

**Untersuchung einer stabilisierten
Finite-Elemente-Methode
für die
Oseen-Gleichungen**

Diplomarbeit

vorgelegt von
Lars Müller
aus
Northeim

angefertigt am
Institut für
Numerische und Angewandte Mathematik
der
Georg-August-Universität zu Göttingen
1997

Inhaltsverzeichnis

0	Einleitung	1
1	Angepaßte Funktionenräume	3
2	Grundlegende Aussagen über gemischte Variationsgleichungen	7
2.1	Einführung und Bezeichnungen	7
2.2	Existenz und Eindeutigkeit der Lösung gemischter Variationsgleichungen	8
3	Die Oseen-Gleichung	11
3.1	Schwache Formulierung	12
3.2	Existenz und Eindeutigkeit der Lösung der Oseen-Gleichung	14
4	Diskretisierung gemischter Variationsgleichungen (gemischte FEM)	18
4.1	Das diskrete Problem	18
4.2	Rückführung auf ein lineares Gleichungssystem	19
4.3	Stabilität	21
4.4	Konvergenz	22
5	Streamline-Diffusion-FEM	27
5.1	Voraussetzungen und Notationen	27
5.2	Stabilität	30
5.3	Konvergenz	40
5.4	Wahl der Stabilisierungsparameter	48
6	Numerische Experimente I (Oseen-Gleichung)	55
6.1	Ursprüngliche Wahl der Parameter	56
6.2	Wahl der Parameter gemäß SDFEM	67
7	Die Navier-Stokes-Gleichung	79
8	Numerische Experimente II (driven-cavity-Strömung)	81
	Danksagung	94
	Literaturverzeichnis	95

Kapitel 0

Einleitung

Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist die numerische Behandlung der Oseen-Gleichung, welche bei der Linearisierung der inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichung entsteht. Gesucht wird beim Navier-Stokes-Problem das Geschwindigkeitsfeld u und der Druck p mit

$$\begin{aligned} -\epsilon \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p &= f \text{ in } \Omega, \\ \nabla \cdot u &= 0 \text{ in } \Omega. \end{aligned}$$

Dieses nichtlineare Problem kann linearisiert werden mittels der Iteration

$$\begin{aligned} -\epsilon \Delta u^{n+1} + (u^n \cdot \nabla)u^{n+1} + \nabla p^{n+1} &= f, \\ \nabla \cdot u^{n+1} &= 0. \end{aligned}$$

Das in jedem Iterationsschritt entstehende linearisierte Problem bezeichnet man als Oseen-Gleichung. Betrachtet man dieses als eigenständige Gleichung, so lautet diese

$$\begin{aligned} -\epsilon \Delta u + (a \cdot \nabla)u + \nabla p &= f, & (1) \\ \nabla \cdot u &= 0 & (2) \end{aligned}$$

mit einem divergenzfreien Strömungsfeld a .

Eine schwache Formulierung von (1) und (2) führt auf eine gemischte Variationsgleichung (siehe Kapitel 3). Bei der numerischen Behandlung solcher Probleme stößt man gegenüber einfacheren partiellen Differentialgleichungen, wie zum Beispiel skalarer Diffusions-Konvektions-Gleichungen, auf zusätzliche Schwierigkeiten. Man stellt schnell fest, daß eine Diskretisierung mit Hilfe des Galerkin-Finite-Elemente-Verfahrens nicht uneingeschränkt verwendet werden kann. Dieses erfordert eine aufeinander abgestimmte Wahl der finiten Elemente für Geschwindigkeit und Druck, da sonst die entstehenden linearen Gleichungssysteme nicht stabil lösbar sind. Die Forderung an die finiten Elemente ist dabei die Babuška-Brezzi-Bedingung (kurz BB-Bedingung, vgl. Kapitel 4). Ein weiteres Problem ist die Dominanz des konvektiven Terms $(a \cdot \nabla)u$ bei kleinem ϵ , was zu physikalisch unsinnigen Oszillationen der diskreten Lösung führen kann.

Abhilfe schafft hier die Verwendung der Streamline-Diffusion-FEM, welche zum einen die Babuška-Brezzi-Bedingung nicht erfordert und zum anderen den numerischen Oszillationen entgegenwirkt. Diese Technik wird in Kapitel 5 genauer analysiert. Insbesondere werden Stabilitäts- und Konvergenzeigenschaften nachgewiesen. Diese theoretischen Ergebnisse werden in Kapitel 6 mittels numerischer Experimente sowohl in 2D als auch in 3D überprüft.

Durchgeführt wurden diese Experimente mit dem Programm PNS (Parallel Navier-Stokes), welches zur Zeit am Institut für Numerische und Angewandte Mathematik weiterentwickelt wird. Mit diesem Programm können verschiedene Arten von Problemen gelöst werden, von linearen skalaren Diffusions-Konvektions-Reaktions-Gleichungen bis hin zu den nichtlinearen Navier-Stokes-Gleichungen.

Die Besonderheit von PNS besteht in der Parallelisierung der Rechnung mittels Gebietszerlegung. Diese Methode wurde aber für die numerischen Untersuchungen in dieser Arbeit nicht verwendet.

Da die Oseen-Gleichung wie oben beschrieben als Teilproblem der Navier-Stokes-Gleichung auftritt (genauer hierzu findet sich in Kapitel 7), wurden abschließend noch einige numerische Experimente mit dem Navier-Stokes-Fall durchgeführt. Die Ergebnisse sind in Kapitel 8 dargestellt.

Kapitel 1

Angepaßte Funktionenräume

Eines der einfachsten Beispiele einer partiellen Differentialgleichung ist das sog. Poisson-Problem :

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Gesucht ist $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega, \quad (1.1)$$

$$u = 0 \text{ auf } \Gamma := \partial\Omega. \quad (1.2)$$

Dabei ist $\Delta := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$.

Eine Funktion $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, welche (1.1) und (1.2) erfüllt, bezeichnet man als *klassische Lösung* der Poisson-Gleichung.

Das Problem hierbei ist, daß dieser klassische Lösungsbegriff zu hohe Anforderungen an die Daten des Problems stellt. Ein Ausweg führt bei partiellen Differentialgleichungen auf den Begriff der schwachen Lösung, welche in Räumen der schwach differenzierbaren Funktionen gesucht wird. Zur Definition dieser Räume benötigt man zuerst die Lebesgue-Räume oder kurz L^p -Räume :

Definition 1.1 Sei $\Omega \in \mathbb{R}^n$ meßbar. Für $1 \leq p < \infty$ bezeichnet $L^p(\Omega)$ die Menge der Äquivalenzklassen meßbarer Funktionen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, für die gilt

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty. \quad (1.3)$$

Bemerkung 1.2

- Mit der Norm (1.3) wird der $L^p(\Omega)$ ein Banach-Raum.
- Im Spezialfall $p = 2$ ist der $L^p(\Omega) = L^2(\Omega)$ mit dem Skalarprodukt

$$(u, v) := \int_{\Omega} uv \, dx \quad \forall u, v \in L^2(\Omega)$$

ein Hilbert-Raum.

Beweis : vgl. [1] Satz 1.13.

Bisher wurde nur der Fall $p < \infty$ betrachtet. Dieses kann erweitert werden mittels

Definition 1.3 Sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ fast überall beschränkt, d.h. es existiert ein $C > 0$ mit

$$|f(x)| \leq C \text{ f.ü.} \quad (1.4)$$

Dann bezeichnet ess $\sup_{x \in \Omega} |f(x)|$ die kleinste Zahl C , für die (1.4) gilt.

Definition 1.4 Der $L^\infty(\Omega)$ ist die Menge der Äquivalenzklassen meßbarer Funktionen, für die gilt

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} := \text{ess sup}_{x \in \Omega} |f(x)| < \infty.$$

Weitere benötigte Funktionenräume sind die unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in Ω und die lokal integrierbaren Funktionen :

Definition 1.5

$$C^\infty(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ ist unendlich oft differenzierbar in } \Omega\}$$

$$C_0^\infty(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \in C^\infty(\Omega) \text{ und } \text{supp}(f) \subset \Omega \text{ ist kompakt}\}$$

Dabei ist $\text{supp}(f) := \text{cl}\{x \in \Omega : f(x) \neq 0\}$ der Träger von f .

Definition 1.6 Eine meßbare Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gehört zu $L_{loc}^1(\Omega)$, falls für jede abgeschlossene beschränkte Teilmenge $A \subset \Omega$ gilt

$$\int_A |f| dx < \infty.$$

Im folgenden benötigt man noch die Multiindexschreibweise für Ableitungen :

Definition 1.7 Sei $\alpha = (\alpha_i)_{i=1}^n \in \mathbb{N}_0^n$. Dann bezeichnet $|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i$ die Länge von α .

Ist $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ hinreichend oft differenzierbar, so ist

$$D^\alpha f(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}(x) \quad (|\alpha| \geq 1),$$

$$D^{(0, \dots, 0)} f(x) := f(x).$$

Mit den getroffenen Definitionen ist es nun möglich, den Begriff der verallgemeinerten Ableitung einzuführen :

Definition 1.8 Eine Funktion $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ heißt verallgemeinerte Ableitung $D^\alpha f$ von $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, falls gilt

$$\int_{\Omega} gv \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f D^\alpha v \, dx \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Definition 1.9 Sei $1 \leq p < \infty$. Dann werden die Sobolev-Räume definiert durch

$$W^{k,p}(\Omega) := \{f \in L^p(\Omega) : \exists D^\alpha f \in L^p(\Omega) \forall \alpha : |\alpha| \leq k\}.$$

Auf $W^{k,p}(\Omega)$ läßt sich eine Norm erklären durch

$$\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (1.5)$$

Bemerkung 1.10 Mit der Norm (1.5) ist der $W^{k,p}(\Omega)$ ein Banach-Raum.

Beweis : vgl. [1] Abschn. 1.20

Definition 1.11 $W_0^{k,p}(\Omega)$ ist der Abschluß des $C_0^\infty(\Omega)$ in der Norm $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$.

Ein wichtiger Spezialfall für partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung ist $k = 1, p = 2$. Hierfür wird folgende Schreibweise verwendet :

$$\begin{aligned} H^1(\Omega) &:= W^{1,2}(\Omega), \\ H_0^1(\Omega) &:= W_0^{1,2}(\Omega). \end{aligned}$$

Satz 1.12 Für $f \in H_0^1(\Omega)$ ist

$$|f|_{H_0^1(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha|=1} \|D^\alpha f\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

eine zu $\|\cdot\|_{W^{1,2}(\Omega)}$ äquivalente Norm.

Beweis : vgl. [12] Lemma 3.2.

In dieser Arbeit wird im weiteren stets folgende Schreibweise für die entsprechenden Normen verwendet :

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_0 &:= \|\cdot\|_{L^2(\Omega)} & \|\cdot\|_\infty &:= \|\cdot\|_{L^\infty(\Omega)} \\ \|\cdot\|_1 &:= \|\cdot\|_{W^{1,2}(\Omega)} & |\cdot|_1 &:= |\cdot|_{H_0^1} \end{aligned}$$

Bei Bildung der Normen wird die Integration also grundsätzlich über das gesamte Gebiet Ω erstreckt. Soll die Integration nur über eine Teilmenge $K \subset \Omega$ ausgeführt werden, so wird dieses durch einen weiteren Index an der Norm kenntlich gemacht, z.B. $\|\cdot\|_{0,K} = \|\cdot\|_{L^2(K)}$. Das gleiche gilt für das L^2 -Skalarprodukt, d.h. $(u, v)_K := \int_K uv \, dx$.

Bemerkung 1.13 *Der $H_0^1(\Omega)$ wird mittels des Skalarprodukts*

$$(u, v)_{H_0^1(\Omega)} := \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=1} D^\alpha u D^\alpha v \, dx$$

ein Hilbert-Raum.

Beweis : vgl. [18] Prop. 18.23

Das Poisson-Problem (1.1) und (1.2) stellt ein skalares Problem dar, d.h. das Bild der gesuchten Funktion liegt in \mathbb{R} . Bei der später betrachteten Oseen-Gleichung (siehe Kapitel 3) handelt es sich aber um ein vektorwertiges Problem. Die gesuchte Funktion für das Geschwindigkeitsfeld bildet in den \mathbb{R}^n ab. Daher benötigt man Normen für die Räume $L^2(\Omega)^n$, $L^\infty(\Omega)^n$ und $H_0^1(\Omega)^n$:

Definition 1.14 *Für $u \in H_0^1(\Omega)^n$, $u = (u_1, \dots, u_n)$ und $a \in L^\infty(\Omega)^n$, $a = (a_1, \dots, a_n)$ werden Normen definiert durch*

$$\begin{aligned} \|u\|_0 &:= \left(\sum_{i=1}^n \|u_i\|_0^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \|u\|_1 &:= \left(\sum_{i=1}^n \|u_i\|_1^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \\ |u|_1 &:= \left(\sum_{i=1}^n |u_i|_1^2 \right)^{1/2}, \\ \|a\|_\infty &:= \max_{j=1, \dots, n} \|a_j\|_\infty. \end{aligned}$$

Kapitel 2

Grundlegende Aussagen über gemischte Variationsgleichungen

In diesem Abschnitt soll auf die abstrakte Theorie gemischter Variationsgleichungen eingegangen werden. Das Ziel ist die Anwendung dieser Theorie auf das Oseen-Problem, welches in Kapitel 3 eingeführt wird. Es wird sich dort herausstellen, daß die schwache Formulierung dieses Problems eine gemischte Variationsgleichung darstellt.

Es sollen im folgenden nur die später benötigten Tatsachen zusammengestellt werden. Die Beweise finden sich bei [3].

2.1 Einführung und Bezeichnungen

Seien X und M (reelle) Hilbert-Räume mit den Normen $\|\cdot\|_X$ und $\|\cdot\|_M$.

Weiterhin seien X^* und M^* die zugehörigen Dualräume mit den Dualnormen $\|\cdot\|_{X^*}$ und $\|\cdot\|_{M^*}$.

Der Ausdruck $\langle \cdot, \cdot \rangle$ bezeichne das Dualitätsprodukt, d.h. für $l \in X^*$ wird definiert

$$\langle l, x \rangle := l(x) \quad \forall x \in X.$$

Gegeben seien weiterhin zwei Bilinearformen

$$a(\cdot, \cdot) : X \times X \rightarrow \mathbb{R},$$

$$b(\cdot, \cdot) : X \times M \rightarrow \mathbb{R}.$$

Vorausgesetzt wird die Stetigkeit von $a(\cdot, \cdot)$ und $b(\cdot, \cdot)$, d.h.

$$\|a\| := \sup_{u, v \in X} \frac{a(u, v)}{\|u\|_X \|v\|_X} < \infty,$$
$$\|b\| := \sup_{v \in X, \mu \in M} \frac{b(v, \mu)}{\|v\|_X \|\mu\|_M} < \infty.$$

Betrachtet wird nun folgendes **Variationsproblem (Q)** :

Seien $l \in X^*$, $\chi \in M^*$.

Finde $(u, \lambda) \in X \times M$ mit

$$a(u, v) + b(v, \lambda) = \langle l, v \rangle \quad \text{für alle } v \in X, \quad (2.1)$$

$$b(u, \mu) = \langle \chi, \mu \rangle \quad \text{für alle } \mu \in M. \quad (2.2)$$

Den Bilinearformen $a(\cdot, \cdot)$ und $b(\cdot, \cdot)$ werden folgende lineare und stetige Operatoren zugeordnet :

$$\begin{aligned} A : X &\longrightarrow X^* \\ \langle Au, v \rangle &= a(u, v) \quad \text{für alle } u, v \in X, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B : X &\longrightarrow M^* \\ \langle Bv, \mu \rangle &= b(v, \mu) \quad \text{für alle } v \in X, \mu \in M, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B' : M &\longrightarrow X^* \\ \langle B'\mu, v \rangle &= b(v, \mu) \quad \text{für alle } v \in X, \mu \in M. \end{aligned}$$

Die Existenz solcher Operatoren findet sich z.B. bei [13] Lemma 6.5.1. Dort werden zwar nur Bilinearformen auf $X \times X$ betrachtet, der Beweis überträgt sich aber auf Bilinearformen auf $X \times M$ bzw. $M \times X$.

Dem Problem (Q) läßt sich ein sogenanntes restringiertes Variationsproblem zuordnen :

Sei $V(\chi) := \{v \in X \mid b(v, \mu) = \langle \chi, \mu \rangle \text{ für alle } \mu \in M\}$ und

$$\begin{aligned} V := V(0) &= \ker B \\ &= \{v \in X \mid b(v, \mu) = 0 \text{ für alle } \mu \in M\}. \end{aligned}$$

Damit lautet das **Problem (P)** :

Finde $u \in V(\chi)$ mit

$$a(u, v) = \langle l, v \rangle \quad \text{für alle } v \in V.$$

2.2 Existenz und Eindeutigkeit der Lösung gemischter Variationsgleichungen

Der erste Satz stellt einen Hilfssatz zum Beweis des Existenzsatzes 2.3 dar. In diesem werden aber Aussagen gemacht, die später beim Beweis der Stabilität und Konvergenz gemischter finiter Elemente gebraucht werden.

Satz 2.1 *Äquivalent sind folgende Aussagen:*

(i) *Es existiert ein $\beta > 0$ mit*

$$\inf_{\mu \in M} \sup_{v \in X} \frac{b(v, \mu)}{\|v\|_X \|\mu\|_M} \geq \beta. \quad (2.3)$$

(ii) *Sei $V^\perp := \{x \in X : (x, v) = 0 \text{ für alle } v \in V\}$.*

Die Abbildung $B : V^\perp \rightarrow M^$ ist ein Isomorphismus, und es gilt*

$$\|Bv\|_{M^*} \geq \beta \|v\|_X \quad \text{für alle } v \in V^\perp.$$

(iii) *Sei $V^0 := \{l \in X^* : \langle l, v \rangle = 0 \text{ für alle } v \in V\}$.*

Die Abbildung $B' : M \rightarrow V^0$ ist ein Isomorphismus, und es gilt

$$\|B'\mu\| \geq \beta \|\mu\|_M \quad \text{für alle } \mu \in M.$$

Mit Hilfe dieses Satzes ist es nun möglich, die Äquivalenz der Probleme (P) und (Q) zu zeigen. Da diese Aussage bei [3] nicht ausgeführt wurde, soll diese hier bewiesen werden.

Satz 2.2

1. *Ist $(u, \lambda) \in X \times M$ eine Lösung von (Q), dann löst $u \in X$ das Problem (P).*
2. *Es existiere ein $\beta > 0$ mit*

$$\inf_{\mu \in M} \sup_{v \in X} \frac{b(v, \mu)}{\|v\|_X \|\mu\|_M} \geq \beta.$$

Dann gibt es zu jeder Lösung $u \in X$ von (P) genau ein $\lambda \in M$, so daß (u, λ) Lösung von (Q) ist.

Beweis:

(i) Sei $(u, \lambda) \in X \times M$ Lösung von (Q). Dann gilt also

$$\begin{aligned} b(u, \mu) &= \langle \chi, \mu \rangle \quad \text{für alle } \mu \in M, \\ \text{d.h. } u &\in V(\chi). \end{aligned}$$

Wähle nun ein $v \in V \subset X$. Da $\lambda \in M$ ist, gilt dann $b(v, \lambda) = 0$. Mit (2.1) folgt

$$a(u, v) = \langle l, v \rangle \quad \text{für alle } v \in V.$$

Also löst u das Problem (P).

(ii) Sei $u \in V(\chi)$ Lösung von (P). Daraus folgt dann

$$b(u, \mu) = \langle \chi, \mu \rangle \quad \text{für alle } \mu \in M$$

und damit (2.2).

Es bleibt zu zeigen, daß es ein $\lambda \in M$ gibt, so daß (2.1) erfüllt ist, d.h.

$$a(u, v) + b(v, \lambda) = l(v) \quad \forall v \in X$$

bzw. in Operatorschreibweise

$$Au + B'\lambda = l. \quad (2.4)$$

Da u Lösung von (P) ist folgt für $v \in V$

$$\langle l - Au, v \rangle = \langle l, v \rangle - a(u, v) = 0.$$

Daher ist $l - Au \in V^0$.

Nach Satz 2.1 ist die inf-sup-Bedingung (2.3) äquivalent zu der Aussage, daß die Abbildung $B' : M \rightarrow V^0$ ein Isomorphismus ist.

Also existiert eindeutig ein $\lambda \in M$ mit $B'\lambda = l - Au$, d.h. λ erfüllt (2.4).

Daraus folgt dann, daß (u, λ) Lösung des Problems (Q) ist.

□

Nun soll der eigentliche Existenzsatz formuliert werden. Dieser beinhaltet zusätzlich eine Stabilitätsabschätzung der Lösung, die später für die Stabilität gemischter finiter Elemente wichtig ist.

Satz 2.3 Sei $a(\cdot, \cdot)$ eine V -elliptische Bilinearform, d.h. es existiert ein $\alpha > 0$ mit

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_V \quad \text{für alle } v \in V.$$

1. Folgende Aussagen sind äquivalent:

(a) Das Problem (Q) besitzt eine eindeutige Lösung.

(b) $b(\cdot, \cdot)$ erfüllt die inf-sup-Bedingung, d.h. es gibt ein $\beta > 0$ mit

$$\inf_{\mu \in M} \sup_{v \in X} \frac{b(v, \mu)}{\|v\|_X \|\mu\|_M} \geq \beta. \quad (2.5)$$

2. Es gelten die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|u\|_X &\leq \alpha^{-1} \|l\|_{X^*} + \beta^{-1} \left(1 + \frac{\|a\|}{\alpha}\right) \|X\|_{M^*}, \\ \|\lambda\|_M &\leq \beta^{-1} \left(1 + \frac{\|a\|}{\alpha}\right) \|l\|_{X^*} + \beta^{-1} \left(1 + \frac{\|a\|}{\alpha}\right) \frac{\|a\|}{\beta} \|X\|_{M^*}. \end{aligned}$$

Bemerkung 2.4 Die in diesem Kapitel dargestellten Sätze beinhalten die elementaren Aussagen über gemischte Variationsgleichungen. Sie machen aber schon deutlich, daß die inf-sup-Bedingung (2.5) eine große Bedeutung bei gemischten Problemen hat. Insbesondere bei der Diskretisierung wird man sehen, daß die inf-sup-Bedingung für die diskreten Räume große Probleme verursacht.

Kapitel 3

Die Oseen-Gleichung

Eine der wichtigsten Gleichungen der Strömungsmechanik ist die Navier-Stokes-Gleichung für inkompressible Flüssigkeiten. Bezeichnet man mit u das Geschwindigkeitsfeld und mit p den Druck der Strömung, so lautet die Navier-Stokes-Gleichung

$$-\epsilon \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = f$$

mit der Bedingung der Inkompressibilität

$$\nabla \cdot u = 0.$$

Man erkennt, daß es sich hierbei aufgrund des Terms $(u \cdot \nabla)u$ um ein nichtlineares Problem handelt. Eine Möglichkeit zur Linearisierung dieses Ausdruck ist eine Iteration mittels

$$-\epsilon \Delta u^{n+1} + (u^n \cdot \nabla)u^{n+1} + \nabla p^{n+1} = f.$$

Das bei diesem Iterationsprozeß entstehende lineare Problem bezeichnet man als Oseen-Gleichung. Im folgenden wird zusätzlich ein ableitungsfreier Term für die Geschwindigkeit mit einbezogen, welcher bei der Zeitdiskretisierung zeitabhängiger Probleme entsteht.

Betrachtet wird also das folgende Problem :

- $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei beschränktes Gebiet mit Lipschitz-stetigem Rand $\Gamma := \partial\Omega$,
- $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$,
- $g : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\int_{\Gamma} g \cdot \nu \, ds = 0$ (dabei bezeichnet $\nu = \nu(x)$ den äußeren Normaleneinheitsvektor im Punkt $x \in \Gamma$),
- $a \in H^1(\Omega)^n \cap L^\infty(\Omega)^n$ mit $\nabla \cdot a = 0$ fast überall und $\Theta \geq 0$.

Gesucht sind Funktionen

$$\begin{aligned} u &: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n, \\ p &: \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$

mit

$$-\epsilon \Delta u + (a \cdot \nabla)u + \Theta u + \nabla p = f \text{ in } \Omega, \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot u = 0 \text{ in } \Omega, \quad (3.2)$$

$$u|_{\Gamma} = g. \quad (3.3)$$

Der Diffusionskoeffizient ϵ ist dabei das Inverse der Reynoldszahl Re , d.h. $\epsilon := Re^{-1}$, welche eine charakteristische Größe der Strömung darstellt.

Bemerkung 3.1

- Man erkennt, daß p durch Gleichung (3.1) nur bis auf eine Konstante bestimmt ist. Daher normiert man p durch die Forderung

$$\int_{\Omega} p(x) dx = 0.$$

- Lösungen $(u, p) \in (C^2(\Omega)^n \cap C(\bar{\Omega})^n) \times C^1(\Omega)$ von (3.1)-(3.3) heißen *klassische Lösungen* der Oseen-Gleichung. Dieser klassische Lösungsbegriff stellt aber zu hohe Differenzierbarkeitsforderungen an die Lösung. Daher benötigt man eine Abschwächung des Lösungsbegriffs.

3.1 Schwache Formulierung

Multiplikation der i -ten Gleichung in (3.1) mit einer beliebigen Testfunktion $v_i \in C_0^\infty(\Omega)$ und anschließender Integration über Ω liefern

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left(-\epsilon \Delta u_i + (a \cdot \nabla)u_i + \Theta u_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) v_i dx &= \int_{\Omega} f_i v_i dx \\ \iff -\epsilon \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + (a \cdot \nabla)u_i + \Theta u_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} \right) v_i dx &= \int_{\Omega} f_i v_i dx. \end{aligned}$$

Mit partieller Integration und Berücksichtigung von $v_i|_{\Gamma} = 0$ erhält man

$$\begin{aligned} \epsilon \int_{\Omega} \sum_{j=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx + \int_{\Omega} \{ (a \cdot \nabla)u_i + \Theta u_i \} v_i dx - \int_{\Omega} p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} dx &= \int_{\Omega} f_i v_i dx \\ \iff \epsilon \int_{\Omega} \nabla u_i \nabla v_i dx + \int_{\Omega} \{ (a \cdot \nabla)u_i + \Theta u_i \} v_i dx - \int_{\Omega} p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} dx &= \int_{\Omega} f_i v_i dx. \quad (3.4) \end{aligned}$$

Definiert man $(u, v) := \sum_{i=1}^n (u_i, v_i)$, $(u_i, v_i) := \int_{\Omega} u_i v_i dx$ und summiert in Gleichung (3.4) über i , so ergibt sich

$$\epsilon(\nabla u, \nabla v) + ((a \cdot \nabla)u + \Theta u, v) - (p, \nabla v) = (f, v). \quad (3.5)$$

Analog verfährt man mit Gleichung (3.2):

Multiplikation mit Testfunktion $q \in L^2(\Omega)$ und Integration liefert

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot u) q dx = 0. \quad (3.6)$$

Definiere $L_0^2(\Omega) := \{p \in L^2(\Omega) : \int_{\Omega} p dx = 0\}$.

Somit ergibt sich mit (3.5) und (3.6) als schwache Formulierung der Oseen-Gleichung :

Gesucht ist $(u, p) \in H^1(\Omega)^n \times L_0^2(\Omega)$ mit

$$\epsilon(\nabla u, \nabla v) + ((a \cdot \nabla)u + \Theta u, v) - (\nabla \cdot v, p) = (f, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)^n, \quad (3.7)$$

$$(\nabla \cdot u, q) = 0 \quad \forall q \in L_0^2(\Omega), \quad (3.8)$$

$$\gamma u = g. \quad (3.9)$$

Dabei ist $\gamma : H^1(\Omega)^n \rightarrow L^2(\Gamma)^n$ die Spurabbildung (vgl. [12] S. 83).

Man definiert somit zwei Bilinearformen

$$a : H^1(\Omega)^n \times H^1(\Omega)^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$a(u, v) := \epsilon(\nabla u, \nabla v) + ((a \cdot \nabla)u + \Theta u, v),$$

$$b : H^1(\Omega)^n \times L_0^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$b(v, p) := -(\nabla \cdot v, p)$$

und die Linearform

$$f : H^1(\Omega)^n \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\langle f, v \rangle := (f, v).$$

Bemerkung 3.2

Ist $v \in H_0^1(\Omega)^n$, $q \in L^2(\Omega)$ und c eine konstante Funktion in $L^2(\Omega)$, so gilt

$$\begin{aligned} b(v, q + c) &= b(v, q) + \int_{\Omega} (\nabla \cdot v) c dx \\ &= b(v, q) - \int_{\Omega} v \cdot \underbrace{\nabla c}_{=0} dx \\ &= b(v, q). \end{aligned}$$

Daher ist auch in der schwachen Formulierung p nur bis auf eine Konstante festgelegt und somit der Lösungsraum $L_0^2(\Omega)$ sinnvoll.

Bemerkung 3.3 Die Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ läßt sich mittels der Divergenzfreiheit des Vektorfeldes a folgendermaßen umrechnen :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}((a \cdot \nabla)u, v) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} a_j v_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} u_i \frac{\partial}{\partial x_j} (a_j v_i) dx \quad (\text{partielle Integration}) \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} u_i \left\{ \frac{\partial a_j}{\partial x_j} v_i + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} a_j \right\} dx \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} u_i \frac{\partial v_i}{\partial x_j} a_j dx \quad (\text{da } \nabla \cdot a = 0) \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} (a \cdot \nabla) v_i \cdot u_i dx \\
&= -\frac{1}{2}((a \cdot \nabla)v, u).
\end{aligned}$$

Daher gilt

$$a(u, v) = \epsilon(\nabla u, \nabla v) + \frac{1}{2} \{((a \cdot \nabla)u, v) - ((a \cdot \nabla)v, u)\} + \Theta(u, v). \quad (3.10)$$

3.2 Existenz und Eindeutigkeit der Lösung der Oseen-Gleichung

In diesem Abschnitt soll die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung der verallgemeinerten Aufgabenstellung bewiesen werden. Dies geschieht durch Anwendung der Theorie für gemischte Variationsgleichungen aus Kapitel 1.

Da hier nicht nur von homogenen Randbedingungen ausgegangen wird, benötigt man zwei Hilfssätze, die allerdings an dieser Stelle nicht bewiesen werden. Ein Beweis findet sich bei [10] (Abschn. I, Corollar 2.4 und Lemma 2.2).

Lemma 3.4 Sei $V = \{v \in H_0^1(\Omega)^n : \nabla \cdot v = 0\}$.

Dann ist der Operator $\nabla \cdot$ ein Isomorphismus von $V^\perp \longrightarrow L_0^2(\Omega)$.

Dabei ist V^\perp das orthogonale Komplement in $H_0^1(\Omega)^n$ bezüglich des Skalarprodukts $(u, v) := \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx$.

Lemma 3.5 Sei $g \in H^{1/2}(\Gamma)^n := \{w \in L^2(\Gamma) : \exists v \in H^1(\Omega) \text{ mit } \gamma v = w\}^n$.
Es gelte $\int_{\Gamma} g \cdot \nu \, ds = 0$.

Dann gibt es ein $u \in H^1(\Omega)^n$ mit

$$\begin{aligned}\nabla \cdot u &= 0 \text{ in } \Omega, \\ \gamma u &= g.\end{aligned}$$

Jetzt stehen alle Hilfsmittel bereit, um den wesentlichen Satz dieses Abschnitts zu beweisen.

Satz 3.6 Sei Ω beschränktes Gebiet mit Lipschitz-stetigem Rand $\Gamma = \partial\Omega$.
Sei $f \in (L^2(\Omega))^n$ und $g \in H^{1/2}(\Gamma)^n$ mit

$$\int_{\Omega} g \cdot \nu \, ds = 0.$$

Dann existiert eindeutig $(u, p) \in H^1(\Omega)^n \times L_0^2(\Omega)$ als Lösung von (3.7)-(3.9).

Beweis : i) Nach Lemma 3.5 gibt es ein $u_0 \in H^1(\Omega)^n$ mit

$$\begin{aligned}\nabla \cdot u_0 &= 0 \text{ in } \Omega, \\ \gamma u_0 &= g.\end{aligned}$$

Definiere damit eine Linearform $l \in (H_0^1(\Omega)^n)^*$ durch

$$\langle l, v \rangle := \langle f, v \rangle - a(u_0, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)^n.$$

Betrachte das Problem

Finde $w \in H_0^1(\Omega)^n$, $p \in L_0^2(\Omega)$ mit

$$a(w, v) + b(v, p) = \langle l, v \rangle \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)^n, \quad (3.11)$$

$$b(w, q) = 0 \quad \forall q \in L_0^2(\Omega). \quad (3.12)$$

Mit $X := H_0^1(\Omega)^n$, $M := L_0^2(\Omega)$, $\chi = 0$ erhält man das Oseen-Problem als gemischte Variationsgleichung.

ii) $a(\cdot, \cdot)$ ist X -elliptisch, denn für $v \in H_0^1(\Omega)^n$ ist mit (3.10)

$$\begin{aligned}a(v, v) &= \epsilon \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla v \, dx + \underbrace{\Theta \|v\|_0^2}_{\geq 0} \\ &\geq \epsilon \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \nabla v_i \cdot \nabla v_i \, dx\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \epsilon \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 dx \\
&= \epsilon \underbrace{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\|_0^2}_{|v|_1^2} \\
&= \epsilon |v|_1^2.
\end{aligned}$$

iii) $a(\cdot, \cdot)$ ist stetig, denn für $u, v \in H_0^1(\Omega)^n$ ist

$$\begin{aligned}
\left| \epsilon \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx \right| &\leq \epsilon \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \left| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right| dx \\
&\leq \epsilon \sum_{i,j=1}^n \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\|_0 \cdot \left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\|_0 \\
&= \epsilon \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\|_0 \cdot \left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\|_0 \right\} \\
&\leq \epsilon \sum_{i=1}^n \left\{ \left(\sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\|_0^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\|_0^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \\
&\leq \epsilon \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\|_0^2 \right) \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\|_0^2 \right) \right)^{1/2} \\
&= \epsilon |u|_1 \cdot |v|_1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|((a \cdot \nabla)u, v)| &= \left| \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, v_i \right) \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left| \int_{\Omega} a_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} v_i dx \right| \\
&\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \|a_j\|_{\infty} \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\|_0 \|v_i\|_0 \\
&\leq \|a\|_{\infty} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left(\|v_i\|_0 \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\|_0 \right) \\
&\leq \|a\|_{\infty} \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \|v_i\|_0^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\|_0^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|a\|_{\infty} \|v\|_0 \sum_{j=1}^n 1 \cdot \left(\sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\|_0^2 \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq C \|a\|_\infty |v|_1 n \left(\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\|_0^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \tilde{C} \|a\|_\infty |v|_1 |u|_1. \end{aligned}$$

$$\Theta(u, v) \leq \Theta \|u\|_0 \|v\|_0 \leq \Theta \hat{C} |u|_1 |v|_1.$$

Damit ergibt sich die Stetigkeit von $a(\cdot, \cdot)$:

$$|a(u, v)| \leq (\epsilon + \tilde{C} \|a\|_\infty + \Theta \hat{C}) |v|_1 |u|_1.$$

Auf ähnliche Weise läßt sich nachrechnen, daß auch $b(\cdot, \cdot)$ und $l(\cdot)$ stetig sind.

iv) Zu zeigen ist die inf-sup-Bedingung, d.h.

$$\sup_{v \in H_0^1(\Omega)^n} \frac{(q, \nabla \cdot v)}{|v|_1} \geq \beta \|q\|_0 \quad \forall q \in L_0^2(\Omega).$$

Sei also $q \in L_0^2(\Omega)$ beliebig.

