Hermite-Birkhoff-Interpolation mit radialen Basisfunktionen in gewichteten Sobolew-Räumen

mit Anwendung auf partielle Differentialgleichungen

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultäten
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von
Carsten Franke
aus
Eschwege

Göttingen 1998

D7

Referent: Prof. Dr. R. Schaback
Korreferent: Prof. Dr. J. Werner

Tag der mündlichen Prüfung: 7. Mai 1998

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Seit nunmehr drei Jahrzehnten findet die sogenannte *Interpolation mit radialen Basisfunktionen* immer weiter reichende Anwendungen (vgl. [Har90]). Dies ist kein Wunder, stellt sie doch eine ebenso effiziente wie einfach zu realisierende Methode dar, Funktionen von mehreren Variablen mit gegebenen Eigenschaften zu konstruieren. Und diese Aufgabe ergibt sich aus einer expandierenden Palette von Fragestellungen, die von der elektronischen Bildverarbeitung bis zur Kollision schwarzer Löcher (vgl. [DOM92]), vom Flugzeugbau bis zu geodätischen und geologischen Anwendungen reicht.

Die geforderten Eigenschaften der gesuchten Funktion können vielfältigen Charakter besitzen. Der einfachste Fall, nämlich die Vorgabe des Funktionswertes an endlich vielen, beliebig im $\mathbb{R}^d$ verstreuten Punkten, ist inzwischen sehr weitreichend erforscht. Man kennt Konvergenz- und Konditionsabschätzungen und für fast jeden Zweck die geeigneten Ansatzfunktionen. Ebenso gibt es Untersuchungen für den Fall, daß die Funktion auf einer Mannigfaltigkeit (vgl. [Nar95, Fas95]) oder einer topologischen Gruppe (vgl. [Gut94]) definiert sein soll.

Fast von Anfang an wurde die Methode der Interpolation mit radialen Basisfunktionen in der Praxis auch zur Approximation der Lösung von partiellen Differentialgleichungen und Integralgleichungen angewandt (vgl. [Har90]) — ohne daß allerdings die hierfür rechtfertigende und eigentlich notwendige Theorie über Ansätze (vgl. [Kan90, Fas97]) hinaus entwickelt worden wäre.

Hauptziele Die vorliegende Arbeit ist ein Beitrag, diese Lücke für *Kollokationsverfahren* zu schließen. Sie umfaßt die Ergebnisse aus [FS98a, FS98b] und führt in gewissem Sinne [Wu92] fort. Andere Ansätze werden z. B. in [Wen97b] mit *Galërkin-Verfahren* und in [Gol96] mit der sog. *dual reciprocity method* verfolgt.

Zum einen wird diese Arbeit die in [Wei94] beschriebene Theorie der Funktionenräume *(native spaces)*, die bei der Interpolation mit radialen Basisfunktionen auftreten, generalisieren. Die wichtigsten Aussagen werden für völlig abstrakte Hilbert-Räume bewiesen. Die Elemente müssen daher nicht unbedingt Funktionen sein. Vor allem können nun auch allgemeinere Funktionale als nur einfache Punktauswertungen (δ_x-Funktionale) behandelt werden. Von dieser Warte aus zu Funktionenräumen zurückkehrend, erhält man einen umstrukturierten Aufbau der Theorie der native spaces. Der Begriff des *gewichteten Sobolew-Raumes* bildet nun das Fundament. Diese Räume existieren „aus sich heraus“ und sind nicht aufwendig und zielgerichtet nur für die Interpolation konstruiert. Vielmehr erwachsen sie ganz natürlich aus der Verbindung von gewichteten Lebesgue-Räumen und Fourier-Transformation. Nicht einmal Distributionstheorie ist dazu nötig. Die entwickelte Theorie bleibt dabei so allgemein, daß z. B. das Wort „radial“ im Titel dieser Arbeit nur noch gerechtfertigt ist, weil sich die Bezeichnung so eingebürgert hat. Generell wird versucht, mit möglichst schwachen Voraussetzungen auszukommen.

Zum anderen wird diese allgemeine Theorie dann wieder speziell auf Funktionale vom Typ $\delta_x \circ L$ mit einem linearen Differential- oder Integraloperator L oder einem daraus zusammengesetzten Operator angewandt. Dadurch lassen sich partielle Differentialgleichungen, Integralgleichungen und Systeme daraus mittels Kollokation behandeln. An einem Beispiel wird die Herleitung von Konvergenzordnungen aus einer generischen Fehlertheorie demonstriert.

Der hier entwickelte Aufbau eröffnet schließlich einen neuen Blickwinkel auf die Interpolation mit radialen Basisfunktionen, wodurch z. B. die Interpolation mit unstetigen Basisfunktionen zugänglich wird. Ein Kapitel ist einem Beispiel dafür gewidmet.

Aufbau Das erste Hauptkapitel zählt lediglich die benötigten allgemein-mathematischen Grundbegriffe auf und dient der Darstellung der benutzten Nomenklatur. Im zweiten Hauptkapitel wird die abstrakte Hermite-Birkhoff-Interpolation auf beliebigen Hilbert-Räumen entwickelt. Die Hermite-Birkhoff-Interpolation verallgemeinert die gewöhnliche Interpolation dadurch, daß beliebige lineare Funktionale λ an Stelle der Punktauswertungsfunktionale δ_x zugelassen sind. Zudem wird die Wirkung eines linearen Operators L, der mit den Funktionalen gemäß $\lambda \circ L$ verknüpft wird, ausführlich dargestellt. Der Zusammenhang zwischen Hermite-Birkhoff-Interpolation, optimaler Rekonstruktion und Ritz-Galërkin-Verfahren wird kurz erwähnt. Letztere liefern den Namen „konformer Ansatz“ für eine besonders natürliche Wahl der Ansatzfunktionen. Dieses Hauptkapitel enthält schon alle für die Fehlerabschätzung notwendigen Aussagen.

Aufgabe des dritten Hauptkapitels ist es, in die Theorie der gewichteten Lebesgue-Räume einzuführen. Dabei wird auf Einbettungssätze besonderer Wert gelegt. Zum Schluß wird an die Fourier-Transformation auf $\mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)$ bzw. $\mathsf{L}_2(\mathbb{R}^d)$ erinnert.

Darauf aufbauend kann das vierte Hauptkapitel das Konzept der gewichteten Sobolew-Räume einführen und deren Eigenschaften untersuchen. Wiederum bilden Einbettungssätze zwischen Sobolew-Räumen einen Fokus des Interesses. Die auf ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ eingeschränkte Variante eines Sobolew-Raumes wird nur kurz gestreift. Sehr ausführlich ist statt dessen die Frage nach den Eigenschaften des Dualraumes untersucht. Der Begriff der *Fourier-Transformierten eines Funktionals* spielt hier eine wesentliche Rolle.

Somit sind alle Fundamente gelegt, auf denen im fünften und sechsten Hauptkapitel der Schwerpunkt dieser Arbeit ruht. Kapitel 5.1 beschreibt die Voraussetzungen, die ein Operator L und die Gewichtsfunktionen der benötigten Sobolew-Räume erfüllen müssen, damit die im zweiten Hauptkapitel entwickelte Theorie angewandt werden kann. Danach wird gezeigt, wie sich die klassische Theorie der native spaces darin einfügt. Die Hermite-Birkhoff-Interpolation kann nun im Kapitel 6.1 recht bündig beschrieben werden. Das folgende Kapitel demonstriert die praktische Anwendung der Theorie an einem Beispiel. In dieser Hinsicht stellt das Korollar 6.2-3 ein Hauptergebnis der Arbeit dar. Das letzte Kapitel betrachtet unstetige Basisfunktionen, über die bisher nur sehr wenig bekannt ist. Es soll nur ein erster Schritt in dieser Richtung sein und bietet Anhaltspunkte für zukünftige Forschungen.

Das siebte Hauptkapitel schließlich geht auf Skalierungseffekte ein, die durch nichttriviale Operatoren L entstehen können. Die bislang unbekannte, wenn auch naheliegende Konvergenzaussage des Korollars 7.3-1 wird so möglich. Nicht zuletzt hier zahlt es sich wieder aus, daß die gewichteten Sobolew-Räume so gut zu handhaben sind.

An dieser Stelle bedanke ich mich bei meinem Doktorvater Prof. Dr. Robert Schaback, der mein Interesse an diesem vielfältigen Forschungsgebiet geweckt, mir wichtige Anregungen gegeben und mir bei der Ausgestaltung der Arbeit sehr große Freiräume gelassen hat. Besonders danke ich auch Herrn Prof. Dr. Jochen Werner, der äußerst kurzfristig bereit war, das Korreferat zu übernehmen. Dank gebührt schließlich der Deutschen Forschungsgemeinschaft, die diese Dissertation ermöglichte.

AMS-Classification (1991): 35A40, 41A25, 41A63, 65N35, 65R20.

1 Grundlagen

Wir beginnen mit einer ausführlichen Darstellung der benötigten Konventionen und mathematischen Grundlagen. Dabei werden u. a. abkürzende Schreibweisen eingeführt, die evtl. gewöhnungsbedürftig sind, aber viel zur Übersichtlichkeit der Formeln beitragen.

Der Abschluß eines Beweises wird durch das Zeichen „■“ gekennzeichnet; Teilbeweise enden mit „□“.

1.1 Notationen

Die vorliegende Arbeit verwendet geläufige Bezeichnungen für Zahlenmengen, als da wären $\mathbb{N}$ für die *natürlichen Zahlen ohne* 0, $\mathbb{N}_0$ für die *natürlichen Zahlen mit* 0, $\mathbb{Z}$ für die *ganzen Zahlen*, $\mathbb{R}$ für die *reellen Zahlen*, $\mathbb{R}_{\geq 0}$ für die *nicht-negativen* reellen Zahlen und schließlich $\mathbb{C}$ für die *komplexen Zahlen*.

Der Punkt „$\cdot$“ symbolisiert, je nach Kontext, entweder eine freie Variable, wie z. B. in $\cosh = \cosh(\cdot)$, oder einfach eine Multiplikation. Das *komplex Konjugierte einer komplexen Zahl* $z = x + i\,y \in \mathbb{C}$ wird durch den Überstrich gekennzeichnet: $\overline{z} := x - i\,y$. Die *komplexe Konjugation einer beliebigen Abbildung* $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ zwischen komplexen Räumen wird durch $\overline{T}(x) := \overline{T(\overline{x})}$ definiert.

Wird eine Abbildung T auf eine Funktion $f(x, \ldots)$ mehrerer Variablen angewandt, obwohl sie nur bzgl. einer definiert ist, so wird die Variable, bzgl. der T wirkt, als Exponent angegeben, wie z. B. in $T^x f(x,y)$ oder $T^y f(x,y)$.

Der *d-dimensionale, reelle Vektorraum* reeller d-Tupel[1] wird mit $\mathbb{R}^d$ bezeichnet. Er sei mit dem *Skalarprodukt* $x^{\mathrm{tr}} y := \sum_{j=1}^{d} x_j y_j$ ausgestattet. Dieses Skalarprodukt induziert die *Norm* $\|x\| := \sqrt{x^{\mathrm{tr}} x}$. Diese Schreibweise überträgt sich auch auf zwei n-Tupel a aus $\mathbb{C}$ und x aus einem $\mathbb{C}$-Vektorraum gemäß $a^{\mathrm{tr}} x = x^{\mathrm{tr}} a := \sum_{j=1}^{n} a_j x_j$.

Falls $x = (x_j)_{j=1,\ldots,n}$ ein beliebiges n-Tupel aus dem Definitionsbereich einer beliebigen Abbildung T ist, so definieren wir die Anwendung von T auf x durch das n-Tupel $T(x) := (\,T(x_j)\,)_{j=1,\ldots,n}$. Umgekehrt ist die Anwendung eines m-Tupels von Abbildungen $T = (T_i)_{i=1,\ldots,m}$ auf eine Variable x durch das m-Tupel $T(x) := (\,T_i(x)\,)_{i=1,\ldots,m}$ definiert. Schließlich ergibt die Anwendung eines m-Tupels T von Abbildungen auf ein n-Tupel x die $m \times n$-Matrix $T(x) := (\,T_i(x_j)\,)_{\substack{i=1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,n}}$. Entsprechendes gilt auch für das Skalarprodukt von Tupeln: Sind x und y Tupel von Elementen eines Prä-Hilbert-Raumes $\mathcal{H}$ der Kardinalität m bzw. n, so ist $\langle x|y\rangle_{\mathcal{H}} := \big(\,\langle x_i|y_j\rangle_{\mathcal{H}}\,\big)_{\substack{i=1,\ldots,m\\ j=1,\ldots,n}}$. Hierbei ist zu beachten, daß i den Zeilen- und j den Spaltenindex bezeichnet.

Das Symbol $\operatorname{span} x$ bezeichnet die *lineare Hülle* eines n-Tupels x aus einem $\mathbb{C}$-Vektorraum, d. i. die Menge aller *endlichen* Linearkombinationen der Elemente von x.

Wenn nicht anders angegeben, sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ ein *Gebiet* im $\mathbb{R}^d$, d. h. es handelt sich um eine offene, zusammenhängende Punktmenge. Der *Abschluß einer Teilmenge M* eines *topologi-*

[1] Ein Tupel ist eine geordnete Menge von Elementen, die auch mehrfach auftreten dürfen. Man kann es sich als Spaltenvektor vorstellen. Wir verwenden jedoch die Bezeichnung „Tupel“ an Stelle von „Vektor“, weil bei den hier vorkommenden Tupeln der Charakterzug eines Vektorraumelements in der Regel unwesentlich ist, d. h. der zugehörige Vektorraum tritt nirgends auf. Außerdem werden so Mißverständnisse vermieden, die durch eine Überbelegung des Wortes „Vektor“ entstehen könnten: Die meisten hier vorkommenden Tupel bestehen aus mehreren Elementen eines Vektorraumes.

schen Raumes $\mathcal{T}$ wird mit $\operatorname{clos}_{\mathcal{T}} M$ bezeichnet. Wenn zweifelsfrei klar ist, welcher topologische Raum gemeint ist, entfällt der Index $\mathcal{T}$. Mit $\operatorname{inter}_{\mathcal{T}} M$ bezeichnen wir das *offene Innere einer Menge M*. Der *Rand einer Menge* $M \subseteq \mathcal{T}$ wird durch $\partial M := \operatorname{clos} M \setminus \operatorname{inter} M$ definiert. Die *Vervollständigung* von $M \subseteq \mathcal{T}$ bzgl. der Topologie von $\mathcal{T}$ wird durch $\operatorname{comp}_{\mathcal{T}} M$ symbolisiert.

Die *charakteristische Funktion* χ_Ω einer Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ nimmt die Werte 1 auf Ω und 0 sonst an.

1.2 Lineare Operatoren

Seien $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$ komplexe Vektorräume. Ein *linearer Operator* zwischen ihnen ist eine Abbildung $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ mit der Eigenschaft $T(x + a\,y) = T(x) + a\,T(y)$ für alle $x, y \in \mathcal{X}$ und $a \in \mathbb{C}$. Ist T linear, so ist dies auch $\overline{T}$. Der Vektorraum aller linearen Operatoren, die von $\mathcal{X}$ nach $\mathcal{Y}$ abbilden, wird mit $\mathcal{L}(\mathcal{X} \to \mathcal{Y})$ bezeichnet.

Falls die Räume *normiert*, d. h. *Prä-Banach-Räume* sind, kann man den Begriff des *beschränkten Operators* definieren: Ein Operator $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ heißt genau dann beschränkt, wenn seine *Norm*

$$\text{(1.2-1)} \qquad \|T\|_{\mathcal{X}\to\mathcal{Y}} := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_{\mathcal{Y}}}{\|x\|_{\mathcal{X}}}$$

endlich ist. Ein linearer Operator ist genau dann stetig bzgl. der Topologien, die durch die Normen induziert werden, wenn er beschränkt ist. Die Stetigkeit auf ganz $\mathcal{X}$ oder bei $0 \in \mathcal{X}$ ist äquivalent. Der normierte Vektorraum aller beschränkten linearen Operatoren, die von $\mathcal{X}$ nach $\mathcal{Y}$ abbilden, wird mit $\mathcal{BL}(\mathcal{X} \to \mathcal{Y})$ bezeichnet.

Satz 1.2-1 (Satz von der beschränkten Inversen, vgl. [Heu92], Satz 39.4.)

Seien $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$ Banach-Räume und $T \in \mathcal{BL}(\mathcal{X} \to \mathcal{Y})$ bijektiv. Dann ist auch T^{-1} beschränkt, d. h. $T^{-1} \in \mathcal{BL}(\mathcal{Y} \to \mathcal{X})$.

Der adjungierte Operator T^* eines beschränkten linearen Operators $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ zwischen Hilbert-Räumen ist durch die Gleichung $\langle Tx|y\rangle_{\mathcal{Y}} = \langle x|T^*y\rangle_{\mathcal{X}}$ für $x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}$ eindeutig definiert. Bei einem *anti*linearen Operator ist die Gleichung $\langle Tx|y\rangle_{\mathcal{Y}} = \overline{\langle x|T^*y\rangle_{\mathcal{X}}}$ für $x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}$ charakterisierend. Es gilt $\|T^*\|_{\mathcal{Y}\to\mathcal{X}} = \|T\|_{\mathcal{X}\to\mathcal{Y}}$. Ein Operator $T : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ heißt genau dann *selbstadjungiert*, wenn $\langle Tx|y\rangle_{\mathcal{X}} = \langle x|Ty\rangle_{\mathcal{X}}$ für alle $x, y \in \mathcal{X}$ gilt.

1.3 Matrizen

Handelt es sich bei dem Prä-Hilbert-Raum $\mathcal{H}$ um den $\mathbb{C}^n$ und bei dem Operator T um eine Matrix $(t_{i,j})_{i,j=1,\dots,n}$ aus $\mathbb{C}^{n\times n}$, so entspricht der adjungierte Operator von T der adjungierten Matrix $T^* := \overline{T}^{\mathrm{tr}}$. Somit ist T genau dann selbstadjungiert, wenn $T^{\mathrm{tr}} = \overline{T}$ gilt.

Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heißt genau dann *positiv semidefinit*, wenn $x^{\mathrm{tr}}\,A\,\overline{x} \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{C}^n$ gilt. Sie ist genau dann *positiv definit*, wenn zusätzlich $x^{\mathrm{tr}}\,A\,\overline{x} = 0$ nur für $x = 0$ erfüllt ist. Positiv definite Matrizen sind immer invertierbar. Es gibt sogar effizientere numerische Methoden zur Lösung eines Gleichungssystems mit einer positiv definiten Matrix, als sie für gewöhnliche Matrizen in Frage kommen.

Lemma 1.3-1 (Positive Definitheit von Gram-Matrizen)

Sei $\mathcal{H}$ ein Prä-Hilbert-Raum und $F \subseteq \mathcal{H}$ ein n-Tupel. Dann ist die *Gram-Matrix*

$$\langle F|F\rangle_{\mathcal{H}} \;=\; \big(\langle F_i|F_j\rangle_{\mathcal{H}}\big)_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,n}}$$

positiv semidefinit. Sie ist genau dann positiv definit, wenn F linear unabhängig ist.

Beweis

Es gilt

$$\begin{aligned} x^{\mathrm{tr}} \cdot \langle F|F\rangle_{\mathcal{H}} \cdot \overline{x} &= \sum_{i,j=1}^{n} x_i \,\langle F_i|F_j\rangle_{\mathcal{H}}\, \overline{x_j} \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i\, F_i \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} x_j\, F_j \right\rangle_{\mathcal{H}} \;=\; \left\|F^{\mathrm{tr}} x\right\|_{\mathcal{H}}^{2} \;\geq\; 0 \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{C}^n$. Somit ist die Matrix positiv *semi*definit. □

<u>$\Leftarrow$:</u> Sei F linear unabhängig. Der Ausdruck $\|F^{\mathrm{tr}}x\|_{\mathcal{H}}^2$ ist genau dann 0, wenn $F^{\mathrm{tr}}x$ verschwindet. Da F linear unabhängig ist, ist dies äquivalent zu $x = 0$. □

<u>$\Rightarrow$:</u> Sei F linear abhängig. Dann gibt es ein $x \in \mathbb{C}^n$, $x \neq 0$ mit $F^{\mathrm{tr}}x = 0$. Es folgt $\langle F|F\rangle_{\mathcal{H}} \cdot \overline{x} = \langle F|F^{\mathrm{tr}}x\rangle_{\mathcal{H}} = 0$. Der Kern der Matrix $\langle F|F\rangle_{\mathcal{H}}$ enthält also nicht nur die 0; sie ist somit ibes. nicht positiv definit.

■

Bemerkung 1.3-2

Allgemeiner gilt: Wenn $\langle F|G\rangle_{\mathcal{H}}$ invertierbar ist, dann sind F und G jeweils linear unabhängig. Die Umkehrung gilt i. allg. *nicht*, da z. B. $F_1 \perp G_j$ für alle $G_j \in G$ möglich ist, wodurch die erste Spalte von $\langle F|G\rangle_{\mathcal{H}}$ zur Nullspalte wird.

Dies verallgemeinert auch auf nicht entartete Dualsysteme.

Der *Beweis* verläuft genauso wie der Punkt „$\Rightarrow$“ im vorhergehenden Beweis.

1.4 Isomorphie, Isometrie etc.

Sehr oft müssen Vektorräume verglichen werden. Da sie sich nicht nur in ihren Elementen, sondern auch in ihrer topologischen Struktur bzw. ihrer Norm unterscheiden können, werden verschiedene Begriffe des Vergleichs benötigt. Sie sollen im folgenden eingeführt werden.[2]

Zwei Vektorräume $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$ heißen *isomorph* zueinander, wenn es einen *Isomorphismus* zwischen ihnen gibt, also einen bijektiven, linearen Operator $T : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$. Normierte und Prä-Hilbert-Räume heißen *isometrisch isomorph*, in Zeichen $\mathcal{X} \overset{\mathsf{d}}{\sim} \mathcal{Y}$, wenn es eine *Isometrie* zwischen ihnen gibt, d. i. ein bijektiver, linearer Operator T mit der Eigenschaft

[2] Dabei werden wir uns nur auf die in dieser Arbeit benötigten Begriffe beschränken und alle anderen topologischen Unterscheidungen aussparen.

$\|Tx\|_{\mathcal{Y}} = \|x\|_{\mathcal{X}}$ für alle $x \in \mathcal{X}$. Dabei setzen wir immer voraus, daß die Norm ggf. durch das Skalarprodukt induziert wird. Konvergenz in $\mathcal{X}$ ist so gleichbedeutend mit Konvergenz in $\mathcal{Y}$.

Als *gleich* werden wir zwei Räume lediglich dann bezeichnen, wenn sie nicht nur dieselben Elemente enthalten, d. h. $\mathcal{X} \overset{\text{set}}{=} \mathcal{Y}$, sondern auch dieselben Strukturen tragen. Für normierte Räume $\mathcal{X}$ und $\mathcal{Y}$ bedeutet das z. B. $\mathcal{X} = \mathcal{Y} \Leftrightarrow \big(\mathcal{X} \overset{\text{set}}{=} \mathcal{Y}\big) \wedge \big(\|f\|_{\mathcal{X}} = \|f\|_{\mathcal{Y}} \;\forall\, f \in \mathcal{X}\big)$. In Abschwächung dessen sind diese Räume *metrisch äquivalent*, d. h. $\mathcal{X} \overset{\mathsf{d}}{=} \mathcal{Y}$, wenn sie zwar dieselben Elemente enthalten, aber ihre Normen lediglich *äquivalent* sind, d. h. es gibt zwei reelle Konstanten $B \geq A > 0$, so daß $A\, \|x\|_{\mathcal{X}} \leq \|x\|_{\mathcal{Y}} \leq B\, \|x\|_{\mathcal{X}}$ für alle $x \in \mathcal{X}$ gilt. Zwei Skalarprodukte heißen äquivalent, falls die von ihnen induzierten Normen äquivalent sind.

Ein Untervektorraum $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$ enthält einen Teil der Elemente von $\mathcal{Y}$ und besitzt dessen algebraische Strukturen. Ist $\mathcal{Y}$ normiert, so heißt $\mathcal{X}$ ein *metrischer Unterraum von* $\mathcal{Y}$, als Symbol $\mathcal{X} \overset{\mathsf{d}}{\subseteq} \mathcal{Y}$, wenn die Identität auf $\mathcal{X}$ stetig ist: $\|f\|_{\mathcal{Y}} \leq \|\mathrm{Id}\|_{\mathcal{X}\to\mathcal{Y}} \cdot \|f\|_{\mathcal{X}}$ für alle $x \in \mathcal{X}$.

Ein normierter Raum $\mathcal{X}$ ist in einen zweiten $\mathcal{Y}$ *isometrisch einbettbar*, d. h. $\mathcal{X} \overset{\mathsf{d}}{\hookrightarrow} \mathcal{Y}$, wenn es einen isometrischen, linearen *Einbettungsoperator* $J : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ gibt. Als Isometrie ist J automatisch stetig und injektiv.

1.5 Dualraum und Riesz-Darstellungssatz

Der *(topologische)*[3] *Dualraum* $\mathcal{H}^*$ eines Prä-Banach-Raumes $\mathcal{H}$ ist als der Vektorraum aller seiner *stetigen Linearformen* $\lambda : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ definiert, versehen mit der in (1.2-1) eingeführten Operatornorm.

Satz 1.5-1 (Riesz-Darstellungssatz)

Zu jedem Element λ des Dualraumes $\mathcal{H}^*$ eines Hilbert-Raumes $\mathcal{H}$ gibt es genau einen *Repräsentanten* $g_\lambda \in \mathcal{H}$ mit der Eigenschaft

$$(1.5\text{-}1) \qquad \lambda(f) \;=\; \langle f | g_\lambda \rangle_{\mathcal{H}} \quad \forall\, f \in \mathcal{H}\,.$$

Der *Riesz-Operator*

$$(1.5\text{-}2) \qquad \mathrm{Ri}_{\mathcal{H}} : \mathcal{H}^* \to \mathcal{H};\; \lambda \mapsto g_\lambda$$

ist isometrisch und antilinear. Die Norm $\|\lambda\|_{\mathcal{H}^*} = \sup\limits_{f\neq 0} \dfrac{|\lambda(f)|}{\|f\|_{\mathcal{H}}}$ des Dualraumes wird vom Skalarprodukt

$$(1.5\text{-}3) \qquad \langle \lambda | \mu \rangle_{\mathcal{H}^*} \;=\; \langle \mathrm{Ri}_{\mathcal{H}}(\mu) | \mathrm{Ri}_{\mathcal{H}}(\lambda) \rangle_{\mathcal{H}}$$

induziert. Das Element $\mathrm{Ri}_{\mathcal{H}}(\lambda)$ wird gelegentlich als *Riesz-Repräsentant* des Funktionals λ bezeichnet werden.

Zum *Beweis*: Dieser Satz ist klassisch, man findet ihn z. B. in [Yos80], Sec. III.6.

[3] Der *algebraische* Dualraum, der auch die unbeschränkten linearen Funktionale umfaßt, findet in dieser Arbeit keine Verwendung. Daher entfällt der Zusatz „topologisch" im folgenden.

1.6 Räume stetig differenzierbarer Funktionen

Ein *Multiindex* $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ ist ein d-Tupel natürlicher Zahlen. Man bezeichnet $|\alpha| := \sum_{j=1}^d \alpha_j$ als *Betrag* des Multiindexes. Die *Potenzierung eines Tupels* x mit einem Multiindex α ist durch $x^\alpha := \prod_{j=1}^d x_j^{\alpha_j}$ gegeben. Die Potenz des d-variaten Ableitungsoperators $D := \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_{j=1,\ldots,d}$ zum Multiindex α ist durch $D^\alpha := \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}}$ definiert.

Im weiteren Kapitel sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ eine beliebige, nichtleere Menge.

Definition 1.6-1 *Träger einer stetigen Funktion*

Der *Träger einer Funktion* $f : \Omega \to \mathbb{C}$, die fast überall stetig ist,[4] ist durch die Menge

$$\operatorname{supp} f \ := \operatorname{clos}_{\mathbb{R}^d} \{x \in \Omega : \ f(x) \neq 0\}$$

gegeben.

Definition 1.6-2 *Räume stetig differenzierbarer Funktionen*

Mit $C^k(\Omega)$ wird der Vektorraum der (im klassischen Sinne) k-fach *stetig differenzierbaren, komplexwertigen Funktionen* auf $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ bezeichnet. Dabei ist $k \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. Der Teilraum der Funktionen aus $C^k(\Omega)$, deren Träger eine *kompakte Menge* in Ω ist, heißt $C_0^k(\Omega)$. Falls $k = 0$ ist, kann der obere Index jeweils entfallen.

Definition und Satz 1.6-3 ∞-Norm auf $C^k(\Omega)$

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ kompakt. Dann definiert der Ausdruck

$$\|f\|_{C^k(\Omega)} \ := \sup_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d : \ |\alpha| \leq k} \ \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha f(x)|$$

eine *Norm auf* $C^k(\Omega)$. Beim Raum $C_0^k(\Omega)$ ist die Voraussetzung der Kompaktheit von Ω unnötig. Beide Räume werden mit dieser Norm zu Banach-Räumen.

Ist Ω nicht kompakt, so benötigen wir im folgenden lediglich die Räume $C^k(\Omega) \cap \mathsf{L}_\infty(\Omega)$, die wir mit der Norm

$$\|f\|_{\infty,k} \ := \ \max_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha f\|_{\mathsf{L}_\infty(\Omega)}$$

versehen.

[4] Der Begriff *fast überall* wird im Kapitel 3.1 definiert werden.

2 Hermite-Birkhoff-Interpolation in Hilbert-Räumen

Das Problem der Hermite-Birkhoff-Interpolation besteht darin, zu einer gegebenen Funktion f aus einem Funktionenraum $\mathcal{H}$, von der nur die Werte $\lambda_j(f)$ bei Anwendung einiger Funktionale $\lambda_j \in \mathcal{H}^*$ bekannt sind, eine *Hermite-Birkhoff-Interpolante* $s \in \mathcal{H}$ zu finden, die dieselben Werte $\lambda_j(s) = \lambda_j(f)$ liefert.[1]

Wir setzen voraus, daß es sich bei $\mathcal{H}$ um einen Hilbert-Raum handelt und werden diese Tatsache stark ausnutzen; wir werden sogar vom Funktionenraum abstrahieren, und zunächst *nur* die Hilbert-Raum-Eigenschaften von $\mathcal{H}$ verwenden. Trotzdem nennen wir die Elemente von $\mathcal{H}$ weiterhin „Funktionen". Im Hauptkapitel 5 wenden wir uns dann der Interpolation in speziellen Funktionenräumen zu.

Um die Notation übersichtlich zu halten, definieren wir[2]

$$\text{(2-1)} \qquad \Lambda := (\lambda_j)_{j=1,\ldots,\#\Lambda} \in (\mathcal{H}^*)^{\#\Lambda} .$$

Wir verlangen $\#\Lambda < \infty$, obwohl bei abzählbarem Λ im wesentlichen nur Konvergenzbedingungen hinzukommen. Die obige Bedingung an die Interpolante hat damit die Form

$$\text{(2-2)} \qquad \Lambda(f) = \Lambda(s_{f,\Lambda}) .$$

Kurzfristig wollen wir an die Interpolante $s_{f,\Lambda}$ zu f bzgl. Λ noch keine weiteren Forderungen stellen, als daß sie *linear* in f sei. Von Λ setzen wir *lineare Unabhängigkeit* voraus, da sonst nicht ausgeschlossen werden kann, daß die Interpolante widersprüchliche Bedingungen erfüllen muß.

Selbstverständlich müssen alle Überlegungen auch für ein *Orthonormalsystem (ONS)* Λ gültig bleiben. Das Tupel $\widetilde{f} = (\widetilde{f}_k) := \mathrm{Ri}_{\mathcal{H}}(\Lambda)$ bildet dann ebenfalls ein ONS. Die Interpolante zu einer Linearkombination $\widetilde{f}^{\mathrm{tr}} \cdot \beta$ muß nun wegen der geforderten Linearität die Gestalt $s_{\widetilde{f}^{\mathrm{tr}}\cdot\beta,\Lambda} = \sum_k s_{\widetilde{f}_k,\Lambda} \cdot \beta_k$ besitzen. Jedes einzelne $s_{\widetilde{f}_k,\Lambda}$ muß laut (2-2) die Bedingung $\Lambda(s_{\widetilde{f}_k,\Lambda}) = \Lambda(\widetilde{f}_k) = e_k$ erfüllen (e_k: k-ter Einheitsvektor). Es hat daher die Form $s_{\widetilde{f}_k,\Lambda} = \widetilde{f}_k + r_k$ mit einem Rest $r_k \in (\mathrm{span}\ \widetilde{f}_k)^\perp$. Für die gesamte Interpolante ergibt sich so die Form $s_{\widetilde{f}^{\mathrm{tr}}\cdot\beta,\Lambda} = \sum_k \widetilde{f}_k \cdot \beta_k + r$ mit einem Rest $r \in (\mathrm{span}\ \widetilde{f})^\perp = \mathrm{Kern}\ \Lambda$. Dieser Rest r kann durch die Interpolationsbedingung (2-2) nicht eindeutig bestimmt werden, da er keinen Einfluß auf sie hat. Wir gehen daher von $r = 0$ aus. Anderenfalls sind außer (2-2) weitere Bedingungen nötig, vgl. Kapitel 2.4, ibes. Gleichung (2.4-7).

So erscheint es auch für allgemeinere Funktionaltupel Λ sinnvoll, wenn die gesuchte Interpolante eine endliche Linearkombination bestimmter *Ansatzfunktionen* $\widetilde{\Phi} = (\widetilde{\Phi}_j)_{j=1,\ldots,\#\widetilde{\Phi}}$ ist. Wir werden sie daher mit $s_{f,\Lambda,\widetilde{\Phi}}$ bezeichnen und von der Form

$$\text{(2-3)} \qquad s_{f,\Lambda,\widetilde{\Phi}} := \widetilde{\Phi}^{\mathrm{tr}} \cdot \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{C}^{\#\widetilde{\Phi}}$$

[1] Man muß nicht unbedingt von einer Funktion f ausgehen, sondern kann den Vektor der Daten als gegeben betrachten. Für die Fehlerabschätzungen, die wir später erzielen, ist es aber einfacher, gleich vorauszusetzen, daß die Daten von einer Funktion $f \in \mathcal{H}$ stammen.

[2] Das Symbol $\#x$ bezeichnet die Kardinalität des Tupels x.

ausgehen. Der *Koeffizientenvektor* α bestimmt sich aus der *(starken) Interpolationsbedingung*

$$\text{(2-4)} \qquad \Lambda(f) \;=\; \Lambda\left(s_{f,\Lambda,\widetilde{\Phi}}\right) \;=\; \Lambda(\widetilde{\Phi})\cdot\alpha\;.$$

Damit diese Bedingung überhaupt erfüllbar ist, müssen wir Ansatzfunktionen aus $\mathcal{H}$ benutzen:

$$\text{(2-5)} \qquad \widetilde{\Phi} \;\in\; \mathcal{H}^{\#\widetilde{\Phi}}\;.$$

Sinnvollerweise fordert man die Bijektivität der *Interpolationsmatrix* $\Lambda(\widetilde{\Phi})$. Daher beschränken wir uns auf *quadratische* Interpolationsmatrizen, d. h. wir fordern

$$\#\widetilde{\Phi} \;=\; \#\Lambda\;.$$

Gemäß Bemerkung 1.3-2 ist die Interpolationsmatrix nicht invertierbar, falls $\widetilde{\Phi}$ oder Λ nicht linear unabhängig sind. Wir gehen deshalb im folgenden immer davon aus, daß beide Tupel linear unabhängig sind. Das garantiert aber keineswegs die Invertierbarkeit, für die wir hinreichende Bedingungen im Kapitel 2.3 herleiten.

Bemerkung 2-1 (Projektionseigenschaft des Interpolationsoperators)

Der *Interpolationsoperator* $\mathcal{H}\to\operatorname{span}\widetilde{\Phi};\ f\mapsto s_{f,\Lambda,\widetilde{\Phi}}=\widetilde{\Phi}^{\mathrm{tr}}\cdot\alpha$, definiert laut (2-3) und (2-4), ist ein Projektor. Die Koeffizienten β der iterierten Interpolante $s_{s_{f,\Lambda,\widetilde{\Phi}},\Lambda,\widetilde{\Phi}}=\widetilde{\Phi}^{\mathrm{tr}}\cdot\beta$ berechnen sich nämlich aus $\Lambda(\widetilde{\Phi})\cdot\beta=\Lambda(s_{f,\Lambda,\widetilde{\Phi}})\overset{(2\text{-}4)}{=}\Lambda(f)$. Da $\Lambda(\widetilde{\Phi})$ injektiv ist, folgt $\beta=\alpha$ und somit auch $s_{s_{f,\Lambda,\widetilde{\Phi}},\Lambda,\widetilde{\Phi}}=s_{f,\Lambda,\widetilde{\Phi}}$. Ganz allgemein wird jede Funktion aus $\operatorname{span}\Phi$ auf sich selber abgebildet. Andererseits wird die Differenz $f-s_{f,\Lambda,\widetilde{\Phi}}$ auf 0 projiziert: Die Koeffizienten γ von $s_{f-s_{f,\Lambda,\widetilde{\Phi}},\Lambda,\widetilde{\Phi}}=\widetilde{\Phi}^{\mathrm{tr}}\cdot\gamma$ ergeben sich aus $\Lambda(\widetilde{\Phi})\cdot\gamma=\Lambda(f-s_{f,\Lambda,\widetilde{\Phi}})\overset{(2\text{-}4)}{=}0$. Da $\Lambda(\widetilde{\Phi})$ injektiv ist, folgt $\gamma=0$ und somit $s_{f-s_{f,\Lambda,\widetilde{\Phi}},\Lambda,\widetilde{\Phi}}=0$.

Dem entnimmt man auch $f-s_{f,\Lambda,\widetilde{\Phi}}\in(\operatorname{span}\mathrm{Ri}_{\mathcal{H}}(\Lambda))^{\perp}$. Der Raum $\mathcal{H}$ wird demnach in die direkte Summe $\mathcal{H}=\operatorname{span}\widetilde{\Phi}\oplus(\operatorname{span}\mathrm{Ri}_{\mathcal{H}}(\Lambda))^{\perp}$ zerlegt.

Falls $\operatorname{span}\widetilde{\Phi}=\operatorname{span}\mathrm{Ri}_{\mathcal{H}}(\Lambda)$ gilt,[3] handelt es sich sogar um eine *orthogonale* Projektion und eine *orthogonale* direkte Summe. In diesem Fall gilt also

$$\text{(2-6)} \qquad \|f\|_{\mathcal{H}}^2 \;=\; \left\|s_{f,\Lambda,\widetilde{\Phi}}\right\|_{\mathcal{H}}^2+\left\|f-s_{f,\Lambda,\widetilde{\Phi}}\right\|_{\mathcal{H}}^2\;.$$

2.1 Fehlerabschätzung

Wir wollen nun den *Fehler* betrachten, der bei der oben geschilderten Rückgewinnung einer Funktion $f\in\mathcal{H}$ aus ihren Daten $\Lambda(f)$ durch $s_{f,\Lambda,\widetilde{\Phi}}$ entsteht. Dazu muß man zunächst festlegen, was man als Fehler bezeichnen will. Man kann nicht einfach $f(x)-s_{f,\Lambda,\widetilde{\Phi}}(x)$

[3] Vergleiche (2.3-1).

verwenden, wenn man sich in einem Hilbert-Raum von Funktionen bewegt, in dem Punktauswertung gar nicht zulässig ist. In Verallgemeinerung der klassischen Theorie der Interpolation mit radialen Basisfunktionen kann man aber fragen, wie sich f und $s_{f,\Lambda,\widetilde{\Phi}}$ zueinander verhalten, wenn man Funktionale λ auf sie anwendet, die denen aus Λ „ähneln“. Die Ähnlichkeit soll zunächst lediglich darin bestehen, daß diese *Bewertungsfunktionale* λ aus demselben Raum $\mathcal{H}^*$ stammen wie Λ. Das bedeutet, wir suchen obere Abschätzungen für den *(verallgemeinerten) Interpolationsfehler*,

$$\text{(2.1-1)} \qquad \left|\lambda(f) - \lambda\left(s_{f,\Lambda,\widetilde{\Phi}}\right)\right| \;=\; \left|\lambda\left(f - s_{f,\Lambda,\widetilde{\Phi}}\right)\right| ,$$

wobei $\lambda \in \mathcal{H}^*$ beliebig ist. Die Grundlage aller weiteren Betrachtungen liefert der folgende Satz, der es erlaubt, die Einflüsse von λ und f auf den Interpolationsfehler zu trennen:

Satz und Definition 2.1-1 (Trennung der Fehler)

Sei $s_{f,\Lambda,\widetilde{\Phi}}$ die Hermite-Birkhoff-Interpolante zu $f \in \mathcal{H}$ bezüglich $\Lambda \subset \mathcal{H}^*$ und $\widetilde{\Phi} \subseteq \mathcal{H}^{\#\widetilde{\Phi}}$. Dann gilt

$$\text{(2.1-2)} \qquad \left|\lambda(f) - \lambda\left(s_{f,\Lambda,\widetilde{\Phi}}\right)\right| \;\leq\; P_{\mathcal{H},\Lambda}(\lambda) \cdot \left\|f - s_{f,\Lambda,\widetilde{\Phi}}\right\|_{\mathcal{H}}$$

für jedes $\lambda \in \mathcal{H}^*$. Dabei ist die *Power-Funktion* von λ durch

$$\text{(2.1-3)} \qquad P_{\mathcal{H},\Lambda}(\lambda) \;:=\; \inf_{\mu \in \text{span } \Lambda} \|\lambda - \mu\|_{\mathcal{H}^*}$$

definiert.

Beweis

Nach Konstruktion von $s_{f,\Lambda,\widetilde{\Phi}}$ in (2-4) gilt $\Lambda(f) = \Lambda(s_{f,\Lambda,\widetilde{\Phi}})$. Daher folgt $\mu(f - s_{f,\Lambda,\widetilde{\Phi}}) = 0$ für jedes beliebige $\mu \in$ span Λ. Das ermöglicht die Abschätzung

$$\left|\lambda(f) - \lambda(s_{f,\Lambda,\widetilde{\Phi}})\right| \;=\; \left|(\lambda - \mu)(f - s_{f,\Lambda,\widetilde{\Phi}})\right| \;\leq\; \|\lambda - \mu\|_{\mathcal{H}^*} \cdot \left\|f - s_{f,\Lambda,\widetilde{\Phi}}\right\|_{\mathcal{H}} .$$

■

Satz 2.1-2 (Aufteilungssatz der Power-Funktion)

Aus der Inklusion $\Lambda' \subseteq \Lambda \subseteq \mathcal{H}^*$ folgt

$$\text{(2.1-4)} \qquad P_{\mathcal{H},\Lambda}(\lambda) \;\leq\; P_{\mathcal{H},\Lambda'}(\lambda) \quad \text{für alle } \lambda \in \mathcal{H}^* .$$

Beweis

$\Lambda' \subseteq \Lambda$ impliziert span $\Lambda' \subseteq$ span Λ. Daher folgt

$$\inf_{\mu \in \text{span } \Lambda'} \|\lambda - \mu\|_{\mathcal{H}^*} \;\geq\; \inf_{\mu \in \text{span } \Lambda} \|\lambda - \mu\|_{\mathcal{H}^*}$$

für die Infima.

■

Der vorige Satz ist bei der Fehlerabschätzung für Systeme von Gleichungen mit verschieden gearteten linearen Funktionalen nützlich. Beispiel 2.3-5 beschreibt dies genauer. Analog ergibt sich ein Aufteilungssatz für die Interpolante:

Satz 2.1-3 (Aufteilungssatz der Interpolante)

Aus der Inklusion $\widetilde{\Phi}' \subseteq \widetilde{\Phi} \subseteq \mathcal{H}$ folgt

$$(2.1\text{-}5) \qquad \inf_{s \in \operatorname{span} \widetilde{\Phi}} \|f - s\|_{\mathcal{H}} \;\leq\; \inf_{s \in \operatorname{span} \widetilde{\Phi}'} \|f - s\|_{\mathcal{H}} \quad \text{für alle } f \in \mathcal{H} \;.$$

Beweis

$\widetilde{\Phi}' \subseteq \widetilde{\Phi}$ impliziert span $\widetilde{\Phi}' \subseteq$ span $\widetilde{\Phi}$.

■

2.2 Verkettung eines Funktionals mit einem linearen Operator

Oftmals ergibt sich die Notwendigkeit, Funktionale λ zu betrachten, die die Gestalt

$$(2.2\text{-}1) \qquad \lambda \;=\; \mu \circ L$$

haben. Dabei ist $L : \mathcal{H} \to \mathcal{G}$ ein beschränkter linearer Operator, $\mathcal{G}$ ein Hilbert-Raum, der noch zu wählen ist, und μ ein Funktional aus $\mathcal{G}^*$. Somit ist $\lambda \in \mathcal{H}^*$. In dieser Situation ist die Fehlerbetrachtung durch den Satz 2.2-4 geprägt, den wir nun herleiten werden.

Definition 2.2-1 *Dualer Operator*

Der *duale Operator* L^+ eines beschränkten linearen Operators $L : \mathcal{H} \to \mathcal{G}$ zwischen den Prä-Banach-Räumen $\mathcal{H}$ und $\mathcal{G}$ ist durch

$$(2.2\text{-}2) \qquad L^+ : \mathcal{G}^* \to \mathcal{H}^*;\;\; \mu \mapsto \mu \circ L$$

definiert. Zur Unterscheidung vom adjungierten Operator $L^* : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ benutzen wir „+“ als Exponenten.

Lemma 2.2-2 (Natürliche Eigenschaften des dualen Operators)

Sei $L : \mathcal{H} \to \mathcal{G}$ ein beschränkter Operator und $L^+ : \mathcal{G}^* \to \mathcal{H}^*$ sein dualer Operator.
Dann gilt:

1: Wenn L surjektiv ist, dann ist L^+ injektiv.

2: Wenn L bijektiv ist, dann ist L^+ bijektiv, und es gilt $(L^+)^{-1} = (L^{-1})^+$.

