

**ANALYTISCHE UND NUMERISCHE
UNTERSUCHUNGEN
EINES
INVERSEN RANDWERTPROBLEMS
FÜR DIE
OSEEN-GLEICHUNG**

**Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultäten
der Georg-August-Universität zu Göttingen**

**vorgelegt von
Sascha Meyer
aus Salmünster**

Göttingen 1998

D 7

Referent: _____

Korreferent: _____

Tag der mündlichen Prüfung:

INHALTSVERZEICHNIS

KAPITEL 1: EINLEITUNG	1
KAPITEL 2: BEZEICHNUNGEN UND FUNKTIONENRÄUME	4
2.1 Topologie und Funktionalanalysis	4
2.2 Differentialoperatoren und Klassische Funktionenräume	6
2.3 Randgeometrie	9
2.4 Sobolevräume	11
2.5 Ein Vektorspursatz	15
KAPITEL 3: OSEENGLEICHUNG	21
3.1 Fundamentallösung der Oseengleichung	21
3.2 Schwacher Lösungsbegriff	25
3.2.1 Variationsformulierung	25
3.2.2 A-priori Abschätzungen	28
3.2.3 Eindeutigkeit	29
KAPITEL 4: EINFACHSCHICHTPOTENTIAL	31
4.1 Abbildungseigenschaften in Hölderräumen	32
4.2 Abbildungseigenschaften in Sobolevräumen	40
4.3 Existenz einer Lösung	57
4.4 Quadraturmethode	63
KAPITEL 5: DIFFERENZIERBARKEIT NACH DEM GEBIETSRAND ...	75
5.1 Oseen-Randwertproblem in Variationsformulierung	75
5.2 Beweis der Differenzierbarkeit nach dem Gebietsrand	82
5.2.1 Geometrie	83
5.2.2 Nachweis der Differenzierbarkeit nach dem Gebietsrand	86

KAPITEL 6: INVERSES PROBLEM	93
6.1 Mathematische Definition des Meßoperators.	94
6.2 Eindeutigkeit.	94
6.3 Qualitative Eigenschaften des Inversen Problems	98
6.4 Newton-Verfahren	108
6.5 Numerische Experimente	114
6.5.1 Rekonstruktionen	114
6.5.2 Quantitative Analyse der Schlechtgestelltheit	116
6.6 Fazit	118
 ANHANG A: EIGENSCHAFTEN DER BESSELFUNKTIONEN	 119
 LITERATURVERZEICHNIS	 123

KAPITEL 1: Einleitung

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, ein inverses Randwertproblem für die Oseen-Gleichung im Zweidimensionalen

$$\begin{aligned} u_\infty \cdot \nabla u + \nabla p &= \mu \Delta u \\ \operatorname{div}(u) &= 0 \end{aligned} \tag{Oseen}$$

mit Hilfe eines regularisierten Newtonverfahrens in Form des Levenberg-Marquardt Algorithmus zu lösen. Die Oseen-Gleichung kann als Modell zur Umströmung von Körpern mit zähen nichtkomprimierbaren Flüssigkeiten verwendet werden. Dabei modelliert der Vektor $u_\infty \neq 0$ eine konstante Anströmgeschwindigkeit des Körpers. u beschreibt das sich bei der Umströmung einstellende Geschwindigkeitsvektorfeld und p den sich dabei ausbildenden Druck. Das inverse Problem besteht darin, aus Messungen des Geschwindigkeitsfelds den umströmten Körper zu rekonstruieren.

Ein entsprechendes inverses Randwertproblem wurde von mir für die skalare Gleichung $u_\infty \cdot \nabla \omega - \mu \Delta \omega = 0$ formuliert. Dieses inverse Randwertproblem kann als Modell für die vektorwertige Oseen-Gleichung angesehen werden, da sich die Grundlösungen der Oseen-Gleichung sowie dieser skalaren Gleichung qualitativ im Nullpunkt und im Unendlichen gleich verhalten. Nachdem die analytischen und numerischen Untersuchungen für dieses Modellproblem erfolgreich waren, habe ich mich dem inversen Problem für die vektorwertige Oseen-Gleichung zugewendet.

In Kapitel 2 "Bezeichnungen und Funktionenräume" werden die in der Arbeit benötigten Bezeichnungen und Funktionenräume definiert. Weiter wird in diesem Kapitel ein inverser Spuoperator für divergenzfreie Vektorfelder in Ringgebieten konstruiert. Dieses Resultat existiert in der mir bekannten Literatur nicht.

Kapitel 3 "Oseen-Gleichung" faßt die in der Literatur bereits bewiesenen Resultate über die Oseen-Gleichung zusammen, sofern sie für meine Arbeit relevant sind. Eine Reihenentwicklung der Grundlösung im Nullpunkt zeigt, daß ihr singuläres Verhalten mit dem der Stokes-Gleichung im Zweidimensionalen übereinstimmt. Das asymptotische Verhalten im Unendlichen ist aber verschieden zu der Fundamentallösung der Stokes-Gleichung. Dies schließt das aus der Strömungsmechanik bekannte Stokes-Paradox im Zweidimensionalen aus (siehe Galdi [8] Kapitel V und VII). Nach

Galdi [8] wird für beschränkte und unbeschränkte Gebiete G der Begriff einer schwachen Lösung des Randwertproblems

$$\begin{aligned} u_\infty \cdot \nabla u + \nabla p &= \mu \Delta u, \text{ in } G \\ \operatorname{div}(u) &= 0, \text{ in } G \\ u|_{\partial G} &= u_0, u(\infty) = u_\infty \end{aligned} \quad (\text{Oseen-RWP})$$

definiert. Ausgehend davon können a-priori Aussagen über die Regularität dieser Lösungen gemacht werden. Diese a-priori Abschätzungen ermöglichen es Galdi, die Eindeutigkeit dieser schwachen Lösungen zu zeigen. Mit den Resultaten aus Morrey [19] kann die Analytizität der schwachen Lösung in G sowie unter der Voraussetzung eines analytischen Gebietsrandes ∂G ihre analytische Fortsetzbarkeit auf den Abschluß von G gefolgert werden.

In Kapitel 4 "Einfachschichtpotential" wird das Einfachschichtpotential S der Oseen-Gleichung definiert. Das Ziel dieses Abschnitts ist die Darstellung der schwachen Lösungen von (Oseen-RWP) durch ein Einfachschichtpotential. Dazu werde ich zunächst die Abbildungseigenschaften des Einfachschichtpotentials in den klassischen Hölderräumen studieren. Mit Hilfe der Reihenentwicklung der Fundamentallösung und durch Abspalten der logarithmischen Singularität werden die für die schwache Formulierung benötigten Abbildungseigenschaften in Sobolevräumen hergeleitet. Danach wird die Koerzivität von S auf dem auf $\operatorname{Kern}(S)$ senkrecht stehenden Vektorraum bewiesen. Diese Koerzivität zusammen mit dem Lemma von Lax-Milgram ermöglicht die Darstellung der Lösungen (Oseen-RWP) durch ein modifiziertes Einfachschichtpotential U . Anschließend wird eine konvergente Quadraturmethode zur numerischen Lösung der linearen Gleichung $U\phi = u_0$ angegeben.

In Kapitel 5 "Differenzierbarkeit nach dem Gebietsrand" wird die differenzierbare Abhängigkeit der Lösungen von (Oseen-RWP) vom Rand ∂G bewiesen. Dies ist eine notwendige Voraussetzung, um ein Newtonverfahren zur Rekonstruktion des Gebietsrandes ∂G zu verwenden. Zu diesem Zweck wird eine Variationsformulierung in Form eines Sattelpunktproblems für die schwache Lösung von (Oseen-RWP) angegeben. Diese Variationsformulierung ermöglicht den Beweis der Differenzierbarkeit nach dem Gebietsrand sowie die Identifizierung dieser Ableitung als Lösung eines (Oseen-RWP).

Kapitel 6 "Inverses Problem" beschäftigt sich ausschließlich mit dem inversen Problem. Mit Hilfe einer Methode von Heinz, so wie sie in dem Buch von Colton und Kreß [4] beschrieben wird, kann gezeigt werden, daß es höchstens eine Lösung des inversen Randwertproblems gibt. Aus den Erkenntnissen über das direkte Randwertproblem in Kapitel 5 kann auch gefolgert werden, daß das inverse Randwertproblem im Sinn von Hadamard lokal schlecht gestellt ist. Es ist ebenso möglich, die Injektivität des linearisierten inversen Problems auf dem Untervektorraum der analytischen Gebietsränder zu beweisen. Anschließend wird das inverse Problem für verschiedene Prototypgebiete, wie sie bei dem Studium des inversen Randwertproblems für die Helmholtzgleichung verwendet werden, numerisch mit dem Levenberg-Marquardt

Algorithmus gelöst. Die numerischen Resultate zeigen, daß es wie für die zweidimensionale Helmholtzgleichung möglich ist, die Gebietsränder mit diesem Verfahren zu rekonstruieren. An den Rekonstruktionsergebnissen ist zu sehen, daß keine perfekte Rekonstruktion erreicht wird, was wegen der lokalen Schlechtgestellttheit des Problems auch zu erwarten ist. Im letzten Teil dieses Kapitels wird versucht, die Schlechtgestellttheit des inversen Problems etwas zu quantifizieren.

Die numerischen Rechnungen wurden auf meinem Olivetti Modulo Pro 200 DT mit einem Intel Pentium Pro 200 MHz Prozessor und 96 MB RAM unter dem Betriebssystem Microsoft Windows NT 4.0 Workstation durchgeführt. Die numerischen Codes sind mit Hilfe von Digital Visual Fortran Standard Edition in Fortran 95 erstellt worden. Als graphisches Ausgabesystem wurde Mathematica for Students Version 3.0 verwendet. Die Arbeit wurde mit Hilfe von Adobe FrameMaker 5.5 gesetzt¹

1. © Alle hier angegebenen Produkte sind Eigentum ihrer jeweiligen Hersteller.

KAPITEL 2: Bezeichnungen und Funktionenräume

Das Ziel dieses Kapitels besteht darin, die für meine Arbeit wichtigen und aus der Literatur bekannten Resultate über die klassischen Funktionenräume und Sobolevräume zusammenzustellen. Weiterhin wird in Abschnitt 2.5 ein Spursatz für divergenzfreie Vektorfelder in Ringgebieten bewiesen. Er wird sich in der Arbeit als wichtiges technisches Hilfsmittel erweisen.

2.1 Topologie und Funktionalanalysis

Mit $\mathbf{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ wird die Menge der natürlichen Zahlen bezeichnet. Es wird $\mathbf{N}^* := \mathbf{N} \setminus \{0\}$ gesetzt. Es seien \mathbf{R}, \mathbf{C} die Menge der reellen bzw. komplexen Zahlen. Für $n \in \mathbf{N}^*$ werden der n -dimensionale reelle Vektorraum mit \mathbf{R}^n und der n -dimensionale komplexe Vektorraum mit \mathbf{C}^n bezeichnet. Diese n -dimensionalen Vektorräume werden mit der euklidischen Norm versehen:

$$|x| := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}, x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n, \mathbf{C}^n, n \in \mathbf{N}^*$$

Das Skalarprodukt von zwei Vektoren $x, y \in \mathbf{R}^n, \mathbf{C}^n$ wird durch

$$(x \cdot y) := x \cdot y := \sum_{j=1}^n x_j \bar{y}_j$$

definiert. Für $z = a + ib \in \mathbf{C}$ mit $a, b \in \mathbf{R}$ und i der imaginären Einheit wird $\bar{z} := a - ib \in \mathbf{C}$ definiert.

Auf $\mathbf{R}^2, \mathbf{C}^2$ wird die lineare Abbildung

$$\cdot^\perp: \mathbf{R}^2, \mathbf{C}^2 \ni x = (x_1, x_2) \rightarrow (x_2, -x_1) \in \mathbf{R}^2, \mathbf{C}^2$$

definiert.

Für $G \subset \mathbf{R}^2$ und $\rho, \rho' > 0$ wird

$$\bar{G} := \bigcap_{G \subset A, A \text{ abgeschlossen}} A$$

$$\partial G := \bar{G} \cap \overline{\mathbf{R}^2 \setminus G}$$

$$K_\rho := \{x \in \mathbf{R}^2 \mid |x| < \rho\}, K^{\rho'} := \{x \in \mathbf{R}^2 \mid |x| > \rho'\}, K_\rho^{\rho'} := K_\rho \cap K^{\rho'}$$

$$G_\rho := G \cap K_\rho, G^{\rho'} := G \cap K^{\rho'}$$

definiert.

Definition 2.1: Es seien $(X, \|\cdot\|_X)$ und $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banachräume. Dann wird

$$L(X, Y) := \{T: X \rightarrow Y \mid T \text{ linear, stetig}\}, L(X) := L(X, X).$$

$$GL(X, Y) := \{T \in L(X, Y) \mid T \text{ bijektiv und } T^{-1} \in L(Y, X)\},$$

$$GL(X) := GL(X, X)$$

$$\|T\| := \sup\{\|Tx\|_Y \mid x \in X, \|x\|_X \leq 1\}, T \in L(X, Y)$$

definiert.

Nach dem Satz von Banach ist

$$GL(X, Y) = \{T \in L(X, Y) \mid T \text{ bijektiv}\}.$$

Definition 2.2: Es seien H_1, H_2 Hilberträume. Dann wird

$$\text{Bil}(H_1, H_2) := \{b: H_1 \times H_2 \rightarrow \mathbf{R} \mid b \text{ bilinear und stetig}\}$$

mit

$$\|b\| := \sup\{|b(u, v)| \mid (u, v) \in H \times H, |u|, |v| \leq 1\}$$

definiert.

Das Paar $(\text{Bil}(H_1, H_2), \|\cdot\|)$ ist ein Banachraum.

2.2 Differentialoperatoren und Klassische Funktionenräume

Für die in der Arbeit auftretenden partiellen Ableitungen wird für einen Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$, $n \in \mathbf{N}^*$

$$D^\alpha := \partial_{\alpha_1, \dots, \alpha_n}^{|\alpha|} := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad |\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$$

definiert. Zur Vereinfachung der Notation werden die Ableitungsoperatoren

$$\partial_1 := \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \partial_2 := \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \partial_1^2 := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, \quad \partial_2^2 := \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$
$$\Delta := \partial_1^2 + \partial_2^2$$

eingeführt.

Für skalare Funktionen f und Vektorfelder $u = (u_1, u_2)$ werden folgende Differentialoperatoren definiert:

$$\nabla f := (\partial_1 f, \partial_2 f), \quad \nabla^\perp f := (\partial_2 f, -\partial_1 f),$$

$$\operatorname{div}(u) := \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2$$

$$u_\infty \cdot \nabla u = \begin{bmatrix} u_\infty \cdot \nabla u_1 \\ u_\infty \cdot \nabla u_2 \end{bmatrix}, \quad u_\infty \in \mathbf{R}^2$$

$$(\nabla u)e := (\nabla u_1 \cdot e, \nabla u_2 \cdot e), \quad e \in \mathbf{R}^2$$

$$|\nabla u|^2 := |\nabla u_1|^2 + |\nabla u_2|^2$$

In der Arbeit wird weiter die **Einsteinsche Summationskonvention** verwendet. Sie ist durch die Ersetzungsregel

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \rightarrow a_i b_i$$

definiert. Entsprechend kann diese Ersetzungsvorschrift des Summationszeichens auf mehrere Multiindizes erweitert werden.

Definition 2.3: Es sei $G \subset \mathbf{R}^2$ eine **offene** Menge und $k \in \mathbf{N}$

$$C(G) := C^0(G) := \{f: G \rightarrow \mathbf{K} \mid f \text{ stetig und beschränkt}\}, \mathbf{K} \in \{\mathbf{R}, \mathbf{C}\}$$

$$\|f\|_\infty := \|f\|_{C^0} := \sup_{x \in G} |f(x)|, f \in C(G)$$

$$C^k(G) := \left\{ f: G \rightarrow \mathbf{K} \mid \begin{array}{l} f \text{ ist } k \text{ mal stetig differenzierbar} \\ D^\alpha f \in C(G), |\alpha| \leq k \end{array} \right\}$$

$$\|f\|_{C^k} := \sup_{x \in G, |\alpha| \leq k} |D^\alpha f(x)|, f \in C^k(G)$$

$$C^\infty(G) := \bigcap_{k \in \mathbf{N}} C^k(G)$$

$$C^k(\bar{G}) := \left\{ f \in C^k(G) \mid \begin{array}{l} D^\alpha f \text{ läßt sich stetig auf } \bar{G} \text{ fortsetzen} \\ |\alpha| \leq k \end{array} \right\},$$

$$\|f\|_{C^k(\bar{G})} := \sup_{x \in \bar{G}, |\alpha| \leq k} |D^\alpha f(x)|, f \in C^k(\bar{G})$$

$$C_0^k(G) := \left\{ f \in C^k(\bar{G}) \mid \begin{array}{l} \text{supp}(f) \cap \partial G = \emptyset \\ \text{supp}(f) \text{ kompakt} \end{array} \right\}$$

$$\text{supp}(f) := \overline{\{x \in G \mid f(x) \neq 0\}}$$

Es ist leicht zu sehen, daß für beschränkte Gebiete G die Menge $C_0^k(G)$ ein Untervektorraum von $C^k(\bar{G})$ ist.

Definition 2.4: Es sei $\sigma > 0$ und $S_\sigma := \{z \in \mathbf{C} \mid |\operatorname{Im}(z)| < \sigma\}$. Für $k \in \mathbf{N}$, $n \in \mathbf{N}^*$, $\mathbf{K} \in \{\mathbf{R}, \mathbf{C}\}$ werden folgende Räume 2π -periodischer Funktionen definiert:

$$C_{\text{per}}^k([0, 2\pi], \mathbf{K}^n) := \left\{ f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{K}^n \mid \begin{array}{l} f(x+2\pi) = f(x), x \in \mathbf{R} \\ f \in C^k(\mathbf{R}) \end{array} \right\}$$

$$C_{\text{per}}^k([0, 2\pi]^2, \mathbf{K}^n) := \left\{ f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{K}^n \mid \begin{array}{l} f(x+2\pi, y) = f(x, y) = f(x, y+2\pi), x, y \in \mathbf{R} \\ f \in C^k(\mathbf{R}^2) \end{array} \right\}$$

$$C_{\text{per}}^\omega([0, 2\pi], \mathbf{K}^n) := \left\{ f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{K}^n \mid \begin{array}{l} f(x+2\pi) = f(x), x \in \mathbf{R} \\ \exists \sigma > 0 \exists F: S_\sigma \rightarrow \mathbf{C}: F \text{ holomorph und } F|_{\mathbf{R}} = f \end{array} \right\}$$

$$C_{\text{per}}^\omega([0, 2\pi]^2, \mathbf{K}^n) := \left\{ f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{K}^n \mid \begin{array}{l} f(x+2\pi, y) = f(x, y) = f(x, y+2\pi), x, y \in \mathbf{R} \\ \exists \sigma > 0 \exists F: S_\sigma^2 \rightarrow \mathbf{C}: F \text{ holomorph und} \\ F|_{\mathbf{R}^2} = f \end{array} \right\}$$

Im Fall von $n = 1$ wird z.B.

$$C_{\text{per}}^k[0, 2\pi] := C_{\text{per}}^k([0, 2\pi], \mathbf{K}^1)$$

definiert.

Definition 2.5: Es sei $G \subset \mathbf{R}^2$ **kompakt** (beschränkt und abgeschlossen), $\mathbf{K} \in \{\mathbf{R}, \mathbf{C}\}$, $\alpha \in (0, 1]$

$$C(G) := \{f: G \rightarrow \mathbf{K} \mid f \text{ stetig}\}, \|f\|_\infty := \sup_{x \in G} |f(x)|, f \in C(G)$$

$$C^{0, \alpha}(G) := \left\{ f: G \rightarrow \mathbf{K} \mid \begin{array}{l} \exists C > 0 \forall x, y \in G: \\ |f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha \end{array} \right\}$$

$$\|f\|_{C^{0, \alpha}} := \|f\|_{C^0} + \sup_{x, y \in G, x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}, f \in C^{0, \alpha}(G)$$

Die $\| \cdot \|_{C^{0, \alpha}}$ Norm ist wohldefiniert, da stetige Funktionen auf kompakten Mengen beschränkt sind. Nach Satz 2.4 aus Colton/Kreß [4] ist das Paar $(C^{0, \alpha}(G), \| \cdot \|_{C^{0, \alpha}})$ ein Banachraum.

Definition 2.6: Es sei $G \subset \mathbf{R}^2$ eine **lebesguemeßbare** Menge und $1 \leq p < \infty$

$$L^p(G) := \left\{ [f] \mid f \text{ lebesguemeßbar, } \int_G |f(x)|^p \, dx < \infty \right\},$$

$$\langle f|g \rangle := \int_G f(x)\overline{g(x)} \, dx, \quad \|f\|_{L^2} := \sqrt{\langle f|f \rangle}, \quad f, g \in L^2(G)$$

Dabei ist

1. dx das Lebesguemaß auf \mathbf{R}^2 ;
2. $[f] := \{g: G \rightarrow \mathbf{K} \mid f \sim g\}$;
3. $f, g: G \rightarrow \mathbf{K}$ sind äquivalent: $f \sim g$ genau dann, wenn $f(x) = g(x)$ Lebesgue fast überall gilt, d.h. $dx(\{x \in G \mid f(x) \neq g(x)\}) = 0$;
4. $[f]$ wird mit f identifiziert.

Aus der Maßtheorie ist bekannt, daß $(L^2(G), \langle \cdot | \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum ist.

Für eine beschränkte lebesguemeßbare Menge G wird

$$L_0^2(G) := \left\{ p \in L^2(G) \mid \int_G p = 0 \right\}$$

definiert. Dieser Raum ist wohldefiniert, da nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung für beschränkte lebesguemeßbare Mengen G die Inklusion $L^1(G) \subset L^2(G)$ gilt.

2.3 **Randgeometrie**

Definition 2.7: Es sei $k \in \mathbf{N} \cup \{\omega\}$. Eine Menge $g \subset \mathbf{R}^2$ heißt eine **einfach geschlossene Kurve vom Typ C^k** , wenn es ein $\gamma \in C_{\text{per}}^k([0, 2\pi], \mathbf{R}^2)$ mit folgenden Eigenschaften gibt:

1. $g = \text{Bi}(\gamma) := \{\gamma(t) \mid t \in [0, 2\pi]\}$.
2. $\gamma|_{[0, 2\pi)}$ injektiv.
3. $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in [0, 2\pi]$.

Im Fall von $k = \omega$ ist die Randkurve durch einen analytischen, periodischen Weg parametrisiert.

Definition 2.8: Es sei $G \subset \mathbf{R}^2$ eine offene, beschränkte, zusammenhängende Menge. Für $k \in \mathbf{N} \cup \{\omega\}$ heißt $\partial G \in C^k$, wenn es ein $N \in \mathbf{N}$ und g_1, \dots, g_N gibt mit den Eigenschaften:

1. $\partial G = \bigcup_{i=1}^N g_i = \bigcup_{i=1}^N \text{Bi}(\gamma_i)$.
2. $g_i \cap g_j = \emptyset$ für $i \neq j$.
3. g_i ist eine einfach geschlossene Kurve vom Type C^k , $i = 1, \dots, N$.

Für $\partial G \in C^1$, $x = \gamma_i(t) \in \partial G$ werden der **Normalenvektor** $n(x)$ und der **Tangentialvektor** $\tau(x)$ durch

$$\tau(x) = \tau(\gamma_i(t)) := \frac{\gamma_i'(t)}{|\gamma_i'(t)|}$$

$$n(x) = n(\gamma_i(t)) := \frac{\gamma_i'(t)^\perp}{|\gamma_i'(t)|} = \tau(x)^\perp$$

definiert. Man sieht leicht, daß $n(x)$ und $\tau(x)$ nicht von der speziellen Wahl der Parametrisierung der Randkurve ∂G abhängen.

Das Oberflächenmaß ds auf ∂G wird durch

$$\int_{\partial G} f(x) \, ds(x) := \sum_{i=1}^N \int_0^{2\pi} f(\gamma_i(t)) |\gamma_i'(t)| \, dt$$

definiert. Dabei hat die Funktion $f: \partial G \rightarrow \mathbf{K}$ die Eigenschaft, daß $f \circ \gamma_i: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^2$, $i = 1, \dots, N$, meßbar ist. Man kann sich leicht überlegen, daß das Randmaß und die Meßbarkeit von f nicht von der speziellen Parametrisierung des Randstücks ∂G abhängen.

Definition 2.9: Es sei $\partial G \in C^k$ für ein $k \in \mathbf{N} \cup \{\omega\}$, $\partial G = \bigcup_{i=1}^N \text{Bi}(\gamma_i)$ und $p \in \mathbf{N} \cup \{\omega\}$. Dann wird für $0 \leq p \leq k$ der Raum

$$C^p(\partial G) := \{f: \partial G \rightarrow \mathbf{K} \mid \forall i = 1, \dots, N: f \circ \gamma_i \in C_{\text{per}}^p([0, 2\pi], \mathbf{K})\}, \mathbf{K} \in \{\mathbf{R}, \mathbf{C}\}$$

definiert. Im Fall von $k = \omega$ bedeutet die Relation $0 \leq p \leq k$, daß alle $p \in \mathbf{N}$ durchlaufen werden und $p = \omega$ zugelassen ist.

Für $f \in C^1(\partial G)$ wird

$$\nabla_{\tau} f(\gamma_i(t)) := \partial_{\tau} f(\gamma_i(t)) := \frac{1}{|\gamma_i'(t)|} (f \bullet \gamma_i)'(t) \tau(\gamma_i(t))$$

definiert.

Analog zu Satz 2.1 aus Colton/Kreß [5] kann partiell integriert werden:

Satz 2.10: Es sei $\partial G = \text{Bi}(\gamma) \in C^2$, $H(\gamma(t)) := \frac{\gamma'(t)^{\perp} \cdot \gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}$.

Dann gilt für $0 \leq a < b \leq 2\pi$:

$$\begin{aligned} & \int_{\text{Bi}(\gamma([a, b]))} \partial_{\tau} f(x) \, ds(x) + \tau(\gamma(a))f(\gamma(a)) - \tau(b)f(\gamma(b)) \\ &= \int_{\text{Bi}(\gamma([a, b]))} f(x)H(x)n(x)ds(x) \end{aligned} \tag{2.1}$$

Ebenso zeigt man wie im Beweis von Satz 2.2 aus Colton/Kreß [5]:

Satz 2.11: Es sei $\partial G \in C^2$. Dann gibt es ein $L > 0$, so daß für alle $x, y \in \partial G$ die Abschätzungen

$$|n(x) \cdot (x - y)| \leq L|x - y|^2, \quad x, y \in \partial G \tag{2.2}$$

$$|n(x) - n(y)| \leq L|x - y|, \quad x, y \in \partial G \tag{2.3}$$

gelten.

2.4 Sobolevräume

Die Definition der Sobolevräume und die Sätze über Sobolevräume sind den Büchern von Wloka [24] bzw. Kreß [12] entnommen worden. Es werden keine Resultate über die auftretenden Sobolevräume bewiesen, sondern nur die für die Arbeit relevanten Ergebnisse angegeben.

Definition 2.12: Es sei $G \subset \mathbf{R}^2$ eine offene Menge, $\alpha \in \mathbf{N}^2$, $f \in L^2(G)$. Dann heißt $g \in L^2(G)$ **schwache Ableitung** von f , wenn

$$\langle f | D^{\alpha} \phi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle g | \phi \rangle \quad \text{für alle } \phi \in C_0^{\infty}(G) \tag{2.4}$$

gilt.

Es läßt sich leicht zeigen, daß die schwache Ableitung g von f eindeutig durch (2.4) bestimmt ist. Daher wird $D^\alpha f := g$ definiert.

Definition 2.13: Es sei $G \subset \mathbf{R}^2$ eine offene Menge und $k \in \mathbf{N}$

$$H^k(G) := \{f \in L^2(G) \mid D^\alpha f \text{ existiert im schwachen Sinn für } |\alpha| \leq k\}$$

$$\langle f|g \rangle_k := \sum_{|\alpha| \leq k} \langle D^\alpha f | D^\alpha g \rangle_{L^2}, \quad \|f\|_k := \sqrt{\langle f|f \rangle_k}$$

Der Raum $H^k(G)$ heißt **Sobolevraum**, der in der Literatur auch mit $W^{k,2}(G)$ bezeichnet wird. Das Paar $(H^k(G), \langle \cdot | \cdot \rangle_k)$ ist ein Hilbertraum.

Für $k = 0$ wird

$$H^0(G) := L^2(G)$$

definiert.

Aus Wloka [24] entnimmt man folgende Tatsachen über Sobolevräume:

Satz 2.14: Es sei $G \subset \mathbf{R}^2$ offen mit $\partial G \in C^2$, $k \in \mathbf{N}^*$. Dann gilt:

1. $\left\{ f|_G \in C^\infty(\bar{G}) \mid f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2) \right\}$ dicht in $H^k(G)$ bezüglich der $\|\cdot\|_k$ -Norm.
2. Für $k > 1$ ist die Abbildung $H^k(G) \supset C^\infty(\bar{G}) \ni f \rightarrow f \in C^0(\bar{G})$ zu einer stetigen linearen Abbildung $H^k(G) \rightarrow C^0(\bar{G})$ fortsetzbar;
3. Für $k, m \in \mathbf{N}$, $0 \leq k < m \leq 2$ und G **beschränkt**, ist die Einbettungsabbildung $H^m(G) \ni f \rightarrow f \in H^k(G)$ kompakt.

Satz 2.15: Es seien $G, G' \subset \mathbf{R}^2$ offen mit $\partial G, \partial G' \in C^1$. Ferner seien $k \in \mathbf{N}^*$ und $T: G \rightarrow G'$ bijektiv mit $T \in C^k(\bar{G})$, $T^{-1} \in C^k(\bar{G}')$ vorgegeben, so daß es Konstanten $c, C > 0$ gibt mit

$$0 < c \leq |\det(dT(x))| \leq C \text{ für alle } x \in \bar{G}.$$

Dabei ist $dT(x)$ die Ableitung von T in x .

Dann kann der Pullbackoperator

$$\tilde{\cdot}: C^\infty(\bar{G}') \ni f \rightarrow f \circ T \in C^k(\bar{G}) \subset H^k(G)$$

zu einem stetigen, bijektiven linearen Operator $\tilde{\cdot}: H^k(G') \rightarrow H^k(G)$ fortgesetzt werden.

Die Randsobolevräume werden in Kreß [12] wie folgt definiert:

Definition 2.16:

1. Es sei $f \in L^2[0, 2\pi]$ und $n \in \mathbf{Z}$

$$\hat{f}_n := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt$$

2. Für $0 \leq s < \infty$ sei

$$H^s[0, 2\pi] := \left\{ f \in L^2[0, 2\pi] \mid \sum_{n \in \mathbf{Z}} (1 + n^2)^s |\hat{f}_n|^2 < \infty \right\}$$

$$\langle fg \rangle_s := \sum_{n \in \mathbf{Z}} (1 + n^2)^s \hat{f}_n \overline{\hat{g}_n}, \quad \|f\|_s := \sqrt{\langle ff \rangle_s}$$

$$H^{-s}[0, 2\pi] := (H^s[0, 2\pi])^* := \{F: H^s[0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{C} \mid F \text{ linear und stetig}\}$$

$$H_{\text{per}}^s := H^s[0, 2\pi], \quad s \in \mathbf{R}$$

3. Es sei $C^p \ni \partial G = \bigcup_{i=1}^N B_i(\gamma_i)$ für ein $p \in \mathbf{N}^*$. Dann wird für $s \in \mathbf{R}$ mit $0 \leq s \leq p$

$$H^s(\partial G) := \{f: \partial G \rightarrow \mathbf{C} \mid f \cdot \gamma_i \in H^s[0, 2\pi], i = 1, \dots, N\}$$

$$H^{-s}(\partial G) := (H^s(\partial G))^* := \{F: H^s(\partial G) \rightarrow \mathbf{C} \mid F \text{ linear und stetig}\}$$

definiert und **Rand-Sobolevraum** genannt.

4. Das Dualitätspaar $\langle H^s(\partial G) \mid H^{-s}(\partial G) \rangle$ wird mit $\langle \mid \rangle$ notiert. Es gilt für $f, g \in L^2(\partial G)$

$$\langle f \mid g \rangle = \int_{\partial G} f \bar{g}$$

bzw.

$$\langle f \mid g \rangle = \int_{\partial G} f \cdot \bar{g}$$

für $f, g \in L^2(\partial G, \mathbf{R}^2)$.

In Kreß [12] (Satz 8.13) wird gezeigt, daß der Raum $H^s(\partial G)$ wohldefiniert ist, d.h. $H^s(\partial G)$ ist bis auf Isomorphie unabhängig von der Wahl der Parametrisierung des Randes ∂G definiert. Mit Hilfe der Sätze 8.4 und 8.5 aus Kreß [12] können die in Definition 2.16 definierten Normen durch äquivalente Normen ersetzt werden, die mit Hilfe der L^2 -Norm der Funktion f sowie ihrer schwachen Ableitungen gebildet werden. Hiermit erkennt man, daß die Räume $H^s(\partial G)$ zu den in Wloka [24] definierten Rand-Sobolevräumen für $\partial G \in C^p$, $p \in \mathbf{N}^*$, für $0 \leq s \leq p$ isomorph sind.

Aus Wloka [24] entnimmt man folgende Spursätze

Satz 2.17: Es sei $G \subset \mathbf{R}^2$ eine beschränkte offene Menge mit $\partial G \in C^2$.

1. Für $k = 1, 2$ ist die Abbildung $R_{0, \partial G}: C^\infty(\bar{G}) \ni f \rightarrow f|_{\partial G} \in H^{k-1/2}(\partial G)$ zu einer stetigen linearen Abbildung $R_{0, \partial G}: H^k(G) \rightarrow H^{k-1/2}(\partial G)$ fortsetzbar.
2. Die Abbildung $R_{1, \partial G}: C^\infty(\bar{G}) \ni f \rightarrow \left(f|_{\partial G}, \frac{\partial f}{\partial n} \right) \in H^{3/2}(\partial G) \times H^{1/2}(\partial G)$ ist zu einer stetigen linearen Abbildung $R_{1, \partial G}: H^2(G) \rightarrow H^{3/2}(\partial G) \times H^{1/2}(\partial G)$ fortsetzbar.

Satz 2.18: Es sei $G \subset \mathbf{R}^2$ eine beschränkte offene Menge mit $\partial G \in C^2$. Der Kern der Abbildung $R_{0, \partial G}: H^1(G) \rightarrow H^{1/2}(\partial G)$ ist gegeben durch

$$\text{Kern}(R_{0, \partial G}) = H_0^1(G) = \overline{C_0^\infty(G)}^{\|\cdot\|_1}.$$

Satz 2.19: Es sei $G \subset \mathbf{R}^2$ eine beschränkte offene Menge mit $\partial G \in C^2$. Es gibt stetige lineare Abbildungen

$$R_{0, \partial G}^-: H^{k-1/2}(\partial G) \rightarrow H^k(G), \quad k = 1, 2$$

$$R_{1, \partial G}^-: H^{3/2}(\partial G) \times H^{1/2}(\partial G) \rightarrow H^2(G)$$

mit der Eigenschaft

$$R_{0, \partial G} \bullet R_{0, \partial G}^- = \text{Id}, \quad R_{1, \partial G} \bullet R_{1, \partial G}^- = \text{Id}.$$

2.5 Ein Vektorspursatz

Das Ziel dieses Abschnitts ist es, Satz 2.19 auf **divergenzfreie** Vektorfelder in Ringgebieten zu erweitern (s. Satz 2.23).

Definition 2.20: Es sei $G \subset \mathbf{R}^2$ offen, beschränkt, zusammenhängend, $\partial G \in C^2$. Es gibt zwei einfachgeschlossene Kurven g_1 und g_2 mit $\partial G = g_1 \cup g_2$, $g_1 \cap g_2 = \emptyset$. Dann werden die Räume

$$\tilde{H}_0^1(G) := \left\{ f \in H^1(G) \mid f|_{g_1} = 0 \right\}$$

$$\tilde{H}_0^1(G, \mathbf{R}^n) := \left\{ u: G \rightarrow \mathbf{R}^n \mid u_i \in \tilde{H}_0^1(G), i = 1, \dots, n \right\}, \quad n \in \mathbf{N}^*,$$

definiert.

Nach Satz 2.17 ist $\tilde{H}_0^1(G)$ ein abgeschlossener Untervektorraum von $H^1(G)$. Also ist das Paar $(\tilde{H}_0^1(G), \langle \cdot | \cdot \rangle_1)$ ein Hilbertraum.

Folgendes Lemma ist hilfreich zur Konstruktion des inversen Spurooperators.

Lemma 2.21: Es sei $G \subset \mathbf{R}^2$ offen, beschränkt, zusammenhängend mit $\partial G = g_1 \cup g_2$, $g_1 \cap g_2 = \emptyset$ und

1. g_1 eine einfach geschlossene Kurve vom Typ C^2 ;
2. g_2 eine einfach geschlossene Kurve vom Typ C^3 .

Dann gibt es für alle $f \in L^2(G)$ und $h \in H^{1/2}(g_2)$ genau ein $\phi \in H^2(G)$ mit

$$\begin{aligned} -\Delta\phi &= f \\ \phi|_{g_1} &= 0, \quad \left. \frac{\partial\phi}{\partial n} \right|_{g_2} = h \end{aligned} \tag{L}$$

und

$$\|\phi\|_{H^2(G)} \leq c(G)(\|f\|_{L^2(G)} + \|h\|_{H^{1/2}(g_2)}).$$

Dabei ist $c = c(G) > 0$ eine nur vom Gebiet G abhängige Konstante.

Beweis: Es sei $\varepsilon \geq 0$. Es wird das folgende Problem betrachtet:

Zu $F \in L^2(G)$ finde $\phi_\varepsilon \in H^2(G)$ mit

$$\begin{aligned} \varepsilon\phi_\varepsilon - \Delta\phi_\varepsilon &= F \\ \phi_\varepsilon|_{g_1} &= 0, \quad \left. \frac{\partial\phi_\varepsilon}{\partial n} \right|_{g_2} = 0 \end{aligned} \tag{L0}$$

Um (L0) zu lösen, wird das folgende Variationsproblem formuliert:

Finde ein $\phi_\varepsilon \in \tilde{H}_0^1(G)$ mit

$$a_\varepsilon(\phi_\varepsilon, \omega) := \int_G [\nabla\phi_\varepsilon \cdot \nabla\omega + \varepsilon\phi_\varepsilon\omega] = \int_G F\omega \quad \text{für alle } \omega \in \tilde{H}_0^1(G). \tag{VL}$$

Für alle $\varepsilon \geq 0$ kann die Bilinearform a_ε als eine Abbildung $A_\varepsilon: \tilde{H}_0^1(G) \rightarrow (\tilde{H}_0^1(G))^*$ aufgefaßt werden.

Für $\varepsilon > 0$ ist die Bilinearform $a_\varepsilon \tilde{H}_0^1(G)$ -elliptisch und damit das Problem (VL) nach dem Lemma von Lax-Milgram eindeutig lösbar, d.h. $A_\varepsilon^{-1}: (\tilde{H}_0^1(G))^* \rightarrow \tilde{H}_0^1(G)$ existiert und ist stetig für alle $\varepsilon > 0$. Da nach Satz 2.14 die Einbettung $\tilde{H}_0^1(G) \subset L^2(G)$ kompakt ist, ist die Abbildung $A_\varepsilon^{-1}: L^2(G) \rightarrow L^2(G)$ kompakt.