Nach Lemma 3.4 gibt es ein eindeutiges $v \in V^\perp$ mit $\nabla \cdot v = q$.

Da $\nabla \cdot : V^\perp \rightarrow L_0^2(\Omega)$ als Isomorphismus stetig ist, gibt es eine Konstante C mit

$$|v|_1 \leq C \|q\|_0.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{(q, \nabla \cdot v)}{|v|_1} &= \frac{(q, q)}{|v|_1} = \frac{\|q\|_0^2}{|v|_1} \geq \frac{1}{C} \|q\|_0 \\ &= \beta \|q\|_0 \quad \text{mit } \beta := \frac{1}{C}. \end{aligned}$$

Da β unabhängig von q ist, folgt also

$\forall q \in L_0^2(\Omega) \exists v \in H_0^1(\Omega)^n$ mit

$$\frac{(q, \nabla \cdot v)}{|v|_1} \geq \beta \|q\|_0.$$

Daraus ergibt sich die inf-sup-Bedingung.

v) Aus dem gezeigten folgt mit Satz 2.3, daß es ein eindeutiges $(w, p) \in H_0^1(\Omega)^n \times L_0^2(\Omega)$ gibt, welches die Gleichungen (3.11) und (3.12) erfüllt.

Dann ist $(u = u_0 + w, p) \in [u_0 + H_0^1(\Omega)^n] \times L_0^2(\Omega)$ Lösung des Problems (3.7)-(3.9).

Ist umgekehrt u Lösung von (3.7)-(3.9), so löst $w := u - u_0$ die Gleichungen (3.11) und (3.12).

Insgesamt ist damit die Oseen-Gleichung eindeutig lösbar.

□

Kapitel 4

Diskretisierung gemischter Variationsgleichungen (gemischte FEM)

In diesem Abschnitt wird noch einmal auf das abstrakte Problem zurückgegangen, um die Unterraumdiskretisierung von gemischten Variationsgleichungen darzustellen. Die ausgeführte Analysis bezieht sich auf Diskretisierungen, welche eine diskrete Form der inf-sup-Bedingung (Babuška-Brezzi-Bedingung) erfüllen, so daß die Aussagen über den kontinuierlichen Fall auf die diskreten Probleme übertragen werden können. Diese Art der Diskretisierung wird auch als BB-stabil bezeichnet. Bei praktischen Rechnungen mit finiten Elementen (vgl. Bemerkung 4.2) stellt die Verwendung BB-stabiler Elemente aber nur eine Möglichkeit dar. Benutzt man Diskretisierungen, welche die BB-Bedingung nicht erfüllen, so kann durch Abänderung des diskreten Problems die Diskretisierung stabil gemacht werden. Eine solche Methode wird in Kapitel 5 dargestellt.

4.1 Das diskrete Problem

Das Problem war :

Seien X, M reelle Hilbert-Räume.

$$a(\cdot, \cdot) : X \times X \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$b(\cdot, \cdot) : X \times M \longrightarrow \mathbb{R}$$

seien stetige Bilinearformen und

$$l : X \longrightarrow \mathbb{R},$$

$$\chi : M \longrightarrow \mathbb{R}$$

stetige Linearformen.

$$V(\chi) := \{u \in X : b(u, \mu) = \langle \chi, \mu \rangle \quad \forall \mu \in M\}, \quad V := V(0).$$

Problem (Q):

Finde $(u, \lambda) \in X \times M$ mit

$$\begin{aligned} a(u, v) + b(v, \lambda) &= \langle l, v \rangle \quad \forall v \in X, \\ b(u, \mu) &= \langle \chi, \mu \rangle \quad \forall \mu \in M. \end{aligned}$$

Problem (P):

Finde $u \in V(\chi)$ mit

$$a(u, v) = \langle l, v \rangle \quad \forall v \in V.$$

Zur Diskretisierung des Problems seien $X_h \subset X$, $M_h \subset M$ endlich dimensionale Teilräume. (Q) wird dann approximiert durch **Problem (Q_h)**

Finde $(u_h, \lambda_h) \in X_h \times M_h$ mit

$$\begin{aligned} a(u_h, v_h) + b(v_h, \lambda_h) &= \langle l, v_h \rangle \quad \forall v_h \in X_h, \\ b(u_h, \mu_h) &= \langle \chi, \mu_h \rangle \quad \forall \mu_h \in M_h. \end{aligned}$$

Analog zu $V(\chi)$ definiert man

$$V_h(\chi) := \{v_h \in X_h : b(v_h, \mu_h) = \langle \chi, \mu_h \rangle \quad \forall \mu_h \in M_h\}$$

und $V_h := V_h(0)$.

Ebenso das **Problem (P_h)**:

Finde $u_h \in V_h(\chi)$ mit

$$a(u_h, v_h) = \langle l, v_h \rangle \quad \forall v_h \in V_h.$$

Bemerkung 4.1 Im allgemeinen gilt nicht $V_h(\chi) \subset V(\chi)$, da M_h ein echter Unterraum von M ist !

4.2 Rückführung auf ein lineares Gleichungssystem

Das diskretisierte Problem (Q_h) erzeugt ein äquivalentes Gleichungssystem :

Sei $\{\phi_1, \dots, \phi_k\}$ eine Basis von X_h und $\{\psi_1, \dots, \psi_l\}$ eine Basis von M_h .

Dann ergibt sich die Basisdarstellung

$$u \in X_h \Rightarrow u = \sum_{i=1}^k U_i \phi_i,$$

$$\lambda \in M_h \Rightarrow \lambda = \sum_{j=1}^l \Lambda_j \psi_j.$$

Setze $U := (U_1, \dots, U_k)$, $\Lambda := (\Lambda_1, \dots, \Lambda_l)$.

Definiere weiterhin

$$A \in \mathbb{R}^{k \times k} : a_{ij} := a(\phi_j, \phi_i),$$

$$B \in \mathbb{R}^{l \times k} : b_{ij} := b(\phi_j, \psi_i),$$

$$L \in \mathbb{R}^k : L_i := \langle l, \phi_i \rangle,$$

$$M \in \mathbb{R}^l : M_i := \langle \chi, \psi_i \rangle.$$

Dann gilt :

$$\langle AU, V \rangle = a(u, v) \quad \forall u, v \in X_h,$$

$$\langle BU, \Lambda \rangle = b(u, \lambda) \quad \forall u \in X_h, \lambda \in M_h.$$

Daher ist das Problem (Q_h) äquivalent zu :

Finde $(U_h, \Lambda_h) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l$ mit

$$\begin{aligned} AU_h + B^T \Lambda_h &= L, \\ BU_h &= M \end{aligned}$$

oder anders geschrieben

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_h \\ \Lambda_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L \\ M \end{pmatrix}.$$

Damit hat man ein zu dem diskretisiertem Problem (Q_h) äquivalentes Gleichungssystem.

Bemerkung 4.2 Bisher wurde nichts darüber ausgesagt, wie die Räume X_h und M_h gewählt werden können. Dieses geschieht bei konkreten Problemen mit sog. *finiten Elementen*. Dabei wird das Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ in endlich viele disjunkte Teilgebiete Ω_j zerlegt, d.h.

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{j=1}^m \bar{\Omega}_j$$

und

$$\text{int}(\Omega_i) \cap \text{int}(\Omega_j) = \emptyset \quad (i \neq j).$$

$\mathcal{T}_h := \{\Omega_j\}_{j=1}^m$ bezeichnet man dann als *Triangulierung* von Ω .

Eine gängige Triangulierung stellt die Zerlegung in Dreiecke ($n = 2$) bzw. Tetraeder ($n = 3$) dar. Mittels dieser läßt sich ein diskreter Raum definieren, indem man X_h und M_h z.B. als stetige stückweise polynomiale Funktionen auf jedem Element definiert, d.h.

$$\begin{aligned} X_h &:= \{v_h \in C(\bar{\Omega}) : v_h|_{\Omega_i} \in P_k \quad \forall \Omega_i \in \mathcal{T}_h\}, \\ M_h &:= \{q_h \in C(\bar{\Omega}) : q_h|_{\Omega_i} \in P_l \quad \forall \Omega_i \in \mathcal{T}_h\}. \end{aligned}$$

Die Verwendung von Dreiecken bzw. Tetraedern und polynomialen Ansatzräumen stellt natürlich nur eine Möglichkeit dar, einen Finite-Elemente-Raum zu konstruieren. So gibt es eine Vielzahl anderer Elemente, z.B. das Crouzeix-Raviart-Element (siehe [4] Beispiel 3.6).

Dieses Verfahren zur Diskretisierung einer gemischten Variationsgleichung bezeichnet man als *Methode der gemischten finiten Elemente* oder kurz *gemischte FEM*.

4.3 Stabilität

Der folgende Satz macht Aussagen über die eindeutige und stabile Lösbarkeit des diskreten Problems. Er ergibt sich unter Beachtung von $\|l\|_{X_h^*} \leq \|l\|_{X^*}$ und $\|\chi\|_{M_h^*} \leq \|\chi\|_{M^*}$ sofort aus dem Satz 2.3 über die Lösbarkeit gemischter Variationsgleichungen, wenn man die V_h -Elliptizität von $a(\cdot, \cdot)$ und die Erfüllung der diskreten inf-sup-Bedingung voraussetzt. Man beachte, daß sich diese beiden Voraussetzungen nicht von den kontinuierlichen auf die diskreten Räume übertragen.

Satz 4.3 Sei $a(\cdot, \cdot)$ V_h -elliptisch, d.h. es existiert ein $\alpha_h > 0$ mit

$$a(v_h, v_h) \geq \alpha_h \|v_h\|_X^2 \quad \forall v_h \in V_h,$$

und $b(\cdot, \cdot)$ erfülle die Babuška-Brezzi-Bedingung

$$\sup_{v_h \in X_h} \frac{b(v_h, \mu_h)}{\|v_h\|_X} \geq \beta_h \|\mu_h\|_M \quad \forall \mu_h. \quad (4.1)$$

Dann ist das diskrete Problem (Q_h) eindeutig lösbar.

Für die Lösung (u_h, λ_h) gelten die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|u_h\|_X &\leq \alpha_h^{-1} \|l\|_{X^*} + \beta_h^{-1} \left(1 + \frac{\|a\|}{\alpha_h}\right) \|\chi\|_{M^*}, \\ \|\lambda_h\|_M &\leq \beta_h^{-1} \left(1 + \frac{\|a\|}{\alpha_h}\right) \|l\|_{X^*} + \beta_h^{-1} \left(1 + \frac{\|a\|}{\alpha_h}\right) \frac{\|a\|}{\beta_h} \|\chi\|_{M^*}. \end{aligned}$$

Sind weiterhin α_h, β_h unabhängig von h , so hat man ein Stabilitätsresultat (man sagt daher in diesem Fall, die Diskretisierung sei stabil).

4.4 Konvergenz

Satz 4.4 Die Voraussetzungen des Satzes 4.3 seien erfüllt. Weiterhin sei $a(\cdot, \cdot)$ V -elliptisch, d.h. es gibt ein $\alpha > 0$ mit

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_X^2 \quad \forall v \in V$$

und $b(\cdot, \cdot)$ erfülle die inf-sup-Bedingung

$$\sup_{v \in X} \frac{b(v, \mu)}{\|v\|_X} \geq \beta \|\mu\|_M$$

mit einem $\beta > 0$.

Dann gilt für die Lösung (u, λ) von (Q) bzw. (u_h, λ_h) von (Q_h) :

(i) Es existiert eine Konstante C_1 (abhängig von $\alpha_h, \|a\|, \|b\|$) mit

$$\|u - u_h\|_X \leq C_1 \left\{ \inf_{v_h \in V_h(\chi)} \|u - v_h\|_X + \inf_{\mu_h \in M_h} \|\lambda - \mu_h\|_M \right\}.$$

(ii) Es gibt eine Konstante C_2 (abhängig von $\alpha_h, \beta_h, \|a\|, \|b\|$) mit

$$\|u - u_h\|_X + \|\lambda - \lambda_h\|_M \leq C_2 \left\{ \inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|_X + \inf_{\mu_h \in M_h} \|\lambda - \mu_h\|_M \right\}.$$

Bemerkung 4.5 Man beachte, daß in der Abschätzung (i) das Infimum über den Raum $V_h(\chi)$ gebildet werden muß, welchen man i.a. nicht kennt. Für den Beweis von (i) benötigt man allerdings die inf-sup-Bedingung nicht. Setzt man diese voraus, so bekommt man die Abschätzung (ii), bei der das Infimum über den gesamten Raum X_h genommen wird.

Beweis von Satz 4.4: In Satz 2.2 wurde gezeigt, daß unter den getroffenen Voraussetzungen die Probleme (Q) und (P) äquivalent sind. Der gleiche Satz kann wegen der V_h -Elliptizität von $a(\cdot, \cdot)$ und der BB-Bedingung (4.1) auch auf die Probleme (Q_h) und (P_h) angewendet werden. Dieses wird im folgenden ausgenutzt.

i) Seien $w_h \in V_h(\chi)$, $\mu_h \in M_h$ beliebig. Setze $v_h := u_h - w_h$. Dann ist für $\mu_h \in M_h$

$$\begin{aligned} b(v_h, \mu_h) &= b(u_h, \mu_h) - b(w_h, \mu_h) \\ &= \langle \chi, \mu_h \rangle - \langle \chi, \mu_h \rangle, \text{ da } u_h, w_h \in V_h(\chi) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Daher ist $v_h \in V_h$ und es gilt

$$\begin{aligned} a(v_h, v_h) &= a(u_h - w_h, v_h) \\ &= a(u_h, v_h) - a(w_h, v_h) \\ &= \langle l, v_h \rangle - a(w_h, v_h), \end{aligned} \tag{4.2}$$

da u_h Lösung von (P_h) ist.

Für die Lösung u von (P) bzw. (u, λ) von (Q) gilt

$$a(u, v_h) + b(v_h, \lambda) = \langle l, v_h \rangle$$

und daher mit (4.2)

$$\begin{aligned} a(v_h, v_h) &= a(u, v_h) + b(v_h, \lambda) - a(w_h, v_h) \\ &= a(u - w_h, v_h) + b(v_h, \lambda). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Da $v_h \in V_h$ gilt $b(v_h, \mu_h) = 0$.

Mit Nullergänzung liefert (4.3)

$$a(v_h, v_h) = a(u - w_h, v_h) + b(v_h, \lambda - \mu_h) \quad \forall v_h \in V_h, \quad \forall \mu_h \in M_h.$$

Mit der V_h -Elliptizität von $a(\cdot, \cdot)$ folgt

$$\begin{aligned} \alpha_h \|v_h\|_X^2 &\leq a(v_h, v_h) \\ &= a(u - w_h, v_h) + b(v_h, \lambda - \mu_h) \\ &\leq \|a\| \|u - w_h\|_X \|v_h\|_X + \|b\| \|v_h\|_X \|\lambda - \mu_h\|_M. \\ \Rightarrow \|u - w_h\|_X = \|v_h\|_X &\leq \frac{\|a\|}{\alpha_h} \|u - w_h\|_X + \frac{\|b\|}{\alpha_h} \|\lambda - \mu_h\|_M. \end{aligned}$$

Somit erhält man schließlich

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_X &\leq \|u - w_h\|_X + \|w_h - u_h\|_X \\ &\leq \|u - w_h\|_X + \frac{\|a\|}{\alpha_h} \|u - w_h\|_X + \frac{\|b\|}{\alpha_h} \|\lambda - \mu_h\|_M \\ &= \left(1 + \frac{\|a\|}{\alpha_h}\right) \|u - w_h\|_X + \frac{\|b\|}{\alpha_h} \|\lambda - \mu_h\|_M \end{aligned}$$

für alle $\mu_h \in M_h$, $w_h \in V_h(\chi)$.

Infimumbildung liefert die Behauptung mit $C_1 := \max\left(1 + \frac{\|a\|}{\alpha_h}, \frac{\|b\|}{\alpha_h}\right)$.

ii) Sei $v_h \in X_h$ beliebig.

Definiere den Operator $B_h : X \rightarrow M_h^*$ durch

$$\langle B_h v, \mu_h \rangle := b(v, \mu_h) \quad (v \in X, \mu_h \in M_h).$$

Da $B_h : V_h^\perp \rightarrow M_h^*$ wegen der BB-Bedingung (4.1) ein Isomorphismus ist (vgl. Satz 2.1) und $B_h(u - v_h) \in M_h^*$, gibt es ein eindeutiges $z_h \in V_h^\perp$ mit

$$B_h z_h = B_h(u - v_h).$$

Weiterhin gilt ebenfalls nach Satz 2.1

$$\begin{aligned} \|z_h\|_X &\leq \frac{1}{\beta_h} \|B_h z_h\|_{M_h^*} \\ &= \frac{1}{\beta_h} \|B_h(u - v_h)\|_{M_h^*} \\ &\leq \frac{1}{\beta_h} \|b\| \|u - v_h\|_X. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Definiere $w_h := z_h + v_h$. Dann gilt für beliebiges $\mu_h \in M_h$

$$\begin{aligned} b(w_h, \mu_h) &= b(z_h + v_h, \mu_h) \\ &= b(z_h, \mu_h) + b(v_h, \mu_h) \\ &= b(u - v_h, \mu_h) + b(v_h, \mu_h) \\ &= b(u, \mu_h) \\ &= \langle \chi, \mu_h \rangle, \end{aligned}$$

da $u \in V(\chi)$.

Daher ist $w_h \in V_h(\chi)$.

Man erhält man mit (4.4) die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|u - w_h\|_X &\leq \|u - v_h\|_X + \|z_h\|_X \\ &\leq \left(1 + \frac{\|b\|}{\beta_h}\right) \|u - v_h\|_X. \end{aligned} \tag{4.5}$$

$v_h \in X_h$ war beliebig gewählt, daher kann man auf der rechten Seite von (4.5) zum Infimum über X_h übergehen. Da $w_h \in V_h(\chi)$ war, bleibt die Ungleichung also auch richtig, wenn man links das Infimum über $V_h(\chi)$ bildet.

Man hat also :

$$\inf_{w_h \in V_h(\chi)} \|u - w_h\|_X \leq \left(1 + \frac{\|b\|}{\beta_h}\right) \inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|_X. \tag{4.6}$$

Es gilt für alle $v_h \in X_h, \mu_h \in M_h$

$$\begin{aligned} b(v_h, \lambda_h - \mu_h) &= b(v_h, \lambda_h) - b(v_h, \mu_h) \\ &= -a(u_h, v_h) + \langle l, v_h \rangle - b(v_h, \mu_h) \quad ((u_h, \lambda_h) \text{ löst } (Q_h)) \\ &= -a(u_h, v_h) + a(u, v_h) + b(v_h, \lambda) - b(v_h, \mu_h) \quad ((u, \lambda) \text{ löst } (Q)) \\ &= a(u - u_h, v_h) + b(v_h, \lambda - \mu_h). \end{aligned}$$

Damit läßt sich abschätzen

$$\begin{aligned}
\|\lambda_h - \mu_h\|_M &\leq \frac{1}{\beta_h} \sup_{v_h \in X_h} \frac{b(v_h, \lambda_h - \mu_h)}{\|v_h\|_X} \\
&= \frac{1}{\beta_h} \sup_{v_h \in X_h} \frac{1}{\|v_h\|_X} \{a(u - u_h, v_h) + b(v_h, \lambda - \mu_h)\} \\
&\leq \frac{1}{\beta_h} \sup_{v_h \in X_h} \frac{1}{\|v_h\|_X} \{\|a\| \|u - u_h\|_X \|v_h\|_X + \|b\| \|v_h\|_X \|\lambda - \mu_h\|_M\} \\
&= \frac{1}{\beta_h} \{\|a\| \|u - u_h\|_X + \|b\| \|\lambda - \mu_h\|_M\}.
\end{aligned}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned}
\|\lambda - \lambda_h\|_M &\leq \|\lambda - \mu_h\|_M + \|\lambda_h - \mu_h\|_M \\
&\leq \|\lambda - \mu_h\|_M + \frac{1}{\beta_h} \{\|a\| \|u - u_h\|_X + \|b\| \|\lambda - \mu_h\|_M\} \\
&= \frac{1}{\beta_h} \{\|a\| \|u - u_h\|_X + (\beta_h + \|b\|) \|\lambda - \mu_h\|_M\}.
\end{aligned}$$

$\mu_h \in M_h$ war beliebig gewählt. Daher kann man auf der rechten Seite zum Infimum übergehen. Benutzt man die Abschätzung aus (i), so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\|u - u_h\|_X + \|\lambda - \lambda_h\|_M &\leq C_1 \left\{ \inf_{v_h \in V_h(\chi)} \|u - v_h\|_X + \inf_{\mu_h \in M_h} \|\lambda - \mu_h\|_M \right\} \\
&\quad + \frac{1}{\beta_h} \left\{ \|a\| \|u - u_h\|_X + (\beta_h + \|b\|) \inf_{\mu_h \in M_h} \|\lambda - \mu_h\|_M \right\}
\end{aligned}$$

Mit Ungleichung (4.6) ergibt sich hieraus die Behauptung. □

Bemerkung 4.6

- Der Beweis des letzten Satzes zeigt, daß für Konvergenz bei der Diskretisierung gemischter Probleme nicht nur die Babuška-Brezzi-Bedingung erfüllt sein muß. Hat man X_h und M_h als FEM-Unterräume, so ist auch das asymptotische Verhalten von β_h für $h \rightarrow 0$ wichtig, denn es gilt $C_2 = O(\beta_h^{-1})$.
- Viele für die praktische Implementierung interessante finite Elemente (z.B. $P_1 - P_1$ -Elemente) erfüllen die BB-Bedingung mit einer von h unabhängigen Konstanten β nicht. Ein Ausweg ist die Wahl von geeigneten Räumen, z.B. Anreichern des Geschwindigkeitsraumes X_h durch sog. Bubble-Funktionen (vgl. [4] Kapitel VI.3 Beispiel 3.7). Dieses führt auf das sog. MINI-Element (siehe hierzu [14]). Dieses Vorgehen erhöht aber die Anzahl der Freiheitsgrade und damit die Größe

des entstehenden Gleichungssystems erheblich.

Eine andere Möglichkeit ist die Wahl einfacher diskreter Räume und Stabilisierung durch geeignete Abänderung des diskreten Problems. Diese Stabilisierungstechniken sind Thema des nächsten Kapitels.

Kapitel 5

Streamline-Diffusion-FEM

In diesem Kapitel wird eine Stabilisierungstechnik für die Oseen-Gleichung vorgestellt und die dazugehörige Analysis durchgeführt. Diese Technik benötigt keine Forderung an die Kompatibilität der diskreten Räume, d.h. die BB-Bedingung muß nicht erfüllt sein. Eine Übersicht solcher Verfahren für die Stokes-Gleichung findet sich zum Beispiel in [16] Abschnitt 9.4.

Weitere Arbeiten zu diesem Thema sind [8] (Stokes-Fall) und [7] (Navier-Stokes- bzw. Oseen-Problem). Die entsprechenden Darstellungen sind aber methodisch unbefriedigend, da die Wahl der benutzten Stabilisierungsparameter am Anfang festgelegt wird und damit das Verfahren analysiert wird. Sinnvoller scheint es, die Analysis der Methode zunächst mit unbestimmten Parametern durchzuführen und aufgrund der gewonnenen Resultate eine geeignete Wahl dieser Parameter herzuleiten. Dieser Weg wurde in dieser Arbeit gegangen.

Die Grundlage für diese Ausführungen findet sich in [17] Kapitel IV, Abschnitt 3. Die Analysis wurde dadurch verfeinert, daß der Einfluß des Strömungsfeldes bei den Konvergenzabschätzungen genauer berücksichtigt wurde. Damit ist es dann möglich, eine Wahl der Stabilisierungsparameter in Abhängigkeit vom Strömungsfeld anzugeben.

Der Vorteil der Streamline-Diffusion-FEM (im folgenden kurz SDFEM) liegt darin, daß diese Technik zwei Problemen der Oseen-Gleichung zugleich entgegenwirkt. Ein Problem ist die mögliche Verletzung der Babuška-Brezzi-Bedingung durch die diskreten Räume, wodurch sich numerisch i.a. keine sinnvolle Lösung berechnen läßt. Das andere Problem besteht in einer möglichen Dominanz des konvektiven Terms $(a \cdot \nabla)u$, was wie bei skalaren Diffusions-Konvektions-Reaktions-Gleichungen (vgl. [16] Kapitel 8) zu numerischen Oszillationen führen kann.

5.1 Voraussetzungen und Notationen

Betrachtet wird der Differentialoperator

$$L\hat{u} := -\epsilon\Delta u + (a \cdot \nabla)u + \Theta u + \nabla p$$

mit $\Theta > 0$.

Das Problem ist : Finde $\hat{u} = (u, p)$ mit

$$\begin{aligned} L\hat{u} &= f \text{ in } \Omega, \\ \nabla \cdot u &= 0 \text{ in } \Omega, \\ u &= 0 \text{ auf } \Gamma = \partial\Omega, \end{aligned}$$

wobei $f \in L^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$).

Dieses führt auf die Variationsgleichung (vgl. Kapitel 3)

Finde $\hat{u} \in X \times M := H_0^1(\Omega)^n \times L_0^2(\Omega)$ mit

$$\epsilon(\nabla u, \nabla v) + ((a \cdot \nabla)u + \Theta u, v) - (p, \nabla \cdot v) + (q, \nabla \cdot u) = (f, v) \quad \forall \hat{v} \in X \times M.$$

Die Äquivalenz dieser Formulierung des Problems gegenüber der in Kapitel 3 erkennt man, indem man $v = 0$ bzw. $q = 0$ einsetzt.

Zur Diskretisierung werden polynomiale Ansatzräume X_h und M_h benutzt, d.h.

$$\begin{aligned} X_h &: = \{v \in X : v|_K \in P_l(K)^n \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}, \\ M_h &: = \{q \in M \cap H^1(\Omega) : q|_K \in P_k(K) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h\}. \end{aligned}$$

Dabei sei $\mathcal{T}_h = \{K\}$ eine quasiuniforme Triangulierung von Ω , d.h.

- \mathcal{T}_h ist regulär, d.h. es gibt ein $\sigma \geq 1$, so daß für alle $h > 0$ gilt

$$\max_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{h_K}{\rho_K} \leq \sigma.$$

Dabei ist $h_K := \text{diam}(K)$, $h := \max_K h_K$ und
 $\rho_K := \sup\{\text{diam}(S) : S \text{ ist Kugel, } S \subset K\}$.

- Es gibt ein $\tau > 0$, so daß für alle $h > 0$ gilt

$$\min_{K \in \mathcal{T}_h} h_K \geq \tau h.$$

Weiter seien

$$\begin{aligned} I_h &: X \longrightarrow X_h, \\ J_h &: M \longrightarrow M_h \end{aligned}$$

Interpolationsoperatoren nach Clement (siehe [5]).

Diese erfüllen die lokalen Abschätzungen

$$\|u - I_h u\|_{m,K} \leq C_1 h_K^{s-m} |u|_{s,K} \quad \forall u \in H^s(K) \quad (0 \leq s \leq l+1, 0 \leq m \leq s), \quad (5.1)$$

$$\|p - J_h p\|_{i,K} \leq C_3 h_K^{j-i} |p|_{j,K} \quad \forall p \in H^j(K) \quad (0 \leq j \leq k+1, 0 \leq i \leq j). \quad (5.2)$$

Weiterhin gilt eine inverse Ungleichung

$$\|\Delta v_h\|_{0,K} \leq \mu_{inv} h_K^{-1} |v_h|_{1,K} \quad \forall v_h \in X_h, \quad (5.3)$$

denn :

Im Beweis von Proposition 6.3.2 in [16] wird gezeigt, daß für alle $x_h \in P_t(K)$ gilt

$$\|\nabla x_h\|_{0,K}^2 \leq C h_K^{-2} \|x_h\|_{0,K}^2. \quad (5.4)$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \|\Delta v_h\|_{0,K}^2 &= \sum_{i=1}^n \|(\Delta v_h)_i\|_{0,K}^2 = \sum_{i=1}^n \left\| \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 (v_h)_i}{\partial x_j^2} \right\|_{0,K}^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial^2 (v_h)_i}{\partial x_j^2} \right\|_{0,K}^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial (v_h)_i}{\partial x_j} \right) \right\|_{0,K}^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial (v_h)_i}{\partial x_k} \right) \right\|_{0,K}^2 \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \left\| \nabla \left(\frac{\partial (v_h)_i}{\partial x_k} \right) \right\|_{0,K}^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n C h_K^{-2} \left\| \frac{\partial (v_h)_i}{\partial x_k} \right\|_{0,K}^2 \\ &= C h_K^{-2} |v_h|_{1,K}^2 \end{aligned}$$

und somit die inverse Ungleichung.

Eine weitere Folgerung ergibt sich bei wiederholter Anwendung von (5.4) :

$$|p_h|_{m,K} \leq C_5 h_K^{-m} \|p_h\|_{0,K} \quad \forall p_h \in M_h, \quad (5.5)$$

denn :

$$\begin{aligned} |p_h|_{m,K}^2 &= \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial^m p_h}{\partial x_i^m} \right\|_{0,K}^2 = \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial^{m-1} p_h}{\partial x_i^{m-1}} \right) \right\|_{0,K}^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \left\| \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial^{(m-1)} p_h}{\partial x_i^{(m-1)}} \right\|_{0,K}^2 \right) = \sum_{i=1}^n \left\| \nabla \left(\frac{\partial^{m-1} p_h}{\partial x_i^{m-1}} \right) \right\|_{0,K}^2 \\ &\leq C h_K^{-2} \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial^{m-1} p_h}{\partial x_i^{m-1}} \right\|_{0,K}^2 = C h_K^{-2} |p_h|_{m-1,K}^2. \end{aligned}$$

Induktiv ergibt sich damit (5.5).

Die SDFEM besteht nun darin, einen least-squares-Term für die Divergenzgleichung einzuführen und die Geschwindigkeitsgleichung elementweise mit Funktionen der Form $(a \cdot \nabla)v + \nabla q$ zu testen :

Finde $\hat{u}_h = (u_h, p_h) \in X_h \times M_h$ mit

$$B_{SD}(\hat{u}_h, \hat{v}_h) = L_{SD}(\hat{v}_h) \quad \forall \hat{v}_h = (v_h, q_h) \in X_h \times M_h,$$

wobei

$$\begin{aligned} B_{SD}(\hat{u}_h, \hat{v}_h) : &= \epsilon(\nabla u_h, \nabla v_h) + ((a \cdot \nabla)u_h + \Theta u_h, v_h) - (p_h, \nabla \cdot v_h) + (q_h, \nabla \cdot u_h) \\ &+ \sum_K \alpha_K (\nabla \cdot u_h, \nabla \cdot v_h)_K + \sum_K \delta_K (L\hat{u}_h, (a \cdot \nabla)v_h + \nabla q_h)_K, \\ L_{SD}(\hat{v}_h) : &= (f, v_h) + \sum_K \delta_K (f, (a \cdot \nabla)v_h + \nabla q_h)_K. \end{aligned}$$

Man erhält eine konsistente Methode, d.h. eine hinreichend glatte Lösung des kontinuierlichen Problems löst auch das stabilisierte Problem.

5.2 Stabilität

Für die Analyse der Stabilität und Konvergenz der SDFEM definiert man als Norm auf $X_h \times M_h$

$$|||\hat{u}_h|||_h^2 := \epsilon |u_h|_1^2 + \Theta \|u_h\|_0^2 + \epsilon \|p_h\|_0^2 + \sum_K \alpha_K \|\nabla \cdot u_h\|_{0,K}^2 + \sum_K \delta_K \|(a \cdot \nabla)u_h + \nabla p_h\|_{0,K}^2$$

für $\hat{u}_h = (u_h, p_h) \in X_h \times M_h$.

