

# Regularisierung von $G^2$ –Hermite–Interpolanten bei Raumkurven

Diplomarbeit

vorgelegt von

Christoph Schröder

aus

Hannover

angefertigt im

Institut für Numerische und Angewandte Mathematik  
der Georg–August–Universität zu Göttingen

1998



---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2. Grundlagen</b>	<b>4</b>
2.1 Kurven . . . . .	4
2.2 Frenet–Dreibein im $\mathbb{R}^3$ . . . . .	7
2.2.1 Ableitung nach der Bogenlänge . . . . .	7
2.3 Geometrische Stetigkeit . . . . .	9
2.4 $G^1$ –Hermite–Interpolation . . . . .	11
2.5 $G^2$ –Hermite–Interpolation . . . . .	11
2.5.1 Lokalität . . . . .	11
2.5.2 Zwei–Punkt– $G^2$ –Hermite–Interpolation . . . . .	12
2.6 Kurven in Bernstein–Bézier–Darstellung . . . . .	12
2.6.1 Polynomiale Kurven . . . . .	12
2.6.2 Rationale Kurven . . . . .	14
2.7 Gradreduzierung bei Bernstein–Bézier–Kurven . . . . .	18
2.7.1 Polynomiale Kurven . . . . .	19
2.7.2 Rationale Kurven . . . . .	22
2.8 Möglichkeiten der Gradreduzierung . . . . .	26
<b>3. Geometrische Anschauung</b>	<b>28</b>
3.1 Zulässige Bereiche . . . . .	28
3.2 Die Geometrie der einzelnen Fälle . . . . .	29
3.2.1 Planare Fälle . . . . .	30
3.2.2 Nicht planare Fälle mit $s_2 = 0$ . . . . .	31
3.2.3 Echte $\mathbb{R}^3$ –Fälle ( $s_2 \neq 0$ ) . . . . .	33
3.3 Symmetrien und alternative Einteilung der Fälle . . . . .	39
3.4 Lösungsalgorithmus . . . . .	41
3.4.1 Grad 5 . . . . .	41
3.4.2 Grad 4 . . . . .	41
3.4.3 Grad 3 . . . . .	42
<b>4. Regularisierung</b>	<b>43</b>

4.1	Freiheitsgrade . . . . .	43
4.2	Grundidee und deren Umsetzung . . . . .	44
4.3	Umsetzung in den Fällen (407), (408) und (409) . . . . .	45
4.3.1	Das Verhalten zwischen $\tilde{\alpha}_0$ und $\tilde{\alpha}_1$ . . . . .	46
4.3.2	Auswahl des $\tilde{b}_2$ in (407) und (409) . . . . .	47
4.3.3	Auswahl des $\tilde{b}_2$ , wenn $u_2 s_2 < 0$ oder $\tau\sigma < 0$ . . . . .	49
4.3.4	Auswahl des $\tilde{b}_2$ in (408) . . . . .	50
4.4	Berücksichtigung der Krümmungen . . . . .	51
4.5	$\tilde{b}_2$ zu weit draußen . . . . .	54
4.6	Übergänge zwischen den Fällen . . . . .	55
<b>5.</b>	<b>Programm</b> . . . . .	<b>56</b>
5.1	Grundaufbau . . . . .	56
5.1.1	Der Ablauf von <code>singlemain</code> . . . . .	57
5.1.2	Der Ablauf von <code>lissajousmain</code> . . . . .	58
5.2	Regularisierung . . . . .	60
5.2.1	Regularisierung der Fälle (407), (408) und (409) . . . . .	60
5.3	Bemerkungen zum Programm . . . . .	61
	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b> . . . . .	<b>62</b>
	<b>Symbolverzeichnis</b> . . . . .	<b>63</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b> . . . . .	<b>64</b>

---

# Abbildungsverzeichnis

1	Neilsche Parabel . . . . .	5
2	Das allgemeine $G^2$ -Hermite-Problem im $\mathbb{R}^3$ . . . . .	18
3	Der Fall (501) . . . . .	30
4	Planare Fälle vierten Grades am Beispiel (404) . . . . .	30
5	Planare Fälle dritten Grades am Beispiel (314) . . . . .	31
6	Der Fall (504) . . . . .	32
7	Die Fälle (405), (406), (503) . . . . .	33
8	Bedeutung der Vorzeichen . . . . .	35
8	Der Fall (315) . . . . .	36
9	Der Fall (407) . . . . .	37
10	Der Fall (409) . . . . .	38
11	Der Fall (505) . . . . .	39
12	Berechnung des $\delta_i$ . . . . .	48
13	$G^2$ -Hermite-Interpolation zwischen zwei Punkten . . . . .	58
14	$G^2$ -Hermite-Interpolation bei Lissajous-Kurven . . . . .	59



# 1. Einleitung

Beim computerunterstützten Konstruieren, englisch Computer Aided Design (CAD), ergibt sich oft das Problem, daß Punkte gegeben sind und eine möglichst einfache Kurve gesucht wird, die durch diese Punkte verläuft und an diesen Punkten eventuell noch einige Daten, wie vorgegebene Tangentenrichtungen annimmt. Dieses Problem der Interpolation von Daten wird seit längerer Zeit untersucht. Es hat sich herausgestellt, daß Kurven in Bernstein–Bézier–Darstellung sehr gut dazu geeignet sind, solche Probleme zu lösen.

Wenn außer den Punkten noch Ableitungen vorgegeben werden, spricht man allgemein von Hermite–Interpolation. Dabei werden in der Praxis meist nur die erste und die zweite Ableitung berücksichtigt, weil höhere Ableitungen den Aufwand im Vergleich zum visuellen Ergebnis übermäßig vergrößern. Die Interpolationsaufgabe wird als  $G^k$ –Hermite–Interpolation (früher  $GC^k$ ) bezeichnet, wenn für die Ableitungen geometrische Größen genommen werden, wobei  $k$  die Ordnung der Ableitung ist.

Wir werden in dieser Arbeit den dreidimensionalen Raum  $\mathbb{R}^3$  betrachten, d.h. die Punkte, die geometrischen Daten und auch die interpolierenden Kurven liegen im  $\mathbb{R}^3$ . Hierin eingeschlossen ist auch die Möglichkeit, daß alle Ausgangsdaten in einer Ebene liegen. Wir sprechen dann vom planaren Fall.

Kapitel 2 liefert die schon vorher bekannten Grundlagen und führt die benötigten Begriffe ein. Wir definieren, was Kurven in Parameterdarstellung sind und geben an wie der Tangenteneinheitsvektor, der Hauptnormalenvektor und der Binormalenvektor an einem Punkt der Kurve berechnet werden. Mit diesen Vektoren wird ein Frenet–Dreibein gebildet. Desweiteren definieren wir geometrische Stetigkeit anhand der Berührordnung zweier Kurven und führen  $G^1$ – und  $G^2$ –Hermite–Interpolation ein. Weil letztere, wie wir zeigen werden, lokal betrachtet werden kann, genügt es, die  $G^2$ –Hermite–Interpolation zwischen zwei Punkten zu behandeln.

Außerdem führen wir in diesem Kapitel die Darstellung von Kurven in Bernstein–Bézier–Darstellung ein und geben deren wichtigste Eigenschaften an. Wir unterscheiden dabei zwischen polynomialen und rationalen Kurven und beweisen, daß das gegebene Zwei–Punkt– $G^2$ –Hermite–Interpolationsproblem mit einer Bernstein–Bézier–Kurve fünften Grades lösbar ist.

Der Grad der Kurve kann jedoch meistens reduziert werden. Unter welchen Bedingungen eine Gradreduzierung möglich ist, wurde ausführlich in der Arbeit von C. Schütt [Schütt 95] behandelt. Darin wurde die Lage des Frenet–Dreibeins am Endpunkt des  $G^2$ –Hermite–Interpolationsproblems zum Frenet–Dreibein am Anfangspunkt untersucht. Diese Betrachtungen mündeten in einem Algorithmus, der den kleinst möglichen Grad bestimmt und polynomiale Kurven rationalen vorzieht. Diesen Algorithmus stellen wir am Ende dieses Kapitels dar und numerieren die 20 verschiedenen Fälle durch.

Im dritten Kapitel betrachten wir das Problem der Gradreduzierung geometrisch. Dazu geben wir an, in welchen Bereichen sich die sechs Kontrollpunkte einer Bernstein–Bézier–Kurve fünften Grades befinden dürfen. Für den zweiten und den vorletzten Kontrollpunkt ist dieser Bereich ein Strahl, der vom Anfangspunkt in bzw. vom Endpunkt entgegen der jeweiligen Tangentialrichtung ausgeht. Für den dritten und den drittletzten ist dieser Bereich eine offene Halbebene, die vom jeweiligen Tangentialvektor und Hauptnormalenvektor (in positiver Richtung) am Anfangs- bzw. Endpunkt aufgespannt wird. Das Problem der Gradreduzierung werden wir auf das Schneiden dieser Mengen reduzieren. So besteht die Möglichkeit, das Interpolationsproblem mit einer Kurve vierten Grades zu lösen genau dann, wenn die Bereiche für den dritten und den vierten Kontrollpunkt eine nichtleere Schnittmenge haben und der Grad drei ist genau dann möglich, wenn die Bereiche des zweiten und des vierten Kontrollpunkts und die Bereiche des dritten und fünften Kontrollpunkts jeweils nichtleere Schnittmengen haben. Die so entstandenen Schnittmengen sind die Bereiche für die neuen Kontrollpunkte. Wir führen dies exemplarisch an einigen Fällen vor und gehen dabei besonders auf die „echten“  $\mathbb{R}^3$ –Fälle ein.

Das Kapitel schließt mit einer Betrachtung zu Symmetrien zwischen den Fällen und einer alternativen Einteilung der Fälle, bei der wir die Form der Schnittmengen zu Grunde legen und so auf neun verschiedene Fälle kommen. Außerdem geben wir einen Algorithmus an, mit dem Kurven zur Lösung des  $G^2$ –Hermite–Interpolationsproblems bestimmt werden können. Dieser Algorithmus enthält jedoch noch Freiheitsgrade.

Wie man diese Freiheitsgrade geschickt wählen kann, zeigen wir in Kapitel 4. Die Grundidee unserer Regularisierung ist dabei, den Abstand zwischen dem ersten und dem zweiten und zwischen dem letzten und dem vorletzten Kontrollpunkt gleich der Bogenlänge, geteilt durch den Grad der Kurve, zu setzen. Uneingeschränkt kann dies jedoch nur bei Kurven fünften Grades und im planaren Fall bei Kurven vierten Grades umgesetzt werden. Deshalb gehen wir auf die häufig vorkommenden Raumkurven vierten Grades genauer ein.



Bei diesen Kurven ist der mittlere Kontrollpunkt auf einer Geraden zu wählen. Dabei ist darauf zu achten, daß dieser Kontrollpunkt nicht zu weit vom Anfangs- und vom Endpunkt entfernt liegt. Wir stellen eine Strategie vor, wie dieses umgesetzt werden kann und gehen auf mögliche Probleme ein, wobei wir speziell die gegebenen Krümmungen berücksichtigen. Am Ende dieses Kapitels gehen wir noch auf die Übergänge zwischen den Fällen ein.

Im fünften Kapitel stellen wir ein in der Programmiersprache C geschriebenes Computerprogramm vor, das die Überlegungen dieser Arbeit umsetzt. Es liest die  $G^2$ -Daten ein oder berechnet diese an einer vorgegebenen Kurve, mit der die Ergebnisse verglichen werden sollen, überprüft, in welchem Fall man sich befindet, wählt die freien Parameter, berechnet eine Kurve, die das Problem löst und gibt die Kurvenpunkte zum späteren Plotten mit GNUPLOT in Dateien aus. Das Programm ist im Anhang aufgelistet.

Für die Vergabe des interessanten Themas und die hervorragende Betreuung bei der Erstellung der Arbeit danke ich Herrn Prof. Dr. Robert Schaback. Außerdem danke ich meinen Eltern für ihre Unterstützung über die ganzen Jahre und all den Menschen, die mich immer wieder aufgemuntert haben, weiterzumachen, insbesondere Svenja, Ulli, Rolf und Regina.

## 2. Grundlagen

Die im weiteren Verlauf der Arbeit benötigten Begriffe werden in diesem Kapitel vorgestellt und einige ihrer Eigenschaften hergeleitet.

### 2.1 Kurven

In der Mathematik kann man Kurven auf zwei Weisen definieren: als Abbildungen oder als Bilder von Abbildungen. Im Computer Aided Design betrachtet man vor allem Bilder, weswegen wir hier die zweite Form der Definition benutzen.

**Definition 2.1** *Eine Kurve in Parameterdarstellung bzw. (parametrisierte) Kurve im  $\mathbb{R}^d$  ist das Bild eines reellen Intervalls unter einer stetigen, lokal injektiven Abbildung.*

Bezeichnen wir die Kurve mit  $K$ , das Intervall mit  $D$  und ist  $f$  die Abbildung, so ist

$$K = f(D)$$

und für alle *Kurvenpunkte*  $y \in K$  gilt  $y = f(t)$  für ein  $t \in D$ . Dabei ist  $t$  der zu  $y$  gehörende *Parameter*. Die Funktion  $f$  heißt *Parameterdarstellung* und das Intervall  $D$  *Parameterbereich* der Kurve. Die Parameterdarstellung  $f$  ist eine vektorwertige Funktion des Intervalls  $D$  in den  $\mathbb{R}^d$ , d.h. jede Komponente von  $f$  ist eine skalare Funktion, die  $D$  in die reellen Zahlen abbildet. Ist die Parameterdarstellung einmal stetig differenzierbar, dann bezeichnen wir die Ableitung als *Tangentialvektor*. Die Parameterdarstellung heißt *regulär*, wenn sie mindestens einmal stetig differenzierbar ist und ihr Tangentialvektor nirgends gleich dem Nullvektor ist. Besitzt eine Kurve eine reguläre Parameterdarstellung, so nennen wir die Kurve selbst *regulär*. Im folgenden werden nur reguläre Kurven betrachtet, weil nichtreguläre Kurven *Spitzen* haben können, in denen der Tangentialvektor notwendig verschwindet. Dazu betrachten wir folgendes Beispiel.

**Beispiel 2.2 (Neilsche Parabel)** *Wir untersuchen die Kurve mit der Parameterdarstellung*

$$f(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}.$$

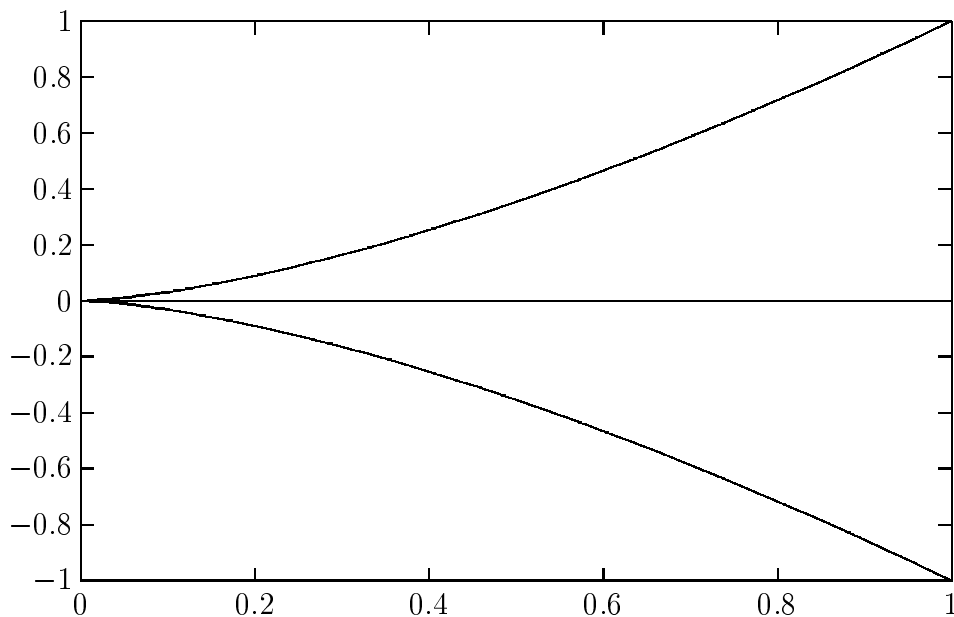


Abbildung 1: Neilsche Parabel

Sie ist zwar unendlich oft differenzierbar, hat aber wegen

$$\frac{d}{dt}f(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

in  $f(0)$  einen singulären Punkt, der gleichzeitig eine Spitze ist. Diese Kurve ist in Abbildung 1 dargestellt.

Dieses Beispiel zeigt, daß für das „schöne“ Aussehen einer Kurve Regularität wichtiger ist als Differenzierbarkeit alleine. Hat eine Kurve eine hinreichend oft differenzierbare Parameterdarstellung, so nennen wir sie *glatt*.

Eine Abbildung  $\varphi$  bezeichnen wir als *Parametertransformation*, wenn sie eine Parameterdarstellung  $f$  in eine Parameterdarstellung  $f \circ \varphi$  überführt. Eine Parametertransformation heißt *regulär*, wenn sie einmal stetig differenzierbar ist und ihre Ableitung nirgends verschwindet. Sie ist *orientierungserhaltend*, wenn sie monoton steigend ist. Eine einmal stetig differenzierbare Parametertransformation ist genau dann orientierungserhaltend, wenn ihre Ableitung überall nicht-negativ ist. Zwei Parameterdarstellungen einer Kurve heißen *äquivalent*, wenn es zwischen ihnen eine bijektive Parametertransformation gibt. Wir betrachten hier nur bijektive, reguläre und orientierungserhaltende Parametertransformationen.

Eine wichtige Größe bei Kurven ist ihre Länge, die wir jetzt definieren.

**Definition 2.3** Die Bogenlänge  $s$  einer Kurve mit der Parameterdarstellung  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $t \mapsto f(t)$  ist durch

$$s(t_0) := \int_a^{t_0} \|\dot{f}(t)\|_2 dt, \quad t_0 \in [a, b],$$

definiert. Dabei ist  $\dot{f} = \frac{d}{dt}f$ .

Die Bedeutung der Bogenlänge dokumentiert der folgende Satz.

**Satz 2.4** Die Bogenlänge und die Richtung des Tangentialvektors sind invariant gegen Umparametrisierung der Kurve.

**Beweis:** Sei  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,  $t \mapsto f(t)$  eine reguläre Parameterdarstellung einer Kurve und  $\varphi : [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow [a, b]$ ,  $\tilde{t} \mapsto t$  eine bijektive, reguläre und orientierungserhaltende Parametertransformation. Dann ist  $\tilde{f} := f \circ \varphi : [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow \mathbb{R}^d$  eine zu  $f$  äquivalente Parameterdarstellung derselben Kurve. Sei  $s$  die Bogenlänge von  $f$ ,  $\tilde{s}$  die Bogenlänge von  $\tilde{f}$  und  $\varphi(\tilde{t}_0) = t_0$ . Da  $\varphi$  orientierungserhaltend ist, gilt  $\dot{\varphi}(\tilde{t}) > 0$  für alle  $\tilde{t} \in [\tilde{a}, \tilde{b}]$ . Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \tilde{s}(\tilde{t}_0) &= \int_{\tilde{a}}^{\tilde{t}_0} \|\dot{\tilde{f}}(\tilde{t})\|_2 d\tilde{t} \\ &= \int_{\tilde{a}}^{\tilde{t}_0} \|\dot{f}(\varphi(\tilde{t}))\|_2 |\dot{\varphi}(\tilde{t})| d\tilde{t} \\ &= \int_{\tilde{a}}^{\tilde{t}_0} \|\dot{f}(\varphi(\tilde{t}))\|_2 \dot{\varphi}(\tilde{t}) d\tilde{t} \\ &= \int_a^{t_0} \|\dot{f}(t)\|_2 dt \\ &= s(t_0), \end{aligned}$$

was die Invarianz der Bogenlänge zeigt. Für die Tangentialvektoren folgt

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{f}}(\tilde{t}) &= \dot{f}(\varphi(\tilde{t})) \dot{\varphi}(\tilde{t}) \\ &= \dot{f}(t) \dot{\varphi}(\tilde{t}), \end{aligned}$$

womit gezeigt ist, daß die Richtungen der Vektoren gleich sind. □

Die Bogenlänge kann auch als Parameter benutzt werden. Diesen Parameter nennen wir *natürlichen Parameter* und die Kurve ist dann *bogenlängenparametrisiert*. Für theoretische Betrachtungen ist die Bogenlängenparametrisierung sehr gut geeignet und findet daher in vielen Beweisen Verwendung. In der Praxis ist sie jedoch fast nie bekannt und numerisch schwer zu berechnen.

In Zukunft bezeichnen wir Ableitungen nach der Bogenlänge immer durch Striche und Ableitungen nach beliebigem Parameter durch Punkte, d.h.

$$f' := \frac{d}{ds}f$$

und

$$\dot{f} := \frac{d}{dt}f.$$

## 2.2 Frenet–Dreibein im $\mathbb{R}^3$

Das (*begleitende*) *Frenet–Dreibein* ist ein lokales auf der Kurve wanderndes orthonormales Koordinatensystem, das von Tangentialeinheitsvektor, Hauptnormalenvektor und Binormalenvektor gebildet wird. Dabei setzen wir hier voraus, daß die Parameterdarstellung der Kurve mindestens dreimal stetig differenzierbar ist und die ersten drei Ableitungen nirgends verschwinden. Wir können es dann durch Ableitung nach der Bogenlänge oder Orthonormalisieren der notwendig linear unabhängigen ersten drei Ableitungen nach beliebigem Parameter erhalten. Hier wählen wir den ersten Weg.

### 2.2.1 Ableitung nach der Bogenlänge

Wird die Parameterdarstellung  $f$  mit beliebigem Parameter  $t$  einmal nach der Bogenlänge abgeleitet, so erhalten wir mit  $ds/dt = \|\dot{f}(t)\|_2$  den *Tangenteneinheitsvektor*, kurz *Tangentenvektor*,

$$\begin{aligned} r(t) &= \frac{d}{ds}f(t) \\ &= \frac{d}{dt}f(t) \cdot \frac{dt}{ds} \\ &= \frac{\dot{f}(t)}{\|\dot{f}(t)\|_2} \end{aligned}$$

im Punkt  $f(t)$ . Wir nutzen hier  $t$  als Parameter und bezeichnen deswegen den Tangentenvektor nicht wie sonst in der Differentialgeometrie üblich mit  $t$ .

Durch zweimaliges Ableiten von  $f$  nach der Bogenlänge bekommen wir den *Krümmungsvektor*

$$\begin{aligned}
 \kappa(t)n(t) &= \frac{d^2}{ds^2}f(t) \\
 &= \frac{d}{ds}r(t) \\
 &= \frac{d}{dt} \frac{\dot{f}(t)}{\|\dot{f}(t)\|_2} \cdot \frac{dt}{ds} \\
 &= \frac{\ddot{f}(t) \|\dot{f}(t)\|_2 - \dot{f}(t) \frac{2\langle \dot{f}(t), \ddot{f}(t) \rangle}{2\|\dot{f}(t)\|_2}}{\|\dot{f}(t)\|_2^2} \cdot \frac{1}{\|\dot{f}(t)\|_2} \\
 &= \frac{\|\dot{f}(t)\|_2^2 \ddot{f}(t) - \langle \dot{f}(t), \ddot{f}(t) \rangle \dot{f}(t)}{\|\dot{f}(t)\|_2^4},
 \end{aligned}$$

wobei  $\kappa(t) \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  die *Krümmung* und  $n(t)$  der *Hauptnormalenvektor* der Kurve im Punkt  $f(t)$  ist. Die Krümmung ist durch

$$\kappa(t) := \|f''(t)\|_2 = \frac{\|\dot{f}(t) \times \ddot{f}(t)\|_2}{\|\dot{f}(t)\|_2^3}$$

definiert. Sie ist ein Maß für die Abweichung der Kurve vom geraden Verlauf. Verschwindet die Krümmung auf dem gesamten Parameterbereich, so ist die Kurve eine Gerade. Der Hauptnormalenvektor ist ein Einheitsvektor und steht auf dem Tangentenvektor senkrecht, was durch einfache Rechnung nachgewiesen werden kann.

