

**Multilevel-Fehlerabschätzung bei der  
Interpolation mit radialen  
Basisfunktionen**

**Dissertation**

zur Erlangung des Doktorgrades  
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fachbereiche  
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von  
**SANDRO HARTMANN**  
aus Leinefelde

Göttingen 1998

D7

Referent: Prof. Dr. R. SCHABACK

Korreferent: Prof. Dr. J. WERNER

Tag der mündlichen Prüfung: 5. November 1998

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>6</b>
2.1	Grundlegendes über radiale Basisfunktionen . . . . .	6
2.2	Bedingt positiv definite Funktionen . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Interpolation mit radialen Basisfunktionen</b>	<b>13</b>
3.1	Vorstellung der Interpolationsmethode . . . . .	13
3.2	Der Native Space $\mathcal{F}_\Phi$ . . . . .	17
3.3	Die Powerfunktion . . . . .	21
3.4	Fehlerabschätzung des Ein-Schritt-Verfahrens . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Multilevel-Interpolationsmethode</b>	<b>28</b>
4.1	Vorstellung der Multilevel-Methode . . . . .	28
4.2	Die kardinale Funktion $\mathcal{X}_{1,a}$ . . . . .	30
4.3	Multilevel-Methode mit kardinaler Funktion . . . . .	40
<b>5</b>	<b>Fehlerabschätzung der Multilevel-Methode</b>	<b>43</b>
5.1	Multilevel-Fehlerabschätzung im Native Space . . . . .	43
5.2	Beispiele für die Konstanten $K_{\Phi_{\delta_0}}$ , $L_{\Phi_{\delta_0}}$ und $C_{\Phi_{\delta_0}}$ . . . . .	56
5.2.1	Die Konstanten $K_{\Phi_{\delta_0}}$ , $L_{\Phi_{\delta_0}}$ und $C_{\Phi_{\delta_0}}$ bei Gaussians . . . . .	56
5.2.2	Die Konstanten $L_{\Phi_{\delta_0}}$ , $K_{\Phi_{\delta_0}}$ , $C_{\Phi_{\delta_0}}$ bei $\Phi(r) = (r^2 + c^2)^{1/2}$ . . . . .	60
5.2.3	Die Konstanten $L_{\Phi_{\delta_0}}$ , $K_{\Phi_{\delta_0}}$ , $C_{\Phi_{\delta_0}}$ bei radialen Basisfunktionen mit $\hat{\Phi}(\omega) \sim \ \omega\ ^{-d-\gamma}$ . . . . .	62
5.2.4	Die Konstanten $L_{\Phi_{\delta_0}}$ , $K_{\Phi_{\delta_0}}$ , $C_{\Phi_{\delta_0}}$ bei den Wendland-Funktionen . . . . .	64
5.3	Multilevel-Fehlerabschätzung in der $L_\infty$ -Norm . . . . .	66
	<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>76</b>
	<b>Literatur</b>	<b>77</b>



# 1 Einleitung

In vielen Bereichen von Wissenschaft und Technik sind von einer Funktion  $f(x)$  die Funktionswerte für die Argumente  $x = x_0, x = x_1, \dots, x = x_n$  bekannt. Die Aufgabe besteht darin, den Funktionswert  $f(x)$  für einen beliebigen Wert von  $x$  zu berechnen. Ist die exakte Berechnung von  $f(x)$  mit einem großen Rechenaufwand verbunden, so versucht man, den gesuchten Funktionswert  $f(x)$  aus den bekannten Funktionswerten  $f(x_0), \dots, f(x_n)$  näherungsweise zu berechnen, ihn, wie man auch sagt, durch Approximation beziehungsweise Interpolation zu bestimmen.

Früher bestand die Rolle der Interpolation darin, aus Tafeln mit wenig Funktionswerten hoher Genauigkeit möglichst genaue Werte zu bestimmen, die zwischen den in den Tafeln angegebenen Werten liegen. Im gegenwärtigen Zeitalter moderner Rechenanlagen greift man bei der Implementation spezieller Funktionen wieder auf Interpolationstechniken zurück, wenn höchste Genauigkeit bei gleichzeitiger kurzer Rechenzeit verlangt wird.

Der Gedanke der Interpolation im engeren Sinne besteht darin, eine Funktion  $f(x)$ , von der die Funktionswerte  $f(x_i)$  vorgegeben sind, näherungsweise durch eine Linearkombination  $\sum_j c_j \Phi_{\{j\}}(x) = s_f(x)$  von Standardfunktionen  $\Phi_{\{j\}}$  zu ersetzen. Dabei sollen die Form der Funktionen  $\Phi_{\{j\}}$  und die Koeffizienten  $c_j$  so aus den vorgegebenen Daten bestimmt werden, daß die Funktion  $s_f(x)$  an den vorgegebenen Stellen  $x_i$  die Werte  $f(x_i)$  annimmt. Die Güte der Interpolation ergibt sich für von der Menge  $\{x_i\}$  verschiedenen Stellen  $x$  durch die Abschätzung des Fehlerterms  $f(x) - s_f(x)$ .

In der vorliegenden Arbeit wollen wir uns mit der seit einigen Jahren sehr populären multivariaten Interpolation mit radialen Basisfunktionen beschäftigen. Bei dieser Interpolationsmethode wird die Interpolante als Linearkombination von Translaten einer festen (radialen) Basisfunktion gebildet; im einfachsten Fall setzt man dazu  $\Phi_{\{j\}}(x) = \Phi(x - x_j)$ . Anwendungen der Methode der Approximation beziehungsweise Interpolation mit radialen Basisfunktionen finden sich im Bereich der computerunterstützten Konstruktion geometrischer Objekte ([41]) und auch in anderen Gebieten (zum Beispiel [18]).

Bevor wir zur Vorstellung der angesprochenen Interpolationsmethode kommen, stellen wir einige Tatsachen über radiale Basisfunktionen zusammen. Da die Wahl der radialen Basisfunktion die Güte der Interpolation beeinflusst, stellen wir an den Anfang unserer Betrachtungen wichtige Eigenschaften radialer Basisfunktionen. Eine besondere Bedeutung kommt dabei dem Begriff der bedingten positiven Definitheit zu.

Nach diesen grundlegenden Bemerkungen lenken wir unsere Aufmerksamkeit im dritten Kapitel auf die eigentliche Interpolationsmethode mit radialen Basisfunktionen. Dabei stellen wir die Werkzeuge für eine Abschätzung des Fehlerterms bereit.

In der Gewißheit, daß Einzelheiten hierzu der Literatur, wie zum Beispiel [9, 44, 55], entnommen werden können, beschränken wir uns auf bedeutungsvol-

le Aussagen über die beschriebene Interpolationstechnik. So führen wir die sogenannte Powerfunktion und einen Raum für die zu interpolierende Funktion  $f$  ein, der möglichst minimale Voraussetzungen an  $f$  stellt (siehe dazu auch [22, 30, 31, 32, 51]). Als Kernaussage des dritten Kapitels betrachten wir die Tatsache, daß sich der Fehler als Produkt der von  $f$  unabhängigen Powerfunktion und einer Norm der Ausgangsfunktion  $f$  abschätzen läßt.

Ein hauptsächlicher Nachteil dieser einfachen Interpolationsmethode mit radialen Basisfunktionen besteht in ihrem Unvermögen, sehr große Datensätze  $X$  auf eine numerisch stabile Art zu interpolieren, während gleichzeitig eine gute Reproduktion der Originalfunktion bewahrt bleiben soll. Dieses bekannte Phänomen wird in Schaback [42] als *uncertainty relation* zwischen dem erreichbaren Fehler und der Kondition der Interpolationsmatrix  $(\Phi(x_j - x_k))_{1 \leq j, k \leq N}$  genauer beschrieben. Es stellt sich heraus, daß der Fehler und die Konditionszahl nicht beide klein erhalten werden können. Entweder man wünscht einen kleinen Fehler auf Kosten einer schlechten Stabilität oder man bevorzugt einen stabilen Algorithmus und hat sich mit einem vergleichbaren großen Fehler abzufinden. Um dieses Problem zu umgehen, werden wir eine Multilevel-Methode präsentieren.

Die Kondition der Interpolationsmatrix und die Güte der Approximation hängen stark von der Dichte der Stützstellen

$$h_\rho(x) = h_{\rho, X}(x) = \sup_{\|y-x\| \leq \rho} \min_{1 \leq j \leq N} \|y - x_j\|$$

des zugehörigen Datensatzes ab.

Davon beeinflusst, führen wir eine iterierte Interpolation auf fortlaufend „feiner“ werdenden Datensätzen ein. Durch geeignete Skalierungen der verwendeten radialen Basisfunktion  $\Phi$  versuchen wir, die Kondition der Interpolationsmatrix jedes Iterationsschrittes möglichst konstant zu halten. Besonders deutlich werden die Auswirkungen bei einer Skalierung von radialen Basisfunktionen mit kompaktem Träger. Dabei hat die Ein-Schritt-Interpolationsmethode den Nachteil, daß bei immer enger liegenden Stützstellen, also  $h = h_\rho(x) \rightarrow 0$ , der Vorteil einer dünn besetzten Interpolationsmatrix, der aus dem kompakten Träger der Basisfunktion  $\Phi$  resultiert, schwindet.

Diese Beobachtung dient als Ausgangspunkt für die Überlegung, den Träger von  $\Phi$  in Abhängigkeit von  $h$  zu skalieren. Anders gesprochen versucht man, statt mit  $\Phi$  mit  $\Phi_\delta(\cdot) = \Phi(\cdot/\delta)$  zu interpolieren und dabei die Skalierung  $\delta$  als Funktion von  $h$  zu wählen. Ist zum Beispiel  $\delta = a \cdot h$ , so haben wir eine annähernd konstante Anzahl von Interpolationspunkten im Träger - man spricht vom stationären Fall. Ursprünglich wurden die Begriffe stationär beziehungsweise nichtstationär bei der Approximation auf dem  $h^n \mathbb{Z}^d$ -Gitter benutzt, und das werden wir im weiteren Verlauf auch meist tun.

Ein anderer Aspekt, der für die Einführung einer Mehr-Schritt- oder auch Multilevel-Methode spricht, beruht auf der Erkenntnis, daß mit den bekannten Fehlerabschätzungen aus dem dritten Kapitel keine Konvergenzaussage der Form

$$|(f - s_f)(x)| \rightarrow 0 \quad \text{für } h \rightarrow 0, x \in \mathbb{R}^d,$$

für den stationären Fall mit  $\delta = a \cdot h$  getroffen werden kann.

Hiervon angespornt, versuchen wir eine Fehlerabschätzung des Multilevel-Verfahrens herzuleiten, bei der der Fehler mit Erhöhung des Levels beliebig klein wird. Dazu müssen wir uns von der in Kapitel 3 beschriebenen Fehlerabschätzung trennen und einen anderen Zugang suchen. Die Herleitung solcher Fehlerabschätzungen soll Inhalt des fünften Kapitels sein. Doch bevor wir dazu kommen, sollten wir zunächst zu Beginn des vierten Kapitels die Multilevel-Interpolationsmethode mit radialen Basisfunktionen vorstellen.

Der Grundgedanke der Multilevel-Methode besteht darin, den vorgegebenen Datensatz

$$X = \{x_1, \dots, x_N\} \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$$

in eine Folge

$$X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_{M-2} \subset X_{M-1} = X$$

ineinandergeschachtelter Datensätze aufzuspalten und auf jedem dieser entstehenden Datensätze eine neue Interpolation durchzuführen.

Gestartet wird mit der Interpolation auf dem „größten“ Datensatz  $X_0$ ; die zugehörige Interpolante, die wir mit  $s_0$  bezeichnen, wird über die Ein-Schritt-Interpolationsmethode aus Kapitel 3 berechnet. Zur Berechnung von  $s_0$  verwenden wir die radiale Basisfunktion  $\Phi_{(0)}$ . Nun wird auf den „feineren“ Datensatz  $X_1$  übergegangen und die Fehlerfunktion  $f - s_0$  interpoliert. Auf jedem der folgenden Datensätze wird wieder die Fehlerfunktion der vorhergehenden Interpolation interpoliert. Sind also die Interpolanten

$$s_0, s_1, \dots, s_{k-1}$$

bereits berechnet, so wird im  $(k+1)$ -ten Interpolationsschritt die Fehlerfunktion  $f - s_0 - s_1 - \dots - s_{k-1}$  mit Hilfe der radialen Basisfunktion  $\Phi_{(k)}$  auf dem Datensatz  $X_k$  interpoliert; das Ergebnis sei die Interpolante  $s_k$ . Dieses Vorgehen wird bis  $k = \dots, M-2, M-1$  wiederholt. Das Endergebnis ist die Funktion  $s = s_0 + s_1 + \dots + s_{M-1}$ , die die Ausgangsfunktion  $f$  auf dem „feinsten“ Datensatz  $X$  interpoliert.

Floater und Iske [15] haben an praktischen Beispielen in Erfahrung bringen können, daß solch eine Multilevel-Interpolationsmethode kleine und große Datensätze in Bezug auf Rechenzeit und Approximationsverhalten sehr gut behandelt.

Das Hauptziel unserer Arbeit besteht darin, eine finale Fehlerabschätzung für diese iterierte Art der Interpolation zu finden. Im Gegensatz zur einfachen Interpolation werden wir unter einigen Einschränkungen die Konvergenz des Multilevel-Verfahrens beweisen können. So beschränken wir uns auf den stationären Fall und arbeiten auf dem Gitter  $\mathbb{Z}^d$ , welches mit einem Faktor  $h$ ,  $0 < h < 1$ , fortlaufend für jeden weiteren Interpolationsschritt verfeinert wird.

Da wir auf dem  $h^n \mathbb{Z}^d$ -Gitter interpolieren, spielt die u.a. von Buhmann [8] untersuchte kardinale Funktion eine entscheidende Rolle. In Kapitel 5 lenken wir dann unsere volle Aufmerksamkeit auf die Herleitung von finalen Fehlerabschätzungen

für diese Multilevel-Interpolationsmethode.

Eine unserer Fehlerabschätzungen vollzieht sich in der zur radialen Basisfunktion  $\Phi$  gehörenden Native Space-Norm  $\|\cdot\|_{\Phi}$ . Dabei spielt die aus [31] bekannte Orthogonalitätsbeziehung eine entscheidende Rolle. Mit anderen Worten sind unsere Fehlerabschätzungen eine Konsequenz aus der Tatsache, daß die Interpolante  $s_f = s_{f,\Phi}$  im Native Space minimale Norm unter allen Interpolanten besitzt.

Wie bereits erwähnt, werden wir die Basisfunktion  $\Phi$  skalieren. So werden wir die radiale Basisfunktion  $\Phi_{(k)}$  des  $(k+1)$ -ten Interpolationsschrittes mit  $\delta_k$  skalieren, das heißt  $\Phi_{(k)}(\cdot) = \Phi_{\delta_k}(\cdot) = \Phi(\cdot/\delta_k)$ . Neben der Voraussetzung von Gitterdaten müssen wir im stationären Fall arbeiten; es gilt also für die Skalierung  $\delta_k = a \cdot h^k$  mit einem  $a \in \mathbb{R}_{>0}$  und  $0 < h < 1$ .

Zuerst einmal besteht das Ziel darin, eine Fehlerabschätzung der Art

$$\|f - s_0 - \dots - s_k\|_{\Phi_{\delta_k}} \leq C \cdot \|f - s_0 - \dots - s_{k-1}\|_{\Phi_{\delta_{k-1}}}$$

mit einer Konstanten  $C$  zu finden, denn diese Form kann iterativ angewendet werden, so daß wir

$$\|f - s_0 - \dots - s_k\|_{\Phi_{\delta_k}} \leq C^k \cdot \|f\|_{\Phi_{\delta_0}}$$

erhalten können. Um in jede obige Abschätzung die Orthogonalitätsbeziehung einfließen lassen zu können, ist ein Übergang von der Native Space-Norm  $\|\cdot\|_{\Phi_{\delta_i}}$  zur Norm  $\|\cdot\|_{\Phi_{\delta_{i-1}}}$ ,  $i = 1, \dots, k$ , notwendig. Leider kann für diesen Übergang eine Konstante auftreten, die echt größer als Eins ist (siehe [20]).

Um diesen Nachteil zu umgehen, untersuchen wir die Interpolation bandbreitenbeschränkter Funktionen und betrachten Abschätzungen getrennt für Nullumgebungen und außerhalb einer Nullumgebung. Dieser „Umweg“ über die Interpolation entsprechender bandbreitenbeschränkter Funktionen bringt uns in die Lage, die Konstante  $C$  kleiner als Eins zu bekommen.

Wir werden eine Fehlerabschätzung für die Multilevel-Interpolation erhalten, die hauptsächlich durch den Übergang von einem skalierten Native Space zu einem anderen skalierten Native Space gekennzeichnet ist. Leider gilt diese Abschätzung nur unter der Voraussetzung von Gitterdaten und im stationären Fall. Den bei diesen Abschätzungen auftretenden Konstanten schenken wir in den Abschnitten 5.2.1 bis 5.2.4 unsere Aufmerksamkeit, wodurch dann die Konstante  $C$  besser beschreibbar wird und wir Aussagen über die Konvergenz des Multilevel-Verfahrens treffen können.

Durch die Anwendung der Abschätzung in der Native Space-Norm sind wir in der Lage, eine Abschätzung für die Multilevel-Methode in der  $L_{\infty}$ -Norm zu erreichen. Durch die dazu notwendige Rekonstruktion von Konstanten durch die kardinale Funktion gilt diese Art der Fehlerabschätzung aber nicht für positiv definite radiale Basisfunktionen. Unsere Fehlerabschätzungen stehen in gewisser Weise in Beziehung zu den Erkenntnissen über das Sampling-Theorem in [10], das in der Signalverarbeitung auch als Abtasttheorem bekannt ist. Mit Hilfe dieser in Kapitel 5 dargestellten Fehlerabschätzungen kann unter gewissen einschränkenden Voraussetzungen die Konvergenz des Multilevel-Interpolationsverfahrens im

stationären Fall in der  $L_\infty$ -Norm gezeigt werden.

Neueste Vermutungen, wie zum Beispiel in [14], legen nahe, die Interpolation um einen Glättungsschritt zu erweitern und so die Konvergenz des Interpolationsverfahrens zu verbessern.

An dieser Stelle möchte ich mich ganz herzlich bei meinem Doktorvater Herrn Prof. Dr. Robert Schaback für Anregungen und die damit verbundene Unterstützung zu dieser Dissertation bedanken. Herrn Prof. Dr. Jochen Werner danke ich für die Übernahme des Korreferats. Ebenfalls bin ich der Studienstiftung des deutschen Volkes für die finanzielle und ideelle Förderung zu Dank verpflichtet.

## 2 Grundlagen

### 2.1 Grundlegendes über radiale Basisfunktionen

Dieser Abschnitt soll vor allem dazu dienen, uns grundlegende Eigenschaften radialer Basisfunktionen näher zu bringen. Wird ein Funktionenraum  $\mathcal{F}$ , aus dem die Interpolanten zu gegebenen Interpolationspunkten  $x_j \in \mathbb{R}^d$  stammen sollen, von Translaten der Form  $\Phi(\cdot - x_j)$  einer festen Funktion  $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  mit höchstens polynomialem Wachstum im Unendlichen aufgespannt, so wollen wir  $\Phi$  Basisfunktion nennen. Läßt sich darüberhinaus  $\Phi(x)$  als  $\phi(\|x\|)$  mit einem  $\phi : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$  und der euklidischen Norm  $\|\cdot\|$  schreiben, so heiße  $\Phi$  beziehungsweise  $\phi$  radiale Basisfunktion.

Bei der Vorstellung der Interpolationsmethode mit radialen Basisfunktionen in Abschnitt 3.1 gehen wir nochmals auf die Begriffsbildung der radialen Basisfunktion ein. Dort werden die Zusammenhänge dann auch etwas deutlicher werden. Die bislang am meisten untersuchten radialen Basisfunktionen sind

$$\begin{array}{lll}
 \phi(r) = e^{-\alpha r^2}, & \alpha > 0, & \text{Gaussians} \\
 \phi(r) = (-1)^{\lfloor \nu/2 \rfloor} r^\nu, & \nu > 0, \nu \notin 2\mathbb{N}, & \text{Potenzen} \\
 \phi(r) = (-1)^{k+1} r^{2k} \log r, & k \in \mathbb{N}, & \text{Thin-Plate Splines} \\
 \phi(r) = (-1)^{\lfloor \nu/2 \rfloor} (c^2 + r^2)^{\nu/2}, & \nu, c > 0, \nu \notin 2\mathbb{N}, & \text{Multiquadrics} \\
 \phi(r) = (c^2 + r^2)^{-\nu/2}, & c > 0, \nu \in \mathbb{R}_{\geq 0} \setminus 2\mathbb{N}, & \text{inverse Multiquadrics} \\
 \phi(r) = \Psi_{l,k}(r), & l = \lfloor d/2 \rfloor + k + 1, k \in \mathbb{N}, & \text{Wendland-Funktionen.}
 \end{array}$$

Relativ neu sind die radialen Basisfunktionen mit kompaktem Träger, hier insbesondere die sogenannten Wendland-Funktionen. Beispiele für diese Funktionen können der Arbeit [53] entnommen werden.

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird uns noch häufig der Begriff der Fouriertransformation begegnen. Er sollte zwar allseits bekannt sein, doch wollen wir trotzdem kurz auf die Fouriertransformation eingehen. Die klassische Fouriertransformierte einer Funktion  $f$  aus dem Raum  $L_1(\mathbb{R}^d)$  aller absolut integrierbaren Funktionen ist erklärt durch

$$\hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-ix^T \omega} dx.$$

Betrachten wir die Beispiele für radiale Basisfunktionen, so wird uns schnell klar, daß nicht zu jeder radialen Basisfunktion  $\Phi$  eine klassische Fouriertransformierte existiert. So divergiert das Integral

$$\int_{\mathbb{R}^d} \Phi(x) e^{-ix^T \omega} dx$$

bereits an der Stelle  $\omega = 0$  für Funktionen  $\Phi$ , die nicht im Raum  $L_1(\mathbb{R}^d)$  liegen. Aus diesem Grund führen wir die distributionelle beziehungsweise verallgemeinerte Fouriertransformierte ein, die eng mit der Theorie der Distributionen verbunden ist. Distributionen sind lineare, stetige Funktionale auf einem Funktionenraum, dem sogenannten Raum der Testfunktionen. Die Klasse der Distributionen

hat viele angenehme Eigenschaften, die zum Beispiel innerhalb der Klasse der stetigen Funktionen nicht gelten.

Ein bedeutsamer Typ von Funktionalen sind die langsam wachsenden oder temperierten Distributionen. Sie werden auf dem Raum  $S$ , der auch als Schwartzraum bezeichnet wird, der schnell abnehmenden oder „guten“ Funktionen erklärt.

**Definition 2.1** Die Menge  $S$  besteht aus allen beliebig oft differenzierbaren Funktionen ( $C^\infty$ -Funktionen)  $\varphi(x)$ , die für  $\|x\| \rightarrow \infty$  nebst ihrer Ableitungen beliebiger Ordnung schneller als jede Potenz von  $\|x\|^{-1}$  gegen Null konvergieren. Genauer:  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$  gehört zu  $S$ , wenn für beliebige Multiindizes  $p, q$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x^p D^q \varphi(x)| = C_{p,q}(\varphi) < \infty$$

gilt.

**Satz 2.2** Eine Funktion  $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$  gehört genau dann zu  $S$ , wenn zu jedem Multiindex  $p \in \mathbb{N}_0^d$  und jedem  $m \in \mathbb{N}$  eine von  $p, m$  und  $\varphi$  abhängende Konstante  $C > 0$  existiert, so daß für alle  $x \in \mathbb{R}^d$

$$|D^p \varphi(x)| \leq \frac{C}{(1 + \|x\|)^m} .$$

Insbesondere folgt hieraus, daß  $S \subseteq L_1(\mathbb{R}^d)$  und damit, daß alle Elemente des Schwartzraumes fouriertransformierbar sind.

Eine stetige Funktion  $g$  mit höchstens polynomialem Wachstum im Unendlichen definiert durch die Abbildungsvorschrift

$$([g], \varphi) := \int_{\mathbb{R}^d} g(x) \varphi(x) dx \quad \text{für alle } \varphi \in S$$

eine reguläre Distribution  $[g]$  auf dem Raum  $S$ . Wir können somit jeder radialen Basisfunktion  $\Phi$  eine reguläre Distribution  $[\Phi]$  aus dem Dualraum  $S'$  zuordnen. Die distributionelle Fouriertransformation  $F : S' \rightarrow S', T \mapsto FT = \hat{T}$  ist ein Automorphismus in  $S'$ , das heißt  $F$  und  $F^{-1}$  sind lineare, stetige und eindeutige Abbildungen von  $S'$  auf  $S'$ . Also besitzt die reguläre Distribution  $[\Phi] \in S'$  eine Fouriertransformierte von  $\Phi$ . Naheliegenderweise bezeichnen wir  $F[\Phi]$  als distributionelle Fouriertransformierte von  $\Phi$  und kommen so zum Begriff der verallgemeinerten Fouriertransformierten. Wir sagen zu  $\varphi \in C(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$  verallgemeinerte Fouriertransformierte von  $\Phi$ , falls die distributionelle Fouriertransformierte  $F[\Phi]$  auf  $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  mit einer stetigen Funktion  $\varphi$  übereinstimmt, das heißt  $(F[\Phi], \gamma) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\omega) \gamma(\omega) d\omega$  für alle  $\gamma \in S$  mit  $0 \notin \text{supp}(\gamma)$ .

Für alle von uns betrachteten radialen Basisfunktionen  $\Phi$  trifft diese Aussage zu, mit anderen Worten bezeichnen wir die Funktion  $\varphi \in C(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$  als verallgemeinerte Fouriertransformierte von  $\Phi$ . Als selbstverständlich formulieren wir die

**Bem.** Sei  $f$  eine Funktion, die im klassischen Sinne fouriertransformierbar ist.

Dann stimmt die verallgemeinerte Fouriertransformierte von  $f$  auf  $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  mit der klassischen Fouriertransformierten  $\hat{f}$  von  $f$  überein.

Aufgrund dieser Bemerkung werden wir im Folgenden meist nur noch von der Fouriertransformierten einer Funktion sprechen.

Es scheint jetzt an der Zeit zu sein, einige radiale Basisfunktionen nebst ihrer zugehörigen Fouriertransformierten anzugeben. Diese können beispielsweise mit Hilfe von Gelfand und Shilov [17] oder auch mit Oberhettinger [36] berechnet werden.

radiale Basisfunktion $\Phi(x)$	Fouriertransformierte $\varphi(\omega)$
$(-1)^{[\nu/2]} \ x\ ^\nu, \nu > 0, \nu \notin 2\mathbb{N}$	$2^{d+\nu} \pi^{d/2} \frac{\Gamma(\frac{d+\nu}{2})}{\Gamma(-\nu/2)} \ \omega\ ^{-d-\nu}$
$(-1)^{[\nu/2]} (c^2 + \ x\ ^2)^{\nu/2}, \nu, c > 0, \nu \notin 2\mathbb{N}$	$\frac{(-1)^{[\nu/2]} 2\pi^{d/2}}{\Gamma(-\nu/2)} K_{\frac{d+\nu}{2}}(c\ \omega\ ) \left(\frac{\ \omega\ }{2c}\right)^{-\frac{d+\nu}{2}}$
$(c^2 + \ x\ ^2)^{-\nu/2}, \nu \in \mathbb{R}_{\geq 0} \setminus 2\mathbb{N}, c > 0$	$\frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} K_{\frac{d-\nu}{2}}(c\ \omega\ ) \left(\frac{\ \omega\ }{2c}\right)^{-\frac{d-\nu}{2}}$
$e^{-\alpha\ x\ ^2}, \alpha > 0$	$\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{\frac{d}{2}} e^{-\frac{\ \omega\ ^2}{4\alpha}}$
$(-1)^{k+1} \ x\ ^{2k} \log \ x\ , k \in \mathbb{N}$	$2^{d+2k-1} \pi^{d/2} \Gamma\left(\frac{d}{2} + k\right) k! \ \omega\ ^{-d-2k}$

Tabelle 1

In der obigen Tabelle bezeichnet  $K_\eta$  die modifizierte Besselfunktion der 2. Art der Ordnung  $\eta$ . Eigenschaften dieser Funktion findet der interessierte Leser unter anderem in [1] oder [50].

Als abschließendes Beispiel wollen wir die Wendland-Funktionen  $\Psi_{l,k}$  betrachten. Die Funktion  $\Psi_{l,k}$  besitzt einen Träger in  $[0, 1]$  und besteht dort aus einem Polynom. Sie hat den Grad  $\partial\Psi_{l,k} = l + 2k$  und ist um Null  $2k$ -mal und um Eins  $k + l - 1$ -mal stetig differenzierbar. In der folgenden Tabelle sind einige dieser Funktionen bei verschiedenen Raumdimensionen zu sehen.

$d = 1$	$\psi_{1,0}(r) = (1 - r)_+$	$C^0$
	$\psi_{2,1}(r) \doteq (1 - r)_+^3(3r + 1)$	$C^2$
	$\psi_{3,2}(r) \doteq (1 - r)_+^5(8r^2 + 5r + 1)$	$C^4$
$d = 3$	$\psi_{2,0}(r) = (1 - r)_+^2$	$C^0$
	$\psi_{3,1}(r) \doteq (1 - r)_+^4(4r + 1)$	$C^2$
	$\psi_{4,2}(r) \doteq (1 - r)_+^6(35r^2 + 18r + 3)$	$C^4$
	$\psi_{5,3}(r) \doteq (1 - r)_+^8(32r^3 + 25r^2 + 8r + 1)$	$C^6$
$d = 5$	$\psi_{3,0}(r) = (1 - r)_+^3$	$C^0$
	$\psi_{4,1}(r) \doteq (1 - r)_+^5(5r + 1)$	$C^2$
	$\psi_{5,2}(r) \doteq (1 - r)_+^7(16r^2 + 7r + 1)$	$C^4$

Tabelle 2

Darstellungen der (nullstellenfreien) Fouriertransformierten  $\hat{\Psi}_{l,k}$  findet man in ausführlicher Weise in [52]. Dort ist unter anderem auch nachgewiesen, daß sich die  $d$ -variate Fouriertransformierte  $\hat{\Psi}_{l,k}(r)$  asymptotisch wie  $r^{-d-2k-1}$  für  $r \rightarrow \infty$  verhält.

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit, insbesondere bei den Fehlerabschätzungen der Multilevel-Interpolationsmethode, werden wir von einigen markanten Eigenschaften radialer Basisfunktionen beziehungsweise ihrer Fouriertransformierten Gebrauch machen.

**Bem.** Die Fouriertransformierten  $\varphi$  aller oben aufgeführten radialen Basisfunktionen  $\Phi$

1. weisen höchstens im Ursprung ein Polverhalten auf, wobei dieses Polverhalten algebraisch ist,
2. sind um Unendlich integrierbar,
3. sind auf  $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  positiv.

Diese Eigenschaften sollten wir nicht in Vergessenheit geraten lassen, denn wir werden im Folgenden meist stillschweigend davon Gebrauch machen.

Kurz erwähnen möchten wir an dieser Stelle die Möglichkeit und Art einer Skalierung der radialen Basisfunktion  $\Phi$ . Den Nutzen, den eine solche Skalierung mit sich bringt, werden wir freilich erst im weiteren Verlauf dieser Arbeit zu schätzen lernen. Wir werden erkennen, daß eine Skalierung der Basisfunktion einen entscheidenden Einfluß auf die Multilevel-Methode hat, insbesondere prägt eine geeignete Skalierung die Art der Fehlerabschätzung. Dabei skalieren wir die radiale Basisfunktion  $\Phi$  mit  $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$  immer in folgender Weise

$$\begin{aligned}\Phi_\delta(\cdot) &= \Phi(\cdot/\delta) \\ \varphi_\delta(\cdot) &= \delta^d \varphi(\delta \cdot),\end{aligned}$$

wobei  $\varphi_\delta$  die Fouriertransformierte der skalierten Basisfunktion  $\Phi_\delta$  bezeichnet. In welcher Weise die Skalierung  $\delta$  am geeignetsten zu wählen ist, werden wir im Laufe unserer Ausführungen noch näher beleuchten.

## 2.2 Bedingt positiv definite Funktionen

Oft wird uns bei unseren Untersuchungen der Begriff der (bedingten) positiven Definitheit begegnen. Da er einen entscheidenden Einfluß auf die Interpolationsmethode selbst besitzt und seine Auswirkungen bis auf die Art der durchführbaren Fehlerabschätzung reicht, möchten wir bereits jetzt auf bedingt positiv definite Funktionen und deren Charakterisierung eingehen. In der folgenden Definition (und auch später) bezeichne  $\mathbb{P}_m^d$  den Raum aller Polynome der Ordnung kleiner gleich  $m$  in  $d$  Veränderlichen.