Der Nachweis der Stabilität erfolgt über eine Babuška-Bedingung :

Lemma 5.1 *Seien $\Theta \geq 0$, $0 \leq \alpha_K \leq \alpha$ und die Stabilisierungsparameter δ_K so, daß es Konstanten μ_0 und δ gibt mit*

$$0 < \mu_0 h_K^2 \leq \delta_K \leq \min\left(\delta, \frac{h_K^2}{2\epsilon \mu_{inv}^2}\right), \quad 0 \leq \Theta \delta_K \leq \frac{1}{2}.$$

Dann gibt es ein $\beta > 0$ (unabhängig von ϵ und h) mit

$$\inf_{\hat{v}_h \in X_h \times M_h} \sup_{\hat{w}_h \in X_h \times M_h} \frac{B_{SD}(\hat{v}_h, \hat{w}_h)}{|||\hat{v}_h|||_h |||\hat{w}_h|||_h} \geq \beta.$$

Beweis :

i) Sei $\hat{v}_h = (v_h, q_h) \in X_h \times M_h$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned}
B_{SD}(\hat{v}_h, \hat{v}_h) &= \epsilon |v_h|_1^2 + \underbrace{((a \cdot \nabla)v_h, v_h)}_{=0, \text{ da } \nabla \cdot a = 0} + \Theta \|v_h\|_0^2 + \underbrace{\sum_K \alpha_K \|\nabla \cdot v_h\|_{0,K}^2}_{=: Z^2} \\
&\quad + \underbrace{\sum_K \delta_K \|(a \cdot \nabla)v_h + \nabla q_h\|_{0,K}^2}_{=: X^2} \\
&\quad + \sum_K \delta_K (-\epsilon \Delta v_h + \Theta v_h, (a \cdot \nabla)v_h + \nabla q_h)_K \\
&= \epsilon |v_h|_1^2 + \Theta \|v_h\|_0^2 + Z^2 + X^2 \\
&\quad + \sum_K \delta_K (-\epsilon \Delta v_h + \Theta v_h, (a \cdot \nabla)v_h + \nabla q_h)_K \\
&\geq \epsilon |v_h|_1^2 + \Theta \|v_h\|_0^2 + Z^2 + X^2 \\
&\quad - \left| \sum_K \delta_K (-\epsilon \Delta v_h + \Theta v_h, (a \cdot \nabla)v_h + \nabla q_h)_K \right|.
\end{aligned}$$

ii) Es ist

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_K \delta_K (\Theta v_h - \epsilon \Delta v_h, (a \cdot \nabla)v_h + \nabla q_h)_K \right| \\
&\leq \sum_K \delta_K \|\Theta v_h - \epsilon \Delta v_h\|_{0,K} \|(a \cdot \nabla)v_h + \nabla q_h\|_{0,K} \\
&\leq \sum_K \delta_K (\|\Theta v_h\|_{0,K} + \epsilon \|\Delta v_h\|_{0,K}) \|(a \cdot \nabla)v_h + \nabla q_h\|_{0,K} \\
&\leq \sum_K \left\{ \frac{\delta_K}{2} (\|\Theta v_h\|_{0,K} + \epsilon \|\Delta v_h\|_{0,K})^2 + \frac{\delta_K}{2} \|(a \cdot \nabla)v_h + \nabla q_h\|_{0,K}^2 \right\} \\
&\quad \text{(Youngsche Ungleichung)} \\
&\leq \sum_K \delta_K \left\{ \Theta^2 \|v_h\|_{0,K}^2 + \epsilon^2 \|\Delta v_h\|_{0,K}^2 \right\} + \frac{1}{2} X^2 \\
&\leq \sum_K \delta_K \left\{ \Theta^2 \|v_h\|_{0,K}^2 + \epsilon^2 \mu_{inv}^2 h_K^{-2} |v_h|_{1,K}^2 \right\} + \frac{1}{2} X^2. \quad (*)
\end{aligned}$$

Nach Voraussetzung ist $\delta_K \leq \frac{h_K^2}{2\epsilon\mu_{inv}^2} \Rightarrow \frac{\epsilon\mu_{inv}^2}{h_K^2} \leq \frac{1}{2\delta_K}$

und $\Theta\delta_K \leq \frac{1}{2}$. Damit folgt

$$\begin{aligned}
(*) &\leq \Theta \sum_K \frac{1}{2} \|v_h\|_{0,K}^2 + \frac{1}{2} \epsilon |v_h|_{1,K}^2 + \frac{1}{2} X^2 \\
&\leq \frac{1}{2} (\Theta \|v_h\|_0^2 + \epsilon |v_h|_1^2 + X^2).
\end{aligned}$$

Daher ergibt sich

$$B_{SD}(\hat{v}_h, \hat{v}_h) \geq \frac{1}{2} (\epsilon |v_h|_1^2 + \Theta \|v_h\|_0^2 + X^2 + Z^2). \quad (5.6)$$

iii) Nach Lemma 3.4 gibt es ein $w \in X$ mit

$$\nabla \cdot w = -q_h \text{ und } \|w\|_1 \leq C_\Omega \|q_h\|_0.$$

Setze $w_h := I_h w$. Dann folgt

$$\begin{aligned} \|w_h\|_1 &\leq \|w_h - w\|_1 + \|w\|_1 \\ &\leq C_1 \|w\|_1 + C_\Omega \|q_h\|_0 \\ &\leq C_1 C_\Omega \|q_h\|_0 + C_\Omega \|q_h\|_0 \\ &= \underbrace{C_\Omega(1 + C_1)}_{=: C'_\Omega} \|q_h\|_0. \end{aligned}$$

iv)

$$\begin{aligned} B_{SD}((v_h, q_h), (w_h, 0)) &= \epsilon(\nabla v_h, \nabla w_h) + ((a \cdot \nabla)v_h + \Theta v_h, w_h) - (q_h, \nabla \cdot w_h) \\ &\quad + \sum_K \alpha_K (\nabla \cdot v_h, \nabla \cdot w_h)_K \\ &\quad + \sum_K \delta_K (-\epsilon \Delta v_h + (a \cdot \nabla)v_h + \Theta v_h + \nabla q_h, (a \cdot \nabla)w_h)_K. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Mittels partieller Integration ergibt sich

$$\begin{aligned} -(q_h, \nabla \cdot w_h) &= -\sum_K (q_h, \nabla \cdot w_h)_K = \sum_K (\nabla q_h, w_h)_K \\ &= -\sum_K (\nabla q_h, w - w_h)_K + (\nabla q_h, w)_K \\ &= -\sum_K (\nabla q_h, w - w_h)_K - (q_h, \nabla \cdot w). \end{aligned}$$

Daher folgt mit (5.7)

$$\begin{aligned} B_{SD}((v_h, q_h), (w_h, 0)) &= \epsilon(\nabla v_h, \nabla w_h) + ((a \cdot \nabla)v_h, w_h) + \Theta(v_h, w_h) \\ &\quad - (q_h, \nabla \cdot w) - \sum_K (\nabla q_h, w - w_h)_K \\ &\quad + \sum_K \delta_K (-\epsilon \Delta v_h + (a \cdot \nabla)v_h + \Theta v_h \\ &\quad + \nabla q_h, (a \cdot \nabla)w_h)_K \\ &\quad + \sum_K \alpha_K (\nabla \cdot v_h, \nabla \cdot w_h)_K. \end{aligned} \tag{5.8}$$

v) Die Terme in (5.8) werden im folgenden einzeln abgeschätzt :

$$\begin{aligned} |\epsilon(\nabla v_h, \nabla w_h)| &\leq \epsilon |v_h|_1 |w_h|_1 \leq \epsilon |v_h|_1 \|w_h\|_1 \\ &\leq \epsilon C'_\Omega |v_h|_1 \|q_h\|_0. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Es ist

$$\begin{aligned}
\left(a_j \frac{\partial(v_h)_i}{\partial x_j}, (w_h)_i \right) &\leq \|a_j(w_h)_i\|_0 \left\| \frac{\partial(v_h)_i}{\partial x_j} \right\|_0 \\
&= (a_j(w_h)_i, a_j(w_h)_i)^{\frac{1}{2}} \left\| \frac{\partial(v_h)_i}{\partial x_j} \right\|_0 \\
&\leq \|a_j^2\|_0^{\frac{1}{2}} \|(w_h)_i^2\|_0^{\frac{1}{2}} \left\| \frac{\partial(v_h)_i}{\partial x_j} \right\|_0 \\
&= \|a_j\|_{L^4(\Omega)} \|(w_h)_i\|_{L^4(\Omega)} \left\| \frac{\partial(v_h)_i}{\partial x_j} \right\|_0. \tag{5.10}
\end{aligned}$$

Nach dem Einbettungssatz (vgl. [12] S.82) gilt

$$W^{k,p} \hookrightarrow W^{j,q} \text{ falls } k - j \geq n \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right).$$

Setze $k = 1, p = 2, j = 0, q = 4$. Dann ist $k - j = 1$ und $n \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} \right) = n \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{n}{4} \leq k - j$ für $n \leq 4$, und man hat

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega).$$

Daher gibt es eine Konstante γ_0 mit

$$\|(w_h)_i\|_{L^4(\Omega)} \leq \sqrt{\gamma_0} |(w_h)_i|_1.$$

Mit (5.10) ist also

$$\left(a_j \frac{\partial(v_h)_i}{\partial x_j}, (w_h)_i \right) \leq \gamma_0 |a_j|_1 |(w_h)_i|_1 \left\| \frac{\partial(v_h)_i}{\partial x_j} \right\|_0. \tag{5.11}$$

Damit ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
|(a \cdot \nabla)v_h, w_h| &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(a_j \frac{\partial(v_h)_i}{\partial x_j}, (w_h)_i \right) \\
&\leq \gamma_0 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_j|_1 |(w_h)_i|_1 \left\| \frac{\partial(v_h)_i}{\partial x_j} \right\|_0 \\
&= \gamma_0 \sum_{j=1}^n |a_j|_1 \left(\sum_{i=1}^n |(w_h)_i|_1 \left\| \frac{\partial(v_h)_i}{\partial x_j} \right\|_0 \right) \\
&\leq \gamma_0 \sum_{j=1}^n |a_j|_1 \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n |(w_h)_i|_1^2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{=|w_h|_1} \left(\sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial(v_h)_i}{\partial x_j} \right\|_0^2 \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \gamma_0 |w_h|_1 \underbrace{\left(\sum_{j=1}^n |a_j|_1^2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{=|a|_1} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial (v_h)_i}{\partial x_j} \right\|_0^2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{=|v_h|_1} \\
&= \gamma_0 |w_h|_1 |a|_1 |v_h|_1 \\
&\leq \gamma_0 C'_\Omega |a|_1 |v_h|_1 \|q_h\|_0.
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Weiter ist

$$\begin{aligned}
|\Theta(v_h, w_h)| &\leq \Theta \|v_h\|_0 \|w_h\|_0 \leq \Theta \|v_h\|_0 \|w_h\|_1 \\
&\leq \Theta C'_\Omega \|v_h\|_0 \|q_h\|_0,
\end{aligned} \tag{5.13}$$

$$-(q_h, \underbrace{\nabla \cdot w}_{=-q_h}) = \|q_h\|_0^2, \tag{5.14}$$

$$\begin{aligned}
&|\sum_K (\nabla q_h, w - w_h)_K| \\
&\leq \sum_K \|\nabla q_h\|_{0,K} \|w - w_h\|_{0,K} \\
&\leq \sum_K \|\nabla q_h\|_{0,K} C_1 h_K |w|_{1,K} \\
&\leq \sum_K (\|\nabla q_h + (a \cdot \nabla) v_h\|_{0,K} + \|(a \cdot \nabla) v_h\|_{0,K}) C_1 h_K |w|_{1,K} \\
&\leq \sum_K (\|\nabla q_h + (a \cdot \nabla) v_h\|_{0,K} C_1 h_K |w|_{1,K}) \\
&\quad + \|a\|_\infty |v_h|_1 C_1 h \underbrace{|w|_1}_{\leq C_\Omega \|q_h\|_0} \\
&\leq C_1 \sum_K (\sqrt{\delta_K} \|\nabla q_h + (a \cdot \nabla) v_h\|_{0,K} \frac{h_K}{\sqrt{\delta_K}} |w|_{1,K}) \\
&\quad + C_1 C_\Omega h \|a\|_\infty |v_h|_1 \|q_h\|_0 \\
&\leq C_1 \left(\sum_K \delta_K \|\nabla q_h + (a \cdot \nabla) v_h\|_{0,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_K \delta_K^{-1} h_K^2 |w|_{1,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + C_1 C_\Omega h \|a\|_\infty |v_h|_1 \|q_h\|_0 \\
&= C_1 X \underbrace{\left(\sum_K \delta_K^{-1} h_K^2 |w|_{1,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{\leq \mu_0^{-1}} + C_1 C_\Omega h \|a\|_\infty |v_h|_1 \|q_h\|_0 \\
&\leq C_1 X \mu_0^{-\frac{1}{2}} |w|_1 + C_1 C_\Omega h \|a\|_\infty |v_h|_1 \|q_h\|_0 \\
&\leq C_1 C_\Omega X \mu_0^{-\frac{1}{2}} \|q_h\|_0 + C_1 C_\Omega h \|a\|_\infty |v_h|_1 \|q_h\|_0 \\
&\leq C_1 C_\Omega X \mu_0^{-\frac{1}{2}} \|q_h\|_0 + \tilde{C}_1 C_\Omega \|a\|_\infty |v_h|_1 \|q_h\|_0,
\end{aligned} \tag{5.15}$$

$$|\sum_K \delta_K (\Theta v_h, (a \cdot \nabla) w_h)_K| \leq \sum_K \delta_K \Theta \|v_h\|_{0,K} \|(a \cdot \nabla) w_h\|_{0,K}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \delta \left(\sum_K \Theta^2 \|v_h\|_{0,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_K \|(a \cdot \nabla) w_h\|_{0,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \delta \Theta \|v_h\|_0 \|a\|_\infty \|w_h\|_1 \\
&\leq \delta \Theta \|v_h\|_0 \|a\|_\infty C'_\Omega \|q_h\|_0 \\
&= \delta \Theta C'_\Omega \|a\|_\infty \|v_h\|_0 \|q_h\|_0,
\end{aligned} \tag{5.16}$$

$$\begin{aligned}
\left| \sum_K \delta_K (-\epsilon \Delta v_h, (a \cdot \nabla) w_h)_K \right| &\leq \sum_K \delta_K \epsilon \|\Delta v_h\|_{0,K} \|(a \cdot \nabla) w_h\|_{0,K} \\
&\leq \sum_K \underbrace{\delta_K}_{\leq \frac{h_K^2}{2\epsilon \mu_{inv}^2}} \epsilon \mu_{inv} h_K^{-1} |v_h|_{1,K} \|a\|_{\infty,K} |w_h|_{1,K} \\
&\leq \sum_K \frac{h_K}{2\mu_{inv}} |v_h|_{1,K} \|a\|_{\infty,K} |w_h|_{1,K} \\
&\leq h (2\mu_{inv})^{-1} |v_h|_1 \|a\|_\infty |w_h|_1 \\
&\leq h C'_\Omega (2\mu_{inv})^{-1} |v_h|_1 \|a\|_\infty \|q_h\|_0 \\
&\leq \hat{C} (2\mu_{inv})^{-1} |v_h|_1 \|a\|_\infty \|q_h\|_0
\end{aligned} \tag{5.17}$$

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_K \delta_K ((a \cdot \nabla) v_h + \nabla q_h, (a \cdot \nabla) w_h)_K \right| \\
&\leq \sum_K \sqrt{\delta_K} \|(a \cdot \nabla) v_h + \nabla q_h\|_{0,K} \sqrt{\delta_K} \|(a \cdot \nabla) w_h\|_{0,K} \\
&\leq \left(\sum_K \delta_K \|(a \cdot \nabla) v_h + \nabla q_h\|_{0,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_K \delta_K \|(a \cdot \nabla) w_h\|_{0,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq X \delta^{\frac{1}{2}} \|(a \cdot \nabla) w_h\|_0 \leq X \delta^{\frac{1}{2}} \|a\|_\infty |w_h|_1 \\
&\leq X C'_\Omega \delta^{\frac{1}{2}} \|a\|_\infty \|q_h\|_0.
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Die Abschätzungen (5.16), (5.17) und (5.18) ergeben

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_K \delta_K (\Theta v_h - \epsilon \Delta v_h + (a \cdot \nabla) v_h + \nabla q_h, (a \cdot \nabla) w_h)_K \right| \\
&\leq \delta \Theta C'_\Omega \|a\|_\infty \|v_h\|_0 \|q_h\|_0 + h C'_\Omega (2\mu_{inv})^{-1} |v_h|_1 \|a\|_\infty \|q_h\|_0 \\
&\quad + C'_\Omega X \delta^{\frac{1}{2}} \|a\|_\infty \|q_h\|_0.
\end{aligned} \tag{5.19}$$

$$\begin{aligned}
\left| \sum_K \alpha_K (\nabla \cdot v_h, \nabla \cdot w_h)_K \right| &\leq \sum_K \alpha_K \|\nabla \cdot v_h\|_{0,K} \|\nabla \cdot w_h\|_{0,K} \\
&\leq \underbrace{\left(\sum_K \alpha_K \|\nabla \cdot v_h\|_{0,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{=Z} \left(\sum_K \alpha_K \|\nabla \cdot w_h\|_{0,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq Z\alpha^{\frac{1}{2}}\|\nabla \cdot w_h\|_0 \leq Z\alpha^{\frac{1}{2}}\sum_{i=1}^n 1 \cdot \left\|\frac{\partial w_h}{\partial x_i}\right\|_0 \\
&\leq Z\alpha^{\frac{1}{2}}\sqrt{n}|w_h|_1 \leq Z\alpha^{\frac{1}{2}}\sqrt{n}C'_\Omega\|q_h\|_0.
\end{aligned} \tag{5.20}$$

Damit ergibt sich aus (5.9),(5.11)-(5.15),(5.19) und (5.20)

$$\begin{aligned}
&B_{SD}((v_h, q_h), (w_h, 0)) \\
&\geq -\Theta C'_\Omega\|v_h\|_0\|q_h\|_0 - C'_\Omega|v_h|_1\|q_h\|_0 - \gamma_0 C'_\Omega|a|_1|v_h|_1\|q_h\|_0 \\
&\quad + \|q_h\|_0^2 - \tilde{C}_1 C_\Omega\|a\|_\infty|v_h|_1\|q_h\|_0 - C_1\mu_0^{-\frac{1}{2}}C_\Omega X\|q_h\|_0 \\
&\quad - \Theta\delta C'_\Omega\|a\|_\infty\|v_h\|_0\|q_h\|_0 - (2\mu_{inv})^{-1}\hat{C}\|a\|_\infty|v_h|_1\|q_h\|_0 \\
&\quad - X C'_\Omega\delta^{\frac{1}{2}}\|a\|_\infty\|q_h\|_0 - Z\alpha^{\frac{1}{2}}\sqrt{n}C'_\Omega\|q_h\|_0 \\
&= \|q_h\|_0^2 - \|q_h\|_0\{\Theta C'_\Omega\|v_h\|_0 + C'_\Omega|v_h|_1 + \gamma_0 C'_\Omega|a|_1|v_h|_1 \\
&\quad + \tilde{C}_1 C_\Omega\|a\|_\infty|v_h|_1 + C_1\mu_0^{-\frac{1}{2}}C_\Omega X + \Theta\delta C'_\Omega\|a\|_\infty\|v_h\|_0 \\
&\quad + (2\mu_{inv})^{-1}\hat{C}\|a\|_\infty|v_h|_1 + X C'_\Omega\delta^{\frac{1}{2}}\|a\|_\infty + Z\alpha^{\frac{1}{2}}\sqrt{n}C'_\Omega\} \\
&= \|q_h\|_0^2 - \|q_h\|_0\{\underbrace{\Theta^{\frac{1}{2}}(\Theta^{\frac{1}{2}}C'_\Omega + \Theta^{\frac{1}{2}}\delta C'_\Omega\|a\|_\infty)}_{(1)}\|v_h\|_0 \\
&\quad + \underbrace{(C'_\Omega + \gamma_0 C'_\Omega|a|_1 + \tilde{C}_1 C_\Omega\|a\|_\infty + (2\mu_{inv})^{-1}\hat{C}\|a\|_\infty)}_{(2)}|v_h|_1 \\
&\quad + \underbrace{(C_1\mu_0^{-\frac{1}{2}}C_\Omega + C'_\Omega\delta^{\frac{1}{2}}\|a\|_\infty)}_{(3)}X + \underbrace{(\alpha^{\frac{1}{2}}\sqrt{n}C'_\Omega)}_{(4)}Z\} \\
&\geq \|q_h\|_0^2 - \gamma\|q_h\|_0(\Theta^{\frac{1}{2}}\|v_h\|_0 + |v_h|_1 + X + Z) \\
&\quad \text{mit } \gamma := \max\{(1), (2), (3), (4)\} \\
&\geq \|q_h\|_0^2 - \left\{\frac{5}{8}\|q_h\|_0^2 + \frac{2\gamma^2}{5}(\Theta^{\frac{1}{2}}\|v_h\|_0 + |v_h|_1 + X + Z)^2\right\} \\
&\quad \text{Youngsche Ungleichung} \\
&\geq \frac{3}{8}\|q_h\|_0^2 - 2\gamma^2(|v_h|_1^2 + \Theta\|v_h\|_0^2 + X^2 + Z^2).
\end{aligned} \tag{5.21}$$

Da γ später noch genauer betrachtet wird, soll es an dieser Stelle noch einmal explizit angegeben werden :

$$\begin{aligned}
\gamma = \max \{ &\Theta^{\frac{1}{2}}C'_\Omega + \Theta^{\frac{1}{2}}\delta C'_\Omega\|a\|_\infty, \\
&C'_\Omega + \gamma_0 C'_\Omega|a|_1 + \tilde{C}_1 C_\Omega\|a\|_\infty + (2\mu_{inv})^{-1}\hat{C}\|a\|_\infty, \\
&C_1\mu_0^{-\frac{1}{2}}C_\Omega + C'_\Omega\delta^{\frac{1}{2}}\|a\|_\infty, \\
&\alpha^{\frac{1}{2}}\sqrt{n}C'_\Omega\}.
\end{aligned} \tag{5.22}$$

vi)

Sei $\rho > 0$ (zunächst) beliebig.

Multiplikation der Abschätzung (5.6) mit $(1 - \rho\epsilon)$ und (5.21) mit $\rho\epsilon$ liefert

$$\begin{aligned} & (1 - \rho\epsilon)B_{SD}((v_h, q_h), (v_h, q_h)) + \rho\epsilon B_{SD}((v_h, q_h), (w_h, 0)) \\ & \geq \frac{1 - \rho\epsilon}{2} \{ \epsilon |v_h|_1^2 + \Theta \|v_h\|_0^2 + X^2 + Z^2 \} + \rho\epsilon \frac{3}{8} \|q_h\|_0^2 \\ & \quad - 2\gamma^2 \rho\epsilon \{ |v_h|_1^2 + \Theta \|v_h\|_0^2 + X^2 + Z^2 \}. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} & B_{SD}((v_h, q_h), (\underbrace{(1 - \rho\epsilon)v_h + \rho\epsilon w_h}_{=:z_h}, \underbrace{(1 - \rho\epsilon)q_h}_{=:r_h})) \\ & \geq \rho\epsilon \frac{3}{8} \|q_h\|_0^2 + \left\{ \frac{1 - \rho\epsilon}{2} - 2\gamma^2 \rho \right\} (\epsilon |v_h|_1^2 + \Theta \|v_h\|_0^2 + X^2 + Z^2) \\ & \geq \min \left\{ \frac{3\rho}{8}; \frac{1 - \rho\epsilon}{2} - 2\gamma^2 \rho \right\} \underbrace{(\epsilon \|q_h\|_0^2 + \epsilon |v_h|_1^2 + \Theta \|v_h\|_0^2 + X^2 + Z^2)}_{=|||(v_h, q_h)|||_h^2}. \end{aligned}$$

Daher

$$B_{SD}((v_h, q_h), (z_h, r_h)) \geq \min \left\{ \frac{3}{8} \rho; \frac{1 - \rho\epsilon}{2} - 2\gamma^2 \rho \right\} |||(v_h, q_h)|||_h^2. \quad (5.23)$$

Der erste Term im Minimum stellt eine in ρ monoton wachsende, der zweite Term eine in ρ monoton fallende Funktion da. D.h. das Minimum wird für das ρ maximal, wo beide Terme gleich sind. Nun gilt

$$\begin{aligned} \frac{3}{8} \rho &= \frac{1 - \rho\epsilon}{2} - 2\gamma^2 \rho \Leftrightarrow \frac{3}{8} \rho + \frac{\rho}{2} \epsilon + 2\gamma^2 \rho = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \rho \left(\frac{3}{8} + \frac{\epsilon}{2} + 2\gamma^2 \right) = \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow \rho = \frac{1}{\frac{6}{8} + \epsilon + 4\gamma^2} = \frac{4}{3 + 4\epsilon + 16\gamma^2}. \end{aligned}$$

Für dieses gilt dann

$$\min \left\{ \frac{3}{8} \rho; \frac{1 - \rho\epsilon}{2} - 2\gamma^2 \rho \right\} = \frac{3}{8} \frac{4}{3 + 4\epsilon + 16\gamma^2} = \frac{3}{6 + 8\epsilon + 32\gamma^2} \geq \frac{3}{14 + 32\gamma^2}.$$

Folglich ist mit (5.23)

$$B_{SD}((v_h, q_h), (z_h, r_h)) \geq \frac{3}{14 + 32\gamma^2} |||(v_h, q_h)|||_h^2. \quad (5.24)$$

vii) Nun folgt

$$\begin{aligned} |||(z_h, r_h)|||_h &= |||((1 - \rho\epsilon)v_h + \rho\epsilon w_h), (1 - \rho\epsilon)q_h)|||_h \\ &= |||((1 - \rho\epsilon)v_h, (1 - \rho\epsilon)q_h) + (\rho\epsilon w_h, 0)|||_h \\ &\leq (1 - \rho\epsilon) |||(v_h, q_h)|||_h + \rho\epsilon |||(w_h, 0)|||_h. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Mit

$$\begin{aligned}
|||(w_h, 0)|||_h &\leq (\epsilon |w_h|_1^2 + \Theta \|w_h\|_0^2 + \sum_K \alpha_K \|\nabla \cdot w_h\|_{0,K}^2 \\
&\quad + \sum_K \delta_K \|(a \cdot \nabla) w_h\|_{0,K}^2)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq (\epsilon |w_h|_1^2 + \Theta \|w_h\|_0^2 + \alpha \|\nabla \cdot w_h\|_0^2 + \sum_K \delta_K \|(a \cdot \nabla) w_h\|_{0,K}^2)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq (\epsilon (C'_\Omega)^2 \|q_h\|_0^2 + \Theta (C'_\Omega)^2 \|q_h\|_0^2 + \alpha \left(\sum_{i=1}^n 1 \cdot \left\| \frac{\partial (w_h)_i}{\partial x_i} \right\|_0 \right)^2 \\
&\quad + \sum_K \delta_K \|a\|_{\infty,K}^2 \|\nabla w_h\|_{0,K}^2)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq (\epsilon (C'_\Omega)^2 \|q_h\|_0^2 + \Theta (C'_\Omega)^2 \|q_h\|_0^2 + \underbrace{\alpha n \left(\sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial (w_h)_i}{\partial x_i} \right\|_0^2 \right)}_{\leq \|w_h\|_1^2} \\
&\quad + \delta \|a\|_\infty^2 |w_h|_1^2)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq (\epsilon (C'_\Omega)^2 \|q_h\|_0^2 + \Theta (C'_\Omega)^2 \|q_h\|_0^2 + \alpha n (C'_\Omega)^2 \|q_h\|_0^2 \\
&\quad + \delta \|a\|_\infty^2 (C'_\Omega)^2 \|q_h\|_0^2)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \underbrace{(C'_\Omega)}_{\leq \gamma} + \underbrace{\Theta^{\frac{1}{2}}}_{\leq \gamma} + \underbrace{\alpha^{\frac{1}{2}} \sqrt{n} C'_\Omega}_{\leq \gamma} + \underbrace{\delta^{\frac{1}{2}} \|a\|_\infty C'_\Omega}_{\leq \gamma} \|q_h\|_0 \\
&\quad \text{(nach Konstruktion von } \gamma, \text{ vgl (5.22))} \\
&\leq 4\gamma \|q_h\|_0
\end{aligned}$$

ergibt sich schließlich mit (5.25)

$$\begin{aligned}
|||(z_h, r_h)|||_h &\leq \underbrace{|(1 - \rho\epsilon)|}_{\leq 1} |||(v_h, q_h)|||_h + 4\gamma\rho\epsilon \|q_h\|_0 \\
&\leq |||(v_h, q_h)|||_h + 4\gamma\rho\epsilon \|q_h\|_0 \\
&\leq |||(v_h, q_h)|||_h + 4\gamma\rho \underbrace{(\epsilon \|q_h\|_0^2)^{\frac{1}{2}}}_{\leq |||(v_h, q_h)|||_h} \\
&\leq (1 + 4\gamma\rho) |||(v_h, q_h)|||_h. \tag{5.26}
\end{aligned}$$

Es ist $\gamma\rho \leq \frac{4\gamma}{3+16\gamma^2} = \frac{1}{\frac{3}{4\gamma} + 4\gamma}$.

Für $\gamma > 0$ definiere $f(\gamma) := \frac{3}{4\gamma} + 4\gamma$. Dann ist $f'(\gamma) = -\frac{3}{4\gamma^2} + 4$. Das bedeutet

$$f'(\gamma) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{4\gamma^2} = 4 \Leftrightarrow \gamma^2 = \frac{3}{16} \Leftrightarrow \gamma = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

$$\gamma \geq \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow f'(\gamma) \geq -\frac{3}{4\frac{3}{16}} + 4 = 0,$$

$$0 < \gamma \leq \frac{\sqrt{3}}{4} \Rightarrow f'(\gamma) \leq 0.$$

D.h. $f(\gamma)$ hat ein absolutes Minimum bei $\gamma = \frac{\sqrt{3}}{4}$. Da

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \frac{3}{4\frac{\sqrt{3}}{4}} + 4\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

ist $f(\gamma) \geq 2\sqrt{3} \quad \forall \gamma > 0$. Daher ist

$$\gamma\rho \leq \frac{1}{2\sqrt{3}} < \frac{1}{2} \Rightarrow (1 + 4\gamma\rho) \leq 3$$

und mittels (5.26) folgt

$$\| |(z_h, r_h) \|_h \leq 3 \| |(v_h, q_h) \|_h.$$

Damit erhält man

$$B_{SD}((v_h, q_h), (z_h, r_h)) \geq \frac{1}{14 + 32\gamma^2} \| |(v_h, q_h) \|_h \| |(z_h, r_h) \|_h.$$

Daraus folgt die Behauptung mit $\beta := \frac{1}{14 + 32\gamma^2}$.

□

Bemerkung 5.2

- Lemma 5.1 impliziert die eindeutige und stabile Lösbarkeit des diskreten Problems (siehe hierzu Lemma 6.5.3 und Übungsaufgabe 6.5.4 in [13]).
- An der Definition von β erkennt man die Beziehung $\beta = O(\gamma^{-2})$. Probleme entstehen also dann, wenn γ , welches von diversen Größen abhängt, sehr groß wird. Daher soll im folgenden untersucht werden, wie sich γ in Abhängigkeit der entsprechenden Größen verhält.

Betrachtet man die Darstellung (5.22) von γ , so ergibt sich sofort

$$\gamma^2 = O(\mu_0^{-1}) \text{ für } \mu_0 \rightarrow 0,$$

$$\gamma^2 = O(\delta) \text{ für } \delta \rightarrow \infty,$$

$$\gamma^2 = O(\alpha) \text{ für } \alpha \rightarrow \infty.$$

An diesen Zusammenhängen erkennt man, daß die Parameter δ_K und α_K nicht beliebig groß gewählt werden können. Andererseits ergibt sich aber auch eine Beschränkung der δ_K nach unten wegen $\delta_K > \mu_0 h_K^2$, wobei μ_0 nicht beliebig klein werden darf.

Ein weiterer Zusammenhang ist

$$\gamma^2 = O(\Theta) \text{ für } \Theta \rightarrow \infty.$$

Dies bedeutet, daß der Parameter Θ nicht beliebig groß gewählt werden kann. Dieser liegt bei Zeitdiskretisierungen typischerweise in der Größenordnung τ^{-1} , wobei τ die Zeitschrittweite ist. Daher bedeutet die Forderung, daß Θ nicht zu groß werden darf, eine Beschränkung an die Zeitschrittweite nach unten, d.h. man kann nicht mit beliebig kleinen Zeitschritten rechnen. Weitere Betrachtungen zu diesem Parameter finden sich in Abschnitt 5.4.

Weiter erkennt man noch den Einfluß des Strömungsfeldes a auf die Stabilität mittels

$$\gamma^2 = O(\|a\|_\infty^2) \text{ für } \|a\|_\infty \rightarrow \infty,$$

$$\gamma^2 = O(|a|_1^2) \text{ für } |a|_1 \rightarrow \infty.$$

Der Fall $a \rightarrow 0$ (Stokes-Fall) bereitet aber keine Probleme, da die Normen von a in keinen negativen Potenzen auftreten.

Zusammenfassend kann also gesagt werden, daß die Stabilitätsabschätzung aus Lemma 5.1 eine Beschränkung der Parameter α_K nach oben und der δ_K sowohl nach oben als auch nach unten fordert.

5.3 Konvergenz

In diesem Abschnitt wird die Konvergenz der SDFEM bewiesen. Zuvor sind aber noch einige Vorbemerkungen zum Begriff L^2 -Projektion notwendig, die später im Konvergenzbeweis benutzt werden.

Betrachtet wird der Operator

$$P_2 : L^2(\Omega) \longrightarrow M_h$$

definiert durch

$$P_2(q) \in M_h : (P_2(q), p_h) = (q, p_h) \quad \forall p_h \in M_h$$

(vgl. [16], Abschnitt 3.5).

Diesen Operator bezeichnet man als L^2 -Projektion auf M_h .

Weiter ist es natürlich auch möglich, einen lokalen L^2 -Projektionsoperator zu definieren :

Sei $(M_h)|_K$ die Einschränkung der Elemente aus M_h auf K . Dann erhält man den Projektionsoperator

$$P_2^K : L^2(K) \longrightarrow (M_h)|_K.$$

Nun besteht der Zusammenhang $P_2(v)|_K = P_2^K(v|_K) \quad \forall v \in L^2(\Omega)$, denn :

Für beliebiges $v \in L^2(\Omega)$ und für alle $\hat{v} \in (M_h)|_K$ gilt

$$\begin{aligned} (P_2(v)|_K, \hat{v})_K &= (P_2(v), \tilde{v})_\Omega \quad (\tilde{v} \text{ Nullfortsetzung von } \hat{v}) \\ &= (v, \tilde{v})_\Omega = (v|_K, \hat{v})_K. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P_2(v)|_K = P_2^K(v|_K).$$

Nach [11] Prop.9.37 gilt $\|P_2^K\| = 1$. Somit ist

$$\|P_2 v\|_{0,K} = \|P_2^K(v|_K)\|_{0,K} = \|(v|_K)\|_{0,K} = \|v\|_{0,K}.$$

Ist nun $p \in H^j(K)$ und $q_h := P_2 p$ so ergibt sich unter Ausnutzung der Interpolationsabschätzung (5.2) und der Ungleichung (5.5) :

$$\begin{aligned} |p - q_h|_{i,K} &\leq |p - J_h p|_{i,K} + |J_h p - q_h|_{i,K} \\ &\leq C_3 h_K^{j-i} |p|_{j,K} + |P_2(J_h p - p)|_{i,K} \\ &\leq C_3 h_K^{j-i} |p|_{j,K} + C_5 h_K^{-i} \|P_2(J_h p - p)\|_{0,K} \\ &= C_3 h_K^{j-i} |p|_{j,K} + C_5 h_K^{-i} \|J_h p - p\|_{0,K} \\ &\leq C_3 h_K^{j-i} |p|_{j,K} + C_5 C_3 h_K^{j-i} |p|_{j,K} \\ &\leq \tilde{C} h_K^{j-i} |p|_{j,K}, \end{aligned} \tag{5.27}$$

d.h. die Interpolationsabschätzung (5.2) für J_h gilt in der Halbnorm sinngemäß für die L^2 -Projektion mit modifizierter Konstanten.

Nun kann der entscheidende Satz dieses Abschnitts bewiesen werden :

Satz 5.3 Sei $(u, p) \in X \times M$ die Lösung des Oseen-Problems. Es gelte $\Theta \geq 0, 0 \leq \alpha_K \leq \alpha$ und

$$0 < \mu_0 h_K^2 \leq \delta_K \leq \min\left(\delta, \frac{h_K^2}{2\epsilon \mu_{inv}^2}\right), \quad 0 \leq \Theta \delta_K \leq \frac{1}{2}.$$

Zusätzlich sei $(u, p) \in H^{k+1}(\Omega)^n \times H^{l+1}(\Omega)$ mit $k \geq 1, l \geq 0$.