Bilden wir das Vektorprodukt von Tangentenvektor und Krümmungsvektor, so erhalten wir den Vektor

$$\begin{aligned}
 \kappa(t)\eta(t) &= r(t) \times \kappa(t)n(t) \\
 &= \frac{\dot{f}(t)}{\|\dot{f}(t)\|_2} \times \frac{\|\dot{f}(t)\|_2^2 \ddot{f}(t) - \langle \dot{f}(t), \ddot{f}(t) \rangle \dot{f}(t)}{\|\dot{f}(t)\|_2^4} \\
 &= \frac{\dot{f}(t) \times \|\dot{f}(t)\|_2^2 \ddot{f}(t)}{\|\dot{f}(t)\|_2^5}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{\dot{f}(t) \times \ddot{f}(t)}{\|\dot{f}(t)\|_2^3}.$$

Dabei ist

$$\eta(t) := r(t) \times n(t) = \frac{\dot{f}(t) \times \ddot{f}(t)}{\|\dot{f}(t) \times \ddot{f}(t)\|_2}$$

der *Binormalenvektor* der Kurve im Punkt  $f(t)$ . Er ist orthogonal zur *Schmiegeebene*  $S(t)$ , die von Tangentenvektor und Hauptnormalenvektor aufgespannt wird, und heißt hier nicht wie üblich  $b$ , da wir später die Kontrollpunkte der Bernstein–Bézier–Kurven mit  $b$  bezeichnen. Damit ist das Frenet–Dreibein im  $\mathbb{R}^3$  mit den Vektoren  $r$ ,  $n$  und  $\eta$  vollständig hergeleitet. Es läßt sich problemlos zum *Frenet–d–Bein* im  $\mathbb{R}^d$  verallgemeinern.

Der Vollständigkeit halber wollen wir hier noch die *Torsion* oder *Windung* einer Kurve erwähnen. Man kann sie mit Hilfe der dritten Ableitungen definieren, und sie ist ein Maß für die Abweichung der Kurve vom ebenen Verlauf, d.h. eine Kurve mit überall verschwindender Torsion ist eine planare Kurve.

## 2.3 Geometrische Stetigkeit

Der übliche Stetigkeitsbegriff ist für Anwendungen im CAD nicht geeignet, weil er von der jeweiligen Parametrisierung abhängt. Deshalb entstand im Laufe der letzten Jahre eine Vielzahl von parametrisierungsinvarianten Stetigkeitsbegriffen, meistens *geometrische* oder *visuelle Stetigkeit* genannt, aber auch *Frenet–Bein–*, *Tangenten–*, *Krümmungs–* und *Torsionsstetigkeit*. Für weitere Einzelheiten sei auf [Hoschek & Lasser 92] verwiesen. Wir benutzen hier eine Definition der geometrischen Stetigkeit, die auf den Begriff der Berührordnung zurückgeht.

**Definition 2.5** Zwei Kurven mit den Parameterdarstellungen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$  und  $g : [\tilde{a}, \tilde{b}] \rightarrow \mathbb{R}^d$  bilden im Punkt  $f(b) = g(\tilde{a})$  einen  $C^k$ -stetigen Übergang, wenn

$$f^{(j)}(b) = g^{(j)}(\tilde{a})$$

für alle  $j = 0, \dots, k$  gilt.

Wir sagen auch die beiden Kurven *berühren* sich im gemeinsamen Punkt von der *Ordnung*  $k$ . Diese Art der Stetigkeit wird im allgemeinen bei Parametertransformation zerstört, weil die Ableitungen der Parametertransformation wegen der Kettenregel als weitere Faktoren auftauchen. Abhilfe schafft die geometrische Stetigkeit.

**Definition 2.6** *Der Übergang zweier Kurven hat geometrische Stetigkeit der Ordnung  $k$  (kurz  $G^k$ ), wenn es für eine der beiden Kurven eine Reparametrisierung gibt, so daß der Übergang  $C^k$  ist.*

Die Reparametrisierung kann bei beiden Kurven auch nach der Bogenlänge erfolgen. Dann sprechen wir von *Bogenlängenstetigkeit*. Der folgende Satz zeigt die Beziehungen verschiedener Stetigkeitsbegriffe zueinander:

**Satz 2.7** *Für den Übergang zweier sich berührender Kurven im  $\mathbb{R}^d$  sind die vier Eigenschaften*

- (a)  $C^2$ -Stetigkeit nach der Bogenlänge (Berührordnung 2),
- (b)  $G^2$ ,
- (c) Krümmungsstetigkeit mit stetig varriierendem Frenet-Dreibein

sowie

- (d) Stetigkeit der Vektoren  $r$  und  $\kappa n$

äquivalent.

**Beweis:**

(a)  $\implies$  (b): Das folgt aus der Definition von  $G^k$ .

(b)  $\implies$  (a): Sind beide Kurven so parametrisiert, daß der Übergang  $C^k$  ist, können wir beide Kurven auch nach der Bogenlänge parametrisieren und erhalten (a).

(a)  $\iff$  (d): Dieses folgt aus Unterabschnitt 2.2.1.

(c)  $\implies$  (d): Diese Implikation ist klar, da (d) nur eine Einschränkung von (c) ist.

(d)  $\implies$  (c): Aus der Stetigkeit von  $\kappa n$  folgt Krümmungsstetigkeit und aus der Stetigkeit von  $r$  und  $n$  folgt die Stetigkeit von  $\eta$ .  $\square$

Später benutzen wir (d) als Charakterisierung von  $G^2$ .



## 2.4 $G^1$ -Hermite-Interpolation

Bei der *Hermite-Interpolation* werden neben den Interpolationspunkten auch Ableitungen vorgegeben, die interpoliert werden sollen.  $C^1$ -Hermite bedeutet, daß die erste Ableitung bekannt ist, und  $G^1$ , daß diese Ableitung nicht von der Parametrisierung abhängt. Deshalb bietet sich der Tangentenvektor  $r$  an, wie wir im Satz 2.4 gesehen haben. Damit erhalten wir als  $G^1$ -Hermite-Interpolationsaufgabe:

Gegeben sind:

- Interpolationspunkte  $y_i$ ,  $y_i \neq y_j$  für  $i \neq j$ , und
- Tangentenvektoren  $r_i$ ,  $\|r_i\|_2 = 1$ ,

für  $i = 0, \dots, n$ . Dazu soll eine Interpolante gefunden werden, die an den Interpolationspunkten mindestens  $G^1$  ist.

Wir gehen in dieser Arbeit noch ein Stück weiter und fordern  $G^2$ .

## 2.5 $G^2$ -Hermite-Interpolation

Bei der  $C^2$ -Hermite-Interpolation sind auch die zweiten Ableitungen bekannt. Da diese Ableitungen bei  $G^2$  nicht von der Parametrisierung abhängen dürfen, bieten sich Tangentenvektor und Produkt aus Krümmung und Hauptnormalenvektor an, wie in Abschnitt 2.3 gezeigt wurde. Damit ergibt sich hier folgendes Problem:

Gegeben sind:

- Interpolationspunkte  $y_i$ ,  $y_i \neq y_j$  für  $i \neq j$ ,
- Tangentenvektoren  $r_i$ ,  $\|r_i\|_2 = 1$ , und
- Krümmungsvektoren  $\kappa_i n_i$

für  $i = 0, \dots, n$ . Zu diesen Daten soll eine Interpolante gefunden werden, die an den Interpolationspunkten mindestens  $G^2$  ist. Hier verwenden wir dafür stückweise rational quintische Kurven in Bernstein-Bézier-Darstellung, bei denen wir versuchen, den Grad zu reduzieren.

### 2.5.1 Lokalität

$G^2$ -Stetigkeit ist nach Satz 2.7 äquivalent zur Berührordnung 2, und diese ist eine transitive Eigenschaft. Deswegen ist es hinreichend zu fordern, daß die Interpolante an zwei

benachbarten Interpolationspunkten einen  $G^2$ -Übergang zu der Kurve hat, von der die Interpolationsdaten stammen. Damit erhalten wir ein lokales Problem zwischen zwei Punkten, das unabhängig von dem Rest der Interpolationsaufgabe gelöst werden kann. Die Aufgabe reduziert sich demnach zu einer Zwei-Punkt- $G^2$ -Hermite-Interpolation, die im nächsten Unterabschnitt behandelt wird.

### 2.5.2 Zwei-Punkt- $G^2$ -Hermite-Interpolation

Durch die im vorherigen Paragraphen erläuterte Lokalität kann das Problem in mehrere Teilprobleme zerlegt werden. Es genügt demnach, Zwei-Punkt- $G^2$ -Hermite-Interpolation zu untersuchen. Desweiteren wollen wir uns auf Kurven mit nichtverschwindender Krümmung beschränken. Daher hat das zu lösende Problem die Gestalt:

Gegeben sind:

- Interpolationspunkte  $y_0 \neq y_1 \in \mathbb{R}^3$ ,
- Tangentenrichtungen  $r_0, r_1 \in \mathbb{R}^3$  mit  $\|r_i\|_2 = 1$ ,  $i = 0, 1$ , und
- Krümmungsvektoren  $\kappa_0 n_0, \kappa_1 n_1$  mit Krümmungen  $\kappa_i \in \mathbb{R}_{>0}$  an  $y_i$  und zugehörigen Hauptnormalenvektoren  $n_i$  mit  $\|n_i\|_2 = 1$  sowie  $n_i \perp r_i$ ,  $i = 0, 1$ .

Gesucht ist als Interpolante eine polynomiale oder rationale Kurve in Bernstein-Bézier-Darstellung mit möglichst kleinem Grad.

## 2.6 Kurven in Bernstein-Bézier-Darstellung

Wir werden nun polynomiale und rationale Bernstein-Bézier-Kurven im  $\mathbb{R}^3$  einführen und deren grundlegende Eigenschaften angeben, wobei die meisten dieser Eigenschaften nicht bewiesen werden. Es wird stattdessen auf die reichlich vorhandene Literatur zu diesem Thema verwiesen. Polynomiale Kurven sind dabei eigentlich nur rationale Kurven, bei denen alle Gewichte gleich eins gewählt wurden. Wir werden polynomiale Kurven dennoch einzeln betrachten.

### 2.6.1 Polynomiale Kurven

Grundlegende Eigenschaft der Bernstein-Bézier-Darstellung von Kurven ist, daß die Kurven durch *Kontrollpunkte*  $b_i \in \mathbb{R}^d$  bestimmt sind.

**Definition 2.8** Seien  $b_i \in \mathbb{R}^d$ ,  $i = 0, \dots, n$ , und seien die Bernstein-Polynome  $B_i^{(n)} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$B_i^{(n)}(t) := \binom{n}{i} \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^i \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{n-i}.$$

Dann bezeichnet man eine Kurve mit der Parameterdarstellung  $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,

$$x(t) = \sum_{i=0}^n B_i^{(n)}(t) b_i,$$

als polynomiale Kurve in Bernstein-Bézier-Darstellung, kurz Bernstein-Bézier-Kurve oder -Polynom, des Grades  $n$ . Die  $b_i$  heißen Kontroll- bzw. Bézierpunkte. Die Parameterdarstellung wird bezeichnet mit  $BB[b_0, \dots, b_n]_{[a,b]}(t)$  bzw. mit  $BB[b_0, \dots, b_n](t)$ , wenn klar ist, welches Intervall der Parameterbereich der Kurve ist.

Wir geben jetzt die einfachsten Eigenschaften dieser Kurven an.

**Satz 2.9** Die Abbildung  $x := BB[b_0, \dots, b_n]_{[a,b]}$  hat folgende Eigenschaften:

- $\frac{d^r}{dt^r} x(t) = \frac{n!}{(n-r)!(b-a)^r} \sum_{j=0}^{n-r} B_j^{(n-r)}(t) \sum_{k=0}^r (-1)^{r-k} \binom{r}{k} b_{j+k}$ ,  $0 \leq r \leq n$ ;
- $x(a) = b_0$ ,
- $x(b) = b_n$ ;
- $\dot{x}(a) = \frac{n}{b-a}(b_1 - b_0)$ ,
- $\dot{x}(b) = \frac{n}{b-a}(b_n - b_{n-1})$ ;
- $r_x(a) = \frac{b_1 - b_0}{\|b_1 - b_0\|_2}$ ,
- $r_x(b) = \frac{b_n - b_{n-1}}{\|b_n - b_{n-1}\|_2}$ ;
- $\ddot{x}(a) = \frac{n(n-1)}{(b-a)^2}(b_2 - 2b_1 + b_0)$ ,
- $\ddot{x}(b) = \frac{n(n-1)}{(b-a)^2}(b_n - 2b_{n-1} + b_{n-2})$ ;
- $\kappa_x(a) = \frac{n-1}{n} \frac{\|(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1)\|_2}{\|b_1 - b_0\|_2^3}$ ,

$$\begin{aligned} \kappa_x(b) &= \frac{n-1}{n} \frac{\|(b_n - b_{n-1}) \times (b_{n-1} - b_{n-2})\|_2}{\|b_n - b_{n-1}\|_2^3}; \\ \bullet \kappa_x(a)n_x(a) &= \frac{n-1}{n} \frac{1}{\|b_1 - b_0\|_2^4} \left( \|b_1 - b_0\|_2^2 (b_2 - b_1) - \langle b_1 - b_0, b_2 - b_1 \rangle (b_1 - b_0) \right), \\ \kappa_x(b)n_x(b) &= \frac{n-1}{n} \frac{1}{\|b_n - b_{n-1}\|_2^4} \left( \langle b_n - b_{n-1}, b_{n-1} - b_{n-2} \rangle (b_n - b_{n-1}) \right. \\ &\quad \left. - \|b_n - b_{n-1}\|_2^2 (b_{n-1} - b_{n-2}) \right). \end{aligned}$$

Die Beweise zu den ersten Eigenschaften sind in fast jedem Buch über *Computer Aided (Geometric) Design*, z.B. in [Hoschek & Lasser 92] zu finden. Außerdem sei hier auf [Schütt 95] verwiesen.

An den Formeln kann man ablesen, daß die  $GC^2$ -Daten *Tangenteneinheitsvektor*, *Krümmung* und *Krümmung · Hauptnormalenvektor* unabhängig sind vom Definitionsintervall. Außerdem sieht man, daß der Anfangspunkt nur von  $b_0$ , die Tangentenrichtung an diesem Punkt nur von  $b_0$  und  $b_1$  und die Schmiegeebe und die Krümmung nur von  $b_0$ ,  $b_1$  und  $b_2$  abhängen. Analoges gilt für den Endpunkt und  $b_5$ ,  $b_4$  und  $b_3$ . Wir werden dies im nächsten Kapitel noch ausführlich beschreiben.

Aufgrund dieser Eigenschaften gilt, daß unser  $G^2$ -Hermite-Problem mit einer quintischen Kurve in Bernstein-Bézier-Darstellung lösbar ist. Wir werden diesen Satz gleich allgemein für polynomiale und rationale Kurven formulieren.

## 2.6.2 Rationale Kurven

Wir werden hier insofern eine etwas eingeschränkte Definition benutzen, als wir nur positive Gewichte zulassen, da in der Praxis meist nur Kurven mit dieser Eigenschaft in Gebrauch sind.

**Definition 2.10** Eine rationale Kurve in Bernstein-Bézier-Darstellung, kurz rationale Bernstein-Bézier-Kurve, des Grades  $n$  im  $\mathbb{R}^d$  ist eine Kurve mit der Parameterdarstellung  $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$ ,

$$x(t) = \frac{BB[w_0 b_0, \dots, w_n b_n]_{[a,b]}(t)}{BB[w_0, \dots, w_n]_{[a,b]}(t)} = \frac{\sum_{i=0}^n B_i^{(n)}(t) w_i b_i}{\sum_{i=0}^n B_i^{(n)}(t) w_i},$$

mit Kontroll- bzw. Bézierpunkten  $b_i \in \mathbb{R}^d$  und Gewichten  $w_i \in \mathbb{R}$ ,  $w_i > 0$ ,  $i = 0, \dots, n$ . Bezeichnet wird die Parameterdarstellung mit  $RB[w_0, b_0, \dots, w_n, b_n]_{[a,b]}(t)$  bzw. mit  $RB[w_0, b_0, \dots, w_n, b_n](t)$ , wenn klar ist, auf welchem Intervall sie definiert ist.

Aus der Definition der Bernstein-Polynome und der Positivität der Gewichte folgt das Nichtverschwinden des Nenners und damit die Wohldefiniertheit der rationalen Funktion für alle Werte  $t$  aus dem Definitionsintervall. Weiterhin bilden die Bernstein-Polynome eine *Zerlegung der Eins* auf dem Definitionsintervall. Aus diesem Grund ergibt sich eine polynomiale Kurve, wenn sämtliche Gewichte  $w_i$  gleich sind, da der Nenner dann eine konstante Funktion ist.

Wir werden jetzt wieder einige einfache Eigenschaften dieser Kurven angeben.

**Satz 2.11** *Die Abbildung  $x := RB[w_0, b_0, \dots, w_n, b_n]_{[a,b]}$  hat folgende Eigenschaften:*

- $x(a) = b_0$ ,
- $x(b) = b_n$ ,
- $\dot{x}(a) = \frac{n}{b-a} \frac{w_1}{w_0} (b_1 - b_0)$ ,
- $\dot{x}(b) = \frac{n}{b-a} \frac{w_{n-1}}{w_n} (b_n - b_{n-1})$ ;
- $r_x(a) = \frac{b_1 - b_0}{\|b_1 - b_0\|_2}$ ,
- $r_x(b) = \frac{b_n - b_{n-1}}{\|b_n - b_{n-1}\|_2}$ ;
- $\ddot{x}(a) = \frac{n(n-1)}{(b-a)^2} \frac{w_2}{w_0} (b_2 - b_0) + 2 \frac{n}{(b-a)^2} \frac{w_1}{w_0} \left(1 - n \frac{w_1}{w_0}\right) (b_1 - b_0)$ ,
- $\ddot{x}(b) = \frac{n(n-1)}{(b-a)^2} \frac{w_{n-2}}{w_n} (b_{n-2} - b_n) + 2 \frac{n}{(b-a)^2} \frac{w_{n-1}}{w_n} \left(1 - n \frac{w_{n-1}}{w_n}\right) (b_{n-1} - b_n)$ ;
- $\kappa_x(a) = \frac{n-1}{n} \frac{w_0 w_2}{w_1^2} \frac{\|(b_1 - b_0) \times (b_2 - b_1)\|_2}{\|b_1 - b_0\|_2^3}$ ,
- $\kappa_x(b) = \frac{n-1}{n} \frac{w_n w_{n-2}}{w_{n-1}^2} \frac{\|(b_n - b_{n-1}) \times (b_{n-1} - b_{n-2})\|_2}{\|b_n - b_{n-1}\|_2^3}$ ;
- $\kappa_x(a) n_x(a) = \frac{n-1}{n} \frac{w_0 w_2}{w_1^2} \frac{1}{\|b_1 - b_0\|_2^4} \left( \|b_1 - b_0\|_2^2 (b_2 - b_1) - \langle b_1 - b_0, b_2 - b_1 \rangle (b_1 - b_0) \right)$ ,

$$\kappa_x(b)n_x(b) = \frac{n-1}{n} \frac{w_n w_{n-2}}{w_{n-1}^2} \frac{1}{\|b_n - b_{n-1}\|_2^4} \left( \langle b_n - b_{n-1}, b_{n-1} - b_{n-2} \rangle (b_n - b_{n-1}) - \|b_n - b_{n-1}\|_2^2 (b_{n-1} - b_{n-2}) \right).$$

Für den Beweis dieses Satzes verweisen wir auf [Schütt 95].

Auch hier kann man an den Formeln ablesen, daß die  $k$ -te Ableitung für  $k = 0, 1, 2$  an den Randpunkten nur von den ersten bzw. letzten  $k+1$  Kontrollpunkten abhängt. Damit können wir beweisen, daß unser  $G^2$ -Hermite-Problem im rationalen wie im polynomialen Fall mit einer quintischen Kurve in Bernstein-Bézier-Darstellung lösbar ist.

**Satz 2.12** *Sind die  $GC^2$ -Hermite-Daten  $y_0, y_1, r_0, r_1, n_0, n_1 \in \mathbb{R}^3$  und  $\kappa_0, \kappa_1 \in \mathbb{R}_{>0}$  gegeben, so erfüllt die quintische Kurve mit der Parameterdarstellung  $x(t) := RB[w_0, b_0, \dots, w_5, b_5]_{[a,b]}(t)$  bzw.  $x(t) := BB[b_0, \dots, b_5]_{[a,b]}(t)$  diese Daten, d.h. es gilt*

- $x(a) = y_0, \quad x(b) = y_1,$
- $r_x(a) = r_0, \quad r_x(b) = r_1,$
- $\kappa_x(a)n_x(a) = \kappa_0 n_0, \quad \kappa_x(b)n_x(b) = \kappa_1 n_1,$

genau dann, wenn folgende Beziehungen bestehen:

- $b_0 = y_0,$
- $b_1 = y_0 + \alpha_0 r_0,$
- $b_2 = y_0 + \beta_0 r_0 + \gamma_0 n_0,$
- $b_3 = y_1 - \beta_1 r_1 + \gamma_1 n_1,$
- $b_4 = y_1 - \alpha_1 r_1,$
- $b_5 = y_1$

mit

$$\alpha_i > 0, \beta_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, \quad w_0 w_2 \gamma_0 = \frac{5}{4} \kappa_0 w_1^2 \alpha_0^2, \quad w_3 w_5 \gamma_1 = \frac{5}{4} \kappa_1 w_4^2 \alpha_1^2$$

im rationalen Fall und mit

$$\alpha_i > 0, \beta_i \in \mathbb{R}, \gamma_i = \frac{5}{4} \kappa_i \alpha_i^2, \quad i = 0, 1$$

im polynomialen Fall.

**Beweis:** Um die Erfüllung der vorgegebenen Daten zu zeigen, brauchen wir hier nur die Definitionen der Kontrollpunkte in die Eigenschaften aus Satz 2.11 einzusetzen:

$$\begin{aligned}
x(a) &= b_0 = y_0, \\
r_x(a) &= \frac{b_1 - b_0}{\|b_1 - b_0\|_2} = \frac{\alpha_0 r_0}{\|\alpha_0 r_0\|_2} = r_0, \\
\kappa_x(a)n_x(a) &= \frac{4w_0w_2}{5w_1^2\|b_1 - b_0\|_2^4} \left( \|b_1 - b_0\|_2^2 (b_2 - b_1) - \langle b_1 - b_0, b_2 - b_1 \rangle (b_1 - b_0) \right) \\
&= \frac{4w_0w_2}{5w_1^2\alpha_0^4} \left( \alpha_0^2 (\beta_0 r_0 + \gamma_0 n_0 - \alpha_0 r_0) \right. \\
&\quad \left. - \langle \alpha_0 r_0, \beta_0 r_0 + \gamma_0 n_0 - \alpha_0 r_0 \rangle \alpha_0 r_0 \right) \\
&= \frac{4w_0w_2}{5w_1^2\alpha_0^4} \left( \alpha_0^2 \beta_0 r_0 + \alpha_0^2 \gamma_0 n_0 - \alpha_0^3 r_0 - (\alpha_0 \beta_0 - \alpha_0^2) \alpha_0 r_0 \right) \\
&= \frac{4w_0w_2}{5w_1^2\alpha_0^4} \alpha_0^2 \gamma_0 n_0 = \frac{4}{5w_1^2\alpha_0^2} w_0 w_2 \gamma_0 n_0 \\
&= \frac{4}{5w_1^2\alpha_0^2} \frac{5}{4} \kappa_0 w_1^2 \alpha_0^2 n_0 = \kappa_0 n_0.
\end{aligned}$$

Für den polynomialen Fall ergibt sich dies, durch Einsetzen in die Eigenschaften aus Satz 2.9. Der Unterschied besteht nur in den Gewichten, die im polynomialen Fall gleich eins sind.