**Definition 2.3** *Eine stetige Funktion  $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  heißt bedingt positiv semi-definit der Ordnung  $m \geq 0$ , falls für beliebige paarweise verschiedene Punkte  $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}^d$ ,  $N \in \mathbb{N}$ , und beliebige  $a = (a_1, \dots, a_N)^T \in \mathbb{R}^N$  mit*

$$\sum_{j=1}^N a_j p(x_j) = 0$$

für jedes  $p \in \mathbb{P}_m^d$  die quadratische Form

$$\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N a_j a_k \Phi(x_j - x_k)$$

nichtnegativ ist. Tritt dabei die Gleichheit  $\sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N a_j a_k \Phi(x_j - x_k) = 0$  nur für  $a_1 = \dots = a_N = 0$  auf, so nennt man  $\Phi$  bedingt positiv definit der Ordnung  $m$  auf  $\mathbb{R}^d$ . Eine bedingt positiv (semi)definite Funktion der Ordnung  $m = 0$  heißt auch positiv (semi)definite Funktion. Die Menge aller bedingt positiv definiten Funktionen der Ordnung  $m$  bezeichnen wir mit  $BPD(m)$ .

**Bem.** Für die Mengen der bedingt positiv definiten Funktionen gilt  $BPD(m) \subset BPD(m+k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

Aus der Begriffsbildung der (bedingten) positiven (Semi)Definitheit resultieren einige Erkenntnisse, die zum Teil bis zum Beginn dieses Jahrhunderts zurückreichen (zum Beispiel Bochner [5], Mathias [33] und Schoenberg [46, 47]). Wir wollen hier keine zeitlich korrekte Abhandlung bringen, sondern nur auf einige wenige, aber durchaus bemerkenswerte Resultate aufmerksam machen. So identifizierte Schoenberg in seinen Veröffentlichungen [46, 47] die Klasse der auf allen  $\mathbb{R}^d$  positiv definiten stetigen radialen Funktionen mit der Funktionenklasse der vollständig monotonen stetigen Funktionen. Zunächst definieren wir den Begriff der vollständigen Monotonie und liefern anschließend eine Charakterisierung dieser Funktionenklasse.

**Definition 2.4** Eine Funktion  $\phi : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$  aus  $C^\infty(0, \infty)$  heißt vollständig monoton auf  $(0, \infty)$ , wenn

$$(-1)^l \phi^{(l)}(r) \geq 0$$

für alle  $r > 0$  und  $l = 0, 1, 2, \dots$

Ein Beweis von Micchelli [34] wurde von Guo, Hu und Sun [19] erweitert und liest sich zusammen mit Ergebnissen von Schoenberg [46, 47] als

**Satz 2.5** Sei  $\phi : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion mit  $\phi \not\equiv 0$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1.  $\Phi(x) := \phi(\|x\|^2)$  ist bedingt positiv definit der Ordnung  $m$  auf  $\mathbb{R}^d$  für alle  $d \in \mathbb{N}$ .
2.  $\phi^{(k)}(t)$  existiert für alle  $k \in \mathbb{N}$  und alle  $t \in (0, \infty)$ . Darüberhinaus ist  $(-1)^m \phi^{(m)}$  vollständig monoton auf  $(0, \infty)$ .

Vermöge dieses Satzes lassen sich radiale Basisfunktionen unter dem Begriff der bedingten positiven Definitheit einordnen. Unter Umständen kann es aber für kompliziertere Typen radialer Funktionen Schwierigkeiten geben, ja eventuell unmöglich werden, die Ordnung der bedingten positiven Definitheit zu bestimmen.

Durch Erkennen von Problemen bei der Anwendung von Satz 2.5, besonders im Hinblick auf die Konstruktion radialer Basisfunktionen mit kompaktem Träger, wurde Iske [22] inspiriert, eine andere Methode zum Nachweis der bedingten positiven Definitheit einer Funktion einschließlich deren Ordnung zu liefern. Die Theorie stützt sich dabei auf das Polverhalten der positiven (verallgemeinerten) Fouriertransformierten der Funktion im Nullpunkt.

**Satz 2.6** Die stetige Funktion  $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  besitze eine (verallgemeinerte) Fouriertransformierte  $\varphi : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ , für die es eine (minimale) Zahl  $s \in \mathbb{N}_0$  gibt, so daß  $\varphi(\omega) \|\omega\|^s$  um Null integrierbar ist. Dann sind äquivalent:

1.  $\Phi$  ist bedingt positiv definit der Ordnung  $m \geq s/2$  auf  $\mathbb{R}^d$ .
2.  $\varphi(\omega) \geq 0$  für alle  $\omega \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ ,  $\varphi \not\equiv 0$ .

Erstaunlicherweise genügt aufgrund der Aussage des Satzes eine Information über das Polverhalten von  $\varphi$  im Nullpunkt, um die Ordnung  $m$  der bedingten positiven Definitheit ablesen zu können.

Wir haben bereits im vorangegangenen Abschnitt 2.1 einige radiale Basisfunktionen mit ihren Fouriertransformierten vorgestellt. Mit Hilfe des Satzes 2.6 geben wir nun zu jeder der dort aufgeführten radialen Basisfunktion die Zahl  $s \in \mathbb{N}_0$  an und bestimmen die (minimale) Ordnung  $m$  der bedingten positiven Definitheit auf  $\mathbb{R}^d$ .

radiale Basisfunktion	$s \in \mathbb{N}_0$	$m \in \mathbb{N}_0$
$(-1)^{\lceil \nu/2 \rceil} \ x\ ^\nu, \nu > 0, \nu \notin 2\mathbb{N}$ Potenzen	$s > \nu$	$m > \nu/2$
$(-1)^{\lceil \nu/2 \rceil} (c^2 + \ x\ ^2)^{\nu/2}, \nu \in \mathbb{R}_{>0} \setminus 2\mathbb{N}, c > 0$ Multiquadrics	$s > \nu$	$m > \nu/2$
$(c^2 + \ x\ ^2)^{-\nu/2}, \nu \in \mathbb{R}_{\geq 0} \setminus 2\mathbb{N}, c > 0$ inverse Multiquadrics	$s = 0$	$m \geq 0$
$e^{-\alpha \ x\ ^2}, \alpha > 0$ Gaussians (auch Gaußglocken genannt)	$s = 0$	$m \geq 0$
$(-1)^{k+1} \ x\ ^{2k} \log \ x\ , k \in \mathbb{N}$ Thin-Plate Splines	$s > 2k$	$m > k$
$\psi_{l,k}(x), l = \lfloor \frac{d}{2} \rfloor + k + 1, k \in \mathbb{N}$ Wendland-Funktionen	$s = 0$	$m \geq 0$

Tabelle 3

Die soeben erworbenen Erkenntnisse über bedingt positiv definite Funktionen werden uns im Laufe dieser Arbeit begleiten und besonders im Abschnitt 4.2 über die kardinale Funktion wie auch bei der  $L_\infty$ -Abschätzung des Abschnittes 5.3 begegnen und große Dienste beim Verständnis der dortigen Voraussetzungen erweisen.

## 3 Interpolation mit radialen Basisfunktionen

### 3.1 Vorstellung der Interpolationsmethode

Dieser Abschnitt sei den allgemeinen Grundlagen der multivariaten Interpolation mit radialen Basisfunktionen gewidmet. Dabei werden wir auf einige Tatsachen eingehen, die bei der Interpolation mit radialen Basisfunktionen von entscheidender Bedeutung sind.

Das von uns betrachtete Interpolationsproblem stellt sich folgendermaßen dar:

Finde ein  $s_f \in \mathcal{F}$ , so daß  $s_f(x_j) = f(x_j)$ ,  $1 \leq j \leq N$ . Dabei seien  $\mathcal{F}$  ein Raum von Funktionen  $s : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_j \in \mathbb{R}^d$ ,  $1 \leq j \leq N$ , paarweise verschiedene Stützstellen und die Werte  $f(x_j) \in \mathbb{R}$ ,  $1 \leq j \leq N$ , vorgegeben.

Im univariaten Fall (Dimension  $d = 1$ ) läßt sich dieses Problem immer eindeutig lösen, falls man für  $\mathcal{F}$  ein  $N$ -dimensionales Haarsches System (zum Beispiel Polynome vom Grad  $\leq N - 1$ ) wählt. Ein Haarsches System (oder auch Tschebyscheff-System genannt) zeichnet sich dadurch aus, daß es unabhängig von der Wahl der Stützstellen  $x_j \in \mathbb{R}$  ist.

Mehrdimensionale Interpolations- und Approximationsprobleme gestalten sich schwieriger, da für mehrdimensionale Definitionsbereiche keine Haarschen Systeme der Dimension  $\geq 2$  existieren, das heißt es gibt für  $N \geq 2$  und  $d \geq 2$  keinen  $N$ -dimensionalen Raum von stetigen Funktionen auf  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  ( $\Omega$  habe mindestens einen inneren Punkt), der eine eindeutige Interpolante für jedes  $f$  und jeden Punktsatz  $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subset \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  mit  $N$  Datenpunkten behält.

Will man im mehrdimensionalen Raum interpolieren, so muß man folglich den Funktionenraum  $\mathcal{F}$  von den Stützstellen  $x_j$  aus  $X = \{x_1, \dots, x_N\}$  abhängig gestalten. Dies kann in einfacher Weise erreicht werden, indem man Translate  $\Phi(\cdot - x_j)$  einer stetigen reellwertigen Funktion  $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  verwendet, das heißt

$$\mathcal{F} \equiv \mathcal{F}(\Phi, X) := \text{span}\{\Phi(\cdot - x_1), \dots, \Phi(\cdot - x_N)\}.$$

Wie bereits im Abschnitt 2.1 angekündigt, nennen wir  $\Phi$  Basisfunktion und radiale Basisfunktion, falls wir  $\Phi(x) = \phi(\|x\|)$  mit einem  $\phi : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$  und der euklidischen Norm  $\|\cdot\|$  schreiben können.

Einige wichtige Eigenschaften der bekanntesten radialen Basisfunktionen hatten wir ebenfalls schon im Abschnitt 2.1 zusammengestellt.

Sei nun eine radiale Basisfunktion  $\Phi$  gewählt und liegen paarweise verschiedene Stützstellen  $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subseteq \mathbb{R}^d$  vor, so läßt sich die Interpolante  $s_f$  aus  $\mathcal{F}$  zur Funktion  $f$  konstruieren über die Darstellung

$$s_f(x) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi(x - x_j), \quad (3.1)$$

wobei die Koeffizienten  $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{R}$  das lineare Gleichungssystem

$$f(x_k) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi(x_k - x_j), \quad 1 \leq k \leq N,$$

lösen.

Das Gleichungssystem

$$A\alpha = y$$

mit der symmetrischen  $N \times N$ -Matrix

$$A_{\Phi, X} = A = \begin{pmatrix} \Phi(x_1 - x_1) & \Phi(x_1 - x_2) & \cdots & \Phi(x_1 - x_N) \\ \Phi(x_2 - x_1) & \Phi(x_2 - x_2) & \cdots & \Phi(x_2 - x_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Phi(x_N - x_1) & \Phi(x_N - x_2) & \cdots & \Phi(x_N - x_N) \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_N)^T$  und  $y = (f(x_1), \dots, f(x_N))^T$  ist für beliebige  $y$  lösbar, falls die Matrix  $A$  nicht singulär ist, das heißt wenn die Determinante der Matrix nicht verschwindet. Dieses Kriterium ist stets erfüllt, falls  $A$  sogar positiv definit ist. Somit haben wir die einfachste Form der Interpolanten mit radialen Basisfunktionen gefunden.

Die Matrix  $A$  besitzt aber nicht für jede radiale Basisfunktion  $\Phi$  diese „schöne“ Eigenschaft, so daß es für eine Vielzahl von radialen Basisfunktionen  $\Phi$  notwendig wird, ein multivariates Polynom  $p(\cdot)$  zur Bildung der Interpolanten in (3.1) hinzuzufügen, das heißt man setzt

$$s_f(x) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi(x - x_j) + p(x).$$

Dabei wird die Wahl des Polynoms von dem Begriff der bedingten positiven Definitheit aus Abschnitt 2.2 geprägt. Bezeichne  $\mathbb{P}_m^d$  die Menge aller  $d$ -variater Polynome vom Gesamtgrad kleiner als  $m$  und seien die Polynome  $p_1, \dots, p_Q$ ,  $Q = \dim \mathbb{P}_m^d$ , eine Basis von  $\mathbb{P}_m^d$  in  $\mathbb{R}^d$ . Falls  $\Phi$  bedingt positiv definit der Ordnung  $m$  ist ( $\Phi \in \text{BPD}(m)$ ), so wählt man für die Interpolante ein zusätzliches  $p \in \mathbb{P}_m^d$ . Die  $Q$  zusätzlichen Freiheitsgrade dieser erweiterten Darstellung

$$s_f(x) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi(x - x_j) + \sum_{l=1}^Q \beta_l p_l(x)$$

werden kompensiert durch die  $Q$  Zusatzbedingungen

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j p_l(x_j) = 0, \quad 1 \leq l \leq Q. \quad (3.3)$$

Setzen wir

$$P^T := \begin{pmatrix} p_1(x_1) & \cdots & p_1(x_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_Q(x_1) & \cdots & p_Q(x_N) \end{pmatrix},$$

so können wir die Interpolationsbedingungen

$$f(x_k) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi(x_k - x_j) + \sum_{l=1}^Q \beta_l p_l(x_k), \quad 1 \leq k \leq N,$$

zusammen mit den Bedingungen (3.3) als ein lineares  $(N + Q) \times (N + Q)$ -Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} A & P \\ P^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

formulieren.

**Bem.** Die Injektivität der Matrix  $P$  ist gleichbedeutend damit, daß die Zeilen von  $P^T$  linear unabhängig sind, beziehungsweise der Punktsatz  $X = \{x_1, \dots, x_N\}$  der Voraussetzung

$$\text{aus } p(x_j) = 0, j = 1, \dots, N, p \in \mathbb{P}_m^d, \text{ folgt } p \equiv 0$$

genügt.

**Beweis:** Da  $\mathbb{P}_m^d = \text{span}\{p_1, \dots, p_Q\}$ , ist  $p = \sum_{k=1}^Q \beta_k p_k$  aus  $\mathbb{P}_m^d$ .  $P$  injektiv bedeutet, daß aus  $P\beta = 0$  stets  $\beta = 0$  folgt. Dieses ist wiederum gleichbedeutend mit:

$$\text{Aus } p(x_j) = \sum_{k=1}^Q \beta_k p_k(x_j) = 0, j = 1, \dots, N, \text{ folgt } \beta = 0.$$

Somit folgt aus  $p(x_j) = 0, j = 1, \dots, N$ , stets  $p \equiv 0$ .  $\square$

Der folgende Satz gibt nun endgültig Klarheit über die Lösbarkeit des Systems (3.4).

**Satz 3.1** Ist  $\Phi \in \text{BPD}(m)$  und ist  $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subseteq \mathbb{R}^d$  eine Menge paarweise verschiedener Punkte, so ist das System (3.4) immer lösbar. Ist  $P$  injektiv, so ist die Lösung sogar eindeutig.

Einen Beweis finden wir zum Beispiel in [22, 31].

Auf Details bei der Charakterisierung bedingt positiv definiter Funktionen sind wir im Abschnitt 2.2 eingegangen.

Definieren wir

$$R_{\Phi, X} = R(x) := (\Phi(x - x_1), \dots, \Phi(x - x_N))^T \quad \text{und} \\ S(x) := (p_1(x), \dots, p_Q(x))^T,$$

so besitzt mit unseren Übereinkünften das System

$$\begin{pmatrix} A & P \\ P^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(x) \\ S(x) \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

bei festem  $x \in \mathbb{R}^d$  eine eindeutige Lösung  $\begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N+Q}$ .

Für die Gestalt der Interpolanten  $s_f$  zu  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  ergibt sich

$$\begin{aligned} s_f(x) &= \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi(x - x_j) + \sum_{k=1}^Q \beta_k p_k(x) \\ &= (\alpha^T A + \beta^T P^T) u(x) + \alpha^T P v(x) \\ &= y^T u(x) \\ &= \sum_{j=1}^N u_j(x) f(x_j). \end{aligned}$$

**Bem.**  $u(x)$  ist eine Lagrange-Basis zu  $X$ , das heißt  $u_j(x_k) = \delta_{jk}$ ,  $k = 1, \dots, N$ ,  $j = 1, \dots, N$ .

**Beweis:** Die Aussage folgt aus der Tatsache, daß für ein einzelnes  $x = x_l$ ,  $1 \leq l \leq N$ , die rechte Seite von (3.5) mit der  $l$ -ten Spalte der Koeffizientenmatrix übereinstimmt.  $\square$

**Bem.** Die Gleichung  $P^T u(x) = S(x)$  aus (3.5) impliziert, daß Polynome aus  $\mathbb{P}_m^d$  reproduziert werden.

**Beweis:** Die Gleichung  $P^T u(x) = S(x)$  ist äquivalent zu  $\sum_{j=1}^N p_k(x_j) u_j(x) = p_k(x)$ ,  $1 \leq k \leq Q$ . Da  $\mathbb{P}_m^d = \text{span}\{p_1, \dots, p_Q\}$ , gilt für ein beliebiges  $p$  aus  $\mathbb{P}_m^d$ :  $p = \sum_{k=1}^Q b_k p_k$  mit  $b_k \in \mathbb{R}$ . Für die Interpolante  $s_p$  zu  $p \in \mathbb{P}_m^d$  folgt nun

$$\begin{aligned} s_p(x) &= \sum_{j=1}^N u_j(x) p(x_j) \\ &= \sum_{k=1}^Q b_k \sum_{j=1}^N u_j(x) p_k(x_j) \\ &= \sum_{k=1}^Q b_k p_k(x) \\ &= p(x). \end{aligned}$$

$\square$

In Wu/Schaback [55] wird ein anderer Weg zur Bestimmung der  $u_j(x)$ ,  $1 \leq j \leq N$ , besprochen. Danach stimmt die Lösung  $u(x)$  von

$$\begin{pmatrix} A & P \\ P^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(x) \\ v(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R(x) \\ S(x) \end{pmatrix}$$

mit der Lösung  $w = u_*(x)$  des Minimierungsproblems

$$\text{Minimiere } w^T A w - 2w^T R(x) + \Phi(0)$$

unter den Nebenbedingungen  $w \in \mathbb{R}^N$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N w_j p(x_j) &= p(x) \quad \text{beziehungsweise} \\ P^T w &= S(x) \end{aligned}$$

überein.

Zusammenfassend haben wir also eine Form der Interpolanten  $s_f$  entwickelt, in der die Stützstellen explizit auftauchen:

$$\begin{aligned} s_f(x) &= \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi(x - x_j) + \sum_{k=1}^Q \beta_k p_k(x) \\ &= \sum_{j=1}^N u_j(x) f(x_j). \end{aligned}$$

Unser Ziel dieser Arbeit wird hauptsächlich darin bestehen, Abschätzungen der Form

$$\|f - s_f\|_* \leq C \cdot \|f\|_*$$

zu finden. Für eine Anwendung solch einer Fehlerabschätzung bei der Multilevel-Fehlerabschätzung wird es notwendig sein, daß die Normen  $\|\cdot\|_*$  und  $\|\cdot\|_\star$  in einem gewissen Zusammenhang stehen. Auch wird die Dichte des Datensatzes  $X$  bei der Untersuchung des (Multilevel-)Interpolationsfehlers eine maßgebliche Rolle spielen; doch dazu später mehr.

### 3.2 Der Native Space $\mathcal{F}_\Phi$

Bereits bei der Vorstellung der Interpolationsmethode in Abschnitt 3.1 sind wir auf einen Funktionenraum  $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\Phi$ , aus dem unter anderem die Interpolante stammen soll, gestoßen.

Das hauptsächliche Ziel unserer Arbeit besteht in der Ausarbeitung von Approximationsaussagen. Um solche Aussagen treffen zu können, müssen wir zum einen die Menge der zu approximierenden Funktionen spezifizieren. Zum anderen müssen wir eine Größe definieren, in der das Verhalten gemessen wird.

Ist  $\Phi$  eine radiale Basisfunktion mit  $\hat{\Phi} > 0$  fast überall und  $f$  eine Funktion mit Fouriertransformierter  $\hat{f}$ , so kann der Raum aller Funktionen  $f$ , für die

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(\omega)|^2 \cdot (\hat{\Phi}(\omega))^{-1} d\omega < \infty$$

gilt, zu einem Hilbertraum mit Skalarprodukt

$$(f_1, f_2)_\Phi = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}_1(\omega) \overline{\hat{f}_2(\omega)} (\hat{\Phi}(\omega))^{-1} d\omega$$

komplettiert werden. Diese Vorgehensweise findet in Wu/Schaback [55] Anwendung.

Es gibt noch andere Möglichkeiten, solch einen Funktionenraum einzuführen, wie zum Beispiel in [22, 30, 31, 32, 44, 51] nachgelesen werden kann.

Wir wollen darauf aber nicht weiter eingehen. Erwähnenswert ist hier nur, daß für Funktionen aus dem Native Space  $\mathcal{F}_\Phi$  die Abschätzung

$$|f(x) - s_f(x)| \leq \|f\|_\Phi \cdot P_{\Phi,X}(x)$$

mit der sogenannten Powerfunktion  $P_{\Phi,X}$  (vgl. Abschnitte 3.3 und 3.4) gültig ist. Einen bedeutenden Beitrag bei der Entwicklung von Techniken für die Fehlerabschätzung der Multilevel-Methode leistet die Orthogonalitätsbedingung

$$(f - s_f, s_f)_\Phi = 0,$$

wobei  $s_f$  die Interpolante zu  $f$  bezüglich der radialen Basisfunktion  $\Phi$  darstellt. Da wir diese Orthogonalitätseigenschaft an entscheidenden Stellen anwenden werden, sollten wir hier doch in aller Kürze eine Möglichkeit der Einführung des Native Spaces  $\mathcal{F}_\Phi$  behandeln. Wir können dabei keineswegs auf alle Einzelheiten eingehen; für eine ausführlichere Darstellung sei auf die Literatur, wie zum Beispiel [20, 44, 51] hingewiesen.

Für unsere kurze Abhandlung definieren wir den Raum  $(\mathbb{P}_m^d)_\Omega^-$  für  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  durch

$$\begin{aligned} (\mathbb{P}_m^d)_\Omega^- := & \left\{ \text{lineare Funktionale der Form } \lambda = \sum_{j=1}^{N_\lambda} \lambda_j \delta_{x_j^\lambda} : \right. \\ & \lambda_j \in \mathbb{R}, N_\lambda \in \mathbb{N}, x_j^\lambda \in \Omega, j = 1, \dots, N_\lambda \text{ und} \\ & \left. \lambda(p) = \sum_{j=1}^{N_\lambda} \lambda_j p(x_j^\lambda) = 0 \text{ für alle } p \in \mathbb{P}_m^d \right\}. \end{aligned}$$

Dabei bezeichne wieder  $\mathbb{P}_m^d$  den Raum aller Polynome vom Gesamtgrad kleiner als  $m$  in  $d$  Veränderlichen.

Ist  $\Phi$  bedingt positiv definit der Ordnung  $m$ , so ist durch

$$(\lambda, \mu)_\Phi := \sum_{j=1}^{N_\lambda} \sum_{k=1}^{N_\mu} \lambda_j \mu_k \Phi(x_j^\lambda - x_k^\mu) = \lambda^x \mu^y \Phi(x - y),$$

wobei  $\lambda$  und  $\mu$  Elemente aus  $(\mathbb{P}_m^d)_\Omega^-$  sind, ein Skalarprodukt auf  $(\mathbb{P}_m^d)_\Omega^-$  gegeben. Dabei bedeutet  $\nu^z$ , daß  $\nu$  bezüglich der Variablen  $z$  wirkt.

Der Raum  $(\mathbb{P}_m^d)_\Omega^-$ , der selbst unabhängig von  $\Phi$  ist, ist mit diesem Skalarprodukt ein Prä-Hilbertraum. Mit  $\|\cdot\|_\Phi$  werde die zugeordnete Norm bezeichnet. Die Vervollständigung des Prä-Hilbertraumes  $(\mathbb{P}_m^d)_\Omega^-$  zu einem Hilbertraum wollen wir durch  $\overline{(\mathbb{P}_m^d)_\Omega^-}^\Phi$  kenntlich machen.

Nun ordne die lineare Abbildung

$$L_\Phi : (\mathbb{P}_m^d)_\Omega^- \rightarrow F_{\Omega,\Phi} := L_\Phi \left( \overline{(\mathbb{P}_m^d)_\Omega^-}^\Phi \right)$$

jedem Funktional  $\lambda$  aus  $(\mathbb{P}_m^d)_\Omega^-$  eine Funktion

$$(L_\Phi \lambda)(\cdot) := \sum_{j=1}^{N_\lambda} \lambda_j \Phi(\cdot - x_j^\lambda) =: (\lambda * \Phi)(\cdot) =: g_\lambda(\cdot)$$

zu. Durch die Abbildung  $L_\Phi$  wird ein Isomorphismus auf den Räumen  $(\mathbb{P}_m^d)_\Omega^-$  und  $F_{\Omega, \Phi}$  beschrieben.

Aufgrund der Beziehungen

$$\begin{aligned} (\lambda, \mu)_\Phi &= \sum_{j=1}^{N_\lambda} \sum_{k=1}^{N_\mu} \lambda_j \mu_k \Phi(x_j^\lambda - x_k^\mu) \\ &= \lambda(L_\Phi(\mu)) \\ &= \mu(L_\Phi(\lambda)) \end{aligned}$$

können wir das Skalarprodukt als eine Wirkung von einem Funktional auf die zugeordnete Funktion eines anderen Funktionals schreiben.

Indem wir durch

$$(L_\Phi \lambda, L_\Phi \mu)_\Phi := (\lambda, \mu)_\Phi$$

auf  $F_{\Omega, \Phi}$  ein Skalarprodukt einführen, wird  $L_\Phi$  eine Isometrie.

Für die weitere Vorgehensweise sei  $\mathcal{F}_{\Omega, \Phi}$  die Vervollständigung von  $F_{\Omega, \Phi}$  bezüglich  $(\cdot, \cdot)_\Phi$ .

Es kann nachgewiesen werden, daß die Abbildung  $\bar{L}_\Phi$  von  $\overline{(\mathbb{P}_m^d)_\Omega^-}^\Phi$  nach  $\mathcal{F}_{\Omega, \Phi}$  mit

$$(\bar{\lambda}, \bar{\mu})_\Phi = (\bar{L}_\Phi \lambda, \bar{L}_\Phi \mu)_\Phi, \quad \bar{\lambda}, \bar{\mu} \in \overline{(\mathbb{P}_m^d)_\Omega^-}^\Phi,$$

isometrisch isomorph ist.

Im nächsten Schritt versucht man, einen Weg zu finden, der die Wirkung eines abstrakten Gebildes  $\bar{\lambda} \in \overline{(\mathbb{P}_m^d)_\Omega^-}^\Phi$  auf ein  $\bar{f} \in \mathcal{F}_{\Omega, \Phi}$  beschreibt. Dazu beschränkt man sich zuerst auf ein Funktional  $\lambda$  aus  $(\mathbb{P}_m^d)_\Omega^-$  und spaltet die Betrachtung in den Fall  $m = 0$  (positiv definit) und den Fall  $m > 0$  (echt bedingt positiv definit) auf. Anschließend führt eine Argumentation über Cauchy-Folgen zu dem gesuchten Schluß, daß

$$\bar{\lambda}(\bar{f}) = (\bar{L}_\Phi(\bar{\lambda}), \bar{f})_\Phi$$

für  $\bar{\lambda} \in \overline{(\mathbb{P}_m^d)_\Omega^-}^\Phi$  und  $\bar{f} \in \mathcal{F}_{\Omega, \Phi}$  gilt.

Bemerkenswert ist noch, daß ein  $f$  aus  $\mathcal{F}_{\Omega, \Phi}$  stetig ist.

Durch

$$\mathcal{H}_{\Omega, \Phi} := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ stetig und es existiert ein } C_f \geq 0 \text{ mit } |\lambda(f)| \leq C_f \cdot \|\lambda\|_\Phi \text{ für alle } \lambda \in (\mathbb{P}_m^d)_\Omega^-\}$$

sei eine Teilmenge von  $C(\Omega)$  eingeführt. Aus

$$\begin{aligned} |\lambda(\bar{f})| &= (L_\Phi \lambda, \bar{f})_\Phi \\ &\leq \|\lambda\|_\Phi \|\bar{f}\|_\Phi \end{aligned}$$

ist erkennbar, daß  $\mathcal{F}_{\Omega, \Phi}$  sowie  $\mathbb{P}_m^d$  in  $\mathcal{H}_{\Omega, \Phi}$  enthalten sind. Auch enthält der Funktionenraum  $\mathcal{H}_{\Omega, \Phi}$  die direkte Summe  $\mathcal{F}_{\Omega, \Phi} \oplus \mathbb{P}_m^d$ , und unsere Interpolanten aus Abschnitt 3.1 stammen ebenfalls aus  $\mathcal{H}_{\Omega, \Phi}$ .

Durch

$$\|f\|_{\Phi} := \sup_{\lambda \in (\mathbb{P}_m^d)_{\Omega}^-, \lambda \neq 0} \frac{|\lambda(f)|}{\|\lambda\|_{\Phi}}$$

erklären wir eine Norm auf  $\mathcal{H}_{\Omega, \Phi} / \mathbb{P}_m^d(\Omega)$ , wobei

$$\mathbb{P}_m^d(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f = p|_{\Omega} \text{ mit } p \in \mathbb{P}_m^d\}.$$

Diese Norm auf  $\mathcal{H}_{\Omega, \Phi} / \mathbb{P}_m^d(\Omega)$  stimmt auf dem Unterraum  $\mathcal{F}_{\Omega, \Phi}$  mit der vorhergehenden Definition von  $\|\cdot\|_{\Phi}$  überein.

Über

$$(\Lambda_f)(\lambda) := \lambda(f), \quad \lambda \in (\mathbb{P}_m^d)_{\Omega}^-,$$

wird für jedes  $f \in \mathcal{H}_{\Omega, \Phi}$  ein lineares Funktional  $\Lambda_f$  auf  $(\mathbb{P}_m^d)_{\Omega}^-$  definiert. Es gilt

$$|(\Lambda_f)(\lambda)| = |\lambda(f)| \leq C_f \|\lambda\|_{\Phi},$$

und wir erweitern  $\Lambda_f$  auf  $\overline{(\mathbb{P}_m^d)_{\Omega}^-}^{\Phi}$  mit der selben Schranke. Nach dem Satz von F. Riesz existiert ein eindeutiges Element  $\bar{\lambda}_f \in \overline{(\mathbb{P}_m^d)_{\Omega}^-}^{\Phi}$ , so daß für alle  $\bar{\mu}$  aus  $\overline{(\mathbb{P}_m^d)_{\Omega}^-}^{\Phi}$  die Beziehung

$$(\Lambda_f)(\bar{\mu}) = (\bar{\mu}, \bar{\lambda}_f)_{\Phi} = \bar{\mu}(f)$$

gilt. Aufgrund der Isometrie können wir

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_f(\bar{L}_{\Phi}(\bar{\mu})) &= (\bar{L}_{\Phi}(\bar{\lambda}_f), \bar{L}_{\Phi}(\bar{\mu}))_{\Phi} \\ &= (\bar{\lambda}_f, \bar{\mu})_{\Phi} \\ &= \bar{\mu}(\bar{L}_{\Phi} \bar{\lambda}_f) \\ &= (\Lambda_f)(\bar{\mu}) \\ &= \bar{\mu}(f) \end{aligned}$$

für alle  $\bar{\mu} \in \overline{(\mathbb{P}_m^d)_{\Omega}^-}^{\Phi}$  schreiben.

Im Raum  $\mathcal{H}_{\Omega, \Phi} / \mathbb{P}_m^d(\Omega)$  gilt  $\|f - \bar{L}_{\Phi}(\bar{\lambda}_f)\|_{\Phi} = 0$  und es folgt  $\mathcal{H}_{\Omega, \Phi} / \mathbb{P}_m^d(\Omega) = \mathcal{F}_{\Omega, \Phi}$ . Mit diesen Erkenntnissen erhalten wir für eine bedingt positiv definite radiale Basisfunktion  $\Phi$  der Ordnung  $m$  aus der Definition des Skalarproduktes

$$(\lambda, \mu)_{\Phi} = \sum_{j=1}^{N_{\lambda}} \sum_{k=1}^{N_{\mu}} \lambda_j \mu_k (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\omega) e^{i(x_j^{\lambda} - x_k^{\mu})^T \omega} d\omega$$

für alle  $\lambda, \mu \in (\mathbb{P}_m^d)_{\Omega}^-$ .

Aus der Beziehung  $(f_{\lambda}, f_{\mu})_{\Phi} = (\lambda, \mu)_{\Phi}$  und  $\hat{f}_{\lambda}(\omega) = \sum_{k=1}^{N_{\lambda}} \lambda_k \varphi(\omega) e^{-ix_k^{\lambda T} \omega}$  können wir

$$(\lambda, \mu)_{\Phi} = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\hat{f}_{\mu}(\omega) \overline{\hat{f}_{\lambda}(\omega)}}{\varphi(\omega)} d\omega$$

herleiten.

Unsere Ausführungen geben Anlaß, für  $f, g \in \mathcal{F}_{\Omega, \Phi}$  stets das Skalarprodukt

$$(f, g)_{\Phi} := (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\hat{f}(\omega) \overline{\hat{g}(\omega)}}{\varphi(\omega)} d\omega$$

zu verwenden.

Wir haben nun das Rüstzeug erworben, die Orthogonalitätsrelation

$$(f - s_f, s_f)_{\Phi} = 0,$$

wobei  $f \in \mathcal{F}_{\Omega, \Phi}$  und  $s_f$  die zugehörige Interpolante bezüglich der radialen Basisfunktion  $\Phi \in \text{BPD}(m)$  ist, herzuleiten.