Dann gilt die Fehlerabschätzung

$$\| |(u - u_h, p - p_h)| \|_h \leq C \left\{ \sum_K h_K^k E_K \|u\|_{k+1,K} + \sum_K h_K^l F_K \|p\|_{l+1,K} \right\} \tag{5.28}$$

mit

$$E_K := \epsilon^{\frac{1}{2}} + \Theta^{\frac{1}{2}} h_K + \alpha_K^{\frac{1}{2}} + \delta_K^{\frac{1}{2}} \|a\|_{\infty, K} + \delta_K^{\frac{1}{2}} \Theta h_K + h_K \delta_K^{-\frac{1}{2}} \quad (5.29)$$

$$F_K := \epsilon^{\frac{1}{2}} h_K + \delta_K^{\frac{1}{2}} + \eta \min\{\alpha_K^{-\frac{1}{2}}, \epsilon^{-\frac{1}{2}}\} h_K. \quad (5.30)$$

Dabei ist C eine von ϵ und h unabhängige Konstante und

$$\eta := \begin{cases} 0 & \text{falls } \nabla \cdot X_h \subset M_h \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Beweis : Definiere $v_h := I_h u$ und q_h als die L^2 -Projektion von p .

i) Mit den Interpolationsabschätzungen folgt

$$\begin{aligned} & |||(u - v_h, p - q_h)|||_h \\ &= \left\{ \epsilon \|u - v_h\|_1^2 + \Theta \|u - v_h\|_0^2 + \epsilon \|p - q_h\|_0^2 + \sum_K \alpha_K \|\nabla \cdot (u - v_h)\|_{0,K}^2 \right. \\ & \quad \left. + \sum_K \delta_K \|(a \cdot \nabla)(u - v_h) + \nabla(p - q_h)\|_{0,K}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left\{ \epsilon \sum_K \|u - v_h\|_{1,K}^2 + \Theta \sum_K \|u - v_h\|_{0,K}^2 + \epsilon \sum_K \|p - q_h\|_{0,K}^2 \right. \\ & \quad \left. + \sum_K \alpha_K \|u - v_h\|_{1,K}^2 + \sqrt{2} \sum_K \delta_K (\|(a \cdot \nabla)(u - v_h)\|_{0,K}^2 \right. \\ & \quad \left. + \|\nabla(p - q_h)\|_{0,K}^2) \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \left\{ \epsilon \sum_K h_K^{2k} |u|_{k+1,K}^2 + \Theta \sum_K h_K^{2k+2} |u|_{k+1,K}^2 + \epsilon \sum_K h_K^{2l+2} |p|_{l+1,K}^2 \right. \\ & \quad \left. + \sum_K \alpha_K h_K^{2k} |u|_{k+1,K}^2 + \sqrt{2} \sum_K \delta_K \|a\|_{\infty, K} |u|_{k+1,K}^2 + \sqrt{2} \sum_K \delta_K h_K^{2l} |p|_{l+1,K}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \left\{ \epsilon^{\frac{1}{2}} \left(\sum_K h_K^{2k} |u|_{k+1,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \Theta^{\frac{1}{2}} \left(\sum_K h_K^{2k+2} |u|_{k+1,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\ & \quad \left. + \epsilon^{\frac{1}{2}} \left(\sum_K h_K^{2l+2} |p|_{l+1,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_K \alpha_K h_K^{2k} |u|_{k+1,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\ & \quad \left. + 2^{\frac{1}{4}} \left(\sum_K \delta_K \|a\|_{\infty, K} |u|_{k+1,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{4}} \left(\sum_K \delta_K h_K^{2l} |p|_{l+1,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \\ &\leq \tilde{C} \left\{ \sum_K h_K^k (\epsilon^{\frac{1}{2}} + \Theta^{\frac{1}{2}} h_K + \alpha_K^{\frac{1}{2}} + \delta_K^{\frac{1}{2}} \|a\|_{\infty, K}) \|u\|_{k+1, K} \right. \\ & \quad \left. + \sum_K h_K^l (\epsilon^{\frac{1}{2}} h_K + \delta_K^{\frac{1}{2}}) \|p\|_{l+1, K} \right\}. \quad (5.31) \end{aligned}$$

ii) Mittels der inf-sup-Bedingung erhält man

$$\begin{aligned}
& |||(u_h - v_h, p_h - q_h)|||_h \\
\leq & \frac{1}{\beta} \sup_{|||(w_h, r_h)|||_h=1} B_{SD}((u_h - v_h, p_h - q_h), (w_h, r_h)) \\
= & \frac{1}{\beta} \sup_{|||(w_h, r_h)|||_h=1} \underbrace{\{B_{SD}((u_h - u, p_h - p), (w_h, r_h))\}}_{=0 \text{ (Konsistenz)}} \\
& + B_{SD}((u - v_h, p - q_h), (w_h, r_h)) \\
= & \frac{1}{\beta} \sup_{|||(w_h, r_h)|||_h=1} B_{SD}((u - v_h, p - q_h), (w_h, r_h)) \\
= & \frac{1}{\beta} \sup_{|||(w_h, r_h)|||_h=1} \{ \epsilon(\nabla(u - v_h), w_h) + ((a \cdot \nabla)(u - v_h) \\
& + \Theta(u - v_h), w_h) - (\nabla \cdot w_h, p - q_h) \\
& + (\nabla \cdot (u - v_h), r_h) + \sum_K \alpha_K (\nabla \cdot (u - v_h), \nabla \cdot w_h)_K \\
& + \sum_K \delta_K (-\epsilon \Delta(u - v_h) + (a \cdot \nabla)(u - v_h) \\
& + \Theta(u - v_h) + \nabla(p - q_h), (a \cdot \nabla)w_h + \nabla r_h) \}. \tag{5.32}
\end{aligned}$$

iii) Abschätzung der einzelnen Terme in (5.32) :

$$\begin{aligned}
\Theta(u - v_h, w_h) &= \Theta \sum_K (u - v_h, w_h)_K \\
&\leq \Theta \sum_K \|u - v_h\|_{0,K} \|w_h\|_{0,K} \\
&\leq \Theta \left(\sum_K \|u - v_h\|_{0,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|w_h\|_0 \\
&\leq C_1 \Theta \left(\sum_K h_K^{2k+2} \|u\|_{k+1,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|w_h\|_0 \\
&\leq C_1 \Theta^{\frac{1}{2}} \left(\sum_K h_K^{k+1} \|u\|_{k+1,K} \right) (\Theta \|w_h\|_0^2)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C_1 \left(\sum_K h_K^k h_K \Theta^{\frac{1}{2}} \|u\|_{k+1,K} \right) |||(w_h, r_h)|||_h. \tag{5.33}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\epsilon(\nabla(u - v_h), \nabla w_h) &= \epsilon \sum_K (\nabla(u - v_h), \nabla w_h)_K \\
&\leq \epsilon \sum_K \|\nabla(u - v_h)\|_{0,K} \|\nabla w_h\|_{0,K} \\
&\leq \epsilon \left(\sum_K \|u - v_h\|_{1,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} |w_h|_1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C_1 \epsilon \left(\sum_K h_K^{2k} \|u\|_{k+1,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} |w_h|_1 \\
&\leq C_1 \epsilon^{\frac{1}{2}} \left(\sum_K h_K^k \|u\|_{k+1,K} \right) \left(\epsilon |w_h|_1^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C_1 \left(\sum_K h_K^k \epsilon^{\frac{1}{2}} \|u\|_{k+1,K} \right) |||(w_h, r_h)|||_h. \tag{5.34}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_K \delta_K (\Theta(u - v_h) - \epsilon \Delta(u - v_h), (a \cdot \nabla)w_h + \nabla r_h)_K \\
&\leq \sum_K \delta_K (\|\Theta(u - v_h)\|_{0,K} + \|\epsilon \Delta(u - v_h)\|_{0,K}) \|(a \cdot \nabla)w_h + \nabla r_h\|_{0,K} \\
&\leq C_1 \sum_K \delta_K \{\Theta h_K^{k+1} \|u\|_{k+1,K} + \epsilon h_K^{k-1} \|u\|_{k+1,K}\} \|(a \cdot \nabla)w_h + \nabla r_h\|_{0,K} \\
&\leq C_1 \left(\sum_K \delta_K^{\frac{1}{2}} (\Theta h_K^{k+1} \|u\|_{k+1,K}) \delta_K^{\frac{1}{2}} \|(a \cdot \nabla)w_h + \nabla r_h\|_{0,K} \right. \\
&\quad \left. + \sum_K \delta_K^{\frac{1}{2}} \epsilon h_K^{k-1} \|u\|_{k+1,K} \delta_K^{\frac{1}{2}} \|(a \cdot \nabla)w_h + \nabla r_h\|_{0,K} \right) \\
&\leq C_1 \left(\sum_K \delta_K \Theta^2 h_K^{2k+2} \|u\|_{k+1,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_K \delta_K \|(a \cdot \nabla)w_h + \nabla r_h\|_{0,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + C_1 \left(\sum_K \underbrace{\delta_K}_{\leq \frac{h_K^2}{2\epsilon \mu_{inv}}} \epsilon^2 h_K^{2k-2} \|u\|_{k+1,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \underbrace{\left(\sum_K \delta_K \|(a \cdot \nabla)w_h + \nabla r_h\|_{0,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{\leq |||(w_h, r_h)|||_h} \\
&\leq \tilde{C} \sum_K (\delta_K^{\frac{1}{2}} \Theta h_K^{k+1} + \epsilon^{\frac{1}{2}} h_K^k) \|u\|_{k+1,K} |||(w_h, r_h)|||_h \\
&\leq \tilde{C} \sum_K h_K^k (\delta_K^{\frac{1}{2}} \Theta h_K + \epsilon^{\frac{1}{2}}) \|u\|_{k+1,K} |||(w_h, r_h)|||_h. \tag{5.35}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_K \delta_K ((a \cdot \nabla)(u - v_h) + \nabla(p - q_h), (a \cdot \nabla)w_h + \nabla r_h)_K \\
&\leq \sum_K \delta_K^{\frac{1}{2}} \|(a \cdot \nabla)(u - v_h)\|_{0,K} + \|\nabla(p - q_h)\|_{0,K} \\
&\quad + \delta_K^{\frac{1}{2}} \|(a \cdot \nabla)w_h + \nabla r_h\|_{0,K} \\
&\leq \left(\left(\sum_K \|(a \cdot \nabla)(u - v_h)\|_{0,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_K \delta_K \|\nabla(p - q_h)\|_{0,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \\
&\quad \cdot \left(\sum_K \delta_K \|(a \cdot \nabla)w_h + \nabla r_h\|_{0,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \left(\left(\sum_K \delta_K \|a\|_{\infty, K}^2 h_K^{2k} \|u\|_{k+1, K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right. \\
&\quad \left. + \left(\sum_K \delta_K h_K^{2l} \|p\|_{l+1, K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right) |||(w_h, r_h)|||_h \\
&\leq C \left\{ \sum_K h_K^k (\delta_K^{\frac{1}{2}} \|a\|_{\infty, K}) \|u\|_{k+1, K} + \sum_K h_K^l \delta_K^{\frac{1}{2}} \|p\|_{l+1, K} \right\}. \tag{5.36}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&((a \cdot \nabla)(u - v_h), w_h) + (r_h, \nabla \cdot (u - v_h)) \\
&= \sum_K ((a \cdot \nabla)(u - v_h), w_h)_K + (r_h, \nabla \cdot (u - v_h))_K \\
&= \sum_K (((a \cdot \nabla)(u - v_h), w_h)_K - (\nabla r_h, u - v_h)_K) \\
&\quad \text{(partielle Integration)} \\
&= \sum_K (-((a \cdot \nabla)w_h, u - v_h)_K - (\nabla r_h, u - v_h)_K) \\
&= \sum_K (-((a \cdot \nabla)w_h + \nabla r_h, u - v_h)_K) \\
&= -\sum_K (((a \cdot \nabla)w_h + \nabla r_h, u - v_h)_K) \\
&\leq \sum_K \|(a \cdot \nabla)w_h + \nabla r_h\|_{0, K} \|u - v_h\|_{0, K} \\
&= \sum_K \delta_K^{\frac{1}{2}} \|(a \cdot \nabla)w_h + \nabla r_h\|_{0, K} \delta_K^{-\frac{1}{2}} \|u - v_h\|_{0, K} \\
&\leq |||(w_h, r_h)|||_h \left(\sum_K \delta_K^{-1} \|u - v_h\|_{0, K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C |||(w_h, r_h)|||_h \left(\sum_K \delta_K^{-1} h_K^{2k+2} \|u\|_{k+1, K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= C |||(w_h, r_h)|||_h \left(\sum_K \delta_K^{-1} h_K^2 h_K^{2k} \|u\|_{k+1, K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C |||(w_h, r_h)|||_h \left(\sum_K h_K^k \delta_K^{-\frac{1}{2}} h_K \|u\|_{k+1, K}^2 \right). \tag{5.37}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_K \alpha_K (\nabla \cdot (u - v_h), \nabla \cdot w_h)_K \\
&\leq \sum_K \alpha_K \|\nabla \cdot (u - v_h)\|_{0, K} \|\nabla \cdot w_h\|_{0, K}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \left(\sum_K \alpha_K \|\nabla \cdot (u - v_h)\|_{0,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \underbrace{\left(\sum_K \alpha_K \|\nabla \cdot w_h\|_{0,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{\leq \| (w_h, r_h) \|_h} \\
&\leq \left(\sum_K \alpha_K \|u - v_h\|_{1,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \| (w_h, r_h) \|_h \\
&\leq C_1 \left(\sum_K \alpha_K h_K^{2k} \|u\|_{k+1,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \| (w_h, r_h) \|_h \\
&\leq C_1 \left(\sum_K h_K^k \alpha_K^{\frac{1}{2}} \|u\|_{k+1,K} \right) \| (w_h, r_h) \|_h. \tag{5.38}
\end{aligned}$$

Für die Abschätzung des verbleibenden Terms in (5.32) kann man folgende Fallunterscheidung machen :

Fall 1: $\nabla \cdot X_h \subset M_h$: Dann ist

$$-(p - q_h, \nabla \cdot w_h) = -\underbrace{(p, \nabla \cdot w_h)}_{\in M_h} + \underbrace{(q_h, \nabla \cdot w_h)}_{\in M_h} = 0 \tag{5.39}$$

(da q_h L^2 -Projektion von p).

Fall 2: $\nabla \cdot X_h \not\subset M_h$: Dann folgt

$$\begin{aligned}
-(p - q_h, \nabla \cdot w_h) &\leq \sum_K \|p - q_h\|_{0,K} \|\nabla \cdot w_h\|_{0,K} \\
&\leq \left(\sum_K \alpha_K^{-1} \|p - q_h\|_{0,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_K \alpha_K \|\nabla \cdot w_h\|_{0,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\sum_K \alpha_K^{-1} \|p - q_h\|_{0,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \| (w_h, r_h) \|_h \\
&\leq C_3 \left(\sum_K \alpha_K^{-1} h_K^{2l+2} \|p\|_{l+1,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \| (w_h, r_h) \|_h \\
&\leq C_3 \sum_K h_K^l (\alpha_K^{-\frac{1}{2}} h_K) \|p\|_{l+1,K} \| (w_h, r_h) \|_h, \tag{5.40}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
-(p - q_h, \nabla \cdot w_h) &\leq \sum_K \|p - q_h\|_{0,K} \|\nabla \cdot w_h\|_{0,K} \\
&\leq \left(\sum_K \epsilon^{-1} \|p - q_h\|_{0,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_K \epsilon \|\nabla \cdot w_h\|_{0,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left(\sum_K \epsilon^{-1} \|p - q_h\|_{0,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \underbrace{\left(\epsilon |w_h|_1^2 \right)^{\frac{1}{2}}}_{\leq \| (w_h, r_h) \|_h}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C_3 \left(\sum_K \epsilon^{-1} h_K^{2l+2} \|p\|_{l+1,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} |||(w_h, r_h)|||_h \\
&\leq C_3 \sum_K h_K^l (\epsilon^{-\frac{1}{2}} h_K) \|p\|_{l+1,K} |||(w_h, r_h)|||_h. \tag{5.41}
\end{aligned}$$

(5.40) und (5.41) ergeben

$$-(p - q_h, \nabla \cdot w_h) \leq C_3 \sum_K h_K^l (\min\{\alpha_K^{-\frac{1}{2}}, \epsilon^{-\frac{1}{2}}\} h_K) \|p\|_{l+1,K} |||(w_h, r_h)|||_h.$$

Insgesamt mit (5.39):

$$-(p - q_h, \nabla \cdot w_h) \leq C \sum_K h_K^l (\eta \min\{\alpha_K^{-\frac{1}{2}}, \epsilon^{-\frac{1}{2}}\} h_K) \|p\|_{l+1,K} |||(w_h, r_h)|||_h. \tag{5.42}$$

iv) Mittels (5.32) erhält man mit den Abschätzungen (5.33)-(5.42) und unter Berücksichtigung von $|||(w_h, r_h)|||_h = 1$

$$\begin{aligned}
&|||(u_h - v_h, p_h - q_h)|||_h \\
&\leq \tilde{C} \left\{ \sum_K h_K \left(h_K \Theta^{\frac{1}{2}} + \epsilon^{\frac{1}{2}} + \delta_K^{\frac{1}{2}} \Theta h_K + \delta_K^{\frac{1}{2}} \|a\|_{\infty,K} + \delta_K^{-\frac{1}{2}} h_K + \alpha_K^{\frac{1}{2}} \right) \|u\|_{k+1,K} \right. \\
&\quad \left. + \sum_K h_K^l \left(\delta_K^{\frac{1}{2}} + \eta \min\{\alpha_K^{-\frac{1}{2}}, \epsilon^{-\frac{1}{2}}\} h_K \right) \|p\|_{l+1,K} \right\}. \tag{5.43}
\end{aligned}$$

Nun ergibt sich die Behauptung aus der Dreiecksungleichung und (5.31) und (5.43). \square

Bemerkung 5.4 Eine weitere Stabilisierungsmethode stellt das Galerkin/least-squares-Verfahren (GLS) dar. Dieses unterscheidet sich von der hier beschriebenen Methode dadurch, daß anstatt mit Funktionen der Form $(a \cdot \nabla)v + \nabla q$ mit dem gesamten Differentialoperator L elementweise getestet wird, d.h. man bekommt das Problem :

Finde $\hat{u} = (u_h, p_h) \in X_h \times M_h$ mit

$$B_{GLS}(\hat{u}, \hat{v}) = L_{GLS}(\hat{v}) \quad \forall \hat{v} = (v_h, q_h) \in X_h \times M_h,$$

wobei

$$\begin{aligned}
B_{GLS}(\hat{u}_h, \hat{v}_h) &: = \epsilon(\nabla u_h, \nabla v_h) + ((a \cdot \nabla u_h + \Theta u_h, v_h) - (p_h, \nabla \cdot v_h) + (q_h, \nabla \cdot u_h) \\
&\quad + \sum_K \alpha_K (\nabla \cdot u_h, \nabla \cdot v_h)_K + \sum_K \delta_K (L\hat{u}_h, L\hat{v}_h)_K, \\
L_{GLS} &: = (f, v_h) + \sum_K \delta_K (f, L\hat{v}_h)_K.
\end{aligned}$$

Dieses Verfahren wird in [15] für den Fall $\Theta = 0$ genauer analysiert, und man erhält ein zu Satz 5.3 ähnliches Resultat. Es wird hier allerdings keine inf-sup-Bedingung zum Nachweis der Stabilität gezeigt. Stattdessen wird die entsprechende Norm gerade so definiert, daß die Bilinearform $B_{GLS}(\cdot, \cdot)$ elliptisch wird, d.h.

$$B_{GLS}(\hat{u}_h, \hat{u}_h) = |||\hat{u}_h|||^2 := \epsilon |u_h|_1^2 + \sum_K \alpha_K \|\nabla \cdot u_h\|_{0,K}^2 + \sum_K \delta_K \|L\hat{u}_h\|_{0,K}^2.$$

(Setzt man $\delta_K \neq 0$ voraus, so ist unmittelbar erkennbar, daß dieser Ausdruck wegen $p \in L_0^2(\Omega)$ eine Norm auf $X_h \times M_h$ darstellt.)

Dieses Vorgehen hat den Nachteil, daß diese Norm keine Kontrolle über die L^2 -Norm des Druckes beinhaltet, wie es in der Norm bei der SDFEM der Fall ist. Möchte man beim GLS-Verfahren ebenfalls den Druck in der L^2 -Norm kontrollieren, so müßte man für dieses eine analoge Untersuchung mit Nachweis einer Babuška-Bedingung durchführen. Betrachtet man die Implementierung in PNS, so unterscheiden sich GLS und SDFEM nicht, da in diesem Programm lineare Elemente für Geschwindigkeit und Druck verwendet werden und somit alle zweiten Ableitungen verschwinden.

□

5.4 Wahl der Stabilisierungsparameter

Bisher ist die Frage offen geblieben, wie die Parameter δ_K und α_K zu wählen sind. Mittels des Konvergenzsatzes 5.3 läßt sich nun eine Wahl für gute Konvergenz motivieren. Hierzu betrachtet man die beiden Faktoren aus diesem Satz :

$$E_K := \epsilon^{\frac{1}{2}} + \Theta^{\frac{1}{2}} h_K + \alpha_K^{\frac{1}{2}} + \delta_K^{\frac{1}{2}} \|a\|_{\infty,K} + \delta_K^{\frac{1}{2}} \Theta h_K + h_K \delta_K^{-\frac{1}{2}}, \quad (5.44)$$

$$F_K := \epsilon^{\frac{1}{2}} h_K + \delta_K^{\frac{1}{2}} + \eta \min\{\alpha_K^{-\frac{1}{2}}, \epsilon^{-\frac{1}{2}}\} h_K. \quad (5.45)$$

Die einzigen Größen, mit denen man diese beiden Faktoren noch beeinflussen kann, sind die Parameter δ_K, α_K und ggf. bei instationären Problemen Θ . Diese sollte man so wählen, daß Terme, die diese Faktoren enthalten, nicht größer werden als die Terme, die nicht beeinflußt werden können (z.B. $\epsilon^{\frac{1}{2}}$). Ein wichtige Kennzahl stellt die lokale Reynoldszahl dar. Diese ist definiert als

$$Re_K := \frac{h_K \|a\|_{\infty,K}}{\epsilon}.$$

Weiterhin wird folgende Schreibweise verwendet : Seien $a, b \in \mathbb{R}, a, b > 0$. Dann bedeutet

$$a \lesssim b,$$

daß es eine Konstante $C > 0$ gibt mit $a \leq Cb$.

i) Zunächst werden die Terme betrachtet, welche δ_K enthalten.

$Re_K \leq 1$: Wegen (5.44) sollte gelten

$$h_K \delta_K^{-\frac{1}{2}} \lesssim \epsilon^{\frac{1}{2}} \iff \delta_K \gtrsim \frac{h_K^2}{\epsilon}.$$

Als Voraussetzung von Satz 5.3 hatte man noch $\delta_K \lesssim \frac{h_K^2}{\epsilon}$.

Daher

$$\boxed{\delta_K \sim \frac{h_K^2}{\epsilon}}. \quad (5.46)$$

Mit dieser Wahl gilt dann

$$\delta_K^{\frac{1}{2}} \|a\|_{\infty, K} \sim \frac{h_K}{\epsilon^{\frac{1}{2}}} \|a\|_{\infty, K} = \epsilon^{\frac{1}{2}} Re_K \leq \epsilon^{\frac{1}{2}}, \quad (5.47)$$

d.h. $\delta_K^{\frac{1}{2}} \|a\|_{\infty, K} \lesssim \epsilon^{\frac{1}{2}}$.

$Re_K \geq 1$: Bei Wahl von δ_K gemäß (5.46) würde gelten

$$\begin{aligned} \delta_K^{\frac{1}{2}} \|a\|_{\infty, K} &\sim \epsilon^{\frac{1}{2}} Re_K, \\ h_K \delta_K^{-\frac{1}{2}} &\sim \epsilon^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Daher kann die Forderung, daß diese Terme sich nicht schlechter verhalten als $\epsilon^{\frac{1}{2}}$, nicht erfüllt werden. Es ist dann

$$\delta_K^{\frac{1}{2}} \|a\|_{\infty, K} + h_K \delta_K^{-\frac{1}{2}} \sim \epsilon^{\frac{1}{2}} (1 + Re_K).$$

Nun gilt

$$(1 + Re_K) > 2Re_K^{\frac{1}{2}} \text{ für } Re_K > 1$$

und damit

$$2\epsilon^{\frac{1}{2}} Re_K^{\frac{1}{2}} < \epsilon^{\frac{1}{2}} (1 + Re_K) \text{ für } Re_K > 1.$$

Daher kann man den Fehler vermindern, indem man fordert

$$\begin{aligned} \delta_K^{\frac{1}{2}} \|a\|_{\infty, K} &\lesssim \epsilon^{\frac{1}{2}} Re_K^{\frac{1}{2}}, \\ h_K \delta_K^{-\frac{1}{2}} &\lesssim \epsilon^{\frac{1}{2}} Re_K^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

bzw.

$$\delta_K^{\frac{1}{2}} \|a\|_{\infty, K} \lesssim h_K^{\frac{1}{2}} \|a\|_{\infty, K}^{\frac{1}{2}} \iff \delta_K \lesssim \frac{h_K}{\|a\|_{\infty, K}}$$

und

$$h_K \delta_K^{-\frac{1}{2}} \lesssim h_K^{\frac{1}{2}} \|a\|_{\infty, K}^{\frac{1}{2}} \iff \delta_K \gtrsim \frac{h_K}{\|a\|_{\infty, K}}.$$

Insgesamt ergibt sich

$$\boxed{\delta_K \sim \frac{h_K}{\|a\|_{\infty, K}}.}$$

Diese Wahl von δ_K verträgt sich mit den Voraussetzungen von Satz 5.3, denn damit ist

$$\delta_K \sim \frac{h_K}{\|a\|_{\infty, K}} = \frac{h_K^2}{\epsilon} \cdot \frac{\epsilon}{h_K \|a\|_{\infty, K}} \leq \frac{h_K^2}{\epsilon}.$$

ii) Nun bleibt noch zu überlegen, wie der Parameter α_K gewählt werden sollte. Dabei sollten die Terme in (5.44) und (5.45), welche α_K enthalten, nicht größer werden als die, welche δ_K einbeziehen. Wie bei δ_K werden zwei Fälle unterschieden :

$Re_K \geq 1$: Unter Berücksichtigung der Wahl von $\delta_K \sim \frac{h_K}{\|a\|_{\infty, K}}$ erhält man wegen (5.45) die Forderung

$$\begin{aligned} \min\{\alpha_K^{-\frac{1}{2}}, \epsilon^{-\frac{1}{2}}\} h_K &\lesssim \delta_K^{\frac{1}{2}} \sim \frac{h_K^{\frac{1}{2}}}{\|a\|_{\infty, K}^{\frac{1}{2}}} \\ \Leftrightarrow \min\{\alpha_K^{-\frac{1}{2}}; \epsilon^{-\frac{1}{2}}\} h_K^{\frac{1}{2}} \|a\|_{\infty, K}^{\frac{1}{2}} &\lesssim 1 \\ \Leftrightarrow \min\{\alpha_K^{-\frac{1}{2}} h_K^{\frac{1}{2}} \|a\|_{\infty, K}^{\frac{1}{2}}; \epsilon^{-\frac{1}{2}} h_K^{\frac{1}{2}} \|a\|_{\infty, K}^{\frac{1}{2}}\} &\lesssim 1 \\ \Leftrightarrow \min\left\{h_K^{\frac{1}{2}} \|a\|_{\infty, K}^{\frac{1}{2}} \alpha_K^{-\frac{1}{2}}, Re_K^{\frac{1}{2}}\right\} &\lesssim 1. \end{aligned}$$

Da $Re_K \geq 1$ sollte gelten $h_K^{\frac{1}{2}} \|a\|_{\infty, K}^{\frac{1}{2}} \alpha_K^{-\frac{1}{2}} \lesssim 1$ bzw.

$$\alpha_K \gtrsim h_K \|a\|_{\infty, K}.$$

Eine weitere Forderung ist

$$\begin{aligned} \alpha_K^{\frac{1}{2}} &\lesssim h_K \delta_K^{-\frac{1}{2}}, \\ \alpha_K^{\frac{1}{2}} &\lesssim \delta_K^{\frac{1}{2}} \|a\|_{\infty, K}. \end{aligned}$$

Da $h_K \delta_K^{-\frac{1}{2}} \sim h_K^{\frac{1}{2}} \|a\|_{\infty, K}^{\frac{1}{2}}$ und $\delta_K^{\frac{1}{2}} \|a\|_{\infty, K} \sim h_K^{\frac{1}{2}} \|a\|_{\infty, K}^{\frac{1}{2}}$, ergibt sich damit

$$\alpha_K \lesssim h_K \|a\|_{\infty, K}.$$

Zusammen ergibt sich

$$\boxed{\alpha_K \sim h_K \|a\|_{\infty, K}.}$$

$Re_K \leq 1$: Wahl von $\delta_K \sim \frac{h_K^2}{\epsilon}$ liefert

$$\begin{aligned} \min\left\{\alpha_K^{-\frac{1}{2}}, \epsilon^{-\frac{1}{2}}\right\} h_K &\lesssim \delta_K^{\frac{1}{2}} \sim \frac{h_K}{\epsilon^{\frac{1}{2}}} \\ \Leftrightarrow \min\left\{\alpha_K^{-\frac{1}{2}} \epsilon^{\frac{1}{2}}, 1\right\} &\lesssim 1. \end{aligned}$$

Diese Ungleichung zeigt, daß die α_K in diesem Fall beliebig klein gemacht werden können. Es ist auch denkbar, $\alpha_K = 0$ für $Re_K \leq 1$ zu setzen.

Allerdings zeigten sich bei praktischen Rechnungen Probleme mit dieser Wahl (siehe nächstes Kapitel über numerische Experimente).

iii) Mit Rücksicht auf instationäre Probleme sollte auch die Rolle des Parameters Θ diskutiert werden, der bei Zeitdiskretisierungen typischerweise in der Größenordnung $\frac{1}{\tau}$ liegt, wobei τ die Zeitschrittweite ist.

Hier wird verlangt, daß sich die Θ -Terme nicht schlechter verhalten als $h_K \delta_K^{-\frac{1}{2}}$ (der Term $\delta_K^{\frac{1}{2}} \|a\|_{\infty, K}$ wird mit Rücksicht auf den Stokes-Fall $a = 0$ nicht betrachtet).

$Re_K \leq 1$: Man hat die Forderungen

$$\begin{aligned}\Theta^{\frac{1}{2}} h_K &\lesssim h_K \delta_K^{-\frac{1}{2}}, \\ \delta_K^{\frac{1}{2}} \Theta h_K &\lesssim h_K \delta_K^{-\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Diese sind äquivalent zu $\Theta \delta_K \lesssim 1$, was aber nach Voraussetzung des Konvergenzsatzes 5.3 erfüllt ist. Somit hat man im Fall $Re_K \leq 1$ schon durch die Voraussetzungen des Konvergenzsatzes die Anforderungen an Θ erfüllt.

$Re_K \geq 1$: Man fordert

$$\delta_K^{\frac{1}{2}} \Theta h_K \lesssim h_K \delta_K^{-\frac{1}{2}} \quad (5.48)$$

und

$$\delta_K^{\frac{1}{2}} \Theta h_K \lesssim \delta_K^{\frac{1}{2}} \|a\|_{\infty, K}. \quad (5.49)$$

Da

$$h_K \delta_K^{-\frac{1}{2}} \sim h_K \frac{\|a\|_{\infty, K}^{\frac{1}{2}}}{h_K^{\frac{1}{2}}} = h_K^{\frac{1}{2}} \|a\|_{\infty, K}^{\frac{1}{2}} = \frac{h_K^{\frac{1}{2}}}{\|a\|_{\infty, K}^{\frac{1}{2}}} \|a\|_{\infty, K} \sim \delta_K^{\frac{1}{2}} \|a\|_{\infty, K},$$

reduzieren sich die Gleichungen (5.48) und (5.49) auf

$$\delta_K^{\frac{1}{2}} \Theta h_K \lesssim h_K \delta_K^{-\frac{1}{2}}$$

bzw.

$$\delta_K \Theta \lesssim 1.$$

Diese Bedingung ist aber nach Voraussetzung des Konvergenzsatzes 5.3 erfüllt.

Die Forderung

$$\Theta^{\frac{1}{2}} h_K \lesssim h_K \delta_K^{-\frac{1}{2}}$$

bzw.

$$\delta_K \Theta \lesssim 1$$

ist somit ebenfalls erfüllt.

Insgesamt sieht man, daß die Forderungen an die Θ enthaltenden Terme schon durch die Voraussetzungen des Konvergenzsatzes an Θ erfüllt sind.

Man könnte nun denken, daß dieses im Widerspruch zu der Aussage von Bemerkung 5.2 steht. Dort wurde nämlich gesagt, daß Θ nicht beliebig groß werden darf, während es an dieser Stelle so scheint, als wäre die Bedingung $\delta_K \Theta \leq \frac{1}{2}$ ausreichend. Hierbei muß man aber beachten, daß hier nur die Faktor E_K betrachtet wurde. Das Θ findet sich aber in der Konvergenzaussage auch in der Konstanten C wieder, welche sich wie β^{-1} verhält. Somit hat man immer noch die Notwendigkeit der Beschränkung von Θ nach oben.