Für $\varepsilon = 0$ ist der Operator A_0 injektiv, d.h. es gibt höchstens eine Lösung des Problems (VL): Denn ist ϕ Lösung von (VL) mit $f = h = 0$, dann gilt mit $\omega = \phi \in \tilde{H}_0^1(G)$:

$$0 = a(\phi, \phi) = \int_G |\nabla \phi|^2. \quad (2.5)$$

Da ϕ Lösung des homogenen Problems (VL) ist, ist nach der elliptischen Regularitätstheorie $\phi \in C^\infty(\bar{\Omega})$ für alle $\Omega \subset \bar{\Omega} \subset G$ offen. Es folgt daher aus (2.5) und dem Zusammenhang von G , daß es ein $\bar{\phi} \in \mathbf{R}$ geben muß mit $\phi(x) = \bar{\phi}$ für alle $x \in G$. Da $0 = \phi(x) = \bar{\phi}$ für alle $x \in g_1$ gilt, ist $\bar{\phi} = 0$ und damit $\phi = 0$. Dies zeigt, daß eine Lösung des homogenen Problems (VL) identisch mit der Null-Lösung ist. Also besitzt das Problem (VL) höchstens eine Lösung.

Es sei $\phi \in L^2(G)$ mit $(I - A_1^{-1})\phi = 0$. Dann gilt wegen $A_1^{-1}\phi \in \tilde{H}_0^1(G)$ $\phi = A_1^{-1}\phi \in \tilde{H}_0^1(G)$. Hieraus folgt $0 = A_1(I - A_1^{-1})\phi = A_1\phi - \phi = A_0\phi$. Da A_0 injektiv ist, ist $\phi = 0$. Dies zeigt $\text{Kern}(I - A_1^{-1}) = \{0\}$, wobei $I - A_1^{-1}$ als Abbildung $I - A_1^{-1}: L^2(G) \rightarrow L^2(G)$ aufgefaßt wird. Nach der Fredholm-Alternative (Satz 3.4 in [12]) hat die Gleichung $(I - A_1^{-1})\psi = F$ für alle $F \in L^2(G)$ genau eine Lösung ψ , welche stetig von $F \in L^2(G)$ abhängt. Dies zeigt die Existenz und die Stetigkeit der Abbildung $A_0^{-1}: L^2(G) \rightarrow \tilde{H}_0^1(G)$, da $A_0^{-1} = A_1^{-1}(I - A_1^{-1})^{-1}$ geschrieben werden kann.

Aus den Regularitätssätzen für skalare elliptische partielle Differentialgleichungen kann gefolgert werden, daß für die nach den obigen Betrachtungen für alle $\varepsilon \geq 0$ existierende Lösung $\phi_\varepsilon \in \tilde{H}_0^1(G)$ von (VL) $\phi_\varepsilon \in H^2(G)$ gilt.

Nach Satz 2.19 gibt es zu $h \in H^{1/2}(\mathfrak{g}_2)$ ein $H \in H^2(G)$ mit $H|_{\mathfrak{g}_1} = 0$, $\frac{\partial H}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\mathfrak{g}_2} = h$ und $\|H\|_{H^2(G)} \leq c(G) \|h\|_{H^{1/2}(\mathfrak{g}_2)}$. Die Lösung ϕ von (L) ist, wie später gezeigt werden wird, durch

$$\phi = \phi_0 + H \text{ mit } \phi_0 := A_0^{-1}(f + \Delta H)$$

gegeben.

Da G kompakt und $\mathfrak{g}_1 \in C^2$ bzw. $\mathfrak{g}_2 \in C^3$ und $\mathfrak{g}_1 \cap \mathfrak{g}_2 = \emptyset$ ist, erhält man durch Lokalisieren mit den Regularitätssätzen über schwache Lösungen elliptischer partieller Differentialgleichungen (Sätze 9.1.26, 9.1.16 in [9] für den Dirichlet-Rand \mathfrak{g}_1 sowie Satz 20.4 in [24] für den Neumann-Rand \mathfrak{g}_2) für eine Lösung ϕ_0 von (VL) die Abschätzung

$$\|\phi_0\|_{H^2(G)} \leq c(\|\phi_0\|_{H^1(G)} + \|F\|_{L^2(G)}) \leq c(G) \|F\|_{L^2(G)}. \quad (2.6)$$

mit einer Konstanten $c = c(G) > 0$, welche nur von $\varepsilon \geq 0$ und dem Gebiet G abhängt. Also gilt

$$\|\phi\|_{H^2(G)} \leq c(G)(\|f\|_{L^2(G)} + \|h\|_{H^{1/2}(\mathfrak{g}_2)}). \quad (2.7)$$

Nach (2.6) ist $\frac{\partial \phi_0}{\partial \mathbf{n}} \in H^{1/2}(\partial G)$. Da ϕ_0 die Lösung von (VL) ist, erhält man aus der Identität

$$\begin{aligned} \int_G \omega(\varepsilon \phi_0 - \Delta \phi_0) &= \int_G F \omega \\ &= a_\varepsilon(\phi_0, \omega) - \int_{\mathfrak{g}_2} \omega \frac{\partial \phi_0}{\partial \mathbf{n}} \end{aligned}$$

und Satz 2.19 die Identität $\frac{\partial \phi_0}{\partial \mathbf{n}} = 0$. Hieraus folgt mit $\phi_0 \in \tilde{H}_0^1(G) \cap H^2(G)$, daß ϕ

die Randwerte $\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}} \Big|_{\mathfrak{g}_2} = h$ und $\phi|_{\mathfrak{g}_1} = 0$ besitzt. Dies zeigt die behauptete Existenz von ϕ in diesem Satz. Die Eindeutigkeit von ϕ folgt aus der bereits bewiesenen Eindeutigkeit des Problems (VL). Die Ungleichung in (2.7) zeigt die in dem Satz behauptete Abschätzung. •

Satz 2.22: Es sei $G \subset \mathbf{R}^2$ offen, beschränkt, zusammenhängend mit $C^2 \ni \partial G = g_1 \cup g_2$, $g_1 \cap g_2 = \emptyset$. Dann gibt es eine stetige lineare Abbildung $V: L^2(G) \rightarrow (\tilde{H}^1(G))^2$ mit

$$\operatorname{div}(V(f)) = f \text{ und } V(f)|_{g_1} = 0 \text{ für alle } f \in L^2(G).$$

Beweis: Das Ziel ist es, für $f \in L^2(G)$ das zu konstruierende Vektorfeld $V(f)$ als $V(f) = -\nabla\phi + \nabla^\perp\psi$ mit zwei skalaren Funktionen ϕ, ψ darzustellen.

Es sei $f \in L^2(G)$.

Nach Lemma 2.21 gibt es für f und

$$h := -\frac{1}{|g_2|} \int_G f \in H^{1/2}(g_2), |g_2| := \int_{g_2} ds$$

genau eine Lösung $\phi \in H^2(G)$ von (L). Mit dem Gaußschen Integralsatz erhält man

$$\int_{g_1} \frac{\partial\phi}{\partial n} = 0.$$

Es gibt daher genau ein $\Phi \in H^{3/2}(g_1)$, so daß $\nabla_\tau\Phi \cdot \tau = \frac{\partial\phi}{\partial n}$ und $\int_{g_1} \Phi = 0$ gilt.

Nach Satz 2.19 gibt es eine stetige lineare Abbildung

$$R_{1, \partial G}^-: (H^{3/2}(g_1) \times H^{1/2}(g_1)) \times (H^{3/2}(g_2) \times H^{1/2}(g_2)) \rightarrow H^2(G)$$

mit $R_{1, \partial G}^- R_{1, \partial G}^- = \operatorname{Id}$. Definiert man $\psi := R_{1, \partial G}^-((\Phi, 0), (0, 0))$, dann gilt für ψ

$$\psi|_{g_1} = \Phi \text{ und } \psi|_{g_2} = \frac{\partial\psi}{\partial n}\Big|_{g_1} = \frac{\partial\psi}{\partial n}\Big|_{g_2} = 0.$$

Es wird $V(f) := -\nabla\phi + \nabla^\perp\psi$ definiert. Mit diesem V werden die Behauptungen des Satzes verifiziert.

Da ϕ, Φ und ψ lineare Abbildungen in f sind, ist V nach Satz 2.19 und Lemma 2.21 eine stetige lineare Abbildung $V: L^2(G) \ni f \rightarrow V(f) \in (H^1(G))^2$.

Für $f \in L^2(G)$ gilt nach Konstruktion $\operatorname{div}(V(f)) = -\Delta\phi = f$ sowie

$$v \cdot n = -\frac{\partial\phi}{\partial n} + \nabla_{\tau}\psi \cdot \tau = -\frac{\partial\phi}{\partial n} + \frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 \text{ auf } g_1$$

$$v \cdot \tau = -\nabla_{\tau}\phi \cdot \tau - \frac{\partial\psi}{\partial n} = 0 \text{ auf } g_1.$$

In der letzten Zeile ist benutzt worden, daß nach Konstruktion $\phi|_{g_1} = 0$ gilt. Dies zeigt die Behauptung. •

Satz 2.23: Es sei $G \subset \mathbf{R}^2$ offen, beschränkt, zusammenhängend mit $C^2 \ni \partial G = g_1 \cup g_2$, $g_1 \cap g_2 = \emptyset$. Dann gibt es einen stetigen linearen Operator $R_{0, \operatorname{div}}^-: (H^{1/2}(g_1))^2 \rightarrow (H^1(G))^2$ mit den Eigenschaften:

1. $R_{0, g_1}^- R_{0, \operatorname{div}}^- \psi = R_{0, \operatorname{div}}^- \psi|_{g_1} = \psi$ für alle $\psi \in (H^{1/2}(g_1))^2$

2. $\operatorname{div}(R_{0, \operatorname{div}}^- \psi) = 0$.

Beweis: Nach Satz 2.19 gibt es $R_{0, \partial G}^-: (H^{1/2}(g_1))^2 \times (H^{1/2}(g_2))^2 \rightarrow (H^1(G))^2$ mit $R_{0, \partial G}^- R_{0, \partial G}^- = \operatorname{Id}$. Es wird

$$R_{0, \operatorname{div}}^-: (H^{1/2}(g_1))^2 \ni \psi \rightarrow R_{0, \partial G}^-(\psi, 0) - V(\operatorname{div}(R_{0, \partial G}^-(\psi, 0))) \in (H^1(G))^2$$

definiert. Nach Satz 2.19 und Satz 2.22 erfüllt die oben definierte Abbildung $R_{0, \operatorname{div}}^-$ die Behauptungen dieses Satzes. •

KAPITEL 3: Oseengleichung

In diesem Kapitel wird die Fundamentallösung für die Oseengleichung angegeben. Nach Galdi [8] wird der schwache Lösungsbegriff für Lösungen der Oseengleichung im beschränkten wie im unbeschränkten Gebiet eingeführt.

3.1 Fundamentallösung der Oseengleichung

In diesem Kapitel wird zur Vereinfachung und ohne Beschränkung der Allgemeinheit $u_\infty = (1, 0)$ angenommen. Dies ist durch eine geeignete Rotation und Stauchung bzw. Streckung des Koordinatensystems immer zu erreichen.

Es seien

$$\delta(f) := f(0) \text{ die Diracsche Deltadistribution und } \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}.$$

Eine Fundamentallösung der Oseengleichung

$$\begin{aligned} \partial_1 u + \nabla p &= \mu \Delta u \\ \operatorname{div}(u) &= 0 \end{aligned} \tag{Oseen}$$

ist ein Paar (E, e) , das aus einer Matrix $E = (E_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}$ und einem Vektor $e = (e_j)_{1 \leq j \leq 2}$ besteht sowie eine distributionelle Lösung von

$$\begin{aligned} \partial_1 E_{ij} + \partial_i e_j - \mu \Delta E_{ij} &= \delta \delta_{ij} \\ \partial_i E_{ij} &= 0 \end{aligned} \tag{OFL}$$

ist.

Finn und Smith [7] folgend führt der auf Oseen [20] zurückgehende Ansatz

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_2^2 \Psi & -\partial_{12}^2 \Psi \\ -\partial_{12}^2 \Psi & \partial_1^2 \Psi \end{bmatrix}, \mathbf{e} = \begin{bmatrix} \partial_1(\partial_1 \Psi - \nu \Delta \Psi) \\ \partial_2(\partial_1 \Psi - \nu \Delta \Psi) \end{bmatrix}^*$$

mit einer zu bestimmenden skalaren Funktion Ψ zur Berechnung einer Lösung von (OFL).

Mit den Funktionen

$$N(x) := \frac{1}{2\pi} \log|x|, \Omega(x) := \frac{1}{\mu} \frac{1}{2\pi} e^{\frac{1}{2\mu} x_1} K_0\left(\frac{1}{2\mu}|x|\right), x \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\},$$

wobei K_0 die nullte modifizierte Besselfunktion der dritten Art (auch MacDonal-Funktion genannt) ist, erhält man nach Finn und Smith [7]

$$\Psi(x_1, x_2) = \int_0^{x_1} N(\xi, x_2) + \mu \Omega(\xi, x_2) \, d\xi + \frac{1}{2} \int_0^{x_2} (x_2 - \tau) \Omega(0, \tau) \, d\tau$$

Für die in dieser Arbeit benötigten Tatsachen über die Besselfunktionen siehe Anhang A "Eigenschaften der Besselfunktionen".

Kaplan [10] gibt in seiner Arbeit Ausdrücke von $\nabla \Psi$ in Polarkoordinaten an. Auf diese soll hier verzichtet werden, da sie im weiteren Verlauf dieser Arbeit nicht benötigt werden. Zur Darstellung von Lösungen der Oseengleichung mit Hilfe einer Stromfunktion sind diese Ausdrücke aber von Bedeutung.

Es sei K_1 die erste modifizierte Besselfunktion der dritten Art. Mit den Funktionen

$$\Omega_1(x) := \frac{1}{2\pi} \frac{x_1}{|x|} \left[\frac{1}{|x|} - \frac{e^{\frac{x_1}{2\mu}}}{2\mu} K_1\left(\frac{|x|}{2\mu}\right) \right], x \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$$

$$\Omega_2(x) := \frac{1}{2\pi} \frac{x_2}{|x|} \left[\frac{1}{|x|} - \frac{e^{\frac{x_1}{2\mu}}}{2\mu} K_1\left(\frac{|x|}{2\mu}\right) \right], x \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$$

hat das Paar (\mathbf{E}, \mathbf{e}) für $x \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ die Gestalt

$$E(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\Omega(x) - \Omega_1(x) & -\Omega_2(x) \\ -\Omega_2(x) & \frac{1}{2}\Omega(x) + \Omega_1(x) \end{bmatrix}, \quad e(x) = \nabla N(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{x}{|x|^2}. \quad (3.1)$$

Durch Einsetzen der Definitionen der in E auftretenden Besselfunktionen kann eine Reihenentwicklung von E im Nullpunkt angegeben werden. Dazu sind die Reihenentwicklungen der Besselfunktionen aus Anhang A "Eigenschaften der Besselfunktionen" zu verwenden. Hierzu sei zur Abkürzung

$$E_S(x) := \frac{1}{4\pi\mu} \left(\begin{bmatrix} -\log|x| & 0 \\ 0 & -\log|x| \end{bmatrix} + \frac{1}{|x|^2} \begin{bmatrix} x_1^2 & x_1 x_2 \\ x_1 x_2 & x_2^2 \end{bmatrix} \right), \quad x \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}.$$

Lemma 3.1: Es sei $E_R(x) := E(x) - E_S(x)$, $x \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$. Dann gibt es für alle $\alpha \in (0, 1)$ und $\rho > 0$ ein $M = M(\alpha, \rho) > 0$, so daß für alle $x \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ mit $|x| \leq \rho$

$$|E_R(x)| \leq M \quad (3.2)$$

$$|\nabla E_R(x)| \leq M|x|^{-\alpha} \quad (3.3)$$

abgeschätzt werden kann. Weiter gilt für $x, y \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ mit $|x| \leq \rho$, mit $|y| \leq \rho$ und $2|x - y| \leq |y|$

$$|E_R(x) - E_R(y)| \leq M|y|^{-1}|x - y| \quad (3.4)$$

$$|\nabla E_R(x) - \nabla E_R(y)| \leq M|y|^{-\alpha}|x - y|. \quad (3.5)$$

Beweis: Nach den Definitionen der Besselfunktionen hat die Matrix E für $x \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ die Darstellung

$$4\pi\mu E_{11}(2\mu x) = \frac{x_1^2}{|x|^2} + e^{x_1} [x_1 \tilde{I}_1(|x|^2) - 1 - |x|^2 \tilde{I}_0(|x|^2)] \log\left(\frac{|x|}{2}\right) + \frac{x_1(e^{x_1} - 1 - x_1)}{|x|^2} + e^{x_1} [\tilde{A}_0(|x|^2) + x_1 \tilde{A}_1(|x|^2)] \quad (3.6)$$

$$4\pi\mu E_{12}(2\mu x) = \frac{x_1 x_2}{|x|^2} + e^{x_1 x_2} \tilde{I}_1(|x|^2) \log\left(\frac{|x|}{2}\right) + \frac{x_2(e^{x_1} - 1 - x_1)}{|x|^2} + e^{x_1 x_2} \tilde{A}_1(|x|^2) \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned}
 4\pi\mu E_{22}(2\mu x) &= \frac{x_2^2}{|x|^2} - e^{x_1} [1 + |x|^2 \tilde{I}_0(|x|^2) + x_1 \tilde{I}_1(|x|^2)] \log\left(\frac{|x|}{2}\right) \\
 &\quad + \frac{x_1(1 - e^{x_1}) - x_2^2}{|x|^2} + e^{x_1} [\tilde{A}_0(|x|^2) - x_1 \tilde{A}_1(|x|^2)]
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Also kann E_R dargestellt werden durch

$$E_R(x) = E_{R,1}(x) \log\left(\frac{|x|}{2}\right) + \frac{1}{|x|^2} E_{R,2}(x) + E_{R,3}(x).$$

mit $E_{R,i} \in C^\infty(\mathbf{R}^2)$, $i = 1, 2, 3$. Dazu ist zur Definition der Funktionen $E_{R,1}, E_{R,2}, E_{R,3}$ die Aufspaltung

$$\frac{x_1(1 - e^{x_1}) - x_2^2}{|x|^2} = \frac{x_1(1 - e^{x_1}) - x_2^2 + |x|^2}{|x|^2} - 1, \quad x \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$$

zu berücksichtigen. Es gilt weiter

$$E_{R,1}(0) = 0, \quad E_{R,2}(0) = \nabla E_{R,2}(0) = \nabla^2 E_{R,2}(0) = 0.$$

Die Taylorentwicklungen der Funktionen $E_{R,1}, E_{R,2}$ zeigen die Abschätzungen (3.2) und (3.3). Mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differential- und Integralrechnung zeigt man auch die Ungleichungen (3.4) und (3.5). •

Das Verhalten der Fundamentalmatrix E im Unendlichen wird in folgendem Lemma beschrieben:

Lemma 3.2: Es sei $\Omega^\infty(x) := \frac{\sqrt{\pi} e^{x_1 - |x|}}{\sqrt{2} \sqrt{|x|}}$, $x \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$. Dann gilt

$$E(x) = \frac{1}{4\pi\mu} \left(\frac{1}{|x|^2} \begin{bmatrix} x_1 & -x_2 \\ -x_2 & -x_1 \end{bmatrix} + \tilde{\Omega}^\infty\left(\frac{x}{2\mu}\right) \begin{bmatrix} 1 + \frac{x_1}{|x|} & -\frac{x_2}{|x|} \\ -\frac{x_2}{|x|} & 1 - \frac{x_1}{|x|} \end{bmatrix} \left(1 + O\left(\frac{1}{|x|}\right)\right) \right). \tag{3.9}$$

Beweis: Die Entwicklung in (3.9) folgt aus der Darstellung der Fundamentalmatrix E durch die Funktionen $\Omega, \Omega_1, \Omega_2$ und aus der Asymptotik der Besselfunktionen (A.16) in Lemma A.5. •

3.2 Schwacher Lösungsbegriff

In diesem Unterkapitel wird nach Galdi [8] der schwache Lösungsbegriff für das Oseen-Randwertproblem definiert. Die Lösung wird dabei als Lösung eines Variationsproblems in Sobolevräumen aufgefaßt.

3.2.1 Variationsformulierung

Definition 3.3: Es sei $G \subset \mathbf{R}^2$ offen. Es seien $u, v \in H^1(G, \mathbf{R}^2)$, $p \in L^2(G)$ und

$$a(u, v) := \mu \int_G \nabla u_k \cdot \nabla v_k \, dx = \sum_{k=1}^2 \mu \int_G \nabla u_k \cdot \nabla v_k \, dx$$

$$b(u, v) := \int_G v_k \partial_1 u_k \, dx = \sum_{i=1}^2 \int_G v_k \partial_1 u_k \, dx$$

$$d(p, v) := - \int_G p \, \operatorname{div}(v)$$

Bemerkung: Die Bilinearformen entstehen dadurch, daß man mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes die Terme $v_i \Delta u_i$ und $v \cdot \nabla p$ partiell integriert und annimmt, daß die Funktion v auf dem Gebietsrand ∂G gleich Null ist.

Bemerkung: Für $G \subset \mathbf{R}^2$ offen mit $\partial G \in C^1$ gilt

$$b(u, v) = -b(v, u), \quad u \in H^1(G, \mathbf{R}^2), \quad v \in C_0^\infty(G, \mathbf{R}^2). \quad (3.10)$$

Dazu verwendet man Satz 2.14 und approximiert u durch $u_k \in C^\infty(\bar{G}, \mathbf{R}^2)$. Für u_k und v kann der klassische Gaußsche Integralsatz angewendet werden. Mit dem Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz folgt mit $k \rightarrow \infty$ die Identität (3.10).

Definition 3.4: Es sei $G \subset \mathbf{R}^2$ eine offene beschränkte Menge mit $\partial G \in C^2$. Zu vorgegebenen $u_0 \in H^{1/2}(\partial G, \mathbf{R}^2)$ und $\mu > 0$ heißt das Paar

$$(u, p) \in H^1(G, \mathbf{R}^2) \times L_0^2(G)$$

eine **Lösung des beschränkten Oseen-Randwertproblems**

$$\partial_1 u + \nabla p = \mu \Delta u \text{ in } G$$

$$\operatorname{div}(u) = 0 \text{ in } G$$

$$u|_{\partial G} = u_0$$

wenn

$$a(u, v) + b(u, v) + d(p, v) = 0$$

$$d(q, u) = 0$$

für alle $v \in C_0^\infty(G, \mathbf{R}^2)$, $q \in C_0^\infty(G)$ **und** $R_{0, \partial G} = u_0$ gilt.

Bemerkung: Das beschränkte Oseen-Randwertproblem kann nur dann eine Lösung besitzen, wenn

$$\int_{\partial G} u_0 \cdot n \, dS = 0$$

gilt. Wegen $d(q, u) = 0$ für alle $q \in C_0^\infty(G)$ gilt $\operatorname{div}(u) = 0$ in $L^2(G)$. Da $\partial G \in C^2$ ist, kann $u \in H^1(G, \mathbf{R}^2)$ nach Satz 2.14 durch $u_k \in C^\infty(\bar{G}, \mathbf{R}^2)$ in $H^1(G, \mathbf{R}^2)$ approximiert werden. Die Behauptung folgt dann aus dem klassischen Gaußschen Integralsatz sowie dem Grenzübergang $k \rightarrow \infty$. Zur Ausführung des Grenzübergangs ist der Satz über die majorisierte Konvergenz und die Stetigkeit der Spurabbildung $R_{0, \partial G}$ zu verwenden.

Definition 3.5: Es sei $G \subset \mathbf{R}^2$ eine offene unbeschränkte Menge mit $G_i := \mathbf{R}^2 \setminus \bar{G}$ einfach zusammenhängend. Es sei $\partial G = \partial G_i$ eine einfach geschlossene Kurve vom Typ C^2 (s. Definition 2.7). Zu vorgegebenen $u_0 \in H^{1/2}(\partial G, \mathbf{R}^2)$, $u_\infty \in \mathbf{R}^2$ und $\mu > 0$ heißt das Paar (u, p) mit

$$u: G \rightarrow \mathbf{R}^2, p: G \rightarrow \mathbf{R}$$

eine **Lösung des äußeren Oseen-Randwertproblems**

$$\begin{aligned}\partial_1 u + \nabla p &= \mu \Delta u \text{ in } G \\ \operatorname{div}(u) &= 0 \text{ in } G \\ u|_{\partial D} &= u_0 \\ u(\infty) &= u_\infty\end{aligned}$$

wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. für alle $\rho > 0$ gilt $u \in H^1(G_\rho, \mathbf{R}^2)$ und $p \in L^2(G_\rho)$.
2. für alle $v \in C_0^\infty(G, \mathbf{R}^2)$, $q \in C_0^\infty(G)$ gilt

$$\begin{aligned}a(u, v) + b(u, v) + d(p, v) &= 0 \\ d(q, u) &= 0\end{aligned}$$

3. $R_{0, \partial G} = u_0$.

4. $\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{\partial K_\rho} |u(\rho \hat{x}) - u_\infty| \, ds(\hat{x}) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \rho^{-1} \|R_{0, \partial K_\rho} u - u_\infty\|_{L^1(\partial K_\rho)} = 0$.

Bemerkung: Für den Fall, daß das Paar (u, p) Lösung des beschränkten Oseen-Randwertproblems mit beschränkter Menge $G_i := \mathbf{R}^2 \setminus \bar{G}$ ist, dann wird das Paar (u, p) eine Lösung des **inneren** Oseen-Randwertproblems genannt.

Bemerkung: Es wird nicht explizit $u_\infty = (1, 0)$ gefordert, obwohl nur dies die physikalisch sinnvolle Randbedingung im Unendlichen ist. u_∞ ist im Unendlichen frei wählbar, da jedes konstante Vektorfeld eine Lösung der Oseen-Gleichung ist.

3.2.2 A-priori Abschätzungen

Es werden folgende Regularitätssätze aus Galdi [8] entnommen.

Satz 3.6: Es sei $G \subset \mathbf{R}^2$ eine offene, beschränkte Menge. Das Paar $(u, p) \in H^1(G, \mathbf{R}^2) \times L^2(G)$ sei eine Lösung des beschränkten Oseenproblems. Dann gilt $u \in C^\infty(G, \mathbf{R}^2)$, $p \in C^\infty(G)$. Für alle offenen Mengen G', G'' mit $\bar{G}' \subset G'' \subset \bar{G}'' \subset G$ und $k \in \mathbf{N}$ gibt es ein $c = c(k, G', G'')$ mit

$$\|u\|_{H^{k+1}(G')} + \|p\|_{H^k(G')} \leq c(\|u\|_{H^1(G'')} + \|p\|_{L^2(G'')})$$

Beweis: Satz IV.4.1 in [8] mit $f := -\partial_1 u \in L^2(G)$.

Satz 3.7: Es sei $G \subset \mathbf{R}^2$ eine offene, beschränkte Menge mit $\partial G \in C^{k+2}$, $k \in \mathbf{N}$. Es sei weiter $(u, p) \in H^1(G, \mathbf{R}^2) \times L^2(G)$ mit $R_{0, \partial G} u = u|_{\partial G} \in H^{k+3/2}(\partial G, \mathbf{R}^2)$ eine Lösung des beschränkten Oseenproblems. Dann gilt $(u, p) \in H^{k+2}(G, \mathbf{R}^2) \times H^{k+1}(G)$. Ferner gibt es eine Konstante $c = c(m, G) > 0$ mit

$$\|u\|_{H^{k+2}(G)} + \|p\|_{H^{k+1}(G)} \leq c(\|u\|_{H^1(G)} + \|p\|_{L^2(G)} + \|R_{0, \partial G} u\|_{H^{k+3/2}(\partial G)}).$$

Beweis: Satz IV.5.1 in [8] mit $f := -\partial_1 u \in L^2(G)$.

Mit den Methoden aus Morrey [19] kann Satz 3.7 für analytische Ränder und analytische Randdaten verschärft werden.

Satz 3.8: Es sei $G \subset \mathbf{R}^2$ eine offene, beschränkte Menge mit $\partial G \in C^\omega$. Für jede schwache Lösung $(u, p) \in H^1(G, \mathbf{R}^2) \times L^2(G)$ des beschränkten Oseen-Randwertproblems mit $R_{0, \partial G} u = u|_{\partial G} = u^0 \in C^\omega(\partial G, \mathbf{R}^2)$, d.h. mit analytischen Randdaten, ist (u, p) analytisch in G sowie analytisch auf \bar{G} fortsetzbar. Dazu wird die Notation $(u, p) \in C^\omega(\bar{G}, \mathbf{R}^2) \times C^\omega(\bar{G}, \mathbf{R})$ verwendet.

Beweis: Das beschränkte Oseen-Randwertproblem kann als folgendes Dirichlet-sches Randwertproblem formuliert werden:

$$\begin{bmatrix} \partial_1 & -\mu\Delta & 0 & -\partial_1 \\ 0 & \partial_1 & -\mu\Delta & -\partial_2 \\ \partial_1 & \partial_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ in } G$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \Big|_{\partial G} = \begin{bmatrix} u_1^0 \\ u_2^0 \end{bmatrix}$$

Werden die Differentialoperatoren

$$L_{11} := L_{22} := \partial_1 - \mu\Delta, \quad L_{13} := -L_{31} := -\partial_1, \quad L_{23} := -L_{32} := -\partial_2$$

$$L_{12} := L_{21} := L_{33} := 0$$

definiert, dann ist das beschränkte Oseen-Randwertproblem ein Randwertproblem für ein stark elliptisches System von Differentialgleichungen (s. Hackbusch [9] Kapitel 12 unter Beachtung, daß der Hauptteil des Oseen-Differentialoperators durch den Stokes-Differentialoperator gegeben ist). Nach Morrey [19] Satz 6.5.5 sind die Dirichlet-Randbedingungen des stark elliptischen Oseen-Differentialgleichungssystems in dem dort definierten Sinn vervollständigende Randbedingungen. Nach den Resultaten aus §6.6 in [19] ist das Paar (u, p) in G analytisch. Für analytische Randdaten u_0 und für einen analytischen Rand ∂G ist (u, p) analytisch von G auf den Rand ∂G fortsetzbar. Also ist (u, p) auf \overline{G} analytisch fortsetzbar. •

3.2.3 Eindeutigkeit

Satz 3.9: Es sei $G \subset \mathbf{R}^2$ offen, unbeschränkt und zusammenhängend. Es sei $G_1 := \mathbf{R}^2 \setminus \overline{G}$ beschränkt und einfach-zusammenhängend mit $\partial G \in C^2$. Dann gilt:

1. Im Sinn des Lösungsbegriffs aus Definition 3.4 gibt es höchstens eine Lösung des inneren Oseen-Randwertproblems.
2. Es gibt höchstens eine Lösung des äußeren Oseen-Randwertproblems. Dabei ist der Lösungsbegriff aus Definition 3.5 zu verwenden.

Beweis: Es wird nur die 1. Behauptung dieses Satzes in dieser Arbeit bewiesen. Auf einen Beweis der 2. Behauptung dieses Satzes wird hier verzichtet, da der Beweis wegen $u \notin L^2(G)$ wesentlich aufwendiger ist. Es gelingt aber mit a-priori Abschätzungen über das Verhalten der Lösungen im Unendlichen, den Eindeutigkeitsbeweis für schwache Lösungen durchzuführen. Die Technik, diese Abschätzungen im Unendlichen zu gewinnen, stammt von Fujita und wird in [8] vorgeführt. Mit diesen

a-priori Abschätzungen wird Satz VII.1.2 in [8] bewiesen, der die behauptete Eindeutigkeit von **2.** beinhaltet.

Zum Beweis der **1.** Behauptung sei $(u, p) \in H^1(G_i, \mathbf{R}^2) \times L_0^2(G_i)$ eine Lösung des inneren Oseen-Randwertproblems mit $R_{0, \partial G} u = u|_{\partial G} = 0$. Dann ist nach Satz 2.18 $u \in H_0^1(G_i, \mathbf{R}^2)$. Aus Satz 3.6 folgt sogar $u \in C^\infty(G_i, \mathbf{R}^2)$ und $p \in C^\infty(G_i)$. Aus der Definition einer Lösung des inneren Oseen-Randwertproblems (Definition 3.4) und (3.10) erhält man:

$$\begin{aligned} 0 &= a(u, u) + b(u, u) + d(p, u) \\ &= a(u, u) + b(u, u) \\ &= a(u, u) - b(u, u) \end{aligned} .$$

Also ist $a(u, u) = \sum_{k=1}^2 \int_{G_i} |\nabla u_k|^2 = 0$. Da G_i einfach-zusammenhängend ist, gibt es ein $u^* \in \mathbf{R}^2$ mit $u(x) = u^*$ für alle $x \in G_i$. Wegen $R_{0, \partial G} u = u|_{\partial G} = 0 = u^*$ ist $u(x) = 0$ für alle $x \in G_i$. Da u, p unendlich oft differenzierbar in G_i sind, impliziert die schwache Formulierung der Oseengleichung $\partial_1 u(x) + \nabla p(x) = \mu \Delta u(x)$ für alle $x \in G_i$. Wegen $u = 0$ muß $\nabla p(x) = 0$ für alle $x \in G_i$ gelten. Also muß p konstant sein. Da aber $p \in L_0^2(G_i)$ ist, muß $p(x) = 0$ für alle $x \in G_i$ gelten. •

KAPITEL 4: Einfachschichtpotential

Das Ziel dieses Kapitels ist das Studium der Abbildungseigenschaften des Einfachschichtpotentials (ESP), welches für eine einfach geschlossene Kurve $\partial G \in C^2$ und stetige vektorwertige Dichten ϕ durch

$$(S\phi)(x) := \int_{\partial G} E(x-y)\phi(y) \, ds(y), \quad x \notin \partial G$$

$$(\Pi\phi)(x) := \int_{\partial G} e(x-y) \cdot \phi(y) \, ds(y), \quad x \notin \partial G$$

definiert ist. Zunächst wird das ESP auf Hölderräumen analysiert. Ausgehend von diesen Resultaten können die Abbildungseigenschaften in Sobolevräumen gewonnen werden.

In diesem Kapitel wird generell angenommen, daß ∂G der Rand einer unbeschränkten, zusammenhängenden, offenen Menge G mit

$$G_i := \mathbf{R}^2 \setminus \bar{G}$$

einfach-zusammenhängend und $0 \in G_i$ ist. ∂G sei durch eine einfach geschlossene Kurve $\gamma \in C_{\text{per}}^2([0, 2\pi], \mathbf{R}^2)$ parametrisiert:

$$\partial G = \{\gamma(t) | t \in [0, 2\pi]\}.$$

Die Menge G_i wird das **Innengebiet** und

$$G_a := G$$

das **Außengebiet** genannt.

4.1 Abbildungseigenschaften in Hölderräumen

Es sollen die auf den \mathbf{R}^2 übertragenen Sätze 2.6, 2.7 und Lemma 2.10 aus Colton/Kreß [5] zusammen mit ihren Korollaren angewendet werden. Es kann nachgeprüft werden, daß sie ihre Gültigkeit behalten, wenn der Exponent “-2” in der dortigen Voraussetzung durch “-1” ersetzt wird.

Colton/Kreß [5] folgend werden für die stetige Abbildung $u: \mathbf{R}^2 \setminus \partial G \rightarrow \mathbf{R}$ die Grenzwerte, falls sie existieren,

$$u^a(x) := \lim_{G_a \ni y \rightarrow x \in \partial G} u(y), \quad u^i(x) := \lim_{G_i \ni y \rightarrow x \in \partial G} u(y), \quad x \in \partial G$$

definiert.

Satz 4.1: Es sei $0 < \alpha < 1$ und

$$D_{ij}(x, y) := \frac{(x_i - y_i)(x_j - y_j)}{|x - y|^2} \frac{(x - y) \cdot \mathbf{n}(y)}{|x - y|^2}, \quad x \notin \partial G, \quad y \in \partial G.$$

Dann ist für $\phi \in C^0(\partial G)$ das Vektorfeld

$$u(x) := \int_{\partial G} D(x, y) \phi(y) \, ds(y), \quad x \notin \partial G$$

stetig von G_i auf ∂G bzw. von G_a auf ∂G fortsetzbar. Die Grenzwerte sind gegeben durch:

$$u^a(x) = -\frac{\pi}{2} \phi(x) + \int_{\partial G} D(x, y) \phi(y) \, ds(y), \quad x \in \partial G$$

$$u^i(x) = \frac{\pi}{2} \phi(x) + \int_{\partial G} D(x, y) \phi(y) \, ds(y), \quad x \in \partial G$$

Für $\rho > \text{diam}(G_i)$ ist die Abbildung

$$C^{0, \alpha}(\partial G) \ni \phi \rightarrow \int_{\partial G} D(\cdot, y) \phi(y) \, ds(y) \in C^{0, \alpha}(\overline{G}_\rho) \cup C^{0, \alpha}(\overline{G}_i) \cup C^{0, \alpha}(\partial G) \quad (4.1)$$

wohldefiniert und stetig.

Bemerkung: Für $x \in \partial G$ existiert das Randintegral $\int_{\partial G} D(x, y) \phi(y) \, ds(y)$ als uneigentliches Integral.

Beweis: Aus Varnhorn [23] oder Ladyzhenskaya [15] entnimmt man für $\partial G \in C^2$ und $i, j = 1, 2$

$$V_{ij}(x) := \int_{\partial D} \frac{(x_i - y_i)(x_j - y_j)(x - y) \cdot n(y)}{|x - y|^2 |x - y|^2} ds(y) = -\pi \begin{cases} \delta_{ij}, x \in G_i \\ \frac{1}{2} \delta_{ij}, x \in \partial G \\ 0, x \in G_a \end{cases} \quad (4.2)$$

Das weitere Vorgehen der Analyse des Potentialoperators ist weitgehend analog zur Analyse des Doppelschichtpotentials der Laplacegleichung im \mathbf{R}^3 aus dem Buch von Colton/Kreß [5].

Für $h_0 > 0$ wird

$$G_{h_0}^{\parallel} := \{z + hn(z) | z \in \partial G, h \in \mathbf{R}, |h| \leq h_0\}$$

definiert.

Für $\varepsilon > 0$ und $z \in \partial G$ wird die Menge

$$\Sigma_{z, \varepsilon} := \{y \in \partial G | |y - z| < \varepsilon\}$$

definiert.

Für genügend kleines h_0 , gibt es zu jedem $x \in G_{h_0}^{\parallel}$ genau ein $|h| \leq h_0$ und genau ein $z \in \partial G$ mit $x = z + hn(z)$. Es wird also hierdurch eine Projektionsabbildung $P_{\partial G}: G_{h_0}^{\parallel} \ni x \rightarrow z \in \partial G$ definiert.