Gemäß des Abschnittes 3.1 ist die Interpolante  $s_f$  darstellbar als

$$s_f(x) = \sum_{j=1}^N \alpha_j \Phi(x - x_j) + \sum_{k=1}^Q \beta_k p_k(x) =: g_{\alpha}(x) + p(x)$$

mit  $\alpha := \sum_{j=1}^N \alpha_j \delta_{x_j} \in (\mathbb{P}_m^d)_{\Omega}^-$  und  $p \in \mathbb{P}_m^d$ .

Da  $(\cdot, \cdot)_{\Phi}$  eine symmetrische Bilinearform ist, bekommen wir durch Anwendung unserer obigen Ausführungen

$$\begin{aligned} (f, s_f)_{\Phi} &= (f, g_{\alpha})_{\Phi} \\ &= \alpha(f) \\ &= \alpha(s_f) \\ &= (s_f, g_{\alpha})_{\Phi} \\ &= (s_f, s_f)_{\Phi}, \end{aligned}$$

was nichts anderes als unsere Orthogonalitätseigenschaft zeigt. Aus der Eigenschaft  $(f - s_f, s_f)_{\Phi} = 0$  läßt sich natürlich auch die Beziehung

$$\|f - s_f\|_{\Phi}^2 = \|f\|_{\Phi}^2 - \|s_f\|_{\Phi}^2$$

ableiten.

Im Folgenden werden wir stets  $\mathcal{F}_{\Phi}$  statt der Schreibweise  $\mathcal{F}_{\Omega, \Phi}$  verwenden.

Wir haben also soeben in aller Kürze den Native Space  $\mathcal{F}_{\Phi}$  eingeführt. Untersuchungen des Native Spaces sind in der Literatur noch lange nicht abgeschlossen, so werden immer wieder neue Arbeiten über die Charakterisierung dieses Funktionenraumes veröffentlicht (zum Beispiel [30]). Wir wollen uns damit aber nicht weiter beschäftigen, denn die dargestellten Ausführungen sind für die Zwecke dieser Arbeit vollkommen ausreichend.

### 3.3 Die Powerfunktion

Wir haben schon im vorhergehenden Abschnitt 3.2 erwähnt, daß für die Interpolation mit radialen Basisfunktionen im Native Space eine Fehlerabschätzung der Form

$$|f(x) - s_f(x)| \leq \|f\|_{\Phi} \cdot P_{\Phi, X}(x)$$

mit der sogenannten Powerfunktion  $P_{\Phi, X}$  möglich ist. Die Formen der Fehlerabschätzung des Multilevel-Verfahrens, die wir in dieser Arbeit entwickeln werden, benutzen bekannte Abschätzungen für die Powerfunktion und ihren Ableitungen (vgl. Abschnitt 5.3). Deshalb sollten wir hier die Powerfunktion mit ihren wichtigsten Eigenschaften, die zum Teil bei unseren Abschätzungstechniken Verwendung finden, vorstellen.

Da wir nur einen einfachen Zugang zur Powerfunktion darstellen, möchten wir es aber nicht versäumen, auf weiterreichende Informationen, insbesondere einen allgemeineren Zugang, auf die Literatur wie zum Beispiel [44] und [55], zu verweisen.

**Definition 3.2** Die nichtnegative Funktion  $P_{\Phi, X}$ , die erklärt ist durch

$$P_{\Phi, X}^2(x) = \Phi(0) - 2 \sum_{j=1}^N u_j(x) \Phi(x - x_j) + \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N u_j(x) u_k(x) \Phi(x_k - x_j) \quad (3.6)$$

entsprechend der Interpolation auf dem Datensatz  $X = \{x_1, \dots, x_N\}$  bezüglich der radialen Basisfunktion  $\Phi \in BPD(m)$  und den Notationen aus Abschnitt 3.1, heißt Powerfunktion.

Es sei kurz ins Gedächtnis gerufen, daß die  $u_j(x)$  gerade die Lösungen von (3.5) aus Abschnitt 3.1 sind. Wie unter anderem aus Wu/Schaback [55] ersichtlich ist, minimieren diese  $u_j(x)$  den Ausdruck der rechten Seite in (3.6). Wir hatten schon in Abschnitt 3.1 erwähnt, daß der Vektor

$$u(x) = (u_1(x), \dots, u_N(x))^T$$

mit der Lösung des Minimierungsproblems

$$\text{Minimiere } \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N w_j w_k \Phi(x_j - x_k) - 2 \sum_{j=1}^N w_j \Phi(x - x_j) + \Phi(0)$$

unter den Nebenbedingungen  $w \in \mathbb{R}^N$ ,  $\sum_{j=1}^N w_j p(x_j) = p(x)$  mit  $p \in \mathbb{P}_m^d$  übereinstimmt.

Ist  $\Phi$  bedingt positiv definit der Ordnung  $m$  mit  $\Phi \in C^{|\mu|}(0, \infty)$  und  $\Phi \in C^{2|\mu|}$  um Null für  $\mu \in \mathbb{N}_0^d$  eine absolut integrierbare Funktion mit einem schönen Verhalten der nichtnegativen Fouriertransformierten  $\hat{\Phi}$ , die

$$\Phi(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\Phi}(\omega) e^{ix^T \omega} d\omega, \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

genügt, so gilt für willkürliche  $u_1, \dots, u_N \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N u_j u_k \Phi(x_j - x_k) - 2 \sum_{j=1}^N u_j \Phi^{(\mu)}(x - x_j) + \Phi^{(2\mu)}(0) \\ &= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \left| \sum_{j=1}^N u_j e^{ix_j^T \omega} - (i\omega)^{(\mu)} e^{ix^T \omega} \right|^2 \hat{\Phi}(\omega) d\omega. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Mit einigen zusätzlichen Voraussetzungen an  $\hat{\Phi}$  kann die Existenz des Integrals gezeigt werden (siehe u.a. [55]).

**Theorem 3.3** *Existiere die verallgemeinerte Fouriertransformierte von  $\Phi$  und stimme sie auf  $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  mit einer stetigen Funktion  $\hat{\Phi}$  überein. Dabei genüge  $\hat{\Phi}$  den Bedingungen*

$$0 < \hat{\Phi}(\omega) \leq C \cdot \begin{cases} \|\omega\|^{-d-s_0} & \text{für } \|\omega\| \rightarrow 0 \\ \|\omega\|^{-d-s_\infty} & \text{für } \|\omega\| \rightarrow \infty \end{cases}$$

mit Konstanten  $C \in \mathbb{R}_{>0}$ ,  $s_0, s_\infty \in \mathbb{R}$ , wobei wir zusätzlich  $2|\mu| < s_\infty$ ,  $\mu \in \mathbb{N}_0^d$ , und  $s_0 < 2m$  voraussetzen. Dann gilt für alle  $u_1, \dots, u_N \in \mathbb{R}$ , die  $\sum_{j=1}^N u_j p(x_j) = p^{(\mu)}(x)$  für alle  $p \in \mathbb{P}_m^d$  erfüllen, daß (3.7) ein wohldefiniertes Integral ist.

Unter den Voraussetzungen des obigen Theorems sind wir in der Lage, die Powerfunktion beziehungsweise das Quadrat der  $\mu$ -ten Ableitung  $(P_{\Phi, X}^{(\mu)}(x))^2$  in der Form

$$\min \left\{ (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \left| \sum_{j=1}^N u_j e^{ix_j^T \omega} - (i\omega)^\mu e^{ix^T \omega} \right|^2 \hat{\Phi}(\omega) d\omega : \right. \quad (3.8)$$

$$\left. u = (u_1, \dots, u_N)^T \in \mathbb{R}^N \text{ mit } \sum_{j=1}^N u_j p(x_j) = p^{(\mu)}(x) \text{ für alle } p \in \mathbb{P}_m^d \right\}$$

darzustellen. Dabei existiert das Integral im klassischen Sinn.

Die Approximationsgüte wird in Abhängigkeit der Dichte der Stützstellen durch

$$h_\rho(x) = h_{\rho, X}(x) = \sup_{\|x-y\| \leq \rho} \min_{1 \leq j \leq N} \|y - x_j\|$$

mit einem festen  $\rho > 0$  gemessen.

Unsere gesuchte Abschätzung der Powerfunktion ist Inhalt des folgenden Theorems.

**Theorem 3.4** *Genüge  $\Phi$  den Voraussetzungen von Theorem 3.3 und sei  $\rho \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  gegeben. Dann existieren positive reelle Konstanten  $h_0$  und  $C$ , so daß für jeden Punktsatz  $X = \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq \mathbb{R}^d$  mit paarweise verschiedenen Punkten und jeden Punkt  $x \in \mathbb{R}^d$  mit  $h_\rho(x) \leq h_0$  die Powerfunktion durch*

$$P_{\Phi, X}^{(\mu)}(x) \leq C \cdot h_\rho^{s_\infty/2 - |\mu|}(x)$$

mit  $\mu \in \mathbb{N}_0^d$  und  $0 \leq |\mu| < s_\infty/2$  beschränkt werden kann.

Da wir nur bekannte Tatsachen über die Powerfunktion zusammentragen wollen, verzichten wir hier auf Beweise und verweisen auf die Literatur (zum Beispiel [55]).

Die Aussage von Theorem 3.4 wird uns wieder bei der  $L_\infty$ -Abschätzung des Multilevel-Verfahrens in Abschnitt 5.3 begegnen.

Durch unsere bisherigen Erkenntnisse können wir  $s_\infty$  als eine die Approximationsgüte bestimmende Konstante ansehen. Ist das Verhalten der Fouriertransformierten der radialen Basisfunktion bekannt, so ist die Konstante  $s_\infty$  leicht

abzulesen. Da wir die Fouriertransformierten aller von uns betrachteten radialen Basisfunktionen schon kennen (Abschnitt 2.1), geben wir in der folgenden Tabelle radiale Basisfunktionen nebst der Größe der zugehörigen Konstanten  $s_\infty$  an.

radiale Basisfunktion	$s_\infty > 0$
$(-1)^{k+1} \ x\ ^{2k+1}, k \in \mathbb{N}_0$ Potenzen	$2k + 1$
$(-1)^{\lceil \nu/2 \rceil} (c^2 + \ x\ ^2)^{\nu/2}, \nu \in \mathbb{R}_{>0} \setminus 2\mathbb{N}, c > 0$ Multiquadrics	beliebig
$(c^2 + \ x\ ^2)^{-\nu/2}, \nu \in \mathbb{R}_{\geq 0} \setminus 2\mathbb{N}, c > 0$ inverse Multiquadrics	beliebig
$e^{-\alpha \ x\ ^2}, \alpha > 0$ Gaussians (auch Gaußglocken genannt)	beliebig
$(-1)^{k+1} \ x\ ^{2k} \log \ x\ , k \in \mathbb{N}$ Thin-Plate Splines	$2k$
$\psi_{l,k}(x), l = \lfloor \frac{d}{2} \rfloor + k + 1, k \in \mathbb{N}$ Wendland-Funktionen	$2k + 1$

Tabelle 4

Das Verhalten der Powerfunktion und damit auch das Fehlerverhalten der Interpolation mit radialen Basisfunktionen kann demnach mit Hilfe des Verhaltens der Fouriertransformierten der Basisfunktion im Unendlichen beschrieben werden. Man sagt, daß die radiale Basisfunktion  $\Phi$  die lokale Approximationsgüte  $\beta$  besitzt, wenn für  $\rho > 0$  eine Konstante  $h_0$  mit  $h_\rho(x) \leq h_0$  existiert, so daß für alle  $X = \{x_1, \dots, x_N\} \subseteq \mathbb{R}^d$  und alle  $x \in \mathbb{R}^d$  die Abschätzung

$$|f(x) - s_f(x)| \leq C \|f\|_\Phi h_\rho^\beta(x)$$

gilt.

Wie bereits früher erwähnt, spielt die Skalierung der radialen Basisfunktion  $\Phi$  eine große Rolle. Dazu beleuchten wir jetzt den Effekt einer Skalierung von  $\Phi$  hinsichtlich der Auswirkungen auf die Powerfunktion. Die Skalierung erfolgt dabei in der gewohnten Weise mit  $\Phi_\delta(\cdot) = \Phi(\cdot/\delta)$  beziehungsweise für die Fouriertransformierte  $\varphi_\delta(\cdot) = \delta^d \varphi(\delta \cdot)$ .

Um eine Abschätzung für die Powerfunktion  $P_{\Phi_\delta, X}$  der skalierten Basisfunktion  $\Phi_\delta$  zu erhalten, müssen wir die Größen  $u(x) = u_{\Phi, X}(x) = (u_1(x), \dots, u_N(x))^T$  aus (3.5) und  $h_\rho(x) = h_{\rho, X}(x)$  untersuchen. Entsprechend den Festsetzungen

$$A_{\Psi, X} = (\Psi(x_j - x_k))_{1 \leq j, k \leq N} \quad \text{und} \quad R_{\Psi, X}(x) = (\Psi(x - x_1), \dots, \Psi(x - x_N))^T$$

aus Abschnitt 3.1 ist

$$A_{\Phi_\delta, X} = A_{\Phi, X/\delta} \quad \text{und} \quad R_{\Phi_\delta, X}(x) = R_{\Phi, X/\delta}(x/\delta),$$

und wir erhalten

$$u_{\Phi_\delta, X}(x) = u_{\Phi, X/\delta}(x/\delta)$$

sowie aus der Integraldarstellung der Powerfunktion durch eine einfache Reskalierung

$$P_{\Phi_\delta, X}^2(x) = P_{\Phi, X/\delta}^2(x/\delta).$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned} h_{\rho, X/\delta}(x/\delta) &= \sup_{\|y - x/\delta\| \leq \rho} \min_{1 \leq j \leq N} \|y - x_j/\delta\| \\ &= \frac{1}{\delta} \sup_{\|\delta y - x\| \leq \delta \rho} \min_{1 \leq j \leq N} \|\delta y - x_j\| \\ &= \frac{1}{\delta} h_{\delta \rho, X}(x). \end{aligned}$$

Setzen wir dies in Theorem 3.4 ein, so bekommen wir im skalierten Fall mit  $\Phi_\delta(\cdot) = \Phi(\cdot/\delta)$  die Abschätzung

$$P_{\Phi_\delta, X}^{(\mu)}(x) \leq C \left( \frac{1}{\delta} h_{\delta \rho, X}(x) \right)^{s_\infty/2 - |\mu|}.$$

Hieran erkennen wir, daß sich im stationären Fall mit  $\delta = a \cdot h_{\delta \rho, X}(x)$  keine Konvergenzaussage folgern läßt. Ein Kompromiß wäre zum Beispiel  $\delta$  langsamer als  $h_{\delta \rho, X}(x)$  gegen Null gehen zu lassen, denn dann bekämen wir eine Konvergenz, wobei die Struktur der Interpolationsmatrix weitgehend erhalten bleibt. Eine andere Möglichkeit besteht in der Einführung eines Multilevel-Verfahrens in der Hoffnung, eine Konvergenzaussage im stationären Fall zu erreichen.

### 3.4 Fehlerabschätzung des Ein-Schritt-Verfahrens

Bevor wir zur Multilevel-Methode und ihren Fehlerabschätzungen kommen, sollten wir der Vollständigkeit halber einige Worte über die Fehlerabschätzung des Ein-Schritt-Interpolationsverfahrens verlieren.

Dazu sei wie bisher die zu interpolierende Funktion  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  aus dem Native Space  $\mathcal{F}_\Phi$ . Gemäß Abschnitt 3.1 besitzt die Interpolante  $s_f$  zur Funktion  $f$

auf dem Datensatz  $X = \{x_1, \dots, x_N\}$  bezüglich der radialen Basisfunktion  $\Phi \in \text{BPD}(m)$  die „Lagrange-artige“ Darstellung

$$s_f(x) = \sum_{j=1}^N u_j(x) f(x_j)$$

mit  $u_j(x_k) = \delta_{jk}$ ,  $1 \leq j, k \leq N$ .

Betrachten wir den Fehlerterm  $f - s_f$  genauer, so kommen wir ohne große Umwege auf eine Fehlerabschätzung.

**Satz 3.5** *Ist  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  aus dem Native Space  $\mathcal{F}_\Phi$ , so gilt für  $\mu \in \mathbb{N}_0^d$  die Fehlerdarstellung*

$$\left| f^{(\mu)}(x) - s_f^{(\mu)}(x) \right| = \left| (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\omega) \left( (i\omega)^\mu e^{ix^T \omega} - \sum_{j=1}^N u_j^{(\mu)}(x) e^{ix_j^T \omega} \right) d\omega \right|,$$

wobei  $u^{(\mu)}(x) = (u_1^{(\mu)}(x), \dots, u_N^{(\mu)}(x))^T$  die Lösung von

$$\begin{pmatrix} A & P \\ P^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{(\mu)}(x) \\ v^{(\mu)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^{(\mu)}(x) \\ S^{(\mu)}(x) \end{pmatrix}$$

ist.

**Beweis:** Genügt die Fouriertransformierte von  $f$  der Beziehung

$$f(y) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\omega) e^{iy^T \omega} d\omega,$$

so ergibt eine einfache Rechnung die Behauptung. Da die distributionelle Fouriertransformation einen Automorphismus in  $S'$  beschreibt, läßt sich die Behauptung auch im Sinne der Distributionentheorie beweisen.  $\square$

Aus der Integraldarstellung der Powerfunktion (3.7) beziehungsweise (3.8) schließen wir, daß

$$\left( \sum_{j=1}^N u_j^{(\mu)}(x) e^{ix_j^T \cdot} - (i \cdot)^\mu e^{ix^T \cdot} \right) \sqrt{\hat{\Phi}(\cdot)}$$

aus dem Raum  $L_2(\mathbb{R}^d)$  stammt.

Damit ist das Produkt

$$\frac{\hat{f}(\cdot)}{\sqrt{\hat{\Phi}(\cdot)}} \sqrt{\hat{\Phi}(\cdot)} \left( \sum_{j=1}^N u_j^{(\mu)}(x) e^{ix_j^T \cdot} - (i \cdot)^\mu e^{ix^T \cdot} \right)$$

aus dem Raum  $L_1(\mathbb{R}^d)$  aller absolut integrierbaren Funktionen. Unter Anwendung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung erhalten wir sofort

$$\begin{aligned} |f^{(\mu)}(x) - s_f^{(\mu)}(x)| &\leq \left( (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{f}(\omega)|^2}{\hat{\Phi}(\omega)} d\omega \right. \\ &\quad \left. (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{\Phi}(\omega) \left| \sum_{j=1}^N u_j^{(\mu)}(x) e^{ix_j^T \omega} - (i\omega)^\mu e^{ix^T \omega} \right|^2 d\omega \right)^{1/2} \\ &= \|f\|_\Phi \cdot P_{\Phi, X}^{(\mu)}(x) \end{aligned}$$

mit  $\mu \in \mathbb{N}_0^d$ .

Ist die radiale Basisfunktion  $\Phi$  mit  $\delta > 0$  skaliert, so ergibt sich natürlich

$$|f^{(\mu)}(x) - s_f^{(\mu)}(x)| \leq \|f\|_{\Phi_\delta} \cdot P_{\Phi_\delta, X}^{(\mu)}(x). \quad (3.9)$$

Mit den Ergebnissen aus Abschnitt 3.3 können wir dann  $P_{\Phi_\delta, X}^{(\mu)}$  weiter abschätzen. Als wesentliche Aussage dieses Abschnittes betrachten wir die Fehlerabschätzung (3.9). Interpolieren wir  $f - s_f$  durch die Null-Funktion, so bekommen wir in Anlehnung an (3.9) durch die gewöhnliche Fehleranalyse im Native Space die Form

$$|f^{(\mu)}(x) - s_f^{(\mu)}(x)| \leq \|f - s_f\|_{\Phi_\delta} \cdot P_{\Phi_\delta, X}^{(\mu)}(x),$$

die bei unseren Multilevel-Abschätzungstechniken Anwendung findet.

## 4 Multilevel-Interpolationsmethode

### 4.1 Vorstellung der Multilevel-Methode

Nachdem uns schon die Ein-Schritt-Interpolationsmethode mit radialen Basisfunktionen aus Abschnitt 3.1 bekannt ist, kommen wir jetzt zur Multilevel-Methode.

Bereits durch die Einleitung sind wir auf die Einführung einer Multilevel-Interpolationsmethode vorbereitet. Die Idee einer Multilevel-Methode ergibt sich aus dem Konflikt heraus, sehr große Datensätze auf eine numerisch stabile Art bei gleichzeitig guter Reproduktion der Originaldaten zu interpolieren ([42]). Ein anderer Aspekt, der für die Einführung eines Multilevel-Verfahrens spricht, erwächst aus der Tatsache, daß sich der Fehler zwischen der zu interpolierenden Funktion  $f$  und der zugehörigen Interpolanten  $s_f$  verhalten soll wie

$$|(f - s_f)(x)| \rightarrow 0 \quad \text{für } h \rightarrow 0, x \in \mathbb{R}^d.$$

Berechnen wir die Interpolante mit der skalierten radialen Basisfunktion  $\Phi_\delta$  im stationären Fall mit  $\delta = a \cdot h$ , so ist aus Abschnitt 3.3 und 3.4 eine Fehlerabschätzung der Art

$$|(f - s_f)(x)| \leq C \|f\|_{\Phi_\delta} \left(\frac{h}{\delta}\right)^{s_\infty/2} = C \|f\|_{\Phi_\delta} \left(\frac{1}{a}\right)^{s_\infty/2}$$

mit der Norm  $\|\cdot\|_{\Phi_\delta}$  und einem speziellen  $s_\infty \in \mathbb{R}_{>0}$  bekannt. Für eine Konvergenzaussage besteht das Problem in der Kontrolle von  $\|f\|_{\Phi_\delta} = \|f\|_{\Phi_{ah}}$ . Es ist also erst einmal keine Konvergenz für  $h \rightarrow 0$  erkennbar.

Von den obigen Beobachtungen inspiriert, versuchen wir eine Fehlerabschätzung des Multilevel-Verfahrens herzuleiten, bei der der Fehler mit Erhöhung des Levels beliebig klein wird. Dazu müssen wir uns von der eben beschriebenen Fehlerabschätzung trennen und einen anderen Zugang suchen. Die Herleitung solcher Fehlerabschätzungen soll Inhalt der folgenden Abschnitte sein. Doch bevor wir dazu kommen, sollten wir zunächst die Multilevel-Interpolationsmethode mit radialen Basisfunktionen vorstellen.

Ausgangspunkt ist der Datensatz

$$X = \{x_1, \dots, x_N\} \subseteq \Omega \subseteq \mathbb{R}^d$$

mit  $N \in \mathbb{N}$  groß. Desweiteren sei die Funktion  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  mit den paarweise verschiedenen Stützstellen  $f(x_j)$ ,  $j = 1, \dots, N$ , gegeben. Bis zu dieser Stelle besteht vollständige Übereinstimmung mit der Interpolationsmethode, die wir in Abschnitt 3.1 kennengelernt haben.

Im Unterschied zur Ein-Schritt-Methode zerlegen wir den Datensatz  $X$  in eine Folge

$$X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_{M-2} \subset X_{M-1} = X$$

von  $M$  ineinandergeschachtelter Untermengen

$$X_k = \{x_1^{(k)}, \dots, x_{N_k}^{(k)}\} \subset X, \quad 1 \leq k \leq M-1.$$

Dieses erlaubt uns, die Interpolation in  $M$  Schritte aufzuspalten.

Die Dichtheit des Datensatzes  $X_k$  kann auf verschiedenen Wegen gemessen werden, aber wir wollen hier nur zwei Möglichkeiten erwähnen. Zum einen ist da der Separationsabstand

$$q_{X_k} := \frac{1}{2} \min_{1 \leq i < j \leq N_k} \|x_i^{(k)} - x_j^{(k)}\|$$

und zum anderen mißt

$$h_{\rho, X_k}(x) := \sup_{\|y-x\| \leq \rho} \min_{1 \leq j \leq N_k} \|y - x_j^{(k)}\|$$

die Dichte der Stützstellen  $x_j^{(k)}$  von  $X_k$  um  $x$ .

Das Kriterium für die Zerlegung der Datensätze sollte darin bestehen, daß der Separationsabstand  $q_{X_{k-1}}$  nach Möglichkeit größer als  $q_{X_k}$  sein sollte. Folglich muß man das Paar von Punkten mit dem geringsten Abstand lokalisieren, um dann einen dieser Punkte zu entfernen.

Auf einen Algorithmus, der aus dem gegebenen Datensatz  $X$  eine Folge von Datensätzen  $X_k$  generiert, möchten wir nicht näher eingehen. Für weitere Informationen kann man aber den in Floater/Iske [15] beschriebenen *Thinning Algorithmus* zu Rate ziehen.

Ist  $h_{\rho, X_k} \approx q_{X_k}$ , so bedeutet das, daß der zugehörige Datensatz asymptotisch gleichmäßig verteilt ist, das heißt es treten keine „Löcher“ und keine „Häufungen“ auf.

Beschreiben wir nun den Multilevel-Algorithmus. Wir starten mit der Interpolation auf dem „größten“ Datensatz  $X_0$ . Die Interpolante auf diesem Datensatz, die wir mit  $s_0$  bezeichnen, wird gemäß der Ausführungen über die Ein-Schritt-Interpolationsmethode des Abschnittes 3.1 berechnet. Benutzen wir zur Berechnung von  $s_0$  die radiale Basisfunktion  $\Phi_{(0)}$ , so bekommen wir die Darstellung

$$s_0(x) = \sum_{j=1}^{N_0} \alpha_j^{(0)} \Phi_{(0)}(x - x_j^{(0)}).$$

Für die Koeffizienten  $\alpha_j^{(0)}$ ,  $1 \leq j \leq N_0$ , gelten dabei natürlich die Erläuterungen aus Abschnitt 3.1. Möglicherweise muß entsprechend unserer dortigen Erfahrungen dieser Darstellung der Interpolanten für spezielle radiale Basisfunktionen ein multivariates Polynom hinzugefügt werden. Doch wollen wir diesen Fall der Einfachheit halber hier außer Acht lassen.

In ähnlicher Weise verfahren wir weiter. Sind die Interpolanten

$$s_0, s_1, \dots, s_{k-1}$$

bereits berechnet, so interpolieren wir im  $(k+1)$ -ten Schritt die Fehlerfunktion  $f - s_0 - s_1 - \dots - s_{k-1}$  mit Hilfe der radialen Basisfunktion  $\Phi_{(k)}$  auf dem Datensatz

$X_k$ ; das Ergebnis sei die Interpolante  $s_k$ . Die Darstellung der Interpolanten sieht dann folgendermaßen aus:

$$s_k(x) = \sum_{j=1}^{N_k} \alpha_j^{(k)} \Phi_{(k)}(x - x_j^{(k)}),$$

wobei die Koeffizienten unter anderem von der Fehlerfunktion  $f - s_0 - \dots - s_{k-1}$  abhängen. Wie bereits eingangs erwähnt, sollte dabei  $\Phi_{(k)}$  proportional zu  $h_{\rho, X_k}$  beziehungsweise  $q_{X_k}$  skaliert werden.

Obiges Verfahren wird bis  $k = \dots, M-2, M-1$  wiederholt.

Präziser gesprochen interpoliert also  $s_k$  auf dem Datensatz  $X_k$  und das Interpolationsschema hat die Gestalt

$$\begin{aligned} s_0|_{X_0} &= f|_{X_0}, \\ s_1|_{X_1} &= (f - s_0)|_{X_1}, \\ &\vdots \\ s_{M-1}|_{X_{M-1}} &= \left( f - \sum_{k=0}^{M-2} s_k \right)|_{X_{M-1}}. \end{aligned}$$

Daraus resultiert die Identität

$$(s_0 + \dots + s_{M-1})|_X = f|_X,$$

was nichts anderes besagt, als daß

$$s = s_0 + \dots + s_{M-1}$$

unsere Ausgangsfunktion  $f$  auf dem vorgegebenen Datensatz  $X$  interpoliert. Obwohl das obige iterative Interpolationsschema leicht nachvollziehbar ist, stößt man bei dem Versuch einer Fehlerabschätzung immer wieder auf Schwierigkeiten. Dieses äußert sich zum Beispiel darin, daß wir in den nachfolgenden Abschnitten bei der Entwicklung der Techniken für eine Fehlerabschätzung auf mehr oder weniger stark einschränkenden Voraussetzungen aufbauen müssen. Darüberhinaus werden wir uns auf den stationären Fall mit  $X_k = h^k \mathbb{Z}^d$ ,  $0 < h < 1$ , beschränken.

## 4.2 Die kardinale Funktion $\mathcal{X}_{1,a}$

Das Problem bei der Interpolation einer multivariaten Funktion  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  auf dem  $h^n \mathbb{Z}^d$ -Gitter,  $n \in \mathbb{N}_0$ , mit einer (mit  $\delta_n$  skalierten) radialen Basisfunktion  $\Phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  besteht darin, eine Folge von reellen Koeffizienten  $\{d_k\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$  zu finden, so daß die Interpolante

$$\mathcal{I}_n f(x) = s_n(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} d_k \Phi_{\delta_n}(x - h^n k)$$

wohldefiniert ist und auf  $h^n \mathbb{Z}^d$  mit der Funktion  $f$  übereinstimmt.

In Anlehnung hieran versuchen wir Koeffizienten  $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$  zu finden, mit denen die kardinale Funktion

$$\mathcal{X}_{h^n, \delta_n}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_k \Phi_{\delta_n}(x - h^n k)$$

eine absolut konvergente Summe mit  $\mathcal{X}_{h^n, \delta_n}(h^n j) = \delta_{0j}$  für alle  $j \in \mathbb{Z}^d$  ist. Dabei soll der erste Index die Interpolation auf dem Gitter  $h^n \mathbb{Z}^d$  verdeutlichen und der zweite Index soll anzeigen, daß die radiale Basisfunktion mit  $\delta_n$  skaliert ist. Wir setzen dann

$$\mathcal{I}_n f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} f(kh^n) \mathcal{X}_{h^n, \delta_n}(x - h^n k),$$

falls diese Summe konvergiert.

Doch zunächst beschränken wir uns auf die Interpolation auf dem  $\mathbb{Z}^d$ -Gitter und lassen eine Skalierung der radialen Basisfunktion außer Acht. So suchen wir also Koeffizienten  $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$ , mit denen

$$\mathcal{X}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_k \Phi(x - k) \quad (4.10)$$

eine absolut konvergente Summe ist und  $\mathcal{X}(j) = \delta_{0j}$  für alle  $j \in \mathbb{Z}^d$  erfüllt ist. Die Interpolante wird dann durch

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} f(k) \mathcal{X}(x - k) \quad (4.11)$$

gegeben, falls diese Summe konvergiert.

Es ist nun interessant zu erfahren, unter welchen Umständen (4.11) konvergiert. Auch werden wir auf die Eindeutigkeit der kardinalen Funktion (4.10) eingehen. Dabei stützen wir uns hauptsächlich auf Buhmann [8]. Andere Untersuchungen über die kardinale Funktion findet man auch in Powell [37].

**Definition 4.1** Eine Funktion  $\Phi$  heißt zulässig der Ordnung  $m \in \mathbb{Z}$  auf  $\mathbb{R}^d$ , wenn  $\hat{\Phi} = \varphi \in C^{2d+m}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$  und wenn es Konstanten  $\delta > 0$ ,  $A \neq 0$ ,  $\mu \in [0, 1)$  und  $\epsilon > \mu$  gibt, so daß

- i)  $|D^p \varphi(\omega)| = \mathcal{O}(\|\omega\|^{-d-\delta})$  für  $\|\omega\| \rightarrow \infty$ ,  $p \in \mathbb{Z}_+^d$ ,  $p \leq 2d + m$ ,
- ii)  $\varphi(\omega) = A \|\omega\|^{-m-d+\mu} (1 + g(\|\omega\|))$ , wobei  $|g^{(q)}(\|\omega\|)| = \mathcal{O}(\|\omega\|^{\epsilon-q})$ ,  $0 \leq q \leq 2d + m$  für kleine  $\|\omega\|$
- iii)  $|\Phi(x)| = \mathcal{O}(\|x\|^m \kappa(\|x\|))$  für  $\|x\| \rightarrow \infty$  und  $\kappa : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $\kappa(\|x\|) = o(\|x\|^{\delta^*})$ ,  $1/\kappa(\|x\|) = o(\|x\|^{\delta^*})$  für  $\|x\| \rightarrow \infty$  und jedes  $\delta^* > 0$ .
- iv)  $d + m$  ist positiv
- v)  $\sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \varphi(\omega + 2\pi j)$  besitzt keine Nullstellen.

Ist  $\Phi$  zulässig der Ordnung  $m$  für alle  $d$ , so sagen wir einfach, daß  $\Phi$  zulässig der Ordnung  $m$  ist. Für den Fall  $\mu = 0$  nennen wir  $\Phi$  zulässig von exakter Ordnung  $m$  auf  $\mathbb{R}^d$ . Manchmal lassen wir die Wendung „der Ordnung  $m$ “ fallen und sprechen einfacher von einem zulässigen  $\Phi$ .

**Bem.** Die Funktion  $g$  aus Punkt ii) der Definition ist immer aus  $C^{2d+m}(\mathbb{R}_{>0})$ , da  $\hat{\Phi} = \varphi \in C^{2d+m}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ . Auch die Funktion

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \varphi(\omega + 2\pi j), \quad \omega \in \mathbb{R}^d \setminus 2\pi \mathbb{Z}^d,$$

ist wohldefiniert und aus  $C^{2d+m}(\mathbb{R}^d \setminus 2\pi \mathbb{Z}^d)$  durch Forderung i) und weil  $\varphi \in C^{2d+m}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ .

**Beispiel 4.2** Für  $q = 0, 1, 2, 3, \dots$  ist  $\Phi(x) = \|x\|^{2q+1}$  zulässig von exakter Ordnung  $2q + 1$ , was unter anderem mit Hilfe von Jones [27] ersichtlich ist.

Als nächsten Schritt wollen wir die Existenz der kardinalen Funktion (4.10) näher untersuchen.

**Satz 4.3** Sei  $\Phi$  zulässig auf  $\mathbb{R}^d$ . Dann ist die Funktion

$$\mathcal{X}(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix^T \omega} \frac{\varphi(\omega)}{\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \varphi(\omega + 2\pi k)} d\omega, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad (4.12)$$

wohldefiniert und stetig und genügt den Bedingungen  $\mathcal{X}(j) = \delta_{0j}$  für alle  $j \in \mathbb{Z}^d$ .

**Beweis:** Gleichung (4.12) ist wohldefiniert und stetig, weil  $\frac{\varphi(\omega)}{\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \varphi(\omega + 2\pi k)}$  absolut integrierbar ist. Weiterhin ist

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(x) &= (2\pi)^{-d} \sum_{l \in \mathbb{Z}^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{ix^T \omega} e^{2\pi i x^T l} \frac{\varphi(\omega + 2\pi l)}{\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \varphi(\omega + 2\pi l + 2\pi k)} d\omega \\ &= (2\pi)^{-d} \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{ix^T \omega} \frac{\sum_{l \in \mathbb{Z}^d} e^{2\pi i x^T l} \varphi(\omega + 2\pi l)}{\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \varphi(\omega + 2\pi k)} d\omega \end{aligned}$$

und daraus folgt die zweite Behauptung des Satzes.  $\square$

Interessant ist nun, ob die Funktion (4.12) tatsächlich von der geforderten Form (4.10) ist.

Wie bereits erwähnt, spielt die Konvergenz der Summe (4.11) eine entscheidende Rolle. Deshalb decken wir Verhaltenseigenschaften der Funktion (4.12) auf, so daß wir passende Wachstumseigenschaften von  $f$  finden beziehungsweise fordern können. Das folgende Theorem wird uns solche Verhaltenseigenschaften zeigen.

**Theorem 4.4** Sei  $\Phi$  zulässig der Ordnung  $m$  auf  $\mathbb{R}^d$ . Dann genügt die kardinale Funktion der Bedingung

$$|\mathcal{X}(x)| = \mathcal{O}(\|x\|^{-2d-m+\mu}), \quad \|x\| \rightarrow \infty,$$

wobei  $\mu$  eine Konstante aus Definition 4.1 ist.

**Beweis:** Als Ausgangspunkt dient die Tatsache, daß (4.12) die inverse Fouriertransformierte von  $\frac{\varphi(\cdot)}{\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \varphi(\cdot + 2\pi k)}$  ist. Wir definieren

$$\vartheta(\omega) = \left[ 1 - \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \rho(\|\omega + 2\pi k\|^2) \right] \frac{1}{\sum_{l \in \mathbb{Z}^d} \varphi(\omega + 2\pi l)}, \quad \omega \in \mathbb{R}^d,$$

wobei  $\rho \in C^\infty(\mathbb{R})$  nichtnegativ ist, einen Träger in  $(-\epsilon^2, \epsilon^2)$  mit  $0 < \delta < \epsilon < \pi$  besitze und  $\rho(s) = 1$  für  $s \in [-\delta^2, \delta^2]$ . Zum Beispiel kann mit

$$\rho^*(s) = \begin{cases} e^{-1/s^2} & : s > 0 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

$\rho$  als

$$\rho(s) = \frac{\rho^*(\epsilon^2 - |s|)}{\rho^*(\epsilon^2 - |s|) + \rho^*(|s| - \delta^2)}$$

gewählt werden.

Der weitere Beweis in [8] basiert darauf, daß das Integral in (4.12) in zwei Integrale

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix^T \omega} \vartheta(\omega) \varphi(\omega) d\omega \\ & \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix^T \omega} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \rho(\|\omega + 2\pi k\|^2) \frac{\varphi(\omega)}{\sum_{l \in \mathbb{Z}^d} \varphi(\omega + 2\pi l)} d\omega \end{aligned}$$

aufgespalten wird und das Verhalten jedes dieser zwei Integrale für  $\|x\| \rightarrow \infty$  separat untersucht wird.  $\square$

Theorem 4.4 zeigt uns somit, daß (4.11) immer wohldefiniert ist, wenn  $|f(x)| = \mathcal{O}(\|x\|^{d+m-1})$ .

Außerdem ist ersichtlich, daß  $\mathcal{X}$  absolut integrierbar ist; die Fouriertransformierte lautet

$$\hat{\mathcal{X}}(\omega) = \frac{\varphi(\omega)}{\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \varphi(\omega + 2\pi k)}, \quad \omega \in \mathbb{R}^d.$$

Wir werden noch zeigen, daß die kardinale Funktion (4.12) tatsächlich von der geforderten Form (4.10) ist und die Koeffizienten  $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$  durch

$$c_k = (2\pi)^{-d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{e^{ik^T \omega}}{\sum_{l \in \mathbb{Z}^d} \varphi(\omega + 2\pi l)} d\omega \quad (4.13)$$

gegeben sind.

Als nächstes geben wir ein Theorem an, welches das Verhalten der Koeffizienten  $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$  beschreibt.

**Theorem 4.5** Sei  $\Phi$  zulässig der Ordnung  $m$  auf  $\mathbb{R}^d$ . Dann besitzen die Koeffizienten  $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$  von (4.13) das Verhalten

$$|c_k| = \mathcal{O}(\|k\|^{-2d-m+\mu}) \quad \text{für } \|k\| \rightarrow \infty,$$

wobei  $\mu$  aus Definition 4.1 stammt.

**Beweis:** Der Beweis in [8] läuft ähnlich zu dem Beweis von Theorem 4.4. Das Integral in (4.13) wird in zwei finite Integrale

$$(2\pi)^{-d} \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{ik^T \omega} \vartheta(\omega) d\omega \quad \text{und} \\ (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ik^T \omega} \rho(\|\omega\|^2) \frac{1}{\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \varphi(\omega + 2\pi k)} d\omega$$

aufgesplittet und das Verhalten für große  $k \in \mathbb{Z}^d$  (beziehungsweise für  $\|k\|$  groß) separat für jedes dieser Integrale analysiert.  $\square$

Wir müssen noch zeigen, daß sich die kardinale Funktion (4.12) auf die Form (4.10) reduziert, falls die Koeffizienten  $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$  durch (4.13) gegeben sind.

**Theorem 4.6** *Ist  $\Phi$  zulässig auf  $\mathbb{R}^d$  und seien  $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$  die durch (4.13) gegebenen Fourierkoeffizienten. Dann ist die kardinale Funktion (4.12) die absolut konvergente Folge (4.10).*

**Beweis:** Der Beweis verwendet unter anderem Theorem 4.5 und ist in Buhmann [8] zu finden.  $\square$

Das folgende Theorem gibt Aufschluß über die Eindeutigkeit der kardinalen Funktion (4.10) für jede zulässige radiale Basisfunktion  $\Phi$ .

**Theorem 4.7** *Sei  $\Phi$  zulässig der Ordnung  $m$  auf  $\mathbb{R}^d$ . Dann gibt es genau eine kardinale Funktion der Form (4.10), die den Bedingungen  $\mathcal{X}(j) = \delta_{0j}$  für alle  $j \in \mathbb{Z}^d$  genügt und für deren Koeffizienten  $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$  die Beziehung*

$$|c_k| = \mathcal{O}(\|k\|^{-d-m-\tilde{\epsilon}})$$

für  $\|k\| \rightarrow \infty$  und ein  $\tilde{\epsilon} > 0$  gilt.

**Beweis:** Satz 4.3, Theorem 4.5 und Theorem 4.6 implizieren, daß mindestens eine solche kardinale Funktion (4.10) existiert.

Sei  $\tilde{\mathcal{X}}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \tilde{c}_k \Phi(x - k)$  eine weitere kardinale Funktion mit den gegebenen Eigenschaften. Dann ist

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_{k-l} \left\{ \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} (\tilde{c}_j - c_j) \Phi(k - j) \right\} \quad (4.14)$$

für  $l \in \mathbb{Z}^d$  wohldefiniert und verschwindet wegen  $\tilde{\mathcal{X}}(k) - \mathcal{X}(k) = 0$  für alle  $l \in \mathbb{Z}^d$ .

Da  $\Phi$  zulässig der Ordnung  $m$  auf  $\mathbb{R}^d$  ist, gilt

$$|\Phi(x)| = \mathcal{O}(\|x\|^{m+\tilde{\delta}}), \quad \|x\| \rightarrow \infty,$$

für jedes  $\tilde{\delta} > 0$ .

Wählen wir nun  $\tilde{\delta} \in (0, \min(1 - \mu, \tilde{\epsilon}))$ , wobei  $\mu$  die Konstante aus Definition

4.1 ist. Da wir Kenntnisse über das Verhalten von  $|\Phi(x)|$  beziehungsweise  $|c_k|$  für  $\|x\| \rightarrow \infty$  beziehungsweise  $\|k\| \rightarrow \infty$  besitzen, sind wir in der Lage jeden Term in der Doppelsumme (4.14) abzuschätzen, woraus wiederum die absolute Konvergenz ersichtlich wird.

Somit können wir

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} c_{k-l} (\tilde{c}_j - c_j) \Phi(k - j) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} (\tilde{c}_j - c_j) \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_k \Phi(k + l - j) \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} (\tilde{c}_j - c_j) \mathcal{X}(j - l) \\ &= \tilde{c}_l - c_l \end{aligned}$$

schreiben, was dann den Beweis komplettiert.  $\square$

Greifen wir das angegebene Beispiel nochmals auf, so sind wir jetzt in der Lage, Aussagen über das Verhalten der kardinalen Funktion zu treffen.

**Beispiel 4.8** Die (eindeutige) kardinale Funktion zu  $\Phi(x) = \|x\|^{2q+1}$  genügt

$$|\mathcal{X}(x)| = \mathcal{O}(\|x\|^{-2d-2q-1})$$

für  $\|x\| \rightarrow \infty$  und  $q \in \mathbb{N}_0$ .

Unsere folgenden Aussagen über die präzise Rekonstruktion von Polynomen basieren auf einem Theorem von Jackson [23].

**Theorem 4.9** Sei  $\Phi \in C(\mathbb{R}^d)$ , so daß für  $l \in \mathbb{N}_0$  und eine Konstante  $\epsilon > 0$

$$|\mathcal{X}(x)| = \mathcal{O}(\|x\|^{-l-d-\epsilon}), \quad \|x\| \rightarrow \infty \quad \text{und} \quad (4.15)$$

$$D^p(\hat{\mathcal{X}} - \delta_{0k})(2\pi k) = 0 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{Z}^d, p \in \mathbb{N}_0^d, |p| \leq l \quad (4.16)$$

gelte. Dann ist (4.11) für alle  $f \in \mathcal{P}_l^d$  wohldefiniert und es gilt  $\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} f(k) \mathcal{X}(\cdot - k) = f(\cdot)$  für diese  $f$ .

Theorem 4.9 ist unter speziellen Umständen auch bekannt als die sogenannte „Strang and Fix“-Bedingung (siehe zum Beispiel [29]).

Wenden wir dieses Theorem auf zulässige Funktionen an, so erhalten wir

**Korollar 4.10** Sei  $\Phi$  zulässig der Ordnung  $m$  auf  $\mathbb{R}^d$ . Dann ist (4.11) wohldefiniert und exakt für Polynome vom Grad kleiner gleich  $m + d - 1$ .

**Beweis:** Durch Theorem 4.4 gilt (4.15) für  $l = m + d - 1$  und  $\epsilon = 1 - \mu > 0$ . Daher ist die Wohldefiniertheit gezeigt. Der Rest der Behauptung beweist sich mit der Forderung *ii*) aus Definition 4.1 in Verbindung damit, daß  $\hat{\mathcal{X}} \in C^{m+d-1}(\mathbb{R}^d)$  und (4.16) für  $l = m + d - 1$  gezeigt werden kann, wodurch das Korollar eine Konsequenz von Theorem 4.9 ist.  $\square$

Punkt *ii*) aus Definition 4.1 macht uns klar, daß die Klasse der zulässigen radialen

Funktionen nicht jede beliebige, integrierbare radiale Basisfunktion beinhaltet. Im Abschnitt 2.2 haben wir in Erfahrung bringen können, daß die bedingte positive Definitheit einer Funktion vom Polverhalten ihrer Fouriertransformierten im Nullpunkt abhängt.

Durch eine Gegenüberstellung von Definition 4.1 und der Charakterisierung bedingt positiv definiter Funktionen aus Abschnitt 2.2 erkennen wir, daß positiv definite Funktionen (BPD(0)) nicht zulässig sind. So sind zum Beispiel die Gaußglocken wie auch die Wendland-Funktionen nicht zulässig.

Um aber auch den Fall dieser Funktionen abdecken zu können, führen wir eine neue Klasse von radialen Basisfunktionen ein.

**Definition 4.11** *Eine Funktion  $\Phi \in C(\mathbb{R}^d)$  heißt pseudo-zulässig auf  $\mathbb{R}^d$ , wenn es Konstanten  $\gamma_1$  und  $\gamma_2$  gibt, so daß*

$$i) |\Phi(x)| = \mathcal{O}(\|x\|^{-d-\gamma_1}), \quad \|x\| \rightarrow \infty,$$

$$ii) |\varphi(\omega)| = |\hat{\Phi}(\omega)| = \mathcal{O}(\|\omega\|^{-d-\gamma_2}), \quad \|\omega\| \rightarrow \infty,$$

$$iii) \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \Phi(k) e^{-ik^T x} \neq 0 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^d.$$

**Beispiel 4.12** *Die Gaußglocken  $\Phi(x) = e^{-\alpha\|x\|^2}$  sind pseudo-zulässig auf  $\mathbb{R}^d$  für alle  $\alpha > 0$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ; was leicht durch Anwendung von  $\hat{\Phi}(\omega) = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{d/2} e^{-\|\omega\|^2/4\alpha}$  und der Poisson'schen Summenformel zu erkennen ist.*

**Theorem 4.13** *Sei  $\Phi$  pseudo-zulässig auf  $\mathbb{R}^d$ . Dann gibt es eine eindeutige Folge von Koeffizienten  $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$ , so daß (4.10) absolut konvergent ist und  $\mathcal{X}(j) = \delta_{0j}$  für alle  $j \in \mathbb{Z}^d$  erfüllt ist. Darüberhinaus ist (4.10) absolut integrabel und genügt*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |\mathcal{X}(x - k)| < \infty, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

**Beweis:** Der Beweis verwendet Aussagen von Wiener, wie sie beispielsweise in [21] oder [39] zu finden sind. Die Eindeutigkeit kann analog zum Beweis zu Theorem 4.7 gezeigt werden.  $\square$

Baxter ist in [4] näher auf den Fall der Gaußglocken eingegangen und stieß auf einige Eigenschaften der Koeffizienten  $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$ , wie zum Beispiel auf  $(-1)^{|k|} c_k \geq 0$  für jedes  $k \in \mathbb{Z}^d$ , wobei  $|k| = k_1 + \dots + k_d$ .

Leider besitzt die Interpolation mit pseudo-zulässigen radialen Basisfunktionen einen entscheidenden Nachteil, wie folgendes Theorem zeigt.

**Theorem 4.14** *Falls  $\Phi$  pseudo-zulässig auf  $\mathbb{R}^d$  ist, dann ist (4.11) nicht exakt für konstante Funktionen, wenn nicht  $\varphi(2\pi k) = 0$  für alle  $k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$  erfüllt ist.*

**Beweis:** Wir wollen den Beweis nicht in allen Einzelheiten führen. Da die Summe

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \Phi(k) e^{-ik^T \omega} = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \varphi(\omega + 2\pi j)$$

nicht verschwindet, haben wir unter anderem durch den Beweis zu Theorem 4.13

$$c_k = (2\pi)^{-d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{e^{ik^T \omega}}{\sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \varphi(\omega + 2\pi j)} d\omega.$$

Deshalb ist

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_k \Phi(x - k) \\ &= (2\pi)^{-d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{\sum_{l \in \mathbb{Z}^d} e^{ix^T(\omega + 2\pi l)} \varphi(\omega + 2\pi l)}{\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \varphi(\omega + 2\pi k)} d\omega \\ &= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix^T \omega} \frac{\varphi(\omega)}{\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \varphi(\omega + 2\pi k)} d\omega. \end{aligned}$$

Da (4.10) (absolut) integrierbar ist, ist

$$\hat{\mathcal{X}}(\omega) = \frac{\varphi(\omega)}{\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \varphi(\omega + 2\pi k)}.$$

Setzen wir voraus, daß (4.11) für  $f \equiv 1$  exakt ist. Dann ist

$$1 \equiv \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \mathcal{X}(x - k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} e^{-ix^T 2\pi k} \hat{\mathcal{X}}(2\pi k).$$

Aus der linearen Unabhängigkeit der Funktionen  $\{e^{-ix^T 2\pi k} : x \in \mathbb{R}^d\}$ ,  $k \in \mathbb{Z}^d$ , folgt

$$\hat{\mathcal{X}}(2\pi k) = \delta_{0k}$$

und so  $\varphi(2\pi k) = 0$  für alle  $k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ .  $\square$

Daher reproduziert

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} f(k) \mathcal{X}(x - k)$$

keine konstanten Funktionen  $f$ , wenn  $\Phi$  pseudo-zulässig auf  $\mathbb{R}^d$  und  $\varphi(2\pi k) = \hat{\Phi}(2\pi k) \neq 0$  für mindestens ein  $k \neq 0$  ist. Aufgrund dieser Ergebnisse kann man sagen, daß Approximanten beziehungsweise Interpolanten mit zulässigen radialen Basisfunktionen den Interpolanten mit pseudo-zulässigen radialen Basisfunktionen in gewissen Bereichen überlegen sind.

Bevor wir die obigen Erkenntnisse bei der Multilevel-Interpolation anwenden, möchten wir noch auf einige, daraus resultierende Aussagen aufmerksam machen.

Wie gesehen, sind die Koeffizienten  $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$  aus (4.10) von der Form

$$c_k = (2\pi)^{-d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \frac{e^{ik^T \omega}}{\sum_{l \in \mathbb{Z}^d} \varphi(\omega + 2\pi l)} d\omega, \quad k \in \mathbb{Z}^d.$$

Die kardinale Funktion (4.10) erfüllt  $\mathcal{X}(j) = \delta_{0j}$ ,  $j \in \mathbb{Z}^d$ , und so bekommen wir

$$\begin{aligned}\mathcal{X}(j) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_k \Phi(k - j) \\ &= (2\pi)^{-d} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_k \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\omega) e^{i(k-j)^T \omega} d\omega \\ &= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\omega) \mathcal{T}_c(\omega) e^{-ij^T \omega} d\omega\end{aligned}$$

mit  $\mathcal{T}_c(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_k e^{ik^T \omega}$ .

Benutzen wir, daß  $\mathcal{T}_c$   $2\pi$ -periodisch ist, dann haben wir

$$\begin{aligned}\mathcal{X}(j) &= (2\pi)^{-d} \sum_{l \in \mathbb{Z}^d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \varphi(\omega + 2\pi l) \mathcal{T}_c(\omega + 2\pi l) e^{-ij^T(\omega + 2\pi l)} d\omega \\ &= (2\pi)^{-d} \int_{[-\pi, \pi]^d} \sum_{l \in \mathbb{Z}^d} \varphi(\omega + 2\pi l) \mathcal{T}_c(\omega) e^{-ij^T \omega} d\omega.\end{aligned}$$

Da

$$\int_{[-\pi, \pi]^d} e^{ij^T t} dt = \begin{cases} (2\pi)^d & : j = 0 \\ 0 & : j \neq 0 \end{cases},$$

setzen wir

$$\mathcal{T}_c(z) := \frac{1}{\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \varphi(z + 2\pi k)}.$$

Für zulässige beziehungsweise pseudo-zulässige radiale Basisfunktionen  $\Phi$  und aus der Eindeutigkeit der Koeffizienten  $\{c_k\}_{k \in \mathbb{Z}^d}$  erhalten wir für die  $c_k$ 's die angegebene Form.

Spannender wird es, wenn wir vom  $\mathbb{Z}^d$ -Gitter auf das Gitter  $h^n \mathbb{Z}^d$  übergehen und die radiale Basisfunktion skalieren. Im Folgenden gehen wir nur von zulässigen beziehungsweise pseudo-zulässigen radialen Basisfunktionen aus.

Sei die radiale Basisfunktion  $\Phi$  mit  $\delta > 0$  skaliert, das heißt

$$\Phi_\delta(\cdot) = \Phi(\cdot/\delta)$$

beziehungsweise für die zugehörige Fouriertransformierte

$$\varphi_\delta(\cdot) = \delta^d \varphi(\delta \cdot).$$

**Satz 4.15** *Sei  $\Phi_\delta$  zulässig beziehungsweise pseudo-zulässig auf  $\mathbb{R}^d$ . Dann ist die Funktion*

$$\mathcal{X}_{1,\delta}(x) := (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix^T \omega} \frac{\varphi_\delta(\omega)}{\sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \varphi_\delta(\omega + 2\pi j)} d\omega$$

*wohldefiniert und erfüllt die Bedingungen  $\mathcal{X}_{1,\delta}(j) = \delta_{0j}$  für alle  $j \in \mathbb{Z}^d$ .*

**Beweis:** Die Wohldefiniertheit hatten wir bereits besprochen; der zweite Teil der Behauptung folgt aus einfacher Rechnung:

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_{1,\delta}(j) &= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ij^T \omega} \frac{\varphi_\delta(\omega)}{\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \varphi_\delta(\omega + 2\pi k)} d\omega \\ &= (2\pi)^{-d} \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{ij^T \omega} d\omega \\ &= \delta_{0j}.\end{aligned}$$

□

**Satz 4.16** Die Funktion  $\mathcal{X}_{h,\delta}$ , die definiert ist durch

$$\mathcal{X}_{h,\delta}(x) := (2\pi)^{-d} h^d \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix^T \omega} \frac{\varphi_\delta(\omega)}{\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \varphi_\delta(\omega + 2\pi k/h)} d\omega,$$

erfüllt

- i)  $\mathcal{X}_{h,\delta}(jh) = \delta_{0j}$ ,  $j \in \mathbb{Z}^d$ ,
- ii)  $\mathcal{X}_{h,\delta} \in \text{span}\{\Phi_\delta(\cdot - jh), j \in \mathbb{Z}^d\}$ ,
- iii)  $\mathcal{X}_{h,\delta}(x) = \mathcal{X}_{1,\delta/h}(x/h)$ , insbesondere gilt mit  $\delta = a \cdot h$  im stationären Fall  $\mathcal{X}_{h,\delta}(x) = \mathcal{X}_{1,a}(x/h)$ ,
- iv)  $\mathcal{X}_{h,\delta}(x) = \mathcal{X}_{\frac{h}{\delta},1}(x/\delta)$ , insbesondere für  $\delta = a \cdot h$ :  $\mathcal{X}_{h,\delta}(x) = \mathcal{X}_{\frac{1}{a},1}(\frac{x}{ah})$ .

**Beweis:** Es gilt

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_{h,\delta}(x) &= (2\pi)^{-d} h^d \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix^T \omega} \frac{\varphi_\delta(\omega)}{\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \varphi_\delta(\omega + 2\pi k/h)} d\omega \\ &= (2\pi)^{-d} h^d \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix^T \omega} \frac{\varphi(\delta\omega)}{\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \varphi(\delta\omega + 2\pi k\delta/h)} d\omega \\ &= (2\pi)^{-d} \left(\frac{h}{\delta}\right)^d \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(x/\delta)^T \omega} \frac{\varphi(\omega)}{\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \varphi(\omega + 2\pi k\delta/h)} d\omega.\end{aligned}$$

Damit sehen wir

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_{h,\delta}(jh) &= (2\pi)^{-d} \left(\frac{h}{\delta}\right)^d \sum_{l \in \mathbb{Z}^d} \int_{[-\frac{\delta}{h}\pi, \frac{\delta}{h}\pi]^d} \frac{e^{i(jh/\delta)^T(\omega + 2\pi\delta l/h)} \varphi(\omega + 2\pi\delta l/h)}{\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \varphi(\omega + 2\pi k\delta/h)} d\omega \\ &= (2\pi)^{-d} \left(\frac{h}{\delta}\right)^d \left(\frac{\delta}{h}\right)^d \int_{[-\pi, \pi]^d} e^{ij^T \omega} d\omega \\ &= \delta_{0j}.\end{aligned}$$

Punkt *iii*) des Satzes läßt sich durch einfache Reskalierung herleiten, denn

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_{1,\delta/h}(x/h) &= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(x/h)^T \omega} \frac{\varphi_{\delta/h}(\omega)}{\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \varphi_{\delta/h}(\omega + 2\pi k)} d\omega \\ &= (2\pi)^{-d} h^d \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix^T \omega} \frac{\varphi_{\delta}(\omega)}{\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \varphi_{\delta}(\omega + 2\pi k/h)} d\omega \\ &= \mathcal{X}_{h,\delta}(x).\end{aligned}$$

Ebenfalls durch einfache Rechnung zeigt sich die Richtigkeit von Punkt *iv*) des Satzes, da

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_{h/\delta,1}(x/\delta) &= (2\pi)^{-d} \left(\frac{h}{\delta}\right)^d \int_{\mathbb{R}^d} e^{i(x/\delta)^T \omega} \frac{\varphi_1(\omega)}{\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \varphi_1(\omega + 2\pi k \delta/h)} d\omega \\ &= (2\pi)^{-d} \left(\frac{h}{\delta}\right)^d \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix^T \omega/\delta} \frac{\varphi_{\delta}(\omega/\delta)}{\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \varphi_{\delta}(\omega/\delta + 2\pi k/h)} d\omega \\ &= (2\pi)^{-d} h^d \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix^T \omega} \frac{\varphi_{\delta}(\omega)}{\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \varphi_{\delta}(\omega + 2\pi k/h)} d\omega \\ &= \mathcal{X}_{h,\delta}(x).\end{aligned}$$

Punkt *ii*) folgt mit Hilfe von Punkt *iii*), denn

$$\begin{aligned}\mathcal{X}_{h,\delta}(x) &= \mathcal{X}_{1,\delta/h}(x/h) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_k \Phi_{\delta/h}(x/h - k) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_k \Phi_{\delta}(x - kh).\end{aligned}$$

□

Die gewonnenen Erkenntnisse werden uns bei der Fehlerabschätzung der Multilevel-Interpolation mit radialen Basisfunktionen in den kommenden Abschnitten große Dienste erweisen.

### 4.3 Multilevel-Methode mit kardinaler Funktion

Da wir mittlerweile Kenntnis über die Multilevel-Methode besitzen, wollen wir uns noch einige Gedanken über die Anwendung der kardinalen Funktion aus Abschnitt 4.2 bei dem Multilevel-Verfahren machen.

Bezeichnen wir wie bisher die Interpolante zu  $f$  auf dem  $h^n \mathbb{Z}^d$ -Gitter bezüglich der mit  $\delta_n$  skalierten radialen Basisfunktion  $\Phi$  mit  $\mathcal{I}_n f$ , so können wir

$$\mathcal{I}_n f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} d_k \Phi_{\delta_n}(x - h^n k)$$

beziehungsweise

$$\mathcal{I}_n f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} f(kh^n) \mathcal{X}_{h^n, \delta_n}(x - h^n k)$$

schreiben. Die Konvergenz der Summe wollen wir hier nicht weiter diskutieren, denn im Fall der von uns betrachteten radialen Basisfunktionen sind wir bereits darauf eingegangen (vgl. Abschnitt 4.2).

Im Folgenden wollen wir ausschließlich auf den stationären Fall mit  $\delta_n = a \cdot h^n$ ,  $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$  und  $h \in \mathbb{R}$ ,  $0 < h < 1$ , eingehen. Durch die Eigenschaften der kardinalen Funktion im stationären Fall werden wir eine einfache Darstellung des Fehlerterms im  $(n + 1)$ -ten Interpolationsschritt auf dem  $h^n \mathbb{Z}^d$ -Gitter herleiten können.

Dazu schreiben wir erst die Interpolante im  $(n + 1)$ -ten Interpolationsschritt auf dem  $h^n \mathbb{Z}^d$ -Gitter in einer Form, die mit der Interpolation auf dem Gitter  $\mathbb{Z}^d$  in Verbindung steht.

**Lemma 4.17** *Im stationären Fall mit  $\delta_n = a \cdot h^n$ ,  $a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$  und  $h \in \mathbb{R}_{\geq 0}$  gilt*

$$\mathcal{I}_n f(x) = \mathcal{I}_0 f_{\frac{1}{h^n}}(x/h^n), \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

wobei  $f_\gamma(\cdot) = f(\cdot/\gamma)$ .

**Beweis:** Unter Anwendung von Satz 4.16 aus Abschnitt 4.2 ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_n f(x) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} f(jh^n) \mathcal{X}_{h^n, \delta_n}(x - jh^n) \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} f_{\frac{1}{h^n}}(j) \mathcal{X}_{1, a}(x/h^n - j) \\ &= \mathcal{I}_0 f_{\frac{1}{h^n}}(x/h^n). \end{aligned}$$

□

Zur Vereinfachung der Schreibweise führen wir mit

$$(S_h g)(\cdot) := g(\cdot/h) = g_h(\cdot)$$

einen Skalierungsoperator ein.

**Bem.** *Der Skalierungsoperator  $S_h$  erfüllt*

$$i) \quad S_{\frac{1}{h}} = S_h^{-1} \text{ sowie}$$

$$ii) \quad S_\alpha S_\beta = S_{\alpha\beta}.$$

Die Aussage von Lemma 4.17 schreibt sich damit in der Form

$$\mathcal{I}_n f(\cdot) = S_{h^n} \mathcal{I}_0 S_{\frac{1}{h^n}} f(\cdot).$$

Diese Resultate bringen uns in die Lage, den Fehlerterm  $(f - \mathcal{I}_n f)(\cdot)$  in einer etwas anderen Form darzustellen, denn

$$\begin{aligned} (f - \mathcal{I}_n f)(x) &= f(x) - S_{h^n} \mathcal{I}_0 S_{\frac{1}{h^n}} f(x) \\ &= S_{h^n} (E - \mathcal{I}_0) S_{\frac{1}{h^n}} f(x), \end{aligned}$$

wobei mit  $E$  die Identität bezeichnet sei.

Wenden wir diese Vorgehensweise fortlaufend auf die Fehlerfunktionale

$$\begin{aligned} f^{(k)} &:= f^{(k-1)} - \mathcal{I}_{k-1}f^{(k-1)} \\ &= (E - \mathcal{I}_{k-1})f^{(k-1)}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

mit  $f^{(0)} := f$  an, so erhalten wir

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(x) &= f^{(k)}(x) - \mathcal{I}_k f^{(k)}(x) \\ &= f^{(k)}(x) - S_{h^k} \mathcal{I}_0 S_{\frac{1}{h^k}} f^{(k)}(x) \\ &= S_{h^k} (E - \mathcal{I}_0) S_{\frac{1}{h^k}} f^{(k)}(x). \end{aligned}$$

**Satz 4.18** *Setzen wir  $L_h := (E - \mathcal{I}_0)S_{\frac{1}{h}}$ , dann gilt für das Multilevel-Verfahren im stationären Fall mit  $\delta_n = ah^n$ ,  $h, a \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ ,  $f^{(0)} := f$  und  $f^{(k)} := (E - \mathcal{I}_{k-1})f^{(k-1)}$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ , die Darstellung*

$$f^{(k+1)} = S_{h^k} L_h^{k+1} S_h f.$$

**Beweis:** Der Beweis wird durch Induktion nach  $k$  geführt. Die Richtigkeit für  $k = 0$  ist durch

$$f^{(1)} = (E - \mathcal{I}_0)f = S_1(E - \mathcal{I}_0)S_{\frac{1}{h}}S_h f = S_1 L_h S_h f$$

gegeben. Sei nun vorausgesetzt, daß die Behauptung für  $k$  gilt. Jetzt weisen wir nach, daß dann diese Behauptung auch für  $k + 1$  gilt, denn

$$\begin{aligned} f^{(k+2)} &= (E - \mathcal{I}_{k+1})f^{(k+1)} \\ &= S_{h^{k+1}}(E - \mathcal{I}_0)S_{\frac{1}{h^{k+1}}}f^{(k+1)} \\ &= S_{h^{k+1}}(E - \mathcal{I}_0)S_{\frac{1}{h^{k+1}}}S_{h^k}L_h^{k+1}S_h f \\ &= S_{h^{k+1}}(E - \mathcal{I}_0)S_{\frac{1}{h}}L_h^{k+1}S_h f \\ &= S_{h^{k+1}}L_h^{k+2}S_h f. \end{aligned}$$

□

Wir konnten in diesem kurzen Abschnitt keine neuen, aufschlußreicheren Erkenntnisse über die Fehlerabschätzung der Multilevel-Methode in Erfahrung bringen. Vielleicht kann dieser Abschnitt aber als Ansporn für eine neuartige Fehlerabschätzung, wie etwa einer Abschätzung für  $\|S_{h^k}L_h^{k+1}S_h\|$ , dienen.