Damit erhält man den abschließenden Satz :

Satz 5.5 *Die Voraussetzungen des Konvergenzsatzes 5.3 seien erfüllt. Die Stabilisierungsparameter seien gewählt gemäß*

$$\delta_K \sim \begin{cases} \frac{h_k}{\|a\|_{\infty,K}} & \text{für } Re_K \geq 1 \\ \frac{h_K^2}{\epsilon} & \text{für } Re_K \leq 1 \end{cases},$$

$$\alpha_K \sim \begin{cases} h_k \|a\|_{\infty,K} & \text{für } Re_K \geq 1 \\ 0 & \text{für } Re_K \leq 1 \end{cases}.$$

Dann gibt es eine Konstante $C > 0$ mit

$$\| (u - u_h, p - p_h) \|_h \leq C \left\{ \sum_K h_K^k \epsilon^{\frac{1}{2}} (1 + Re_K^{\frac{1}{2}}) \|u\|_{k+1,K} + \sum_K h_K^{l+\frac{1}{2}} \left(\epsilon^{\frac{1}{2}} h_K^{\frac{1}{2}} + \|a\|_{\infty,K}^{-\frac{1}{2}} \min\{Re_K^{\frac{1}{2}}, 1\} \right) \|p\|_{l+1,K} \right\}.$$

Beweis :

i) Zuerst wird der Faktor E_K aus (5.44) betrachtet :

$Re_K \leq 1$: Es ist in diesem Fall

$$\begin{aligned} E_K &= \epsilon^{\frac{1}{2}} + \underbrace{\Theta^{\frac{1}{2}} h_K}_{\lesssim h_K \delta_K^{-\frac{1}{2}}} + \underbrace{\alpha_K^{\frac{1}{2}}}_{=0} + \delta_K^{\frac{1}{2}} \|a\|_{\infty,K} + \underbrace{\delta_K^{\frac{1}{2}} \Theta h_K}_{\lesssim h_K \delta_K^{-\frac{1}{2}}} + h_K \delta_K^{-\frac{1}{2}} \\ &\lesssim \epsilon^{\frac{1}{2}} + \underbrace{\delta_K^{\frac{1}{2}} \|a\|_{\infty,K}}_{= \frac{h_K \|a\|_{\infty,K}}{\epsilon^{\frac{1}{2}}}} + \underbrace{h_K \delta_K^{-\frac{1}{2}}}_{=\epsilon^{\frac{1}{2}}} \\ &\lesssim \epsilon^{\frac{1}{2}} + \epsilon^{\frac{1}{2}} Re_K = \epsilon^{\frac{1}{2}} (1 + Re_K). \end{aligned}$$

Da $Re_K \leq 1$ folgt

$$E_K \lesssim \epsilon^{\frac{1}{2}}(1 + Re_K^{\frac{1}{2}}).$$

$Re_K \geq 1$: Analog wie eben bekommt man

$$\begin{aligned} E_k &\lesssim \epsilon^{\frac{1}{2}} + \underbrace{\alpha_K^{\frac{1}{2}}}_{\lesssim h_K^{\frac{1}{2}} \|a\|_{\infty, K}^{\frac{1}{2}}} + \underbrace{\delta_K^{\frac{1}{2}} \|a\|_{\infty, K}}_{h_K^{\frac{1}{2}} \|a\|_{\infty, K}^{\frac{1}{2}}} + \underbrace{h_K \delta_K^{-\frac{1}{2}}}_{\sim h_K^{\frac{1}{2}} \|a\|_{\infty, K}^{\frac{1}{2}}} \\ &\lesssim \epsilon^{\frac{1}{2}} + \epsilon^{\frac{1}{2}} Re_K^{\frac{1}{2}} = \epsilon^{\frac{1}{2}}(1 + Re_K^{\frac{1}{2}}). \end{aligned}$$

Damit ist insgesamt

$$\boxed{E_K \lesssim \epsilon^{\frac{1}{2}}(1 + Re_K^{\frac{1}{2}})}.$$

ii) Abschätzung der F_K :

$Re_K \leq 1$: In diesem Fall ist

$$\begin{aligned} F_K &\lesssim \epsilon^{\frac{1}{2}} h_K + \frac{h_K}{\epsilon^{\frac{1}{2}}} + \eta \underbrace{\min\{\alpha_K^{-\frac{1}{2}}; \epsilon^{-\frac{1}{2}}\}}_{=\epsilon^{-\frac{1}{2}}} h_K \\ &\sim \epsilon^{\frac{1}{2}} h_K + \frac{h_K}{\epsilon^{\frac{1}{2}}}, \end{aligned}$$

und daher

$$F_K \lesssim \epsilon^{\frac{1}{2}} h_K + \frac{h_K}{\epsilon^{\frac{1}{2}}}. \quad (5.50)$$

$Re_K \geq 1$: Es ist

$$F_K \lesssim \epsilon^{\frac{1}{2}} h_K + \frac{h_K^{\frac{1}{2}}}{\|a\|_{\infty, K}^{\frac{1}{2}}} + \eta \min\{h_K^{-\frac{1}{2}} \|a\|_{\infty, K}^{-\frac{1}{2}}; \epsilon^{-\frac{1}{2}}\} h_K.$$

Da

$$\min\{h_K^{-\frac{1}{2}} \|a\|_{\infty, K}^{-\frac{1}{2}}; \epsilon^{-\frac{1}{2}}\} h_K = h_K^{-\frac{1}{2}} \|a\|_{\infty, K}^{-\frac{1}{2}} \min\{1; Re_K^{\frac{1}{2}}\} h_K = \frac{h_K^{\frac{1}{2}}}{\|a\|_{\infty, K}^{\frac{1}{2}}},$$

folgt

$$F_K \lesssim \epsilon^{\frac{1}{2}} h_K + \frac{h_K^{\frac{1}{2}}}{\|a\|_{\infty, K}^{\frac{1}{2}}}. \quad (5.51)$$

Daher folgt mit (5.50) und (5.51)

$$F_K \lesssim \epsilon^{\frac{1}{2}} h_K + \begin{cases} \frac{h_K}{\epsilon^{\frac{1}{2}}} & \text{für } Re_K \leq 1 \\ \frac{h_K^{\frac{1}{2}}}{\|a\|_{\infty, K}^{\frac{1}{2}}} & \text{für } Re_K \geq 1. \end{cases}$$

Wegen

$$\frac{h_K}{\epsilon^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{h_K^{\frac{1}{2}}}{\|a\|_{\infty, K}^{\frac{1}{2}}} \Leftrightarrow \frac{h_K^{\frac{1}{2}} \|a\|_{\infty, K}^{\frac{1}{2}}}{\epsilon^{\frac{1}{2}}} \leq 1 \Leftrightarrow Re_K \leq 1$$

erhält man

$$\begin{aligned} F_K &\lesssim \epsilon^{\frac{1}{2}} h_K + \min\left\{\frac{h_K}{\epsilon^{\frac{1}{2}}}; \frac{h_K^{\frac{1}{2}}}{\|a\|_{\infty, K}^{\frac{1}{2}}}\right\} \\ &= \epsilon^{\frac{1}{2}} h_K + \frac{h_K^{\frac{1}{2}}}{\|a\|_{\infty, K}^{\frac{1}{2}}} \min\{Re_K^{\frac{1}{2}}; 1\}, \end{aligned}$$

und damit

$$F_K \lesssim \epsilon^{\frac{1}{2}} h_K + h_K^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\|a\|_{\infty, K}^{\frac{1}{2}}} \min\{Re_K^{\frac{1}{2}}; 1\}.$$

Mit i) und ii) und dem Konvergenzsatz 5.3 folgt nun die Behauptung .

□

Bemerkung 5.6 In Lemma 5.1 und dem Konvergenzsatz 5.3 hatte man die Konstanten β und C , welche unabhängig von h und ϵ waren. Diese Unabhängigkeit entstand aber dadurch, daß es nach Voraussetzung Konstanten δ und α gibt mit $\delta_K \leq \delta$ und $\alpha_K \leq \alpha$. Betrachtet man die konkrete Wahl der Stabilisierungsparameter nach Satz 5.5, so sieht man, daß δ und α zwar immer unabhängig von h sind, aber eine Unabhängigkeit des δ von ϵ ist nicht in allen Fällen gewährleistet. So wird im Beispiel der Stokes-Gleichung ($a = 0$) immer $\delta_K \sim \frac{h_K^2}{\epsilon}$ gewählt, d.h. man bekommt die Abhängigkeit $\delta = O(\epsilon^{-1})$ und damit $\beta = O(\epsilon)$ bzw. $C = O(\epsilon^{-1})$.

Dieser Effekt tritt natürlich auch bei nicht verschwindendem Strömungsfeld auf. Interessanterweise gilt diese Abhängigkeit von ϵ nicht mehr, wenn auf jedem Element Konvektionsdominanz vorliegt. Man beachte aber, daß zumindest theoretisch mit hinreichend kleinem h Diffusionsdominanz erzwungen werden kann, womit man wieder eine ϵ -Abhängigkeit bekommt.

Insgesamt kann man also sagen, daß die Konstante C der Konvergenzaussage des Satzes 5.5 unabhängig von h ist, aber eine Unabhängigkeit von ϵ nicht in jedem Fall gewährleistet werden kann.

Kapitel 6

Numerische Experimente I (Oseen-Gleichung)

Im vorangegangenen Abschnitt wurde die SDFEM vorgestellt und eine Konvergenzanalyse durchgeführt. Die dabei theoretisch ermittelte Wahl der Stabilisierungsparameter wurde nun anhand numerischer Experimente überprüft.

Gerechnet wurden Beispiele mit bekannter Lösung, d.h. man gab eine Lösung vor und setzte den Quellterm und die Randbedingungen im Programm gerade so, daß diese Lösung erzwungen wurde. Somit war es möglich, die Norm des Fehlers (und nicht nur die Norm des Residuums) darzustellen. Bei sämtlichen Rechnungen wurde $\Theta = 0$ gesetzt.

Das Programm PNS arbeitet mit linearen Elementen für Druck und Geschwindigkeit, welche die Babuška-Brezzi-Bedingung nicht erfüllen. Daher stabilisiert das Programm mittels des GLS-Verfahrens, welches bei linearen Elementen mit der SDFEM zusammenfällt. Unterschieden wurde dort bisher zwischen der Druck- und der Geschwindigkeitsstabilisierung, genauer wird statt des Terms

$$\sum_K \delta_K (L\hat{u}, (a \cdot \nabla)v + \nabla q)_K$$

(vgl. Abschnitt 5.1) der Ausdruck

$$\sum_K (L\hat{u}, \delta_1^u (a \cdot \nabla)v + \delta_1^p \nabla q)_K$$

verwendet.

Der Stabilisierungsparameter für die Divergenzgleichung (in Abschnitt 5 als α_K bezeichnet) hat hier die Bezeichnung δ_2 .

Die Parameter δ_1^u , δ_1^p und δ_2 werden dabei berechnet mittels

$$\delta_1^p = C_1^p \frac{h_K^2}{2\epsilon}, \quad (6.1)$$

$$\delta_1^u = C_1^u \frac{h_K^2}{2\epsilon \sqrt{1 + Re_K^2}}, \quad (6.2)$$

$$\delta_2 = C_2 \epsilon \sqrt{1 + Re_G^2}. \quad (6.3)$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} h_K &= \sqrt{\text{meas}(K)} \text{ für } K \in \mathcal{T}_h \text{ (} \Omega \subset \mathbb{R}^2 \text{),} \\ h_K &= \sqrt[3]{\text{meas}(K)} \text{ für } K \in \mathcal{T}_h \text{ (} \Omega \subset \mathbb{R}^3 \text{),} \\ Re_K &= \frac{h_K \|a\|_{\infty, K}}{\epsilon} \text{ (lokale Reynoldszahl),} \\ \text{und} \\ Re_G &= \frac{h_K \|a\|_{\infty, \Omega}}{\epsilon} \text{ (globale Reynoldszahl).} \end{aligned}$$

Bemerkung 6.1

Für $Re_K \gg 1$ ist

$$\delta_1^u \approx C_1^u \frac{h_K^2}{2\epsilon Re_K} = C_1^u \frac{h_K^2}{2\epsilon \frac{h_K \|a\|_{\infty, K}}{\epsilon}} = C_1^u \frac{h_K}{2 \|a\|_{\infty, K}}.$$

Für $Re_K \ll 1$ gilt

$$\delta_1^u \approx C_1^u \frac{h_K^2}{2\epsilon}.$$

Daher erkennt man bei asymptotischer Betrachtung den Zusammenhang zur Wahl des Parameters δ_K aus Abschnitt 5.4.

Die Wahl des Parameters δ_1^p entspricht der Wahl von δ_K im diffusionsdominanten Fall ($Re_K \leq 1$).

□

Mit der obigen Wahl der Stabilisierungsparameter wurden zunächst einige numerische Experimente gemacht, um eine möglichst gute Wahl der Proportionalitätsparameter C_1^u, C_1^p und C_2 zu ermitteln. Später werden die Parameter entsprechend der Wahl bei der SDFEM gesetzt, insbesondere wird $\delta_1^u = \delta_1^p$ gewählt.

6.1 Ursprüngliche Wahl der Parameter

Die ersten Experimente wurden mit der ursprünglich im Programm PNS implementierten Wahl der Stabilisierungsparameter nach (6.1)-(6.3) gemacht. Angelehnt wurden die Untersuchungen an die numerischen Experimente in [2]. Zunächst wurde wie dort der Spezialfall der Stokes-Gleichung, bei der das Strömungsfeld a verschwindet, untersucht.

Dieser Fall ist von daher für die ersten Untersuchungen einfach, da keine Geschwindigkeitsstabilisierung notwendig ist, d.h. man kann $C_1^u = 0$ setzen und nur den Einfluß der Druckstabilisierung untersuchen. Als Erweiterung gegenüber den Untersuchungen in [2] wurde dann ein nicht verschwindendes Strömungsfeld dazugenommen und bei dem im Stokes-Fall optimalen Druckstabilisierungsparameter C_1^p die Abhängigkeit vom Parameter C_1^u betrachtet.

Als Testbeispiel wurde gerechnet :

$$\Omega = (0, 1)^2,$$

$$u = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ -2x_1 \cdot x_2 \end{pmatrix},$$

$$p = x_1^2 + x_2^2 - \frac{2}{3}$$

(siehe Abb. 6.1).

Die Rechnungen wurden auf äquidistanten Netzen unterschiedlicher Feinheit durchgeführt (siehe Abb. 6.2). Verwendet wurden Zerlegungen von 11x11 bis 97x97 Knoten.

Stokes-Fall : Bei diesem Test wurde das Stokes-Problem bei Reynoldszahlen $Re = 2, 100, 1000$ gerechnet. Angelehnt wurden die Parametervariationen an die Rechnungen in [2] und führten zu den dort ermittelten Ergebnissen. Daher sollen diese hier nicht explizit dargestellt werden.

Es stellte sich heraus, daß sich die besten Resultate bei $C_1^p = 1, C_2 = 0$ erzielen ließen. Eine Erhöhung des Parameters C_1^p verschlechterte das Resultat, während die Erhöhung von C_2 entweder keinen Einfluß hatte ($Re = 2$) oder ebenfalls zu schlechteren Ergebnissen führte ($Re = 100, 1000$).

Oseen-Fall : Für die Rechnungen wurde das Strömungsfeld a gleich der Lösung u gesetzt. Da $C_1^p = 1$ im Stokes-Fall die besten Resultate lieferte, wurde diese Einstellung im folgenden so gelassen und nur über die Parameter C_1^u und C_2 variiert. Untersucht wurde der Einfluß dieser Parameter auf die Konvergenz in Abhängigkeit von der Reynoldszahl Re .

Re=2 : In diesem Fall hat die Variation des Parameters C_1^u im Bereich von $0, \dots, 1$ bzw. C_2 von $0, \dots, 5$ keinen wesentlichen Einfluß auf das Konvergenzverhalten. Bei $C_2 \neq 0$ erkennt man aber eine geringfügige Vergrößerung des Fehlers, so daß $C_2 = 0$ gewählt werden sollte.

Schlechte Resultate ergaben sich bei zu großen C_1^u . Somit wurde von nun an dieser Parameter nur noch zwischen 0 und 1 variiert wurde.

Re=10 : Hier ergaben sich die gleichen Resultate wie bei Re=2.

Re=100 : Die bisherigen Probleme wurden stets mit Konsistenzsicherung gerechnet. Diese benötigt man, denn bei linearen Elementen für die Geschwindigkeit ist $\Delta u_h|_K = 0$. Daher verschwindet in der diskreten Formulierung der Laplace-Operator, weshalb die kontinuierliche Lösung die diskreten Gleichungen nicht mehr erfüllt. Dieses führt zur Inkonsistenz des Verfahrens und damit zu Fehlern in der Lösung. Eine Darstellung einer Konsistenzsicherung findet man bei [6]. Diese mußte aber ab diesem konvektionsdominanten Fall abgeschaltet werden, da sonst mit allen getesteten Parameterkombinationen keine brauchbaren Ergebnisse erzielt werden konnten.

Bei Rechnungen ohne Konsistenzsicherung fällt auf, daß $C_2 = 0$ hier nicht mehr zu vernünftigen Resultaten führt. Dies bedeutet, daß bei größer werdenden Reynoldszahlen eine Stabilisierung des Divergenzterms notwendig ist.

Die Variation der Parameter C_2 von 0.5, ..., 5 und C_1^u von 0, ..., 1 ergaben kaum Unterschiede. Bei kleinerem C_2 waren in Abhängigkeit von C_1^u Instabilitäten zu verzeichnen.

Re=1000 : Bei dieser Reynoldszahl wird eine Geschwindigkeitsstabilisierung notwendig, denn bei $C_1^u = 0$ konnten keine brauchbaren Ergebnisse ermittelt werden. Gute Resultate wurden bei $C_2 = 1, 5$ und $C_1^u = 0.1, 0.5, 1$ erzielt. Bei diesen Kombinationen sind kaum Unterschiede erkennbar.

Zusammenfassend kann man sagen, daß bei größer werdender Reynoldszahl die Möglichkeiten der Wahl der Parameter immer weiter eingeschränkt ist. Kommt man bei kleiner Reynoldszahl noch mit ausschließlicher Druckstabilisierung aus, so ist bei großem Re sowohl eine Geschwindigkeitstabilisierung als auch eine Stabilisierung der Divergenzgleichung notwendig.

Auf den folgenden Seiten finden sich die Konvergenzdiagramme der hier durchgeführten Rechnungen. Aufgetragen ist der diskrete L_2 -Fehler über dem Parameter h . Dieser entspricht der Länge der kurzen Kante der verwendeten Dreiecke. Bei einer 97x97-Zerlegung ist also $h = 1/96$.

Unter den Diagrammen befinden sich in Klammern die gemittelten Konvergenzraten für die Geschwindigkeitskomponenten und den Druck.

Man erkennt, daß die Konvergenzraten für die Geschwindigkeit bei Re=2,10 in der Größenordnung 2 liegen, der Druck bei 1.7 ... 1.8. Erstaunlicherweise steigen die Konvergenzraten bei wachsender Reynoldszahl. Ab Re=100 hat man auch im Druck quadratische Konvergenz und bei Re=1000 steigt dann auch die Konvergenzordnung der Geschwindigkeit auf über 2 an. Auffällig sind die hohen Konvergenzraten bei $C_2 = 5$. Hier muß man aber beachten, daß das Fehlerniveau etwas höher liegt als bei kleinerem C_2 , weshalb die diskrete Lösung trotz höherer Konvergenzordnung schlechter ist als bei z.B. $C_2 = 1$.

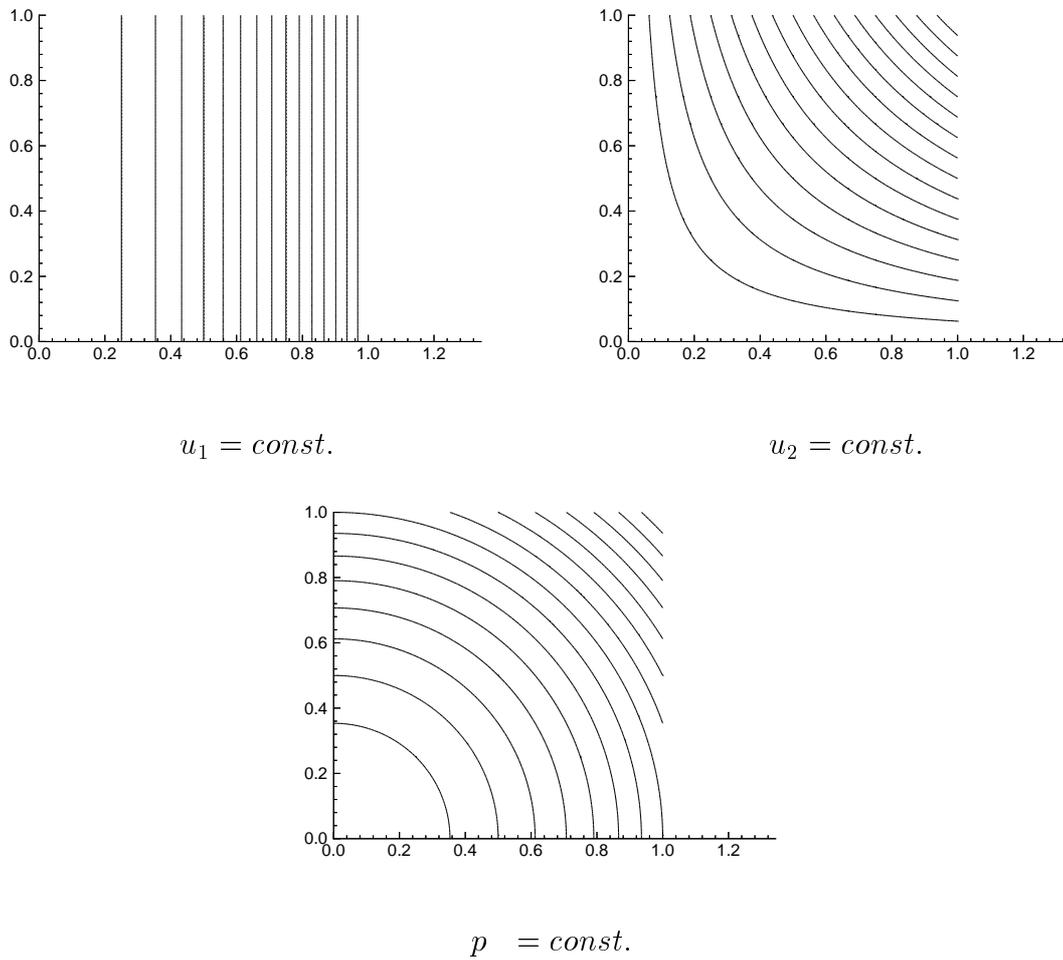


Abbildung 6.1: Kontourlinien der Lösung

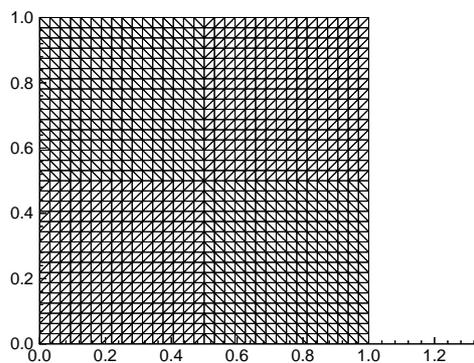
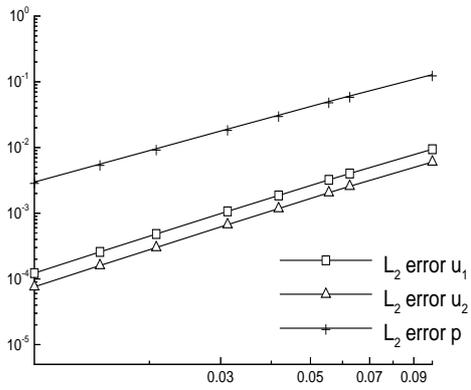
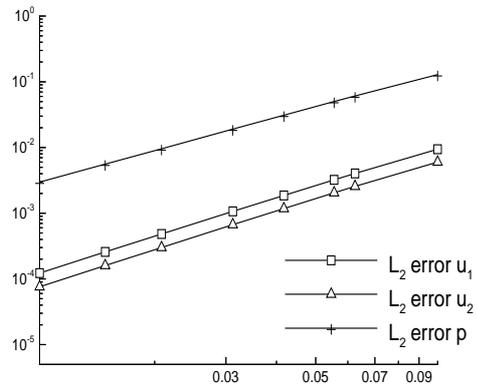


Abbildung 6.2: Beispiel einer verwendeten Zerlegung (33x33)



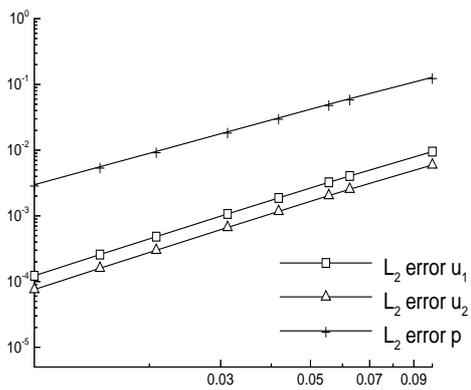
$$C_1^u = 0, C_2 = 0$$

$$(1.9 \ 1.9 \ 1.7)$$



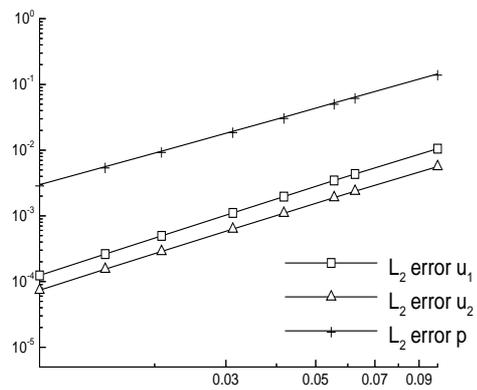
$$C_1^u = 0.1, C_2 = 0$$

$$(1.9 \ 1.9 \ 1.7)$$



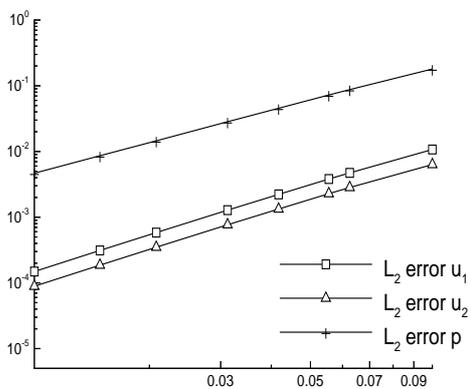
$$C_1^u = 1, C_2 = 0$$

$$(1.9 \ 1.9 \ 1.7)$$



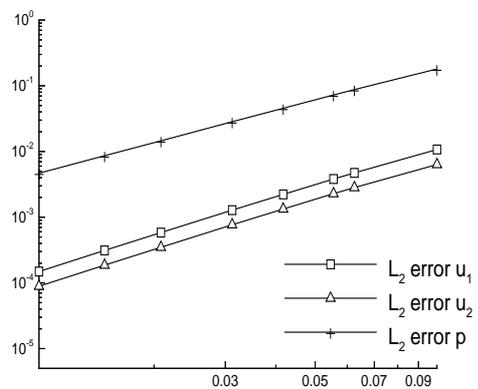
$$C_1^u = 10, C_2 = 0$$

$$(2.0 \ 1.9 \ 1.7)$$



$$C_1^u = 0, C_2 = 1$$

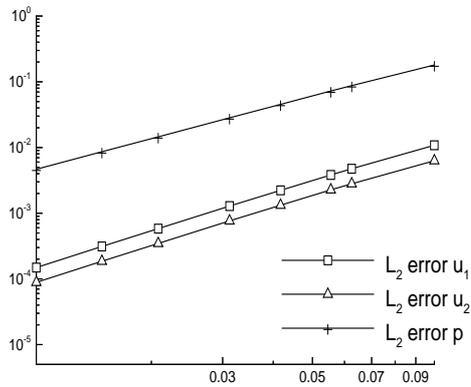
$$(1.9 \ 1.9 \ 1.6)$$



$$C_1^u = 0.1, C_2 = 1$$

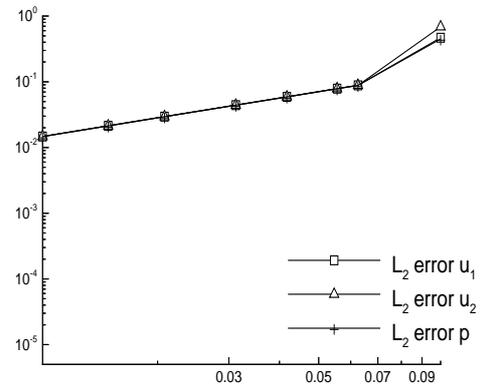
$$(1.9 \ 1.9 \ 1.6)$$

Abbildung 6.3: Diskreter L_2 -Fehler bei $Re=2$



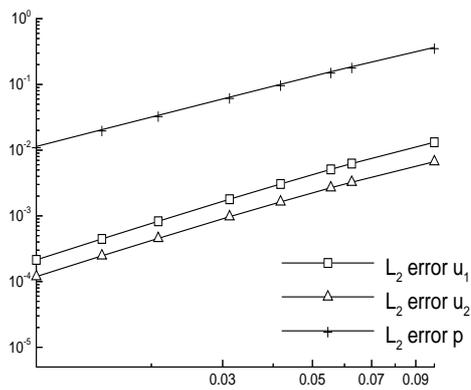
$$C_1^u = 1, C_2 = 1$$

$$(1.9 \ 1.9 \ 1.9)$$



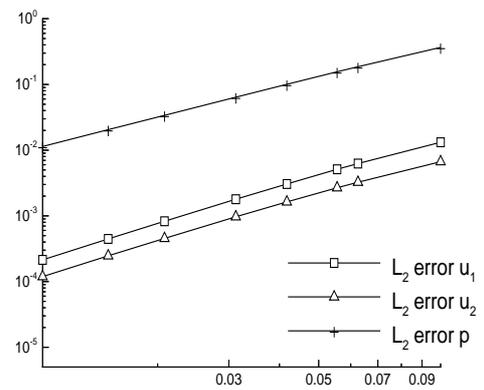
$$C_1^u = 10, C_2 = 1$$

$$(1.4 \ 1.5 \ 1.3)$$



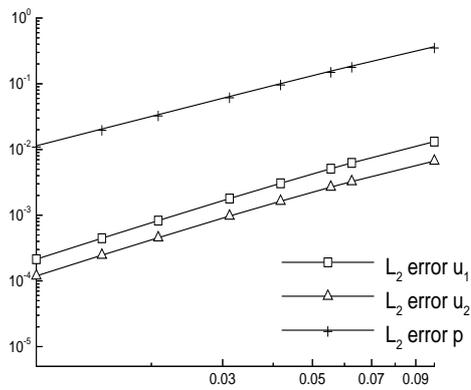
$$C_1^u = 0, C_2 = 5$$

$$(1.9 \ 1.8 \ 1.5)$$



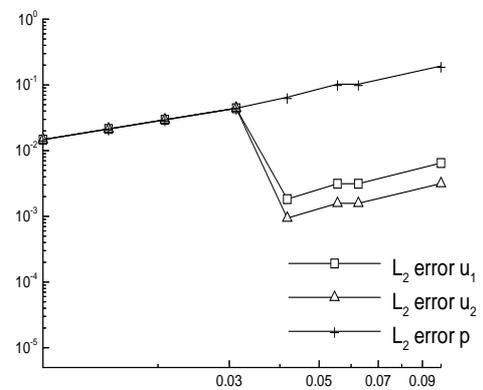
$$C_1^u = 0.1, C_2 = 5$$

$$(1.8 \ 1.8 \ 1.5)$$



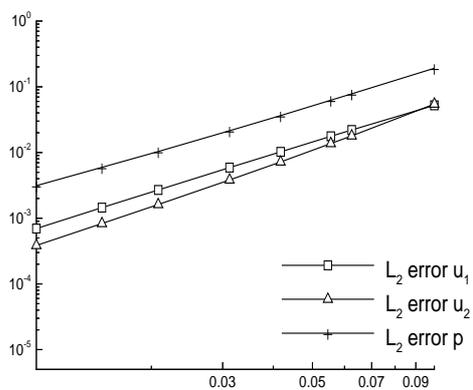
$$C_1^u = 1, C_2 = 5$$

$$(1.8 \ 1.8 \ 1.5)$$



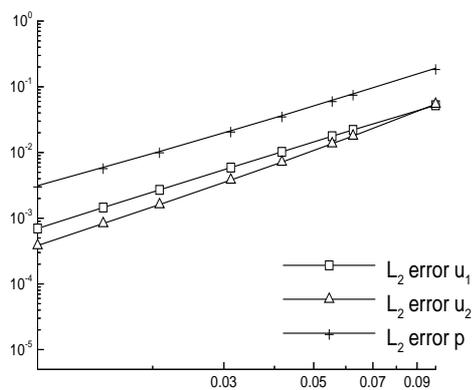
$$C_1^u = 10, C_2 = 5$$

Abbildung 6.4: Diskreter L_2 -Fehler bei $Re=2$



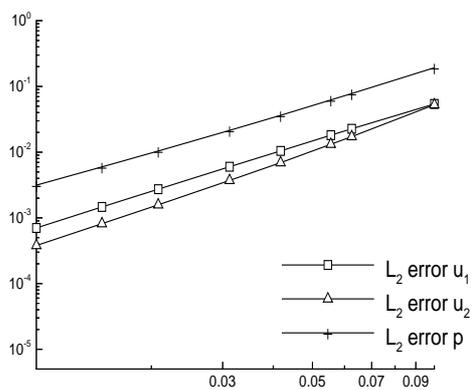
$$C_1^u = 0, C_2 = 0$$

(1.9 2.2 1.8)



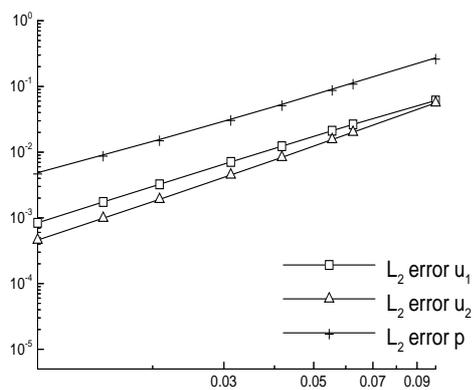
$$C_1^u = 0.1, C_2 = 0$$

(1.9 2.2 1.8)



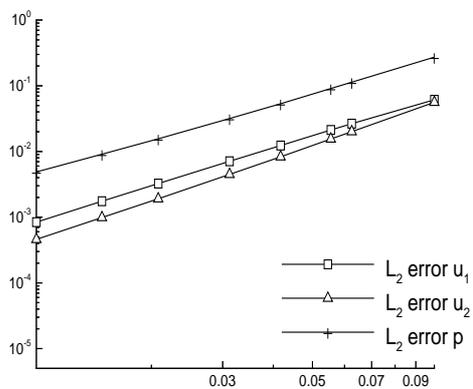
$$C_1^u = 1, C_2 = 0$$

(1.9 2.2 1.8)



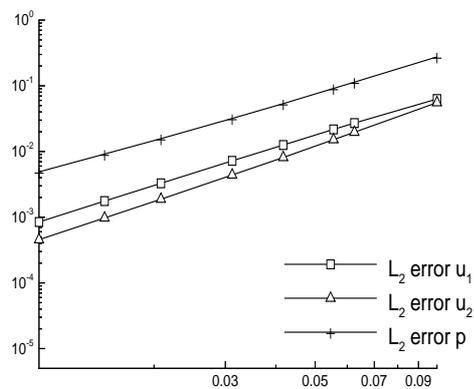
$$C_1^u = 0, C_2 = 1$$

(1.9 2.1 1.8)



$$C_1^u = 0.1, C_2 = 1$$

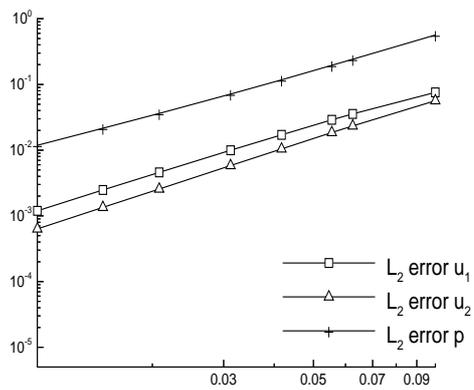
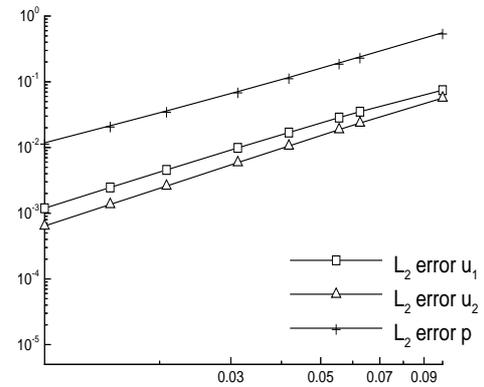
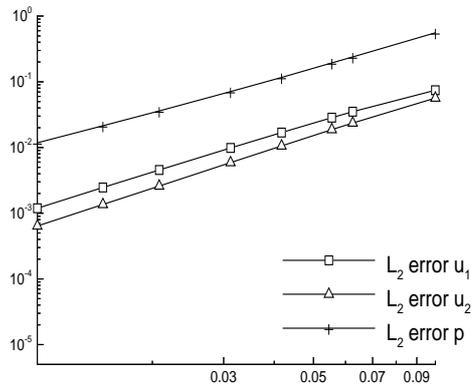
(1.9 2.1 1.8)

