Zweigitter-Diskretisierungsverfahren für singulär gestörte elliptische Randwertprobleme

Diplomarbeit

vorgelegt von

Pamela Klapproth

aus

Frankfurt a. M.

angefertigt am

Institut für

Numerische und Angewandte Mathematik

der

Georg-August-Universität zu Göttingen

1998

Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis

Die erklärten Symbole sind innerhalb eines Kapitels feste Bezeichnungen. Der Verweis bezieht sich auf das erste Auftreten im Text. Tritt ein Symbol auch in nachfolgenden Kapiteln auf, so wird es nur bei Bedeutungsänderung erneut aufgeführt.

Kapitel 1

α	Multiindex	Def. 1.4
a	(symmetrische, positiv definite) Koeffizientenmatrix	Gl. (1.1)
a_{ij}	Matrixelement der Matrix a	Kap. 1.1
$A(\cdot,\cdot)$	Bilinearform (bzgl. des Differentialoperators $\mathcal{L}$)	Gl. (1.6)
$\hat{A}(\cdot,\cdot)$	Bilinearform (bzgl. des Differentialoperators $\hat{\mathcal{L}}$)	Gl. (1.7)
$\hat{A}_\delta(\cdot,\cdot)$	Bilinearform (bei der SUPG-FEM)	Gl. (1.21)
A_T	$= \max\limits_{i,j} \Vert a_{ij}\Vert_{L^\infty(T)}$	Kap. 1.6.1
A'_T	$= \max\limits_{i,j} \Vert \partial a_{ij}/\partial x_i\Vert_{L^\infty(T)}$	Kap. 1.6.1
b	Strömungsfeld	Kap. 1.1
B_T	$= \Vert b\Vert_{L^\infty(T)}$	Kap. 1.6.1
B'_T	$= \Vert \nabla\cdot b\Vert_{L^\infty(T)}$	Kap. 1.6.1
B_∞	$= \Vert b\Vert_{L^\infty}$	Satz 1.12
c	Reaktionskoeffizient	Kap. 1.1
C_{inv}	Konstante aus der inversen Ungleichung	Gl. (1.23)
C_T	$= \Vert c\Vert_{L^\infty(T)}$	Kap. 1.6.1
C_∞	$= \Vert c\Vert_{L^\infty}$	Satz 1.12
$C^k(\Omega)$	Raum der auf Ω k-mal stetig differenzierbaren Funktionen	Def. 1.1
$C^k(\overline{\Omega})$	Menge aller Funktionen aus $C^k(\Omega)$ mit stetig auf $\overline{\Omega}$ fortsetzbaren Ableitungen bis zur Ordnung k	Def. 1.1
$C_0^\infty(\Omega)$	Raum der beliebig oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in Ω	Def. 1.4
δ_T	SUPG-Parameter	Kap. 1.6.1
D^α	partieller Differentialoperator	Def. 1.4
ε	Diffusionskoeffizient	Gl. (1.1)
f	Quelle	Gl. (1.3)
$f_\delta(\cdot)$	Linearform (bei der SUPG-FEM)	Gl. (1.21)
γ	Elliptizitätskonstante	Gl. (1.2)

Γ	Konstante aus der erweiterten Elliptizitätsbedingung	Gl. (1.2)
G_T	$= \sqrt{(\gamma+1)\varepsilon + B_T h_T + \omega h_T^2}$	Lem. 1.32
$H^m(\Omega)$, $H_0^m(\Omega)$	Sobolevräume	Bem. 1.8
h	Diskretisierungsschrittweite $\big(h = \sup\limits_{T\in\mathcal{T}_h} h_T\big)$	Kap. 1.3.2
h_T	maximale Seitenlänge des Elementes $T \in \mathcal{T}_h$	Gl. (1.23)
κ	Konstante aus der Bedingung $\lvert c - \nabla\cdot b\rvert \leq \kappa\omega$	Kap. 1.6.1
K	$= \max\left\{\frac{\Gamma^2}{\gamma^2}+1, \kappa^2+2\right\}$	Lem. 1.29
$\mathcal{L}$	Differentialoperator bzgl. des SPD-Problems	Gl. (1.1)
$\hat{\mathcal{L}}$	Differentialoperator bzgl. des NSPD-Problems	Gl. (1.4)
$L^1_{loc}(\Omega)$	Raum der auf Ω lokal integrierbaren Funktionen	Def. 1.3
$L^p(\Omega)$, $L^\infty(\Omega)$	Räume Lebesgue-integrierbarer Funktionen	Def. 1.2
$\mathcal{N}$	Differentialoperator der Terme niederer Ordnung	Gl. (1.4)
$N(\cdot,\cdot)$	Bilinearform (bzgl. des Differentialoperators $\mathcal{N}$)	Gl. (1.7)
Ω	konvexes, polygonales Gebiet im $\mathbb{R}^2$	Kap. 1.1
$\overline{\Omega}$	Abschluß von Ω	Kap. 1.1
$\partial\Omega$	Rand des Gebietes Ω	Gl. (1.3)
ω	Konstante aus der Bedingung $c - \frac{1}{2}\nabla\cdot b \geq \omega$	Satz 1.12
ω_α	verallgemeinerte Ableitung	Def. 1.4
P_h	Galerkin-Projektor bzgl. $A(\cdot\,,\cdot)$	Def. 1.24
$\hat{P}_h$	Galerkin-Projektor bzgl. $\hat{A}(\cdot\,,\cdot)$	Def. 1.25
$\hat{P}_h^\delta$	SUPG-Projektor bzgl. $\hat{A}_\delta(\cdot\,,\cdot)$, h	Def. 1.31
$\hat{P}_H^\delta$	SUPG-Projektor bzgl. $\hat{A}_\delta(\cdot\,,\cdot)$, H	Bem. 1.36
Pe_T	lokale Peclét-Zahl	Kap. 1.6.2
$\mathcal{T}_h$	Triangulierung (in Dreiecke)	Kap. 1.4.1
T_i	(Dreiecks-)Element von $\mathcal{T}_h$	Kap. 1.4.1
V_h	Finite-Element-Raum	Gl. (1.12)
V_T^r	Raum der Polynome vom Grad $\leq r$ auf T	Gl. (1.12)
$W_p^k(\Omega)$, $W_\infty^k(\Omega)$	Sobolevräume	Def. 1.6
X	Hilbertraum	Def. 1.9
X^*	Dualraum zu X	Lem. 1.13
Z_T	$= \min\left\{\frac{1}{\delta_T}, \frac{B_T^2}{\gamma\varepsilon}\right\}$	Lem. 1.29
$\nabla\cdot$	Divergenz	Gl. (1.1)
∇	Gradient	Kap. 1.1
$\lvert\lvert\lvert\cdot\rvert\rvert\rvert_\varepsilon$	ε-gewichtete H^1-Norm	Def. 1.11
$\lvert\lvert\lvert\cdot\rvert\rvert\rvert_{\varepsilon,0}$	Energienorm	Def. 1.27
$\lvert\lvert\lvert\cdot\rvert\rvert\rvert_{0,\delta}$	Norm bzgl. des Stabilisierungsterms	Def. 1.27
$\lvert\lvert\lvert\cdot\rvert\rvert\rvert_{\varepsilon,\delta}$	SUPG-Norm (stabilisierte Energienorm)	Def. 1.27
$\lVert\cdot\rVert_{H^m}$	Norm bzgl. $H^m(\Omega)$ und $H_0^m(\Omega)$	Kap. 1.3.1
$\lvert\cdot\rvert_{H^m}$	Semi-Norm bzgl. $H^m(\Omega)$ und $H_0^m(\Omega)$	Kap. 1.3.1
$\lVert\cdot\rVert_{L^p}$, $\lVert\cdot\rVert_{L^\infty}$	Normen bzgl. $L^p(\Omega)$, $L^\infty(\Omega)$	Def. 1.2
$\lVert\cdot\rVert_{W_p^k}$, $\lVert\cdot\rVert_{W_\infty^k}$	Normen bzgl. $W_p^k(\Omega)$, $W_\infty^k(\Omega)$	Def. 1.6

$\lvert\cdot\rvert_{W_p^k}$	Seminorm bzgl. $W_p^k(\Omega)$	Def. 1.7
$\lVert\cdot\rVert_X$	Norm bzgl. X	Def. 1.9
$(\cdot\,,\cdot)$	L^2-Skalarprodukt	Kap. 1.2
$(\cdot\,,\cdot)_T$	Skalarprodukt bzgl. $L^2(T)$	Kap. 1.6.1
$\lesssim, \gtrsim$	Kleiner bzw. größer bis auf von ε, h und H unabhängige Konstanten	Lem. 1.14

Kapitel 2

C_F	Konstante aus der Friedrichsschen Ungleichung	Gl. (2.5)
h, H	feine bzw. grobe Maschenweite	Kap. 2.2
Pe_h, Pe_H	Peclét-Zahlen	Def. 2.5
R_h, R_H	$= \max\{\Gamma, C_\infty\}\left(1+\frac{\theta}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$, $\theta = h$ bzw. H	Def. 2.5
$\mathcal{T}_h$, $\mathcal{T}_H$	feine bzw. grobe Triangulierung	Kap. 2.2
V_h, V_H	feiner bzw. grober Finite-Element-Raum	Kap. 2.2
Z	$= \frac{B_\infty + C_F C_\infty}{\varepsilon}\left(1 + C_\infty + \frac{B_\infty}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\left(R_H + Pe_H\right)^2$	Gl. (2.9)
Z'	$= \frac{C_\infty R_H^4}{\varepsilon}\left(1 + C_\infty\right)$	Kap. 2.3

Kapitel 3

$\tilde{A}(\cdot,\cdot)$	Bilinearform (symmetrischer Anteil von $\hat{A}(\cdot\,,\cdot)$)	Gl. (3.1)
$A_\delta(\cdot,\cdot)$	Bilinearform (symmetrischer Anteil von $\hat{A}_\delta(\cdot\,,\cdot)$)	Kap. 3.2
B_T^H, B_T^h	$\widehat{=}\, B_T$ für $T \in \mathcal{T}$, $\mathcal{T} = \mathcal{T}_h$ bzw. $\mathcal{T}_H$	Kap. 3.2
B'_∞	$= \lVert\nabla\cdot b\rVert_{L^\infty}$	Kap. 3.1
δ_T^H, δ_T^h	SUPG-Parameter	Gl. (3.4)
G_T^H, G_T^h	$\widehat{=}\, G_T$ für $T \in \mathcal{T}$, $\mathcal{T} = \mathcal{T}_h$ bzw. $\mathcal{T}_H$	Kap. 3.2
K	$= \frac{(B'_\infty)^2}{4\omega} + \omega$	Lem. 3.6
$\tilde{N}(\cdot,\cdot)$	Bilinearform (nichtsymmetrischer Anteil von $\hat{A}(\cdot\,,\cdot)$)	Gl. (3.2)
$N_\delta(\cdot,\cdot)$	Bilinearform (nichtsymmetrischer Anteil von $\hat{A}_\delta(\cdot\,,\cdot)$)	Kap. 3.2
Pe_T^H, Pe_T^h	lokale Peclét-Zahlen	Kap. 3.2
R_T^H, R_T^h	$= \frac{\omega\theta^2}{\varepsilon}$, $\theta = h_T$ bzw. H_T	Kap. 3.2
$\mathcal{T}$	Triangulierung ($\mathcal{T} \in \{\mathcal{T}_h, \mathcal{T}_H\}$)	Kap. 3.2
Z_T^H, Z_T^h	$\widehat{=}\, Z_T$ für $T \in \mathcal{T}$, $\mathcal{T} = \mathcal{T}_h$ bzw. $\mathcal{T}_H$	Kap. 3.2

Einleitung

Den Ausgangspunkt dieser Arbeit bildet ein Artikel von *J. Xu* (vgl. [Xu96]), in welchem u. a. Zweigitter-Diskretisierungsverfahren für nichtsymmetrische und/oder indefinite Probleme der Form

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (a\nabla u) + b \cdot \nabla u + cu &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

vorgestellt werden. Diese Verfahren arbeiten mit zwei Finite-Element-Räumen V_H und V_h (bezüglich unterschiedlicher Maschenweiten $h < H$). Dabei wird auf dem gröberen Raum V_H mit Hilfe der Finite-Element-Methode (FEM) (vgl. Abschnitt 1.4) eine grobe Approximation an die Lösung berechnet, während auf dem feineren Raum V_h das nichtsymmetrische Problem zunächst mit Hilfe dieser groben Lösung auf ein symmetrisches Problem reduziert und dieses dann gelöst wird. Die Konvergenzabschätzungen dieser Verfahren (vgl. [Xu96], § 4) zeigen, daß der Raum V_H verglichen mit dem Raum V_h extrem grob sein kann und dennoch eine optimale Genauigkeit an die approximierte Lösung erhalten bleibt. Dabei ist allerdings zu bemerken, daß die Ergebnisse von Xu auf solche Probleme beschränkt sind, bei denen der elliptische Hauptteil des entsprechenden Differentialoperators die Terme niederer Ordnung dominiert.

Der Gegenstand dieser Arbeit ist die Untersuchung der Frage, ob sich die Verfahren von Xu auch auf Probleme mit dominierenden Termen niederer Ordnung bzw. auf singulär gestörte Randwertprobleme der Form

$$\begin{aligned} -\varepsilon\nabla \cdot (a\nabla u) + b \cdot \nabla u + cu &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

mit $\varepsilon \in (0, 1]$ übertragen lassen. Gleichungen dieser Art treten häufig bei der Modellierung von strömungsmechanischen Problemen auf.

In Kapitel 1 finden sich die funktionalanalytischen Grundlagen für die weiteren Betrachtungen (Abschnitte 1.1–1.3). Darüber hinaus werden einige Abschätzungen bereitgestellt, die für die Konvergenzuntersuchungen der Algorithmen in den Kapiteln 2 und 3 von grundlegender Bedeutung sind (Abschnitte 1.5 und 1.6.2).

In Kapitel 2 werden die Algorithmen von Xu direkt auf singulär gestörte Probleme angewandt und die Konvergenzanalysen dieser Verfahren durchgeführt (Abschnitt 2.2). Bei der Diskussion der Konvergenzergebnisse (Abschnitt 2.3) wird untersucht, unter welchen Bedingungen die Algorithmen noch effizient arbeiten.

Mit dem Versuch, die Konvergenzresultate der Algorithmen aus Kapitel 2 zu verbessern, indem man sie dem singulär gestörten Fall anpaßt, beschäfigt sich Kapitel 3. Dort werden zwei angepaßte Varianten der ursprünglichen Verfahren betrachtet und diskutiert (Abschnitte 3.1 und 3.2). Die zweite Variante benutzt dabei als Basisverfahren die SUPG-FEM (vgl. Abschnitt 1.6.1), die für singulär gestörte Probleme eine stabile Variante der Galerkin-FEM darstellt.

Im abschließenden Kapitel 4 werden die Ergebnisse zusammengefaßt und Hinweise auf offene Fragen gegeben.

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Problemstellung

Es sei $\Omega \subset I\!R^2$ ein konvexes, polygonales Gebiet. Durch

$$\mathcal{L}u(x) \; := \; -\varepsilon\nabla \cdot \big(a(x)\nabla u(x)\big), \quad x \in \Omega \tag{1.1}$$

sei mit $0 < \varepsilon \leq 1$ und $a : \overline{\Omega} \longrightarrow I\!R^{2\times 2}$ ein linearer elliptischer Differentialoperator $\mathcal{L}$ definiert. Die Matrix $a(x) = a_{ij}(x)$, $i, j = 1, 2$, sei dabei als symmetrisch und positiv definit (SPD) vorausgesetzt. Aufgrund dieser Eigenschaften der Matrix a spricht man bezüglich $\mathcal{L}$ auch von einem *SPD-Operator*.

Der durch (1.1) eingeführte Differentialoperator $\mathcal{L}$ sei *gleichmäßig elliptisch* mit

$$\gamma|\xi|^2 \; \leq \; \xi^T a(x)\xi \; \leq \; \Gamma|\xi|^2 \qquad \text{für alle } \xi \in I\!R^2,\ x \in \Omega, \tag{1.2}$$

wobei γ und Γ positive Konstanten seien. Man nennt γ in diesem Zusammenhang auch *Elliptizitätskonstante*.

Bezüglich $\mathcal{L}$ soll das elliptische Randwertproblem

$$\left\{ \begin{array}{rl} \mathcal{L}u(x) \equiv -\varepsilon\nabla \cdot \big(a(x)\nabla u(x)\big) = f(x) & \text{in } \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{array} \right. \tag{1.3}$$

betrachtet werden.

Ein weiterer linearer elliptischer Differentialoperator $\hat{\mathcal{L}}$ wird eingeführt durch

$$\hat{\mathcal{L}}u(x) \; := \; \mathcal{L}u(x) + \mathcal{N}u(x), \quad x \in \Omega \tag{1.4}$$

mit $\mathcal{N}u(x) := b(x) \cdot \nabla u(x) + c(x)u(x)$. Die Koeffizientenfunktionen $a : \overline{\Omega} \longrightarrow I\!R^{2\times 2}$, $b : \overline{\Omega} \longrightarrow I\!R^2$ und $c : \overline{\Omega} \longrightarrow I\!R$ seien als hinreichend glatt vorausgesetzt.

Der Operator $\hat{\mathcal{L}}$ wird den nichtsymmetrischen und/oder indefiniten (*NSPD*-) Operatoren zugeordnet, wobei man $\hat{\mathcal{L}}$ in einen SPD-Operator $\mathcal{L}$ und einen NSPD-Operator $\mathcal{N}$ zerlegen kann. Diese Tatsache ist grundlegend für die späteren Betrachtungen.

Bezüglich $\hat{\mathcal{L}}$ wird im folgenden das elliptische Randwertproblem

$$\begin{cases} \hat{\mathcal{L}}u(x) \equiv -\varepsilon\nabla\cdot\big(a(x)\nabla u(x)\big) + b(x)\cdot\nabla u(x) + c(x)u(x) = f(x) & \text{in } \Omega, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad u(x) = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.5}$$

betrachtet. Gleichungen dieser Art treten in der Strömungsmechanik auf, beispielsweise bei der Berechnung der Temperatur in einer kompressiblen Strömung. In diesem Zusammenhang heißen ε der *Diffusionsparameter* und $-\varepsilon\nabla\cdot\big(a\nabla u\big)$ der *Diffusionsterm*. Für $b \not\equiv 0$ stellt $b\cdot\nabla u$ die *Konvektion* dar. Den Term $cu-f$ bezeichnet man als den *Reaktionsanteil* mit dem *Reaktionskoeffizienten* c und der *Quelle* f. Aufgrund dieser Bezeichnungen nennt man die Probleme (1.5) auch *Konvektions-Diffusions-Reaktions-Probleme*. Für $\varepsilon \ll 1$ heißen sie *singulär gestört*.

Definition 1.1 *Bei hinreichend glatten Daten $a_{ij} \in C^1(\Omega)$, $f \in C(\Omega)$ bzw. darüberhinaus $b_j, c \in C(\Omega)$ für $i,j = 1,2$ heißt $u \in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ genau dann* klassische Lösung *von (1.3) bzw. (1.5), wenn u die Gleichungen (1.3) bzw. (1.5) punktweise erfüllt.*

1.2 Angepaßte Funktionenräume

Der Übergang zu Variationsformulierungen der Probleme (1.3) bzw. (1.5) (vgl. Abschnitt 1.3) erfordert eine angepaßte Wahl der Funktionenräume. In diesem Zusammenhang haben sich die *Sobolev-Räume* als geeignet erwiesen. Sie sollen an dieser Stelle kurz eingeführt werden.