Mit Satz 2.11 kann für genügend kleine h_0 abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned} |x - y|^2 &= |x - z|^2 + |y - z|^2 + 2h(n(z) \cdot (y - z)) \\ &\geq |x - z|^2 + (1 - 2h_0)|y - z|^2 \\ &\geq \frac{1}{2}(|x - z|^2 + |y - z|^2) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Für $z, y \in \partial G$ gibt es $\tau, \sigma \in [0, 2\pi]$ mit $z = \gamma(\tau)$ und $y = \gamma(\sigma)$. Aus $\partial G \in C^2$ und dem Satz von Taylor mit Lagrangerestglied, angewendet auf die skalare Funktion $f(\sigma) := |\gamma(\tau) - \gamma(\sigma)|^2$, folgt, daß es ein $\delta = \delta(\tau) > 0$ und ein $L_1 > 0$ gibt mit

$$|y - z| = |\gamma(\tau) - \gamma(\sigma)| \geq L_1 |\sigma - \tau| \text{ für alle } \sigma \text{ mit } |\sigma - \tau| < \delta. \quad (4.4)$$

Weiter gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$ so, daß für alle $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ die Menge $\Sigma_{z, \varepsilon}$ dargestellt werden kann als

$$\Sigma_{z, \varepsilon} = \{\gamma(\sigma) \mid \sigma \in (\tau - \alpha_\varepsilon, \tau + \beta_\varepsilon)\} \text{ mit } 0 < \alpha_\varepsilon, \beta_\varepsilon < \delta.$$

Für $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ gilt nach den obigen Betrachtungen die Abschätzung

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_{z, \varepsilon}} |D_{ij}(x, y)| \, ds(y) &\leq \int_{\Sigma_{z, \varepsilon}} \left| \frac{(x-y) \cdot n(y)}{|x-y|^2} \right| \, ds(y) \\ &\leq \int_{\Sigma_{z, \varepsilon}} \left(\left| \frac{(x-y) \cdot n(y)}{|x-y|^2} \right| + \left| \frac{(z-y) \cdot n(y)}{|x-y|^2} \right| \right) \, ds(y). \\ &\leq 2 \int_{\tau - \alpha_\varepsilon}^{\tau + \beta_\varepsilon} \left(h \frac{n(\gamma(\sigma)) \cdot n(\gamma(\tau))}{h^2 + L_2 |\sigma - \tau|^2} + 1 \right) |\gamma'(\sigma)| \, d\sigma \end{aligned}$$

Im folgenden wird mit L eine Konstante $L > 0$ bezeichnet, die nur vom Gebiet ∂G abhängt.

Da nach (4.4) $|\beta_\varepsilon - \alpha_\varepsilon| \leq (2/L_1)\varepsilon$ ist, erhält man

$$\int_{\Sigma_{z, \varepsilon}} |D_{ij}(x, y)| \, ds(y) \leq L \left(\varepsilon + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h}{h^2 + \sigma^2} \, d\sigma \right) = L(\varepsilon + \pi) \quad (4.5)$$

Hieraus folgt mit (4.2)

$$\left| \int_{\partial G \setminus \Sigma_{z, \varepsilon}} D_{ij}(x, y) \, ds(y) \right| \leq (2L + 1)\pi \text{ für alle } x = z + hn(z) \in G_h^\parallel \quad (4.6)$$

für alle $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung verifiziert man für $x_1 = z_1 + h_1 n(z_1)$, $x_2 = z_2 + h_2 n(z_2)$, $z_i \in \partial G$, $|h_i| \leq h_0$, $i = 1, 2$, und $y \in \partial G$ die Abschätzungen

$$|D_{ij}(x_1, y)| \leq M|x_1 - y|^{-1} \quad (4.7)$$

$$|D_{ij}(x_1, y) - D_{ij}(x_2, y)| \leq M|x_1 - y|^{-2}|x_1 - x_2| \text{ für } 2|x_1 - x_2| \leq |x_1 - y|. \quad (4.8)$$

Dabei ist $M > 0$ eine geeignete Konstante, die sich aus dem Mittelwertsatz bestimmen läßt. Mit (4.3) und (4.8) gilt für genügend kleine $\varepsilon > 0$:

$$\int_{\partial G \setminus \Sigma_{z, \varepsilon}} |D_{ij}(x, y) - D_{ij}(z, y)| \, ds(y) \leq L \frac{|x - z|}{\varepsilon^2}. \quad (4.9)$$

Um die stetige Fortsetzbarkeit des Vektorfelds u auf den Rand ∂G zu beweisen, schreibt man

$$u_i(x) = V_{ij}(x)\phi_j(z) + U_i(x) \text{ für } x = z + hn(z) \quad (4.10)$$

mit

$$U_i(x) := \int_{\partial G} D_{ij}(x, y)(\phi_j(y) - \phi_j(z)) \, ds(y), \quad x \notin \partial G. \quad (4.11)$$

Nach Satz 2.11 ist der Kern $D_{ij}|_{\partial G \times \partial G}$ ein schwach singulärer Kern auf $\partial G \times \partial G$.

Hieraus folgt, daß das Integral auf der rechten Seite von (4.11) für $x \in \partial G$ existiert und eine stetige Funktion auf dem Rand ist (siehe z.B. Satz 2.6 in [5] oder Satz 2.22 in [12]). Der Beweis der stetigen Fortsetzbarkeit von u_i folgt dann aus der Eigenschaft

$$\lim_{h \rightarrow 0} U_i(z + hn(z)) = U_i(z) \text{ gleichmäßig in } z \in \partial G. \quad (4.12)$$

Mit (4.5) und (4.9) kann

$$|U_i(x) - U_i(z)| \leq L \left(\sup_{\substack{|y-z| \leq \varepsilon \\ j=1,2}} |\phi_j(z) - \phi_j(y)| + 2\|\phi\|_{\infty, \partial G} \frac{|x-z|}{\varepsilon^2} \right) \quad (4.13)$$

abgeschätzt werden. Aus (4.13) erhält man (4.12) wie folgt: Im Fall von $\phi = 0$ ist die Aussage (4.12) trivial. Es wird $\phi \neq 0$ betrachtet. Es sei $\rho > 0$. Dann gibt es wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von ϕ auf ∂G ein $\varepsilon > 0$ mit

$$|\phi_j(z) - \phi_j(y)| < \frac{\rho}{2L} \text{ für alle } y, z \in \partial G.$$

Mit $x = z + hn(z)$ und $|n(z)| = 1$ folgt $|x - z| = |h|$. Für $|h| < \frac{\varepsilon^2}{2\|\phi\|_{\infty, \partial G}} \frac{\rho}{2L}$ kann nach (4.13)

$$|U_i(x) - U_i(z)| \leq \rho$$

abgeschätzt werden. Dies zeigt (4.12), da $\rho > 0$ beliebig gewählt worden war.

Die Behauptung in (4.1) folgt aus der Aufspaltung (4.10) sowie aus der zweidimensionalen Version von Lemma 2.10 in [5], welches wegen der Abschätzungen (4.6), (4.7) und (4.8) hier anwendbar ist. Dieses Lemma besagt, daß für h_0 genügend klein die Abbildung

$$C^{0, \alpha}(\partial G) \ni \phi \rightarrow \int_{\partial G} D_{ij}(\cdot, y)(\phi_j(y) - \phi_j(P_{\partial G} \cdot)) \, ds(y) \in C^{0, \alpha}(G_{h_0}^{\parallel}), \alpha \in (0, 1)$$

wohldefiniert und ein stetiger linearer Operator ist. Da U_i in $\mathbf{R}^2 \setminus \partial G$ analytisch ist, ist hiermit die Behauptung (4.1) bewiesen. •

Zum weiteren Studium der Abbildungseigenschaften des Einfachschichtpotentials ist folgendes Lemma hilfreich:

Behauptung 4.1: Die Abbildung

$$[0, 2\pi]^2 \ni (t, \tau) \rightarrow \begin{cases} \frac{(\gamma(t) - \gamma(\tau))_i (\gamma(t) - \gamma(\tau))_j}{|\gamma(t) - \gamma(\tau)|^2}, \tau \neq t \\ \frac{\gamma'(t)_i \gamma'(t)_j}{|\gamma'(t)|^2}, \tau = t \end{cases} \in \mathbf{R}, i, j = 1, 2$$

ist einmal stetig differenzierbar.

Beweis: Nach dem Satz von Taylor mit Integralrestglied kann

$$\gamma(\tau) - \gamma(t) = (\tau - t) \left[\gamma'(t) + \int_0^1 (1 - \xi)(\gamma'(t + \xi(\tau - t)) - \gamma'(t)) \, d\xi \right] \quad (4.14)$$

geschrieben werden. Dies zeigt die Stetigkeit der Abbildung. Mit der gleichmäßigen Stetigkeit von γ'' kann unter dem Integral in (4.14) differenziert werden und die so entstehende Ableitung ist stetig. Dies zeigt die Behauptung. •

Satz 4.2: Es sei $\partial G \in C^2$, $0 < \alpha < 1$. Dann sind für $\rho > \text{diam}(G_i)$ die Abbildungen

$$S: C^{0, \alpha}(\partial D) \ni \phi \rightarrow \int_{\partial G} E(x-y)\phi(y) \, ds(y) \in C^{1, \alpha}(\overline{G_\rho}) \cup C^{1, \alpha}(\overline{G_i}) \cup C^0(\mathbf{R}^2)$$

$$\Pi: C^{0, \alpha}(\partial D) \ni \phi \rightarrow \int_{\partial G} e(x-y) \cdot \phi(y) \, ds(y) \in C^{0, \alpha}(\overline{G_\rho}) \cup C^{0, \alpha}(\overline{G_i})$$

wohldefiniert und stetig. Es gilt für $x \in \partial G$ und $k = 1, 2$

$$(S\phi)^i(x) = S\phi(x) = (S\phi)^a(x), \quad (4.15)$$

$$\nabla(S\phi)_k^a(x) = -\frac{1}{2\mu} \{ \phi_k(x) - (\phi(x) \cdot n(x))n_k(x) \} n(x) + \int_{\partial G} \nabla_x E_{kj}(x-y)\phi_j(y) \, ds(y) \quad (4.16)$$

$$\nabla(S\phi)_k^i(x) = \frac{1}{2\mu} \{ \phi_k(x) - (\phi(x) \cdot n(x))n_k(x) \} n(x) + \int_{\partial G} \nabla_x E_{kj}(x-y)\phi_j(y) \, ds(y)$$

$$(\Pi\phi)^a(x) = \frac{1}{2} \phi(x) \cdot n(x) + \int_{\partial G} e_j(x-y)\phi_j(y) \, dS(y) \quad (4.17)$$

$$(\Pi\phi)^i(x) = -\frac{1}{2} \phi(x) \cdot n(x) + \int_{\partial G} e_j(x-y)\phi_j(y) \, dS(y)$$

Bemerkung: Die in (4.16) auftretenden Randintegrale sind im Cauchyschen Hauptwertsinn zu verstehen: Für $x \in \partial G$ wird

$$\int_{\partial G} \nabla_x E_{kj}(x-y)\phi_j(y) \, ds(y) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial G \setminus \Sigma_{x, \varepsilon}} \nabla_x E_{kj}(x-y)\phi_j(y) \, ds(y)$$

definiert (s. Beweis von Satz 4.1 zur Definition von $\Sigma_{x, \varepsilon}$). In analoger Weise sind die Randintegrale in (4.17) zu verstehen.

Beweis: Mit Hilfe der Entwicklung der Fundamentallösung E aus Lemma 3.1 wird der Operator S aufgespalten in $S = S_S + S_R$ mit

$$S_S\phi(x) := \int_{\partial G} E_S(x-y)\phi(y) \, dS(y), \quad S_R\phi(x) := \int_{\partial G} E_R(x-y)\phi(y) \, dS(y), \quad x \notin \partial G.$$

Aus dem in das Zweidimensionale übertragenen Satz 2.7 in [5] sowie den Abschätzungen (3.2) bis (3.5) für E_R folgt für alle $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ offen und beschränkt die Stetigkeit des Operators $S_R: C^{0, \alpha}(\partial G) \rightarrow C^1(\overline{\Omega})$.

Der Kern des Potentialoperators E_S kann für $z_1, z_2 \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ mit $|z_i| \leq R$, $i = 1, 2$ und $0 < \alpha < 1$ abgeschätzt werden durch

$$|E_S(z_1)| \leq M(R)|z_1|^{-\alpha}$$

$$|E_S(z_1) - E_S(z_2)| \leq M(R)|z_1|^{-\alpha-1}|z_1 - z_2|.$$

Nach der zweidimensionalen Version von Satz 2.7 in [5] ist der Operator $S_S: C^{0, \alpha}(\partial G) \rightarrow C^0(\bar{\Omega})$ für alle offenen und beschränkten Mengen $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ stetig.

Für $z \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ berechnet man

$$4\pi\mu\partial_m E_S(z)_{kj} = -\partial_m(\log|z|)\delta_{kj} + \delta_{mj}\partial_k(\log|z|) + \delta_{mk}\partial_j(\log|z|) - 2\frac{z_k z_j z_m}{|z|^4}. \quad (4.18)$$

Der weitere Beweis folgt nun der Idee des Beweises von Satz 2.17 in [5] (stetige Fortsetzbarkeit des Gradienten des Einfachschichtpotentials der Helmholtzgleichung im Dreidimensionalen).

Für $b \in \mathbf{R}^2$ werden die Vektorfelder

$$U_k(x)b := -\int_{\partial G} (\nabla_y E_S(x-y))_{kj} \cdot n(y) n(y) b_j ds(y), \quad x \notin \partial G, \quad k = 1, 2$$

$$V_k(x)b := -\int_{\partial G} \frac{\partial}{\partial \tau(y)} E_S(x-y)_{kj} b_j ds(y), \quad x \notin \partial G, \quad k = 1, 2$$

definiert. Für eine konstante Dichte $\phi(x) = b$, $x \in \partial G$, erhält man mit $\nabla_x E_S(x-y) = -\nabla_y E_S(x-y)$

$$\nabla(S\phi)_k(x) = U_k(x)b + V_k(x)b, \quad x \notin \partial G.$$

Das Vektorfeld $U(\cdot)b$ soll vom Innengebiet G_i und dem Außengebiet G_a auf ∂G fortgesetzt werden. Nach Gleichung (4.18) zerfällt der durch den Kern $\nabla_y E_S(x-y)_{kj} \cdot n(y)$ erzeugte Integraloperator in vier Bestandteile. Die durch die ersten drei Terme erzeugten Integraloperatoren können mit dem Satz von Sokhotski-Plemelj (Satz 7.6 in [12]) auf ∂G fortgesetzt werden. Für den vierten Term verwendet

man Satz 4.1 mit den hölderstetigen Dichten $\phi_k = n_k b$, $k = 1, 2$. Das Resultat sind für $x \in \partial G$ und $k = 1, 2$ die Formeln

$$\begin{aligned} (U_k(\cdot)b)^a(x) &= -\frac{1}{2\mu} \{b_k - (b \cdot n(x))n_k(x)\}n(x) \\ &\quad - \int_{\partial G} (\nabla_y E_S(x-y))_{kj} \cdot n(y))n(y) b_j ds(y) \\ (U_k(\cdot)b)^i(x) &= \frac{1}{2\mu} \{b_k - (b \cdot n(x))n_k(x)\}n(x) \\ &\quad - \int_{\partial G} (\nabla_y E_S(x-y))_{kj} \cdot n(y))n(y) b_j ds(y) \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Sokhotski-Plemelj und Satz 4.1 sind diese Fortsetzungen in \overline{G}_1 und \overline{G}_a lokal hölderstetig.

Für $x \notin \partial G$ kann mit Satz 2.10 der Kern des Vektorfeldes $V(\cdot)b$ partiell integriert werden:

$$V(x)b = \int_{\partial G} E_S(x-y)_{ij} H(y)n(y)b_j ds(y). \quad (4.19)$$

Mit der zweidimensionalen Version von Satz 2.7 aus [5] kann $V(\cdot)b$ zu einem auf \mathbf{R}^2 stetigen Vektorfeld fortgesetzt werden. Es bleibt noch Gleichung (4.19) und damit die Existenz des Cauchyschen Hauptwerts für $x = \gamma(t) \in \partial G$ zu beweisen. Für $\varepsilon > 0$ gibt es $0 < a_\varepsilon < b_\varepsilon < 2\pi$ mit

$$\partial G \setminus \Sigma_{x, \varepsilon} = \text{Bi}(\gamma([0, a_\varepsilon])) \cup \text{Bi}(\gamma([b_\varepsilon, 2\pi])).$$

Dann liefert partielle Integration:

$$\int_{\partial G \setminus \Sigma_{x,\varepsilon}} \frac{\partial}{\partial \tau(y)} E_S(x-y)_{ij} b_j \, ds(y) = \tau(\gamma(a_\varepsilon)) E_S(x-\gamma(a_\varepsilon))_{ij} - \tau(b_\varepsilon) E_S(x-\gamma(b_\varepsilon))_{ij} \\ + \int_{\partial G \setminus \Sigma_{x,\varepsilon}} E_S(x-y)_{ij} H(y) n(y) b_j \, ds(y)$$

Mit $\log|x-\gamma(a_\varepsilon)| = \log(\varepsilon) = \log|x-\gamma(b_\varepsilon)|$, Behauptung 4.1, sowie der Abschätzung $|\tau(\gamma(a_\varepsilon)) - \tau(\gamma(b_\varepsilon))| \leq 2\varepsilon$, welche aus $\tau \in C^1(\partial G)$ bzw. $\partial G \in C^2$ folgt, kann die Identität

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \tau(\gamma(a_\varepsilon)) E_S(x-\gamma(a_\varepsilon))_{ij} - \tau(b_\varepsilon) E_S(x-\gamma(b_\varepsilon))_{ij} = 0.$$

gewonnen werden. Dies zeigt für $x \in \partial G$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial G \setminus \Sigma_{x,\varepsilon}} \frac{\partial}{\partial \tau(y)} E_S(x-y)_{ij} b_j \, ds(y) = \int_{\partial G} E_S(x-y)_{ij} H(y) n(y) b_j \, ds(y).$$

Die zweidimensionale Version von Lemma 2.10 aus [5] angewendet auf

$$W_i(x) := \int_{\partial G} \nabla_x E_S(x-y)_{ij} (\phi_j(y) - \phi_j(z)) \, ds(y), \quad x = z + hn(z)$$

und

$$\nabla(S\phi)(x) = (U(x) + V(x))\phi(z) + W(x), \quad x = z + hn(z)$$

liefert die hölderstetige Fortsetzung von $\nabla(S\phi)$ auf ∂G sowie die hier behaupteten Abbildungseigenschaften $S: C^{0,\alpha}(\partial G) \rightarrow C^{1,\alpha}(\overline{G}_\rho) \cup C^{1,\alpha}(\overline{G}_i) \cup C^0(\mathbf{R}^2)$ des Einfachschichtpotentials S .

Die Abbildungseigenschaften von Π folgen aus dem Satz von Sokhotski-Plemelj (Satz 7.6 in [12]). •

4.2 Abbildungseigenschaften in Sobolevräumen

In diesem Abschnitt werden die Abbildungseigenschaften des Einfachschichtpotentials in Sobolevräumen studiert. Im ersten Schritt werden die Abbildungseigenschaften zwischen den Randsobolevräumen angegeben. Mit der Technik des Beweises von Satz 8.22 aus Kreß [12] kann die Stetigkeit des Einfachschichtpotentialoperators auf die Sobolevräume $H^1(G_i)$ bzw. $H^1(G_\rho)$ erweitert werden.

Prototypen von Randintegraloperatoren, wie sie in der parametrisierten Form des Einfachschichtpotential für die Oseengleichung auftreten, werden in den beiden folgenden Lemmata untersucht.

Lemma 4.3: Es sei $k \in C_{\text{per}}^m([0, 2\pi]^2)$, $m \in \mathbf{N}$ und

$$L(t) := \frac{1}{2\pi} \log\left(\frac{4}{e} \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)\right), \quad t \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbf{Z}\}$$

Dann haben die Integraloperatoren A , definiert durch

$$A\phi(t) := \int_0^{2\pi} \left\{ \begin{array}{l} \sin^2((t-s)/2) \\ \sin^2(t-s) \end{array} \right\} L(t-s)k(t,s)\phi(s)ds, \quad \phi \in L^2,$$

die Abbildungseigenschaften

$$A: H^s \rightarrow H^{s + \min(2, m)} \quad \text{für } -m \leq s \leq m - \min(2, m).$$

Es kann ferner die Operatornorm von A durch

$$\|A\|_{H^s \rightarrow H^{s + \min(2, m)}} \leq C\|k\|_{C^m} \quad (4.20)$$

mit einer nur von s und m abhängigen Konstanten $C > 0$ abgeschätzt werden.

Beweis: Die Abbildungseigenschaften der in diesem Lemma betrachteten Integraloperatoren werden in der Arbeit von Kreß/Sloan [13] für unendlich oft differenzierbare k studiert. Ihre Beweisstrategie kann auf den hier vorliegenden Fall übertragen werden. Man bekommt dann durch die m -malige Differenzierbarkeit von k eine Beschränkung für den Index s , die für unendlich oft differenzierbare k nicht auftritt.

•

Lemma 4.4: Es sei $k \in C_{\text{per}}^1([0, 2\pi]^2)$. Dann ist der Integraloperator

$$A: H^s \ni \phi \rightarrow \int_0^{2\pi} \sin(\cdot - s)L(\cdot - s)k(\cdot, s)\phi(s)ds \in H^{s+1}, \quad -1 \leq s \leq 0, \quad (4.21)$$

stetig und linear.

Beweis: Es sei $s = 0$. Mit $l_n := \frac{1}{\max(1, |n|)}$ ist nach [12]

$$\int_0^{2\pi} L(t-s) e^{ins} ds = l_n e^{int}, \quad n \in \mathbf{Z}. \quad (4.22)$$

Nach Gleichung (4.22) ist $L \in L^2 = H^0$. Daher kann für $\phi \in H^0 = L^2$ mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|A\phi(t)| \leq \|k\|_{C^1} \|L\|_{L^2} \|\phi\|_{L^2}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

abgeschätzt werden.

Mit $\tilde{k}(t, s) := \sin(t-s)L(t-s)k(t, s)$, $t, s \in [0, 2\pi]$, $t \neq s$, berechnet man für $t \neq s$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{k}(t, s) &= \left[\cos(t-s)L(t-s) + \frac{1}{\pi} \cos^2\left(\frac{t-s}{2}\right) \right] k(t, s) \\ &\quad + \sin(t-s)L(t-s) \frac{\partial}{\partial t} k(t, s) \end{aligned}$$

Da $\left| \frac{\partial}{\partial t} \tilde{k}(t, s) \right| \leq 2\|k\|_{C^1} (|L(t-s)| + 1)$, $t \neq s$, abgeschätzt werden kann, erhält man mit $L \in L^2$ und Lemma 16.2 in [2], daß die t -Differentiation mit der s -Integration vertauscht werden kann. Es ist

$$\frac{d}{dt} A\phi(t) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{k}(t, s) \phi(s) \, ds.$$

Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung sieht man $\left\| \frac{d}{dt} A\phi \right\|_0 \leq c \|k\|_{C^1} \|\phi\|_0$. Dies zeigt die Abbildungseigenschaft von A im Fall von $s = 0$. Vom L^2 -adjungierten Operator von A

$$A^* \psi(s) := \int_0^{2\pi} \sin(t-s)L(t-s)k(t, s)\psi(t) \, dt,$$

der einen Kern gleicher Glätte wie A hat, hat man die analoge Abbildungseigenschaft $A^*: H^0 \rightarrow H^1$. Mit $\langle A\phi | \psi \rangle_{L^2} = \langle \phi | A^*\psi \rangle_{L^2}$ für $\phi, \psi \in L^2$ folgt die Stetigkeit von $A: H^{-1} \rightarrow H^0$. Durch Interpolation (Satz 8.12 in [12]) erhält man die Behauptung des Satzes. •

Für den Beweis der Abbildungseigenschaften des Einfachschichtpotentials der Oseengleichung sowie ihrer numerischen Diskretisierung ist es hilfreich, folgende Entwicklung der Kernfunktion zu betrachten:

Lemma 4.5: Es sei

$$\chi(t) := \frac{e}{e^2 - 1} (e - e^{-\cos(t)}), t \in \mathbf{R}.$$

Vorgegeben sei ein $k \in C_{\text{per}}^m([0, 2\pi]^2)$, $m \geq 1$. Dann sind die Funktionen

$$k_\chi(t, s) := \frac{\chi(t-s)}{\sin(t-s)} (k(t, s) - k(t, t)), t, s \in [0, 2\pi], t \neq s, t-s \neq \pi$$

$$k_{\chi, q}(t, s) := \frac{1 - \chi(t-s)}{\sin^2((t-s)/2)} \sin(t-s) (k_\chi(t, s) - k_\chi(t, t)), t \neq s, t, s \in [0, 2\pi]$$

$$k_q(t, s) := \frac{1 - \chi(t-s)}{\sin^2((t-s)/2)} (k(t, s) - k(t, t)), t, s \in [0, 2\pi], t \neq s$$

durch

$$k_\chi(t, t) := -\partial_{(0,1)}^2 k(t, t), k_\chi(t, t + \pi) := 0 \text{ und } k_q(t, t) = 0, t \in [0, 2\pi]$$

stetig auf $[0, 2\pi]^2$ fortsetzbar.

Für $m \geq 2$ kann

$$k_{\chi, \chi}(t, s) = \frac{\chi(t-s)}{\sin(t-s)} (k_\chi(t, s) - k_\chi(t, t)), t, s \in [0, 2\pi], t \neq s, t-s \neq \pi$$

durch $k_{\chi, \chi}(t, t) := -\partial_{(0,1)}^2 k_\chi(t, t)$ und $k_{\chi, \chi}(t, t + \pi) := 0$ für $t \in [0, 2\pi]$ auf $[0, 2\pi]^2$ fortgesetzt werden.

Die Operatoren

$$C_{\text{per}}^m([0, 2\pi]^2) \ni k \rightarrow k_\chi, k_{\chi, q} \in C_{\text{per}}^{m-1}([0, 2\pi]^2),$$

$$C_{\text{per}}^m([0, 2\pi]^2) \ni k \rightarrow k_q \in C_{\text{per}}^m([0, 2\pi]^2)$$

sind linear und stetig. Gilt zusätzlich $k \in C_{\text{per}}^\omega([0, 2\pi]^2)$, dann sind auch $k_\chi, k_{\chi, q}, k_q \in C_{\text{per}}^\omega([0, 2\pi]^2)$. Man hat weiter die Entwicklung

$$\begin{aligned} k(t, s) - k(t, t) &= \sin(t-s)k_\chi(t, s) + \sin^2((t-s)/2)k_q(t, s) \\ &= \sin(t-s)k_\chi(t, t) \\ &\quad + \sin^2(t-s)k_{\chi, \chi}(t, s) \\ &\quad + \sin((t-s)/2)(k_{\chi, q}(t, s) + k_q(t, s)) \end{aligned}$$

Dabei ist letzte Identität nur dann gültig, wenn $m \geq 2$ vorausgesetzt wird.

Beweis: An der Potenzreihenentwicklung von χ und des Sinus in $t = \pi$ erkennt man, daß $\chi(x)/\sin(x)$ in $x = \pi$ analytisch fortgesetzt werden kann. Dies ergibt die Fortsetzung von k_χ in $s = t + \pi$. Diese Fortsetzung in $s = t + \pi$ ist dort genau so oft stetig differenzierbar wie k , da k an dieser Stelle nicht modifiziert wurde. Ebenso sind die Fortsetzungen k_χ, k_q und $k_{\chi, q}, k_{\chi, \chi}$ in $s = t + \pi$ in einer Umgebung von $s = t + \pi$ analytisch, falls k in einer Umgebung von $s = t + \pi$ analytisch ist.

Nach der Taylorformel mit Integralrestglied gilt für $t \neq s$ und $|t-s| \leq \frac{\pi}{2}$:

$$k_\chi(t, s) = \frac{\chi(t-s)(s-t)}{\sin(t-s)} \left(\partial_2 k(t, t) + \int_0^1 (1-\tau) \{ \partial_2 k(t, t + \tau(s-t)) - \partial_2 k(t, t) \} d\tau \right)$$

Diese Darstellung von k_χ zeigt, daß in einer Umgebung des Punktes (t, t) die Funktion k_χ darstellbar ist als Produkt einer analytischen Funktion $\frac{\chi(t-s)(s-t)}{\sin(t-s)}$

und einer wegen $k \in C_{\text{per}}^m([0, 2\pi]^2)$ $(m-1)$ -mal stetig differenzierbaren Funktion. Ist k eine in beiden Variablen (t, s) analytische Funktion, so ist auch diese Fortsetzung in (t, t) analytisch, da nach der gleichmäßigen Stetigkeit der $(m-1)$ Ableitungen von k unter dem Integral nach t und s differenziert werden bzw. in Potenzreihen in (t, s) entwickelt werden kann. Das Aufspalten des Definitionsgebiets in

$$[0, 2\pi]^2 = \left\{ (t, s) \mid \left| |t-s| \leq \frac{\pi}{2} \right. \right\} \cup \left\{ (t, s) \mid |t-s| > \frac{\pi}{2} \right\}$$

zeigt, daß $|D^\alpha k_\chi(t, s)| \leq c_\alpha \|k\|_m$ für jeden Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ mit $|\alpha| \leq m - 1$ abschätzbar ist. Da k_χ nach Wahl von χ eine in den Variablen (t, s) periodische Funktion mit Periode 2π ist, ist die Behauptung über k_χ bewiesen. Wegen $k_{\chi, \chi} = (k_\chi)_\chi$ ist damit auch die Behauptung über $k_{\chi, \chi}$ bewiesen.

Eine Potenzreihenentwicklung von χ und des Sinus im Nullpunkt zeigt, daß die Funktion $f(x) := \frac{(1 - \chi(x))}{\sin^2(x/2)}$, $x \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}$ durch Null in $x = 0$ analytisch fortgesetzt werden kann. Da $\mathbf{R} \ni x \rightarrow \sin^2(x/2) \in \mathbf{R}$ eine 2π periodische Funktion ist, ist damit die Behauptung für k_q und $k_{\chi, q}$ gezeigt. •

Lemma 4.6: Es sei $k \in C_{\text{per}}^m([0, 2\pi]^2)$, $m \geq 2$ mit

$$k(t, t) = 0 \text{ für alle } t \in [0, 2\pi].$$

Dann kann der Integraloperator

$$A\phi(t) := \int_0^{2\pi} L(t-s)k(t, s)\phi(s) \, ds, \quad \phi \in C_{\text{per}}^0([0, 2\pi])$$

mit den Funktionen $k_\chi, k_{\chi, \chi}, k_{\chi, q}, k_q$ und den Integraloperatoren

$$A_\chi \phi(t) := \int_0^{2\pi} \sin(t-s)L(t-s)k_\chi(t, s)\phi(s) \, ds$$

$$A_{\chi, 1} \phi(t) := k_\chi(t, t) \int_0^{2\pi} \sin(t-s)L(t-s) \phi(s) \, ds$$

$$A_{\chi, \chi} \phi(t) := \int_0^{2\pi} \sin^2(t-s)L(t-s)k_{\chi, \chi}(t, s)\phi(s) \, ds$$

$$A_{\chi, q} \phi(t) := \int_0^{2\pi} \sin^2\left(\frac{t-s}{2}\right)L(t-s)k_{\chi, q}(t, s)\phi(s) \, ds$$

$$A_q \phi(t) := \int_0^{2\pi} \sin^2\left(\frac{t-s}{2}\right)L(t-s)k_q(t, s)\phi(s) \, ds$$

aufgespalten werden in

$$A = A_\chi + A_q \quad (4.23)$$

$$A = A_{\chi,1} + A_{\chi,\chi} + A_{\chi,q} + A_q \quad (4.24)$$

Die einzelnen Operatoren haben folgende Abbildungseigenschaften:

$$A_\chi: H^s \rightarrow H^{s+1}, \quad -1 \leq s \leq 0$$

$$A_{\chi,1}: H^s \rightarrow H^{\min(s+2, m-1)}, \quad -1 - m \leq s$$

$$A_{\chi,\chi}: H^s \rightarrow H^{s+\min(2, m-2)}, \quad -m+2 \leq s \leq m-2 - \min(2, m-2)$$

$$A_{\chi,q}: H^s \rightarrow H^{s+\min(2, m-1)}, \quad -m+1 \leq s \leq m-1 - \min(2, m-1)$$

$$A_q: H^s \rightarrow H^{s+2}, \quad -m \leq s \leq m-2.$$

Beweis: Die Abbildungseigenschaft von A_χ folgt aus Lemma 4.5 und Lemma 4.4. Lemma 4.5 und Lemma 4.3 liefern die behauptete Abbildungseigenschaft von A_q .

Mit der Signumsfunktion

$$\text{sgn}(x) := \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

und

$$a_n^{11} := \frac{1}{2}(1_{n+1} - 1_{n-1}) = \frac{1}{n^2 - 1}, \quad |n| \geq 2 \quad (4.25)$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(t-s)L(t-s)e^{ins} ds = \frac{\text{sgn}(n)}{i} a_n^{11} e^{int}, \quad n \in \mathbf{Z} \quad (4.26)$$

erhält man die Stetigkeit von $A_{\sin}: H^s \ni \phi \rightarrow \int_0^{2\pi} \sin(t-s)L(t-s)\phi(s) ds \in H^{s+2}$ für alle $s \in \mathbf{R}$. Da der Multiplikationsoperator $(Mf)(t) := -k_\chi(t, t)f(t)$ für $|s| \leq m-1$ eine stetige lineare Abbildung $M: H^s \rightarrow H^s$ ist, ist die Abbildung $A_{\chi,1}: H^s \rightarrow H^{\min(s+2, m-1)}$ stetig für alle $s \geq -1 - m$. Die Abbildungseigenschaften von $A_{\chi,\chi}$, $A_{\chi,q}$, A_q folgen aus Lemma 4.3 und Lemma 4.5. •

Satz 4.7: Es sei $\partial G \in C^2$. Dann ist $S: H^s(\partial G) \rightarrow H^{s+1}(\partial G)$ für $-1 \leq s \leq 0$ stetig.

Beweis: Nach den im Beweis von Lemma 3.1 auftretenden Entwicklungen (3.6), (3.7) und (3.8) kann für $i, j = 1, 2$

$$E(\gamma(t) - \gamma(s))_{ij} = E_S(\gamma(t) - \gamma(s))_{ij} + k_{ij}^1(t, s) \log\left(\frac{|\gamma(t) - \gamma(s)|}{2}\right) + k_{ij}^s(t, s)$$

mit $k_{ij}^1, k_{ij}^s \in C_{\text{per}}^2([0, 2\pi]^2)$ und $k_{ij}^1(t, t) = 0$, $t \in [0, 2\pi]$ geschrieben werden. Dabei ist für $t \neq s$:

$$4\pi\mu E_S(\gamma(t) - \gamma(s))_{ij} = -\delta_{ij} \log(|\gamma(t) - \gamma(s)|) + \frac{\{\gamma_i(t) - \gamma_i(s)\} \{\gamma_j(t) - \gamma_j(s)\}}{|\gamma(t) - \gamma(s)|^2}$$

Ein Abspalten der logarithmischen Singularität durch

$$2\log(|\gamma(t) - \gamma(s)|) = \log\left[\frac{e}{4} \frac{|\gamma(t) - \gamma(s)|^2}{\sin^2((t-s)/2)}\right] + \log\left[\frac{4}{e} \sin^2\left(\frac{t-s}{2}\right)\right], t \neq s.$$

ergibt

$$4\pi\mu E(\gamma(t) - \gamma(s))_{ij} = L(t-s) + k_{ij}^1(t, s)L(t-s) + \tilde{k}_{ij}^s(t, s) \quad (4.27)$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{k}_{ij}^s(t, s) := & k_{ij}^1(t, s) + \frac{1}{2} \log\left[\frac{e}{4} \frac{|\gamma(t) - \gamma(s)|^2}{\sin^2((t-s)/2)}\right] (k_{ij}^1(t, s) - \delta_{ij}) \\ & + \frac{(\gamma_i(t) - \gamma_i(s))(\gamma_j(t) - \gamma_j(s))}{|\gamma(t) - \gamma(s)|^2} \end{aligned}$$

für $i, j = 1, 2$. Nach der Taylorentwicklung mit Integralrestglied ist

$$\gamma(s) - \gamma(t) = (s-t) \left[\gamma'(t) + \int_0^1 (1-\xi)(\gamma'(t + \xi(s-t)) - \gamma'(t)) d\xi \right]$$

Da γ'' gleichmäßig stetig ist, kann unter dem Integral differenziert werden. Hieraus folgt, daß die Funktion

$$[0, 2\pi]^2 \ni (t, s) \rightarrow \begin{cases} \log\left[\frac{e}{4} \frac{|\gamma(t) - \gamma(s)|^2}{\sin^2((t-s)/2)}\right], t \neq s \\ \log(e|\gamma'(t)|^2), t = s \end{cases}$$

einmal stetig differenzierbar ist. Aus Behauptung 4.1 folgt $\tilde{k}_{ij}^s \in C_{\text{per}}^1([0, 2\pi]^2)$.

Definiert man die Operatoren

$$S_L \phi(t) := 2\pi \int_0^{2\pi} L(t-s)\phi(s) \, ds, \phi \in L^2$$

$$A_{ij}\phi(t) := \int_0^{2\pi} L(t-s)k_{ij}^1(t,s)\phi(s) \, ds, \phi \in L^2, i, j = 1, 2$$

$$B_{ij}\phi(t) := \int_0^{2\pi} \tilde{k}_{ij}^s(t,s)\phi(s) \, ds, \phi \in L^2, i, j = 1, 2$$

dann zeigt (4.22) die Abbildungseigenschaft $S_L: H^s \rightarrow H^{s+1}$ für $s \in \mathbf{R}$. Aus Lemma 4.6 und Gleichung (4.23) folgt $A_{ij}: H^s \rightarrow H^{s+1}$ für $-1 \leq s \leq 0$. Elementar verifiziert kann $B_{ij}, B_{ij}^*: H^0 = L^2 \rightarrow H^1$ mit

$$B_{ij}^*\phi(s) := \int_0^{2\pi} \tilde{k}_{ij}^s(t,s)\phi(t) \, dt.$$

Dazu verwende man etwa das Differentiationslemma 16.2 aus [2].

Interpolation zeigt dann $B_{ij}: H^s \rightarrow H^{s+1}$, $-1 \leq s \leq 0$. Wegen

$$4\pi\mu(S\phi)_i = -\delta_{ij}S_L\tilde{\phi}_j + A_{ij}\tilde{\phi}_j + B_{ij}\tilde{\phi}_j \quad (4.28)$$

mit $\tilde{\phi}(s) := |\gamma(s)|\phi(s)$, $s \in [0, 2\pi]$ zeigt dies die behauptete Abbildungseigenschaft des Einfachschichtpotentials, wenn noch die nach Voraussetzung geltende Eigenschaft $|\gamma| \in C_{\text{per}}^1([0, 2\pi])$ berücksichtigt wird. •

Bemerkung: Satz 4.7 kann auch mit Hilfe des Satzes von Lax über die stetige Fortsetzung von linearen Operatoren in einem Hilbertraum (Satz 4.12 in [12] bzw. Satz 3.5 in [4]) bewiesen werden. Der Beweis folgt dann den Schritten des Beweises von Satz 3.6 in [4]. In der vorliegenden Arbeit wurde nicht so vorgegangen, da die Aufspaltung des Einfachschichtpotentials, so wie sie im Beweis von Satz 4.7 angegeben wurde, zur Konstruktion und Analyse einer Quadraturmethode verwendet werden wird.

Satz 4.8: Es sei $\rho > \text{diam}(G_i)$, $k \in \mathbf{N}$, $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ offen, beschränkt mit $\Omega \subset G_i \cup G_a$. Dann ist $S: H^{-1/2}(\partial G) \rightarrow H^1(G_i) \cup H^1(G_\rho) \cup C^k(\bar{\Omega})$ stetig. Ebenso sind die Abbildungen

$$\nabla S: H^{-1/2}(\partial D) \rightarrow L^2(G_a \cup G_i), \Pi: H^{-1/2}(\partial D) \rightarrow L^2(G_a \cup G_i) \cup C^k(\bar{\Omega})$$

stetig. Dabei ist $\nabla S\phi$ die Matrix

$$\nabla S\phi = \begin{bmatrix} \nabla(S\phi)_1 \\ \nabla(S\phi)_2 \end{bmatrix}$$

mit $\nabla(S\phi)_k = \left[\partial_1(S\phi)_k \quad \partial_2(S\phi)_k \right]$, $k = 1, 2$.