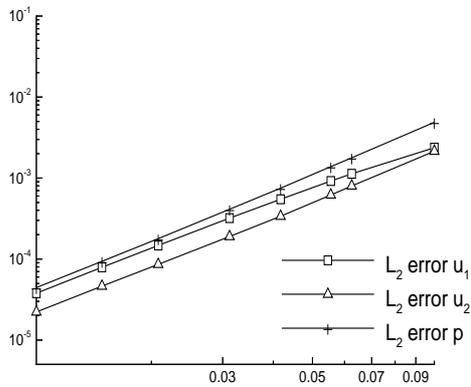


$$C_1^u = 1, C_2 = 1$$

(1.9 2.1 1.8)

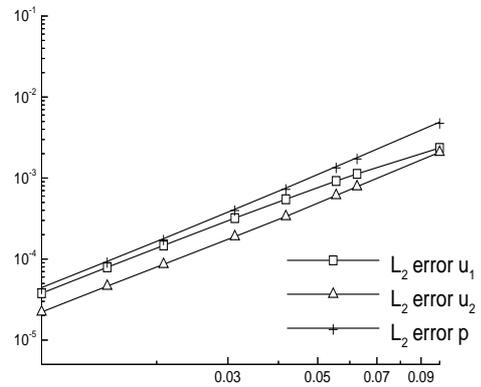
Abbildung 6.5: Diskreter L_2 -Fehler bei $Re=10$

Abbildung 6.6: Diskreter L_2 -Fehler bei $Re=10$



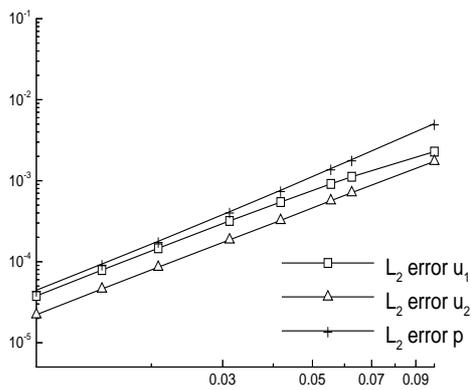
$$C_1^u = 0, C_2 = 0.5$$

$$(1.8 \ 2.0 \ 2.0)$$



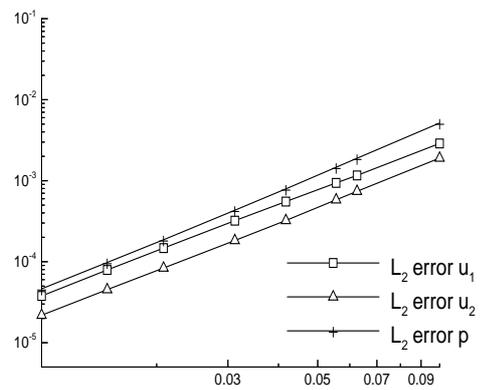
$$C_1^u = 0.1, C_2 = 0.5$$

$$(1.8 \ 2.0 \ 2.0)$$



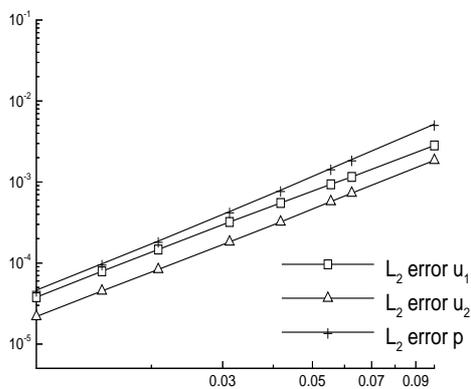
$$C_1^u = 1, C_2 = 0.5$$

$$(1.8 \ 1.9 \ 2.1)$$



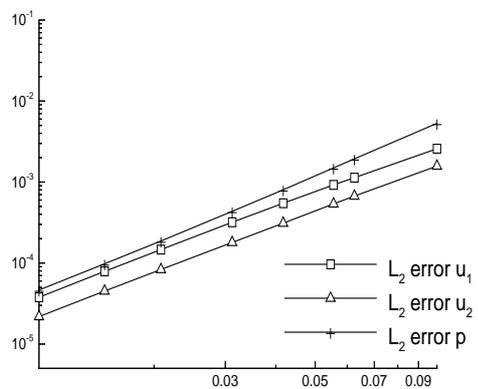
$$C_1^u = 0, C_2 = 1$$

$$(1.9 \ 2.0 \ 2.1)$$



$$C_1^u = 0.1, C_2 = 1$$

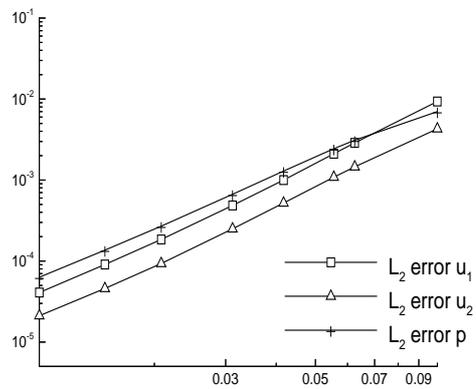
$$(1.9 \ 2.0 \ 2.1)$$



$$C_1^u = 1, C_2 = 1$$

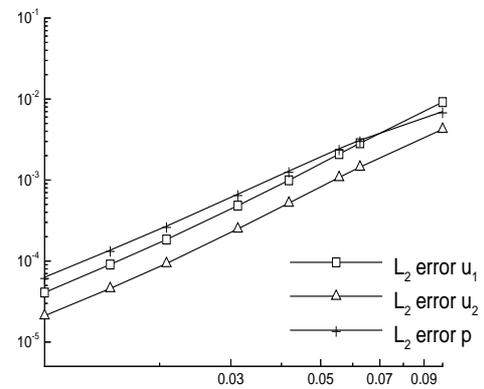
$$(1.9 \ 1.9 \ 2.1)$$

Abbildung 6.7: Diskreter L_2 -Fehler bei $Re=100$



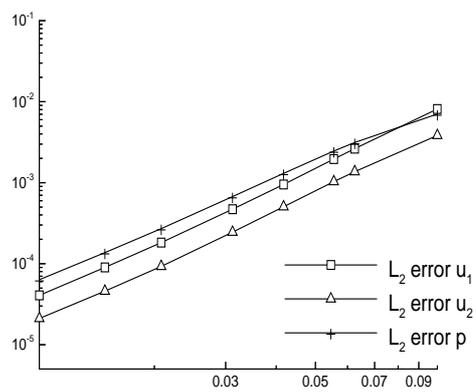
$$C_1^u = 0, C_2 = 5$$

$$(2.4 \ 2.4 \ 2.1)$$



$$C_1^u = 0.1, C_2 = 5$$

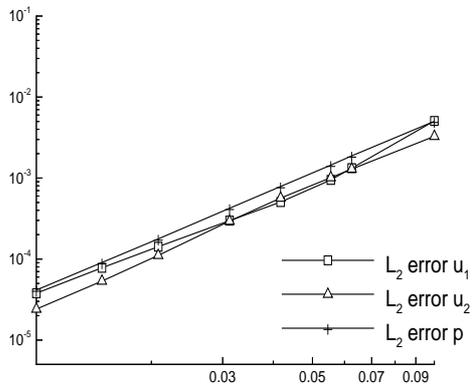
$$(2.4 \ 2.4 \ 2.1)$$



$$C_1^u = 1, C_2 = 5$$

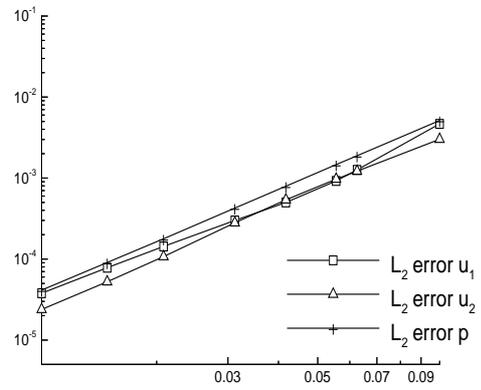
$$(2.4 \ 2.3 \ 2.1)$$

Abbildung 6.8: Diskreter L_2 -Fehler bei $Re=100$



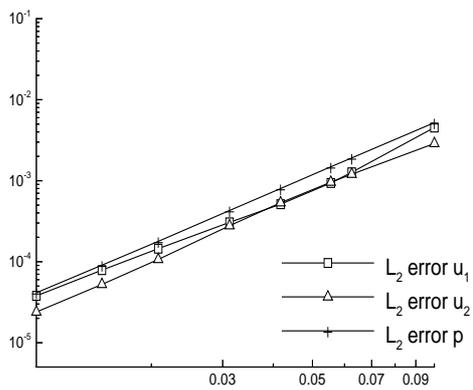
$$C_1^u = 0.1, C_2 = 1$$

$$(2.2 \ 2.2 \ 2.1)$$



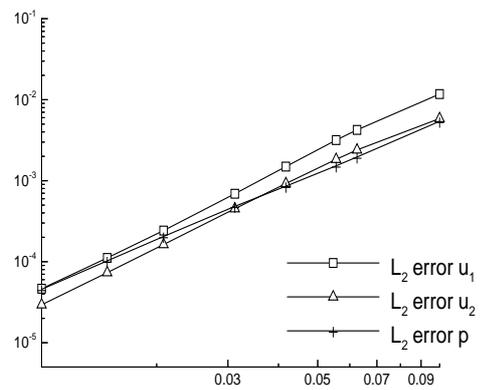
$$C_1^u = 0.5, C_2 = 1$$

$$(2.1 \ 2.1 \ 2.1)$$



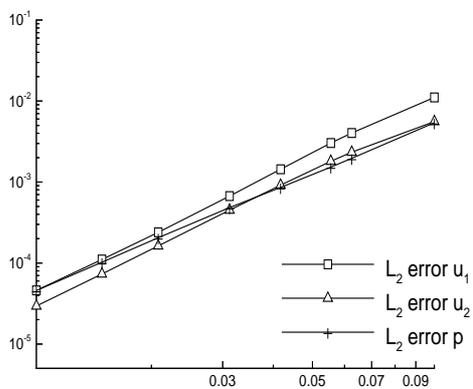
$$C_1^u = 1, C_2 = 1$$

$$(2.1 \ 2.1 \ 2.1)$$



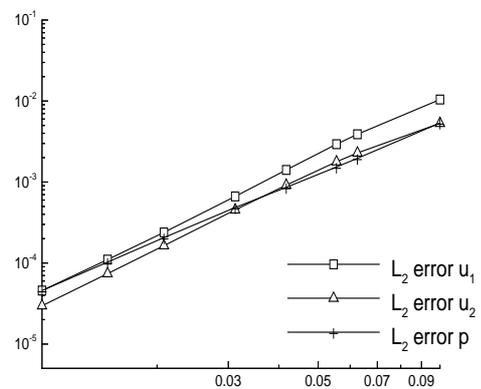
$$C_1^u = 0.1, C_2 = 5$$

$$(2.5 \ 2.4 \ 2.1)$$



$$C_1^u = 0.5, C_2 = 5$$

$$(2.4 \ 2.3 \ 2.1)$$



$$C_1^u = 1, C_2 = 5$$

$$(2.4 \ 2.3 \ 2.1)$$

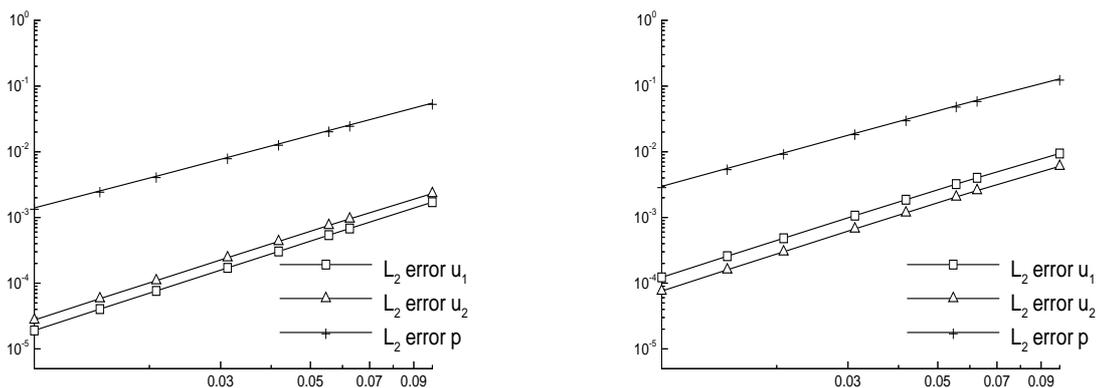
Abbildung 6.9: Diskreter L_2 -Fehler bei $Re=1000$

6.2 Wahl der Parameter gemäß SDFEM

Bevor die Wahl der Stabilisierungsparameter in PNS vollständig auf die Wahl aus Abschnitt 5 umgestellt wurde, wurden die oben beschriebenen Experimente noch einmal mit $\delta_1^p = \delta_1^u$ durchgeführt. Auf diese Rechnungen soll hier nur kurz eingegangen werden. Es zeigte sich, daß sich sowohl im konvektions- als auch im diffusionsdominanten Fall hiermit bessere Ergebnisse erzielen ließen als mit der ursprünglichen Wahl (vgl. Abb. 6.10 und 6.11). Dieses verwundert zunächst, da bei Diffusionsdominanz δ_1^u und δ_1^p praktisch gleich berechnet werden. Erklären läßt sich dieses Phänomen dadurch, daß die Wahl $C_1^p = 1$ nicht optimal war. Die besseren Ergebnisse erzielte man bei $C_1^u < 1$. Wichtig war, daß sich bei Wahl von $\delta_1^p = \delta_1^u$ die Eigenschaften nicht verschlechtern, was nicht der Fall war.

Zu bemerken ist dabei, daß die Wahl $C_1^u = 0$ in diesem Fall nicht mehr möglich ist, da man dann keine Druckstabilisierung mehr hat. Im verwendeten Testbeispiel konnte dieser Parameter i.a. nicht kleiner als 0.3 gesetzt werden. Bei 0.3 ergaben sich die besten Resultate. Es bringt aber Probleme, diese Grenze voll auszureizen, da sich diese natürlich genau auf das hier gerechnete Beispiel bezieht. Sinnvoll schien es, C_1^u etwas größer zu wählen. Ansonsten stellte sich heraus, daß wie bei den ersten Untersuchungen ab $Re=100$ der Parameter C_2 zugeschaltet werden mußte. Hier wurde ebenfalls ab dieser Reynoldszahl die Konsistenzsicherung abgeschaltet.

Im diffusionsdominanten Fall ($Re = 2$) fiel auf, daß die Wahl $C_2 = 1$ gegenüber $C_2 = 0$ eine geringfügige Verschlechterung des Fehlers zur Folge hatte (vgl. Abb. 6.12).



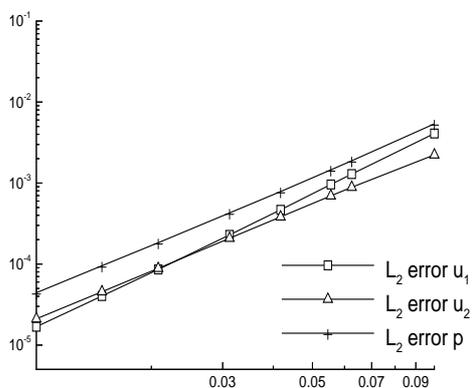
$$\delta_1^p = \delta_1^u, C_1^u = 0.3, C_2 = 0$$

$$(2.0 \ 2.0 \ 1.6)$$

$$C_1^u = 0, C_1^p = 1.0, C_2 = 0$$

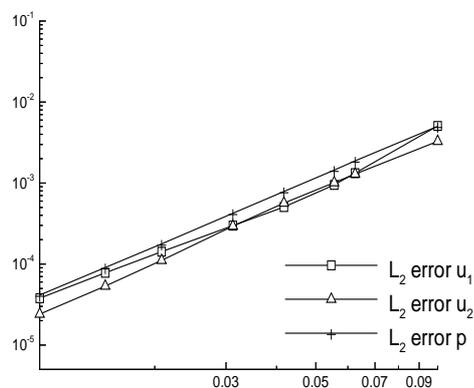
$$(1.9 \ 1.9 \ 1.7)$$

Abbildung 6.10: Darstellung des L_2 -Fehlers bei $\delta_1^u = \delta_1^p$ und bei ursprünglicher Wahl ($Re = 2$)



$$\delta_1^p = \delta_1^u, C_1^u = 0.3, C_2 = 1$$

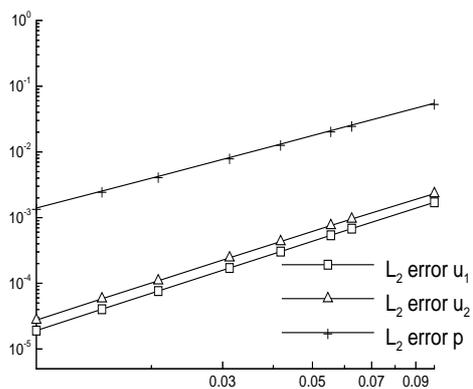
(2.4 2.1 2.1)



$$C_1^u = 0.1, C_1^p = 1.0, C_2 = 1$$

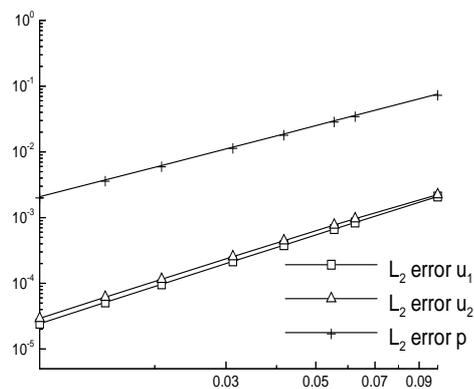
(2.2 2.2 2.1)

Abbildung 6.11: Darstellung des L_2 -Fehlers bei $\delta_1^u = \delta_1^p$ und bei ursprünglicher Wahl ($Re = 1000$)



$$C_1^u = 0.3, C_2 = 0$$

(2.0 2.0 1.6)



$$C_1^u = 0.3, C_2 = 1$$

(2.0 1.9 1.6)

Abbildung 6.12: Darstellung des L_2 -Fehlers bei $C_2 = 0$ bzw. $C_2 = 1$ ($Re=2, \delta_1^p = \delta_1^u$)

Experimente im 3d-Fall

Mit der Wahl $\delta_1^p = \delta_1^u$ wurden nun die ersten Rechnungen in 3d gemacht. Hierzu wurde folgendes Testbeispiel benutzt :

$$u = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ -x_1 \cdot x_2 \\ -x_1 \cdot x_3 \end{pmatrix},$$

$$p = x_1^2 + x_2^2 - \frac{2}{3}.$$

Gerechnet wurden Zerlegungen von 11x11x11 bis 33x33x33.

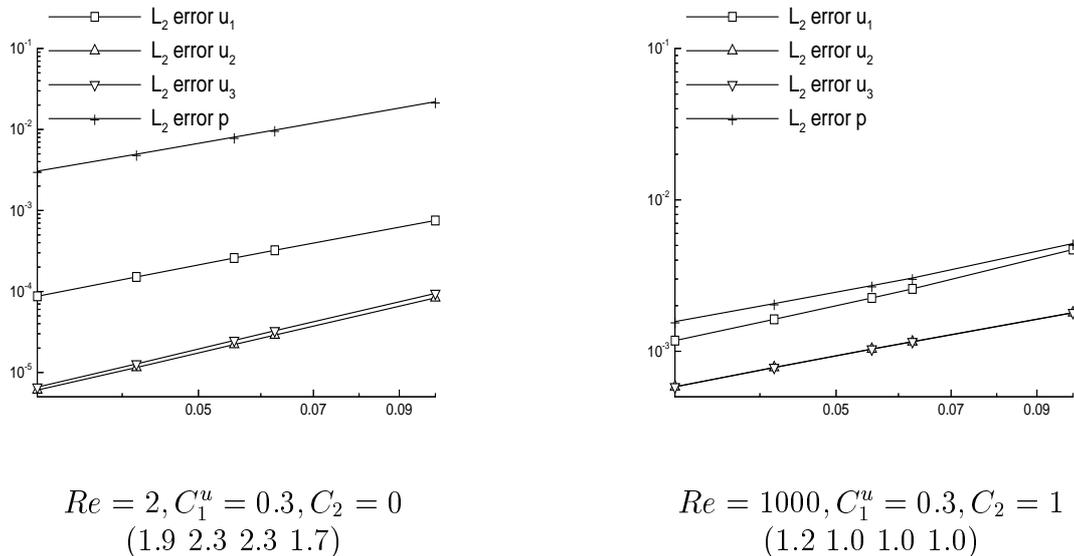
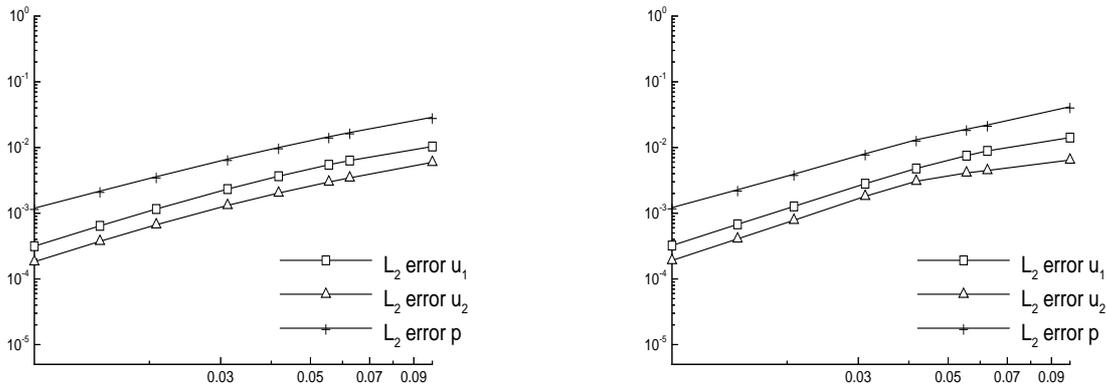


Abbildung 6.13: Darstellung des L_2 -Fehlers in 3d

Die Ergebnisse bezüglich der Wahl der Parameter waren analog zu den Rechnungen in 2d. Auffällig ist aber das Absinken der Konvergenzrate auf etwa 1 bei großen Reynoldszahlen. Dieser Effekt trat bei den 2d-Rechnungen nicht auf.

Parameterwahl nach SDFEM (2d und 3d)

Nun wurde endgültig zu den Einstellungen der SDFEM aus Kapitel 5 übergegangen und hiermit numerische Experimente sowohl in 2d als auch in 3d gemacht. Dabei wurde allerdings nicht hart zwischen $Re_K \leq 1$ und $Re_K \geq 1$ umgeschaltet, sondern weiterhin gemäß (6.2) berechnet. Dieses bewirkt einen glatteren Konvergenzverlauf, wie das folgende Beispiel in 2d mit $Re=20$ zeigt.



weiches Umschalten

hartes Umschalten

Abbildung 6.14: L_2 -Fehler bei $C_1^u = 0.3, C_2 = 0$

Es wurde nun zur Wahl des Parameters δ_2 gemäß

$$\delta_2 \sim \begin{cases} h_K \|a\|_{\infty, K} & \text{für } Re_K \geq 1 \\ 0 & \text{für } Re_K \leq 1 \end{cases}$$

übergegangen. Diese Berechnung von δ_2 deckt sich mit den numerischen Ergebnissen mit der ursprünglichen Wahl der Parameter, da dort erkennbar war, daß bei kleinen Reynoldszahlen keine Stabilisierung des Divergenzterms notwendig ist. Mit der neuen Wahl wird dem Rechnung getragen, so daß auch bei $C_2 > 0$ im diffusionsdominanten Fall δ_2 auf Null gesetzt wird.

Es zeigte sich allerdings, daß diese Wahl bei größer werdender Reynoldszahl ($Re = 1000$) nicht mehr zu brauchbaren Ergebnissen führte. So war es den Lösern nicht möglich, bei kleineren Zerlegungen (z.B. 49×49) und $Re = 1000$ eine Lösung des Gleichungssystems zu ermitteln.

Eine mögliche Erklärung ist, daß das gewählte Strömungsfeld a in einigen Bereichen des Gebietes sehr klein wird. Dieses bewirkt, daß es auch bei großer Reynoldszahl Elemente gibt, auf denen die lokale Reynoldszahl kleiner als 1 ist und dort der Parameter δ_2 auf Null gesetzt wird. Aus den Experimenten mit ursprünglicher Wahl der Parameter ging aber hervor, daß bei diesen Reynoldszahlen der Parameter δ_2 notwendig ungleich Null gesetzt werden muß.

Als Konsequenz wurde nun der Parameter $\delta_2 \sim h_K \|a\|_{\infty, K}$ gesetzt. Dies scheint vernünftig, da dann bei kleinen lokalen Reynoldszahlen δ_2 auch klein gemacht, aber nie auf Null gesetzt wird. Leider zeigte sich, daß auch hiermit noch keine ausreichende Stabilität erreicht werden konnte. Es traten immer noch die gleichen Probleme auf, d.h. Instabilitäten bei großer Reynoldszahl. Die Stabilisierung in Bereichen, wo das Strömungsfeld a klein wird, scheint hier also noch nicht ausreichend zu sein.

Abhilfe schuf hier die Berechnung des Parameters δ_2 mittels der globalen Norm über

das gesamte Gebiet Ω , d.h.

$$\delta_2 \sim h_K \|a\|_\infty. \quad (6.4)$$

Hiermit konnte dann genügend Stabilität erzielt werden.

Diese Wahl des Parameters hat gegenüber der ursprünglichen den Vorteil, daß sie das Strömungsfeld a berücksichtigt. Wird dieses kleiner, so wird auch δ_2 entsprechend kleiner gewählt (bei festem Proportionalitätsfaktor C_2), insbesondere wird im Stokes-Fall ($a = 0$) generell $\delta_2 = 0$ gesetzt, was dort die beste Wahl war.

Bei der ursprünglichen Wahl wurde bei kleinem Strömungsfeld δ_2 proportional zu ϵ gewählt, was aber nicht sinnvoll scheint, da gerade im diffusionsdominanten Fall δ_2 nicht notwendig ist.

Man beachte allerdings, daß (6.4) nicht durch die Analysis aus Abschnitt 5 gesichert ist, sondern rein experimentell ermittelt wurde.

Es muß auch gesagt werden, daß bei dem hier gerechneten Beispiel die Umstellung des Parameters gemäß (6.4) keine gravierende Verbesserung des Konvergenzverhaltens und der Größe des Fehlers gebracht hat. Der Vorteil war, daß der Faktor C_2 auch im diffusionsdominanten Fall ($Re = 2$) auf 1.0 gesetzt bleiben konnte, ohne daß der Fehler größer wurde als bei $C_2 = 0$, was bei der ursprünglichen Wahl der Fall war.

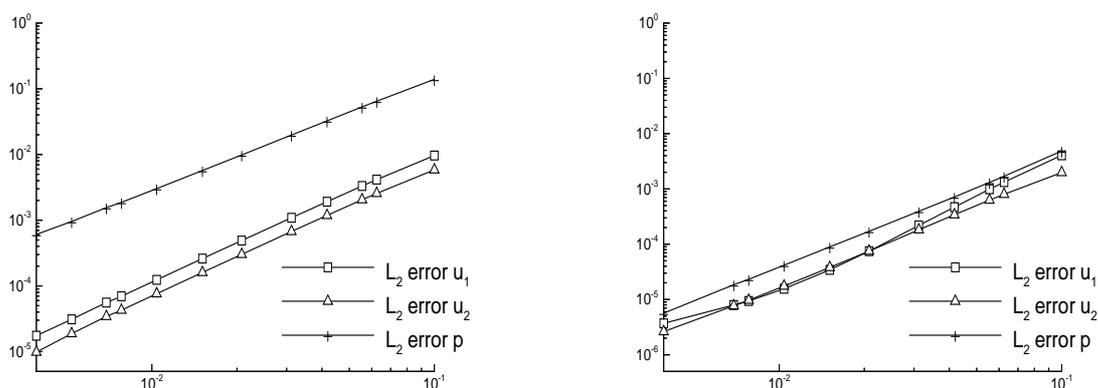
Zu bemerken ist, daß wieder ab $Re = 100$ wie bei den vorangegangenen Experimenten die Konsistenzsicherung abgeschaltet wurde.

Insgesamt stellte sich heraus, daß der Fehler bei Erhöhung des Faktor C_1^u wie schon bei den vorangegangenen Rechnungen ebenfalls größer wurde. Optimal war die Wahl $C_1^u = 0.3$ bei allen Reynoldszahlen. Wie schon vorher sollte diese Grenze aber nicht zu sehr ausgereizt werden, da sie exakt auf das hier gerechnete Beispiel zugeschnitten ist. Daher sollte C_1^u etwas größer gewählt werden.

Der Parameter C_2 konnte, wie schon oben erwähnt, unabhängig von der Reynoldszahl auf 1 gesetzt werden. Die Wahl von $C_2 = 0.5$ (bei 2d-Rechnungen) hatte kaum Einfluß auf den Fehler der Lösung. Daher wurde bei den 3d-Rechnungen grundsätzlich $C_2 = 1$ gesetzt.

Die Konvergenzdiagramme in 2d und 3d sind ab Seite 73 zusammengestellt.

Man sieht wieder wie bei der ursprünglichen Wahl der Parameter, daß in 2d bei steigender Reynoldszahl die Konvergenzordnung ansteigt. Im 3d-Fall tritt der umgekehrte Effekt ein. Bei wachsender Reynoldszahl sinkt zuerst die Konvergenzrate des Druckes auf 1 ab ($Re=100$), bei weiterer Erhöhung auf $Re=1000$ geschieht das gleiche mit den Geschwindigkeitskomponenten.



$$Re = 2, C_1^u = 1.0, C_2 = 1.0$$

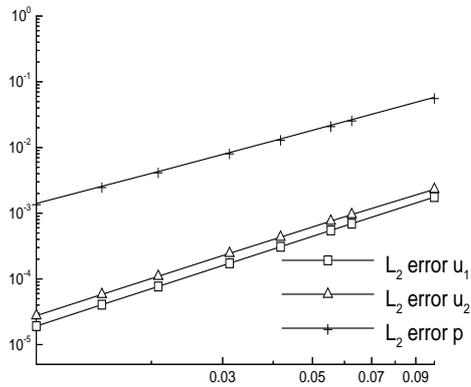
$$(1.9 \ 2.0 \ 1.7)$$

$$Re = 1000, C_1^u = 1.0, C_2 = 1.0$$

$$(2.2 \ 2.0 \ 2.1)$$

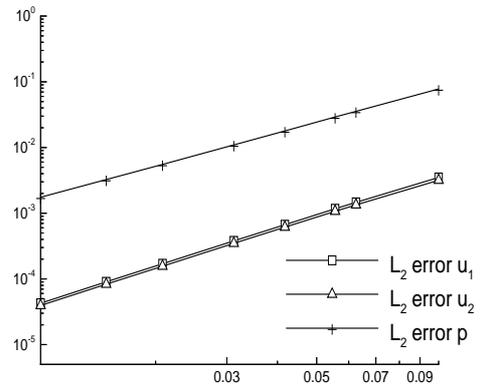
Abbildung 6.15: Beispiel einer Rechnung bis 257x257 Knoten

Bei den dargestellten Rechnungen wurde im 2d-Fall bis zu einer Zerlegung von 97x97 Knoten gearbeitet. Um in die weitere Entwicklung mit kleiner werdendem h zu sehen, wurde bei $Re = 2$ und $Re = 1000$ je ein Beispiel bis 257x257 Knoten gerechnet. Hierbei fiel auf, daß die Wahl $C_1^u < 1$ bei solchen feinen Zerlegungen Schwierigkeiten bereitete, d.h. die Löser konnten kein Ergebnis ermitteln. Bei $C_1^u = 1$ gab es diese Probleme nicht. Das Konvergenzdiagramm findet sich in Abb. 6.15. Man sieht, daß bei feineren Zerlegungen die Konvergenzrate im Fall $Re = 2$ erhalten bleibt. Bei $Re = 1000$ wird der Konvergenzverlauf für kleines h etwas flacher, was sich auch im geringfügigen Absinken der mittleren Konvergenzrate gegenüber Rechnungen bis 97x97 Knoten ausdrückt.



