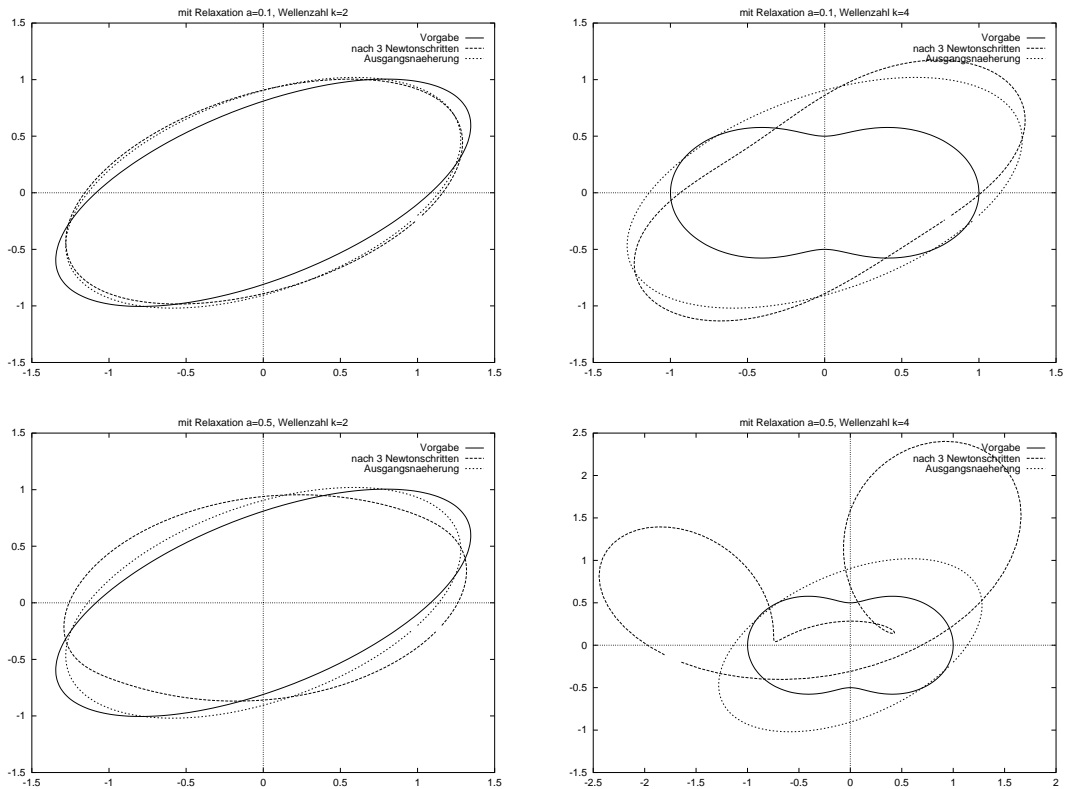
Die rechte Seite hat als Vorgabe einen Streukörper in der Form einer Erdnuß. Hier sieht man schon nach nur einem Newton-Schritt, daß sich die Ergebnisse von der gesuchten Kurve erheblich entfernen. Nach drei Schritten herrscht „Chaos“.