Beweis: Es sei $\phi \in C^{0, \alpha}(\partial G)$, $0 < \alpha < 1$.

Für $h > 0$ werden die Mengen

$$G_{\pm h}^{\parallel} := \{ \gamma(t) \pm \sigma n(t) \mid 0 < \sigma < h, t \in [0, 2\pi] \} \quad (4.29)$$

definiert. Es kann $h_0 > 0$ so klein gewählt werden, daß für alle $0 < h \leq h_0$ gilt:

1. Die Menge

$$\partial G_{\pm h}^{\parallel, h} := \{ \gamma(t) \pm hn(t) \mid t \in [0, 2\pi] \} \quad (4.30)$$

ist eine einfach geschlossene Kurve vom Type C^1 .

2. $G_{\pm h}^{\parallel}$ sind offene, beschränkte, zusammenhängende Mengen.

3. Es gilt $\partial G_{\pm h}^{\parallel} = \partial G \cup \partial G_{\pm h}^{\parallel, \pm h}$ mit $\partial G \cap \partial G_{\pm h}^{\parallel, \pm h} = \emptyset$.

Es sei $\rho > \text{diam}(G_i)$. Anwendung des klassischen Gaußschen Integralsatzes auf das Gebiet $D = [(G \cap K_\rho) \setminus G_h^{\parallel}] \cup [G_i \setminus G_{-h}^{\parallel}]$, $0 < h < h_0$, liefert mit $u = S\phi$ und $p = \Pi\phi$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_D u_k (\partial_1 u_k + \partial_k p - \mu \Delta u_k) \\ &= \int_{\partial D} \frac{1}{2} |u|^2 n_1 + \left(pn_k - \mu \frac{\partial u_k}{\partial n} \right) u_k + \mu \int_D |\nabla u_k|^2 \end{aligned} \quad (4.31)$$

Durch Einsetzen der Definition von u, p mit Berücksichtigung von

$$|\nabla S\phi|^2 = |\nabla(S\phi)_1|^2 + |\nabla(S\phi)_2|^2$$

erhält man aus (4.31) die Identität

$$\begin{aligned} \int_{G_p \setminus \overline{G_h^{\parallel}}} \mu |\nabla S\phi|^2 + \int_{G_i \setminus \overline{G_{-h}^{\parallel}}} \mu |\nabla S\phi|^2 &= \int_{\partial G_h^{\parallel, h}} \left(\frac{1}{2} |S\phi|^2 n_1^h + \left[n^h \Pi\phi - \mu \frac{\partial}{\partial n^h} S\phi \right] \cdot S\phi \right) ds_h \\ &\quad - \int_{\partial G_{-h}^{\parallel, h}} \left(\frac{1}{2} |S\phi|^2 n_1^{-h} + \left[n^{-h} \Pi\phi - \mu \frac{\partial}{\partial n^{-h}} S\phi \right] \cdot S\phi \right) ds_{-h} \\ &\quad - \int_{\partial K_p} \left(\frac{1}{2} |S\phi|^2 n_1 + \left[n \Pi\phi - \mu \frac{\partial}{\partial n} (S\phi) \right] \cdot S\phi \right) ds \end{aligned} \quad (4.32)$$

Dabei sind $n^{\pm h}$ die nach außen gerichteten Normalenvektoren an $\partial G_{\pm h}^{\parallel, \pm h}$ und $ds_{\pm h}$ das Oberflächenmaß auf $\partial G_{\pm h}^{\parallel, \pm h}$.

Nach der Parametrisierung des Randes $\partial G_{\pm h}^{\parallel, \pm h}$ in (4.30) erhält man mit

$$\kappa(t) := \frac{\gamma_1'(t)\gamma_2''(t) - \gamma_2'(t)\gamma_1''(t)}{|\gamma'(t)|^2}$$

$$\gamma_{\pm h}(t) = (|\gamma'(t)| \pm h\kappa(t)) \frac{\gamma'(t)}{|\gamma'(t)|}, \quad n^{\pm h}(t) = \frac{\gamma'(t)^\perp}{|\gamma'(t)|} = n(t) \quad (4.33)$$

$$ds_{\pm h}(t) = (|\gamma'(t)| \pm h\kappa(t)) dt = ds(t) + O(h). \quad (4.34)$$

Da $|\gamma'(t)| > 0$ für alle $t \in [0, 2\pi]$ ist, ist mit $\gamma \in C_{\text{per}}^2([0, 2\pi], \mathbf{R}^2)$ die Krümmung κ wohldefiniert und stetig. Es wird $h_0 > 0$ so klein gewählt, daß $|\gamma'(t)| \pm h\kappa(t) > 0$ für alle $t \in [0, 2\pi]$ und $0 < h < h_0$ gilt.

Nach der in Satz 4.2 bewiesenen gleichmäßigen Stetigkeit von $\Pi\phi, \nabla S\phi$ in $\overline{G_p}, \overline{G}$, den Sprungformeln (4.15), (4.16), (4.17) und den oben durchgeführten Betrachtungen für das Oberflächenmaß $ds_{\pm h}$ und $n^{\pm h}(t) = n(t)$ folgt aus Gleichung (4.32) durch Grenzübergang $h \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \mu \left(\int_{G_p} |\nabla S\phi|^2 + \int_{G_i} |\nabla S\phi|^2 \right) &= - \int_{\partial K_p} \left(\frac{1}{2} |S\phi|^2 n_1 + \left[n \Pi\phi - \mu \frac{\partial}{\partial n} S\phi \right] \cdot S\phi \right) \\ &\quad + \langle \phi | S\phi \rangle_{\partial G} \end{aligned} \quad (4.35)$$

Mit Lemma 3.2 kann für $|x| = \rho$

$$|S\phi(x)|, |\nabla S\phi(x)| \leq M(\phi) \left(\frac{1}{|x|} + \Omega^\infty(x) \right), |\Pi\phi(x)| \leq \frac{M(\phi)}{|x|} \quad (4.36)$$

mit einer von ϕ abhängigen Konstanten $M(\phi) > 0$ abgeschätzt werden. Damit ist

$$\left| \int_{\partial K_\rho} \left(\frac{1}{2} |S\phi|^2 n_1 + \left[n\Pi\phi - \mu \frac{\partial}{\partial n} S\phi \right] \cdot S\phi \right) \right| \leq M(\phi) \left(\frac{1}{\rho} + \int_0^{2\pi} e^{2\rho(\cos\phi - 1)} d\phi \right)$$

Wegen

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{2\rho(\cos\phi - 1)} d\phi &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{(-2\rho\phi^2) \frac{(1 - \cos\phi)}{\phi^2}} d\phi \\ &\leq \int_{-\pi}^{\pi} e^{-\frac{8}{\pi^2} \rho\phi^2} d\phi \\ &\leq \frac{1}{\pi\sqrt{8\rho}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{8\pi\rho}} \end{aligned} \quad (4.37)$$

folgt aus (4.35) für $\rho \rightarrow \infty$ die Identität

$$\mu \left(\int_{G_a} |\nabla S\phi|^2 + \int_{G_i} |\nabla S\phi|^2 \right) = \langle \phi | S\phi \rangle_{\partial G}, \quad \phi \in C^{0,\alpha}(\partial G). \quad (4.38)$$

Für $\phi \in H^{-1/2}(\partial G)$ gibt es wegen der Dichtheit von $C^{0,\alpha}(\partial G)$ in $H^{-1/2}(\partial G)$ eine Folge $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $\phi_n \rightarrow \phi$ in $H^{-1/2}(\partial G)$. Mit der Stetigkeit des Operators $S: H^{-1/2}(\partial G) \rightarrow H^{1/2}(\partial G)$ (Satz 4.7) folgt aus Gleichung (4.38), daß die Folge $(\nabla S\phi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^2(G_a \cup G_i)$ eine Cauchyfolge ist. Da $L^2(G_a \cup G_i)$ vollständig ist, existiert der Grenzwert der Folge $(\nabla S\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $L^2(G_a \cup G_i)$. Da für $x \notin \partial G$ der Grenzwert der Folge $(\nabla S\phi_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ gleich $\nabla S\phi(x)$ ist (s. auch Gleichung (4.40)), gelten $\nabla S\phi_n \rightarrow \nabla S\phi$ in $L^2(G_a \cup G_i)$ sowie die Identität:

$$\mu \left(\int_{G_a} |\nabla S\phi|^2 + \int_{G_i} |\nabla S\phi|^2 \right) = \langle \phi | S\phi \rangle_{\partial G} \quad \text{für } \phi \in H^{-1/2}(\partial G). \quad (4.39)$$

Es sei $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ offen, beschränkt mit $\Omega \subset G_i \cup G_a$. Für $x \in \Omega$ kann wegen $x \notin \partial G$ für jeden Multiindex $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ mit $|\alpha| = k$

$$D^\alpha S\phi(x) = \int_{\partial G} D_x^\alpha E(x-y)\phi(y) \, ds(y) = \langle D_x^\alpha E(x-\cdot) | \phi \rangle \quad (4.40)$$

geschrieben werden. Da $\bar{\Omega}$ kompakt ist, kann $|D^\alpha S\phi(x)| \leq M(\Omega)\|\phi\|_{-1/2}$ für alle $x \in \bar{\Omega}$ abgeschätzt werden.

Da nach Satz 8.17 in [12] durch $\|f\|_{H^1(D)}^2 := \|f|_{\partial D}\|_{L^2(\partial D)}^2 + \|\nabla f\|_{L^2(D)}^2$ für beschränkte C^2 -glatte Gebiete D eine zur H^1 -Norm (s. Definition 2.13) äquivalente Norm definiert wird, erhält man $S\phi \in H^1(G_\rho \cup G_i)$. Die Behauptung über Π folgt aus Satz 8.22 in [12], indem die Abbildungseigenschaften des Einfachschichtpotentials der Laplacegleichung im Zweidimensionalen untersucht werden. •

Korollar 4.9: Es sei $\phi \in H^{-1/2}(\partial G)$. Dann sind die Paare

$$(u_-, p_-) := \left(S\phi|_{G_i}, \Pi\phi|_{G_i} - \frac{1}{|G_i|} \int_{G_i} \Pi\phi \right), (u_+, p_+) := (S\phi|_{G_a}, \Pi\phi|_{G_a})$$

Lösungen des inneren bzw. äußeren Oseen-Randwertproblems mit $u_\infty = 0$ und $R_{0, \partial G} u_\pm = u_\pm|_{\partial G} = S\phi$. Dabei ist $|G_i|$ das Lebesguemaß von G_i , welches wegen der Beschränktheit von G_i endlich ist.

Beweis: Nach Satz 4.8 sind (u_\pm, p_\pm) in den in Definition 3.4 und Definition 3.5 geforderten Sobolevräumen. Da (u_\pm, p_\pm) punktweise für $x \in G_a \cup G_i$ die Oseengleichung lösen, verschwinden die in den Definitionen auftretenden Bilinearformen.

Nach Gleichung (4.15) haben u_\pm für $\phi \in C^{0, \alpha}(\partial G)$ die Randwerte $R_{0, \partial G} u_\pm = S\phi$. Mit den in Satz 4.8 bewiesenen Stetigkeitseigenschaften von S erweitert man diese auf $H^{-1/2}(\partial G)$ durch Approximation mit $C^{0, \alpha}(\partial G)$ -Funktionen. Also gilt

$$R_{0, \partial G} u_\pm = u_\pm|_{\partial G} = S\phi \text{ für alle } \phi \in H^{-1/2}(\partial G). \quad (4.41)$$

In Definition 3.4 wird gefordert, daß für eine Lösung (u, p) des inneren Oseen-Randwertproblems der Mittelwert des Drucks p

$$\int_{G_i} p = 0 \quad (4.42)$$

sein soll. Nach Definition von p_- gilt

$$\int_{G_i} p_- = \int_{G_i} \left(\Pi\phi - \frac{1}{|G_i|} \int_{G_i} \Pi\phi \right) = 0.$$

Also wird (4.42) von p_- erfüllt. Dies zeigt zusammen mit (4.41) und dem Verschwinden der in Definition 3.4 auftretenden Bilinearformen, daß das Paar (u_-, p_-) eine schwache Lösung des inneren Oseen-Randwertproblems im Sinn von Definition 3.4 ist.

Mit (4.36) und der Abschätzung (4.37) erhält man

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \int_{\partial K_1} |u_+(\rho\hat{x})| ds(\hat{x}) = 0.$$

Dies zeigt mit (4.41), daß das Paar (u_+, p_+) im Sinn von Definition 3.5 eine schwache Lösung des äußeren Oseen-Randwertproblems ist. Dabei ist jedoch noch das zu Beginn des Beweises bemerkte Verschwinden der Bilinearformen zu berücksichtigen. •

Satz 4.10: Für $\phi \in H^{-1/2}(\partial G)$ setze zur Abkürzung $(u^a, p^a) := (S\phi|_{G_a}, \Pi\phi|_{G_a})$ und $(u^i, p^i) := (S\phi|_{G_i}, \Pi\phi|_{G_i})$. Es sei $\rho_a > \text{diam}(G_i)$ und $\rho_i > 0$ mit $\overline{K_{\rho_i}} \subset G_i$, $R_{0, \text{div}}^-: H^{1/2}(\partial G) \rightarrow H^1(G_{\rho_a}) \cup H^1(G_i^{\rho_i})$ der Operator aus Satz 2.23 mit $g_1 = \partial G$ und $g_2 = \partial K_{\rho_a}$ oder $g_2 = \partial K_{\rho_i}$. Dann werden für $\psi \in H^{1/2}(\partial D)$ die Funktionale $\left(p^{i,a} n - \mu \frac{\partial u^{i,a}}{\partial n}\right) \in H^{-1/2}(\partial G)$ durch

$$\begin{aligned} \langle p^a n - \mu \frac{\partial u^a}{\partial n} | \psi \rangle_{\partial G} &:= a(S\phi, R_{0, \text{div}}^- \psi) + b(S\phi, R_{0, \text{div}}^- \psi) + \langle p^a n - \mu \frac{\partial u^a}{\partial n} | R_{0, \text{div}}^- \psi \rangle_{\partial K_{\rho_a}} \\ - \langle p^i n - \mu \frac{\partial u^i}{\partial n} | \psi \rangle_{\partial G} &:= a(S\phi, R_{0, \text{div}}^- \psi) + b(S\phi, R_{0, \text{div}}^- \psi) - \langle p^i n - \mu \frac{\partial u^i}{\partial n} | R_{0, \text{div}}^- \psi \rangle_{\partial K_{\rho_i}} \end{aligned}$$

definiert. Sie hängen stetig von ϕ ab. Im Fall von $\phi \in C^{0, \alpha}(\partial G)$ stimmen sie mit den klassischen Randwerten (4.16) und (4.17) überein. Man hat für $\phi \in H^{-1/2}(\partial G)$ und $\psi \in H^{1/2}(\partial D)$ die Identitäten

$$\begin{aligned} \langle \phi | \psi \rangle_{\partial G} &= \langle p^a n - \mu \frac{\partial u^a}{\partial n} | \psi \rangle_{\partial G} - \langle p^i n - \mu \frac{\partial u^i}{\partial n} | \psi \rangle_{\partial G} \\ &= a(S\phi, R_{0, \text{div}}^- \psi) + b(S\phi, R_{0, \text{div}}^- \psi) \\ &\quad + \langle p^a n - \mu \frac{\partial u^a}{\partial n} | R_{0, \text{div}}^- \psi \rangle_{\partial K_{\rho_a}} - \langle p^i n - \mu \frac{\partial u^i}{\partial n} | R_{0, \text{div}}^- \psi \rangle_{\partial K_{\rho_i}} \end{aligned} \tag{4.43}$$

sowie

$$\langle p^a n - \mu \frac{\partial u^a}{\partial n} | u^a \rangle_{\partial G} + \frac{1}{2} \langle |u^a|^2 | n_1 \rangle_{\partial G} = \mu \int_G |\nabla u^a|^2. \tag{4.44}$$

Beweis: Nach Satz 4.8 und Satz 2.23 gilt

$$\left| \left\langle \left(p^{i,a} n - \mu \frac{\partial u^{i,a}}{\partial n} \right) | \psi \right\rangle_{\partial G} \right| \leq c(\rho_i, \rho_a) \|\phi\|_{H^{-1/2}(\partial G)} \|\psi\|_{H^{1/2}(\partial G)}.$$

Dies zeigt $p^{i,a} n - \mu \frac{\partial u^{i,a}}{\partial n} \in H^{-1/2}(\partial G)$ sowie die stetige Abhängigkeit von $\phi \in H^{-1/2}(\partial G)$.

Wie im Beweis von Satz 4.8 werden für $h > 0$ die Mengen $G_{\pm h}^{\parallel}$ definiert (siehe (4.29)). Es kann $h_0 > 0$ so gewählt, daß für alle $0 < h \leq h_0$ gilt:

1. $\partial G_{\pm h}^{\parallel, h} := \{\gamma(t) \pm hn(t) | t \in [0, 2\pi]\}$ ist eine einfach geschlossene Kurve vom Typ C^1 .
2. $G_{\pm h}^{\parallel}$ sind offene, beschränkte, zusammenhängende Mengen;
3. Es gilt $\partial G_{\pm h}^{\parallel} = \partial G \cup \partial G_{\pm h}^{\parallel, \pm h}$ mit $\partial G \cap \partial G_{\pm h}^{\parallel, \pm h} = \emptyset$, $\partial G_{-h}^{\parallel, h} \cap K_{\rho_i} = \emptyset$, und $\partial G_h^{\parallel, h} \cap \partial K_{\rho_a} = \emptyset$.

Für $\phi \in C^{0, \alpha}(\partial G)$ und $F \in C^1(\overline{G_{\rho_a}}) \cup C^1(\overline{G_i^{\rho_i}})$ kann mit dem Gaußschen Integralsatz, angewendet auf die Gebiete $D_a := G_{\rho_a} \setminus \overline{G_h^{\parallel}}$, $D_i := G_i^{\rho_i} \setminus \overline{G_{-h}^{\parallel}}$, partiell integriert werden:

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{D_a} F \cdot (\partial_1 u^a + \nabla p^a - \Delta u^a) \\
 &= a(u^a, F) + b(u^a, F) + d(p^a, F) \\
 &\quad - \int_{\partial G_h^{\parallel, h}} F \cdot \left(p^a n^h - \mu \frac{\partial u^a}{\partial n^h} \right) ds_h + \int_{\partial K_{\rho_a}} F \cdot \left(p^a n - \mu \frac{\partial u^a}{\partial n^h} \right) ds
 \end{aligned} \tag{4.45}$$

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{D_i} F \cdot (\partial_1 u^i + \nabla p^i - \Delta u^i) \\
 &= a(u^i, F) + b(u^i, F) + d(p^i, F) \\
 &\quad \int_{\partial G_{-h}^{\parallel, h}} F \cdot \left(p^i n^h - \mu \frac{\partial u^i}{\partial n^h} \right) ds_h - \int_{\partial K_{\rho_i}} F \cdot \left(p^i n - \mu \frac{\partial u^i}{\partial n^h} \right) ds
 \end{aligned} \tag{4.46}$$

Nach Definition der Paare (u^a, p^a) , (u^i, p^i) kann mit Satz 4.2 und den Gleichungen (4.32) und (4.33) der Grenzübergang $h \rightarrow 0$ in (4.45) und (4.46) durchgeführt werden. Das Ergebnis ist

$$\begin{aligned} \langle p^a n - \mu \frac{\partial u^a}{\partial n} | R_{0, \partial G} F \rangle_{\partial G} &= a(u^a, F) + b(u^a, F) + d(p^a, F) \\ &+ \langle p^a n - \mu \frac{\partial u^a}{\partial n} | R_{0, \partial G} F \rangle_{\partial K_{\rho_a}} \\ - \langle p^i n - \mu \frac{\partial u^i}{\partial n} | R_{0, \partial G} F \rangle_{\partial G} &= a(u^i, F) + b(u^i, F) + d(p^i, F) \\ &- \langle p^i n - \mu \frac{\partial u^i}{\partial n} | R_{0, \partial G} F \rangle_{\partial K_{\rho_i}} \end{aligned} \quad (4.47)$$

Addition dieser beiden Gleichungen liefert unter Beachtung der Sprungformeln für das Einfachschichtpotential aus Satz 4.2 die Identität

$$\begin{aligned} \langle \phi | R_{0, \partial G} F \rangle_{\partial G} &= a(u^a, F) + b(u^a, F) + d(p^a, F) + \langle p^a n - \mu \frac{\partial u^a}{\partial n} | R_{0, \partial G} F \rangle_{\partial K_{\rho_a}} \\ &+ a(u^i, F) + b(u^i, F) + d(p^i, F) - \langle p^i n - \mu \frac{\partial u^i}{\partial n} | R_{0, \partial G} F \rangle_{\partial K_{\rho_i}} \end{aligned} \quad (4.48)$$

Für $\psi \in H^{1/2}(\partial G)$ gibt es wegen $R_{0, \text{div}}^- \psi \in \tilde{H}_0^1(G_i^{\rho_i}) \cup \tilde{H}_0^1(G_\rho)$ nach Satz 2.14 eine Folge $(F_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C^1(\overline{G_{\rho_a}}) \cup C^1(\overline{G_i^{\rho_i}})$ mit $F_n \rightarrow R_{0, \text{div}}^- \psi$ in $\tilde{H}_0^1(G_i^{\rho_i}) \cup \tilde{H}_0^1(G_\rho)$. Für jedes Folgeelement F_n gilt Gleichung (4.48). Auf der rechten Seite kann wegen der Konvergenz der Folge in $\tilde{H}_0^1(G_i^{\rho_i}) \cup \tilde{H}_0^1(G_\rho)$ zum Grenzwert übergegangen werden. Benutzt man die Definition von $R_{0, \text{div}}^- \psi$, so erhält man Gleichung (4.43) für $\phi \in C^{0, \alpha}(\partial G)$. Für $\phi \in H^{-1/2}(\partial G)$ gibt es $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C^{0, \alpha}(\partial G)$ in $H^{-1/2}(\partial G)$ mit $\phi_n \rightarrow \phi$ in $H^{-1/2}(\partial G)$. Für jedes ϕ_n kann die bereits bewiesene Gleichung (4.43) angewendet werden. Nach der in Satz 4.8 bewiesene Stetigkeit ist jeder der Terme dieser Gleichung konvergent mit Grenzwert, wie in (4.43) behauptet.

Gleichung (4.44) wird zuerst für $\phi \in C^{0, \alpha}(\partial G)$ verifiziert. Nach Gleichung (4.47) gilt mit $F = u^a$

$$\langle p^a n - \mu \frac{\partial u^a}{\partial n} | u^a \rangle_{\partial G} = \int_{G_{\rho_a}} (\mu |\nabla u^a|^2 + u^a \cdot \partial_1 u^a) + \langle p^a n - \mu \frac{\partial u^a}{\partial n} | u^a \rangle_{\partial K_{\rho_a}}.$$

Nach dem Gaußschen Integralsatz ist

$$\begin{aligned} \int_{G_{\rho_a}} u^a \cdot \partial_1 u^a &= \frac{1}{2} \int_{G_{\rho_a}} \partial_1 |u^a|^2 \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\partial G} |u^a|^2 n_1 + \frac{1}{2} \int_{\partial K_{\rho_a}} |u^a|^2 n_1 \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \langle p^a n - \mu \frac{\partial u^a}{\partial n} |u^a \rangle_{\partial G} + \frac{1}{2} \langle |u^a|^2 |n_1 \rangle_{\partial G} &= \int_{G_{\rho_a}} |\nabla u^a|^2 + \langle p^a n - \mu \frac{\partial u^a}{\partial n} |u^a \rangle_{\partial K_{\rho_a}} \\ &\quad - \frac{1}{2} \langle |u^a|^2 |n_1 \rangle_{\partial K_{\rho_a}} \end{aligned}$$

Durch Approximation von $\phi \in H^{-1/2}(\partial G)$ durch $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C^{0, \alpha}(\partial G)$ erhält man diese Identität auch für alle $\phi \in H^{-1/2}(\partial G)$.

Mit der Abschätzung in (4.36) folgt

$$\lim_{\rho_a \rightarrow \infty} \langle p^a n - \mu \frac{\partial u^a}{\partial n} |u^a \rangle_{\partial K_{\rho_a}} - \frac{1}{2} \langle |u^a|^2 |n_1 \rangle_{\partial K_{\rho_a}} = 0.$$

Dies zeigt Gleichung (4.44). •

Bemerkung: Die Idee der Definition von $p^{a,i} n - \mu \frac{\partial u^{a,i}}{\partial n}$ in Satz 4.10 geht auf die in Penzel [21] präsentierte Arbeit von Costabel [3] zurück. Dort wird die Normalenableitung $\frac{\partial \omega}{\partial n}$ in $H^{-1/2}$ einer Funktion ω , welche Lösung einer skalaren elliptischen Differentialgleichungen ist, mit Hilfe der ersten Greenschen Formel definiert. Diesem Vorgehen bin ich hier für die Oseen-Gleichung gefolgt.

4.3 Existenz einer Lösung

Satz 4.11: Es sei S der Randintegraloperator $S: H^{-1/2}(\partial G) \rightarrow H^{1/2}(\partial G)$. Dann gilt

$$\text{Kern}(S) := \{ \phi \in H^{-1/2}(\partial G) \mid S\phi = 0 \} = \text{span}(n)$$

Beweis: Es sei $\phi \in \text{Kern}(S)$. Definiere die Paare (u_{\pm}, p_{\pm}) wie in Korollar 4.9. Sie sind die Lösungen des inneren und äußeren Oseen-Randwertproblems mit $u_{\infty} = 0$ und $R_{0, \partial G} u_{\pm} = S\phi = 0$. Nach Satz 3.9 muß dann $(u_{\pm}, p_{\pm}) = (0, 0)$ gelten.

Es seien

$$(u^a, p^a) = (S\phi|_{G_a}, \Pi\phi|_{G_a}) \text{ und } (u^i, p^i) = (S\phi|_{G_i}, \Pi\phi|_{G_i}).$$

Mit den Beziehungen

$$(u_+, p_+) = (u^a, p^a) \text{ und } (u_-, p_-) = \left(u^i, p^i - \frac{1}{|G_i|} \int_{G_i} p^i \right)$$

folgt aus (4.43) für alle $\psi \in H^{1/2}(\partial G)$

$$\begin{aligned} \langle \phi | \psi \rangle_{\partial G} &= \langle p^a n - \mu \frac{\partial u^a}{\partial n} | \psi \rangle_{\partial G} - \langle p^i n - \mu \frac{\partial u^i}{\partial n} | \psi \rangle_{\partial G} \\ &= \langle p_+ n - \mu \frac{\partial u_+}{\partial n} | \psi \rangle_{\partial G} - \left\langle \left(p_- + \frac{1}{|G_i|} \int_{G_i} p^i \right) n - \mu \frac{\partial u_-}{\partial n} \right\rangle_{\partial G} \\ &= - \left(\frac{1}{|G_i|} \int_{G_i} p^i \right) \langle n | \psi \rangle_{\partial G} \end{aligned}$$

Dies zeigt $\phi + \left(\frac{1}{|G_i|} \int_{G_i} p^i \right) n = 0$ in $H^{-1/2}(\partial G)$ und damit $\phi \in \text{span}(n)$.

Da $\text{div}(Sn(x)) = 0$ für $x \in G_i$ gilt, folgt aus dem Gaußschen Integralsatz die Identität $\langle Sn|n \rangle_{\partial G} = 0$. Nach Gleichung (4.39) ist

$$0 = \langle Sn|n \rangle_{\partial G} = \mu \int_G |\nabla S n|^2 + \mu \int_{G_i} |\nabla S n|^2.$$

Da $S n \in C^{1,\alpha}(\overline{G_\rho})$ für alle $\rho > 0$ gilt, gibt es ein $\hat{u} \in \mathbf{R}^2$ mit $S n(x) = \hat{u}$ für alle $x \in G$. Da das Paar $(S n|_{G_a}, \Pi n|_{G_a})$ eine schwache Lösung des äußeren Randwertproblems mit $u_\infty = 0$ ist, muß $\hat{u} = 0$ sein. Aus (4.15) folgt damit $S n(x) = 0$ für alle $x \in \partial G$ und damit $n \in \text{Kern}(S)$. •

Satz 4.12: Es sei $P: H^{-1/2}(\partial G) \ni \phi \rightarrow \phi - \frac{\langle \phi | n \rangle}{\langle n | n \rangle} n \in H^{-1/2}(\partial G)$. Dann gibt es ein $\alpha > 0$ mit der Eigenschaft

$$\langle SP\phi | P\phi \rangle \geq \alpha \|P\phi\|_{-1/2}^2 \text{ für alle } \phi \in H^{-1/2}(\partial G). \quad (4.49)$$

Beweis: Nach Gleichung (4.39) ist klar, daß $\langle SP\phi | P\phi \rangle \geq 0$ für alle $\phi \in H^{-1/2}(\partial G)$ gilt. Es genügt zu zeigen, daß

$$\alpha := \inf \{ \langle SP\phi | P\phi \rangle \mid \phi \in H^{-1/2}(\partial G), \|P\phi\|_{-1/2} = 1 \} > 0$$

ist.

Der Beweis von $\alpha > 0$ wird dadurch erbracht, daß die Annahme von $\alpha = 0$ zu einem Widerspruch führt. Im folgenden wird daher $\alpha = 0$ **angenommen**. Nach dieser Annahme gibt es eine Folge $(\phi_k)_{k \in \mathbf{N}} \subset H^{-1/2}(\partial G)$ mit

$$\|P\phi_k\|_{-1/2} = 1 \text{ und } \langle SP\phi_k | P\phi_k \rangle \rightarrow 0. \quad (4.50)$$

Es können $\rho_i, \rho_a > 0$ so gewählt werden, daß Satz 4.10 anwendbar ist. Dann gibt es offene, beschränkte, zusammenhängende Umgebungen U_{ρ_i}, U_{ρ_a} von $\partial K_{\rho_i}, \partial K_{\rho_a}$ mit $\overline{U_{\rho_a}} \subset G = G_a$ und $\overline{U_{\rho_i}} \subset G_i$. Nach Satz 4.8 und der Annahme sind die Folgen

$$(SP\phi_k)_{k \in \mathbf{N}} \subset H^1(G_\rho) \cup H^1(G_i) \cup C^2(\overline{U_{\rho_a}}) \cup C^2(\overline{U_{\rho_i}})$$

$$(\Pi P\phi_k)_{k \in \mathbf{N}} \subset C^1(\overline{U_{\rho_a}}) \cup C^1(\overline{U_{\rho_i}})$$

beschränkt.

Nach dem Satz von Arzelà-Ascoli gibt es eine Teilfolge von $(\phi_k)_{k \in \mathbf{N}}$, welche wieder mit $(\phi_k)_{k \in \mathbf{N}}$ bezeichnet wird, mit den Eigenschaften:

$$(\text{SP}\phi_k)_{k \in \mathbf{N}} \subset C^1(\overline{U_{\rho_a}}) \cup C^1(\overline{U_{\rho_i}}) \text{ konvergent,} \quad (4.51)$$

$$(\text{PIP}\phi_k)_{k \in \mathbf{N}} \subset C^0(\overline{U_{\rho_i}}) \cup C^0(\overline{U_{\rho_a}}) \text{ konvergent.} \quad (4.52)$$

Da die Einbettungen $H^1(G_\rho) \subset L^2(G_\rho)$ und $H^1(G_i) \subset L^2(G_i)$ kompakt sind, gibt es nach Satz 2.14 eine Teilfolge von $(\phi_k)_{k \in \mathbf{N}}$, die wieder mit $(\phi_k)_{k \in \mathbf{N}}$ bezeichnet wird, so daß

$$(\text{SP}\phi_k)_{k \in \mathbf{N}} \subset L^2(G_i \cup G_\rho) \text{ konvergent} \quad (4.53)$$

ist.

Die Annahme $\langle \text{SP}\phi_k | \text{P}\phi_k \rangle \rightarrow 0$ sowie die Gleichungen (4.39) und (4.53) zeigen

$$(\text{SP}\phi_k)_{k \in \mathbf{N}} \subset H^1(G_{\rho_a}) \cup H^1(G_i) \text{ konvergent.} \quad (4.54)$$

Mit Gleichung (4.43), der Stetigkeit von $R_{0, \text{div}}^-$ sowie der Stetigkeit der Restriktionsoperatoren $R_{0, \partial K_{\rho_a}}$, $R_{0, \partial K_{\rho_i}}$, erhält man für alle $k, m \in \mathbf{N}$ mit der Dreiecksungleichung die Abschätzung

$$\begin{aligned} |\langle \text{P}(\phi_k - \phi_m) | \psi \rangle_{\partial G}| &\leq \left| a(\text{SP}(\phi_k - \phi_m), R_{0, \text{div}}^- \psi) \right| + \left| b(\text{SP}(\phi_k - \phi_m), R_{0, \text{div}}^- \psi) \right| \\ &\quad + \left| \langle \text{PIP}(\phi_k - \phi_m) n - \mu \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(\text{SP}(\phi_k - \phi_m)) | R_{0, \partial K_{\rho_a}}^- R_{0, \text{div}}^- \psi \rangle_{\partial K_{\rho_a}} \right| \\ &\quad + \left| \langle \text{PIP}(\phi_k - \phi_m) n - \mu \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}(\text{SP}(\phi_k - \phi_m)) | R_{0, \partial K_{\rho_i}}^- R_{0, \text{div}}^- \psi \rangle_{\partial K_{\rho_i}} \right| \\ &\leq \|\text{SP}(\phi_k - \phi_m)\|_{H^1(G_i) \cup H^1(G_{\rho_a})} \|R_{0, \text{div}}^- \psi\|_{H^1(G_i^{\rho_i}) \cup H^1(G_{\rho_a})} \\ &\quad + \|\text{SP}(\phi_k - \phi_m)\|_{C^1(\overline{U_{\rho_a}}) \cup C^1(\overline{U_{\rho_i}})} \|R_{0, \text{div}}^- \psi\|_{H^1(G_i^{\rho_i}) \cup H^1(G_{\rho_a})} \\ &\quad + \|\text{PIP}(\phi_k - \phi_m)\|_{C^0(\overline{U_{\rho_a}}) \cup C^0(\overline{U_{\rho_i}})} \|R_{0, \text{div}}^- \psi\|_{H^1(G_i^{\rho_i}) \cup H^1(G_{\rho_a})} \\ &\leq c \|\text{SP}(\phi_k - \phi_m)\|_{H^1(G_i) \cup H^1(G_{\rho_a})} \|\psi\|_{H^{1/2}(\partial G)} \\ &\quad + c \|\text{SP}(\phi_k - \phi_m)\|_{C^1(\overline{U_{\rho_a}}) \cup C^1(\overline{U_{\rho_i}})} \|\psi\|_{H^{1/2}(\partial G)} \\ &\quad + c \|\text{PIP}(\phi_k - \phi_m)\|_{C^0(\overline{U_{\rho_a}}) \cup C^0(\overline{U_{\rho_i}})} \|\psi\|_{H^{1/2}(\partial G)} \end{aligned}$$

mit einer von k, m unabhängigen Konstanten $c > 0$, $i = 1, 2, 3$. Da die rechte Seite nach (4.51), (4.52) und (4.54) konvergent ist, ist $(P\phi_k)_{k \in \mathbf{N}} \subset H^{-1/2}(\partial G)$ eine Cauchyfolge. Da $H^{-1/2}(\partial G)$ vollständig ist und $\|P\phi_k\|_{-1/2} = 1$ ist, gibt es ein $\phi \in H^{-1/2}(\partial G)$ mit

$$P\phi_k \rightarrow \phi \text{ in } H^{-1/2}(\partial G) \text{ und } \|\phi\|_{-1/2} = 1$$

Mit Gleichung (4.39), der Annahme $\langle SP\phi_k | P\phi_k \rangle \rightarrow 0$ und der Konvergenz $P\phi_k \rightarrow \phi$ folgt

$$\int_G |\nabla S\phi| + \int_{G_i} |\nabla S\phi| = 0.$$

Wie im Beweis von Satz 4.11 kann $S\phi(x) = 0$ für alle $x \in \partial G$ gezeigt werden. Also ist nach Satz 4.11 $\phi \in \text{Kern}(S) = \text{span}(n)$ und

$$0 \neq \langle \phi | n \rangle = \lim_k \langle P\phi_k | n \rangle = 0.$$

Dies ist ein **Widerspruch**. Also war die Annahme $\alpha = 0$ falsch; d.h. es muß $\alpha > 0$ gelten und der Satz ist bewiesen. •

Bemerkung: Da die Voraussetzung $\partial G \in C^2$, $n \in C^1(\partial G) \subset H^{1/2}(\partial G)$ impliziert, sind alle auftretenden Dualitätspaarungen mit n wohldefiniert.

Satz 4.13: Es sei $N(x) = 1/(2\pi) \log|x|$, $x \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$. Der Randintegraloperator

$$U: H^{-1/2}(\partial G) \ni \phi \rightarrow S\phi + \langle \phi | n \rangle_{\partial G} \nabla N \in H^{1/2}(\partial G)$$

ist stetig und bijektiv.

Beweis: Es seien

$$H_0^{-1/2}(\partial G) := \{ \phi \in H^{-1/2}(\partial G) \mid \langle \phi | n \rangle = 0 \} \subset H^{-1/2}(\partial G).$$

$$H_0^{1/2}(\partial G) := \{ f \in H^{1/2}(\partial G) \mid \langle n | f \rangle = 0 \} \subset H^{1/2}(\partial G)$$

Da $n \in H^{1/2}(\partial G)$ ist, sind $H_0^{-1/2}(\partial G)$, $H_0^{1/2}(\partial G)$ abgeschlossen. Mit dem Skalarprodukt von $H^{-1/2}(\partial G)$ bzw. $H^{1/2}(\partial G)$ sind sie Hilberträume.

Für den Projektor P aus Satz 4.12 gilt $P\phi - \phi = -\frac{\langle \phi | n \rangle}{\langle n | n \rangle} n$ für alle $\phi \in H^{-1/2}(\partial G)$.

Mit der Abbildung

$$Q: H_0^{1/2}(\partial G) \rightarrow (H_0^{-1/2}(\partial G))^*, Q(f)(\phi) := \langle \phi | f \rangle, \phi \in H_0^{-1/2}(\partial G)$$

kann $(H_0^{-1/2}(\partial G))^*$ mit $H_0^{1/2}(\partial G)$ identifiziert werden, da Q folgende Eigenschaften hat:

- Q injektiv: $f \in \text{Kern}(Q)$ folgt $\langle \phi | f \rangle = \langle P\phi | f \rangle + \frac{\langle \phi | n \rangle}{\langle n | n \rangle} \langle n | f \rangle = Q(f)(P\phi) = 0$ für alle $\phi \in H^{-1/2}(\partial G)$. Also ist $0 = f \in H^{1/2}(\partial G)$. Dies zeigt $\text{Kern}(Q) = \{0\}$.
- Q surjektiv: es sei $\lambda \in (H_0^{-1/2}(\partial G))^*$. Dann definiere das Funktional $\bar{\lambda}: H^{-1/2}(\partial G) \ni \phi \rightarrow \lambda(P\phi) \in \mathbf{K}$. Es gilt $\bar{\lambda} \in (H^{-1/2}(\partial G))^* = H^{1/2}(\partial G)$ und $\bar{\lambda}|_{H_0^{-1/2}(\partial G)} = \lambda$. Es gibt daher ein $f \in H^{1/2}(\partial G)$ mit $\bar{\lambda}(\phi) = \langle \phi | f \rangle$, $\phi \in H^{-1/2}(\partial G)$. Hieraus folgt $\langle n | f \rangle = \bar{\lambda}(n) = \lambda(Pn) = 0$ und damit $f \in H_0^{1/2}(\partial G)$.