Beweis

Zu 1:

$$\begin{array}{rrcll} & L^+(\lambda) & = & 0 & \\ \Leftrightarrow & \lambda \circ L(f) & = & 0 & \forall\, f \in \mathcal{H} \\ \Leftrightarrow & \lambda(g) & = & 0 & \forall\, g \in \mathcal{G}, \quad \text{da } L \text{ surjektiv ist} \\ \Leftrightarrow & \lambda & = & 0\;. & \end{array}$$

□

Zu 2: Zu zeigen bleibt die Surjektivität von L^+: Da L als beschränkt vorausgesetzt wurde, gilt $L^+(\mathcal{G}^*) \subseteq \mathcal{H}^*$ wegen $\|\lambda \circ L\|_{\mathcal{H}^*} \leq \|\lambda\|_{\mathcal{G}^*} \cdot \|L\|_{\mathcal{H}\to\mathcal{G}} < \infty$. Zu zeigen bleibt die umgekehrte Inklusion. Auf Grund des Satzes 1.2-1 von der beschränkten Inversen ist $L^{-1} : \mathcal{G} \to \mathcal{H}$ ebenfalls beschränkt. Sei nun $\mu \in \mathcal{H}^*$ beliebig. Dann ist $\lambda := \mu \circ L^{-1} = (L^{-1})^+(\mu)$ wohldefiniert und ein Element von $\mathcal{G}^*$. Es gilt $L^+(\lambda) = \lambda \circ L = \mu \circ L^{-1} \circ L = \mu$, also folgt $\mathcal{H}^* \subseteq L^+(\mathcal{G}^*)$.
Wir haben soeben gesehen, daß $L^+\big((L^{-1})^+(\mu)\big) = \mu \;\forall\; \mu \in \mathcal{H}^*$ gilt. Nun rechnen wir $(L^{-1})^+ \circ L^+(\lambda) = (L^{-1})^+(\lambda \circ L) = \lambda \circ L \circ L^{-1} = \lambda$ für jedes $\lambda \in \mathcal{G}^*$. ■

Das folgende Lemma beleuchtet den engen Zusammenhang zwischen dem dualen Operator L^+ und dem adjungierten Operator L^*.

Lemma 2.2-3

Sei $L : \mathcal{H} \to \mathcal{G}$ ein beschränkter Operator zwischen Hilbert-Räumen und $L^+ : \mathcal{G}^* \to \mathcal{H}^*$ der duale Operator zu L. Die Operatoren $\mathrm{Ri}_{\mathcal{H}} : \mathcal{H}^* \to \mathcal{H}$ und $\mathrm{Ri}_{\mathcal{G}} : \mathcal{G}^* \to \mathcal{G}$ seien die im Riesz-Darstellungssatz 1.5-1 eingeführten jeweiligen Riesz-Operatoren.

Dann kommutiert das folgende Diagramm:

$$\text{(2.2-3)} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{H}^* \arrow[r, "\mathrm{Ri}_{\mathcal{H}}"] & \mathcal{H} \\ \mathcal{G}^* \arrow[u, "L^+"] \arrow[r, "\mathrm{Ri}_{\mathcal{G}}"'] & \mathcal{G} \arrow[u, "L^*"'] \end{tikzcd} .$$

Der duale Operator L^+ ist durch diese Eigenschaft eindeutig bestimmt. Weiterhin gilt

$$\text{(2.2-4)} \qquad \|L^+\|_{\mathcal{G}^*\to\mathcal{H}^*} = \|L^*\|_{\mathcal{G}\to\mathcal{H}} = \|L\|_{\mathcal{H}\to\mathcal{G}} .$$

Beweis

Zu (2.2-3): Laut der Definition der Riesz-Operatoren gilt für jedes $\lambda \in \mathcal{G}^*$ und jedes $f \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned} & \langle f | \mathrm{Ri}_{\mathcal{H}} \circ L^+(\lambda) \rangle_{\mathcal{H}} && = \langle f | \mathrm{Ri}_{\mathcal{H}}(\lambda \circ L) \rangle_{\mathcal{H}} \\ = \; & (\lambda \circ L)(f) = \lambda(Lf) && = \langle Lf | \mathrm{Ri}_{\mathcal{G}}(\lambda) \rangle_{\mathcal{G}} \\ = \; & \langle f | L^* \circ \mathrm{Ri}_{\mathcal{G}}(\lambda) \rangle_{\mathcal{H}} \; . \end{aligned}$$

Mit dem *Riesz-Darstellungssatz* folgt $\mathrm{Ri}_{\mathcal{H}} \circ L^+ = L^* \circ \mathrm{Ri}_{\mathcal{G}}$, womit (2.2-3) bewiesen ist. □

Zu (2.2-4): Der adjungierte Operator hat dieselbe Norm wie L. Deshalb bleibt nur die erste Gleichheit zu zeigen. Sie folgt aber aus (2.2-3), da die Riesz-Operatoren isometrisch sind. ■

Satz 2.2-4 (Allgemeiner Transformationssatz)

Sei L ein injektiver, linearer Operator auf dem Hilbert-Raum $\mathcal{H}$ und $\mathcal{G} := L(\mathcal{H})$ sein Bildraum.

Dann ist $\mathcal{G}$ ein Hilbert-Raum mit dem Skalarprodukt

$$(2.2\text{-}5) \qquad \langle Lf|Lg\rangle_{\mathcal{G}} \ := \ \langle f|g\rangle_{\mathcal{H}} \ .$$

Der Operator L ist dadurch eine Isometrie. Für die Skalarprodukte der Dualräume gilt

$$(2.2\text{-}6) \qquad \langle \lambda|\mu\rangle_{\mathcal{G}^*} \ = \ \langle \lambda\circ L|\mu\circ L\rangle_{\mathcal{H}^*} \ ,$$

und man findet die Gleichheit

$$(2.2\text{-}7) \qquad P_{\mathcal{G},\Lambda}(\lambda) \ = \ P_{\mathcal{H},\Lambda\circ L}(\lambda\circ L)$$

der Power-Funktionen.

Beweis

Zu (2.2-5): Nach Definition von $\mathcal{G}$ ist $L:\mathcal{H}\to\mathcal{G}$ bijektiv. Somit ist die Struktur $\langle\cdot|\cdot\rangle_{\mathcal{G}}$ ein Skalarprodukt auf dem linearen Raum $\mathcal{G}$. Zu zeigen ist dabei im wesentlichen die positive Definitheit dieses Skalarproduktes. Sie folgt aber aus der Injektivität von L, denn es gilt $0 = \langle Lf|Lf\rangle_{\mathcal{G}} = \langle f|f\rangle_{\mathcal{H}} \Rightarrow f = 0 \Rightarrow Lf = 0$. Nach Definition ist $L:\mathcal{H}\to\mathcal{G}$ eine Isometrie. Daher ist $\mathcal{G}$ ein Hilbert-Raum. □

Zu (2.2-6): Da L als Isometrie beschränkt ist, können wir Lemma 2.2-3 benutzen.

$$\begin{aligned}
\langle \lambda\circ L|\mu\circ L\rangle_{\mathcal{H}^*} &\overset{(2.2\text{-}2)}{=} \big\langle L^+(\lambda)\big|L^+(\mu)\big\rangle_{\mathcal{H}^*}\\
&\overset{(1.5\text{-}3)}{=} \big\langle\, \mathrm{Ri}_{\mathcal{H}}\circ L^+(\mu)\,\big|\,\mathrm{Ri}_{\mathcal{H}}\circ L^+(\lambda)\,\big\rangle_{\mathcal{H}}\\
&\overset{(2.2\text{-}3)}{=} \langle\, L^*\circ \mathrm{Ri}_{\mathcal{G}}(\mu)\,|\,L^*\circ\mathrm{Ri}_{\mathcal{G}}(\lambda)\,\rangle_{\mathcal{H}}\\
&= \langle\, \mathrm{Ri}_{\mathcal{G}}(\mu)\,|\,L\circ L^*\circ \mathrm{Ri}_{\mathcal{G}}(\lambda)\,\rangle_{\mathcal{G}}
\end{aligned}$$

Die Funktion $\mathrm{Ri}_{\mathcal{G}}(\mu)$ ist ein Element von $\mathcal{G} = L(\mathcal{H})$; also gibt es ein $f\in\mathcal{H}$ mit $\mathrm{Ri}_{\mathcal{G}}(\mu) = L(f)$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\langle \lambda\circ L|\mu\circ L\rangle_{\mathcal{H}^*} &= \langle\, L(f)\,|\,L\circ L^*\circ\mathrm{Ri}_{\mathcal{G}}(\lambda)\,\rangle_{\mathcal{G}}\\
&\overset{(2.2\text{-}5)}{=} \langle\, f\,|\,L^*\circ\mathrm{Ri}_{\mathcal{G}}(\lambda)\,\rangle_{\mathcal{H}}\\
&= \langle\, L(f)\,|\,\mathrm{Ri}_{\mathcal{G}}(\lambda)\,\rangle_{\mathcal{G}}\\
&= \langle\, \mathrm{Ri}_{\mathcal{G}}(\mu)\,|\,\mathrm{Ri}_{\mathcal{G}}(\lambda)\,\rangle_{\mathcal{G}} \quad = \quad \langle\,\lambda\,|\,\mu\,\rangle_{\mathcal{G}^*}\ .
\end{aligned}$$

□

Zu (2.2-7):

$$\begin{aligned}
P_{\mathcal{G},\Lambda}(\lambda) &= \inf_{\mu\in\operatorname{span}\Lambda} \|\lambda-\mu\|_{\mathcal{G}^*}\\
&\overset{(2.2\text{-}6)}{=} \inf_{\mu\in\operatorname{span}\Lambda} \|\lambda\circ L-\mu\circ L\|_{\mathcal{H}^*}\\
&= \inf_{\mu\in\operatorname{span}\Lambda\circ L} \|\lambda\circ L-\mu\|_{\mathcal{H}^*} \quad = \quad P_{\mathcal{H},\Lambda\circ L}(\lambda\circ L)\,.
\end{aligned}$$

■

Die Voraussetzung der Injektivität von L, die im Transformationssatz 2.2-4 gerade gemacht wurde, kann durch einen Trick umgangen werden. Kapitel 2.4 wird darauf eingehen.

Oft ist auch der folgende Satz von Nutzen, welcher den Zusammenhang zwischen zwei verschiedenen Interpolanten herstellt:

Satz 2.2-5

Sei $L : \mathcal{H} \to \mathcal{G}$ ein beschränkter linearer Operator. Die Tupel $\widetilde{\Phi} \subset \mathcal{H}$ der Ansatzfunktionen und $\Lambda \subset \mathcal{G}^*$ der Funktionale seien gegeben. (Man beachte $\mathcal{G}^*$ statt $\mathcal{H}^*$!)

Wir definieren ein weiteres Tupel $\widetilde{\Psi}_L \subset \mathcal{G}$ von Ansatzfunktionen mittels

$$(2.2\text{-}8) \qquad \widetilde{\Psi}_L \;:=\; L(\widetilde{\Phi}) \;.$$

Dann gilt für alle $f \in \mathcal{H}$ die Identität

$$(2.2\text{-}9) \qquad L\, s_{f,\Lambda\circ L,\widetilde{\Phi}} \;=\; s_{Lf,\Lambda,\widetilde{\Psi}_L} \;.$$

Beweis

Die Interpolante zu f bzgl. $\Lambda \circ L$ und $\widetilde{\Phi}$ ist laut (2-3) und (2-4) durch

$$s_{f,\Lambda\circ L,\widetilde{\Phi}} \;=\; \widetilde{\Phi}^{\mathrm{tr}} \cdot \alpha \quad \text{mit} \quad \Lambda \circ L(\widetilde{\Phi}) \cdot \alpha \;=\; \Lambda \circ L(f)$$

definiert. Die Interpolante zu Lf bzgl. Λ und $\widetilde{\Psi}_L$ ist demgegenüber durch

$$s_{Lf,\Lambda,\widetilde{\Psi}_L} \;=\; \widetilde{\Psi}_L^{\mathrm{tr}} \cdot \alpha' \quad \text{mit} \quad \Lambda(\widetilde{\Psi}_L) \cdot \alpha' \;=\; \Lambda(Lf) \;=\; \Lambda \circ L(f)$$

gegeben. Aus der Definition von $\widetilde{\Psi}_L$ folgt nun $\Lambda(\widetilde{\Psi}_L) = \Lambda(L(\widetilde{\Phi})) = \Lambda \circ L(\widetilde{\Phi})$ und daher $\alpha' = \alpha$. Somit gilt $L\, s_{f,\Lambda\circ L,\widetilde{\Phi}} = L(\widetilde{\Phi}^{\mathrm{tr}} \cdot \alpha) = \widetilde{\Psi}_L^{\mathrm{tr}} \cdot \alpha = s_{Lf,\Lambda,\widetilde{\Psi}_L}$.

■

2.3 Konformer Ansatz, Invertierbarkeit der Interpolationsmatrix

Es ist von Vorteil, wenn die Interpolationsmatrix $\Lambda(\widetilde{\Phi})$ aus (2-4) nicht nur quadratisch, sondern auch *selbstadjungiert* ist, d. h. wir fordern

$$\Lambda(\widetilde{\Phi})^{\mathrm{tr}} \;=\; \overline{\Lambda(\widetilde{\Phi})} \;.$$

Diese Eigenschaft läßt sich sehr einfach durch die Wahl

$$(2.3\text{-}1) \qquad \widetilde{\Phi} \;:=\; \mathrm{Ri}_{\mathcal{H}}(\Lambda)$$

für die Ansatzfunktionen gewährleisten.

Bemerkungen 2.3-1

<u>1:</u> Die Idee, die Ansatzfunktionen $\widetilde{\Phi}$ von den Funktionalen Λ abhängen zu lassen, ist aus der Theorie der Interpolation mit *radialen Basisfunktionen* wohlvertraut. Er wird dort durch den *Satz von Mairhuber-Curtis* regelrecht erzwungen, vgl. [Bra86], S. 12 und [Sch97b], Theorem 1.3.2.

Allgemeiner kann man in (2.3-1) auch von $\widetilde{\Phi} := B \cdot \mathrm{Ri}_{\mathcal{H}}(\Lambda)$ mit einer invertierbaren Matrix B ausgehen, was zu $\Lambda(\widetilde{\Phi}) = B \cdot \langle \Lambda | \Lambda \rangle_{\mathcal{H}^*}$ führt. Das hat aber keinen wesentlichen Einfluß auf die weitere Theorie; wir bleiben der Einfachheit halber bei $B = \mathrm{Id}$.

Noch besser, so könnte man meinen, wäre es, $\Lambda(\widetilde{\Phi}) = \mathrm{Id}$ zu verlangen. Das erfordert aber die Berechnung einer *Lagrange-Basis* $\widetilde{\Phi}$ zu Λ, d. i. ein zu $\mathrm{Ri}_{\mathcal{H}}(\Lambda)$ *biorthogonales* Tupel in $\mathcal{H}$. Dazu ist jedoch ebenfalls ein Gleichungssystem wie (2.3-2) zu lösen, weshalb kein Aufwand eingespart werden kann.

<u>2:</u> Im Kapitel 2.6 werden wir sehen, daß der hier beschriebenen Hermite-Birkhoff-Interpolation ein *Ritz-Galërkin-Formalismus* im Dualraum entspricht. In diesem Sinne kann man von *Testfunktionalen* reden. Die Wahl (2.3-1) werden wir als *konformen Ansatz* bezeichnen, da die Ansatzfunktionen in direkter Abhängigkeit von den Funktionalen Λ gewählt werden, vgl. Bemerkung 2.6-2.

<u>3:</u> Die Voraussetzungen $\Lambda' \subseteq \Lambda$ bzw. $\widetilde{\Phi}' \subseteq \widetilde{\Phi}$ der Aufteilungssätze 2.1-2 und 2.1-3 sind nun äquivalent.

<u>4:</u> Die Interpolationsbedingung (2-4) erhält mit (2.3-1) die Form

$$(2.3\text{-}2) \qquad \Lambda(f) = \Lambda^x\left(\mathrm{Ri}(\Lambda)(x)\right) \cdot \alpha \overset{(1.5\text{-}1)}{=} \langle \mathrm{Ri}(\Lambda) | \mathrm{Ri}(\Lambda) \rangle_{\mathcal{H}} \cdot \alpha \overset{(1.5\text{-}3)}{=} \langle \Lambda | \Lambda \rangle_{\mathcal{H}^*} \cdot \alpha \; .$$

Offenbar ist die Interpolationsmatrix selbstadjungiert. Auf Grund des Lemmas 1.3-1 ist sie bei linear unabhängigem Λ positiv definit und damit invertierbar.

Der konforme Ansatz bringt aber nicht nur den Vorteil der leicht invertierbaren, selbstadjungierten Interpolationsmatrix mit sich, sondern hat auch die wichtige Optimalitätseigenschaft, die in Satz 2.3-3 beschrieben wird.

Bemerkung 2.3-2 (Darstellungen von $\widetilde{\Psi}_L$)

Für die in (2.2-8) von einem Operator L induzierten Ansatzfunktionen $\widetilde{\Psi}_L = L(\widetilde{\Phi})$ folgt aus dem konformen Ansatz (2.3-1) die Darstellung

$$(2.3\text{-}3) \qquad \widetilde{\Psi}_L \;=\; L(\widetilde{\Phi}) \;=\; L \circ \mathrm{Ri}_{\mathcal{H}}(\Lambda) \overset{(2.2\text{-}3)}{=} \mathrm{Ri}_{\mathcal{G}}\left((L^*)^+(\Lambda)\right) \; .$$

Dabei ist $(L^*)^+$ der duale des adjungierten Operators von L: $(L^*)^+(\lambda) = \lambda \circ L^*$ für alle $\lambda \in \mathcal{H}$. Die Darstellung (2.3-3) ähnelt formal der Definitionsgleichung (2.3-1). Falls sich Λ selber in $\Lambda = \Lambda' \circ L = L^+(\Lambda')$ mit $\Lambda' \subset \mathcal{G}^*$ zerlegen läßt, so folgt aus (2.3-3) weiter:

$$(2.3\text{-}4) \qquad \widetilde{\Psi}_L \;=\; L \circ \mathrm{Ri}_{\mathcal{H}} \circ L^+(\Lambda') \overset{(2.2\text{-}3)}{=} L \circ L^* \circ \mathrm{Ri}_{\mathcal{G}}(\Lambda') \; .$$

Satz 2.3-3

Sei $\widetilde{\Phi} \subset \mathcal{H}$ linear unabhängig. Die Lösung s_{opt} des Minimierungsproblems

$$\|f - s\|_{\mathcal{H}} \ \to \ \text{Min. !} \quad \text{für} \quad s \in \text{span}\ \widetilde{\Phi}$$

stimmt mit der Interpolante $s_{f,\Lambda,\widetilde{\Phi}}$ überein, die sich beim konformen Ansatz (2.3-1) aus der Interpolationsbedingung (2-4) ergibt. Daher gilt die Gleichung

$$\left\| f - s_{f,\Lambda,\widetilde{\Phi}} \right\|_{\mathcal{H}} \ = \inf_{s \in \text{span}\ \widetilde{\Phi}} \|f - s\|_{\mathcal{H}} \ . \tag{2.3-5}$$

Beweis

Sei $s = \widetilde{\Phi}^{\text{tr}}\,\beta \in \text{span}\ \widetilde{\Phi}$ beliebig. Dann gilt

$$\|f - s\|_{\mathcal{H}}^2 \ = \ \|f\|_{\mathcal{H}}^2 \ - 2\ \text{Re}\left(\left\langle f \middle| \widetilde{\Phi} \right\rangle_{\mathcal{H}} \overline{\beta} \right) \ + \ \beta^{\text{tr}} \left\langle \widetilde{\Phi} \middle| \widetilde{\Phi} \right\rangle_{\mathcal{H}} \beta \ .$$

Diese Funktion $n(\beta)$ ist nach β differenzierbar. Die Matrix $\left\langle \widetilde{\Phi} \middle| \widetilde{\Phi} \right\rangle_{\mathcal{H}}$ ist nach Lemma 1.3-1 positiv definit. Somit kann das notwendige und hinreichende Kriterium $\frac{\partial n(\beta)}{\partial \beta} = 0$ angewandt werden: Ableiten nach β (bzw. Re β und Im β) und gleich-Null-setzen ergibt

$$0 \ = \ 2 \left\langle \widetilde{\Phi} \middle| \widetilde{\Phi} \right\rangle_{\mathcal{H}} \beta \ - \ 2 \left\langle f \middle| \widetilde{\Phi} \right\rangle_{\mathcal{H}} \ .$$

Da nach Ansatz (2.3-1) $\left\langle \widetilde{\Phi} \middle| \widetilde{\Phi} \right\rangle_{\mathcal{H}} = \Lambda(\widetilde{\Phi})$ und $\left\langle f \middle| \widetilde{\Phi} \right\rangle_{\mathcal{H}} = \Lambda(f)$ gilt, entspricht der Koeffizientenvektor β, der zu s_{opt} gehört, genau der Lösung α von (2-4). ■

Im konformen Fall können wir nun mit Gleichung (2.3-5) die Fehlerabschätzung (2.1-2) fortführen, indem wir im Infimum $s = 0$ einsetzen:[4]

$$\left| \lambda(f) - \lambda\left(s_{f,\Lambda,\widetilde{\Phi}}\right) \right| \ \leq \ P_{\mathcal{H},\Lambda}(\lambda) \cdot \|f\|_{\mathcal{H}} \ . \tag{2.3-6}$$

Diese Abschätzung stellt wg. Gleichung (2-6) keine Verschlechterung dar, solange man Funktionen $f \in \mathcal{H}_{\neq 0}$ nicht ausschließt, deren Interpolante $s_{f,\Lambda,\widetilde{\Phi}}$ sehr klein wird oder gar verschwindet. Zu letzteren gehören alle $f \in (\text{span Ri}_{\mathcal{H}}(\Lambda))^{\perp}$. Falls jedoch eine fest vorgegebene Funktion f um jeden Preis mit wenigen Ansatzfunktionen $\widetilde{\Phi}$ gut approximiert werden muß, hat man die Funktionale Λ, und damit auch $\widetilde{\Phi}$, abhängig von f zu wählen.

Weiterhin erhält der Aufteilungssatz 2.1-3 der Interpolante im konformen Fall eine neue Gestalt:

Korollar 2.3-4

Aus der Inklusion $\Lambda' \subseteq \Lambda \subseteq \mathcal{H}^*$ bzw. $\widetilde{\Phi}' = \text{Ri}_{\mathcal{H}}(\Lambda') \subseteq \widetilde{\Phi} = \text{Ri}_{\mathcal{H}}(\Lambda) \subseteq \mathcal{H}$ folgt

$$\left\| f - s_{f,\Lambda,\widetilde{\Phi}} \right\|_{\mathcal{H}} \ \leq \ \left\| f - s_{f,\Lambda',\widetilde{\Phi}'} \right\|_{\mathcal{H}} \quad \text{für alle } f \in \mathcal{H} \ . \tag{2.3-7}$$

[4] Vergleiche (2-6).

Wir werden nun an einem Beispiel verdeutlichen, wie die bisherigen Ergebnisse dieses Hauptkapitels zusammenwirken:

Beispiel 2.3-5

Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbert-Raum. Gegeben sei ein Tupel $\Lambda \subset \mathcal{H}^*$ von linear unabhängigen Funktionalen der Gestalt

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda_1 \circ L \\ \Lambda_2 \end{pmatrix}, \tag{2.3-8}$$

wobei $L : \mathcal{H} \to \mathcal{G}$ ein bijektiver Operator sei. Mittels Gleichung (2.2-5) definiert L das Skalarprodukt $\langle Lf | Lg \rangle_{\mathcal{G}} = \langle f | g \rangle_{\mathcal{H}}$ und macht auch $\mathcal{G}$ zu einem Hilbert-Raum. Offenkundig gilt $\Lambda_1 \subset \mathcal{G}^*$. Gegeben sei weiterhin eine Funktion $f \in \mathcal{H}$.
Gesucht ist die Interpolante $s_{f,\Lambda,\widetilde{\Phi}} = \widetilde{\Phi}^{\mathrm{tr}} \cdot \alpha$ zu f, deren Koeffizientenvektor $\alpha \in \mathbb{C}^{\#\Lambda}$ aus dem linearen Gleichungssystem $\Lambda(\widetilde{\Phi}) \cdot \alpha = \Lambda(f)$ berechnet wird. Oben zeigte sich, daß die konforme Wahl $\widetilde{\Phi} := \mathrm{Ri}_{\mathcal{H}}(\Lambda)$ der Ansatzfunktionen nicht nur die lineare Unabhängigkeit von $\widetilde{\Phi}$ garantiert, sondern auch die Invertierbarkeit der Interpolationsmatrix $\Lambda(\widetilde{\Phi})$. Wir zerlegen $\widetilde{\Phi}$ genau wie Λ: $\widetilde{\Phi} = \left(\widetilde{\Phi}_1^{\mathrm{tr}}, \widetilde{\Phi}_2^{\mathrm{tr}}\right)^{\mathrm{tr}}$. Dabei gilt nach Konstruktion

$$\widetilde{\Phi}_1 \;=\; \mathrm{Ri}_{\mathcal{H}}(\Lambda_1 \circ L) \;=\; \mathrm{Ri}_{\mathcal{H}} \circ L^+(\Lambda_1) \;\overset{(2.2\text{-}3)}{=}\; L^* \circ \mathrm{Ri}_{\mathcal{G}}(\Lambda_1)$$

und $\widetilde{\Phi}_2 = \mathrm{Ri}_{\mathcal{H}}(\Lambda_2)$. Wie in (2.3-4) gilt $\widetilde{\Psi}_L = L(\widetilde{\Phi}_1) = L \circ L^* \circ \mathrm{Ri}_{\mathcal{G}}(\Lambda_1)$. Die Interpolante $s_{f,\Lambda,\widetilde{\Phi}}$ zu f zerfällt durch die konforme Wahl der Ansatzfunktionen in zwei Summanden:

$$\begin{aligned} s_{f,\Lambda,\widetilde{\Phi}} &= \mathrm{Ri}_{\mathcal{H}}(\Lambda)^{\mathrm{tr}}\,\alpha \;=\; \mathrm{Ri}_{\mathcal{H}}(\Lambda_1 \circ L)^{\mathrm{tr}}\,\alpha_1 + \mathrm{Ri}_{\mathcal{H}}(\Lambda_2)^{\mathrm{tr}}\,\alpha_2 \\ &\overset{(2.2\text{-}3)}{=} L^* \circ \mathrm{Ri}_{\mathcal{G}}(\Lambda_1)^{\mathrm{tr}}\,\alpha_1 + \mathrm{Ri}_{\mathcal{H}}(\Lambda_2)^{\mathrm{tr}}\,\alpha_2 \\ &= L^* \circ \mathrm{Ri}_{\mathcal{G}}(\Lambda_1)^{\mathrm{tr}}\,\alpha_1 + \widetilde{\Phi}_2^{\mathrm{tr}}\,\alpha_2 \,. \end{aligned} \tag{2.3-9}$$

Entsprechend zerfällt auch die Interpolationsmatrix

$$\begin{aligned} \Lambda(\widetilde{\Phi}) &= \begin{pmatrix} \Lambda_1 \circ L \circ \mathrm{Ri}_{\mathcal{H}}(\Lambda_1 \circ L) & \Lambda_1 \circ L \circ \mathrm{Ri}_{\mathcal{H}}(\Lambda_2) \\ \Lambda_2 \circ \mathrm{Ri}_{\mathcal{H}}(\Lambda_1 \circ L) & \Lambda_2 \circ \mathrm{Ri}_{\mathcal{H}}(\Lambda_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \langle \Lambda_1 \circ L | \Lambda_1 \circ L \rangle_{\mathcal{H}^*} & \langle \Lambda_1 \circ L | \Lambda_2 \rangle_{\mathcal{H}^*} \\ \langle \Lambda_2 | \Lambda_1 \circ L \rangle_{\mathcal{H}^*} & \langle \Lambda_2 | \Lambda_2 \rangle_{\mathcal{H}^*} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{2.3-10}$$

wobei wie in (2.3-2) die Gleichung $\lambda \circ \mathrm{Ri}_{\mathcal{H}}(\mu) = \langle \lambda | \mu \rangle_{\mathcal{H}^*}$ Verwendung findet.
Für die Interpolante $s_{f,\Lambda,\widetilde{\Phi}}$ zu f gilt nun nach Gleichung (2.1-2) die Fehlerabschätzung $\left|\lambda(f) - \lambda\left(s_{f,\Lambda,\widetilde{\Phi}}\right)\right| \le P_{\mathcal{H},\Lambda}(\lambda) \cdot \left\|f - s_{f,\Lambda,\widetilde{\Phi}}\right\|_{\mathcal{H}}$ für alle $\lambda \in \mathcal{H}^*$. Durch Anwendung des Aufteilungssatzes 2.1-2 und des Korollars 2.3-4 ergibt sich daraus für alle $\lambda \in \mathcal{H}^*$ bzw. alle $f \in \mathcal{H}$:

$$\begin{aligned} P_{\mathcal{H},\Lambda}(\lambda) &\le P_{\mathcal{H},\Lambda_1\circ L}(\lambda) & \left\|f - s_{f,\Lambda,\widetilde{\Phi}}\right\|_{\mathcal{H}} &\le \left\|f - s_{f,\Lambda_1\circ L,\widetilde{\Phi}_1}\right\|_{\mathcal{H}} \\ P_{\mathcal{H},\Lambda}(\lambda) &\le P_{\mathcal{H},\Lambda_2}(\lambda) & \left\|f - s_{f,\Lambda,\widetilde{\Phi}}\right\|_{\mathcal{H}} &\le \left\|f - s_{f,\Lambda_2,\widetilde{\Phi}_2}\right\|_{\mathcal{H}} \,. \end{aligned}$$

Mittels des Transformationssatzes 2.2-4 kann nun die erste Zeile weiter umgeformt werden: Für beliebige $\mu \in \mathcal{G}^*$ gilt

$$(2.3\text{-}11)\quad P_{\mathcal{H},\Lambda}(\mu \circ L) \;\leq\; P_{\mathcal{H},\Lambda_1 \circ L}(\mu \circ L) \;=\; P_{\mathcal{G},\Lambda_1}(\mu)$$

und $\left\| f - s_{f,\Lambda,\widetilde{\Phi}} \right\|_{\mathcal{H}} \leq \left\| L(f) - L\left(s_{f,\Lambda_1 \circ L,\widetilde{\Phi}_1}\right) \right\|_{\mathcal{G}}$ für alle $f \in \mathcal{H}$. Wir können nun Satz 2.2-5 anwenden und folgern:

$$(2.3\text{-}12)\quad \left\| f - s_{f,\Lambda,\widetilde{\Phi}} \right\|_{\mathcal{H}} \;\leq\; \left\| Lf - s_{Lf,\Lambda_1,\widetilde{\Psi}_L} \right\|_{\mathcal{G}} \;.$$

Mit den beiden letzten Gleichungen haben wir die Fehlerabschätzung in $\mathcal{H}$ bzgl. $\Lambda_1 \circ L$ auf eine Abschätzung in $\mathcal{G}$ bzgl. Λ_1 zurückgeführt.

Dieses Beispiel wird in 6.1-1 weitergeführt.

Die Fehlerabschätzung kann zu einer Konvergenzanalyse ausgebaut werden, wenn eine parametrisierte Schar von Funktionaltupeln Λ^h, $h > 0$, betrachtet wird. Diese Konvergenzanalyse ist erst Gegenstand des Kapitels 6.1, da zusätzliche Voraussetzungen über die Natur der Funktionale notwendig sind.

2.4 Nichtinjektive Operatoren

Wir schwächen nun die Voraussetzung der Injektivität von L, die im Transformationssatz 2.2-4 gemacht wurde, wie folgt ab.

Sei $L \neq 0$ ein auf dem Hilbert-Raum $\mathcal{H}$ definierter linearer Operator, dessen Kern $N(L)$ endlichdimensional ist. Sei $M(L) := N(L)^{\perp}$ sein orthogonales Komplement in $\mathcal{H}$, d. h. es gilt $\mathcal{H} = M(L) \bigoplus N(L)$. Seien $\mathrm{Pr}_{M(L)} : \mathcal{H} \to M(L)$ bzw. $\mathrm{Pr}_{N(L)} : \mathcal{H} \to N(L)$ die orthogonalen Projektionen von $\mathcal{H}$ auf $M(L)$ bzw. $N(L)$. Die eindeutige Zerlegung eines Elementes $f \in \mathcal{H}$ in Komponenten der direkten Summe ist somit durch $f = \mathrm{Pr}_{M(L)} f + \mathrm{Pr}_{N(L)} f$ gegeben, und es gilt $\mathrm{Pr}_{M(L)} f \perp \mathrm{Pr}_{N(L)} f$. Außerdem ist

$$\widetilde{L} := L|_{M(L)} : M(L) \to L(\mathcal{H})$$

ein Isomorphismus.[5] Es gilt $L(f) = L \circ \mathrm{Pr}_{M(L)} f + L \circ \mathrm{Pr}_{N(L)} f = \widetilde{L} \circ \mathrm{Pr}_{M(L)} f$ für alle $f \in \mathcal{H}$. Wir erklären $L(\mathcal{H})$ nun zu einem Hilbert-Raum $\mathcal{G}$, indem wir das Skalarprodukt

$$(2.4\text{-}1)\quad \langle g_1 | g_2 \rangle_{\mathcal{G}} \;:=\; \left\langle \widetilde{L}^{-1} g_1 \middle| \widetilde{L}^{-1} g_2 \right\rangle_{\mathcal{H}} \quad \text{bzw.} \quad \left\langle \widetilde{L} f_1 \middle| \widetilde{L} f_2 \right\rangle_{\mathcal{G}} \;=\; \langle f_1 | f_2 \rangle_{\mathcal{H}}$$

für $g_j \in \mathcal{G}$ bzw. $f_j \in M(L)$ einführen. Da $\widetilde{L}$ ein Isomorphismus ist, handelt es sich bei $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathcal{G}}$ tatsächlich um ein Skalarprodukt, vgl. auch Satz 2.2-4. Alle Ergebnisse der Kapitel 2.2 und 2.3 gelten daher für $M(L)$ und $\widetilde{L}$ statt $\mathcal{H}$ und L. Wir werden sie nun aber auf $\mathcal{H}$

[5] Das Problem kann auch aufwendiger angegangen werden, indem man den Quotientenraum $\mathcal{Q} := \mathcal{H}/_{N(L)}$ definiert, und ihn mit der Norm $\left\| \widetilde{f} \right\|_{\mathcal{Q}} := \inf_{f \in \widetilde{f}} \|f\|_{\mathcal{H}}$ versieht. Er ist dann isometrisch isomorph zu $L(\mathcal{H})$.

und L übertragen. Dabei wirkt sich vor allem der Einfluß der Projektion $\mathrm{Pr}_{M(L)}$ aus. Für alle Funktionen $f_1, f_2 \in \mathcal{H}$ folgt die Verallgemeinerung

$$\begin{aligned} \langle Lf_1 | Lf_2 \rangle_{\mathcal{G}} &= \left\langle \widetilde{L} \circ \mathrm{Pr}_{M(L)} f_1 \middle| \widetilde{L} \circ \mathrm{Pr}_{M(L)} f_2 \right\rangle_{\mathcal{G}} = \left\langle \mathrm{Pr}_{M(L)} f_1 \middle| \mathrm{Pr}_{M(L)} f_2 \right\rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \langle f_1 | f_2 \rangle_{\mathcal{H}} - \left\langle \mathrm{Pr}_{N(L)} f_1 \middle| \mathrm{Pr}_{N(L)} f_2 \right\rangle_{\mathcal{H}} \end{aligned} \tag{2.4-2}$$

der Gleichung (2.2-5), woraus

$$\|Lf\|_{\mathcal{G}} = \left\| \mathrm{Pr}_{M(L)} f \right\|_{\mathcal{H}} \leq \|f\|_{\mathcal{H}} \quad \text{für alle } f \in \mathcal{H} \tag{2.4-3}$$

folgt. Mit Gleichung (2.2-6) erzielen wir das entsprechende Ergebnis

$$\begin{aligned} \|\lambda\|_{\mathcal{G}^*} &= \left\| \lambda \circ \widetilde{L} \right\|_{M(L)^*} = \sup_{f \in M(L)_{\neq 0}} \frac{\left| \lambda \circ \widetilde{L}(f) \right|}{\|f\|_{M(L)}} \\ &= \sup_{f \in M(L)_{\neq 0}} \frac{\left| \lambda \circ \widetilde{L} \circ \mathrm{Pr}_{M(L)}(f) \right|}{\|f\|_{\mathcal{H}}} \leq \sup_{f \in \mathcal{H}_{\neq 0}} \frac{|\lambda \circ L(f)|}{\|f\|_{\mathcal{H}}} = \|\lambda \circ L\|_{\mathcal{H}^*} \end{aligned}$$

für alle $\lambda \in \mathcal{G}^*$ bei den dualen Normen. Darüber hinaus gilt

$$\begin{aligned} \|\lambda \circ L\|_{\mathcal{H}^*} &= \left\| \lambda \circ \widetilde{L} \circ \mathrm{Pr}_{M(L)} \right\|_{\mathcal{H}^*} \\ &\leq \left\| \widetilde{L}^+ \right\|_{L(\mathcal{H})^* \to M(L)^*} \cdot \|\lambda\|_{M(L)^*} \cdot \left\| \mathrm{Pr}_{M(L)} \right\|_{\mathcal{H} \to M(L)} = \|\lambda\|_{\mathcal{G}^*} , \end{aligned}$$

da $\widetilde{L}^+$ und der Projektionsoperator die Norm 1 besitzen. Zusammen folgt

$$\|\lambda \circ L\|_{\mathcal{H}^*} = \|\lambda\|_{\mathcal{G}^*} , \tag{2.4-4}$$

weshalb die Gleichungen (2.2-6) und (2.2-7) unvermindert für alle $\lambda \in \mathcal{G}^*$ gelten.

Seien nun linear unabhängige Funktionale $\Lambda \subset \mathcal{H}^*$ gegeben, die wie in Beispiel 2.3-5 in $\Lambda_1 \circ L$ und Λ_2 zerlegt sind. Die Interpolante $s_{f,\Lambda,\widetilde{\Phi}} = \widetilde{\Phi}^{\mathrm{tr}} \cdot \alpha$ soll zu gegebenen $f \in \mathcal{H}$ die Interpolationsbedingung $\Lambda(f) = \Lambda(\widetilde{\Phi}) \cdot \alpha$ erfüllen. Der Einfachheit halber wählen wir $\widetilde{\Phi}$ konform. Die Matrix $\Lambda(\widetilde{\Phi})$ ist also invertierbar. Ist der Λ_2-Anteil nicht vorhanden und $f \in N(L)$, so ist $\Lambda(f) = \Lambda_1 \circ L(f) = 0$ und somit auch $s_{f,\Lambda,\widetilde{\Phi}} = 0$. Oft ist es aber erwünscht, Funktionen(anteile) aus $N(L)$ zu *rekonstruieren*, so daß dieses Ergebnis nicht akzeptabel ist. Wir fügen daher den Ansatzfunktionen ein Tupel P von Funktionen hinzu, welches eine Basis des Kernes von L bildet — oder zumindest eine Basis des Teilraumes von $N(L)$, der rekonstruiert werden soll. Dann gilt $L(P) = 0$. Die Interpolante erhält so die Gestalt

$$s_{f,\Lambda,\widetilde{\Phi},P} = \widetilde{\Phi}^{\mathrm{tr}} \cdot \alpha + P^{\mathrm{tr}} \cdot \beta . \tag{2.4-5}$$

Aus der Interpolationsbedingung (2-4) wird

$$\Lambda(f) = \Lambda\left(s_{f,\Lambda,\widetilde{\Phi},P} \right) = \Lambda(\widetilde{\Phi}) \cdot \alpha + \Lambda(P) \cdot \beta . \tag{2.4-6}$$

Die Interpolationsmatrix $\Lambda(\widetilde{\Phi}) = \begin{pmatrix} \Lambda(\widetilde{\Phi}) & \Lambda(P) \end{pmatrix}$ ist nun nicht mehr quadratisch, da $\#\Lambda < \#\widetilde{\Phi} + \#P$ gilt. Wir helfen dem ab, indem wir die Bedingung

$$(2.4\text{-}7) \qquad \Lambda(P)^*\alpha = 0$$

hinzunehmen. Wegen $L(P) = 0$ gilt $\Lambda(P) = \begin{pmatrix} 0 \\ \Lambda_2(P) \end{pmatrix}$. Bedingung (2.4-7) entspricht also tatsächlich nur $\Lambda_2(P)^*\alpha_2 = 0$.[6] Dies ist auf Grund des konformen Ansatzes zu $\left\langle P \middle| \widetilde{\Phi}_2^{\mathrm{tr}}\,\alpha_2 \right\rangle_{\mathcal{H}} = 0$ äquivalent. Wir verlangen nun, daß die Matrix $\Lambda(P)$ injektiv ist.[7] Nach einem rein algebraischen Beweis, der z. B. in [Isk94], Satz 2.1 und [Fra95], Satz 2.5-1 wiedergegeben ist, ist die *erweiterte Interpolationsmatrix* $\begin{pmatrix} \Lambda(\widetilde{\Phi}) & \Lambda(P) \\ \Lambda(P)^* & 0 \end{pmatrix}$ invertierbar. Da wir vom konformen Ansatz ausgehen, läßt sich der Satz 2.3-3 wie folgt verallgemeinern: Die Lösung des Minimierungsproblems

$$\|f - s\|_{\mathcal{H}} \;\rightarrow\; \text{Min. !} \quad \text{für} \quad s = \widetilde{\Phi}^{\mathrm{tr}} \cdot \alpha + P^{\mathrm{tr}} \cdot \beta \text{ mit } \Lambda(P)^*\alpha = 0$$

stimmt mit der Interpolante überein, die sich aus (2.4-6) und (2.4-7) ergibt. Daher gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\left\| f - s_{f,\Lambda,\widetilde{\Phi},P} \right\|_{\mathcal{H}}^2 &= \inf_{s = \widetilde{\Phi}^{\mathrm{tr}} \cdot \alpha + P^{\mathrm{tr}} \cdot \beta:\ \Lambda(P)^*\alpha = 0} \|f - s\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&\overset{(2.4\text{-}2)}{\leq} \inf_{\alpha,\beta:\ \Lambda(P)^*\alpha=0} \left\| L\left(f - (\widetilde{\Phi}^{\mathrm{tr}} \cdot \alpha + P^{\mathrm{tr}} \cdot \beta)\right) \right\|_{\mathcal{G}}^2 \\
&\quad + \inf_{\alpha,\beta:\ \Lambda(P)^*\alpha=0} \left\| \mathrm{Pr}_{N(L)}\left(f - (\widetilde{\Phi}^{\mathrm{tr}} \cdot \alpha + P^{\mathrm{tr}} \cdot \beta)\right) \right\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&= \inf_{\alpha:\ \Lambda(P)^*\alpha=0} \left\| L\left(f - \widetilde{\Phi}^{\mathrm{tr}} \cdot \alpha\right) \right\|_{\mathcal{G}}^2 \qquad \text{wg. } L(P) = 0 \\
&\quad + \inf_{\alpha,\beta:\ \Lambda(P)^*\alpha=0} \left\| \mathrm{Pr}_{N(L)}\left(f - (\widetilde{\Phi}^{\mathrm{tr}} \cdot \alpha)\right) - P^{\mathrm{tr}} \cdot \beta \right\|_{\mathcal{H}}^2 .
\end{aligned}$$

Der zweite Summand läßt sich durch $\inf_\beta \left\|\mathrm{Pr}_{N(L)}(f) - P^{\mathrm{tr}} \cdot \beta\right\|_{\mathcal{H}}^2$ weiter abschätzen, indem $\alpha = 0$ eingesetzt wird. Es handelt sich hierbei um den Fehler der Approximation von $\mathrm{Pr}_{N(L)}(f)$ in span P. Sofern P nicht nur einen Teilraum, sondern ganz $N(L)$ aufspannt, verschwindet der Fehler.[8] Wir gehen daher im folgenden davon aus und erhalten die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\left\| f - s_{f,\Lambda,\widetilde{\Phi},P} \right\|_{\mathcal{H}} &\leq \inf_{\alpha:\ \Lambda(P)^*\alpha=0} \left\| L\left(f - \widetilde{\Phi}^{\mathrm{tr}} \cdot \alpha\right) \right\|_{\mathcal{G}} \\
&\overset{(2.4\text{-}3)}{\leq} \inf_{\alpha:\ \Lambda(P)^*\alpha=0} \left\| f - \widetilde{\Phi}^{\mathrm{tr}} \cdot \alpha \right\|_{\mathcal{H}} ,
\end{aligned}$$

[6] Für die Praxis ist von Vorteil, daß die Interpolationsmatrix lediglich um relativ wenige Nichtnullelemente anwächst.

[7] Unter dieser Annahme kann man sogar von der Voraussetzung der Invertierbarkeit von $\Lambda(\widetilde{\Phi})$ absehen. Es reicht aus, wenn die Matrix $\Lambda(\widetilde{\Phi})$ lediglich auf dem Raum der Tupel α, die (2.4-7) erfüllen, positiv definit ist. Man spricht dann von einer *bedingt positiv definiten Matrix*. Vergleiche dazu auch [Fra95], Satz 2.5-1 oder [Isk94], Satz 2.1.

[8] Dies gilt auch für $f \in$ span P.

die Gleichung (2.3-5) verallgemeinert. Die Bedingung unter dem Infimum ist, wie oben erwähnt, zu $\left\langle P \middle| \widetilde{\Phi}_2^{\mathrm{tr}} \cdot \alpha_2 \right\rangle_{\mathcal{H}} = 0$ äquivalent. Wählt man $\widetilde{\Phi}_2 \subset M(L)$, wodurch man allerdings die Funktionale Λ_2 beeinflußt, so gilt sie automatisch. Wir erhalten dadurch $\left\| f - s_{f,\Lambda,\widetilde{\Phi},P} \right\|_{\mathcal{H}} \leq \left\| f - s_{f,\Lambda,\widetilde{\Phi}} \right\|_{\mathcal{H}}$ und können mit den bekannten Fehlerabschätzungen für die Interpolation *ohne* P-Anteil weiterarbeiten.

2.5 Optimale Rekonstruktion

In diesem Kapitel werden wir nicht von der Interpolationsbedingung (2-4) ausgehen. Wir werden statt dessen eine gegebene Funktion $f \in \mathcal{H}$ aus ihren Werten $\Lambda(f)$ *optimal rekonstruieren*, d. h. wir werden die globale Norm $\|s\|_{\mathcal{H}}$ für Rekonstruktionen $s \in \mathcal{H}$ minimieren. Es zeigt sich, daß das Rekonstruktionsproblem dem Interpolationsproblem aus (2-1) bis (2-4) äquivalent ist.

Der folgende Satz ist eine Verallgemeinerung des Theorems 2.1 aus [Sch95b] auf beliebige Hilbert-Räume $\mathcal{H}$ an Stelle von Sobolew-Räumen. Er läßt sich, wie z. B. in [Sch97b], Sec. 3.1.5 geschildert, auch auf Semi-Hilbert-Räume verallgemeinern.

Satz 2.5-1

Das Tupel $\Lambda \subset \mathcal{H}^*$ sei linear unabhängig. Dann ist das Rekonstruktionsproblem

(2.5-1) finde ein $s \in \mathcal{H}$ mit $\Lambda(s) = \Lambda(f)$ und $\|s\|_{\mathcal{H}} \to$ Min. !

zu gegebenem $f \in \mathcal{H}$ ist eindeutig lösbar, und die Lösung s entspricht genau der konformen Interpolante $s_{f,\Lambda,\widetilde{\Phi}}$ aus (2-3).

Beweis

Der Approximationstheorie entnehmen wir den folgenden *Projektionssatz*: Eine nichtleere, abgeschlossene, konvexe Menge M eines Hilbert-Raumes $\mathcal{H}$ ist eine Tschebyschew-Menge. Das heißt, es gibt zu jedem $f \in \mathcal{H}$ eine eindeutig bestimmte *beste Approximierende* $x^* \in M$, die die Approximationsaufgabe $\|x - f\|_{\mathcal{H}} \to$ Min.! für $x \in M$ löst. Diese beste Approximierende ist eindeutig durch die Bedingung

(2.5-2) $\langle x - x^* | f - x^* \rangle_{\mathcal{H}} \leq 0$ für alle $x \in M$

charakterisiert.