Im folgenden sei G ein beschränktes Gebiet aus dem $\mathbb{R}^n$. Die Sobolev-Räume werden auf den Räumen der *Lebesgue-integrierbaren Funktionen* aufgebaut.

Definition 1.2 *Die Norm $\|\cdot\|_{L^p}$ sei für Funktionen $v : G \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch*

$$\|v\|_{L^p} \;:=\; \begin{cases} \left(\displaystyle\int_G |v(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} & \text{für } 1 \le p < \infty, \\ \operatorname*{ess\,sup}_{x\in G}\big\{|v(x)|\big\} & \text{für } p = \infty. \end{cases}$$

In beiden Fällen werden die Lebesgue-Räume *definiert durch*

$$L^p(G) \;:=\; \big\{v : G \longrightarrow \Omega \;:\; \|v\|_{L^p} < \infty\big\}.$$

Im Fall $p = 2$ wird für Funktionen $u, v \in L^2(G)$ durch

$$(u,v) \;:=\; (u,v)_{L^2} \;=\; \int_G u(x)v(x)\,dx$$

ein Skalarprodukt erklärt. Der Raum $L^2(G)$ ist damit ein Hilbert-Raum.

Für die Einführung der Sobolev-Räume wird noch der Begriff der *verallgemeinerten Ableitung* über Lebesgue-Räumen benötigt. Dieser erfordert zunächst die

Definition 1.3 *Die Menge der* lokal integrierbaren Funktionen *wird für Funktionen* $v : G \longrightarrow \mathbb{R}$ *definiert durch*

$$L^1_{loc}(G) \ := \ \big\{ v : v \in L^1(K) \text{ für alle kompakten Teilgebiete } K \subset G \big\}.$$

Definition 1.4 *Zu einer Funktion* $u \in L^1_{loc}(G)$ *heißt* $w_\alpha \in L^1_{loc}(G)$ verallgemeinerte Ableitung, *falls gilt*

$$\int_G w_\alpha(x) v(x)\, dx \ = \ (-1)^{|\alpha|} \int_G u(x) D^\alpha v(x)\, dx \quad \text{für alle } v \in C_0^\infty(G).$$

Dabei ist $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\alpha_i \in \mathbb{N}_0$, ein *Multiindex* der Länge

$$|\alpha| \ := \ \sum_{i=1}^n \alpha_i,$$

und $D^\alpha v$ bezeichnet die gewöhnlichen partiellen Ableitungen

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} v.$$

Weiterhin benennt $C_0^\infty(G)$ die Menge der beliebig oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in G.

Bemerkung 1.5 Für beliebiges α und $v \in C^{|\alpha|}(G)$ entspricht die verallgemeinerte Ableitung w_α der klassischen Ableitung $D^\alpha v$. Im folgenden wird auch sonst stets $D^\alpha v$ statt w_α für die verallgemeinerte Ableitung geschrieben. ◇

Die Sobolev-Räume werden schließlich eingeführt durch die

Definition 1.6 *Seien* $k \in \mathbb{N}_0$ *und* $v \in L^1_{loc}(G)$. *Die verallgemeinerten Ableitungen* $D^\alpha v$ *mögen für alle* $|\alpha| \le k$ *existieren. Dann ist die* Sobolev-Norm *gegeben durch*

$$\|v\|_{W_p^k} \ := \ \begin{cases} \left(\sum\limits_{|\alpha| \le k} \|D^\alpha v\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}} & \text{für } 1 \le p < \infty, \\ \max\limits_{|\alpha| \le k} \|D^\alpha v\|_{L^\infty}^p & \text{für } p = \infty. \end{cases}$$

Die Sobolev-Räume werden in beiden Fällen definiert durch

$$W_p^k(G) \ := \ \big\{ v \in L^1_{loc}(G) \ : \ \|v\|_{W_p^k} < \infty \big\}.$$

Zur geeigneten Einbeziehung der Randbedingungen von (1.3) bzw. (1.5) beim Übergang zu Variationsformulierungen in Abschnitt 1.3 werden noch die Räume $\overset{\circ}{W}{}_p^k(G)$ benötigt. Sie sind definiert als der Abschluß von $C_0^\infty(G)$ in der $\|\cdot\|_{W_p^k}$-Norm. Weiterhin werden die zu den Sobolev-Normen gehörigen *Semi-Normen* benutzt.

Definition 1.7 *Für $k \in \mathbb{N}_0$ und $v \in W_p^k(G)$ ist im Fall $1 \leq p < \infty$ die zu $\|v\|_{W_p^k}$ gehörige* Semi-Norm *definiert durch*

$$|v|_{W_p^k} \;:=\; \left(\sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha v\|_{L^p}^p \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Bemerkung 1.8 Für $p = 2$ schreibt man $H^m(G)$ statt $W_p^m(G)$ und $H_0^m(G)$ statt $\overset{\circ}{W}{}_p^m(G)$. $\diamond$

1.3 Lineare Variationsprobleme

Da die Forderung $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ an die klassische Lösung von (1.3) bzw. (1.5) aus Definition 1.1 in der Praxis zu restriktiv ist, geht man zu verallgemeinerten Aufgabenstellungen bzw. Variationsformulierungen über. Dann lassen sich auch noch Probleme lösen, für die keine klassischen Lösungen mehr existieren.

1.3.1 Variationsformulierung

Um das Problem (1.3) formal in Variationsform zu bringen, multipliziert man die erste Gleichung in (1.3) mit einer Testfunktion $v \in C_0^\infty(\Omega)$, integriert beide Seiten über Ω, führt auf der linken Seite partielle Integration durch und vervollständigt schließlich unter Berücksichtigung der vorliegenden homogenen Dirichlet-Randbedingungen den Raum $C_0^\infty(\Omega)$ zu $H_0^1(\Omega)$. Die Bilinearform $A(\cdot\,,\cdot)$ bezüglich des Differentialoperators $\mathcal{L}$ wird dann durch die umformulierte linke Seite der Gleichung (1.3) definiert, d. h.

$$A(u,v) \;:=\; \varepsilon \int_\Omega a\nabla u \cdot \nabla v \, dx \qquad \text{für } u,v \in H_0^1(\Omega). \tag{1.6}$$

Definition 1.9 *Sei X ein Hilbert-Raum. Eine Bilinearform $a : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt* stetig, *falls mit einer Konstanten $C_1 > 0$ gilt*

$$|a(u,v)| \;\leq\; C_1 \|u\|_X \|v\|_X \qquad \textit{für alle } u,v \in X.$$

Eine stetige Bilinearform a heißt X-elliptisch, *falls mit einer Konstanten $C_2 > 0$ gilt*

$$a(v,v) \;\geq\; C_2 \|v\|_X^2 \qquad \textit{für alle } v \in X.$$

Satz 1.10 *Die Bilinearform $A(\cdot\,,\cdot)$ aus (1.6) ist stetig auf dem Raum $H_0^1(\Omega)$ und H_0^1-elliptisch.*

Beweis. Seien $u, v \in H_0^1(\Omega)$.
i) Zunächst soll für $A(\cdot\,,\cdot)$ die Eigenschaft der Stetigkeit nachgewiesen werden. Diesbezüglich hat man

$$\begin{aligned}
|A(u,v)| &= \varepsilon|(a\nabla u, \nabla v)| \\
&= \varepsilon \left| \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial v}{\partial x_i} dx \right| \\
&\overset{\text{Cauchy}}{\leq} \varepsilon \left(\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{2} |a_{ij}| \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right| \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{2} |a_{ij}| \left| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right| \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right| dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\overset{(1.2)}{\leq} \varepsilon \left(\Gamma \int_\Omega \sum_{i=1}^{2} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\Gamma \int_\Omega \sum_{i=1}^{2} \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \Gamma\varepsilon |u|_{H^1} |v|_{H^1}.
\end{aligned}$$

ii) Nun bleibt noch die Eigenschaft der H_0^1-Elliptizität zu zeigen. Es ist

$$\begin{aligned}
A(v,v) &= \varepsilon(a\nabla v, \nabla v) \\
&= \varepsilon \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{2} a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx \\
&\overset{(1.2)}{\geq} \gamma\varepsilon \int_\Omega \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 dx \\
&= \gamma\varepsilon |v|_{H^1}^2.
\end{aligned}$$

□

Dem Differentialoperator $\hat{\mathcal{L}}$ aus (1.5) wird bei analoger Vorgehensweise entsprechend die Bilinearform

$$\hat{A}(u,v) \;:=\; A(u,v) + N(u,v) \qquad \text{für } u, v \in H_0^1(\Omega) \tag{1.7}$$

mit $N(u,v) := \displaystyle\int\limits_\Omega \big(b \cdot \nabla u + cu\big) v \, dx$ zugeordnet.

Durch die folgende Definition wird eine auf dem Raum $H_0^1(\Omega)$ zu $\|\cdot\|_{H^1}$ bzw. zu $|\cdot|_{H^1}$ äquivalente Norm eingeführt.

Definition 1.11 *Für alle $v \in H_0^1(\Omega)$ heißt die durch*

$$|||v|||_\varepsilon^2 \;:=\; \varepsilon |v|_{H^1}^2 + \|v\|_{L^2}^2$$

auf $H_0^1(\Omega)$ definierte Norm die ε-gewichtete H^1-Norm.

Satz 1.12 *Seien* $b_j, c \in L^\infty(\Omega)$, $j = 1,2$ *mit* $\|b\|_{L^\infty} =: B_\infty$ *und* $\|c\|_{L^\infty} =: C_\infty$. *Weiterhin gelte* $c - \frac{1}{2}\nabla \cdot b \geq \omega > 0$. *Dann ist die Bilinearform* $\hat{A}(\cdot\,,\cdot)$ *aus (1.7) stetig auf dem Raum* $H_0^1(\Omega)$ *und* H_0^1*-elliptisch.*

Beweis. Seien $u, v \in H_0^1(\Omega)$.
i) Bezüglich der Stetigkeit von $\hat{A}(\cdot\,,\cdot)$ gilt

$$\begin{aligned}
|\hat{A}(u,v)| &\leq |A(u,v)| + \left|\int_\Omega b \cdot \nabla uv\, dx\right| + \left|\int_\Omega cuv\, dx\right| \\
&\overset{\text{Hölder}}{\leq} \Gamma\varepsilon |u|_{H^1}|v|_{H^1} + B_\infty |u|_{H^1}\|v\|_{L^2} + C_\infty \|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \\
&\leq \max\{\Gamma, C_\infty\}\left[\left(\varepsilon|u|_{H^1}|v|_{H^1} + \|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\quad + \frac{B_\infty}{\sqrt{\varepsilon}}\left(\varepsilon|u|_{H^1}^2\right)^{\frac{1}{2}}\|v\|_{L^2} \\
&= \max\{\Gamma, C_\infty\}|||u|||_\varepsilon |||v|||_\varepsilon + \frac{B_\infty}{\sqrt{\varepsilon}}|||u|||_\varepsilon \|v\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

ii) Nun ist noch die Eigenschaft der H_0^1-Elliptizität zu zeigen. Man hat

$$\begin{aligned}
\hat{A}(v,v) &= A(v,v) + N(v,v) \\
&\geq \gamma\varepsilon|v|_{H^1}^2 + \int_\Omega (b \cdot \nabla v + cv)v\, dx \\
&\overset{\text{P.I.}}{=} \gamma\varepsilon|v|_{H^1}^2 + \int_\Omega (c - \tfrac{1}{2}\nabla \cdot b)v^2\, dx \\
&\geq \gamma\varepsilon|v|_{H^1}^2 + \omega\|v\|_{L^2}^2 \\
&\geq \min\{\gamma, \omega\}\left(\varepsilon|v|_{H^1}^2 + \|v\|_{L^2}^2\right) \\
&= \min\{\gamma, \omega\}|||v|||_\varepsilon^2.
\end{aligned}$$

□

Die *verallgemeinerten Aufgabenstellungen* zu (1.3) bzw. zu (1.5) lauten:
i) Finde $u \in H_0^1(\Omega)$, so daß gilt

$$A(u,v) = (f,v) \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega) \tag{1.8}$$

bzw.
ii) Finde $u \in H_0^1(\Omega)$, so daß gilt

$$\hat{A}(u,v) = (f,v) \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega), \tag{1.9}$$

wobei $A(\cdot\,,\cdot)$ bzw. $\hat{A}(\cdot\,,\cdot)$ die in (1.6) bzw. (1.7) eingeführten Bilinearformen seien.

Im folgenden soll kurz die Frage nach der Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung für die Probleme (1.8) bzw. (1.9) diskutiert werden. Eine diesbezüglich hinreichende Aussage macht das folgende

Lemma 1.13 (Lax-Milgram)
Seien X ein Hilbert-Raum, $a(\cdot\,,\cdot) : X \times X \longrightarrow I\!R$ eine stetige, X-elliptische Bilinearform und $f : X \longrightarrow I\!R$ eine stetige Linearform, d. h. es sei $f \in X^*$. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes $u \in X$ mit

$$a(u,v) \;=\; f(v) \qquad \text{für alle } v \in X.$$

Beweis. [GR94], Lemma 3.6.

Für $f \in L^2(\Omega)$ sind mit $X = H_0^1(\Omega)$ und den Sätzen 1.10 bzw. 1.12 bezüglich der Variationsprobleme (1.8) bzw. (1.9) die Voraussetzungen des Lax-Milgram-Lemmas erfüllt und somit die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung von (1.8) bzw. (1.9) sichergestellt.

Die folgende *Regularitätsaussage* beschreibt, unter welchen Voraussetzungen Lösungen $u \in H_0^1(\Omega)$ zweimal schwach differenzierbar sind. Regularitätsaussagen sind wesentlich bei Konvergenzabschätzungen für numerische Lösungsverfahren (vgl. die Kapitel 2 und 3).

Lemma 1.14 *Es seien $u \in H_0^1(\Omega)$ und $f \in L^2(\Omega)$. Dann ist $u \in H^2(\Omega)$, und es gilt*

$$\|u\|_{H^2} \;\lesssim\; \frac{1}{\varepsilon}\left(1 + C_\infty + \frac{B_\infty}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\|f\|_{L^2}. \tag{1.10}$$

Beweis. Seien $u \in H_0^1(\Omega)$ und $f \in L^2(\Omega)$ mit $-\varepsilon\nabla\cdot(a\nabla u) + b\cdot\nabla u + cu = f$. Aus der Konvexität des Gebietes Ω folgt zunächst (vgl. [GT83])

$$\|u\|_{H^2} \;\le\; C_R\|\nabla\cdot(a\nabla u)\|_{L^2} \quad \text{mit } 0 < C_R \neq C_R(\varepsilon).$$

Weiterhin hat man

$$\begin{aligned} \|-\varepsilon\nabla\cdot(a\nabla u)\|_{L^2} \;&\le\; \|f\|_{L^2} + C_\infty\|u\|_{L^2} + B_\infty|u|_{H^1} \\ &\le\; \|f\|_{L^2} + \left(C_\infty + \frac{B_\infty}{\sqrt{\varepsilon}}\right)|||u|||_\varepsilon. \end{aligned}$$

Um die rechte Seite weiter abschätzen zu können, betrachtet man

$$\begin{aligned} \varepsilon\gamma|u|_{H^1}^2 + \omega\|u\|_{L^2}^2 \;&=\; \varepsilon\int_\Omega \gamma|\nabla u|^2\,dx + \int_\Omega \omega u^2\,dx \\ &\le\; \varepsilon\int_\Omega a\nabla u\nabla u\,dx + \int_\Omega \left(c - \frac{1}{2}\nabla\cdot b\right)u^2\,dx \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\stackrel{\text{P. I.}}{=} \int_\Omega \big[-\varepsilon\nabla\cdot(a\nabla u)\big]u\,dx + \int_\Omega (b\nabla u + cu)u\,dx \\
&= \int_\Omega f u\,dx \\
&\stackrel{\text{Hölder}}{\leq} \|f\|_{L^2}\|u\|_{L^2}.
\end{aligned}
$$

Aus dieser Abschätzung erhält man

$$
\|u\|_{L^2}^2 \;\leq\; \frac{1}{\omega^2}\|f\|_{L^2}^2 \quad \text{und} \quad \varepsilon|u|_{H^1}^2 \;\leq\; \frac{1}{\omega\gamma}\|f\|_{L^2}^2;
$$

somit folgt

$$
|||u|||_\varepsilon \;\leq\; \frac{\sqrt{\omega+\gamma}}{\sqrt{\gamma}\omega}\|f\|_{L^2}.
$$

Einsetzen ergibt schließlich

$$
\begin{aligned}
\varepsilon\|u\|_{H^2} &\leq C_R\varepsilon\|\nabla\cdot(a\nabla u)\|_{L^2} \\
&\leq C_R\left[1 + \left(C_\infty + \frac{B_\infty}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\frac{\sqrt{\omega+\gamma}}{\sqrt{\gamma}\omega}\right]\|f\|_{L^2}.
\end{aligned}
$$

Das Zusammenfassen der von ε unabhängigen Konstanten liefert das Ergebnis. □

1.3.2 Approximation von Variationsproblemen

Bei der näherungsweisen Behandlung der Variationsprobleme (1.8) bzw. (1.9) legt man nicht den Raum $H_0^1(\Omega)$ als Lösungsraum zugrunde, sondern berechnet die Lösung in einem endlich-dimensionalen Teilraum $V_h \subset H_0^1(\Omega)$. Es bezeichnet h dabei die Diskretisierungsschrittweite.

Definition 1.15 *Die Aufgabe*
Finde $u_h \in V_h$, so daß gilt

$$
A(u_h, v) \;=\; (f, v) \quad \text{bzw.} \quad \hat{A}(u_h, v) \;=\; (f, v) \quad \text{für alle } v \in V_h \tag{1.11}
$$

heißt Galerkin-Verfahren *zum Variationsproblem (1.8) bzw. (1.9).*

Die Existenz und Eindeutigkeit einer solchen Lösung u_h kann aufgrund der Konformität $V_h \subset H_0^1(\Omega)$ aus der Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung der zugehörigen Variationsprobleme (1.8) bzw. (1.9) gefolgert werden, da sich die auf $H_0^1(\Omega)$ gültigen Eigenschaften auf den Teilraum V_h übertragen lassen.

Bemerkung 1.16 Wird die Bilinearform des betrachteten Variationsproblems als symmetrisch vorausgesetzt, so heißt das entsprechende Verfahren *Ritz-Galerkin-Verfahren.* Von *Petrov-Galerkin-Verfahren* dagegen spricht man, wenn der Ansatzraum und der Testraum als nichtidentisch gewählt werden, d. h. wenn man Probleme der Art
Finde $u_h \in V_h$*, so daß gilt*

$$a(u_h, v) \;=\; (f, v) \quad \textit{für alle } v \in W_h$$

mit einer Bilinearform $a(\cdot,\cdot)$, einem Ansatzraum V_h und einem Testraum W_h betrachtet, und dabei $V_h \neq W_h$ gilt. $\diamond$

Bemerkung 1.17 Man kann zeigen, daß das Galerkin-Verfahren (1.11) äquivalent zu einem linearen Gleichungssystem ist (vgl. [Lub96], Satz 5.3). Es ist für die numerische Lösung erstrebenswert, dieses Gleichungssystem dünn besetzt zu halten. Dies kann man durch die geeignete Wahl eines Ansatzraumes erreichen (vgl. dazu Abschnitt 1.4). $\diamond$

1.4 Die Finite-Element-Methode

Die *Finite-Element-Methode* (FEM) kann als ein spezielles Galerkin-Verfahren aufgefaßt werden, bei dem die Ansatz- und Testfunktionen stückweise definierte Funktionen mit kleinem Träger, meist Polynome, sind. Dadurch wird erreicht, daß das dem Galerkin-Verfahren äquivalente lineare Gleichungssystem dünn besetzt ist (vgl. Bemerkung 1.17).