Nach dem Lemma von Lax-Milgram (in der Form von Übungsaufgabe 13.4 in [12]) und Satz 4.12 ist $S: H_0^{-1/2}(\partial G) \rightarrow H_0^{1/2}(\partial G)$ invertierbar mit $\|S^{-1}\| \leq \alpha^{-1}$.

Nach der Greenschen Formel für die Laplacegleichung (siehe z.B. Satz 6.5 in [12]) ist $\langle n | \nabla N \rangle = 1$. Daher gilt $f - \langle n | f \rangle \nabla N \in H_0^{1/2}(\partial G)$ für alle $f \in H^{1/2}(\partial G)$. Also existiert $S^{-1}(f - \langle n | f \rangle \nabla N) \in H_0^{-1/2}(\partial G)$. Definiere die Abbildung U^{-1} durch

$$U^{-1}f := S^{-1}(f - \langle n | f \rangle \nabla N) + \frac{\langle n | f \rangle}{\langle n | n \rangle} n, f \in H^{1/2}(\partial G) \quad (4.55)$$

Eine einfache Rechnung weist die Identität $UU^{-1}f = f$ für alle $f \in H^{1/2}(\partial G)$ nach. Mit $S^{-1}(S\phi) = S^{-1}(SP\phi) = P\phi$ folgt $U^{-1}U\phi = \phi$ für alle $\phi \in H^{-1/2}(\partial G)$. Dies beweist: U^{-1} ist die Inverse von U . Für sie gilt die Normabschätzung $\|U^{-1}\| \leq \alpha^{-1} + 1$. •

Satz 4.14: Für alle $u_0 \in H^{1/2}(\partial G)$ und $u_\infty \in \mathbf{R}^2$ existiert genau ein $\phi \in H^{-1/2}(\partial G)$, so daß das Paar (u, p) definiert durch

$$u(x) := S\phi(x) + \langle \phi | n \rangle \nabla N(x) + u_\infty, \quad p(x) := \Pi\phi(x) - \langle \phi | n \rangle \partial_1 N(x), \quad x \in G, \quad (4.56)$$

die schwache Lösung des äußeren Oseen-Randwertproblems mit $u|_{\partial G} = u_0$ und $u(\infty) = u_\infty$ ist. Dieses ϕ ist durch $\phi = U^{-1}(u_0 - u_\infty)$ gegeben.

Beweis: Es sei $u_0 \in H^{1/2}(\partial G)$. Wähle $\phi = U^{-1}(u_0 - u_\infty)$ mit U^{-1} definiert in (4.55). Korollar 4.9 zusammen mit $\operatorname{div}(\nabla N(x)) = \Delta N(x) = 0$, $x \neq 0$ und $|\nabla N(x)| = |x|^{-1}$ zeigen, daß das Paar (u, p) eine schwache Lösung des äußeren Oseen-Randwertproblems mit $u(\infty) = u_\infty$ und $u|_{\partial D} = u_0$ ist. Nach Satz 3.9 ist diese Lösung eindeutig bestimmt. •

4.4 Quadraturmethode

In diesem Unterkapitel wird $\partial G = \{\gamma(t) | t \in [0, 2\pi]\}$ mit einer einfach geschlossene Kurve γ vom Typ C^k für alle $k \in \mathbf{N}$ angenommen.

Es wird eine Quadraturmethode angegeben, um die Randintegralgleichung $U\phi = f$ auf ∂G für glatte f zu lösen. Die Analyse der Quadraturmethode basiert auf dem Artikel von Kreß und Sloan [13].

Nach der Parametrisierung von ∂G und Satz 4.14 gibt es für alle $f \in H^{1/2}(\partial G)$ genau ein $\phi \in H^{-1/2}(\partial G)$ mit der Eigenschaft

$$(U\phi)(\gamma(t)) = f(\gamma(t)), \quad t \in [0, 2\pi]. \quad (4.57)$$

Definiert man $\hat{\phi}(t) := \phi(\gamma(t))$ und $\hat{f}(t) := f(\gamma(t))$, dann ist nach Definition 2.16 $\hat{\phi} \in H_{\text{per}}^{-1/2}$ und $\hat{f} \in H_{\text{per}}^{1/2}$.

Zur Lösung des Vektor-Integralgleichungssystems (4.57) wird mit (4.28) und den Notationen aus dem Beweis von Satz 4.7 für $t \in [0, 2\pi]$

$$\begin{aligned}
 (U\phi)_i(\gamma(t)) &= (S\phi)_i(\gamma(t)) + \langle \phi | n \rangle \partial_i N(\gamma(t)) \\
 &= (2\mu)^{-1} (-\delta_{ij} S_L + A_{ij} + B_{ij}^\infty) (\hat{\phi} |\gamma'|)_j(t) \\
 &= (2\mu)^{-1} (-\delta_{ij} S_L + A_{ij} + B_{ij}^\infty) (\tilde{\phi})_j(t)
 \end{aligned} \tag{4.58}$$

mit $\tilde{\phi} := \hat{\phi} |\gamma'| \in H_{\text{per}}^{-1/2}$ und

$$\begin{aligned}
 L(t) &:= \frac{1}{2\pi} \log \left(\frac{4}{e} \sin^2 \left(\frac{t}{2} \right) \right), \quad t \in \mathbf{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbf{Z}\} \\
 S_L \phi_j(t) &:= \int_0^{2\pi} L(t-s) \phi_j(s) \, ds, \quad t \in [0, 2\pi] \\
 A_{ij} \phi_j(t) &= \int_0^{2\pi} L(t-s) k_{ij}^1(t, s) \phi_j(s) \, ds, \quad k_{ij}^1(t, t) = 0, \quad t \in [0, 2\pi] \\
 k_{ij}^\infty(t, s) &:= (4\pi\mu)^{-1} \tilde{k}_{ij}^s(t, s) + \partial_i N(\gamma(t)) n_j(s), \quad t, s \in [0, 2\pi] \\
 B_{ij}^\infty \phi_j(t) &:= \int_0^{2\pi} k_{ij}^\infty(t, s) \phi_j(s) \, ds, \quad \text{für } t \in [0, 2\pi].
 \end{aligned} \tag{4.59}$$

geschrieben. Da $\partial G \in C^\infty$ ist, sind die Kerne $k_{ij}^\infty, k_{ij}^1 \in C_{\text{per}}^\infty([0, 2\pi]^2)$.

Im folgenden wird nicht mehr zwischen der nicht parametrisierten Form des Operators U auf der linken Seite in Gleichung (4.58) und der parametrisierten Fassung auf der rechten Seite von (4.58) unterschieden. Die rechte Seite von (4.58) wird als Integraloperator auf H_{per}^s , $s \in \mathbf{R}$, aufgefaßt. Es wird weiter nicht mehr zwischen $\phi, \hat{\phi}, \tilde{\phi}$ bzw. f, \hat{f} unterschieden; d.h. es wird $\tilde{\phi}$ wieder mit ϕ und \hat{f} mit f bezeichnet.

Bevor ein numerisches Verfahren zur näherungsweisen Lösung der linearen Gleichung (4.57) angegeben wird, soll das direkte Problem -für ein fest vorgegebenes $\phi \in C_{\text{per}}^0([0, 2\pi], \mathbf{R}^2) \subset H_{\text{per}}^{-1/2}(\mathbf{R}^2)$ und $t \in [0, 2\pi]$ ist das modifizierte Einfachschichtpotentials $U\phi(t)$ zu berechnen- diskutiert werden. Da es im allgemeinen nicht möglich sein wird, für $U\phi(t)$ analytische Ausdrücke zu finden, müssen zur näherungsweisen Berechnung der auftretenden Integrale in $U\phi(t)$ Quadraturformeln verwendet werden. Eine Möglichkeit zur Entwicklung von Quadraturformeln für Integrale darin besteht, den Integranden ϕ durch eine in den Stützstellen s_0, \dots, s_{2N-1} , $N \in \mathbf{N}$, interpolierende Funktion zu ersetzen und dann die Integrale

über die Interpolationsfunktion analytisch zu berechnen. Das Resultat ist für $U\phi(t)$ eine Quadraturformel der Form

$$(U\phi)_i(t) \approx \sum_{k=0}^{2N-1} U_{ij}^k(t) \phi_j(s_k), \quad i = 1, 2, \quad (4.60)$$

mit geeigneten $U_{ij}^k(t)$, $i, j = 1, 2$, $k = 0, \dots, 2N-1$. In meiner Arbeit werden die Stützstellen $s_j = j(\pi/N)$, $j = 0, \dots, 2N-1$, und trigonometrische Polynome vom Grad N zur Interpolation verwendet, da sich in diesem Fall die Gewichte $U_{ij}^k(t)$ analytisch so bestimmen lassen, daß die logarithmische Singularität von L mitberücksichtigt wird.

Angenommen ϕ ist Lösung von (4.57), dann gilt näherungsweise in den Interpolationspunkten $t_k = n(\pi/N)$:

$$\sum_{k=0}^{2N-1} U_{ij}^k(t_n) \phi_j(s_k) \approx f_i(t_n), \quad n = 0, \dots, 2N-1, \quad i = 1, 2.$$

Die Quadraturmethode besteht nun darin, eine Lösung $(\phi_{j,k})_{1 \leq j \leq 2, 1 \leq k \leq 2N-1}$ des linearen Gleichungssystem

$$\sum_{k=0}^{2N-1} U_{ij}^k(t_n) \phi_{j,k} = f_i(t_n), \quad n = 0, \dots, 2N-1, \quad i = 1, 2 \quad (4.61)$$

zu berechnen und dann die Dichte ϕ durch das trigonometrische Polynom N . Grades ϕ_N zu approximieren, für das $\phi_j(s_k) = \phi_{j,k}$, $1 \leq j \leq 2$ und $1 \leq k \leq 2N-1$ gilt. Das lineare Gleichungssystem (4.61) kann, sofern die Gewichte $U_{ij}^k(t)$ bekannt sind, mit Hilfe des Gauß-Verfahrens auf einem Computer gelöst werden.

Zur Herleitung der Quadraturgewichte wird für $N \in \mathbf{N}$ der Raum der trigonometrischen Polynome N . Grades

$$T_N = \left\{ \sum_{n=0}^N a_n \cos(nt) + \sum_{n=1}^{N-1} b_n \sin(nt) \mid a_n, b_n \in \mathbf{R} \right\}$$

definiert.

In [12] findet man

$$T_N := \left\{ \sum_{k=0}^{2N-1} \phi_k b_k^N(\cdot) \mid \phi_0, \dots, \phi_{2N-1} \in \mathbf{R} \right\}$$

mit $t_k^N := k \frac{\pi}{N}$, $k = 0 \dots 2N-1$, und

$$b_k^N(t) := \frac{1}{2N} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{N-1} \cos(n(t - t_k^N)) + \cos(N(t - t_k^N)) \right).$$

Die Basis von T_N , welche aus b_k^N gebildet wird, heißt auch Lagrangebasis. Für sie gilt $b_k^N(t_i^N) = \delta_{ki}$.

Mit P_N wird der Interpolationsoperator mit trigonometrischen Polynomen aus T_N in den Punkten t_k^N , $k = 0 \dots 2N-1$, bezeichnet.

Es sei ϕ_j ein trigonometrisches Polynom vom Grad N . Dann kann $S_L \phi_j$ mit (4.22) exakt berechnet werden. Das Resultat ist wieder ein trigonometrisches Polynom vom Grad N .

Zur Berechnung von $B_{ij}^\infty \phi_j(t)$ wird für festes $t \in [0, 2\pi]$ der Integrand $k_{ij}^\infty(t, \cdot) \phi_j(\cdot)$ als eine zu integrierende Funktion $\psi(t)(\cdot) = k_{ij}^\infty(t, \cdot) \phi_j(\cdot)$ aufgefaßt. Sie wird durch das trigonometrische Polynom $\psi_N(t)(\cdot)$ ersetzt, welches in den Stützstellen $s_j = j(\pi/N)$ die Funktion ψ interpoliert. Dann wird dieses trigonometrische Polynom exakt über $[0, 2\pi]$ integriert. Das Resultat ist die Trapezregel zur Berechnung von $B_{ij}^\infty \phi_j(t)$. Der so entstehende Quadraturoperator wird mit $B_{ij}^{\infty, N}$ bezeichnet.

Das Hauptproblem einer nach der Arbeit von Kreß/Sloan [13] konvergenten Quadraturmethode besteht darin, eine Quadraturformel für den Operator A_{ij} anzugeben, welche die Bedingung

$$\|(A_{ij} - A_{ij}^N) \phi\|_{q+1} \leq c N^{q-p} \|\phi\|_{p-1}, \quad 1 \leq q \leq p, \quad p > 3/2, \quad \phi \in (T_N)^2$$

(Voraussetzung 2.7 in [13]) erfüllt. Dazu wird der Operator gemäß Gleichung (4.24) in Lemma 4.6 aufgespalten in

$$A_{ij} = A_{ij}^{\chi, 1} + A_{ij}^{\chi, \chi} + A_{ij}^{\chi, q} + A_{ij}^q. \quad (4.62)$$

Für die Operatoren A_{ij} werden folgende Quadraturformeln verwendet:

$$A_{ij}^{\chi, 1, N} \phi(t) := (k_{ij}^1)_{\chi}(t, t) \int_0^{2\pi} \sin(t-s) L(t-s) P_N \phi(s) ds$$

$$A_{ij}^{\chi, \chi, N} \phi(t) := \int_0^{2\pi} \sin^2(t-s) L(t-s) P_N \{(k_{ij}^1)_{\chi, \chi}(t, \cdot) \phi(\cdot)\}(s) ds$$

$$A_{ij}^{\chi, q, N} \phi(t) := \int_0^{2\pi} \sin^2\left(\frac{t-s}{2}\right) L(t-s) P_N \{(k_{ij}^1)_{\chi, q}(t, \cdot) \phi(\cdot)\}(s) ds$$

$$A_{ij}^{q, N} \phi(t) := \int_0^{2\pi} \sin^2\left(\frac{t-s}{2}\right) L(t-s) P_N \{(k_{ij}^1)_q(t, \cdot) \phi(\cdot)\}(s) ds$$

Es seien

$$\omega^k(t) := \int_0^{2\pi} L(t-s) b_k^N(s) ds$$

$$\omega^{\chi, 1, k}(t) := \int_0^{2\pi} \sin(t-s) L(t-s) b_k^N(s) ds$$

$$\omega^{\chi, \chi, k}(t) := \int_0^{2\pi} \sin^2(t-s) L(t-s) b_k^N(s) ds$$

$$\omega^{q, k}(t) := \int_0^{2\pi} \sin^2\left(\frac{t-s}{2}\right) L(t-s) b_k^N(s) ds.$$

Mit (4.22), (4.25) und

$$a_n^{1,2} := -\frac{1}{4}l_{n-2} + \frac{1}{2}l_n - \frac{1}{4}l_{n+2}, \quad n \in \mathbf{N}$$

$$a_n^{2,2} := -\frac{1}{4}l_{n-1} + \frac{1}{2}l_n - \frac{1}{4}l_{n+1}, \quad n \in \mathbf{N}$$

erhält man

$$\omega^k(t) = -\frac{1}{2N} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} \cos(n(t-t_k^N)) + \frac{1}{N} \cos(N(t-t_k^N)) \right)$$

$$\omega^{\chi, 1, k}(t) = \frac{1}{2N} \left(a_0^{11} + 2 \sum_{n=1}^{N-1} a_n^{11} \sin(n(t-t_k^N)) + a_N^{11} \sin(N(t-t_k^N)) \right)$$

$$\omega^{\chi, \chi, k}(t) = \frac{1}{2N} \left(a_0^{12} + 2 \sum_{n=1}^{N-1} a_n^{12} \cos(n(t-t_k^N)) + a_N^{12} \cos(N(t-t_k^N)) \right)$$

$$\omega^{q, k}(t) = \frac{1}{2N} \left(a_0^{22} + 2 \sum_{n=1}^{N-1} a_n^{22} \cos(n(t-t_k^N)) + a_N^{22} \cos(N(t-t_k^N)) \right)$$

Die oben beschriebene Quadraturmethode besteht darin: finde ein $\phi^N \in (T_N)^2$ so, daß für $i = 1, 2$

$$2\mu f_i(t_n^N) = -\delta_{ij} S_L \phi_j^N(t_n^N) + A_{ij}^N \phi_j^N(t_n^N) + B_{ij}^{\infty, N} \phi_j^N(t_n^N), \quad n = 0 \dots 2N-1, \quad (4.63)$$

gilt. Also ist das lineare Gleichungssystem (4.63) nach der unbekanntten Dichte ϕ^N an den Stützstellen t_n^N aufzulösen.

Beim Aufstellen von (4.63) ist berücksichtigt worden, daß der Operator S_L trigonometrische Polynome in trigonometrische Polynome abbildet. In der Basis $(b_k^N)_{k=0 \dots 2N-1}$ gilt $\phi^N = \sum_{k=0}^{2N-1} \phi^N(t_k) b_k^N(\cdot)$. Einsetzen dieser Darstellung in (4.63) liefert folgendes lineare Gleichungssystem für $\phi_j^N(t_n^N)$, $j = 1, 2$, $n = 0, \dots, 2N-1$, welches auf dem Computer zur Berechnung implementiert ist:

$$\begin{aligned} 2\mu f_i(t_n) &= \sum_{k=0}^{2N-1} (-\delta_{ij} \omega^k(t_n) + (k_{ij}^1)_{\chi}(t_n, t_k) \omega^{11, k}(t_n)) \phi_j^N(t_k) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{2N-1} \omega^{12, k}(t_n) \left[\frac{\chi(t_n - t_k)}{\sin(t_n - t_k)} \{ (k_{ij}^1)_{\chi}(t_n, t_k) - (k_{ij}^1)_{\chi}(t_n, t_n) \} \right] \phi_j^N(t_k) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{2N-1} \omega^{2, k}(t_n) [(k_{ij}^1)_{\chi, q}(t_n, t_k) + (k_{ij}^1)_q(t_n, t_k)] \phi_j^N(t_k) \\ &\quad + \frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{2N-1} k_{ij}^{\infty}(t_n, t_k) \phi_j^N(t_k) \\ &= 2\mu (U^N \phi^N)_i \end{aligned} \quad (4.64)$$

für $n = 0, \dots, 2N-1$ und $i = 1, 2$. Dabei ist auch noch die Einsteinsche Summationskonvention zu berücksichtigen: Über $j = 1, 2$ auf der rechten Seite von Gleichung (4.64) wird summiert.

Satz 4.15: Es sei $p > \frac{3}{2}$, $\phi \in H^p$, $f := \hat{S}\phi \in H^{p+1}$. Dann gibt es ein $N_0 \in \mathbf{N}$, so daß für alle $N > N_0$ gilt:

1. Das Gleichungssystem (4.64) besitzt eine Lösung $\phi^N \in (T_N)^2$;
2. Für alle $1 \leq q \leq p$ gibt es eine Konstante $c = c(p, q) > 0$ mit

$$\|\phi^N - \phi\|_q \leq c N^{q-p} \|\phi\|_p.$$

Die Konstante c ist unabhängig von N , jedoch abhängig von p und q .

Beweis: Da die parametrisierte Form des Randintegraloperators $U: \mathbf{H}_{\text{per}}^{-1/2} \rightarrow \mathbf{H}_{\text{per}}^{1/2}$ injektiv ist, ist U auch für alle $p > \frac{3}{2}$ injektiv. Nach Konstruktion der Operatoren S_L , A_{ij} und B_{ij}^∞ gilt

$$2\mu U = \begin{bmatrix} -S_L & 0 \\ 0 & -S_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11}^\infty & B_{12}^\infty \\ B_{21}^\infty & B_{22}^\infty \end{bmatrix}. \quad (4.65)$$

Nach Lemma 4.3 ($\partial G \in C^\infty$) sind $A_{ij} + B_{ij}^\infty: \mathbf{H}^p \rightarrow \mathbf{H}^{p+2}$ für alle $p \in \mathbf{R}$ stetige lineare Operatoren. Also ist die Analysis aus der Arbeit von Kreß und Sloan in [13] anwendbar. Dazu ist noch zu berücksichtigen, daß $S_L: \mathbf{H}^p \rightarrow \mathbf{H}^{p+1}$ für alle $p \in \mathbf{R}$ ein stetig invertierbarer Operator ist, der invariant auf dem Raum der trigonometrischen Polynome ist.

Es sei $p > 3/2$, $1 \leq q \leq p$ und $\psi \in (T_N)^2$.

Nach Lemma 4.5 sind alle Kerne der Integraloperatoren in der Aufspaltung (4.62) unendlich oft differenzierbar. Dies ermöglicht, den Beweis von Satz 3.2 in [13] hier analog durchzuführen. Das Ergebnis sind die Fehlerabschätzungen:

$$\begin{aligned} \left\| (A_{ij}^{\chi, \chi, N} - A_{ij}^{\chi, \chi}) \psi \right\|_{q+1} &\leq c N^{q-p} \|\psi\|_{p-1} \\ \left\| (A_{ij}^{\chi, q, N} - A_{ij}^{\chi, q}) \psi \right\|_{q+1} &\leq c N^{q-p} \|\psi\|_{p-1} \\ \left\| (A_{ij}^{q, N} - A_{ij}^q) \psi \right\|_{q+1} &\leq c N^{q-p} \|\psi\|_{p-1} \end{aligned}$$

Für den Operator $A_{ij}^{\chi, 1}$ benutzt man Satz 2.1 aus [13], der den Interpolationsfehler mit trigonometrischen Polynomen abschätzt: Mit (4.25) und (4.26) kann

$$\begin{aligned} \left\| (A_{ij}^{\chi, 1, N} - A_{ij}^{\chi, 1}) \psi \right\|_{q+1} &\leq c \left\| \int_0^{2\pi} \sin(t-s) L(t-s) (\psi - P_N \psi) ds \right\|_{q+1} \\ &\leq c \|\psi - P_N \psi\|_{q-1} \\ &\leq c N^{q-p} \|\psi\|_{p-1} \end{aligned}$$

mit einer Konstanten, die nur von p und q abhängt, abgeschätzt werden.

Für den glatten Kern beweist man mit Hilfe der Abschätzung des Interpolationsfehlers in Satz 2.1 aus [13] und $|\langle f|1 \rangle| \leq \|1\|_{1-q} \|f\|_{q-1}$, $q \in \mathbf{R}$ die Ungleichung

$$\left\| (B_{ij}^{\infty, N} - B_{ij}^{\infty}) \psi \right\|_{q+1} \leq c N^{q-p} \|\psi\|_{p-1}$$

Da alle Voraussetzungen des Satzes 2.3 in [13] nachgeprüft worden sind, folgt die Aussage dieses Satzes aus ihm. •

Satz 4.16: Es sei $f \in C_{\text{per}}^{\infty}$ und $\phi \in H^{-1/2}$ die Lösung der Gleichung $U\phi = f$. Dann gilt $\phi \in H^{p-1/2}$ für alle $p \geq 0$.

Beweis: Es sei $p \geq -\frac{1}{2}$. Nach Gleichung (4.65) hat U die Darstellung

$$U = \begin{bmatrix} -S_L & 0 \\ 0 & -S_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix}$$

mit stetigen Operatoren $C_{ij}: H^p \rightarrow H^{p+2}$. Da

$$\begin{bmatrix} -S_L & 0 \\ 0 & -S_L \end{bmatrix}^{-1} : H^{p+1} \rightarrow H^p \quad (4.66)$$

existiert und stetig ist, kann

$$\phi = \begin{bmatrix} -S_L & 0 \\ 0 & -S_L \end{bmatrix}^{-1} f - \begin{bmatrix} -S_L & 0 \\ 0 & -S_L \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \phi \quad (4.67)$$

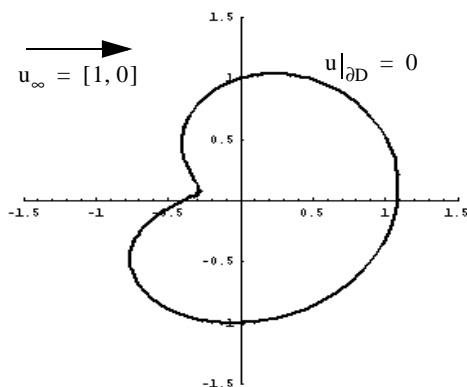
geschrieben werden. Es ist nach Voraussetzung $f \in H^{3/2}$ und $\phi \in H^{-1/2}$. Nach den Abbildungseigenschaften der Operatoren C_{ij} und (4.66) ist die rechte Seite von (4.67) ein Element von $H^{1/2}$. Induktiv erhält man jetzt die Behauptung für alle $p \in \mathbf{N}$. Mit Interpolation folgt die Behauptung für alle $p \geq 0$. •

Satz 4.16 ist eine a-priori Aussage über die Glätte der Dichte ϕ . Die Konsequenz ist, daß für $f \in C_{\text{per}}^{\infty}$ Satz 4.15 herangezogen werden kann, um die Konvergenzgeschwindigkeit des numerischen Verfahrens abzuschätzen.

Gleichung (4.64) wird mit Hilfe einer LU-Zerlegung numerisch gelöst. Dazu wird auf die entsprechenden Prozeduren des Programmpakets LAPACK Version 2.0 zurückgegriffen.

Mit dieser Methode habe ich das innere bzw. äußere Dirichletproblem mit $u_0 = 0$, $\mu = 1/2$ und $u_\infty = [1, 0]$ gelöst. Die Lösung im Innengebiet ist durch $u = 0$ gegeben. Im Außengebiet ist die Lösung nicht trivial. Als Gebietsrand verwende ich das Bohnengebiet (s. auch Abschnitt 6.5 "Numerische Experimente" zur Parametrisierung des Bohnengebiets).

Abb. 1 Bohnengebiet



Falls die Dichte ϕ Lösung der Randintegralgleichung $S\phi(x) = -u_\infty$, $x \in \partial G$, ist, gilt für alle x im Inneren des Bohnengebiets $u(x) = S\phi(x) + u_\infty = 0$. Numerisch wird diese Lösung durch $u_N(x) = u_\infty + S_N\phi^N(x)$ approximiert, wobei ϕ^N die Lösung der diskretisierten Randintegralgleichung $U^N\phi^N = -u_\infty$ (s. (4.64)) und S_N die Diskretisierung des Einfachschichtpotentials in $x \notin \partial G$ mit Hilfe der Trapezregel sind. Nachfolgend sind die numerischen Ergebnisse angegeben:

Tabelle 1: Fehler der Qudaraturmethode

N	$\sqrt{u_N \cdot u_N}$			$ \langle \phi_N n \rangle $
	$x = 0$	$x = [1, 0]$	$x = [0, -0.9]$	
8	0.0054256	0.02475309	0.03283492	0.00179077
16	0.00000608	0.00430448	0.00462433	0.00005282
32	0	0.00025303	0.0015247	0.00000023
64	0	0.00000123	0.00000018	0.00000023

Es wird $\log \sqrt{u_N \cdot u_N}$ graphisch über N dargestellt

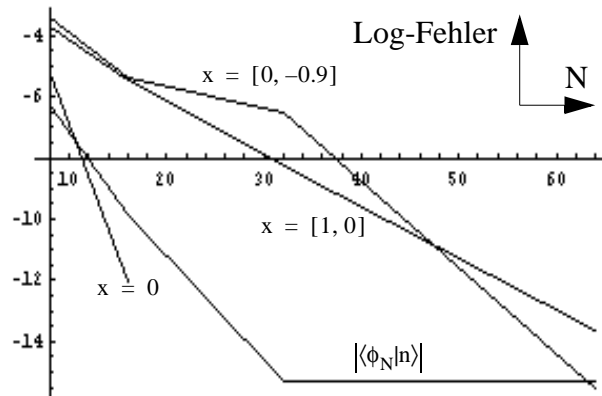
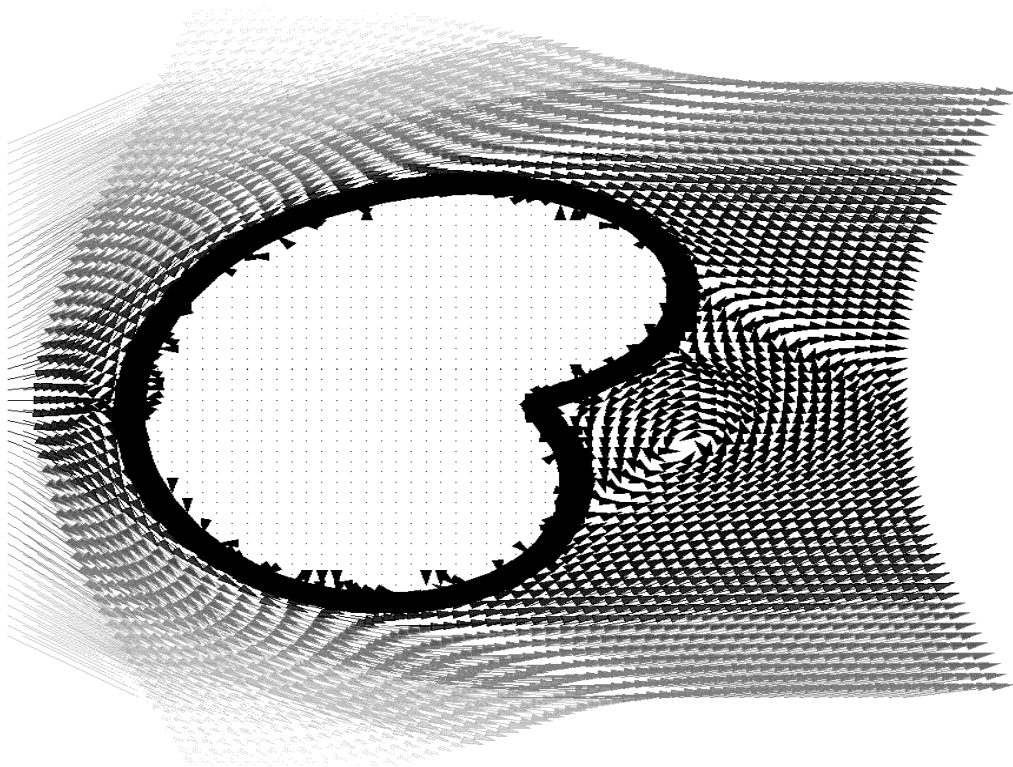
Abb. 2 Log-Quadraturfehler

Abbildung 2 zeigt die exponentielle Konvergenz der Quadraturmethode, wie sie von Satz 4.15 vorausgesagt wird.

Das Geschwindigkeitsvektorfeld wird durch Auswerten von $u_\infty + S_N \phi^N(x)$ mit Hilfe der Trapezregel in $x \notin \partial G$ approximiert.

Abb. 3 Geschwindigkeitsvektorfeld mit $N = 64$ 

Bemerkung: Auf dem Rand der Bohnenkurve wird bei der Visualisierung des Geschwindigkeitsvektorfelds in Abbildung 3 die Trapezregel zur Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes verwendet. Dies ist eigentlich nicht zulässig, da die logarithmische Singularität des Einfachschichtpotentials in dieser Quadraturformel nicht

berücksichtigt wird. Die Trapezregel liefert hier falsche Werte. Diese falschen Werte werden durch eine dicker gezeichnete Bohnenrandkurve in der Visualisierung überdeckt.

Bemerkung: An der graphischen Darstellung des Geschwindigkeitsvektorfeldes in Abbildung 3 erkennt man auch, daß zwei qualitative Eigenschaften einer Strömung, nämlich **Staupunkte** und **Wirbel**, in dem Oseen-Modell einer Strömung enthalten sind. Der Wirbel ist in der Abbildung offensichtlich. Der Staupunkt befindet sich auf der linken Seite vor der Bohne.

KAPITEL 5: Differenzierbarkeit nach dem Gebietsrand

Das Ziel dieses Abschnitts ist es, das von Kirsch [11], zum Beweis der Differenzierbarkeit nach dem Gebietsrand von Lösungen der Helmholtzgleichung mit Dirichletdaten entwickelte Verfahren auf das hier betrachtete Oseen-Randwertproblem mit Dirichletdaten $u|_{\partial G} = 0$ und $u(\infty) = u_\infty$ zu erweitern. Dazu wird im ersten Schritt eine auf Gebietszerlegung beruhende Variationsformulierung angegeben. Dann wird gezeigt, daß die zugehörigen Bilinearformen differenzierbar nach ∂G sind. Hieraus kann gefolgert werden, daß die Lösungen des Oseen-Randwertproblems differenzierbar von ∂G abhängen.

5.1 Oseen-Randwertproblem in Variationsformulierung

In diesem Kapitel wird generell angenommen, daß ∂G der Rand einer unbeschränkten, zusammenhängenden, offenen Menge G mit

$$G_i := \mathbf{R}^2 \setminus \bar{G}$$

einfach-zusammenhängend und $0 \in G_i$ ist. ∂G sei durch eine einfach geschlossene Kurve $\gamma \in C_{\text{per}}^2([0, 2\pi], \mathbf{R}^2)$ parametrisiert:

$$\partial G = \{\gamma(t) | t \in [0, 2\pi]\}.$$

Es sei $\rho > 0$ mit $\overline{G_1} \subset K_\rho$. Dann wird die Abbildung

$$L: H^{1/2}(\partial K_\rho) \rightarrow H^{-1/2}(\partial K_\rho)$$

$$Lu_0 := p^+ n - \mu \frac{\partial u^+}{\partial n}$$

betrachtet. Dabei ist das Paar (u^+, p^+) die schwache Lösung des Oseen-Randwertproblems in K^P mit $u_\infty = 0$ und $u^+|_{\partial K_\rho} = u_0$. Nach den Ergebnissen aus Kapitel 4 kann L mit Hilfe von

$$\begin{aligned} \phi &:= U^{-1}u_0 \\ u^+ &:= S\phi(x) + \langle \phi|n \rangle \nabla N(x) \\ p^+ &:= \Pi\phi(x) - \langle \phi|n \rangle \partial_1 N(x) \end{aligned} \tag{5.1}$$

realisiert werden. Nach Satz 4.10 ist der so entstehende Operator L wohldefiniert. Nach Satz 4.14 ist L stetig.

Die Variationsformulierung des äußeren Oseen-Randwertproblems wird durch Definition 3.5 motiviert. Sie entsteht dadurch, daß für eine glatte Lösung (u, p) des äußeren Oseen-Randwertproblems die Oseengleichung mit einem Testvektorfeld v mit $v|_{\partial G} = 0$ skalar multipliziert und dann mit dem Gaußschen Integralsatz partiell integriert wird. Als Gebiet wird dabei das beschränkte Gebiet

$$G_\rho = G \cap K_\rho$$

verwendet. Da v auf ∂K_ρ nicht null sein muß, erhält man einen Beitrag dieses Randintegrals in der Variationsformulierung. Dieses Randintegral kann mit Hilfe des oben definierten Operators L dargestellt werden.

Das Variationsproblem für das äußere Oseen-Randwertproblem lautet damit:

Zu $f \in \tilde{H}_0^1(G_\rho, \mathbf{R}^2)^*$ finde ein Paar $(u, p) \in \tilde{H}_0^1(G_\rho, \mathbf{R}^2) \times L^2(G_\rho)$, so daß

$$\begin{aligned} \int_{G_\rho} v \cdot \partial_1 u + \mu \nabla u \cdot \nabla v + \langle LR_{0, \partial K_\rho} u | R_{0, \partial K_\rho} v \rangle_{\partial K_\rho} - \int_{G_\rho} p \operatorname{div}(v) &= \langle f|v \rangle \\ - \int_{G_\rho} q \operatorname{div}(u) &= 0 \end{aligned} \tag{VarOseen}$$

für alle $v \in \tilde{H}_0^1(G_\rho, \mathbf{R}^2)$ und $q \in L^2(G_\rho)$ gilt.

Zur Definition des Raum $\tilde{H}_0^1(G_\rho, \mathbf{R}^2)$ siehe Definition 2.20. Der Raum $\tilde{H}_0^1(G_\rho, \mathbf{R}^2)^*$ ist der Dualraum von $\tilde{H}_0^1(G_\rho, \mathbf{R}^2)$.

Es ist offensichtlich, daß die Integrale wohldefiniert sind. Da nach Satz 2.18 $R_{0, \partial K_\rho} v \in H^{1/2}(\partial G)$ für $v \in H^1(G_\rho)$ ist, ist nach den obigen Bemerkungen über L das Dualitätspaar $\langle LR_{0, \partial K_\rho} u | R_{0, \partial K_\rho} v \rangle_{\partial K_\rho}$ für $u, v \in H^1(G_\rho)$ wohldefiniert.

Dieses Problem ist nach Hackbusch [9] ein Sattelpunktproblem. Mit den in Definition 3.3 definierten Bilinearformen kann mit dem Integrationsgebiet G_ρ das Variationsproblem (**VarOseen**) geschrieben werden als:

$$\begin{aligned} \text{Zu } f \in \tilde{H}_0^1(G_\rho, \mathbf{R}^2)^* \text{ finde } (u, p) \in \tilde{H}_0^1(G_\rho, \mathbf{R}^2) \times L^2(G_\rho) \text{ mit} \\ a(u, v) + b(u, v) + \langle LR_{0, \partial K_\rho} u | R_{0, \partial K_\rho} v \rangle_{\partial K_\rho} + d(p, v) = \langle f | v \rangle \\ d(q, u) = 0 \end{aligned}$$

für alle $v \in \tilde{H}_0^1(G_\rho, \mathbf{R}^2)$ und $q \in L^2(G_\rho)$.

Zur weiteren Abkürzung werden die stetigen linearen Abbildungen

$$\begin{aligned} C: \tilde{H}_0^1(G_\rho, \mathbf{R}^2) \ni u &\rightarrow a(u, \cdot) + b(u, \cdot) + \langle LR_{0, \partial K_R} u | R_{0, \partial K_R} \cdot \rangle_{\partial K_R} \in \tilde{H}_0^1(G_\rho, \mathbf{R}^2)^* \\ D: L^2(G_\rho) \ni p &\rightarrow d(p, \cdot) \in \tilde{H}_0^1(G_\rho, \mathbf{R}^2)^* \\ D^*: \tilde{H}_0^1(G_\rho, \mathbf{R}^2) \ni v &\rightarrow d(\cdot, v) \in L^2(G_\rho)^* \end{aligned}$$

definiert. Nach Hackbusch [9] ist (**VarOseen**) lösbar, wenn es $\gamma, \delta > 0$ gibt mit

$$\langle Cu | u \rangle \geq \gamma \|u\|_{\tilde{H}_0^1(G_\rho, \mathbf{R}^2)}^2, \quad u \in \tilde{H}_0^1(G_\rho, \mathbf{R}^2) \quad (5.2)$$

$$\sup \left\{ |d(p, v)| \mid v \in \tilde{H}_0^1(G_\rho, \mathbf{R}^2), \|v\|_{\tilde{H}_0^1(G_\rho, \mathbf{R}^2)} = 1 \right\} \geq \delta \|p\|_{L^2(G_\rho)}, \quad p \in L^2(G_\rho). \quad (5.3)$$

Aus den Bedingungen (5.2) und (5.3) folgen die in der Literatur auch als Babuska-Brezzi-Bedingungen bezeichneten Lösbarkeitsbedingungen für Sattelpunktprobleme.

Lemma 5.1: C erfüllt die Bedingung (5.2).