Die Aussagen für  $x(b)$ ,  $r_x(b)$  und  $\kappa_x(b)n_x(b)$  folgen analog.

Dadurch, daß der Start- und Endpunkt sowie die Tangenteneinheitsvektoren, die Krümmungen und die Hauptnormalenvektoren an diesen Punkten vorgegeben sind, folgen andererseits aus Satz 2.9 auch die Darstellungen der Kontrollpunkte. Wir zeigen dies für die Stelle  $t = a$ . Für  $t = b$  gilt das Entsprechende.

Zuerst wird durch  $y_0$  der Kontrollpunkt  $b_0$  festgelegt. Dann muß wegen der Tangentenrichtung  $r_0$  der Kontrollpunkt  $b_1$  auf dem Strahl  $y_0 + \alpha_0 r_0$ ,  $\alpha_0 > 0$ , liegen. Zuletzt muß noch der Kontrollpunkt  $b_2$  in der Schmiegeebene am Punkt  $y_0$  liegen, die durch  $r_0$  und  $n_0$  aufgespannt wird. Um dann noch die positive Krümmung  $\kappa_0$  zu erhalten, muß der Koeffizient  $\gamma_0$  vor  $n_0$  positiv sein und wegen Satz 2.9 die angegebene Beziehung zwischen  $\gamma_0$  und  $\alpha_0$  bestehen.  $\square$

Eine Veranschaulichung der Situation liefert Abbildung 2. Die Krümmung ist durch kleine Bögen an den Punkten angedeutet.

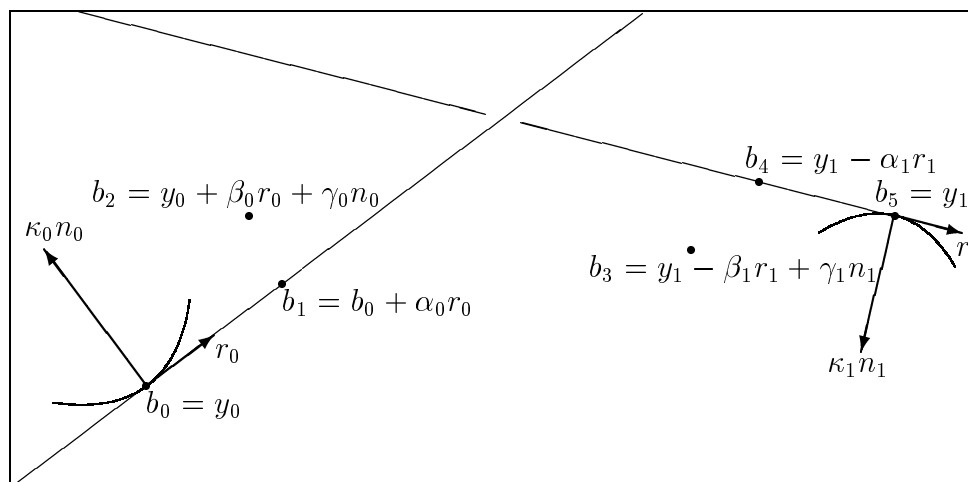


Abbildung 2: Das allgemeine  $G^2$ -Hermite-Problem im  $\mathbb{R}^3$

Es ist noch zu bemerken, daß die Gewichte nur bei der Interpolation der Krümmungen eine Rolle spielen. Außerdem ergeben sich genau die gleichen Bedingungen, wenn man alle Gewichte identisch setzt, was auch daraus folgt, daß die rationale Kurve dann eine polynomiale Kurve ist.

Es sei hier noch erwähnt, daß eine wichtige zusätzliche Eigenschaft von rationalen Kurven in Bernstein-Bézier-Darstellung ist, daß man eine äquivalente Parameterdarstellung der Kurve finden kann, bei der zwei Gewichte zu 1 normiert sind.

## 2.7 Gradreduzierung bei Bernstein-Bézier-Kurven

Unser Ziel ist es, ein gegebenes  $G^2$ -Hermite-Interpolationsproblem mit einer Bernstein-Bézier-Kurve möglichst kleinen Grades zu lösen. Daß wir das Problem immer mit einer Kurve fünften Grades lösen können, haben wir gezeigt. Wir werden nun die formalen Bedingungen für eine Gradreduzierung formulieren und angeben, wie die neuen Kontrollpunkte berechnet werden. Dies führen wir zunächst für polynomiale und dann für rationale Kurven in Bernstein-Bézier-Darstellung aus. Dafür werden wir jeweils zunächst darstellen, wie der Grad eines Polynoms in Bernstein-Darstellung erhöht wird, um dies umzukehren.



### 2.7.1 Polynomiale Kurven

Wenn ein Polynom  $n$ -ten Grades in Monom–Darstellung gegeben ist, dann kann man es als ein Polynom  $(n + 1)$ -ten Grades darstellen, indem man den Summanden  $0 \cdot t^{n+1}$  hinzufügt. Ist das Polynom allerdings in der *Bernstein–Darstellung* gegeben, so ist dies nicht ganz so einfach, denn man sucht die Koeffizienten des Polynoms  $n$ -ten Grades bzgl. der *Bernstein–Basis*  $\{B_i^{(n+1)}\}_{i=0}^{n+1}$ . Wie in der Literatur angegeben, benutzt man dabei den Ansatz, das Polynom mit

$$1 = \left( \frac{t-a}{b-a} + \frac{b-t}{b-a} \right)$$

zu multiplizieren. Genauer ausgeführt ist dies z.B. in [Hoschek & Lasser 92, Seite 131]. Bezeichnet  $BB[b_0, \dots, b_n]$  das Polynom  $n$ -ten Grades und  $BB[\tilde{b}_0, \dots, \tilde{b}_{n+1}]$  das gleiche Polynom  $(n + 1)$ -ten Grades, dann lassen sich die „neuen“ Kontrollpunkte  $\tilde{b}_i$  durch die „alten“  $b_i$  folgendermaßen ausdrücken:

$$\tilde{b}_i = \frac{i}{n+1}b_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1}\right)b_i, \quad i = 0, \dots, n+1. \quad (2.1)$$

Dabei verschwinden die Faktoren vor  $b_{-1}$  und  $b_{n+1}$  sowieso, so daß diese Kontrollpunkte nicht neu definiert werden müssen. Die Randpunkte bleiben gleich, d.h.  $\tilde{b}_0 = b_0$  und  $\tilde{b}_{n+1} = b_n$ . Da es sich um die gleiche Funktion nur in einer anderen Darstellung handelt, bleiben natürlich auch alle parametrisierungsinvarianten Daten wie Tangenteneinheitsvektor, Krümmung und so weiter gleich.

Wir interessieren uns jetzt dafür, wann ein Polynom  $BB[b_0, \dots, b_n]$  durch Graderhöhung eines Polynoms  $BB[\tilde{b}_0, \dots, \tilde{b}_{n-1}]$  entstanden ist. In diesem Fall ist der Grad  $n$  für das Polynom zu hoch, da man es auch mit einem Polynom  $(n - 1)$ -ten Grades darstellen kann. Einem Polynom in Monom–Darstellung sieht man sofort an, ob es durch Graderhöhung entstanden ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn der Koeffizient vor  $t^n$  Null ist. Bei einem Polynom, das bzgl. der Bernstein–Basis gegeben ist, ist dies wieder etwas schwieriger festzustellen. Dazu beweisen wir folgenden Satz:

**Satz 2.13** *Eine polynomiale Kurve in Bernstein–Bézier–Darstellung  $BB[b_0, \dots, b_n]$  läßt sich genau dann als eine polynomiale Kurve in Bernstein–Bézier–Darstellung vom Grad  $n - 1$  darstellen, wenn die  $n$ -te Vorwärtsdifferenz*

$$\Delta_n(b_0, \dots, b_n) := \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} b_i$$

*verschwindet.*

**Beweis:** Wenn das Polynom sich als ein Polynom  $(n-1)$ -ten Grades darstellen läßt, dann verschwindet dessen  $n$ -te Ableitung identisch. Andererseits folgt aus dem Verschwinden der  $n$ -ten Ableitung auch, daß sich das Polynom als ein Polynom niedrigeren Grades darstellen läßt. Und da die Bernstein-Polynome eine Basis im Polynomraum bilden, findet man auch eine Bernstein-Bézier-Darstellung  $(n-1)$ -ten Grades der polynomialen Kurve.

Aus Satz 2.9 kennen wir die Darstellung der  $r$ -ten Ableitung eines Bernstein-Bézier-Polynoms. Setzt man  $r = n$ , so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dt^n} BB[b_0, \dots, b_n]_{[a,b]}(t) &= \frac{n!}{(n-n)!(b-a)^n} \sum_{j=0}^{n-n} B_j^{(n-n)}(t) \sum_{k=0}^n (-1)^{r-k} \binom{n}{k} b_{j+k} \\ &= \frac{n!}{(b-a)^n} B_0^{(0)}(t) \sum_{k=0}^n (-1)^{r-k} \binom{n}{k} b_k \\ &= \frac{n!}{(b-a)^n} \Delta_n(b_0, \dots, b_n) \quad \forall t \in [a, b]. \end{aligned}$$

Dabei haben wir im letzten Schritt benutzt, daß

$$B_0^{(0)}(t) = \binom{0}{0} \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^0 \left(\frac{b-t}{b-a}\right)^{0-0} = 1 \quad \forall t \in [a, b]$$

gilt. Damit ist das Verschwinden der  $n$ -ten Vorwärtsdifferenz der Kontrollpunkte äquivalent zu dem Verschwinden der  $n$ -ten Ableitung des Polynoms, d.h. dazu, daß sich das Polynom als ein Polynom  $(n-1)$ -ten Grades darstellen läßt.  $\square$

Wir wollen jetzt, ähnlich wie oben, versuchen, die Kontrollpunkte  $\tilde{b}_i$  einer gradreduzierten Bernstein-Bézier-Kurve durch die ursprünglichen Kontrollpunkte  $b_i$  auszudrücken.

**Satz 2.14** *Läßt sich die Parameterdarstellung  $BB[b_0, \dots, b_n]$  einer polynomialen Bernstein-Bézier-Kurve gradreduzieren zu  $BB[\tilde{b}_0, \dots, \tilde{b}_{n-1}]$ , dann kann man die Kontrollpunkte  $\tilde{b}_i$  rekursiv auf eine der zwei folgenden Weisen berechnen:*

1.  $\tilde{b}_0 = b_0, \quad \tilde{b}_i = \frac{n}{n-i} b_i - \frac{i}{n-i} \tilde{b}_{i-1}, \quad i = 1, \dots, n-1;$
2.  $\tilde{b}_{n-1} = b_n, \quad \tilde{b}_i = \frac{n}{i+1} b_{i+1} - \frac{n-i-1}{i+1} \tilde{b}_{i+1}, \quad i = n-2, \dots, 0.$

**Beweis:** Formel (2.1) heißt in unserem Fall

$$b_i = \frac{i}{n} \tilde{b}_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n}\right) \tilde{b}_i, \quad i = 0, \dots, n,$$

bzw.

$$b_{i+1} = \frac{i+1}{n} \tilde{b}_i + \left(1 - \frac{i+1}{n}\right) \tilde{b}_{i+1}, \quad i = -1, \dots, n-1.$$

Als Randpunkte treten dabei  $\tilde{b}_0 = b_0$  und  $\tilde{b}_{n-1} = b_n$  auf. Formt man die beiden Formeln nach  $\tilde{b}_i$  um, so ergibt sich:

$$\tilde{b}_i = \frac{n}{n-i} \left(b_i - \frac{i}{n} \tilde{b}_{i-1}\right) = \frac{n}{n-i} b_i - \frac{i}{n-i} \tilde{b}_{i-1}$$

bzw.

$$\tilde{b}_i = \frac{n}{i+1} \left(b_{i+1} - \frac{n-i-1}{n} \tilde{b}_{i+1}\right) = \frac{n}{i+1} b_{i+1} - \frac{n-i-1}{i+1} \tilde{b}_{i+1}.$$

Damit ist die Aussage des Satzes bewiesen.  $\square$

Für den Fall  $n = 5$  werden wir diese Formeln später noch benutzen, deswegen geben wir dafür explizitere Formeln für die  $\tilde{b}_i$  an.

**Folgerung 2.15** *Läßt sich die Parameterdarstellung  $BB[b_0, \dots, b_5]$  einer polynomialen Bernstein–Bézier–Kurve gradreduzieren zu  $BB[\tilde{b}_0, \dots, \tilde{b}_4]$ , dann kann man die Kontrollpunkte  $\tilde{b}_i$  folgendermaßen berechnen:*

$$\begin{aligned} \tilde{b}_0 &= b_0, & &= y_0, \\ \tilde{b}_1 &= \frac{5}{4}b_1 - \frac{1}{4}b_0 & &= y_0 + \tilde{\alpha}_0 r_0, \\ \tilde{b}_2 &= \frac{5}{3}b_2 - \frac{5}{6}b_1 + \frac{1}{6}b_0 & &= y_0 + \tilde{\beta}_0 r_0 + \tilde{\gamma}_0 n_0, \\ &= \frac{5}{3}b_3 - \frac{5}{6}b_4 + \frac{1}{6}b_5 & &= y_1 - \tilde{\beta}_1 r_1 + \tilde{\gamma}_1 n_1, \\ \tilde{b}_3 &= \frac{5}{4}b_4 - \frac{1}{4}b_5 & &= y_1 - \tilde{\alpha}_1 r_1, \\ \tilde{b}_4 &= b_5. & &= y_1. \end{aligned}$$

mit

$$\tilde{\alpha}_i = \frac{5}{4}\alpha_i \quad \tilde{\beta}_i = \frac{5}{3}\beta_i - \frac{5}{6}\alpha_i \quad \tilde{\gamma}_i = \frac{5}{3}\gamma_i = \frac{4}{3}\kappa_i \tilde{\alpha}_i^2$$

**Beweis:** Die Randpunkte  $\tilde{b}_0$  und  $\tilde{b}_4$  ergeben sich direkt aus dem Satz und die anderen Punkte auf die folgende Weise:

$$\begin{aligned}
\tilde{b}_1 &= \frac{5}{4}b_1 - \frac{1}{4}\tilde{b}_0 &= \frac{5}{4}b_1 - \frac{1}{4}b_0 \\
&= \frac{5}{4}y_0 + \frac{5}{4}\alpha_0 r_0 - \frac{1}{4}y_0 &= y_0 + \tilde{\alpha}_0 r_0 \\
\tilde{b}_2 &= \frac{5}{3}b_2 - \frac{2}{3}\tilde{b}_1 &= \frac{5}{3}b_2 - \frac{5}{6}b_1 + \frac{1}{6}b_0 \\
&= \frac{5}{3}y_0 + \frac{5}{3}\beta_0 r_0 + \frac{5}{3}\gamma_0 n_0 - \frac{5}{6}y_0 - \frac{5}{6}\alpha_0 r_0 + \frac{1}{6}y_0 &= y_0 + \tilde{\beta}_0 r_0 + \tilde{\gamma}_0 n_0 \quad \text{bzw.} \\
\tilde{b}_2 &= \frac{5}{3}b_3 - \frac{2}{3}\tilde{b}_3 &= \frac{5}{3}b_3 - \frac{5}{6}b_4 + \frac{1}{6}b_5 \\
&= \frac{5}{3}y_1 - \frac{5}{3}\beta_1 r_1 + \frac{5}{3}\gamma_1 n_1 - \frac{5}{6}y_1 + \frac{5}{6}\alpha_1 r_1 - \frac{1}{6}y_1 &= y_1 - \tilde{\beta}_1 r_1 + \tilde{\gamma}_1 n_1 \\
\tilde{b}_3 &= \frac{5}{4}b_4 - \frac{1}{4}\tilde{b}_4 &= \frac{5}{4}b_4 - \frac{1}{4}b_5 \\
&= \frac{5}{4}y_1 - \frac{5}{4}\alpha_1 r_1 - \frac{1}{4}y_1 &= y_1 - \tilde{\alpha}_0 r_0
\end{aligned}$$

wobei  $\tilde{b}_2$  einmal von „vorne“ und einmal von „hinten“ rekursiv berechnet wurde.  $\square$

## 2.7.2 Rationale Kurven

Bei der Graderhöhung einer rationalen Bernstein–Bézier–Kurve wird gleichzeitig der Grad des Zähler- und der Grad des Nenner-Polynoms, wie im polynomialen Fall beschrieben, erhöht.

Sind  $w_i, b_i$  die Gewichte bzw. Kontrollpunkte der rationalen Kurve  $n$ -ten Grades und  $\tilde{w}_i, \tilde{b}_i$  die der gleichen rationalen Kurve  $(n+1)$ -ten Grades, dann lassen sich die „neuen“ Gewichte  $\tilde{w}_i$  durch die „alten“  $w_i$  folgendermaßen ausdrücken:

$$\tilde{w}_i = \frac{i}{n+1}w_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1}\right)w_i, \quad i = 0, \dots, n+1.$$

Wenn man diese Gewichte berechnet hat, kann man aus

$$\tilde{w}_i \tilde{b}_i = \frac{i}{n+1}w_{i-1}b_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1}\right)w_i b_i, \quad i = 0, \dots, n+1,$$

die neuen Kontrollpunkte  $\tilde{b}_i = \tilde{w}_i \tilde{b}_i / \tilde{w}_i$  berechnen.

Die Randpunkte und -gewichte bleiben gleich, d.h.  $\tilde{w}_0 = w_0, \tilde{b}_0 = b_0$  und  $\tilde{w}_{n+1} = w_n, \tilde{b}_{n+1} = b_n$ . Auch hier handelt es sich um die gleiche Funktion nur in einer anderen Darstellung, deswegen bleiben alle parametrisierungsinvarianten Daten wie Tangenteneinheitsvektor, Krümmung und so weiter gleich.

Im Fall der Gradreduzierung kann man nicht so einfach vorgehen wie bisher. Wir können zwar angeben, wann das Zählerpolynom und wann das Nennerpolynom gradreduzierbar

ist, und dann beide Polynome reduzieren. Es ergibt sich hierbei aber die Frage, ob der sich ergebende Quotient wieder eine rationale Kurve in Bernstein–Bézier–Darstellung in unserem Sinne ist. Dabei geht es nicht um die Form der Darstellung, da deren Richtigkeit aus den Darstellungen des Zählers und des Nenners folgt. Was jedoch nicht unbedingt erfüllt werden muß, ist die Vorzeichenbeschränkung der Gewichte. Wenn wir die Ergebnisse aus dem polynomialen Fall anwenden, insbesondere Satz 2.14, dann kann es durchaus vorkommen, daß die Neuberechneten Gewichte  $\tilde{w}_i$  kleiner oder gleich Null sind. Um das zu verhindern, müssen bestimmte Abhängigkeiten zwischen den ursprünglichen Gewichten  $w_i$  gelten.

**Satz 2.16** *Eine rationale Kurve in Bernstein–Bézier–Darstellung  $RB[w_0, b_0, \dots, w_n, b_n]$  läßt sich genau dann durch eine rationale Kurve in Bernstein–Bézier–Darstellung  $(n-1)$ -ten Grades darstellen, wenn einerseits die beiden Vorwärtsdifferenzen*

$$\Delta_n(w_0 b_0, \dots, w_n b_n) := \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} w_i b_i$$

und

$$\Delta_n(w_0, \dots, w_n) := \sum_{i=0}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} w_i$$

verschwinden und andererseits die folgenden rekursiv gebildeten Ungleichungen bestehen:

$$\tilde{w}_0 := w_0 > 0, \quad \tilde{w}_i := \frac{n}{n-i} w_i - \frac{i}{n-i} \tilde{w}_{i-1} > 0, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

**Beweis:** Nach Satz 2.13 läßt sich das Nenner–Polynom genau dann gradreduzieren, wenn  $\Delta_n(w_0 b_0, \dots, w_n b_n)$  verschwindet, und das Zähler–Polynom läßt sich gradreduzieren genau dann, wenn  $\Delta_n(w_0, \dots, w_n)$  verschwindet.

Wenn man die Gewichte  $\tilde{w}_i$  des gradreduzierten Polynoms  $BB[\tilde{w}_0, \dots, \tilde{w}_{n-1}]$  nach Satz 2.14 bildet, dann sind die  $\tilde{w}_i$  genau dann positiv, wenn die oben genannten Ungleichungen erfüllt sind. Faßt man beides zusammen, dann ergibt sich die Aussage des Satzes.  $\square$

Wenn wir Satz 2.14 auf den Zähler und den Nenner anwenden, dann können wir auch hier die Gewichte und Kontrollpunkte einer gradreduzierten Bernstein–Bézier–Kurve durch die ursprünglichen Gewichte und Kontrollpunkte ausdrücken.

**Satz 2.17** *Läßt sich die Parameterdarstellung  $RB[w_0, b_0, \dots, w_n, b_n]$  einer rationalen Bernstein–Bézier–Kurve gradreduzieren zu  $RB[\tilde{w}_0, \tilde{b}_0, \dots, \tilde{w}_{n-1}, \tilde{b}_{n-1}]$ , dann kann man die Gewichte  $\tilde{w}_i$  und die Kontrollpunkte  $\tilde{b}_i$  rekursiv auf eine der zwei folgenden Weisen berechnen:*

$$\begin{aligned}
1. \quad \tilde{w}_0 &= w_0, & \tilde{w}_i &= \frac{n}{n-i}w_i - \frac{i}{n-i}\tilde{w}_{i-1}, & i &= 1, \dots, n-1, \\
\tilde{w}_0\tilde{b}_0 &= w_0b_0, & \tilde{w}_i\tilde{b}_i &= \frac{n}{n-i}w_ib_i - \frac{i}{n-i}\tilde{w}_{i-1}\tilde{b}_{i-1}, & i &= 1, \dots, n-1, \\
\tilde{b}_i &= \frac{\tilde{w}_i\tilde{b}_i}{\tilde{w}_i}, & & & i &= 0, \dots, n-1; \\
2. \quad \tilde{w}_{n-1} &= w_n, & \tilde{w}_i &= \frac{n}{i+1}w_{i+1} - \frac{n-i-1}{i+1}\tilde{w}_{i+1}, & i &= n-2, \dots, 0, \\
\tilde{w}_{n-1}\tilde{b}_{n-1} &= w_nb_n, & \tilde{w}_i\tilde{b}_i &= \frac{n}{i+1}w_{i+1}b_{i+1} - \frac{n-i-1}{i+1}\tilde{w}_{i+1}\tilde{b}_{i+1}, & i &= n-2, \dots, 0, \\
\tilde{b}_i &= \frac{\tilde{w}_i\tilde{b}_i}{\tilde{w}_i}, & & & i &= 0, \dots, n-1.
\end{aligned}$$

**Beweis:** Wie oben schon gesagt, muß man nur Satz 2.14 auf Zähler und Nenner anwenden und erhält damit die Aussage des Satzes.  $\square$

Wir geben auch hier für den Fall  $n = 5$  explizitere Formeln für die  $\tilde{w}_i$  und  $\tilde{b}_i$  an.