Die FEM zeichnet sich im wesentlichen durch folgende Merkmale aus:

- Zerlegung des zugrunde gelegten Lösungsgebietes in geometrisch einfache Teilgebiete (vgl. Abschnitt 1.4.1),
- Definition von Ansatz- und Testfunktionen über den Teilgebieten (vgl. Abschnitt 1.4.2) und
- Sicherung globaler Eigenschaften, beispielsweise die der Konformität (vgl. Abschnitt 1.4.2).

1.4.1 Zerlegungen

Sei $\Omega \subset I\!R^2$ ein konvexes, polygonales Gebiet. Der erste Schritt der FEM besteht aus einer geeigneten Zerlegung des Grundgebietes Ω in Teilgebiete einfacher geometrischer Struktur, die selbst wieder polygonal und konvex sind. Über diesen Teilgebieten werden dann die Ansatzfunktionen stückweise definiert. Die Zerlegung soll dabei gewisse Voraussetzungen erfüllen.

Definition 1.18 *Eine Zerlegung heißt* zulässig, *falls für zwei beliebige Elemente T_i und T_j der Zerlegung genau einer der folgenden vier Fälle eintritt:*

i) $T_i = T_j$,

ii) $\overline{T_i} \cap \overline{T_j}$ *bildet eine vollständige Kante sowohl von T_i als auch von T_j,*

iii) $\overline{T_i} \cap \overline{T_j}$ *beschreibt einen Eckpunkt sowohl von T_i als auch von T_j,*

iv) $\overline{T_i} \cap \overline{T_j} = \emptyset$

und darüberhinaus $\overline{\Omega} = \cup_{i=1}^{M} T_i$ gilt mit $M < \infty$.

Bei zulässigen Zerlegungen wird demnach ausgeschlossen, daß eine Kante eines Elementes T_i eine echte Teilmenge einer Kante eines von T_i verschiedenen Elementes T_j bildet.

Definition 1.19 *Eine Zerlegung heißt* quasi-uniform, *falls es Konstanten $0 < C_1 < C_2$ gibt, so daß in jedes Element der Zerlegung ein Kreis mit dem Radius $C_1 h$ einbeschrieben und jedes Element der Zerlegung von einem Kreis mit dem Radius $C_2 h$ umschrieben werden kann.*

Bemerkung 1.20 Für Dreieckszerlegungen kann die Quasi-Uniformität geometrisch interpretiert werden. Die Erfüllung der sogenannten *Zlámal-Bedingung*

$$\rho \;\geq\; \rho' \;>\; 0$$

für beliebige Innenwinkel ρ aller auftretenden Dreiecke ist hinreichend für die Quasi-Uniformität der Zerlegung. $\diamond$

Im folgenden sei das Gebiet Ω durch eine zulässige, quasi-uniforme Triangulierung $\mathcal{T}_h = \{T_i\}$ in Dreiecke mit maximaler Seitenlänge $h \in (0,1)$ zerlegt.

Als Beispiel einer Zerlegungsstrategie für konforme Gitter soll hier kurz das Verfahren der *roten Verfeinerung* vorgestellt werden. Es handelt sich hierbei um eine lokale Verfeinerungstechnik.

Die rote Verfeinerung

Bei der Methode der roten Verfeinerung wird das Grundgebiet Ω zunächst mit einem groben zulässigen, quasi-uniformen Ausgangsgitter überdeckt. Das nächstfeinere Gitter erhält man dadurch, daß man die Kantenmittelpunkte der Dreiecke des Ausgangsgitters verbindet und somit jedes Dreieck in vier kongruente Teildreiecke zerlegt. Diesen Verfeinerungsprozess setzt man sukzessive fort, bis man die gewünschte Feinheit der Triangulierung erhalten hat.

Der Vorteil dieser Methode liegt darin, daß sich die Verhältnisse zwischen den Innen- und Außenradien der nächstfeineren Dreiecke gegenüber den nächstgröberen Dreiecken nicht ändern und somit die Eigenschaft der Quasi-Uniformität auf dem nächstfeineren Gitter erhalten bleibt.

1.4.2 Finite-Element-Räume

Zu einer gegebenen Triangulierung $\mathcal{T}_h$ wird ein Finite-Element-Raum $V_h \subset V \equiv H_0^1(\Omega)$ definiert durch

$$V_h \; := \; \big\{ v \in C(\overline{\Omega}) : \; v|_T \in V_T^r \; \text{ für alle } T \in \mathcal{T}_h, \; v|_{\partial\Omega} = 0 \big\}, \qquad (1.12)$$

wobei V_T^r der Raum der Polynome vom Grad $\leq r$ sei.

Es werden hierbei Funktionen herangezogen, die nur stetig und nicht notwendig stetig differenzierbar sind. Sie sind also weit weniger glatt, als man es von klassischen Lösungen der Randwertprobleme fordert (vgl. Definition 1.1).

Zum Nachweis der Konformitätsbedingung $V_h \subset V \equiv H_0^1(\Omega)$ kann man den folgenden Satz heranziehen (vgl. [Cia91], Theorem 5.1):

Satz 1.21 *Gelten die Inklusionen $V_T^r \subset H^1(T)$ für alle $T \in \mathcal{T}_h$ und $V_h \subset C(\overline{\Omega})$, so folgt*

$$V_h \subset H_0^1(\Omega) \equiv V.$$

Der durch (1.12) eingeführte Finite-Element-Raum V_h genügt der folgenden *Approximationseigenschaft.*

Lemma 1.22 *Für alle $v \in W_p^k(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, $2 \leq k \leq r+1$ und $1 \leq p \leq q \leq \infty$ gilt*

$$\inf_{\chi \in V_h} \big\{ \|v - \chi\|_{L^q} + h \|v - \chi\|_{W_q^1} \big\} \;\leq\; C_A \, h^{k - \frac{2}{p} + \frac{2}{q}} |v|_{W_p^k}, \qquad (1.13)$$

wobei C_A eine von ε unabhängige, positive Konstante ist.

Die *Interpolierende* u_I des durch (1.12) eingeführten Finite-Element-Raumes V_h erfüllt die *lokale Interpolationsaussage* (vgl. [BS94], Kapitel 4.4):

Lemma 1.23 *Für alle $u \in H^{r+1}(T)$ mit $r \geq 1$ gilt auf jedem Element T der Zerlegung $\mathcal{T}_h$*

$$\|u - u_I\|_{H^m(T)} \;\leq\; C_I \, h_T^{r+1-m} |u|_{H^{r+1}(T)}, \qquad m = 0, 1, 2, \qquad (1.14)$$

wobei C_I eine von ε unabhängige, positive Konstante ist.

1.5 Galerkin-Projektionen

In diesem Abschnitt sollen der *Galerkin-Projektor* eingeführt und einige in diesem Zusammenhang wichtige Hilfsabschätzungen betrachtet werden.

Definition 1.24 *Bezüglich der Bilinearform $A(\cdot,\cdot)$ aus (1.6) wird der Galerkin-Projektor $P_h : V \longrightarrow V_h$ definiert durch*

$$A(P_h v, \chi) \;=\; A(v, \chi) \quad \text{für alle } v \in V, \; \chi \in V_h. \qquad (1.15)$$

Der Galerkin-Projektor P_h bildet die Lösung $u \in V$ des Variationsproblems in V auf die Lösung $u_h \in V_h$ des Variationsproblems in V_h ab, denn es gilt

$$(f, \chi) \;=\; A(u, \chi) \;=\; A(P_h u, \chi), \tag{1.16}$$

und da u_h als eindeutige Lösung des Variationsproblems in V_h vorausgesetzt wurde, folgt daraus $P_h u = u_h$.

Definition 1.25 *Bezüglich des Variationsproblems (1.9) wird der zugehörige Galerkin-Projektor $\hat{P}_h : V \longrightarrow V_h$ entsprechend definiert durch*

$$\hat{A}(\hat{P}_h v, \chi) \;=\; \hat{A}(v, \chi) \quad \textit{für alle } v \in V,\ \chi \in V_h. \tag{1.17}$$

Für die Konvergenzabschätzungen in Kapitel 2 ist das folgende Lemma ein wichtiges Hilfsmittel.

Lemma 1.26 *Die Projektion $\hat{P}_h$ erlaubt für alle $u \in H^{r+1}(\Omega)$ mit $r \geq 0$ die Abschätzungen*

$$\begin{aligned} \|u - \hat{P}_h u\|_{L^2} \;&\lesssim\; h^{r+1}\left(1 + C_\infty + \frac{B_\infty}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \\ &\quad \cdot \left[\max\{\Gamma, C_\infty\}\left(1 + \frac{h}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \frac{B_\infty h}{\varepsilon}\right]^2 |u|_{H^{r+1}} \end{aligned}$$

und

$$|||u - \hat{P}_h u|||_\varepsilon \;\lesssim\; \sqrt{\varepsilon} h^r \left[\max\{\Gamma, C_\infty\}\left(1 + \frac{h}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \frac{B_\infty h}{\varepsilon}\right] |u|_{H^{r+1}}.$$

Beweis. i) Es wird zunächst der Beweis der zweiten Abschätzung geführt. Aus (1.17) folgt für alle $\chi \in V_h$

$$\hat{A}(u - \hat{P}_h u, \chi) \;=\; 0.$$

Für beliebiges $\chi \in V_h$ liefert Satz 1.12

$$\begin{aligned} \min\{\gamma, \omega\}|||u - \hat{P}_h u|||_\varepsilon^2 \;&\leq\; \hat{A}(u - \hat{P}_h u, u - \hat{P}_h u) \\ &=\; \hat{A}(u - \hat{P}_h u, u - \chi) + \underbrace{\hat{A}(u - \hat{P}_h u, \chi - \hat{P}_h u)}_{=0,\ \text{da}\ (\chi - \hat{P}_h u) \in V_h} \\ &\leq\; \max\{\Gamma, C_\infty\}|||u - \hat{P}_h u|||_\varepsilon |||u - \chi|||_\varepsilon \\ &\quad + \frac{B_\infty}{\sqrt{\varepsilon}}|||u - \hat{P}_h u|||_\varepsilon \|u - \chi\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Daraus erhält man

$$|||u - \hat{P}_h u|||_\varepsilon \le \frac{1}{\min\{\gamma,\omega\}} \left(\max\{\Gamma, C_\infty\} |||u-\chi|||_\varepsilon + \frac{B_\infty}{\sqrt{\varepsilon}} \|u-\chi\|_{L^2} \right).$$

Nun gilt

$$\begin{aligned} |||u-\chi|||_\varepsilon^2 &= \varepsilon |u-\chi|_{H^1}^2 + \|u-\chi\|_{L^2}^2 \\ &\le \left(\sqrt{\varepsilon}|u-\chi|_{H^1} + \|u-\chi\|_{L^2}\right)^2. \end{aligned}$$

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} |||u - \hat{P}_h u|||_\varepsilon \le \frac{1}{\min\{\gamma,\omega\}} \Bigg[& \max\{\Gamma, C_\infty\}\sqrt{\varepsilon} \inf_{\chi \in V_h} |u-\chi|_{H^1} \\ & + \left(\max\{\Gamma, C_\infty\} + \frac{B_\infty}{\sqrt{\varepsilon}} \right) \inf_{\chi \in V_h} \|u-\chi\|_{L^2} \Bigg]. \end{aligned}$$

Aus der Approximationseigenschaft (1.13) folgt schließlich die Behauptung.
Speziell für $r = 0$ folgt aus

$$\inf_{\chi \in V_h} |u-\chi|_{H^1} \le |u|_{H^1} \quad \text{und} \quad \inf_{\chi \in V_h} \|u-\chi\|_{L^2} \lesssim h|u|_{H^1}$$

die Abschätzung

$$|||u - \hat{P}_h u|||_\varepsilon \lesssim \sqrt{\varepsilon} \left[\max\{\Gamma, C_\infty\} \left(1 + \frac{h}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \frac{B_\infty h}{\varepsilon} \right] |u|_{H^1}. \tag{1.18}$$

ii) Der Beweis der ersten Abschätzung wird mit Hilfe eines Dualitätsarguments geführt. Sei dazu w die Lösung des *adjungierten Problems*

$$\text{Finde } w \in V: \ \hat{A}(v,w) = (u - \hat{P}_h u, v) \ \text{ für alle } v \in V. \tag{1.19}$$

Dann folgt mit beliebigem $w_h \in V_h$

$$\begin{aligned} \|u - \hat{P}_h u\|_{L^2}^2 &= (u - \hat{P}_h u, u - \hat{P}_h u) \\ &= \hat{A}(u - \hat{P}_h u, w) \\ &= \hat{A}(u - \hat{P}_h u, w - w_h) \\ &\le \max\{\Gamma, C_\infty\} |||u - \hat{P}_h u|||_\varepsilon |||w - w_h|||_\varepsilon \\ &\quad + \frac{B_\infty}{\sqrt{\varepsilon}} |||u - \hat{P}_h u|||_\varepsilon \|w - w_h\|_{L^2} \\ &\le |||u - \hat{P}_h u|||_\varepsilon \Big[\max\{\Gamma, C_\infty\}\sqrt{\varepsilon}|w - w_h|_{H^1} \\ &\qquad + \left(\max\{\Gamma, C_\infty\} + \frac{B_\infty}{\sqrt{\varepsilon}} \right) \|w - w_h\|_{L^2} \Big]. \end{aligned}$$

Daraus erhält man

$$\begin{aligned}\|u-\hat{P}_h u\|_{L^2}^2 \;&\le\; |||u-\hat{P}_h u|||_\varepsilon \Bigg[\max\{\Gamma, C_\infty\}\sqrt{\varepsilon}\inf_{w_h\in V_h}|w-w_h|_{H^1} \\ &\qquad + \left(\max\{\Gamma, C_\infty\}+\frac{B_\infty}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\inf_{w_h\in V_h}\|w-w_h\|_{L^2}\Bigg].\end{aligned}$$

Die Approximationseigenschaft (1.13) liefert für $r=1$

$$\inf_{w_h\in V_h}|w-w_h|_{H^1} \;\le\; C_A' h\|w\|_{H^2} \quad \text{und} \quad \inf_{w_h\in V_h}\|w-w_h\|_{L^2} \;\le\; C_A' h^2\|w\|_{H^2}.$$

Weiterhin folgt aus der H^2-Regularität

$$\|w\|_{H^2} \;\lesssim\; \frac{1}{\varepsilon}\left(1+C_\infty+\frac{B_\infty}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\|u-\hat{P}_h u\|_{L^2}.$$

Eingesetzt ergibt sich

$$\begin{aligned}\|u-\hat{P}_h u\|_{L^2} \;&\lesssim\; |||u-\hat{P}_h u|||_\varepsilon \frac{C_A' h}{\varepsilon}\left(1+C_\infty+\frac{B_\infty}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \\ &\qquad \cdot\left[\max\{\Gamma, C_\infty\}\sqrt{\varepsilon}+h\left(\max\{\Gamma, C_\infty\}+\frac{B_\infty}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right].\end{aligned}$$

Die Behauptung erhält man schließlich nach Anwendung von i).
Speziell für $r=0$ folgt mit Hilfe von (1.18) die Abschätzung

$$\begin{aligned}\|u-\hat{P}_h u\|_{L^2} \;&\lesssim\; h\left(1+C_\infty+\frac{B_\infty}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \\ &\qquad \cdot\left[\max\{\Gamma, C_\infty\}\left(1+\frac{h}{\sqrt{\varepsilon}}\right)+\frac{B_\infty h}{\varepsilon}\right]^2 |u|_{H^1}. \qquad (1.20)\end{aligned}$$

□

1.6 Stabilisierte FEM für singulär gestörte Probleme

Für singulär gestörte Konvektions-Diffusions-Reaktions-Probleme des Typs (1.5) ist die Galerkin-FEM nicht stabil genug. Es wird daher eine stabile Variante der FEM benötigt, die den (für $\varepsilon \ll 1$ dominanten) Konvektionsterm geeignet berücksichtigt.

1.6.1 Die SUPG-FEM

Diese Anforderung erfüllt die *Streamline Upwind Petrov-Galerkin FEM* (SUPG-FEM). Es handelt sich hierbei um ein spezielles Petrov-Galerkin-Verfahren, bei dem Testfunktionen auf jedem Element T der Zerlegung $\mathcal{T}_h$ vom Typ

$$v+\delta_T\big(b\cdot\nabla v\big) \qquad \text{mit } v\in V_h$$

eingesetzt werden. Der Parameter $\delta_T \geq 0$ muß vom Benutzer gewählt werden. Einen guten Hinweis auf eine geeignete Wahl liefert dabei die Bedingung (1.24) aus Lemma 1.28.

Die SUPG-FEM ensteht durch Addition von gewichteten Residuen des Ausgangsproblems (1.5) zu der Galerkin-FEM. Sie entspricht der Aufgabe:
Finde $u_h \in V_h$, so daß gilt

$$\hat{A}_\delta(u_h, v) \;=\; f_\delta(v) \quad \textit{für alle } v \in V_h \tag{1.21}$$

mit

$$\hat{A}_\delta(u_h, v) \;=\; \hat{A}(u_h, v) + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \delta_T \Big(-\varepsilon \nabla \cdot \big(a \nabla u_h\big) + b \cdot \nabla u_h + c u_h, b \cdot \nabla v \Big)_T \tag{1.22}$$

und

$$f_\delta(v) \;=\; (f, v) + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \delta_T \big(f, b \cdot \nabla v\big)_T.$$

Dabei bezeichnet $(\cdot\,,\cdot)_T$ das Skalarprodukt bezüglich $L^2(T)$. Für $\delta_T = 0$ entspricht die SUPG-FEM der gewöhnlichen Galerkin-FEM.

Unter der Regularitätsannahme

$$-\varepsilon \nabla \cdot \big(a \nabla u\big) + b \cdot \nabla u + c u \;=\; f \quad \text{in } L^2(T) \quad \text{für alle } T \in \mathcal{T}_h$$

erfüllt die Lösung u des Ausgangsproblem (1.5) auch die Gleichung

$$\hat{A}_\delta(u, v) \;=\; f_\delta(v) \quad \text{für alle } v \in V_h$$

und sichert somit die Konsistenz der SUPG-FEM.

Definition 1.27 *Für alle $v \in H_0^1(\Omega)$ sei die* Energienorm *gegeben durch*

$$|||v|||_{\varepsilon,0}^2 \;:=\; \gamma \varepsilon |v|_{H^1}^2 + \omega \|v\|_{L^2}^2.$$

Bezüglich der Bilinearform $\hat{A}_\delta(\cdot\,,\cdot)$ aus (1.22) wird für alle $v \in H_0^1(\Omega)$ eine stabilisierte Energienorm $|||\cdot|||_{\varepsilon,\delta}$ *definiert durch*

$$|||v|||_{\varepsilon,\delta}^2 \;:=\; |||v|||_{\varepsilon,0}^2 + |||v|||_{0,\delta}^2,$$

wobei $|||\cdot|||_{0,\delta}$ erklärt wird durch

$$|||v|||_{0,\delta}^2 \;:=\; \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \delta_T \|b \cdot \nabla v\|_{L^2(T)}^2.$$

Für die Abschätzungen in den Beweisen der Lemmata 1.28 und 1.29 und in Abschnitt 3.2 werden für alle $T \in \mathcal{T}_h$ unter der zusätzlichen Voraussetzung $a_{ij} \in W^1_\infty(T)$, $i,j = 1,2$, die Konstanten

$$\begin{aligned} C_T &:= \|c\|_{L^\infty(T)}, \qquad B_T := \|b\|_{L^\infty(T)}, \qquad A'_T := \max_{i,j} \left\| \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} \right\|_{L^\infty(T)}, \\ B'_T &:= \|\nabla \cdot b\|_{L^\infty(T)}, \quad A_T := \max_{i,j} \|a_{ij}\|_{L^\infty(T)} \end{aligned}$$

sowie die *lokal inversen Ungleichungen* (vgl. [BS94], Kapitel 4.5)

$$|v|_{H^2(T)} \le \frac{C_{\text{inv}}}{h_T} |v|_{H^1(T)} \quad \text{und} \quad |v|_{H^1(T)} \le \frac{C'_{\text{inv}}}{h_T} \|v\|_{L^2(T)} \quad \text{für alle } v \in V_h \tag{1.23}$$

benötigt.