Beweis: Es sei $u \in \tilde{H}_0^1(G_\rho, \mathbf{R}^2)$. Dann zeigt partielle Integration

$$b(u, u) = \frac{1}{2} \langle |R_{0, \partial K_\rho} u|^2 |n_1 \rangle_{\partial K_\rho}.$$

Wie im Beweis der Identität (4.44) folgt aus den Abschätzungen (4.36) und (4.37) im Beweis von Satz 4.8 mit Berücksichtigung von $N(x) = 1/(2\pi)\log|x|$ die Identität

$$\langle p^+ n - \mu \frac{\partial u^+}{\partial n} |u^+ \rangle_{\partial G} + \frac{1}{2} \langle |u^+|^2 |n_1 \rangle_{\partial G} = \mu \int_G |\nabla u^+|^2.$$

Nach der Definition von L und der Identität $R_{0, \partial K_\rho} u = u^+|_{\partial K_\rho}$ gilt

$$\langle Cu|u \rangle = \mu \int_{G_\rho} |\nabla u|^2 + \mu \int_{K^\rho} |\nabla u^+|^2 \geq 0. \quad (5.4)$$

Dabei ist das Paar (u^+, p^+) die schwache Lösung des äußeren Oseen-Randwertproblems mit $u^+|_{\partial K_\rho} = R_{0, \partial K_\rho} u$ und $u^+(\infty) = 0$. Also ist die quadratische Form C nach unten beschränkt.

Wird $\gamma := \inf \left\{ \langle Cu|u \rangle \mid u \in \tilde{H}_0^1(G_\rho), \|u\|_{\tilde{H}_0^1(G_\rho, \mathbf{R}^2)} = 1 \right\} = 0$ **angenommen**, dann gibt

es eine Folge $(u_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset \tilde{H}_0^1(D_\rho)$ mit $\|u_n\|_{\tilde{H}_0^1(G_\rho, \mathbf{R}^2)} = 1$ und $\langle Cu_n|u_n \rangle \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.

Die Identität (5.4) impliziert zusammen mit der Annahme $\gamma = 0$

$$\langle Cu_n|u_n \rangle \geq \mu \int_{G_\rho} |\nabla u_n|^2 \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty \quad (5.5)$$

Nach Satz 2.14 ist die Einbettung $\tilde{H}_0^1(G_\rho, \mathbf{R}^2) \subset L^2(G_\rho, \mathbf{R}^2)$ kompakt. Es gibt eine Teilfolge von $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$, die wieder mit $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ bezeichnet wird, die in $L^2(G_\rho, \mathbf{R}^2)$ konvergent ist. Nach (5.5) ist diese Teilfolge in $\tilde{H}_0^1(G_\rho, \mathbf{R}^2)$. Es gibt daher ein

$u \in \tilde{H}_0^1(G_\rho, \mathbf{R}^2)$ mit $u_n \rightarrow u$ in $\tilde{H}_0^1(G_\rho, \mathbf{R}^2)$. Dieser Grenzwert erfüllt weiter $\|u\|_{\tilde{H}_0^1(G_\rho)} = 1$. Aus der Stetigkeit von C und (5.5) folgt für u

$$0 = \langle Cu|u \rangle = \mu \int_{G_\rho} |\nabla u|^2 + \mu \int_{K^\rho} |\nabla u_+|^2. \quad (5.6)$$

Dabei ist (u^+, p^+) die schwache Lösung des Oseen-Randwertproblems in K^ρ mit $u_\infty = 0$ und $u^+|_{\partial K_\rho} = R_{0, \partial K_\rho} u$, $u_+(\infty) = 0$. Aus Satz 3.7 und der Identität (5.6) folgt $u_+(x) = 0$ für alle $x \in \overline{K^\rho}$. Mit $u \in \tilde{H}_0^1(G_\rho, \mathbf{R}^2)$, $R_{0, \partial K_\rho} u = u_+|_{\partial K_\rho} = 0$ zeigen (5.6) und die nach Korollar 8.18 in Kreß [12] auf $H^1(G_\rho, \mathbf{R}^2)$ äquivalente Norm

$$\|u\|^2 := \|\nabla u\|_{L^2(G_\rho)}^2 + \|R_{0, \partial K_\rho} u\|_{L^2(\partial K_\rho)}^2 + \|R_{0, \partial G} u\|_{L^2(\partial G)}^2,$$

daß $u = 0$ in G_ρ sein muß. Dies ist ein **Widerspruch** zu $\|u\|_{\tilde{H}_0^1(G_\rho, \mathbf{R}^2)} = 1$. Also war die Annahme $\gamma = 0$ falsch und es muß $\gamma > 0$ gelten. •

Lemma 5.2: d erfüllt (5.3).

Beweis: Es sei $p \in L^2(G_\rho)$ und $p \neq 0$. Im Fall von $p = 0$ ist (5.3) trivial erfüllt. Nach Satz 2.22, angewendet auf das Gebiet $G = G_\rho$ mit $g_1 = \partial G$ und $g_2 = \partial K_\rho$, gibt es ein $u \in \tilde{H}_0^1(G_\rho, \mathbf{R}^2)$, $u \neq 0$, mit $\operatorname{div}(u) = p$ und $\|u\|_{\tilde{H}_0^1(G_\rho)} \leq c \|p\|_{L^2(G_\rho)}$. Dabei ist $c > 0$ eine nur vom Gebiet abhängige Konstante. Für $u' := u / \|u\|_{\tilde{H}_0^1(G_\rho, \mathbf{R}^2)}$ gilt:

$$\begin{aligned} \sup \left\{ |d(p, v)| \mid v \in \tilde{H}_0^1(G_\rho, \mathbf{R}^2), \|v\|_{\tilde{H}_0^1(G_\rho, \mathbf{R}^2)} = 1 \right\} &\geq |d(p, u')| \\ &= \|u\|_{\tilde{H}_0^1(G_\rho, \mathbf{R}^2)}^{-1} \left| \int_{G_\rho} p \operatorname{div}(u) \right| \\ &= \|u\|_{\tilde{H}_0^1(G_\rho, \mathbf{R}^2)}^{-1} \|p\|_{L^2(G_\rho)}^2 \\ &\geq \frac{1}{c} \|p\|_{L^2(G_\rho)} \end{aligned}$$

Dies zeigt (5.3) mit $\delta := \frac{1}{c}$. •

Satz 5.3: Für alle $f \in \tilde{H}_0^1(G_\rho, \mathbf{R}^2)^*$ und $g \in L^2(G_\rho)$ gibt es ein Paar $(u, p) \in \tilde{H}_0^1(G_\rho, \mathbf{R}^2) \times L^2(G_\rho)$, welches die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix} C & D \\ D^* & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

ist. Wird

$$u^a(x) := \begin{cases} u(x), & x \in \overline{G_\rho} \\ u^+(x), & x \in K^\rho \end{cases}, \quad p^a(x) := \begin{cases} p(x), & x \in \overline{G_\rho} \\ p^+(x), & x \in K^\rho \end{cases} \quad (5.8)$$

definiert, dann ist das so fortgesetzte Paar (u^a, p^a) die schwache Lösung (im erweiterten Sinn von Definition 3.5) des Oseen-Randwertproblems

$$\begin{aligned} \partial_1 u^a + \nabla p^a - \mu \Delta u^a &= f \text{ in } G \\ \operatorname{div}(u^a) &= g \text{ in } G \\ u^a|_{\partial G} &= 0 \\ u^a(\infty) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{IOseen})$$

wobei $f(x), g(x) := 0$ für $x \in \overline{K^\rho}$ definiert wird.

Beweis: Da das Sattelpunktproblem (**VarOseen**) die Bedingungen (5.2) und (5.3) erfüllt, hat das Gleichungssystem (5.7) nach Satz 12.2.7 in Hackbusch [9] für alle $(f, g) \in \tilde{H}_0^1(G_\rho, \mathbf{R}^2)^* \times L^2(G_\rho)$ genau eine Lösung $(u, p) \in \tilde{H}_0^1(G_\rho, \mathbf{R}^2) \times L^2(G_\rho)$. Also ist das Problem (**VarOseen**) eindeutig lösbar.

Als nächstes wird gezeigt, daß das Paar (u^a, p^a) die Lösung von (**IOseen**) ist.

Es sei $\psi \in C_0^\infty(G, \mathbf{R})$ und $\rho_s > \rho > 0$ mit $\operatorname{supp}(\psi) \subset K_{\rho_s}$. Da nach Konstruktion $u \in H^1(G_\rho)$ und $u^+ \in H^1(K_{\rho_s}^\rho)$ gilt, erhält man mit dem Gaußschen Integralsatz für $i, k = 1, 2$

$$\begin{aligned} \int_G u_i^a \partial_k \psi &= \int_{G_\rho} u_i \partial_k \psi + \int_{K_{\rho_s}^\rho} u_i^+ \partial_k \psi \\ &= - \int_{G_\rho} \psi \partial_k u_i - \int_{K_{\rho_s}^\rho} \psi \partial_k u_i^+ + \int_{\partial K_\rho} \psi (u_i - u_i^+) n_k \end{aligned} \quad (5.9)$$

Nach Konstruktion gilt $u_i|_{\partial K_\rho} = u_i^+|_{\partial K_\rho}$. Daher verschwindet das Randintegral auf der rechten Seite von (5.9). Dies zeigt: u^a ist schwach differenzierbar mit

$$\partial_k u^a(x) := \begin{cases} \partial_k u(x), & x \in G_\rho \\ \partial_k u^+(x), & x \in K^p, x \in G \\ 0, & x \in \partial K_\rho \end{cases} \quad (5.10)$$

Dabei kann $\partial_k u^a(x)$ auf ∂K_ρ beliebig definiert werden, da ∂K_ρ eine Lebesgue-Nullmenge ist und die schwache Ableitung nach Definition 2.12 nur Lebesgue fast überall definiert ist. Nach Konstruktion von u und u^+ bzw. p und p^+ ist

$$u^a \in H^1(G_r), p^a \in L^2(G_r) \text{ f\u00fcr alle } r > 0. \quad (5.11)$$

Es sei $\phi \in C_0^\infty(G, \mathbf{R}^2)$ und $\rho_s > \rho > 0$ mit $\text{supp}(\phi) \subset K_{\rho_s}$. Da das Paar (u, p) L\u00f6sung von (VarOseen) ist, erh\u00e4lt man die Identit\u00e4t

$$a(u, \phi|_{\overline{G_\rho}}) + b(u, \phi|_{\overline{G_\rho}}) + \langle LR_{0, \partial K_\rho} u | R_{0, \partial K_\rho} \phi|_{\overline{G_\rho}} \rangle_{\partial K_\rho} + d(p, \phi|_{\overline{G_\rho}}) = \langle f | \phi|_{\overline{G_\rho}} \rangle. \quad (5.12)$$

Nach Konstruktion des Paares (u^+, p^+) in (5.1) folgt aus Satz 4.10 und Gleichung (4.47)

$$\langle p^+ n - \mu \frac{\partial u^+}{\partial n} | R_{0, \partial G} \phi \rangle_{\partial G} = a(u^+, \phi|_{\overline{K_{\rho_s}^p}}) + b(u^+, \phi|_{\overline{K_{\rho_s}^p}}) + d(p^+, \phi|_{\overline{K_{\rho_s}^p}}). \quad (5.13)$$

Nach Definition gilt $p^+ n - \mu \frac{\partial u^+}{\partial n} = LR_{0, \partial K_\rho} u$. Durch Einsetzen von (5.13) in (5.12) erh\u00e4lt man

$$a(u^a, \phi) + b(u^a, \phi) + d(p^a, \phi) = \langle f | \phi \rangle. \quad (5.14)$$

Nach Definition der Bilinearform d gilt

$$\begin{aligned} -\int_{G_\rho} \psi \operatorname{div}(u) &= d(\psi|_{\overline{G_\rho}}, u) = \langle g | \psi|_{\overline{G_\rho}} \rangle \\ -\int_{K_{\rho_s}^p} \psi \operatorname{div}(u^+) &= d(\psi|_{\overline{K_{\rho_s}^p}}, u^+) = 0 \end{aligned}$$

Mit (5.10) liefert Addition dieser beiden Gleichungen

$$d(\psi, u) = \langle g|\psi|_{\overline{G}_\rho} \rangle. \quad (5.15)$$

Da u^+ die in Definition 3.5 geforderte Bedingung im Unendlichen erfüllt, zeigen (5.11), (5.14) und (5.15), daß das Paar (u^a, p^a) im Sinn von Definition 3.5 eine schwache Lösung des inhomogenen Oseen-Randwertproblems (**IOseen**) ist. Satz 3.9 zeigt, daß das homogene äußere Oseen-Randwertproblem nur die Null-Lösung besitzt. Also ist (u^a, p^a) eindeutig bestimmt. •

Bemerkung: Ein Existenzbeweis von Lösungen von (**IOseen**) wird schon in Satz VII.5.1 in Galdi [8] gegeben. Dort allerdings unter der wesentlich schwächeren Voraussetzung an ∂G , daß ∂G lokal lipschitz sein muß. Der Galdische Beweis ist allerdings nur bedingt konstruktiv, da er sich nicht eignet, als Grundlage eines numerischen Algorithmus verwendet zu werden. Die hier verwendete Variationsformulierung eignet sich hingegen als Grundlage eines Finite-Elementeverfahrens zum Lösen von (**IOseen**), da sich der Operator L mit Hilfe des Einfachschichtpotentials realisieren läßt (s. Definition von L).

Bemerkung: Die Definition des Operators L benutzt das Einfachschichtpotential aus Kapitel 4. Das Lösen von (**VarOseen**) ist daher in meiner Darstellung nicht unabhängig von der Konstruktion von Lösungen des äußeren Oseen-Randwertproblems mit Hilfe des Einfachschichtpotentials im Gegensatz zur oben erwähnten Galdischen Methode.

5.2 Beweis der Differenzierbarkeit nach dem Gebietsrand

In diesem Abschnitt wird bewiesen, daß die Lösungen des äußeren Oseen-Randwertproblems differenzierbar vom Gebietsrand ∂G abhängen.

Im folgenden sei $\rho > 0$ mit $G_i \subset K_\rho$, $\partial K_\rho \cap \partial G = \emptyset$.

Zur Motivation des Beweises betrachte folgende Situation: Es sei $T: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ ein Diffeomorphismus mit $T(x) = x$ für alle $|x| \geq \rho$. Dann wird das äußere Oseen-Randwertproblem mit $u|_{T(\partial G)} = 0$ und $u(\infty) = u_\infty \neq 0$ betrachtet. Eine Lösung (u_T, p_T) existiert nach Satz 4.14 in dem Gebiet $T(G)$. Definiere die Pullbacks

$$\tilde{u}_T := u_T \circ T: G \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad \tilde{p}_T := p_T \circ T: G \rightarrow \mathbf{R}$$

von (u_T, p_T) . Es wird die Differenzierbarkeit der Pullbacks nach T bewiesen. Dazu werden die Bilinearformen a, b, d für die Pullbacks umgeschrieben. Dann wird

gezeigt, daß diese differenzierbar von T abhängen. Hieraus kann die Differenzierbarkeit von $(\tilde{u}_T, \tilde{p}_T)$ nach T gefolgert werden. Da für $|x| \geq \rho$ die Identität $\tilde{u}_T(x) = u_T(x)$ gilt, kann aus dem Randwert der Ableitung von \tilde{u}_T auf die Randwerte der Ableitung von $u_T(x)$ geschlossen werden. Die hier beschriebene Idee zum Beweis der differenzierbaren Randabhängigkeit der Lösungen der Oseengleichung ist bereits von Kirsch [11] für die Helmholtzgleichung mit Dirichletdaten durchgeführt worden.

Für den Beweis der Randdifferenzierbarkeit wird folgendes Lemma benötigt:

Lemma 5.4: Es seien $(X, \| \cdot \|_X)$ und $(Y, \| \cdot \|_Y)$ Banachräume. Dann ist die Menge $GL(X, Y) \subset L(X, Y)$ eine offene Teilmenge und die Abbildung

$$q: GL(X, Y) \ni T \rightarrow T^{-1} \in GL(Y, X)$$

ist unendlich oft differenzierbar. Ihre erste Ableitung ist durch

$$dq(T)(H) = -T^{-1} \cdot H \cdot T^{-1}, H \in L(X, Y) \quad (5.16)$$

gegeben.

Beweis: Lemma 2.5.5 in [1].

5.2.1 Geometrie

Das Ziel dieses Teilabschnitts ist es, die Gebietstransformation $T(\partial G)$ zu konkretisieren. Bevor dies geschehen kann, wird noch ein Funktionenraum definiert.

Definition 5.5: Für $k \in \mathbf{N}$ wird der Raum

$$C_{loc}^k(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^2) := \left\{ T: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2 \mid \begin{array}{l} \forall \Omega \subset \mathbf{R}^2: \Omega \text{ offen und beschränkt gilt} \\ T|_{\Omega} \in C^k(\bar{\Omega}, \mathbf{R}^2) \end{array} \right\}$$

definiert.

Im folgenden wird mit I die Identitätsabbildung

$$I: \mathbf{R}^2 \ni x \rightarrow x \in \mathbf{R}^2$$

bezeichnet.

Lemma 5.6: Es sei

$$T: C_0^2(K_\rho, \mathbf{R}^2) \ni t \rightarrow I + t \in C_{loc}^2(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^2)$$

Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit folgenden Eigenschaften:

1. Die Abbildung $S(t) := (T(t))^{-1}: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ existiert für alle $\|t\|_{C^2(\overline{K}_\rho)} < \varepsilon$.
Zusätzlich ist $S(t)$ einmal stetig differenzierbar.
2. Die Abbildungen

$$\left\{ t \in C_0^2(K_\rho, \mathbf{R}^2) \mid \|t\|_{C^2(\overline{K}_\rho)} < \varepsilon \right\} \ni t \rightarrow dT(t)(\cdot) \in C^0(\overline{K}_\rho, GL(\mathbf{R}^2)), \quad (5.17)$$

$$\left\{ t \in C_0^2(K_\rho, \mathbf{R}^2) \mid \|t\|_{C^2(\overline{K}_\rho)} < \varepsilon \right\} \ni t \rightarrow d(I+t)(\cdot)^{-1} \in C^0(\overline{K}_\rho, GL(\mathbf{R}^2)) \quad (5.18)$$

$$J: \left\{ t \in C_0^2(K_\rho, \mathbf{R}^2) \mid \|t\|_{C^2(\overline{K}_\rho)} < \varepsilon \right\} \ni t \rightarrow |\det(dT(\cdot))| \in C^0(\overline{K}_\rho, \mathbf{R}) \quad (5.19)$$

sind differenzierbar.

Beweis: Da $GL(\mathbf{R}^2) \subset L(\mathbf{R}^2)$ offen ist und $d(I+t)(x) = I + dt(x)$ für alle $x \in \overline{K}_\rho$ gilt, gibt es wegen $I \in GL(\mathbf{R}^2)$ ein $\varepsilon > 0$ mit $I + A \in GL(\mathbf{R}^2)$ für alle $A \in L(\mathbf{R}^2)$ mit $\|A\| < \varepsilon$. Also ist für $t \in C_0^2(K_\rho, \mathbf{R}^2)$ mit $\|t\|_{C^2(\overline{K}_\rho)} < \varepsilon$ die Ableitung $d(I+t)(x) \in GL(\mathbf{R}^2)$ für alle $x \in \mathbf{R}^2$. Dies zeigt die Wohldefiniertheit der Abbildung in (5.17). Nach Definition der $\|\cdot\|_{C^2(\overline{K}_\rho)}$ -Norm ist der Beweis der Differenzierbarkeit der Abbildungen (5.17) trivial, da sie nach Definition von T eine stetige affine Abbildung in t ist.

Mit $q(dT(t)(\cdot)) = q(I + dt(\cdot)) = d(I + t)(\cdot)^{-1}$, Lemma 5.4 und dem Satz von Taylor kann für $\|t\|_{C^2(\overline{K}_\rho)}, \|h\|_{C^2(\overline{K}_\rho)} \leq \varepsilon/4$ und $x \in K_\rho$

$$\begin{aligned} & q(d_x T(t+h)(x)) - q(d_x T(t)(x)) \\ &= d_x(I + t + h)(x)^{-1} - d_x(I + t)(x)^{-1} \\ &= \int_0^1 dq(I + dt(x) + \sigma dh(x))(dh(x)) \, d\sigma \\ &= dq(I + dt(x))(dh(x)) \\ &\quad + \int_0^1 \{dq(I + dt(x) + \sigma dh(x)) - dq(I + dt(x))\}(dh(x)) \, d\sigma \end{aligned}$$

geschrieben werden. Da $q \in C^2(GL(\mathbf{R}^2), GL(\mathbf{R}^2))$ ist, kann das integrale Restglied

$$\left| \int_0^1 \{dq(I + dt(x) + \sigma dh(x)) - dq(I + dt(x))\}(dh(x)) \, d\sigma \right| \leq M \|dh\|_\infty^2, \quad x \in K_\rho$$

mit einer von h und x unabhängigen Konstanten $M > 0$ abgeschätzt werden. Dies zeigt die Differenzierbarkeit von (5.18). In $t = 0$ ist ihre Ableitung durch

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} q(dT(t)(\cdot)) \right](h)(x) = dq(I)(dh(x)) = -dh(x), \quad h \in C_0^2(K_\rho, \mathbf{R}^2) \quad (5.20)$$

gegeben.

Da die Determinantenabbildung multilinear von den Spalten einer Matrix abhängt, folgt aus der eben bewiesenen Differenzierbarkeit (5.18) die Differenzierbarkeit von J .

Aus dem Satz von Hadamard-Levy (Satz 2.5.17 in [1]) und $T(t)(x) = x$ für alle $x \notin K_\rho$ folgt die Existenz von $T(t)^{-1}$ sowie die behauptete einmalige stetige Differenzierbarkeit von $T(t)^{-1}$. •

Bemerkung: Für $t \in C_0^2(K_\rho, \mathbf{R}^2)$ gilt

$$T(t)(x) = x + t(x) = x \quad \text{für alle } |x| \geq \rho.$$

5.2.2 Nachweis der Differenzierbarkeit nach dem Gebietsrand

In diesem Abschnitt seien t und $\varepsilon > 0$ so gewählt, daß die Behauptung von Lemma 5.6 gilt. Weiter werden die Definitionen von T, S aus Lemma 5.6 verwendet.

Nach Satz 5.3 gibt es genau ein $(u_T, p_T) \in \tilde{H}_0^1(T(G_\rho), \mathbf{R}^2) \times L^2(T(G_\rho))$, welches Lösung von **(VarOseen)** mit

$$\langle f|v \rangle := \langle Lu_\infty |_{R_{0, \partial K_\rho}} v \rangle_{\partial K_\rho}, \quad v \in \tilde{H}_0^1(T(G_\rho), \mathbf{R}^2) \quad \text{und} \quad g := 0$$

ist. Mit den auf $T(G_\rho)$ definierten Bilinearformen a, b, d aus Definition 3.3 gilt daher

$$\begin{aligned} a(u_T, v) + b(u_T, v) + \langle LR_{0, \partial K_\rho} u_T |_{R_{0, \partial K_\rho}} v \rangle_{\partial K_\rho} + d(p_T, v) &= \langle Lu_\infty |_{R_{0, \partial K_\rho}} v \rangle_{\partial K_\rho} \\ d(q, u_T) &= 0 \end{aligned}$$

für alle $v \in \tilde{H}_0^1(T(G_\rho), \mathbf{R}^2)$ und $q \in L^2(T(G_\rho))$.

Nach Satz 5.3 und dem Eindeutigkeitssatz (Satz 3.9) ist das dort definierte Paar (u_T^a, p_T^a) eine Lösung des äußeren Oseen-Randwertproblems

$$\begin{aligned} \partial_1 u + \nabla p &= \mu \Delta u \quad \text{in } T(G) \\ \operatorname{div}(u) &= 0 \quad \text{in } T(G) \\ u|_{T(\partial G)} &= 0 \\ u(\infty) &= u_\infty \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\} \end{aligned} \quad \text{.} \quad \text{(DirOseen)}$$

(u_T^a, p_T^a) kann auch mit Satz 4.14 gewonnen werden. Dazu ist allerdings noch Satz 3.9 zu beachten.

Es seien $\tilde{u}_T := u_T \bullet T$, $\tilde{p}_T := p_T \bullet T$. Nach Satz 2.15 gilt für den Pullback $(\tilde{u}_T, \tilde{p}_T) \in \tilde{H}_0^1(G_\rho, \mathbf{R}^2) \times L^2(G_\rho)$. Wird in den die Bilinearformen a, b, d (s. Definition 3.3) definierenden Integralen $x = T(y)$ substituiert, dann erhält man neue Bilinearformen a_t, b_t, d_t , die wegen $T = T(t) = I + t$ von t abhängen. Um

diese transformierten Bilinearformen explizit angeben zu können, werden für $x \in G_\rho$ mit $S(x) = (T(t))^{-1}(x)$ die Abbildungen

$$J(t)(x) = |\det(dT(t)(x))|$$

$$L_{jk}(t)(x) := J(t)(x) \partial_i S_j(T(t)(x)) \partial_i S_k(T(t)(x))$$

definiert. Damit erhält man

$$a_t(u, v) := \mu \int_{G_\rho} L_{jk}(t) \partial_j u_i \partial_k v_i, \quad u, v \in H^1(G_\rho),$$

$$b_t(u, v) := \int_{G_\rho} v_i(x) \partial_k u_i(x) \partial_i S_k(T(t)(x)) J(t)(x) \, dx, \quad u, v \in H^1(G_\rho),$$

$$d_t(p, v) := - \int_{G_\rho} p(x) \partial_j v_i(x) \partial_i S_j(T(t)(x)) J(t)(x) \, dx, \quad p \in L^2(G_\rho), \quad v \in H^1(G_\rho).$$

Wenn man noch $T(y) = y$ für $|y| = \rho$ berücksichtigt, dann ist das oben definierte Paar $(\tilde{u}_T, \tilde{p}_T)$ die Lösung des Variationsproblems:

Für alle $(v, q) \in \tilde{H}_0^1(G_\rho, \mathbf{R}^2) \times L^2(G_\rho)$ gilt

$$a_t(\tilde{u}_T, v) + b_t(\tilde{u}_T, v) + \langle LR_{0, \partial K_\rho} \tilde{u}_T | R_{0, \partial K_\rho} v \rangle_{\partial K_\rho} + d_t(\tilde{p}_T, v) = \langle Lu_\infty | R_{0, \partial K_\rho} v \rangle_{\partial K_\rho}.$$

$$d_t(q, \tilde{u}_T) = 0$$

Lemma 5.7: Es sei $\varepsilon > 0$ wie in Lemma 5.6. Dann sind die Abbildungen (s. Definition 2.2 zur Definition von $\text{Bil}(\cdot, \cdot)$)

$$\left\{ t \in C_0^2(D_\rho, \mathbf{R}^2) \mid \|t\|_{C^2(\overline{K}_\rho)} < \varepsilon \right\} \rightarrow a_t, b_t \in \text{Bil}(H^1(G_\rho), H^1(G_\rho))$$

$$\left\{ t \in C_0^2(D_\rho, \mathbf{R}^2) \mid \|t\|_{C^2(\overline{K}_\rho)} < \varepsilon \right\} \rightarrow d_t \in \text{Bil}(L^2(G_\rho), H^1(G_\rho))$$

nach t differenzierbar.

Für $u, v \in H^2(G_\rho, \mathbf{R}^2)$, $p \in H^1(G_\rho)$ und $h \in C_0^2(K_\rho, \mathbf{R}^2)$ gilt

$$\left. \frac{\partial a_t}{\partial t} \right|_{t=0} (h)(u, v) = -a_0(h \cdot \nabla u, v) + \mu \int_{G_\rho} (h \cdot \nabla v_i) \Delta u_i - \mu \int_{\partial G_\rho} (h \cdot \nabla^\perp u_i) \frac{\partial v_i}{\partial \tau} \quad (5.21)$$

$$\left. \frac{\partial b_t}{\partial t} \right|_{t=0} (h)(u, v) = -b_0(h \cdot \nabla u, v) - \int_{G_\rho} (v_i \cdot \nabla h) \partial_1 u_i + \int_{\partial G_\rho} v_i \partial_1 u_i (h \cdot n) \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial d_t}{\partial t} \right|_{t=0} (h)(p, v) &= -d_0(h \cdot \nabla p, v) - \int_{G_\rho} (h \cdot \nabla v_i) \partial_i p + \int_{\partial G_\rho} \left(p h_1 \frac{\partial v_2}{\partial \tau} - p h_2 \frac{\partial v_1}{\partial \tau} \right) \\ &= -d_0(h \cdot \nabla p, v) - d_0 \left(p, \begin{bmatrix} h \cdot \nabla v_1 \\ h \cdot \nabla v_2 \end{bmatrix} \right) \\ &\quad - \int_{\partial G_\rho} \left(p h_2 \frac{\partial v_1}{\partial \tau} - p h_1 \frac{\partial v_2}{\partial \tau} \right) + p \begin{bmatrix} h \cdot \nabla v_1 \\ h \cdot \nabla v_2 \end{bmatrix} \cdot n \end{aligned} \quad (5.23)$$

Beweis: Die Differenzierbarkeit der Bilinearformen erhält man aus Lemma 5.6 sowie der aus der Cauchy-Schwarz-Ungleichung folgenden Abschätzung

$$\left| \int_{G_\rho} A(x) \nabla u_i(x) \cdot \nabla v_i(x) \right| \leq \|A\|_\infty \|\nabla u\|_{L^2(G_\rho)} \|\nabla v\|_{L^2(G_\rho)}, \quad i = 1, 2,$$

für alle $A \in C^0(\overline{G}_\rho, L(\mathbf{R}^2))$.

Mit (5.20) berechnet man $dL(0)(h) = \operatorname{div}(h)I - (dh + dh^*)$ sowie

$$\left. \frac{\partial a_t}{\partial t} \right|_{t=0} (h)(u, v) = \int_{G_\rho} \nabla v_i \cdot (\operatorname{div}(h)I - (dh + dh^*)) \nabla u_i,$$

$$\left. \frac{\partial b_t}{\partial t} \right|_{t=0} (h)(u, v) = \int_{G_\rho} v_i \partial_j u_i (\delta_{1j} \operatorname{div}(h) - \partial_1 h_j),$$

$$\left. \frac{\partial d_t}{\partial t} \right|_{t=0} (h)(p, v) = - \int_{D_\rho} p \partial_j v_i (\delta_{ij} \operatorname{div}(h) - \partial_i h_j)$$

Für $u, v, p \in C^\infty(\overline{G_\rho})$ gelten die algebraischen Identitäten:

$$\begin{aligned} \nabla v_i \cdot (\operatorname{div}(h)I - (dh + dh^*)) \nabla u_i &= -\nabla(h \cdot \nabla u_i) \cdot \nabla v_i + (h \cdot \nabla v_i) \Delta u_i \\ &\quad - \operatorname{div}((h \cdot \nabla^\perp u_i) \nabla^\perp v_i) \end{aligned} \tag{5.24}$$

$$v_i (\delta_{1j} \operatorname{div}(h) - \partial_1 h_j) \partial_j u_i = -\{(v_i \cdot \nabla h) \partial_1 u_i + v_i \partial_1 (h \cdot \nabla u_i)\} + \operatorname{div}(v_i h \partial_1 u_i)$$

$$\begin{aligned} p \partial_j v_i (\delta_{ij} \operatorname{div}(h) - \partial_i h_j) &= \operatorname{div}(v) \operatorname{div}(ph) - \partial_j v_i \partial_i (h_j p) \\ &\quad - (h \cdot \nabla p) \operatorname{div}(v) + (h \cdot \nabla v_i) \partial_i p \\ &= \nabla^\perp v_2 \cdot \nabla(ph_1) - \nabla^\perp v_1 \cdot \nabla(ph_2) \\ &\quad - (h \cdot \nabla p) \operatorname{div}(v) + (h \cdot \nabla v_i) \partial_i p \\ &= -\operatorname{div}(ph_2 \nabla^\perp v_1 - ph_1 \nabla^\perp v_2) \\ &\quad - (h \cdot \nabla p) \operatorname{div}(v) + (h \cdot \nabla v_i) \partial_i p \end{aligned}$$

Gleichung (5.24) kann aus Kirsch [7] entnommen werden. Die anderen Formeln verifiziert man elementar mit der Produktregel.

Partielle Integration und die Dichtheit von $C^\infty(\overline{G_\rho}) \subset H^2(G_\rho), H^1(G_\rho), L^2(G_\rho)$ liefern die behaupteten Formeln für die Ableitungen durch Approximation. •

Satz 5.8: Für $t \in C_0^2(K_\rho, \mathbf{R}^2)$ sei

$$M_t: \tilde{H}_0^1(G_\rho, \mathbf{R}^2) \times L^2(G_\rho) \rightarrow \tilde{H}_0^1(G_\rho, \mathbf{R}^2)^* \times L^2(G_\rho)$$

$$M_t \begin{bmatrix} u \\ p \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} a_t(u, \cdot) + b_t(u, \cdot) + \langle LR_{0, \partial K_R} u | R_{0, \partial K_R} \cdot \rangle_{\partial K_R} & d_t(p, \cdot) \\ d_t(\cdot, u) & 0 \end{bmatrix}$$

Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß die Abbildung

$$\left\{ t \in C_0^2(K_\rho, \mathbf{R}^2) \mid \|t\|_{C^2(\bar{K}_\rho)} < \varepsilon \right\} \ni t \rightarrow M_t^{-1} \begin{bmatrix} \langle Lu_\infty | R_{0, \partial K_\rho} \cdot \rangle_{\partial K_\rho} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{u}_t \\ \tilde{p}_t \end{bmatrix} \in \begin{bmatrix} \tilde{H}_0^1(G_\rho, \mathbf{R}^2) \\ L^2(G_\rho) \end{bmatrix}$$

differenzierbar nach t ist. Ihre Ableitung in $t = 0$ in Richtung $h \in C_0^2(K_\rho, \mathbf{R}^2)$ wird mit (\tilde{u}', \tilde{p}') bezeichnet. Es sei $(u, p) = (\tilde{u}_t^a, \tilde{p}_t^a)|_{t=0}$ die in (5.8) definierte Fortsetzung des Paares $(\tilde{u}_t, \tilde{p}_t)|_{t=0} \cdot (u, p)$ ist die Lösung des äußeren Oseen-Randwertproblems (**DirOseen**) mit Rand ∂G . Das Paar $(u', p') := (\tilde{u}' - h \cdot \nabla u, \tilde{p}' - h \cdot \nabla p)$ ist die schwache Lösung des äußeren Oseen-Randwertproblems:

$$\begin{aligned} \partial_1 u' + \nabla p' &= \mu \Delta u' \text{ in } G \\ \operatorname{div}(u') &= 0 \text{ in } G \\ u'|_{\partial G} &= -(h \cdot n) \frac{\partial u}{\partial n} \\ u'(\infty) &= 0 \end{aligned} \tag{DiffOseen}$$

Beweis: Für $\varepsilon > 0$ wie in Lemma 5.7 ist die Abbildung nach dem gleichen Lemma 5.7

$$M_t: \tilde{H}_0^1(G_\rho, \mathbf{R}^2) \times L^2(G_\rho) \rightarrow \tilde{H}_0^1(G_\rho, \mathbf{R}^2)^* \times L^2(G_\rho)$$

nach t differenzierbar. In $t = 0$ ist sie nach Satz 5.3 invertierbar. Aus der Kettenregel und Lemma 5.4 erhält man, daß es ein kleineres $\varepsilon > 0$ gibt, so daß M_t^{-1} existiert und differenzierbar von t abhängt. Dies zeigt mit der Unabhängigkeit der Bilinearform $\langle Lu_\infty | R_{0, \partial K_\rho} \cdot \rangle_{\partial K_\rho}$ von t , daß $(\tilde{u}_t, \tilde{p}_t)$ differenzierbar von t abhängt.

Differentiation der Gleichung

$$\mathbf{M}_t \begin{bmatrix} \tilde{u}_t \\ \tilde{p}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{L}u_\infty | \mathbf{R}_{0, \partial K_\rho} \cdot \rangle_{\partial K_\rho} \\ 0 \end{bmatrix}$$

in $t = 0$ in Richtung $h \in C_0^2(K_\rho, \mathbf{R}^2)$ liefert mit der Kettenregel:

$$\begin{aligned} 0 &= a_0(\tilde{u}', v) + b_0(\tilde{u}', v) + \langle \mathbf{L}R_{0, \partial K_\rho} \tilde{u}' | \mathbf{R}_{0, \partial K_\rho} v \rangle_{\partial K_\rho} + d_0(\tilde{p}', v) \\ &\quad + \left. \frac{\partial a_t}{\partial t} \right|_{t=0} (h)(\tilde{u}_t|_{t=0}, v) + \left. \frac{\partial b_t}{\partial t} \right|_{t=0} (h)(\tilde{u}_t|_{t=0}, v) + \left. \frac{\partial d_t}{\partial t} \right|_{t=0} (h)(\tilde{p}_t|_{t=0}, v) \\ 0 &= d(\cdot, \tilde{u}') + \left. \frac{\partial d_t}{\partial t} \right|_{t=0} (h)(q, \tilde{u}_t|_{t=0}) \end{aligned}$$

Es sei $(u, p) = (\tilde{u}_t^a, \tilde{p}_t^a)|_{t=0}$ die wie in (5.8) definierte Fortsetzung von $(\tilde{u}_t, \tilde{p}_t)|_{t=0}$. Nach Konstruktion und Satz 5.3 ist (u, p) die schwache Lösung des äußeren Oseen-Randwertproblems mit $u|_{\partial G} = 0$ und $u(\infty) = u_\infty$. Nach Satz 3.6 ist $u \in H^2(G_\rho)$ und $p \in H^1(G_\rho)$. Daher können die Formeln (5.21), (5.22) und (5.23) in Lemma 5.7 für $v \in C_0^\infty(\overline{G_\rho})$ und $q \in C_0^\infty(G_\rho)$ angewendet werden. Die dort auftretenden Randintegrale sind gleich Null, da v und q ihren Träger in $\overline{G_\rho}$ bzw. G_ρ haben. Da weiter $h(x) = \nabla h(x) = 0$ für $|x| = \rho$ ist, ist

$$(u', p') := (\tilde{u}' - h \cdot \nabla u, \tilde{p}' - h \cdot \nabla p)$$

die Lösung des Variationsproblems

$$\begin{aligned} a(u', v) + b(u', v) + \langle \mathbf{L}R_{0, \partial K_\rho} u' | \mathbf{R}_{0, \partial K_\rho} v \rangle_{\partial K_\rho} + d(p', v) &= 0 \\ d(q, u') &= 0 \end{aligned}$$

Also löst (u', p') die Oseengleichung im distributionellen Sinn, wenn man

$$u'(x) := \begin{cases} u'(x), & x \in \overline{G_\rho} \\ u'_+(x), & x \in K^\rho \end{cases}, \quad p'(x) := \begin{cases} p'(x), & x \in \overline{G_\rho} \\ p'_+(x), & x \in K^\rho \end{cases} \quad (5.25)$$

setzt. Dabei ist (u'_+, p'_+) die schwache Lösung des äußeren Oseen-Randwertproblems in K^ρ mit $u'_+|_{\partial K_\rho} = u'$.