**Folgerung 2.18** *Läßt sich die Parameterdarstellung  $RB[w_0, b_0, \dots, w_5, b_5]$  einer rationalen Bernstein-Bézier-Kurve gradreduzieren zu  $RB[\tilde{w}_0, \tilde{b}_0, \dots, \tilde{w}_4, \tilde{b}_4]$ , dann kann man die Gewichte  $\tilde{w}_i$  und die Kontrollpunkte  $\tilde{b}_i$  folgendermaßen berechnen:*

$$\begin{aligned}
\tilde{w}_0 &= w_0, \\
\tilde{w}_1 &= \frac{5}{4}w_1 - \frac{1}{4}w_0, \\
\tilde{w}_2 &= \frac{5}{3}w_2 - \frac{5}{6}w_1 + \frac{1}{6}w_0 \quad \left( = \frac{5}{3}w_3 - \frac{5}{6}w_4 + \frac{1}{6}w_5 \right), \\
\tilde{w}_3 &= \frac{5}{4}w_4 - \frac{1}{4}w_5, \\
\tilde{w}_4 &= w_5
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\tilde{b}_0 &= b_0, \\
\tilde{b}_1 &= \frac{5w_1b_1 - w_0b_0}{5w_1 - w_0}, \\
\tilde{b}_2 &= \frac{10w_2b_2 - 5w_1b_1 + w_0b_0}{10w_2 - 5w_1 + w_0} \quad \left( = \frac{10w_3b_3 - 5w_4b_4 + w_5b_5}{10w_3 - 5w_4 + w_5} \right), \\
\tilde{b}_3 &= \frac{5w_4b_4 - w_5b_5}{5w_4 - w_5}, \\
\tilde{b}_4 &= b_5.
\end{aligned}$$

**Beweis:** Wir wenden wieder die Ergebnisse aus dem polynomialen Fall an. Diesmal folgen die Formeln aus Folgerung 2.15.  $\square$

Im Fall der rationalen Kurven werden wir sogar versuchen, den Grad auf 3 zu reduzieren. Aus diesem Grund geben wir hier auch die Formeln für die Berechnung der Gewichte  $\bar{w}_i$  und Kontrollpunkte  $\bar{b}_i$ ,  $i = 0, \dots, 3$ , der Kurve dritten Grades an, die aus einer Kurve fünften Grades durch Gradreduktion entstanden ist.

**Folgerung 2.19** *Läßt sich die Parameterdarstellung  $RB[w_0, b_0, \dots, w_5, b_5]$  einer rationalen Bernstein–Bézier–Kurve gradreduzieren zu  $RB[\tilde{w}_0, \tilde{b}_0, \dots, \tilde{w}_4, \tilde{b}_4]$  und diese weiter zu  $RB[\bar{w}_0, \bar{b}_0, \dots, \bar{w}_3, \bar{b}_3]$ , dann kann man die Gewichte  $\bar{w}_i$  und die Kontrollpunkte  $\bar{b}_i$  folgendermaßen berechnen:*

$$\bar{w}_0 = w_0 ,$$

$$\bar{w}_1 = \frac{5}{3}w_1 - \frac{2}{3}w_0 ,$$

$$\bar{w}_2 = \frac{5}{3}w_4 - \frac{2}{3}w_5 ,$$

$$\bar{w}_3 = w_5$$

und

$$\bar{b}_0 = b_0 = y_0 ,$$

$$\bar{b}_1 = \frac{5w_1b_1 - 2w_0b_0}{5w_1 - 2w_0} = y_0 + \bar{\alpha}_0r_0 ,$$

$$\bar{b}_2 = \frac{5w_4b_4 - 2w_5b_5}{5w_4 - 2w_5} = y_1 - \bar{\alpha}_1r_1 ,$$

$$\bar{b}_3 = b_5 = y_1 .$$

mit

$$\bar{\alpha}_0 = \frac{5w_1}{5w_1 - 2w_0} \alpha_0 \quad \text{und} \quad \bar{\alpha}_1 = \frac{5w_4}{5w_4 - 2w_5} \alpha_1$$

**Beweis:** Mit Folgerung 2.18 berechnet man zunächst die  $\tilde{w}_i$  und  $\tilde{b}_i$ . Dann benutzt man Satz 2.17 für  $n = 4$  und erhält zunächst  $\bar{w}_0$ ,  $\bar{w}_3$ ,  $\bar{b}_0$  und  $\bar{b}_3$ . Daraus lassen sich dann die anderen Gewichte und Kontrollpunkte berechnen:

$$\bar{w}_1 = \frac{4}{3}\tilde{w}_1 - \frac{1}{3}\bar{w}_0 = \frac{4}{3}\left(\frac{5}{4}w_1 - \frac{1}{4}w_0\right) - \frac{1}{3}w_0 = \frac{5}{3}w_1 - \frac{2}{3}w_0 ,$$

$$\bar{w}_2 = \frac{4}{3}\tilde{w}_3 - \frac{1}{3}\bar{w}_3 = \frac{4}{3}\left(\frac{5}{4}w_4 - \frac{1}{4}w_5\right) - \frac{1}{3}w_5 = \frac{5}{3}w_4 - \frac{2}{3}w_5 .$$

Die Formeln für die neuen Kontrollpunkte  $\bar{b}_i$  ergeben sich analog durch Berechnung von  $\bar{w}_i \bar{b}_i$  und Division durch  $\bar{w}_i$ .  $\square$

## 2.8 Möglichkeiten der Gradreduzierung

Schütt hat in seiner Arbeit [Schütt 95] ausführlich gezeigt, unter welchen Bedingungen ein  $G^2$ -Hermite-Interpolationsproblem mit einer polynomialen Bernstein-Bézier-Kurve fünften Grades gelöst werden muß und wann ein kleinerer Grad möglich ist. Dazu hat er die Lage des Frenet-Dreibein an  $y_1$  zum Frenet-Dreibein an  $y_0$  betrachtet und die Vektoren  $r_1$ ,  $n_1$  und  $(y_1 - y_0)$  als Linearkombination der Vektoren  $r_0$ ,  $n_0$  und  $\eta_0$  dargestellt. Man erhält folgende Darstellung:

$$r_1 = s_0 r_0 + s_1 n_0 + s_2 \eta_0$$

$$n_1 = t_0 r_0 + t_1 n_0 + t_2 \eta_0$$

$$(y_1 - y_0) = u_0 r_0 + u_1 n_0 + u_2 \eta_0$$

mit eindeutig bestimmten Koeffizienten  $s_i, t_i, u_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 0, 1, 2$ .

In der Sprache der linearen Algebra handelt es sich hierbei um einen Basiswechsel von der kanonischen Basis des  $\mathbb{R}^3$  in die ebenfalls orthonormale Basis  $\{r_0, n_0, \eta_0\}$ .

Auf der nächsten Seite ist der von Schütt entwickelte Algorithmus zur Bestimmung des kleinsten möglichen Grades dargestellt. Da wir die dort aufgelisteten Fälle im weiteren Verlauf dieser Arbeit genau charakterisieren wollen, haben wir sie durchnumeriert. Dabei steht die erste Ziffer für den Grad der Kurve, bei der zweiten Ziffer steht „0“ für eine polynomiale „1“ für eine rationale Kurve. Mit der dritten Ziffer werden diese unterschiedlichen Fälle jeweils durchnumeriert. So steht z.B. (407) für den siebten Fall einer polynomialen Bernstein-Bézier-Kurve vierten Grades.



## Übersicht „Möglichkeiten der Gradreduzierung“

**Gegeben:**  $\kappa_i \in \mathbb{R}_{>0}, y_0 \neq y_1, r_i, n_i \in \mathbb{R}^3$  mit  $\|r_i\|_2 = \|n_i\|_2 = 1, n_i \perp r_i$  für  $i = 0, 1$ .

**Problem:** Welchen Grad muß eine polynomiale bzw. rationale Kurve in Bernstein-Bézier-Darstellung mindestens haben, um die Daten zu interpolieren?

**Lösung:** Berechne die Koeffizienten  $s_i, t_i, u_i, i = 0, 1, 2$ , durch

$$\begin{aligned} s_0 &= \langle r_1, r_0 \rangle, & s_1 &= \langle r_1, n_0 \rangle, & s_2 &= \langle r_1, \eta_0 \rangle, \\ t_0 &= \langle n_1, r_0 \rangle, & t_1 &= \langle n_1, n_0 \rangle, & t_2 &= \langle n_1, \eta_0 \rangle, \\ u_0 &= \langle y_1 - y_0, r_0 \rangle, & u_1 &= \langle y_1 - y_0, n_0 \rangle, & u_2 &= \langle y_1 - y_0, \eta_0 \rangle. \end{aligned}$$

Fallunterscheidung nach diesen Koeffizienten. Es wird angegeben, welcher Form die Kurve mindestens sein muß, um das Problem in diesen Fällen allgemein zu lösen.

$s_2 = t_2 = u_2 = 0$  (planare Fälle):

$$s_1 = 0, t_1 = +1: \quad \text{Polynomial, Grad 4} \quad (401)$$

$$t_1 = -1, u_1 > 0: \quad \text{Polynomial, Grad 3} \quad (301)$$

$$u_1 \leq 0: \quad \text{Polynomial, Grad 5} \quad (501)$$

$s_1 \neq 0$ : Berechne  $\lambda = s_0 t_1 - s_1 t_0 \in \{\pm 1\}, \mu = u_0 s_1 - u_1 s_0$ .

$$s_1 < 0, \lambda = +1: \quad \text{Rational, Grad 3} \quad (311)$$

$$\lambda = -1, \mu < 0: \quad \text{Rational, Grad 3} \quad (312)$$

$$\mu \geq 0: \quad \text{Polynomial, Grad 4} \quad (402)$$

$$s_1 > 0, u_1 \leq 0: \quad \text{Polynomial, Grad 4} \quad (403)$$

$$u_1 > 0, \lambda = -1: \quad \text{Rational, Grad 3} \quad (313)$$

$$\lambda = +1, \mu > 0: \quad \text{Rational, Grad 3} \quad (314)$$

$$\mu \leq 0: \quad \text{Polynomial, Grad 4} \quad (404)$$

$s_2 = 0$  (Fälle mit  $r_1 \parallel \text{span}(r_0, n_0)$ ):

$$t_2 = 0, u_2 \neq 0: \quad \text{Polynomial, Grad 5} \quad (502)$$

$$t_2 \neq 0, \frac{u_2}{t_2} < 0, s_1 \neq 0: \quad \text{Polynomial, Grad 4} \quad (405)$$

$s_1 = 0$ : Berechne  $\nu := u_1 - \frac{t_1}{t_2} u_2$ .

$$\nu > 0: \quad \text{Polynomial, Grad 4} \quad (406)$$

$$\nu \leq 0: \quad \text{Polynomial, Grad 5} \quad (503)$$

$$\frac{u_2}{t_2} \geq 0: \quad \text{Polynomial, Grad 5} \quad (504)$$

$s_2 \neq 0$  (echte  $\mathbb{R}^3$ -Fälle):

Berechne  $\rho := u_1 s_2 - u_2 s_1, \sigma := s_1 t_2 - s_2 t_1, \tau := \langle \eta_1, y_1 - y_0 \rangle$ .

$$\text{sgn}(s_2) = \text{sgn}(u_2) = \text{sgn}(\rho) = \text{sgn}(\sigma) = \text{sgn}(\tau): \quad \text{Rational, Grad 3} \quad (315)$$

$$\text{sonst: } \rho s_2 > 0, \sigma s_2 \leq 0: \quad \text{Polynomial, Grad 4} \quad (407)$$

$$\sigma s_2 > 0: \quad \text{Polynomial, Grad 4} \quad (408)$$

$$\rho s_2 \leq 0, \sigma s_2 < 0: \quad \text{Polynomial, Grad 4} \quad (409)$$

$$\sigma s_2 \geq 0: \quad \text{Polynomial, Grad 5} \quad (505)$$

## 3. Geometrische Anschauung

In diesem Kapitel wird das Problem der Gradreduzierung bei  $G^2$ -Hermite Interpolation bei Raumkurven geometrisch anschaulich betrachtet. Dazu werden wir aufzeigen, in welchen Bereichen sich die einzelnen Kontrollpunkte befinden können. Aus dieser Betrachtung werden wir auf der Geometrie der Fälle beruhende notwendige und hinreichende Bedingungen für die verschiedenen Möglichkeiten der Gradreduzierung formulieren. Diese werden dann an einigen der in 2.8 angegebenen Fälle, insbesondere den echten  $\mathbb{R}^3$ -Fälle, exemplarisch gezeigt. Schließlich wird ein Algorithmus präsentiert, der zu dem jeweiligen Fall die möglichen Kurven bestimmt.

### 3.1 Zulässige Bereiche

Entscheidend für die Anschauung ist es zu wissen, in welchen Bereichen sich die jeweiligen Kontrollpunkte befinden dürfen. Diese werden hier benannt. Mit  $n$  ist dabei der Grad der Bernstein-Bezier-Kurve bezeichnet.

Den ersten und den letzten Kontrollpunkt bilden  $y_0$  und  $y_1$ .

$$b_0 = y_0 \quad b_n = y_1$$

Der zweite und der vorletzte Kontrollpunkt liegen auf dem offenen Strahl, der von  $y_0$  bzw.  $y_1$  in Tangentenrichtung  $r_0$  bzw. entgegen der Tangentenrichtung  $r_1$  ausgeht:

$$b_1 = y_0 + \alpha_0 r_0 \quad b_{n-1} = y_1 - \alpha_1 r_1, \quad \alpha_i > 0, \quad i = 0, 1.$$

Die Mengen dieser mögliche Kontrollpunkte bezeichnen wir mit

$$R_i := \{y_i + (-1)^i \alpha_i r_i \mid \alpha_i \in \mathbb{R}_{>0}\}, \quad i = 0, 1;$$

die Geraden in denen sie liegen mit

$$L_i := \{y_i + \alpha_i r_i \mid \alpha_i \in \mathbb{R}\}, \quad i = 0, 1.$$

Der dritte und der drittletzte Kontrollpunkt liegen in der offenen Halbebene, die von  $y_0$  bzw.  $y_1$ , den Tangenten  $r_0$  bzw.  $r_1$  und den Hauptnormalenvektoren  $n_0$  bzw.  $n_1$  aufgespannt werden.

$$b_2 = y_0 + \beta_0 r_0 + \gamma_0 n_0 \quad b_{n-2} = y_1 - \beta_1 r_1 + \gamma_1 n_1, \quad \beta_i \in \mathbb{R}, \gamma_i \in \mathbb{R}_{>0}, \quad i = 0, 1$$

Die Mengen dieser möglichen Kontrollpunkte bezeichnen wir mit

$$H_i := \{y_i + (-1)^i \beta_i r_i + \gamma_i n_i \mid \beta_i \in \mathbb{R}, \gamma_i \in \mathbb{R}_{>0}\}, \quad i = 0, 1;$$

die Ebenen, in denen sie liegen, mit

$$P_i := \{y_i + \beta_i r_i + \gamma_i n_i \mid \beta_i, \gamma_i \in \mathbb{R}\}, \quad i = 0, 1.$$

Das Problem der Gradreduzierung läßt sich nun auf das Schneiden dieser Mengen reduzieren.

### Satz 3.1 (Gradreduzierung)

1. Das gegebene  $G^2$ -Hermite-Problem im  $\mathbb{R}^3$  ist genau dann durch eine polynomiale Bernstein-Bézier-Kurve vierten Grades lösbar, wenn die Menge  $S := H_0 \cap H_1$  nicht leer ist.
2. Das gegebene  $G^2$ -Hermite-Problem im  $\mathbb{R}^3$  ist genau dann durch eine rationale Bernstein-Bézier-Kurve dritten Grades lösbar, wenn die Mengen  $R_0 \cap H_1$  und  $R_1 \cap H_0$  beide nicht leer sind.
3. Das gegebene  $G^2$ -Hermite-Problem im  $\mathbb{R}^3$  ist genau dann durch eine polynomiale Bernstein-Bézier-Kurve dritten Grades lösbar, wenn die Mengen  $R_0 \cap H_1$  und  $R_1 \cap H_0$  beide nicht leer sind und es existieren  $\bar{b}_1 \in R_0 \cap H_1$  und  $\bar{b}_2 \in R_1 \cap H_0$ , für die gilt:

$$\langle \bar{b}_2 - y_0, n_0 \rangle = \frac{3}{2} \kappa_0 \|\bar{b}_1 - y_0\|^2 \quad \text{und} \quad \langle \bar{b}_1 - y_1, n_1 \rangle = \frac{3}{2} \kappa_1 \|\bar{b}_2 - y_1\|^2,$$

für die also alle Gewichte gleich eins gesetzt werden können.

**Beweis:** Die Schnittmengen sind genau die zulässigen Bereiche für die Kontrollpunkte  $\tilde{b}_2$  (bei Grad 4) bzw.  $\bar{b}_1$  und  $\bar{b}_2$  (bei Grad 3). Die weiteren Kontrollpunkte und die Gewichte können dann berechnet werden. Sind die Gewichte bei einer möglichen Reduzierung auf Grad 3 gleich eins, so liegt auch hier ein polynomialer Fall vor.  $\square$

**Folgerung 3.2** Das gegebene  $G^2$ -Hermite-Problem im  $\mathbb{R}^3$  ist genau dann nur durch eine polynomiale Bernstein-Bézier-Kurve fünften Grades lösbar, wenn die Menge  $S := H_0 \cap H_1$  leer ist.

## 3.2 Die Geometrie der einzelnen Fälle

Wir betrachten nun, wie sich dies in den einzelnen Fällen verhält

### 3.2.1 Planare Fälle

Im Planaren liegt der Schnitt zweier Halbebenen trivialerweise wieder in der Ebene. Grad 5 liegt nur vor, wenn sich diese Halbebenen nicht schneiden.

D.h.  $r_0 \parallel r_1, n_0 = -n_1, \langle y_1 - y_0, n_0 \rangle \leq 0$

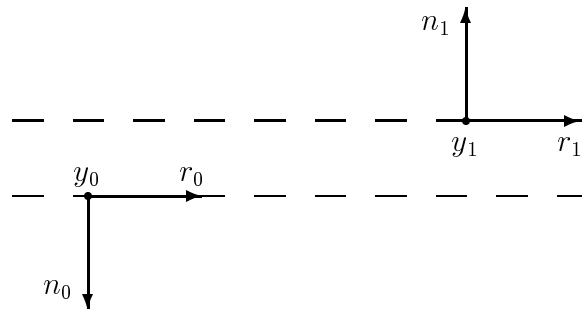


Abbildung 3: Der Fall (501)

Schneiden sich die Halbebenen in einer Menge  $S$ , so kann jeder Punkt dieser Menge als mittlerer Kontrollpunkt  $\tilde{b}_2$  gewählt werden. Die Kontrollpunkte  $\tilde{b}_1$  und  $\tilde{b}_3$  müssen dann nach der Bedingung  $\tilde{\gamma}_i = \frac{4}{3}\kappa_i\tilde{\alpha}_i^2$  bestimmt werden.

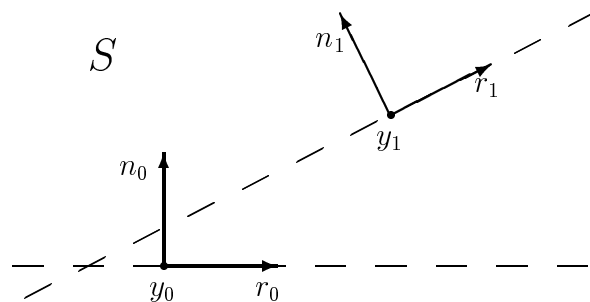


Abbildung 4: Planare Fälle vierten Grades am Beispiel (404)

Um eine Bernstein-Bézier-Kurve dritten Grades zu finden, die das Problem löst, dürfen die Mengen  $R_0 \cap H_1$  und  $R_1 \cap H_0$  nicht leer sein. Ist diese Voraussetzung gegeben, so

sind die zulässigen Bereiche für  $\bar{b}_1$  und  $\bar{b}_2$  ein offener Strahl oder eine beidseitig offene Strecke. Die möglichen Kombinationen aus Strahl und Strecke machen dabei genau die unterschiedlichen Fälle (311) bis (314) aus. Jede Kombination eines zulässigen  $\bar{b}_1$  und eines zulässigen  $\bar{b}_2$  bildet eine Lösung des Problems. Daraus resultiert eine rationale Bernstein-Bézier-Kurve dritten Grades.

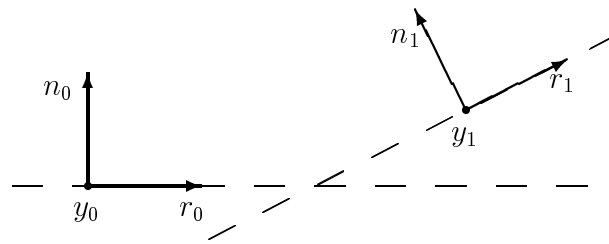


Abbildung 5: Planare Fälle dritten Grades am Beispiel (314)

Berücksichtigt man bei der Wahl von  $\bar{b}_1$  und  $\bar{b}_2$  noch die Bedingungen aus Satz 3.1, so läßt sich wohl in den meisten Fällen auch eine polynomiale Bernstein-Bézier-Kurve dritten Grades finden, die das Problem löst. Darauf wird in dieser Arbeit aber nicht weiter eingegangen.

Sollen Daten von glatten Kurven im Planaren reproduziert werden, so stellt man fest, daß fast immer der Fall (314) vorliegt. Die Fälle (312) und (313) kommen sehr viel seltener vor. Der Fall (311) und die Fälle, bei denen eine Kurve vierten oder fünften Grades notwendig ist, müssten schon speziell konstruiert werden.

### 3.2.2 Nicht planare Fälle mit $s_2 = 0$

Da  $s_2 = \langle r_1, \eta_0 \rangle$  ist, bedeutet  $s_2 = 0$ , daß der zu  $y_1$  gehörende Tangentenvektor  $r_1$  und damit  $R_1$  parallel zu  $P_0$  oder, wenn  $y_1 \in P_0$ , in  $P_0$  liegt.

Hieraus wird schon deutlich, daß es keine Lösungen dritten Grades geben kann. Denn aus  $R_1 \parallel P_0$  folgt, daß  $R_1 \cap H_0 = \emptyset$ . Und wenn  $R_1 \in P_0$  gilt, so folgt, daß der Normalenvektor  $n_1 \notin P_0$  ist (ansonsten hätten wir einen planaren Fall). Damit gilt dann aber  $H_1 \cap P_0 = \emptyset$  (nur der Rand der offenen Halbebene  $H_1$  liegt in  $P_0$ ) und insbesondere  $H_1 \cap R_0 = \emptyset$ .

Im folgenden beschreiben wir für die fünf verschiedenen Fälle die Lage der Ebenen  $P_0, P_1$  und der offenen Halbebenen  $H_0, H_1$  zueinander:

(502)  $(s_2 = 0, t_2 = 0, u_2 \neq 0)$

Die Ebene  $P_1$  liegt echt parallel zur Ebene  $P_0$ . Somit ist die Schnittmenge  $H_0 \cap H_1$  leer und es ist eine Kurve fünften Grades zur Lösung des Problems notwendig.