Lemma 1.28 *Unter der Vorraussetzung*

$$\delta_T < \frac{1}{2} \min \left\{ \frac{\gamma}{32\varepsilon (A'_T)^2}, \frac{\gamma h_T^2}{32 \varepsilon A_T^2 C_{\text{inv}}^2}, \frac{\omega}{C_T^2} \right\} \quad \textit{für alle } T \in \mathcal{T}_h \tag{1.24}$$

ist die Bilinearform $\hat{A}_\delta(\cdot\,,\cdot)$ V_h-elliptisch.

Beweis. Zunächst gilt für alle $v \in V_h$

$$\begin{aligned} &\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \delta_T \left\| \varepsilon \nabla \cdot \big(a \nabla v\big) \right\|^2_{L^2(T)} \\ &\quad = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \delta_T \varepsilon^2 \left\| \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) \right\|^2_{L^2(T)} \\ &\quad \le 2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \delta_T \varepsilon^2 \left(\left\| \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} \right\|^2_{L^2(T)} + \left\| \sum_{i,j=1}^2 a_{ij} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \right\|^2_{L^2(T)} \right) \\ &\quad \le 2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \delta_T \varepsilon^2 \left((A'_T)^2 \left\| \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial v}{\partial x_j} \right\|^2_{L^2(T)} + A_T^2 \left\| \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \right\|^2_{L^2(T)} \right) \\ &\quad \le 2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \delta_T \varepsilon^2 \left((A'_T)^2 \left\| 2 \sum_{j=1}^2 \frac{\partial v}{\partial x_j} \right\|^2_{L^2(T)} + 4 A_T^2 \sum_{i,j=1}^2 \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \right\|^2_{L^2(T)} \right) \\ &\quad \le 8 \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \delta_T \varepsilon^2 \left(2 (A'_T)^2 \sum_{j=1}^2 \left\| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right\|^2_{L^2(T)} + 2 A_T^2 \sum_{|\alpha|=2} \|D^\alpha v\|^2_{L^2(T)} \right) \\ &\quad = 16 \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \delta_T \varepsilon^2 \left((A'_T)^2 \sum_{|\alpha|=1} \|D^\alpha v\|^2_{L^2(T)} + A_T^2 |v|^2_{H^2(T)} \right) \end{aligned} \tag{1.25}$$

$$\begin{aligned}
&\overset{(1.23)}{\leq} 16 \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \delta_T \varepsilon^2 \left((A'_T)^2 + A_T^2 \frac{C_{\text{inv}}^2}{h_T^2} \right) |v|_{H^1(T)}^2 \\
&\overset{(1.24)}{\leq} \frac{1}{2}\gamma\varepsilon |v|_{H^1}^2. \qquad (1.26)
\end{aligned}$$

Die Gleichung (1.25) gilt auch noch für $v \in V \cap H^2(T)$ für alle $T \in \mathcal{T}_h$, d. h. man hat

$$\sum_{T\in\mathcal{T}_h} \delta_T \left\| \varepsilon \nabla \cdot \big(a \nabla v \big) \right\|_{L^2(T)}^2 \overset{(1.24)}{\leq} \frac{1}{4}\gamma\varepsilon |v|_{H^1}^2 + 16 \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \delta_T \varepsilon^2 A_T^2 |v|_{H^2(T)}^2. \qquad (1.27)$$

Nun ergibt sich für alle $v \in V_h$

$$\begin{aligned}
\hat{A}_\delta(v,v) &= \hat{A}(v,v) + \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \delta_T \Big(-\varepsilon \nabla \cdot \big(a \nabla v \big) + b \cdot \nabla v + cv, b \cdot \nabla v \Big)_T \\
&\geq \gamma\varepsilon |v|_{H^1}^2 + \omega \|v\|_{L^2}^2 + \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \delta_T \|b \cdot \nabla v\|_{L^2(T)}^2 \\
&\quad + \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \delta_T \Big(-\varepsilon \nabla \cdot \big(a \nabla v \big) + cv, b \cdot \nabla v \Big)_T \\
&\geq |||v|||_{\varepsilon,\delta}^2 - \left| \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \delta_T \Big(-\varepsilon \nabla \cdot \big(a \nabla v \big) + cv, b \cdot \nabla v \Big)_T \right| \\
&\geq |||v|||_{\varepsilon,\delta}^2 - \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \delta_T \left\| \varepsilon \nabla \cdot \big(a \nabla v \big) \right\|_{L^2(T)} \|b \cdot \nabla v\|_{L^2(T)} \\
&\quad - \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \delta_T \|cv\|_{L^2(T)} \|b \cdot \nabla v\|_{L^2(T)} \\
&\overset{\text{Young}}{\geq} |||v|||_{\varepsilon,\delta}^2 - \frac{1}{2L_1} \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \delta_T \left\| \varepsilon \nabla \cdot \big(a \nabla v \big) \right\|_{L^2(T)}^2 \\
&\quad - \frac{1}{2L_2} \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \delta_T C_T^2 \|v\|_{L^2(T)}^2 - \frac{L_1 + L_2}{2} |||v|||_{0,\delta}^2 \\
&\overset{(1.26),\,(1.24)}{\geq} |||v|||_{\varepsilon,\delta}^2 - \frac{1}{4L_1}\gamma\varepsilon |v|_{H^1}^2 - \frac{1}{4L_2}\omega \|v\|_{L^2}^2 - \frac{L_1 + L_2}{2} |||v|||_{0,\delta}^2.
\end{aligned}$$

Mit $L_1 = L_2 = \frac{1}{2}$ erhält man schließlich

$$\hat{A}_\delta(v,v) \geq \frac{1}{2} |||v|||_{\varepsilon,\delta}^2 \qquad \forall\, v \in V_h. \qquad (1.28)$$

□

Die Abschätzung (1.28) zeigt, daß man durch die Stabilisierung der Galerkin-FEM für $\delta_T \neq 0$ unter Benutzung der Norm $|||\cdot|||_{\varepsilon,\delta}$ zusätzliche Kontrolle über die Ableitung der Lösung in Strömungsrichtung gewonnen hat.

Die SUPG-FEM ist in der Literatur auch unter dem Namen *Streamline Diffusion FEM* (SD-FEM) bekannt (vgl. [RST96]).

Im Hinblick auf Kapitel 3 schreibt man für die folgende Abschätzung die Bilinearform $\hat{A}_\delta(\cdot,\cdot)$ aus (1.22) (nach partieller Integration) in einer äquivalenten Schreibweise als

$$\begin{aligned}\hat{A}_\delta(u,v) &= \varepsilon(a\nabla u,\nabla v)+\big((c-\tfrac{1}{2}\nabla\cdot b)u,v\big)+\frac{1}{2}\big[(b\cdot\nabla u,v)-(b\cdot\nabla v,u)\big]\\ &\quad+\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\delta_T\Big(-\varepsilon\nabla\cdot\big(a\nabla u\big)+b\cdot\nabla u+cu,b\cdot\nabla v\Big)_T\end{aligned}$$

(vgl. 3.2). Als zusätzliche Voraussetzung gelte

$$\exists\,\kappa>0:\ \ \big|c-\nabla\cdot b\big|\ \le\ \kappa\omega.$$

Man erhält für $\hat{A}_\delta(\cdot\,,\cdot)$ die folgende Stetigkeitsaussage.

Lemma 1.29 *Unter der Voraussetzung (1.24) gilt für $u\in V\cap H^2(T)$ für alle $T\in\mathcal{T}_h$ und $v\in V_h$*

$$|\hat{A}_\delta(u,v)|\ \le\ \frac{1}{4}|||v|||^2_{\varepsilon,\delta}+2\left(K|||u|||^2_{\varepsilon,\delta}+\sum_{T\in\mathcal{T}_h}Z_T\|u\|^2_{L^2(T)}+64\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\delta_T\varepsilon^2A_T^2|u|^2_{H^2(T)}\right)$$

mit $K=\max\big\{\frac{\Gamma^2}{\gamma^2}+1,\kappa^2+2\big\}$ *und* $Z_T=\min\big\{\frac{1}{\delta_T},\frac{B_T^2}{\gamma\varepsilon}\big\}$.

Beweis. Seien $u\in V\cap H^2(T)$ für alle $T\in\mathcal{T}_h$ und $v\in V_h$.
Zunächst gilt

$$\begin{aligned}|(b\cdot\nabla v,u)| &\le \sum_{T\in\mathcal{T}_h}\|u\|_{L^2(T)}\|b\cdot\nabla v\|_{L^2(T)}\\ &\le \begin{cases}\left(\displaystyle\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\tfrac{1}{\delta_T}\|u\|^2_{L^2(T)}\right)^{\frac{1}{2}}|||v|||_{0,\delta} & \text{für } \delta_T>0,\\ \left(\displaystyle\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\tfrac{B_T^2}{\varepsilon\gamma}\|u\|^2_{L^2(T)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\displaystyle\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\varepsilon\gamma|v|^2_{H^1(T)}\right)^{\frac{1}{2}} & \text{für } \delta_T\ge 0\end{cases}\\ &\le \left(\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\underbrace{\min\big\{\tfrac{1}{\delta_T},\tfrac{B_T^2}{\varepsilon\gamma}\big\}}_{=:\,Z_T}\|u\|^2_{L^2(T)}\right)^{\frac{1}{2}}|||v|||_{\varepsilon,\delta}.\end{aligned}\tag{1.29}$$

Nun ergibt sich

$$
\begin{aligned}
&\left|\hat{A}_\delta(u,v)\right| \\
\overset{\text{P.I.}}{\leq}\;& \left|\varepsilon(a\nabla u,\nabla v)\right| + \left|\big((c-\nabla\cdot b)u,v\big)\right| + \left|(b\cdot\nabla v,u)\right| \\
&+ \left|\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\delta_T(b\cdot\nabla u,b\cdot\nabla v)_T\right| + \left|\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\delta_T\big(-\varepsilon\nabla\cdot(a\nabla u),b\cdot\nabla v\big)_T\right| \\
&+ \left|\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\delta_T(cu,b\cdot\nabla v)_T\right| \\
\overset{(1.29)}{\leq}\;& \Gamma\varepsilon|u|_{H^1}|v|_{H^1} + \kappa\omega\|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2} + \left(\sum_{T\in\mathcal{T}_h} Z_T\|u\|^2_{L^2(T)}\right)^{\frac{1}{2}} |||v|||_{\varepsilon,\delta} \\
&+ |||u|||_{0,\delta}|||v|||_{0,\delta} + \left(\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\delta_T\|\varepsilon\nabla\cdot(a\nabla u)\|^2_{L^2(T)}\right)^{\frac{1}{2}} |||v|||_{0,\delta} \\
&+ \left(\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\delta_T C_T^2\|u\|^2_{L^2(T)}\right)^{\frac{1}{2}} |||v|||_{0,\delta} \\
\overset{(1.27),\,(1.24)}{\leq}\;& \frac{L_1+L_3}{2}\gamma\varepsilon|v|^2_{H^1} + \frac{L_2+L_3}{2}\omega\|v\|^2_{L^2} + \frac{L_3+L_4+L_5+L_6}{2}|||v|||^2_{0,\delta} \\
&+ \left(\frac{\Gamma^2}{2L_1\gamma^2} + \frac{1}{8L_5}\right)\gamma\varepsilon|u|^2_{H^1} + \left(\frac{\kappa^2}{2L_2} + \frac{1}{4L_6}\right)\omega\|u\|^2_{L^2} + \frac{1}{2L_4}|||u|||^2_{0,\delta} \\
&+ \frac{1}{2L_3}\sum_{T\in\mathcal{T}_h} Z_T\|u\|^2_{L^2(T)} + \frac{8}{L_5}\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\delta_T\varepsilon^2 A_T^2|u|^2_{H^2(T)}.
\end{aligned}
$$

Die Wahl $L_1 = L_2 = L_3 = \frac{1}{4}$, $L_4 = \frac{1}{8}$, $L_5 = L_6 = \frac{1}{16}$ und geeignetes Zusammenfassen liefern schließlich die Behauptung. □

Bemerkung 1.30 Für $u,\, v \in V_h$ ergibt sich unter der Bedingung (1.24)

$$
|\hat{A}_\delta(u,v)| \;\leq\; \frac{1}{4}|||v|||^2_{\varepsilon,\delta} + 2\left[\big(K+2\big)|||u|||^2_{\varepsilon,\delta} + \sum_{T\in\mathcal{T}_h} Z_T\|u\|^2_{L^2(T)}\right] \tag{1.30}
$$

mit $K = \max\left\{\frac{\Gamma^2}{\gamma^2}, \kappa^2\right\}$ und $Z_T = \min\left\{\frac{1}{\delta_T}, \frac{B_T^2}{\gamma\varepsilon}\right\}$.
Man erhält diese Abschätzung, indem man im Beweis zu Lemma 1.29 statt der Abschätzung (1.27) die für diskrete u gültige Abschätzung (1.26) verwendet. ◇

1.6.2 Die SUPG-Projektion

Abschließend soll der SUPG-Projektor bezüglich der Bilinearform $\hat{A}_\delta(\cdot,\cdot)$ betrachtet werden.

Definition 1.31 *Der SUPG-Projektor $\hat{P}_h^\delta : V \longrightarrow V_h$ bezüglich der Bilinearform $\hat{A}_\delta(\cdot,\cdot)$ aus (1.22) wird definiert durch*

$$\hat{A}_\delta(\hat{P}_h^\delta v, \chi) \;=\; \hat{A}_\delta(v,\chi) \quad \textit{für alle } v \in V,\ \chi \in V_h. \tag{1.31}$$

Für die Konvergenzabschätzungen der Algorithmen in Kapitel 3 wird eine Abschätzung des Fehlers $(u - \hat{P}_h^\delta u)$ in der $|||\cdot|||_{\varepsilon,\delta}$-Norm benötigt.

Lemma 1.32 *Die Projektion $\hat{P}_h^\delta$ erlaubt mit der Bedingung (1.24) und der Wahl*

$$\delta_T \;\sim\; \min\left\{\frac{h_T}{B_T}, \frac{h_T^2}{\varepsilon}\right\} \tag{1.32}$$

für alle $u \in H^{r+1}(T)$ für alle $T \in \mathcal{T}_h$ und $r \geq 1$ die Abschätzung

$$|||u - \hat{P}_h^\delta u|||_{\varepsilon,\delta} \;\lesssim\; \left(\sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^{2r} G_T^2 |u|^2_{H^{r+1}(T)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

mit $G_T^2 := (\gamma+1)\varepsilon + B_T h_T + \omega h_T^2$.

Beweis. Man zerlegt zunächst $(u - \hat{P}_h^\delta u)$ durch

$$u - \hat{P}_h^\delta u \;=\; (u - u_I) + (u_I - \hat{P}_h^\delta u),$$

wobei u_I die Interpolierende zu u bezüglich V_h ist. Nun wird zunächst $|||u_I - \hat{P}_h^\delta u|||_{\varepsilon,\delta}$ abgeschätzt. Dabei gilt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}|||u_I - \hat{P}_h^\delta u|||^2_{\varepsilon,\delta} &\overset{(1.28)}{\leq} \hat{A}_\delta(u_I - \hat{P}_h^\delta u, u_I - \hat{P}_h^\delta u) \\
&= \hat{A}_\delta(u_I - u, u_I - \hat{P}_h^\delta u) + \underbrace{\hat{A}_\delta(u - \hat{P}_h^\delta u, u_I - \hat{P}_h^\delta u)}_{=0 \text{ nach Def. } 1.31} \\
&\overset{\text{L.1.29}}{\leq} \frac{1}{4}|||u_I - \hat{P}_h^\delta u|||^2_{\varepsilon,\delta} + 2\Bigg(K\,|||u_I - u|||^2_{\varepsilon,\delta} \\
&\qquad + \sum_{T\in\mathcal{T}_h} Z_T \|u_I - u\|^2_{L^2(T)} + 64 \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \delta_T \varepsilon^2 A_T^2 |u_I - u|^2_{H^2(T)}\Bigg).
\end{aligned}$$

Daraus erhält man

$$
\begin{aligned}
|||u_I - \hat{P}_h^\delta u|||_{\varepsilon,\delta}^2 \quad \le \quad & 8 \Bigg(K\,|||u_I - u|||_{\varepsilon,\delta}^2 + \sum_{T\in\mathcal{T}_h} Z_T \|u_I - u\|_{L^2(T)}^2 \\
& + 64 \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \delta_T \varepsilon^2 A_T^2 |u_I - u|_{H^2(T)}^2 \Bigg). \qquad (1.33)
\end{aligned}
$$

Anwendung der Dreiecksungleichung ergibt

$$
\begin{aligned}
|||u - \hat{P}_h^\delta u|||_{\varepsilon,\delta}^2 \quad & \le \quad 2 \left(|||u - u_I|||_{\varepsilon,\delta}^2 + |||u_I - \hat{P}_h^\delta u|||_{\varepsilon,\delta}^2 \right) \\
& \overset{(1.33)}{\le} \quad C \Bigg(|||u - u_I|||_{\varepsilon,\delta}^2 + \sum_{T\in\mathcal{T}_h} Z_T \|u_I - u\|_{L^2(T)}^2 \\
& \qquad + \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \delta_T \varepsilon^2 |u_I - u|_{H^2(T)}^2 \Bigg)
\end{aligned}
$$

mit $C := \max\left\{16K + 2, 1024 A_T^2\right\}$. Die Anwendung der Interpolationsaussage (1.14) liefert

$$
\begin{aligned}
|||u - u_I|||_{\varepsilon,\delta}^2 \quad & \lesssim \quad \sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^{2r} \left(\varepsilon\gamma + \omega h_T^2 + \delta_T B_T^2 \right) |u|_{H^{r+1}(T)}^2, \\
\sum_{T\in\mathcal{T}_h} Z_T \|u_I - u\|_{L^2(T)}^2 \quad & \lesssim \quad \sum_{T\in\mathcal{T}_h} Z_T h_T^{2r+2} |u|_{H^{r+1}(T)}^2, \\
\sum_{T\in\mathcal{T}_h} \delta_T \varepsilon^2 |u_I - u|_{H^2(T)}^2 \quad & \lesssim \quad \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \delta_T \varepsilon^2 h_T^{2r-2} |u|_{H^{r+1}(T)}^2
\end{aligned}
$$

und somit

$$
|||u - \hat{P}_h^\delta u|||_{\varepsilon,\delta}^2 \lesssim \sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^{2r} \left(\varepsilon\gamma + \omega h_T^2 + \delta_T B_T^2 + Z_T h_T^2 + \delta_T \varepsilon^2 h_T^{-2} \right) |u|_{H^{r+1}(T)}^2.
$$

Eine optimale Wahl für δ_T erhält man durch das Balancieren der Terme

$$
\delta_T B_T^2 \ \sim \ Z_T h_T^2 \ = \ h_T^2 \min\left\{ \tfrac{1}{\delta_T}, \tfrac{B_T^2}{\gamma\varepsilon} \right\}.
$$

Es ergibt sich

$$
\delta_T \ \sim \ \begin{cases} \frac{h_T}{B_T}, & \text{falls } Pe_T \ge 1, \\ \frac{h_T^2}{\varepsilon}, & \text{falls } Pe_T \le 1 \end{cases}
$$

mit der *Gitter-Peclét-Zahl* $Pe_T := \frac{B_T h_T}{\varepsilon}$.