## 5 Fehlerabschätzung der Multilevel-Methode

### 5.1 Multilevel-Fehlerabschätzung im Native Space

Dieser Abschnitt soll dazu dienen, eine neue Methode zur Fehlerabschätzung für die Multilevel-Interpolation mit radialen Basisfunktionen aufzuzeigen. Dabei müssen wir unglücklicherweise unter der einschränkenden Voraussetzung von Gitterdaten arbeiten. Ebenfalls beschränken wir uns auf den stationären Fall; mit anderen Worten werde im  $(n + 1)$ -ten Interpolationsschritt die Interpolante  $s_n$  bezüglich der skalierten radialen Basisfunktion  $\Phi_{\delta_n}$  mit  $\Phi_{\delta_n}(\cdot) = \Phi(\cdot/\delta_n)$  auf dem  $h^n \mathbb{Z}^d$ -Gitter,  $0 < h < 1$ , berechnet. Durch  $h$  wird also die fortlaufende Verfeinerung des Gitters beschrieben. Die Skalierung  $\delta_n$  wird dabei so gewählt, daß

$$\delta_n = a \cdot h^n$$

mit einem festen  $a \in \mathbb{R}_{>0}$ .

Nach diesen einführenden Bemerkungen wollen wir nun endlich dazu kommen, worin unser hauptsächliches Ziel dieses Abschnittes besteht. Wir werden versuchen, eine Fehlerabschätzung der Form

$$\|f - s_0 - \dots - s_n\|_{\Phi_{\delta_n}} \leq C^n \cdot \|f\|_{\Phi_{\delta_0}}$$

mit  $0 < C < 1$  zu erreichen. Dabei sei  $s_i$  die Interpolante zu  $f - s_0 - \dots - s_{i-1}$  auf dem  $h^i \mathbb{Z}^d$ -Gitter bezüglich der radialen Basisfunktion  $\Phi_{\delta_i}$ .

Eine bedeutende Rolle bei dieser Abschätzung wird die Ausnutzung der aus Abschnitt 3.2 und der einschlägigen Literatur (zum Beispiel [31]) bekannten Orthogonalitätsbeziehung

$$\|f - s_0 - \dots - s_i\|_{\Phi_{\delta_i}}^2 = \|f - s_0 - \dots - s_{i-1}\|_{\Phi_{\delta_i}}^2 - \|s_i\|_{\Phi_{\delta_i}}^2$$

spielen.

Um auch im vorhergehenden, das heißt im  $i$ -ten Interpolationsschritt von der Orthogonalitätsbeziehung

$$\|f - s_0 - \dots - s_{i-1}\|_{\Phi_{\delta_{i-1}}}^2 = \|f - s_0 - \dots - s_{i-2}\|_{\Phi_{\delta_{i-1}}}^2 - \|s_{i-1}\|_{\Phi_{\delta_{i-1}}}^2$$

Gebrauch machen zu können, müssen wir einen Übergang von der Native Space-Norm  $\|\cdot\|_{\Phi_{\delta_i}}$  zur Norm  $\|\cdot\|_{\Phi_{\delta_{i-1}}}$  finden. Für ein beliebiges  $g \in \mathcal{F}_{\Phi_{\delta_{i-1}}}$  kann

$$\|g\|_{\Phi_{\delta_i}} \leq C_1 \|g\|_{\Phi_{\delta_{i-1}}}$$

mit  $C_1 \geq 1$  (siehe dazu auch [20]) gelten.

Im Gegensatz hierzu ist aber für eine Nullumgebung  $\Xi \subseteq \mathbb{R}^d$  die Abschätzung

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus \Xi} \frac{|\hat{g}(\omega)|^2}{\varphi_{\delta_i}(\omega)} d\omega \leq C_2 \cdot \int_{\mathbb{R}^d \setminus \Xi} \frac{|\hat{g}(\omega)|^2}{\varphi_{\delta_{i-1}}(\omega)} d\omega$$

mit  $0 \leq C_2 < 1$  möglich, wie sich zum Beispiel für Gaussians sehr leicht erkennen läßt.

Ausgehend von dieser Beobachtung scheint es sinnvoll und erfolgversprechend zu sein, die Native Space-Norm zu schreiben als

$$\begin{aligned} \|g\|_{\Phi_{\delta_{i-1}}}^2 &= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{g}(\omega)|^2}{\varphi_{\delta_{i-1}}(\omega)} d\omega \\ &= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d \setminus \Xi} \frac{|\hat{g}(\omega)|^2}{\varphi_{\delta_{i-1}}(\omega)} d\omega + (2\pi)^{-d} \int_{\Xi} \frac{|\hat{g}(\omega)|^2}{\varphi_{\delta_{i-1}}(\omega)} d\omega \end{aligned} \quad (5.17)$$

und jedes Integral auf der rechten Seite von (5.17) einzeln in eine Fehlerabschätzung einzubeziehen. Wie wir erahnen können, werden wir auf unserem Weg auf Verhaltensweisen bandbreitenbeschränkter Funktionen bei der Interpolation mit radialen Basisfunktionen stoßen. Wir werden bei der Abschätzung des Fehlers  $f - s$  einen „Umweg“ über die Interpolation entsprechender bandbreitenbeschränkter Funktionen einschlagen. In Anlehnung an (5.17) und unter Ausnutzung von Eigenschaften der Interpolation mit radialen Basisfunktionen werden wir  $\|f - s_0 - \dots - s_n\|_{\Phi_{\delta_n}}$  in der Form

$$\begin{aligned} &\|f - s_0 - \dots - s_n\|_{\Phi_{\delta_n}} \\ &\leq 2 \left( (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d \setminus \frac{1}{h^n}[-\pi, \pi]^d} \frac{|(\hat{f} - \hat{s}_0 - \dots - \hat{s}_{n-1})(\omega)|^2}{\varphi_{\delta_n}(\omega)} d\omega \right)^{1/2} \\ &+ \left( C_{\Phi_{\delta_0}} (2\pi)^{-d} \int_{\frac{1}{h^n}[-\pi, \pi]^d} \frac{|(\hat{f} - \hat{s}_0 - \dots - \hat{s}_{n-1})(\omega)|^2}{\varphi_{\delta_n}(\omega)} d\omega \right)^{1/2} \end{aligned}$$

abschätzen und für jeden Term auf der rechten Seite dieser Ungleichung den Übergang von  $\|\cdot\|_{\Phi_{\delta_n}}$  zu  $\|\cdot\|_{\Phi_{\delta_{n-1}}}$  vollziehen. Als Ergebnis erhoffen wir uns eine Abschätzung der Form

$$\|f - s_0 - \dots - s_n\|_{\Phi_{\delta_n}} \leq C \cdot \|f - s_0 - \dots - s_{n-1}\|_{\Phi_{\delta_{n-1}}}$$

mit einer Konstanten  $C$ , für die  $0 \leq C < 1$  gilt. Eine fortlaufende Anwendung dieses Vorgehens soll uns zum Ziel der finalen Fehlerabschätzung für  $\|f - s_0 - \dots - s_n\|_{\Phi_{\delta_n}}$  führen, die aus dem Produkt einer  $n$ -ten Potenz der Konstanten  $C$  und einem Faktor, der hauptsächlich nur noch von der Ausgangsfunktion  $f$  abhängt, bestehen soll. Doch bevor wir hierzu kommen, stellen wir einige Tatsachen über die Interpolation auf dem  $h^n \mathbb{Z}^d$ -Gitter zusammen.

Die Interpolante  $s_{f,n} = s_n$  zu einer gegebenen Funktion  $f$  auf dem  $h^n \mathbb{Z}^d$ -Gitter bezüglich der radialen Basisfunktion  $\Phi_{\delta_n}$  stellt sich gemäß Abschnitt 4.3 dar als

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_n f(x) = s_n(x) &= \sum_{l \in \mathbb{Z}^d} d_l(f) \Phi_{\delta_n}(x - h^n l) \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}^d} f(h^n l) \mathcal{X}_{h^n, \delta_n}(x - h^n l) \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}^d} f(h^n l) \mathcal{X}_{1,a}(x/h^n - l) \\ &= S_{h^n} \mathcal{I}_0 S_{\frac{1}{h^n}} f(x), \end{aligned} \quad (5.18)$$

mit dem Skalierungsoperator

$$(S_\delta g)(\cdot) := g\left(\frac{\cdot}{\delta}\right).$$

In (5.18) bezeichne  $\mathcal{X}_{1,a}$  die kardinale Funktion auf dem Gitter  $1 \cdot \mathbb{Z}^d$  bezüglich der mit  $\delta_0 = a$  skalierten radialen Basisfunktion  $\Phi$ . Das heißt, es gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{1,a}(x) &= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix^T \omega} \frac{\hat{\Phi}(a\omega)}{\sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \hat{\Phi}(a\omega + 2\pi ja)} d\omega \\ &= (2\pi a)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix^T \omega/a} \frac{\hat{\Phi}(\omega)}{\sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \hat{\Phi}(\omega + 2\pi ja)} d\omega. \end{aligned}$$

Wie wir aus Abschnitt 4.2 wissen, erfüllt diese kardinale Funktion die Bedingung

$$\mathcal{X}_{1,a}(j) = \delta_{0j} \quad \text{für alle } j \in \mathbb{Z}^d.$$

Die Eigenschaften der kardinalen Funktion  $\mathcal{X}_{1,a}$  haben auf die Wohldefiniertheit der Summen in (5.18) einen entscheidenden Einfluß; Genaueres kann dem Abschnitt 4.2 oder verschiedenen Arbeiten von Buhmann entnommen werden.

Um den Fehler von  $f - s_0 - \dots - s_n$  abzuschätzen, sind einige Vorüberlegungen notwendig. Bei unseren Überlegungen spielen shift-invariante Räume eine entscheidende Rolle. Ein besonders einfaches Beispiel für einen shift-invarianten Raum ist gegeben durch den Raum  $S_0(\Phi_{\delta_n})$  aller endlichen Linearkombinationen von Translaten der Form  $\Phi_{\delta_n}(\cdot - h^n k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}^d$ . Wir bezeichnen mit  $S(\Phi_{\delta_n})$  den  $\Phi_{\delta_n}$ -Abschluß von  $S_0(\Phi_{\delta_n})$ , das heißt

$$S(\Phi_{\delta_n}) := \overline{S_0(\Phi_{\delta_n})}^{\Phi_{\delta_n}}.$$

Bereits bekannt ist die Tatsache, daß die Interpolante  $\mathcal{I}_n f$  mit  $f \in \mathcal{F}_{\Phi_{\delta_n}}$  aus dem Native Space  $\mathcal{F}_{\Phi_{\delta_n}}$  stammt. Weiterhin bezeichne  $\frac{1}{h^n} \mathcal{C}$  den Kubus

$$\frac{1}{h^n} \mathcal{C} := \left[-\frac{1}{h^n} \pi, \frac{1}{h^n} \pi\right]^d$$

im  $\mathbb{R}^d$  der Seitenlänge  $\frac{1}{h^n} 2\pi$  und durch

$$[g, f]_n(\cdot) := \sum_{\beta \in 2\pi \frac{1}{h^n} \mathbb{Z}^d} g(\cdot + \beta) \overline{f(\cdot + \beta)}$$

sei eine  $2\pi \frac{1}{h^n}$ -periodische Funktion erklärt.

Aufgrund der Orthogonalitätseigenschaft

$$(f - \mathcal{I}_n f, \mathcal{I}_n f)_{\Phi_{\delta_n}} = 0$$

können wir das folgende Lemma beweisen.

**Lemma 5.1** Für  $f$  aus dem Native Space  $\mathcal{F}_{\Phi_{\delta_n}}$  ist  $[\hat{f} - \widehat{\mathcal{I}_n f}, 1]_n = 0$ .

**Beweis:** Ist  $g \in \mathcal{F}_{\Phi_{\delta_n}}$ , so bedeutet  $g \dashv_{\Phi_{\delta_n}} s$  für alle  $s \in S(\Phi_{\delta_n})$ , daß

$$0 = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\hat{g}(\omega) \overline{\hat{s}(\omega)}}{\varphi_{\delta_n}(\omega)} d\omega = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{g}(\omega) e^{i(h^n \alpha)^T \omega} d\omega$$

für alle  $\alpha \in \mathbb{Z}^d$ . Also ist  $g(h^n \alpha) = 0$  für alle  $\alpha \in \mathbb{Z}^d$ .

Unter Anwendung der Poisson'schen Summenformel läßt sich daraus

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \hat{g}_{1/h^n}(\omega + 2\pi k) = [\hat{g}_{1/h^n}, 1]_0(\omega) = 0$$

herleiten. Aufgrund der Beziehung

$$\begin{aligned} [\hat{g}_{1/h^n}, 1]_0(\omega) &= \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^d} \hat{g}_{1/h^n}(\omega + 2\pi\beta) \\ &= \sum_{\beta \in \mathbb{Z}^d} h^{-nd} \hat{g}\left(\frac{\omega}{h^n} + \frac{2\pi\beta}{h^n}\right) \\ &= h^{-nd} \sum_{\beta \in \frac{2\pi}{h^n} \mathbb{Z}^d} \hat{g}\left(\frac{\omega}{h^n} + \beta\right) \end{aligned}$$

folgt  $[\hat{g}, 1]_n(\xi) = 0$  für  $\xi \in \mathbb{R}^d$ .

Das heißt

$$S(\Phi_{\delta_n})^{-\Phi_{\delta_n}} = \{g \in \mathcal{F}_{\Phi_{\delta_n}} \mid [\hat{g}, 1]_n = 0\}.$$

Aus  $(f - \mathcal{I}_n f, s)_{\Phi_{\delta_n}} = 0$  für alle  $s \in S(\Phi_{\delta_n})$  folgt  $f - \mathcal{I}_n f \in S(\Phi_{\delta_n})^{-\Phi_{\delta_n}}$  und damit  $[\hat{f} - \widehat{\mathcal{I}_n f}, 1]_n = 0$ .  $\square$

**Lemma 5.2** Sei  $f \in \mathcal{F}_{\Phi_{\delta_n}}$  und  $\Phi_{\delta_n}$  eine skalierte radiale Basisfunktion, wobei  $|\varphi_{\delta_n}(\omega)| > 0$  auf  $\mathbb{R}^d$  mit Ausnahme einer diskreten Menge und  $[\varphi_{\delta_n}, 1]_n \neq 0$  fast überall auf  $\mathbb{R}^d$ . Dann ist  $\widehat{\mathcal{I}_n f} = \tau_n^f \cdot \varphi_{\delta_n}$  fast überall auf  $\mathbb{R}^d$  mit der  $\frac{2\pi}{h^n}$ -periodischen Funktion  $\tau_n^f$ , die definiert ist durch

$$\tau_n^f(\omega) = \begin{cases} \frac{[\hat{f}, 1]_n(\omega)}{[\varphi_{\delta_n}, 1]_n(\omega)} & : \omega \in \Omega_{\Phi_{\delta_n}} \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases},$$

wobei  $\Omega_{\Phi_{\delta_n}} := \{\omega \in \mathbb{R}^d \mid [\varphi_{\delta_n}, 1]_n(\omega) \neq 0\}$ .

**Beweis:** Zuerst beweisen wir, daß für ein  $g \in S(\Phi_{\delta_n})$  die Darstellung  $\hat{g} = \tau \varphi_{\delta_n}$  fast überall auf  $\mathbb{R}^d$  mit einer  $\frac{2\pi}{h^n}$ -periodischen meßbaren Funktion  $\tau$  Gültigkeit besitzt.

Durch die Definition von  $S(\Phi_{\delta_n})$  existiert eine Folge von Funktionen  $(g_m)_{m \in \mathbb{N}}$ , so daß  $g_m \rightarrow g$  in  $\mathcal{F}_{\Phi_{\delta_n}}$  und jedes  $g_m$  ist eine endliche Summe von Translaten von  $\Phi_{\delta_n}$ . Mit anderen Worten gilt für jedes  $m \in \mathbb{N}$

$$\hat{g}_m = \tau_m \varphi_{\delta_n},$$

wobei  $\tau_m$  ein  $\frac{2\pi}{h^n}$ -periodisches trigonometrisches Polynom ist. Aus  $\|g_m - g\|_{\Phi_{\delta_n}} \rightarrow 0$  für  $m \rightarrow \infty$  ist ersichtlich, daß  $\left(\frac{\tau_m \varphi_{\delta_n}}{\sqrt{\varphi_{\delta_n}}}\right)_{m \in \mathbb{N}}$  eine Cauchy-Folge in  $L_2(\mathbb{R}^d)$  ist. Somit existiert nach bekannten Sätzen über  $L_p$ -Räume, siehe u.a. [16], eine Teilfolge  $\left(\frac{\tau_{m_k} \varphi_{\delta_n}}{\sqrt{\varphi_{\delta_n}}}\right)_{k \in \mathbb{N}}$ , die punktweise fast überall gegen  $\frac{\hat{g}}{\sqrt{\varphi_{\delta_n}}}$  konvergiert; anders ausgedrückt

$$\frac{\tau_{m_k} \varphi_{\delta_n}}{\sqrt{\varphi_{\delta_n}}} \rightarrow \frac{\hat{g}}{\sqrt{\varphi_{\delta_n}}}$$

fast überall auf  $\mathbb{R}^d$ .

Sei  $\Omega_n$  definiert durch

$$\Omega_n := \{\xi \in \mathbb{R}^d \mid \varphi_{\delta_n}(\xi) \neq 0\}.$$

Dann konvergiert  $\frac{\tau_{m_k} \varphi_{\delta_n}}{\sqrt{\varphi_{\delta_n}}}$  fast überall auf  $\Omega_n$  gegen  $\frac{\hat{g}}{\sqrt{\varphi_{\delta_n}}}$ , das heißt es gibt ein  $\Omega_n^0$ , so daß

$$\frac{\tau_{m_k}(\xi) \varphi_{\delta_n}(\xi)}{\sqrt{\varphi_{\delta_n}(\xi)}} \rightarrow \frac{\hat{g}(\xi)}{\sqrt{\varphi_{\delta_n}(\xi)}}$$

für jedes  $\xi \in \Omega_n^0$  und  $\Omega_n = \Omega_n^0$  modulo einer Menge vom Maß 0. Genauer könnte man sagen,  $\Omega_n^0 = \mathbb{R}^d \setminus \left(\cup_{\xi \notin \Omega_n} \cup_{\beta \in \frac{2\pi}{h^n} \mathbb{Z}^d} \{\xi + \beta\}\right)$  modulo einer Menge vom Maß 0. Somit erhalten wir

$$\tau_{m_k}(\xi) \rightarrow \frac{\hat{g}(\xi)}{\varphi_{\delta_n}(\xi)}$$

auf  $\Omega_n^0$ .

Im nächsten Schritt definieren wir für ein  $\beta \in \frac{2\pi}{h^n} \mathbb{Z}^d$  ein  $\tau$  auf  $\mathbb{R}^d$  durch

$$\tau(\xi) := \begin{cases} \frac{\hat{g}(\xi + \beta)}{\varphi_{\delta_n}(\xi + \beta)} & : \quad \xi + \beta \in \Omega_n^0 \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases}.$$

Wir beweisen nun, daß  $\tau$  eine wohldefinierte  $\frac{2\pi}{h^n}$ -periodische Funktion auf  $\mathbb{R}^d$  ist und daß  $\hat{g} = \tau \varphi_{\delta_n}$  fast überall gilt. Die Wohldefinietheit ist leicht zu sehen. Für ein  $\xi$  seien  $\beta_1, \beta_2 \in \frac{2\pi}{h^n} \mathbb{Z}^d$  so gewählt, daß  $\xi + \beta_1$  und  $\xi + \beta_2 \in \Omega_n^0$ . Somit impliziert die  $\frac{2\pi}{h^n}$ -Periodizität von  $\tau_{m_k}$

$$\tau(\xi + \beta_1) = \lim_{k \rightarrow \infty} \tau_{m_k}(\xi + \beta_1) = \lim_{k \rightarrow \infty} \tau_{m_k}(\xi + \beta_2) = \tau(\xi + \beta_2).$$

Ist  $\xi \in \mathbb{R}^d$ , so daß  $\xi + \beta \notin \Omega_n^0$  für jedes  $\beta \in \frac{2\pi}{h^n} \mathbb{Z}^d$ , dann ist  $\tau(\xi) = \tau(\xi + \alpha) = 0$  für jedes  $\alpha \in \frac{2\pi}{h^n} \mathbb{Z}^d$ . Auf der anderen Seite existiert für  $\xi$  mit  $\tau(\xi) \neq 0$  ein  $\beta \in \frac{2\pi}{h^n} \mathbb{Z}^d$  mit  $\xi + \beta \in \Omega_n^0$ .

Wir sehen also

$$\tau(\xi) = \frac{\hat{g}(\xi + \beta)}{\varphi_{\delta_n}(\xi + \beta)} = \tau(\xi + \alpha)$$

für jedes  $\alpha \in \frac{2\pi}{h^n} \mathbb{Z}^d$ . Somit können wir bemerken, daß  $\tau_{m_k} \rightarrow \tau$  auf  $\Omega_n^0$  und da  $\varphi_{\delta_n}(\xi) = 0$  für  $\xi \notin \Omega_n$ , erhalten wir

$$\tau_{m_k}(\xi) \varphi_{\delta_n}(\xi) \rightarrow \tau(\xi) \varphi_{\delta_n}(\xi)$$

fast überall auf  $\mathbb{R}^d$ .

Nach diesen Erkenntnissen können wir die Fouriertransformierte der Interpolanten  $\mathcal{I}_n f \in \mathcal{F}_{\Phi_{\delta_n}}$  fast überall schreiben als

$$\widehat{\mathcal{I}_n f} = \varphi_{\delta_n} \cdot \tau_n^f$$

mit einer  $\frac{2\pi}{h^n}$ -periodischen Funktion  $\tau_n^f$ . Nun ergibt sich für fast alle  $\omega \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} [\hat{f} - (\widehat{\mathcal{I}_n f}), 1]_n(\omega) &= \sum_{\beta \in \frac{2\pi}{h^n} \mathbb{Z}^d} \hat{f}(\omega + \beta) - (\widehat{\mathcal{I}_n f})(\omega + \beta) \\ &= [\hat{f}, 1]_n(\omega) - \sum_{\beta \in \frac{2\pi}{h^n} \mathbb{Z}^d} \varphi_{\delta_n}(\omega + \beta) \tau_n^f(\omega + \beta) \\ &= [\hat{f}, 1]_n(\omega) - \tau_n^f(\omega) [\varphi_{\delta_n}, 1]_n(\omega). \end{aligned}$$

Nach Lemma 5.1 ist  $[\hat{f} - (\widehat{\mathcal{I}_n f}), 1]_n = 0$  und somit

$$\tau_n^f(\omega) = \frac{[\hat{f}, 1]_n(\omega)}{[\varphi_{\delta_n}, 1]_n(\omega)}$$

fast überall auf  $\mathbb{R}^d$ . □

**Satz 5.3** *Sei  $f \in \mathcal{F}_{\Phi_{\delta_n}}$  und bezeichne  $\mathcal{I}_n f$  die zugehörige Interpolante. Dann folgt*

$$\|\mathcal{I}_n f\|_{\Phi_{\delta_n}}^2 = (2\pi)^{-d} \int_{\frac{1}{h^n} \mathcal{C}} \frac{|[\hat{f}, 1]_n(\omega)|^2}{|[\varphi_{\delta_n}, 1]_n(\omega)|^2} d\omega.$$

**Beweis:** Es gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned} \|\mathcal{I}_n f\|_{\Phi_{\delta_n}}^2 &= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_{\delta_n}(\omega) |\tau_n^f(\omega)|^2 d\omega \\ &= (2\pi)^{-d} \int_{\frac{1}{h^n} \mathcal{C}} [\varphi_{\delta_n}, 1]_n(\omega) |\tau_n^f(\omega)|^2 d\omega \\ &= (2\pi)^{-d} \int_{\frac{1}{h^n} \mathcal{C}} [\varphi_{\delta_n}, 1]_n(\omega) \frac{|[\hat{f}, 1]_n(\omega)|^2}{|[\varphi_{\delta_n}, 1]_n(\omega)|^2} d\omega \\ &= (2\pi)^{-d} \int_{\frac{1}{h^n} \mathcal{C}} \frac{|[\hat{f}, 1]_n(\omega)|^2}{[\varphi_{\delta_n}, 1]_n(\omega)} d\omega. \end{aligned}$$

□

Aus Gründen der Übersichtlichkeit führen wir einen Tiefpaß-Operator  $B_k$  mit der Eigenschaft

$$\widehat{B_k g}(\omega) := \begin{cases} \hat{g}(\omega) & : \omega \in \frac{1}{h^k} \mathcal{C} \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

ein.

**Bem.** Für eine bandbreitenbeschränkte Funktion  $B_n f \in \mathcal{F}_{\Phi_{\delta_n}}$  gilt

$$\tau_n^{B_n f}(\omega) = \frac{\widehat{B_n f}(\omega)}{[\varphi_{\delta_n}, 1]_n(\omega)}$$

fast überall auf  $\frac{1}{h^n}\mathcal{C}$ .

Diese Erkenntnisse bringen uns in die Lage, die Norm  $\|\mathcal{I}_n B_n f\|_{\Phi_{\delta_n}}$  beziehungsweise  $\|B_n f - \mathcal{I}_n B_n f\|_{\Phi_{\delta_n}}$  in Abhängigkeit von  $B_n f$  und  $\varphi_{\delta_n}$  darzustellen.

**Korollar 5.4** Mit obigen Übereinkünften gilt

$$\|B_n f - \mathcal{I}_n B_n f\|_{\Phi_{\delta_n}}^2 = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\widehat{B_n f}(\omega)|^2}{\varphi_{\delta_n}(\omega)} \left(1 - \frac{\varphi_{\delta_n}(\omega)}{[\varphi_{\delta_n}, 1]_n(\omega)}\right) d\omega.$$

**Beweis:** Aufgrund der Orthogonalitätsbeziehung gelten die Gleichheiten

$$\begin{aligned} \|B_n f - \mathcal{I}_n B_n f\|_{\Phi_{\delta_n}}^2 &= \|B_n f\|_{\Phi_{\delta_n}}^2 - \|\mathcal{I}_n B_n f\|_{\Phi_{\delta_n}}^2 \\ &= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\widehat{B_n f}(\omega)|^2}{\varphi_{\delta_n}(\omega)} d\omega - \\ &\quad (2\pi)^{-d} \int_{\frac{1}{h^n}\mathcal{C}} \frac{|[\widehat{B_n f}, 1]_n(\omega)|^2}{[\varphi_{\delta_n}, 1]_n(\omega)} d\omega \\ &= (2\pi)^{-d} \int_{\frac{1}{h^n}\mathcal{C}} \frac{|\hat{f}(\omega)|^2}{\varphi_{\delta_n}(\omega)} d\omega - \\ &\quad (2\pi)^{-d} \int_{\frac{1}{h^n}\mathcal{C}} \frac{|\hat{f}(\omega)|^2}{[\varphi_{\delta_n}, 1]_n(\omega)} d\omega \\ &= (2\pi)^{-d} \int_{\frac{1}{h^n}\mathcal{C}} \frac{|\hat{f}(\omega)|^2}{\varphi_{\delta_n}(\omega)} \left(1 - \frac{\varphi_{\delta_n}(\omega)}{[\varphi_{\delta_n}, 1]_n(\omega)}\right) d\omega. \end{aligned}$$

□

Die Aussage von Korollar 5.4 gilt für bandbreitenbeschränkte Funktionen  $B_n f$ . Wir sollten also noch, auch entsprechend unserer einführenden Erläuterungen dieses Abschnittes, eine Beziehung zwischen  $\|f - \mathcal{I}_n f\|_{\Phi_{\delta_n}}$ ,  $\|f - B_n f\|_{\Phi_{\delta_n}}$  und  $\|(E - \mathcal{I}_n)B_n f\|_{\Phi_{\delta_n}}$  finden.

Benutzen wir nochmals die bereits mehrfach angesprochene Orthogonalitätseigenschaft, so bekommen wir die gesuchte Beziehung, wie der folgende Satz verdeutlicht.

**Satz 5.5** Für  $f \in \mathcal{F}_{\Phi_{\delta_n}}$  gilt die Abschätzung

$$\|(E - \mathcal{I}_n)f\|_{\Phi_{\delta_n}} \leq 2\|f - B_n f\|_{\Phi_{\delta_n}} + \|(E - \mathcal{I}_n)B_n f\|_{\Phi_{\delta_n}}. \quad (5.19)$$

**Beweis:** Sofort ist aus den Eigenschaften der Interpolation mit radialen Basisfunktionen die Beziehung

$$\|\mathcal{I}_n(f - B_n f)\|_{\Phi_{\delta_n}} \leq \|f - B_n f\|_{\Phi_{\delta_n}}$$

ersichtlich. Damit ist

$$\begin{aligned} \|f - \mathcal{I}_n f\|_{\Phi_{\delta_n}} &\leq \|f - B_n f\|_{\Phi_{\delta_n}} + \|B_n f - \mathcal{I}_n B_n f\|_{\Phi_{\delta_n}} + \\ &\quad \|\mathcal{I}_n(B_n f - f)\|_{\Phi_{\delta_n}} \\ &\leq 2\|f - B_n f\|_{\Phi_{\delta_n}} + \|(E - \mathcal{I}_n)B_n f\|_{\Phi_{\delta_n}}. \end{aligned}$$

□

Wir zerlegen also  $\|(E - \mathcal{I}_n)f\|_{\Phi_{\delta_n}}$  in einen Term, der vom Verhalten der Funktion  $f$  außerhalb einer Nullumgebung abhängt und in einen Term, der den Fehler bei der Interpolation einer bandbreitenbeschränkten Funktion berücksichtigt. Im nächsten Schritt wollen wir den zweiten Term auf der rechten Seite von (5.19) näher betrachten. Korollar 5.4 wird uns dabei als Ausgangspunkt dienen. Zur Vereinfachung der Abschätzung definieren wir vorher noch eine Konstante, die von der mit  $a$  skalierten radialen Basisfunktion  $\Phi$  abhängt.

**Definition 5.6** Sei  $\Phi_{\delta_0}(\cdot) = \Phi_a(\cdot) = \Phi(\cdot/a)$  die mit  $a$ ,  $a \in \mathbb{R}^d$ , skalierte radiale Basisfunktion zu  $\Phi$  und  $\varphi_{\delta_0}$  ihre Fouriertransformierte. Dann sei die Konstante  $C_{\Phi_{\delta_0}} = C_{\Phi_a}$  definiert durch

$$C_{\Phi_{\delta_0}} := \sup_{\omega \in (-\pi, \pi)^d} \left( 1 - \frac{\varphi_{\delta_0}(\omega)}{[\varphi_{\delta_0}, 1]_0(\omega)} \right).$$

**Lemma 5.7** Falls  $\varphi_{\delta_0}(\omega) \geq 0$  für alle  $\omega \in \mathcal{C}$ , so gilt

$$0 \leq 1 - \frac{\varphi_{\delta_0}(\omega)}{[\varphi_{\delta_0}, 1]_0(\omega)} \leq 1 \quad \text{für alle } \omega \in \mathcal{C},$$

insbesondere ist  $1 - \frac{\varphi_{\delta_0}(\omega)}{[\varphi_{\delta_0}, 1]_0(\omega)} < 1$ , falls  $\varphi_{\delta_0}(\omega) > 0$  für alle  $\omega \in \mathcal{C}$ .

**Beweis:** Die Aussagen des Lemmas sind leicht nachvollziehbar, denn es ist

$$0 \leq \frac{\varphi_{\delta_0}(\omega)}{[\varphi_{\delta_0}, 1]_0(\omega)} = \frac{\varphi_{\delta_0}(\omega)}{\sum_{\beta \in 2\pi\mathbb{Z}^d} \varphi_{\delta_0}(\omega + \beta)} \leq \frac{\varphi_{\delta_0}(\omega)}{\varphi_{\delta_0}(\omega)} = 1.$$

□

Eine eingehende Untersuchung der Konstanten  $C_{\Phi_{\delta_0}}$ , speziell deren Verhalten für verschiedene  $\Phi$ 's, möchten wir auf einen der nachfolgenden Abschnitte verschieben.