(504)  $(s_2 = 0, t_2 \neq 0, \frac{u_2}{t_2} \geq 0)$

Die Halbebene  $H_1$  schneidet  $P_0$  nicht sondern „zeigt von ihr weg“. Die Skizze zeigt diese Situation. Zu sehen ist eine Seitenansicht des Problems. Die Ebene  $P_0$  und die Halbebene  $H_1$  sind im Querschnitt dargestellt.

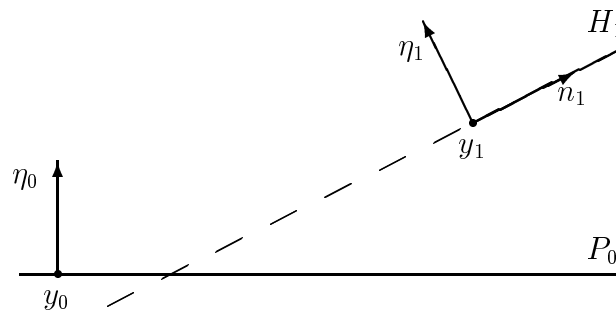


Abbildung 6: Der Fall (504)

Ist  $R_1 \in P_0$  und nicht planar ist, so ist dies genau Fall (504), da  $s_2 = 0, t_2 \neq 0, u_2 = 0$  gilt.

In den anderen drei Fällen ist die Schnittgerade  $P_0 \cap H_1$  nicht leer. Es muß aber weiter betrachtet werden, wie sich diese Schnittgerade zu  $H_0$  verhält.

(503)  $(s_2 = 0, t_2 \neq 0, \frac{u_2}{t_2} < 0, s_1 = 0, u_1 - \frac{t_1}{t_2} u_2 \leq 0)$

Die Schnittgerade  $P_0 \cap H_1$  liegt parallel zu  $L_0$  aber nicht in  $H_0$ .

(406)  $(s_2 = 0, t_2 \neq 0, \frac{u_2}{t_2} < 0, s_1 = 0, u_1 - \frac{t_1}{t_2} u_2 > 0)$

Die Schnittgerade  $P_0 \cap H_1$  liegt parallel zu  $L_0$  und ganz in  $H_0$ .

(405)  $(s_2 = 0, t_2 \neq 0, \frac{u_2}{t_2} < 0, s_1 \neq 0)$

Die Schnittgerade  $P_0 \cap H_1$  ist nicht parallel zu  $L_0$ . Deshalb liegt ein Teil von ihr auf jeden Fall in  $H_0$ .

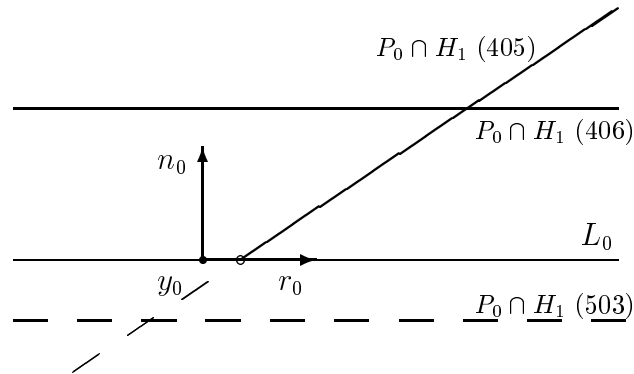


Abbildung 7: Die Fälle (405), (406), (503)

### 3.2.3 Echte $\mathbb{R}^3$ -Fälle ( $s_2 \neq 0$ )

Wir kommen nun zu den wirklich relevanten Fällen. Denn bei der Interpolation im  $\mathbb{R}^3$  müssen alle bisher betrachteten Fälle als Spezialfälle gelten. Bei den bisherigen Fällen galt immer  $s_2 = 0$ , was bedeutet, daß der Tangentialvektor an  $y_1$  parallel zu einer von  $r_0$  und  $n_0$  aufgespannten Ebene liegt.

Für die Betrachtung dieser Fälle wollen wir noch zwei Begriffe einführen:

**Definition 3.3** Die Schnittgerade der Ebenen  $P_0$  und  $P_1$  bezeichnen wir als Pivot.

$$pivot := P_0 \cap P_1$$

**Definition 3.4** Die Schnittpunkte der Geraden  $L_i$  mit dem Pivot bezeichnen wir als basepoints.

$$base_i := L_i \cap pivot$$

Ist  $L_i = pivot$  oder  $L_i \parallel pivot$ , so sprechen wir davon, daß  $base_i$  nicht existiert.

Die Menge  $S := H_0 \cap H_1$  ist eine Teilmenge des Pivots und wird durch einen oder beide basepoints (soweit sie existieren) begrenzt.

Wie wir gleich sehen werden, unterscheiden sich die echten  $\mathbb{R}^3$ -Fälle (315), (407), (408), (409) und (501) dadurch, ob die Menge  $S := H_0 \cap H_1$  leer ist, eine beidseitig offene

Strecke oder ein offener Strahl ist und ob die Tangentenvektoren  $r_0$  und  $r_1$  auf den Pivot gerichtet sind oder von ihm wegzeigen.

Diese verschiedenen Situationen werden in dem Entscheidungsalgorithmus durch die Vorzeichen der Faktoren  $s_2, u_2, \rho, \sigma$  und  $\tau$  beschrieben. Deshalb werden wir hier beschreiben, was die Vorzeichen dieser Faktoren für die geometrische Anschauung bedeuten:

$$s_2 = \langle r_1, \eta_0 \rangle$$

Somit beschreibt  $s_2$  die Lage des Tangentenvektors  $r_1$  zur Ebene  $P_0$ .

$s_2 = 0$  bedeutet, daß  $r_1$  parallel zu  $P_0$  oder in  $P_0$  liegt.

Dies sind die Fälle, die in 3.2.1 und 3.2.2 beschrieben wurden.

$$u_2 = \langle (y_1 - y_0), \eta_0 \rangle$$

Somit beschreibt  $u_2$  die Lage von  $y_1$  zur Ebene  $P_0$ .

$u_2 = 0$  bedeutet, daß  $y_1$  in  $P_0$  liegt.

$$\rho = u_1 s_2 - u_2 s_1 = \langle r_1, r_0 \times (y_1 - y_0) \rangle = \langle r_0, (y_1 - y_0) \times r_1 \rangle$$

Somit beschreibt  $\rho$  die Lage von  $r_1$  zu der von  $r_0$  und  $(y_1 - y_0)$  aufgespannten Ebene.

$\rho = 0$  bedeutet, daß  $r_0, (y_1 - y_0)$  und  $r_1$  in einer Ebene liegen.

$$\sigma = s_1 t_2 - s_2 t_1 = \langle r_0, \eta_1 \rangle$$

Somit beschreibt  $\sigma$  die Lage des Tangentenvektors  $r_0$  zur Ebene  $P_1$ .

$\sigma = 0$  bedeutet, daß  $r_0$  parallel zu  $P_1$  oder in  $P_1$  liegt.

$$\tau = \langle (y_1 - y_0), \eta_1 \rangle$$

Somit beschreibt  $\tau$  die Lage von  $y_0$  zur Ebene  $P_1$ .

$\tau = 0$  bedeutet, daß  $y_0$  in  $P_1$  liegt.

Die eigentliche Entscheidung wird aber anhand der Vorzeichen dieser Faktoren zueinander getroffen.

**Satz 3.5** *Gegeben sei ein  $G^2$ -Hermite-Interpolationsproblem im  $\mathbb{R}^3$ . Die Faktoren  $u_2, s_2, \rho, \sigma$  und  $\tau$  seien berechnet, wie in 2.8 beschrieben. Die Mengen  $R_i, L_i, H_i$  und  $P_i, i = 0, 1$  seien definiert, wie in diesem Kapitel beschrieben. Dann bestehen folgende Zusammenhänge:*

$$(I) \quad u_2 s_2 > 0 \Leftrightarrow R_1 \cap P_0 \neq \emptyset$$

anschaulich sagt man „ $r_1$  zeigt vom Pivot weg“

$$(II) \quad \tau \sigma > 0 \Leftrightarrow R_0 \cap P_1 \neq \emptyset$$

anschaulich sagt man „ $r_0$  zeigt auf den Pivot“



(III)  $\rho s_2 > 0 \Leftrightarrow L_1 \cap H_0 \neq \emptyset$   
*anschaulich sagt man „base<sub>1</sub> liegt in H<sub>0</sub>“*

(IV)  $\rho\sigma > 0 \Leftrightarrow L_0 \cap H_1 \neq \emptyset$   
*anschaulich sagt man „base<sub>0</sub> liegt in H<sub>1</sub>“*

**Beweis:** Haben  $u_2$  und  $s_2$  das selbe Vorzeichen, so zeigen  $(y_1 - y_0)$  und  $r_1$  bezüglich  $\eta_0$  in die selbe Richtung. Haben  $\sigma$  und  $\tau$  das selbe Vorzeichen, so zeigen  $(y_1 - y_0)$  und  $r_1$  bezüglich  $\eta_1$  in die selbe Richtung. In (III) und (IV) wird durch  $\rho$ ,  $s_2$  und  $\sigma$  genau der Bereich beschrieben in dem sich  $r_0$  bzw.  $r_1$  befinden darf damit die jeweiligen Schnittmengen nicht leer sind (siehe Skizzen).

Die folgenden Skizzen zeigen diese Situationen. Zu sehen sind Seitenansicht. Die Ebenen  $P_0$  und  $P_1$  bzw. die in ihnen enthaltenen Halbebenen  $H_0$  und  $H_1$  sind als Linien dargestellt. Entscheidend ist, wie der Tangentialvektor  $r_i$  zu diesen Ebenen steht.

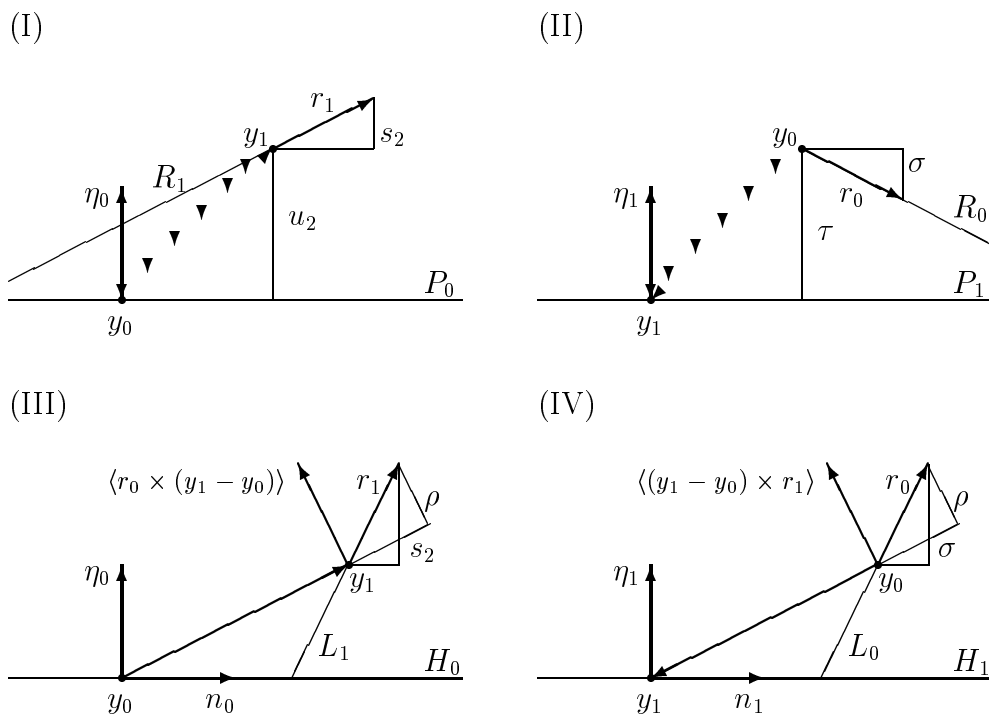


Abbildung 8: Bedeutung der Vorzeichen

□

Auf die Bedeutung von  $\rho s_2 = 0$  oder  $\rho\sigma = 0$  wird in der Beschreibung der Fälle (407), (409) und (505) eingegangen.

Die Bedingungen für eine Gradreduzierung lassen sich nun für die Fälle mit  $s_2 \neq 0$  nochmal wie folgt zusammenfassen:

**Folgerung 3.6** Sei  $s_2 \neq 0$ . Dann gilt:

1. Das gegebene  $G^2$ -Hermite-Problem im  $\mathbb{R}^3$  ist genau dann durch eine Bernstein-Bézier-Kurve vierten Grades lösbar, wenn (III) oder (IV) erfüllt ist.
2. Das gegebene  $G^2$ -Hermite-Problem im  $\mathbb{R}^3$  ist genau dann durch eine Bernstein-Bézier-Kurve dritten Grades lösbar, wenn alle 4 Bedingungen erfüllt sind.
3. Das gegebene  $G^2$ -Hermite-Problem im  $\mathbb{R}^3$  ist genau dann nur durch eine Bernstein-Bézier-Kurve fünften Grades lösbar, wenn weder (III) noch (IV) erfüllt ist.

Nun haben wir alle Hilfsmittel, um die Fälle  $s_2 \neq 0$  anschaulich zu beschreiben.

(315) ( $s_2 \neq 0, \operatorname{sgn}(s_2) = \operatorname{sgn}(u_2) = \operatorname{sgn}(\rho) = \operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\tau)$ )

Es sind alle vier Bedingungen erfüllt. D.h. „ $r_0$  zeigt auf den Pivot“, „ $r_1$  zeigt vom Pivot weg“ und  $base_0$  und  $base_1$  bilden den Rand der offenen Strecke  $S$ . Damit sind die basepoints auch die mittleren Kontrollpunkte  $\bar{b}_1$  und  $\bar{b}_2$ .

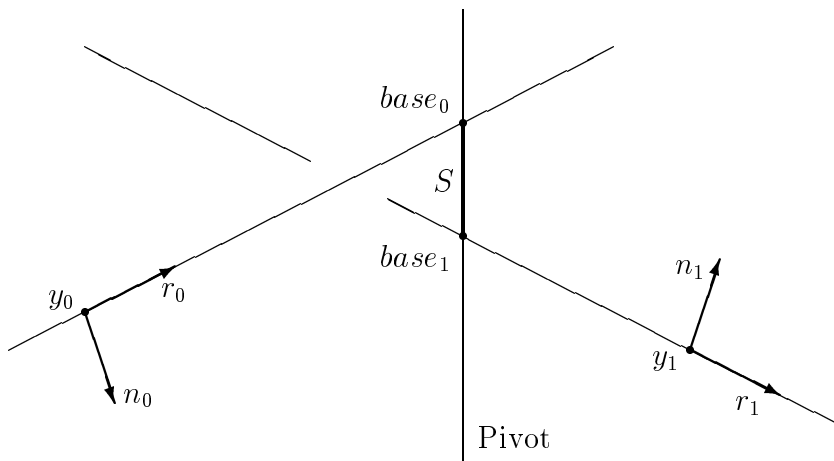


Abbildung 8: Der Fall (315)

(407) ( $s_2 \neq 0, \rho s_2 > 0, \sigma s_2 \leq 0$ )

Daraus folgt, daß  $\rho\sigma \leq 0$  und damit Bedingung (IV) nicht erfüllt ist. D.h. „ $base_0$

liegt nicht in  $H_1$ “ und somit ist  $S$  ein offener Strahl, dessen Rand  $base_1$  bildet. Der mittlere Kontrollpunkt  $\tilde{b}_2$  kann auf diesem Strahl frei gewählt werden.  $\tilde{b}_1$  und  $\tilde{b}_3$  müssen dann entsprechend berechnet werden.

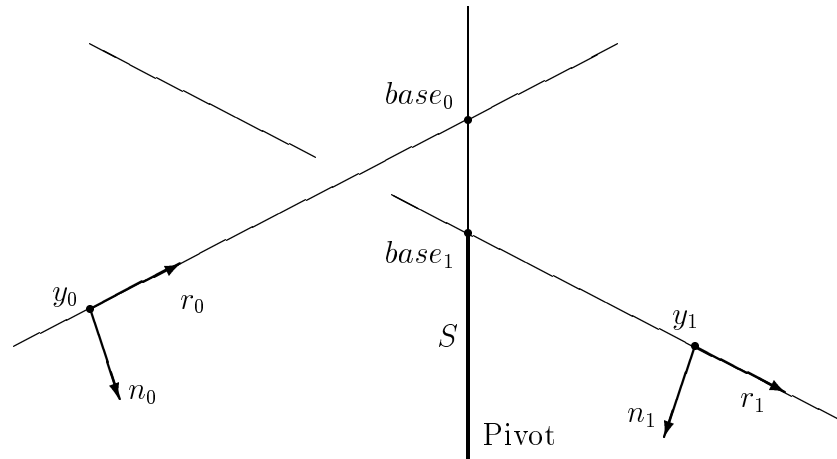


Abbildung 9: Der Fall (407)

Die Bedingungen (I) und (II) spielen hier für die Gradreduzierung keine Rolle. In diesem Fall ist es egal, ob „ $r_0$  auf den Pivot zeigt“ bzw. „ $r_1$  vom Pivot weg zeigt“. Denn das hat keinen Einfluß auf die Menge  $S$ . Ob die beiden Tangentialvektoren „in die richtige Richtung zeigen“ wird aber später bei der Wahl eines  $\tilde{b}_2$  wichtig.

$$\rho\sigma = 0$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn  $\sigma = 0$ , denn  $\rho \neq 0$ . Somit ist der Tangentialvektor  $r_0$  echt parallel zur Ebene  $P_1$ , was heißt, daß  $base_0$  nicht existiert.

$$(408) \quad (s_2 \neq 0, \rho s_2 > 0, \sigma s_2 < 0)$$

Damit gilt  $\rho\sigma \geq 0$  und damit sind die Bedingungen (III) und (IV) erfüllt. Doch (I) oder (II) oder beide sind nicht erfüllt, sonst läge Fall (315) vor. D.h. „ $r_0$  zeigt nicht auf den Pivot“ und/oder „ $r_1$  zeigt auf den Pivot“.  $S$  ist wie in (315) eine offene Strecke, deren Rand  $base_0$  und  $base_1$  bilden. Doch in diesem Fall ist  $S$  die Menge auf der der mittlere Kontrollpunkt  $\tilde{b}_2$  frei gewählt werden kann.

$$(409) \quad (s_2 \neq 0, \rho s_2 \leq 0, \sigma s_2 < 0)$$

Damit gilt  $\rho\sigma \geq 0$ , wobei zu beachten ist, daß  $\sigma \neq 0$  gilt. Dieser Fall ist ähnlich wie (407), mit dem Unterschied, daß hier Bedingung (III) nicht erfüllt ist. D.h. „ $base_1$

liegt nicht in  $H_0$ “ und somit ist  $S$  ein offener Strahl, dessen Rand  $base_0$  bildet. Der mittlere Kontrollpunkt  $\tilde{b}_2$  kann auch hier auf diesem Strahl frei gewählt werden und  $\tilde{b}_1$  und  $\tilde{b}_3$  müssen wieder entsprechend berechnet werden.

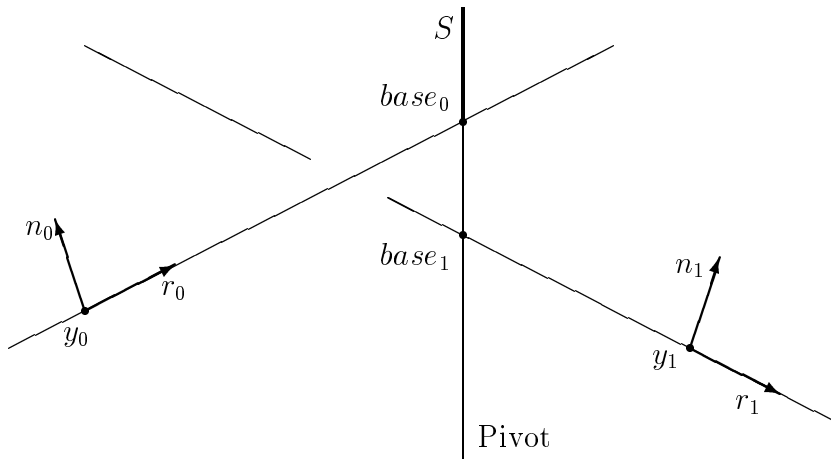


Abbildung 10: Der Fall (409)

Die Bemerkungen zu den Bedingungen (I) und (II) sind äquivalent zu denen in (407).

$$\rho s_2 = 0$$

Dies ist genau dann der Fall, wenn  $\rho = 0$ , denn  $s_2 \neq 0$ . Somit liegen  $r_0, r_1$  und  $y_1 - y_0$  in einer Ebene, was heißt, daß  $base_0 = base_1$  ist.

(505) ( $s_2 \neq 0, \rho s_2 \leq 0, \sigma s_2 \geq 0$ )

Damit gilt  $\rho\sigma \leq 0$  und damit sind die Bedingungen (III) und (IV) nicht erfüllt. D.h.  $S = \emptyset$ . Und damit ist eine Gradreduzierung nicht möglich. Das Problem muß mit einer Bernstein-Bézier-Kurve fünften Grades gelöst werden.

$$\rho s_2 = 0 \text{ oder } \rho\sigma = 0$$

Hier kann es zu drei verschiedenen Situationen kommen.

Ist  $\rho = 0$  und  $\sigma \neq 0$ , so fallen beide basepoints zusammen. Sie teilen dabei genau den Pivot in die Mengen  $H_0 \cap P_1$  und  $H_1 \cap P_0$ . Diese Mengen haben keine gemeinsame Schnittmenge.  $base_0 = base_1$  ist nur die Schnittmenge ihrer Ränder.

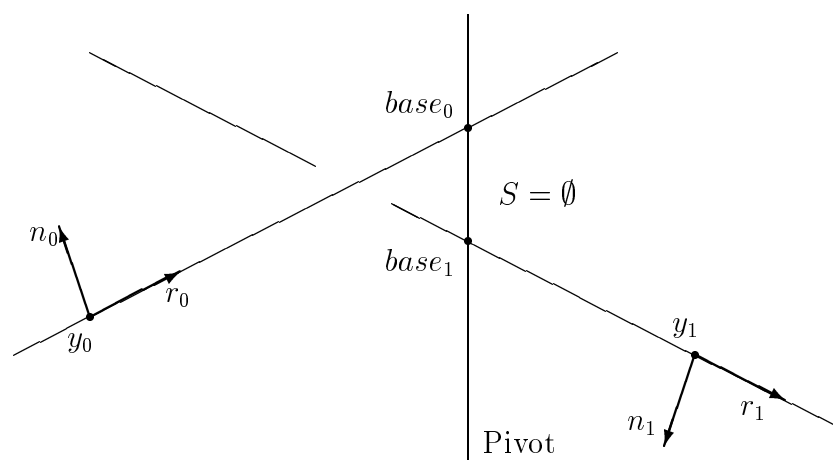


Abbildung 11: Der Fall (505)

Ist  $\rho \neq 0$  und  $\sigma = 0$ , so ist der Tangentenvektor  $r_1$  echt parallel zur Ebene  $P_1$ . Daß heißt,  $base_0$  existiert nicht.  $S$  ist leer, weil  $H_0$  (wie in (504)) von  $P_1$  „wegzeigt“.

Ist  $\rho = 0$  und  $\sigma = 0$ , so liegt der Tangentenvektor  $r_1$  in der Ebene  $P_1$ . Auch hier existiert  $base_0$  nicht und  $H_0$  „zeigt weg von  $P_1$ “, mit dem Unterschied, daß hier der Rand von  $H_0$  ganz in  $P_1$  liegt.