Damit erhält man

$$Z_T h_T^2,\ \delta_T B_T^2 \ \sim\ B_T h_T \quad \text{und} \quad \delta_T \varepsilon^2 h_T^{-2} \ \sim\ \varepsilon.$$

Einsetzen liefert schließlich die Behauptung. □

Bemerkung 1.33 Man beachte, daß sich die Bedingungen (1.24) und (1.32) nicht widersprechen. ◇

Es wird weiterhin eine Abschätzung des Fehlers $(u - \hat{P}_h^\delta u)$ in der $\|\cdot\|_{L^2}$-Norm benötigt.

Lemma 1.34 *Die Projektion $\hat{P}_h^\delta$ erlaubt unter den Bedingungen (1.24) und (1.32) für alle $u \in H^{r+1}(T)$ für alle $T \in \mathcal{T}_h$ und $r \geq 1$ die Abschätzung*

$$\|u - \hat{P}_h^\delta u\|_{L^2} \ \lesssim\ \left(\sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^{2r} G_T^2 |u|^2_{H^{r+1}(T)} \right)^{\frac{1}{2}} \sup_{T\in\mathcal{T}_h} \left(\frac{h_T G_T}{\varepsilon} \right) \left(1 + C_\infty + \frac{B_\infty}{\sqrt{\varepsilon}} \right)$$

mit $G_T^2 := (\gamma+1)\varepsilon + B_T h_T + \omega h_T^2$.

Beweis. Der Beweis wird über ein Dualitätsargument geführt. Sei dazu w die Lösung des adjungierten Problems

$$\text{Finde } w \in V: \ \hat{A}(v,w) \ = \ (u - \hat{P}_h^\delta u, v) \ \text{ für alle } v \in V.$$

Mit $e := u - \hat{P}_h^\delta u$ gilt dann

$$\|e\|_{L^2}^2 \ = \ (e,e) \ = \ \hat{A}(e,w).$$

Daraus ergibt sich mit der Interpolierenden $w_I \in V_h$

$$\begin{aligned}
\hat{A}_\delta(e, w - w_I) \ &= \ \hat{A}_\delta(e,w) - \underbrace{\hat{A}_\delta(e,w_I)}_{=0} \\
&\stackrel{\text{Def.}}{=} \ \hat{A}(e,w) + \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \delta_T \big(-\varepsilon\nabla\cdot(a\nabla e) + b\cdot\nabla e + ce, b\cdot\nabla w \big)_T \\
&= \ \|e\|_{L^2}^2 + \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \delta_T \big(-\varepsilon\nabla\cdot(a\nabla e) + b\cdot\nabla e + ce, b\cdot\nabla w \big)_T.
\end{aligned}$$

Man erhält damit

$$\|e\|_{L^2}^2 \ = \ \hat{A}_\delta(e, w - w_I) - \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \delta_T \big(-\varepsilon\nabla\cdot(a\nabla e) + b\cdot\nabla e + ce, b\cdot\nabla w \big)_T$$

$$\leq \quad \left|\hat{A}_\delta(e, w - w_I)\right| + \left|\sum_{T\in\mathcal{T}_h} \delta_T\big(-\varepsilon\nabla\cdot(a\nabla e) + b\cdot\nabla e + ce, b\cdot\nabla w\big)_T\right|. \qquad (1.34)$$

Für die weiteren Abschätzungen wird das folgende Lemma benötigt.

Lemma 1.35 *Bezüglich des Residuums ergibt sich unter den Bedingungen (1.24) und (1.32) die Abschätzung*

$$\sum_{T\in\mathcal{T}_h} \delta_T\|-\varepsilon\nabla\cdot(a\nabla e) + b\cdot\nabla e + ce\|^2_{L^2(T)} \;\lesssim\; \sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^{2r} G_T^2 |u|^2_{H^{r+1}(T)}$$

mit $G_T^2 := (\gamma+1)\varepsilon + B_T h_T + \omega h_T^2$.

Beweis. Es gilt zunächst

$$\begin{aligned}
&\sum_{T\in\mathcal{T}_h} \delta_T\|-\varepsilon\nabla\cdot(a\nabla e) + b\cdot\nabla e + ce\|^2_{L^2(T)} \\
&\qquad \leq \quad 3\sum_{T\in\mathcal{T}_h} \delta_T\left(\|\varepsilon\nabla\cdot(a\nabla e)\|^2_{L^2(T)} + \|b\cdot\nabla e\|^2_{L^2(T)} + \|ce\|^2_{L^2(T)}\right). \qquad (1.35)
\end{aligned}$$

Weiterhin hat man mit $\delta_T\varepsilon^2 \sim \varepsilon h_T^2$ aus (1.32)

$$\begin{aligned}
&\sum_{T\in\mathcal{T}_h} \delta_T\|\varepsilon\nabla\cdot(a\nabla e)\|^2_{L^2(T)} \\
&\quad \leq \quad 2\sum_{T\in\mathcal{T}_h} \delta_T\left(\|\varepsilon\nabla\cdot\big(a\nabla(u-u_I)\big)\|^2_{L^2(T)} + \|\varepsilon\nabla\cdot\big(a\nabla(u_I - \hat{P}_h^\delta u)\big)\|^2_{L^2(T)}\right) \\
&\quad \overset{(1.27),\,(1.26)}{\leq} \quad \left(\frac{1}{2}\gamma\varepsilon|u-u_I|^2_{H^1} + 32\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\delta_T\varepsilon^2 A_T^2|u-u_I|^2_{H^2(T)}\right) + \gamma\varepsilon|u_I - \hat{P}_h^\delta u|^2_{H^1} \\
&\quad \overset{(1.14)}{\lesssim} \quad \sum_{T\in\mathcal{T}_h}\left(\gamma\varepsilon h_T^{2r}|u|^2_{H^{r+1}(T)} + \varepsilon h_T^2 h_T^{2(r-1)}|u|^2_{H^{r+1}(T)}\right) + |||u_I - \hat{P}_h^\delta u|||^2_{\varepsilon,\delta} \\
&\quad \overset{(1.33),\,(1.14)}{\lesssim} \quad \sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^{2r}\left[(\gamma+1)\varepsilon + B_T h_T + \omega h_T^2\right]|u|^2_{H^{r+1}(T)}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\delta_T\|ce\|^2_{L^2(T)} + \sum_{T\in\mathcal{T}_h}\delta_T\|b\cdot\nabla e\|^2_{L^2(T)} \\
&\quad \overset{(1.24)}{\lesssim} \quad \omega\|e\|^2_{L^2} + |||e|||^2_{0,\delta}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \quad |||e|||^2_{\varepsilon,\delta} \\
&\overset{\text{L.1.32}}{\lesssim} \quad \sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^{2r}\left[(\gamma+1)\varepsilon + B_T h_T + \omega h_T^2\right] |u|^2_{H^{r+1}(T)}.
\end{aligned}
$$

Einsetzen in (1.35) ergibt die Behauptung. □

Mit Hilfe des Lemmas 1.35 kann nun der Beweis des Lemmas 1.34 fortgeführt und in (1.34) weiter abgeschätzt werden. Es ergibt sich zunächst mit $s := w - w_I$ und $\delta_T \sim \min\left\{\frac{h_T}{B_T}, \frac{h_T^2}{\varepsilon}\right\}$

$$
\begin{aligned}
&\left|\hat{A}_\delta(e,s)\right| \\
&\quad \leq \quad \left|\varepsilon(a\nabla e, \nabla s)\right| + \left|(ce,s)\right| + \left|(b\cdot\nabla e, s)\right| \\
&\qquad\quad + \left|\sum_{T\in\mathcal{T}_h} \delta_T\big(-\varepsilon\nabla\cdot(a\nabla e) + b\cdot\nabla e + ce, b\cdot\nabla s\big)_T\right| \\
&\quad \overset{(1.29)}{\leq} \quad \Gamma\varepsilon|e|_{H^1}|s|_{H^1} + C_\infty\|e\|_{L^2}\|s\|_{L^2} + \left(\sum_{T\in\mathcal{T}_h} Z_T\|s\|^2_{L^2(T)}\right)^{\frac{1}{2}} |||e|||_{\varepsilon,\delta} \\
&\qquad\quad + \left(\sum_{T\in\mathcal{T}_h} \delta_T\| - \varepsilon\nabla\cdot(a\nabla e) + b\cdot\nabla e + ce\|^2_{L^2(T)}\right)^{\frac{1}{2}} |||s|||_{0,\delta} \\
&\quad \overset{\text{L.1.35}}{\lesssim} \quad \left(|||e|||^2_{\varepsilon,\delta}\right)^{\frac{1}{2}} \left[|||s|||_{\varepsilon,0} + \left(\sum_{T\in\mathcal{T}_h} Z_T\|s\|^2_{L^2(T)}\right)^{\frac{1}{2}}\right] \\
&\qquad\quad + \left(\sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^{2r}\left[(\gamma+1)\varepsilon + B_T h_T + \omega h_T^2\right] |u|^2_{H^{r+1}(T)}\right)^{\frac{1}{2}} |||s|||_{0,\delta} \\
&\quad \overset{\text{L.1.32}}{\lesssim} \quad \left(\sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^{2r}\left[(\gamma+1)\varepsilon + B_T h_T + \omega h_T^2\right] |u|^2_{H^{r+1}(T)}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\qquad\quad \cdot \left(|||s|||^2_{\varepsilon,\delta} + \sum_{T\in\mathcal{T}_h} Z_T\|s\|^2_{L^2(T)}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \overset{(1.14)}{\lesssim} \quad \left(\sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^{2r}\left[(\gamma+1)\varepsilon + B_T h_T + \omega h_T^2\right] |u|^2_{H^{r+1}(T)}\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\qquad\quad \cdot \left(\sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^{2}\left[(\gamma+1)\varepsilon + B_T h_T + \omega h_T^2\right] |w|^2_{H^{2}(T)}\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

und weiterhin

$$
\begin{aligned}
&\left| \sum_{T\in\mathcal{T}_h} \delta_T \big(-\varepsilon\nabla\cdot(a\nabla e) + b\cdot\nabla e + ce, b\cdot\nabla w\big)_T \right| \\
&\leq \left(\sum_{T\in\mathcal{T}_h} \delta_T \| -\varepsilon\nabla\cdot(a\nabla e) + b\cdot\nabla e + ce\|^2_{L^2(T)} \right)^{\frac12} |||w|||_{0,\delta} \\
&\overset{\text{L.1.35}}{\lesssim} \left(\sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^{2r} \left[(\gamma+1)\varepsilon + B_T h_T + \omega h_T^2 \right] |u|^2_{H^{r+1}(T)} \right)^{\frac12} \left(\sum_{T\in\mathcal{T}_h} \delta_T B_T^2 |w|^2_{H^1(T)} \right)^{\frac12}.
\end{aligned}
$$

Eingesetzt in (1.34) erhält man mit $G_T^2 := (\gamma+1)\varepsilon + B_T h_T + \omega h_T^2$

$$
\begin{aligned}
\|e\|^2_{L^2} \lesssim & \left(\sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^{2r} G_T^2 |u|^2_{H^{r+1}(T)} \right)^{\frac12} \\
& \cdot \left[\left(\sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^2 G_T^2 |w|^2_{H^2(T)} \right)^{\frac12} + \left(\sum_{T\in\mathcal{T}_h} \delta_T B_T^2 |w|^2_{H^1(T)} \right)^{\frac12} \right]. \qquad (1.36)
\end{aligned}
$$

Aus der Regularitätsaussage (Lemma 1.14) folgt

$$
|w|_{H^2} \lesssim \frac{1}{\varepsilon} \left(1 + C_\infty + \frac{B_\infty}{\sqrt{\varepsilon}} \right) \|e\|_{L^2} \quad \text{und} \quad \sqrt{\varepsilon}|w|_{H^1} \lesssim \|e\|_{L^2}.
$$

Damit hat man

$$
\left(\sum_{T\in\mathcal{T}_h} h_T^2 G_T^2 |w|^2_{H^2(T)} \right)^{\frac12} \lesssim \sup_{T\in\mathcal{T}_h} \left(\frac{h_T G_T}{\varepsilon} \right) \left(1 + C_\infty + \frac{B_\infty}{\sqrt{\varepsilon}} \right) \|e\|_{L^2}
$$

und mit $\delta_T \lesssim \frac{h_T^2}{\varepsilon}$ aus (1.32)

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{T\in\mathcal{T}_h} \delta_T B_T^2 |w|^2_{H^1(T)} \right)^{\frac12} &\lesssim \sup_{T\in\mathcal{T}_h} \left(\frac{B_T h_T}{\varepsilon} \right) \|e\|_{L^2} \\
&\lesssim \sup_{T\in\mathcal{T}_h} \left(\frac{h_T G_T}{\varepsilon} \right) \frac{B_\infty}{\sqrt{\varepsilon}} \|e\|_{L^2}.
\end{aligned}
$$

Einsetzen in (1.36) liefert die Behauptung. □

Bemerkung 1.36 Für $\chi \in V_h$ ergibt sich unter den Bedingungen des Lemmas 1.34 die Abschätzung

$$
\|(I - \hat{P}_H^\delta)\chi\|_{L^2} \lesssim \sup_{T\in\mathcal{T}_H} \left(\frac{H_T G_T}{\varepsilon} \right) \left(1 + C_\infty + \frac{B_\infty}{\sqrt{\varepsilon}} \right) |||(I - \hat{P}_H^\delta)\chi|||_{\varepsilon,\delta} \qquad (1.37)
$$

mit $G_T^2 := (\gamma+1)\varepsilon + B_T H_T + \omega H_T^2$ für alle $T \in \mathcal{T}_H$.

Für den Beweis dieser Abschätzung überträgt man den Beweis von Lemma 1.34 von h auf H und nutzt aus, daß $\chi \in V_h$ und daher $(I - \hat{P}_H^\delta)\chi \in V_h$ ist. Dann kann man statt des Lemmas 1.35 im Beweis zu Lemma 1.34 die Abschätzung

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \delta_T \| -\varepsilon \nabla \cdot (a \nabla e) + b \cdot \nabla e + c e\|_{L^2(T)}^2 \;\lesssim\; |||e|||_{\varepsilon,\delta}^2$$

mit $e := (I - \hat{P}_H^\delta)\chi$ verwenden. Dieses Vorgehen führt schließlich zu der Abschätzung (1.37). $\diamond$

Kapitel 2

Zweigitter-Diskretisierung für lineare Probleme

In diesem Kapitel werden einige Algorithmen zur Lösung von singulär gestörten Problemen der Form

$$\begin{aligned} -\varepsilon\nabla\cdot(a\nabla u)+b\cdot\nabla u+cu &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{2.1}$$

unter den Voraussetzungen des Kapitels 1 vorgestellt und analysiert. Zugrunde liegen dabei die von *J. Xu* in [Xu96], § 4, beschriebenen Algorithmen für nichtsymmetrische und/oder indefinite Probleme der Art

$$\begin{aligned} -\nabla\cdot(a\nabla u)+b\cdot\nabla u+cu &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Diese Probleme entsprechen offensichtlich den erstgenannten Problemen im Spezialfall $\varepsilon = 1$. Ziel dieses Kapitels ist es, die von Xu entwickelten Algorithmen direkt auf den allgemeineren Fall $\varepsilon \in (0,1]$ anzuwenden (vgl. Abschnitt 2.2) und zu diskutieren, inwieweit diese Algorithmen dann noch effizient sind (vgl. Abschnitt 2.3). Als Basisverfahren wird in diesem Kapitel die gewöhnliche Galerkin-FEM (vgl. Abschnitt 1.4) verwendet.

Im Abschnitt 2.1 soll kurz die Grundidee der betrachteten Algorithmen dargelegt werden.

2.1 Idee des Verfahrens

Ausgangspunkt für die Vorgehensweise ist die Tatsache, daß die Lösung eines NSPD-Problems im allgemeinen komplizierter ist als die Lösung eines entsprechenden SPD-Problems. Es ist deshalb erstrebenswert, ein gegebenes NSPD-Problem auf ein SPD-Problem reduzieren zu können und dennoch eine gute Approximation an die NSPD-Lösung zu erhalten.

Bei der Umsetzung dieses Zieles macht man sich zunutze, daß sich der NSPD-Operator $\hat{\mathcal{L}}$ aus (1.5) nach Voraussetzung in einen SPD-Operator $\mathcal{L}$ und einen NSPD-Operator $\mathcal{N}$ niederer Ordnung zerlegen läßt. Diese Überlegungen führen zu einem speziellen Zweigitterverfahren: Im 1. Schritt dieses Verfahrens wird das diskrete NSPD-Problem in einem auf einem gröberen Gitter definierten Raum (exakt) gelöst; der 2. Schritt besteht darin, in dem auf dem feineren Gitter definierten Raum nur noch ein aus der Zerlegung des Operators $\hat{\mathcal{L}}$ und der „groben" Lösung gewonnenes SPD-Problem zu lösen.

2.2 Algorithmen und Konvergenzanalysen

Gegeben seien zwei quasi-uniforme Zerlegungen $\mathcal{T}_H$ und $\mathcal{T}_h$ von $\Omega \subset I\!R^2$ (vgl. Abschnitt 1.4.1). Dabei bedeuten H und h mit $H > h$ zwei unterschiedliche Maschenweiten, wobei genauer

$$H \;=\; O(h^\lambda) \quad \text{für ein } \lambda \in (0,1)$$

gelten soll. Weiterhin bezeichnen V_H und V_h mit $V_H \subset V_h$ die zu den Zerlegungen $\mathcal{T}_H$ und $\mathcal{T}_h$ gehörigen Finite-Element-Räume (vgl. Abschnitt 1.4.2). Dabei soll V_H der grobe und V_h der feine Raum heißen.

Sei $\hat{A}(\cdot\,,\cdot)$ die Bilinearform aus (1.7), d. h. es sei

$$\hat{A}(u,v) \;=\; A(u,v) + N(u,v) \tag{2.2}$$

mit

$$A(u,v) \;=\; \varepsilon \int_\Omega a\nabla u \cdot \nabla v\, dx \quad \text{und} \quad N(u,v) \;=\; \int_\Omega (b\cdot\nabla u + cu)v\, dx$$

für $u, v \in H_0^1(\Omega)$. Weiterhin seien $u_h \in V_h$ bzw. $u_H \in V_H$ die nach Abschnitt 1.3.1 existierenden eindeutigen Lösungen der Probleme

$$\hat{A}(u_h,\chi) \;=\; (f,\chi) \quad \text{für alle } \chi \in V_h \tag{2.3}$$

bzw.

$$\hat{A}(u_H,\varphi) \;=\; (f,\varphi) \quad \text{für alle } \varphi \in V_H. \tag{2.4}$$

Es gelten die in Kapitel 1 vereinbarten Voraussetzungen, insbesondere die daraus resultierenden Eigenschaften der Bilinearformen.

2.2.1 Der Basis-Algorithmus

Die direkte Umsetzung der Idee aus Abschnitt 2.1 liefert den folgenden Algorithmus 2.1. Er bildet die Basis für die weiteren Überlegungen.

Algorithmus 2.1

1. Finde $u_H \in V_H$, so daß gilt $\hat{A}(u_H, \varphi) = (f, \varphi)$ für alle $\varphi \in V_H$.
2. Finde $u^h \in V_h$, so daß gilt $A(u^h, \chi) = (f, \chi) - N(u_H, \chi)$ für alle $\chi \in V_h$.