Mit Hilfe der Konstanten  $C_{\Phi_{\delta_0}}$  und der Zusammenfassung aller obigen Ergebnisse bekommen wir als ein Hauptresultat dieses Abschnittes

**Theorem 5.8** *Stamme  $f$  aus dem Native Space  $\mathcal{F}_{\Phi_{\delta_n}}$  und bezeichne  $B_n f$  die entsprechende bandbreitenbeschränkte Funktion mit*

$$\widehat{B_n f}(\omega) = \begin{cases} \hat{f}(\omega) & : \omega \in \frac{1}{h^n} \mathcal{C} \\ 0 & : \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt im stationären Fall mit  $\delta_n = ah^n$  die Abschätzung

$$\|f - \mathcal{I}_n f\|_{\Phi_{\delta_n}} \leq 2\|f - B_n f\|_{\Phi_{\delta_n}} + \sqrt{C_{\Phi_{\delta_0}}} \|B_n f\|_{\Phi_{\delta_n}}. \quad (5.20)$$

**Beweis:** Zuerst beweisen wir

$$\begin{aligned} & \sup_{\omega \in (-\frac{\pi}{h^n}, \frac{\pi}{h^n})^d} \left( 1 - \frac{\varphi_{\delta_n}(\omega)}{[\varphi_{\delta_n}, 1]_n(\omega)} \right) \\ &= \sup_{\omega \in (-\frac{\pi}{h^n}, \frac{\pi}{h^n})^d} \left( 1 - \frac{\varphi_{\delta_0}(h^n \omega)}{\sum_{\beta \in 2\pi \mathbb{Z}^d} \varphi_{\delta_0}(h^n \omega + \beta)} \right) \\ &= \sup_{\xi \in (-\pi, \pi)^d} \left( 1 - \frac{\varphi_{\delta_0}(\xi)}{[\varphi_{\delta_0}, 1]_0(\xi)} \right), \end{aligned}$$

wobei die letzte Zeile gerade die Definition der Konstanten  $C_{\Phi_{\delta_0}}$  darstellt. Mit Korollar 5.4 ergibt sich nun

$$\begin{aligned} \|(E - \mathcal{I}_n)B_n f\|_{\Phi_{\delta_n}}^2 &= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\widehat{B_n f}(\omega)|^2}{\varphi_{\delta_n}(\omega)} \left( 1 - \frac{\varphi_{\delta_n}(\omega)}{[\varphi_{\delta_n}, 1]_n(\omega)} \right) d\omega \\ &= (2\pi)^{-d} \int_{\frac{1}{h^n} \mathcal{C}} \frac{|\hat{f}(\omega)|^2}{\varphi_{\delta_n}(\omega)} \left( 1 - \frac{\varphi_{\delta_n}(\omega)}{[\varphi_{\delta_n}, 1]_n(\omega)} \right) d\omega \\ &\leq C_{\Phi_{\delta_0}} \|B_n f\|_{\Phi_{\delta_n}}^2. \end{aligned}$$

In Verbindung mit Satz 5.5 kommen wir so zur Behauptung.  $\square$

Etwas schwächere Abschätzungen, die aber bei einer Multilevel-Abschätzung sinnvoll eingesetzt werden können, leiten sich aus Theorem 5.8 ab und sollen nachfolgend erläutert werden.

Interessant für obige Abschätzung wäre der Fall, in dem der Term  $\|f - B_n f\|_{\Phi_{\delta_n}}$  verschwindet. Dazu sei Folgendes erwähnt.

**Bem.** *Eine Funktion  $g$ , die in  $\mathcal{F}_{\Phi_{\delta_n}}$  liegt, muß notwendigerweise eine Fourier-transformierte  $\hat{g}$  besitzen, die zumindest in den Nullstellen von  $\hat{\Phi}_{\delta_n}$  ebenfalls verschwindet.*

Stammt  $f$  aus dem Native Space  $\mathcal{F}_{\Phi_{\delta_n}}$ , so verschwindet  $\|f - B_n f\|_{\Phi_{\delta_n}}$  genau dann, wenn  $\text{supp} \hat{f} = \text{supp} \widehat{B_n f} \subseteq [-\frac{1}{h^n} \pi, \frac{1}{h^n} \pi]^d$ .

**Korollar 5.9** *Für  $f \in \mathcal{F}_{\Phi_{\delta_n}}$  und  $\text{supp} \hat{f} \subseteq [-\frac{1}{h^n} \pi, \frac{1}{h^n} \pi]^d$  gilt*

$$\|f - \mathcal{I}_n f\|_{\Phi_{\delta_n}} \leq \sqrt{C_{\Phi_{\delta_0}}} \|f\|_{\Phi_{\delta_n}}.$$

Setzt man die radiale Basisfunktion  $\Phi_{\delta_n}$  als bandbreitenbeschränkt voraus, so ergibt sich sogar

**Lemma 5.10** *Die Fouriertransformierte der radialen Basisfunktion  $\Phi_{\delta_n}$  besitze einen Träger in dem Kubus  $\frac{1}{h^n}\mathcal{C} = [-\frac{1}{h^n}\pi, \frac{1}{h^n}\pi]^d$ . Desweiteren sei  $f$  aus dem zur radialen Basisfunktion  $\Phi_{\delta_n}$  gehörigen Native Space  $\mathcal{F}_{\Phi_{\delta_n}}$ . Dann gilt*

$$\|f - \mathcal{I}_n f\|_{\Phi_{\delta_n}} = 0.$$

Die Aussage des Lemmas deckt sich im Grunde genommen mit dem Inhalt des sogenannten Shannon-Sampling-Theorems. Einzelheiten dazu findet man unter anderem in [10] oder auch in dem historischen Überblick von Butzer/Stens [11]. Da wir auf anderem Wege auf die Aussage des Lemmas gestoßen sind, geben wir einige kurze Beweisgedanken.

**Beweis:** Da  $\hat{\Phi}_{\delta_n} = \varphi_{\delta_n}$  einen Träger in  $\frac{1}{h^n}\mathcal{C} = [-\frac{1}{h^n}\pi, \frac{1}{h^n}\pi]^d$  besitzt und  $f$  aus dem Raum  $\mathcal{F}_{\Phi_{\delta_n}}$  stammt, muß die Fouriertransformierte  $\hat{f}$  von  $f$  notwendigerweise ebenfalls einen Träger in  $\frac{1}{h^n}\mathcal{C}$  haben. Das heißt, es ist  $\|f - B_n f\|_{\Phi_{\delta_n}} = 0$ . Für eine radiale Basisfunktion  $\Phi_{\delta_n}$  mit  $\text{supp } \varphi_{\delta_n} \subseteq [-\frac{1}{h^n}\pi, \frac{1}{h^n}\pi]^d$  gilt  $C_{\Phi_{\delta_0}} = 0$  und daraus folgt die Behauptung.  $\square$

Auf unserer Suche nach einer Multilevel-Fehlerabschätzung führen wir für den besagten Übergang von  $\|\cdot\|_{\Phi_{\delta_n}}$  nach  $\|\cdot\|_{\Phi_{\delta_{n-1}}}$  eine Konstante  $K_{\Phi_{\delta_{n-1}}}$  ein.

**Definition 5.11** *Die Konstante  $K_{\Phi_{\delta_{n-1}}}$ , die von der mit  $\delta_{n-1} = a \cdot h^{n-1}$  skalierten radialen Basisfunktion  $\Phi_{\delta_{n-1}}$  beziehungsweise ihrer Fouriertransformierten abhängt, sei erklärt durch*

$$0 \leq K_{\Phi_{\delta_{n-1}}} := \inf_{\omega \notin \frac{1}{h^n}\mathcal{C}} \frac{\varphi_{\delta_{n-1}}(h\omega)}{\varphi_{\delta_{n-1}}(\omega)} = \inf_{\omega \in \mathbb{R}^d \setminus \frac{1}{h^n}\mathcal{C}} \frac{\varphi_{\delta_{n-1}}(h\omega)}{\varphi_{\delta_{n-1}}(\omega)}.$$

Mit dieser Konstanten können wir die Abschätzung des ersten Terms auf der rechten Seite von (5.20) in Angriff nehmen.

**Satz 5.12** *Seien  $f$  aus dem Native Space  $\mathcal{F}_{\Phi_{\delta_n}}$  und der Tiefpaß-Operator  $B_n$  wie bisher erklärt, so gilt im stationären Fall mit  $\delta_n = a \cdot h^n$  beziehungsweise  $\delta_{n-1} = a \cdot h^{n-1}$  die Abschätzung*

$$\|f - B_n f\|_{\Phi_{\delta_n}}^2 \leq \frac{h^{-d}}{K_{\Phi_{\delta_0}}} \|f\|_{\Phi_{\delta_{n-1}}}^2. \quad (5.21)$$

**Beweis:** Eine einfache Rechnung ergibt

$$\begin{aligned} \|f - B_n f\|_{\Phi_{\delta_n}}^2 &= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{f}(\omega) - \widehat{B_n f}(\omega)|^2}{\varphi_{\delta_n}(\omega)} d\omega \\ &= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{f}(\omega) - \widehat{B_n f}(\omega)|^2}{h^d \varphi_{\delta_{n-1}}(h\omega)} d\omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (2\pi)^{-d} h^{-d} \int_{\mathbb{R}^d \setminus \frac{1}{h^n} \mathcal{C}} \frac{|\hat{f}(\omega)|^2}{\varphi_{\delta_{n-1}}(h\omega)} d\omega \\
&\leq (2\pi)^{-d} h^{-d} \int_{\mathbb{R}^d \setminus \frac{1}{h^n} \mathcal{C}} \frac{|\hat{f}(\omega)|^2}{K_{\Phi_{\delta_{n-1}}} \cdot \varphi_{\delta_{n-1}}(\omega)} d\omega \\
&\leq (2\pi)^{-d} \frac{h^{-d}}{K_{\Phi_{\delta_{n-1}}}} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{f}(\omega)|^2}{\varphi_{\delta_{n-1}}(\omega)} d\omega.
\end{aligned}$$

Betrachten wir unsere Konstante  $K_{\Phi_{\delta_{n-1}}}$  etwas genauer, so wird uns klar, daß im stationären Fall mit  $\delta_{n-1} = a \cdot h^{n-1}$  die Konstante  $K_{\Phi_{\delta_{n-1}}} = K_{\Phi_{\delta_0}}$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ , ist, denn der Quotient  $\frac{\varphi_{\delta_{n-1}}(h\omega)}{\varphi_{\delta_{n-1}}(\omega)}$  kann für  $\xi = h^{n-1}\omega$  geschrieben werden als

$$\begin{aligned}
\frac{\varphi_{\delta_{n-1}}(h\omega)}{\varphi_{\delta_{n-1}}(\omega)} &= \frac{\varphi_{\delta_0}(h^{n-1}h\omega)}{\varphi_{\delta_0}(h^{n-1}\omega)} \\
&= \frac{\varphi_{\delta_0}(h\xi)}{\varphi_{\delta_0}(\xi)},
\end{aligned}$$

also

$$\inf_{\omega \in \mathbb{R}^d \setminus \frac{1}{h^n} \mathcal{C}} \frac{\varphi_{\delta_{n-1}}(h\omega)}{\varphi_{\delta_{n-1}}(\omega)} = \inf_{\xi \in \mathbb{R}^d \setminus \frac{1}{h} \mathcal{C}} \frac{\varphi_{\delta_0}(h\xi)}{\varphi_{\delta_0}(\xi)} = K_{\Phi_{\delta_0}}.$$

□

Die Abschätzung in (5.21) stellt eine Art Jackson-Schranke dar, wobei der Begriff Jackson-Schranke aus historischen Gründen gewählt wird.

Weiterhin sollten wir eine Konstante  $L_{\Phi_{\delta_{n-1}}}$  einführen, die die Bedingung

$$0 \leq L_{\Phi_{\delta_{n-1}}} \leq \frac{\varphi_{\delta_{n-1}}(h\omega)}{\varphi_{\delta_{n-1}}(\omega)}$$

für alle  $\omega$  aus  $\frac{1}{h^n} \mathcal{C} = [-\frac{1}{h^n} \pi, \frac{1}{h^n} \pi]^d$  erfüllt.

**Definition 5.13** Durch

$$0 \leq L_{\Phi_{\delta_{n-1}}} := \inf_{\omega \in \frac{1}{h^n} \mathcal{C}} \frac{\varphi_{\delta_{n-1}}(h\omega)}{\varphi_{\delta_{n-1}}(\omega)} = \inf_{\omega \in [-\frac{1}{h^n} \pi, \frac{1}{h^n} \pi]^d} \frac{\varphi_{\delta_{n-1}}(h\omega)}{\varphi_{\delta_{n-1}}(\omega)}$$

sei mit den bisherigen Notationen eine Konstante  $L_{\Phi_{\delta_{n-1}}}$  definiert.

Damit bekommen wir

**Satz 5.14** Für die bandbreitenbeschränkte Funktion  $B_n f$  gilt mit  $f \in \mathcal{F}_{\Phi_{\delta_{n-1}}}$  und  $\delta_n = ah^n$  beziehungsweise  $\delta_{n-1} = ah^{n-1}$  die Abschätzung

$$\|B_n f\|_{\Phi_{\delta_n}}^2 \leq \frac{h^{-d}}{L_{\Phi_{\delta_0}}} \|f\|_{\Phi_{\delta_{n-1}}}^2.$$

**Beweis:** Durch Ausnutzung der Definition der Konstanten  $L_{\Phi_{\delta_{n-1}}}$  folgt die Behauptung des Satzes, denn

$$\begin{aligned}
\|B_n f\|_{\Phi_{\delta_n}}^2 &= (2\pi)^{-d} \int_{\frac{1}{h^n}\mathcal{C}} \frac{|\hat{f}(\omega)|^2}{\varphi_{\delta_n}(\omega)} d\omega \\
&= (2\pi h)^{-d} \int_{\frac{1}{h^n}\mathcal{C}} \frac{|\hat{f}(\omega)|^2}{\varphi_{\delta_{n-1}}(h\omega)} d\omega \\
&\leq (2\pi)^{-d} \frac{h^{-d}}{L_{\Phi_{\delta_{n-1}}}} \int_{\frac{1}{h^n}\mathcal{C}} \frac{|\hat{f}(\omega)|^2}{\varphi_{\delta_{n-1}}(\omega)} d\omega \\
&= \frac{h^{-d}}{L_{\Phi_{\delta_{n-1}}}} \|B_n f\|_{\Phi_{\delta_{n-1}}}^2 \\
&\leq \frac{h^{-d}}{L_{\Phi_{\delta_{n-1}}}} \|f\|_{\Phi_{\delta_{n-1}}}^2.
\end{aligned}$$

Ähnliche Überlegungen wie zur Konstanten  $K_{\Phi_{\delta_0}}$  lassen uns erkennen, daß  $L_{\Phi_{\delta_{n-1}}} = L_{\Phi_{\delta_0}}$  für  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ , wählbar ist.  $\square$

Diese wesentlichen Hilfsmittel bringen uns nun in die Lage, eine finale Fehlerabschätzung für die Multilevel-Interpolation mit radialen Basisfunktionen im stationären Fall auf Gitterdaten anzugeben. So schätzen wir mit Theorem 5.8 den Fehlerterm  $f - s_0 - s_1 - \dots - s_n$  wie folgt ab

$$\begin{aligned}
\|f - s_0 - s_1 - \dots - s_n\|_{\Phi_{\delta_n}} &\leq 2\|(E - B_n)(f - s_0 - \dots - s_{n-1})\|_{\Phi_{\delta_n}} \\
&\quad + \sqrt{C_{\Phi_{\delta_0}}} \|B_n(f - s_0 - \dots - s_{n-1})\|_{\Phi_{\delta_n}}.
\end{aligned}$$

Da wir Theorem 5.8 wieder auf die rechte Seite dieser Ungleichung anwenden werden, müssen wir von der Native Space-Norm  $\|\cdot\|_{\Phi_{\delta_n}}$  zur Norm  $\|\cdot\|_{\Phi_{\delta_{n-1}}}$  übergehen. Den Term  $\|(E - B_n)(f - s_0 - \dots - s_{n-1})\|_{\Phi_{\delta_n}}$  schätzen wir dazu weiter mit Satz 5.12 und den Ausdruck  $\|B_n(f - s_0 - \dots - s_{n-1})\|_{\Phi_{\delta_n}}$  mit Satz 5.14 ab. Daß wir dabei den „Umweg“ über bandbreitenbeschränkte Funktionen gehen und dadurch die Konstanten  $K_{\Phi_{\delta_0}}$  und  $L_{\Phi_{\delta_0}}$  einführen, haben wir bereits, insbesondere am Beispiel der Gaussians am Anfang dieses Abschnittes, besprochen.

Auch auf die Konstante  $C_{\Phi_{\delta_0}}$  hat der Umgang mit bandbreitenbeschränkten Funktionen einen entscheidenden Einfluß, denn wie wir aus dem Beweis zu Theorem 5.8 sehen, benötigen wir daher eine Abschätzung des Terms  $1 - \frac{\varphi_{\delta_n}(\omega)}{[\varphi_{\delta_n}, 1]_n(\omega)}$  nur für  $\omega \in \frac{1}{h^n}\mathcal{C}$  beziehungsweise eine Abschätzung von  $1 - \frac{\varphi_{\delta_0}(\omega)}{[\varphi_{\delta_0}, 1]_0(\omega)}$  nur für  $\omega \in \mathcal{C}$ . In den folgenden Abschnitten werden wir erkennen, daß der Term  $1 - \frac{\varphi_{\delta_0}(\omega)}{[\varphi_{\delta_0}, 1]_0(\omega)}$  für  $\omega \in \mathcal{C}$  kleiner als Eins abgeschätzt werden kann, was aber für  $\omega \in \mathbb{R}^d \setminus \mathcal{C}$  nicht so gesagt werden kann.

Wiederholte Anwendungen dieser Vorgehensweise führen uns dann zum Hauptresultat dieses Abschnittes.

**Theorem 5.15** Sei  $s_k$  die Interpolante zu  $f - s_0 - s_1 - \dots - s_{k-1}$  auf dem Datensatz  $h^k \mathbb{Z}^d$  bezüglich der radialen Basisfunktion  $\Phi_{\delta_k}$ .

Dann folgt für die Multilevel-Interpolation im stationären Fall mit  $\delta_k = a \cdot h^k$ ,  $k = 0, \dots, n$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , die Fehlerabschätzung

$$\|f - s_0 - s_1 - \dots - s_n\|_{\Phi_{\delta_n}} \leq \left\{ 2\|(E - B_0)f\|_{\Phi_{\delta_0}} + \sqrt{C_{\Phi_{\delta_0}}} \|B_0 f\|_{\Phi_{\delta_0}} \right\} \cdot \left\{ h^{-\frac{d}{2}} \left( \frac{2}{\sqrt{K_{\Phi_{\delta_0}}}} + \frac{\sqrt{C_{\Phi_{\delta_0}}}}{\sqrt{L_{\Phi_{\delta_0}}}} \right) \right\}^n. \quad (5.22)$$

**Beweis:** Die Behauptung ist für  $n = 0$  identisch mit der Aussage von Theorem 5.8. Für  $n \geq 1$  gilt

$$\begin{aligned} \|f - s_0 - s_1 - \dots - s_n\|_{\Phi_{\delta_n}} &\leq 2\|(E - B_n)(f - s_0 - \dots - s_{n-1})\|_{\Phi_{\delta_n}} \\ &\quad + \sqrt{C_{\Phi_{\delta_0}}} \|B_n(f - s_0 - \dots - s_{n-1})\|_{\Phi_{\delta_n}} \\ &\leq \left\{ \frac{2h^{-d/2}}{\sqrt{K_{\Phi_{\delta_0}}}} + \frac{h^{-d/2} \sqrt{C_{\Phi_{\delta_0}}}}{\sqrt{L_{\Phi_{\delta_0}}}} \right\} \cdot \\ &\quad \|f - s_0 - \dots - s_{n-1}\|_{\Phi_{\delta_{n-1}}}. \end{aligned}$$

Eine fortlaufende Anwendung von Theorem 5.8, Satz 5.12 und Satz 5.14 führt zu der Behauptung des Theorems.  $\square$

Von großem Interesse erfüllt uns die Frage, unter welchen Umständen der Term

$$\left\{ h^{-\frac{d}{2}} \left( \frac{2}{\sqrt{K_{\Phi_{\delta_0}}}} + \frac{\sqrt{C_{\Phi_{\delta_0}}}}{\sqrt{L_{\Phi_{\delta_0}}}} \right) \right\}$$

in (5.22) echt kleiner als Eins wird. Um diese Frage befriedigend beantworten zu können, bedarf es genaueren Untersuchungen über das Verhalten der benutzten Konstanten in Abhängigkeit der radialen Basisfunktion  $\Phi_{\delta_0} = \Phi_a$  sowie der „Schrittweite“  $h$ . Diese Untersuchungen wollen wir exemplarisch in den folgenden Abschnitten an einigen ausgewählten radialen Basisfunktionen vornehmen.

Bevor wir fortfahren, erscheint es uns wichtig zu sein, auf die eigentliche Bedeutung unseres Hauptresultates hinzuweisen. Grob gesprochen haben wir eine Fehlerabschätzung für die Multilevel-Interpolation mit radialen Basisfunktionen erhalten, die hauptsächlich durch den Übergang von einem skalierten Native Space zu einem anderen skalierten Native Space entstanden ist. Leider konnten wir dabei nicht verhindern, daß wir unter der einschränkenden Voraussetzung von Gitterdaten und im stationären Fall über den „Umweg“ bandbreitenbeschränkter Funktionen arbeiten müssen. Doch soll uns dies nicht davon abhalten, die Abschätzung (5.22) aus Theorem 5.15 als wesentliches Ergebnis herauszustreichen. Bei dieser Abschätzung ist es uns gelungen, die rechte Seite frei von Ableitungen von  $f$  zu halten; sie ist also unabhängig von der Glätte von  $f$ , unsere Ausgangsfunktion  $f$  muß nur im Native Space liegen. Die Native Space-Normen auf der linken und rechten Seite von (5.22) unterscheiden sich nur durch die unterschiedliche Skalierung der radialen Basisfunktion  $\Phi$ .

## 5.2 Beispiele für die Konstanten $K_{\Phi_{\delta_0}}$ , $L_{\Phi_{\delta_0}}$ und $C_{\Phi_{\delta_0}}$

### 5.2.1 Die Konstanten $K_{\Phi_{\delta_0}}$ , $L_{\Phi_{\delta_0}}$ und $C_{\Phi_{\delta_0}}$ bei Gaussians

Dieser Abschnitt soll dazu dienen, die in Abschnitt 5.1 verwendeten Konstanten näher zu spezifizieren. Beginnen wollen wir mit den Konstanten  $K_{\Phi_{\delta_0}}$  und  $L_{\Phi_{\delta_0}}$ . Diese Konstanten sind abhängig vom Quotienten

$$\frac{\varphi_{\delta_0}(h\omega)}{\varphi_{\delta_0}(\omega)}.$$

Im speziellen Fall der Gaussians (oder auch Gaußlocken genannt), das heißt

$$\Phi(x) = e^{-\alpha\|x\|^2}, \quad \alpha > 0,$$

beziehungsweise für die (klassische) Fouriertransformierte

$$\hat{\Phi}(\omega) = \varphi(\omega) = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{d/2} e^{-\frac{\|\omega\|^2}{4\alpha}},$$

ergibt sich für den Quotienten  $\frac{\varphi_{\delta_0}(h\omega)}{\varphi_{\delta_0}(\omega)} = \frac{\varphi_a(h\omega)}{\varphi_a(\omega)}$  dementsprechend

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_{\delta_0}(h\omega)}{\varphi_{\delta_0}(\omega)} &= \frac{a^d \varphi(a h \omega)}{a^d \varphi(a \omega)} \\ &= e^{\frac{\|a \cdot h \omega\|^2}{4\alpha} \left(\frac{1}{h^2} - 1\right)}. \end{aligned}$$

Zu Beginn des Abschnittes 5.1 hatten wir vorausgesetzt, daß  $0 < h < 1$ . Somit ist  $\frac{1}{h^2} - 1 > 0$ . Folglich kann für  $\omega \notin \frac{1}{h}\mathcal{C}$  und hinreichend kleines  $\alpha$  der Quotient  $\frac{\varphi_{\delta_0}(h\omega)}{\varphi_{\delta_0}(\omega)}$  beliebig groß gemacht werden; mit anderen Worten kann die Konstante  $K_{\Phi_{\delta_0}}$  beliebig groß gewählt werden, wenn nur  $\alpha$  hinreichend klein ist.

Leider besitzt die Größe  $L_{\Phi_{\delta_0}}$  nicht solch eine schöne Eigenschaft, denn im Fall der Gaussians ist leicht ersichtlich, daß die Konstante  $L_{\Phi_{\delta_0}}$  so gewählt werden muß, daß sie

$$0 \leq L_{\Phi_{\delta_0}} \leq 1$$

erfüllt. Da wir den Term  $\sqrt{\frac{C_{\Phi_{\delta_0}}}{L_{\Phi_{\delta_0}}}}$  möglichst gut nach unten abschätzen wollen,

sollten wir  $L_{\Phi_{\delta_0}}$  maximal wählen, also  $L_{\Phi_{\delta_0}} = 1$ .

Als letzte der drei Konstanten betrachten wir  $C_{\Phi_{\delta_0}}$ . Für das Verhalten von  $C_{\Phi_{\delta_0}}$  sind die Fouriertransformierten der Gaussians verantwortlich. Wie wir bereits aus Abschnitt 5.1 wissen, gilt

$$0 \leq 1 - \frac{\varphi_{\delta_0}(\omega)}{[\varphi_{\delta_0}, 1]_0(\omega)} \leq 1$$

für alle  $\omega$  aus dem Kubus  $\mathcal{C} = [-\pi, \pi]^d$ . Eine für gewisse  $\omega$  schärfere Abschätzung liefert der folgende Satz, der zum Teil angelehnt ist an [2].

**Satz 5.16** *Setzen wir*

$$E_\alpha(\omega) := \sum_{\beta \in 2\pi\mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} \frac{\varphi_{\delta_0}(\omega + \beta)}{\varphi_{\delta_0}(\omega)},$$

so haben wir die Ungleichung

$$1 - \frac{\varphi_{\delta_0}(\omega)}{[\varphi_{\delta_0}, 1]_0(\omega)} \leq E_\alpha(\omega) \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} e^{-(\pi a)^2(\|k\|^2 - \|k\|_1)/\alpha_0}$$

für  $\|\omega\|_\infty \leq \pi$ ,  $\alpha \leq \alpha_0$ .

Darüber hinaus gilt

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} E_\alpha(\omega) = 0 \quad (5.23)$$

für alle  $\omega \in \mathcal{C}$  mit  $\|\omega\|_\infty < \pi$  und die Konvergenz ist gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von  $(-\pi, \pi)^d$ . Mit anderen Worten gilt

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \left( 1 - \frac{\varphi_{\delta_0}(\omega)}{[\varphi_{\delta_0}, 1]_0(\omega)} \right) = 0$$

für  $\omega \in (-\pi, \pi)^d$ .

**Beweis:** Es gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned} 0 \leq 1 - \frac{\varphi_{\delta_0}(\omega)}{[\varphi_{\delta_0}, 1]_0(\omega)} &\leq \sum_{\beta \in 2\pi\mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} \frac{\varphi_{\delta_0}(\omega + \beta)}{\varphi_{\delta_0}(\omega)} \\ &= E_\alpha(\omega) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} e^{-(\|a\omega + 2\pi a k\|^2 - \|a\omega\|^2)/4\alpha} \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} e^{-a^2(\|\omega + 2\pi k\|^2 - \|\omega\|^2)/4\alpha}. \end{aligned}$$

Weiter ist mit  $k \in \mathbb{Z}^d$ ,  $\omega \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{aligned} e^{-(\|a\omega + 2\pi a k\|^2 - \|a\omega\|^2)/4\alpha} &= e^{-a^2(4\pi\omega^T k + 4\pi^2\|k\|^2)/4\alpha} \\ &= e^{-a^2\pi(\omega^T k + \pi\|k\|^2)/\alpha}. \end{aligned}$$

Mit der Ungleichung

$$\begin{aligned} \pi\|k\|^2 + \omega^T k &\geq \pi\|k\|^2 - \pi\|k\|_1 \\ &= \pi(\|k\|^2 - \|k\|_1) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

für jedes  $k \in \mathbb{Z}^d$  und jedes  $\omega \in [-\pi, \pi]^d$  kommen wir zu

$$\begin{aligned} E_\alpha(\omega) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} e^{-a^2\pi(\omega^T k + \pi\|k\|^2)/\alpha} \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} e^{-a^2\pi^2(\|k\|^2 - \|k\|_1)/\alpha} \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}} e^{-a^2\pi^2(\|k\|^2 - \|k\|_1)/\alpha_0} \end{aligned}$$

für  $\alpha \leq \alpha_0$ .

Sei nun  $\omega \in [-\pi, \pi]^d$  mit  $\|\omega\|_\infty < \pi$  fest gewählt. Weiterhin sei  $\epsilon > 0$  beliebig vorgegeben und  $N$  hinreichend groß, so daß

$$\sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^d \\ \|k\|_\infty > N}} e^{-a^2(\|\omega+2\pi k\|^2 - \|\omega\|^2)/4} \leq \epsilon.$$

Nun können wir auch ein  $\alpha_\epsilon \leq 1$  so klein wählen, daß

$$\sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\} \\ \|k\|_\infty \leq N}} e^{-a^2(\|\omega+2\pi k\|^2 - \|\omega\|^2)/4\alpha} \leq \epsilon$$

für  $\alpha \leq \alpha_\epsilon$  und  $\omega \in (-\pi, \pi)^d$ .

Somit haben wir eine Schranke

$$E_\alpha(\omega) \leq 2\epsilon, \quad \alpha \leq \alpha_\epsilon \leq 1$$

erhalten.

Da  $\epsilon$  beliebig vorgegeben war, ist (5.23) bewiesen.

Die behauptete gleichmäßige Konvergenz folgt aus Dinis Theorem [6].  $\square$

Offen bleibt noch der Fall  $\omega \in \mathcal{C} = [-\pi, \pi]^d$  mit  $\|\omega\|_\infty = \pi$ . Diesen Fall deckt der folgende Satz ab.

**Satz 5.17** *Sei  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_d) \in [-\pi, \pi]^d$  fest mit  $\|\omega\|_\infty = \pi$  und die Zahl  $m$  sei erklärt durch*

$$m := \#\{\omega_i : |\omega_i| = \pi, i = 1, \dots, d\}.$$

*Das heißt  $m$  ist die Anzahl der Komponenten von  $\omega$ , dessen Betrag gleich  $\pi$  ist. Dann gilt*

$$1 - \frac{\varphi_{\delta_0}(\omega)}{[\varphi_{\delta_0}, 1]_0(\omega)} \rightarrow 1 - \frac{1}{2^m}$$

für  $\alpha \rightarrow 0$ .

**Beweis:** Zuerst definieren wir eine Menge  $M_\omega$  durch

$$M_\omega := \{\beta = (\beta_1, \dots, \beta_d) \in 2\pi\mathbb{Z}^d \mid \|\omega + \beta\| \neq \|\omega\|\}.$$

Damit können wir, da  $\varphi(\omega) = \varphi(-\omega)$ , die Summe  $\sum_{\beta \in 2\pi\mathbb{Z}^d} \varphi_{\delta_0}(\omega + \beta)$  abschätzen wie

$$\begin{aligned} \sum_{\beta \in 2\pi\mathbb{Z}^d} \varphi_{\delta_0}(\omega + \beta) &= \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} \varphi_{\delta_0}(\omega) + \sum_{\beta \in M_\omega} \varphi_{\delta_0}(\omega + \beta) \\ &= 2^m \varphi_{\delta_0}(\omega) + \sum_{\beta \in M_\omega} \varphi_{\delta_0}(\omega + \beta) \\ &\geq 2^m \varphi_{\delta_0}(\omega). \end{aligned}$$

Da

$$\sum_{\beta \in M_\omega} \varphi_{\delta_0}(\omega + \beta) = a^d \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{d/2} e^{-a^2 \|\omega\|^2 / 4\alpha} \sum_{\beta \in M_\omega} e^{-a^2 (\|\omega + \beta\|^2 - \|\omega\|^2) / 4\alpha} \leq \epsilon$$

mit  $\epsilon \rightarrow 0$  für  $\alpha \rightarrow 0$ , erhalten wir

$$1 - \frac{\varphi_{\delta_0}(\omega)}{[\varphi_{\delta_0}, 1]_0(\omega)} \rightarrow 1 - \frac{\varphi_{\delta_0}(\omega)}{2^m \varphi_{\delta_0}(\omega)}$$

für  $\alpha \rightarrow 0$  und damit die Behauptung.  $\square$

Wie wir leicht erkennen, nimmt der Term  $1 - \frac{1}{2^m}$  sein Maximum für  $m = d$  an. Daraufhin ergibt sich für die Abschätzung der Konstanten  $C_{\Phi_{\delta_0}}$

**Satz 5.18** *Es gilt für die Gaussians  $\Phi_{\delta_0}(x) = e^{-\alpha \|x/a\|^2}$ , daß*

$$C_{\Phi_{\delta_0}} = 1 - \frac{1}{2^d} + \epsilon$$

mit  $\epsilon \rightarrow 0$  für  $\alpha \rightarrow 0$ .

Alles in allem können wir am Schluß dieses Abschnittes sagen, daß es unter gewissen Umständen möglich ist, den Term

$$\left\{ h^{-\frac{d}{2}} \left( \frac{2}{\sqrt{K_{\Phi_{\delta_0}}}} + \frac{\sqrt{C_{\Phi_{\delta_0}}}}{\sqrt{L_{\Phi_{\delta_0}}}} \right) \right\}$$

sicherlich kleiner als Eins zu bekommen.

Dazu ist es erforderlich, daß  $h$  mit  $0 < h < 1$  mindestens größer als  $\sqrt[d]{1 - \frac{1}{2^d}}$  ist. So ist es zum Beispiel möglich,

$$\left\{ h^{-\frac{d}{2}} \left( \frac{2}{\sqrt{K_{\Phi_{\delta_0}}}} + \frac{\sqrt{C_{\Phi_{\delta_0}}}}{\sqrt{L_{\Phi_{\delta_0}}}} \right) \right\} < 1$$

für ein  $h$  mit  $(1 - \frac{1}{2^d})^{1/d} < h < 1$  zu bekommen, wenn nur  $\alpha$  beziehungsweise  $\alpha/a^2$  hinreichend klein ist.