Wir zerlegen nun die in (2.5-1) gesuchte Funktion s in $s = f - x$. Wegen $\Lambda(s) = \Lambda(f)$ folgt $\Lambda(x) = 0$. So ergibt sich das zu (2.5-1) äquivalente Approximationsproblem $\|x - f\|_{\mathcal{H}} \to$ Min.! für $x \in M := \{x \in \mathcal{H} : \Lambda(x) = 0\}$. Die Menge M ist ein linearer Unterraum von $\mathcal{H}$ und somit konvex. Sie ist wg. $0 \in M$ nicht leer, und sie ist abgeschlossen, weil Λ stetig ist. Der Approximationssatz ist also anwendbar; die gesuchte Lösung x^* existiert und ist durch die Bedingung (2.5-2) charakterisiert. Da M linear ist, und x^* darin liegt, durchlaufen mit $x \in M$ auch $h := x - x^*$ und $-h$ ganz M. Die Bedingung (2.5-2) ist daher zu

(2.5-3) $\langle h | f - x^* \rangle_{\mathcal{H}} = 0$ für alle $h \in M$

äquivalent. Wir wissen nun, daß genau eine optimale Rekonstruktion $s = f - x^*$ existiert, und müssen nur noch den letzten Teil der Behauptung, $s = s_{f,\Lambda,\widetilde{\Phi}}$, beweisen. Dazu reicht es auf Grund der Eindeutigkeit zu zeigen, daß $x^* := f - s_{f,\Lambda,\widetilde{\Phi}}$ die charakteristische Bedingung (2.5-3) erfüllt. Mit der konformen Wahl $\widetilde{\Phi} := \mathrm{Ri}_{\mathcal{H}}(\Lambda)$ ist die Bedingung $h \in M$ bzw. $\Lambda(h) = 0$ zu $\left\langle h \middle| \widetilde{\Phi} \right\rangle_{\mathcal{H}} = 0$ bzw. $h \in \left(\operatorname{span} \widetilde{\Phi}\right)^{\perp}$ äquivalent. Es gilt aber $s_{f,\Lambda,\widetilde{\Phi}} = \widetilde{\Phi}^{\mathrm{tr}}\, \alpha \in \operatorname{span} \widetilde{\Phi}$ und daher $\langle h | f - x^* \rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle h \middle| s_{f,\Lambda,\widetilde{\Phi}} \right\rangle_{\mathcal{H}} = 0$ für alle $h \in \Lambda^{-1}(0)$. ■

2.6 Schwache Formulierung des Interpolationsproblems

In diesem Kapitel gehen wir wieder von einer Funktion der Form (2-3) $s_{f,\Lambda,\widetilde{\Phi}} := \widetilde{\Phi}^{\mathrm{tr}} \cdot \alpha$ aus, nur verlangen wir diesmal nicht, daß sie die starke Interpolationsbedingung (2-4), sondern die *schwache Interpolationsbedingung*[9]

$$\text{(2.6-1)} \qquad \left\langle g \middle| s_{f,\Lambda,\widetilde{\Phi}} \right\rangle_{\mathcal{H}} = \langle g | f \rangle_{\mathcal{H}} \qquad \forall\, g \in \operatorname{span} \widetilde{\Psi}$$

erfüllt. Die Funktion $s_{f,\Lambda,\widetilde{\Phi}}$ sei als *schwache Interpolante* bezeichnet. Dabei ist $\widetilde{\Psi}$ ein endliches Tupel von *Testfunktionen*, das dem Tupel $\widetilde{\Phi}$ der Ansatzfunktionen nicht unbedingt entsprechen muß. Ganz allgemein wird $\operatorname{span} \widetilde{\Psi}$ in diesem Kontext als *Testfunktionenraum* bezeichnet. Jede beliebige Testfunktion $g \in \operatorname{span} \widetilde{\Psi}$ hat die Gestalt $g = \widetilde{\Psi}^{\mathrm{tr}} \cdot \beta$ für ein $\beta \in \mathbb{C}^{\#\widetilde{\Psi}}$. Damit erhält die schwache Interpolationsbedingung (2.6-1) die Form

$$\beta^{\mathrm{tr}} \cdot \left\langle \widetilde{\Psi} \middle\| \widetilde{\Phi} \right\rangle_{\mathcal{H}} \cdot \overline{\alpha} = \beta^{\mathrm{tr}} \cdot \left\langle \widetilde{\Psi} \middle| f \right\rangle_{\mathcal{H}} \qquad \forall\, \beta \in \mathbb{C}^{\#\widetilde{\Psi}} .$$

Da der Riesz-Darstellungssatz 1.5-1 auch für den Hilbert-Raum $\mathbb{C}^{\#\widetilde{\Psi}}$ gilt, ist diese Gleichung zu

$$\text{(2.6-2)} \qquad \left\langle \widetilde{\Psi} \middle\| \widetilde{\Phi} \right\rangle_{\mathcal{H}} \cdot \overline{\alpha} = \left\langle \widetilde{\Psi} \middle| f \right\rangle_{\mathcal{H}}$$

äquivalent. Aus diesem linearen Gleichungssystem muß nun der Koeffizientenvektor α bestimmt werden. Man kann sich analog zu Lemma 1.3-1 überlegen, daß die Matrix $\left\langle \widetilde{\Psi} \middle\| \widetilde{\Phi} \right\rangle_{\mathcal{H}}$ nur dann invertierbar ist, wenn sowohl $\widetilde{\Psi}$ als auch $\widetilde{\Phi}$ linear unabhängig sind. Dementsprechend setzen wir dies im weiteren voraus.

Bis jetzt geht aber der Vektor Λ der Funktionale, die uns interessieren, noch gar nicht in die Betrachtung ein. Wir ändern dies, indem wir

$$\text{(2.6-3)} \qquad \widetilde{\Psi} := \mathrm{Ri}_{\mathcal{H}}(\Lambda)$$

[9] Die schwache Interpolationsbedingung taucht z. B. in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen ganz natürlich auf, wenn von $Lu = f$ zur äquivalenten Gleichung $\langle g | Lu \rangle_{\mathcal{H}} = \langle g | f \rangle_{\mathcal{H}}$ für alle $g \in \mathcal{H}$ übergegangen und diese Gleichung dann diskretisiert wird.

als Testfunktionen wählen. Diese *Test*funktionen entsprechen also den konformen *Ansatz*funktionen aus (2.3-1). Setzen wir sie in (2.6-2) ein, ergibt sich die Gleichung

$$\alpha^{\mathrm{tr}} \cdot \left\langle \widetilde{\Phi} \middle| \mathrm{Ri}(\Lambda) \right\rangle_{\mathcal{H}} = \langle f | \mathrm{Ri}(\Lambda) \rangle_{\mathcal{H}} \quad \text{bzw.} \quad \Lambda(\widetilde{\Phi}) \cdot \alpha = \Lambda(f) \ .$$

Dies ist genau die starke Interpolationsbedingung aus Gleichung (2-4). Daher ist die so gewonnene schwache Interpolante $s_{f,\Lambda,\widetilde{\Phi}}$ mit der starken Interpolanten identisch, und deren Fehlerabschätzungen und Lösbarkeitsbetrachtungen gelten hier genauso.

Bemerkung 2.6-1 (Nichtkonformer Ansatz)

Wenn die Testfunktionen $\widetilde{\Psi}$ aus einem Unterraum $\mathcal{H}_1 \overset{\mathsf{d}}{\subseteq} \mathcal{H}$ gewählt werden, wird die schwache Formulierung noch weiter verallgemeinert. Man ersetzt dabei Gleichung (2.6-1) durch $\left\langle g \middle| s_{f,\Lambda,\widetilde{\Phi}} \right\rangle_{\mathcal{H}} = \langle g | f \rangle_{\mathcal{H}_1}$ für alle $g \in \operatorname{span} \widetilde{\Psi}$ und verlangt $f \in \mathcal{H}_1$. Statt (2.6-2) folgt dann $\left\langle \widetilde{\Phi} \middle| \widetilde{\Psi} \right\rangle_{\mathcal{H}} \cdot \alpha = \left\langle f \middle| \widetilde{\Psi} \right\rangle_{\mathcal{H}_1}$ bzw. $\left\langle \widetilde{\Phi} \middle| \widetilde{\Psi} \right\rangle_{\mathcal{H}} \cdot \alpha = \Lambda(f)$ für $\widetilde{\Psi} := \mathrm{Ri}_{\mathcal{H}_1}(\Lambda)$. Die Fehlerabschätzungen werden weiterhin in $\mathcal{H}$ ausgeführt und bleiben wie in Kapitel 2.1. Sie lassen sich aber vorteilhaft weiterentwickeln, falls mehr über die Räume $\mathcal{H}_1$ und $\mathcal{H}$ bekannt ist.

Bemerkung 2.6-2 (Konformer Ansatz)

Wiederum wollen wir die starken Voraussetzungen der Selbstadjungiertheit und positiven Definitheit an die Matrix des Gleichungssystems (2.6-2) stellen, die uns garantieren, daß es eindeutig und effizient lösbar ist. Wir können diese Voraussetzungen erfüllen, indem wir $\widetilde{\Phi} := \widetilde{\Psi}$ wählen. Wir benutzen also die Testfunktionen gleichzeitig auch als Ansatzfunktionen. Diesen Ansatz bezeichnet man als *konform*. Mit Lemma 1.3-1 folgt nun, daß die Matrix $\left\langle \widetilde{\Phi} \middle| \widetilde{\Phi} \right\rangle_{\mathcal{H}} = \langle \Lambda | \Lambda \rangle_{\mathcal{H}^*}$ die geforderten Eigenschaften besitzt.

3 Lebesgue-Räume und Fourier-Transformation

Die abstrakten Hilbert-Räume $\mathcal{H}$ und $\mathcal{G}$ des vorigen Hauptkapitels sollen im vierten Hauptkapitel durch gewichtete Sobolew-Räume konkretisiert werden. Im folgenden werden die dazu nötigen theoretischen Fundamente gelegt; es sind dies die gewichteten Lebesgue-Räume und die Fourier-Transformation.

3.1 Gewichtete Lebesgue-Räume

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ beliebig. Der Raum $\mathbb{R}^d$ sei mit dem üblichen Lebesgue-Maß versehen. Eine *(Lebesgue-)Nullmenge* ist dementsprechend eine Menge vom Lebesgue-Maß 0. Eine Aussage gilt genau dann *fast überall* auf Ω, wenn sie lediglich auf einer Nullmenge verletzt ist. In Formeln wird dies mit æ(Ω) abgekürzt. Dabei bedeutet æ ohne Zusatz æ($\mathbb{R}^d$).

Die Menge aller komplexwertigen, Lebesgue-meßbaren Funktionen auf Ω wird mit $\mathsf{L}(\Omega)$ bezeichnet.[1] Der *Lebesgue-Raum* $\mathsf{L}_p(\Omega)$ ist der lineare Raum der Äquivalenzklassen fast überall gleicher, absolut zur p-ten Potenz $(1 \le p \le \infty)$ integrabler Funktionen aus $\mathsf{L}(\Omega)$.[2] Die Norm auf ihm ist für $p < \infty$ durch $\|f\|^p_{\mathsf{L}_p(\Omega)} := \int_\Omega |f(x)|^p \, dx$ definiert. Für $p = \infty$ setzt man $\|f\|_{\mathsf{L}_\infty(\Omega)} := \sup\operatorname{ess}_{x\in\Omega} |f(x)|$. Zwei Funktionen $f, g \in \mathsf{L}_p(\Omega)$ sind demnach genau dann *fast überall gleich*, wenn $\|f-g\|_{\mathsf{L}_p(\Omega)} = 0$ gilt. Wird eine Funktion fast überall punktweise definiert, so ist damit gleichzeitig die entsprechende Äquivalenzklasse definiert. Wir dürfen daher im weiteren die Sprechweise verkürzen und werden nur noch von Funktionen statt von Äquivalenzklassen reden.

Die Lebesgue-Räume bilden mit ihren Normen Banach-Räume. Der Raum $\mathsf{L}_2(\Omega)$ ist darüberhinaus ein separabler Hilbert-Raum mit dem *Skalarprodukt* [3]

$$\langle f | g \rangle_{\mathsf{L}_2(\Omega)} := \int_\Omega f(x)\, \overline{g(x)}\, dx \; .$$

Der *Raum* $\mathsf{L}_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$ ist definiert als die Menge aller Funktionen in $\mathsf{L}(\Omega)$, die bezüglich *jedes Kompaktums* $K \subset \Omega$, in Zeichen $K \subset\subset \Omega$, Elemente von $\mathsf{L}_p(K)$ sind. Dieser Raum ist zwar nicht normiert, aber er trägt die Topologie, die zur Konvergenz

$$f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{L}_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)} f \quad :\Leftrightarrow \quad f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{L}_p(K)} f \quad \forall\, K \subset\subset \Omega$$

gehört.

Definition 3.1-1 *Träger einer meßbaren Funktion*

Sei $N \subseteq \mathbb{R}^d$ die größte offene Menge, auf der die meßbare Funktion $f \in \mathsf{L}(\Omega)$ fast überall verschwindet. Dann ist ihr *Träger* durch $\operatorname{supp} f := \mathbb{R}^d \setminus N$ definiert.

[1] Wir benutzen die üblichen Definitionen des Lebesgue-Maßes, der Lebesgue-meßbaren Mengen und Funktionen sowie des Lebesgue-Integrals, wie sie z. B. in [Bau92], [Cra82] oder [JG86] auftauchen. Insbesondere ist eine Funktion f genau dann in $\mathsf{L}(\Omega)$, wenn alle Urbilder der Mengen $\{f(x) : |f(x)| > c\}$ für beliebiges $c \in \mathbb{R}$ Lebesgue-meßbare Mengen sind.

[2] Literatur zu Lebesgue-Räumen: Unter anderem [Yos80], Sec. I.3, Ex. 2: Definition, Sec. I.9, Prop. 2: Vollständigkeit, Sec. IV.9, Ex. 3: Dualraum.

[3] Wegen $\overline{x} = x$ ist diese Definition des Skalarproduktes zu $\langle f|g\rangle_{\mathsf{L}_2(\Omega)} = \int_\Omega f(x)\,\overline{g}(x)\,dx = \int_\Omega f\,\overline{g}\,dx$ äquivalent.

Diese Definition ist nicht so landläufig wie die Definition 1.6-1 des Trägers einer *stetigen* Funktion, stimmt aber für stetige Funktionen mit dieser überein. Man findet sie z. B. in [Bau92], Def. 27.1. Wiederum ist der Träger eine abgeschlossene Menge.

Bemerkung 3.1-2

Die Menge N der Definition 3.1-1 existiert und ist eindeutig bestimmt, wie folgende Überlegung zeigt: Auf Grund der Eigenschaften des Lebesgue-Maßes hat eine offene Menge nur dann das Maß 0, wenn sie die leere Menge ist. Diesen Fall wollen wir nicht weiter untersuchen. Zu einer Funktion f seien zwei offene Mengen $N_1, N_2 \subseteq \Omega$ gegeben mit $\|f\|_{\mathsf{L}_p(N_1)} = 0 = \|f\|_{\mathsf{L}_p(N_2)}$ für ein beliebiges p. Dann gilt $\|f\|_{\mathsf{L}_p(N)} = 0$ auch für $N := N_1 \cup N_2$. Auf diese Weise kann man eine monoton wachsende, ggf. überabzählbare Folge von Mengen N konstruieren, die aber nicht über Ω hinaus wachsen können. Nach dem Lemma von Zorn[4] gibt es ein maximales Element. Dieses ist eindeutig bestimmt, denn gäbe es zwei verschiedene maximale Elemente N_1 und N_2, so wäre $N := N_1 \cup N_2$ größer als N_1 oder N_2, was deren Maximalität widerspräche.

Definition 3.1-3 *Gewichteter Lebesgue-Raum* $\mathsf{L}_2(\Omega, \rho)$ zum Gewicht ρ

Zu einer beliebigen, nichtleeren Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ und zu einer lokal integrablen, nichtnegativen *Gewichtsfunktion* $\rho : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ sei

$$\mathsf{L}_2\,(\Omega, \rho) \;:=\; \left\{ f \in \mathsf{L}(\Omega) : \quad \begin{array}{rl} & f(x) \cdot \rho(x)^{1/2} \;\in\; \mathsf{L}_2(\Omega) \\ \wedge & \operatorname{supp} f \;\subseteq\; \operatorname{supp} \rho \end{array} \right\}$$

der *gewichtete Lebesgue-Raum*. Er wird mit dem *inneren Produkt*

$$\langle f | g \rangle_{\mathsf{L}_2(\Omega,\rho)} \;:=\; \int_\Omega f(x)\,\overline{g(x)}\,\rho(x)\,dx$$

versehen.

Bemerkungen 3.1-4

<u>1:</u> Sinnvollerweise sei der Träger von ρ keine Nullmenge, da $\mathsf{L}_2(\Omega, \rho)$ sonst nur die Nullfunktion enthält. Wir fordern außerdem ohne Einschränkung

$$\text{(3.1-1)} \qquad \operatorname{supp} \rho \;=\; \operatorname{clos} \operatorname{inter} \operatorname{supp} \rho\ ,$$

da Nullmengen, die aus $\operatorname{supp} \rho$ herausragen, keinen Beitrag zum Skalarprodukt liefern.

<u>2:</u> Die Definition 3.1-3 ist eine Verallgemeinerung des klassischen Lebesgue-Raumes, denn offenbar gilt $\mathsf{L}_2\,(\Omega) = \mathsf{L}_2\,(\Omega, 1)$.

<u>3:</u> Sie läßt sich wiederum verallgemeinern, indem man statt der Gewichtsfunktion ρ ein beliebiges *Maß* μ benutzt. Genauer: Zu einem *Maßraum* $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ definiert man $\mathsf{L}_2(\Omega, \mu) := \{\, f : \Omega \to \mathbb{C} :\ \ f \text{ ist } \mu\text{-meßbar } \wedge \|f\|^2_{\mathsf{L}_2(\Omega,\mu)} := \int |f|^2\, d\mu < \infty \,\}$, vgl. [MV92], § 13 oder [Maz85], Sec. 1.4.1. Wir werden uns hier aber auf die *Borel-σ-Algebra* auf Ω und das Lebesgue-Maß für μ beschränken, da wir nur Maße mit *Dichte* ρ betrachten werden. Dies bietet den Vorteil, daß in einfacher Weise der Kehrwert $1/\rho$ verwendet werden kann.

[4] Vergleiche [Heu92], Einleitung.

4: Es ist allerdings zu berücksichtigen, daß das Maß $d\mu := \rho(x)\,dx$ außergewöhnliche Eigenschaften bekommt, sobald $\operatorname{supp}\rho \neq \Omega$ gilt. Die Menge $\Omega \setminus \operatorname{supp}\rho$ ist dann nämlich eine μ-Nullmenge, obwohl sie keine Lebesgue-Nullmenge ist. Das zieht nach sich, daß Funktionen $f, g \in \mathsf{L}_2(\Omega,\rho) \cap \mathsf{L}_2(\Omega)$, die auf $\operatorname{supp}\rho$ fast überall gleich, aber auf $\Omega \setminus \operatorname{supp}\rho$ fast überall verschieden wären, derselben $\mathsf{L}_2(\Omega,\rho)$-Äquivalenzklasse angehören würden. Daher ist die *Träger-Bedingung*

$$\text{(3.1-2)} \qquad \operatorname{supp} f \;\subseteq\; \operatorname{supp}\rho \qquad \forall\, f \in \mathsf{L}_2(\Omega,\rho)$$

in der Definition 3.1-3 von entscheidender Bedeutung, um diesen unerwünschten Fall auszuschließen.

Konvention 3.1-5

Offensichtlich gilt $\mathsf{L}_2(\Omega,\rho) = \mathsf{L}_2(\,\Omega \cap \operatorname{supp}\rho, \rho\,)$. So ist es gerechtfertigt, im weiteren nur noch $\mathsf{L}_2(\mathbb{R}^d,\rho)$ statt $\mathsf{L}_2(\Omega,\rho)$ zu betrachten, da man o. E. ρ durch $\rho \cdot \chi_\Omega$ ersetzen kann. Daher wird im folgenden $\mathsf{L}_2(\mathbb{R}^d,\rho)$ durch $\mathsf{L}_2(\rho)$ abgekürzt. Auch der ‘klassische’ $\mathsf{L}_2(\mathbb{R}^d)$ wird als $\mathsf{L}_2(1)$ bezeichnet werden.

Gelegentlich werden wir die folgenden Symbole verwenden:

Definition 3.1-6 *Landau-Symbole*

Gibt es eine Konstante $C > 0$, mit der die Ungleichung

$$|\rho_1(\omega)| \;\leq\; C \cdot |\rho_2(\omega)| \qquad \text{æ}$$

erfüllt ist, so kürzt man diese Beziehung mit Hilfe des Landau-Symbols $\mathcal{O}$ auch als

$$\rho_1(\omega) \;=\; \mathcal{O}\left(\rho_2(\omega)\right) \qquad \text{æ}$$

ab. Die symmetrische Beziehung $\rho_1 = \mathcal{O}(\rho_2)$ und $\rho_2 = \mathcal{O}(\rho_1)$ fast überall stellen wir durch das Landau-Symbol Θ dar:

$$\rho_1 \;=\; \Theta\,(\rho_2) \quad :\Leftrightarrow \quad \exists\, C \geq c > 0 :\; c \cdot |\rho_2| \;\leq\; |\rho_1| \;\leq\; C \cdot |\rho_2|\;,$$

jeweils fast überall. Es handelt sich um eine Äquivalenzrelation auf dem Raum $\mathsf{L}(\Omega)$, der im Kapitel 3.1 eingeführt wird.

3.2 Einbettungen zwischen gewichteten Lebesgue-Räumen

Satz 3.2-1 (Isometrien zwischen gewichteten Lebesgue-Räumen)

Gilt für zwei Gewichtsfunktionen ρ_1, ρ_2 die Beziehung $\operatorname{supp}\rho_1 \subseteq \operatorname{supp}\rho_2$, so ist der Operator $J : \mathsf{L}_2(\rho_1) \to \mathsf{L}_2(\rho_2);\; f \mapsto \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} \cdot f$ ein isometrischer Operator.

Haben die Gewichtsfunktionen denselben Träger, so ist J bijektiv, und die Räume sind isometrisch isomorph.

Beweis

Wegen $\operatorname{supp}\rho_1 \subseteq \operatorname{supp}\rho_2$ ist die Funktion $\sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}$ fast überall wohldefiniert, und ihr Träger entspricht dem von ρ_1. Sei $f \in \mathsf{L}_2(\rho_1)$ beliebig. Dann gilt ibes. $\operatorname{supp} f \subseteq \operatorname{supp}\rho_1$. Zusammen folgt $\operatorname{supp} J(f) \subseteq \operatorname{supp}\rho_1 \subseteq \operatorname{supp}\rho_2$. Weiterhin gilt

$$\|J(f)\|^2_{\mathsf{L}_2(\rho_2)} \;=\; \int |f|^2 \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \rho_2 \, dx \;=\; \|f\|^2_{\mathsf{L}_2(\rho_1)} \;<\; \infty \,.$$

Demnach ist $J(f) \in \mathsf{L}_2(\rho_2)$ und J isometrisch. Da J linear und als Isometrie auch stetig und injektiv ist, gilt $\mathsf{L}_2(\rho_1) \overset{\mathsf{d}}{\hookrightarrow} \mathsf{L}_2(\rho_2)$. □

Die Voraussetzung $\operatorname{supp}\rho_2 \subseteq \operatorname{supp}\rho_1$ impliziert analog $\mathsf{L}_2(\rho_2) \overset{\mathsf{d}}{\hookrightarrow} \mathsf{L}_2(\rho_1)$. Der entsprechende Operator multipliziert mit $\sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}$, es handelt sich also um J^{-1}.

■

Dieses schöne Ergebnis hat den Nachteil, daß der Operator J noch „relativ kompliziert" ist. Die aufeinander abgebildeten Funktionen können sehr verschiedene asymptotische Eigenschaften aufweisen. Wir betrachten daher im weiteren die *identische* Einbettung und benötigen dabei u. a. den Kehrwert einer Gewichtsfunktion, deren Träger evtl. nicht der ganze $\mathbb{R}^d$ ist.

Definition 3.2-2 *Kehrwert einer Gewichtsfunktion*

Zu einer gegebenen Gewichtsfunktion ρ sei

$$(3.2\text{-}1) \qquad (1/\rho)(x) \;:=\; \begin{cases} 1/\rho(x) & \text{für } x \in \operatorname{inter}\operatorname{supp}\rho \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

der Kehrwert.

Offensichtlich gilt $\operatorname{supp} 1/\rho = \operatorname{supp}\rho$ und $\rho \cdot 1/\rho = \chi_{\text{inter supp}\,\rho}$. Die Funktion $1/\rho$ ist ebenfalls eine Gewichtsfunktion, da sie nicht-negativ und auf $\operatorname{inter}\operatorname{supp}\rho$ lokal integrabel ist. Dementsprechend erstrecken sich Integrale über den $\mathbb{R}^d$, die $1/\rho$ als Faktor im Integranden enthalten, tatsächlich nur über $\operatorname{supp}\rho$, vgl. Konvention 3.1-5.

Ganz entsprechend muß der *Quotient* zweier beliebiger Gewichtsfunktionen ρ_1, ρ_2 durch

$$(3.2\text{-}2) \qquad (\rho_1/\rho_2)(x) \;:=\; \begin{cases} \rho_1(x)\,/\,\rho_2(x) & \text{für } x \in \operatorname{inter}(\operatorname{supp}\rho_1 \cap \operatorname{supp}\rho_2) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert werden.

Definition 3.2-3 *Identische Einbettung zwischen gewichteten Lebesgue-Räumen*

Für zwei Gewichtsfunktionen ρ_1, ρ_2 mit $\mathsf{L}_2(\rho_2) \subseteq \mathsf{L}_2(\rho_1)$ ist der *Identitätsoperator* durch[5]

$$(3.2\text{-}3) \qquad \mathrm{Id}_{\mathsf{L}_2(\rho_2)\to\mathsf{L}_2(\rho_1)} : \; \mathsf{L}_2(\rho_2) \to \mathsf{L}_2(\rho_1); \; f \mapsto f$$

definiert. Dabei wird f ggf. auf $\operatorname{supp}\rho_1 \setminus \operatorname{supp}\rho_2$ durch 0 fortgesetzt.

[5] Wenn klar ist, zwischen welchen Räumen der Identitätsoperator abbildet, lassen wir den Index weg.

Satz 3.2-4 (Stetigkeit und Norm der Einbettung)

1: Die identische Einbettung ist linear und injektiv.

2: Die Voraussetzung $\mathsf{L}_2(\rho_2) \subseteq \mathsf{L}_2(\rho_1)$ zieht notwendig $\operatorname{supp} \rho_2 \subseteq \operatorname{supp} \rho_1$ nach sich.

3: Gilt $\operatorname{supp} \rho_2 \subseteq \operatorname{supp} \rho_1$ und $\frac{\rho_1}{\rho_2} \in \mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)$, so folgt $\mathsf{L}_2(\rho_2) \overset{\mathsf{d}}{\subseteq} \mathsf{L}_2(\rho_1)$; die Norm der identischen Einbettung ist beschränkt durch

$$(3.2\text{-}4) \qquad \|\mathrm{Id}\|_{\mathsf{L}_2(\rho_2) \to \mathsf{L}_2(\rho_1)} \;\leq\; \left\| \frac{\rho_1}{\rho_2} \right\|_{\mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)}^{1/2} .$$

4: Sei $\mathsf{L}_2(\rho_2) \overset{\mathsf{d}}{\subseteq} \mathsf{L}_2(\rho_1)$ vorausgesetzt. Dann gilt $\rho_1/\rho_2 \in \mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)$ und

$$(3.2\text{-}5) \qquad \|\mathrm{Id}\|_{\mathsf{L}_2(\rho_2) \to \mathsf{L}_2(\rho_1)} \;=\; \left\| \frac{\rho_1}{\rho_2} \right\|_{\mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)}^{1/2} .$$

Beweis

Punkt 1 benötigt keinen Beweis.

Zu 2: Für jede beschränkte Teilmenge B von $\operatorname{supp} \rho_2$ gibt es ein $f \in \mathsf{L}_2(\rho_2) \subseteq \mathsf{L}_2(\rho_1)$ mit $B \subseteq \operatorname{supp} f$. Diese Teilmengen müssen daher auch in $\operatorname{supp} \rho_1$ liegen. □

Zu 3: Für jedes $f \in \mathsf{L}_2(\rho_2)$ gilt

$$\begin{aligned} \|f\|^2_{\mathsf{L}_2(\rho_1)} &= \int\limits_{\operatorname{supp} \rho_1} |f|^2 \rho_1 \, dx \;=\; \int\limits_{\operatorname{supp} \rho_2} |f|^2 \rho_1 \, dx \qquad \text{wg. } \operatorname{supp} f \subseteq \operatorname{supp} \rho_2 \\ &= \int\limits_{\operatorname{supp} \rho_2} |f|^2 \rho_2 \cdot \frac{\rho_1}{\rho_2} \, dx \;\leq\; \left\| \frac{\rho_1}{\rho_2} \right\|_{\mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)} \cdot \|f\|^2_{\mathsf{L}_2(\rho_2)} , \end{aligned}$$

woraus neben $\mathsf{L}_2(\rho_2) \subseteq \mathsf{L}_2(\rho_1)$ auch die Stetigkeit des Identitätsoperators folgt. □

Zu 4: Nach Voraussetzung gilt $c := \|\mathrm{Id}\|^2_{\mathsf{L}_2(\rho_2) \to \mathsf{L}_2(\rho_1)} < \infty$. Für alle $f \in \mathsf{L}_2(\rho_2)$ ergibt sich wegen $\operatorname{supp} f \subseteq \operatorname{supp} \rho_2 \subseteq \operatorname{supp} \rho_1$ daher

$$\int\limits_{\operatorname{supp} \rho_2} |f|^2 \rho_1 \, dx \;=\; \|f\|^2_{\mathsf{L}_2(\rho_1)} \;\leq\; c \cdot \|f\|^2_{\mathsf{L}_2(\rho_2)} \;=\; c \cdot \int\limits_{\operatorname{supp} \rho_2} |f|^2 \rho_2 \, dx$$

bzw.

$$\int\limits_{\operatorname{supp} \rho_2} |f|^2 (\rho_1 - c\,\rho_2) \, dx \;\leq\; 0 .$$

Daraus folgt $\rho_1 \leq c\,\rho_2$ fast überall auf $\operatorname{supp} \rho_2$, indem man an Stelle von f die Funktionen $\chi_B \in \mathsf{L}_2(\rho)$ einsetzt, wobei B die Teilmengen von $\operatorname{supp} \rho_2$ durchläuft, auf denen ρ_1 und ρ_2 integrabel sind. Da beide Gewichte ρ_1, ρ_2 aus $\mathsf{L}_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ stammen, überdecken diese B ganz $\operatorname{supp} \rho_2$. So zeigt sich $\frac{\rho_1}{\rho_2} \;\leq\; c = \|\mathrm{Id}\|^2_{\mathsf{L}_2(\rho_2) \to \mathsf{L}_2(\rho_1)}$ fast überall. Mit (3.2-4) folgt die Gleichung (3.2-5).

■

Korollar 3.2-5

Seien ρ_1, ρ_2 zwei Gewichtsfunktionen. Dann gilt die Äquivalenz

$$(3.2\text{-}6) \qquad \mathsf{L}_2(\rho_2) \overset{\mathsf{d}}{\subseteq} \mathsf{L}_2(\rho_1) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\operatorname{supp}\rho_2 \subseteq \operatorname{supp}\rho_1 \quad \wedge \quad \frac{\rho_1}{\rho_2} \in \mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d) \right) .$$

Beweis

„$\Rightarrow$“: $\operatorname{supp}\rho_2 \subseteq \operatorname{supp}\rho_1$ folgt gemäß Satz 3.2-4, Punkt 2; $\rho_1/\rho_2 \in \mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)$ nach Punkt 4 desselben Satzes. □

„$\Leftarrow$“: Diese Richtung entspricht genau Satz 3.2-4, Punkt 3. ■

Für zwei Gewichtsfunktionen ρ_1, ρ_2 mit dem Träger $\mathbb{R}^d$ und $\rho_1, 1/\rho_2 \in \mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)$ gelten z. B. die Einbettungen $\mathsf{L}_2(\rho_2) \overset{\mathsf{d}}{\subseteq} \mathsf{L}_2(1) \overset{\mathsf{d}}{\subseteq} \mathsf{L}_2(\rho_1)$.

Korollar 3.2-6 (Stetigkeit der Fortsetzung)

Bei gegebener Gewichtsfunktion ρ und Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ gilt $\mathsf{L}_2(\rho \cdot \chi_\Omega) \overset{\mathsf{d}}{\subseteq} \mathsf{L}_2(\rho)$. Der Einbettungsoperator $\mathrm{Id}_{\mathsf{L}_2(\rho\cdot\chi_\Omega)\to\mathsf{L}_2(\rho)}$ besitzt die Norm 1.

Beweis

Wir wenden das Korollar 3.2-5 und Gleichung (3.2-5) auf $\rho_1 := \rho$ und $\rho_2 := \rho \cdot \chi_\Omega$ an. Es gilt $\operatorname{supp}\rho_2 = \operatorname{supp}\rho \cap \Omega \subseteq \operatorname{supp}\rho = \operatorname{supp}\rho_1$ und $(\rho_1/\rho_2)(x) = 1$ für $x \in \operatorname{supp}\rho \cap \Omega$ und 0 sonst. ■

Satz 3.2-7

Der gewichtete Lebesgue-Raum $\mathsf{L}_2(\rho)$ ist ein separabler Hilbert-Raum.

Beweis

Wir wenden das Corollar 13.6 zum Satz von Riesz-Fischer aus [MV92] auf das Maß $d\mu := \rho(x)\,dx$ und auf $\mathcal{X} := \operatorname{supp}\rho$ an. Der Raum ist separabel, da er nach Satz 3.2-1 isometrisch in den separablen Raum $\mathsf{L}_2(1)$ eingebettet werden kann. ■

Satz 3.2-8

Der Raum $\mathsf{L}_2(\rho) \cap \bigcap\limits_{1\le p\le\infty} \mathsf{L}_p(\mathbb{R}^d)$ liegt für beliebige Gewichtsfunktionen ρ dicht in $\mathsf{L}_2(\rho)$.

Beweis

Sei $f \in \mathsf{L}_2(\rho)$ beliebig. Sei $B(r) := \{\, x \in \mathbb{R}^d : \ \|x\| < r \,\}$ für $r \ge 0$ und sei $C(f,n) := \{\, x \in B(n) : \ |f(x)| \ge n \,\}$ für $n \in \mathbb{N}$. Die Funktionen der Folge

$$f_n(x) \;:=\; \operatorname{sgn} f(x) \cdot \min\{\, n, |f(x)| \,\} \cdot \chi_{B(n)}(x) \;\text{ æ},\; n \in \mathbb{N}$$

konvergieren für fast alle $x \in \mathbb{R}^d$ punktweise gegen f und sind Elemente sowohl von $\mathsf{L}_2(\rho)$ als auch von jedem $\mathsf{L}_p(\mathbb{R}^d)$, $1 \le p \le \infty$: Aus $|f_n| \le |f|$ folgt $f_n \in \mathsf{L}_2(\rho)$, und da der Träger jedes f_n wg. $\operatorname{supp} f_n \subseteq B(n)$ kompakt ist und $|f_n| \le n$ gilt, folgt auch $f_n \in \mathsf{L}_p(\mathbb{R}^d)$.

Zu zeigen bleibt $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{L}_2(\rho)} f$.

Auf $B(n) \setminus C(f,n)$ stimmen f und f_n überein. Auf $\mathbb{R}^d \setminus B(n)$ verschwindet f_n, während es auf $B(n) \cap C(f,n)$ die Werte $\pm n$ annimmt, somit beschränkt bleibt. Die Kugeln $B(n)$ füllen $\mathbb{R}^d$ für $n \to \infty$ aus, während $C(f,n)$ monoton fallend $C(f,\infty) := \{x \in \mathbb{R}^d : |f(x)| = \infty\}$ approximiert. Dies ist aber eine Nullmenge, denn die gegenteilige Annahme führt wg. $|f(x)| = \infty \Rightarrow x \in \operatorname{supp} f \subseteq \operatorname{supp} \rho$ zum Widerspruch zu $\|f\|_{\mathsf{L}_2(\rho)} < \infty$. Es folgt

$$
\begin{aligned}
\|f - f_n\|^2_{\mathsf{L}_2(\rho)} &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(x) - f_n(x)|^2 \rho(x)\, dx \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^d \setminus B(n)} |f(x)|^2 \rho(x)\, dx + \int\limits_{B(n)\cap C(f,n)} (\,|f(x)| - n\,)^2 \rho(x)\, dx\ .
\end{aligned}
$$

Das erste Integral konvergiert monoton fallend gegen 0, denn sonst wäre f kein Element von $\mathsf{L}_2(\rho)$. Das zweite Integral konvergiert gegen 0, da das Lebesgue-Maß von $C(f,n)$ verschwindet.

■

3.3 Dualraum eines gewichteten Lebesgue-Raumes

Nun wenden wir uns dem Dualraum eines gewichteten Lebesgue-Raumes zu. Beim Kehrwert einer Gewichtsfunktion greifen wir auf Definition 3.2-2 zurück.

Definition 3.3-1 *Bilinearform bzgl. ρ*

Zur Gewichtsfunktion ρ mit $1/\rho$ wie in Definition 3.2-2 sei $(\cdot,\cdot)_\rho$ durch

$$
(\cdot,\cdot)_\rho : \mathsf{L}_2(\rho) \times \mathsf{L}_2(1/\rho) \to \mathbb{C};\ \ (f,g) \mapsto \int_{\operatorname{supp} \rho} f(x)\, g(x)\, dx
$$

definiert.

Diese Bilinearform ähnelt zwar dem Skalarprodukt auf $\mathsf{L}_2(1)$, ist aber nicht mit diesem zu verwechseln, da sie für andere Funktionen definiert ist. Sie existiert, denn es gilt

$$
\text{(3.3-1)} \qquad \left|(f,g)_\rho\right|^2 = \left|\int_{\operatorname{supp}\rho} f\,\sqrt{\rho}\cdot g\,\sqrt{1/\rho}\, dx\right|^2 \le \|f\|^2_{\mathsf{L}_2(\rho)} \cdot \|g\|^2_{\mathsf{L}_2(1/\rho)} < \infty
$$

nach der Ungleichung von Cauchy-Schwarz für alle zulässigen f, g. Außerdem ist die Bedingung $\left|(f,g)_\rho\right| < \infty$ zu $f \cdot g \in \mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)$ äquivalent.

Lemma 3.3-2 (Isometrie zwischen $\mathsf{L}_2(\rho)$ und $\mathsf{L}_2(1/\rho)$)

Seien ρ und $1/\rho$ Gewichtsfunktionen wie in Definition 3.2-2. Dann ist die Abbildung

$$R_\rho : \mathsf{L}_2(\rho) \to \mathsf{L}_2(1/\rho);\; f \mapsto \overline{f} \cdot \rho$$

eine antilineare Isometrie. Es gilt somit $\mathsf{L}_2(\rho) \overset{\mathsf{d}}{\sim} \mathsf{L}_2(1/\rho)$.
Der inverse Operator $(R_\rho)^{-1} = R_{1/\rho} : \mathsf{L}_2(1/\rho) \to \mathsf{L}_2(\rho);\; g \mapsto \overline{g}/\rho$ ist gleichzeitig auch der adjungierte Operator R_ρ^*.

Beweis
Es gilt

$$(3.3\text{-}2) \qquad \langle R_\rho f | R_\rho g \rangle_{\mathsf{L}_2(1/\rho)} \;=\; \int \overline{f}\,\rho \cdot g\,\rho \cdot 1/\rho\; dx \;=\; \int \overline{f} \cdot g \cdot \rho\; dx \;=\; \langle g | f \rangle_{\mathsf{L}_2(\rho)} \;.$$

Die zweite Aussage folgt aus[6]

$$(3.3\text{-}3) \qquad \langle R_\rho f | g \rangle_{\mathsf{L}_2(1/\rho)} \;=\; \int_{\operatorname{supp}\rho} \overline{f} \cdot \rho \cdot \overline{g} \cdot 1/\rho\; dx \;=\; \big\langle R_{1/\rho} g \big| f \big\rangle_{\mathsf{L}_2(\rho)} \;.$$

■

Korollar 3.3-3

Eine Funktion $f \in \mathsf{L}(\operatorname{supp}\rho)$ ist genau dann ein Element von $\mathsf{L}_2(\rho)$, wenn $(f,g)_\rho < \infty$ für alle $g \in \mathsf{L}_2(1/\rho)$ gilt.

Beweis
$\underline{\Rightarrow:}$ Diese Richtung gilt laut Gleichung (3.3-1).
$\underline{\Leftarrow:}$ Da R_ρ ein Isomorphismus ist, ist die Bedingung „$(f,g)_\rho < \infty$ für alle g“ äquivalent zu $\langle f | h \rangle_{\mathsf{L}_2(\rho)} = (f, R_\rho(h))_\rho < \infty$ für alle $h \in \mathsf{L}_2(\rho)$. Daher entspricht f einem Element des Bidualraumes $\mathsf{L}_2(\rho)^{**}$. Da $\mathsf{L}_2(\rho)$ ein Hilbert-Raum ist, folgt die Behauptung.

■

Auf dem folgenden Satz baut u. a. das Diagramm (4.3-1) auf:

Satz 3.3-4 (Dualraum von $\mathsf{L}_2(\rho)$)

Seien ρ und $1/\rho$ Gewichtsfunktionen wie in Definition 3.2-2. Dann gilt $\mathsf{L}_2(\rho)^* \overset{\mathsf{d}}{\sim} \mathsf{L}_2(1/\rho)$.
Die Isometrie ist durch die lineare Abbildung $R_\rho \circ \mathrm{Ri}_{\mathsf{L}_2(\rho)}$ gegeben. Die Inverse dieser Abbildung lautet $S_\rho := \big(R_\rho \circ \mathrm{Ri}_{\mathsf{L}_2(\rho)}\big)^{-1} : \mathsf{L}_2(1/\rho) \to \mathsf{L}_2(\rho)^*;\; g \mapsto (\cdot, g)_\rho$.

Beweis
Auf Grund des Riesz-Darstellungssatzes 1.5-1 und des Lemmas 3.3-2 sind die Abbildungen $\mathrm{Ri}_{\mathsf{L}_2(\rho)} : \mathsf{L}_2(\rho)^* \to \mathsf{L}_2(\rho)$ und $R_\rho : \mathsf{L}_2(\rho) \to \mathsf{L}_2(1/\rho)$ antilineare Isometrien. Ihre Kombination $R_\rho \circ \mathrm{Ri}_{\mathsf{L}_2(\rho)}$ ist eine lineare Isometrie. Es gilt somit $\mathsf{L}_2(\rho)^* \overset{\mathsf{d}}{\sim} \mathsf{L}_2(1/\rho)$. □

[6] Man beachte die Definition der Adjungierten eines *anti*linearen Operators in Kap. 1.2.

Zu zeigen bleibt $S_\rho^{-1} = R_\rho \circ \mathrm{Ri}_{\mathsf{L}_2(\rho)}$. Nach Definition gilt $(S_\rho(g))(f) = (f,g)_\rho$. Seien nun $\lambda \in \mathsf{L}_2(\rho)^*$ und $f \in \mathsf{L}_2(\rho)$ beliebig. Dann gilt die Gleichung

$$\begin{aligned}\lambda(f) &= \left\langle f \middle| \mathrm{Ri}_{\mathsf{L}_2(\rho)}(\lambda) \right\rangle_{\mathsf{L}_2(\rho)} = \int f\, \overline{\mathrm{Ri}_{\mathsf{L}_2(\rho)}(\lambda)}\, \rho\, dx \\ &= \left(f, R_\rho \circ \mathrm{Ri}_{\mathsf{L}_2(\rho)}(\lambda)\right)_\rho = S_\rho\left(R_\rho \circ \mathrm{Ri}_{\mathsf{L}_2(\rho)}(\lambda)\right)(f) ,\end{aligned}$$

woraus $S_\rho \circ R_\rho \circ \mathrm{Ri}_{\mathsf{L}_2(\rho)} = \mathrm{Id}_{\mathsf{L}_2(\rho)^*}$ folgt. ∎

3.4 Fourier-Transformation

Ziel dieses Kapitels ist die Definition der Fourier-Transformation auf $\mathsf{L}_2(1)$ und die Darstellung ihrer wichtigsten Eigenschaften. Die Fourier-Transformation auf $\mathsf{L}_2(\rho)$ wird dann im Hauptkapitel 4 benötigt, um den gewichteten Sobolew-Raum $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$ zu definieren. Wir werden uns dabei an der Vorgehensweise von [MV92], § 14 orientieren. Die meisten der folgenden Aussagen findet man ebenfalls dort, so daß sie hier ohne Beweis bleiben. Zusätzlich werden Referenzen in [SW71] angegeben.

Definition 3.4-1 *Fourier-Transformation* auf $\mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)$

Für eine Funktion $f \in \mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)$ sind die Operatoren

$$\begin{aligned}\mathrm{FT}(f)(\omega) &:= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{-i\,\omega^{\mathrm{tr}} x}\, dx \qquad \text{und} \\ \mathrm{FT}^{-1}(f)(\omega) &:= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, e^{i\,\omega^{\mathrm{tr}} x}\, dx\end{aligned}$$

definiert.

Satz 3.4-2 (Existenz der Fourier-Transformierten)

Für alle $f \in \mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)$ gilt $\mathrm{FT}(f) \in \mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)$ und $\|\mathrm{FT}(f)\|_{\mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)} \le \|f\|_{\mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)}$. Außerdem ist die Funktion $\mathrm{FT}(f)$ gleichmäßig stetig. Für sie gilt $\lim_{\|\omega\|_2 \to \infty} \mathrm{FT}(f)(\omega) = 0$. Diese asymptotische Aussage ist als *Lemma von Riemann-Lebesgue* bekannt. Da nach Definition

$$\text{(3.4-1)} \qquad \mathrm{FT}^{-1}(f(x)) = (2\pi)^{-d}\, \mathrm{FT}(f(-x))$$

gilt, reicht es aus, lediglich die Eigenschaften des Operators FT zu betrachten.

Zum *Beweis* vgl. [SW71], Theoreme I.1.1 und I.1.2. Leicht kann die dort verwendete, etwas andere Definition der Fourier-Transformation adaptiert werden.

Satz 3.4-3 (Multiplikationssatz)

Liegen die Funktionen f, g in $\mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)$, so gilt

$$\int \mathrm{FT}(f)(x)\, g(a\,x)\, dx = \int f(a\,x)\, \mathrm{FT}(g)(x)\, dx$$

für alle $a > 0$.

Zum *Beweis* vgl. [SW71], Theorem I.1.15 oder auch [MV92], Satz 14.1(3).