Wegen $u|_{\partial G} = \tilde{u}'|_{\partial G} = 0$ und $\nabla u \in H^1(G_\rho)$ ist $\nabla_\tau u = 0$ und die Randwerte von u' auf ∂G sind durch

$$\begin{aligned} u'|_{\partial G} &= \tilde{u}'|_{\partial G} - (h \cdot \nabla u)|_{\partial G} \\ &= 0 - \left((h \cdot \tau) \nabla_\tau u + (h \cdot n) \frac{\partial u}{\partial n} \right). \\ &= -(h \cdot n) \frac{\partial u}{\partial n} \end{aligned}$$

gegeben. Wie im Beweis von Satz 5.3 verifiziert man, daß das Paar (u', p') , welches in (5.25) definiert worden ist, die Lösung von **(DiffOseen)** ist. •

KAPITEL 6: Inverses Problem

Es sei $\tilde{\Gamma} \subset \mathbf{R}^2$ eine einfach geschlossene, analytische Kurve. Es sei weiter $\Gamma \subset \tilde{\Gamma}$ ein zusammenhängendes Kurvenstück von $\tilde{\Gamma}$. Dann wird der Meßoperator M_Γ definiert durch

$$M_\Gamma(\partial G, u_\infty) := u|_\Gamma$$

wobei u Lösung des äußeren Oseen-Randwertproblems

$$\begin{aligned} u_\infty \cdot \nabla u + \nabla p &= \mu \Delta u \text{ in } G \\ \operatorname{div}(u) &= 0 \text{ in } G \\ u|_{\partial G} &= 0 \\ u(\infty) &= u_\infty \end{aligned} \tag{DirOseen}$$

ist. Nach Satz 4.14 und Satz 4.8 ist die Abbildung M wohldefiniert.

Das **inverse Problem** besteht darin, zu fest vorgegebenen $u_\infty \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ die Inverse $M_\Gamma(\cdot, u_\infty)^{-1}$ zu berechnen. Diese soll später mit Hilfe des Levenberg-Marquardt-Algorithmus, verstanden als regularisiertes Newtonverfahren, numerisch berechnet werden. Dazu wird im ersten Schritt gezeigt, daß der Operator $M_\Gamma(\cdot, u_\infty)$ injektiv ist. Dies bedeutet, daß der Gebietsrand ∂G bereits durch eine Messung des Geschwindigkeitsfeldes u auf Γ eindeutig bestimmt ist. Die Beweisidee dieses Resultats ist analog zu der nach Colton/Kreß [4] auf eine Arbeit von Schiffer zurückgehende Idee zum Beweis der Eindeutigkeit des inversen Streuproblems für die Helmholtzgleichung. Danach wird die Differenzierbarkeit von $M_\Gamma(\cdot, u_\infty)$ nach dem Gebietsrand sowie die lokale Schlechtgestellttheit des inversen Problems im Sinn von Hadamard bewiesen. Es kann weiter gezeigt werden, daß die Linearisierung unter gewissen Voraussetzungen injektiv ist. Numerische Experimente demonstrieren die Konvergenz des implementierten Levenberg-Marquardt-Algorithmus sowie die Schlechtgestellttheit des Problems.

6.1 Mathematische Definition des Meßoperators

In diesem Abschnitt wird der Meßoperator mathematisch sauber definiert. Nach dem Jordanschen Kurvensatz im \mathbf{R}^2 zerfällt für eine einfach geschlossene, analytische Kurve $\tilde{\Gamma} \subset \mathbf{R}^2$ die Ebene \mathbf{R}^2 in die offene, beschränkte, einfachzusammenhängende Menge $\tilde{\Gamma}_-$, die unbeschränkte, offene, zusammenhängende Menge $\tilde{\Gamma}_+$ und die Kurve $\tilde{\Gamma}$:

$$\mathbf{R}^2 = \tilde{\Gamma}_- \cup \tilde{\Gamma} \cup \tilde{\Gamma}_+.$$

Für das zusammenhängende Meßkurvenstück $\Gamma \subset \tilde{\Gamma}$ wird der nichtlineare Meßoperator M_Γ definiert durch

$$D(M_\Gamma) := \left\{ \partial G \subset \mathbf{R}^2 \mid \begin{array}{l} \partial G \text{ einfach geschlossene Kurve vom Typ } C^2 \\ \partial G \subset \tilde{\Gamma}_- \end{array} \right\} \times \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$$

$$M_\Gamma: D(M) \ni (\partial D, u_\infty) \rightarrow u|_\Gamma \in C^\infty(\Gamma).$$

6.2 Eindeutigkeit

Der Beweis der Eindeutigkeit des inversen Problems benutzt folgendes, nach Colton/Kreß [4] auf Heinz zurückgehendes Verfahren, bei dem ohne Randregularität partiell integriert werden kann.

Lemma 6.1: Es sei $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ offen, beschränkt und $\omega \in H^1(\Omega) \cap C^\infty(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ mit $\omega|_{\partial\Omega} = 0$. Dann ist $\omega \in H_0^1(\Omega)$, d.h. es gibt $(\omega_k)_{k \in \mathbf{N}^*} \subset C_0^\infty(\Omega)$ mit $|\omega_k - \omega|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$.

Beweis: Es gibt ein $\chi \in C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ mit der Eigenschaft

$$\chi(x) = \begin{cases} 0, & |x| \leq 1 \\ x, & |x| \geq 2 \end{cases}.$$

Damit wird Colton/Kreß [4] folgend für $k \in \mathbf{N}^*$ die Funktion $\omega_k(x) := \frac{1}{k} \chi(k\omega(x))$ für $x \in \bar{\Omega}$ definiert. Da ω unendlich oft differenzierbar in Ω ist, ist auch ω_k in Ω unendlich oft differenzierbar. Aus $\omega \in C^0(\bar{\Omega})$ und $\omega|_{\partial\Omega} = 0$ folgt aus der Defini-

tion von ω_k die Inklusion $\text{supp}(\omega_k) \subset \Omega$. Man beweist $\|\omega_k - \omega\|_{\infty, \bar{\Omega}} \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$.

Es sei $N := \{x \in \Omega \mid \omega(x) = 0, \nabla \omega(x) \neq 0\}$. Die Menge N ist eine Lebesgue-Nullmenge. Dazu wird für $x \in \Omega$ der Fluß $\phi_x: (T^-(x), T^+(x)) \rightarrow \mathbf{R}^2$, der durch die Lösung in dem maximalen Existenzintervall $(T^-(x), T^+(x))$, $T^-(x) < 0$, $T^+(x) > 0$ des Anfangswertproblems

$$y' = \nabla^\perp \omega(y), y(0) = x \quad (\text{AWP})$$

definiert wird, betrachtet. Aus den klassischen Resultaten zur Existenz- und Eindeutigkeit von gewöhnlichen Differentialgleichungen erhält man:

1. Es existiert genau eine Lösung von (AWP) ($\omega \in C^\infty(G)$ und Satz 4.1.5 in [1]).
2. Für $t, s, t+s \in (T^-(x), T^+(x))$ gilt $\phi_t \phi_s x = \phi_{t+s} x$ (Behauptungen 4.1.17 in [1]).
3. Die Abbildungen $T^-(\cdot), T^+(\cdot): G \rightarrow \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$ sind oberhalb- bzw. unterhalbsteig. (Behauptungen 4.1.24 in [1]).

Nach Definition von ϕ ist $\phi_t x \in N$ für alle $x \in N$ und $t \in (T^-(x), T^+(x))$.

Es sei $x \in N$. Da die Abbildungen T^-, T^+ halbstetig sind, gibt es für alle $x \in N$ ein $\delta > 0$ mit $T^+(y) \geq (1/2)T^+(x)$ und $T^-(y) \leq (1/2)T^-(x)$ für alle y mit $|x - y| < \delta$. Es sei $T := (1/4)\min(T^+(x), -T^-(x))$. Da für $x \in N$ nicht $\phi_t x \neq x$ für alle $t \in (T^-(x), T^+(x))$ gilt, gibt es nach der Stetigkeit von ϕ_x ein $t_Q \in (-T, T)$ mit $\phi_{t_Q} x \in \mathbf{Q}^2$ und $|\phi_{t_Q} x - x| < \delta$. Also gilt $-t_Q \in (T^-(\phi_{t_Q} x), T^+(\phi_{t_Q} x))$ sowie $x = \phi_{-t_Q} \phi_{t_Q} x$.

Die obigen Betrachtungen des Flusses ϕ zeigen die Darstellung:

$$N = \bigcup_{x \in \mathbf{Q}^2 \cap N} \{\phi_t x \mid t \in (T^-(x), T^+(x))\}.$$

Da das Lebesguemaß einer Kurve im \mathbf{R}^2 gleich Null ist, ist N dargestellt als abzählbare Vereinigung von Nullmengen eine Lebesgue-Nullmenge im \mathbf{R}^2 .

Hieraus folgt die punktweise Konvergenz

$$\nabla \omega_k(x) = \chi'(k\omega(x)) \nabla \omega(x) \rightarrow \nabla \omega(x), \quad k \rightarrow \infty, \quad x \notin N.$$

Da N eine Lebesgue-Nullmenge ist, ist diese Konvergenz Lebesgue fast überall. Da nach Voraussetzung $\nabla \omega \in L^2(\Omega)$ ist, folgt aus dem Satz von Lebesgue über die majorisierte Konvergenz: $|\nabla \omega_k - \nabla \omega|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0$ für $k \rightarrow \infty$. Da ω_k zusätzlich gleichmäßig gegen ω in $\bar{\Omega}$ konvergiert, konvergiert $\omega_k \rightarrow \omega$ in H^1 . Also ist $\omega \in H_0^1(\Omega)$. •

Satz 6.2: Für $u_\infty \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ ist der Operator $M_\Gamma(\cdot, u_\infty)$ injektiv.

Beweis: Es seien $(\partial G_1, u_\infty), (\partial G_2, u_\infty) \in D(M)$ mit $M(\partial G_1, u_\infty) = M(\partial G_2, u_\infty)$. Die Lösungen der zugehörigen Randwertprobleme werden mit u_1 und u_2 bezeichnet. Nach Satz 4.14 können u_1 und u_2 mit Hilfe des modifizierten Einfachschichtpotentials dargestellt werden. Da die Fundamentallösung E in $x \neq 0$ in eine Potenzreihe entwickelbar ist (siehe (3.1)), sind u_1 und u_2 in $G_1 \cap G_2$ analytisch.¹ Damit ist auch

$$u := u_1|_{G_1 \cap G_2} - u_2|_{G_1 \cap G_2}$$

in der offenen Menge $G_1 \cap G_2$ analytisch.

Die analytische Kurve $\tilde{\Gamma}$ sei durch $\tilde{\Gamma} = \{\tilde{\gamma}(t) | t \in [0, 2\pi]\}$ mit $\tilde{\gamma} \in C_{\text{per}}^\omega([0, 2\pi], \mathbf{R}^2)$, $\tilde{\gamma}|_{[0, 2\pi)}$ injektiv und $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(2\pi)$ parametrisiert. Nach Voraussetzung an Γ gibt es $0 \leq a < b \leq 2\pi$ mit $\Gamma = \{\tilde{\gamma}(t) | t \in [a, b]\}$. Aus der Analytizität von u folgt, daß die Abbildung $[0, 2\pi] \ni t \rightarrow u(\tilde{\gamma}(t)) \in \mathbf{R}^2$ analytisch ist. Da nach Voraussetzung $u_1|_\Gamma = M(\partial G_1, u_\infty) = M(\partial G_2, u_\infty) = u_2|_\Gamma$ gilt, folgt $u|_\Gamma = (u_1 - u_2)|_\Gamma = 0$. Der Identitätssatz für analytische Funktionen liefert $u(\tilde{\gamma}(t)) = 0$ für alle $t \in [0, 2\pi]$. Dies hat zur Konsequenz, daß u eine schwache Lösung des äußeren Oseen-Randwertproblems in $\tilde{\Gamma}_+$ mit $u(\infty) = 0$ und $u|_{\tilde{\Gamma}} = 0$ ist. Nach Satz 3.9 ist $u(x) = 0$ für alle $x \in \tilde{\Gamma}_+$. Aus der Analytizität von u in $G_1 \cap G_2$ folgt

$$u_1|_{G_1 \cap G_2} = u_2|_{G_1 \cap G_2}.$$

1. Die Analytizität von u_1 und u_2 kann auch aus Satz 3.8 gefolgert werden.

Satz 3.7 und das Sobolevsche Einbettungsergebnis in Satz 2.14 liefert

$$u_1 - u_\infty \in C^0(\overline{G_1}) \cap C_{loc}^\infty(G_1), \quad u_2 - u_\infty \in C^0(\overline{G_2}) \cap C_{loc}^\infty(G_2)$$

Nach Satz 4.8 sind $\nabla u_1 \in L^2(G_1)$ und $\nabla u_2 \in L^2(G_2)$.

Es wird $G_1 \setminus \overline{G_2} \neq \emptyset$ oder $G_2 \setminus \overline{G_1} \neq \emptyset$ -d.h. $G_1 \neq G_2$ - **angenommen**. Dann wird u_1 im Gebiet $\Omega := D_1 \setminus \overline{D_2}$, von dem ohne Einschränkung $\Omega \neq \emptyset$ angenommen wird, betrachtet. Sein Rand ist durch

$$\partial\Omega = (\partial G_1 \setminus G_2) \cup (\partial G_2 \cap \overline{G_1})$$

gegeben. Da u_2 stetig in G_2 und u_2 eine Lösung von **(DirOseen)** ist, gilt

$$u_2|_{\partial G_2} = 0, \quad u_1|_{G_1 \cap G_2} = u_2|_{G_1 \cap G_2}, \quad u_1|_{\partial G_2 \cap \overline{G_1}} = u_2|_{\partial G_2 \cap \overline{G_1}} = 0.$$

Da auch nach Voraussetzung $u_1|_{\partial G_1} = 0$ ist, ist

$$u_1|_{\partial\Omega} = 0.$$

Nun erfüllt $u_1|_\Omega$ die Voraussetzung von Lemma 6.1. Es gibt $(u_1^k)_{k \in \mathbb{N}^*} \subset C_0^\infty(G)$ mit $u_1^k \rightarrow u_1$ in $H^1(G)$. Nach dem klassischen Gaußschen Integralsatz gilt unter Berücksichtigung von $\text{supp}(u_1^k) \subset G$

$$0 = \mu \int_G \nabla u_1^k \cdot \nabla u_1 - \int_G p \operatorname{div}(u_1^k).$$

Dabei ist der in der Formel auftretende Gradient komponentenweise zu verstehen, d.h. für $u = (u_1, u_2)$ und $v = (v_1, v_2)$ wird $\nabla v = (\nabla v_1, \nabla v_2)$ und $\nabla u \cdot \nabla v = \nabla u_1 \cdot \nabla v_1 + \nabla u_2 \cdot \nabla v_2$ gesetzt. Nach Definition einer schwachen Lösung ist $p \in L^2(\Omega)$. Wegen $\nabla u_1^k \rightarrow \nabla u_1$ in $L^2(\Omega)$ folgt $\operatorname{div}(u_1^k) \rightarrow \operatorname{div}(u_1) = 0$ in $L^2(\Omega)$ sowie die Identität

$$\int_\Omega |\nabla u_1|^2 = 0.$$

Also muß $u_1 \in C^\infty(\Omega)$ konstant sein. Wegen $u_1|_{\partial\Omega} = 0$ muß daher $u_1|_\Omega = 0$ gelten. Aus der Analytizität von u_1 folgt: $u_1(x) = 0$ für alle $x \in G_1$. Dies hat

$0 = u_1(\infty) = u_\infty$ zur Konsequenz. Dies ist ein **Widerspruch** zu $u_\infty \neq 0$. Also muß $G_1 = G_2$ gelten und die Behauptung des Satzes ist bewiesen. •

6.3 Qualitative Eigenschaften des Inversen Problems

In diesem Abschnitt wird die partielle Differenzierbarkeit von M nach ∂G bewiesen. Dazu wird auf das Ergebnis in Satz 5.8 zurückgegriffen.

Satz 6.3: Es sei $u_\infty \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$, $\partial G \subset \mathbf{R}^2$ mit $(\partial G, u_\infty) \in D(M)$. Weiter seien $\rho > 0$ und $\Gamma \subset \tilde{\Gamma}$ so gewählt, daß $G_i \subset K_\rho \subset \tilde{\Gamma}$ gilt. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß für alle $k \in \mathbf{N}$ die Abbildung

$$\left\{ t \in C_0^2(K_\rho, \mathbf{R}^2) \mid \|t\|_{C^2(\overline{K}_\rho)} < \varepsilon \right\} \ni t \rightarrow M_\Gamma((I+t)(\partial G), u_\infty) \in C^k(\Gamma)$$

differenzierbar ist. Die Ableitung in $t = 0$ in Richtung $h \in C_0^2(K_\rho, \mathbf{R}^2)$ ist

$$\left. \frac{\partial M_\Gamma}{\partial t} \right|_{t=0} (h) = u'|_\Gamma.$$

Dabei ist u' die Lösung des äußeren Oseen-Randwertproblems

$$\begin{aligned} \partial_1 u' + \nabla p' &= \mu \Delta u' \text{ in } G \\ \operatorname{div}(u') &= 0 \text{ in } G \\ u'|_{\partial G} &= -(h \cdot n) \frac{\partial u}{\partial n} \\ u'(\infty) &= 0 \end{aligned} \tag{DiffOseen}$$

mit u der Lösung des äußeren Oseen-Randwertproblems (**DirOseen**) mit Rand ∂G .

Beweis: Mit den Bezeichnungen aus Kapitel 5 "Differenzierbarkeit nach dem Gebietsrand" und der dort vorliegenden geometrischen Situation ist

$$M_\Gamma((I+t)(\partial G), u_\infty) = \left\{ U_{\partial K_\rho} \left[\left(U_{\partial K_\rho} \Big|_{\partial K_\rho} \right)^{-1} R_{0, \partial K_\rho} \tilde{u}_t \right] \right\} \Big|_\Gamma \in C^k(\Gamma), k \in \mathbf{N}. \tag{6.1}$$

Dabei ist $U_{\partial K_\rho}$ das modifizierte Einfachschichtpotential aus Satz 4.13. Da es nach Satz 5.8 ein $\varepsilon > 0$ gibt, so daß

$$\left\{ t \in C_0^2(K_\rho, \mathbf{R}^2) \mid \|t\|_{C^2(\overline{K_\rho})} < \varepsilon \right\} \ni t \rightarrow \tilde{u}_t \in H^1(G_\rho)$$

differenzierbar ist, folgt aus (6.1) sowie der Linearität und der Stetigkeit des Einfachschichtpotentials aus Satz 4.8 die Differenzierbarkeit von M nach t .

Nach Satz 5.8 ist $\left. \frac{\partial \tilde{u}_t}{\partial t} \right|_{t=0}(\mathbf{h}) = \mathbf{u}' + \mathbf{h} \cdot \nabla \mathbf{u}$. Mit $\mathbf{h}(x) = 0$ für $|x| = \rho$ und der eindeutigen Lösbarkeit des äußeren Oseen-Randwertproblems aus Satz 3.9 erhält man

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial M_\Gamma}{\partial t} \right|_{t=0}(\mathbf{h}) &= U_{\partial K_\rho} \left[\left(U_{\partial K_\rho} \Big|_{\partial K_\rho} \right)^{-1} \mathbf{R}_{0, \partial K_\rho} \left. \frac{\partial \tilde{u}_t}{\partial t} \right|_{t=0}(\mathbf{h}) \right] \Big|_\Gamma \\ &= U_{\partial K_\rho} \left[\left(U_{\partial K_\rho} \Big|_{\partial K_\rho} \right)^{-1} \mathbf{R}_{0, \partial K_\rho} \mathbf{u}' \right] \Big|_\Gamma \\ &= \mathbf{u}' \Big|_\Gamma \end{aligned}$$

•

Satz 6.4: Es gelten die Voraussetzungen von Satz 6.3. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß der Operator

$$\left\{ t \in C_0^2(K_\rho, \mathbf{R}^2) \mid \|t\|_{C^2(\overline{K_\rho})} < \varepsilon \right\} \ni t \rightarrow M_\Gamma((I+t)(\partial G), u_\infty) \in L^2(\Gamma)$$

vollstetig ist. Der Operator M heißt vollstetig, wenn er stetig ist und wenn es für jede beschränkte Folge $(t_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset U$ eine in $L^2(\Gamma)$ konvergente Teilfolge von $M_\Gamma((I+t_n)(\partial D), u_\infty)$ gibt.

Beweis: Nach Satz 6.3 gibt es ein $\varepsilon_0 > 0$, so daß die Abbildung

$$\left\{ t \in C_0^2(K_\rho, \mathbf{R}^2) \mid \|t\|_{C^2(\overline{K_\rho})} < \varepsilon_0 \right\} \ni t \rightarrow M_\Gamma((I+t)(\partial G), u_\infty) \in C^1(\Gamma)$$

nach t differenzierbar ist. Insbesondere ist sie stetig in $t = 0$. Daher gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit

$$\|M_\Gamma((I+t)(\partial G), u_\infty) - M_\Gamma(\partial G, u_\infty)\|_{C^1(\Gamma)} < 1$$

für alle $t \in C_0^2(K_\rho, \mathbf{R}^2)$ mit $\|t\|_{C^2(\overline{K}_\rho)} < \varepsilon$.

Also ist

$$\|M_\Gamma((I+t)(\partial G), u_\infty)\|_{C^1(\Gamma)} < 1 + \|M_\Gamma(\partial G, u_\infty)\|_{C^1(\Gamma)}$$

für alle $t \in C_0^2(K_\rho, \mathbf{R}^2)$ mit $\|t\|_{C^2(\overline{K}_\rho)} < \varepsilon$. Der Satz von Arzelà-Ascoli zeigt, daß aus

jeder Folge $(t_n)_{n \in \mathbf{N}} \subset \left\{ t \in C_0^2(K_\rho, \mathbf{R}^2) \mid \|t\|_{C^2(\overline{K}_\rho)} < \varepsilon \right\}$ eine Teilfolge ausgewählt

werden kann, so daß $(M_\Gamma((I+t_n)(\partial G), u_\infty))_{n \in \mathbf{N}} \subset C^0(\Gamma) \subset L^2(\Gamma)$ konvergent ist.

Dies zeigt die Behauptung. •

Bemerkung: Nach Satz 6.4 und Satz 4.2 in [4] ist das inverse Problem $\partial G = M_\Gamma(\cdot, u_\infty)^{-1}(f)$ für festes Γ und $u_\infty \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ lokal in $t = 0$ im Sinn von Hadamard schlecht gestellt.

Als nächstes soll untersucht werden, unter welchen Voraussetzungen die Ableitung injektiv ist. Dabei ist folgendes Lemma hilfreich, um die Injektivität der Ableitung zu studieren.

Lemma 6.5: Es sei $u_\infty \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ und (u, p) die Lösung von **(DirOseen)**. Dann gibt es keine offene Menge $d \subset \partial G \in C^\infty$, $d \neq \emptyset$, mit $pn - \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_d = 0$.

Beweis: Es sei $u_\infty \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ und (u, p) die Lösung von **(DirOseen)**. Es wird **angenommen**, daß es eine nichtleere offene Menge $d \subset \partial G \in C^\infty$ gibt mit

$$pn - \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_d = 0. \quad (6.2)$$

Für alle $\rho > \text{diam}(G_1)$ ist $(u, p) \in C^\infty(\overline{G}_\rho)$. Unter Berücksichtigung von $\text{div}(u) = 0$ und $u|_{\partial G} = 0$ erhält man mit $\omega = \partial_2 u_1 - \partial_1 u_2$ die Identitäten

$$\Delta u = \nabla^\perp \omega \quad (6.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = \begin{bmatrix} -\nabla_\tau u_2 \cdot \tau \\ \nabla_\tau u_1 \cdot \tau \end{bmatrix} - \omega \tau = -\omega \tau. \quad (6.4)$$

Dabei ist τ der Tangentialvektor an ∂G .

Aus der Annahme **(6.2)** folgt daher

$$pn + \omega \tau \Big|_d = 0.$$

Dies zeigt

$$p|_d = \omega|_d = 0. \quad (6.5)$$

Wegen $(u, p) \in C^\infty(\overline{G}_\rho)$ folgt aus (6.3) und der Gültigkeit der Oseen-Gleichung

$$u_\infty \cdot \nabla u + \nabla p(x) = \mu \Delta u(x) = \mu \nabla^\perp \omega(x), \quad x \in \overline{G}_\rho, \quad (6.6)$$

für $x \in d$ die Identität

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}}(x) &= (u_\infty \cdot \nabla u) \cdot \mathbf{n}(x) + \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}}(x) \\ &= \mu \Delta u(x) \cdot \mathbf{n}(x) \\ &= \mu \nabla^\perp \omega(x) \cdot \mathbf{n}(x) \\ &= -\mu \nabla_\tau \omega(x) \cdot \boldsymbol{\tau}(x) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (6.7)$$

Es sei $x_0 \in d$ und $\varepsilon > 0$ mit $K(x_0, \varepsilon) \cap d \subset d$. Dann wird die Funktion

$$\bar{p}(x) := \begin{cases} p(x), & x \in K(x_0, \varepsilon) \cap \overline{G} \\ 0, & x \in K(x_0, \varepsilon) \cap G_i \end{cases}$$

definiert (G_i ist das Innengebiet von ∂G). Nach (6.5) ist $\bar{p} \in H^1(K(x_0, \varepsilon))$. Aus (6.7) folgt, daß \bar{p} eine schwache Lösung der Gleichung $\Delta \bar{p} = 0$ ist. Nach der elliptischen Regularitätstheorie ist $\bar{p} \in C^\infty(K(x_0, \varepsilon))$. Damit kann wegen (6.5) und (6.7) der Satz von Holmgren für elliptische Differentialoperatoren (Satz 1.8.2 in [22]) angewendet werden. Er liefert $\bar{p} \equiv 0$ und damit $p(x) = 0$ für alle $x \in K(x_0, \varepsilon) \cap \overline{G}$. Da p in G analytisch ist, ist $p(x) = 0$ für alle $x \in G$.

Da (u, p) Lösung von (**DirOseen**) und $p \equiv 0$ ist, ist u Lösung des Problems

$$\begin{aligned} u_\infty \cdot \nabla u &= \mu \Delta u \text{ in } G \\ u|_{\partial G} &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 \\ u(\infty) &= u_\infty \end{aligned}$$

Analog wie oben für die Laplacegleichung vorgeführt, liefert der Satz von Holmgren für elliptische Operatoren $u(x) = 0$ für alle $x \in G$. Hieraus folgt $u_\infty = 0$. Dies ist ein Widerspruch, da $u_\infty \neq 0$ vorausgesetzt wurde. •

Bemerkung: Lemma 6.5 kann physikalisch so verstanden werden, daß es keine offene Menge d auf dem Gebietsrand ∂G gibt, so daß auf d keine Kräfte wirken. Es gibt also höchstens isolierte Punkte auf ∂G , die kräftefrei sind. Gleichung (6.4) kann auch physikalisch interpretiert werden. Sie gibt in jedem Randpunkt die dort auf den Körper wirkende Widerstandskraft an. Sie entsteht dadurch, daß neben dem Druck durch die Haftbedingung $u|_{\partial G} = 0$ Wirbeligkeit ω in der Strömung erzeugt wird. Das folgende Korollar zeigt, daß die Wirbeligkeit nicht überall gleich Null sein kann. Dies hat zur Konsequenz, daß Widerstandskräfte auf den Körper in dem hier betrachteten Strömungsmodell einwirken.

Korollar 6.6: Es sei $u_\infty \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ und (u, p) die Lösung von (DirOseen) mit $\partial G \in C^\infty$. Dann gibt es ein $x_0 \in \partial G$ mit $\frac{\partial u}{\partial n}(x_0) \neq 0$.

Beweis: Es wird $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial G} = 0$ **angenommen**. Dann folgt aus Gleichung (6.4), daß

$\omega = \partial_2 u_1 - \partial_1 u_2$ eine klassische Lösung des Randwertproblems

$$\partial_1 \omega - \mu \Delta \omega = 0 \text{ in } G$$

$$\omega|_{\partial G} = 0$$

(WirbelOseen)

$$\omega(x) = o(1) \text{ gleichmäßig in alle Richtungen}$$

ist. Mit den Methoden, die zum Beweis der eindeutigen Lösbarkeit des äußeren Oseen-Randwertproblems benutzt werden, kann $\omega(x) = 0$ für alle $x \in G$ bewiesen werden.

Aus Gleichung (6.6) folgt für alle $x \in \partial G$

$$\begin{aligned} \nabla_\tau p(x) &= (u_\infty \cdot \nabla u) \cdot \tau(x) + \frac{\partial p}{\partial \tau}(x) \\ &= \mu \Delta u(x) \cdot \tau(x) \\ &= \mu \nabla^\perp \omega(x) \cdot \tau(x) \\ &= \mu \frac{\partial \omega}{\partial n}(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Also ist der Druck p entlang des Randes ∂G konstant. Da nach Gleichung (6.7)

$\frac{\partial p}{\partial n} = 0$ gilt, folgt aus dem Satz von Holmgren für skalare elliptische Differentialope-

ratoren, daß p in einer Umgebung des Randes konstant sein muß. Da p analytisch in \bar{G} ist und $p(x) \rightarrow 0$ für $|x| \rightarrow \infty$ gilt, muß $p(x) = 0$ für alle $x \in \bar{G}$ sein. Also gilt

$$\left(pn - \frac{\partial u}{\partial n} \right) \Big|_{\partial G} = 0.$$

Dies ist ein **Widerspruch** zur Aussage von Lemma 6.5. Die Annahme muß daher verworfen werden und das Korollar ist bewiesen. •

Lemma 6.5 zeigt, daß es ohne zusätzlichen Voraussetzungen an u nicht möglich ist, die Implikation: $u|_{\partial G} = 0$ und $\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_d = 0$, $\emptyset \neq d \subset \partial G$ offen, impliziert $u = 0$, zu beweisen. Dies hängt damit zusammen, daß die Cauchydaten der Oseengleichung nicht durch u und $\frac{\partial u}{\partial n}$, sondern durch u und $pn - \frac{\partial u}{\partial n}$ gegeben sind. Dies hat zur Konsequenz, daß der Beweis der Injektivität der Randableitung, wie er z.B. für die skalare Helmholtzgleichung bekannt ist, nicht ohne zusätzliche Voraussetzungen auf das vektorwertige Oseen-Problem übertragen werden kann. Für analytische Ränder gilt

Satz 6.7: Es sei $\partial G \in C^\omega$. Dann ist

$$\text{Kern} \left(\frac{\partial M_\Gamma}{\partial t} \Big|_{t=0} \right) = \{ h \in C_0^2(K_\rho, \mathbf{R}^2) \mid h \cdot n = 0 \}.$$

Beweis: Es sei $h \in \text{Kern} \left(\frac{\partial M_\Gamma}{\partial t} \Big|_{t=0} \right)$. Dann gilt

$$\frac{\partial M_\Gamma}{\partial t} \Big|_{t=0} (h) = u' \text{ und } u'|_\Gamma = 0. \quad (6.8)$$

Nach Satz 3.8 ist das Paar (u, p) in \bar{G} analytisch. Also ist insbesondere

$$\frac{\partial u}{\partial n} \in C^\omega(\partial G, \mathbf{R}^2) \text{ d.h. analytisch auf } \partial G. \quad (6.9)$$

Da die Lösung von (**DiffOseen**) mit analytischen Randdaten analytisch ist, ist nach Satz 3.8 u' in \bar{G} analytisch. Aus (6.8) und dem Identitätssatz für analytische Funktio-

nen folgt $u'|_{\Gamma} = 0$. Nach Satz 3.9 (Eindeutigkeit des äußeren Oseen-Randwertproblems) muß $u' = 0$ gelten. Also ist

$$0 = u'|_{\partial G} = -(h \cdot n) \frac{\partial u}{\partial n}.$$

Ist die offene Menge $N := \{x \in \partial G | (h \cdot n) \neq 0\}$ nicht die leere Menge, dann ist

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x) = 0 \text{ alle } x \in N.$$

Mit (6.9) folgt aus dem Identitätssatz für analytische Funktionen $\frac{\partial u}{\partial n}(x) = 0$ für alle $x \in \partial G$. Dies kann aber nach Korollar 6.6 nicht sein. Also ist die Menge N die leere Menge. Hieraus folgt $h(x) \cdot n(x) = 0$ für alle $x \in \partial G$.

Ist umgekehrt $h(x) \cdot n(x) = 0$ für alle $x \in \partial G$, dann folgt aus Satz 3.9 $u' = 0$ und damit h in dem Nullraum der Ableitung in $t = 0$. •

Bemerkung: Die Aussage von Satz 6.7 kann anschaulich so verstanden werden, daß sich die Meßdaten nicht ändern, wenn der Rand des Gebiets sich nicht ändert. Gilt also $(I + t)(\partial G) = \partial G$, dann sind die beiden Meßdaten nicht voneinander zu unterscheiden. Dies spiegelt sich in der Linearisierung durch einen nicht verschwindenden Kern der Ableitung wieder. Zur numerischen Lösung des inversen Problems sollte dieses Phänomen mit beachtet werden.

Um dieses Phänomen der Nicht-Injektivität der Ableitung auszuschließen, betrachte ich nur noch, Kreß [4] oder [14] folgend, sternförmige Gebiete.

Definition 6.8: Es sei

$$e_r(\varphi) := \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{bmatrix}.$$

Eine offene Menge G_i heißt **sternförmig** vom Typ C^k , $k \in \mathbf{N} \cup \{\omega\}$, wenn es eine Abbildung $r \in C_{\text{per}}^k[0, 2\pi]$ mit folgenden Eigenschaften gibt:

1. $\exists r_0 > 0$ mit $r(\varphi) \geq r_0$ für alle $\varphi \in [0, 2\pi]$.

$$2. G_i = \left\{ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^2 \mid |x| < r(\varphi), \varphi := \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \right\}.$$

3. $G := \mathbf{R}^2 \setminus \overline{G_i}$.

Der Rand ∂G ist durch

$$\partial G = \{r(\varphi)e_r(\varphi) \mid \varphi \in [0, 2\pi]\}$$

gegeben.

Behauptung 6.9: Es sei $r \in C_{\text{per}}^\omega[0, 2\pi]$. Betrachtet man eine sternförmige Störung

$$\partial G_h = \{(r(\varphi) + h(\varphi))e_r(\varphi) \mid \varphi \in [0, 2\pi]\}$$

des Randes ∂G mit einer Funktion $h \in C_{\text{per}}^\omega[0, 2\pi]$. Dann gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß $\partial G_h \in D(M)$ für alle $\|h\|_\infty < \varepsilon$ gilt. Zusätzlich ist die Abbildung $h \rightarrow M(\partial G_h, u_\infty)$ in dieser Nullumgebung für alle $u_\infty \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ nach h differenzierbar.

Beweis: Die Bezeichnungen seien wie in Satz 6.3. Ohne Einschränkung kann durch Reskalierung $K_1 \subset G_i$ angenommen werden. Es gibt eine Abbildung $\psi \in C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$ mit

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| \geq \rho - \delta \end{cases}$$

Dabei ist $\delta > 0$ mit $\rho - \delta > \text{diam}(G_i)$ gewählt. Mit

$$\hat{x} := \frac{x}{|x|} = e_r(\varphi), \quad \varphi := \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \text{ für } x \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$$

wird die Abbildung

$$t(h)(x) := \psi(|x|)h(\hat{x})\hat{x}$$

definiert. Für sie gilt $t(h) \in C_0^\infty(K_\rho)$. Offensichtlich ist $t: C_{\text{per}}^\omega[0, 2\pi] \rightarrow C_0^2(K_\rho)$ stetig und nach h differenzierbar. Die Behauptung folgt nun aus Satz 6.3. •

Die Ableitung nach h in $h = 0$ in Richtung $q \in C_{\text{per}}^\omega[0, 2\pi]$ kann wie in Satz 6.3 charakterisiert werden durch das Paar (u', p') , welches die Lösung von **(DiffOseen)** mit $h = t(q)$ ist. Mit

$$n(x) \cdot h(x) = n(x) \cdot t(q)(x) = \frac{r(\hat{x})q(\hat{x})}{\sqrt{r(\hat{x})^2 + r'(\hat{x})^2}}, \quad x \in \partial G, \quad (6.10)$$

folgt aus Satz 6.4 die Injektivität der Ableitung von $M_\Gamma((I + t(h))(\partial G), u_\infty)$ in $h = 0$.

6.4 Newton-Verfahren

Für $\alpha \in \mathbf{R}$ wird die Drehmatrix

$$\Sigma(\alpha) := \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}$$

definiert.

Vorgegeben seien die Meßkurve Γ , ein $u_\infty \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$, ein $p \in \mathbf{N}^*$, Anströmwinkel $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ und exakte Meßwerte $u_1^{\text{meß}}, \dots, u_p^{\text{meß}}$ der Geschwindigkeitsfelder u_1, \dots, u_p auf $\Sigma(\alpha_1)\Gamma, \dots, \Sigma(\alpha_p)\Gamma$. Die Exaktheit der Meßwerte bezieht sich darauf, daß ein angenommenes Meßgerät auf $\Sigma(\alpha_i)\Gamma$ das Strömungsfeld mißt, das mathematisch durch die Lösung (u^i, p^i) des äußeren Oseen-Randwertproblems (**DirOseen**) mit Rand ∂G und Anströmrichtung $\Sigma(\alpha_i)u_\infty$ beschrieben wird. Das zu lösende inverse Problem ist in Operatorschreibweise äquivalent zur Invertierung der Gleichung

$$M(\partial G) = u^{\text{meß}} \quad (6.11)$$

mit

$$M(\partial G) := \begin{bmatrix} M_{\Sigma(\alpha_1)\Gamma}(\partial G, \Sigma(\alpha_1)u_\infty) \\ \dots \\ M_{\Sigma(\alpha_p)\Gamma}(\partial G, \Sigma(\alpha_p)u_\infty) \end{bmatrix}, \quad u^{\text{meß}} := \begin{bmatrix} u_1^{\text{meß}} \\ \dots \\ u_p^{\text{meß}} \end{bmatrix}.$$

Für den Rest dieses Kapitels wird **a-priori** angenommen, daß $\partial G \in C^\omega$ der Rand eines sternförmigen Gebiets ist. Es gibt also eine Darstellung

$$\partial G = \{r(\varphi)e_r(\varphi) \mid \varphi \in [0, 2\pi]\}, \quad r \in C_{\text{per}}^\omega[0, 2\pi]$$

Diese Annahme ermöglicht es, alle bisher bewiesenen Resultate über das direkte sowie das inverse Randwertproblem anzuwenden.

Die Analytizität von r hat weiter den Vorteil, daß sich die Radiusfunktion r in der Supremumsnorm durch trigonometrische Polynome von kleinem Grad gut approximieren läßt (Satz 11.5 in [12]). Zur Approximation von r wird für $N \in \mathbf{N}^*$ der Raum T_N der trigonometrischen Polynome höchstens N . Grades verwendet. Er ist mit der Lagrangebasis

$$L(t) := \frac{1}{2N} \sin(Nt) \cot\left(\frac{t}{2}\right), \quad L_i(t) := L\left(t - i\frac{\pi}{N}\right), \quad i = 0, \dots, 2N-1,$$

durch

$$T_N = \left\{ \sum_{i=0}^{2N-1} r_i L_i(\cdot) \mid r_1, \dots, r_{2N-1} \in \mathbf{R} \right\}$$

gegeben (s. auch Abschnitt 4.4 "Quadraturmethode" zur Definition des Raums T_N). Die Wahl der Lagrangebasis hat nach [14] numerische Vorteile gegenüber der Basis von T_N , die durch Linearkombination von Sinus und Cosinus gebildet wird. Daher wird diese für die folgenden numerischen Simulationen verwendet.