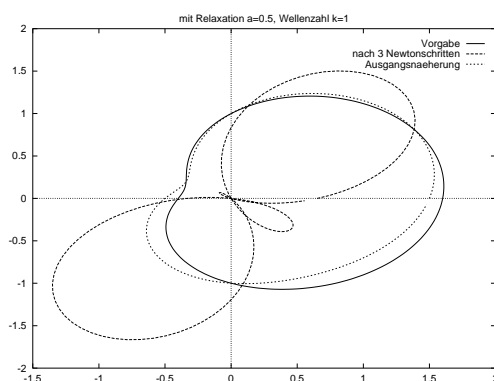
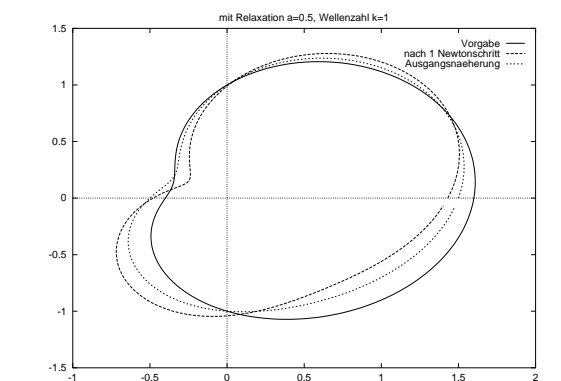
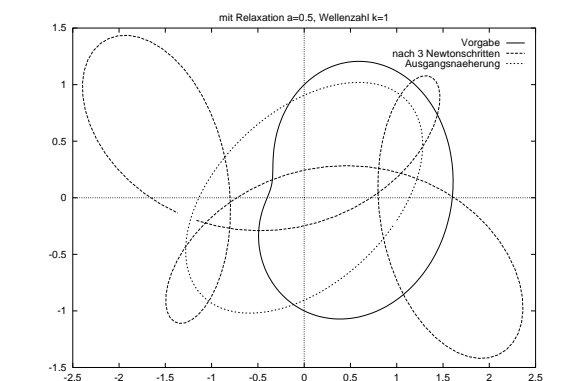
Im folgenden wurden verschiedene Variationen getestet:

Es wurde eine Relaxation mit $a = 0.1$ (obere Zeile) und $a = 0.5$ (untere Zeile) durchgeführt. Man sieht, daß bei einem kleineren Relaxationsparameter die Ergebnisse zwar langsamer divergieren, doch die Veränderung von vornherein in die falsche Richtung läuft.

Im Falle der Erdnuß wurde in Hoffnung auf eine bessere Konvergenz eine höhere Wellenzahl, $k = 4$, angenommen. Aber auch dann erhalten wir nach nur drei Newton-Schritten stark divergierende Ergebnisse.



Abschließend unternehmen wir einen weiteren Versuch, indem absichtlich ein „inverse crime“ begangen wird. Dazu verwenden wir als Vorgabe eine Kurve, die ein Element des Approximationsraumes ist. Zuerst setzen wir als Ausgangsnäherung dieselbe Ellipse wie vorher an. Dann wählen wir auch die Ausgangsnäherung aus dem Approximationsraum und zwar aus nächster Nachbarschaft der gesuchten Vorgabe. Es zeigt sich, daß das Verfahren selbst unter diesen Bedingungen nicht konvergiert. Nach einem Newtonschritt ist das Ergebnis noch erträglich, nach dreien in jedem Fall katastrophal.



6.7 Ausblick

In dem letzten Kapitel haben wir einen Weg aufgezeigt, der es ermöglichen soll, allein aus dem Kenntnis der Eigenwerte eines Fernfeldoperators die Form und Lage des Streukörpers zu ermitteln. Dieses Newton-Verfahren steht vom Gesichtspunkt mathematischer Theorie her auf tönernen Füßen, da wir weder für den Operator $\mathcal{E}\mathcal{W}_n$ selbst, noch für die linearisierte Gleichung Injektivität nachweisen können. Auch weisen die numerischen Ergebnisse aus Kapitel 5 darauf hin, daß ein solches Verfahren nicht unbedingt stabile Ergebnisse liefern würde.

Ein Problem besteht darin, daß wir die Dimension des Approximationsraumes nicht beliebig wählen können. Durch die Anzahl der verwendeten Eigenwerte ist uns eine Grenze gesetzt, die wir relativ niedrig ansetzen müssen, da für manche Parameter- und Parametrisierungskonstellationen höchstens 6 Eigenwerte sinnvoll von der Null unterscheidbar sind.

Durch die geringe Größe der Eigenwerte ergibt sich eine weitere Schwierigkeit. Wir erhalten nämlich auch nur sehr kleine Änderungen in den Eigenwerten für verschiedene Randkurven, und dementsprechend ungenau wird die Invertierung der Fréchet-Ableitung. Hier zeigt sich deutlich die Schlecht-Gestelltheit des Problems.

Ein weiteres Problem ergibt sich durch die Tatsache, daß die Eigenwerte außer von der Wellenzahl k nur von einer reellen Größe abhängen, also auf einer eindimensionalen Mannigfaltigkeit liegen. Durch diese Verteilung sind sie nicht prädestiniert, ein zweidimensionales Gebiet zu beschreiben.