Satz 3.4-4 (Fourier-Umkehrformel auf $\mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)$)

Sind die Funktionen f und $\mathrm{FT}(f)$ Elemente von $\mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)$, so gilt $f(x) = \mathrm{FT}^{-1} \circ \mathrm{FT}(f)(x) = \mathrm{FT} \circ \mathrm{FT}^{-1}(f)(x)$ fast überall auf $\mathbb{R}^d$. Für den stetigen Repräsentanten von f gilt dies sogar überall auf $\mathbb{R}^d$.

Zum *Beweis* vgl. [SW71], Corollary I.1.21 oder auch [MV92], Satz 14.3.

Satz und Definition 3.4-5 (Satz v. Plancherel)

Es gibt genau einen Operator $\mathrm{FT}_1 : \mathsf{L}_2(1) \to \mathsf{L}_2(1)$, für den $\mathrm{FT}_1(f) = \mathrm{FT}(f)$ für alle $f \in \mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d) \cap \mathsf{L}_2(1)$ gilt. Wir bezeichnen ihn ebenfalls als Fourier-Transformation und lassen den Index 1, der vom Gewicht 1 herrührt, künftig weg, wenn keine Mißverständnisse entstehen können. Es gilt weiterhin die *Parseval-Gleichung der Fourier-Transformation*

$$(3.4\text{-}2) \qquad \left(\mathrm{FT}_1(f)\,,\, \overline{\mathrm{FT}_1(g)}\right)_1 \;=\; (2\pi)^d\, (f, \overline{g})_1 \quad \forall\, f, g \in \mathsf{L}_2(1)\,.$$

Daher ist der Operator

$$(3.4\text{-}3) \qquad F_1 : \mathsf{L}_2(1) \to \mathsf{L}_2(1);\; f \mapsto (2\pi)^{-d/2}\, \mathrm{FT}_1(f)$$

eine Isometrie.

Zum *Beweis* vgl. [SW71], Theoreme I.2.1 und I.2.3 oder [MV92], Satz 14.7.

Lemma 3.4-6

Stammt f aus $\mathsf{L}_2(1)$ und gilt $\mathrm{FT}_1(f) \in \mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)$, so folgt $f \in C(\mathbb{R}^d) \cap \mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $\|f\|_{\mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)} \le \|\mathrm{FT}_1(f)\|_{\mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)}$ und $\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = 0$. Außerdem gilt die Fourier-Umkehrformel $f(x) = \mathrm{FT}_1^{-1} \circ \mathrm{FT}_1(f)(x) = \mathrm{FT}_1 \circ \mathrm{FT}_1^{-1}(f)(x)$ punktweise.

Zum *Beweis* vgl. [MV92], Corollar 14.8.

Die folgenden Ergebnisse werden i. allg. zunächst auf $\mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)$ gezeigt und dann auf $\mathsf{L}_2(1)$ übertragen. Der Terminus „Fourier-transformierbare Funktion“ meint demzufolge die Gültigkeit der Aussage im jeweiligen Sinne.

Lemma 3.4-7 (Fourier-Transformation und komplexe Konjugation)

Für alle Fourier-transformierbaren Funktionen f folgt direkt aus der Definition 3.4-1

$$(3.4\text{-}4) \qquad \mathrm{FT}\left(\overline{f(x)}\right)(\omega) \;=\; \overline{\mathrm{FT}\left(f(-x)\right)(\omega)} \;=\; \overline{\mathrm{FT}\left(f(x)\right)(-\omega)}\,.$$

Lemma 3.4-8 (Fourier-Transformation und Translation)

Für alle Fourier-transformierbaren Funktionen f gilt

$$(3.4\text{-}5) \qquad \mathrm{FT}^x(f(x-t))(\omega) \;=\; e^{-i\, t^{\mathrm{tr}}\omega}\, \mathrm{FT}(f)(\omega) \quad \text{und}$$

$$(3.4\text{-}6) \qquad \mathrm{FT}^x\left(e^{i\, t^{\mathrm{tr}} x}\, f(x)\right)(\omega) \;=\; \mathrm{FT}(f)(\omega - t) \quad \text{jeweils für alle } t \in \mathbb{R}^d.$$

Zum *Beweis* vgl. [SW71], Sec. I.1, (1.5) oder [MV92], Satz 14.1(1).

Für die inverse Fourier-Transformation folgt aus (3.4-6) und (3.4-1) der Zusammenhang

$$\text{(3.4-7)}\qquad \mathrm{FT}^{-1,x}\left(e^{-i\,t^{\mathrm{tr}}x}\,f(x)\right)(\omega) \;=\; \mathrm{FT}(f)(\omega-t) \quad \text{jeweils für alle } t\in\mathbb{R}^d.$$

Bei dieser Gelegenheit ist es sinnvoll, die *Translation* τ_z einzuführen, die uns noch häufiger begegnen wird: Zu einer beliebigen Funktion f und einem beliebigen $z\in\mathbb{R}^d$ definieren wir

$$\text{(3.4-8)}\qquad \tau_z(f)(x) \;:=\; f(x-z)\;.$$

Die Translationen bilden eine kommutative Gruppe, die dem $(\mathbb{R}^d,+)$ isomorph ist. Die Aussagen des vorigen Satzes schreiben sich nun in der Form $\mathrm{FT}\circ\tau_z = e^{-i\,z^{\mathrm{tr}}\cdot}\cdot\mathrm{FT}$ und $\mathrm{FT}\left(e^{i\,z^{\mathrm{tr}}\cdot}\,f\right) = \tau_z\circ\mathrm{FT}(f)$.

Lemma 3.4-9 (Fourier-Transformation und Skalierung)

Für alle Fourier-transformierbaren Funktionen f gilt

$$\begin{aligned}
&\text{(3.4-9)} && \mathrm{FT}^x(f(a\,x))(\omega) &&= |a|^{-d}\,\mathrm{FT}(f(x))(\omega/a) \quad \text{und}\\
&\text{(3.4-10)} && \mathrm{FT}^{-1}(f(\omega))(a\,x) &&= |a|^{-d}\,\mathrm{FT}^{-1}(f(\omega/a))(x) \quad \text{jeweils für alle } a>0.
\end{aligned}$$

Zum *Beweis* vgl. [SW71], Sec. I.1, (1.6).

Definition 3.4-10 *Faltung von Funktionen*

Die *Faltung* $f*g$ zweier Funktionen $f,g\in\mathsf{L}(\mathbb{R}^d)$ ist durch

$$(f*g)(x) \;:=\; \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\cdot g(y)\,dy$$

definiert. Einige Bedingungen für die Existenz des Integrals werden im nächsten Satz angegeben.

Satz 3.4-11 (Eigenschaften der Faltung)

1: Die Faltung ist kommutativ: $f*g = g*f$.

2: Für alle $f,g\in\mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)$ gilt $\|f*g\|_{\mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)} \le \|f\|_{\mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)}\cdot\|g\|_{\mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)}$. Daher bildet der Raum $\mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)$ mit der Faltung eine kommutative Banach-Algebra.

3: Für alle f,g aus $\mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)$ oder $\mathsf{L}_2(1)$ gilt $\mathrm{FT}(f*g) = \mathrm{FT}(f)\cdot\mathrm{FT}(g)$ und entsprechend $\mathrm{FT}^{-1}(f*g) = (2\pi)^d\,\mathrm{FT}^{-1}(f)\cdot\mathrm{FT}^{-1}(g)$, vgl. [SW71], Theorem I.1.4.

Zum *Beweis* siehe z. B. [For84], S. 75.

Definition 3.4-12 *verallgemeinerte Ableitung*

Unter der *verallgemeinerten Ableitung* einer Funktion $f\in\mathsf{L}(\Omega)$ zum Multiindex $\alpha\in\mathbb{N}_0^d$ bzgl. der Testfunktionen aus $C_0^{|\alpha|}(\Omega)$ verstehen wir die Funktion $D^\alpha f\in\mathsf{L}(\Omega)$, die durch

$$\int D^\alpha f\,\varphi\,dx \;=\; (-1)^{|\alpha|}\int f\,D^\alpha\varphi\,dx \quad \forall\;\varphi\in C_0^{|\alpha|}(\Omega)$$

fast überall eindeutig bestimmt ist, falls sie existiert. Vergleiche [GT83], (7.16).

Satz 3.4-13 (Fourier-Transformation und Ableitung)

Sei $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ ein Multiindex.

<u>1:</u> Liegen die Funktionen $f(x)$ und $x^\alpha \cdot f(x)$ beide in $\mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)$, so existiert $D^\alpha \circ \mathrm{FT}(f)$, und es gilt

$$D^\alpha \circ \mathrm{FT}(f) \;=\; \mathrm{FT}\left((-ix)^\alpha f(x)\right) \;,$$

vgl. [SW71], Theorem I.1.7.

<u>2:</u> Liegt die Funktion f in $\mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)$ und besitzt sie die verallgemeinerte Ableitung $D^\alpha f$, so gilt

$$\mathrm{FT} \circ D^\alpha(f)(\omega) \;=\; (i\omega)^\alpha \; \mathrm{FT}(f)(\omega) \;,$$

vgl. [SW71], Theorem I.1.8.

Satz 3.4-14 (Eigenvektor der Fourier-Transformation)

Für $a > 0$ und $\omega \in \mathbb{R}^d$ gilt die Gleichung

$$\text{(3.4-11)} \quad \mathrm{FT}\left(e^{-a\,x^{\mathrm{tr}}x} \cdot e^{i\,x^{\mathrm{tr}}\omega}\right)(\xi) \;=\; \left(\frac{\pi}{a}\right)^{d/2} e^{-(\xi-\omega)^{\mathrm{tr}}(\xi-\omega)/(4a)} \;.$$

Somit ist $e^{-x^{\mathrm{tr}}x/2}$ ein Eigenvektor der Fourier-Transformation zum Eigenwert $(2\pi)^{d/2}$. Die Funktionen $e^{-a\,x^{\mathrm{tr}}x}$ sind in jedem $\mathsf{L}_p(\mathbb{R}^d)$, $1 \le p \le \infty$, enthalten.

Zum *Beweis* vgl. [SW71], Theorem I.1.13 oder [MV92], Lemma 14.2 und S. 113.

4 Gewichtete Sobolew-Räume

Im zweiten Hauptkapitel wurde die Interpolation allgemein in beliebigen Hilbert-Räumen behandelt. Will man aber tieferliegende Resultate über Hilbert-Räume von Funktionen erzielen, muß man stärkere Voraussetzungen an die Struktur dieser Hilbert-Räume stellen. Insbesondere benötigen wir Einbettungssätze und Fourier-Transformierbarkeit. Dadurch werden wir in die Lage versetzt, nicht nur δ_x-Funktionale, wie z. B. in [Wei94], sondern allgemeinere Funktionale zu behandeln, die u. a. $\delta_x \circ L$ für einen großen Raum von Operatoren L umfassen.

Die Eigenschaften eines Hilbert-Raumes sind durch sein Skalarprodukt eindeutig festgelegt. Daher liegt es nahe, daß wir uns auf solche Hilbert-Räume konzentrieren, die durch ein für unsere Zwecke besonders gut geeignetes Skalarprodukt gekennzeichnet sind. Dies sind die gewichteten Sobolew-Räume $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$.

4.1 Definition der Räume $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$

Wir verallgemeinern die inverse Fourier-Transformation von $\mathsf{L}_2(1)$ auf den Raum $\mathsf{L}_2(\rho)$. Sie ist dort nicht mehr im $\mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)$- oder $\mathsf{L}_2(1)$-Sinne definierbar, wenn die Gewichtsfunktion ρ zu stark fällt: Gilt z. B. $\sqrt{\rho} \in \mathsf{L}_2(1)$, so liegt die konstante Funktion 1 im Raum $\mathsf{L}_2(\rho)$,[1] ist aber nicht klassisch Fourier-transformierbar. Daher kann auch die transformierte Funktion nicht in $\mathsf{L}_2(1)$ liegen. Wir werden darum einen geeigneten, größeren Bildraum konstruieren. Dabei werden wir uns an der Vorgehensweise von [MV92], § 14 orientieren.

Vorausgesetzt werden Gewichtsfunktionen ρ, für die

$$\text{(4.1-1)} \qquad \rho \in \mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d) \quad \text{oder} \quad 1/\rho \in \mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)$$

unter Berücksichtigung der Definition 3.2-2 gilt.[2]

Definition 4.1-1 *Gewichteter Sobolew-Raum* $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$

Zu einer Gewichtsfunktion $\rho : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ setzen wir

$$\text{(4.1-2)} \qquad \mathcal{D}_\rho \ := \ \{ \ f \in \mathsf{L}_2(1) : \ \mathrm{FT}_1(f) \in \mathsf{L}_2(\rho) \ \} \ .$$

Auf diesem linearen Raum ist das *innere Produkt*

$$\text{(4.1-3)} \qquad \langle f|g \rangle_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)} \ := \ (2\pi)^{-d} \ \langle \ \mathrm{FT}_1(f) \,|\, \mathrm{FT}_1(g) \ \rangle_{\mathsf{L}_2(\rho)}$$

definiert. Für Gewichte ρ mit $1/\rho \in \mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)$ sei der *gewichtete Sobolew-Raum* $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$ nun der Raum $\mathcal{D}_\rho$, versehen mit diesem Skalarprodukt.

Zu einer Gewichtsfunktion $\rho \in \mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)$ sei

$$\text{(4.1-4)} \qquad \mathsf{H}\left(\mathbb{R}^d, \rho\right) \ := \ \mathrm{comp}_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)} \ \mathcal{D}_\rho$$

[1] Vergleiche dazu auch Lemma 4.3-3.

[2] Andere Gewichtsfunktionen lassen sich als Summe zweier solcher Gewichtsfunktionen darstellen, deren Träger nur eine Nullmenge gemein haben. Bei der Definition der Räume $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$ erwächst allerdings aus einer solchen Zerlegung eine starke Einschränkung an die Träger der Fourier-Transformierten der Funktionen dieser Räume. Andererseits ist die Voraussetzung (4.1-1) realistisch, da alle praxisrelevanten positiv definiten radialen Basisfunktionen sie erfüllen.

die Vervollständigung von $\mathcal{D}_\rho$ bzgl. der durch das Skalarprodukt induzierten Topologie. $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$ ist somit ein Hilbert-Raum.

Bemerkung 4.1-2 (Bedeutung der Voraussetzungen in (4.1-2))

1: Die Voraussetzung $f \in \mathsf{L}_2(1)$ statt $f \in \mathsf{L}(\mathbb{R}^d)$ ist notwendig, um die Existenz der Fourier-Transformierten $\mathrm{FT}_1(f)$ zu garantieren.

2: Die Bedingung $1/\rho \in \mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)$ impliziert mit (3.2-6) die Einbettung $\mathsf{L}_2(\rho) \overset{\mathsf{d}}{\subseteq} \mathsf{L}_2(\chi_{\operatorname{supp}\rho})$. Mit Korollar 3.2-6 ergibt sich schließlich $\mathsf{L}_2(\rho) \overset{\mathsf{d}}{\subseteq} \mathsf{L}_2(1)$. Daher folgt aus der Voraussetzung $\mathrm{FT}_1(f) \in \mathsf{L}_2(\rho)$ schon automatisch $f \in \mathsf{L}_2(1)$, weshalb $\mathcal{D}_\rho$ und damit $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$ in der Regel ein *echter* Unterraum von $\mathsf{L}_2(1)$ ist.

3: Andererseits gilt $\mathcal{D}_\rho = \mathsf{L}_2(1)$ z. B. für beschränkte Gewichtsfunktionen ρ mit ganz $\mathbb{R}^d$ als Träger, weil dann $\mathsf{L}_2(1)$ stetig in $\mathsf{L}_2(\rho)$ eingebettet ist, und daher die Voraussetzung $\mathrm{FT}_1(f) \in \mathsf{L}_2(\rho)$ für jedes $f \in \mathsf{L}_2(1)$ erfüllt ist. Da aber z. B. stark fallende Gewichte ρ einen wesentlich größeren Raum $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$ zulassen, wurde die Vervollständigung in (4.1-4) notwendig.

Definition 4.1-3 *Fourier-Transformation* FT_ρ *auf* $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$

Falls $1/\rho \in \mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)$ gilt, so sei die Fourier-Transformation FT_ρ auf $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho) \subseteq \mathsf{L}_2(1)$ gleich der Fourier-Transformation FT_1 auf $\mathsf{L}_2(1)$, die aus Satz 3.4-5 bekannt ist.

Im Fall $\rho \in \mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)$ ist FT_1 auf dem dichten Teilraum $\mathcal{D}_\rho \subseteq \mathsf{L}_2(1)$ von $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$ definiert und dort stetig. Es gilt nämlich $\|\mathrm{FT}_1(f)\|_{\mathsf{L}_2(\rho)} = (2\pi)^{d/2}\, \|f\|_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)}$ für alle $f \in \mathcal{D}_\rho$. Da außerdem der Raum $\mathsf{L}_2(\rho)$ nach Satz 3.2-7 vollständig ist, läßt sich die Fourier-Transformation FT_1 von $\mathcal{D}_\rho$ aus eindeutig und stetig zu FT_ρ auf ganz $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$ fortsetzen, und es gilt $\mathrm{FT}_\rho\left(\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)\right) \subseteq \mathsf{L}_2(\rho)$.

Liegen sowohl ρ als auch $1/\rho$ in $\mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)$, so stimmen die beiden Definitionen überein.

Wiederum lassen wir den Index von FT_ρ gelegentlich weg, wenn keine Zweifel entstehen können.

Lemma 4.1-4

Es gilt $\mathrm{FT}_1^{-1}\left(\mathsf{L}_2(\rho) \cap \mathsf{L}_2(1)\right) = \mathcal{D}_\rho$.

Beweis

Sei $f \in \mathrm{FT}_1^{-1}(\mathsf{L}_2(\rho) \cap \mathsf{L}_2(1))$. Dann gilt $\mathrm{FT}_1(f) \in \mathsf{L}_2(\rho)$ und $\mathrm{FT}_1(f) \in \mathsf{L}_2(1)$. Aus letzterem folgt $f \in \mathsf{L}_2(1)$ wg. Satz 3.4-5. Daher erfüllt f die Bedingungen aus (4.1-2) und ist ein Element von $\mathcal{D}_\rho$. Ist umgekehrt $f \in \mathcal{D}_\rho$, so gilt $\mathrm{FT}_1(f) \in \mathsf{L}_2(1) \cap \mathsf{L}_2(\rho)$ wg. (4.1-2). ■

Bemerkung 4.1-5

Anders als der Raum $\mathsf{L}_2(\rho)$ ist der Raum $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$ für ein beliebiges Gewicht ρ translationsinvariant; es gilt sogar $\|\tau_z(f)\|_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)} = \|f\|_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)}$ für alle $z \in \mathbb{R}^d$. Dies beruht auf der Eigenschaft (3.4-5) der Fourier-Transformation.

Bemerkung 4.1-6

Der Raum $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$ wurde als $\mathcal{F}_{1/\rho}$ schon in [WS93] und [Wei94] eingeführt, expliziter auch in [Sch95b], § 2. Dabei wurde die Fourier-Transformation jedoch im distributionellen Sinne definiert — dies ist ein Zugang, der hier im Zuge einer reinen L_2-Theorie nicht beschritten werden soll.

Satz 4.1-7

Der Operator

$$F_\rho : \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho) \to \mathsf{L}_2(\rho); \quad f \mapsto (2\pi)^{-d/2}\ \mathrm{FT}_\rho(f) \tag{4.1-5}$$

ist eine Isometrie, d. h. es gilt $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho) \overset{\mathsf{d}}{\sim} \mathsf{L}_2(\rho)$.

Beweis

Laut Definition 4.1-3 gilt $\mathrm{FT}_\rho\left(\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)\right) \subseteq \mathsf{L}_2(\rho)$. Für alle $f \in \mathcal{D}_\rho$ gilt $\mathrm{FT}_\rho(f) = \mathrm{FT}_1(f)$ und daher

$$\|F_\rho f\|^2_{\mathsf{L}_2(\rho)} = \left\|(2\pi)^{-d/2}\ \mathrm{FT}_\rho(f)\right\|^2_{\mathsf{L}_2(\rho)} \overset{(4.1\text{-}3)}{=} \|f\|^2_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)} .$$

Die Gleichung setzt sich auf ganz $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$ fort, da $\mathcal{D}_\rho$ darin dicht liegt. Damit sind Injektivität und Isometrie gezeigt. □

Der Nachweis der Surjektivität gestaltet sich etwas aufwendiger: Für $1/\rho \in \mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)$ gilt $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho) = \mathcal{D}_\rho \subseteq \mathsf{L}_2(1)$ (lt. Definition 4.1-1) und $\mathrm{FT}_\rho = \mathrm{FT}_1$ (lt. Definition 4.1-3) sowie $\mathsf{L}_2(\rho) \overset{\mathsf{d}}{\subseteq} \mathsf{L}_2(\chi_{\operatorname{supp}\rho}) \overset{\mathsf{d}}{\subseteq} \mathsf{L}_2(1)$ (lt. (3.2-6) und Korollar 3.2-6). Daher gibt es für alle $g \in \mathsf{L}_2(\rho)$ ein $f := \mathrm{FT}_1^{-1}(g) \in \mathsf{L}_2(1)$. Zu zeigen bleibt $f \in \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$ bzw. $f \in \mathcal{D}_\rho$. Wegen $\mathrm{FT}_1(f) = g \in \mathsf{L}_2(\rho)$ ist dies aber gegeben.

Im Falle $\rho \in \mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)$ sei wiederum ein $g \in \mathsf{L}_2(\rho)$ gegeben, für das ein Urbild $f \in \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$ gesucht ist. Nach Satz 3.2-8 liegt der Raum $\mathsf{L}_2(1) \cap \mathsf{L}_2(\rho)$ dicht in $\mathsf{L}_2(\rho)$. Es gibt daher eine Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ darin, die im $\mathsf{L}_2(\rho)$-Sinne gegen g konvergiert. Andererseits ist die Folge $f_n := \mathrm{FT}_1^{-1}(g_n) \in \mathsf{L}_2(1)$ definiert. Diese Folge gehört zu $\mathcal{D}_\rho \subseteq \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$, denn sie liegt in $\mathsf{L}_2(1)$ und erfüllt $\mathrm{FT}_1(f_n) = g_n \in \mathsf{L}_2(\rho)$. Sie bildet wegen $\|f_n - f_m\|^2_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)} = (2\pi)^d\ \|g_n - g_m\|^2_{\mathsf{L}_2(\rho)}$ eine Cauchy-Folge. Einzig an dieser Stelle geht nun ein, daß der Raum $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$ durch Vervollständigung konstruiert wurde: Es gibt einen eindeutigen Grenzwert $f := \lim\limits_{n\to\infty} f_n \in \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$. Schließlich bleibt nur noch $\mathrm{FT}_\rho(f) = g$ zu zeigen: Es gilt

$$\|\mathrm{FT}_\rho(f) - g\|_{\mathsf{L}_2(\rho)} \leq \|\mathrm{FT}_\rho(f) - \mathrm{FT}_1(f_n)\|_{\mathsf{L}_2(\rho)} + \|g_n - g\|_{\mathsf{L}_2(\rho)} .$$

Der erste Summand verschwindet, weil FT_ρ durch stetige Fortsetzung von $\mathcal{D}_\rho$ aus konstruiert wurde; der zweite nach Definition von g_n.

■

Korollar 4.1-8 zu Satz 4.1-7

Für jede in der Definition 4.1-1 zugelassene Gewichtsfunktion ρ ist $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$ ein separabler Hilbert-Raum.

Beweis

Die Behauptung folgt aus Satz 4.1-7, da $\mathsf{L}_2(\rho)$ laut Satz 3.2-7 ein separabler Hilbert-Raum ist.

■

Korollar 4.1-9 zu Satz 4.1-7 und Korollar 3.2-5

Es gilt die Äquivalenz[3]

$$(4.1\text{-}6) \qquad \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho_2) \overset{\mathsf{d}}{\subseteq} \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho_1) \quad \Leftrightarrow \quad \left(\operatorname{supp} \rho_2 \subseteq \operatorname{supp} \rho_1 \ \wedge \ \frac{\rho_1}{\rho_2} \in \mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d) \right) .$$

Die Norm des identischen Einbettungsoperators beträgt dann laut (3.2-5)

$$(4.1\text{-}7) \qquad \|\mathrm{Id}\|_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho_2)\to\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho_1)} = \left\| \frac{\rho_1}{\rho_2} \right\|_{\mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)}^{1/2} .$$

Beweis

Laut Korollar 3.2-5 ist die rechte Seite der Äquivalenz zu $\mathsf{L}_2(\rho_2) \overset{\mathsf{d}}{\subseteq} \mathsf{L}_2(\rho_1)$ gleichbedeutend. So gilt für jede Funktion $f \in \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho_2)$ wg. Satz 4.1-7 die Formel $\mathrm{FT}_{\rho_2}(f) \in \mathsf{L}_2(\rho_2) \subseteq \mathsf{L}_2(\rho_1) = \mathrm{FT}_{\rho_1}(\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho_1))$, woraus $\mathrm{FT}_{\rho_1}^{-1} \circ \mathrm{FT}_{\rho_2}(f) \in \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho_1)$ folgt. Um zu einer *identischen* Einbettung zu gelangen, muß nun noch $\mathrm{FT}_{\rho_1}^{-1} \circ \mathrm{FT}_{\rho_2}(f) = f$ gezeigt werden. Alles andere ergibt sich dann von selber.

Dafür reicht es, von einem $f \in \mathcal{D}_{\rho_2}$ auszugehen, da $\mathcal{D}_{\rho_2}$ in $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho_2)$ dicht liegt, und die verallgemeinerte Fourier-Transformation FT_ρ als stetige Fortsetzung der Fourier-Transformation FT_1 auf $\mathcal{D}_\rho$ definiert wurde. Für solch ein f gilt $\mathrm{FT}_{\rho_2}(f) = \mathrm{FT}_1(f) \in \mathsf{L}_2(\rho_2) \cap \mathsf{L}_2(1) \subseteq \mathsf{L}_2(\rho_1) \cap \mathsf{L}_2(1)$. Mit Lemma 4.1-4 folgt daraus $\mathrm{FT}_1^{-1} \circ \mathrm{FT}_{\rho_2}(f) = f \in \mathcal{D}_{\rho_1}$. Auf $\mathcal{D}_{\rho_1}$ gilt aber $\mathrm{FT}_{\rho_1} = \mathrm{FT}_1$, so daß weiter $\mathrm{FT}_{\rho_2}(f) = \mathrm{FT}_{\rho_1}(f)$ folgt. Diese Gleichung setzt sich stetig auf ganz $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho_2)$ fort, womit $\mathrm{FT}_{\rho_1}^{-1} \circ \mathrm{FT}_{\rho_2}(f) = f$ gezeigt ist.

■

Korollar 4.1-10 Spezialfall von Korollar 4.1-9

Aus $1/\rho \in \mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)$ folgt $\mathsf{H}\left(\mathbb{R}^d, \rho\right) \overset{\mathsf{d}}{\subseteq} \mathsf{H}\left(\mathbb{R}^d, \chi_{\operatorname{supp}\rho}\right) \overset{\mathsf{d}}{\subseteq} \mathsf{H}\left(\mathbb{R}^d, 1/\rho\right)$.

Dieses Korollar ist deshalb interessant, weil der Raum $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, 1/\rho)$ zum Dualraum von $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$ isometrisch isomorph ist, wie wir in Satz 4.3-1 sehen werden.

[3]Man kann dies als eine Verallgemeinerung von [NSW97], Proposition 3.1 ansehen.

Satz 4.1-11 (Verallgemeinerter Sobolew-Einbettungssatz)

Für $1/\rho \in \mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)$ gilt $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho) \overset{\mathsf{d}}{\subseteq} C(\mathbb{R}^d) \cap \mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)$, und die Funktionen aus $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)$ verschwinden im Unendlichen. Die Norm des Einbettungsoperators bzgl. der $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)$- und der $\mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)$-Norm ist durch $\|1/\rho\|^{1/2}_{\mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)}$ beschränkt. Außerdem gilt die Fourier-Umkehrformel $\mathrm{Id} = \mathrm{FT}_\rho^{-1} \circ \mathrm{FT}_\rho = \mathrm{FT}_\rho \circ \mathrm{FT}_\rho^{-1}$.

Beweis

Wir verwenden den Beweis des Satzes 14.16 aus [MV92] als Leitfaden. Aus $1/\rho \in \mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)$ folgt $1/\rho \in \mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)$. Nach Definition 4.1-3 gilt daher $\mathrm{FT}_\rho = \mathrm{FT}_1$, und der Raum $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho) = \mathcal{D}_\rho$ ist ein Unterraum von $\mathsf{L}_2(1)$. Für jedes $f \in \mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)$ ergibt die Ungleichung von Cauchy-Schwarz[4]

$$\begin{aligned}\|\mathrm{FT}_1(f)\|^2_{\mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)} &= \left(\int |\mathrm{FT}_1(f)|\,\rho^{1/2}\cdot\rho^{-1/2}\,d\omega\right)^2 \\ &\le \int |\mathrm{FT}_1(f)|^2\,\rho\,d\omega \cdot \int \rho^{-1}\,d\omega \;=\; \|f\|^2_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)}\cdot\|1/\rho\|_{\mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)}\,.\end{aligned}$$

Demnach ist $\mathrm{FT}_1(f)$ ein Element von $\mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)$. Da außerdem $f \in \mathsf{L}_2(1)$ gilt, kann Lemma 3.4-6 angewandt werden. Damit folgt u. a. $\|f\|_{\mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)} \le \|\mathrm{FT}_1(f)\|_{\mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)}$ und die Gültigkeit der Fourier-Umkehrformel. ■

Der Sobolew-Einbettungssatz 4.1-11 soll in Satz 4.1-13 verallgemeinert werden, wozu das nächste Lemma benötigt wird.

Satz 4.1-12 (Verallgemeinerung von Satz 3.4-13, Punkt 1)

Sei $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ ein Multiindex. Liegen die Funktionen $f(x)$ und $x^\alpha \cdot f(x)$ beide in $\mathsf{L}_2(1)$, so existiert $D^\alpha \circ \mathrm{FT}(f) \in \mathsf{L}_2(1)$, und es gilt $D^\alpha \circ \mathrm{FT}_1(f) = \mathrm{FT}_1\left((-ix)^\alpha f(x)\right)$.

Beweis

Laut Satz 3.2-8 liegt der Raum $\mathsf{L}_2(1) \cap \mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)$ dicht in $\mathsf{L}_2(1)$. Wegen Satz 3.4-13, Punkt 1 gilt die Behauptung für alle Funktionen aus diesem Schnitt. Außerdem stimmen dort FT_1 und FT überein. Zu zeigen bleibt also lediglich, daß sich die behaupteten Eigenschaften auf ganz $\mathsf{L}_2(1)$ fortsetzen.

Nehmen wir dazu an, daß eine Funktion $f \in \mathsf{L}_2(1)$ mit $x^\alpha \cdot f(x) \in \mathsf{L}_2(1)$ gegeben sei. Mit $p(x) := 1 + x^\alpha$ ist die letzte Eigenschaft zu $g(x) := p(-ix)\cdot f(x) \in \mathsf{L}_2(1)$ äquivalent. Wir wählen nun eine beliebige Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathsf{L}_2(1) \cap \mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)$ mit $g_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathsf{L}_2(1)} g$. Da überall $p(-ix) \neq 0$ gilt, ist die Folge $f_n(x) := g_n(x)/p(-ix)$ wohldefiniert. Wegen $\|1/p(-ix)\|_{\mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)} = 1$ gilt $\|f_n\|_{\mathsf{L}_q(\mathbb{R}^d)} \le \|g_n\|_{\mathsf{L}_q(\mathbb{R}^d)}$ für $q = 1$ bzw. 2. Auch (f_n) und $(p(-ix)\cdot f_n(x))$ liegen demnach in $\mathsf{L}_2(1) \cap \mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)$.

Wegen Satz 3.4-13, Punkt 1 existiert $p(D) \circ \mathrm{FT}_1(f_n) \in \mathsf{L}_2(1)$, und es gilt $p(D) \circ \mathrm{FT}_1(f_n) = \mathrm{FT}_1\left(p(-ix)\cdot f_n(x)\right) = \mathrm{FT}_1(g_n)$. Da FT_1 stetig auf $\mathsf{L}_2(1)$ ist, konvergiert diese Folge gegen $\mathrm{FT}_1(g) = \mathrm{FT}_1(p(-ix)\cdot f(x)) \in \mathsf{L}_2(1)$ sowie $\mathrm{FT}_1(f_n)$ gegen $\mathrm{FT}_1(f)$.

[4]Hier kann ohne Einschränkung mit $\rho^{1/2}$ erweitert werden, weil $\operatorname{supp}\mathrm{FT}_1(f) \subseteq \operatorname{supp}\rho$ wegen $f \in \mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)$ gilt.

Der Operator $p(D)$ ist demnach an allen „Stellen" $\mathrm{FT}_1(f)$, wobei f die Voraussetzungen des Satzes erfüllt, stetig. Insbesondere existiert und gilt $p(D)\circ\mathrm{FT}_1(f) = \mathrm{FT}_1(p(-ix)\cdot f(x))$.

■

Satz 4.1-13 (Sobolew-Einbettungssatz bei höherer Regularität)

Wenn $1/\rho \in \mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)$ sowie $\left(\left(1+\omega^{2\alpha}\right)\,\rho(\omega)\right)^{-1} \in \mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)$ für einen Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$ gilt, dann existiert zu allen Funktionen $f \in \mathsf{H}\left(\mathbb{R}^d, (1+\omega^{2\alpha})\,\rho(\omega)\right)$ die verallgemeinerte Ableitung $D^\alpha f \in \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$, und diese ist ebenfalls stetig und wesentlich beschränkt. Es gilt

$$(4.1\text{-}8) \qquad \mathrm{FT}_1 \circ D^\alpha(f)(\omega) \;=\; (i\,\omega)^\alpha \cdot \mathrm{FT}_1(f)(\omega) \quad \text{æ}$$

und

$$(4.1\text{-}9) \qquad \|D^\alpha f\|^2_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)} + \|f\|^2_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)} \;=\; \|f\|^2_{\mathsf{H}\left(\mathbb{R}^d,\,(1+\omega^{2\alpha})\rho(\omega)\right)}\;,$$

weshalb der Ableitungsoperator D^α stetig ist.

Beweis

Wir führen die Abkürzungen $\widetilde{\rho}(\omega) := \left(1+\omega^{2\alpha}\right)\,\rho(\omega)$ und $p(\omega) := i^{|\alpha|+1} + \omega^\alpha$ ein. Dann gilt $1+\omega^{2\alpha} = |p(i\,\omega)|^2$. Aus $\operatorname{supp} p = \mathbb{R}^d$ und $|p|^{-2} \in \mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)$ folgt $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \widetilde{\rho}) \overset{\mathsf{d}}{\subseteq} \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$ mit (4.1-6). Es gilt aber wg. Satz 4.1-11 auch $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \widetilde{\rho}) \overset{\mathsf{d}}{\subseteq} C(\mathbb{R}^d) \cap \mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)$. So bleibt nur noch die Existenz von $D^\alpha f$ zu zeigen.

Sei nun eine Funktion $f \in \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \widetilde{\rho})$ gegeben. Dann sind die Aussagen $D^\alpha f \in \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$ und $p(D)(f) \in \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$ äquivalent. Es reicht also, letzteres nachzuweisen.

Nach Definition gilt $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \widetilde{\rho}) \overset{\text{set}}{=} \mathcal{D}_{\widetilde{\rho}}$ und $\mathrm{FT}_{\widetilde{\rho}}(f) = \mathrm{FT}_1(f) \in \mathsf{L}_2(\widetilde{\rho})$. Wegen

$$(4.1\text{-}10) \quad \infty \;>\; \int |\mathrm{FT}_1(f)|^2\;\widetilde{\rho}\,d\omega \;=\; \int |p(i\,\omega)\cdot \mathrm{FT}_1(f)(\omega)|^2 \cdot \rho(\omega)\,d\omega$$

ist die Funktion $p(\pm i\,\omega)\cdot\mathrm{FT}_1(f)(\omega)$ ein Element von $\mathsf{L}_2(\rho)$. Nach Voraussetzung, Korollar 3.2-5 und Korollar 3.2-6 gilt $\mathsf{L}_2(\widetilde{\rho}) \subseteq \mathsf{L}_2(\rho) \subseteq \mathsf{L}_2(1)$. Wir wissen also, daß $\mathrm{FT}_1(f)$ und $p(-i\,\omega)\cdot\mathrm{FT}_1(f)(\omega)$ in $\mathsf{L}_2(1)$ liegen. Das Lemma 4.1-12 liefert nun mit (3.4-1)

$$(4.1\text{-}11) \quad \begin{aligned} \mathrm{FT}_1^{-1}\left(p(i\,\omega)\cdot\mathrm{FT}_1(f)(\omega)\right) &= (2\pi)^d\,\mathrm{FT}_1\left(p(-i\,\omega)\cdot\mathrm{FT}_1(f)(-\omega)\right) \\ &= (2\pi)^d\,p(D)\circ\mathrm{FT}_1\left(\mathrm{FT}_1(f)(-\omega)\right) \\ &= p(D)\circ\mathrm{FT}_1^{-1}\left(\mathrm{FT}_1(f)(\omega)\right) \;=\; p(D)(f)\;. \end{aligned}$$

Insbesondere existiert $p(D)(f) \in \mathsf{L}_2(1)$. Es folgt aus (4.1-11) weiter $\mathrm{FT}_1\circ p(D)(f)(\omega) = p(i\,\omega)\cdot\mathrm{FT}_1(f)(\omega)$, womit (4.1-8) bewiesen ist. Wegen (4.1-10) ist $\mathrm{FT}_1\circ p(D)(f)$ ein Element von $\mathsf{L}_2(\rho)$, und da auf $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$ die verallgemeinerte der klassischen Fourier-Transformation entspricht, ist schließlich auch $p(D)(f) \in \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$ gezeigt. □

Schließlich ergibt sich (4.1-9) durch Nachrechnen:

$$\begin{aligned}
&\|D^\alpha f\|^2_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)} + \|f\|^2_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)} \\
&\quad = \quad (2\pi)^{-d} \int \left(|\mathrm{FT}_1 \circ D^\alpha f|^2 + |\mathrm{FT}_1(f)|^2 \right) \cdot \rho \, d\omega \\
&\quad \overset{(4.1\text{-}8)}{=} \quad (2\pi)^{-d} \int |\mathrm{FT}_1(f)(\omega)|^2 \cdot \left(\omega^{2\alpha} + 1\right) \cdot \rho(\omega) \, d\omega \; .
\end{aligned}$$

■

Beispiel 4.1-14 (Klassische Sobolew-Räume $\mathsf{H}^l(\mathbb{R}^d)$)

Die bekannten, „klassischen“ Sobolew-Räume[5] $\mathsf{H}^l(\mathbb{R}^d)$ sind der Spezialfall

$$\mathsf{H}^l\left(\mathbb{R}^d\right) \; := \; \mathsf{H}\left(\mathbb{R}^d,\, \rho_l\right) \quad \text{mit} \quad \rho_l(\omega) \; := \; (\, 1 + \omega^{\mathrm{tr}}\omega \,)^l, \quad l \in \mathbb{R}$$

unserer Definition 4.1-1. Es gilt $\rho_0 = 1$ und $\rho_l/\rho_m = \rho_{l-m}$ für alle $l, m \in \mathbb{Z}$. Für $0 \le l \le m$ gilt $\rho_l/\rho_m \in \mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)$, woraus mit Korollar 4.1-9 insgesamt

$$\text{(4.1-12)} \quad \mathsf{H}^m(\mathbb{R}^d) \overset{\mathsf{d}}{\subseteq} \mathsf{H}^l(\mathbb{R}^d) \overset{\mathsf{d}}{\subseteq} \mathsf{H}^0(\mathbb{R}^d) \overset{\mathsf{d}}{=} \mathsf{L}_2(1)$$

folgt; offenbar gilt $\operatorname{supp} \rho_l = \mathbb{R}^d$ für alle l. Die Norm der Einbettungsoperatoren beträgt

$$\|\mathrm{Id}\|_{\mathsf{H}^m(\mathbb{R}^d)\to\mathsf{H}^l(\mathbb{R}^d)} \; = \; \left\| \frac{\rho_l}{\rho_m} \right\|^{1/2}_{\mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)} \; = \; 1$$

gemäß (4.1-7). Für $l > d/2$ gilt $1/\rho_l \in \mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)$. Wird Satz 4.1-11 angewandt, ergibt sich der klassische Sobolew-Einbettungssatz in der Form

$$\text{(4.1-13)} \quad \mathsf{H}^l(\mathbb{R}^d) \overset{\mathsf{d}}{\subseteq} C(\mathbb{R}^d) \cap \mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d) \; .$$

Auch dieses Ergebnis läßt sich wie folgt für höhere Regularitäten verallgemeinern: Es sei $l \in \mathbb{N}_{>d/2}$ und $m \ge l$ sowie $\widetilde{\rho}_\alpha(\omega) := (1+\omega^{2\alpha})\,\rho_l(\omega)$ für einen Multiindex α mit $|\alpha| \le m-l$. Dann sind ρ_l^{-1}, $\widetilde{\rho}_\alpha^{-1}$ und ρ_m^{-1} Elemente von $\mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)$, und es gilt $\dfrac{\widetilde{\rho}_\alpha}{\rho_m} = \dfrac{1+\omega^{2\alpha}}{\rho_{m-l}} \in \mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)$.

Nach Korollar 4.1-9 folgt daraus $\mathsf{H}^m(\mathbb{R}^d) \overset{\mathsf{d}}{\subseteq} \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \widetilde{\rho}_\alpha)$. Laut Satz 4.1-11 gibt es zu jedem $f \in \mathsf{H}^m(\mathbb{R}^d)$ die stetige und beschränkte Ableitung $D^\alpha f \in \mathsf{H}^l(\mathbb{R}^d)$, wobei

$$\begin{aligned}
\|D^\alpha f\|^2_{\mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)} \quad &\le \quad \|1/\rho_l\|_{\mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)} \cdot \|D^\alpha f\|^2_{\mathsf{H}^l(\mathbb{R}^d)} \\
&\overset{(4.1\text{-}9)}{\le} \quad \|1/\rho_l\|_{\mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)} \cdot \|f\|^2_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\widetilde{\rho}_\alpha)} \\
&\overset{(4.1\text{-}7)}{\le} \quad \|1/\rho_l\|_{\mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)} \cdot \|\widetilde{\rho}_\alpha/\rho_m\|_{\mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)} \cdot \|f\|^2_{\mathsf{H}^m(\mathbb{R}^d)}
\end{aligned}$$

erfüllt ist. Insgesamt ist damit $\mathsf{H}^m(\mathbb{R}^d) \overset{\mathsf{d}}{\subseteq} C^{m-l}(\mathbb{R}^d) \cap \mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)$ und

$$\text{(4.1-14)} \quad \|f\|_{\infty,m} \; \le \; \|1/\rho_l\|^{1/2}_{\mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)} \cdot \|\widetilde{\rho}_\alpha/\rho_m\|^{1/2}_{\mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)} \cdot \|f\|_{\mathsf{H}^m(\mathbb{R}^d)}$$

gezeigt.[6]

[5] Vergleiche [Wlo87], Def. 5.1.
[6] Vergleiche Definition 1.6-3.

Beispiel 4.1-15 (Einige klassische radiale Basisfunktionen)

In der klassischen Theorie radialer Basisfunktionen[7] spielen die *Gauß-Funktionen* eine wichtige Rolle. Sie haben die Gestalt $\Phi_0(x) = e^{-a\,x^{\mathrm{tr}}x}$ und die Fourier-Transformierte laut Gleichung (3.4-11). Zu ihnen gehört nach Kap. 5.4 die Gewichtsfunktion $\rho_G(\omega) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{-d/2} e^{\omega^{\mathrm{tr}}\omega/(4a)}$. Es gilt $\rho_l/\rho_G \in \mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)$, so daß die Einbettung $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho_G) \overset{\mathsf{d}}{\subseteq} \mathsf{H}^l(\mathbb{R}^d)$ für beliebige $l \in \mathbb{Z}$ aus Gleichung (4.1-6) folgt.

Eine andere große Familie von radialen Basisfunktionen sind die *inversen Multiquadrics.* Sie besitzen die Form $\Phi_0(x) = \left(c^2 + x^{\mathrm{tr}}x\right)^{\nu/2}$, $c \neq 0$, $\nu \in \mathbb{R}_{<0} \setminus 2\,\mathbb{Z}$. Ihre Fourier-Transformierten sind gleichmäßig beschränkt und fallen für $\|\omega\| \to \infty$ exponentiell. Für ihre Gewichtsfunktionen ρ_M gilt genauer[8] $\rho_M(\omega) = \Theta\left(e^{\|\omega\|} \cdot (1 + \|\omega\|)^{(d+\nu+1)/2}\right)$. So folgt insgesamt $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho_G) \overset{\mathsf{d}}{\subseteq} \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho_M) \overset{\mathsf{d}}{\subseteq} \mathsf{H}^l(\mathbb{R}^d)$.

Beispiel 4.1-16 (Skalierung der Gewichtsfunktion)

Im Kapitel 7.1 werden wir näher auf den Skalierungsoperator $S_c : f \mapsto f(\cdot/c)$ für $c > 0$ eingehen. Dabei wird der Übergang von einer Gewichtsfunktion ρ zu $\rho_c(\omega) := c^{-d}\,\rho(c\,\omega)$ eine wichtige Rolle spielen, vgl. (7.1-2). Die Frage, wann $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho) \overset{\mathsf{d}}{\subseteq} \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho_c)$ gilt, können wir aber mit Korollar 4.1-9 schon jetzt endgültig beantworten: Notwendig und hinreichend sind die Bedingungen $\operatorname{supp}\rho \subseteq \operatorname{supp}\rho_c$ und $\rho_c/\rho \in \mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)$. Die Träger-Bedingung ist dabei genau dann für alle $c > 0$ erfüllt, wenn $\operatorname{supp}\rho$ ein Kegel in $\mathbb{R}^d$ ist. Die andere Bedingung ist für festes c zu $\rho(c\,\omega)/\rho(\omega) \in \mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)$ äquivalent. Für ein polynomial wachsendes Gewicht ρ ist dies gegeben, die Räume $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$ und $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho_c)$ sind sogar topologisch isomorph. Aber für ein exponentiell wachsendes ρ wie z. B. das oben erwähnte ρ_G wird die Einschränkung $c \leq 1$ nötig, denn es gilt $e^{a\,c^2\,\omega^{\mathrm{tr}}\omega}/e^{a\,\omega^{\mathrm{tr}}\omega} = e^{a\,\omega^{\mathrm{tr}}\omega\,(c^2-1)}$. Diese Funktion wächst exponentiell für $c^2 > 1$, ist also kein Element von $\mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)$.

4.2 Definition der Räume $\mathsf{H}(\Omega, \rho)$

In der Praxis interessieren in der Regel nur Funktionen, die auf einem beschränkten Gebiet Ω aus $\mathbb{R}^d$ definiert sind. Daher benötigen wir die Definition 4.2-2, die sich an [Wlo87], Definition 5.2 anlehnt.