### 3.3 Symmetrien und alternative Einteilung der Fälle

Der am Ende von Kapitel 2 vorgestellte Algorithmus betrachtet das Problem der Gradreduzierung anhand der Lage des Frenet–Dreibeins an  $y_1$  zum Frenet–Dreibein an  $y_0$ . Dies könnte auch umgekehrt geschehen. Aufgrund der geometrischen Anschauung wissen wir, daß wir die selben Möglichkeiten der Gradreduzierung hätten, wenn die Kurve in anderer Richtung durchlaufen werden soll. Denn ein Vertauschen von  $y_0$  und  $y_1$ , von  $R_0$  und  $R_1$  und von  $H_0$  und  $H_1$  hätte keinen Einfluß auf die Aussagen in Satz 3.1. Man könnte deshalb zwei  $G^2$ –Hermite–Interpolationsprobleme (a) und (b) als *zueinander symmetrisch* bezeichnen, wenn (a) in anderer Richtung durchlaufen (b) ergibt und umgekehrt.

Dieser Idee folgend wollen wir an dieser Stelle noch eine alternative Einteilung der Fälle vorstellen. Dabei teilen wir danach ein, ob Schnittmengen  $H_0 \cap H_1$ ,  $R_0 \cap H_1$  und  $R_1 \cap H_0$  ein Punkt, eine offene Strecke, ein offener Strahl oder eine Gerade sind. Wir erhalten diese Fälle:

- $H_0 \cap H_1 = \emptyset$   
Dies sind alle Fälle, bei denen Grad 5 notwendig ist.
- $H_0 \cap H_1$  ist eine offene Strecke aber es gilt  $R_0 \cap H_1 = \emptyset$  oder  $R_1 \cap H_0 = \emptyset$   
Dies ist der Fall (408).
- $H_0 \cap H_1$  ist ein offener Strahl  
Dies sind die Fälle (406), (407) mit  $\sigma \neq 0$  und (409).
- $H_0 \cap H_1$  ist eine Gerade  
Dies sind die Fälle (405) und (407) mit  $\sigma = 0$ .
- $R_0 \cap H_1$  und  $R_1 \cap H_0$  sind Punkte  
Dies ist Fall (315).
- Von  $R_0 \cap H_1$  und  $R_1 \cap H_0$  ist eins leer und eins eine offene Strecke oder ein offener Strahl  
Dies sind die Fälle (401), (402), (403) und (404)
- $R_0 \cap H_1$  und  $R_1 \cap H_0$  sind beide offene Strahle  
Dies sind die Fälle (301) und (311). Auch wenn wir hier einen polynomialen Fall und einen rationalen Fall vorliegen haben. (301) unterscheidet sich von (311) aber nur insofern, daß die polynomiale „Speziallösung“ einfach zu ermitteln ist.
- $R_0 \cap H_1$  und  $R_1 \cap H_0$  sind beide offene Strecken  
Dies ist der Fall (314).
- Von  $R_0 \cap H_1$  und  $R_1 \cap H_0$  ist eins eine offene Strecke und ein ein offener Strahl  
Dies sind die Fälle (312) und (313).

Alle  $G^2$ -Interpolationsprobleme, die einem dieser alternativen Fälle zugeordnet werden sind zueinander symmetrisch. Diese Einteilung dient jedoch nur nochmal der geometrischen Anschauung. Zur Berechnung der Lösungen benutzen wir die zuvor vorgestellte Einteilung.

## 3.4 Lösungsalgorithmus

Wir wollen zum Schluß dieses Kapitels einen Algorithmus angeben, mit dem in den unterschiedlichen Fällen Kurven gefunden werden können, die das gegebene  $G^2$ -Hermite-Problem lösen. Dieser Algorithmus ist eine Vereinfachung des Algorithmus in [Schütt 95].

### 3.4.1 Grad 5

Ist keine Gradreduzierung möglich, so wähle man  $\alpha_i > 0$ ,  $\beta_i \in \mathbb{R}$  und berechne  $\gamma_i = \frac{5}{4}\alpha_i\kappa_i$ .

### 3.4.2 Grad 4

In dem gegebenen Algorithmus ist jeweils  $x_4 < 0$  frei zu wählen und dann  $x_0, x_1, x_2, x_3$  (je nach Fall) zu berechnen oder frei zu wählen. Mit der freien Wahl von  $x_4$  wird gewährleistet, daß auch rationale Kurven, die das Problem lösen, bestimmt werden können. Hier sollen aber nur Algorithmen für polynomiale Kurven angegeben werden. Deshalb wird  $x_4 = 6$  gesetzt (siehe [Schütt 95] Seite 40).  $\tilde{\alpha}_i, \tilde{\beta}_i, \tilde{\gamma}_i$  berechnen sich dann wie folgt:

(401)

$$\begin{aligned} \text{wähle} \quad & \tilde{\gamma}_0 > \max\{0, u_1\}, \tilde{\beta}_1 \in \mathbb{R} \\ \text{setze} \quad & \tilde{\alpha}_0 = \sqrt{\frac{3}{4\kappa_0}\tilde{\gamma}_0}, \quad \tilde{\gamma}_1 = \tilde{\gamma}_0 - u_1, \quad \tilde{\alpha}_1 = \sqrt{\frac{3}{4\kappa_1}\tilde{\gamma}_1} \end{aligned}$$

(402)–(404)

$$\begin{aligned} \text{wähle} \quad & \tilde{\alpha}_0 > 0, \quad \tilde{\alpha}_1 > 0 \\ \text{setze} \quad & \tilde{\gamma}_0 = \frac{4}{3}\tilde{\alpha}_0^2\kappa_0, \quad \tilde{\gamma}_1 = \frac{4}{3}\tilde{\alpha}_1^2\kappa_1, \quad \tilde{\beta}_1 = \frac{-\tilde{\gamma}_0 + \tilde{\gamma}_1 t_1 + u_1}{s_1} \end{aligned}$$

(405)

$$\begin{aligned} \text{wähle} \quad & \tilde{\alpha}_0 > 0 \\ \text{setze} \quad & \tilde{\gamma}_0 = \frac{3}{4}\kappa_0\tilde{\alpha}_0^2, \quad \tilde{\gamma}_1 = -\frac{u_2}{t_2}, \quad \tilde{\alpha}_1 = \sqrt{-\frac{3u_2}{4\kappa_1 t_2}}, \quad \tilde{\beta}_1 = \frac{\nu - \tilde{\gamma}_0}{s_1} \end{aligned}$$

(406)

$$\begin{aligned} \text{wähle} \quad & \tilde{\beta}_1 \in \mathbb{R} \\ \text{setze} \quad & \tilde{\gamma}_0 = \nu, \quad \tilde{\alpha}_0 = \sqrt{\frac{3\nu}{4\kappa_0}}, \quad \tilde{\gamma}_1 = -\frac{u_2}{t_2}, \quad \tilde{\alpha}_1 = \sqrt{-\frac{3u_2}{4\kappa_1 t_2}} \end{aligned}$$

(407)–(409)

$$\text{wähle} \quad \tilde{\gamma}_0:$$

$$(407) \quad \tilde{\gamma}_0 > \frac{\rho}{s_2}$$

$$(408) \quad 0 < \tilde{\gamma}_0 < \frac{\rho}{s_2}$$

$$(409) \quad \tilde{\gamma}_0 > 0$$

$$\text{setze} \quad \tilde{\gamma}_1 = \frac{\rho}{\sigma} - \frac{s_2}{\sigma}\tilde{\gamma}_0, \quad \tilde{\alpha}_0 = \sqrt{\frac{3\tilde{\gamma}_0}{4\kappa_0}}, \quad \tilde{\alpha}_1 = \sqrt{\frac{3\tilde{\gamma}_1}{4\kappa_1}}, \quad \tilde{\beta}_1 = \frac{\tilde{\gamma}_1 t - 2 - u_2}{s_2}$$

### 3.4.3 Grad 3

(301)

$$\bar{\alpha}_0 = \sqrt{\frac{2u_1}{3\kappa_0}}, \quad \bar{\alpha}_1 = \sqrt{\frac{2u_1}{3\kappa_1}}$$

(311)–(314)

wähle  $\bar{\alpha}_0$  und  $\bar{\alpha}_1$ :

$$(311) \quad \bar{\alpha}_0 > \max\left\{0, \frac{\mu}{s_1}\right\}, \quad \bar{\alpha}_1 > \max\left\{0, \frac{u_1}{s_1}\right\}$$

$$(312) \quad 0 < \bar{\alpha}_0 < \frac{\mu}{s_1}, \quad \bar{\alpha}_1 > \max\left\{0, \frac{u_1}{s_1}\right\}$$

$$(313) \quad 0 < \bar{\alpha}_0 < \frac{\mu}{s_1}, \quad 0 < \bar{\alpha}_1 < \frac{u_1}{s_1}$$

$$(314) \quad \bar{\alpha}_0 > \max\left\{0, \frac{\mu}{s_1}\right\}, \quad 0 < \bar{\alpha}_1 < \frac{u_1}{s_1}$$

$$\text{setze} \quad \bar{w}_0 = \frac{3}{2} \frac{\kappa_0 \bar{\alpha}_0^2}{u_1 - \bar{\alpha}_1 s_1}, \quad \bar{w}_1 = 1, \quad \bar{w}_2 = 1, \quad \bar{w}_3 = \frac{3}{2} \frac{\lambda \kappa_1 \bar{\alpha}_1^2}{\mu - \bar{\alpha}_0 s_1}$$

(315)

$$\bar{\alpha}_0 = \frac{\tau}{\sigma}, \quad \bar{\alpha}_1 = \frac{u_2}{s_2}$$

$$\bar{w}_0 = \frac{3}{2} \frac{\tau^2 s_2 \kappa_0}{\sigma^2 \rho}, \quad \bar{w}_1 = 1, \quad \bar{w}_2 = 1, \quad \bar{w}_3 = \frac{3}{2} \frac{u_2^2 \sigma \kappa_1}{s_2^2 \rho}$$



## 4. Regularisierung

Nachdem nun für ein gegebenes  $G^2$ -Hermite-Interpolationsproblem die Möglichkeiten der Gradreduzierung ermittelt sind und ein Lösungsalgorithmus vorliegt, um eine Bernstein-Bézier-Kurve zu bestimmen, die das Problem löst, müssen jetzt noch die freien Faktoren geschickt gewählt werden. Wie dies geschehen kann, wird in diesem Kapitel gezeigt. Dabei wird zunächst aufgelistet, wieviele Freiheitsgrade in den jeweiligen Fällen vorliegen und es wird die Grundidee vorgestellt, wie diese festgelegt werden können. Ausführlich wird auf die Regularisierung der Fälle (407), (408) und (409) und möglicherweise dabei auftretende Probleme eingegangen. Diese Probleme, die auch in den anderen Fällen berücksichtigt werden müssen, sind zum einen zu große Krümmungen und zum anderen Kontrollpunkte, die zu weit außerhalb liegen.

### 4.1 Freiheitsgrade

- Bernstein-Bézier-Kurven fünften Grades

Vier Freiheitsgrade:  $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R}_{>0}$ ;  $\beta_0, \beta_1 \in \mathbb{R}$

Für  $\gamma_i$  gilt:  $\gamma_i = \frac{5}{4}\alpha_i^2\kappa_i$ ,  $i = 0, 1$ .

Soll das Problem mit einer rationalen Bernstein-Bézier-Kurve gelöst werden, so sind 2 Gewichte frei wählbar:  $w_1, w_4 \in \mathbb{R}_{>0}$

für die anderen Gewichte gilt:  $w_0 = w_5 = 1$ ,  $w_2 = \frac{5\kappa_0 w_1^2 \alpha_0^2}{4\gamma_0}$ ,  $w_3 = \frac{5\kappa_1 w_4^2 \alpha_1^2}{4\gamma_1}$

- nicht planare Bernstein-Bézier-Kurven vierten Grades

Ein Freiheitsgrad: der mittlere Kontrollpunkt  $\tilde{b}_2 \in S$

damit sind  $\tilde{\beta}_0, \tilde{\beta}_1, \tilde{\gamma}_0$  und  $\tilde{\gamma}_1$  festgelegt.

Für  $\tilde{\alpha}_i$  gilt:  $\tilde{\alpha}_i = \sqrt{\frac{3\tilde{\gamma}_i}{4\kappa_i}}$ ,  $i = 0, 1$ .

Soll das Problem mit einer rationalen Bernstein-Bézier-Kurve gelöst werden, so ist ein Gewicht frei wählbar:  $\tilde{w}_1$  oder  $\tilde{w}_3 \in \mathbb{R}_{>0}$

für die anderen Gewichte gilt:  $\tilde{w}_0 = \tilde{w}_4 = 1$ ,  $\tilde{w}_2 = \frac{4\kappa_0 \tilde{w}_1^2 \tilde{\alpha}_0^2}{3\tilde{\gamma}_0} = \frac{4\kappa_1 \tilde{w}_3^2 \tilde{\alpha}_1^2}{3\tilde{\gamma}_1}$ .

- planare Bernstein-Bézier-Kurven vierten Grades

Zwei Freiheitsgrade: der mittlere Kontrollpunkt  $\tilde{b}_2 \in S$

damit sind  $\tilde{\beta}_0, \tilde{\beta}_1, \tilde{\gamma}_0$  und  $\tilde{\gamma}_1$  festgelegt, doch mit dem Unterschied, daß  $S$  zweidimensional ist und somit  $\tilde{\beta}_0$  und  $\tilde{\gamma}_0$  unabhängig sind von  $\tilde{\beta}_1$  und  $\tilde{\gamma}_1$ .

Der Rest gilt äquivalent zum nicht planaren Fall.

- nicht planare Bernstein-Bézier-Kurven dritten Grades  
keine Freiheitsgrade.
- planare Bernstein-Bézier-Kurven dritten Grades  
Zwei Freiheitsgrade:  $\bar{\alpha}_0 \in R_0 \cap H_1$ ,  $\bar{\alpha}_1 \in R_1 \cap H_0$ .

## 4.2 Grundidee und deren Umsetzung

Die Grundidee für das Auswählen einer Lösung ist, daß für den zweiten und den vorletzten Kontrollpunkt, wenn diese auf den Geraden

$$y_i + (-1)^i \alpha_i r_i, \quad \alpha_i > 0, \quad i = 0, 1$$

freigewählt werden können, gelten soll:

$$\alpha_i = \frac{arc}{n}, \quad i = 0, 1$$

wobei  $n$  der Grad der Bernstein-Bézier-Kurve ist und  $arc$  eine gute Näherung der Bogenlänge zwischen  $y_0$  und  $y_1$ .

Eine genaue Begründung für dieses Vorgehen bleiben wir hier schuldig. Dieser Ansatz liegt jedoch auf der Hand, wenn man sich Kontrollnetze glatter Kurven ansieht. Das Kontrollnetz schmiegt sich dann mit etwa gleichem Abstand zwischen den Kontrollpunkten an die Kurve an.

Die Bogenlänge nähern wir wie folgt an:

$$arc = \|y_1 - y_0\| \left( 1 + \frac{\kappa_0 \kappa_1 \|y_1 - y_0\|^2}{24} \right)$$

Sind der dritte und der drittletzte Kontrollpunkt auf den Geraden

$$y_i + (-1)^i \beta_i r_i + \gamma_i n_i, \quad \beta_i \in \mathbb{R}, \quad \gamma_i = \frac{n}{n-1} \kappa_i \alpha_i^2$$

frei wählbar, so soll gelten:

$$\beta_i = \frac{2 \cdot arc}{n}$$

Dies bedeutet für die jeweiligen Fälle:

- Bernstein-Bézier-Kurven fünften Grades  
Die vier freien Parameter werden nach dieser Grundidee eindeutig festgelegt.

- nicht planare Bernstein-Bézier-Kurven vierten Grades

Auf die Fälle (407), (408) und (409) gehen wir gleich gesondert ein.

(405) Die Gerade  $R_1$  liegt echt parallel zum Pivot. Damit sind  $\tilde{\gamma}_1$  und  $\tilde{\alpha}_1$  durch den Abstand zwischen dem Pivot und  $R_1$  eindeutig bestimmt.

$\tilde{\alpha}_0$  kann frei gewählt werden.  $\tilde{\gamma}_0$  und  $\tilde{\beta}_0$  berechnen sich daraus.

(406) Die Geraden  $R_0$ ,  $R_1$  und der Pivot liegen echt parallel zueinander. Damit sind  $\tilde{\gamma}_0$  und  $\tilde{\alpha}_0$  durch den Abstand zwischen dem Pivot und  $R_0$  und  $\tilde{\gamma}_1$  und  $\tilde{\alpha}_1$  durch den Abstand zwischen dem Pivot und  $R_1$  eindeutig bestimmt.

$\tilde{\beta}_0$  oder  $\tilde{\beta}_1$  kann noch frei gewählt werden.

Dies kann mithilfe der Bogenlänge gemacht werden oder indem  $\tilde{\beta}_0 = \frac{1}{2}\langle (y_1 - y_0), r_0 \rangle = \frac{1}{2}u_0$  gesetzt wird.

- planare Bernstein-Bézier-Kurven vierten Grades

Für (402), (403) und (404) kann genau nach der Grundidee verfahren werden, indem  $\tilde{\alpha}_0 = \tilde{\alpha}_1 = arc/4$  gesetzt wird.  $\tilde{\gamma}_0$  und  $\tilde{\beta}_0$  berechnen sich daraus.

Bei (401) ist zu beachten, daß  $R_0$  und  $R_1$  parallel liegen.

Deshalb muß  $\tilde{\alpha}_0 > \sqrt{\frac{3u_1}{4\kappa_0}}$  (wenn  $u_1 \geq 0$ ) bzw.  $\tilde{\alpha}_1 > \sqrt{\frac{-3u_1}{4\kappa_1}}$  (wenn  $u_1 < 0$ ) gewählt werden.  $\tilde{\beta}_0$  oder  $\tilde{\beta}_1$  können anhand der Bogenlänge gewählt werden.

- nicht planare Bernstein-Bézier-Kurven dritten Grades

keine Freiheitsgrade.

- planare Bernstein-Bézier-Kurven dritten Grades

In den Fällen (311) bis (314) kann versucht werden, die Kontrollpunkte  $\bar{b}_1$  und  $\bar{b}_2$  anhand der Bogenlänge festzulegen. Es muß jedoch darauf geachtet werden, ob die Kontrollpunkte auf diese Weise in der Menge  $R_0 \cap H_1$  bzw.  $R_1 \cap H_0$  liegen. Ist dies nicht der Fall, dann setzt man  $\tilde{\alpha}_i$  gleich einem Faktor  $k$  ( $0 < k < 1$ ) mal dem größtmöglichen Wert, wenn der zulässige Bereich für  $\bar{b}_i$  ein offenes Intervall ist. Ist der zulässige Bereich für  $\bar{b}_i$  ein offener Strahl, so setzt man  $\tilde{\alpha}_i$  gleich einem Faktor  $k$  ( $k > 1$ ) mal dem kleinstmöglichen Wert.

Im Fall (301) liegt alles fest.

### 4.3 Umsetzung in den Fällen (407), (408) und (409)

Bei diesen nicht planaren Bernstein-Bézier-Kurven können  $\tilde{\alpha}_0$  und  $\tilde{\alpha}_1$  nicht unabhängig von einander gewählt werden. Um die Grundidee umzusetzen, daß  $\tilde{\alpha}_i = arc/4$  gewählt wird, setzen wir zunächst beide  $\tilde{\alpha}_i = arc/4$  und bestimmen auf dem Pivot die jeweils

dazugehörigen mittleren Kontrollpunkte  $b_{2,0}^{\sim}$  und  $b_{2,1}^{\sim}$ . Diese beiden Punkte werden daraufhin untersucht, ob sie in  $S$  liegen, und somit zulässige mittlere Kontrollpunkte sind. Gegebenenfalls wird dann noch zwischen den beiden zulässigen mittleren Kontrollpunkten der tatsächliche mittlere Kontrollpunkt  $b_2^{\sim}$  ausgewählt.

Außerdem spielt es bei diesen Fällen eine Rolle, ob „ $r_0$  auf den Pivot zeigt“ und ob „ $r_1$  vom Pivot weg zeigt“. In (408) ist mindestens eins davon nicht gegeben.

### 4.3.1 Das Verhalten zwischen $\tilde{\alpha}_0$ und $\tilde{\alpha}_1$

Zunächst wollen wir das Verhalten zwischen  $\tilde{\alpha}_0$  und  $\tilde{\alpha}_1$  betrachten und daraus auch die Wertebereiche für  $\tilde{\alpha}_0$  und  $\tilde{\alpha}_1$  bestimmen.

Dazu setzen wir die beiden Darstellungen von  $b_2^{\sim}$  gleich:

$$y_0 + \tilde{\beta}_0 r_0 + \tilde{\gamma}_0 n_0 = y_1 - \tilde{\beta}_1 r_1 + \tilde{\gamma}_1 n_1$$

$$\Leftrightarrow \tilde{\beta}_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \tilde{\gamma}_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} - \tilde{\beta}_1 \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} + \tilde{\gamma}_1 \begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} \tilde{\beta}_0 &= u_0 - \tilde{\beta}_1 s_0 + \tilde{\gamma}_1 t_0 \\ \tilde{\gamma}_0 &= u_1 - \tilde{\beta}_1 s_1 + \tilde{\gamma}_1 t_1 \\ 0 &= u_2 - \tilde{\beta}_1 s_2 + \tilde{\gamma}_1 t_2 \end{aligned}$$

daraus folgt:

$$\tilde{\beta}_1 = \frac{u_2}{s_2} + \frac{t_2}{s_2} \tilde{\gamma}_1 \quad \text{weil } s_2 \neq 0.$$

Und somit

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_0 &= u_0 - \left( \frac{u_2}{s_2} + \frac{t_2}{s_2} \tilde{\gamma}_1 \right) s_0 + \tilde{\gamma}_1 t_0 \\ \tilde{\gamma}_0 &= u_1 - \left( \frac{u_2}{s_2} + \frac{t_2}{s_2} \tilde{\gamma}_1 \right) s_1 + \tilde{\gamma}_1 t_1, \end{aligned}$$

Woraus folgt

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_0 &= \frac{u_0 s_2 - u_2 s_0}{s_2} + \frac{t_0 s_2 - t_2 s_0}{s_2} \tilde{\gamma}_1 = \frac{\phi}{s_2} - \frac{\psi}{s_2} \tilde{\gamma}_1 \\ \tilde{\gamma}_0 &= \frac{u_1 s_2 - s_1 u_2}{s_2} + \frac{t_1 s_2 - s_1 t_2}{s_2} \tilde{\gamma}_1 = \frac{\rho}{s_2} - \frac{\sigma}{s_2} \tilde{\gamma}_1 \end{aligned}$$

mit  $\rho = u_1 s_2 - u_2 s_1$ ,  $\sigma = t_2 s_1 - s_2 t_1$ ,  $\phi = u_0 s_2 - u_2 s_0$ ,  $\psi = t_0 s_2 - t_2 s_0$ .