Trotzdem war es interessant, dieses Verfahren wirklich einmal numerisch zu implementieren und zu testen (auch wenn sich dabei die vorher gehegten Bedenken bestätigt haben).

Allerdings kann ich nicht mit Gewißheit behaupten, daß das Verfahren nicht konvergieren kann; nur mit meinem Programm wurden keine konvergierenden Ergebnisse erzielt, obwohl die verschiedensten Kombinationen von Approximationsraum-Größe, Relaxationsparameter, Regularisierungsparameter bei der Tichonow-Regularisierung, Wellenzahl, Anzahl differenzierter Eigenwerte, Wahl der Ausgangsnäherung und Wahl der zu bestimmenden Randkurve ausgetestet wurden ³.

Deshalb wird an dieser Stelle auch auf eine Diskussion möglicher Abbruchkriterien und der Optimierung der Parameter während des Newton-Verfahrens verzichtet.

³Die meisten Tests sind hier nicht explizit beschrieben worden, da sie keine wesentlich anderen Ergebnisse zeigen.

Schlußbemerkungen

Ziel dieser Arbeit war es, die Frage nach der Lage der Eigenwerte des Fernfeldoperators zum konduktiven Randwertproblem zu beantworten. Darüberhinaus wollten wir den Informationsgehalt der Eigenwerte in Hinblick auf eine Rekonstruktion des Streukörpers untersuchen. Dazu haben wir uns im ersten Kapitel mit der physikalischen Motivation des konduktiven Randwertproblems auseinandergesetzt. Dann haben wir Werkzeuge für die nachfolgenden Kapitel bereitgestellt, die sich insbesondere mit dem Verhalten von kompakten Operatoren und austrahlenden Lösungen der Helmholtzgleichung beschäftigen.

Wir konnten Bedingungen angeben, unter denen das konduktive Randwertproblem eine eindeutige Lösung besitzt, die wir mit Hilfe von Randintegraloperatoren darstellen können. Dadurch überführten wir das Randwertproblem für eine partielle Differentialgleichung in ein äquivalentes Integralgleichungssystem. Für dieses Integralgleichungssystem können wir mit Hilfe des Nyström-Verfahrens eine gute numerische Approximationslösung angeben.

Wir haben im Rahmen dieser Arbeit gesehen, daß wir Kreise angeben können, in denen die Eigenwerte des Fernfeldoperators \mathcal{F} liegen müssen. Der Radius dieser Kreise hängt von den vorgegebenen Parametern, die das Randwertproblem definieren, darunter die Wellenzahl k und die Kopplungsparameter und -funktionen ab. Dabei erhalten wir Abschätzungen für die Lage und die Größe der Kreise, in die spezielle Eigenschaften des Streukörpers eingehen. Anhand numerischer Beispiele haben wir die theoretischen Ergebnisse bestätigt.

Wir können also die *inverse* Fragestellung betrachten, in wie weit uns die Kenntnis der Eigenwerte zu einer Abschätzung für den Streukörper führt. Dazu haben wir numerische Ergebnisse geliefert, die aufzeigen, daß eine Abschätzung der Größe des Streukörpers aus der Lage der Eigenwerte in der richtigen Größenordnung liegt.

Abschließend wurde ein Newton-Verfahren vorgestellt, daß eine Rekonstruktion des Streukörpers aus der Kenntnis von n Eigenwerten ermöglichen soll. Dazu haben wir die Fréchet-Differenzierbarkeit der Eigenwerte nach der Randkurve nachgewiesen; allerdings nur unter der Voraussetzung, daß die Eigenwerte einfach mit Riesz-Zahl Eins sind. Für den Fall, daß diese Bedingungen nicht gegeben sind, ist im Augenblick die Existenz und

die Form der Fréchet-Ableitung unbekannt. Aufbauend auf der Ableitung haben wir ein Newton-Verfahren vorgestellt, daß sich in ähnlichen Rekonstruktionsproblemen bewährt hat. Leider ist es bisher nicht gelungen, das Verfahren erfolgreich zu implementieren; die vorliegende Version divergiert. Obwohl es durchaus fraglich ist, ob auf diese Weise überhaupt Rekonstruktionsergebnisse erzielt werden können, hoffe ich, daß es demnächst gelingen wird.