Definition 4.2-1 *Einschränkungsoperator*

Eine auf $\mathbb{R}^d$ fast überall definierte Funktion wird durch $\mathbf{E}_\Omega : \; f \mapsto f|_\Omega$ auf eine Menge $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ eingeschränkt. Dabei ist[9]

$$\mathbf{E}_\Omega(f)(x) \;=\; f|_\Omega(x) \;:=\; \begin{cases} f(x) & \text{für fast alle } x \in \Omega \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega \end{cases} .$$

Der Operator $\mathbf{E}_\Omega$ ist linear, denn es gilt $\mathbf{E}_\Omega(f) = f \cdot \chi_\Omega$. Offenbar wird z. B. $\mathsf{L}_2(1)$ auf $\mathsf{L}_2(\chi_\Omega)$ abgebildet. Falls $\mathbb{R}^d \setminus \Omega$ keine Nullmenge ist, kann dies aber nicht injektiv geschehen. Viel mehr besitzt $\mathbf{E}_\Omega$ hier den Charakter einer Projektion auf einen linearen Teilraum von $\mathsf{L}_2(1)$.

[7] vgl. Kap. 5.4

[8] Vergleiche [Fra95], Gleichung (1.3-1) und Tabelle 1.

[9] Im Prinzip ist es unwesentlich, wie f außerhalb von Ω definiert wird, da wir uns dafür ja nicht interessieren wollen. Die Wahl von 0 garantiert jedoch die Linearität von $\mathbf{E}_\Omega$.

Definition 4.2-2 *Gewichteter Sobolew-Raum* $\mathsf{H}(\Omega, \rho)$ zum Gewicht ρ auf $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ eine beliebige Menge von positivem Maß. Der Raum $\mathsf{H}(\Omega, \rho)$ ist dann durch

$$\mathsf{H}(\Omega, \rho) := \mathbf{E}_\Omega \left(\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho) \right)$$

definiert, wobei er mit der Norm

$$(4.2\text{-}1) \qquad \|f\|_{\mathsf{H}(\Omega,\rho)} := \inf_{g \in \mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho):\ \mathbf{E}_\Omega(g)=f} \|g\|_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)}$$

versehen wird. Die Bedingung „$\mathbf{E}_\Omega(g) = f$“ ist im Sinne „fast überall“ zu verstehen.

Da die Einschränkung einer Funktion deren Fourier-Transformierte in nicht-trivialer Weise verändert, kann man hier $\mathsf{H}(\Omega, \rho)$ *nicht* als Unterraum von $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$ auffassen. Der Operator $\mathbf{E}_\Omega$ ist jedoch nach Definition von $\mathsf{H}(\Omega, \rho)$ surjektiv und stetig, denn es gilt

$$(4.2\text{-}2) \qquad \|\mathbf{E}_\Omega(f)\|_{\mathsf{H}(\Omega,\rho)} = \inf_{g \in \mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho):\ \mathbf{E}_\Omega(g)=\mathbf{E}_\Omega(f)} \|g\|_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)} \leq \|f\|_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)}$$

für alle $f \in \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$, da f als ein spezielles g eingesetzt werden darf. Falls ein $g \in \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$ mit $\operatorname{supp} g \subseteq \Omega$ existiert, folgt $\|\mathbf{E}_\Omega\|_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho) \to \mathsf{H}(\Omega,\rho)} = 1$ wg. $\mathbf{E}_\Omega(g) = g$.

Das Gegenstück zum Einschränkungsoperator $\mathbf{E}_\Omega$ ist der Fortsetzungsoperator $\mathbf{F}^\Omega$:

Definition 4.2-3 *Fortsetzungsoperator* (Vergleiche [Wlo87], Definition 5.3)

Eine auf $\mathbb{R}^d$ fast überall definierte Funktion f mit $\operatorname{supp} f \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ wird durch einen Fortsetzungsoperator $\mathbf{F}^\Omega$ auf ganz $\mathbb{R}^d$ fortgesetzt. Dabei soll dieser Operator linear und stetig sein, und die Eigenschaft $\mathbf{E}_\Omega \circ \mathbf{F}^\Omega = \mathrm{Id}$ aufweisen.

Es ist nicht nötig, daß ein solcher Operator *eindeutig* bestimmt ist. Andererseits existiert kein Operator $\mathbf{F}^\Omega$, wenn Ω oder auch der Grundraum bestimmte Bedingungen nicht erfüllen, vgl. dazu Satz 4.2-8. Die zunächst naheliegende Möglichkeit, ein $g \in \mathsf{H}(\Omega, \rho)$ durch ein beliebiges $f \in \mathbf{E}_\Omega^{-1}(f)$ auf ganz $\mathbb{R}^d$ fortzusetzen, scheitert an den Forderungen nach Linearität und Stetigkeit von $\mathbf{F}^\Omega$.

Die Definition erlaubt zunächst einige einfache Beobachtungen: Jeder mögliche Operator $\mathbf{F}^\Omega$ ist injektiv, aber in der Regel nicht surjektiv. Wie in (4.2-2) sieht man, daß in jedem Fall $\left\|\mathbf{F}^\Omega\right\|_{\mathsf{H}(\Omega,\rho) \to \mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)} \geq 1$ gilt.

Die Voraussetzung „$\operatorname{supp} f \subseteq \Omega$“ in der Definition 4.2-3 ist ebensowenig zwingend, wie die 0-Setzung in Definition 4.2-1. Beide Voraussetzungen zusammen gewährleisten aber, daß z. B. aus $\mathbf{E}_\Omega \circ \mathbf{F}^\Omega = \mathrm{Id}_{\mathsf{H}(\Omega,\rho)}$ sofort $\mathbf{E}_\Omega \circ \mathbf{F}^\Omega = \mathrm{Id}_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)}$ folgt.

Bemerkung 4.2-4

Ein linearer Operator $L : \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho) \to \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho')$ induziert den eingeschränkten Operator $\mathbf{E}_\Omega \circ L : \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho) \to \mathsf{H}(\Omega, \rho')$. Dabei geht aber eine mögliche Injektivität von L verloren, da $\mathbf{E}_\Omega$ in der Regel nicht injektiv ist. Selbst wenn ein Fortsetzungsoperator $\mathbf{F}^\Omega$ existiert, behält auch der Operator $\mathbf{E}_\Omega \circ L \circ \mathbf{F}^\Omega : \mathsf{H}(\Omega, \rho) \to \mathsf{H}(\Omega, \rho')$ diesen Mangel.

Es gibt eine weitere gebräuchliche Art, Sobolew-Räume zu definieren:[10]

Definition 4.2-5 *Klassischer Sobolew-Raum* $\mathsf{W}_p^l(\Omega)$ über $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$

Seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ eine beliebige offene Menge, $l \in \mathbb{N}_0$ und $1 \le p \le \infty$ Der Raum $\mathsf{W}_p^l(\Omega)$ ist dann durch

$$\text{(4.2-3)} \qquad \mathsf{W}_p^l(\Omega) \;:=\; \Big\{\, f \in \mathsf{L}_p(\Omega) :\; D^\alpha f \text{ existiert für alle } \alpha \in \mathbb{N}_0^d \text{ mit } |\alpha| \le l \,\Big\}$$

definiert, wobei er mit der Norm

$$\text{(4.2-4)} \qquad \|f\|_{\mathsf{W}_p^l(\Omega)}^p \;:=\; \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^d :\, |\alpha| \le l} \|D^\alpha f\|_{\mathsf{L}_p(\Omega)}^p$$

versehen wird. Dabei bezeichnet $D^\alpha f$ die verallgemeinerte Ableitung bzgl. des Testfunktionenraumes $C_0^l(\Omega)$, wie sie in 3.4-12 definiert wurde.

Der Raum $\mathsf{W}_p^l(\Omega)$ ist ein separabler Banach-Raum, vgl. [Kuf80], Theorem 3.6. Für $p = 2$ wird die Norm offenkundig von einem entsprechenden Skalarprodukt induziert.

Satz 4.2-6 (Vergleiche [Wlo87], Theorem 5.3)

Wenn es einen (stetigen) Fortsetzungsoperator $\mathbf{F}^\Omega : \mathsf{W}_2^l(\Omega) \to \mathsf{W}_2^l(\mathbb{R}^d)$ gibt, so sind die Sobolev-Räume $\mathsf{W}_2^l(\Omega)$ und $\mathsf{H}^l(\Omega)$ für alle $l \in \mathbb{N}_0$ und $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ topologisch isomorph und enthalten dieselben Elemente.

Korollar 4.2-7 zu Satz 4.2-6

Wenn es für $l \in \mathbb{N}_0$ einen Fortsetzungsoperator $\mathbf{F}^\Omega : \mathsf{W}_2^l(\Omega) \to \mathsf{W}_2^l(\mathbb{R}^d)$ gibt, dann gibt es auch einen Fortsetzungsoperator $\mathbf{F}^\Omega : \mathsf{H}^l(\Omega) \to \mathsf{H}^l(\mathbb{R}^d)$.

Satz 4.2-8 (Vergleiche [Wlo87], Theorem 5.4: Calderon-Zygmund)

Wenn das Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt ist und die *gleichmäßige Kegelbedingung*[11] erfüllt, so existieren für $l \in \mathbb{N}_0$ die Fortsetzungsoperatoren $\mathbf{F}^\Omega : \mathsf{W}_2^l(\Omega) \to \mathsf{W}_2^l(\mathbb{R}^d)$ und $\mathbf{F}^\Omega : \mathsf{H}^l(\Omega) \to \mathsf{H}^l(\mathbb{R}^d)$.

4.3 Dualraum von $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$

In diesem Kapitel werden die Analogie zum Satz 3.3-4 für die gewichteten Sobolew-Räume hergestellt sowie die Fourier-Transformierte eines Funktionals eingeführt.

[10] Vergleiche [Wlo87], Def. 3.1. Die Nomenklatur ist nicht ganz einheitlich. Manchmal werden diese Räume als *Sobolew-Slobodezkij-Räume* bezeichnet, manchmal werden aber auch unter Sobolew-Slobodezkij-Räumen Räume vom W_p^l-Typ verstanden, bei denen $l \in \mathbb{R}_{\ge 0}$ in $l = \lfloor l \rfloor + \alpha$ zerlegt wird, und die Norm ähnlich einer Hölder-Norm definiert wird. Siehe dazu z. B. [Tri83], Sec. 2.2.

[11] Vergleiche [Wlo87], Definition 2.3. Die Bedingung ist z. B. für einen Lipschitz-stetigen Rand gegeben.

Satz 4.3-1 (Dualraum von $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$)

Sei $1/\rho$ wie in Definition 3.2-2. Dann kommutiert das folgende Diagramm und besteht nur aus Isometrien. Die horizontalen Abbildungen sind dabei linear, die diagonalen antilinear.

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)^* \arrow[dr, "\mathrm{Ri}_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)}"] & & \mathsf{H}(\mathbb{R}^d,1/\rho) \arrow[ll, "\widetilde{S}_\rho"'] \arrow[rr, "F_{1/\rho}"] & & \mathsf{L}_2(1/\rho) \arrow[rr, "S_\rho"] & & \mathsf{L}_2(\rho)^* \arrow[dl, "\mathrm{Ri}_{\mathsf{L}_2(\rho)}"] \\
& \mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho) \arrow[ur, "\widetilde{R}_\rho"'] \arrow[rrrr, "F_\rho"] & & & & \mathsf{L}_2(\rho) \arrow[ul, "R_\rho"'] &
\end{tikzcd} \tag{4.3-1}
$$

Die Abbildungen F_ρ, R_ρ und S_ρ wurden schon in Satz 4.1-7, Lemma 3.3-2 und Satz 3.3-4 definiert. Die zwei Operatoren $\widetilde{R}_\rho$ und $\widetilde{S}_\rho$, die hier erstmals auftreten, sind durch $\widetilde{R}_\rho := \mathrm{FT}_{1/\rho}^{-1} \circ R_\rho \circ \mathrm{FT}_\rho$ und $\widetilde{S}_\rho := \left(\widetilde{R}_\rho \circ \mathrm{Ri}_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)}\right)^{-1}$ definiert. Dabei besitzt $\widetilde{S}_\rho$ die explizite Darstellung

$$
\widetilde{S}_\rho : \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, 1/\rho) \to \mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)^*;\; g \mapsto (2\pi)^{-d} \left(\mathrm{FT}_\rho(\cdot), \mathrm{FT}_{1/\rho}(g)\right)_\rho . \tag{4.3-2}
$$

Insbesondere gilt $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)^* \overset{\mathsf{d}}{\sim} \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, 1/\rho)$.

Beweis

Das rechte Dreieck ist die Aussage des Satzes 3.3-4. Das mittlere Trapez kommutiert nach Konstruktion von $\widetilde{R}_\rho$,[12] genauso kommutiert das linke Dreieck nach Konstruktion von $\widetilde{S}_\rho$. Es bleibt also nur noch die explizite Darstellung (4.3-2) nachzuweisen. Sei dazu $g := \widetilde{R}_\rho \circ \mathrm{Ri}_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)}(\lambda)$ zu einem beliebigen $\lambda \in \mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)^*$. Dann gilt für alle $f \in \mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)$ die Gleichung

$$
\begin{aligned}
\lambda(f) &= \left\langle f \middle| \mathrm{Ri}_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)}(\lambda) \right\rangle_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)} \\
&= (2\pi)^{-d} \left\langle \mathrm{FT}_\rho f \middle| \mathrm{FT}_\rho \circ \mathrm{Ri}_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)}(\lambda) \right\rangle_{\mathsf{L}_2(\rho)} \\
&= (2\pi)^{-d} \left(\mathrm{FT}_\rho f, R_\rho \circ \mathrm{FT}_\rho \circ \mathrm{Ri}_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)}(\lambda)\right)_\rho \\
&= (2\pi)^{-d} \left(\mathrm{FT}_\rho f, \mathrm{FT}_{1/\rho} \circ \widetilde{R}_\rho \circ \mathrm{Ri}_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)}(\lambda)\right)_\rho \\
&= (2\pi)^{-d} \left(\mathrm{FT}_\rho f, \mathrm{FT}_{1/\rho}\, g\right)_\rho .
\end{aligned}
$$

■

Bemerkung 4.3-2

Da wir $\rho \in \mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)$ oder $1/\rho \in \mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)$ voraussetzten, entspricht nach Definition 4.1-3 wenigstens eine der Fourier-Transformationen des Diagramms (4.3-1) dem gewöhnlichen Operator FT_1 auf $\mathsf{L}_2(1)$.

[12] In Satz 4.3-4 werden wir explizite Darstellungen für $\widetilde{R}_\rho$ angeben.

Lemma 4.3-3

Es gilt die Äquivalenzkette

$$(4.3\text{-}3) \qquad \begin{aligned} \rho \in \mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d) \;&\Leftrightarrow\; \sqrt{\rho} \in \mathsf{L}_2(1) \;\Leftrightarrow\; \chi_{\operatorname{supp}\rho} \in \mathsf{L}_2(\rho) \\ &\Leftrightarrow\; \rho \in \mathsf{L}_2(1/\rho) \;\Leftrightarrow\; (\cdot, \rho)_\rho \in \mathsf{L}_2(\rho)^* \ . \end{aligned}$$

Dabei folgt $\|\rho\|^2_{\mathsf{L}_2(1/\rho)} = \|\rho\|_{\mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)}$. Die Aussagen aus (4.3-3) sind für jedes $x \in \mathbb{R}^d$ weiterhin äquivalent zu $\chi_{\operatorname{supp}\rho} \cdot e^{i\,x^{\mathrm{tr}}\cdot} \in \mathsf{L}_2(\rho)$.

Beweis

Alle drei Aussagen der ersten Zeile sind gleichbedeutend mit $\int \chi_{\operatorname{supp}\rho} \cdot |\sqrt{\rho}|^2\, dx < \infty$. Die Isometrie R_ρ bildet $\mathsf{L}_2(\rho)$ bijektiv auf $\mathsf{L}_2(1/\rho)$ ab. Dabei wird $\chi_{\operatorname{supp}\rho}$ auf ρ geworfen. Die Isometrie S_ρ schließlich bildet ρ auf das Funktional $(\cdot, \rho)_\rho$ ab. □

Die Aussage über die Normen von ρ folgt aus $\|\rho\|^2_{\mathsf{L}_2(1/\rho)} = \int |\rho|^2 \cdot 1/\rho\, dx = \|\rho\|_{\mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)}$. □

Aus $\chi_{\operatorname{supp}\rho} \in \mathsf{L}_2(\rho)$ folgt $\int \left|\chi_{\operatorname{supp}\rho}(\omega) \cdot e^{i\,x^{\mathrm{tr}}\omega}\right|^2 \rho\, d\omega < \infty$ für jedes $x \in \mathbb{R}^d$ und umgekehrt. Die Träger-Bedingung (3.1-2) ist wegen des Faktors $\chi_{\operatorname{supp}\rho}$ erfüllt. ■

Satz 4.3-4 (Darstellungen von $\widetilde{R}_\rho$)

Unter der Voraussetzung $\rho \in \mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)$ gilt

$$(4.3\text{-}4) \qquad \widetilde{R}_\rho(f)(x) = \left\langle \mathrm{FT}_\rho^{-1,\omega}\left(\chi_{\operatorname{supp}\rho}(\omega) \cdot e^{i\,x^{\mathrm{tr}}\omega}\right) \middle| f \right\rangle_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)}$$

$$(4.3\text{-}5) \qquad = \overleftarrow{f} * \mathrm{FT}^{-1}_{1/\rho}(\rho)$$

für alle $f \in \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$ fast überall. Dabei sei $\overleftarrow{f}(x) := \overline{f(-x)}$. Mit (4.3-1) und (4.3-2) läßt sich der inverse Riesz-Operator nun explizit angeben:

$$(4.3\text{-}6) \qquad \mathrm{Ri}^{-1}_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)}(f) = \widetilde{S}_\rho \circ \widetilde{R}_\rho(f) = (2\pi)^{-d}\left(\mathrm{FT}_\rho(\cdot), \mathrm{FT}_{1/\rho}\left(\overleftarrow{f} * \mathrm{FT}^{-1}_{1/\rho}(\rho)\right)\right)_\rho \ .$$

Beweis

Zu (4.3-4): Nach Lemma 4.3-3 gilt $\chi_{\operatorname{supp}\rho} \cdot e^{i\,x^{\mathrm{tr}}\cdot} \in \mathsf{L}_2(\rho)$. Daher liegt die Funktion $\mathrm{FT}_\rho^{-1,\omega}\left(\chi_{\operatorname{supp}\rho}(\omega) \cdot e^{i\,x^{\mathrm{tr}}\omega}\right)$ in $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$. Sei $f \in \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$ beliebig. Dann existiert das Skalarprodukt der beiden Funktionen, und es gilt

$$\begin{aligned} &\left\langle \mathrm{FT}_\rho^{-1,\omega}\left(\chi_{\operatorname{supp}\rho}(\omega) \cdot e^{i\,x^{\mathrm{tr}}\omega}\right) \middle| f \right\rangle_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)} \\ &= (2\pi)^{-d} \int e^{i\,x^{\mathrm{tr}}\omega} \cdot \overline{\mathrm{FT}_\rho(f)(\omega)} \cdot \chi_{\operatorname{supp}\rho}(\omega) \cdot \rho(\omega)\, d\omega \\ (4.3\text{-}7) \qquad &= (2\pi)^{-d} \int R_\rho \circ \mathrm{FT}_\rho(f)(\omega) \cdot e^{i\,x^{\mathrm{tr}}\omega}\, d\omega \\ &= \mathrm{FT}^{-1}\left(R_\rho \circ \mathrm{FT}_\rho(f)\right)(x) \ . \end{aligned}$$

Diese klassische, $\mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)$-inverse Fourier-Transformation existiert also. Da $R_\rho \circ \mathrm{FT}_\rho$ (bis auf eine Konstante) eine Isometrie von $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)$ nach $\mathsf{L}_2(1/\rho)$ ist, existiert FT^{-1} auf ganz $\mathsf{L}_2(1/\rho)$. Der Operator stimmt daher mit seiner stetigen Fortsetzung $\mathrm{FT}^{-1}_{1/\rho}$ überein. So folgt $\mathrm{FT}^{-1}\left(R_\rho \circ \mathrm{FT}_\rho(f)\right) = \mathrm{FT}^{-1}_{1/\rho} \circ R_\rho \circ \mathrm{FT}_\rho(f) = \widetilde{R}_\rho(f)$. □

Zu (4.3-5): Aus Lemma 4.3-3 ist bekannt, daß die Voraussetzung $\rho \in \mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)$ zu $\rho \in \mathsf{L}_2(1/\rho)$ äquivalent ist. Somit existiert die klassische inverse Fourier-Transformierte $\mathrm{FT}^{-1}(\rho)$ nicht nur, sie stimmt auch mit $\mathrm{FT}^{-1}_{1/\rho}(\rho)$ überein. Für $f \in \mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d) \cap \mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)$ gilt $\mathrm{FT}(f) = \mathrm{FT}_\rho(f)$, und es folgt:

$$\begin{aligned}
\overleftarrow{\overline{f}} * \mathrm{FT}^{-1}_{1/\rho}(\rho)(x) &= \int \overline{f}(-z)\cdot(2\pi)^{-d}\int \rho(\omega)\cdot e^{i\,(x-z)^{\mathrm{tr}}\omega}\,d\omega\,dz \\
&= (2\pi)^{-d}\int\int \overline{f}(z)\cdot e^{i\,z^{\mathrm{tr}}\omega}\,dz\,\rho(\omega)\cdot e^{i\,x^{\mathrm{tr}}\omega}\,d\omega \qquad \text{(Fubini)} \\
&= (2\pi)^{-d}\int\overline{\int f(z)\cdot e^{-i\,z^{\mathrm{tr}}\omega}\,dz}\,\rho(\omega)\cdot e^{i\,x^{\mathrm{tr}}\omega}\,d\omega \\
&= (2\pi)^{-d}\int R_\rho\circ\mathrm{FT}_\rho(f)(\omega)\cdot e^{i\,x^{\mathrm{tr}}\omega}\,d\omega\ .
\end{aligned}$$

Dieser Term gleicht $(2\pi)^{-d}\cdot\left(e^{i\,x^{\mathrm{tr}}\cdot}, R_\rho\circ\mathrm{FT}_\rho(f)\right)_\rho$ und ist wegen $\chi_{\operatorname{supp}\rho}(\omega)\cdot e^{i\,x^{\mathrm{tr}}\cdot} \in \mathsf{L}_2(\rho)$ und $R_\rho\circ\mathrm{FT}_\rho(f) \in \mathsf{L}_2(1/\rho)$ endlich. Der Satz von Fubini war also wirklich anwendbar. Der Raum $\mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d) \cap \mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)$ liegt dicht in $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)$, also liegt sein Bild unter $R_\rho\circ\mathrm{FT}_\rho$ dicht in $\mathsf{L}_2(1/\rho)$. Wir finden daher wie in (4.3-7): $\overleftarrow{\overline{f}} * \mathrm{FT}^{-1}_{1/\rho}(\rho) = \mathrm{FT}^{-1}_{1/\rho}\circ R_\rho\circ\mathrm{FT}_\rho(f)$. ■

Definition 4.3-5 *Fourier-Transformierte* eines Funktionals

Die *Fourier-Transformierte* $\mathfrak{ft}\,(\lambda)$ eines Funktionals λ aus dem Dualraum $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)^*$ von $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)$ ist durch

(4.3-8) $\quad \mathfrak{ft}\,(\lambda) := R_\rho\circ\mathrm{FT}_\rho\circ\mathrm{Ri}_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)}(\lambda)$

definiert.

Offensichtlich hängt die Fourier-Transformierte von der Gewichtsfunktion ρ ab. Zum Beispiel gilt $\operatorname{supp}\mathfrak{ft}\,(\lambda) \subseteq \operatorname{supp}\rho$. Die Funktion ρ wird aber nicht mit in das Zeichen „ft“ aufgenommen, wenn eindeutig klar ist, in welchem Raum wir uns bewegen. Die auf den ersten Blick umständliche Definition 4.3-5 wird durch die wichtigen Eigenschaften der Fourier-Transformierten motiviert, die in den Gleichungen (4.3-10), (4.3-11) und (4.3-14) beschrieben werden.

Betrachtet man das Diagramm (4.3-1), so könnte man auf die Idee kommen, daß die Fourier-Transformierte eines Funktionals wieder ein Funktional sein sollte, z. B. eines aus $\mathsf{L}_2(\rho)^*$. Wir wählen statt dessen aber eine Funktion aus $\mathsf{L}_2(1/\rho)$, weil sich damit leichter arbeiten läßt. In den Beispielen 5.5-7 und 5.5-8 werden wir sehen, daß diese Funktion eine Verallgemeinerung der *Symbolfunktion* ist, wie sie z. B. in [Isk94], Kap. 4.3.3 eingeführt wird. Mit den Mitteln der Distributionstheorie werden in [Isk95], §§4 und 6 vergleichbare Ergebnisse erzielt.

Korollar 4.3-6

Dem Diagramm (4.3-1) entnehmen wir die äquivalente Darstellung

$$\text{(4.3-9)} \qquad \mathrm{ft}\,(\lambda) \;=\; \mathrm{FT}_{1/\rho} \circ \widetilde{S}_\rho^{-1}(\lambda)$$

der Fourier-Transformierten. Ist die Repräsentation $\lambda(f) = (2\pi)^{-d} \left(\mathrm{FT}_\rho(f), \mathrm{FT}_{1/\rho}(g)\right)_\rho$ eines Funktionals $\lambda \in \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)^*$ bekannt, so erhalten wir $\mathrm{ft}\,(\lambda) = \mathrm{FT}_{1/\rho}(g)$ mittels Gleichung (4.3-2). Daraus wiederum ersieht man, daß die Fourier-Transformierte $\mathrm{ft}\,(\lambda)$ zu $\lambda \in \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)^*$ durch die Eigenschaft

$$\text{(4.3-10)} \qquad \lambda(f) \;=\; (2\pi)^{-d} \int \mathrm{FT}_\rho(f)(\omega)\; \mathrm{ft}\,(\lambda)\,(\omega)\, d\omega \quad \text{für alle } f \in \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$$

und $\operatorname{supp} \mathrm{ft}\,(\lambda) \subseteq \operatorname{supp} \rho$ in $\mathsf{L}_2(1/\rho)$ eindeutig charakterisiert ist. Wir werden diese Eigenschaft als *Erstes Charakteristikum der Fourier-Transformierten* bezeichnen. Sie eignet sich genauso gut zur Definition der Fourier-Transformierten wie Gleichung (4.3-8).

Der Dualraum des Hilbert-Raumes $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$ läßt sich nun auch auf eine andere Art als in Satz 4.3-1 charakterisieren:

Korollar 4.3-7 (Dualraum von $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$)

Die Abbildung $\mathrm{ft} : \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)^* \to \mathsf{L}_2(1/\rho);\; \lambda \mapsto \mathrm{ft}\,(\lambda)$ ist linear, bijektiv und stetig. Es gilt genauer

$$\text{(4.3-11)} \qquad \langle \lambda | \mu \rangle_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)^*} \;=\; (2\pi)^{-d} \,\langle \mathrm{ft}\,(\lambda) | \mathrm{ft}\,(\mu) \rangle_{\mathsf{L}_2(1/\rho)}$$

für alle $\lambda, \mu \in \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)^*$. Somit folgt

$$\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)^* \;=\; \left\{ \lambda \in \mathcal{L}\left(\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho) \to \mathbb{C}\right) :\; \mathrm{ft}\,(\lambda) \in \mathsf{L}_2\left(\mathbb{R}^d, 1/\rho\right) \right\} .$$

Der folgende Satz 4.3-8 wird in den Beispielen des Kapitels 5.5 benötigt. Leider ist seine Voraussetzung (4.3-13) sehr speziell. Eine Verallgemeinerung setzt aber voraus, daß mehr Information über die Art des Funktionals λ vorliegt.

Satz 4.3-8 (Zweites Charakteristikum der Fourier-Transformierten)

Gegeben sei

$$\text{(4.3-12)} \qquad e^{i\omega^{\mathrm{tr}}\cdot} \in \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho) \quad \text{für alle } \omega \in \mathbb{R}^d .$$

Dann ist für alle $\lambda \in \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)^*$ die Bedingung

$$\text{(4.3-13)} \qquad \lambda^x \left(\int g(\omega)\, e^{i\, x^{\mathrm{tr}} \omega}\, d\omega \right) \;=\; \int g(\omega)\, \lambda^x \left(e^{i\, x^{\mathrm{tr}} \omega} \right) d\omega \quad \forall\, g \in \mathsf{L}_2(\rho)$$

äquivalent zu

$$\text{(4.3-14)} \qquad \mathrm{ft}\,(\lambda)\,(\omega) \;=\; \lambda^x \left(e^{i\, x^{\mathrm{tr}} \omega} \right) \quad \text{æ}(\operatorname{supp} \rho) .$$

Beweis

Die Voraussetzung (4.3-13) ist äquivalent zu $\lambda(f) = (2\pi)^{-d}\left(\mathrm{FT}_\rho(f), \lambda^x\left(e^{i\,x^{\mathrm{tr}}\omega}\right)\right)_\rho$ für alle $f \in \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$ und wegen (4.3-2) wiederum zu $\lambda^x\left(e^{i\,x^{\mathrm{tr}}\omega}\right) = \mathrm{FT}_{1/\rho} \circ \widetilde{S}_\rho^{-1}(\lambda)$. Laut Gleichung (4.3-9) ist dies aber genau die Fourier-Transformierte des Funktionals λ.

■

Das Zweite Charakteristikum (4.3-14) stellt eine äußerst angenehme Methode bereit, die Fourier-Transformierte eines Funktionals zu bestimmen. Daher ist es von großem Interesse, wann seine Voraussetzungen (4.3-12) und (4.3-13) erfüllt sind.

Satz 4.3-9

<u>1:</u> Unter der Voraussetzung $1/\rho \in \mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)$ gilt $(2\pi)^d\,\lambda(f) = \lambda^x\left(\int g(\omega)\,e^{i\,x^{\mathrm{tr}}\omega}\,d\omega\right)$ für alle $\lambda \in \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)^*$ und $f \in \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$ mit $g := \mathrm{FT}_\rho(f) \in \mathsf{L}_2(\rho)$.

<u>2:</u> Sei *zusätzlich* $\operatorname{supp}\rho = \mathbb{R}^d$ und $\lambda \in \mathsf{L}_2(1/\rho)^*$ vorausgesetzt. Dann gelten die Gleichungen (4.3-13) und (4.3-14) für dieses λ.

Beweis

<u>Zu 1:</u> Da $1/\rho \in \mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)$ vorausgesetzt wurde, ist der Sobolew-Satz 4.1-11 anwendbar, und es gilt $f = \mathrm{FT}_\rho^{-1}(g)$. Dem Beweis des Satzes entnimmt man, daß dabei FT_ρ^{-1} der klassischen inversen Fourier-Transformation FT^{-1} entspricht. □

<u>Zu 2:</u> In Erweiterung von Gleichung (4.3-3) ist $1/\rho \in \mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)$ für jedes beliebige $\omega \in \mathbb{R}^d$ zu $e^{i\omega^{\mathrm{tr}}x} \in \mathsf{L}_2(1/\rho)$ äquivalent. Wegen der Voraussetzung $\lambda \in \mathsf{L}_2(1/\rho)^*$ existiert daher $\lambda^x\left(e^{i\omega^{\mathrm{tr}}x}\right) = \left\langle e^{i\,x^{\mathrm{tr}}\omega} \,\middle|\, \mathrm{Ri}_{\mathsf{L}_2(1/\rho)}(\lambda)(x)\right\rangle_{\mathsf{L}_2(1/\rho)}$ für jedes ω. Das rechtfertigt die Anwendung des Satzes von Fubini in der Gleichungskette

$$
\begin{aligned}
\int g(\omega)\,\lambda^x\left(e^{i\,x^{\mathrm{tr}}\omega}\right)\,d\omega &= \int g(\omega) \int e^{i\,x^{\mathrm{tr}}\omega} \cdot \overline{\mathrm{Ri}_{\mathsf{L}_2(1/\rho)}(\lambda)(x)} \cdot 1/\rho(x)\,dx\,d\omega \\
&= \int\int g(\omega)\,e^{i\,x^{\mathrm{tr}}\omega}\,d\omega \cdot \overline{\mathrm{Ri}_{\mathsf{L}_2(1/\rho)}(\lambda)(x)} \cdot 1/\rho(x)\,dx \\
&= \left\langle \int g(\omega)\,e^{i\,x^{\mathrm{tr}}\omega}\,d\omega \,\middle|\, \mathrm{Ri}_{\mathsf{L}_2(1/\rho)}(\lambda)(x)\right\rangle_{\mathsf{L}_2(1/\rho)} \\
&= \lambda^x\left(\int g(\omega)\,e^{i\,x^{\mathrm{tr}}\omega}\,d\omega\right) \;=\; (2\pi)^d\,\lambda(f)\;,
\end{aligned}
$$

die (4.3-13) beweist. Die Existenz des gesamten Ausdrucks ist schon durch Punkt 1 gesichert. Die Formel gilt für beliebige f bzw. g aus Punkt 1. Der Vergleich mit dem Ersten Charakteristikum (4.3-10) belegt schließlich, daß (4.3-14) gilt.

■

In Satz 5.2-2 werden wir eine Variante von Korollar 4.3-6 und Satz 4.3-8 speziell für das Punktauswertungsfunktional δ_x kennenlernen. Sie ermöglicht die Anwendung des folgenden Satzes auf dieses Funktional.

Satz 4.3-10 (Einbettung zwischen dualen Sobolew-Räumen)

Seien ρ_1, ρ_2 zwei Gewichtsfunktionen mit demselben Träger, die $\frac{\rho_1}{\rho_2} \in \mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)$ erfüllen. Sei $\lambda \in \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho_1)^*$ ein Funktional, dessen Fourier-Transformierte nicht von ρ_1 abhängt; z. B. eines, welches das Zweite Charakteristikum (4.3-14) erfüllt.
Dann ist λ auch ein Element von $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho_2)^*$, und es gilt die Abschätzung

$$\|\lambda\|_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho_2)^*} \le \left\|\frac{\rho_1}{\rho_2}\right\|^{1/2}_{\mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)} \cdot \|\lambda\|_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho_1)^*} . \tag{4.3-15}$$

Besitzen die Komponenten eines Tupels $\Lambda \subset \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho_1)^*$ dieselbe o. g. Eigenschaft wie λ, so überträgt sich diese Abschätzung auf die Power-Funktionen, d. h. es gilt

$$P_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho_2),\Lambda}(\lambda) \le \left\|\frac{\rho_1}{\rho_2}\right\|^{1/2}_{\mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)} \cdot P_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho_1),\Lambda}(\lambda) . \tag{4.3-16}$$

Beweis

Aus der Voraussetzung $\frac{\rho_1}{\rho_2} \in \mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)$ folgt $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho_2) \overset{\mathsf{d}}{\subseteq} \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho_1)$ laut Korollar 4.1-9. Daher gilt für die Dualräume $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho_2)^* \overset{\mathsf{d}}{\supseteq} \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho_1)^*$. Das Funktional λ liegt also auch in $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho_2)^*$. Mit Korollar 3.2-5 folgt aber auch $\mathsf{L}_2(1/\rho_1) \overset{\mathsf{d}}{\subseteq} \mathsf{L}_2(1/\rho_2)$. Die Einbettung hat die Norm $\left\|\frac{\rho_1}{\rho_2}\right\|^{1/2}_{\mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)}$. Die Norm von $\lambda \in \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)^*$ berechnet sich laut (4.3-11) für ein beliebiges Gewicht ρ zu $\|\lambda\|^2_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)^*} = (2\pi)^{-d}\, \|\mathfrak{ft}\,(\lambda)\|^2_{\mathsf{L}_2(1/\rho)}$. Da nach Voraussetzung $\mathfrak{ft}\,(\lambda)$ nicht von ρ_1 und ρ_2 abhängen soll, ergibt sich

$$\begin{aligned}
\|\lambda\|^2_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho_2)^*} &= (2\pi)^{-d}\, \|\mathfrak{ft}\,(\lambda)\|^2_{\mathsf{L}_2(1/\rho_2)} \\
&\le (2\pi)^{-d} \left\|\frac{\rho_1}{\rho_2}\right\|_{\mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)} \cdot \|\mathfrak{ft}\,(\lambda)\|^2_{\mathsf{L}_2(1/\rho_1)} \\
&= \left\|\frac{\rho_1}{\rho_2}\right\|_{\mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)} \cdot \|\lambda\|^2_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho_1)^*} .
\end{aligned}$$

Gleichung (4.3-16) folgt sofort aus (2.1-3). ■

Es fällt auf, daß in (4.3-15) die Rollen von ρ_1 und ρ_2 gegenüber (4.1-7) vertauscht sind. Die Abschätzung (2.1-2), die für $\mathcal{H} = \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$ die Form

$$\left|\lambda(f) - \lambda\left(s_{f,\Lambda,\widetilde{\Phi}}\right)\right| \le P_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho),\Lambda}(\lambda) \cdot \left\|f - s_{f,\Lambda,\widetilde{\Phi}}\right\|_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)}$$

erhält, läßt sich daher nur im Fall $\rho_1 = \Theta(\rho_2)$ æ(supp ρ_1) durch

$$\begin{aligned}
\left|\lambda(f) - \lambda\left(s_{f,\Lambda,\widetilde{\Phi}}\right)\right| &\le P_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho_1),\Lambda}(\lambda) \cdot \left\|f - s_{f,\Lambda,\widetilde{\Phi}}\right\|_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho_1)} \\
&\le P_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho_2),\Lambda}(\lambda) \cdot \left\|f - s_{f,\Lambda,\widetilde{\Phi}}\right\|_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho_2)} \cdot \left\|\frac{\rho_2}{\rho_1}\right\|^{1/2}_{\mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)} \cdot \left\|\frac{\rho_1}{\rho_2}\right\|^{1/2}_{\mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)}
\end{aligned} \tag{4.3-17}$$

fortführen.

5 Operatoren und Basisfunktionen in $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$

Durch die Vorbereitung in den Hauptkapiteln 3 und 4 sind wir nun in der Lage, die im zweiten Hauptkapitel entwickelte Theorie der Hermite-Birkhoff-Interpolation auf die konkreten Funktionenräume $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$ anzuwenden. Für das resultierende Verfahren ist die Bezeichnung *Kollokation* angemessen, da wir ab Kapitel 5.2 oft davon ausgehen, daß diese Funktionenräume die Punktauswertung zulassen.

5.1 Stetigkeit und Injektivität des Operators L

Beschränken wir uns im folgenden auf den Raum $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$ als $\mathcal{H}$, so sind die Sätze 2.1-1, 2.1-2 und 2.1-3 davon nicht berührt. Erst beim allgemeinen Transformationssatz 2.2-4 sind weitere Überlegungen notwendig. Dort wurde vorausgesetzt, daß der lineare Operator

$$L : \mathcal{H} = \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho) \;\to\; \mathcal{G} := L\left(\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)\right)$$

injektiv ist. Dies kann man bei einem gegebenen Operator z. B. erreichen, indem man seinen Kern aus $\mathcal{H}$ herausdividiert, wie es im Kapitel 2.4 beschrieben wurde. Einfacher ist es jedoch, $\mathcal{H}$ bzw. ρ gleich so zu wählen, daß L injektiv ist. Dabei nimmt man unter Umständen in Kauf, $\mathcal{H}$ mehr als unbedingt nötig zu verkleinern.

Wir werden

$$\text{(5.1-1)} \qquad L\left(\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)\right) \;\subseteq\; \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho')$$

voraussetzen, damit wir auch auf den Bildraum die Theorie gewichteter Sobolew-Räume anwenden können. Nachher werden wir sehen, daß dies oft keine Einschränkung bedeutet, da man die Gewichtsfunktion ρ' entsprechend wählen kann. Der Operator L sei nicht der Nulloperator und erfülle außerdem für alle $f \in \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$ fast überall die Bedingung

$$\text{(5.1-2)} \qquad l_0(\omega) \cdot |\mathrm{FT}(f)(\omega)| \;\le\; |\mathrm{FT} \circ L(f)(\omega)| \;\le\; l_\infty(\omega) \cdot |\mathrm{FT}(f)(\omega)| \;.$$

Dabei sei zunächst $l_0(\omega) = 0$ und $l_\infty(\omega) = \infty$ auch auf nicht-Nullmengen zugelassen. Ansonsten werden wir mit beiden Funktionen wie mit Gewichtsfunktionen umgehen: Wir setzen die lokale Integrierbarkeit von $l_0 \ge 0$ und l_∞ voraus[1] und berücksichtigen z. B. die Definition 3.2-2.

Der Nachweis der Eigenschaft (5.1-2) muß für jeden gegebenen Operator L jeweils einzeln geführt werden. Weiter unten werden dazu der Satz 5.5-6 und die Beispiele 5.5-7 und 5.5-8 angegeben. Aus (5.1-2) folgt

$$\text{(5.1-3)} \qquad \begin{aligned} \|Lf\|^2_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho')} &= (2\pi)^{-d} \int |\mathrm{FT} \circ L(f)|^2 \; \rho' \, d\omega \\ &\le (2\pi)^{-d} \int |\mathrm{FT}(f)|^2 \; l_\infty^2 \, \rho' \, d\omega \;=\; \|f\|^2_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, l_\infty^2 \rho')} \end{aligned}$$

und analog

$$\text{(5.1-4)} \qquad \|Lf\|^2_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho')} \;\ge\; \|f\|^2_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, l_0^2 \rho')} \;.$$

[1] Dabei muß l_∞ lediglich auf den Gebieten lokal integrierbar sein, auf denen es fast überall nicht den Wert ∞ annimmt.

Bemerkung 5.1-1

Wählen wir $l_0 = 0$ auf $\mathbb{R}^d \setminus \operatorname{supp}\rho$ bzw. setzen wir

$$\text{(5.1-5)} \qquad \operatorname{supp} l_0 \subseteq \operatorname{supp}\rho$$

voraus, so folgt $\operatorname{supp} l_0 \subseteq \operatorname{supp} l_\infty$ und $l_0/l_\infty \in \mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)$, da die Gleichung (5.1-2) für alle f gilt. Dies ist gleichbedeutend mit $\operatorname{supp}(\rho/l_0^2) \subseteq \operatorname{supp}(\rho/l_\infty^2)$ und $\dfrac{\rho/l_\infty^2}{\rho/l_0^2} \in \mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)$. Nach Korollar 4.1-9 ist dies wiederum zu

$$\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho/l_\infty^2) \overset{\mathsf{d}}{\subseteq} \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho/l_0^2)$$

äquivalent. Die Norm der identischen Einbettung beträgt hier $\|l_0/l_\infty\|_{\mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)}$.

Satz 5.1-2 (Stetigkeit von L)

Sei ρ so gewählt, daß es im Sinne von

$$\text{(5.1-6)} \qquad \operatorname{supp}\rho \subseteq \operatorname{supp} l_\infty$$

zum Operator L paßt. Durch $\rho' := \rho/l_\infty^2$ ist eine weitere Gewichtsfunktion gegeben. Dann ist der Operator $L : \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho) \to \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho')$ stetig, und seine Norm ist gemäß

$$\text{(5.1-7)} \qquad \|L\|_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)\to\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho')} \le 1$$

beschränkt. Weiterhin ist mit diesem ρ' Gleichung (5.1-1) erfüllt.

Beweis

Aus Ungleichung (5.1-3) erhalten wir $\|Lf\|_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho/l_\infty^2)} \le \|f\|_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)}$.

■

Satz 5.1-3 (Injektivität von L)

Gilt $l_\infty/l_0 \in \mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)$, so ist der Operator $L : \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho) \to \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho/l_\infty^2)$ injektiv, und es gilt

$$\text{(5.1-8)} \qquad \|L\|_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)\to\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho/l_\infty^2)} \ge \|l_\infty/l_0\|^{-1}_{\mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)} .$$

Beweis

Aus Ungleichung (5.1-4) erhalten wir $\|Lf\|_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho/l_\infty^2)} \ge \|f\|_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,l_0^2\cdot\rho/l_\infty^2)}$. Um das Korollar 4.1-9 anzuwenden, prüfen wir erfolgreich $\operatorname{supp}\rho\cdot l_0^2/l_\infty^2 \subseteq \operatorname{supp}\rho$ und $\frac{\rho}{\rho\cdot l_0^2/l_\infty^2} \in \mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)$ nach. Es folgt also $\|f\|_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)} \le \|l_\infty/l_0\|_{\mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)} \cdot \|f\|_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho\cdot l_0^2/l_\infty^2)}$, was die Injektivität nach sich zieht: aus $Lf = 0$ folgt $f = 0$.

■

Korollar 5.1-4 zu den Sätzen 5.1-2 und 5.1-3.

Der Operator L erfülle die Ungleichungskette (5.1-2) mit Gleichheit, d. h. es gilt $l_0 = l_\infty$. Die Gewichtsfunktion ρ sei zu ihm passend gewählt, d. h. sie erfülle (5.1-6). Dann ist der Operator $L : \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho) \to \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho/l_\infty^2)$ stetig und injektiv; er hat die Norm 1.

Fazit 5.1-5

Das Problem der Injektivität des Operators L, welches in der Einleitung dieses Kapitels geschildert wurde, ist damit hinreichend behandelt. Wir können nun die Theorie des Kapitels 2 anwenden, indem wir $\mathcal{H}$ durch $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$ und $\mathcal{G} = L(\mathcal{H})$ durch $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho/l_\infty^2)$ ersetzen. Dabei sind die Normen auf $\mathcal{G}$ (definiert laut (2.2-5)) und auf $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho/l_\infty^2)$ äquivalent, wenn die Voraussetzungen $\operatorname{supp} \rho \subseteq \operatorname{supp} l_\infty$ von Satz 5.1-2 und $l_\infty/l_0 \in \mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)$ von Satz 5.1-3 erfüllt sind.

Beweis

Wir zeigen die Äquivalenz der Normen. Daraus folgt dann auch $\mathcal{G} \stackrel{\mathsf{d}}{=} \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho/l_\infty^2)$. Sei dazu $f \in \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$ beliebig und $g := L(f)$. Dann ist $\|g\|_\mathcal{G} = \|f\|_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)}$ und $\|g\|_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho/l_\infty^2)} = \|Lf\|_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho/l_\infty^2)}$. Laut den Gleichungen (5.1-7) und (5.1-8) gilt jedoch

$$\|l_\infty/l_0\|_{\mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)}^{-1} \cdot \|f\|_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)} \;\leq\; \|Lf\|_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho/l_\infty^2)} \;\leq\; \|f\|_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)} \;,$$

woraus $\|l_\infty/l_0\|_{\mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)}^{-1} \cdot \|g\|_\mathcal{G} \leq \|g\|_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho/l_\infty^2)} \leq \|g\|_\mathcal{G}$ folgt.

■

Wir werden im Kapitel 5.5 einige Beispiele geben, die die Injektivität des Operators L näher beleuchten.