Wegen der Bedingungen  $\tilde{\alpha}_0 = \sqrt{\frac{3}{4\kappa_0} \tilde{\gamma}_0}$  und  $\tilde{\alpha}_1 = \sqrt{\frac{3}{4\kappa_1} \tilde{\gamma}_1}$  folgt:

$$\tilde{\alpha}_0 = \sqrt{\frac{3}{4\kappa_0} \frac{\rho}{s_2} - \frac{\kappa_1}{\kappa_0} \frac{\sigma}{s_2} \tilde{\alpha}_1^2} \quad \text{bzw.} \quad \tilde{\alpha}_1 = \sqrt{\frac{3}{4\kappa_1} \frac{\rho}{\sigma} - \frac{\kappa_0}{\kappa_1} \frac{s_2}{\sigma} \tilde{\alpha}_0^2}$$

Da  $\tilde{\alpha}_0$  und  $\tilde{\alpha}_1$  beide größer Null gewählt werden müssen, ergeben sich daraus für  $\tilde{\alpha}_0$  und  $\tilde{\alpha}_1$  in den einzelnen Fällen folgende Definitionsbereiche:

(407) wegen  $\rho s_2 > 0$  und  $\sigma s_2 \leq 0$  gilt:

$$\tilde{\alpha}_0 > \sqrt{\frac{3}{4\kappa_0} \frac{\rho}{s_2}} \quad \text{und} \quad \tilde{\alpha}_1 > 0$$

und je größer  $\tilde{\alpha}_0$  ist desto größer ist  $\tilde{\alpha}_1$ .

(408) wegen  $\rho s_2 > 0$  und  $\sigma s_2 > 0$  gilt:

$$0 < \tilde{\alpha}_0 < \sqrt{\frac{3}{4\kappa_0} \frac{\rho}{s_2}} \quad \text{und} \quad 0 < \tilde{\alpha}_1 < \sqrt{\frac{3}{4\kappa_1} \frac{\rho}{\sigma}}$$

und je größer  $\tilde{\alpha}_0$  ist desto kleiner ist  $\tilde{\alpha}_1$ .

(409) wegen  $\rho s_2 \leq 0$  und  $\sigma s_2 < 0$  gilt:

$$\tilde{\alpha}_0 > 0 \quad \text{und} \quad \tilde{\alpha}_1 > \sqrt{\frac{3}{4\kappa_1} \frac{\rho}{\sigma}}$$

und je größer  $\tilde{\alpha}_0$  ist desto größer ist  $\tilde{\alpha}_1$ .

An den Definitionsbereichen von  $\tilde{\alpha}_0$  und  $\tilde{\alpha}_1$  kann man nochmal erkennen, wie der zulässige Bereich für  $\tilde{b}_2$ , die Menge  $S$ , aussehen muß. In (407) und (409) können  $\tilde{\alpha}_0$  und  $\tilde{\alpha}_1$  und damit  $\tilde{\gamma}_0$  und  $\tilde{\gamma}_1$  unendlich groß gewählt werden.  $S$  ist ein offener Strahl. In (408) können diese Faktoren nur in einem offenen Intervall gewählt werden,  $S$  ist eine beidseitig offene Strecke.

### 4.3.2 Auswahl des $\tilde{b}_2$ in (407) und (409)

Wir beschreiben die Menge  $S$  nun als:

$$S = \{\text{basepoint} + \delta \cdot \text{pivotdirection}, \quad \delta > 0\}$$

die Auswahl des mittleren Kontrollpunkts  $\tilde{b}_2$  beschränkt sich damit darauf, ein geeignetes  $\delta$  finden.

Hierbei ist *basepoint* jeweils der Rand von  $S$ , d.h.:

$$\text{basepoint} := \begin{cases} \text{base}_1 = y_1 - \frac{u_2}{s_2} r_1 & , \quad (407) \\ \text{base}_0 = y_0 + \frac{t}{\sigma} r_0 & , \quad (409) \end{cases}$$

Und *pivotdirection* berechnet sich wie folgt:

Der Pivot liegt sowohl in  $P_0$  als auch in  $P_1$ , damit ist er senkrecht zu  $\eta_0$  und  $\eta_1$  und seine Richtung ist somit  $\eta_0 \times \eta_1$ . Damit dieser Vektor die richtige Orientierung bekommt, d.h. in die Halbebenen  $H_0$  und  $H_1$  zeigt, wird noch das Vektorprodukt mit  $n_0$  oder  $n_1$  gebildet.

$$pivotdirection := \begin{cases} \eta_0 \times \eta_1 \langle \eta_0 \times \eta_1, n_1 \rangle & , \quad (407) \\ \eta_0 \times \eta_1 \langle \eta_0 \times \eta_1, n_0 \rangle & , \quad (409) \end{cases}$$

Um die möglichen Kontrollpunkte  $b_{2,0}$  und  $b_{2,1}$  zu bestimmen, die zu  $\tilde{\alpha}_0 = \tilde{\alpha}_1 = \frac{arc}{4}$  gehören, müssen die dazugehörigen  $\delta$  berechnet werden. Wir nennen diese  $\delta_0$  und  $\delta_1$  und für sie gilt:

$$\delta_i = \frac{\tilde{\gamma}_i - \langle n_i, (basepoint - y_i) \rangle}{\langle n_i, pivotdirection \rangle}, \quad i = 0, 1$$

mit

$$\tilde{\gamma}_i = \frac{3}{4} \kappa_i \left( \frac{arc}{4} \right)^2, \quad i = 0, 1$$

was aus der folgenden Skizze deutlich wird:

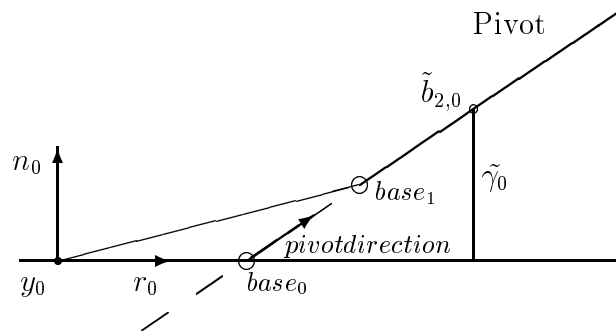


Abbildung 12: Berechnung des  $\delta_i$

Als  $\tilde{b}_2$  wird nun das  $b_{2,i}$  ausgewählt, zu dem das kleinere, positive  $\delta_i$  gehört, also das  $b_{2,i}$ , das in  $S$  näher am *basepoint* liegt.

$$\tilde{b}_2 := basepoint + \delta \cdot pivotdirection$$

mit

$$\delta = \begin{cases} \delta_0 & , \quad \delta_1 \leq 0 \\ \delta_1 & , \quad \delta_0 \leq 0 \\ \min\{\delta_0, \delta_1\} & , \quad \delta_0 > 0 \quad \text{und} \quad \delta_1 > 0 \end{cases}$$

Wir verfahren so, um eine Kurve zu erhalten, die nicht zu sehr ausbricht. In den meisten Fällen gelingt dies auch auf diese Weise. Wir werden aber auch noch darauf zu sprechen kommen, wie man vorgehen kann wenn ein so gewähltes  $\tilde{b}_2$  „weit draußen liegt“.

Es ist noch anzumerken, daß in (407)  $\delta_1 > 0$  und in (409)  $\delta_0 > 0$  gilt, weil in (407)  $\langle n_1, (basepoint - y_1) \rangle = 0$  und in (409)  $\langle n_0, (basepoint - y_0) \rangle = 0$  ist. Dadruch ist die Existenz eines  $\tilde{b}_2$  gesichert.

Ist  $\sigma = 0$ , so gibt es keine Abhängigkeit zwischen  $\tilde{\alpha}_0$  und  $\tilde{\alpha}_1$ .  $R_0$  liegt echt parallel zum Pivot und somit ist

$$\tilde{\alpha}_0 = \frac{\langle (y_1 - y_0), \eta_1 \rangle}{\langle n_0, \eta_1 \rangle} = \frac{\tau}{s_0 t_2 - s_2 t_1}$$

und  $\tilde{\alpha}_1 > 0$  kann frei gewählt werden, der Grundidee folgend gleich  $\frac{arc}{4}$ .  $\tilde{\gamma}_1$  und  $\tilde{\beta}_1$  berechnen sich daraus.

### 4.3.3 Auswahl des $\tilde{b}_2$ , wenn $u_2 s_2 < 0$ oder $\tau \sigma < 0$

Ist  $u_2 s_2 < 0$ , so „zeigt  $r_0$  vom Pivot weg“.  $\tilde{b}_2$  sollte also nicht zu nah an  $base_0$  gewählt werden, da die Kurve sonst ausbricht. Ist  $\tau \sigma < 0$ , so „zeigt  $r_1$  auf den Pivot“.  $\tilde{b}_2$  sollte also nicht zu nah an  $base_1$  gewählt werden, da die Kurve sonst auch hier ausbricht. Um solche Ausbrecher zu vermeiden, verändern wir die Auswahl des mittleren Kontrollpunkts  $\tilde{b}_2$  wie folgt:

Sei  $\tau \sigma < 0$  so wähle man

$$\tilde{\alpha}_0 = k \cdot \frac{arc}{4} \quad , \quad k > 1$$

Damit wird  $\tilde{b}_{2,0}$  von  $base_0$  „weggeschoben“. Im Programm haben wir  $k = \sqrt{2}$  gesetzt und damit  $\tilde{\gamma}_0$  verdoppelt. Für  $\delta$  soll dann gelten:

$$\delta \geq \delta_0$$

woraus folgt:

$$\delta = \begin{cases} \delta_1 & , \quad \delta_0 \leq 0 \\ \delta_0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Für  $u_2 s_2 < 0$  verfahren wir äquivalent, wobei für  $\delta$  gilt:

$$\delta = \begin{cases} \delta_0 & , \quad \delta_1 \leq 0 \\ \delta_1 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Ist  $\tau\sigma < 0$  und  $u_2 s_2 < 0$ , so gilt für  $\delta$ :

$$\delta = \max\{\delta_0, \delta_1\}$$

#### 4.3.4 Auswahl des $\tilde{b}_2$ in (408)

Die Menge  $S$  ist in diesem Fall eine offene Strecke, deren Rand von  $base_0$  und  $base_1$  gebildet wird. Deshalb kommen zum einen beide Punkte als *basepoint* in Frage, zum anderen muß der Definitionsbereich von  $\delta$  genau bestimmt werden. Wir wählen  $base_1$  als *basepoint* und damit auch

$$pivotdirection := \eta_0 \times \eta_1 \cdot \langle \eta_0 \times \eta_1, n_1 \rangle$$

Für  $\delta$  gilt damit

$$0 < \delta < \delta_{max} = \frac{\langle n_1, (base_0 - y_1) \rangle}{\langle n_1, pivotdirection \rangle} = \frac{\langle n_1, (y_0 + \frac{\tau}{\sigma} r_0 - y_1) \rangle}{\langle n_1, pivotdirection \rangle}$$

und damit wird  $S$  beschrieben durch

$$basepoint + \delta \cdot pivotdirection, \quad 0 < \delta < \delta_{max}$$

In diesem Fall ist die Auswahl eines  $\tilde{b}_2$  aber nicht so einfach. Denn wenn  $\tilde{\alpha}_0 = \tilde{\alpha}_1 = \frac{arc}{4}$  gesetzt wird, kann es passieren, daß  $\delta_0 < 0$  und  $\delta_1 > \delta_{max}$  ist und somit keiner der  $b_{2,i}$  in  $S$  liegt.

Außerdem gilt in (408) mindestens eine der beiden Aussagen „ $r_0$  zeigt vom Pivot weg“ und „ $r_1$  zeigt auf den Pivot“. Ist also  $u_2 s_2 < 0$ , so muß  $\tilde{b}_2$  näher an  $base_0$  liegen, ist  $\tau\sigma < 0$ , so muß  $\tilde{b}_2$  näher an  $base_1$  liegen und ist  $u_2 s_2 < 0$  und  $\tau\sigma < 0$ , so muß  $\tilde{b}_2$  eher in der Mitte liegen. Um dies umzusetzen, verfahren wir wie folgt:

- setze

$$\alpha_0 = \begin{cases} \frac{arc}{4} & , \quad u_2 s_2 > 0 \\ \frac{k \cdot arc}{4} & , \quad u_2 s_2 < 0 \end{cases}$$

$$\alpha_1 = \begin{cases} \frac{arc}{4} & , \quad \tau\sigma > 0 \\ \frac{k \cdot arc}{4} & , \quad \tau\sigma < 0 \end{cases}$$

Man beachte, daß  $u_2 s_2 \neq 0$  und  $\tau\sigma \neq 0$ , sonst würden wir uns nicht in (408) befinden.



- berechne  $\tilde{\gamma}_0$ ,  $\tilde{\gamma}_1$ ,  $\delta_0$  und  $\delta_1$
- bestimme die zulässigen  $\delta_i$
- wähle das kleinere der zulässigen  $\delta_i$  als  $\delta$  aus. Ist keines der beiden  $\delta_i$  zulässig, so setze  $\delta = \frac{\delta_{max}}{2}$
- ist  $u_2 s_2 < 0$  und  $\delta < k_1 \delta_{max}$  so setze  $\delta = k_1 \delta_{max}$
- ist  $\tau \sigma < 0$  und  $\delta > k_0 \delta_{max}$  so setze  $\delta = k_0 \delta_{max}$
- ist  $u_2 s_2 < 0$  und  $\tau \sigma < 0$  und  $\delta < k_0 \delta_{max}$  so setze  $\delta = k_0 \delta_{max}$
- ist  $u_2 s_2 < 0$  und  $\tau \sigma < 0$  und  $\delta > k_1 \delta_{max}$  so setze  $\delta = k_1 \delta_{max}$

Dabei gilt  $0 < k_0 < k_1 < 1$ .

Auf diese Weise wird gewährleistet, daß

$$\begin{array}{l} 0 < \delta \leq k_0 \delta_{max} \quad , \quad u_2 s_2 < 0 \quad \text{und} \quad \tau \sigma > 0 \\ k_0 \delta_{max} \leq \delta \leq k_1 \delta_{max} \quad , \quad u_2 s_2 < 0 \quad \text{und} \quad \tau \sigma < 0 \\ k_1 \delta_{max} \leq \delta < \delta_{max} \quad , \quad u_2 s_2 > 0 \quad \text{und} \quad \tau \sigma < 0 \end{array}$$

Im Programm haben wir  $k_0 = 0,25$  und  $k_1 = 0,75$  gewählt.

## 4.4 Berücksichtigung der Krümmungen

Bis jetzt haben wir die gegebenen Krümmungen  $\kappa_0$  und  $\kappa_1$  bei der Auswahl einer geeigneten Kurve nicht berücksichtigt. Dies soll nun geschehen.

Je größer  $\kappa_i$  ist desto größer ist auch  $\gamma_i$ . Damit die mittleren Kontrollpunkte jedoch nicht zu sehr „ausbrechen“ wollen wir  $\gamma_i$  nach oben beschränken. Dies soll aber nicht direkt geschehen, sondern über die Bogenlänge. Dazu verändern wir die Abschätzung für die Bogenlänge ein wenig, damit wir diese bezüglich der Daten an  $y_0$  unabhängig von den Daten an  $y_1$  bestimmen können – und umgekehrt.

$$arc_i = \|y_1 - y_0\| \left( 1 + \frac{\kappa_i^2 \|y_1 - y_0\|^2}{24} \right) \quad , \quad i = 0, 1$$

Wir wollen nun zwischen „guten Daten“ und „schlechten Daten“ an  $y_i$  unterscheiden, die mit unterschiedlichen Strategien behandelt werden sollen.

**Definition 4.1 (Gute Daten, schlechte Daten)** *Man wähle ein  $K > 1$ . Die Daten an  $y_0$  nennen wir schlechte Daten, wenn  $\kappa_0 \|y_1 - y_0\| > K$ . Die Daten an  $y_1$  nennen wir schlechte Daten, wenn  $\kappa_1 \|y_1 - y_0\| > K$ . Ansonsten nennen wir sie gute Daten.*

Im Programm habe wir  $K = 4$  gewählt.

Anschaulich bedeutet das folgendes: Durch  $\kappa_i$  ist der Krümmungsradius  $R_i = \kappa_i^{-1}$  gegeben. Eine Kurve, die das  $G^2$ -Hermite-Interpolationsproblem lösen soll, hat in  $y_i$  einen Kontakt der Ordnung 2 zu dem in  $P_i$  liegendem Kreis mit dem Radius  $R_i$  und dem Mittelpunkt  $c_i = y_i + R_i n_i$ . Je größer die Krümmung ist, desto kleiner ist dieser Kreis. Da wir eine Kurve auswählen wollen, die nicht zu sehr „ausbricht“, verlangen wir von ihr, daß sie in einem Kreis mit dem Radius  $K R_i$  um  $y_i$  bleibt. Liegt z.B.  $y_1$  weiter entfernt von  $y_0$  als  $K R_0$ , so sprechen wir von schlechten Daten an  $y_0$ . Man kann anschaulich auch davon sprechen, daß die Kurve wegen der großen Krümmung so stark ausbricht, daß  $y_1$  nicht mehr erreicht werden kann.

Für gute Daten regularisieren wir genau so, wie es bisher in diesem Kapitel vorgestellt wurde. Dadurch haben wir ein gutes Approximationverhalten bei dichten Datensätzen.

Für schlechte Daten regularisieren wir so, daß wir ein gutes asymptotisches Verhalten haben, wenn die Krümmung gegen unendlich geht. Dies geschieht dadurch, daß die Kontrollpunkte bei großen Krümmungen näher an  $y_0$  bzw.  $y_1$  geschoben werden. Das führt dazu, daß die resultierende Kurve bei großen Krümmungen an  $y_0$  und  $y_1$  fast eine gerade Linie ist und scharfe Knicke bei  $y_0$  und  $y_1$  hat. Die resultierende Kurve kann so nicht ausbrechen. Das durch die Eingangsdaten erzeugene problematische Verhalten wird zu Lasten der lokalen Krümmung an den Endpunkten bereinigt.

Wir machen dies, indem wir in den Abschätzung für die Bogenlänge bei schlechten Daten  $\kappa_i \|y_1 - y_0\| = K$  setzen.

Die Regularisierung sieht dann für Bernstein-Bézier-Kurven fünften Grades wie folgt aus:

gute Daten ( $\kappa_i \|y_1 - y_0\| < K$ ):

$$\alpha_i = \frac{arc_i}{5}, \beta_i = \frac{2 \cdot arc_i}{5}, \gamma_i = \frac{arc_i^2 \kappa_i}{20}, i = 0, 1$$

schlechte Daten ( $\kappa_i \|y_1 - y_0\| \geq K$ ):

$$c := \frac{K}{\kappa_i} \left( 1 + \frac{K^2}{24} \right), i = 0, 1$$

$$\alpha_i = \frac{c}{5}, \beta_i = \frac{2c}{5}, \gamma_i = \frac{c^2 \kappa_i}{20}, i = 0, 1$$

Hierbei ist anzumerken, daß  $\alpha_i$  als Funktion von  $\kappa_i$  stetig ist.

$$\alpha_i = \begin{cases} \frac{\|y_1 - y_0\|}{5} \left( 1 + \frac{\kappa_i^2 \|y_1 - y_0\|^2}{24} \right) & , \quad \kappa_i < \frac{K}{\|y_1 - y_0\|} \\ \frac{K}{5\kappa_i} \left( 1 + \frac{K^2}{24} \right) & , \quad \kappa_i \geq \frac{K}{\|y_1 - y_0\|} \end{cases}$$

Denn  $\kappa_i = \frac{K}{\|y_1 - y_0\|}$  eingesetzt ergibt in beiden Fällen

$$\alpha_i = \frac{\|y_1 - y_0\|}{5} \left( 1 + \frac{K^2}{24} \right)$$

Wir wollen auch noch die obere Schranke von  $\gamma_i$  angeben:

$$\gamma_i \leq \frac{K \|y_1 - y_0\|}{20} \left( 1 + \frac{K^2}{24} \right)^2$$

Dieses ergibt sich durch Einsetzen.

Bei der Regularisierung von Bernstein–Bézier–Kurven vierten Grades kann man die Daten an  $y_0$  und die Daten an  $y_1$  nicht unabhängig voneinander gut oder schlecht nennen, da  $\tilde{\gamma}_0$  und  $\tilde{\gamma}_1$  im nicht planaren Fall voneinander abhängig sind (siehe 4.3.1). Da wir aber, unserer bisherigen Regularisierungs–Strategie folgend, zunächst die voneinander unabhängigen Punkte  $\tilde{b}_{2,0}$  und  $\tilde{b}_{2,1}$  auf dem Pivot berechnen, können wir auch im Grad vier die Daten an  $y_0$  und  $y_1$  voneinander unabhängig gut oder schlecht nennen.

Bei den planaren Fällen besteht eine Abhängigkeit zwischen  $\tilde{\gamma}_0$  und  $\tilde{\gamma}_1$  nur in (401). Auch dort können wir die Daten an  $y_0$  und  $y_1$  voneinander unabhängig gut oder schlecht nennen, mit dem Unterschied, daß zwischen zwei Geraden ausgewählt werden muß, auf denen dann  $\tilde{b}_2$  festgelegt werden muß. Bei den anderen planaren Fällen ist  $\tilde{\gamma}_0$  unabhängig von  $\tilde{\gamma}_1$ .

Die Regularisierung sieht nun für Bernstein–Bézier–Kurven vierten Grades wie folgt aus:

gute Daten ( $\kappa_i \|y_1 - y_0\| < K$ ):

$$\tilde{\alpha}_i = \frac{arc_i}{4} \quad \tilde{\gamma}_i = \frac{arc_i^2 \kappa_i}{12}$$

schlechte Daten ( $\kappa_i \|y_1 - y_0\| \geq K$ )

$$c := \frac{K}{\kappa_i} \left( 1 + \frac{K^2}{24} \right)$$

$$\tilde{\alpha}_i = \frac{c}{4} \quad \tilde{\gamma}_i = \frac{c^2 \kappa_i}{12}$$

Auch hier ist  $\tilde{\alpha}_i$  als Funktion von  $\kappa_i$  stetig und für  $\tilde{\gamma}_i$  gilt:

$$\tilde{\gamma}_i \leq \frac{K\|y_1 - y_0\|}{12} \left(1 + \frac{K^2}{24}\right)^2$$

Mit diesen  $\tilde{\alpha}_i$  und  $\tilde{\gamma}_i$  müssen jetzt noch, wie dies in (4.2) und (4.3) beschrieben ist,  $b_{2,0}$  und  $b_{2,1}$  bestimmt, ein  $\tilde{b}_2$  ausgewählt und die tatsächlichen Kontrollpunkte  $\tilde{b}_1$  und  $\tilde{b}_3$  berechnet werden.

Bei Bernstein–Bézier–Kurven dritten Grades ist keine weitere Regularisierung aufgrund einer zu großen Krümmung nötig. In den Fällen (301) und (315) ist sowieso alles festgelegt und in den anderen Fällen werden große Krümmungen dadurch ausgeglichen, daß die zugehörigen Gewichte klein werden.

## 4.5 $\tilde{b}_2$ zu weit draußen

Trotz aller bisherigen Regularisierungen kann es bei den nicht planaren Bernstein–Bézier–Kurven vierten Grades immer noch passieren, daß der Abstand zwischen  $y_0$  und  $\tilde{b}_2$  oder der Abstand zwischen  $y_0$  und  $\tilde{b}_2$  sehr groß ist. Dies liegt daran, daß wir nur  $\tilde{\gamma}_i$  nach oben beschränkt haben,  $\tilde{\beta}_i$  aber nicht. Wir werden deshalb ein Kriterium definieren, wann  $\tilde{b}_2$  „zu weit draußen“ liegt und aufzeigen, wann es möglich ist ein neues  $\tilde{b}_2$  zu wählen, das näher an  $y_0$  und  $y_1$  liegt.

**Definition 4.2** *Man wähle ein  $d > 1$ . Wir sagen, daß  $\tilde{b}_2$  zu weit draußen liegt, wenn  $\|\tilde{b}_2 - y_0\| \geq d\|y_1 - y_0\|$  oder  $\|\tilde{b}_2 - y_1\| \geq d\|y_1 - y_0\|$ .*

Im Programm haben wir  $d = 1,5$  gewählt.