Weiter wird angenommen, daß nur $x_1, \dots, x_n \in \Gamma$, $n \in \mathbf{N}^*$, Meßpunkte auf Γ zur Verfügung stehen. D.h. statt $u_s^{\text{meß}}$, $s = 1, \dots, p$, sind nur die Meßwerte $u_s^{\text{meß}}(x_i)$, $i = 1, \dots, n$ und $s = 1, \dots, p$ bekannt, um ∂G zu rekonstruieren.

Zur Abkürzung wird für $z \in T_N$

$$\partial D_z := \{z(\varphi) e_r(\varphi) \mid \varphi \in [0, 2\pi]\},$$

$$M_{s,i}(z) := M_{\Sigma(\alpha_s)\Gamma}(\partial D_z, \Sigma(\alpha_s) u_\infty)(\Sigma(\alpha_s) x_i), \quad i = 1, \dots, n, \quad s = 1, \dots, p,$$

$$M(z) := [M_{1,1}(z), \dots, M_{1,n}(z), \dots, M_{p,1}(z), \dots, M_{p,n}(z)]^*$$

definiert. Die Abbildung M ist eine Abbildung $M: \mathbf{R}^{2N} \rightarrow \mathbf{R}^{pn}$ mit $pn > 2N$, wenn nur genügend Anströmwinkel und Meßpunkte verwendet werden. In den von mir durchgeführten Simulationen wurden typischerweise $N \leq 7$, $n = 65$, $p = 3, 5, 7$ verwendet.

Es werden die Fehlerfunktionale

$$\text{Res}(z) := \frac{1}{2} \sum_{s=1}^p \sum_{i=1}^n |M_{s,i}(z) - u_s^{\text{meß}}(x_i)|^2,$$

$$\text{Res}(z, p)' := \sum_{s=1}^p \sum_{i=1}^n \left| M_{s,i}(z) + \frac{\partial M_{s,i}}{\partial z}(z) p - u_s^{\text{meß}}(x_i) \right|^2$$

definiert. Eine Approximation $r_N \in T_N$ von r ist ein $r_N \in T_N$ mit

$$\text{Res}(r_N) = \inf\{\text{Res}(z) \mid z \in T_N\}.$$

Zur numerischen Rekonstruktion des Gebietsrandes ∂G ist dieses r_N numerisch zu berechnen. Dazu wird der Levenberg-Marquardt-Algorithmus verwendet.

Nach der Arbeit von Moré [18] kann der Levenberg-Marquardt-Algorithmus folgendermaßen hergeleitet werden: Statt $\text{Res}(z)$ über $z \in T_N$ zu minimieren, wird für festes $z \in T_N$ die Funktion $\text{Res}(z+p)$ über $p \in T_N$ minimiert werden. Nach Taylorentwicklung von M gilt

$$\text{Res}(z+p) \approx \frac{1}{2} \sum_{s=1}^p \sum_{i=1}^n \left| M_{s,i}(z) + \frac{\partial M_{s,i}}{\partial z}(z)p - u_s^{\text{meß}}(x_i) \right|^2, \|Dp\| \leq \Delta.$$

Dabei ist D eine invertierbare Diagonalmatrix, $\|\cdot\|$ die euklidische Norm auf \mathbf{R}^{2N} und $\Delta > 0$ genügend klein. Um das Residuum zu verkleinern, scheint es sinnvoll, ausgehend von dem festen $z \in T_N$ ein $p \in \mathbf{R}^{2N}$ so zu bestimmen, daß $\|Dp\| \leq \Delta$ und

$$\text{Res}(z, p)' = \inf \{ \text{Res}(z, q)' \mid \|Dq\| \leq \Delta \} \quad (6.12)$$

gilt. (6.12) kann in die Sprache der Quasilösungen aus Kreß [12], Kapitel 16.3, übersetzt werden. Unter den Voraussetzungen des dortigen Satzes 16.6 gibt es ein $\lambda = \lambda(\Delta) \geq 0$ und ein $p \in T_N$ mit

$$\lambda D^* D p + \left(\frac{\partial M}{\partial z}(z) \right)^* \frac{\partial M}{\partial z}(z) p = \left(\frac{\partial M}{\partial z}(z) \right)^* (u^{\text{meß}} - M(z)), \|Dp\| \leq \Delta. \quad (6.13)$$

Dabei ist $\left(\frac{\partial M}{\partial z}(z) \right)^*$ die adjungierte Matrix von $\frac{\partial M}{\partial z}(z)$.

Gleichung (6.13) kann auch als eine a-posteriori Tikhonov-Regularisierung der Gleichung für die Newtonrichtung p

$$\frac{\partial M}{\partial z}(z) p = u^{\text{meß}} - M(z) \quad (6.14)$$

verstanden werden.

Der Levenberg-Marquardt-Algorithmus ist nach Moré [18] schematisch durch folgende Schritte gegeben:

1. Wähle $z_0 \in T_N$, $\Delta_0 > 0$ und ein $\lambda_{\max} > 0$;

2. Setze

$$D_0 := \text{diag}(d_0^0, \dots, d_0^{2N-1}), \quad d_0^i := \left\| \frac{\partial}{\partial z_i} M(z_0) \right\|$$

3. Finde $\lambda_k \geq 0$, $p_k \in T_N$, $k \in \mathbf{N}$, mit

$$\lambda_k D_k^* D_k p + \left(\frac{\partial M}{\partial z}(z_k) \right)^* \frac{\partial M}{\partial z}(z_k) p_k = \left(\frac{\partial M}{\partial z}(z_k) \right)^* (u^{\text{meß}} - M(z_k)), \quad \|D_k p_k\| \leq \Delta_k$$

4. Falls $\text{Res}(z_k + p_k) < \text{Res}(z_k)$ ist, **setze** $z_{k+1} := z_k + p_k$.

Falls $\text{Res}(z_k + p_k) \geq \text{Res}(z_k)$ ist, **setze** $z_{k+1} := z_k$

5. Abbruchkriterium: $\lambda_k > \lambda_{\max} \Rightarrow$ **STOP**

6. Wähle ein neues $\Delta_{k+1} > 0$ (siehe Abschnitt 7 in Moré [18])

7. Setze

$$D_{k+1} := \text{diag}(d_{k+1}^0, \dots, d_{k+1}^{2N-1})$$

$$d_{k+1}^i := \max\left(d_k^i, \left\| \frac{\partial}{\partial z_i} M(z_{k+1}) \right\|\right), \quad i = 0, \dots, 2N-1$$

8. Gehe zu Schritt 3.

Zur konkreten numerischen Realisierung siehe [18]. Dort wird ein Satz angegeben, unter welchen Umständen der Levenberg-Marquardt-Algorithmus konvergiert.

Statt dem Abbruchkriterium $\lambda_k > \lambda_{\max}$ könnte auch das von Kreß in [14] vorgeschlagene Diskrepanzprinzip: stoppe die Iteration, wenn für ein geeignet a-priori gewähltes $\delta > 0$ das Residuum $\text{Res}(z_k) - \text{Res}(z_{k+1}) < \delta$ erfüllt, verwendet werden. Meine numerischen Experimente haben gezeigt, daß λ_k ab einem bestimmten $k \geq k_0$ nahezu exponentiell wächst und das Residuum durch den oben beschriebenen Levenberg-Marquardt-Algorithmus bei jedem neuen Schritt nahezu konstant bleibt. Typischerweise findet das exponentielle Wachsen in k von λ_k dann statt, wenn λ_k beispielsweise den Wert 4 überschritten hat. Ich stoppe meine Iteration mit der a-posteriori Kenntnis von $\lambda_k > \lambda_{\max} = 4$. Interpretiert man λ_k als Regularisierungsparameter der Tikhonov-Regularisierung von (6.14), dann wird die Iteration gestoppt, wenn das lineare Problem (6.14) zu schlecht gestellt ist. Im nachhinein könnte δ bestimmt werden, so daß das von Kreß vorgeschlagene Diskrepanzprinzip erfüllt wird und so die Iteration des schlecht gestellten inversen Problems regularisiert wird.

Der Operator $M_{\Sigma(\alpha)\Gamma}(\partial G, \Sigma(\alpha)u_\infty)$ kann auf dem Computer dadurch realisiert werden, daß nicht die Anströmungsrichtung u_∞ und die Meßkurve Γ gedreht werden, sondern der Rand in Richtung $-\alpha$ gedreht wird. Dann wird zu $\Sigma(-\alpha)\partial G$ und u_∞ das so entstehende Strömungsfeld u berechnet und auf Γ gemessen.

Im Levenberg-Marquardt-Verfahren ist der Operator $M(z_k)$ auszuwerten, d.h. es ist (**DirOseen**) mit ∂D_{z_k} zu lösen. Dies geschieht numerisch. Es sei $N_d = 2^{N_d^{\log}}$, $N_d^{\log} \in \mathbb{N}$. Dann wird mit Hilfe des in Abschnitt 4.4 "Quadraturmethode" vorgestellten Quadraturverfahrens eine Dichte ϕ^{N_d} mit $U^{N_d} \phi^{N_d} = -u_\infty$ (siehe Satz 4.13 zur Definition von U und (4.64) zur Definition von U^{N_d}) berechnet. Danach wird

$$M_\Gamma(\Sigma(-\alpha)\partial G_{z_k}, u_\infty)(x_i) = u_\infty + (U^{N_d} \phi^{N_d})(x_i)$$

berechnet. Dabei ist das Einfachschichtpotential in dieser Gleichung nicht die Diskretisierung des Randeinfachschichtpotentials, sondern die Diskretisierung des modifizierten Einfachschichtpotentials U mit Hilfe der Trapezregel. Sie entsteht dadurch, daß in der parametrisierten Fassung des modifizierten Einfachschichtpotentials die Punkte $t_i = i(\pi/N_d)$, $i = 0, \dots, 2N_d - 1$, in dem Parameterintervall $[0, 2\pi]$ zur numerischen Integration verwendet werden. Dies ist möglich, da von Meßpunkten angenommen wird, daß sie keine Randpunkte sind.

Zur Berechnung der $\frac{\partial}{\partial z_i} M(z_k)$ wird das Problem (**DiffOseen**) mit $h = L_i$ gelöst.

Dazu muß $\frac{\partial u}{\partial n}$ berechnet werden, wobei u die Lösung von (**DirOseen**) mit Rand ∂G_{z_k} ist. Nach der Theorie von Kapitel 4 "Einfachschichtpotential" kann u dargestellt werden durch $u = U\phi + u_\infty$. Da $u_\infty \in H_0^{1/2}(\partial G_{z_k})$ ist, gilt sogar $u = S\phi + u_\infty$. Im Innengebiet ist die Lösung des Oseen-Randwertproblems wegen der Dirichletdaten $u|_{\partial G_{z_k}} = 0$ durch $u = 0$ gegeben. Da $u = S\phi + u_\infty$ eine Lösung dieses Oseen-Randwertproblems ist, gilt $0 = u(x) = S\phi(x) + u_\infty$ für alle x im Inneren von ∂G_{z_k} . Aus der Sprungbeziehung des Einfachschichtpotentials in Satz 4.2 Gleichung (4.16) folgt für $x \in \partial G_{z_k}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} u(x) &= \frac{\partial}{\partial n} (S\phi)^a(x) - \frac{\partial}{\partial n} (S\phi)^i(x) \\ &= -\frac{1}{\mu} (\phi(x) \cdot \tau(x)) \tau(x) \end{aligned}$$

Als Approximation der Normalenableitung wird der Ausdruck

$$-\frac{1}{\mu}(\phi^{N_d}(x) \cdot \tau(x))\tau(x) \text{ mit } U^{N_d}\phi^{N_d} = -u_\infty$$

verwendet. Dies ist sinnvoll, da $\phi^{N_d} \rightarrow \phi$ für $N_d \rightarrow \infty$ konvergiert (s. Satz 4.15).

Um die Leistungsfähigkeit des inversen Lösungsverfahrens zu testen, sollte zur Generierung der synthetischen Meßwerte $u^{\text{meß}}$ ein vom oben beschriebenen inversen Lösungsverfahren unabhängiges Verfahren zur Berechnung von $u^{\text{meß}}$ benutzt werden. Dies dient dazu, um eine etwaige triviale Invertierung des voll diskretisierten endlich-dimensionalen Operators M auszuschließen. Denn a-priori ist nicht bekannt, ob sich M überhaupt invertieren läßt. Werden die synthetischen Daten $u^{\text{meß}}$ mit dem gleichen direkten numerischen Verfahren erzeugt, wie es für das Lösen des inversen Problems verwendet wird, so ist der diskrete Operator trivial invertierbar. Dies gilt es für ein seriöses Testen des inversen Lösungsverfahrens auszuschließen. Zum Erstellen der synthetischen Meßdaten wird daher eine Kollokationsmethode zum Lösen der Randintegralgleichung (4.57) verwendet. Diese ist unabhängig von der im inversen Lösungsverfahren verwendeten Quadraturmethode.

Für das Kollokationsverfahren zum Lösen von (4.57) werden als Ansatzfunktionen trigonometrische Polynome K_d . Grades verwendet. Als Kollokationspunkte werden die Punkte $t_i = i(\pi/K_d)$, $i = 0, \dots, 2N_d - 1$, benutzt. Auf eine genaue Darstellung des Kollokationsverfahrens sowie eine Analyse seiner Konvergenz soll an dieser Stelle verzichtet werden. Es ist aber prinzipiell möglich, dieses Verfahren mit den Methoden aus Kreß [14] zu analysieren.

Zum Erstellen der synthetischen Daten wurde (4.57) mit $K_d = 2N_d$ mit Hilfe des oben skizzierten Kollokationsverfahren berechnet.

Die in der Arbeit verwendeten Anströmwinkel zur Rekonstruktion von ∂G sind für ein $p \in \mathbf{N}$ definiert durch

$$-\alpha_i(p) := \frac{2\pi}{p}i, \quad i = 0, \dots, (p-1).$$

Der Operator $M_{N,p}$ bezeichne den Operator M , der auf den trigonometrischen Polynomen vom Grad höchstens N definiert ist und die Anströmwinkel $\alpha_0(p), \dots, \alpha_{p-1}(p)$ verwendet. Entsprechend sei der Meßvektor $u_p^{\text{meß}}$ definiert. Für festes p entsteht eine Hierrarchie von Meßoperatoren $M_{N,p}$ in \mathbf{N} , die zur Rekonstruktion des Gebietsrandes ∂G ausgenutzt werden kann.

Es wird folgendes Rekonstruktionsverfahren verwendet:

1. Wähle eine Meßkurve Γ und Meßpunkte $x_1, \dots, x_n \in \Gamma$.
2. Wähle $N_d = 32$ - der Diskretisierungsparameter für das Quadraturverfahren zum Lösen der Randintegralgleichungen.
3. Wähle eine Anzahl von Anströmwinden p .
4. Wähle einen Grad N der die Radiusfunktion r approximierenden trigonometrischen Polynome: $N = 4$.
5. Wähle N_{\max} , den Maximalgrad der die Radiusfunktionen r approximierenden trigonometrischen Polynome.
6. Wähle einen Startwert $r_S \in T_4$, beispielsweise einen Kreis mit geeignetem Radius.
7. Wende das oben beschriebene Levenberg-Marquardt-Verfahren mit $p = 3$ Anströmwinden und dem Startwert r_S an, um eine Näherung $r_N \in T_N$ für die Radiusfunktion zu erhalten.
8. $N < N_{\max}$, setze $r_S = r_N$ und gehe zu 7.
9. $N = N_{\max} \Rightarrow r_{N_{\max}}$ ist die gesuchte Rekonstruktion \Rightarrow **STOP**.

6.5 Numerische Experimente

6.5.1 Rekonstruktionen

In den folgenden numerischen Rekonstruktionen werden folgende Parameter verwendet:

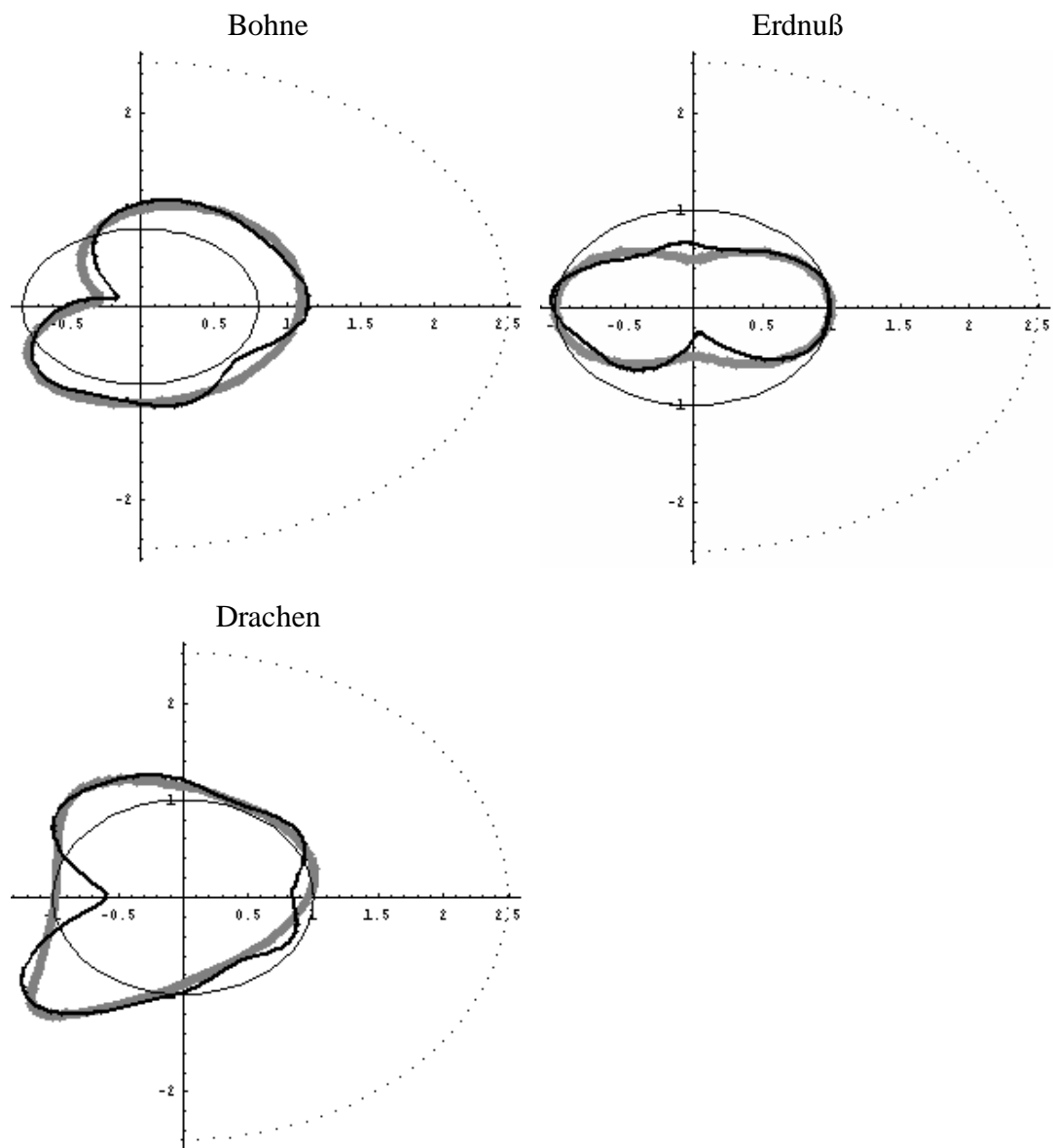
- $\mu = 1/2$ und $u_\infty = [1, 0]$.
- $\Gamma = \{2.5e_r(\varphi) \mid \varphi \in [-\pi/2, \pi/2]\}$, $x_i = 2.5e_r\left(i\frac{\pi}{64}\right)$, $i = -32, -31, \dots, 32$.
- $N_{\text{Start}} = 4$ - ein Kreis mit geeignetem Radius.
- $N_{\max} = 7$.
- $p = 5$.

Es werden die folgenden Gebiete rekonstruiert

1. Bohne: $r(\varphi) := \frac{1 + 0.9 \cos \varphi + 0.1 \sin \varphi}{1 + 0.75 \cos \varphi}$, $\partial D_{\text{Bohne}} := \{r(\varphi)e_r(\varphi) | \varphi \in [0, 2\pi]\}$;
2. Erdnuß: $r(\varphi) := \sqrt{\cos^2 \varphi + 0.25 \sin^2 \varphi}$, $\partial D_{\text{Erdnuß}} := \{r(\varphi)e_r(\varphi) | \varphi \in [0, 2\pi]\}$;
3. Drachen: $\gamma(\varphi) := [\cos \varphi + 0.15 \sin \varphi + 0.35 \cos 2\varphi - 0.35, 1.2 \sin \varphi + 0.15 \cos \varphi]$,
 $\partial D_{\text{Drachen}} := \{\gamma(\varphi) | \varphi \in [0, 2\pi]\}$

Die Meßkurvenpunkte sind gepunktet dargestellt. Die Originalkurve ist hellgrau. Ihre Rekonstruktion wird schwarz dargestellt. Die Startkreis ist ebenfalls eingezeichnet

Abb. 4 Numerische Rekonstruktionen



6.5.2 Quantitative Analyse der Schlechtgestellttheit

Zum Studium der quantitativen Schlechtgestellttheit des inversen Problems wird mit der Meßkurve Γ aus dem vorhergehenden Abschnitt die Kondition der Matrix $\left(\frac{\partial M}{\partial z}(r_N)\right)^* \frac{\partial M}{\partial z}(r_N)$ für $p = 3, 5$ und $N = 4, 5, 6, 7$ berechnet. Dabei ist r_N das trigonometrische Polynom vom N . Grades, das in den Punkten $\varphi_i = i(\pi/N)$, $i = 0, \dots, 2N - 1$, r_{Bohne} , r_{Drachen} , $r_{\text{Erdnuß}}$ interpoliert. Da die obige Matrix symmetrisch ist, ist ihre Kondition durch den Quotienten, der aus dem größten und dem kleinsten Eigenwert gebildet wird, gegeben. Die Eigenwerte sind mit Hilfe des Mathematica-Kommandos „Eigenvalues[.]“ berechnet worden. Das Ergebnis dieser Rechnungen ist in den folgenden Tabellen zusammengefaßt

Tabelle 2: Kondition für $p = 3$

Polynomgrad	Kondition		
	Bohne	Drachen	Erdnuß
N			
4	9722.124	1395.41	3095.977
5	33697.89	2803.79	5550.392
6	312093.9	7276.4	67476.56
7	862259.3	14898.33	111054.3

Tabelle 3: Kondition für $p = 5$

Polynomgrad	Kondition		
	Bohne	Drachen	Erdnuß
N			
4	2322.51	270.84	836.83
5	4862.091	328.86	1917.96
6	112519.6	547.63	9460.73
7	398312.1	1855.26	55844.65

Aus den Tabellen liest man die Schlechtgestellttheit des Problems ab, da die Konditionszahlen in N nahezu exponentiell wachsen. Eine Ausnahme ist lediglich der Drachen für $p = 5$, wo für $N \leq 4$ ein schwächeres Wachstum beobachtet wird.

Für ein festes $p = 3$ und $N = 4$ wird die Schlechtgestellttheit in Abhängigkeit des Abstands der Meßkurve zu dem zu rekonstruierenden Objekt untersucht. Dazu werden verschiedene Radien für den Meßhalbkreis verwendet.

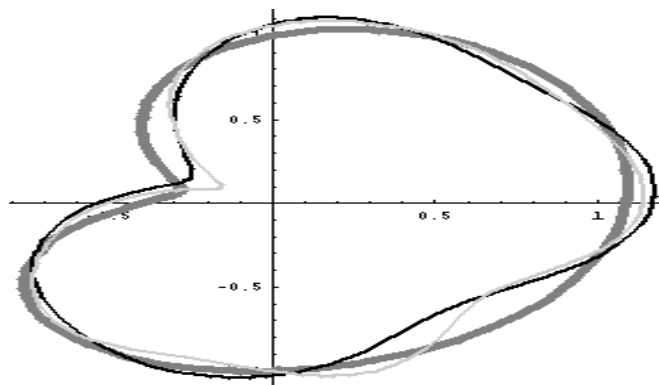
Tabelle 4: Kondition in Abhängigkeit des Meßkurvenabstands

Meßkurvenradius	Kondition		
	Bohne	Drachen	Erdnuß
R			
2	8991.06	1488.529	3386.825
2.5	9722.124	1395.41	3095.977
3	10140.63	1341.37	2875.322
4	10133.87	1264.49	2565.49
5	9743.65	1190.206	2379.64
10	8565.22	1014.695	2149.41

Die Ergebnisse dieser Tabelle zeigen, daß das Maß der Schlechtgestellttheit des inversen Problems für alle untersuchten Meßradien die gleiche Größenordnung hat. Dies ist eine Konsequenz der Linearität und der Elliptizität des Oseen-Randwertproblems. Im Fall einer turbulenten Strömung ist dies sicher nicht der Fall. Ebenso ist zu beobachten, daß die Schlechtgestellttheit mit wachsendem Radius abnimmt.

Um die Abhängigkeit der Rekonstruktion vom Meßkurvenradius zu studieren, verwen-
de ich als Startwert zur Rekonstruktion der Bohnenkurve mit Meßradius 10 das
trigonometrische Polynom vierten Grades, das in $\varphi_i = i(\pi/4)$, $i = 0, \dots, 7$, die
bereits rekonstruierte Bohnenkurve Abbildung 4 interpoliert. Danach wird wie bei
den vorhergehenden Rekonstruktionen der Randkurven vorgegangen. Das Resultat
der Simulation mit Meßradius 10 ist in folgender Abbildung dargestellt.

Abb. 5



Die hellgraue Kurve ist die Bohnenrekonstruktion aus Abbildung 4. Die Rekonstruktion mit Meßradius 10 ist schwarz dargestellt.

Das Resultat ist, daß die Einbuchtung auf der linken Seite jetzt etwas besser approximiert wird. Im restlichen Bereich der Bohnenkurve verhalten sich die beiden Rekonstruktionen weitgehend gleich.

6.6 Fazit

In der Arbeit ist gezeigt worden, daß es wie bei dem inversen Streuproblem für die Helmholtzgleichung für die Oseengleichung möglich ist, das inverse Randwertproblem mit Hilfe eines regularisierten Newtonverfahrens zu lösen. Das aus der Theorie über die Helmholtzgleichung bekannte Vorgehen zum Lösen des direkten Problems ist auf die Oseengleichung übertragen worden. Jedoch treten hier nicht die Schwierigkeiten mit den Eigenwerten des Innenraumproblems wie bei der Helmholtzgleichung auf. Dies vereinfacht den Potentialansatz zur Konstruktion von Lösungen. Die differenzierbare Abhängigkeit der Lösung vom Gebietsrand kann mit den Ideen von Kirsch, der diese für die Helmholtzgleichung entwickelt hat ([11]), für das Oseenproblem bewiesen werden. Die Grundlage hierfür ist die Sattelpunktsformulierung aus Kapitel 5 "Differenzierbarkeit nach dem Gebietsrand".

Die Lösung des hier betrachteten inversen Oseen-Randwertproblems ist zum jetzigen Zeitpunkt nur von theoretischem Interesse, um die Lösungsstrategien zur Lösung des inversen Randwertproblems für die Helmholtzgleichung auf ihre Universalität zu überprüfen. In der Strömungsphysik fällt es schwer, eine praktische physikalische Anwendung des inversen Randwertproblems für die Oseengleichung zu formulieren. Ein Grund hierfür ist die in realen Strömungen auftretende Turbulenz, die durch das Oseenmodell nicht erfaßt wird. Durch das Oseenmodell können lediglich Umströmungen mit einer kleinen Reynoldszahl modelliert werden. In solchen Strömungen stellt sich aus praktischen Erwägungen meistens nicht das hier betrachtete inverse Problem.

ANHANG A: Eigenschaften der Besselfunktionen

Hier werden die für die Arbeit benötigten Resultate über Besselfunktionen zusammengestellt. Sie können [6] oder [16] entnommen werden.

Definition A.1: Es sei $n \in \mathbf{N}$. K_n die **modifizierte Besselfunktion der dritten Art** (MacDonald-Funktion) **n. Ordnung** ist für $z \in \mathbf{C}_- := \{z \in \mathbf{C} | -\pi < \arg(z) < \pi\}$ definiert durch

$$K_n(z) := \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m \left(\frac{z}{2}\right)^{2m-n} \frac{(n-m-1)!}{m!} + (-1)^{n+1} I_n(z) \log\left(\frac{z}{2}\right) + A_n(z) \quad (\text{A.1})$$

mit

$$A_n(z) := \frac{1}{2} (-1)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Psi_{n+m+1} + \Psi_{m+1}}{m!(n+m)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{n+2m} \quad (\text{A.2})$$

und

$$\Psi_1 = -\gamma, \Psi_{m+1} = -\gamma + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m}.$$

Mit γ wird die Eulersche Konstante $\gamma = 0,57721566\dots$ bezeichnet.

Definition A.2: Es sei $n \in \mathbf{N}$. I_n die **modifizierte Besselfunktion der ersten Art n. Ordnung** ist für $z \in \mathbf{C}$ definiert durch

$$I_n(z) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!(m+n)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m+n} \quad (\text{A.3})$$

Die Funktionen I_n und A_n sind für $n \in \mathbf{N}$ analytisch.

Für spätere Anwendungen werden für $n \geq 1$ und $z \in \mathbf{C}$ folgende Funktionen definiert

$$\tilde{I}_0(z) := \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2m}(m!)^2} z^{m-1}, \quad \tilde{A}_0(z) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Psi_{m+1}}{2^{2m}(m!)^2} z^m \quad (\text{A.4})$$

$$\tilde{I}_n(z) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{2^{2m+n} m! (m+n)!}, \quad \tilde{A}_n(z) := \frac{(-1)^n}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\Psi_{n+m+1} + \Psi_{m+1}}{2^{2m+n} m! (m+1)!} z^m. \quad (\text{A.5})$$

Mit diesen Bezeichnungen gilt für $n \geq 1$ und $z \in \mathbf{C}$:

$$I_0(z) = 1 + z^2 \tilde{I}_0(z^2) \quad \text{und} \quad I_n(z) = z^n \tilde{I}_n(z^2), \quad (\text{A.6})$$

$$A_0(z) = \tilde{A}_0(z^2) \quad \text{und} \quad A_n(z) = z^n \tilde{A}_n(z^2). \quad (\text{A.7})$$

An der Definition von K_n erkennt man, daß K_n folgende Asymptotik im Nullpunkt hat:

$$K_n(z) \approx \begin{cases} z^{-n}, & n \neq 0 \\ \log(z), & n = 0 \end{cases}$$

Die Funktionen K_n und I_n sind, wo definiert, Lösungen einer gewöhnlichen Differentialgleichung.

Lemma A.3: Für $n \in \mathbf{N}$ sind die Funktionen K_n, I_n linear unabhängige Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} - (z^2 + n^2)w = 0.$$

Wird nach [6] in konsistenter Weise

$$K_{-n}(z) := K_n(z) \text{ für } n \in \mathbf{N} \quad (\text{A.8})$$

gesetzt, dann können folgende Rekurrenzrelationen angegeben werden:

Lemma A.4: Für $n, m \in \mathbf{N}$ gelten die Relationen

$$\left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^m [z^n K_n(z)] = (-1)^m z^{n-m} K_{n-m}(z) \quad (\text{A.9})$$

$$\left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz}\right)^m [z^{-n} K_n(z)] = (-1)^m z^{-n-m} K_{n+m}(z) \quad (\text{A.10})$$

$$K_{n-1}(z) - K_{n+1}(z) = -2nz^{-1}K_n(z) \quad (\text{A.11})$$

$$K_{n-1}(z) + K_{n+1}(z) = -2K_n'(z) \quad (\text{A.12})$$

$$I_{n-1}(z) + I_{n+1}(z) = 2I_n'(z) \quad (\text{A.13})$$

$$I_{n-1}(z) - I_{n+1}(z) = \frac{2n}{z}I_n(z) \quad (\text{A.14})$$

$$K_1(z)I_0(z) + K_0(z)I_1(z) = \frac{1}{z} \quad (\text{A.15})$$

Diese Rekurrenzrelationen sind hilfreich zum Bestimmen des asymptotischen Verhaltens im Unendlichen der Ableitungen der hier betrachteten Besselfunktionen.

Lemma A.5: Es sei $n, M \in \mathbf{N}$ und $\delta > 0$, dann gibt es Funktionen $I_n^{\infty, M, w}, I_n^{\infty, M, f}, K_n^{\infty, M}: \{z \in \mathbf{C} \mid |\arg(z)| \leq \pi - \delta\} \rightarrow \mathbf{C}$ mit den Eigenschaften:

$$K_n(z) = \sqrt{\frac{\pi e^{-z}}{2\sqrt{z}}} \left[\sum_{m=0}^{M-1} (n, m)_{\text{Ha}} (2z)^{-m} + K_n^{\infty, M}(z) \right], \quad (\text{A.16})$$

$$I_n(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{z}} \left\{ e^z \left[\sum_{m=0}^{M-1} (-1)^m (n, m)_{\text{Ha}} (2z)^{-m} + I_n^{\infty, M, w}(z) \right] \right. \\ \left. + i e^{-z + i n \pi} \left[\sum_{m=0}^{M-1} (n, m)_{\text{Ha}} (2z)^{-m} + I_n^{\infty, M, f}(z) \right] \right\}, \quad (\text{A.17})$$

$$\left| K_n^{\infty, M}(z) \right|, \left| I_n^{\infty, M, w}(z) \right|, \left| I_n^{\infty, M, f}(z) \right| = O(|z|^{-M}) \text{ f\"ur } |\arg(z)| \leq \pi - \delta. \quad (\text{A.18})$$

Dabei ist $i = \sqrt{-1}$ und

$$(n, m)_{\text{Ha}} := \begin{cases} [2^{-2m}/m!]((4n^2 - 1)(4n^2 - 3^2) \dots (4n^2 - (2m - 1)^2)), & m \neq 0 \\ 1, & m = 0 \end{cases}.$$

Lemma A.6: Es gelten die Integraldarstellungen

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{\rho \cos \phi} \cos(n\phi) \, d\phi = I_n(\rho), \quad \rho \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N} \quad (\text{A.19})$$

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] Abraham R, Marsden J. E.; Ratiu: Manifolds, Tensor Analysis and Application, 2nd Edition, Applied Mathematical Sciences, Springer (1988)
- [2] Bauer H.: Maß- und Integrationstheorie, 2. Auflage, deGruyter (1992)
- [3] Costabel M: Boundary Integraloperators on Lipschitz Domains: Elementary Results, SIAM J. Math. Anal., Vol. 19, No. 3, 613-626 (1988)
- [4] Colton D., Kreß R.: Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory, Springer AMS 93 (1992)
- [5] Colton D., Kreß R.: Integral Equation Methods in Scattering Theory, Wiley (1983)
- [6] Erdélyi A., Magnus W.; Oberhettinger F.; Tricomi F. G.: Higher Transcendental Functions, Vol. 2, New York, McGraw-Hill (1953)
- [7] Finn R., Smith D.R.: On the Linearized Hydrodynamical Equations in Two Dimensions, Arch. Rational Mech. Anal. 25, 1-25
- [8] Galdi P. G.: An Introduction to the Mathematical Theory of the Navier-Stokes Equations, Vol. 1, Springer, New York (1994)
- [9] Hackbusch W.: Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen, Teubner (1986)
- [10] Kaplan C.: Concept of Field Modes In Fluid Mechanics, AFOSR Scientific Report No. 64-0719 (1964)
- [11] Kirsch A.: The domain derivative and two applications in inverse scattering theory, Inverse Problems 9, 81-96 (1993)
- [12] Kreß R.: Linear Integral Equations, Applied Mathematical Sciences 82, Springer (1989)

- [13] Kreß R., Sloan I. H.: On the Numerical Solution of a Logarithmic Integral Equation of the First Kind for the Helmholtz Equation, Numer. Math. 66, 199-214 (1993)
- [14] Kreß R.: Integral Equation Methods in Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering, In: Boundary Integral Formulations for Inverse Analysis (Ingham und Wrobel, eds.), Computational Mathematics Publications, Southhampton, 67-92 (1997)
- [15] Ladyzhenskaya O. A.: The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow, 2nd. Ed., Gordon and Breach, New York (1969)
- [16] Lebedev N. N.: Special Functions and Their Applications, Prentice-Hall (1965)
- [17] Martensen E.: Potentialtheorie, Teubner Verlag Stuttgart (1968)
- [18] Moré J. J.: The Levenberg-Marquardt Algorithm: Implementation and Theory, In: Numerical Analysis (Watson, ed.), Springer Verlag Lecture Notes in Mathematics 630, 105-116
- [19] Morrey C. B.: Multiple Integrals in the Calculus of Variations, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften Band 130, Springer (1966)s
- [20] Oseen C. W.: Neuere Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik, Akad. Verlagsgesellschaft, Leipzig (1927)
- [21] Penzel F: Einführung in die Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen, Skript zur Vorlesung am Fachbereich Mathematik der Universität Frankfurt im Wintersemester 1995/96
- [22] Rauch J.: Partial Differential Equations, Graduate Texts in Mathematics 128, Springer (1991)
- [23] Varnhorn W.: The Stokes Equations, Akademie Verlag, Berlin (1994)
- [24] Wloka J.: Partielle Differentialgleichungen, Teubner, Stuttgart (1982)

Lebenslauf

Am 27.06.1970 wurde ich, Sascha Meyer, als Sohn von Hans-Stefan Meyer (Oberstudienrat) und Elvira Dautrich (Arztsekretärin) in Salmünster (Deutschland) geboren. Ich bin damit deutscher Staatsbürger.

Von 1976 bis 1980 besuchte ich die Grundschule Wächtersbach (Klassen 1-4). Anschließend wechselte ich auf den gymnasialen Zweig der Gesamtschule Wächtersbach, den ich von 1980 bis 1986 besuchte (Klassen 5-10). Zum Abschluß meiner schulischen Laufbahn besuchte ich die Oberstufe (Klassen 11-13) des Grimmelshausen Gymnasiums Gelnhausen, wo ich 1989 Abitur machte.

Kurz nach dem Wechsel auf das Grimmelshausen Gymnasium Gelnhausen habe ich von August 1986 bis November 1986 an einem Schüleraustausch mit Schülern aus der kanadischen Stadt Edmonton teilgenommen.

Zu Beginn des Wintersemesters 1989 begann ich mein Studium der Mathematik an der Johann Wolfgang Goethe Universität Frankfurt. Nach dem Grundstudium legte ich dort im Jahr 1991 mein Vordiplom ab. Danach war ich zeitweise als wissenschaftliche Hilfskraft zur Betreuung von Übungen von Vorlesungen und zur Betreuung von PCs am Fachbereich Mathematik angestellt. Im April 1994 habe ich mein Studium der Mathematik mit dem Diplom in Mathematik bei Prof. Baumeister in Frankfurt beendet.

Meine Forschungen während meiner Diplomarbeit haben mich zu einem Studienaufenthalt am Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, New York motiviert. Der Studienaufenthalt erstreckte sich von September 1994 bis Mai 1995 und wurde von dem DAAD finanziert.

Nach meiner Rückkehr aus New York war ich am Fachbereich Mathematik der Johann Wolfgang Goethe Universität im Wintersemester 1995/96 als wissenschaftliche Hilfskraft zur Betreuung der Übung zur Vorlesung "Einführung in die Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen" von Dr. Penzel angestellt.

Im April 1996 wurde ich Mitglied des Göttinger Graduiertenkollegs "Strömungsinstabilitäten und Turbulenz". Dort bearbeite ich das Projekt von Prof. Kreß zum Thema "Inverse Randwertprobleme".