Danksagung

Ich möchte Herrn Prof. Dr. Kreß für die Vergabe dieses interessanten Themas sowie für die stets hilfreiche Betreuung dieser Arbeit danken.

Weiterhin danke ich meinen Eltern für ihre finanzielle und liebevolle Unterstützung während meines gesamten Studiums, Rainer dafür, daß er immer für mich da war und sich meine Sorgen angehört hat, meiner WG für ihre Geduld und jeden Wein, den sie mit mir getrunken hat und allen Menschen am Institut für Numerische und Angewandte Mathematik, die diese Arbeit Korrektur gelesen und mich in der letzten Zeit begleitet haben.

DANKE !!!

Literaturverzeichnis

- [1] **Anselone, P. M.** *Collectively Compact Operator Approximation Theory and Applications to Integral Equations*, Prentice-Hall, Inc., 1971
- [2] **Berger, M.S.** *Nonlinearity and Functional Analysis*, Academic Press, 1977
- [3] **Colton, D. , Kress, R.** *Integral Equation Methods in Scattering Theory*, Wiley Interscience, 1983
- [4] **Colton, D. , Kress, R.** *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*, Springer 1992
- [5] **Colton, D. , Kress, R.** *Eigenvalues of the Far Field Operator and Inverse Scattering Theory*, SIAM J. Math. Anal., **26**, No. 3, pp. 601-615, May 1995
- [6] **Colton, D. , Kress, R.** *Eigenvalues of the Far Field Operator for the Helmholtz Equation in an absorbing Medium*, SIAM J. Appl. Math., **55**, No. 6, pp. 1724-1735, December 1995
- [7] **Hettlich, F.** *Die Integralgleichungsmethode bei Streuung an Körpern mit einer dünnen Schicht*, Diplomarbeit, NAM Göttingen 1989
- [8] **Hohage, T.** *Das Newton-Verfahren zum inversen Neumann-Problem zur Helmholtzgleichung*, Diplomarbeit, NAM Göttingen 1996
- [9] **Kirsch, A.** *Generalized boundary value and control problems for the Helmholtz equation*, Habilitationsschrift, Göttingen 1984
- [10] **Kirsch, A.** *The Denseness of the Far Field Patterns for the Transmission Problem*, IMA J. of Appl. Math (1986) **37**, 213-225
- [11] **Kress, R.** *Linear Integral Equations*, Springer 1989
- [12] **Kress, R.** *Inverse Probleme*, Vorlesung WS 94/95 und SS 95, NAM Göttingen
- [13] **Kress, R. , Roach, G.F.** *Transmission Problems for the Helmholtz Equation*, J.Math.Phys.**19**, June 1978

- [14] **Kupradse, W.D.** *Randwertaufgaben der Schwingungstheorie und Integralgleichungen*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaft, Berlin, 1952
- [15] **Potthast, R.** *Frechet differentiability of boundary integral operators in inverse acoustic scattering*, Inverse Probl. **10**, No.2, 431-447, 1994
- [16] **Ringrose, J.R.** *Compact Non-Selfadjoint Operators*, Van Nostrand Reinhold Math.Studies **35**, 1971
- [17] **Schormann, C.** *Newton-Verfahren für ein inverses Transmissionsproblem bei elektromagnetischen Wellen*, Diplomarbeit, NAM Göttingen 1996
- [18] **Vasseur, G. , Weidelt, P.** *Bimodal electromagnetic introduction in nonuniform thin sheets with an application of the northern Pyrenean induction anomaly*, Geophys. J. Roy. Astron. Soc., **51**, 669-690, 1977
- [19] **Werner, D.** *Funktionalanalysis*, Springer 1991
- [20] **Zinn, A.** *Eine numerische Methode zur Lösung eines Transmissionsproblems bei der Helmholtzgleichung*, Diplomarbeit, NAM Göttingen 1987