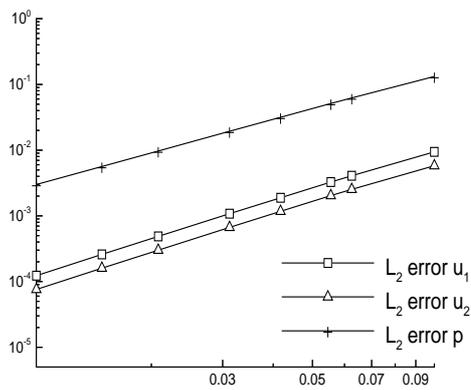
$$C_1^u = 0.3, C_2 = 0.5$$

$$(2.0 \ 2.0 \ 1.6)$$



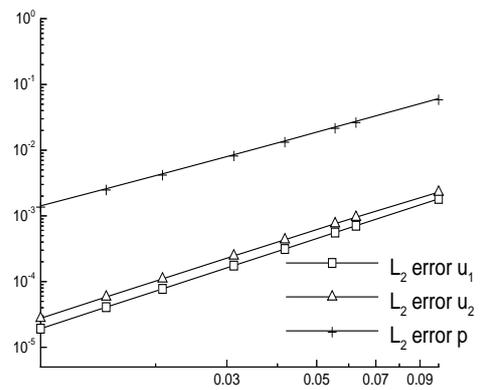
$$C_1^u = 0.5, C_2 = 0.5$$

$$(1.9 \ 1.9 \ 1.7)$$



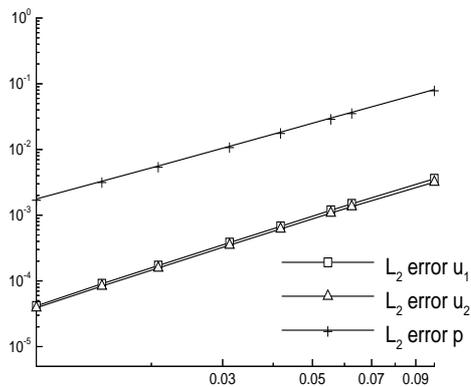
$$C_1^u = 1, C_2 = 0.5$$

$$(1.9 \ 1.9 \ 1.7)$$



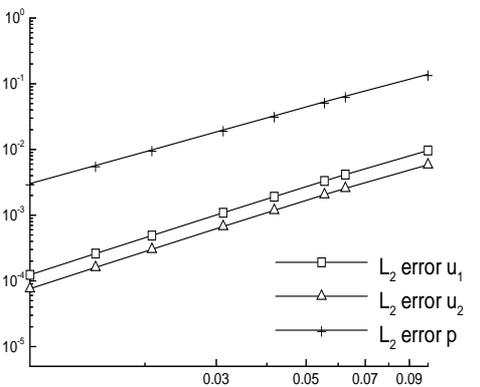
$$C_1^u = 0.3, C_2 = 1$$

$$(2.0 \ 2.0 \ 1.7)$$



$$C_1^u = 0.5, C_2 = 1$$

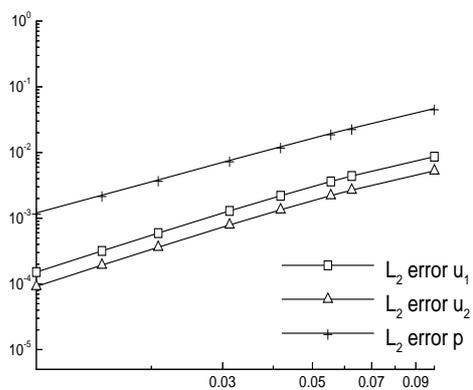
$$(2.0 \ 1.9 \ 1.7)$$



$$C_1^u = 1, C_2 = 1$$

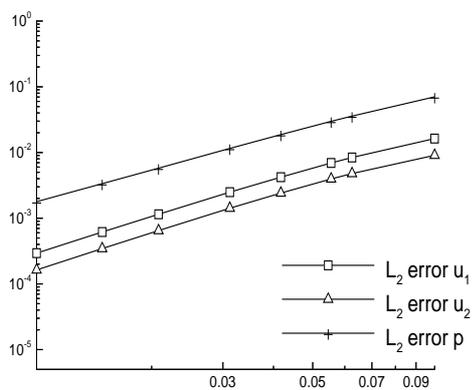
$$(1.9 \ 1.9 \ 1.7)$$

Abbildung 6.16: L_2 -Fehler bei $Re=2$



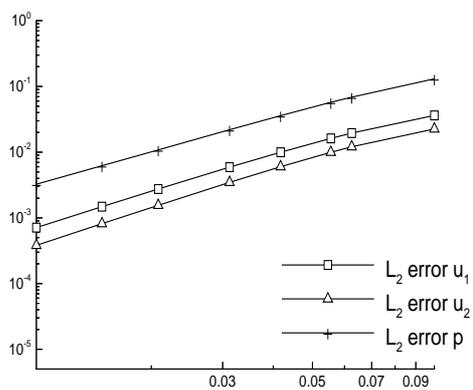
$$C_1^u = 0.3, C_2 = 0.5$$

$$(1.8 \ 1.8 \ 1.6)$$



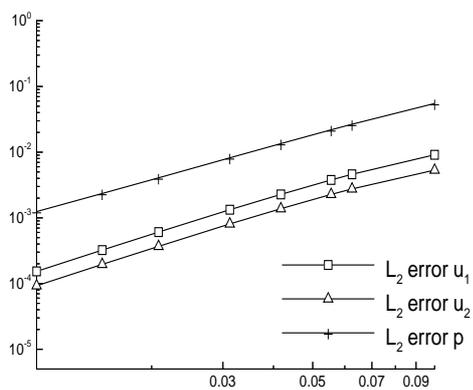
$$C_1^u = 0.5, C_2 = 0.5$$

$$(1.8 \ 1.8 \ 1.6)$$



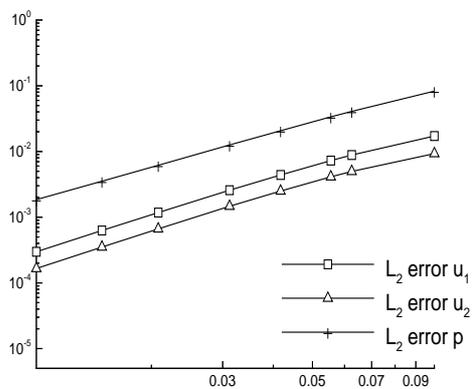
$$C_1^u = 1, C_2 = 0.5$$

$$(1.7 \ 1.8 \ 1.6)$$



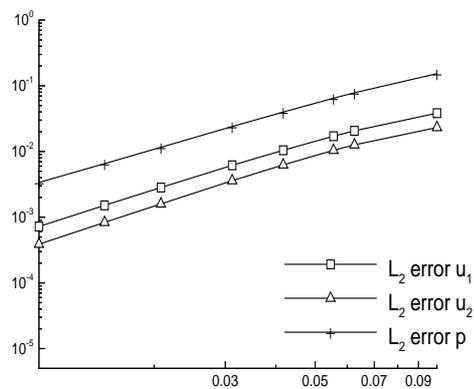
$$C_1^u = 0.3, C_2 = 1$$

$$(1.8 \ 1.8 \ 1.7)$$



$$C_1^u = 0.5, C_2 = 1$$

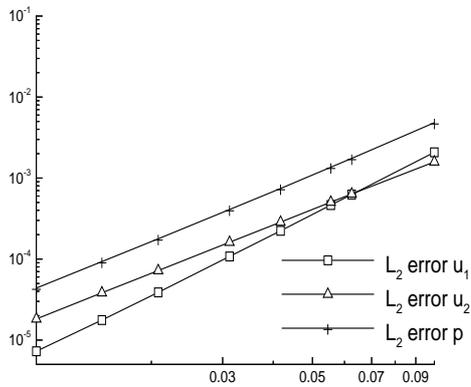
$$(1.8 \ 1.8 \ 1.7)$$



$$C_1^u = 1, C_2 = 1$$

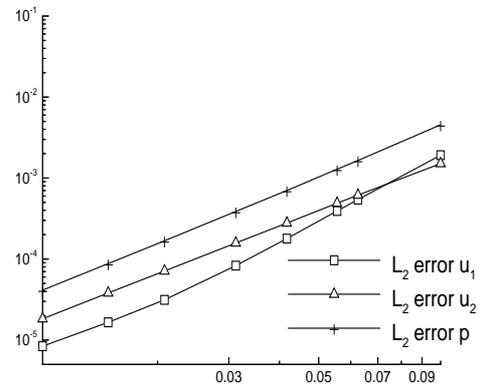
$$(1.8 \ 1.8 \ 1.7)$$

Abbildung 6.17: L_2 -Fehler bei $Re=10$



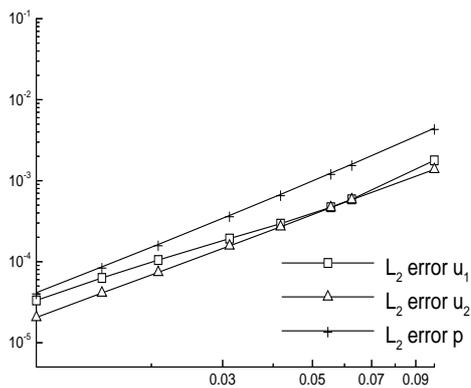
$$C_1^u = 0.3, C_2 = 0.5$$

$$(2.5 \ 2.0 \ 2.0)$$



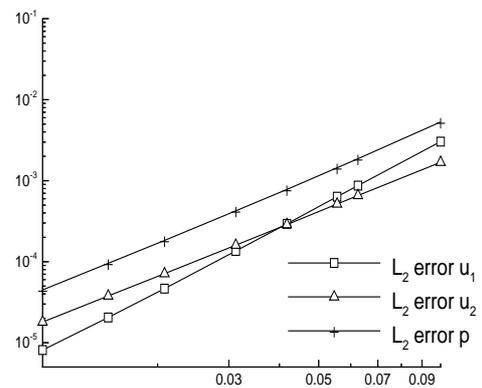
$$C_1^u = 0.5, C_2 = 0.5$$

$$(2.4 \ 2.0 \ 2.1)$$



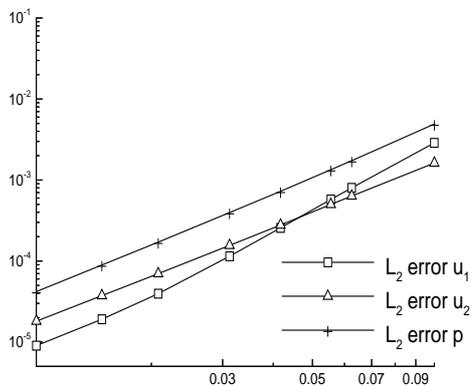
$$C_1^u = 1, C_2 = 0.5$$

$$(1.7 \ 1.9 \ 2.1)$$



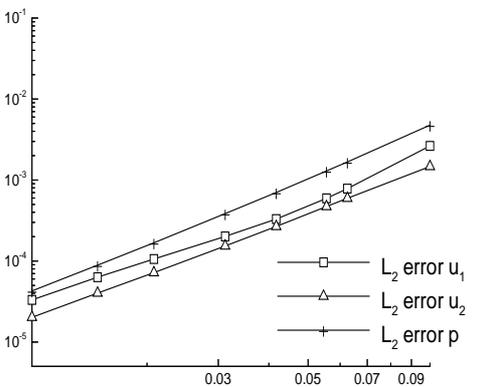
$$C_1^u = 0.3, C_2 = 1$$

$$(2.6 \ 2.0 \ 2.1)$$



$$C_1^u = 0.5, C_2 = 1$$

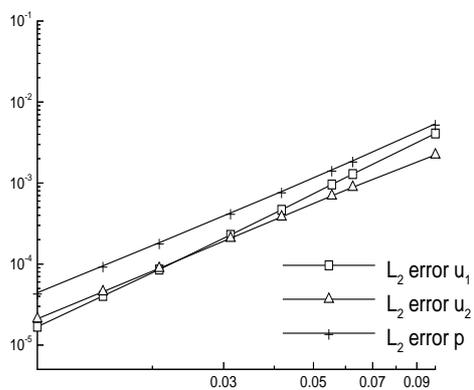
$$(2.6 \ 2.0 \ 2.1)$$



$$C_1^u = 1, C_2 = 1$$

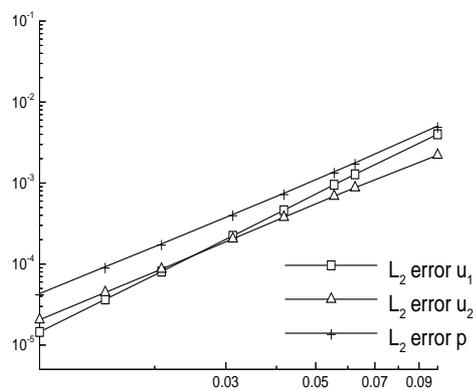
$$(2.0 \ 1.9 \ 2.1)$$

Abbildung 6.18: L_2 -Fehler bei $Re=100$



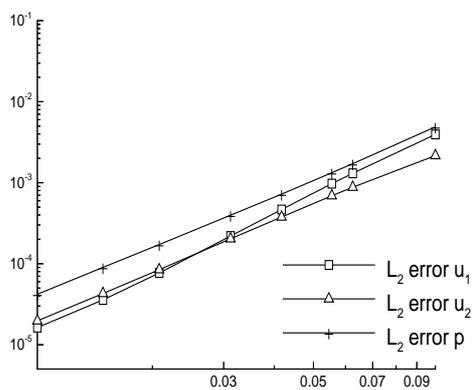
$$C_1^u = 0.3, C_2 = 1$$

$$(2.4 \ 2.1 \ 2.1)$$



$$C_1^u = 0.5, C_2 = 1$$

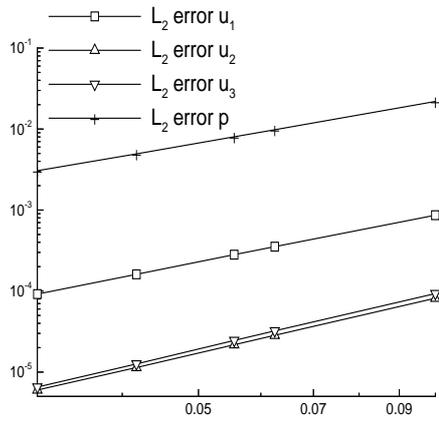
$$(2.5 \ 2.1 \ 2.1)$$



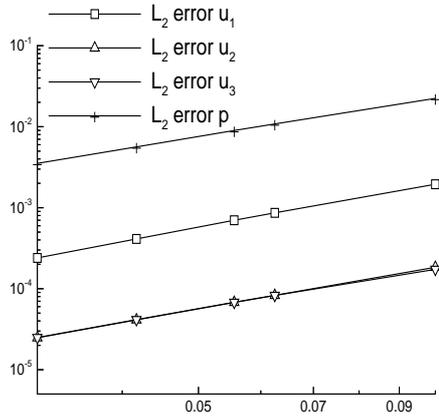
$$C_1^u = 1, C_2 = 1$$

$$(2.4 \ 2.1 \ 2.1)$$

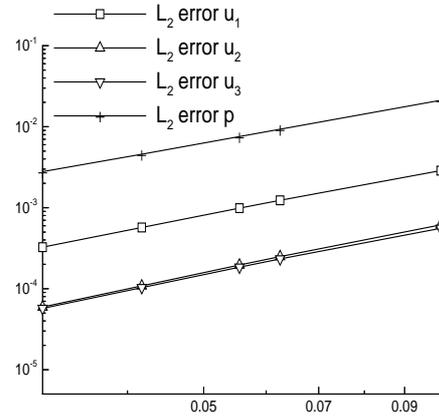
Abbildung 6.19: L_2 -Fehler bei $Re=1000$



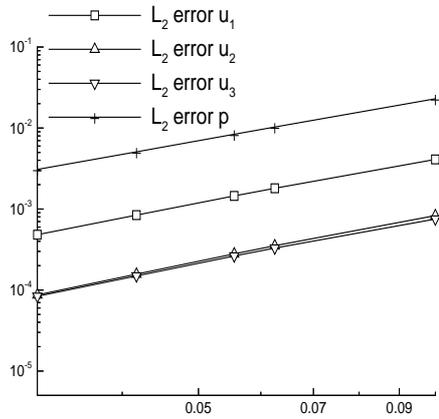
$Re = 2, C_1^u = 0.3, C_2 = 1$
(1.9 2.2 2.3 1.7)



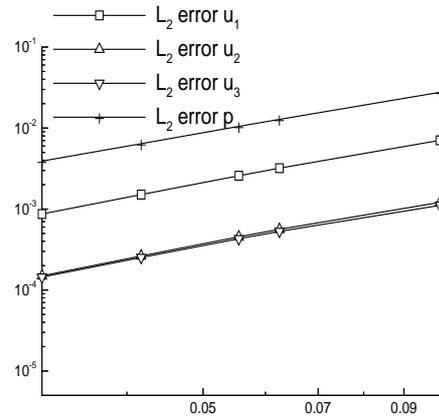
$Re = 2, C_1^u = 0.5, C_2 = 1$
(1.9 2.0 2.0 1.7)



$Re = 2, C_1^u = 1, C_2 = 1$
(1.8 1.7 1.7 1.6)



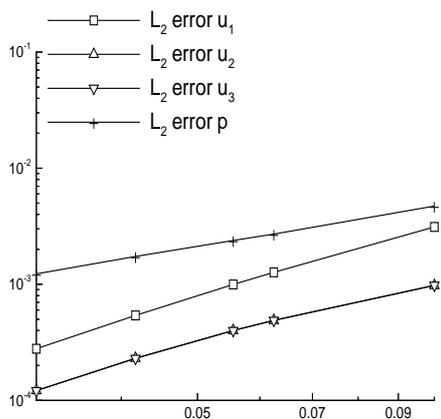
$Re = 10, C_1^u = 0.3, C_2 = 1$
(1.9 2.0 2.0 1.7)



$Re = 10, C_1^u = 0.5, C_2 = 1$
(1.9 2.0 1.9 1.7)

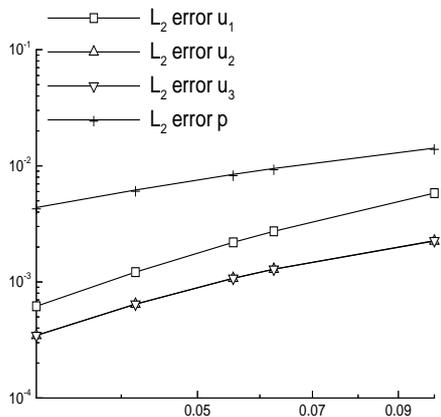
$Re = 10, C_1^u = 1, C_2 = 1$
(1.8 1.8 1.8 1.7)

Abbildung 6.20: L_2 -Fehler in 3d



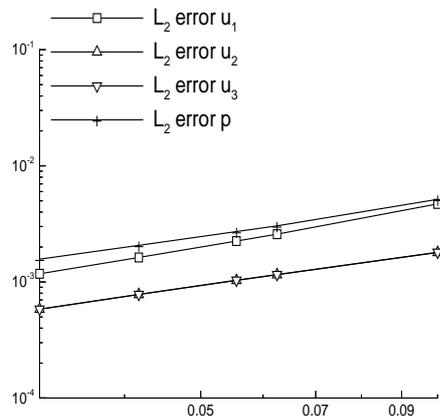
$$Re = 100, C_1^u = 0.3, C_2 = 1$$

$$(2.0 \ 1.8 \ 1.8 \ 1.1)$$



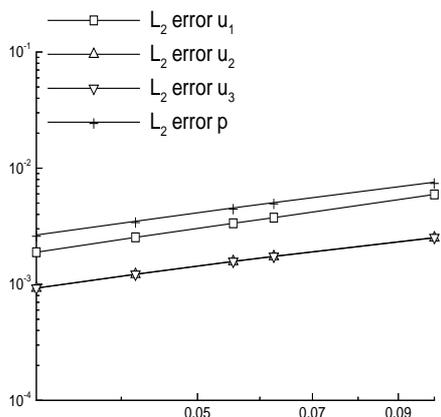
$$Re = 100, C_1^u = 0.5, C_2 = 1$$

$$(2.0 \ 1.8 \ 1.8 \ 1.0)$$



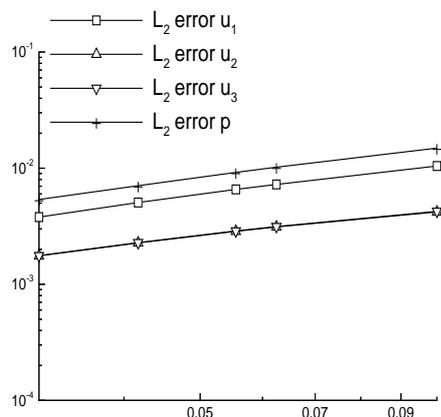
$$Re = 100, C_1^u = 1, C_2 = 1$$

$$(2.0 \ 1.7 \ 1.7 \ 1.0)$$



$$Re = 1000, C_1^u = 0.3, C_2 = 1$$

$$(1.2 \ 1.0 \ 1.0 \ 1.0)$$



$$Re = 1000, C_1^u = 0.5, C_2 = 1$$

$$(1.0 \ 0.9 \ 0.9 \ 0.9)$$

$$Re = 1000, C_1^u = 1, C_2 = 1$$

$$(0.9 \ 0.8 \ 0.8 \ 0.9)$$

Abbildung 6.21: L_2 -Fehler in 3d

Kapitel 7

Die Navier-Stokes-Gleichung

Das Thema der vorliegenden Arbeit war die Untersuchung eines numerischen Verfahrens zur Lösung der Oseen-Gleichung. Diese stellt eine Linearisierung der für die Strömungssimulation wichtigen inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichung dar. Sie lautet

$$-\epsilon \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p = f \text{ in } \Omega, \quad (7.1)$$

$$\nabla \cdot u = 0 \text{ in } \Omega. \quad (7.2)$$

Vereinfachend werden für die Darstellung wieder homogene Dirichlet-Bedingungen angenommen, d.h.

$$u = 0 \text{ auf } \Gamma. \quad (7.3)$$

Analog zur Oseen-Gleichung läßt sich hierfür eine schwache Formulierung herleiten. Man erhält

Finde $\hat{u} = (u, p) \in H_0^1(\Omega)^n \times L_0^2(\Omega) =: X \times M$ mit

$$B(u; \hat{u}, \hat{v}) = L(\hat{v}) \quad \forall \hat{v} \in X \times M, \quad (7.4)$$

wobei

$$\begin{aligned} B(a; \hat{u}, \hat{v}) &:= \epsilon(\nabla u, \nabla v) + ((a \cdot \nabla)u, v) - (p, \nabla \cdot v) + (q, \nabla \cdot u), \\ L(\hat{v}) &:= (f, v). \end{aligned}$$

Hierbei handelt es sich offenbar um ein nichtlineares Problem. Über die Lösbarkeit läßt sich folgende Aussage machen :

Satz 7.1 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n = 2, 3$) beschränktes Gebiet mit Lipschitz-stetigem Rand und $f \in L^2(\Omega)$. Dann gilt*

i) *Es gibt mindestens eine Lösung von (7.4).*

ii) *Gilt zusätzlich*

$$\left(\frac{\mathcal{N}}{\epsilon^2}\right) \|f\|_{X^*} < 1 \quad (7.5)$$

mit

$$\mathcal{N} := \sup_{u,v,w \in X} \frac{((w \cdot \nabla)u, v)}{|u|_1 |v|_1 |w|_1},$$

so besitzt das Problem (7.4) genau eine Lösung.

Beweis : Siehe [10] Abschnitt IV Theorem 2.1, 2.2.

□

Eine Form der Linearisierung, wie sie schon in Kapitel 3 angegeben wurde, ist die folgende Iteration :

Für $n = 0, 1, \dots$

Finde $\hat{u}^{(n+1)} \in X \times M$ mit

$$B(u^{(n)}; \hat{u}^{(n+1)}, \hat{v}) = L(\hat{v}) \quad \forall \hat{v} \in X \times M.$$

Dieses Verfahren konvergiert unter der Voraussetzung (7.5) gegen die Lösung von (7.4) (siehe [10] Abschn. IV Remark 2.2). Die für jedes n entstehenden Teilprobleme sind dann Oseen-Gleichungen.

Eine Verallgemeinerung dieser Iteration ist das folgende Defektkorrekturverfahren, welches in dieser Form auch in PNS implementiert ist :

Finde $\hat{z} \in X \times M$ mit

$$B(u^{(n)}; \hat{z}, \hat{v}) = \omega_n \{L(\hat{v}) - B(u^{(n)}, \hat{u}^{(n)}, \hat{v})\} \quad \forall \hat{v} \in X \times M$$

und setze

$$\hat{u}^{(n+1)} := \hat{u}^{(n)} + \hat{z}.$$

Man erkennt, daß die beiden Verfahren für $\omega_n = 1$ zusammenfallen. In jedem Iterationsschritt ist dort wieder ein Oseen-Problem zu lösen.

Damit sieht man noch einmal explizit die Bedeutung der Oseen-Gleichung als Teilproblem der Navier-Stokes Gleichung.

Als diskretes Problem mit FEM-Räumen $X_h \times M_h$ ergibt sich somit :

Finde $\hat{z}_h \in X_h \times M_h$ mit

$$B(u_h^{(n)}; \hat{z}_h, \hat{v}_h) = \omega_n \{L(\hat{v}_h) - B(u_h^{(n)}, \hat{u}_h^{(n)}, \hat{v}_h)\} \quad \forall \hat{v}_h \in X_h \times M_h$$

und setze

$$\hat{u}_h^{(n+1)} := \hat{u}_h^{(n)} + \hat{z}_h.$$

Dieses Problem kann dann mit einer Stabilisierung mittels SDFEM gelöst werden. Daher scheint es sinnvoll, in Rahmen dieser Arbeit noch einige Experimente mit den Navier-Stokes-Gleichungen zu machen. Diese werden im nächsten Kapitel beschrieben.

Kapitel 8

Numerische Experimente II (driven-cavity-Strömung)

Im zweiten Teil der numerischen Experimente wurden nun Testrechnungen mit den in Kapitel 7 eingeführten (nichtlinearen) Navier-Stokes-Gleichungen durchgeführt. Als Beispiel diente hierzu das sog. driven-cavity-Problem. Hierbei betrachtet man einen rechteckigen Hohlraum $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$, in dem durch Vorgabe einer entsprechenden Randbedingung eine Zirkulationsströmung induziert wird.

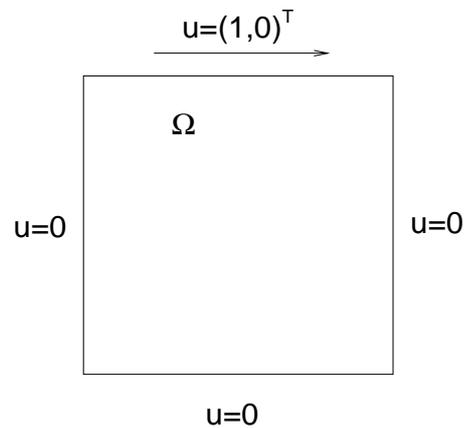
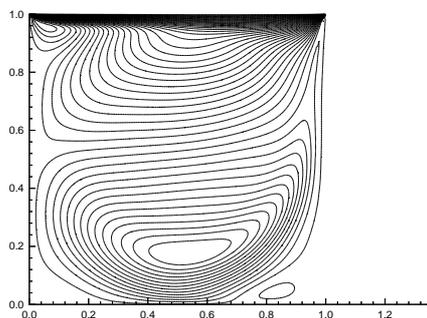
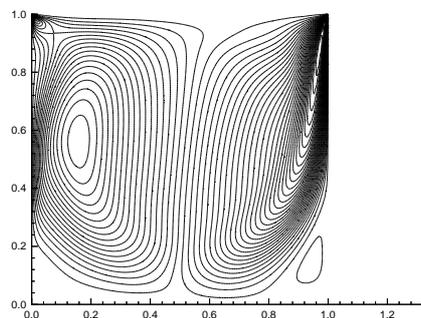


Abbildung 8.1: Vorgabe der Randbedingungen

In Abhängigkeit von der Reynoldszahl entstehen hierbei charakteristische Strömungen (siehe Abb. 8.2-8.4).

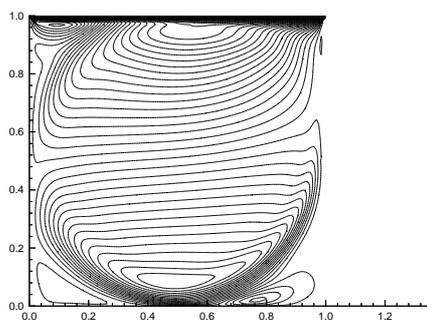


$u_1 = \text{const.}$

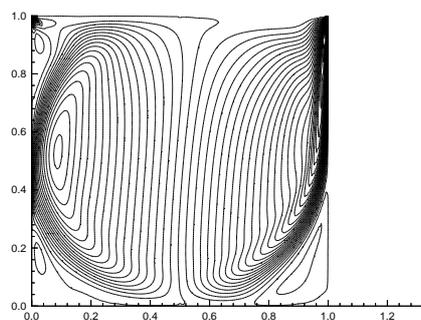


$u_2 = \text{const.}$

Abbildung 8.2: Kontourlinien bei $Re = 1000$

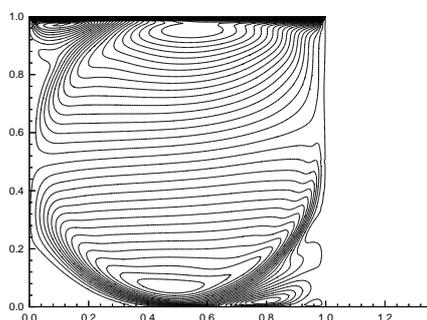


$u_1 = \text{const.}$

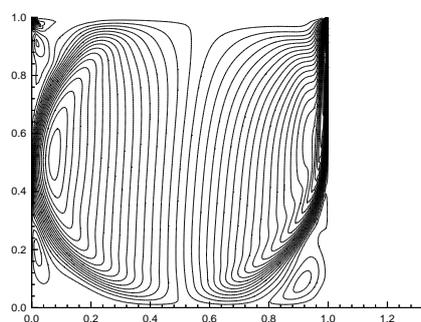


$u_2 = \text{const.}$

Abbildung 8.3: Kontourlinien bei $Re = 5000$



$u_1 = \text{const.}$



$u_2 = \text{const.}$

Abbildung 8.4: Kontourlinien bei $Re = 10000$

Mit diesen Reynoldszahlen wurde dieses Problem auf unterschiedlichen Gittern gerechnet. Dabei wurden folgende Netze verwendet :

- Strukturierte regelmäßige Gitter mit 65×65 , 129×129 und 257×257 Knoten (s. Abb. 8.5)
- Strukturiertes Gitter mit Verfeinerung der Zerlegung in den Randbereichen (nicht-uniformes Gitter, s. Abb. 8.5)
- Unstrukturierte Gitter (s. Abb. 8.6)
- Unstrukturierte Gitter mit Verfeinerung in den Randbereichen (s. Abb. 8.7)

Linearisiert wurde mit dem in Kapitel 7 beschriebenen Defektkorrekturverfahren mit $\omega_n = 1$. Maximal wurden 200 Schritte dieses Verfahrens durchgeführt, wobei bei den Reynoldszahlen $Re = 1000, 5000$ das Abbruchkriterium wesentlich früher erreicht wurde. Bei $Re = 10000$ war nach wenigen Iterationsschritten eine bestimmte Größe des Residuums erreicht, die sich auch nach dem 200. Schritt nicht weiter verbessert hat. Die entstehenden Oseen-Probleme wurden wie die Testfälle in Abschnitt 6 mit SDFEM-Stabilisierung gelöst. Als Proportionalitätsfaktoren für die Stabilisierungsparameter wurden bei allen Rechnungen $C_1^u = 1.0$ und $C_2 = 1.0$ gesetzt.

Da keine analytische Lösung existiert, ist es nicht möglich, den Fehler darzustellen. Aus diesem Grund wurden die Lösungen gegenübergestellt und mit Referenzlösungen aus [9] verglichen.

Hierzu wurde die erste Geschwindigkeitskomponente bei festem $x = 0.5$ und die zweite bei festem $y = 0.5$ dargestellt.

Es stellte sich dabei heraus, daß die Rechnungen stabil gegenüber den verwendeten Vernetzungen sind. Dieses robuste Verhalten ist natürlich sehr erfreulich, da die Gitter von sehr unterschiedlicher Bauart sind. Etwas auffällig verhielt sich das nichtuniforme Gitter. Allerdings hat dieses gerade im betrachteten Bereich weniger Knoten als die restlichen Netze, was den Unterschied bewirken kann.

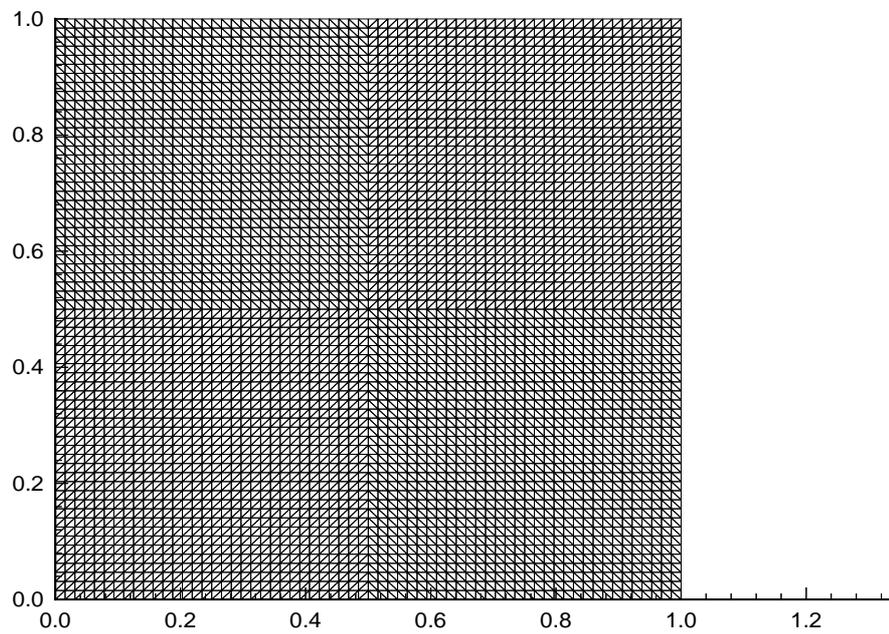
Beim Vergleich der strukturierten Netze sieht man, daß in den Grenzschichtbereichen das 257×257 -Gitter die beste Übereinstimmung mit der Referenzlösung von Ghia zeigt, während das lineare Verhalten im Inneren des Gebietes bei großen Reynoldszahlen nicht wiedergespiegelt wird. Auch Erhöhungen der Iterationszahl der Löser konnten diesen Effekt nicht beseitigen. Bei exemplarischen instationäre Rechnungen trat das Problem ebenfalls auf.

Weiterhin fällt auf, daß sich keine Konvergenz für $h \rightarrow 0$ erkennen läßt. Es ist bei Betrachtung der drei verschiedenen Zerlegungen nicht möglich, eine Grenzfunktion für kleiner werdendes h zu sehen.

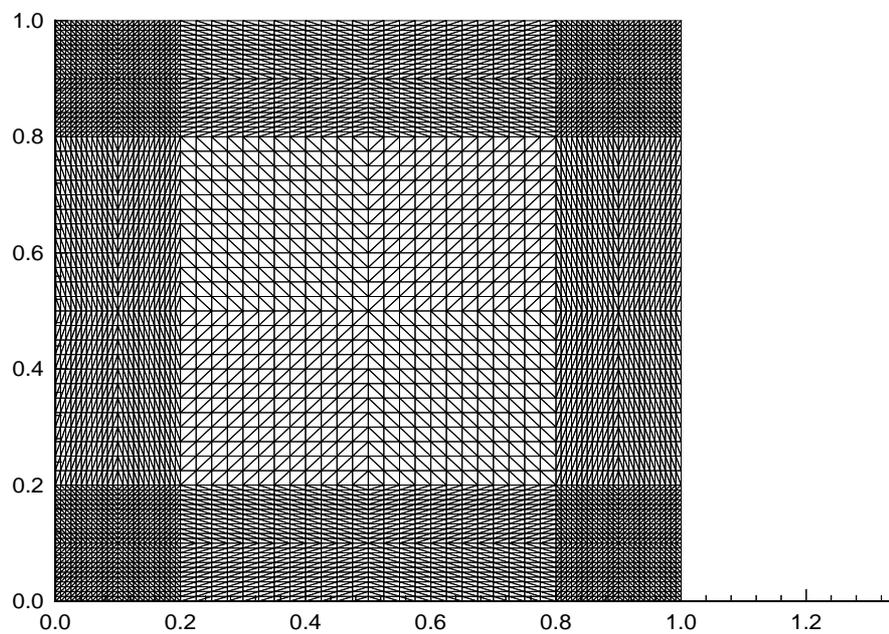
Insgesamt sind daher die Resultate für feine Zerlegungen unbefriedigend, denn in wie weit die verwendete Diskretisierung mit SDFEM für kleines h beim driven-cavity-Problem geeignet ist, konnte im Rahmen dieser Arbeit nicht geklärt werden. Besonders das eigenwillige Verhalten der Lösung beim 257×257 -Netz stellt ein ungelöstes Problem

dar.