Die folgenden Abbildungen sollen beispielhaft das Verhalten des für die Konstante  $C_{\Phi_{\delta_0}}$  bestimmenden Quotienten  $1 - \frac{\varphi_{\delta_0}(\omega)}{[\varphi_{\delta_0}, 1]_0(\omega)}$  im ein- und zweidimensionalen Fall verdeutlichen. Dabei zeigt die erste Abbildung im eindimensionalen Fall den Graphen von  $1 - \frac{\varphi_{\delta_0}(\omega)}{[\varphi_{\delta_0}, 1]_0(\omega)}$  für  $a = 1$ ,  $\omega \in [0, 4]$  in jeweils einem Plot für  $\alpha = 0.05$ ,  $\alpha = 0.1$ ,  $\alpha = 0.5$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\alpha = 5$  und  $\alpha = 50$ .

Im zweidimensionalen Fall veranschaulicht Abbildung 2 das Verhalten von  $1 - \frac{\varphi_{\delta_0}(\omega)}{[\varphi_{\delta_0}, 1]_0(\omega)}$  für  $a = 1$ ,  $\alpha = 1$  und  $\omega \in [-4, 4]^2$ .

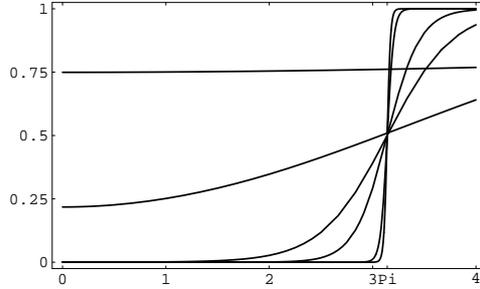


Abbildung 1

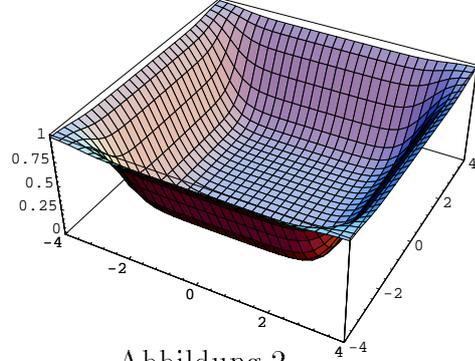


Abbildung 2

### 5.2.2 Die Konstanten $L_{\Phi_{\delta_0}}$ , $K_{\Phi_{\delta_0}}$ , $C_{\Phi_{\delta_0}}$ bei $\Phi(r) = (r^2 + c^2)^{1/2}$

An dieser Stelle wollen wir die Hardy-Multiquadrics  $\Phi(r) = (r^2 + c^2)^{1/2}$  mit  $c > 0$  in Bezug auf das Verhalten der zugehörigen Konstanten  $L_{\Phi_{\delta_0}}$ ,  $K_{\Phi_{\delta_0}}$  und  $C_{\Phi_{\delta_0}}$  betrachten.

Die verallgemeinerte Fouriertransformierte von  $\Phi(r) = (r^2 + c^2)^{1/2}$  ist gegeben durch

$$\hat{\Phi}(\omega) = \varphi(\omega) = -\pi^{-1} \left( \frac{2\pi c}{\|\omega\|} \right)^{(d+1)/2} K_{(d+1)/2}(c\|\omega\|) \quad (5.24)$$

für  $\omega \in \mathbb{R}^d$ . Dabei bezeichne  $K_\nu$  die modifizierte Besselfunktion der 2. Art der Ordnung  $\nu$ ; sie ist positiv und glatt auf  $\mathbb{R}^d$ . Für weitere Eigenschaften der Besselfunktion sei auf Abramowitz/Stegun [1] oder andere Literaturquellen, zum Beispiel [50], verwiesen.

Durch Benutzung einer Integraldarstellung für die Besselfunktion kann Gleichung (5.24) in die Gleichung

$$\varphi(\omega) = \frac{-\pi^{d/2}}{\Gamma(1 + d/2)} c^{d+1} \int_1^\infty e^{-cx\|\omega\|} (x^2 - 1)^{d/2} dx \quad (5.25)$$

überführt werden (Abramowitz/Stegun [1] oder Watson [50]). Diese Form der Darstellung stellt sich als sehr nützlich heraus.

Das folgende Lemma beschränkt das exponentielle Abklingverhalten von  $\varphi$ .

**Lemma 5.19** *Ist  $\|\omega\| > \|\xi\| > 0$ , so gilt*

$$|\varphi(\omega)| \leq e^{-c(\|\omega\| - \|\xi\|)} |\varphi(\xi)|.$$

**Beweis:** Die Aussage ist eine einfache Konsequenz aus (5.25), denn

$$\begin{aligned} |\varphi(\omega)| &= \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma(1+d/2)} c^{d+1} \int_1^\infty e^{-cx(\|\omega\|-\|\xi\|)} e^{-cx\|\xi\|} (x^2-1)^{d/2} dx \\ &\leq e^{-c(\|\omega\|-\|\xi\|)} |\varphi(\xi)|. \end{aligned}$$

□

Bezeichnen wir mit  $I: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  die charakteristische Funktion des Kubus  $\mathcal{C} = [-\pi, \pi]^d$  mit

$$I(\xi) = \begin{cases} 1 & : \xi \in \mathcal{C} \\ 0 & : \xi \notin \mathcal{C} \end{cases},$$

so formulieren wir damit einen wichtigen Schritt auf dem Weg zur Abschätzung der Konstanten  $C_{\Phi_{\delta_0}}$ .

**Lemma 5.20** *Sei  $\xi$  ein fester Punkt des  $\mathbb{R}^d$ . Dann haben wir*

$$\lim_{c \rightarrow \infty} 1 - \frac{\varphi_{\delta_0}(\xi)}{[\varphi_{\delta_0}, 1]_0(\xi)} = 1 - I(\xi)$$

für  $\|\xi\|_\infty \neq \pi$ .

**Beweis:** In Baxter [3] wird unter identischen Voraussetzungen

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \frac{\varphi_{\delta_0}(\xi)}{[\varphi_{\delta_0}, 1]_0(\xi)} = I(\xi)$$

bewiesen.

□

Nun müssen wir uns noch dem Fall  $\omega \in \mathcal{C}$  mit  $\|\omega\|_\infty = \pi$  zuwenden. Analog zu Satz 5.17 aus Abschnitt 5.2.1 formulieren wir

**Lemma 5.21** *Sei  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_d) \in [-\pi, \pi]^d$  mit  $\|\omega\|_\infty = \pi$  und die Zahl  $m$  sei erklärt durch*

$$m := \#\{\omega_i : |\omega_i| = \pi, i = 1, \dots, d\}.$$

*Das heißt  $m$  ist die Anzahl der Komponenten von  $\omega$ , dessen Betrag gleich  $\pi$  ist. Dann gilt*

$$1 - \frac{\varphi_{\delta_0}(\omega)}{[\varphi_{\delta_0}, 1]_0(\omega)} \rightarrow 1 - \frac{1}{2^m}$$

für  $c \rightarrow \infty$ .

**Beweis:** Gelten die gleichen Schreibweisen wie im Beweis zu Satz 5.17. Dann können wir auch

$$\sum_{\beta \in 2\pi\mathbb{Z}^d} \varphi_{\delta_0}(\omega + \beta) = 2^m \varphi_{\delta_0}(\omega) + \sum_{\beta \in M_\omega} \varphi_{\delta_0}(\omega + \beta)$$

schreiben.

Unter obigen Bedingungen gilt sicher  $\|\omega + \beta\| > \|\omega\|$  für jedes  $\beta \in M_\omega$ . Mit Lemma 5.19 erhalten wir

$$|\varphi_{\delta_0}(\omega + \beta)| \leq e^{-ca(\|\omega + \beta\| - \|\omega\|)} |\varphi_{\delta_0}(\omega)|$$

und so

$$0 \leq \sum_{\beta \in M_\omega} |\varphi_{\delta_0}(\omega + \beta)| \leq |\varphi_{\delta_0}(\omega)| \sum_{\beta \in M_\omega} e^{-ca(\|\omega + \beta\| - \|\omega\|)}.$$

Aus der Tatsache, daß  $\|\omega + \beta\| > \|\omega\|$  ist, erhalten wir nach einigen Überlegungen

$$\sum_{\beta \in M_\omega} e^{-ca(\|\omega + \beta\| - \|\omega\|)} \rightarrow 0$$

für  $c \rightarrow \infty$  beziehungsweise  $\sum_{\beta \in M_\omega} \varphi_{\delta_0}(\omega + \beta) \rightarrow 0$  für  $c \rightarrow \infty$ .  $\square$

Es stehen noch die Konstanten  $L_{\Phi_{\delta_0}}$  und  $K_{\Phi_{\delta_0}}$  zur Diskussion. Mit  $0 < h < 1$  ist  $\|\omega\| > \|h\omega\| = h\|\omega\|$  für  $\omega \in \mathbb{R}^d$ .

Die Aussage des Lemmas 5.19 führt uns zu

$$\frac{\varphi_{\delta_0}(h\omega)}{\varphi_{\delta_0}(\omega)} = \frac{\varphi(a h \omega)}{\varphi(a \omega)} \geq e^{ca(\|\omega\| - h\|\omega\|)} = e^{ca(1-h)\|\omega\|}.$$

Dadurch ist

$$K_{\Phi_{\delta_0}} = e^{ca(1/h-1)\pi\sqrt{d}}$$

und

$$L_{\Phi_{\delta_0}} = 1$$

wählbar.

Die Konstante  $K_{\Phi_{\delta_0}}$  kann also beliebig groß werden, wenn nur  $c$  genügend groß wird.

Für das Verhalten des Terms

$$h^{-d/2} \left\{ \frac{2}{\sqrt{K_{\Phi_{\delta_0}}}} + \frac{\sqrt{C_{\Phi_{\delta_0}}}}{\sqrt{L_{\Phi_{\delta_0}}}} \right\}$$

gelten also identische Aussagen wie zum Abschluß des Abschnittes 5.2.1 mit dem Unterschied, daß  $\alpha \rightarrow 0$  durch  $c \rightarrow \infty$  zu ersetzen ist.

### 5.2.3 Die Konstanten $L_{\Phi_{\delta_0}}$ , $K_{\Phi_{\delta_0}}$ , $C_{\Phi_{\delta_0}}$ bei radialen Basisfunktionen mit $\hat{\Phi}(\omega) \sim \|\omega\|^{-d-\gamma}$

Inhalt dieses Abschnittes soll die Untersuchung des Terms

$$h^{-d/2} \left\{ \frac{2}{\sqrt{K_{\Phi_{\delta_0}}}} + \frac{\sqrt{C_{\Phi_{\delta_0}}}}{\sqrt{L_{\Phi_{\delta_0}}}} \right\}$$

für radiale Basisfunktionen  $\Phi(x)$ , für deren Fouriertransformierten

$$c_1 \|\omega\|^{-d-\gamma} \leq \hat{\Phi}(\omega) \leq c_2 \|\omega\|^{-d-\gamma} \quad \text{für alle } \omega \in \mathbb{R}^d$$

mit  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_{>0}$  gilt, sein. Spezielle Beispiele für solche Basisfunktionen sind  $\Phi(x) = (-1)^{\lceil \nu/2 \rceil} \|x\|^\nu$ ,  $\nu > 0$ ,  $\nu \notin 2\mathbb{N}$ , sowie die Thin-Plate Splines  $\Phi(x) = (-1)^{k+1} \|x\|^{2k} \log \|x\|$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Um Aussagen über den Term

$$h^{-d/2} \left\{ \frac{2}{\sqrt{K_{\Phi_{\delta_0}}}} + \frac{\sqrt{C_{\Phi_{\delta_0}}}}{\sqrt{L_{\Phi_{\delta_0}}}} \right\}$$

treffen zu können, bedarf es Erkenntnissen über das Verhalten der beteiligten Konstanten  $L_{\Phi_{\delta_0}}$ ,  $K_{\Phi_{\delta_0}}$  und  $C_{\Phi_{\delta_0}}$ . Diese Konstanten hängen von den Fouriertransformierten der jeweiligen radialen Basisfunktion  $\Phi$  ab.

Für das Verhalten der Konstanten  $L_{\Phi_{\delta_0}}$  und  $K_{\Phi_{\delta_0}}$  ist der Quotient

$$\frac{\varphi_{\delta_0}(h\omega)}{\varphi_{\delta_0}(\omega)}$$

verantwortlich. Mit den radialen Basisfunktionen, die wir in diesem Abschnitt betrachten, genügt dieser Quotient der Abschätzung

$$\frac{c_1}{c_2} h^{-d-\gamma} \leq \frac{\varphi_{\delta_0}(h\omega)}{\varphi_{\delta_0}(\omega)} \leq \frac{c_2}{c_1} h^{-d-\gamma}.$$

Demnach können  $K_{\Phi_{\delta_0}}$  und  $L_{\Phi_{\delta_0}}$  so gewählt werden, daß

$$\frac{c_1}{c_2} h^{-d-\gamma} \leq K_{\Phi_{\delta_0}} = L_{\Phi_{\delta_0}} \leq \frac{c_2}{c_1} h^{-d-\gamma}$$

beziehungsweise  $K_{\Phi_{\delta_0}} = L_{\Phi_{\delta_0}} = h^{-d-\gamma}$  für die radialen Basisfunktionen, für die  $c_1 = c_2$  gilt. Bei der Untersuchung der Konstanten  $C_{\Phi_{\delta_0}}$  können wir uns damit begnügen, daß der Wert von  $C_{\Phi_{\delta_0}}$  zwischen 0 und 1 zu finden ist. Tests im eindimensionalen Fall haben zum Beispiel für die Thin-Plate Splines oder für  $\Phi(x) = (-1)^{\lceil \nu/2 \rceil} \|x\|^\nu$ ,  $\nu > 0$ ,  $\nu \notin 2\mathbb{N}$  ergeben, daß  $C_{\Phi_{\delta_0}} \approx \frac{1}{2}$  für großes  $\gamma$  ist. Lenken wir unsere Aufmerksamkeit wieder auf den Term

$$h^{-d/2} \left\{ \frac{2}{\sqrt{K_{\Phi_{\delta_0}}}} + \frac{\sqrt{C_{\Phi_{\delta_0}}}}{\sqrt{L_{\Phi_{\delta_0}}}} \right\},$$

so können wir wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} h^{-d/2} \left\{ \frac{2}{\sqrt{K_{\Phi_{\delta_0}}}} + \frac{\sqrt{C_{\Phi_{\delta_0}}}}{\sqrt{L_{\Phi_{\delta_0}}}} \right\} &\leq h^{\gamma/2} \sqrt{\frac{c_2}{c_1}} \left\{ 2 + \sqrt{C_{\Phi_{\delta_0}}} \right\} \\ &\leq 3h^{\gamma/2} \sqrt{\frac{c_2}{c_1}}. \end{aligned}$$

Eingehendere Untersuchungen von  $C_{\Phi_{\delta_0}}$  könnten obige Abschätzung um einen, von  $h$  unabhängigen, Faktor verbessern. Doch für unsere Zwecke ist die Abschätzung vollkommen ausreichend, denn für eine Konvergenzaussage ist die Tatsache wichtig, daß

$$h^{-d/2} \left\{ \frac{2}{\sqrt{K_{\Phi_{\delta_0}}}} + \frac{\sqrt{C_{\Phi_{\delta_0}}}}{\sqrt{L_{\Phi_{\delta_0}}}} \right\} < 1$$

erreicht werden kann; und das ist bei  $0 < h < 1$  und geeignetem  $\gamma$  durchaus erfüllbar.

#### 5.2.4 Die Konstanten $L_{\Phi_{\delta_0}}$ , $K_{\Phi_{\delta_0}}$ , $C_{\Phi_{\delta_0}}$ bei den Wendland-Funktionen

Um Informationen über das Verhalten der angesprochenen Konstanten bei den Wendland-Funktionen zu erhalten, verweisen wir auf Wendland [52]. Dort wird das (asymptotische) Verhalten der Fouriertransformierten untersucht, sowie obere und untere Schranken für die Fouriertransformierte angegeben. Dadurch können Aussagen für die Größen der Konstanten  $L_{\Phi_{\delta_0}}$ ,  $K_{\Phi_{\delta_0}}$  und  $C_{\Phi_{\delta_0}}$  abgeleitet werden. Wir wollen uns an dieser Stelle mit einem ausgewählten Beispiel und einigen Plots begnügen. Dazu diene die Wendland-Funktion

$$\Psi_{7,6}(r) = I^6 \Psi_7(r),$$

wobei für reelles  $\nu > 0$

$$\Psi_\nu(r) = (1-r)_+^\nu = \begin{cases} (1-r)^\nu & : 0 \leq r \leq 1 \\ 0 & : r \geq 1 \end{cases}$$

und

$$I\phi(r) := \int_r^\infty s\phi(s) ds$$

für eine Funktion  $\phi : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$ , für die das Integral definiert ist.

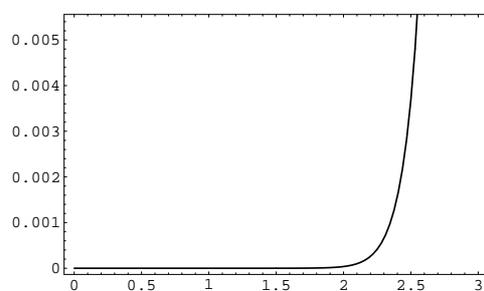


Abbildung 3

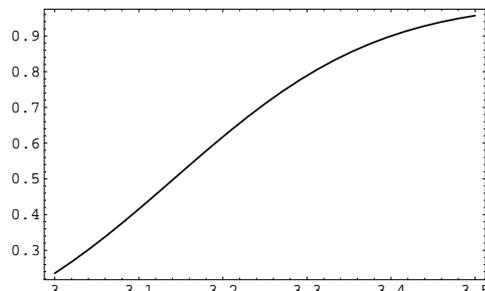


Abbildung 4

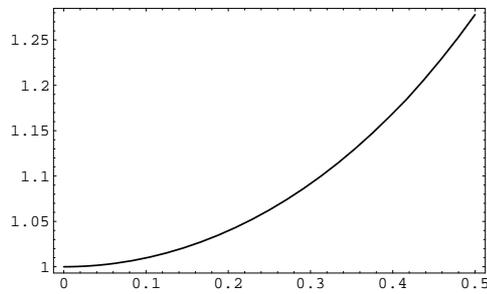


Abbildung 5

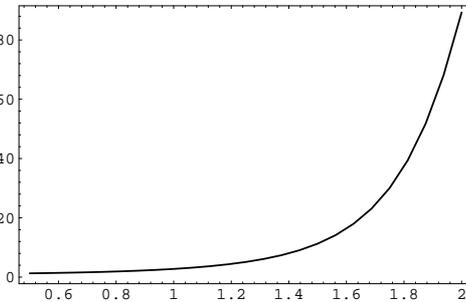


Abbildung 6

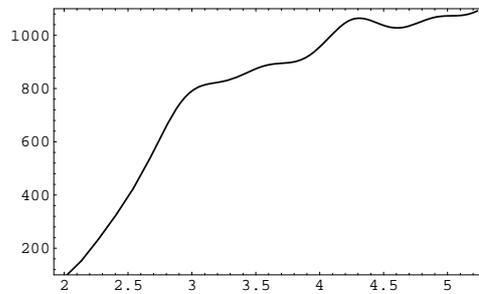


Abbildung 7

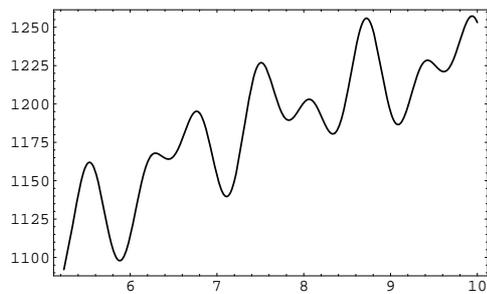


Abbildung 8

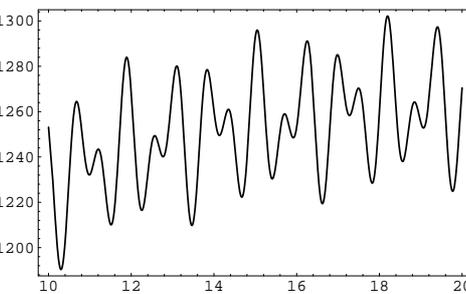


Abbildung 9

Bei unserem Beispiel benutzen wir  $\delta_0 = a = 10$  und  $h = 0.6$ . Abbildung 3 und Abbildung 4 zeigen das Verhalten von  $C_{\Phi_{\delta_0}}$ . Die Abbildungen 5 bis 7 dienen der Bestimmung der Konstanten  $L_{\Phi_{\delta_0}}$  und aus den Abbildungen 8 und 9 kann eine Wahl für den Wert von  $K_{\Phi_{\delta_0}}$  abgelesen werden. Damit setzen wir

$$\begin{aligned} C_{\Phi_{\delta_0}} &= 0.5 \\ L_{\Phi_{\delta_0}} &= 1 \\ K_{\Phi_{\delta_0}} &= 1090 \end{aligned}$$

und somit ist

$$h^{-d/2} \left\{ \frac{2}{\sqrt{K_{\Phi_{\delta_0}}}} + \frac{\sqrt{C_{\Phi_{\delta_0}}}}{\sqrt{L_{\Phi_{\delta_0}}}} \right\} \leq 0.9911 < 1$$

erreichbar.

### 5.3 Multilevel-Fehlerabschätzung in der $L_\infty$ -Norm

In diesem Abschnitt wollen wir im  $d$ -dimensionalen Fall den Fehler

$$f - s_0 - s_1 - \dots - s_n$$

für  $n \in \mathbb{N}_0$  in der  $L_\infty$ -Norm betrachten, wobei  $s_k$  die Interpolante zu  $f - s_0 - s_1 - \dots - s_{k-1}$  auf dem  $h^k \mathbb{Z}^d$ -Gitter bezüglich der aus Abschnitt 4.2 bekannten kardinalen Funktion  $\chi_{h^k, \delta_k}$  im stationären Fall mit  $\delta_k = a \cdot h^k$ ,  $a, h \in \mathbb{R}$ ,  $0 < h < 1$ , bezeichnet.

Zur Vereinfachung der Schreibweise werden wir im Folgenden stets

$$u_k := \sum_{j=0}^k s_j$$

gebrauchen. In einer anderen Form ausgedrückt, haben wir dementsprechend

$$\begin{aligned} s_k(x) &= \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} (f - s_0 - \dots - s_{k-1})(h^k j) \mathcal{X}_{h^k, \delta_k}(x - h^k j) \\ &= \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} (f - u_{k-1})(h^k j) \mathcal{X}_{h^k, \delta_k}(x - h^k j) \end{aligned}$$

und unter Anwendung von Satz 4.16 aus Abschnitt 4.2

$$s_k(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} (f - u_{k-1})(h^k j) \mathcal{X}_{1,a}(x/h^k - j).$$

Unser Ziel wird es also sein, die Norm

$$\|f - s_0 - \dots - s_n\|_\infty = \|f - u_n\|_\infty, \quad n \in \mathbb{N},$$

abzuschätzen.

Um dieses tun zu können, müssen wir uns noch mit einigen Vorüberlegungen beschäftigen. Ein Teil dieser Vorüberlegungen beruht auf Erkenntnissen und Untersuchungen des unter anderem aus Butzer/Splettstößer/Stens [10] bekannten Sampling-Theorems.

Auf unserem Weg müssen wir noch einmal auf die Eigenschaften der kardinalen Funktion aus Abschnitt 4.2 eingehen. Entsprechend unserer vorhergehenden Erläuterungen ist es von besonderer Bedeutung, die Reihe

$$\mathcal{I}_n g(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} g(kh^n) \mathcal{X}_{1,a}(x/h^n - k)$$

näher zu untersuchen. Wir wissen bereits aus Abschnitt 4.2, wann diese Reihe wohldefiniert ist.

Außerdem wäre es gut zu wissen, daß obige Reihe für  $n \rightarrow \infty$  mit  $h \in \mathbb{R}$  und  $0 < h < 1$  (gleichmäßig) gegen  $g(t)$  konvergiert, das heißt

$$g(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{I}_n g(t), \quad g \in C(\mathbb{R}^d), t \in \mathbb{R}^d. \quad (5.26)$$

Dieser Aufgabe wollen wir zunächst unsere volle Aufmerksamkeit schenken. Dabei werden wir sehen, daß an die kardinale Funktion  $\mathcal{X}$  einige Forderungen gestellt werden müssen.

Nach diesen kurzen Vorbemerkungen kommen wir zu einem Theorem, das uns besonders durch die Beweistechnik auf den Weg zu unserer gesuchten Fehlerabschätzung bringt.

**Theorem 5.22** Sei  $\Psi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{C}$  aus  $C(\mathbb{R}^d)$ , so daß

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |\Psi(t - k)| < \infty, \quad t \in \mathbb{R}^d, \quad (5.27)$$

und die absolute Konvergenz sei gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von  $\mathbb{R}^d$ . Weiterhin gelte

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \Psi(t - k) = 1 \quad \text{für } t \in \mathbb{R}^d. \quad (5.28)$$

Setze  $S_n^\Psi g(t) := \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} g(kh^n) \Psi(t/h^n - k)$ .

- a) Falls  $g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{C}$  beschränkt und in  $t_0 \in \mathbb{R}^d$  stetig ist, dann gilt (5.26) für jeden Punkt  $t = t_0$ .
- b)  $\{S_n^\Psi\}_{n \in \mathbb{N}}$  definiert eine Familie von beschränkten linearen Operatoren von  $C(\mathbb{R}^d)$  in sich, die

$$\|S_n^\Psi\|_{\infty, \infty} = \sup_{y \in \mathbb{R}^d} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |\Psi(y - k)|, \quad n \in \mathbb{N},$$

und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n^\Psi g - g\|_\infty = 0, \quad g \in C(\mathbb{R}^d),$$

genügen.

**Beweis:** Benutzen wir (5.28) und die Stetigkeit von  $g$  an der Stelle  $t_0$ , so können wir wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} |g(t_0) - S_n^\Psi g(t_0)| &= \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} g(t_0) \Psi(t_0/h^n - k) - \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} g(kh^n) \Psi(t_0/h^n - k) \right| \\ &\leq \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |g(t_0) - g(kh^n)| \cdot |\Psi(t_0/h^n - k)| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^d \\ \|\frac{t_0}{h^n} - k\|_\infty < \frac{\rho}{h^n}}} |g(t_0) - g(kh^n)| \cdot |\Psi(t_0/h^n - k)| \\
&\quad + \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^d \\ \|\frac{t_0}{h^n} - k\|_\infty \geq \frac{\rho}{h^n}}} |g(t_0) - g(kh^n)| \cdot |\Psi(t_0/h^n - k)| \\
&\leq \epsilon \sup_{y \in \mathbb{R}^d} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} |\Psi(y - k)| \\
&\quad + 2\|g\|_\infty \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^d \\ \|\frac{t_0}{h^n} - k\|_\infty \geq \frac{\rho}{h^n}}} |\Psi(t_0/h^n - k)|.
\end{aligned}$$

Behauptung (a) ist nun leicht zu sehen. Die ausstehenden Behauptungen sind offensichtlich beziehungsweise folgen ähnlich.  $\square$

Erinnern wir uns an Abschnitt 4.2, so erkennen wir sofort, daß die dort definierten zulässigen Funktionen beziehungsweise die daraus resultierende kardinale Funktion die Bedingungen (5.27) und (5.28) von Theorem 5.22 erfüllen. Im Gegensatz dazu erfüllen die pseudo-zulässigen Funktionen beziehungsweise die resultierende kardinale Funktion  $\mathcal{X}$  die Forderung (5.28) aus Theorem 5.22 leider nicht, wenn nicht  $\hat{\Phi}(2\pi k) = 0$  für alle  $k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$  gilt (Theorem 4.14).

Aufgrund unserer Erfahrungen aus Abschnitt 3.3 wissen wir, daß wir für  $\mu \in \mathbb{N}_0^d$ ,  $|\mu| < s := s_\infty/2$ , die Powerfunktion beziehungsweise ihre  $\mu$ -te Ableitung in der Weise

$$P_{\Phi_{\delta_n}, h^n \mathbb{Z}^d}^{(\mu)}(x) \leq C_P \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{s-|\mu|}$$

im stationären Fall mit  $\delta_n = a \cdot h^n$ ,  $a \geq 0$ , abschätzen können.

Durch diese Abschätzung der Powerfunktion und den Resultaten aus Abschnitt 5.1 sind wir in der Lage, die folgende Fehlerabschätzung für die  $\mu$ -te Ableitung von  $f - u_n$  anzugeben. Dabei verwenden wir wie vorher die Schreibweisen aus Abschnitt 5.1.

**Satz 5.23** *Sei  $s_k$ ,  $k = 0, \dots, n$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , wie bisher im stationären Fall mit  $\delta_k = a \cdot h^k$  definiert. Dann gilt für  $\mu \in \mathbb{N}_0^d$  mit  $|\mu| < s$  die Abschätzung*

$$\begin{aligned}
|(f - u_n)^{(\mu)}(x)| &\leq \left\{ \frac{2h^{-d/2}}{\sqrt{K_{\Phi_{\delta_0}}}} + \frac{h^{-d/2} \sqrt{C_{\Phi_{\delta_0}}}}{\sqrt{L_{\Phi_{\delta_0}}}} \right\}^n \\
&\quad \{2\|f - B_0 f\|_{\Phi_{\delta_0}} + \sqrt{C_{\Phi_{\delta_0}}} \|B_0 f\|_{\Phi_{\delta_0}}\} \cdot C_P \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{s-|\mu|},
\end{aligned}$$

wobei  $C_P \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{s-|\mu|}$  gemäß Abschnitt 3.3 aus der Abschätzung der Powerfunktion  $P_{\Phi_{\delta_n}, h^n \mathbb{Z}^d}^{(\mu)}(x)$  stammt und die Konstanten  $K_{\Phi_{\delta_0}}$ ,  $L_{\Phi_{\delta_0}}$  und  $C_{\Phi_{\delta_0}}$  aus Abschnitt 5.1 beziehungsweise den darauffolgenden Abschnitten bekannt sind.

**Beweis:** Unter anderem mit Hilfe von Wu/Schaback [55] oder auch Abschnitt 3.4 besitzt die Abschätzung

$$\begin{aligned} |(f - u_n)^{(\mu)}(x)| &\leq \|f - u_n\|_{\Phi_{\delta_n}} \cdot P_{\Phi, \frac{1}{a}}^{(\mu)}(x/\delta_n) \\ &\leq \|f - u_n\|_{\Phi_{\delta_n}} \cdot C_P \left(\frac{1}{a}\right)^{s-|\mu|} \end{aligned}$$

Gültigkeit.

Der Term  $\|f - u_n\|_{\Phi_{\delta_n}}$  wird nun durch Anwendung der Resultate aus Abschnitt 5.1 abgeschätzt, womit der Beweis komplettiert wird.  $\square$

Eine Schlüsselrolle auf unserem weiteren Weg spielt der bekannte Mittelwertsatz der Differentialrechnung. Er läßt sich auf Funktionen von mehreren Variablen übertragen, indem man die Funktion auf der Strecke zwischen zwei Punkten  $a$  und  $b$  des Definitionsbereiches  $U$  betrachtet. Dabei muß vorausgesetzt werden, daß die Strecke von  $a$  nach  $b$  ganz in  $U$  enthalten ist, das heißt  $a + t(b - a) \in U$  für  $t \in [0, 1]$ .

**Satz 5.24** *Sei  $g$  eine differenzierbare Funktion  $g : U \rightarrow \mathbb{R}$  auf der offenen Menge  $U \subset \mathbb{R}^d$ . Sind  $a, b \in U$  und liegt auch die Strecke von  $a$  nach  $b$  in  $U$ , so gibt es einen Punkt  $\xi$  auf der Verbindungsstrecke, so daß gilt*

$$g(b) - g(a) = (b - a) (Dg(\xi))^T.$$

Als eine Umformulierung des obigen Mittelwertsatzes werden wir verwenden:

**Korollar 5.25** *Mit den Übereinkünften von Satz 5.24 und  $\|Dg\|_\infty \leq M$  mit einer Konstanten  $M \in \mathbb{R}$  gilt*

$$|g(b) - g(a)| \leq dM \|b - a\|_\infty.$$

Aus Korollar 5.25 resultiert in Verbindung mit Satz 5.23 die folgende Erkenntnis.

**Satz 5.26** *Durch die Voraussetzungen von Satz 5.23 gelangen wir für  $x, y \in \mathbb{R}^d$  zu der Abschätzung*

$$\begin{aligned} & |(f - u_n)(y) - (f - u_n)(x)| \\ & \leq \left\{ \frac{2h^{-d/2}}{\sqrt{K_{\Phi_{\delta_0}}}} + \frac{h^{-d/2} \sqrt{C_{\Phi_{\delta_0}}}}{\sqrt{L_{\Phi_{\delta_0}}}} \right\}^n \cdot \\ & \quad \{2\|f - B_0 f\|_{\Phi_{\delta_0}} + \sqrt{C_{\Phi_{\delta_0}}}\|B_0 f\|_{\Phi_{\delta_0}}\} \cdot C_P \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{s-1} d \cdot \|y - x\|_\infty. \end{aligned}$$

**Beweis:** Die Behauptung folgt einfach aus Satz 5.23 und Korollar 5.25.  $\square$

Diese Resultate eröffnen uns die Möglichkeit, den Term  $f - u_n = f - s_0 - \dots - s_n$  abzuschätzen. Doch vorher möchten wir noch einige Definitionen einfügen. Da wir vom Verhalten der kardinalen Funktion Gebrauch machen werden, führen wir unter anderem das absolute Moment einer Funktion ein.