5.2 Punktauswertungsfunktionale

In diesem Kapitel werden wir das *Punktauswertungsfunktional* $\delta_x(f) := f(x)$ betrachten und dazu

(5.2-1) $\quad \delta_x \;\in\; \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)^* \quad$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$

voraussetzen. Dabei muß vor allen Dingen gewährleistet sein, daß man den Funktionen (genauer den Klassen äquivalenter Funktionen) f aus $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$ überhaupt einen eindeutigen „Wert an der Stelle x“ zuordnen kann. Die Funktionen sollten dazu stetig sein. Das folgende Korollar 5.2-1 wird ein Kriterium dafür liefern.

Korollar 5.2-1 (zu Satz 4.1-11)

Sei ρ eine Gewichtsfunktion mit $1/\rho \in \mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)$. Laut Satz 4.1-11 ist der Raum $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$ eine Teilmenge von $C(\mathbb{R}^d) \cap \mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)$. Die Voraussetzung (5.2-1) ist demnach erfüllt.

Wir fahren mit einem Analogon zu Korollar 4.3-6 und Satz 4.3-8 fort:

Satz 5.2-2 (Erstes und Zweites Charakteristikum der Fourier-Transformierten für δ_x)

Sei ρ eine Gewichtsfunktion mit $1/\rho \in \mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)$. Dann folgt

$$\text{(5.2-2)} \qquad \mathrm{ft}_\rho\,(\delta_x)\,(\omega) \;=\; e^{i\,x^{\mathrm{tr}}\omega} \cdot \chi_{\operatorname{supp}\rho}(\omega) \;=\; e^{i\,x^{\mathrm{tr}}\omega} \cdot \mathrm{ft}_\rho\,(\delta_0)\,(\omega)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^d$ und im $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$-Sinn bzgl. $\omega \in \mathbb{R}^d$.

Insbesondere besteht das Erste Charakteristikum (4.3-10) für $\lambda = \delta_x$, d. h. die Fourier-Umkehrformel gilt auf $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$. Das Zweite Charakteristikum (4.3-14) ist für $\operatorname{supp}\rho = \mathbb{R}^d$ ebenfalls erfüllt.

Beweis

Es reicht, die Behauptung mit einem $f \in \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho) \cap \mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)$ zu zeigen, denn dieser Raum ist laut Satz 3.2-8 dicht in $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$. Laut Satz 4.1-11 gilt die Fourier-Umkehrformel

$$f(x) \;=\; \mathrm{FT}_\rho^{-1} \circ \mathrm{FT}_\rho(f)(x) \;=\; (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{FT}_\rho(f)(\omega)\, e^{i\,x^{\mathrm{tr}}\omega} \cdot \chi_{\operatorname{supp}\rho}(\omega)\, d\omega$$

fast überall auf $\mathbb{R}^d$. Sie gilt sogar überall, da f stetig ist. Den Faktor $\chi_{\operatorname{supp}\rho}(\omega)$ können wir hinzufügen, weil für Funktionen $f \in \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$ nach Definition $\operatorname{supp}\mathrm{FT}_\rho(f) \subseteq \operatorname{supp}\rho$ gilt. Da die Voraussetzung (5.2-1) erfüllt ist, gilt mit dem Ersten Charakteristikum

$$f(x) \;=\; \delta_x(f) \;=\; (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{FT}_\rho(f)(\omega)\; \mathrm{ft}_\rho\,(\delta_x)\,(\omega)\, d\omega\ .$$

Die Fourier-Transformierte ist durch diese Eigenschaft eindeutig charakterisiert, also folgt die erste Gleichheit in (5.2-2). Die zweite ist dann offensichtlich.

■

Es ist ohne Zweifel sehr nützlich, wenn der Riesz-Repräsentant $\mathrm{Ri}_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)}(\lambda)$ eines Funktionals $\lambda \in \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$ explizit berechnet werden kann. Bei Punktauswertungsfunktionalen sind wir nun in dieser glücklichen Lage:

Korollar 5.2-3

Sei die Gewichtsfunktion $1/\rho$ in $\mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ri}_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)}(\delta_z)(x) &\overset{(4.3\text{-}8)}{=} \mathrm{FT}_\rho^{-1,\omega}\left(\overline{\mathrm{ft}\,(\delta_z)\,(\omega)}/\rho(\omega)\right)(x) \\
&\overset{(5.2\text{-}2)}{=} \mathrm{FT}_\rho^{-1,\omega}\left(\overline{e^{i\,z^{\mathrm{tr}}\omega} \cdot \chi_{\operatorname{supp}\rho}(\omega)}/\rho(\omega)\right)(x) \\
&= \mathrm{FT}_\rho^{-1,\omega}\left(e^{-i\,z^{\mathrm{tr}}\omega}/\rho(\omega)\right)(x) \overset{(3.4\text{-}6)}{=} \mathrm{FT}_\rho^{-1}\,(1/\rho)\,(x-z)\ .
\end{aligned}$$

Nach Lemma 4.3-3 ist unter der gegebenen Voraussetzung $1/\rho \in \mathsf{L}_2(\rho)$, so daß die inverse Fourier-Transformierte wohldefiniert ist. Es handelt sich bei $\mathrm{Ri}_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)}(\delta_z)(x)$ um den reproduzierenden Kern $\Phi(x, z)$, auf den wir im folgenden Kapitel 5.3 näher eingehen.

5.3 Reproduzierende Kerne

Nach dem Satz von Aronszajn-Bergman (vgl. [Yos80], Sec. III.9, Theorem 1) ist die Voraussetzung (5.2-1) äquivalent dazu, daß der Raum $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$ einen *reproduzierenden Kern* besitzt, d. i. eine Funktion $\Phi : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ mit den Eigenschaften

$$(5.3\text{-}1) \qquad \Phi(\cdot, y) \in \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho) \quad \forall\, y \in \mathbb{R}^d \qquad \text{und}$$

$$(5.3\text{-}2) \qquad \delta_y(f) = \langle f | \Phi(\cdot, y) \rangle_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)} \quad \forall\, f \in \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho) \text{ und } y \in \mathbb{R}^d\ .$$

Wenn ein reproduzierender Kern existiert, so ist er eindeutig bestimmt.

Satz 5.3-1

Unter der Voraussetzung $1/\rho \in \mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)$ ist der reproduzierende Kern Φ von $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^d$ durch

$$(5.3\text{-}3) \qquad \Phi(x, y) := \mathrm{FT}_\rho^{-1}\left(1/\rho\right)(x - y) = \mathrm{Ri}_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)}(\delta_y)(x) = \langle\, \delta_x | \delta_y \,\rangle_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)^*}$$

gegeben. Er ist translationsinvariant, antisymmetrisch und gleichmäßig stetig.

Beweis

Die zweite Gleichheit gilt laut Korollar 5.2-3.

Die dritte Gleichheit folgt aus dem Riesz-Darstellungssatz 1.5-1:

$$\begin{aligned} \langle\, \delta_x | \delta_y \,\rangle_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)^*} &\overset{(1.5\text{-}3)}{=} \left\langle \mathrm{Ri}_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)}(\delta_y) \middle| \mathrm{Ri}_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)}(\delta_x) \right\rangle_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)} \\ &\overset{(1.5\text{-}1)}{=} \delta_x(\mathrm{Ri}_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)}(\delta_y)) = \mathrm{Ri}_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)}(\delta_y)(x)\ . \end{aligned}$$

□

Laut Lemma 4.3-3 gilt $1/\rho \in \mathsf{L}_2(\rho) \cap \mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)$. Nach Satz 3.4-2 existiert die inverse Fourier-Transformierte im eigentlichen Sinne und ist gleichmäßig stetig. Die Definition (5.3-3) ist also zulässig. Die Translationsinvarianz von Φ ist offensichtlich. Der reproduzierende Kern von $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$ ist antisymmetrisch, denn nach Definition von Φ gilt $\Phi(x, y) = \overline{\Phi(y, x)}$.

Es bleibt nur zu zeigen, daß Φ die Eigenschaften eines reproduzierenden Kernes hat. Da ein solcher eindeutig bestimmt ist, handelt es sich dann um *den* reproduzierenden Kern.

Nach Definition gilt $\mathrm{Ri}_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)}(\delta_y) \in \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$. Diese Funktion erfüllt also die Bedingung (5.3-1). Weiterhin gilt $\delta_y(f) = \left\langle f \middle| \mathrm{Ri}_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)}(\delta_y) \right\rangle_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)}$ laut (1.5-1) für beliebige $f \in \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$. Die Funktion $\mathrm{Ri}_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)}(\delta_y)$ erfüllt demnach auch die Bedingung (5.3-2).

■

Korollar 5.3-2 (zu Satz 5.3-1)

Gilt $\delta_x \in \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)^*$ für *ein beliebiges* $x \in \mathbb{R}^d$, so gilt dies auch für *jedes* $x \in \mathbb{R}^d$. Es reicht also, wenn man die Voraussetzung (5.2-1) lediglich für $x = 0$ nachprüft.

Bemerkung 5.3-3

Wenn ein reproduzierender Kern von $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)$ existiert, so ist er nicht nur zur Beschreibung der Punktauswertungsfunktionale verwendbar. Vielmehr läßt sich mit ihm der Riesz-Repräsentant eines *beliebigen* Funktionals $\lambda \in \mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)^*$ darstellen: Es gilt nämlich

$$\begin{aligned}
\overline{\lambda}^y \Phi(x,y) &= \overline{\lambda^y \Phi(y,x)} = \overline{\left\langle \Phi(\cdot,x) \,\middle|\, \mathrm{Ri}_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)}(\lambda)(\cdot) \right\rangle_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)}} \\
&= \left\langle \mathrm{Ri}_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)}(\lambda)(\cdot) \,\middle|\, \Phi(\cdot,x) \right\rangle_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)} \\
&\overset{(5.3\text{-}2)}{=} \delta_x \left(\mathrm{Ri}_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)}(\lambda)\right) = \mathrm{Ri}_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)}(\lambda)(x)
\end{aligned}$$

für jedes $x \in \mathbb{R}^d$. Daraus folgt die Verallgemeinerung

$$\lambda(f) = \left\langle f \,\middle|\, \overline{\lambda}^y \Phi(\cdot,y) \right\rangle_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)} \qquad \text{für jedes } f \in \mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho) \text{ und } \lambda \in \mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)^* \tag{5.3-4}$$

der Definitionsgleichung (5.3-2) des reproduzierenden Kernes.

Es ist eine offene Frage, unter welchen Umständen man diese Gleichung zur Definition eines *verallgemeinerten reproduzierenden Kernes* auf Sobolew-Räumen benutzen kann, die *nicht* Teilmenge der stetigen Funktionen sind.

5.4 Translationsinvariante Basisfunktionen

Dieses Kapitel erläutert, wie die klassische Theorie der Interpolation mit translationsinvarianten Basisfunktionen in die Theorie, die wir im zweiten und fünften Hauptkapitel bisher entwickelt haben, eingebettet ist.

In der klassischen Theorie geht man von einer positiv definiten,[2] translationsinvarianten Funktion Φ aus. Die Translationsinvarianz von Φ ist äquivalent zur Existenz einer Funktion Φ_0 mit

$$\Phi(x,y) = \Phi_0(x-y) = \Phi(x-y,0)\ . \tag{5.4-1}$$

Die positive Definitheit zeigt man in der Regel mittels Fourier-Transformation. Wir werden sehen, daß es sich bei $\varphi := \mathrm{FT}(\Phi_0)$ um den Kehrwert unserer Gewichtsfunktion ρ handelt. Wegen (5.3-3) entspricht Φ damit dem reproduzierenden Kern aus (5.3-1). Mittels der Funktion Φ definiert man sodann das Skalarprodukt auf dem *dualen native space* $\mathcal{F}_\Phi^*$ durch

$$\langle \lambda | \mu \rangle_{\mathcal{F}_\Phi^*} := \lambda^x\, \overline{\mu}^y\, \Phi(x,y)\ . \tag{5.4-2}$$

Die positive Definitheit von Φ ist dabei die wesentliche Voraussetzung um sicherzustellen, daß es sich auch wirklich um ein Skalarprodukt handelt.

Unter gewissen Voraussetzungen an den Raum $\mathcal{F}_\Phi^*$ beziehungsweise an die Fourier-Transformierte, die durch (4.3-14) definiert wird, findet man[3]

$$\langle \lambda | \mu \rangle_{\mathcal{F}_\Phi^*} = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\omega)\ \mathrm{ft}(\lambda)(\omega)\ \overline{\mathrm{ft}(\mu)(\omega)}\, d\omega\ ,$$

[2] *Bedingt* positiv definite Funktionen werden wie im Kapitel 2.4 beschrieben benutzt, daher konzentrieren wir uns hier nur auf positiv definite Funktionen.

[3] Vergleiche [FS98b].

woraus man durch Vergleich mit (4.3-11), wie angekündigt, auf $\varphi = 1/\rho$ schließt. Weiterhin erhält man für die Norm auf dem *primalen native space* die Gleichung

$$\|f\|_{\mathcal{F}_\Phi}^2 \;=\; (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} |\mathrm{FT}(f)(\omega)|^2 \,/\, \varphi(\omega)\, d\omega \quad \forall\, f \in \mathcal{F}_\Phi \;,$$

die beim Vergleich mit (4.1-3) denselben Schluß erzwingt.[4] Somit ist gezeigt, daß es sich bei $\mathcal{F}_\Phi$ und $\mathsf{H}\left(\mathbb{R}^d, 1/\,\mathrm{FT}(\Phi_0)\right)$ um dieselben Räume handelt:

$$\text{(5.4-3)} \qquad \mathcal{F}_\Phi \;=\; \mathsf{H}\left(\mathbb{R}^d, 1/\,\mathrm{FT}(\Phi_0)\right) \;.$$

Betrachtet man nun einen linearen Operator L, so kann man auf der klassischen Theorie aufbauend

$$\text{(5.4-4)} \qquad \Psi_L(x,y) \;:=\; (\delta_x \circ L)^u\, (\delta_y \circ \overline{L})^v\, \Phi(u,v)$$

definieren, wie es in [FS98b] beschrieben wurde. Man erhält dann einen Transformationssatz. Das Analogon dazu haben wir bereits mit Gleichung (2.2-8) bzw. Satz 2.2-4 kennengelernt. Dort mußten wir voraussetzen, daß L injektiv ist. In [FS98b] wurde statt dessen vorausgesetzt, daß Ψ_L wieder eine „zulässige Basisfunktion" ist, was auf dasselbe hinausläuft. Der zugehörige native space $\mathcal{F}_{\Psi_L}$ ist der Bildraum von L. Für die Fourier-Transformierte $\psi_L := \mathrm{FT}^x(\Psi_L(x,0))$ folgt dann bei einem *translationsinvarianten* Operator L der Zusammenhang

$$\psi_L(\omega) \;=\; \varphi(\omega) \cdot |\mathrm{ft}\,(\delta_0 \circ L)\,(\omega)|^2 \qquad \text{æ}$$

zwischen den Fourier-Transformierten. Wir finden ihn in Satz 5.5-6 wieder, wo $\rho' := \rho/\,|\mathrm{ft}\,(\delta_0 \circ L)|^2$ gewählt wird. Mit $\rho = 1/\varphi$ folgt die zu erwartende Identität

$$\mathcal{F}_{\Psi_L} \;=\; \mathsf{H}\left(\mathbb{R}^d, 1/\,\mathrm{FT}(\Psi_L)\right) \;=\; \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho') \;.$$

5.5 Translationsinvariante Operatoren

Ihrer Natur nach sind translationsinvariante Operatoren vor allem in Verbindung mit Punktauswertungsfunktionalen interessant. Sie lassen nämlich gerade deren Transformationsgruppe, die Translationsgruppe $\mathbb{R}^d$, invariant. Dementsprechend „gehören" sie in die Theorie translationsinvarianter Basisfunktionen.

Das Hauptergebnis dieses Kapitels, der Satz 5.5-6, zeigt auf, wie aus der Fourier-Transformierten eines Operators L die Gewichtsfunktionen ρ und ρ' bestimmt werden können, so daß L stetig und injektiv ist.

[4] Wir haben hier nur eine Variante von vielen zur Konstruktion eines native spaces aufgezeigt. Insbesondere bei *bedingt* positiv definiten radialen Basisfunktionen sind mehrere leicht unterschiedliche Varianten gebräuchlich.

Definition 5.5-1 *Translationsinvarianter Operator*

Ein Operator $L : \mathcal{H} \to \mathcal{G}$ zwischen Funktionenräumen über $\mathbb{R}^d$ heißt genau dann *translationsinvariant*, wenn er mit jeder Translation kommutiert: $L \circ \tau_z = \tau_z \circ L$, oder ganz konkret:

$$(5.5\text{-}1) \qquad L^x\big(f(x-z)\big) = (Lf)(x-z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{R}^d \text{ und } f \in \mathcal{H}\ .$$

Die folgenden Sätze behandeln die Eigenschaften translationsinvarianter, beschränkter Operatoren, wie sie mit Hilfe der Fourier-Transformierte $\mathrm{ft}\,(\delta_x \circ L)$ beschrieben werden können.

Satz 5.5-2

Sei $L : \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho) \to \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho')$ ein translationsinvarianter, beschränkter Operator, wobei $1/\rho$ und $1/\rho'$ Gewichtsfunktionen aus $\mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)$ mit $\operatorname{supp}\rho' \subseteq \operatorname{supp}\rho$ sind. Der Raum $\operatorname{span}\{\delta_y\}_{y\in\mathbb{R}^d}$ sei dicht in $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)^*$.[5] Für $\delta_x \in \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho')^*$ gilt dann

$$(5.5\text{-}2) \qquad \mathrm{ft}_\rho\,(\delta_x \circ L)\,(\omega) = \mathrm{FT}_{\rho'} \circ L \circ \mathrm{FT}_\rho^{-1}(1/\rho)(\omega) \cdot \rho(\omega) \cdot \mathrm{ft}_{\rho'}\,(\delta_x)\,(\omega) \quad \text{für alle } \omega \in \mathbb{R}^d.$$

Beweis

Sei $\delta_y \in \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)^*$ beliebig. Dann gilt

$$(5.5\text{-}3) \qquad L \circ \mathrm{Ri}_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)}(\delta_y) \overset{(5.3\text{-}3)}{=} L \circ \tau_y \circ \mathrm{FT}_\rho^{-1}(1/\rho) \overset{(5.5\text{-}1)}{=} \tau_y \circ L \circ \mathrm{FT}_\rho^{-1}(1/\rho)\ .$$

Damit folgt weiter:

$$\begin{aligned}
&\big\langle \mathrm{ft}_\rho\,(\delta_x \circ L) \big| \mathrm{ft}_\rho\,(\delta_y) \big\rangle_{\mathsf{L}_2(1/\rho)} \\
&\overset{(4.3\text{-}11)}{=} (2\pi)^d \,\langle \delta_x \circ L | \delta_y \rangle_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)^*} \overset{(2.2\text{-}2)}{=} (2\pi)^d \,\big\langle L^+(\delta_x) \big| \delta_y \big\rangle_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)^*} \\
&\overset{(1.5\text{-}3)}{=} (2\pi)^d \,\big\langle \mathrm{Ri}_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)}(\delta_y) \big| \mathrm{Ri}_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)} \circ L^+(\delta_x) \big\rangle_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)} \\
&\overset{(2.2\text{-}3)}{=} (2\pi)^d \,\big\langle \mathrm{Ri}_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)}(\delta_y) \big| L^* \circ \mathrm{Ri}_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho')}(\delta_x) \big\rangle_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)} \\
&\overset{(5.5\text{-}3)}{=} (2\pi)^d \,\big\langle \tau_y \circ L \circ \mathrm{FT}_\rho^{-1}(1/\rho) \big| \mathrm{Ri}_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho')}(\delta_x) \big\rangle_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho')} \\
&\overset{(4.3\text{-}1)}{=} \big\langle R_{\rho'} \circ \mathrm{FT}_{\rho'} \circ \mathrm{Ri}_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho')}(\delta_x) \big| R_{\rho'} \circ \mathrm{FT}_{\rho'} \circ \tau_y \circ L \circ \mathrm{FT}_\rho^{-1}(1/\rho) \big\rangle_{\mathsf{L}_2(1/\rho')} \\
&\overset{(4.3\text{-}8)}{=} \big\langle \mathrm{ft}_{\rho'}\,(\delta_x) \big| R_{\rho'} \circ \mathrm{FT}_{\rho'} \circ \tau_y \circ L \circ \mathrm{FT}_\rho^{-1}(1/\rho) \big\rangle_{\mathsf{L}_2(1/\rho')} \\
&\overset{(5.2\text{-}2)}{=} \int e^{i\,x^{\mathrm{tr}}\omega} \cdot \chi_{\operatorname{supp}\rho'}(\omega) \cdot \mathrm{FT}_{\rho'} \circ \tau_y \circ L \circ \mathrm{FT}_\rho^{-1}(1/\rho)(\omega)\ d\omega \\
&\overset{(3.4\text{-}5)}{=} \int e^{i\,x^{\mathrm{tr}}\omega} \cdot \chi_{\operatorname{supp}\rho}(\omega) \cdot e^{-i\,y^{\mathrm{tr}}\omega} \cdot \mathrm{FT}_{\rho'} \circ L \circ \mathrm{FT}_\rho^{-1}(1/\rho)(\omega)\ d\omega\ .
\end{aligned}$$

Da der Träger von $\mathrm{FT}_{\rho'} \circ \tau_y \circ L \circ \mathrm{FT}_\rho^{-1}(1/\rho)$ in $\operatorname{supp}\rho'$ und damit in $\operatorname{supp}\rho$ enthalten ist, konnte im letzten Schritt o. E. $\chi_{\operatorname{supp}\rho'}$ durch $\chi_{\operatorname{supp}\rho}$ ersetzt werden. Wegen (5.2-2) gilt

[5] Im Sinne von Lemma 5.5-4 ist diese Bedingung ein Ersatz für das Zweite Charakteristikum (4.3-14).

$\chi_{\operatorname{supp}\rho}(\omega) \cdot e^{-i\,y^{\mathrm{tr}}\omega} = \overline{\mathrm{ft}_\rho\,(\delta_y)}$. Da die Funktionale δ_y in $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)^*$ dicht liegen, liegen auch die Funktionen $\mathrm{ft}_\rho\,(\delta_y)$ dicht in $\mathsf{L}_2(1/\rho)$. Auf Grund von Korollar 3.3-3 ist nun die Funktion $e^{i\,x^{\mathrm{tr}}\omega} \cdot \mathrm{FT}_{\rho'} \circ L \circ \mathrm{FT}_\rho^{-1}(1/\rho)(\omega)$ ein Element von $\mathsf{L}_2(\rho)$. Wir erhalten so

$$\begin{aligned} &\langle\, \mathrm{ft}_\rho\,(\delta_x \circ L) | \mathrm{ft}_\rho\,(\delta_y)\, \rangle_{\mathsf{L}_2(1/\rho)} \\ &= \left\langle \mathrm{FT}_{\rho'} \circ L \circ \mathrm{FT}_\rho^{-1}(1/\rho)(\omega) \cdot e^{i\,x^{\mathrm{tr}}\omega} \cdot \rho(\omega) \middle| \mathrm{ft}_\rho\,(\delta_y) \right\rangle_{\mathsf{L}_2(1/\rho)} \end{aligned}$$

für alle y. Daher folgt $\mathrm{ft}_\rho\,(\delta_x \circ L)\,(\omega) = \mathrm{FT}_{\rho'} \circ L \circ \mathrm{FT}_\rho^{-1}(1/\rho)(\omega) \cdot \rho(\omega) \cdot \mathrm{ft}_\rho\,(\delta_x)\,(\omega)$. Da der Operator $\mathrm{FT}_{\rho'}$ eine Funktion mit Träger in $\operatorname{supp}\rho'$ liefert und da $\mathrm{ft}_{\rho'}\,(\delta_x) = \mathrm{ft}_\rho\,(\delta_x) \cdot \chi_{\operatorname{supp}\rho'}$ laut (5.2-2) gilt, kann schließlich $\mathrm{ft}_\rho\,(\delta_x)$ durch $\mathrm{ft}_{\rho'}\,(\delta_x)$ ersetzt werden.

∎

Korollar 5.5-3

Sei L wie oben. Als Verallgemeinerung von Gleichung (5.2-2) folgt

(5.5-4) $\quad \mathrm{ft}_\rho\,(\delta_z \circ L)\,(\omega) \;=\; \mathrm{ft}_\rho\,(\delta_0 \circ L)\,(\omega) \cdot e^{i\,z^{\mathrm{tr}}\omega} \quad$ für alle $z,\, \omega \in \mathbb{R}^d$

aus Gleichung (5.5-2).

Beweis

$$\begin{aligned} \mathrm{ft}_\rho\,(\delta_z \circ L)\,(\omega) &\overset{(5.5\text{-}2)}{=} \mathrm{FT}_{\rho'} \circ L \circ \mathrm{FT}_\rho^{-1}(1/\rho)(\omega) \cdot \rho(\omega) \cdot \mathrm{ft}_{\rho'}\,(\delta_z)\,(\omega) \\ &\overset{(5.2\text{-}2)}{=} \mathrm{FT}_{\rho'} \circ L \circ \mathrm{FT}_\rho^{-1}(1/\rho)(\omega) \cdot \rho(\omega) \cdot \mathrm{ft}_{\rho'}\,(\delta_0)\,(\omega) \cdot e^{i\,z^{\mathrm{tr}}\omega} \\ &\overset{(5.5\text{-}2)}{=} \mathrm{ft}_\rho\,(\delta_0 \circ L)\,(\omega) \cdot e^{i\,z^{\mathrm{tr}}\omega}\ . \end{aligned}$$

∎

Die Gleichung (5.5-4) läßt sich aber auch aus dem Zweiten Charakteristikum herleiten:

Lemma 5.5-4

Sei L translationsinvariant. Die Funktionale $\delta_x \circ L$ und $\delta_0 \circ L$ mögen das Zweite Charakteristikum (4.3-14) erfüllen. Dann gilt Gleichung (5.5-4).

Beweis

$$\begin{aligned} &\mathrm{ft}_\rho\,(\delta_z \circ L)\,(\omega) \overset{(4.3\text{-}14)}{=} \left(L^x \left(e^{i\,\omega^{\mathrm{tr}}x}\right)\right)(z) \overset{(5.5\text{-}1)}{=} \left(L^x \left(e^{i\,\omega^{\mathrm{tr}}(x+z)}\right)\right)(0) \\ &= \left(L^x \left(e^{i\,\omega^{\mathrm{tr}}x} \cdot e^{i\,\omega^{\mathrm{tr}}z}\right)\right)(0) \\ &= \left(L^x \left(e^{i\,\omega^{\mathrm{tr}}x}\right)\right)(0) \cdot e^{i\,\omega^{\mathrm{tr}}z} \qquad \text{da } L \text{ linear ist} \\ &\overset{(4.3\text{-}14)}{=} \mathrm{ft}_\rho\,(\delta_0 \circ L)\,(\omega) \cdot e^{i\,\omega^{\mathrm{tr}}z}\ . \end{aligned}$$

∎

Lemma 5.5-5

Aus Gleichung (5.5-4) folgt

$$(5.5\text{-}5) \qquad \langle\, \delta_x \circ L | \delta_y \circ L \,\rangle_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)^*} \;=\; \mathrm{FT}^{-1}\left(\left| \mathrm{ft}\,(\delta_0 \circ L) \right|^2 / \rho \right)(x-y) \quad \text{für alle } x,\, y \in \mathbb{R}^d \,.$$

Analog zu (5.3-3) entspricht dies $\Psi_L(x,y)$ aus (5.4-2).

Beweis

Mit Gleichung (4.3-11) folgt für alle $x, y \in \mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned}
&\langle\, \delta_x \circ L | \delta_y \circ L \,\rangle_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)^*} \\
&\quad= (2\pi)^{-d} \,\langle\, \mathrm{ft}\,(\delta_x \circ L) | \mathrm{ft}\,(\delta_y \circ L) \,\rangle_{\mathsf{L}_2(1/\rho)} \\
&\quad\overset{(5.5\text{-}4)}{=} (2\pi)^{-d} \int \mathrm{ft}\,(\delta_0 \circ L)\,(\omega)\, e^{i\,\omega^{\mathrm{tr}} x} \cdot \overline{\mathrm{ft}\,(\delta_0 \circ L)\,(\omega)\, e^{i\,\omega^{\mathrm{tr}} y}} / \rho(\omega)\, d\omega \\
&\quad= (2\pi)^{-d} \int \left| \mathrm{ft}\,(\delta_0 \circ L)\,(\omega) \right|^2 / \rho(\omega) \cdot e^{i\,\omega^{\mathrm{tr}}(x-y)}\, d\omega \\
&\quad= \mathrm{FT}^{-1}\left(\left| \mathrm{ft}\,(\delta_0 \circ L) \right|^2 / \rho \right)(x-y)\,.
\end{aligned}$$

■

Satz 5.5-6

Sei $L : \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho) \to \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho')$ ein Operator, für den $\mathrm{ft}_\rho\,(\delta_0 \circ L)$ bekannt ist,[6] und der die Eigenschaft (5.5-4) besitzt. Dabei sei ρ eine Gewichtsfunktion mit Träger in $\operatorname{supp} \mathrm{ft}_\rho\,(\delta_0 \circ L)$ und $\rho' := \rho \cdot \left| \mathrm{ft}_\rho\,(\delta_0 \circ L) \right|^{-2}$. Wir setzen außerdem $1/\rho, 1/\rho' \in \mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)$ voraus. Dann erfüllt L die Voraussetzung (5.1-1), und es gilt

$$(5.5\text{-}6) \qquad \mathrm{FT}_{\rho'} \circ L(f) \;=\; \mathrm{FT}_\rho(f) \cdot \mathrm{ft}_\rho\,(\delta_0 \circ L)\;.$$

Außerdem ist die Ungleichungskette (5.1-2) durch $l_0(\omega) := l_\infty(\omega) := \left| \mathrm{ft}_\rho\,(\delta_0 \circ L)\,(\omega) \right|$ fast überall mit Gleichheit erfüllt. Daher greift das Korollar 5.1-4, und L ist demgemäß stetig und injektiv. Explizit gilt in Analogie zu (2.2-5) die Transformationsgleichung

$$(5.5\text{-}7) \qquad \langle\, Lf | Lg \,\rangle_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho')} \;=\; \langle\, f | g \,\rangle_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)} \quad \text{für alle} \quad f, g \in \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)\,.$$

Beweis

Da L gemäß Satz 5.1-2 stetig ist und $\delta_x \in \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho')$ laut Korollar 5.2-1 gilt, folgt $\delta_x \circ L \in \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)^*$. Für jedes $f \in \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$ gilt somit

$$\begin{aligned}
L(f)(x) &= (\delta_x \circ L)(f) \overset{(4.3\text{-}10)}{=} (2\pi)^{-d} \int \mathrm{FT}_\rho(f)(\omega) \cdot \mathrm{ft}_\rho\,(\delta_x \circ L)\,(\omega)\, d\omega \\
&= (2\pi)^{-d} \left(\mathrm{FT}_\rho(f),\, \mathrm{ft}_\rho\,(\delta_x \circ L) \right)_\rho \,.
\end{aligned}$$

[6] Die Fourier-Transformierte kann dabei z. B. durch das Erste oder Zweite Charakteristikum, d. h. (4.3-10) oder (4.3-14), gegeben sein.

Nach Definition der Bilinearform in 3.3-1 folgt $\mathrm{FT}_\rho(f) \cdot \mathrm{ft}_\rho\,(\delta_0 \circ L) \in \mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)$. Die klassische inverse Fourier-Transformierte dieses Produktes existiert also und entspricht der inversen verallgemeinerten Fourier-Transformierten FT_ρ. Daher ergibt sich

$$\begin{aligned} L(f)(x) &\overset{(5.5\text{-}4)}{=} (2\pi)^{-d} \int \mathrm{FT}_\rho(f)(\omega) \cdot \mathrm{ft}_\rho\,(\delta_0 \circ L)\,(\omega) \cdot e^{i\,x^{\mathrm{tr}}\omega}\, d\omega \\ &= \mathrm{FT}_\rho^{-1}\left(\mathrm{FT}_\rho(f) \cdot \mathrm{ft}_\rho\,(\delta_0 \circ L) \right)(x) \end{aligned}$$

aus der ersten Zeile der vorigen Gleichung. Es folgt (5.5-6) und daraus wiederum

$$|\mathrm{FT}_{\rho'} \circ L(f)| \;=\; |\mathrm{FT}_\rho(f)| \cdot |\mathrm{ft}_\rho\,(\delta_0 \circ L)|$$

fast überall. Der Vergleich mit (5.1-2) schließt den Beweis ab, denn (5.5-7) folgt direkt aus (5.5-6) und der Definition von ρ'.

■

Beispiel 5.5-7 (Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten)

Sei L ein *Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten* der Ordnung $m \in \mathbb{N}_0$, d. h. L hat die Form

$$(5.5\text{-}8) \qquad L \;=\; p(D) \quad \text{mit} \quad p(x) \;=\; \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha\, x^\alpha, \qquad a_\alpha,\, x \in \mathbb{C}\;.$$

Der Operator L ist translationsinvariant. Er ist auf Räumen $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$ definiert, deren Funktionen hinreichend oft differenzierbar sind, vgl. Satz 4.1-13. Dann sind Integration und Ableitung nach Satz 3.4-13, Punkt 2 vertauschbar, und die Bedingung (4.3-13) ist erfüllt. Die Fourier-Transformierte läßt sich dann mittels des Zweiten Charakteristikums (4.3-14) als

$$\mathrm{ft}\,(\delta_0 \circ L)\,(\omega) \;=\; (\delta_0 \circ L)^x \left(e^{i\,x^{\mathrm{tr}}\omega}\right) \;=\; \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha\, (i\omega)^\alpha\, e^{i\,0^{\mathrm{tr}}\omega} \;=\; p(i\omega)$$

darstellen. Außerdem gilt die Gleichung (5.5-4) und somit auch der Satz 5.5-6. Der Träger des Polynoms p ist, sofern man den trivialen Fall $L = 0$ ausschließt, ganz $\mathbb{R}^d$. Daher ergibt sich keine Einschränkung an den Träger von ρ. Wir definieren nun $\rho'(\omega) := \rho(\omega) \cdot |p(i\omega)|^{-2}$ und verlangen $1/\rho' \in \mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)$. Die obige Voraussetzung $1/\rho \in \mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)$ ist für Polynome p ohne Nullstellen auf $i \cdot \mathbb{R}^d$ automatisch erfüllt, und der Operator $L : \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho) \to \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho')$ ist beschränkt.

Beispiel 5.5-8 (Integraloperator vom Faltungstyp)

Sei L ein *Integraloperator vom Faltungstyp*, d. h. L hat die Form

$$(5.5\text{-}9) \qquad L(f)(x) \;=\; K * f(x) \;=\; \int f(y) \cdot K(x-y)\, dy\;.$$

Dabei sei $K \in \mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)$. Der Operator ist translationsinvariant und erfüllt (4.3-13) auf Grund das Satzes von Fubini, vgl. [BS88], Kap. 8.2.4.3. (Man zeigt die Behauptung zunächst für $\mathrm{FT}(f)$ aus dem dichten Unterraum $\mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d) \cap \mathsf{L}_2(\rho)$ von $\mathsf{L}_2(\rho)$.) Die Fourier-Transformierte berechnet sich daher laut (4.3-14) zu

$$\begin{aligned} \mathrm{ft}\,(\delta_0 \circ L)\,(\omega) &= (\delta_0 \circ L)^x \left(e^{i\,x^{\mathrm{tr}}\omega}\right) = \int e^{i\,y^{\mathrm{tr}}\omega} \cdot K(0-y)\,dy \\ &= \mathrm{FT}(K)(\omega)\ . \end{aligned}$$

Da keine weiteren Informationen über K vorliegen, beschränken wir uns im weiteren auf eine Gewichtsfunktion ρ mit $\operatorname{supp}\rho \subseteq \operatorname{supp}\mathrm{FT}(K)$. Wir definieren nun $\rho' := \rho \cdot |\mathrm{FT}(K)|^{-2}$ und verlangen $1/\rho' \in \mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)$. Der Operator $L : \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho) \to \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho')$ ist dann beschränkt. Mit der Parseval-Gleichung (3.4-2), mit (3.4-4) und (3.4-5) folgt

$$(2\pi)^d \cdot L(f)(x) = \int \mathrm{FT}(f)(\omega) \cdot \mathrm{FT}(K)(\omega) \cdot e^{-ix^{\mathrm{tr}}\omega}\,d\omega$$

aus (5.5-9). Dieses Integral existiert gemäß Definition 3.3-1 für $\mathrm{FT}(f) \in \mathsf{L}_2(\rho)$ und $\mathrm{FT}(K) \in \mathsf{L}_2(1/\rho)$ bzw. für $f \in \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$ und $K \in \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, 1/\rho)$. Die oben hergeleiteten Zusammenhänge übertragen sich auf diese Verallgemeinerung, ibes. gilt

(5.5-10) $\quad \mathrm{ft}_\rho\,(\delta_0 \circ L) = \mathrm{FT}_{1/\rho}(K)\ .$

Mit (5.5-5) und (3.4-5) folgt der hübsche Zusammenhang

(5.5-11) $\quad \langle \delta_x \circ L | \delta_y \circ L \rangle_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)^*} = \langle K(\cdot + x) | K(\cdot + y) \rangle_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, 1/\rho)}\ .$

5.6 Rotationsinvariante Operatoren, radiale Funktionen

Die angenehmen Eigenschaften translationsinvarianter Operatoren inspirieren die Frage, ob nicht auch *rotationsinvariante* Operatoren kräftige Aussagen erlauben. Dabei ist unter einem rotationsinvarianten Operator ein Operator L mit der Eigenschaft $\mathrm{P}_U \circ L = L \circ \mathrm{P}_U$ für jede Rotation $\mathrm{P}_U \in SO(d-1)$ bzw. für jede unitäre Matrix $U \in \mathbb{R}^{d\times d}$ zu verstehen. Die Rotation P_U zu einer Matrix U ist durch $\mathrm{P}_U(f)(x) := f(Ux)$ für jede Funktion $f : B(R) \to \mathbb{C}$ definiert.[7] Es gilt $U^{-1} = U^{\mathrm{tr}}$ und $\mathrm{P}_U^{-1} = \mathrm{P}_{U^{\mathrm{tr}}}$.
Man erkennt schnell, daß z. B. die Fourier-Transformation gemäß

(5.6-1) $\quad \mathrm{P}_U \circ \mathrm{FT} = \mathrm{FT} \circ \mathrm{P}_U$

und die Skalierung[8] S_c rotationsinvariant sind, nicht aber die Translation τ_z. Da die Funktionaldeterminante einer beliebigen Rotation den Wert 1 besitzt, folgt durch Substitution

$$\|\mathrm{P}_U f\|_{\mathsf{L}_2(\mathrm{P}_U\rho)} = \|f\|_{\mathsf{L}_2(\rho)}$$

für jedes $f \in \mathsf{L}_2(\rho)$. Auf Grund der Rotationsinvarianz der Fourier-Transformation überträgt sich dies auch auf die gewichteten Sobolew-Räume; d. h. es gilt

$$\|\mathrm{P}_U f\|_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \mathrm{P}_U\rho)} = \|f\|_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)}$$

[7] Dabei bezeichnet $B(R)$ die offene Kugel mit dem Radius $R \in\,]0,\infty]$ um 0 in $\mathbb{R}^d$.
[8] Vergleiche Kap. 7.1.

für jedes $f \in \mathsf{H}(\mathrm{I\!R}^d, \rho)$. Im Zusammenhang mit Funktionalen benötigen wir wegen Lemma 2.2-3 den adjungierten Operator zu P_U. Mit derselben Substitution wie oben erhalten wir aus $\langle f | \mathrm{P}_U(g) \rangle_{\mathsf{L}_2(\mathrm{P}_U \rho)} = \langle \mathrm{P}_{U^{\mathrm{tr}}}(f) | g \rangle_{\mathsf{L}_2(\rho)}$ die Aussage $\mathrm{P}_U^* = \mathrm{P}_{U^{\mathrm{tr}}}$. Dies überträgt sich wiederum auf die Sobolew-Räume.

Man erkennt, daß Rotationen i. allg. *keine* Endomorphismen auf den hier verwendeten Räumen sind. Dieser Mangel läßt sich am einfachsten durch die Forderung

$$\text{(5.6-2)} \qquad \mathrm{P}_U(\rho) \;=\; \rho \quad \text{für alle } U$$

umgehen. Das bedeutet nichts anderes, als daß ρ eine radiale Funktion sein soll, also eine Funktion mit der Eigenschaft $\rho(\omega) = \rho_0(\|\omega\|_2)$. Wir setzen dies im weiteren voraus.

In Kapitel 5.5 wurde deutlich, daß das Verhalten von $\mathrm{ft}_\rho(\delta_x \circ L)$ in x von großer Bedeutung ist. Für einen beliebigen Operator L und ein Funktional $\lambda \in \mathsf{H}(\mathrm{I\!R}^d, \rho)^*$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathrm{ft}_\rho(\lambda \circ \mathrm{P}_U) &\overset{(4.3\text{-}8)}{=} R_\rho \circ \mathrm{FT}_\rho \circ \mathrm{Ri}_{\mathsf{H}(\mathrm{I\!R}^d,\rho)} \circ \mathrm{P}_U^+(\lambda) \\
&\overset{(2.2\text{-}3)}{=} R_\rho \circ \mathrm{FT}_\rho \circ \mathrm{P}_U^* \circ \mathrm{Ri}_{\mathsf{H}(\mathrm{I\!R}^d,\rho)}(\lambda) \\
&\overset{(5.6\text{-}1)}{=} R_\rho \circ \mathrm{P}_{U^{\mathrm{tr}}} \circ \mathrm{FT}_\rho \circ \mathrm{Ri}_{\mathsf{H}(\mathrm{I\!R}^d,\rho)}(\lambda) \\
&\overset{(5.6\text{-}2)}{=} \mathrm{P}_{U^{\mathrm{tr}}} \circ R_\rho \circ \mathrm{FT}_\rho \circ \mathrm{Ri}_{\mathsf{H}(\mathrm{I\!R}^d,\rho)}(\lambda) \\
&= \mathrm{P}_{U^{\mathrm{tr}}}(\mathrm{ft}_\rho(\lambda)) \ .
\end{aligned}$$

Ist L rotationsinvariant, so folgt damit

$$\text{(5.6-3)} \qquad \mathrm{ft}_\rho(\delta_{Ux} \circ L) \;=\; \mathrm{ft}_\rho(\delta_x \circ \mathrm{P}_U \circ L) \;=\; \mathrm{ft}_\rho(\delta_x \circ L \circ \mathrm{P}_U) \;=\; \mathrm{P}_{U^{\mathrm{tr}}}(\mathrm{ft}_\rho(\delta_x \circ L)) \ .$$

Die Fourier-Transformierte $\mathrm{ft}_\rho(\delta_x \circ L)$ ist also radial in x. Gleichung (5.6-3) bildet eine gewisse Analogie zu Gleichung (5.5-4). Dementsprechend übertragen sich die Folgerungen aus (5.5-4). Es gilt z. B.

$$\langle \delta_{Ux} \circ L | \delta_{Vx} \circ L \rangle_{\mathsf{H}(\mathrm{I\!R}^d,\rho)^*} \;=\; \langle \delta_x \circ L | \delta_{VU^{\mathrm{tr}}x} \circ L \rangle_{\mathsf{H}(\mathrm{I\!R}^d,\rho)^*}$$

für beliebige Drehmatrizen U, V als Gegenstück zu (5.5-5). Die Entsprechung zu (5.5-6) liegt mit $\mathrm{P}_U \circ \mathrm{FT}_\rho \circ L(f) = \mathrm{FT}_\rho \circ L \circ \mathrm{P}_U(f)$ sowieso auf der Hand.

Leider läßt sich aber all dies *nicht* im Hinblick auf die wesentliche Bedingung (5.1-2) ausnutzen, und damit auch nicht zur Bestimmung von ρ' aus ρ bei gegebenem Operator L. In dieser Hinsicht ist die Eigenschaft „Rotationsinvarianz" eines Operators L belanglos im Vergleich zu seiner Translationsinvarianz. Diese Arbeit setzt deshalb Rotationsinvarianz an keiner entscheidenden Stelle voraus.

Trotzdem werden in der Literatur meist nicht bloß translationsinvariante, sondern *radiale Basisfunktionen* beschrieben, vgl. Kap. 5.4. Sie besitzen die Form

$$\text{(5.6-4)} \qquad \Phi(x,y) \;=\; \Phi_0(x-y) \;=\; \phi(\|x-y\|_2)$$

mit einer bestimmten Funktion ϕ. Offensichtlich sind sie ebenfalls translationsinvariant. Die Radialität vererbt sich gemäß (5.6-1) auf die Fourier-Transformierte, d. h. es existiert eine Funktion φ_0 mit

$$\text{(5.6-5)} \qquad \varphi(\omega) \;=\; \mathrm{FT}(\Phi_0)(\omega) \;=\; \varphi_0(\|\omega\|_2) \ .$$

Wegen (5.6-2) ist dies verträglich mit der Eigenschaft $\rho = 1/\varphi$ aus Kap. 5.4.

Da im Kapitel 6.2 ein Beispiel vorgestellt wird, das Konvergenzordnungen auf klassischen Sobolew-Räumen liefert, wollen wir kurz auf eine Sorte radialer Basisfunktionen eingehen, die im Sinne von Kapitel 5.4 zu solchen Sobolew-Räumen gehören. Dazu stellen wir einige Fakten über die in [Wen96] eingeführten radialen Basisfunktionen mit kompaktem Träger, den sog. *Wendland-Funktionen*, zusammen.

Definition 5.6-1 *Wendland-Funktionen*

Sei der Integraloperator $(If)(r) := \int_r^\infty t\, f(t)\, dt$ für Funktionen $f : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ gegeben. Die Wendland-Funktionen $(\phi_{d,k})_{d\in\mathbb{N},\, k\in\mathbb{N}_0}$ werden dann definiert als[9]

$$\phi_{d,k} \;:=\; I^k\left((1-\cdot)_+^{\lfloor d/2\rfloor+k+1} \right) .$$

Satz 5.6-2 (Vergleiche [Wen98], Theorem 1.2)

Mittels $\Phi_{d,k}(x,y) := \phi_{d,k}(\|x-y\|_2)$ induzieren die gerade definierten Wendland-Funktionen auf $\mathbb{R}^d$ positiv definite Funktionen. Sie sind für $d' \leq d$ ebenso auf $\mathbb{R}^{d'}$ positiv definit, nicht aber für größere d' und haben die Form

$$\phi_{d,k}(r) \;=\; \begin{cases} p_{d,k}(r) & \text{für } 0 \leq r \leq 1 \\ 0 & \text{für } r > 1 \end{cases} ,$$

wobei $p_{d,k}$ ein univariates Polynom vom Grad $\lfloor d/2\rfloor+3k+1$ bezeichnet. Die Funktionen $\phi_{d,k}$ sind überall $2k$-fach stetig differenzierbar, d. h. es gilt $\Phi_{d,k} \in C_0^k(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$. Es gibt keine auf $\mathbb{R}^d$ positiv definiten Funktionen dieser Gestalt mit einem kleineren Polynomgrad und gleicher Glätte. Darüber hinaus sind die Wendland-Funktionen durch diese Eigenschaften eindeutig charakterisiert.