Für den Fall, daß  $\tilde{b}_2$  zu weit draußen liegt, ist auszuloten, ob  $\tilde{b}_2$  neu gewählt werden kann, so daß es näher an  $y_0$  und  $y_1$  liegt. Dazu berechnen wir zunächst die Punkte auf dem Pivot, die den minimalen Abstand zu  $y_0$  bzw. zu  $y_1$  haben. Wir nennen diese Punkte  $min_0$  und  $min_1$  und berechnen sie wie folgt:

$$min_0 = \begin{cases} y_0 + \frac{\tau}{\sigma} \langle r_0, \eta_0 \times (\eta_0 \times \eta_1) \rangle \eta_0 \times (\eta_0 \times \eta_1) & , \quad \sigma \neq 0 \\ y_0 + \nu n_0 & , \quad \sigma = 0 \end{cases}$$

$$min_1 = \begin{cases} y_1 - \frac{\nu_2}{s_2} \langle r_1, \eta_1 \times (\eta_0 \times \eta_1) \rangle \eta_1 \times (\eta_0 \times \eta_1) & , \quad s_2 \neq 0 \\ y_1 - \frac{u_s}{t_2} n_1 & , \quad s_2 = 0 \end{cases}$$

Liegt  $\tilde{b}_2$  nicht zwischen  $min_0$  und  $min_1$ , so können die Abstände  $\|\tilde{b}_2 - y_0\|$  und  $\|\tilde{b}_2 - y_1\|$  dadurch verringert werden, daß  $\tilde{b}_2$  näher an das nächstgelegene  $min_i$  geschoben wird.

Weitere Aussagen über die Möglichkeiten,  $\tilde{b}_2$  neu zu wählen, wenn es zu weit draußen liegt, wollen wir hier nicht treffen. Denn es sind noch viele Konstellationen denkbar, die noch nicht vollständig untersucht worden sind. Folgendes wäre nämlich noch zu beachten:

- Liegen  $min_0$  und  $min_1$  in  $S$  oder nicht ?
- Wie kann ein besseres  $\tilde{b}_2$  gewählt werden, wenn das bisher gewählte  $\tilde{b}_2$  zwischen  $min_0$  und  $min_1$  liegt ?
- Ist es immer sinnvoll,  $\tilde{b}_2$  möglichst nah an  $y_0$  und  $y_1$  zu wählen ?

Auch wenn  $\tilde{b}_2$  eindeutig besser gewählt werden kann, muß dieses neue  $\tilde{b}_2$  nochmal darauf untersucht werden, ob es nicht zu weit draußen liegt. Im Zweifelsfall sollte immer dazu übergegangen werden, das Problem mit einer Kurve fünften Grades zu lösen.

## 4.6 Übergänge zwischen den Fällen

Es wäre wünschenswert, wenn die Lösungen des  $G^2$ -Hermite-Interpolationsproblems stetig von den Eingangsdaten abhängen. Dies ist aber nicht machbar, wenn wir das Problem mit einer Kurve mit möglichst geringem Grad lösen wollen und polynomiale Kurven rationalen Kurven vorziehen. Dies liegt hauptsächlich an der unterschiedlichen Zahl der Freiheitsgrade bei den unterschiedlichen Möglichkeiten der Gradreduzierung. So ist im räumlichen Grad 3 Fall (315) alles eindeutig festgelegt, während wir in (505) vier Freiheitsgrade haben. Wir betrachten nun den Übergang zwischen diesen beiden Fällen:

Es sei ein (315)-Fall gegeben, bei dem die Menge  $S$  auf dem Pivot sehr klein ist. Die Kontrollpunkte  $\bar{b}_1$  und  $\bar{b}_2$  liegen dicht beieinander. Das heißt  $\rho$  ist vom Betrag klein und damit die äußeren Gewichte groß und die inneren Gewichte klein. Die Kurve ist damit fast eine gerade Linie zwischen  $y_0$  und  $y_1$ . Dreht man eins der Frenet-Dreibeine ein wenig um  $\eta_0$  bzw.  $\eta_1$ , so daß  $\rho$  das Vorzeichen wechselt, so befinden wir uns im Fall (505) und erhalten mit der vorgestellten Regularisierung eine schöne glatte Kurve.

## 5. Programm

Im Verlauf dieser Diplomarbeit ist ein C-Programm entstanden, das gegebene  $G^2$ -Daten einliest, überprüft in welchem Fall man sich befindet und eine Kurve berechnet, die das Problem löst. Dafür wird der Algorithmus zur Bestimmung des kleinsten möglichen Grades aus Kapitel 2.8, der Lösungsalgorithmus aus Kapitel 3.4 und die Regularisierung, wie sie in Kapitel 4 beschrieben ist, benutzt. Das Programm berechnet die Kurvenpunkte, die in Dateien ausgegeben werden, damit die Kurve dann mit GNUPLOT geplottet werden kann.

In diesem Kapitel werden die wichtigsten Elemente dieses Programms beschrieben. Das komplette Programm ist im Anhang aufgelistet.

### 5.1 Grundaufbau

Es stehen zwei Möglichkeiten zur Verfügung, das Programm zu nutzen. Zum einen kann in `singlemain` eine  $G^2$ -Hermite-Interpolation zwischen zwei Punkten durchgeführt werden. Zum anderen wird in `lissajousmain` eine Lissajous-Kurve berechnet, in Teilstücke zerlegt und anhand der Daten an den Enden der Teilstücke jeweils eine  $G^2$ -Hermite-Interpolation durchgeführt. Dieser Teil des Programmes dient und dient in erster Linie dazu, das Programm auf seine Funktionsfähigkeit zu testen. Zu Beginn des Programms wird abgefragt, ob ein `lissajous`- oder ein `single`-Fall behandelt werden soll.

Bevor wir den Ablauf beschreiben, stellen wir die Strukturen vor, in denen die nötigen Daten gespeichert werden:

- **Data**  
enthält die Daten des Frenet-Dreibeins an  $y_i$ :  $y_i, r_i, n_i, \eta_i, \kappa_i$  ( $i = 0, 1$ ) und `param` den Parameter der Lissajous-Kurve, der zu  $y_i$  gehört.
- **Work**  
enthält die Daten, die beim Gradbestimmungs-Algorithmus (siehe Kapitel 2.8) berechnet werden:  $u_i, s_i, t_i$  ( $i = 0, 1$ );  $(y_1 - y_0), \|y_1 - y_0\|, \lambda, \mu, \nu, \rho, \sigma$  und  $\tau$  außerdem `degree, rational` und `case`, um den Fall zu speichern, den der Algorithmus ergeben hat,  $\eta_1$  als Kopie und `fct` als Zeiger auf die Funktion, mit der das Teilstück ausgewertet werden soll.

- **CP**  
enthält die Kontrollpunkte und Gewichte der Bernstein–Bézier–Kurve:  $b_i, w_i$  ( $i = 0, \dots, 6$ ) und `plotfile` als Zeiger auf die Datei, in die die Kurvenpunkte geschrieben werden.
- **Piece**  
enthält Zeiger auf die Strukturen, in denen die Daten des auszuwertenden Teilstücks sind: `left` ist der Zeiger auf die Daten des Frenet–Dreibeins an  $y_0$ , `right` ist der Zeiger auf die Daten des Frenet–Dreibeins an  $y_1$ , `work` ist der Zeiger auf die zugehörige Struktur `Work` und `next` ist bei Lissajous–Kurven der Zeiger auf das nächste Teilstück und dessen in einer Struktur `Piece` gespeicherten Daten.
- **Cclass**  
dient dazu, die Anzahl der jeweiligen Fälle zu bestimmen.

### 5.1.1 Der Ablauf von `singlemain`

- Der Dateiname der Eingangsdaten muß eingegeben werden.
- Für die Strukturen `p`, `left`, `right`, `work` und `cp` wird Speicherplatz bereitgestellt und die zum späteren Plotten nötigen Dateien werden geöffnet.
- In `read_data` werden die Daten  $y_0, y_1, r_0, r_1, \eta_0, \eta_1, \kappa_0, \kappa_1$  eingelesen.
- In `calc_work` werden die für den Gradbestimmungs–Algorithmus benötigten Daten berechnet.
- In `decision` wird anhand des Gradbestimmungs–Algorithmus festgestellt, welcher Fall vorliegt und der Zeiger `fct` auf die jeweilige Auswertungsfunktion gesetzt.
- In `plot_data` werden die Ausgangsdaten zum späteren Plotten in Dateien ausgegeben.
- Mit `eval((void (*)(Piece*))p->work->fct, p)` wird die Funktion aufgerufen, die für diesen Fall eine Kurve berechnet und die Kurvenpunkte zum späteren Plotten in eine Datei schreibt.
- Zum Schluß werden die bereitgestellten Speicherplätze wieder freigegeben und die Plotdateien wieder geschlossen.

Abbildung 13 zeigt das Ergebnis von `singlemain`.

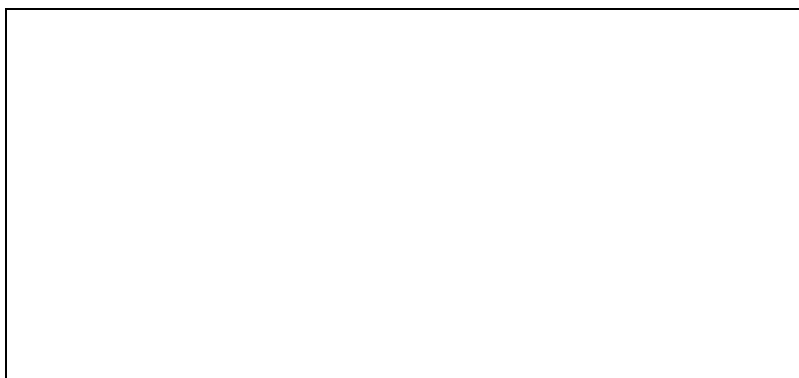


Abbildung 13:  $G^2$ -Hermite-Interpolation zwischen zwei Punkten

### 5.1.2 Der Ablauf von `lissajousmain`

Hier geben wir zunächst die Parameterdarstellung der Lissajous-Kurve an:

$$f(t) = \begin{pmatrix} \sin m_0 t \\ \sin m_1 t \\ \sin m_2 t \end{pmatrix}, \quad t \in (0, 2\pi), \quad m_i \in \mathbb{Z}, \quad i = 0, 1, 2$$

Wir haben also eine Schwingung in jede der drei Achsenrichtungen, wobei  $m_i$  die Anzahl der Schwingungen in diese Richtung während eines Umlaufs angibt. Diese Kurve teilen wir nun in  $n$  Abschnitte, die wir dann als  $G^2$ -Hermite-Interpolationsproblem betrachten wollen. Wegen  $\|f''(0)\| = 0$  sollte  $f(0)$  nicht als ein solches Abschnittsende gewählt werden, da dort die Krümmung gleich Null ist. Im Programm wählen wir deshalb folgende Abschnittsenden:

$$f\left(\frac{2\pi k}{n} + 0, 1\right), \quad k = 0, \dots, n-1$$

Nun kommen wir aber zum Ablauf:

- Die Werte für  $n$ ,  $m_0$ ,  $m_1$  und  $m_2$  müssen eingegeben werden.
- Die zum späteren Plotten nötigen Dateien werden geöffnet.
- Für jedes Teilstück werden folgende Schritte durchgeführt:
  - Für die Strukturen `p`, `right`, `work` und `cp` wird Speicherplatz bereitgestellt.
  - Beim erste Teilstück wird zusätzlich für die Struktur `left` Speicherplatz bereitgestellt, mit `get_data` die Daten des Frenet-Dreibeins am Anfangspunkt



dieses Teilstücks berechnet und der Zeiger `pstart` auf die `Piece`-Struktur mit den Daten dieses Teilstücks gesetzt.

- Bei den anderen Teilstücken wird in der `Piece`-struktur des vorhergehenden Teilstücks der Zeiger `next` auf die `Piece`-Struktur des aktuellen Teilstücks gesetzt. Der Zeiger `left`, der auf die Daten des Frenet–Dreibeins an  $y_0$  des aktuellen Teilstücks zeigen soll, wird auf die `Data`-Struktur mit den Frenet–Dreibein–Daten für  $y_1$  des vorherigen Teilstücks gesetzt. So müssen diese Daten nicht nochmal unnötigerweise berechnet werden.
  - Bei allen Teilstücken werden nun die Frenet–Dreibein–Daten an  $y_1$  berechnet und in der `Data`-Struktur `right` gespeichert.
  - Wie in `singlemain` werden nun die Funktionen `calc_work`, `decision`, und `eval((void) (*)(Piece*))p->work->fct, p)` aufgerufen.
  - Zusätzlich werden die Plotdaten des Originalkurvenstücks in eine Datei geschrieben.
- In `cclass` wird die Anzahl der jeweiligen Fälle bestimmt und die bereitgestellten Speicherplätze wieder freigegeben
  - Zum Schluß werden die Plotdateien wieder geschlossen.

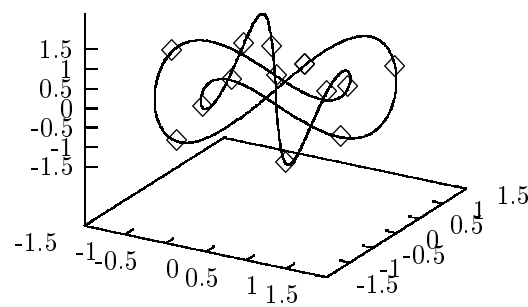


Abbildung 14:  $G^2$ -Hermite-Interpolation bei Lissajous-Kurven

Abbildung 14 zeigt das Ergebnis von `lissajousmain`.

## 5.2 Regularisierung

Mit `eval((void) (*)(Piece*))p->work->fct, p)` wird die Regularisierung des gestellten  $G^2$ -Hermite-Problems gestartet. Hiermit wird bewirkt, daß beispielsweise für den Fall (315) die Funktion `eval315` aufgerufen wird. Auf diese Weise gibt es für jeden Fall eine Funktion, die die freien Parameter, wie in Kapitel 4 beschrieben, geschickt wählt und die Kontrollpunkte und ggf. die Gewichte, wie dort oder in Kapitel 2.8 beschrieben, berechnet. Hiermit werden in `plot_3`, `plot_4` oder `plot5` die Kurvenpunkte der ermittelten Bernstein-Bézier-Kurve berechnet und in Plotdateien geschrieben. Außerdem werden in `pcheck` die errechneten Kontrollpunkte und Gewichte daraufhin untersucht, ob sie die in Satz 2.9 bzw. 2.11 beschriebenen Eigenschaften erfüllen.

Im `lissajous`-Fall werden bei den nicht planaren Fällen vierten Grades die Frenet-Dreibein-Daten der Abschnittsenden in eine zusätzliche Datei geschrieben und das Programm angehalten. Dies bietet die Möglichkeit, das Programm neu zu starten und das Teilstück mit `singlemain` genauer zu betrachten.

Es ist noch anzumerken, daß das Programm zum jetzigen Zeitpunkt die Unterscheidung zwischen guten Daten und schlechten Daten an  $y_0$  und  $y_1$  nicht unabhängig voneinander macht. Stattdessen wird das ganze Teilstück bzw. das gegebene  $G^2$ -Hermite-Problem als gut oder schlecht bewertet. Dies geschieht bei der Berechnung der Bogenlänge in der Funktion `arclength`.

### 5.2.1 Regularisierung der Fälle (407), (408) und (409)

Wie auch schon in Kapitel 4 wollen wir auf diese Fälle genauer eingehen. Die Regularisierung dieser Fälle findet in `regularize4` statt. Dort wird wie folgt vorgegangen:

- Die Pivotrichtung wird berechnet: `pdir`.
- Die Abstände zwischen  $y_i$  und  $base_i$ ,  $i = 0, 1$  werden berechnet: `a0` und `a1`.
- Die *basepoints* werden berechnet: `base0` und `base1`.
- Die Faktoren  $\langle n_i, \eta_0 \times \eta_1 \rangle$ ,  $i = 0, 1$  werden berechnet: `p0`, `p1`.
- Die endgültige Pivotrichtung wird anhand der Vorzeichen von `p0` und `p1` bestimmt: `pgen*pdir`.
- Durch Aufruf der Funktion `arclength` wird die Bogenlänge `arc` berechnet und entschieden, ob gute oder schlechte Daten vorliegen.

- $\alpha_i$  wird festgelegt: `alpha0` und `alpha1`;  $\gamma_i$  und  $\delta$  werden berechnet: `gamma0`, `gamma1`, `deltar0` und `deltar1`.
- In dem durch `choose delta` gekennzeichneten Abschnitt wird  $\delta$  ausgewählt, wie es in Kapitel 4 beschrieben wurde: `delta`.
- Der mittlere Kontrollpunkt  $\tilde{b}_2$  wird berechnet: `b2`.
- In dem durch `far out control` gekennzeichneten Abschnitt wird kontrolliert, ob  $\tilde{b}_2$  zu weit draußen liegt. Vorher werden die Punkte auf dem Pivot berechnet, die den geringsten Abstand zu  $y_0$  bzw.  $y_1$  haben: `pivleft` und `pivright`. Diese Punkte werden darauf untersucht, ob sie zulässige (`feasible`) Punkte für einen mittleren Kontrollpunkt sind. Sind beide Punkte nicht zulässig, so können wir in den Fällen (407) und (409) die Abstände zwischen  $y_0$  und  $\tilde{b}_2$  und zwischen  $y_1$  und  $\tilde{b}_2$ , indem  $\delta$  kleiner gewählt wird. Dies wird gemacht, wenn der bisherige mittlere Kontrollpunkt zu weit draußen lag. Der jetzt gewählte mittlere Kontrollpunkt wird schließlich daraufhin untersucht, ob er zu weit draußen liegt. Ist dies der Fall, so wird das vorliegende  $G^2$ -Hermite-Problem mit einer Kurve fünften Grades in `regularize5` gelöst.
- Abschließend werden die endgültigen Faktoren  $\alpha_i$  und  $\gamma_i$ ,  $i = 0, 1$  berechnet.

### 5.3 Bemerkungen zum Programm

Das vorliegende Programm wurde mit zerlegten Lissajous-Kurven und weiteren extra konstruierten  $G^2$ -Hermite-Interpolationsproblemen ausgiebig getestet. Dabei wurden im Normalfall sehr gute Ergebnisse erzielt.

Bei Raumkurven stoßen wir dabei meistens auf den Fall (315), in dem es keine freien Parameter gibt. Die Fälle (407), (408) und (409) kommen dagegen seltener vor. Andere Fälle, so auch der Fall (505), müssten speziell konstruiert werden.

Verbesserungen sind insbesondere im Bereich `far out control` vorstellbar. Dabei sollte jedoch eine genaue Betrachtung von Aufwand und Nutzen angestellt werden.

## Zusammenfassung und Ausblick

Diese Arbeit liefert die Methoden zur Lösung eines  $G^2$ -Hermite-Interpolationsproblems bei Raumkurven. Mit der beschriebenen Regularisierung wird in allen Fällen eine Kurve bestimmt, die das Problem löst. Das vorgestellte Programm führt diese Regularisierung durch.

Es ist damit ein Werkzeug gegeben, daß in den meisten Fällen zu sehr guten Ergebnissen führt.

Es sind aber auch Fragen nur gestreift worden oder offen geblieben. So sollten beispielsweise die Übergänge zwischen den Fällen noch genauer beleuchtet werden:

- Welche Fälle gehen ineinander über ?
- Welche dieser Übergänge sind stetig und welche nicht ?
- Wie können nicht stetige Übergänge geglättet werden ?
- Wie sind insbesondere die Übergänge zwischen planaren und echten  $\mathbb{R}^3$ -Fällen beschaffen ?

In diesem Zusammenhang könnte eine Art Landkarte erstellt werden, die sämtliche Übergänge beschreibt.

Desweiteren kann die Strategie, die angewendet wird, wenn  $\tilde{b}_2$  zu weit draußen liegt, noch verfeinert werden.

Auch die Konstanten, die im Programm gewählt werden können noch auf eine Optimierung hin untersucht werden.

Möglicherweise erwecken ja die hier aufgeworfenen Fragen das Interesse anderer.

# Symbolverzeichnis

$\langle v, w \rangle$	Skalarprodukt zweier Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^d$
$\ v\ _2 := \sqrt{\langle v, v \rangle}$	Euklidische Norm im $\mathbb{R}^d$
$v \times w$	Vektorprodukt zweier Vektoren $v, w \in \mathbb{R}^3$
$y_i, i = 0, 1$	Interpolationspunkte
$r_i, \ r_i\ _2 = 1$	Tangenteneinheitsvektor
$n_i, \ n_i\ _2 = 1, n_i \perp r_i$	Hauptnormalenvektor
$\eta_i = r_i \times n_i$	Binormalenvektor
$\kappa_i \in \mathbb{R}_{>0}$	Krümmung
$x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^d$	Parameterdarstellung einer Kurve
$b_j \in \mathbb{R}^d, j = 0, \dots, n$	Kontrollpunkte einer Bernstein-Bézier-Kurve
$w_j \in \mathbb{R}_{>0}, j = 0, \dots, n$	Gewichte einer rationalen Bernstein-Bézier-Kurve
$B_j^{(n)}, j = 0, \dots, n$	Bernstein-Polynome $n$ -ten Grades über dem Intervall $[a, b]$
$BB[b_0, \dots, b_n]$	Polynom $n$ -ten Grades in Bernstein-Bézier-Darstellung
$RB[w_0, b_0, \dots, w_n, b_n]$	Rationale Kurve $n$ -ten Grades in Bernstein-Bézier-Darstellung

# Literaturverzeichnis

- [de Boor, Höllig & Sabin 87] DE BOOR, C., HÖLLIG, K., SABIN, M.: *High accuracy geometric Hermite interpolation*, CAGD 4 (1987), 269–278.
- [Höllig, K. 88] HÖLLIG, K.: *Algorithms for rational spline curves*, ARO-Report 88–1, 1988, 287–300.
- [Farin 90] FARIN, G.: *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design, A Practical Guide*, Second Edition, Academic Press, San Diego, 1990.
- [Goodman 88] GOODMAN, T. N. T.: *Shape preserving interpolation by parametric rational cubic splines*, Numerical Mathematics Singapore 1988, R. P. Agarwal, Y. M. Chow, S. J. Wilson (eds.), International Series of Numerical Mathematics, Vol. 86, Birkhäuser, Basel, 1988, 149–158.
- [Hoschek & Lasser 92] HOSCHEK, J., LASSER, D.: *Grundlagen der geometrischen Datenverarbeitung*, 2. Auflage, B. G. Teubner, Stuttgart, 1992.
- [Peters 89] PETERS, J.: *Local Generalized Hermite Interpolation by Quartic  $C^2$  Space Curves*, ACM Transactions on Graphics, Vol. 8 (1989), 235–242.
- [Schaback 92] SCHABACK, R.: *Rational Geometric Curve Interpolation*, Mathematical Methods in CAGD and Image Processing, T. Lyche und L. L. Schumaker (eds.), Academic Press, Boston, 1992, 1–20.
- [Schaback 97] SCHABACK, R.: *Optimal Geometric Hermite Interpolation of Curves*, Übersichtsvortrag, Lillehammer, 1997.
- [Schütt 95] SCHÜTT, C.:  *$GC^2$ -Hermite-Interpolation im  $\mathbb{R}^3$  mit stückweise rational kubischen Kurven in Bernstein-Bézier-Darstellung*, Diplomarbeit, Institut für Numerische und Angewandte Mathematik, Göttingen, 1995.