**Definition 5.27** Das absolute Moment einer Funktion  $\psi$  der Ordnung  $r \in \mathbb{N}_0$  sei definiert durch

$$m_r(\psi) := \sup_{t \in \mathbb{R}^d} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \|t - k\|_\infty^r \cdot |\psi(t - k)|.$$

Bemerken wir noch, daß  $m_r(\psi) < \infty$  die Aussage  $\int_{\mathbb{R}^d} \|u\|_\infty^r |\psi(u)| du < \infty$  impliziert, insbesondere besagt  $m_0(\psi) < \infty$ , daß  $\psi \in L_1(\mathbb{R}^d)$ .

Desweiteren werden wir noch ein Moment einer Funktion benötigen, das nicht alle Glieder der Summe des absoluten Momentes berücksichtigt.

**Definition 5.28** Das absolute Teilsummen-Moment von  $\psi$  der Ordnung  $r \in \mathbb{N}_0$  sei definiert durch

$$t_{r,\varrho}(\psi) := \sup_{t \in \mathbb{R}^d} \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^d \\ \|t-k\|_\infty \geq \varrho}} \|t - k\|_\infty^r \cdot |\psi(t - k)|, \quad \varrho \in \mathbb{R}_{>0}^d.$$

Der besseren Übersichtlichkeit wegen, hauptsächlich aber zur Abkürzung der Schreibweise, legen wir noch eine Größe fest.

**Definition 5.29** Wir definieren

$$\begin{aligned} K_k(g) := K_{\mathcal{X}_{1,a},k,\rho,h}(g) : &= d \cdot \rho h \cdot C_P \left( \frac{1}{a} \right)^{s-1} m_0(\mathcal{X}_{1,a}) \cdot \\ &\{2\|g - B_0 g\|_{\Phi_{\delta_0}} + \sqrt{C_{\Phi_{\delta_0}}} \|B_0 g\|_{\Phi_{\delta_0}}\} \cdot \\ &h^{\frac{2-d}{2}k} \left\{ \frac{2}{\sqrt{K_{\Phi_{\delta_0}}}} + \frac{\sqrt{C_{\Phi_{\delta_0}}}}{\sqrt{L_{\Phi_{\delta_0}}}} \right\}^k \end{aligned}$$

mit den bekannten Notationen.

Damit können wir eine Abschätzung des Terms  $\|f - u_n\|_\infty$  angeben.

**Satz 5.30** Die kardinale Funktion  $\mathcal{X}_{1,a} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  aus Abschnitt 4.2 erfülle

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \mathcal{X}_{1,a}(y - k) = 1 \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}^d \quad (5.29)$$

sowie

$$m_0(\mathcal{X}_{1,a}) < \infty. \quad (5.30)$$

Dann gilt für  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 1$ , im stationären Fall mit den bisher benutzten Notationen die Abschätzung

$$|(f - u_n)(x)| \leq K_{n-1}(f) + 2t_{0,\rho}(\mathcal{X}_{1,a}) \|f - u_{n-1}\|_\infty$$

für  $x \in \mathbb{R}^d$  und ein beliebiges, festes  $\rho \in \mathbb{R}_{>0}$ .

**Beweis:** Der Beweis verwendet die Ideen des Beweises zu Theorem 5.22 und auch Satz 5.26 in folgender Weise:

$$\begin{aligned}
|(f - u_n)(x)| &= |(f - u_{n-1})(x) - s_n(x)| \\
&= \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \{(f - u_{n-1})(x) - (f - u_{n-1})(h^n k)\} \mathcal{X}_{1,a}(x/h^n - k) \right| \\
&\leq \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^d \\ \|x/h^n - k\|_\infty < \rho}} |(f - u_{n-1})(x) - (f - u_{n-1})(h^n k)| \cdot |\mathcal{X}_{1,a}(x/h^n - k)| \\
&\quad + \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^d \\ \|x/h^n - k\|_\infty \geq \rho}} |(f - u_{n-1})(x) - (f - u_{n-1})(h^n k)| \cdot |\mathcal{X}_{1,a}(x/h^n - k)| \\
&\leq \left\{ \frac{2h^{-d/2}}{\sqrt{K_{\Phi_{\delta_0}}}} + \frac{h^{-d/2} \sqrt{C_{\Phi_{\delta_0}}}}{\sqrt{L_{\Phi_{\delta_0}}}} \right\}^{n-1} \cdot \\
&\quad \{2\|f - B_0 f\|_{\Phi_{\delta_0}} + \sqrt{C_{\Phi_{\delta_0}}} \|B_0 f\|_{\Phi_{\delta_0}}\} \cdot \\
&\quad C_P \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{s-1} \cdot d \rho h^n \cdot m_0(\mathcal{X}_{1,a}) \\
&\quad + 2t_{0,\rho}(\mathcal{X}_{1,a}) \|f - u_{n-1}\|_\infty \\
&= K_{n-1}(f) + 2t_{0,\rho}(\mathcal{X}_{1,a}) \|f - u_{n-1}\|_\infty.
\end{aligned}$$

□

Oft wird es in der Praxis schwierig sein, zu entscheiden, ob eine gegebene Funktion  $\psi$  die Bedingung

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \psi(t - k) = 1 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}^d$$

erfüllt. Deshalb geben wir zusätzlich zu unseren Untersuchungen in Abschnitt 4.2 das folgende Lemma an, das hilfreich in dieser Problematik angewendet werden kann.

**Lemma 5.31** *Sei  $\psi \in C(\mathbb{R}^d)$  eine absolut integrierbare Funktion mit*

$$|\psi(y)| < \frac{A}{(1 + \|y\|^{d+1})} \quad \text{für ein } A \in \mathbb{R},$$

und sei  $\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \hat{\psi}(2\pi k)$  absolut konvergent. Dann sind für  $x \in \mathbb{R}^d$  die folgenden Aussagen äquivalent:

- i)  $\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \psi(x - k) = 1$
- ii)  $\hat{\psi}(2\pi k) = \begin{cases} 1 & : k = 0 \\ 0 & : k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}. \end{cases}$

**Beweis:** Die Behauptung resultiert aus der Poisson'schen Summenformel mit

$$1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \psi(x - k) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \hat{\psi}(2\pi k) e^{i2\pi k^T x}$$

und der linearen Unabhängigkeit der Funktionen  $\{e^{i2\pi k^T x} | x \in \mathbb{R}^d\}$ ,  $k \in \mathbb{Z}^d$ .  $\square$

Der Inhalt des Lemmas deckt sich im Grunde genommen mit den Aussagen über diese Problematik aus Abschnitt 4.2. Für die Entscheidung, ob die kardinale Funktion  $\mathcal{X}$ , die natürlich den Voraussetzungen genügen muß, die Bedingung  $\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} \mathcal{X}(x - k) = 1$  erfüllt, ist es also ausreichend,  $\hat{\mathcal{X}}$  nur an den Stellen  $2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}^d$ , zu kennen.

**Bem.** Die Voraussetzungen von Satz 5.30 sind für zulässige radiale Basisfunktionen  $\Phi_{\delta_0}$  erfüllt.

Ist  $\mathcal{X}_{1,a}$  die kardinale Funktion zu einem pseudo-zulässigen  $\Phi_{\delta_0}$ , so ist die Voraussetzung (5.29) aus Satz 5.30 nicht erfüllt, wenn nicht  $\hat{\Phi}_{\delta_0}(2\pi k) = 0$  für alle  $k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ .

Kommen wir nach diesem kurzen Exkurs zurück zu unserer Fehlerabschätzung. Es verbleibt noch die Aufgabe, den Term

$$\|f - u_{n-1}\|_{\infty}$$

in solch einer Weise abzuschätzen, in welcher er von  $\|f\|_{\infty}$  abhängt. Durch iterative Anwendung von Satz 5.30 kommen wir unserem Ziel näher und formulieren als Hauptresultat

**Theorem 5.32** Mit den bisher verwendeten Notationen und den Voraussetzungen (5.29) und (5.30) aus Satz 5.30 gilt für  $n \in \mathbb{N}$  die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|f - u_n\|_{\infty} &\leq \sum_{l=0}^{n-1} K_{n-1-l}(f) \cdot (2t_{0,\rho}(\mathcal{X}_{1,a}))^l \\ &\quad + (2t_{0,\rho}(\mathcal{X}_{1,a}))^n \|f - s_0\|_{\infty}. \end{aligned}$$

**Bem.** Für die leere Summe beziehungsweise das leere Produkt benutzen wir die üblichen Konventionen

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^{m-1} a_k &:= 0 \quad \text{beziehungsweise} \\ \prod_{k=m}^{m-1} a_k &:= 1, \end{aligned}$$

wobei  $a_k$  eine reelle Zahl und  $m$  eine ganze Zahl seien.

**Beweis:** Das Theorem beweisen wir durch vollständige Induktion nach  $n$ . Dabei beginnen wir mit  $n = 1$ :

$$\begin{aligned} \|f - s_0 - s_1\|_{\infty} &\leq \{2\|f - B_0 f\|_{\Phi_{\delta_0}} + \sqrt{C_{\Phi_a}} \|B_0 f\|_{\Phi_{\delta_0}}\} d\rho h C_P \left(\frac{1}{a}\right)^{s-1} m_0(\mathcal{X}_{1,a}) \\ &\quad + 2t_{0,\rho}(\mathcal{X}_{1,a}) \|f - s_0\|_{\infty} \\ &= K_0(f) + 2t_{0,\rho}(\mathcal{X}_{1,a}) \|f - s_0\|_{\infty}. \end{aligned}$$

Die Behauptung des Theorems sei nun für  $n$  richtig. Dann ist sie auch für  $n + 1$  richtig, denn

$$\begin{aligned}
\|f - u_{n+1}\|_\infty &\leq K_n(f) + 2t_{0,\rho}(\mathcal{X}_{1,a})\|f - u_n\|_\infty \\
&\leq K_n(f) + 2t_{0,\rho}(\mathcal{X}_{1,a}) \left\{ \sum_{l=0}^{n-1} K_{n-1-l}(f)(2t_{0,\rho}(\mathcal{X}_{1,a}))^l \right. \\
&\quad \left. + (2t_{0,\rho}(\mathcal{X}_{1,a}))^n \|f - s_0\|_\infty \right\} \\
&= K_n(f) + \sum_{l=0}^{n-1} K_{n-1-l}(f) \cdot (2t_{0,\rho}(\mathcal{X}_{1,a}))^{l+1} \\
&\quad + (2t_{0,\rho}(\mathcal{X}_{1,a}))^{n+1} \|f - s_0\|_\infty \\
&= \sum_{l=0}^n K_{n-l}(f) \cdot (2t_{0,\rho}(\mathcal{X}_{1,a}))^l \\
&\quad + (2t_{0,\rho}(\mathcal{X}_{1,a}))^{n+1} \|f - s_0\|_\infty.
\end{aligned}$$

□

Den Term  $\|f - s_0\|_\infty$  in der Fehlerabschätzung aus Theorem 5.32 möchten wir gesondert betrachten. Dazu diene der folgende Satz.

**Satz 5.33** Die Funktion  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  sei in  $\mathbb{R}^d$  gleichmäßig stetig, das heißt zu jedem  $\epsilon > 0$  existiert ein  $\rho > 0$ , so daß

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^d \quad \text{mit } \|x - y\|_\infty < \rho.$$

Mit diesem  $\epsilon$  beziehungsweise  $\rho$  und den bisherigen Notationen gilt

$$\|f - s_0\|_\infty \leq \epsilon m_0(\mathcal{X}_{1,a}) + 2t_{0,\rho}(\mathcal{X}_{1,a}) \|f\|_\infty,$$

falls  $\mathcal{X}_{1,a}$  die Voraussetzungen (5.29) und (5.30) aus Satz 5.30 erfüllt.

**Beweis:** Mit den obigen Übereinkünften gilt

$$\begin{aligned}
|(f - s_0)(x)| &\leq \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^d \\ \|x-k\|_\infty < \rho}} |f(x) - f(k)| \cdot |\mathcal{X}_{1,a}(x - k)| \\
&\quad + 2 \|f\|_\infty \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z}^d \\ \|x-k\|_\infty \geq \rho}} |\mathcal{X}_{1,a}(x - k)|,
\end{aligned}$$

für alle  $x \in \mathbb{R}^d$ , woraus die Behauptung folgt. □

Neben dieser Abschätzung sind noch zahlreiche weitere Abschätzungen bekannt. So resultiert zum Beispiel, wie in Abschnitt 3.4 zu sehen, eine Art der Abschätzung aus  $|(f - s_0)(x)| \leq \|f\|_{\Phi_{\delta_0}} \cdot P_{\Phi_{\delta_0}, \mathbb{Z}^d}(x)$ . Weitere Beispiele können der Literatur, wie [8, 9, 10], entnommen werden und im Folgenden an Stelle des Terms  $\|f - s_0\|_\infty$  eingesetzt werden. Da dieses keinen entscheidenden Einfluß auf das Konvergenzverhalten nach sich zieht, möchten wir es nicht weiter verfolgen und

dem interessierten Leser überlassen.

Abschließend wollen wir noch ein paar Worte über die Werte  $K_n(f)$  und  $t_{0,\rho}(\mathcal{X}_{1,a})$  verlieren. Entscheidenden Einfluß auf das Verhalten von  $K_n(f)$  hat der Term

$$h^{\frac{2-d}{2}} \left\{ \frac{2}{\sqrt{K_{\Phi_{\delta_0}}}} + \frac{\sqrt{C_{\Phi_{\delta_0}}}}{\sqrt{L_{\Phi_{\delta_0}}}} \right\}.$$

Nach unseren Erkenntnissen aus Abschnitt 5.1 beziehungsweise den darauffolgenden Abschnitten kann der Term

$$h \left\{ \frac{2h^{-d/2}}{\sqrt{K_{\Phi_{\delta_0}}}} + \frac{h^{-d/2}\sqrt{C_{\Phi_{\delta_0}}}}{\sqrt{L_{\Phi_{\delta_0}}}} \right\} = h^{\frac{2-d}{2}} \left\{ \frac{2}{\sqrt{K_{\Phi_{\delta_0}}}} + \frac{\sqrt{C_{\Phi_{\delta_0}}}}{\sqrt{L_{\Phi_{\delta_0}}}} \right\}$$

unter bestimmten Umständen sicherlich kleiner gleich Eins abgeschätzt werden. Ist dieses der Fall, so bekommen wir

$$K_{k_1}(f) \leq K_{k_2}(f)$$

für  $k_2 \leq k_1$ .

Genauer gilt für  $n \in \mathbb{N}$  und  $l \in \{0, \dots, n\}$

$$\begin{aligned} K_{n-l}(f) &= d \cdot \rho h \cdot C_P \left( \frac{1}{a} \right)^{s-1} m_0(\mathcal{X}_{1,a}) \cdot \\ &\quad \{2\|f - B_0 f\|_{\Phi_{\delta_0}} + \sqrt{C_{\Phi_{\delta_0}}}\|B_0 f\|_{\Phi_{\delta_0}}\} \cdot \\ &\quad \left( h^{\frac{2-d}{2}} \left\{ \frac{2}{\sqrt{K_{\Phi_{\delta_0}}}} + \frac{\sqrt{C_{\Phi_{\delta_0}}}}{\sqrt{L_{\Phi_{\delta_0}}}} \right\} \right)^{n-l} \\ &= K_n(f) \left( h^{\frac{2-d}{2}} \left\{ \frac{2}{\sqrt{K_{\Phi_{\delta_0}}}} + \frac{\sqrt{C_{\Phi_{\delta_0}}}}{\sqrt{L_{\Phi_{\delta_0}}}} \right\} \right)^{-l}. \end{aligned}$$

Unsere Fehlerabschätzung läßt sich dann schreiben als

$$\begin{aligned} \|f - u_n\|_{\infty} &\leq \sum_{l=0}^{n-1} K_{n-1-l}(f) \cdot (2t_{0,\rho}(\mathcal{X}_{1,a}))^l \\ &\quad + (2t_{0,\rho}(\mathcal{X}_{1,a}))^n \|f - s_0\|_{\infty} \\ &= K_{n-1}(f) \sum_{l=0}^{n-1} \left( \frac{2t_{0,\rho}(\mathcal{X}_{1,a})}{\left( h^{\frac{d-2}{2}} \left\{ \frac{2}{\sqrt{K_{\Phi_{\delta_0}}}} + \frac{\sqrt{C_{\Phi_{\delta_0}}}}{\sqrt{L_{\Phi_{\delta_0}}}} \right\} \right)^l} \right)^l \\ &\quad + (2t_{0,\rho}(\mathcal{X}_{1,a}))^n \|f - s_0\|_{\infty}. \end{aligned}$$

Aufgrund des Abschnittes 4.2 wissen wir, daß für zulässige radiale Basisfunktionen beziehungsweise dem daraus resultierenden Verhalten der kardinalen Funktion  $\mathcal{X}_{1,a}$  der Term  $2t_{0,\rho}(\mathcal{X}_{1,a})$  für hinreichend großes  $\rho$  beliebig klein werden kann.

Sei nun  $\rho$  und  $h$  so gewählt, daß

$$0 \leq 2t_{0,\rho}(\mathcal{X}_{1,a}) < \left( h^{\frac{2-d}{2}} \left\{ \frac{2}{\sqrt{K_{\Phi_{\delta_0}}}} + \frac{\sqrt{C_{\Phi_{\delta_0}}}}{\sqrt{L_{\Phi_{\delta_0}}}} \right\} \right),$$

was im Fall

$$\left( h^{\frac{2-d}{2}} \left\{ \frac{2}{\sqrt{K_{\Phi_{\delta_0}}}} + \frac{\sqrt{C_{\Phi_{\delta_0}}}}{\sqrt{L_{\Phi_{\delta_0}}}} \right\} \right) < 1$$

impliziert, daß auch

$$2t_{0,\rho}(\mathcal{X}_{1,a}) < 1$$

ist.

Damit bekommen wir letztendlich

$$\begin{aligned} \|f - u_n\|_\infty &\leq K_{n-1}(f) \frac{1 - \left[ 2t_{0,\rho}(\mathcal{X}_{1,a}) / \left( h^{\frac{2-d}{2}} \left\{ \frac{2}{\sqrt{K_{\Phi_{\delta_0}}}} + \frac{\sqrt{C_{\Phi_{\delta_0}}}}{\sqrt{L_{\Phi_{\delta_0}}}} \right\} \right) \right]^n}{1 - \left[ 2t_{0,\rho}(\mathcal{X}_{1,a}) / \left( h^{\frac{2-d}{2}} \left\{ \frac{2}{\sqrt{K_{\Phi_{\delta_0}}}} + \frac{\sqrt{C_{\Phi_{\delta_0}}}}{\sqrt{L_{\Phi_{\delta_0}}}} \right\} \right) \right]} \\ &\quad + (2t_{0,\rho}(\mathcal{X}_{1,a}))^n \|f - s_0\|_\infty. \end{aligned}$$

Die Größe des Terms

$$\left( h^{\frac{2-d}{2}} \left\{ \frac{2}{\sqrt{K_{\Phi_{\delta_0}}}} + \frac{\sqrt{C_{\Phi_{\delta_0}}}}{\sqrt{L_{\Phi_{\delta_0}}}} \right\} \right)$$

ist abhängig von  $h$ ,  $\Phi_{\delta_0} = \Phi_a$  und der Raumdimension  $d$ ; es ist aber für spezielle Wahlen möglich,

$$\left( h^{\frac{2-d}{2}} \left\{ \frac{2}{\sqrt{K_{\Phi_{\delta_0}}}} + \frac{\sqrt{C_{\Phi_{\delta_0}}}}{\sqrt{L_{\Phi_{\delta_0}}}} \right\} \right) < 1$$

zu erreichen. Benutzen wir radiale Basisfunktionen, bei denen die zugehörige kardinale Funktion die Eins reproduziert (Eigenschaft (5.29)), so erhalten wir für  $n \rightarrow \infty$  die lineare Konvergenz

$$\|f - s_0 - \dots - s_n\|_\infty \rightarrow 0.$$

Abschließend möchten wir noch einmal darauf hinweisen, daß obige Abschätzungen für zulässige radiale Basisfunktionen  $\Phi_{\delta_0}$  gelten; die Abschätzungen gelten aber nicht für pseudo-zulässiges  $\Phi_{\delta_0}$ , wenn nicht  $\hat{\Phi}_{\delta_0}(2\pi k) = 0$  für alle  $k \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\}$ .

So fallen zum Beispiel die Gaussians und die Wendland-Funktionen aus unserer Betrachtung heraus; die oben angegebenen Fehlerabschätzungen gelten nicht für positiv definite radiale Basisfunktionen.

## Symbolverzeichnis

$d \in \mathbb{N}$	Raumdimension
$ \alpha $	$ \alpha  = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$ für $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$
$\ \cdot\ $	euklidische Norm
$\ \cdot\ _p = \ \cdot\ _{L_p}$	$L_p$ -Norm
$\hat{\cdot}$	Fouriertransformation
$C(\Omega)$	Raum aller stetigen Funktionen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$
$C^k(\Omega)$	Raum der $k$ -mal stetig differenzierbaren Funktionen auf $\Omega$
$\Gamma$	Gamma-Funktion
$K_\eta$	modifizierte Besselfunktion der 2. Art der Ordnung $\eta$
$J_\nu$	Besselfunktion der ersten Art der Ordnung $\nu$
$\doteq$	Gleichheit bis auf Konstanten
$\text{BPD}(m)$	Menge der bedingt positiv definiten Funktionen der Ordnung $m$ (auf $\mathbb{R}^d$ )
$[x]$	größte ganze Zahl kleiner oder gleich $x$
$A_{\Phi, X}$	Interpolationsmatrix zur Basisfunktion $\Phi$ und den Daten $X$
$\mathbb{P}_m^d$	Menge aller $d$ -variater Polynome vom Gesamtgrad $< m$
$\mathcal{F}_\Phi$	Native Space zur radialen Basisfunktion $\Phi$
$\ \cdot\ _\Phi$	Norm im Native Space $\mathcal{F}_\Phi$
$(\cdot, \cdot)_\Phi$	Skalarprodukt im Native Space $\mathcal{F}_\Phi$
$P_{\Phi, X}$	Powerfunktion zu $\Phi$ und $X$
$h_{\rho, X}(x)$	Dichte der Stützstellen um $x$
$q_X$	Separationsabstand des Datensatzes $X$
$\delta_{jk}$	Kroneckersymbol
$\mathcal{I}_n$	Interpolationsoperator
$\mathcal{X}$	kardinale Funktion
$S_\delta$	Skalierungsoperator
$E$	Identität
$S_0(\Phi)$	Raum endlicher Linearkombinationen von Translaten von $\Phi$
$S(\Phi)$	$\Phi$ -Abschluß von $S_0(\Phi)$
$\mathcal{C}$	Kubus $[-\pi, \pi]^d$
$[g, f]_n(\cdot)$	$\sum_{\beta \in \frac{2\pi}{h}\mathbb{Z}^d} g(\cdot + \beta) \overline{f(\cdot + \beta)}$
$B_k$	Tiefpaß-Operator
$\text{supp} f$	$\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \neq 0\}$ Träger der Funktion $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$
$Df$	(totales) Differential (auch Jacobi-Matrix genannt)
$D^\alpha$	Ableitung der Form $D^\alpha = \frac{\partial^{ \alpha }}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_d^{\alpha_d}}$ für $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$
$m_r(\cdot)$	absolute Moment einer Funktion der Ordnung $r$
$t_{r, \varrho}(\cdot)$	absolute Teilsummen-Moment einer Funktion der Ordnung $r$
$\mathcal{O}, o$	Landau-Symbole
$\text{span}$	lineare Hülle
$C_\Phi, K_\Phi, L_\Phi$	von der radialen Basisfunktion $\Phi$ abhängende Konstanten
$K_k(f)$	Konstante für eine Abschätzung in der $L_\infty$ -Norm

## Literatur

- [1] Abramowitz, M., I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. New York: Dover Publications, 1970.
- [2] Baxter, B. J. C., N. Sivakumar. "On shifted cardinal interpolation by Gaussians and multiquadrics". *J. Approx. Theory* 87 (1996): 36-59.
- [3] Baxter, B. J. C. "On the asymptotic cardinal function of the multiquadric  $\varphi(r) = (r^2 + c^2)^{(1/2)}$  as  $c \rightarrow \infty$ ". *Comput. Math. Applic.* 24 (1994): 1-6.
- [4] Baxter, B. J. C., N. Sivakumar, J. D. Ward. "Regarding the p-norms of radial basis interpolation matrices". *Constructive Approximation* 10 (1994): 451-468.
- [5] Bochner, S. *Vorlesungen über Fouriersche Integrale*. Leipzig: Verlagsgesellschaft m. b. H., 1932.
- [6] Brown, A. L., A. Page. *Elements of Functional Analysis*. London: VNR Company, 1970.
- [7] Buhmann, M. D. "Convergence of Univariate Quasi-Interpolation Using Multiquadrics". *IMA Journal of Num. Anal.* 8 (1988): 365-383.
- [8] Buhmann, M. D. "Multivariate Cardinal Interpolation with Radial-Basis Functions". *Constr. Approx.* 6 (1990): 225-255.
- [9] Buhmann, M. D., N. Dyn. "Error Estimates for Multiquadric Interpolation". *Curves and Surfaces*. Hg. Laurent, Méhauté, Schumaker. Boston: Academic Press, 1991. 51-58.
- [10] Butzer, P. L., W. Splettstößer, R. L. Stens. "The Sampling Theorem and Linear Prediction in Signal Analysis". *Jahresber. Deutsch. Math.-Verein* 90 (1988): 1-70.
- [11] Butzer, P. L., R. L. Stens. "Sampling Theory for not necessarily band-limited functions: a historical overview". *SIAM Review* 34 (1992): 40-53.
- [12] de Boor, C., R. A. DeVore, A. Ron. "Approximation from shift-invariant subspaces of  $L_2(\mathbb{R}^d)$ ". *TAMS* 341 (1994): 787-806.
- [13] Dyn, N., D. Levin, S. Rippa. "Numerical Procedures for Surface Fitting of Scattered Data by Radial Functions". *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* 7 (1986): 639-659.
- [14] Fasshauer, G. E., J. W. Jerome. "Multistep Approximation Algorithms: Improved Convergence Rates through Postconditioning with Smoothing Kernels". Preprint, 1997.

- [15] Floater, M. S., A. Iske. "Multistep Scattered Data Interpolation using Compactly Supported Radial Basis Functions". *J. of Comput. and Applied Math.* 73 (1996): 65-78.
- [16] Forster, O. *Analysis 3: Integralrechnung im  $\mathbb{R}^n$  mit Anwendungen*. 3.Aufl. Braunschweig: Vieweg, 1984.
- [17] Gel'fand, I. M., G. E. Shilov. *Generalised Functions. Vol.1: Properties and Operations*. New York: Academic Press, 1964.
- [18] Girosi, F., N. T. Chan. "Prior Knowledge and the Creation of 'Virtual' Examples for RBF Networks". *Proc. IEEE Workshop on Neural Networks for Signal Processing, Cambridge (1995)*.
- [19] Guo, K., S. Hu, X. Sun. "Conditionally Positive Definite Functions and Laplace-Stieltjes Integrals". *Journal of Approximation Theory* 74 (1993): 249-265.
- [20] Hartmann, S. *Hierarchische Interpolation mit radialen Basisfunktionen*. Diplomarbeit. Göttingen, 1996.
- [21] Heuser, H. *Funktionalanalysis*. 3.Aufl. Stuttgart: B. G. Teubner, 1992.
- [22] Iske, A. *Charakterisierung bedingt positiv definiter Funktionen für multivariate Interpolationsmethoden mit radialen Basisfunktionen*. Diss. Göttingen, 1994.
- [23] Jackson, J. R. H. "An order of convergence for some radial basis functions". *IMA Journal of Num. Anal.* 9 (1989): 567-587.
- [24] Jantscher, L. *Distributionen*. Berlin: de Gruyter, 1971.
- [25] Jerome, J. W. "An Adaptive Newton Algorithm Based on Numerical Inversion: Regularization as Postconditioner". *Numer. Math.* 47 (1985): 123-138.
- [26] Jia, R.-Q., J. Lei. "Approximation by Multiinteger Translates of Functions Having global Support". *Journal of Approximation Theory* 72 (1993): 2-23.
- [27] Jones, D. S. *The Theory of Generalised Functions*. 2. Aufl. Cambridge: University Press, 1982.
- [28] Kyriazis, G. C. "Approximation from Shift-Invariant Spaces". *Constr. Approx.* 11 (1995): 141- 164.
- [29] Light, W. A. "Recent Developments in the Strang-Fix Theory for Approximation Orders". *Curves and Surfaces*. Hg. Laurent, Méhauté, Schumaker. Boston: Academic Press, 1991. 285-292.
- [30] Luh, L.-T. *Characterizations of Native Spaces*. Diss. Göttingen, 1998.

- [31] Madych, W. R., S. A. Nelson. "Multivariate Interpolation and Conditionally Positive definite Functions". *Approximation Theory and its Applications* 4.4 (1988): 77-89.
- [32] Madych, W. R., S. A. Nelson. "Multivariate Interpolation and Conditionally Positive definite Functions II". *Mathematics of Computation* 54 (1990): 211-230.
- [33] Mathias, M. "Über positive Fourier-Integrale". *Math. Zeit.* 16 (1923): 103-125.
- [34] Micchelli, C. A. "Interpolation of Scattered Data: Distance Matrices and Conditionally positive definite Functions". *Constructive Approximation* 2 (1986): 11-22.
- [35] Narcowich, F. J., R. Schaback, J. D. Ward. "Multilevel Interpolation and Approximation". Preprint, 1996.
- [36] Oberhettinger, F. *Tables of Fourier Transforms and Fourier Transforms of Distributions*. Berlin: Springer, 1990.
- [37] Powell, M. J. D. "The Theory of Radial Basis Function Approximation in 1990". *Advances in Numerical Analysis Vol.2: Wavelets, Subdivision Algorithms and Radial Basis Functions*. Hg. W. Light. Oxford: Clarendon Press, 1992. 105-210.
- [38] Rees, Charles S., S. M. Shah, Caslav V. Stanojevic. *Theory and Applications of Fourier Analysis*. Basel: Marcel Dekker, 1981.
- [39] Rudin, W. *Functional Analysis*. New York: McGraw-Hill, 1973.
- [40] Schaback, R. "Comparison of Radial Basis Function Interpolants". *Multivariate Approximation. From CAGD to Wavelets*. Hg. K. Jetter, F. J. Utreras. Singapore: World Scientific, 1993. 293-305.
- [41] Schaback, R. "Creating Surfaces from Scattered Data Using Radial Basis Functions". *Mathematical Methods for Curves and Surfaces*. Hg. M. Daehlen, T. Lyche, L. L. Schumaker. Nashville TN: Vanderbilt University Press, 1995. 477-496.
- [42] Schaback, R. "Error Estimates and Condition Numbers for Radial Basis Function Interpolation". *Advances in Computational Mathematics* 3 (1995): 251-264.
- [43] Schaback, R., H. Werner. *Numerische Mathematik*. 4.Aufl. Berlin: Springer, 1992.
- [44] Schaback, R. *Reconstruction of Multivariate Functions from Scattered Data*. Univ. Göttingen, 1996.

- [45] Schaback, R. "Multivariate Interpolation and Approximation by Translates of a Basis Function". *Approximation Theory VIII, vol.1: Approximation and Interpolation*. Hg. C. K. Chui, L. L. Schumaker. Vanderbilt University Press, 1996. 491-514.
- [46] Schoenberg, I. J. "Metric spaces and positive definite functions". *Transactions of the American Mathematical Society* 44 (1938): 522-536.
- [47] Schoenberg, I. J. "Metric spaces and completely monotone functions". *Annals of Mathematics* 39 (1938): 811-841.
- [48] Splettstößer, W. "Error Estimates for Sampling Approximation of Non-Bandlimited Functions". *Math. Meth. in the Appl. Sci.* 1 (1979): 127-137.
- [49] Walter, W. *Einführung in die Theorie der Distributionen*. Mannheim: B.I., 1970.
- [50] Watson, G. N. *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*. 2. Aufl. Cambridge: Cambridge University Press, 1966.
- [51] Weinrich, M. *Charakterisierung von Funktionenräumen bei der Interpolation mit radialen Basisfunktionen*. Diss. Göttingen, 1994.
- [52] Wendland, H. *Konstruktion und Untersuchung radialer Basisfunktionen mit kompaktem Träger*. Diss. Göttingen, 1996.
- [53] Wendland, H. "Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial functions of minimal degree". *Advances in Computational Mathematics* 4 (1995): 389-396.
- [54] Wendland, H. "Sobolev-type Error Estimates for Interpolation by Radial Basis Functions". *Surface Fitting and Multiresolution Methods*. Hg. A. Le Méhauté, C. Rabut, L. L. Schumaker. Nashville TN: Vanderbilt University Press, 1997. 337-344.
- [55] Wu, Z., R.Schaback. "Local Error Estimates for Radial Basis Function Interpolation". *IMA J. of Numer. Anal.* 13 (1993): 13-17.