Satz 5.6-3 (Vergleiche [Wen98], Theorem 2.1)

Seien $\varphi_{d,k} := \mathrm{FT}(\Phi_{d,k}(\cdot,0))$ die Fourier-Transformierten der Wendland-Funktionen. Für alle Indexpaare (d,k) mit Ausnahme von $(1,0)$ und $(2,0)$ gilt dann

$$\text{(5.6-6)} \qquad \varphi_{d,k}(\omega) \;=\; \Theta\left((1+\|\omega\|_2)^{-d-2k-1} \right) .$$

Korollar 5.6-4

Nach Gleichung (5.4-3), Korollar 4.1-9 und Beispiel 4.1-14 handelt es sich bei den primalen native spaces $\mathcal{F}_{\Phi_{d,k}}$ der Wendland-Funktionen um gewichtete Sobolew-Räume, die den klassischen Sobolew-Räumen $\mathsf{H}^{k+(d+1)/2}(\mathbb{R}^d)$ bis auf metrische Äquivalenz gleich sind.

[9]Das Symbol $(x)_+$ bezeichnet den nichtnegativen Anteil von x.

6 Hermite-Birkhoff-Interpolation in $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)$

Dieses Hauptkapitel greift die Aufgabenstellung des zweiten Hauptkapitels, nämlich die Hermite-Birkhoff-Interpolation, wieder auf. Hier aber wird die Struktur der verwendeten Hilbert-Räume in die Überlegungen einfließen. Dadurch wird es möglich, die zur konformen Interpolation benötigten Ansatzfunktionen $\widetilde{\Phi} := \mathrm{Ri}_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)}(\Lambda)$ konkret zu bestimmen. Im Gegensatz zu allgemeinen Hilbert-Räumen ermöglichen die Sobolew-Räume $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)$ nämlich u. a. die Berechnung des Riesz-Operators, da die in Frage kommenden Funktionale in der Regel in einer Darstellung vorliegen, die der Fourier-Transformation zugänglich ist. Das Kapitel 4.3 lieferte die hierfür wichtigen Werkzeuge, deren Anwendung im Kapitel 5.5 exemplarisch dargestellt wurde. Dabei wurden auch die im Kapitel 5.1 getroffenen Annahmen gerechtfertigt, so daß sich die Ergebnisse des zweiten Hauptkapitels wörtlich auf unsere hiesige Situation übertragen.

6.1 Interpolation, Fehlerabschätzung, Konvergenz

Zur konkreten Interpolation muß zunächst der gewünschte Sobolew-Raum $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)$ durch Angabe des Gewichtes ρ festgelegt werden. Die Einschränkungen (5.1-2), (5.1-5) und (5.1-6) an ρ sind recht moderat. Daher lohnt es sich, die verschiedenen möglichen Gewichtsfunktionen zu vergleichen. Der Ausgangspunkt seien zwei Gewichte ρ und ρ_1 mit gleichem Träger und der Eigenschaft

$$\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho_1) \overset{\mathsf{d}}{\subseteq} \mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho) \ .$$

Laut Gleichung (4.1-6) ist diese Einbettung äquivalent zu $\rho/\rho_1 \in \mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)$. Zur Bewertung der Gewichte eignet sich das Verhalten des jeweiligen Interpolationsfehlers. Daher wählen wir Funktionale λ und Λ aus $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)^*$ sowie Funktionen $f \in \mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho_1)$,[1] die für das gegebene praktische Problem von Bedeutung sind, und vergleichen die Fehlerabschätzungen bzgl. $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)$ und $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho_1)$. Nach (2.3-6) gilt

$$\left|\lambda(f) - \lambda\left(s_{f,\Lambda,\widetilde{\Phi}}\right)\right| \ \le \ P_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho),\Lambda}(\lambda)\cdot\|f\|_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)}$$

und entsprechend für ρ_1 statt ρ und $\widetilde{\Phi}_1 := \mathrm{Ri}_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho_1)}(\Lambda)$ statt $\widetilde{\Phi}$. Laut (4.1-7) gilt zwar $\|f\|_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)} \le \|\rho/\rho_1\|^{1/2}_{\mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)}\cdot\|f\|_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho_1)}$, aber wenn man zu festem f die Funktionale λ und Λ variiert, ändern sich lediglich die Power-Funktionen. Für sie gilt nach (4.3-15)

$$P_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho_1),\Lambda}(\lambda) \ \le \ \left\|\frac{\rho}{\rho_1}\right\|^{1/2}_{\mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)} \cdot P_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho),\Lambda}(\lambda)$$

für geeignete λ und Λ.[2] Das Verhalten in Λ kann sich dabei durchaus qualitativ unterscheiden (vgl. Korollar 6.2-3), so daß es ratsam ist, die benutzten Sobolew-Räume möglichst klein zu halten. In der Praxis bestimmt hierbei das Anwachsen der Kondition der Interpolationsmatrix oft die Grenze des Sinnvollen.

[1] Die Funktion f muß aus dem kleineren Sobolew-Raum gewählt werden, damit zwei vergleichbare Normen existieren.

[2] Dieses Ergebnis entspricht grob [Sch96], Theorem 4.5.

Eine genauere Betrachtung des Verhaltens des Fehlers „in Λ“ führt zu der Frage, ob Konvergenz eintritt. Konvergenz kann nur bezüglich eines oder mehrerer Parameter von Λ definiert werden. Im Kontext der Punktauswertungsfunktionale sind diese Parameter in der Regel die Orte X der *Stützstellen* des Tupels $\delta_X \circ L$. Konvergenz erscheint nun möglich, wenn eine *Stützstellenmenge* $X \subset \Omega$ durch eine Menge $X^h \subset \Omega$ ersetzt wird, deren Stützstellen im Sinne der $\|\cdot\|_2$-Norm dichter liegen, und die ggf. mehr Stützstellen enthält. Daher wird einer Stützstellenmenge X^h bzw. einem Tupel Λ^h die Kenngröße

$$h_{X,\Omega} := \sup_{x\in\Omega} \min_{x'\in X} \|x - x'\|_2 \tag{6.1-1}$$

zugeordnet.

Beispiel 6.1-1 (Fortsetzung des Beispiels 2.3-5)

Wir gehen von einem translationsinvarianten Operator L aus, dessen Fourier-Transformierte $\mathrm{ft}_\rho(\delta_0 \circ L)$ bekannt ist, und wählen Gewichtsfunktionen ρ und ρ' entsprechend Satz 5.5-6. So erhalten wir zwei gewichtete Sobolew-Räume, zwischen denen L eine isometrische Abbildung ist. Wegen der Voraussetzung $1/\rho, 1/\rho' \in \mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)$ sind Punktauswertungen auf beiden Räumen stetige Funktionale.

Sodann seien zwei Tupel $X_1, X_2 \subset \mathbb{R}^d$ von Stützstellen gegeben. Daraus bilden wir das Tupel $\Lambda = \left(\delta_{X_1}^{\mathrm{tr}} \circ L,\ \delta_{X_2}^{\mathrm{tr}}\right)^{\mathrm{tr}} \subset \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)^*$, wobei $\delta_X := (\delta_x)_{x\in X}$ gesetzt wird. Λ sei linear unabhängig. Dazu genügt es in der Regel, daß sich die Stützstellen in hinreichend allgemeiner Lage befinden. Das Tupel der Ansatzfunktionen sei mit $\widetilde{\Phi} := \mathrm{Ri}_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)}(\Lambda)$ konform gewählt. Entsprechend hat es die Struktur $\widetilde{\Phi} = (\widetilde{\Phi}_1^{\mathrm{tr}}, \widetilde{\Phi}_2^{\mathrm{tr}})^{\mathrm{tr}}$. Dabei ist $\widetilde{\Phi}_2$ laut (5.3-3) durch $\widetilde{\Phi}_2(x)^{\mathrm{tr}} = \Phi(x, X_2) = \mathrm{FT}_\rho^{-1}(1/\rho)(x - X_2)$ darstellbar. Die Gestalt von $\widetilde{\Phi}_1$ ergibt sich wie folgt: Zunächst gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ri}_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)}(\delta_z \circ L)(x) &\overset{(4.3\text{-}8)}{=} \left(\mathrm{FT}_\rho^{-1} \circ R_\rho^{-1} \circ \mathrm{ft}_\rho(\delta_z \circ L)\right)(x) \\
&\overset{(5.5\text{-}4)}{=} \mathrm{FT}_\rho^{-1,\omega}\left(\overline{\mathrm{ft}_\rho(\delta_0 \circ L)(\omega) \cdot e^{i\, z^{\mathrm{tr}}\omega}} \,/\, \rho(\omega)\right)(x) \\
&\overset{(3.4\text{-}7)}{=} \mathrm{FT}_\rho^{-1}\left(\overline{\mathrm{ft}_\rho(\delta_0 \circ L)} \,/\, \rho\right)(x - z)\ .
\end{aligned}$$

Andererseits ist der reproduzierende Kern $\Phi(x,\cdot) = \overline{\Phi(\cdot, x)}$ für jedes $x \in \mathbb{R}^d$ ein Element von $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$. Nach (5.5-6) gilt also

$$\begin{aligned}
(\mathrm{FT}_{\rho'} \circ L)^y\left(\overline{\Phi(x,y)}\right)(\omega) &\overset{(5.5\text{-}6)}{=} \mathrm{FT}_\rho^y\left(\Phi(y,x)\right)(\omega) \cdot \mathrm{ft}_\rho(\delta_0 \circ L)(\omega) \\
&\overset{(5.3\text{-}3)}{=} \mathrm{FT}_\rho^y\left(\mathrm{FT}_\rho^{-1}(1/\rho)(y - x)\right)(\omega) \cdot \mathrm{ft}_\rho(\delta_0 \circ L)(\omega) \\
&\overset{(3.4\text{-}5)}{=} \mathrm{ft}_\rho(\delta_0 \circ L)(\omega) \,/\, \rho(\omega) \cdot e^{-ix^{\mathrm{tr}}\omega}\ .
\end{aligned} \tag{6.1-2}$$

Da $1/\rho,\ 1/\rho' \in \mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)$ in Satz 5.5-6 vorausgesetzt worden war, gilt $\mathrm{FT}_{\rho'} = \mathrm{FT}_1 = \mathrm{FT}_\rho$ und daher auch

$$L^y\left(\overline{\Phi(x,y)}\right) = \mathrm{FT}_\rho^{-1}\left(\overline{\mathrm{ft}_\rho(\delta_0 \circ L)} \,/\, \rho\right)(x - y)$$

wg. (3.4-7) und (3.4-4). Nimmt man alles zusammen, so folgt

$$(6.1\text{-}3) \qquad \widetilde{\Phi}_1(x)^{\mathrm{tr}} \;=\; \mathrm{FT}_\rho^{-1}\left(\overline{\mathrm{ft}_\rho\,(\delta_0 \circ L)}\,/\,\rho\right)(x - X_1) \;=\; L^y\left(\overline{\Phi(x,y)}\right)\Big|_{y=X_1} \; .$$

Die Interpolante $s_{f,\Lambda,\widetilde{\Phi}} = \widetilde{\Phi}^{\mathrm{tr}} \cdot \alpha = L^y\,\overline{\Phi(x,y)}\Big|_{y=X_1} \cdot \alpha_1 + \Phi(x, X_2) \cdot \alpha_2$ zu einer Funktion $f \in \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$ wird aus dem linearen Gleichungssystem $\Lambda(\widetilde{\Phi}) \cdot \alpha = \Lambda(f)$ wie in (2-4) berechnet. Zur Bestimmung der näheren Gestalt von $\Lambda(\widetilde{\Phi})$ muß nur noch der obere linke Block berechnet werden: Da L translationsinvariant ist, folgt

$$(6.1\text{-}4) \qquad \begin{aligned} \widetilde{\Psi}_L(x) &\overset{(2.2\text{-}8)}{=} L(\widetilde{\Phi}_1)(x) \overset{(2.3\text{-}4)}{=} L \circ \overline{L} \circ \mathrm{Ri}_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)}(\delta_{X_1})(x) \\ &\overset{(5.3\text{-}3)}{=} L^x \circ \overline{L}^y\, \Phi(x, X_1) \overset{(2.2\text{-}6)}{=} \langle \delta_x \circ L | \delta_{X_1} \circ L \rangle_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)^*} \\ &\overset{(5.5\text{-}5)}{=} \mathrm{FT}^{-1}\left(\left|\mathrm{ft}\,(\delta_0 \circ L)\right|^2 / \rho \right)(x - X_1) \; . \end{aligned}$$

Ersetzt man noch x durch X_2 bzw. X_1, so sind mit (5.3-3), (6.1-3) und (6.1-4) die Blöcke der Interpolationsmatrix aus (2.3-10) dargestellt.

Die Fehlerabschätzung aus Beispiel 2.3-5 wird in den Kapiteln 6.2 und 7.3 wieder aufgenommen.

Beispiel 6.1-2 (Nichtinjektive Operatoren)

Am Beispiel eines partiellen Differentialoperators soll abschließend noch die Einbeziehung des Kernes eines Operators in Beispiel 6.1-1 betrachtet werden.

Gegeben sei der Operator $L = p(D)$ mit einem Polynom $p(i\,\omega)$ der Ordnung m, das an der Stelle ω_0 eine Nullstelle der Ordnung α_0 habe: $p(i\,\omega) = (i\,\omega - i\,\omega_0)^{\alpha_0} \cdot \mathit{Rest}(\omega)$ mit $\lim_{\omega \to \omega_0} \mathit{Rest}(\omega) \neq 0$. Wäre nun lediglich $1/\rho' \in \mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)$ gefordert, so dürfte $1/\rho(\omega) = |p(i\,\omega)|^{-2} / \rho'(\omega)$ an ω_0 einen Pol mit einer Ordnung bis zu $2\alpha_0$ besitzen. Da wir aber auch an Punktauswertungen in $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$ interessiert sind, fordern wir wie oben $1/\rho \in \mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)$. Dadurch ist $1/\rho'$ automatisch regulär an ω_0, und lediglich ein hinreichend starkes Anwachsen von $\rho(\omega)$ für $\|\omega\|_2 \to \infty$ bleibt zu gewährleisten.

Der Operator $L : \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho) \to \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho')$ ist nun bijektiv. Bezüglich $C^m(\mathbb{R}^d)$ besitzt L jedoch einen nichttrivialen Kern $N(L)$. Offenbar gilt $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho) \cap N(L) = \{0\}$. Sollen Funktionen aus dem Kern reproduziert werden, so geht man wie im Kapitel 2.4 vor und wählt eine geeignete Basis P von $N(L)$. Die Interpolante wird durch

$$s_{f,\Lambda,\widetilde{\Phi},P} \;=\; \overline{L}^y \Phi(\cdot, X_1) \cdot \alpha_1 + \Phi(\cdot, X_2) \cdot \alpha_2 + P^{\mathrm{tr}} \cdot \beta$$

konform angesetzt. Das erweiterte Interpolationssystem hat dann wg. $L(P) = 0$ die Gestalt

$$(6.1\text{-}5) \qquad \begin{pmatrix} L^x \overline{L}^y \Phi(X_1, X_1) & L^x \Phi(X_1, X_2) & 0 \\ \overline{L}^y \Phi(X_2, X_1) & \Phi(X_2, X_2) & P(X_2) \\ 0 & P(X_2)^* & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L(f)(X_1) \\ f(X_2) \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit dem reproduzierenden Kern Φ. Gemäß Kapitel 2.4 kann sich der Interpolationsfehler durch diese Vorgehensweise nur verringern.

6.2 Ein konkretes Beispiel zur Konvergenz

Das Problem: Mit Funktionen p und K wie in den Beispielen 5.5-7 und 5.5-8 betrachten wir das Problem

$$\begin{array}{lrclcll} (6.2\text{-}1) & L_1 u & := & p(D)\, u & = & f_1 & \text{auf} \quad \Omega_1 \\ & L_2 u & := & K * u & = & f_2 & \text{auf} \quad \Omega_2 \\ & L_3 u & := & u & = & f_3 & \text{auf} \quad \Omega_3 = \partial\Omega_1 \ . \end{array}$$

Die Fourier-Transformierten $\mathfrak{ft}\,(\delta_0 \circ L_\nu)\,(\omega)$ für $\nu = 1, 2, 3$ lauten $p(i\omega)$, $\mathrm{FT}(K)(\omega)$ und 1. Die Gebiete Ω_1 und Ω_2 aus dem $\mathbb{R}^d$ seien beschränkt und mögen die gleichmäßige Kegelbedingung erfüllen. Daher ist auch $\Omega := \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$ beschränkt und erfüllt diese Kegelbedingung. Sofern nicht anders angegeben, durchläuft ν im folgenden die Werte $1, 2, 3$.

Geeignete Räume: Sehr gut dem Problem angemessen sind die *klassischen* Sobolew-Räume $\mathsf{H}^l(\mathbb{R}^d)$ mit $l > d/2$.[3] Diese Bedingung erlaubt nach (4.1-13) die Punktauswertung der Funktionen. Wir setzen voraus, daß das Problem (6.2-1) eine eindeutige Lösung $u \in \mathsf{H}^\sigma(\Omega)$ besitzt. Laut Satz 4.2-8 läßt sie sich mittels eines stetigen Operators $\mathbf{F}^\Omega$ nach $\mathsf{H}^\sigma(\mathbb{R}^d)$ fortsetzen.[4] Wir legen uns auf eine solche Fortsetzung fest und bezeichnen sie wiederum mit u.

Die Operatoren L_ν sind translationsinvariant und daher auf ganz $\mathbb{R}^d$ definiert. Das Problem (6.2-1) wird so durch die Bedingungen

$$(6.2\text{-}2) \qquad \mathbf{E}_{\Omega_\nu} \circ L_\nu(u) \;=\; f_\nu \quad \text{für} \quad \nu = 1, 2, 3 \quad \text{mit} \quad u \in \mathsf{H}^\sigma(\mathbb{R}^d),\ \sigma > d/2$$

genauer formuliert. Dabei sei $\operatorname{supp} f_\nu \subseteq \Omega_\nu$ vorausgesetzt. Die Operatoren L_ν bilden den Raum $\mathsf{H}^\sigma(\mathbb{R}^d)$ nach $\mathsf{H}^{k_\nu}(\mathbb{R}^d)$ ab, wobei die k_ν noch bestimmt werden müssen. Gesucht ist nun eine Interpolante, die die Lösung u auf Ω möglichst gut approximiert.

Da alle L_ν stetig sein sollen, haben wir als gemeinsame Definitionsmenge der Operatoren einen Raum $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$ mit

$$\operatorname{supp} \rho \;\subseteq\; \bigcap_\nu \operatorname{supp}\, \mathfrak{ft}\,(\delta_0 \circ L_\nu) \;=\; \operatorname{supp}\, \mathrm{FT}(K)$$

zu wählen. Weil oben $\rho = \rho_\sigma$ angesetzt wurde, müssen wir uns nun auf Integralkerne K mit $\operatorname{supp} \mathrm{FT}(K) = \mathbb{R}^d$ beschränken. Laut (5.5-6), (5.1-2) und Korollar 5.1-4 bilden die Operatoren L_ν dann stetig und injektiv von $\mathsf{H}^\sigma(\mathbb{R}^d)$ nach $\mathsf{H}\left(\mathbb{R}, \rho^{(\nu)}\right)$ ab, wobei

$$(6.2\text{-}3) \qquad \rho^{(\nu)} \;:=\; \rho_\sigma \cdot \left|\mathfrak{ft}\,(\delta_0 \circ L_\nu)\right|^{-2}$$

sei. Die Exponenten k_ν können nun unter Berücksichtigung der Forderungen

$$(6.2\text{-}4) \qquad \mathsf{H}\left(\mathbb{R}^d, \rho^{(\nu)}\right) \;\overset{\mathsf{d}}{\subseteq}\; \mathsf{H}^{k_\nu}(\mathbb{R}^d)$$

und $k_\nu > d/2$ gewählt werden. Die Operatoren L_ν bleiben dabei stetig und injektiv. Da auch die Gewichte ρ_{k_ν} den Träger $\mathbb{R}^d$ besitzen, sind die Bedingungen (6.2-4) laut (4.1-6) zu $\rho_{k_\nu}/\rho^{(\nu)} \in \mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)$ bzw. $\left|\mathfrak{ft}\,(\delta_0 \circ L_\nu)\right|^2 = \mathcal{O}\left(\rho_{\sigma - k_\nu}\right)$ äquivalent. Da wir die Fourier-Transformierten kennen, und $K \in \mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)$ vorausgesetzt war,[5] lassen sich diese Forderun-

[3] Vergleiche Beispiel 4.1-14. Die Sobolew-Gewichte werden wieder mit ρ_l etc. bezeichnet.

[4] Da der Operator $\mathbf{F}^\Omega$ i. allg. nicht eindeutig bestimmt ist, kann auch nichts über das Verhalten von u außerhalb von Ω ausgesagt werden. Es reicht hier aber aus, zu einem gegebenen $\mathsf{H}^l(\Omega)$ einen beliebigen Fortsetzungsoperator auszuwählen und danach beizubehalten.

[5] Laut Satz 3.4-2 ist dann $\mathrm{FT}(K)$ gleichmäßig beschränkt und stetig.

gen durch die Wahlen $2m \le \sigma - k_1$, $0 \le \sigma - k_2$ und $0 \le \sigma - k_3$ erfüllen. Letztendlich ergeben sich die Vorschriften

$$\text{(6.2-5)} \qquad k_\nu \;>\; d/2 \quad \text{und} \quad \sigma \;\ge\; \max\{\, k_1 + 2m,\; k_2,\; k_3 \,\}$$

für die Wahl der Exponenten k_ν und σ.

Fehlerschranken: Für die übliche Interpolante $s_{u,\Lambda,\widetilde{\Phi}}$ zu $\Lambda = (\delta_{X_\nu} \circ L_\nu)_{\nu=1,2,3}$ mit den Stützstellenmengen $X_\nu \subset \Omega_\nu$ und den gemäß (2.3-1) konformen Ansatzfunktionen[6] $\widetilde{\Phi} = \left(\widetilde{\Phi}_1^{\mathrm{tr}}, \widetilde{\Phi}_2^{\mathrm{tr}}, \widetilde{\Phi}_3^{\mathrm{tr}}\right)^{\mathrm{tr}} \subset \mathsf{H}^\sigma(\mathbb{R}^d)$ streben wir Abschätzungen von $\left|\delta_x \circ L_\nu(u - s_{u,\Lambda,\widetilde{\Phi}})\right|$ auf den einzelnen Ω_ν an. Wir adaptieren dazu Beispiel 2.3-5: Mit $\Lambda := (\delta_{X_\nu} \circ L_\nu)_{\nu=1,2,3}^{\mathrm{tr}}$ und $\widetilde{\Psi}_\nu := L_\nu\left(\widetilde{\Phi}_\nu\right)$ ergibt sich für $x \in \Omega_\nu$ die Ungleichungskette[7]

$$\begin{aligned}
&\left|\delta_x \circ L_\nu(u - s_{u,\Lambda,\widetilde{\Phi}})\right| \\
&\quad \le \; P_{\mathsf{H}^\sigma(\mathbb{R}^d),\Lambda}(\delta_x \circ L_\nu) \cdot \left\|u - s_{u,\Lambda,\widetilde{\Phi}}\right\|_{\mathsf{H}^\sigma(\mathbb{R}^d)} \\
&\quad \le \; P_{\mathsf{H}^\sigma(\mathbb{R}^d),\delta_{X_\nu}\circ L_\nu}(\delta_x \circ L_\nu) \cdot \left\|u - s_{u,\delta_{X_\nu}\circ L_\nu,\widetilde{\Phi}_\nu}\right\|_{\mathsf{H}^\sigma(\mathbb{R}^d)} \\
&\quad = \; P_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho^{(\nu)}),\delta_{X_\nu}}(\delta_x) \cdot \left\|L_\nu\left(u - s_{u,\delta_{X_\nu}\circ L_\nu,\widetilde{\Phi}_\nu}\right)\right\|_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho^{(\nu)})} \\
\text{(6.2-6)} &\quad = \; P_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho^{(\nu)}),\delta_{X_\nu}}(\delta_x) \cdot \left\|L_\nu u - s_{L_\nu u,\delta_{X_\nu},\widetilde{\Psi}_\nu}\right\|_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho^{(\nu)})}
\end{aligned}$$

für alle $x \in \Omega_\nu$. Als nächstes werden wir den u-abhängigen, zweiten Faktor in Abhängigkeit der Daten f_ν abschätzen. Dazu soll von den Räumen $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho^{(\nu)})$ wieder auf klassische Sobolew-Räume $\mathsf{H}^{l_\nu}(\mathbb{R}^d)$ übergegangen werden: Wir setzen dafür

$$\text{(6.2-7)} \qquad \{L_\nu u\} \cup \widetilde{\Psi}_\nu \;\subset\; \mathsf{H}^{l_\nu}(\mathbb{R}^d) \;\overset{\mathsf{d}}{\subseteq}\; \mathsf{H}\left(\mathbb{R}^d, \rho^{(\nu)}\right)$$

mit jeweils geeigneten $l_\nu \in \mathbb{N}_0$ voraus. Die Inklusion ist genau dann erfüllt, wenn ρ_{l_ν} mindestens so stark wie $\rho^{(\nu)} = \rho_\sigma \cdot \left|\mathrm{ft}\,(\delta_0 \circ L_\nu)\right|^{-2}$ wächst.[8] Mit (6.2-4) folgt sofort $l_\nu \ge k_\nu$. Da wir oben $\operatorname{supp} f_\nu \subseteq \Omega_\nu$ vorausgesetzt haben, können wir nun ohne weiteres $f_\nu(x) := L_\nu(u)(x)$ für $x \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega_\nu$ umdefinieren. Diese Fortsetzung von f_ν nach ganz $\mathbb{R}^d$ sei wieder mit f_ν bezeichnet. Sie hat den Vorteil[9]

$$\text{(6.2-8)} \qquad L_\nu(u) \;=\; f_\nu \quad \text{auf ganz} \quad \mathbb{R}^d\,.$$

Für $\nu = 3$ erhält die Abschätzung (6.2-6) mit (6.2-8) die einfache Form

$$\text{(6.2-9)} \qquad \left|(u - s_{u,\Lambda,\widetilde{\Phi}})(x)\right| \;\le\; P_{\mathsf{H}^\sigma(\mathbb{R}^d),\delta_{X_3}}(\delta_x) \cdot \left\|f_3 - s_{f_3,\delta_{X_3},\widetilde{\Phi}_3}\right\|_{\mathsf{H}^\sigma(\mathbb{R}^d)} \qquad \text{für} \;\; x \in \Omega_3\,,$$

[6] Die Ansatzfunktionen $\widetilde{\Phi}$ müssen nicht unbedingt aus den Sobolew-Gewichten konstruiert werden. Man kann sie aus beliebigen Gewichten des Verhaltens $\Theta(\rho_\sigma)$ erzeugen, z. B. auch aus den Wendland-Funktionen — vgl. [Wen98], Theorem 3.6. und [Wen95]. Die Fehlerabschätzungen verändern sich dadurch höchstens um einen konstanten Faktor.

[7] Dabei verwenden wir von oben nach unten in den einzelnen Zeilen die Gleichungen (2.1-2); (2.1-4), (2.1-5), (2.3-5); (2.2-7), (2.2-5) bzw. (5.5-7) und (2.2-9).

[8] Der linke Teil der Voraussetzung (6.2-7) kann ggf. durch $L_\nu(\mathsf{H}^\sigma(\mathbb{R}^d)) \subseteq \mathsf{H}^{l_\nu}(\mathbb{R}^d)$ gewährleistet werden. Das ist aber ein recht große Einschränkung.

[9] Leider stimmt sie i. allg. nicht mit $\mathbf{F}^{\Omega_\nu}$ überein.

die wir nun soweit wie möglich auch für $\nu = 1, 2$ anstreben. Um dabei auf Ω_1 zu punktweisen Fehlerschranken für $u - s_{u,\Lambda,\widetilde{\Phi}}$ statt $L_1(u - s_{u,\Lambda,\widetilde{\Phi}})$ zu gelangen, unterbrechen wir das Beispiel jetzt kurz. Wir nehmen an, daß der Differentialoperator L_1 gleichmäßig elliptisch sei. Der folgende Satz setzt zwar $m = 2$ voraus, aber es gibt ähnliche und kaum aufwendigere Sätze für Operatoren höher Ordnung, vgl. [Wlo87], Theorem 12.12 und Theorem 13.1.

Satz 6.2-1 (Vergleiche [GT83], Theorem 3.7)

Das Polynom p habe die Form $p(x) = x^{\mathrm{tr}}Ax + b^{\mathrm{tr}}x + c$, wobei $A := (a_{i,j})_{i,j=1,\ldots,d}$, b und $c \leq 0$ Konstanten seien. Der Operator $p(D)$ sei *(gleichmäßig) elliptisch*[10] im Sinne von $\overline{A} = A^{\mathrm{tr}}$ und

$$\gamma \cdot x^{\mathrm{tr}}x \;\leq\; x^{\mathrm{tr}}A\,x \;\leq\; M \cdot x^{\mathrm{tr}}x \qquad \text{für jedes } x \in \mathbb{R}^d.$$

Dabei seien $M \geq \gamma > 0$ konstant. Das Gebiet Ω sei beschränkt. Wenn die Funktionen $v \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$ und $g \in C^0(\overline{\Omega})$ die Differentialgleichung $L_1 v = g$ auf Ω erfüllen, dann gilt

$$\sup_{x\in\Omega} |v(x)| \;\leq\; \sup_{x\in\partial\Omega} |v(x)| \;+\; \frac{c}{\gamma} \sup_{x\in\Omega} |g(x)| \;,$$

wobei die Konstante c nur von $\operatorname{diam}\Omega$ und $\|b\|_2 / \gamma$ abhängt.

Wir fahren nun mit dem Beispiel fort: Da aus $\sigma > m + d/2$ und $m = 2$ die Einbettung $\mathsf{H}^\sigma(\mathbb{R}^d) \subset C^2(\mathbb{R}^d)$ folgt, können wir den Satz auf $v := u - s_{u,\Lambda,\widetilde{\Phi}}$ und $g := L_1(v)$ anwenden und erhalten so

$$\text{(6.2-10)} \quad \begin{aligned} \sup_{x\in\Omega_1} \left| u(x) - s_{u,\Lambda,\widetilde{\Phi}}(x) \right| \;\leq\; & \sup_{x\in\Omega_3} \left| \delta_x(u - s_{u,\Lambda,\widetilde{\Phi}}) \right| \\ & + \frac{c}{\gamma} \sup_{x\in\Omega_1} \left| \delta_x \circ L_1(u - s_{u,\Lambda,\widetilde{\Phi}}) \right| \;. \end{aligned}$$

Jetzt sind wir in der Lage, alle nötigen Fehlerschranken zusammenzustellen: Für alle $x \in \Omega_3$ gilt (6.2-9); es gilt

$$\text{(6.2-11)} \quad \begin{aligned} \left| u(x) - s_{u,\Lambda,\widetilde{\Phi}}(x) \right| \;\leq\; & \sup_{x\in\Omega_3} P_{\mathsf{H}^\sigma(\mathbb{R}^d),\delta_{X_3}}(\delta_x) \cdot \left\| f_3 - s_{f_3,\delta_{X_3},\widetilde{\Phi}_3} \right\|_{\mathsf{H}^\sigma(\mathbb{R}^d)} \\ & + \frac{c}{\gamma} \sup_{x\in\Omega_1} P_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho^{(1)}),\delta_{X_1}}(\delta_x) \cdot \left\| f_1 - s_{f_1,\delta_{X_1},\widetilde{\Psi}_1} \right\|_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho^{(1)})} \end{aligned}$$

für alle $x \in \Omega_1$ wegen (6.2-10) und (6.2-6), und schließlich

$$\text{(6.2-12)} \quad \left| L_2(u - s_{u,\Lambda,\widetilde{\Phi}})(x) \right| \;\leq\; P_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho^{(2)}),\delta_{X_2}}(\delta_x) \cdot \left\| f_2 - s_{f_2,\delta_{X_2},\widetilde{\Psi}_2} \right\|_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho^{(2)})}$$

für alle $x \in \Omega_2$ nach (6.2-6). Zur letzten Ungleichung ist zu bemerken, daß der Operator L_2 links i. allg. nicht beseitigt werden kann, da unter schwächeren Voraussetzungen als hier die Lösung u auf Ω_2 nicht stetig zu sein braucht. Damit wäre eine punktweise Fehlerabschätzung unangebracht.

[10] Im Original läßt der Satz auch variable Koeffizienten zu. Hier ist der Zusatz „gleichmäßig" überflüssig.

Fehlerschranken in klassischen Sobolew-Räumen: An den letzten beiden Ungleichungen stört gelegentlich, daß sie $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho^{(\nu)})$-Normen enthalten. Man gelangt aber auf folgende Weise zu Normen in klassischen Sobolew-Räumen: Die f_ν-Faktoren können mittels (6.2-8) weiter durch

$$\text{(6.2-13)}\qquad \left\| L_\nu u - s_{L_\nu u,\delta_{X_\nu},\widetilde{\Psi}_\nu} \right\|_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho^{(\nu)})} \;\le\; c_\nu \cdot \left\| f_\nu - s_{f_\nu,\delta_{X_\nu},\widetilde{\Psi}_\nu} \right\|_{\mathsf{H}^{l_\nu}(\mathbb{R}^d)}$$

mit $c_\nu^2 \;:=\; \|\mathrm{Id}\|^2_{\mathsf{H}^{l_\nu}(\mathbb{R}^d)\to\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho^{(\nu)})} \;=\; \left\|\frac{\rho^{(\nu)}}{\rho_{l_\nu}}\right\|_{\mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)} \;=\; \left\|\frac{\rho_{\sigma-l_\nu}}{\mathfrak{ft}(\delta_0\circ L_\nu)^2}\right\|_{\mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)}$ abgeschätzt werden. Bei den Power-Funktionen greift eine ähnliche Überlegung, denn die Voraussetzung (6.2-4) impliziert die Anordnung $\mathsf{H}\left(\mathbb{R}^d,\rho^{(\nu)}\right)^* \overset{\mathsf{d}}{\supseteq} \mathsf{H}^{k_\nu}\left(\mathbb{R}^d\right)^*$ der Dualräume. Wegen (6.2-5) gilt $\delta_x \in \mathsf{H}^{k_\nu}(\mathbb{R}^d)^*$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$. In Satz 5.2-2 wurde gezeigt, daß die δ_x-Funktionale das Zweite Charakteristikum (4.3-14) erfüllen. Daher können wir nun Satz 4.3-10 anwenden, und erhalten $\|\delta_x\|_{\mathsf{H}\left(\mathbb{R}^d,\rho^{(\nu)}\right)^*} \;\le\; d_\nu \cdot \|\delta_x\|_{\mathsf{H}^{k_\nu}\left(\mathbb{R}^d\right)^*}$ für jedes $x\in\mathbb{R}^d$ mit $d_\nu^2 \;:=\; \left\|\frac{\rho_{k_\nu}}{\rho^{(\nu)}}\right\|_{\mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)}$. Da alle vorkommenden Operatoren linear sind, überträgt sich diese Ungleichung auch auf beliebige Linearkombinationen von δ_x-Funktionalen. So ergibt sich

$$\text{(6.2-14)}\qquad \begin{aligned} P_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho^{(\nu)}),\delta_{X_\nu}}(\delta_x) \;&=\; \inf_{\mu\in\operatorname{span}\,\delta_{X_\nu}} \|\delta_x-\mu\|_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho^{(\nu)})^*} \\ &\le\; d_\nu \cdot \inf_{\mu\in\operatorname{span}\,\delta_{X_\nu}} \|\delta_x-\mu\|_{\mathsf{H}^{k_\nu}\left(\mathbb{R}^d\right)^*} \\ &=\; d_\nu \cdot P_{\mathsf{H}^{k_\nu}\left(\mathbb{R}^d\right),\delta_{X_\nu}}(\delta_x)\;. \end{aligned}$$

Auch diese Fehlerschranken sollen noch einmal zusammengestellt werden:

Korollar 6.2-2 (Fehlerschranken in klassischen Sobolew-Räumen)

Unter den oben genannten Voraussetzungen gilt

$$\text{(6.2-15)}\qquad \begin{aligned} &\left|u(x) - s_{u,\Lambda,\widetilde{\Phi}}(x)\right| \\ &\le\; \sup_{x\in\Omega_3} P_{\mathsf{H}^\sigma(\mathbb{R}^d),\delta_{X_3}}(\delta_x)\cdot\left\| f_3 - s_{f_3,\delta_{X_3},\widetilde{\Phi}_3}\right\|_{\mathsf{H}^\sigma(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad + \frac{c}{\gamma}\, d_1\, c_1 \cdot \sup_{x\in\Omega_1} P_{\mathsf{H}^{k_1}\left(\mathbb{R}^d\right),\delta_{X_1}}(\delta_x)\cdot \left\| f_1 - s_{f_1,\delta_{X_1},\widetilde{\Psi}_1}\right\|_{\mathsf{H}^{l_1}(\mathbb{R}^d)} \end{aligned}$$

für alle $x\in\Omega_1$ und

$$\text{(6.2-16)}\qquad \left|L_2(u - s_{u,\Lambda,\widetilde{\Phi}})(x)\right| \;\le\; d_2\, c_2 \cdot P_{\mathsf{H}^{k_2}\left(\mathbb{R}^d\right),\delta_{X_2}}(\delta_x)\cdot\left\| f_2 - s_{f_2,\delta_{X_2},\widetilde{\Psi}_2}\right\|_{\mathsf{H}^{l_2}(\mathbb{R}^d)}$$

für alle $x\in\Omega_2$ sowie (6.2-9) für $x\in\Omega_3$.

Konvergenz: Um Konvergenzordnungen zu erhalten, wählen wir die Stützstellenmengen $X_\nu \subset \Omega_\nu$. Die Stützstellen sollen hinreichend regelmäßig verteilt sein, d. h. es gibt ein $h_0 > 0$ mit $h_{X,\Omega} < h_0$. Alle weiteren Größen hängen nun implizit von $h_{X,\Omega}$ ab. Wir ändern aber die gewohnte Notation nicht. Die Tupel Λ zu den jeweiligen Stützstellenmengen müssen wieder linear unabhängig sein. Dann können die Interpolanten $s_{u,\Lambda,\widetilde{\Phi}}$ und $s_{f_\nu,\delta_{X_\nu},\widetilde{\Psi}_\nu}$ bestimmt werden. Gesucht ist die Abhängigkeit der Fehler aus Korollar 6.2-2 von $h_{X,\Omega}$.

Wegen der Aufteilungssätze 2.1-2 und 2.3-4 bewirkt eine feinere Verteilung $X' \supseteq X$ von Stützstellen generell keine Vergrößerung der Power-Funktionen und damit der Fehler. Zu zeigen bleibt eine Verringerung der Fehler. Dazu greifen wir auf Theorem 5 aus [WS93] zurück. Es besagt, daß es für jedes $l \in \mathbb{N}_{>d/2}$ Konstanten $h_0, C > 0$ gibt mit

$$\text{(6.2-17)} \quad P_{\mathsf{H}^l(\mathbb{R}^d),\delta_X}(\delta_x) \;\leq\; C \cdot h_{X,\Omega}^{l-d/2}$$

für jede Stützstellenverteilung $X \subset \Omega$ mit $h_{X,\Omega} < h_0$ und jedes $x \in \Omega$. Mit Korollar 6.2-2 folgt das nächste Korollar, wobei der f_ν-Anteil nochmals nach oben abgeschätzt wird, in dem die 0-Interpolanten statt der $s_{f_\nu,\delta_{X_\nu},\widetilde{\Phi}_\nu}$ eingesetzt werden, vgl. (2.3-6).

Das folgende Korollar faßt einige der wichtigsten Ergebnisse dieser Arbeit zusammen. Darum werden die bekannten Voraussetzungen nochmals erwähnt.

Korollar 6.2-3 (Konvergenzordnungen in klassischen Sobolew-Räumen)

Auf dem Gebiet Ω sei das Problem (6.2-1) bzw. (6.2-2) mit einem Polynom p vom Grad $m = 2$ und einem Kern $K \in \mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)$ mit Träger $\mathbb{R}^d$ gegeben. Der Operator $p(D)$ sei elliptisch. Gesucht wird die konforme Interpolante $s_{u,\Lambda,\widetilde{\Phi}}$ der nach ganz $\mathbb{R}^d$ fortgesetzten Lösung $u \in \mathsf{H}^\sigma(\mathbb{R}^d)$. Die drei Operatoren L_ν bilden diesen Raum jeweils nach $\mathsf{H}^{k_\nu}(\mathbb{R}^d)$ ab, wenn die Indizes der Sobolew-Gewichte den Einschränkungen $k_\nu > d/2$ und $\sigma \geq \max\{\, k_1 + 2\,m,\; k_2,\; k_3 \,\}$ gemäß (6.2-5) genügen. Zwei weitere Sobolew-Gewichte l_1, l_2 seien so gewählt, daß $\rho_\sigma \cdot |\mathfrak{ft}\,(\delta_0 \circ L_\nu)|^{-2} = \mathcal{O}(\rho_{l_\nu})$ gilt. Die rechten Seiten des Problems (6.2-1) werden schließlich gemäß $f_\nu := L_\nu(u)$ von Ω_ν nach $\mathbb{R}^d$ fortgesetzt. Es gelte $f_\nu \in \mathsf{H}^{l_\nu}(\mathbb{R}^d)$ für $\nu = 1, 2$ und $f_3 \in \mathsf{H}^\sigma(\mathbb{R}^d)$. Dann folgen für Stützstellenmengen X_ν mit hinreichend kleiner Kenngröße h_{X_ν,Ω_ν} die Abschätzungen

$$\text{(6.2-18)} \quad \left\| u - s_{u,\Lambda,\widetilde{\Phi}} \right\|_{\mathsf{L}_\infty(\Omega_1)} \;\leq\; C \cdot h_{X_3,\Omega_3}^{\sigma-d/2} \cdot \|f_3\|_{\mathsf{H}^\sigma(\mathbb{R}^d)} + C \cdot h_{X_1,\Omega_1}^{k_1-d/2} \cdot \|f_1\|_{\mathsf{H}^{l_1}(\mathbb{R}^d)},$$

$$\text{(6.2-19)} \quad \left\| L_2(u - s_{u,\Lambda,\widetilde{\Phi}}) \right\|_{\mathsf{L}_\infty(\Omega_2)} \;\leq\; C \cdot h_{X_2,\Omega_2}^{k_2-d/2} \cdot \|f_2\|_{\mathsf{H}^{l_2}(\mathbb{R}^d)} \quad \text{sowie}$$

$$\text{(6.2-20)} \quad \left\| u - s_{u,\Lambda,\widetilde{\Phi}} \right\|_{\mathsf{L}_\infty(\Omega_3)} \;\leq\; C \cdot h_{X_3,\Omega_3}^{\sigma-d/2} \cdot \|f_3\|_{\mathsf{H}^\sigma(\mathbb{R}^d)} \;.$$

Dabei sei C eine generische Konstante.

Bemerkung 6.2-4

Die L_∞-Norm kann durch die L_2-Norm ersetzt werden, um einen zusätzlichen Faktor $h_{X_\nu,\Omega_\nu}^{d/2}$ zu erhalten; vgl. [Wen97a], Theorem 5.

Wählt man zu einer Lösung $u \in \mathsf{H}^\sigma(\mathbb{R}^d)$ eine glattere Basisfunktion Φ mit dem native space $\mathsf{H}^{\sigma+m}(\mathbb{R}^d)$, so erzielt man dadurch sogar die Konvergenzordnung $\sigma - m$.

6.3 Beispiel $\mathsf{H}^1(\mathbb{R}^d)$

Die klassischen Sobolew-Räume und ihre Gewichtsfunktionen $\rho_l(\omega) = (\,1 + \omega^{\mathrm{tr}}\omega\,)^l$ wurden in Beispiel 4.1-14 definiert und untersucht. Die folgenden weiteren Eigenschaften dieser Gewichte werden benötigt.

Lemma 6.3-1 (Eigenschaften der Mcdonald-Funktionen)

Nach Beispiel 4.1-14 liegt die inverse Fourier-Transformierte von ρ_l für jedes $l \in \mathbb{R}_{<-d/2}$ in $\mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)$. Es gilt[11]

$$(6.3\text{-}1) \qquad \mathrm{FT}^{-1}(\rho_l)(x) \;=\; (2\pi)^{-d} \cdot \frac{2^{1+l+d/2} \cdot \pi^{d/2}}{\Gamma(-l)} \cdot K_{l+d/2}(\|x\|_2) \cdot \|x\|_2^{-(l+d/2)} \;.$$

Dabei bezeichnet Γ die Gamma- und K_ν die Mcdonald-Funktion[12] zum Parameter $\nu \in \mathbb{R}$. Letztere ist durch

$$K_\nu(r) \;:=\; \int_0^\infty e^{-r \cdot \cosh s} \cdot \cosh(\nu\, s)\, ds$$

für $r > 0$ definierbar[13] und offenbar symmetrisch in ν. Sie besitzt die asymptotischen Eigenschaften[14]

$$(6.3\text{-}2) \qquad K_\nu(z) \;=\; \begin{cases} \mathcal{O}\left(\Gamma(\nu)\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}\right) & \text{für } z \to 0 \text{ und } \mathrm{Re}\,(\nu) > 0 \\ \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\; e^{-z}\;\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{z}\right)\right) & \text{für } z \to \infty. \end{cases}$$

In (6.3-1) wird der Pol von $K_{l+d/2}(\|x\|)$ an der Stelle 0 durch den Faktor $\|x\|^{-(l+d/2)}$ exakt kompensiert, so daß $\mathrm{FT}^{-1}(\rho_l)$ stetig ist. Die Pole der Gamma-Funktion an den Stellen $-\mathbb{N}_0$ spielen hier keine Rolle, da $-l > d/2$ gefordert wurde.

Wir betrachten nun den klassischen Sobolew-Raum $\mathsf{H}^1(\mathbb{R}^d) = \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho_1)$ als ein Exemplar eines Raumes mit *unstetigen* Funktionen, auf den die hier entwickelte Theorie anwendbar ist. Grundsätzlich gehen wir sogar von einem allgemeineren Gewicht ρ mit

$$(6.3\text{-}3) \qquad \operatorname{supp} \rho = \mathbb{R}^d \quad \text{und} \quad \rho/\rho_1 \in \mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)$$

aus.[15] Nach (4.1-6) gilt $\mathsf{H}^1(\mathbb{R}^d) \overset{\mathsf{d}}{\subseteq} \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$. Der Dualraum $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)^*$ ist entsprechend kleiner als $\mathsf{H}^1(\mathbb{R}^d)^*$. Das stört hier aber nicht.

Für $d > 1$ ist $1/\rho_1$ kein Element von $\mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)$ und damit $1/\rho$ ebenfalls nicht. Daher enthält $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$ laut Satz 4.1-11 i. allg. auch unstetige Funktionen. Trotz der möglichen Unstetigkeit ist es das Ziel, Punktauswertungsfunktionale „in angenäherter Form“ anzuwenden, d. h. sie zu *regularisieren*. Dazu verwenden wir eine sog. *δ-konvergente Schar*,[16] d. i. eine parametrisierte Menge $\{\, k_R\}_{R>0}$ von Funktionen, deren Faltungen mit einer stetigen Funktion f für $R \to 0$ punktweise gegen eben diese konvergieren.