Für Algorithmus 2.1 ergibt sich die folgende Konvergenzaussage.

Satz 2.1 *Sei $u^h \in V_h$ die aus Algorithmus 2.1 gewonnene Lösung für hinreichend kleines H, dann gelten unter der Voraussetzung $u \in H^{r+1}(\Omega)$ die Abschätzungen*

$$\begin{aligned}
|u_h - u^h|_{H^1} \;&\lesssim\; \frac{B_\infty + C_F C_\infty}{\varepsilon}\left(1 + C_\infty + \frac{B_\infty}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \\
&\quad \cdot \left\{ H^{r+1} + H h^r \left[\max\{\Gamma, C_\infty\}\left(1 + \frac{h}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \frac{B_\infty h}{\varepsilon}\right]\right\} \\
&\quad \cdot \left[\max\{\Gamma, C_\infty\}\left(1 + \frac{H}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \frac{B_\infty H}{\varepsilon}\right]^2 |u|_{H^{r+1}}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
|u - u^h|_{H^1} \;&\le\; |u - u_h|_{H^1} + |u_h - u^h|_{H^1} \\
&\lesssim\; |u_h - u^h|_{H^1} + h^r \left[\max\{\Gamma, C_\infty\}\left(1 + \frac{h}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \frac{B_\infty h}{\varepsilon}\right] |u|_{H^{r+1}}.
\end{aligned}$$

Beweis. Die Projektion $\hat{P}_H : V \longrightarrow V_H$ sei definiert durch

$$\hat{A}(\hat{P}_H v, \varphi) \;=\; \hat{A}(v, \varphi) \quad \text{für alle } \varphi \in V_H,\ v \in V.$$

Speziell folgt daraus wegen $V_H \subset V_h$

$$(f, \varphi) \;=\; \hat{A}(u_h, \varphi) \;=\; \hat{A}(\hat{P}_H u_h, \varphi) \quad \text{für alle } \varphi \in V_H$$

und somit $\hat{P}_H u_h = u_H$, da u_H als eindeutige Lösung von (2.4) in V_H vorausgesetzt wurde.

Es gilt nun für alle $\chi \in V_h$

$$\begin{aligned}
A(u_h - u^h, \chi) \;&=\; A(u_h, \chi) - A(u^h, \chi) \\
&=\; \hat{A}(u_h, \chi) - N(u_h, \chi) - (f, \chi) + N(u_H, \chi) \\
&=\; (f, \chi) - N(u_h - u_H, \chi) - (f, \chi) \\
&=\; -N\big((I - \hat{P}_H)u_h, \chi\big) \\
&\le\; \big|N\big((I - \hat{P}_H)u_h, \chi\big)\big|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\overset{\text{P.I.+}}{\underset{\text{Hölder}}{\leq}} \quad B_\infty \|(I-\hat{P}_H)u_h\|_{L^2}|\chi|_{H^1} + C_\infty \|(I-\hat{P}_H)u_h\|_{L^2}\|\chi\|_{L^2} \\
&\leq \quad (B_\infty + C_F C_\infty)\left(\|(I-\hat{P}_H)(u-u_h)\|_{L^2} + \|(I-\hat{P}_H)u\|_{L^2}\right)|\chi|_{H^1},
\end{aligned}$$

wobei $C_F > 0$ die Konstante aus der *Friedrichsschen Ungleichung* (vgl. [GR94], Lemma 3.2)

$$\|v\|_{L^2} \;\leq\; C_F\,|v|_{H^1} \quad \text{für alle } v \in V \tag{2.5}$$

bezeichne.
Aus Lemma 1.26 folgt (mit $h := H$)

$$\begin{aligned}
\|(I-\hat{P}_H)u\|_{L^2} \;&\lesssim\; H^{r+1}\left(1 + C_\infty + \frac{B_\infty}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \\
&\cdot \left[\max\{\Gamma, C_\infty\}\left(1+\frac{H}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \frac{B_\infty H}{\varepsilon}\right]^2 |u|_{H^{r+1}}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\|(I-\hat{P}_H)(u-u_h)\|_{L^2} \;&\overset{(1.20)}{\lesssim}\; H\left(1 + C_\infty + \frac{B_\infty}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \\
&\cdot \left[\max\{\Gamma, C_\infty\}\left(1+\frac{H}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \frac{B_\infty H}{\varepsilon}\right]^2 |u-u_h|_{H^1}.
\end{aligned}$$

Weiterhin ergibt sich mit Hilfe von Lemma 1.26

$$\begin{aligned}
|u-u_h|_{H^1} \;&=\; |(I-\hat{P}_h)u|_{H^1} \;\lesssim\; \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}|||(I-\hat{P}_h)u|||_\varepsilon \\
&\lesssim\; h^r\left[\max\{\Gamma, C_\infty\}\left(1+\frac{h}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \frac{B_\infty h}{\varepsilon}\right]|u|_{H^{r+1}}.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Andererseits folgt mit $\chi = u_h - u^h$ aus Satz 1.10

$$A(u_h - u^h, \chi) \;\geq\; \gamma\varepsilon |u_h - u^h|_{H^1}|\chi|_{H^1}.$$

Durch Zusammenfassen dieser Ergebnisse erhält man die erste Abschätzung.
Die zweite Abschätzung folgt nach Anwendung der Abschätzung (2.6). □

2.2.2 Der iterative Algorithmus

Nun soll ein Iterationsverfahren zur Lösung der betrachteten Probleme vorgestellt werden. Die Herleitung eines Iterationsverfahrens für das Problem (2.3) erfolgt gewöhnlicher Weise über die sogenannte *Splitting-Methode*, da sich $\hat{A}(\cdot,\cdot)$ zerlegen läßt in

$$\hat{A}(\cdot\,,\cdot) \;=\; A(\cdot\,,\cdot) + N(\cdot\,,\cdot).$$

Diese führt zu der Iteration

$$A(u_h^{k+1},\chi)+N(u_h^k,\chi) \;=\; (f,\chi) \quad \text{für alle } \chi\in V_h.$$

Das auf diese Weise entstandene Iterationsschema ist jedoch im allgemeinen nicht konvergent. Die Idee des folgenden Algorithmus besteht darin, das erhaltene Iterationsschema dadurch zu modifizieren, daß man einen zusätzlichen (groben) Raum V_H hinzunimmt und dann den Basis-Algorithmus 2.1 sukzessive anwendet. Diese Überlegung führt zu dem

---

Algorithmus 2.2

Sei $u_h^0 := 0$ *die vorgegebene Startlösung.*

Für $j=0,\dots,k-1$:

1. Finde $e_H\in V_H$, so daß gilt $\hat{A}(e_H+u_h^j,\varphi)=(f,\varphi)$ für alle $\varphi\in V_H$.
2. Finde $u_h^{j+1}\in V_h$, so daß gilt $A(u_h^{j+1},\chi)=(f,\chi)-N(u_h^j+e_H,\chi)$ für alle $\chi\in V_h$.

Die erste Iteration im Algorithmus 2.2 mit Startwert $u_h^0=0$ entspricht gerade dem Basis-Algorithmus 2.1, d. h. nach dem ersten Durchlauf ergibt sich für die Grobgitterlösung $e_H=u_H$ und für die Approximation an die NSPD-Lösung auf dem feinem Gitter $u_h^1=u^h$. Danach, d. h. für $j\geq 1$, wird im 1. Schritt des Algorithmus 2.2 bei jedem Durchlauf der Grobgitterfehler

$$e_H \;=\; u_H-\hat{P}_H u_h^j \tag{2.7}$$

neu berechnet.

Für Algorithmus 2.2 ergibt sich das folgende Konvergenzresultat.

Satz 2.2 *Sei* $u_h^k\in V_h$ *die durch Algorithmus 2.2 für* $k\geq 1$ *und hinreichend kleines* H *gewonnene Lösung, dann gelten unter der Voraussetzung* $u\in H^{r+1}(\Omega)$ *die Abschätzungen*

$$\begin{aligned}
|u_h-u_h^k|_{H^1} \;&\lesssim\; \left\{\frac{B_\infty+C_FC_\infty}{\varepsilon}\left(1+C_\infty+\frac{B_\infty}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right.\\
&\qquad\left.\cdot\left[\max\{\Gamma,C_\infty\}\left(1+\frac{H}{\sqrt{\varepsilon}}\right)+\frac{B_\infty H}{\varepsilon}\right]^2\right\}^k\\
&\qquad\cdot\left\{H^{r+k}+H^kh^r\left[\max\{\Gamma,C_\infty\}\left(1+\frac{h}{\sqrt{\varepsilon}}\right)+\frac{B_\infty h}{\varepsilon}\right]\right\}|u|_{H^{r+1}}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
|u-u_h^k|_{H^1} \;&\leq\; |u-u_h|_{H^1}+|u_h-u_h^k|_{H^1}\\
&\lesssim\; |u_h-u_h^k|_{H^1}+h^r\left[\max\{\Gamma,C_\infty\}\left(1+\frac{h}{\sqrt{\varepsilon}}\right)+\frac{B_\infty h}{\varepsilon}\right]|u|_{H^{r+1}}.
\end{aligned}$$

Beweis. Sei $\hat{P}_H$ definiert wie im Beweis von Satz 2.1. Unter Beachtung der Darstellung (2.7) gilt für alle $\chi \in V_h$

$$\begin{aligned}
A(u_h - u_h^k, \chi) &= A(u_h, \chi) - A(u_h^k, \chi) \\
&= \hat{A}(u_h, \chi) - N(u_h, \chi) - (f, \chi) + N(u_h^{k-1} + e_H, \chi) \\
&= (f, \chi) + N(u_h^{k-1} - u_h + u_H - \hat{P}_H u_h^{k-1}) - (f, \chi) \\
&\leq |N\big((I - \hat{P}_H)(u_h^{k-1} - u_h), \chi\big)| \\
&\overset{\text{P.I.+Hölder}}{\leq} B_\infty \|(I - \hat{P}_H)(u_h^{k-1} - u_h)\|_{L^2} |\chi|_{H^1} \\
&\quad + C_\infty \|(I - \hat{P}_H)(u_h^{k-1} - u_h)\|_{L^2} \|\chi\|_{L^2} \\
&\leq (B_\infty + C_F C_\infty) \|(I - \hat{P}_H)(u_h^{k-1} - u_h)\|_{L^2} |\chi|_{H^1}.
\end{aligned}$$

Aus Lemma 1.26 folgt (mit $h := H$)

$$\begin{aligned}
\|(I - \hat{P}_H)(u_h^{k-1} - u_h)\|_{L^2} &\overset{(1.20)}{\lesssim} H \left(1 + C_\infty + \frac{B_\infty}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \\
&\quad \cdot \left[\max\{\Gamma, C_\infty\} \left(1 + \frac{H}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \frac{B_\infty H}{\varepsilon}\right]^2 |u_h - u_h^{k-1}|_{H^1}.
\end{aligned}$$

Andererseits liefert Satz 1.10 mit $\chi = u_h - u_h^k$

$$A(u_h - u_h^k, \chi) \;\geq\; \gamma\varepsilon |u_h - u_h^k|_{H^1} |\chi|_{H^1},$$

womit sich ergibt

$$\begin{aligned}
|u_h - u_h^k|_{H^1} &\lesssim \frac{B_\infty + C_F C_\infty}{\varepsilon} H \left(1 + C_\infty + \frac{B_\infty}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \\
&\quad \cdot \left[\max\{\Gamma, C_\infty\} \left(1 + \frac{H}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \frac{B_\infty H}{\varepsilon}\right]^2 |u_h - u_h^{k-1}|_{H^1}.
\end{aligned}$$

Durch sukzessives Anwenden dieser Abschätzung erhält man

$$\begin{aligned}
|u_h - u_h^k|_{H^1} &\lesssim \left\{\frac{B_\infty + C_F C_\infty}{\varepsilon} H \left(1 + C_\infty + \frac{B_\infty}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right. \\
&\quad \left. \cdot \left[\max\{\Gamma, C_\infty\} \left(1 + \frac{H}{\sqrt{\varepsilon}}\right) + \frac{B_\infty H}{\varepsilon}\right]^2 \right\}^{k-1} |u_h - u_h^1|_{H^1}.
\end{aligned}$$

Unter Beachtung der Tatsache, daß $u_h^1 = u^h$ gilt, wobei u^h die durch Algorithmus 2.1 berechnete Lösung ist, folgt nach Anwendung von Satz 2.1 schließlich die erste Aussage.

Für den Beweis der zweiten Aussage wendet man direkt die Abschätzung (2.6) an.

□

2.2.3 Ein Spezialfall

Abschließend wird ein Algorithmus zur Lösung eines Spezialfalls des Problems (2.1) betrachtet. Dabei sei $b \equiv 0$, d. h. das betrachtete Problem sei symmetrisch und stelle sich dar als

$$\begin{aligned} -\varepsilon\nabla\cdot(a\nabla u) + cu &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Gesucht wird nun eine Approximation $u^h \in V_h$ an die Lösung $u_h \in V_h$ von (2.3), wobei sich die Bilinearform $N(\cdot\,,\cdot)$ hier schreiben läßt als

$$N(u,v) \;=\; \int_\Omega (cu)v\,dx.$$

Für die Lösung dieses Problems wird ein zusätzliches Hilfsmittel verwendet: Es wird hierbei der Finite-Element-Raum V_h so aufgespalten, daß gilt

$$V_h \;=\; \underbrace{(I-\hat{P}_H)V_h}_{=:\hat{V}_h} \oplus V_H.$$

Die Finite-Element-Räume $\hat{V}_h$ und V_H sind dann bezüglich der Bilinearform $\hat{A}(\cdot\,,\cdot)$ orthogonal, denn es gilt für alle $\hat{v}_h := (I-\hat{P}_H)v_h \in \hat{V}_h$ (mit $v_h \in V_h$) und $v_H \in V_H$

$$\hat{A}(\hat{v}_h, v_H) \;=\; \hat{A}(v_h, v_H) - \hat{A}(\hat{P}_H v_h, v_H) \;=\; 0.$$

Der Grund für die Aufspaltung des Raumes V_h liegt in der Gewinnung einer zusätzlichen H-Potenz in der Konvergenzabschätzung des folgenden Algorithmus 2.3, wie die folgende Bemerkung zeigt.

Bemerkung 2.3 Für Funktionen χ aus $\hat{V}_h$ gilt nach Lemma 1.26

$$\begin{aligned} \|\chi\|_{L^2} &= \|(I-\hat{P}_H)\chi\|_{L^2} \\ &\lesssim H(1+C_\infty)\left[\max\{\Gamma, C_\infty\}\left(1+\frac{H}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right]^2 |\chi|_{H^1}. \end{aligned}$$

Der entsprechende Algorithmus lautet

Algorithmus 2.3

---

1. Finde $u_H \in V_H$, so daß gilt $\hat{A}(u_H,\varphi) = (f,\varphi)$ für alle $\varphi \in V_H$.
2. Finde $e_h \in \hat{V}_h$, so daß gilt $A(e_h,\chi) = (f,\chi)$ für alle $\chi \in \hat{V}_h$.
3. $u^h := u_H + e_h$.

Im 2. Schritt von Algorithmus 2.3 wird das zu lösende NSPD-Problem wie bisher auf ein SPD-Problem reduziert. Dieses ist hier jedoch nicht notwendigerweise einfach lösbar, da es in dem Raum $\hat{V}_h$ gelöst werden muß. Trotzdem ist Algorithmus 2.3 von besonderem theoretischen Interesse, denn es gilt beispielsweise unter Verwendung linearer finiter Elemente

$$|u-u^h|_{H^1} \lesssim \left(1+\frac{h}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\left[h+\frac{H^3}{\varepsilon}\left(1+\frac{H}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^4\right]|u|_{H^2},$$

wie der folgende Satz zeigt.

Satz 2.4 *Sei $u^h \in V_h$ die durch Algorithmus 2.3 gewonnene Lösung, dann gilt*

$$\begin{aligned}|u-u^h|_{H^1} \lesssim \;& \left\{\frac{C_\infty}{\varepsilon}(1+C_\infty)^2\left[\max\{\Gamma,C_\infty\}\left(1+\frac{H}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right]^4\right.\\ &\cdot\left[H^{r+2}+H^2h^r\max\{\Gamma,C_\infty\}\left(1+\frac{h}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right]\\ &\left.+\,h^r\max\{\Gamma,C_\infty\}\left(1+\frac{h}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right\}|u|_{H^{r+1}}.\end{aligned}$$

Beweis. Zunächst gilt für alle $\chi=(I-\hat{P}_H)v_h \in \hat{V}_h$ mit geeignetem $v_h \in V_h$

$$\begin{aligned}\hat{A}\big((I-\hat{P}_H)u_h,\chi\big) &= \hat{A}(u_h,\chi)-\hat{A}(u_H,v_h-\hat{P}_Hv_h)\\ &\overset{\text{Symm.}}{=} (f,\chi)-\hat{A}(v_h,u_H)+\hat{A}(\hat{P}_Hv_h,u_H)\\ &\overset{\text{Def. v. }\hat{\text{P}}_\text{H}}{=} (f,\chi)-\hat{A}(v_h,u_H)+\hat{A}(v_h,u_H)\\ &= (f,\chi).\end{aligned} \tag{*}$$

Damit ergibt sich für alle $\chi \in \hat{V}_h$

$$\begin{aligned}A(u_h-u^h,\chi) &= A(u_h-(u_H+e_h),\chi)\\ &= A(u_h-u_H,\chi)-A(e_h,\chi)\\ &= \hat{A}\big((I-\hat{P}_H)u_h,\chi\big)-(c(I-\hat{P}_H)u_h,\chi)-(f,\chi)\\ &\overset{(*)}{\leq} (f,\chi)-(f,\chi)+|(c(I-\hat{P}_H)u_h,\chi)|\\ &\overset{\text{Hölder}}{\leq} C_\infty\|(I-\hat{P}_H)u_h\|_{L^2}\|\chi\|_{L^2}\\ &\overset{\text{Bem.2.3}}{\lesssim} C_\infty\left(\|(I-\hat{P}_H)u\|_{L^2}+\|(I-\hat{P}_H)(u-u_h)\|_{L^2}\right)\\ &\quad\cdot H(1+C_\infty)\left[\max\{\Gamma,C_\infty\}\left(1+\frac{H}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right]^2|\chi|_{H^1}\\ &\overset{\text{Lem.1.26}}{\lesssim} C_\infty(1+C_\infty)^2\left[\max\{\Gamma,C_\infty\}\left(1+\frac{H}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right]^4\\ &\quad\cdot\left[H^{r+2}+H^2h^r\max\{\Gamma,C_\infty\}\left(1+\frac{h}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right]|u|_{H^{r+1}}|\chi|_{H^1}.\end{aligned}$$

Andererseits liefert Satz 1.10 für $\chi = u_h - u^h$

$$A(u_h - u^h, \chi) \;\geq\; \gamma\varepsilon |u_h - u^h|_{H^1} |\chi|_{H^1}.$$

Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} |u_h - u^h|_{H^1} \;&\lesssim\; \frac{C_\infty}{\varepsilon}(1 + C_\infty)^2 \left[\max\{\Gamma, C_\infty\}\left(1 + \frac{H}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right]^4 \\ &\quad \cdot \left[H^{r+2} + H^2 h^r \max\{\Gamma, C_\infty\}\left(1 + \frac{h}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\right] |u|_{H^{r+1}}. \end{aligned}$$

Man erhält nun die gewünschte Aussage, indem man auf $|u - u^h|_{H^1}$ zunächst die Dreiecksungleichung und dann die obige Abschätzung sowie die Abschätzung (2.6) anwendet. □

2.3 Diskussion der Resultate

Die Verwendung der in Abschnitt 2.2 vorgestellten Zweigitter-Verfahren ist nur dann sinnvoll, wenn die zu Beginn von Abschnitt 2.2 gestellte Bedingung an die Wahl der groben Maschenweite H bezüglich der feinen Maschenweite h

$$H = O(h^\lambda) \quad \text{für ein } \lambda \in (0, 1) \tag{2.8}$$

erfüllt werden kann. Die Frage nach der sinnvollen Anwendbarkeit der Algorithmen soll in diesem Abschnitt mit Hilfe der entsprechenden Konvergenzresultate diskutiert werden.