Auf den folgenden Seiten sind die verwendeten Gitter und die Resultate der Rechnung aufgeführt. Dargestellt sind jeweils die Schnitte bei $x = 0.5$ bzw. $y = 0.5$ und zusätzlich noch Vergrößerungen der Grenzschichtbereiche.

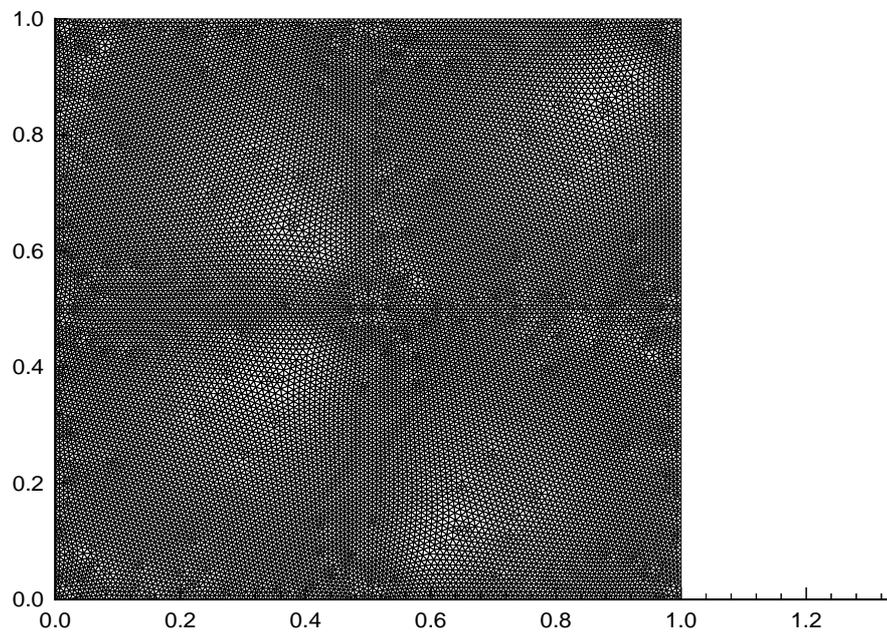


Strukturiertes Gitter mit 65x65 Knoten

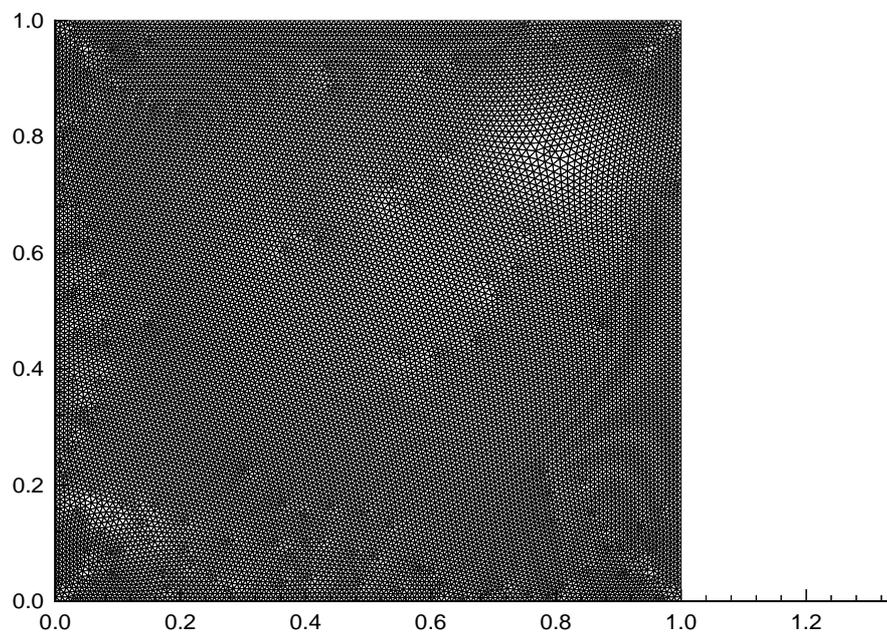


Nichtuniformes Gitter

Abbildung 8.5: Verwendete Vernetzungen

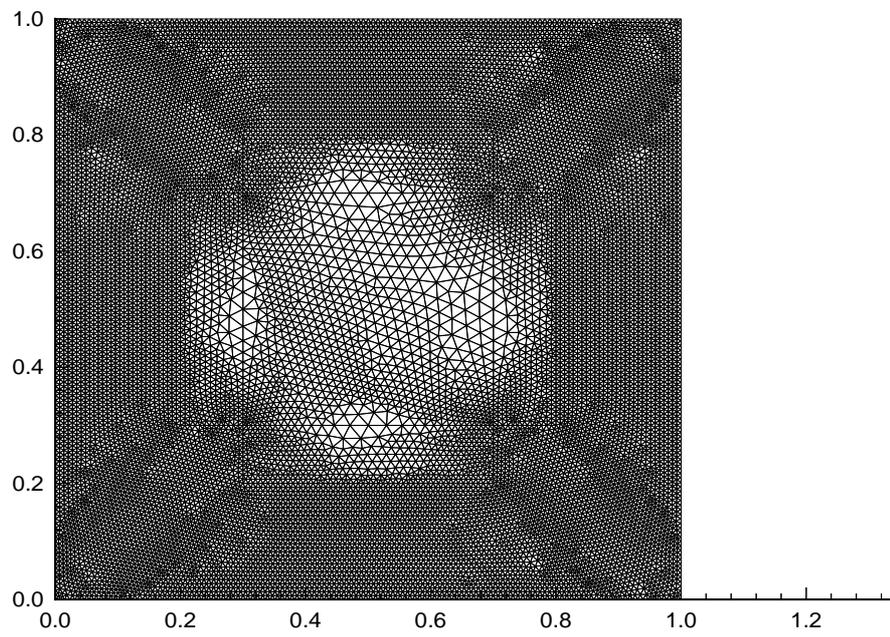


Unstrukturiert I

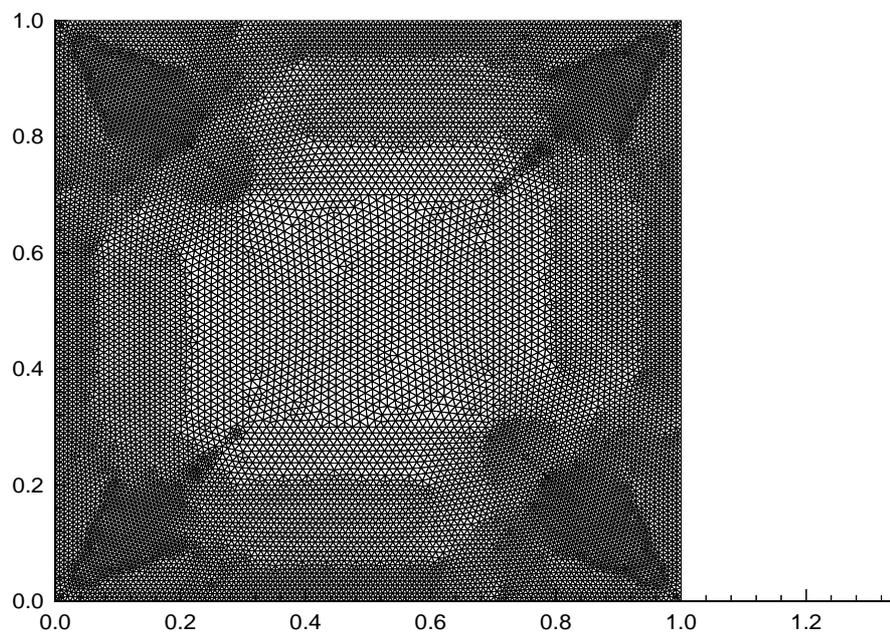


Unstrukturiert II

Abbildung 8.6: Verwendete Vernetzungen

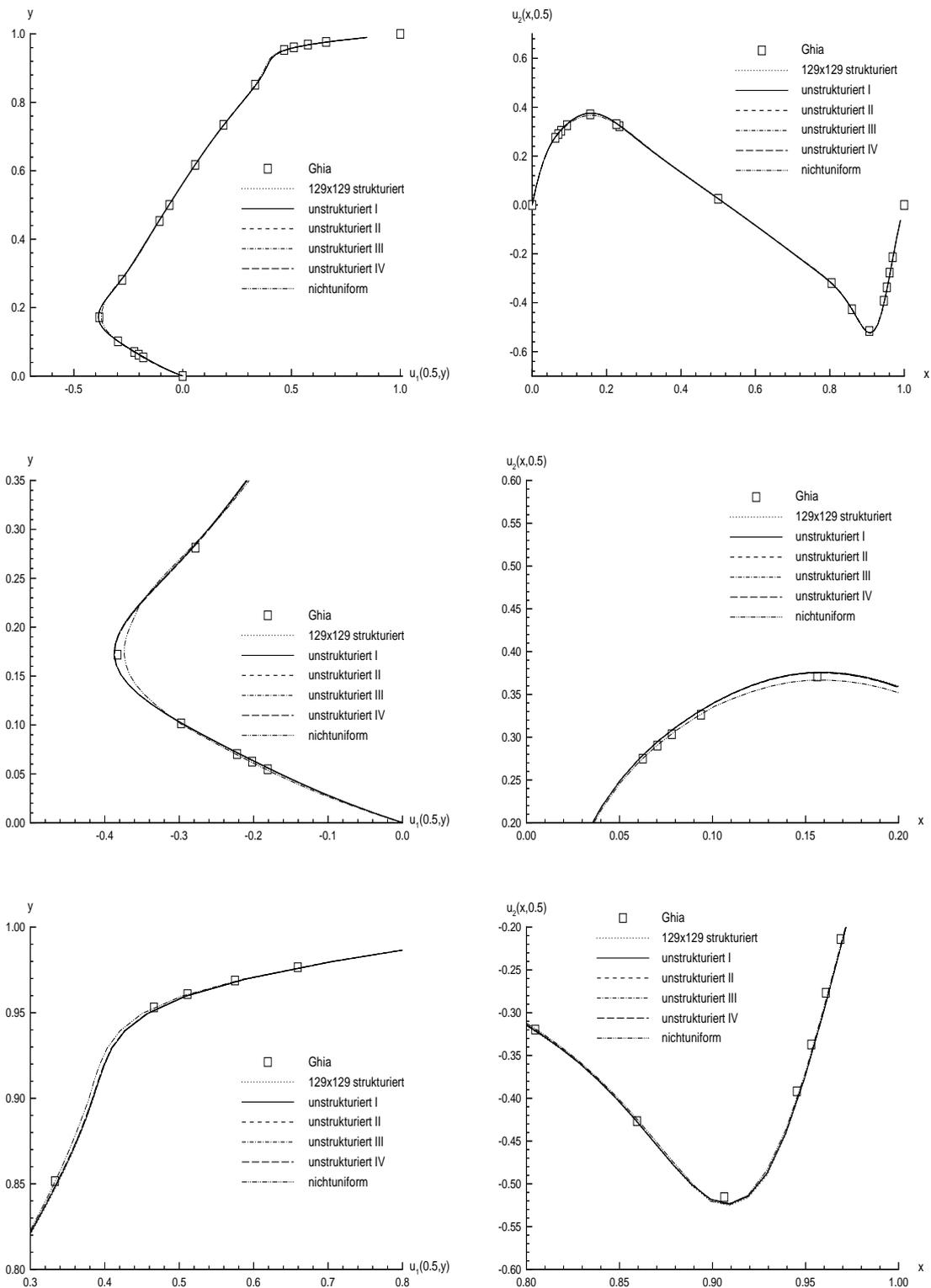


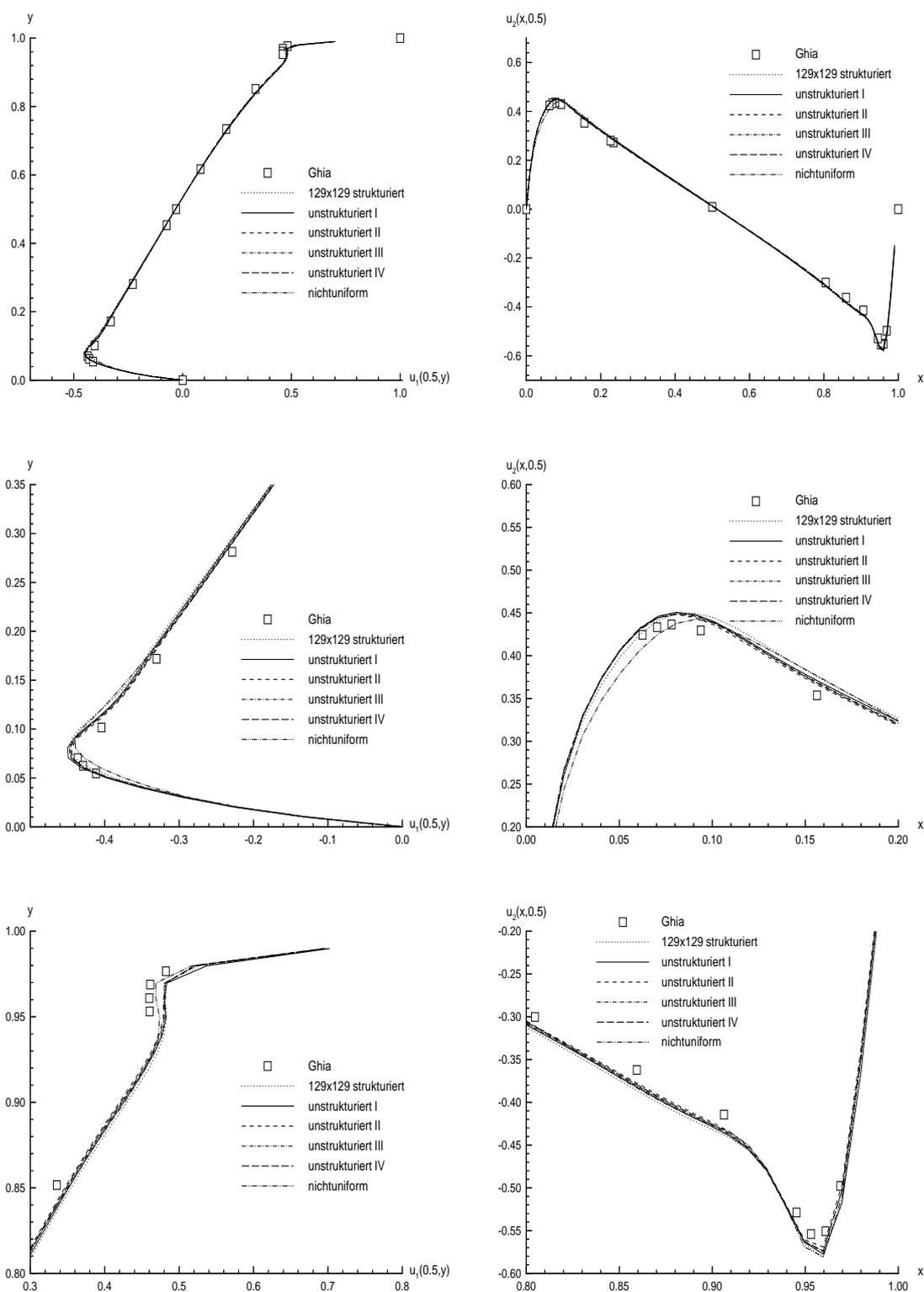
Unstrukturiert III



Unstrukturiert IV

Abbildung 8.7: Verwendete Vernetzungen

Abbildung 8.8: Vergleich der Netze bei $Re=1000$

Abbildung 8.9: Vergleich der Netze bei $Re=5000$

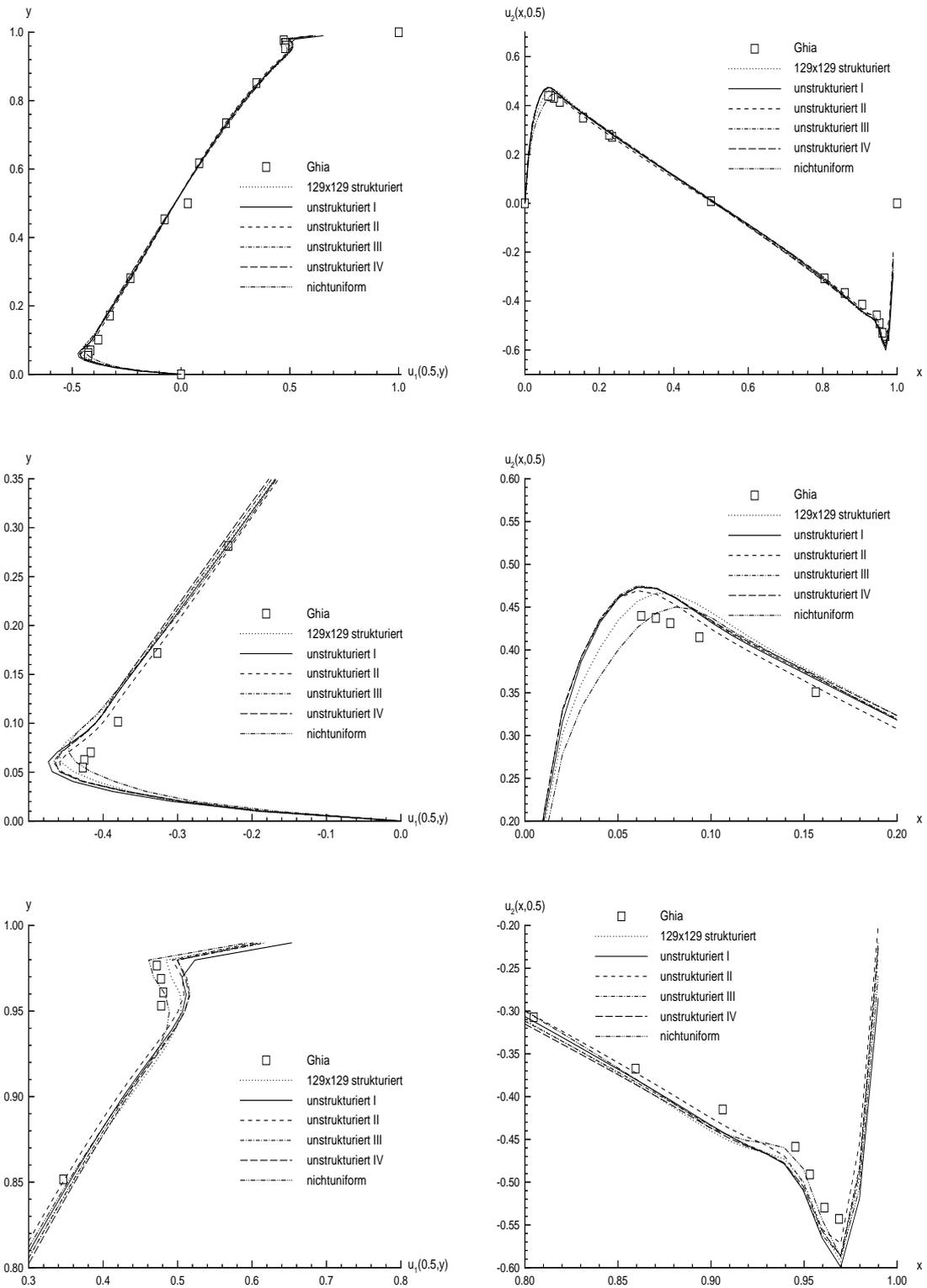
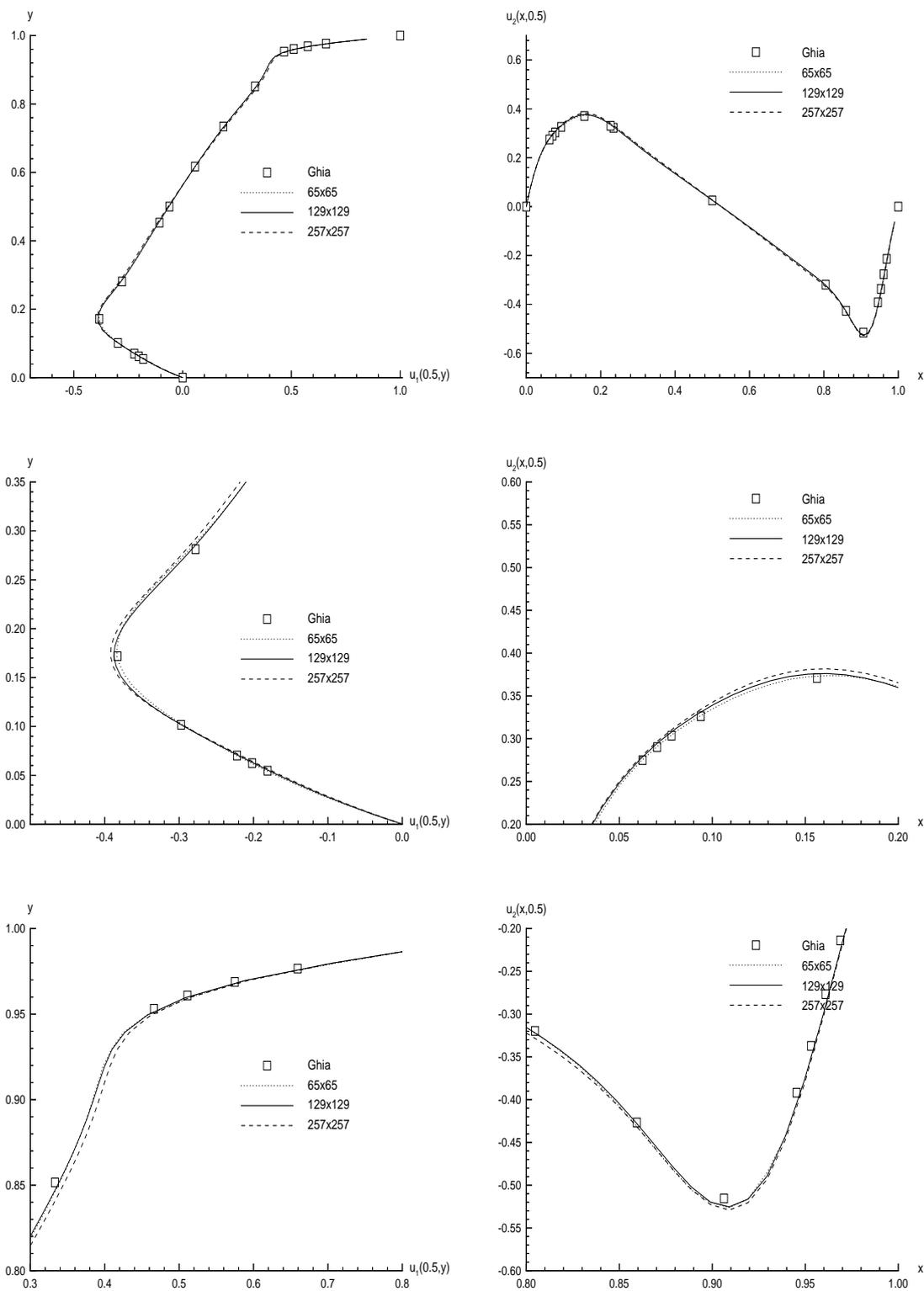
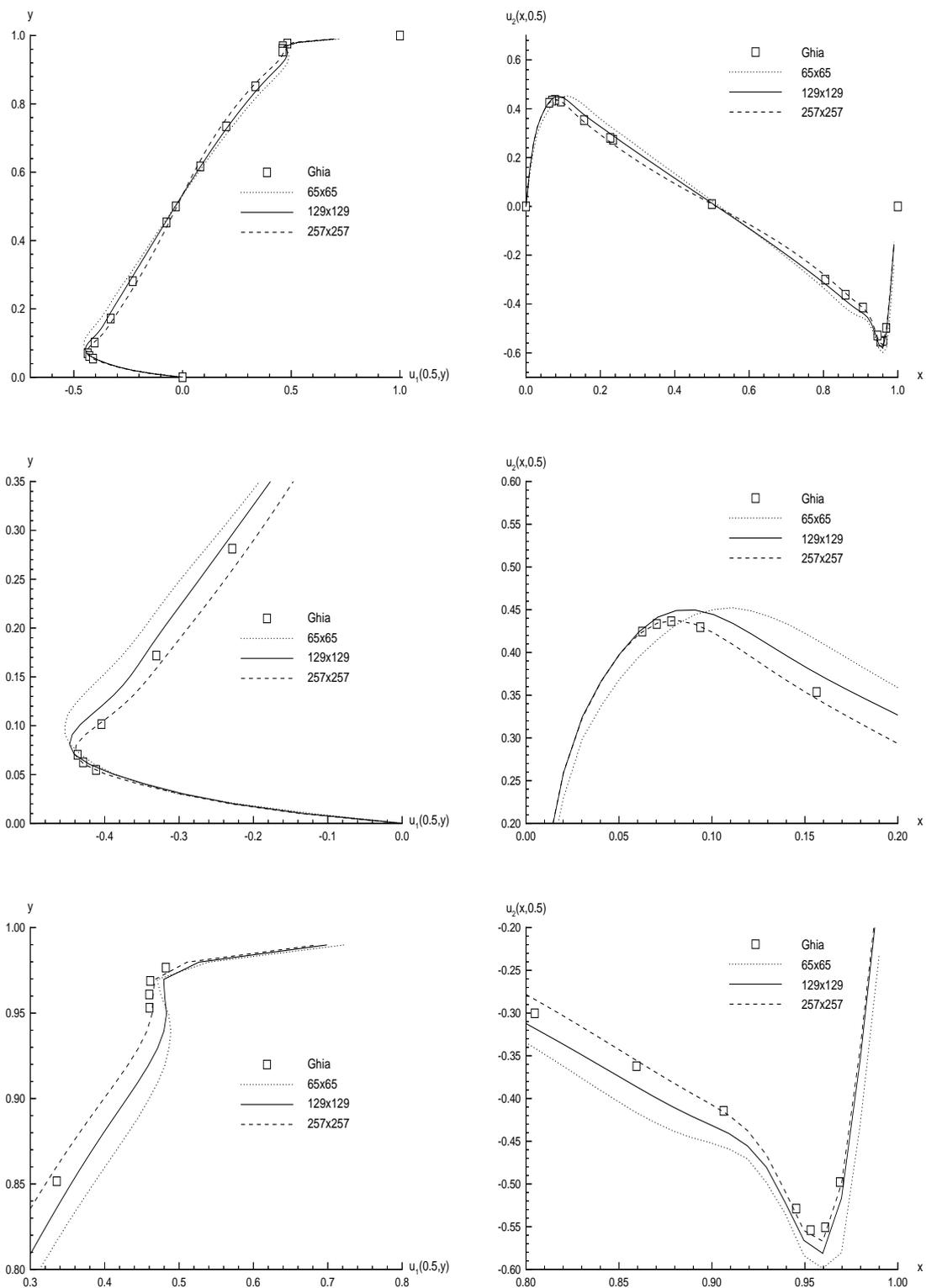
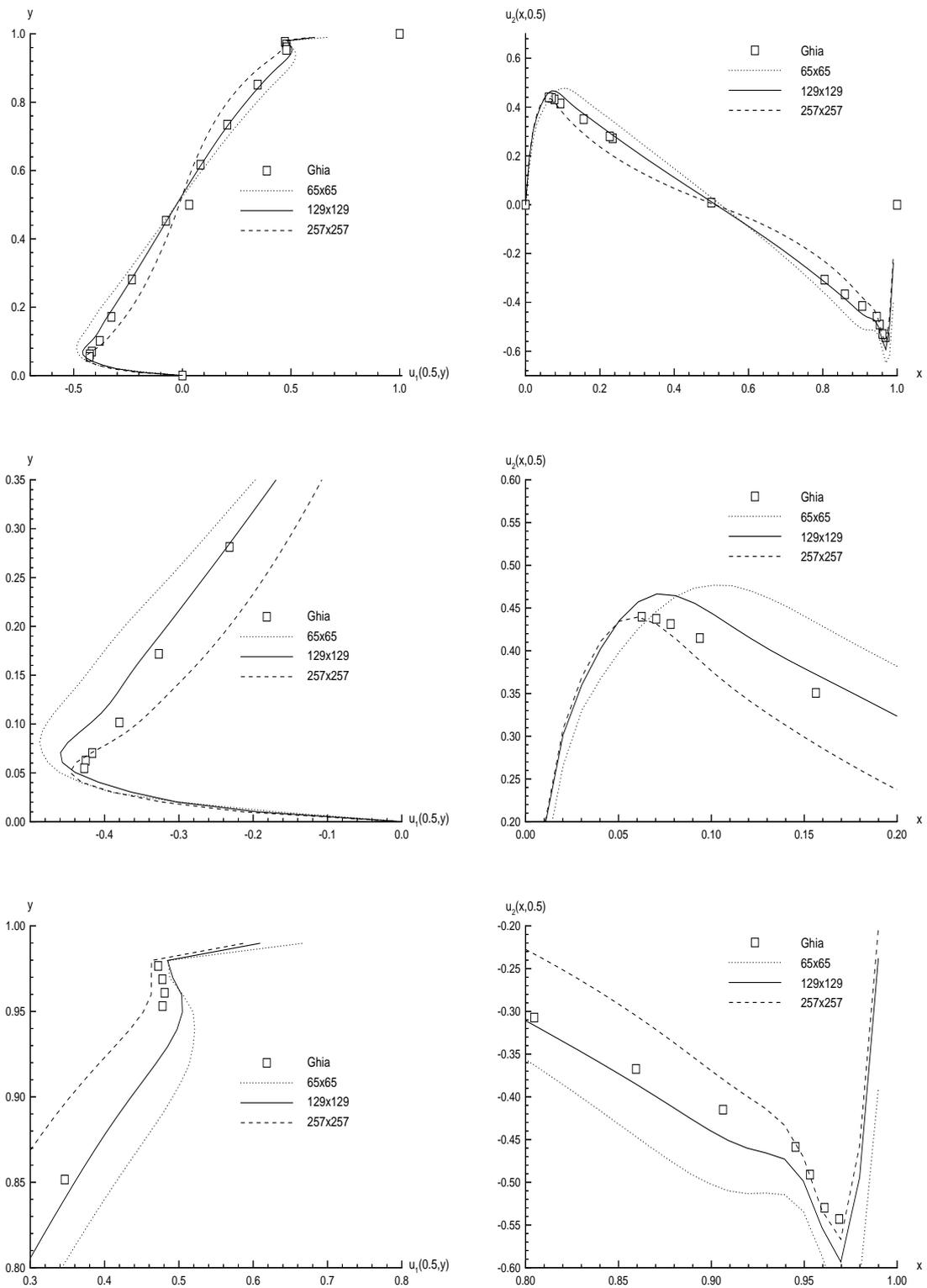


Abbildung 8.10: Vergleich der Netze bei $Re=10000$

Abbildung 8.11: Vergleich der strukturierten Netze bei $Re=1000$

Abbildung 8.12: Vergleich der strukturierten Netze bei $Re=5000$

Abbildung 8.13: Vergleich der strukturierten Netze bei $Re=10000$

Danksagung

An dieser Stelle bedanke ich mich bei allen, die zur Entstehung dieser Arbeit beigetragen haben.

Mein besonderer Dank gilt dabei Herrn Prof. Lube für die intensive und motivierende Betreuung der vorliegenden Arbeit.

Weiter danke ich Frank Christian Otto für die Hilfe bei vielen Fragen (insbesondere bei Problemen mit PNS) und für das Korrekturlesen der Arbeit.

Erwähnt werden soll auch explizit Henning Wilmers, der mich bei der Einarbeitung in PNS und bei vielen Computerproblemen tatkräftig unterstützt hat.

Weiterhin bedanke ich mich bei meinen Eltern, die durch ihre Unterstützung mein Studium möglich gemacht haben.

Als letztes bedanke ich mich besonders bei meiner Frau Susann, welche mich während des Studiums immer mit viel Geduld begleitet hat und auch mit vielen fachlichen Diskussionen eine große Hilfe für mich war.

Göttingen, September 1997

Literaturverzeichnis

- [1] H.W. Alt. *Lineare Funktionalanalysis*. Springer, 1985.
- [2] A. Auge. Numerische untersuchung einer galerkin/least-squares-fem zur simulati-on inkompressibler strömungen. TU Dresden, Dissertation, 1993.
- [3] D. Braess. *Finite Elemente*. Springer, Berlin, 1992.
- [4] F. Brezzi and M. Fortin. *Mixed and Hybrid Finite Elemente Methods*. Springer, New York, 1991.
- [5] Ph. Clement. Approximation by finite element functions using local regularization. *RAIRO*, 2:77–84, 1975.
- [6] J.-J. Droux and T.J.R. Hughes. A boundary integral modification of the galerkin least squares formulation of the stokes-problem. *Comp. methods in appl. mechanics and engineering*, 113:173–182, 1994.
- [7] L.P. Franca and S.L. Frey. Stabilized finite element methods: Ii. the incompressi-ble navier-stokes equations. *Comp. methods in appl. mechanics and engineering*, 99:209–233, 1992.
- [8] L.P. Franca, T.J.R. Hughes, and R. Stenberg. Stabilized finite element methods for the stokes problem. Technical Report 11, Helsinki university of technology, 1991.
- [9] U. Ghia, K.N. Ghia, and C.T. Shin. High-re solutions for incompressible flow using the navier-stokes equations and multigrid methods. *Journal of computational physics*, 48:387–411, 1982.
- [10] V. Girault and P.-A. Raviart. *Finite Elements for Navier-Stokes Equations*. Sprin-ger, Berlin, 1986.
- [11] D.H. Griffel. *Applied functional analysis*. Ellis Horwood Limited, Chichester, 1981.
- [12] Ch. Großmann and H.-G. Roos. *Numerik partieller Differentialgleichungen*. Teub-ner, Stuttgart, 2. edition, 1994.

- [13] W. Hackbusch. *Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen*. Teubner, Stuttgart, 1986.
- [14] D. Hempel. Finite Elemente Approximation für das Stokes-Problem und Babuska-Brezzi-Bedingung. Master's thesis, Universität Göttingen, 1996.
- [15] G. Lube. Stabilized galerkin finite element methods for convection dominated and incompressible flow problems. *Numerical analysis and mathematical modelling*, 29:85–104, 1994.
- [16] A. Quarteroni and A. Valli. *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*. Springer, Berlin, 1994.
- [17] H.-G. Roos, M. Stynes, and L. Tobiska. *Numerical methods for singularly perturbed differential equations (convection-diffusion and flow problems)*. Springer, 1996.
- [18] E. Zeidler. *Nonlinear functional analysis and its applications II/A (Linear monotone operators)*. Springer, 1990.