---

[11] Vergleiche [Isk94], Kap. 4.4.

[12] In [AS72] sind diesen Funktionen, die auch als modifizierte Bessel-Funktion dritter Art bekannt sind, die Kap. 9.6 bis 9.8 und 10.2 gewidmet.

[13] Vergleiche [AS72], Gleichung 9.6.24.

[14] Vergleiche [AS72], Gleichungen 9.6.9 und 9.7.2. Entsprechende Aussagen finden sich auch in [BS89], Kap. 3.3.1.3.4

[15] Dadurch wird es auch unerheblich, ob tatsächlich das Gewicht ρ_1 verwendet wird oder ein anderes, das z. B. zu einer Wendland-Funktionen gehört und ebenfalls den Raum $\mathsf{H}^1(\mathbb{R}^d)$ erzeugt.

[16] Vergleiche z. B. [GS64], Sec. 2.5.

Genauer gesagt verwenden wir Funktionale der Form

$$\text{(6.3-4)} \qquad \lambda_{z,R} := \delta_z \circ L_R \quad \text{mit} \quad L_R(f) := k_R * f \quad \text{und} \quad k_R(x) := \frac{G(x/R)}{\|G(\cdot/R)\|_{\mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)}} ,$$

wobei $R > 0$ und $0 \neq G \in \mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)$ vorausgesetzt werde. Der *Generator* G der δ-Schar soll später geeignet gewählt werden. Nach Konstruktion folgt $\|k_R\|_{\mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)} = 1$ unabhängig von R. Wegen $\|G(\cdot/R)\|_{\mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)} = R^d \cdot \|G\|_{\mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)}$ vereinfacht sich die Darstellung von k_R etwas. Anschaulich betrachtet handelt es sich bei $\lambda_{z,R}(f)$ um den Mittelwert von f, der mit der Funktion $k_R(z-\cdot)$ gewichtet wird. Es gilt nämlich

$$\begin{aligned} \lambda_{z,R}(f) &= \int f(x)\, k_R(z-x)\, dx \;=\; R^{-d} \cdot \|G\|^{-1}_{\mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)} \cdot \int f(x)\, G\left(\frac{z-x}{R}\right) dx \\ &= \|G\|^{-1}_{\mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)} \cdot \int f(z-R\,y)\, G(y)\, dy \; . \end{aligned}$$

Dieser Term konvergiert[17] für $f \in \mathcal{X} := C(\mathbb{R}^d) \cap \mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)$ gegen $f(z)$; in diesem Sinne kann man von der Konvergenz $\lambda_{z,R} \xrightarrow[R\to 0]{\mathcal{X}^*} \delta_z$ sprechen.

Der Vergleich mit Beispiel 5.5-8 und Korollar 5.5-3 zeigt die Beziehung $\mathrm{ft}_\rho\,(\lambda_{z,R})\,(\omega) = \mathrm{FT}_{1/\rho}(k_R)(\omega) \cdot e^{iz^{\mathrm{tr}}\omega}$. Es gilt ferner $\mathrm{FT}_{1/\rho}(k_R)(\omega) \overset{(3.4\text{-}9)}{=} \|G\|^{-1}_{\mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)} \cdot \mathrm{FT}_{1/\rho}(G)(R\,\omega)$, zusammen also

$$\text{(6.3-5)} \qquad \mathrm{ft}_\rho\,(\lambda_{z,R})\,(\omega) \;=\; \|G\|^{-1}_{\mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)} \cdot \mathrm{FT}_{1/\rho}(G)(R\,\omega) \cdot e^{iz^{\mathrm{tr}}\omega} \; .$$

Gemäß Satz 5.5-6 und Beispiel 5.5-8 bildet der Operator L_R den Raum $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$ isometrisch nach $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho'_R)$ mit

$$\rho'_R(\omega) \;:=\; \rho(\omega) \cdot \|G\|^2_{\mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)} \cdot \left|\mathrm{FT}_{1/\rho}(G)(R\,\omega)\right|^{-2}$$

ab. Da im Bildraum Punktauswertung erlaubt sein soll, setzen wir $1/\rho'_R \in \mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)$ bzw. $\left|\mathrm{FT}_{1/\rho}(G)(R\,\omega)\right|^2 / \rho(\omega) \in \mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)$ voraus, was wiederum mit

$$\mathrm{FT}_{1/\rho}(G)(R\,\cdot) \;\in\; \mathsf{L}_2(1/\rho)$$

gleichbedeutend ist. Wir arbeiten mit einem Generator $G \in \mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)$, also dürfen wir $\mathrm{FT}_{1/\rho}(G)$ durch $\mathrm{FT}(G)$ ersetzen. Nun können wir mit Lemma 5.5-5 bequem das Skalarprodukt zweier Funktionale vom Typ $\lambda_{z,R}$ bestimmen. Für alle $x, y \in \mathbb{R}^d$ und $R > 0$ gilt demnach

$$\text{(6.3-6)} \qquad \begin{aligned} \langle \lambda_{x,R} | \lambda_{y,R} \rangle_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)^*} &= \langle \delta_x \circ L_R | \delta_y \circ L_R \rangle_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)^*} \\ &\overset{(5.5\text{-}5)}{=} \mathrm{FT}^{-1}\left(\left|\mathrm{ft}_\rho\,(\delta_0 \circ L_R)\right|^2 / \rho \right)(x-y) \\ &\overset{(6.3\text{-}5)}{=} \mathrm{FT}^{-1}\left(\|G\|^{-2}_{\mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)} \cdot \left|\mathrm{FT}(G)(R\,\omega)\right|^2 / \rho(\omega) \right)(x-y) \\ &= \mathrm{FT}^{-1}\,(1/\rho'_R)\,(x-y) \;=\; \langle \delta_x | \delta_y \rangle_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho'_R)^*} \; . \end{aligned}$$

[17] Im Sinne des Satzes von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz bildet $\|f\|_{\mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)} \cdot G$ eine geeignete Majorante; vgl. auch Satz 3.4-11, Punkt 2.

Der Generator G der δ-Schar muß zu ρ nun so gewählt werden, daß die Voraussetzung $1/\rho'_R \in \mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)$ erfüllt ist, und damit auch die gesamten letzten Schritte gerechtfertigt sind. Eine Möglichkeit dafür ist die Wahl

$$\text{(6.3-7)} \qquad \mathrm{FT}(G)^2 \;:=\; \rho_{-l} \cdot \rho$$

mit einem $l \in \mathbb{N}_{>d/2}$. An dieser Stelle muß nicht nur $l > d/2$ gewählt werden, sondern l muß auch hinreichend groß sein, um $G \in \mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)$ zu gewährleisten.[18] Da es uns nur auf den Grenzwert $R \to 0$ ankommt, können wir ab jetzt $R \leq 1$ vereinbaren. So ist dann (6.3-7) z. B. für radial monoton wachsende ρ geeignet, denn damit gilt

$$\text{(6.3-8)} \qquad 1/\rho'_R(\omega) \;=\; \rho_{-l}(R\,\omega) \cdot \rho(R\,\omega)/\rho(\omega) \;\leq\; \rho_{-l}(R\,\omega) \cdot \|\rho(R\,\cdot)/\rho\|_{\mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)}$$

für alle $R \leq 1$. Wegen $l > d/2$ ist $1/\rho'_R \in \mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)$ nun garantiert, und als ρ kommen noch immer z. B. alle ρ_k mit $0 \leq k \leq 1$ in Frage, also ibes. auch das eingangs erwähnte ρ_1. Unter diesen Umständen kann man allerdings nicht mehr erwarten, daß der klassische Grenzwert von (6.3-6) für $R \to 0$ existiert; schließlich gilt $\lim_{R\to 0} \rho_{-l}(R\,\omega) = 1$.

Greift man aber auf das durchaus zulässige[19] Gewicht $\rho(\omega) = \omega^{\mathrm{tr}}\omega$ zurück, so ergibt sich

$$\text{(6.3-9)} \qquad \begin{aligned} &\langle \lambda_{x,R} | \lambda_{y,R} \rangle_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)^*} \\ &\quad = \|G\|^{-2}_{\mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)} \cdot \mathrm{FT}^{-1}\left(R^2 \cdot \rho_{-l}(R\,\omega)\right)(x-y) \\ &\quad \overset{(3.4\text{-}9)}{=} \|G\|^{-2}_{\mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)} \cdot R^{2-d} \cdot \mathrm{FT}^{-1}(\rho_{-l})\left((x-y)/R\right) \\ &\quad \overset{(6.3\text{-}1)}{=} C_{l,d} \cdot K_{l-d/2}\left(\left\|\frac{x-y}{R}\right\|_2\right) \cdot \left\|\frac{x-y}{R}\right\|_2^{l-d/2} \cdot R^{2-d} \\ &\quad \text{mit} \quad C_{l,d} \;:=\; \frac{2^{1-l+d/2} \cdot \pi^{d/2}}{(2\pi)^d \cdot \Gamma(l) \cdot \|G\|^2_{\mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)}} \end{aligned}$$

aus (6.3-6). Asymptotisch verhält sich das Skalarprodukt für konstantes $x - y \neq 0$ gemäß Gleichung (6.3-2) wie

$$\langle \lambda_{x,R} | \lambda_{y,R} \rangle_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)^*} \;=\; \mathcal{O}\left(e^{-\,\|x-y\|\,/R}\right) \quad \text{für } R \to 0$$

und für konstantes R bei $x \to y$ wie $\mathcal{O}(1)$. Führt man in dieser Situation den Grenzprozeß $R \to 0$ tatsächlich aus, so erhält man im Limes die radiale Basisfunktion $\Phi(x,y) = \mathit{const}$ für $x = y$ und 0 sonst. Mit dieser Funktion läßt sich natürlich hervorragend einfach interpolieren, nur sind die Interpolanten praktisch nicht zu gebrauchen. Als Alternative bietet sich an, den Grenzprozeß bei einem positiven R zu beenden, oder bei einer anderen Wahl von G und ρ Basisfunktionen mit Singularitäten an den Stellen $x = y$ zu akzeptieren.

Des weiteren stellen wir u. a. durch (6.3-8) gewisse Ähnlichkeiten zum siebten Hauptkapitel fest, vgl. (7.1-5) und auch Beispiel 4.1-16.

[18] Notfalls greife man auf eine Gauß-Funktion an Stelle von ρ_{-l} zurück.
[19] Vergleiche (6.3-3).

7 Einfluß von Skalierung

Dieses Kapitel beleuchtet einige der Effekte, die eine Skalierung der Gewichtsfunktion ρ nach sich zieht. Eine solche Skalierung ist von großer praktischer Bedeutung, weil sie in der klassischen Interpolation mit radialen Basisfunktionen die einfachste Möglichkeit darstellt, die Ansatzfunktionen einer gegebenen Stützstellenverteilung anzupassen.[1] Dies gilt vor allem, wenn die Verteilung in mehreren Schritten verfeinert wird. Man unterscheidet dabei die *stationäre* Methode, bei welcher der Skalierungsparameter c proportional zur minimalen Distanz der Stützstellen gewählt wird, von der *instationären* Methode, welche c bei Verfeinerung konstant läßt. Konvergenz kann nur bei der zweiten Methode nachgewiesen werden. Die stationäre Variante ist aber auch von Nutzen, da sie den Fehler bis zu einer gewissen Schranke senkt und dabei die Bandbreite der Matrix unverändert läßt.

7.1 Der Skalierungsoperator

Zur Vereinfachung der Schreibweise definieren wir zunächst für jede beliebige komplexwertige Funktion f auf $\mathbb{R}^d$ den *Skalierungsoperator* S_c für $c > 0$ durch

(7.1-1) $$S_c : \ f \mapsto S_c f; \quad (S_c f)(x) \ := \ f(x/c) \ .$$

Der Operator ist linear und invertierbar; seine Inverse lautet $(S_c)^{-1} = S_{1/c}$. Desweiteren gilt $S_1 = \mathrm{Id}$ und $S_a \circ S_b = S_{ab} = S_b \circ S_a$. Daher bildet $(S_c)_{c \in \mathbb{R}_{>0}}$ eine (sehr einfache) Repräsentation der multiplikativen Gruppe $(\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$.

Sollte f einen kompakten Träger innerhalb der Einheitskugel $B(1)$ besitzen, so folgt sofort $\operatorname{supp} S_c(f) \subseteq B(c)$.

Satz 7.1-1 (Skalierung und gewichtete Sobolew-Räume)

Die skalierte Version ρ_c zu einer gegebenen Gewichtsfunktion ρ und einem *Skalierungsparameter* $c > 0$ sei durch

(7.1-2) $$\rho_c(\omega) \ := \ c^{-d} \, \rho(c\,\omega)$$

definiert.[2] Dann ist der Skalierungsoperator $S_c : \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho) \to \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho_c)$ eine isometrische Isomorphie, d. h. es gilt

(7.1-3) $$\|S_c f\|_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho_c)} \ = \ \|f\|_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)} \ .$$

Entsprechendes gilt für seinen dualen Operator $S_c^+ : \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho_c)^* \to \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)^*$. Der adjungierte Operator hat die Gestalt $S_c^* = S_c^{-1}$.

Die Gewichte ρ_c bzw. $1/\rho_c$ sind genau dann im wesentlichen beschränkt oder $\mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)$-Funktionen, wenn auch ρ bzw. $1/\rho$ dies sind.

[1] Beispiele für das Verhalten der Fourier-Transformierten von bestimmten radialen Basisfunktionen unter Skalierung finden sich u. a. in [Fra95], Kap. 5.2, [Sch95a], sec. 1, [Sch95b], § 6 und [Sch97a], S. 3.

[2] Diese Definition ist kompatibel mit dem Konzept der reproduzierenden Kerne des Kapitels 5.3.

Beweis

Die letzte Aussage des Satzes bzgl. $\rho_c^{\pm 1}$ bedarf keines Beweises. Laut Gleichung (3.4-9) gilt $\mathrm{FT}_1 \circ S_c = c^d \cdot S_{1/c} \circ \mathrm{FT}_1$ auf $\mathsf{L}_2(1)$. Im Falle $1/\rho \in \mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)$ gilt nach Definition also $\mathrm{FT}_{\rho_c} = \mathrm{FT}_\rho = \mathrm{FT}_1$. Im anderen erlaubten Fall $\rho \in \mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)$ setzt sich (3.4-9) von $\mathcal{D}_\rho$ bzw. $\mathcal{D}_{\rho_c}$ aus stetig fort. In beiden Fällen folgt

$$\text{(7.1-4)} \qquad \mathrm{FT}_{\rho_c} \circ S_c = c^d \cdot S_{1/c} \circ \mathrm{FT}_\rho$$

auf $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$. So ergibt sich

$$\begin{aligned}
&(2\pi)^d \, \|S_c(f)\|^2_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho_c)} \\
&= \|\mathrm{FT}_{\rho_c} \circ S_c(f)\|^2_{\mathsf{L}_2(\rho_c)} \overset{(7.1\text{-}4)}{=} \left\|c^d \cdot S_{1/c} \circ \mathrm{FT}_\rho(f)\right\|^2_{\mathsf{L}_2(\rho_c)} \\
&= \int c^{2d} \, |\mathrm{FT}_\rho(f)(c\,\omega)|^2 \, c^{-d} \, \rho(c\,\omega) \, d\omega \\
&= \int c^d \, |\mathrm{FT}_\rho(f)(\eta)|^2 \, \rho(\eta) \, c^{-d} \, d\eta \;=\; (2\pi)^d \, \|f\|^2_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)} \;.
\end{aligned}$$

Die zweite Aussage folgt nach Gleichung (2.2-4). Die Behauptung betreffend S_c^* folgt aus (7.1-4) mittels Substitution. ■

Die *identische*, stetige Einbettung $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho) \overset{\mathsf{d}}{\subseteq} \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho_c)$ besteht genau dann, wenn die Bedingungen $\operatorname{supp} \rho \subseteq \operatorname{supp} \rho_c$ und $\rho_c/\rho \in \mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)$ erfüllt sind, wie bereits im Beispiel 4.1-16 gezeigt wurde. In diesem Fall gilt laut (4.1-7)

$$\text{(7.1-5)} \qquad \|f\|_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho_c)} \;\le\; \|f\|_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)} \cdot \|\mathrm{Id}\|_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)\to\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho_c)} \;=\; \|f\|_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)} \cdot \left\|\frac{\rho_c}{\rho}\right\|^{1/2}_{\mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)} \;.$$

Kapitel 7.2 enthält einige Gedanken für den Fall, daß ein Gewicht ρ die Eigenschaft $\rho_c/\rho \in \mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)$ *nicht* „von Natur aus“ besitzt.

Lemma 7.1-2 (Skalierung und Translation)

Der Skalierungsoperator S_c ist *nicht* translationsinvariant, denn es gilt $S_c \circ \tau_z = \tau_{c\,z} \circ S_c$. Insbesondere ist die Theorie des Kapitels 5.5 nicht anwendbar.

Beweis

Für beliebige Funktionen f und für jede Translation τ_z mit $z \in \mathbb{R}^d$ gilt

$$S_c \circ \tau_z(f) \;=\; S_c^x f(x-z) \;=\; f(x/c - z) \;=\; \tau_{c\,z} \circ S_c(f) \;.$$

■

Lemma 7.1-3 (Skalierung und Punktauswertungsfunktionale)

Unter der Voraussetzung (5.2-1), $\delta_x \in \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)^*$, gilt $S_c^+(\delta_x) = \delta_{x/c}$.

Beweis

Für beliebige $f \in \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$ gilt $S_c^+(\delta_x)(f) = \delta_x \circ S_c(f) = \delta_x^y(\, f(y/c)\,) = f(x/c)$. ■

Bemerkung 7.1-4 (Skalierung und Punktauswertung)

Unter der Voraussetzung (5.2-1) an $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)^*$ ist der reproduzierende Kern des Raumes $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)$ laut Gleichung (5.3-3) durch $\Phi(x,y) = \mathrm{FT}^{-1}\big(1/\rho\big)(x-y)$ gegeben. Gilt die Voraussetzung (5.2-1) für $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)^*$, so gilt sie wg. Satz 7.1-1 auch für $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho_c)^*$. Der entsprechende reproduzierende Kern von $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho_c)$ hat die Gestalt

$$\text{(7.1-6)}\qquad \begin{aligned} \Phi_c(x,y) &= \mathrm{FT}^{-1}\big(1/\rho_c\big)(x-y) \overset{(7.1\text{-}2)}{=} c^d\,\mathrm{FT}^{-1}\big(1/\rho(c\,\omega)\big)(x-y) \\ &\overset{(3.4\text{-}10)}{=} \Phi(x/c,y/c)\ . \end{aligned}$$

7.2 Konstruktion skalierungsinvarianter Sobolew-Räume

Dieses Kapitel untersucht einen Ansatz, zu einem gegebenen Gewicht ρ einen skalierungsinvarianten Sobolew-Raum zu konstruieren, d. h. einen Raum mit der Eigenschaft $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho_c) \overset{\text{set}}{=} \mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)$ für alle $c>0$. Die Idee besteht darin, den Raum $\bigcap_{c>0}\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho_c)$ mit dem Skalarprodukt

$$\text{(7.2-1)}\qquad \langle f|g\rangle_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho_*)} := \int_0^\infty w(c)\,\langle f|g\rangle_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho_c)}\,dc$$

zu versehen. Dabei sei $w:\mathbb{R}_{>0}\to\mathbb{R}_{>0}$ ein geeignet zu wählendes Gewicht, d. h. ein Gewicht, für welches das Integral existiert.

Wir gehen im weiteren von einem Gewicht ρ mit $\operatorname{supp}\rho = \mathbb{R}^d$ und $1/\rho \in \mathsf{L}_\infty(\mathbb{R}^d)$ aus. Die in der Praxis wichtigsten Gewichte erfüllen dies. Auf Grund der letzten Bedingung gilt $\mathrm{FT}_{\rho_c} = \mathrm{FT}$ für alle $c>0$.[3] Setzt man nun in (7.2-1) die Gleichungen (4.1-3) und (7.1-2) ein, so ergibt sich

$$\begin{aligned} &\langle f|g\rangle_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho_*)} \\ &= \int_0^\infty w(c)\,(2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{FT}(f)(\omega)\,\overline{\mathrm{FT}(g)(\omega)}\,\rho_c(\omega)\,d\omega\,dc \\ &= (2\pi)^{-d}\int_0^\infty w(c)\int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{FT}(f)(\omega)\,\overline{\mathrm{FT}(g)(\omega)}\,c^{-d}\,\rho(c\,\omega)\,d\omega\,dc \\ &= (2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d}\int_0^\infty c^{-d}\,w(c)\,\rho(c\,\omega)\,dc\;\mathrm{FT}(f)(\omega)\,\overline{\mathrm{FT}(g)(\omega)}\,d\omega \qquad \text{(Fubini)} \\ &= (2\pi)^{-d}\int_{\mathbb{R}^d}\mathrm{FT}(f)(\omega)\,\overline{\mathrm{FT}(g)(\omega)}\rho_*(\omega)\,d\omega\ , \end{aligned}$$

wobei

$$\text{(7.2-2)}\qquad \rho_*(\omega) := \int_0^\infty c^{-d}\,w(c)\,\rho(c\,\omega)\,dc \quad \text{für} \quad \omega\in\mathbb{R}^d$$

definiert sei. Wir haben also den gewichteten Sobolew-Raum $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho_*)$ konstruiert. Soll das Gewicht ρ_* vorgegeben werden, so ist diese Integralgleichung nach w zu lösen. Erfüllt ρ_* dieselben, oben genannten Voraussetzungen wie ρ, ergibt sich

$$\text{(7.2-3)}\qquad \int_0^\infty c^{-d}\,w(c)\,\frac{\rho(c\,\omega)}{\rho_*(\omega)}\,dc = 1 \quad \text{für} \quad \omega\in\mathbb{R}^d\ .$$

[3] Vergleiche Definition 4.1-3.

Unter der Voraussetzung, daß ρ und ρ_* stetig differenzierbar und radialsymmetrisch sind, und daß das folgende Integral in $s \in \mathbb{R}_{>0}$ lokal gleichmäßig konvergiert, folgt daraus

$$\int_0^\infty c^{-d}\, w(c) \cdot \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\widetilde{\rho}(c\,s)}{\widetilde{\rho}_*(s)}\right) dc \;=\; 0 \quad \text{für} \quad s \geq 0$$

mit $\rho(\omega) = \widetilde{\rho}(s)$, $\rho_*(\omega) = \widetilde{\rho}_*(s)$ und $s = \|\omega\|$. Da sowohl c^{-d} als auch $w(c)$ nirgends verschwinden, muß

$$0 \;=\; \frac{\partial}{\partial s}\frac{\widetilde{\rho}(c\,s)}{\widetilde{\rho}_*(s)} \;=\; \frac{c\,\widetilde{\rho}'(c\,s)\,\widetilde{\rho}_*(s) - \widetilde{\rho}(c\,s)\,\widetilde{\rho}_*'(s)}{\widetilde{\rho}_*(s)^2}$$

für $s \geq 0$ und fast alle $c > 0$ gelten. Da wiederum $\widetilde{\rho}_*$ fast nirgends verschwindet, folgt $c\,\frac{\widetilde{\rho}'(c\,s)}{\widetilde{\rho}(c\,s)} = \frac{\widetilde{\rho}_*'(s)}{\widetilde{\rho}_*(s)}$ und daraus mittels (logarithmischer) Integration nach s

(7.2-4) $\quad \ln\widetilde{\rho}(c\,s) \;=\; \ln\widetilde{\rho}_*(s) + \ln\widetilde{\rho}(c) - \ln\widetilde{\rho}_*(1) \quad \text{bzw.} \quad \widetilde{\rho}(c\,s) \;=\; \widetilde{\rho}_*(s)\cdot Q(c)$

mit dem Faktor $Q(c) := \widetilde{\rho}(c)/\widetilde{\rho}_*(1)$. Setzt man $c = 1$ ein, so erkennt man, daß sich die Gewichtsfunktionen ρ und ρ_* unter durchaus realistischen Annahmen lediglich um eine Konstante unterscheiden. Daher stehen die Räume $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho_{*,c})$ und $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho_*)$ zueinander im selben Verhältnis wie die Räume $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho_c)$ und $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$.

7.3 Skalierung und Fehlerabschätzung

Wir wollen den Einfluß untersuchen, den eine Skalierung der Gewichtsfunktion ρ auf den Interpolationsfehler und die Konvergenzordnung hat.[4] Dabei wird sich herausstellen, daß ein translationsinvarianter Operator $L \neq \mathrm{Id}$ die Konvergenz der Hermite-Birkhoff-Interpolation beschleunigen oder abschwächen kann, und daß sogar eine Konvergenz mit $c \to \infty$ bei ansonsten gleichen Daten auftreten kann.

Prinzipiell existieren zwei Möglichkeiten, eine Skalierung mit einem beliebigen Operator $L : \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho) \to \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho')$ zu verbinden:

(7.3-1) $\quad \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho) \xrightarrow{S_c} \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho_c) \xrightarrow{L} \mathsf{H}\left(\mathbb{R}^d, (\rho_c)'\right)$

(7.3-2) $\quad \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho) \xrightarrow{L} \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho') \xrightarrow{S_c} \mathsf{H}\left(\mathbb{R}^d, (\rho')_c\right)$.

Wir werden uns auf die erste Variante konzentrieren.

Da Punktauswertungsfunktionale betrachtet werden sollen, gehen wir von der üblichen Voraussetzung $1/\rho$, $1/\rho'$, $1/(\rho_c)' \in \mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)$ aus. Entsprechend Satz 7.1-1 gilt dann auch $1/\rho_c$, $1/(\rho')_c \in \mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)$. Dabei seien $\rho_c(\omega) = c^{-d}\,\rho(c\,\omega)$ und $\rho' = \rho \cdot |\mathrm{ft}_\rho\,(\delta_0 \circ L)|^{-2}$ sowie

(7.3-3) $\quad (\rho_c)'(\omega) \;:=\; \rho_c(\omega)\cdot|\mathrm{ft}_\rho\,(\delta_0\circ L)\,(\omega)|^{-2} \;=\; c^{-d}\,\rho(c\,\omega)\cdot|\mathrm{ft}_\rho\,(\delta_0\circ L)\,(\omega)|^{-2}$,

(7.3-4) $\quad (\rho')_c(\omega) \;:=\; c^{-d}\,\rho'(c\,\omega) \;=\; c^{-d}\,\rho(c\,\omega)\cdot|\mathrm{ft}_\rho\,(\delta_0\circ L)\,(c\,\omega)|^{-2}$.

[4]Erste Ideen in dieser Richtung tauchten in [Sch95b], § 6 auf.

Da S_c nicht translationsinvariant ist, sind es i. allg. auch $L \circ S_c$ und $S_c \circ L$ nicht. Andererseits ist L nicht nur auf $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$, sondern auch auf $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho_c)$ translationsinvariant, da Translationsinvarianz gänzlich unabhängig von den zu Grunde liegenden Räumen definiert ist. Dies ist zu beachten, wenn die Resultate des Kapitels 5.5 angewandt werden.

Ist $\mathrm{ft}_\rho(\delta_0 \circ L) = \mathrm{ft}_1(\delta_0 \circ L)$ unabhängig von ρ, so ist L laut Satz 5.5-6 in (7.3-2) eine Isometrie zwischen $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho)$ und $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho')$. Aus demselben Grund ist L aber auch in Gleichung (7.3-1) auf $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho_c)$ definiert und eine Isometrie nach $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, (\rho_c)')$, denn es gilt

$$\begin{aligned}
&(2\pi)^d \, \|Lf\|^2_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,(\rho_c)')} \\
&\quad= \int \left|\mathrm{FT}_{(\rho_c)'} \circ L(f)(\eta)\right|^2 \cdot (\rho_c)'(\eta)\, d\eta \\
&\quad\overset{(5.5\text{-}6)}{=} \int \left|\mathrm{FT}_{\rho_c}(f)(\eta) \cdot \mathrm{ft}_1(\delta_0 \circ L)(\eta)\right|^2 \cdot \rho_c(\eta) \cdot \left|\mathrm{ft}_1(\delta_0 \circ L)(\eta)\right|^{-2} d\eta \\
&\quad= \int \left|\mathrm{FT}_{\rho_c}(f)(\eta)\right|^2 \cdot \rho_c(\eta)\, d\eta \;=\; (2\pi)^d \, \|f\|^2_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho_c)}
\end{aligned}$$

für alle $f \in \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho_c)$. Da das letzte Integral existiert, existiert auch das erste der Gleichungskette.

Auf Grund der Voraussetzung $1/(\rho_c)' \in \mathsf{L}_1(\mathbb{R}^d)$ liegt jedes δ_x in $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, (\rho_c)')^*$, und da L^+ eine Isometrie ist, gilt auch $\delta_x \circ L \in \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho_c)^*$.

Wir bauen im weiteren auf Beispiel 6.1-1 auf, verwenden hier aber nur die Anteile, die den Operator L enthalten. Daher können wir zur Vereinfachung der Schreibweise den Index „1" weglassen. Die Interpolante $s_{f,\delta_X \circ L, \widetilde{\Phi}_c}$ wird nach dem konformen Ansatz auf $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho_c)$ gebildet, d. h. es gilt

$$\widetilde{\Phi}_c(x) \;:=\; \mathrm{Ri}_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho_c)}(\delta_X \circ L)(x) \;\overset{(6.1\text{-}3)}{=}\; L^y\left(\overline{\Phi_c(x,y)}\right)\Big|_{y=X} .$$

Dabei ist Φ_c der reproduzierende Kern von $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho_c)$, also

$$\begin{aligned}
\Phi_c(x,y) \;&\overset{(5.3\text{-}3)}{=}\; \mathrm{FT}_\rho^{-1}(1/\rho_c)(x-y) \;\overset{(7.1\text{-}2)}{=}\; \mathrm{FT}_\rho^{-1}(1/\rho)\left(\frac{x-y}{c}\right) \\
&=\; \Phi(x/c, y/c) .
\end{aligned}$$

Der Interpolationsfehler von $s_{f,\delta_X \circ L, \widetilde{\Phi}_c}$ an der Stelle x zerfällt gemäß (2.1-2) und (2.3-6) auf $\mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho_c)$ in

$$\left|\delta_x \circ L\left(f - s_{f,\delta_X \circ L, \widetilde{\Phi}_c}\right)\right| \;\le\; P_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho_c),\delta_X \circ L}(\delta_x \circ L) \cdot \|f\|_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho_c)} .$$

Der zweite Faktor ist dabei mittels (7.1-5) kontrollierbar. Insbesondere hängt er nicht mehr von L ab. Der erste Faktor wird nun die versprochene Konvergenz in c liefern. Dazu gehen wir zunächst davon aus, daß der Operator das Verhalten

$$(7.3\text{-}5) \qquad L \circ S_c \;=\; c^{-m} \cdot S_c \circ L$$

aufweist, wie man es z. B. von einem Differentialoperator D^α mit $|\alpha| = m$ kennt. Nach Gleichung (2.1-3) und wg. $\delta_x \circ L,\ \delta_X \circ L \subset \mathsf{H}(\mathbb{R}^d, \rho_c)^*$ gilt

$$P_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho_c),\delta_X \circ L}(\delta_x \circ L) \;=\; \inf_{\mu \in \operatorname{span}(\delta_X)} \|\delta_x \circ L - \mu \circ L\|_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho_c)^*} \,,$$

wobei die Norm sich mittels der Dreiecksungleichung durch eine Linearkombination von $\#X + 1$ Termen der Form $\|\delta_x \circ L\|_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho_c)^*}$ beschränken läßt. Die Power-Funktion muß also die gleiche Asymptotik in c besitzen wie diese Terme. Es gilt nun

$$\begin{aligned}
\|\delta_x \circ L\|_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho_c)^*} &\overset{(5.5\text{-}4)}{=} \|\delta_0 \circ L\|_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho_c)^*} \\
&= \|\delta_0 \circ L \circ S_c\|_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)^*} && \text{lt. Satz 7.1-1} \\
&\overset{(7.3\text{-}5)}{=} \|\delta_0 \circ c^{-m} \cdot S_c \circ L\|_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)^*} \\
&= c^{-m} \cdot \|\delta_0 \circ L\|_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho)^*} && \text{lt. Lemma 7.1-3} \\
&\overset{(5.5\text{-}7)}{=} c^{-m} \cdot \|\delta_0\|_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho')^*} \,.
\end{aligned} \tag{7.3-6}$$

Der Interpolationsfehler verschwindet also für $c \to \infty$ von der Ordnung m.

Einen allgemeineren Operator L kann man oft durch $L = \sum_{m=m_1}^{m_2} L_{(m)}$ in Summanden zerlegen, die jeweils das Verhalten (7.3-5) aufweisen: $L_{(m)} \circ S_c \;=\; c^{-m} \cdot S_c \circ L_{(m)}$. Eine entsprechende Überlegung liefert in diesem Fall die Asymptotik

$$P_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho_c),\delta_X \circ L}(\delta_x \circ L) \;=\; \begin{cases} \mathcal{O}(c^{-m_2}) & \text{für } c \to 0 \\ \mathcal{O}(c^{-m_1}) & \text{für } c \to \infty \end{cases} \,. \tag{7.3-7}$$

Korollar 7.3-1

Für den Differentialoperator $L = \sum_{|\alpha|=m_1}^{m_2} a_\alpha\, D^\alpha$ gilt die Konvergenz

$$P_{\mathsf{H}(\mathbb{R}^d,\rho_c),\delta_X \circ L}(\delta_x \circ L) \;=\; \mathcal{O}(c^{-m_1}) \quad \text{für } c \to \infty \,.$$

Aber nicht nur Differentialoperatoren, auch Integraloperatoren mit Faltungskern wie im Beispiel 5.5-8 können ein solches Verhalten aufweisen: Gegeben sei z. B. ein Operator $L(f) = K * f$ mit *homogenem* Kern K, d. h. es gibt ein $\vartheta \in \mathbb{R}$ mit

$$K(c\,x) \;=\; c^\vartheta \cdot K(x) \quad \text{für jedes } c > 0 \text{ und } x \in \mathbb{R}^d_{\neq 0} \,.$$

Dann folgt (7.3-5) mit $m = -(d+\vartheta)$ aus der Gleichungskette

$$\begin{aligned}
L \circ S_c(f)(x) &= \int f(y/c) \cdot K(x-y)\, dy \;=\; c^d \cdot \int f(z) \cdot K(x - c\,z)\, dz \\
&= c^d \cdot \int f(z) \cdot S_{1/c}(K)(x/c - z)\, dz \\
&= c^d \cdot S_c\left(c^\vartheta \cdot K * f\right)(x) \;=\; c^{d+\vartheta} \cdot S_c \circ L(f)(x) \,.
\end{aligned}$$

In diesem Fall ist die Vergrößerung von c nur für $\vartheta < -d$ sinnvoll. Die Parseval-Gleichung erlaubt ein ähnliches Vorgehen für Kerne mit einer Fourier-Transformierten vom Homogenitätsgrad ϑ. Es ergibt sich dann der Vorfaktor $c^{-\vartheta}$.

Schwächer abfallende Basisfunktionen ziehen zwar eine schlechter konditionierte Matrix nach sich. Trotzdem lohnen sich Überlegungen in dieser Richtung, weil auch zusätzliche Stützstellen die Kondition beeinflussen und darüber hinaus die Matrix vergrößern.

Symbolverzeichnis

Index

Literatur

[AS72] Milton Abramowitz and Irene A. Stegun (eds.). *Handbook of Mathematical Functions, with Formulas, Graphs and Mathematical Tables.* Dover Books on Elementary and Intermediate Mathematics, Dover, 9th edition, 1972.

[Bau92] Heinz Bauer. *Maß- und Integrationstheorie.* Walter de Gruyter, Berlin, New York, 2. Auflage, 1992.

[Bra86] Dietrich Braess. *Nonlinear Approximation Theory*, volume 7 of *Springer Series in Computational Mathematics.* Springer, Berlin, 1986.

[BS88] Il'ja Nikolajewitsch Bronstein und Konstantin Adolfowitsch Semendjajew. *Taschenbuch der Mathematik. Ergänzende Kapitel.* Harri Deutsch, 5. Auflage, 1988.

[BS89] Il'ja Nikolajewitsch Bronstein und Konstantin Adolfowitsch Semendjajew. *Taschenbuch der Mathematik.* Harri Deutsch, B. G. Teubner - Leipzig, 24. Auflage, 1989.

[Cra82] Bruce Desmond Craven. *Lebesgue Measure & Integral.* Pitman Publishing Inc., Boston, London, Melbourne, Toronto, 1982.

[DOM92] Mark R. Dubal, Samuel R. Oliveira, and Richard A. Matzner. Solution of elliptic equations in numerical relativity using multiquadrics. In Ray d'Inverno (ed.), *Approaches to Numerical Relativity*, pages 265–280, Faculty of Mathematical Studies, Southampton University, Cambridge University Press, Cambridge, 1992.

[Fas95] Gregory E. Fasshauer. Hermite Interpolation with Radial Basis Functions on Spheres. 1995. Preprint: `http://www.math.nwu.edu/~fass/hermite.dvi`.

[Fas97] Gregory E. Fasshauer. Solving partial differential equations by collocation with radial basis functions. In Alain LeMéhauté, Christophe Rabut, and Larry L. Schumaker, (eds.), *Surface Fitting and Multiresolution Methods*, pages 131–138, Vanderbilt University Press, Nashville, Tennessee, 1997. Preprint: `http://www.math.nwu.edu/~fass/collocate.ps`.

[For84] Otto Forster. *Analysis III.* Vieweg, 3. Auflage, 1984.

[Fra95] Carsten Franke. *Interpolation mit symmetrischen Basisfunktionen unter Berücksichtigung inhomogener Stützstellenverteilungen.* Institut für Numerische und Angewandte Mathematik, Göttingen, 1995. Diplomarbeit, `http://www.num.math.uni-goettingen.de/franke/pub/diplom/diplom.dvi.Z`.

[FS98a] Carsten Franke and Robert Schaback. Solving Partial Differential Equations by Collocation using Radial Basis Functions. *Applied Mathematics and Computation*, 93(1):73–82, June 1998. Preprint: `http://www.num.math.uni-goettingen.de/schaback/research/papers/SPDEbCuRBF.ps`.

[FS98b] Carsten Franke and Robert Schaback. Convergence Orders of Meshless Collocation Methods using Radial Basis Functions. *Advances in Computational Mathematics*, 8(4):381–399, June 1998. Preprint: `http://www.num.math.uni-goettingen.de/franke/pub/papers/collrbf.dvi`.

[Gol96] Michael A. Golberg. Recent developments in the numerical evaluation of particular solutions in the boundary element method. *Applied Mathematics and Computation*, 75:91–101, 1996.

[GS64] Israel Moiseevich Gel'fand and Georgij Evgenevich Shilov. *Generalized Functions, volume 1: Properties and Operations.* Academic Press, New York and London, 1964.

[GT83] David Gilbarg and Neil S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, volume 224 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften.* Springer, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 2nd edition, 1983.

[Gut94] Tim Gutzmer. *Interpolation durch positiv definite Funktionen auf kompakten Gruppen.* Institut für Numerische und Angewandte Mathematik, Göttingen, 1994. Diplomarbeit.

[Har90] Rolland L. Hardy. Theory and Applications of the Multiquadric-Biharmonic Method: 20 Years of Discovery, 1968–1988. *Computers and Mathematics with Applications*, 19(8/9):163–208, 1990.

[Heu92] Harro Heuser. *Funktionalanalysis.* Teubner, 3. Auflage, 1992.

[Isk94] Armin Iske. *Charakterisierung bedingt positiv definiter Funktionen für multivariate Interpolationsmethoden mit radialen Basisfunktionen.* Dissertation, Institut für Numerische und Angewandte Mathematik, Göttingen, 1994. `ftp://ftp.gwdg.de/pub/numerik/iske/IskeDiss.ps.Z`.

[Isk95] Armin Iske. Reconstruction of Functions from Generalized Hermite-Birkhoff Data. In Charles K. Chui and Larry L. Schumaker (eds.), *Approximation Theory VIII*, volume 1: Approximation and Interpolation, pages 257–264. World Scientific, Singapore, 1995.

[JG86] P. K. Jain and V. P. Gupta. *Lebesgue Measure and Integration.* Wiley Eastern Limited, New Delhi etc., 1986.

[Kan90] Ed J. Kansa. Multiquadrics — a Scattered Data Approximation Scheme with Applications to Computational Fluid-Dynamics — II: Solutions to Parabolic, Hyperbolic and Elliptic Partial Differential Equations. *Computers and Mathematics with Applications*, 19(8/9):147–161, 1990.

[Kuf80] Alois Kufner. *Weighted Sobolev Spaces*, volume 31 of *Teubner-Texte zur Mathematik.* Teubner, Leipzig, 1980.

[Maz85] Vladimir G. Maz'ja. *Sobolev Spaces.* Springer Series in Soviet Mathematics. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1985.

[MV92] Reinhold Meise und Dietmar Vogt. *Einführung in die Funktionalanalysis*, Band 62 von *Aufbaukurs Mathematik.* Vieweg, Braunschweig, Wiesbaden, 1992.

[Nar95] Francis J. Narcowich. Generalized Hermite Interpolation and Positive Definite Kernels on a Riemannian Manifold. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 190(1):165–193, 1995.

[NSW97] Francis J. Narcowich, Robert Schaback, and Joseph D. Ward. Multilevel Interpolation and Approximation. *Applied and Computational Harmonic Analysis* (to appear), June 1997. Preprint: `http://www.num.math.uni-goettingen.de/schaback/research/papers/MIaA.ps`.

[Sch95a] Robert Schaback. Error estimates and condition numbers for radial basis function interpolation. *Advances in Computational Mathematics*, 3:251–264, April 1995. Preprint: `ftp://ftp.gwdg.de/pub/numerik/schaback/er1.dvi.Z` & `er1-tabelle.dvi.Z`.

[Sch95b] Robert Schaback. Multivariate Interpolation and Approximation by Translates of a Basis Function. In Charles K. Chui and Larry L. Schumaker (eds.), *Approximation Theory VIII*, volume 1: Approximation and Interpolation, pages 491–514. World Scientific, Singapore, 1995. Preprint: `ftp://ftp.gwdg.de/pub/numerik/schaback/texas1.dvi.Z`.

[Sch96] Robert Schaback. Approximation by Radial Basis Functions with Finitely Many Centers. *Constructive Approximation. An International Journal for Approximations and Expansions*, 12:331–340, 1996. Preprint: `ftp://ftp.gwdg.de/pub/numerik/schaback/ap1.dvi.Z`.

[Sch97a] Robert Schaback. On the Efficiency of Interpolation by Radial Basis Functions. In Alain LeMéhauté, Christophe Rabut, and Larry L. Schumaker (eds.), *Surface Fitting and Multiresolution Methods*, pages 309–328, Vanderbilt University Press, Nashville, Tennessee, 1997. Preprint: `ftp://ftp.gwdg.de/pub/numerik/schaback/efficiency1.dvi.Z`.

[Sch97b] Robert Schaback. *Reconstruction of Multivariate Functions from Scattered Data*. January 1997. Script: `http://www.num.math.uni-goettingen.de/schaback/research/papers/rbfbook.ps`.

[SW71] Elias M. Stein and Guido Weiss. *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*. Princeton University Press, 1971.

[Tri83] Hans Triebel. *Theory of Function Spaces*, volume 78 of *Monographs in Mathematics*. Birkhäuser, Basel, Boston, Stuttgart, 1983.

[Wei94] Marko Weinrich. *Charakterisierung von Funktionenräumen bei der Interpolation mit radialen Basisfunktionen*. Dissertation, Institut für Numerische und Angewandte Mathematik, Göttingen, 1994.

[Wen95] Holger Wendland. Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial functions of minimal degree. *Advances in Computational Mathematics*, 4:389–396, 1995.

[Wen96] Holger Wendland. *Konstruktion und Untersuchung radialer Basisfunktionen mit kompaktem Träger*. Dissertation, Institut für Numerische und Angewandte Mathematik, Göttingen, 1996.

[Wen97a] Holger Wendland. Sobolev-type error estimates for interpolation by radial basis functions. In Alain LeMéhauté, Christophe Rabut, and Larry L. Schumaker (eds.), *Surface Fitting and Multiresolution Methods*, pages 337–344, Vanderbilt University Press, Nashville, Tennessee, 1997. Preprint: `http://www.num.math.uni-goettingen.de/wendland/sobtyp.ps.gz`.

[Wen97b] Holger Wendland. Meshless Galerkin methods using radial basis functions. *Mathematics of Computation* (to appear in 1999), March 1997. Preprint: `http://www.num.math.uni-goettingen.de/wendland/meshless.ps.gz`.

[Wen98] Holger Wendland. Error estimates for interpolation by compactly supported radial basis functions of minimal degree. *Journal of Approximation Theory*, 93(2):258–272, May 1998. Preprint: `http://www.num.math.uni-goettingen.de/wendland/error.ps.gz`.

[Wlo87] Joseph T. Wloka. *Partial differential equations.* Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[WS93] Zongmin Wu and Robert Schaback. Local error estimates for radial basis function interpolation of scattered data. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 13:13–27, 1993. Preprint: `ftp://ftp.gwdg.de/pub/numerik/schaback/wu1.dvi.Z`.

[Wu92] Zongmin Wu. Hermite-Birkhoff Interpolation of Scattered Data by Radial Basis Functions. *Approximation Theory and its Applications*, 8(2):1–10, June 1992.

[Yos80] Kôsaku Yosida. *Functional Analysis*, volume 123 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften.* Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 6th edition, 1980.

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name	Carsten Franke
Geburtstag	26. März 1969
Geburtsort	Eschwege
Eltern	Peter Franke, Forstoberinspektor i. R. Hannelore Franke, geb. Bodes, Schneiderin
Zur Zeit wohnhaft	Helweg 2a, 37081 Göttingen

Schulausbildung im Werra-Meißner-Kreis, Hessen

August 1975 – Juli 1979	Mittelpunktschule Wehretal, Grundschule
August 1979 – Juli 1985	Friedrich-Wilhelm-Schule, Gymnasium in Eschwege
August 1985 – Juni 1988	Oberstufengymnasium Eschwege
14. Juni 1988	Abitur

Wehrdienst

Oktober 1988 – September 1989	Grundwehrdienst bei der Bundeswehr

Studium an der Georg-August-Universität zu Göttingen

September 1988	Mathematisches Propädeutikum
Oktober 1989 – März 1996	Diplomstudiengang Mathematik mit Nebenfach Experimentalphysik
8. Juli 1991	Vordiplom Mathematik
2. November 1995	Diplom Mathematik
April 1996 – März 1998	Diplomstudiengang Physik
seit April 1998	Promotionsstudiengang Mathematik
7. Mai 1998	Promotion Mathematik

Arbeitsverhältnisse an der Georg-August-Universität zu Göttingen

Oktober 1993 – März 1995	Wissenschaftliche Hilfskraft am Mathematischen Institut
Februar 1996 – Mai 1998	Wissenschaftlicher Angestellter am Institut für Numerische und Angewandte Mathematik

Stand: 14. September 1998.
GeTEXt am 14. September 1998 um 11:54.