Um die Konvergenzaussagen bezüglich der Algorithmen aus Abschnitt 2.2 in kompakterer Form darstellen zu können, werden zunächst in der folgenden Definition einige Hilfsgrößen eingeführt.

Definition 2.5 *Die Peclét-Zahlen Pe_H bzw. Pe_h bezüglich des groben bzw. feinen Gitters seien definiert durch*

$$Pe_H \;:=\; \frac{B_\infty H}{\varepsilon} \quad \textit{bzw.} \quad Pe_h \;:=\; \frac{B_\infty h}{\varepsilon}.$$

Weiterhin seien die Größen R_H bzw. R_h definiert durch

$$R_H \;:=\; \max\{\Gamma, C_\infty\}\left(1 + \frac{H}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \quad \textit{bzw.} \quad R_h \;:=\; \max\{\Gamma, C_\infty\}\left(1 + \frac{h}{\sqrt{\varepsilon}}\right).$$

2.3.1 Vergleich der Basis-Algorithmen

Für den Spezialfall $\varepsilon = 1$ hat Xu in seiner Analyse des Basis-Algorithmus als Konvergenzresultat die Fehlerabschätzung

$$|u - u^h|_{H^1} \lesssim \left(H^{r+1} + h^r\right) |u|_{H^{r+1}}$$

erhalten (vgl. [Xu96], Theorem 4.2). Dabei entstammt die Potenz h^r der Fehlerabschätzung bezüglich der gewöhnlichen Galerkin-FEM. Um sicherzustellen, daß die approximierte Lösung optimal ist, ist die Bedingung

$$H^{r+1} \lesssim h^r$$

zu erfüllen. Dazu genügt offenbar die Wahl $H = O(h^{\frac{r}{r+1}})$. Dies bedeutet speziell bei der Verwendung linearer finiter Elemente (d. h. im Falle $r = 1$), daß es ausreicht, bezüglich der groben Triangulierung $H = O(h^{\frac{1}{2}})$ zu wählen, um die optimale Approximation an die NSPD-Lösung u_h zu bekommen.

Das Ergebnis von Xu soll nun mit dem des Algorithmus 2.1 verglichen werden. Mit Hilfe der Definition 2.5 läßt sich das zugehörige Konvergenzresultat kompakter darstellen durch

Satz 2.6 *Sei $u^h \in V_h$ die aus Algorithmus 2.1 gewonnene Lösung für hinreichend kleines H, dann gelten unter der Voraussetzung $u \in H^{r+1}(\Omega)$ die Abschätzungen*

$$\begin{aligned} |u_h - u^h|_{H^1} \lesssim\ & \frac{B_\infty + C_F C_\infty}{\varepsilon} \left(1 + C_\infty + \frac{B_\infty}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \left(R_H + Pe_H\right)^2 \\ & \cdot \Big[H^{r+1} + H h^r (R_h + Pe_h)\Big] |u|_{H^{r+1}} \end{aligned}$$

und

$$|u - u^h|_{H^1} \lesssim |u_h - u^h|_{H^1} + h^r \left(R_h + Pe_h\right) |u|_{H^{r+1}}.$$

Sei durch

$$Z := \frac{B_\infty + C_F C_\infty}{\varepsilon} \left(1 + C_\infty + \frac{B_\infty}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \left(R_H + Pe_H\right)^2 \tag{2.9}$$

eine weitere Hilfsgröße eingeführt.

Die Fehlerabschätzung bezüglich der gewöhnlichen Galerkin-FEM führt dann auf die Bedingung

$$Z\Big[H^{r+1} + H h^r \left(R_h + Pe_h\right)\Big] \lesssim h^r \left(R_h + Pe_h\right).$$

Vergleicht man hierbei die ε-Abhängigkeit der Konvergenzkonstanten, so ergibt sich ein Mißverhältnis von $\varepsilon^{-\frac{7}{2}}$. Die erforderliche Wahl von H würde dazu führen, daß bei hinreichend kleinem ε die Bedingung (2.8) nicht mehr erfüllt ist. Dies bedeutet, daß zusätzliche Voraussetzungen an Z gestellt werden müssen. Dabei ist offenbar die Eigenschaft $Z \lesssim 1$ hinreichend. Diese ist erfüllt, wenn $\frac{B_\infty + C_F C_\infty}{\varepsilon} \lesssim 1$ gilt.

Zusammenfassend hat man das folgende Ergebnis.

Satz 2.7 *Unter der Bedingung*

$$\frac{B_\infty + C_F C_\infty}{\varepsilon} \lesssim 1$$

ist die Voraussetzung (2.8) erfüllt, und man erhält als günstigstes Konvergenzresultat für Algorithmus 2.1 die Fehlerabschätzung

$$|u - u^h|_{H^1} \lesssim \left(H^{r+1} + h^r\right)|u|_{H^{r+1}}. \tag{2.10}$$

2.3.2 Vergleich der iterativen Algorithmen

Zunächst wird das Ergebnis von Xu im Spezialfall $\varepsilon = 1$ betrachtet. Die Analyse des iterativen Algorithmus lieferte dort als Konvergenzresultat die Fehlerabschätzung

$$|u - u_h^k|_{H^1} \lesssim \left(H^{r+k} + h^r\right)|u|_{H^{r+1}}$$

(vgl. [Xu96], Theorem 4.4). Den Ausführungen aus Abschnitt 2.3.1 folgend, bedeutet diese Konvergenzaussage speziell bei der Verwendung linearer finiter Elemente (d. h. im Falle $r = 1$), daß es genügt, bezüglich der groben Triangulierung $H = O(h^{\frac{1}{k+1}})$ zu wählen, um dennoch die optimale Approximation an die NSPD-Lösung u_h zu bekommen.

Das Konvergenzresultat des Algorithmus 2.2 läßt sich mit Hilfe der Definition 2.5 kompakter schreiben als

Satz 2.8 *Sei $u_h^k \in V_h$ die durch Algorithmus 2.2 für $k \geq 1$ und hinreichend kleines H gewonnene Lösung, dann gelten unter der Voraussetzung $u \in H^{r+1}(\Omega)$ die Abschätzungen*

$$\begin{aligned} |u_h - u_h^k|_{H^1} \lesssim & \left[\frac{B_\infty + C_F C_\infty}{\varepsilon}\left(1 + C_\infty + \frac{B_\infty}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\left(R_H + Pe_H\right)^2\right]^k \\ & \cdot \Big[H^{r+k} + H^k h^r (R_h + Pe_h)\Big]|u|_{H^{r+1}} \end{aligned}$$

und

$$|u - u_h^k|_{H^1} \lesssim |u_h - u_h^k|_{H^1} + h^r\left(R_h + Pe_h\right)|u|_{H^{r+1}}.$$

Analoges Vorgehen wie in Abschnitt 2.3.1 führt unter Verwendung von (2.9) zu der erforderlichen Voraussetzung $Z^k \lesssim 1$. Diese wird erfüllt durch die Bedingung $\frac{B_\infty + C_F C_\infty}{\varepsilon} \lesssim 1$.

Man hat daher den

Satz 2.9 *Unter der Bedingung*

$$\frac{B_\infty + C_F C_\infty}{\varepsilon} \lesssim 1$$

ist die Voraussetzung (2.8) erfüllt, und man erhält als günstigstes Konvergenzresultat für Algorithmus 2.2 die Fehlerabschätzung

$$|u - u_h^k|_{H^1} \lesssim \left(H^{r+k} + h^r\right) |u|_{H^{r+1}}. \tag{2.11}$$

2.3.3 Vergleich der Spezialfälle

Für den Spezialfall hat Xu als Konvergenzresultat des entsprechenden Algorithmus die Fehlerabschätzung

$$|u - u^h|_{H^1} \lesssim \left(H^{r+2} + h^r\right) |u|_{H^{r+1}}$$

erhalten (vgl. [Xu96], Theorem 4.6), was speziell bei der Verwendung linearer finiter Elemente (d. h. im Falle $r = 1$) bezüglich der groben Triangulierung zu der Wahl $H = O(h^{\frac{1}{3}})$ für die optimale Approximation an die NSPD-Lösung u_h führt.
Im Vergleich dazu hat man als Konvergenzresultat des Algorithmus 2.3 den mit Hilfe der Definition 2.5 komprimierten

Satz 2.10 *Sei $u^h \in V_h$ die durch Algorithmus 2.3 gewonnene Lösung, dann gilt*

$$|u_h - u^h|_{H^1} \lesssim \left[\frac{C_\infty H^2}{\varepsilon}\left(1 + C_\infty\right) R_H^4 \left(H^r + R_h h^r\right) + R_h h^r\right] |u|_{H^{r+1}}.$$

Der Term $R_h h^r$ entstammt dabei der Fehlerabschätzung bezüglich der gewöhnlichen Galerkin-FEM. Als weitere Hilfsgröße sei an dieser Stelle

$$Z' := \frac{C_\infty R_H^4}{\varepsilon} \Big(1 + C_\infty\Big)$$

eingeführt. Die in Abschnitt 2.3.1 dargestellte Vorgehensweise führt auf die Wahl $Z' \lesssim 1$, die durch die Erfüllung der Bedingung $\frac{C_\infty}{\varepsilon} \lesssim 1$ sichergestellt wird. Es ergibt sich der

Satz 2.11 *Unter der Bedingung*

$$\frac{C_\infty}{\varepsilon} \lesssim 1$$

ist die Voraussetzung (2.8) erfüllt, und man erhält als günstigstes Konvergenzresultat für Algorithmus 2.3 die Fehlerabschätzung

$$|u - u^h|_{H^1} \lesssim \left(H^{r+2} + h^r\right) |u|_{H^{r+1}}. \tag{2.12}$$

2.3.4 Ergebnis

Um die sinnvolle Anwendbarkeit des Basis- und des iterativen Algorithmus auf die betrachteten singulär gestörten Randwertprobleme zu erzwingen und dabei das Ergebnis von Xu zu erhalten, ist in beiden Fällen die Bedingung

$$\frac{B_\infty + C_F C_\infty}{\varepsilon} \lesssim 1$$

zu erfüllen. In der Praxis ist diese Bedingung jedoch zu restriktiv und kann für $\varepsilon \ll 1$ im allgemeinen nicht erfüllt werden.
Gleiches gilt für die Bedingung

$$\frac{C_\infty}{\varepsilon} \lesssim 1,$$

die für den symmetrischen Spezialfall gefordert werden muß.

Somit führt die theoretische Analyse zu dem Ergebnis, daß sich die Algorithmen von Xu nicht ohne weiteres auf singulär gestörte Probleme mit $\varepsilon \ll 1$ übertragen lassen bzw. daß zu erwarten ist, daß sie bei der Anwendung auf singulär gestörte Probleme im allgemeinen nicht mehr ausreichend effizient sind.

Kapitel 3

Angepaßte Verfahren

In Kapitel 2 wurden die von Xu in [Xu96], § 4, vorgestellten Algorithmen direkt auf singulär gestörte Probleme übertragen. Bei der anschließenden Diskussion stellte sich heraus, daß die Bedingungen, die man für eine sinnvolle Anwendbarkeit der Algorithmen stellen muß, im allgemeinen für $\varepsilon \ll 1$ nicht erfüllt werden können. Daher soll in diesem Kapitel die Frage diskutiert werden, ob sich die Konvergenzraten der Algorithmen aus den Abschnitten 2.2.1 und 2.2.2 verbessern lassen, wenn die Verfahren dem singulär gestörten Fall angepaßt werden.

In Abschnitt 3.1 wird zunächst ein angepaßtes Verfahren betrachtet, welches aus einer neuen Zerlegung der Bilinearform $\hat{A}(\cdot\,,\cdot)$ aus (1.6) entsteht. Als Basisverfahren liegt hier wie in Kapitel 2 die gewöhnliche Galerkin-FEM (vgl. Abschnitt 1.4) zugrunde.

Eine noch engere Anpassung an den singulär gestörten Fall erfolgt in Abschnitt 3.2. Hier wird neben einer geeigneten Zerlegung der entsprechenden Bilinearform als Basisverfahren für die angepaßten Algorithmen die SUPG-FEM (vgl. Abschnitt 1.6.1) verwendet.

3.1 Eine neue Zerlegung der Bilinearform $\hat{A}(\cdot\,,\cdot)$

Die Algorithmen in Abschnitt 2.2 basieren auf der Zerlegung

$$\hat{A}(u,v) \;=\; A(u,v) + N(u,v) \quad \text{für } u,v \in H_0^1(\Omega),$$

wobei $A(\cdot\,,\cdot)$ und $N(\cdot\,,\cdot)$ gegeben sind durch

$$A(u,v) \;=\; \varepsilon(a\nabla u, \nabla v) \quad \text{und} \quad N(u,v) \;=\; (b\cdot\nabla u + cu, v).$$

Der NSPD-Anteil $N(\cdot\,,\cdot)$ der Bilinearform $\hat{A}(\cdot\,,\cdot)$ enthält dabei noch symmetrische Anteile. Im folgenden soll nun versucht werden, eine Verbesserung der Konvergenzraten der Algorithmen 2.1 und 2.2 durch eine neue Zerlegung der Bilinearform $\hat{A}(\cdot\,,\cdot)$

in Bilinearformen $\tilde{A}(\cdot\,,\cdot)$ und $\tilde{N}(\cdot\,,\cdot)$ zu erzielen. Diese Zerlegung soll so vorgenommen werden, daß die Bilinearform $\tilde{A}(\cdot\,,\cdot)$ alle rein symmetrischen und die Bilinearform $\tilde{N}(\cdot\,,\cdot)$ alle rein nichtsymmetrischen Anteile der Bilinearform $\hat{A}(\cdot\,,\cdot)$ enthält.

In bezug auf die Bilinearform $N(\cdot\,,\cdot)$ kann folgende Aussage getroffen werden.

Lemma 3.1 *Der nichtsymmetrische Anteil von $N(u,v)$ für $u,v \in V \equiv H_0^1(\Omega)$ läßt sich darstellen durch*

$$(b\cdot\nabla u, v) \;=\; -\frac{1}{2}\big((\nabla\cdot b)u,v\big) + \frac{1}{2}\Big[(b\cdot\nabla u,v) - (b\cdot\nabla v,u)\Big].$$

Beweis. Seien $u,v \in V$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(b\cdot\nabla u,v) &= \frac{1}{2}\int_\Omega (b\cdot\nabla u)v\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega (b\cdot\nabla u)v\,dx\\ &\overset{\text{P.I.}}{=} \frac{1}{2}\int_\Omega (b\cdot\nabla u)v\,dx - \frac{1}{2}\int_\Omega (\nabla\cdot b)uv\,dx - \frac{1}{2}\int_\Omega (b\cdot\nabla v)u\,dx\\ &= -\frac{1}{2}\big((\nabla\cdot b)u,v\big) + \frac{1}{2}\Big[(b\cdot\nabla u,v) - (b\cdot\nabla v,u)\Big].\end{aligned}$$

□

Damit erhält man für die rein symmetrischen Anteile $\tilde{A}(\cdot\,,\cdot)$ von $\hat{A}(\cdot\,,\cdot)$

$$\tilde{A}(u,v) \;:=\; \varepsilon(a\nabla u,\nabla v) + \big((c - \tfrac{1}{2}\nabla\cdot b)u,v\big) \tag{3.1}$$

und für die rein nichtsymmetrischen Anteile $\tilde{N}(\cdot\,,\cdot)$ von $\hat{A}(\cdot\,,\cdot)$ entsprechend

$$\tilde{N}(u,v) \;:=\; \frac{1}{2}\Big((b\cdot\nabla u,v) - (b\cdot\nabla v,u)\Big) \tag{3.2}$$

für $u,v \in V$. Als neue Zerlegung für die Bilinearform $\hat{A}(\cdot\,,\cdot)$ ergibt sich somit für $u,v \in V$

$$\hat{A}(u,v) \;=\; \tilde{A}(u,v) + \tilde{N}(u,v). \tag{3.3}$$

Für den symmetrischen Anteil $\tilde{A}(\cdot\,,\cdot)$ gilt die folgende Aussage.

Lemma 3.2 *Unter den Voraussetzungen des Satzes 1.12 ist die Bilinearform $\tilde{A}(\cdot\,,\cdot)$ stetig auf $H_0^1(\Omega)$ und H_0^1-elliptisch.*

Beweis. Seien $u, v \in V$.
i) Sei $B'_\infty := \|\nabla \cdot b\|_{L^\infty}$. Die Stetigkeit betreffend gilt

$$\begin{aligned}
|\tilde{A}(u,v)| &\leq |A(u,v)| + \Big|\big((c - \tfrac{1}{2}\nabla \cdot b)u, v\big)\Big| \\
&\leq \varepsilon\Gamma|u|_{H^1}|v|_{H^1} + C_\infty\|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2} + \frac{1}{2}B'_\infty\|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2} \\
&\leq \max\{\Gamma, C_\infty + \frac{1}{2}B'_\infty\}|||u|||_\varepsilon |||v|||_\varepsilon .
\end{aligned}$$

ii) Es ist noch die Eigenschaft der H^1_0-Elliptizität zu zeigen. Man hat

$$\begin{aligned}
\tilde{A}(v,v) &= A(v,v) + \big((c - \tfrac{1}{2}\nabla \cdot b)v, v\big) \\
&\geq \varepsilon\gamma|v|^2_{H^1} + \omega\|v\|^2_{L^2} \\
&\geq \min\{\gamma, \omega\}|||v|||^2_\varepsilon .
\end{aligned}$$

□

3.1.1 Der modifizierte Basis-Algorithmus

Es werden nun die Algorithmen aus den Abschnitten 2.2.1 und 2.2.2 bezüglich der neuen Zerlegung (3.3) der Bilinearform $\hat{A}(\cdot,\cdot)$ modifiziert. Zunächst ergibt sich dabei als neuer Basis-Algorithmus der

Algorithmus 3.1

1. Finde $u_H \in V_H$, so daß gilt $\hat{A}(u_H, \varphi) = (f, \varphi)$ für alle $\varphi \in V_H$.
2. Finde $u^h \in V_h$, so daß gilt $\tilde{A}(u^h, \chi) = (f, \chi) - \tilde{N}(u_H, \chi)$ für alle $\chi \in V_h$.

Als Konvergenzaussage für Algorithmus 3.1 erhält man den

Satz 3.3 *Sei $u^h \in V_h$ die aus Algorithmus 3.1 gewonnene Lösung für hinreichend kleines H, dann gelten unter der Voraussetzung $u \in H^{r+1}(\Omega)$ die Abschätzungen*

$$\begin{aligned}
|||u_h - u^h|||_\varepsilon &\lesssim \left(1 + \frac{B_\infty}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\left(1 + C_\infty + \frac{B_\infty}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\big(R_H + Pe_H\big)^2 \\
&\qquad \cdot \Big[H^{r+1} + Hh^r\big(R_h + Pe_h\big)\Big]|u|_{H^{r+1}}
\end{aligned}$$

und

$$|||u - u^h|||_\varepsilon \lesssim |||u_h - u^h|||_\varepsilon + \sqrt{\varepsilon}h^r\big(R_h + Pe_h\big)|u|_{H^{r+1}}$$

mit den Größen $Pe_H = \frac{B_\infty H}{\varepsilon}$, $Pe_h = \frac{B_\infty h}{\varepsilon}$, $R_H = \max\{\Gamma, C_\infty\}\big(1 + \frac{H}{\sqrt{\varepsilon}}\big)$ und $R_h = \max\{\Gamma, C_\infty\}\big(1 + \frac{h}{\sqrt{\varepsilon}}\big)$.

Beweis. Für alle $\chi \in V_h$ gilt mit $B'_\infty := \|\nabla \cdot b\|_{L^\infty}$

$$
\begin{aligned}
\tilde{A}(u_h - u^h, \chi) &= \tilde{A}(u_h, \chi) - \tilde{A}(u^h, \chi) \\
&= \hat{A}(u_h, \chi) - \tilde{N}(u_h, \chi) - (f, \chi) + \tilde{N}(u_H, \chi) \\
&\leq \left| \tilde{N}(u_h - u_H, \chi) \right| \\
&\overset{\text{P.I.}}{=} \left| - \int_\Omega b(u_h - u_H) \nabla \chi \, dx - \frac{1}{2} \int_\Omega (\nabla \cdot b)(u_h - u_H) \chi \, dx \right| \\
&\leq B_\infty \|u_h - u_H\|_{L^2} |\chi|_{H^1} + \frac{B'_\infty}{2} \|u_h - u_H\|_{L^2} \|\chi\|_{L^2} \\
&\leq \left(\frac{B_\infty}{\sqrt{\varepsilon}} + \frac{B'_\infty}{2} \right) \|u_h - u_H\|_{L^2} |||\chi|||_\varepsilon \\
&\leq \left(\frac{B_\infty}{\sqrt{\varepsilon}} + \frac{B'_\infty}{2} \right) \Big(\|(I - \hat{P}_H)(u - u_h)\|_{L^2} \\
&\quad + \|(I - \hat{P}_H) u\|_{L^2} \Big) |||\chi|||_\varepsilon \\
&\overset{\text{L.1.26}}{\lesssim} \left(\frac{B_\infty}{\sqrt{\varepsilon}} + \frac{B'_\infty}{2} \right) \left(1 + C_\infty + \frac{B_\infty}{\sqrt{\varepsilon}} \right) \\
&\quad \cdot \left\{ H^{r+1} + H h^r \left[\max\{\Gamma, C_\infty\} \left(1 + \frac{h}{\sqrt{\varepsilon}} \right) + \frac{B_\infty h}{\sqrt{\varepsilon}} \right] \right\} \\
&\quad \cdot \left[\max\{\Gamma, C_\infty\} \left(1 + \frac{H}{\sqrt{\varepsilon}} \right) + \frac{B_\infty H}{\sqrt{\varepsilon}} \right]^2 |u|_{H^{r+1}} |||\chi|||_\varepsilon \\
&\overset{\text{Def.2.5}}{\lesssim} \left(1 + \frac{B_\infty}{\sqrt{\varepsilon}} \right) \left(1 + C_\infty + \frac{B_\infty}{\sqrt{\varepsilon}} \right) \big(R_H + Pe_H \big)^2 \\
&\quad \cdot \Big[H^{r+1} + H h^r \big(R_h + Pe_h \big) \Big] |u|_{H^{r+1}} |||\chi|||_\varepsilon .
\end{aligned}
$$

Andererseits folgt mit $\chi = u_h - u^h$ aus Lemma 3.2

$$
\tilde{A}(u_h - u^h, \chi) \gtrsim |||u_h - u^h|||_\varepsilon |||\chi|||_\varepsilon .
$$

Das Zusammenfassen der Ergebnisse liefert die erste Abschätzung.

Die zweite Abschätzung ergibt sich mit Hilfe von Lemma 1.26 und Definition 2.5. $\square$

3.1.2 Der modifizierte iterative Algorithmus

Die Anpassung des Iterationsverfahrens (Algorithmus 2.2) führt zu dem

---

Algorithmus 3.2

Sei $u_h^0 := 0$ die vorgegebene Startlösung.

Für $j = 0, \dots, k-1$:
1. Finde $e_H \in V_H$, so daß gilt $\hat{A}(e_H + u_h^j, \varphi) = (f, \varphi)$ für alle $\varphi \in V_H$.
2. Finde $u_h^{j+1} \in V_h$, so daß gilt $\tilde{A}(u_h^{j+1}, \chi) = (f, \chi) - \tilde{N}(u_h^j + e_H, \chi)$ für alle $\chi \in V_h$.

Für den Algorithmus 3.2 ergibt sich die folgende Konvergenzaussage.

Satz 3.4 *Sei $u_h^k \in V_h$ die durch Algorithmus 3.2 für $k \geq 1$ und hinreichend kleines H gewonnene Lösung, dann gelten unter der Voraussetzung $u \in H^{r+1}(\Omega)$ die Abschätzungen*

$$\begin{aligned} |||u_h - u_h^k|||_\varepsilon &\lesssim \frac{1}{\left(\sqrt{\varepsilon}\right)^{k-1}} \left(1 + \frac{B_\infty}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^k \left(1 + C_\infty + \frac{B_\infty}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^k \left(R_H + Pe_H\right)^{2k} \\ &\quad \cdot \left[H^{r+k} + H^k h^r \left(R_h + Pe_h\right)\right] |u|_{H^{r+1}} \end{aligned}$$

und

$$|||u - u_h^k|||_\varepsilon \lesssim |||u_h - u_h^k|||_\varepsilon + \sqrt{\varepsilon} h^r \left(R_h + Pe_h\right) |u|_{H^{r+1}}$$

mit den Größen $Pe_H = \frac{B_\infty H}{\varepsilon}$, $Pe_h = \frac{B_\infty h}{\varepsilon}$, $R_H = \max\{\Gamma, C_\infty\}\left(1 + \frac{H}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$ und $R_h = \max\{\Gamma, C_\infty\}\left(1 + \frac{h}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$.

Beweis. Sei $B'_\infty := \|\nabla \cdot b\|_{L^\infty}$. Es gilt für alle $\chi \in V_h$

$$\begin{aligned} \tilde{A}(u_h - u_h^k, \chi) &= \hat{A}(u_h, \chi) - \tilde{N}(u_h, \chi) - (f, \chi) + \tilde{N}(u_h^{k-1} + e_H, \chi) \\ &\leq \left|\tilde{N}\left((I - \hat{P}_H)(u_h^{k-1} - u_h), \chi\right)\right| \\ &\overset{\text{P.I.}}{=} \left| -\frac{1}{2} \int_\Omega (\nabla \cdot b)(I - \hat{P}_H)(u_h^{k-1} - u_h) \chi \, dx \right. \\ &\qquad \left. - \int_\Omega b (I - \hat{P}_H)(u_h^{k-1} - u_h) \nabla \chi \, dx \right| \\ &\leq B_\infty \|(I - \hat{P}_H)(u_h^{k-1} - u_h)\|_{L^2} |\chi|_{H^1} \\ &\quad + \frac{B'_\infty}{2} \|(I - \hat{P}_H)(u_h^{k-1} - u_h)\|_{L^2} \|\chi\|_{L^2} \\ &\leq \left(\frac{B_\infty}{\sqrt{\varepsilon}} + \frac{B'_\infty}{2}\right) \|(I - \hat{P}_H)(u_h^{k-1} - u_h)\|_{L^2} |||\chi|||_\varepsilon \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\overset{\text{L.1.26}}{\lesssim} \frac{H}{\sqrt{\varepsilon}}\left(\frac{B_\infty}{\sqrt{\varepsilon}}+\frac{B'_\infty}{2}\right)\left(1+C_\infty+\frac{B_\infty}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \\
&\quad\cdot\left[\max\{\Gamma, C_\infty\}\left(1+\frac{H}{\sqrt{\varepsilon}}\right)+\frac{B_\infty H}{\sqrt{\varepsilon}}\right]^2 |||u_h-u_h^{k-1}|||_\varepsilon |||\chi|||_\varepsilon \\
&\overset{\text{Def.2.5}}{\lesssim} \frac{H}{\sqrt{\varepsilon}}\left(1+\frac{B_\infty}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\left(1+C_\infty+\frac{B_\infty}{\sqrt{\varepsilon}}\right) \\
&\quad\cdot\big(R_H+Pe_H\big)^2 |||u_h-u_h^{k-1}|||_\varepsilon |||\chi|||_\varepsilon .
\end{aligned}
$$

Andererseits folgt mit $\chi = u_h - u_h^k$ aus Lemma 3.2

$$\tilde{A}(u_h-u_h^k,\chi) \;\gtrsim\; |||u_h-u_h^k|||_\varepsilon |||\chi|||_\varepsilon .$$

Damit ergibt sich

$$|||u_h-u_h^k|||_\varepsilon \lesssim \frac{H}{\sqrt{\varepsilon}}\left(1+\frac{B_\infty}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\left(1+C_\infty+\frac{B_\infty}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\big(R_H+Pe_H\big)^2 |||u_h-u_h^{k-1}|||_\varepsilon .$$

Sukzessives Anwenden dieser Abschätzung liefert

$$
\begin{aligned}
|||u_h-u_h^k|||_\varepsilon \;\lesssim\; & \left(\frac{H}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^{k-1}\left(1+\frac{B_\infty}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^{k-1}\left(1+C_\infty+\frac{B_\infty}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^{k-1} \\
& \cdot\big(R_H+Pe_H\big)^{2(k-1)} |||u_h-u_h^1|||_\varepsilon .
\end{aligned}
$$

Nach Anwendung von Satz 3.3 folgt daraus schließlich die erste Aussage des Satzes. Die zweite Abschätzung ergibt sich mit Hilfe von Lemma 1.26 und Definition 2.5. □

3.1.3 Vergleich mit den ursprünglichen Algorithmen

Der Basis-Algorithmus aus Abschnitt 2.2.1 lieferte als Konvergenzresultat die Fehlerabschätzung

$$
\begin{aligned}
|u-u^h|_{H^1} \;\lesssim\; & \left\{\frac{B_\infty+C_FC_\infty}{\varepsilon}\left(1+C_\infty+\frac{B_\infty}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\big(R_H+Pe_H\big)^2\right. \\
& \left.\cdot\Big[H^{r+1}+Hh^r\big(R_h+Pe_h\big)\Big]+h^r\big(R_h+Pe_h\big)\right\}|u|_{H^{r+1}} .
\end{aligned}
$$

Um dieses Ergebnis mit dem Resultat des Satzes 3.3 vergleichen zu können, muß berücksichtigt werden, daß bei dem angepaßten Verfahren in der $|||\cdot|||_\varepsilon$-Norm abgeschätzt wird. Man hat daher die obige Fehlerabschätzung der des modifizierten Basis-Algorithmus entsprechend anzugleichen. Dazu erweitert man beide Seiten der obigen Abschätzung um den Faktor $\sqrt{\varepsilon}$. Diese Vorgehensweise führt bezüglich des

Algorithmus 2.1 zu der Konvergenzaussage

$$\sqrt{\varepsilon}\,|u-u^h|_{H^1} \lesssim \Bigg\{\frac{B_\infty + C_F C_\infty}{\sqrt{\varepsilon}}\left(1 + C_\infty + \frac{B_\infty}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\big(R_H + Pe_H\big)^2 \cdot\Big[H^{r+1} + Hh^r\big(R_h + Pe_h\big)\Big] + \sqrt{\varepsilon}h^r\big(R_h + Pe_h\big)\Bigg\}|u|_{H^{r+1}}.$$

Die Verbesserung, die man durch den modifizierten Basis-Algorithmus erzielt hat, liegt offensichtlich in dem Wegfall des Terms $\frac{C_F C_\infty}{\sqrt{\varepsilon}}$ im Resultat des Satzes 3.3. Darüberhinaus erfolgt die Abschätzung des Fehlers in der $|||\cdot|||_\varepsilon$-Norm, die „schärfer“ ist als $\sqrt{\varepsilon}|\cdot|_{H^1}$, da sie noch einen L^2-Anteil enthält.

Um die Anwendbarkeit des modifizierten Basis-Algorithmus zu erzwingen, ist die Wahl $\frac{B_\infty}{\varepsilon} \lesssim 1$, $\frac{H}{\sqrt{\varepsilon}} \lesssim 1$ erforderlich. Verglichen mit der Bedingung, die für den ursprünglichen Algorithmus gestellt werden mußte, entfällt im modifizierten Fall die Einschränkung an C_∞.

Der iterative Algorithmus aus Abschnitt 2.2.2 liefert nach entsprechender Erweiterung beider Seiten um den Faktor $\sqrt{\varepsilon}$ das Konvergenzresultat

$$\sqrt{\varepsilon}\,|u-u_h^k|_{H^1} \lesssim \Bigg\{\sqrt{\varepsilon}\left[\frac{B_\infty + C_F C_\infty}{\varepsilon}\left(1 + C_\infty + \frac{B_\infty}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\big(R_H + Pe_H\big)^2\right]^k \cdot\Big[H^{k+r} + H^k h^r\big(R_h + Pe_h\big)\Big] + \sqrt{\varepsilon}h^r\big(R_h + Pe_h\big)\Bigg\}|u|_{H^{r+1}}.$$

Das Ergebnis des modifizierten iterativen Algorithmus 3.2 kann geschrieben werden als

$$|||u-u_h^k|||_\varepsilon \lesssim \Bigg\{\sqrt{\varepsilon}\left[\frac{\sqrt{\varepsilon} + B_\infty}{\varepsilon}\left(1 + C_\infty + \frac{B_\infty}{\sqrt{\varepsilon}}\right)\big(R_H + Pe_H\big)^2\right]^k \cdot\Big[H^{k+r} + H^k h^r\big(R_h + Pe_h\big)\Big] + \sqrt{\varepsilon}h^r\big(R_h + Pe_h\big)\Bigg\}|u|_{H^{r+1}}.$$

Somit liegt die erzielte Verbesserung gegenüber des ursprünglichen iterativen Algorithmus in dem Wegfall des Terms $\frac{C_F C_\infty}{\varepsilon}$ in der letzten Abschätzung sowie in der Verwendung einer schärferen Norm.

Die Wahl $\frac{B_\infty}{\varepsilon} \lesssim 1$, $\frac{H}{\sqrt{\varepsilon}} \lesssim 1$ führt auch hier zu der sinnvollen Anwendbarkeit des modifizierten Algorithmus. Es entfällt im Vergleich zu dem Ergebnis des ursprünglichen iterativen Algorithmus ebenfalls eine Einschränkung an C_∞.

Es muß erwähnt werden, daß sich die Bedingung $\frac{B_\infty}{\varepsilon} \lesssim 1$ in der Praxis nicht ohne weiteres für $\varepsilon \ll 1$ erfüllen läßt und somit noch immer eine sehr starke Einschränkung an die betrachteten Probleme bedeutet.

3.2 Die SUPG-Variante

In diesem Abschnitt soll eine noch engere Anpassung der Algorithmen aus den Abschnitten 2.2.1 und 2.2.2 an den singulär gestörten Fall dadurch erfolgen, daß als Basis-Verfahren die in Abschnitt 1.6.1 vorgestellte SUPG-FEM verwendet wird.

Seien im folgenden die grobe und die feine Triangulierung durch eine Zerlegungsstrategie für konforme Gitter, beispielsweise die der „roten Verfeinerung“ (vgl. Abschnitt 1.4.1), gewonnen. Dadurch wird erreicht, daß jedes Dreieck der groben Zerlegung $\mathcal{T}_H$ aufgefaßt werden kann als eine Vereinigung von Dreiecken der feinen Zerlegung $\mathcal{T}_h$, d. h. für jedes Dreieck $T_k \in \mathcal{T}_H$ hat man dann

$$T_k \;=\; \bigcup_{i=m_k}^{l_k} T_i \quad \text{mit geeigneten } T_i \in \mathcal{T}_h.$$

Unter dieser Voraussetzung seien δ_T^h und δ_T^H nun so gewählt, daß gilt

$$\sup_{i=m_k,\dots,l_k} \delta_{T_i}^h \;\le\; \delta_{T_k}^H. \tag{3.4}$$

Es bezeichne im folgenden

$$B_T^h := \|b\|_{L^\infty(T)} \quad \text{für alle } T \in \mathcal{T}_h \quad \text{und} \quad B_T^H := \|b\|_{L^\infty(T)} \quad \text{für alle } T \in \mathcal{T}_H,$$

entsprechend sind dann die Größen G_T^h, G_T^H, Z_T^h, Z_T^H, Pe_T^h und Pe_T^H zu verstehen. Beziehen sich die Betrachtungen nicht auf ein bestimmtes Gitter, so wird die Triangulierung allgemein mit $\mathcal{T}$ bezeichnet, wobei gelten soll $\mathcal{T} \in \{\mathcal{T}_H, \mathcal{T}_h\}$.

Die Bilinearform bezüglich der SUPG-FEM aus Abschnitt 1.6.1 kann für $u, v \in V$ nach partieller Integration dargestellt werden durch

$$\begin{aligned}\hat{A}_\delta(u,v) \;&=\; \varepsilon(a\nabla u, \nabla v) + \big((c - \tfrac{1}{2}\nabla\cdot b)u, v\big) + \frac{1}{2}\big[(b\cdot\nabla u, v) - (b\cdot\nabla v, u)\big] \\ &\quad + \sum_{T\in\mathcal{T}} \delta_T \Big(-\varepsilon\nabla\cdot\big(a\nabla u\big) + b\cdot\nabla u + cu, b\cdot\nabla v\Big)_T.\end{aligned}$$

Zerlegt man nun $\hat{A}_\delta(\cdot\,,\cdot)$ in die rein symmetrischen und rein nichtsymmetrischen Anteile, so erhält man für $u, v \in V$

$$\hat{A}_\delta(u,v) \;=\; A_\delta(u,v) + N_\delta(u,v)$$

mit

$$A_\delta(u,v) \;:=\; \varepsilon(a\nabla u, \nabla v) + \big((c - \tfrac{1}{2}\nabla\cdot b)u, v\big) + \sum_{T\in\mathcal{T}} \delta_T (b\cdot\nabla u, b\cdot\nabla v\Big)_T$$

und

$$N_\delta(u,v) \;:=\; \frac{1}{2}\big[(b\cdot\nabla u, v) - (b\cdot\nabla v, u)\big] + \sum_{T\in\mathcal{T}} \delta_T \Big(-\varepsilon\nabla\cdot\big(a\nabla u\big) + cu, b\cdot\nabla v\Big)_T.$$

Lemma 3.5 *Die Bilinearform $A_\delta(\cdot\,,\cdot)$ ist H_0^1-elliptisch.*

Beweis. Es gilt für alle $v \in V \equiv H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned}
A_\delta(v,v) &= \varepsilon(a\nabla v, \nabla v) + \big((c - \tfrac{1}{2}\nabla \cdot b)v, v\big) + \sum_{T\in\mathcal{T}} \delta_T(b\cdot\nabla v, b\cdot\nabla v\big)_T \\
&\geq \varepsilon\gamma|v|_{H^1}^2 + \omega\|v\|_{L^2}^2 + \sum_{T\in\mathcal{T}} \delta_T\|b\cdot\nabla v\|_{L^2(T)}^2 \\
&= |||v|||_{\varepsilon,\delta}^2.
\end{aligned}$$

□

Für die Konvergenzabschätzungen der Algorithmen in den Abschnitten 3.2.1 und 3.2.2 wird die folgende Hilfsaussage benötigt.

Lemma 3.6 *Für $u, v \in V_h$ gilt unter der Bedingung (1.24)*

$$\big|N_\delta(u,v)\big| \;\leq\; \frac{1}{2}|||v|||_{\varepsilon,\delta}^2 + \Big(K + 2\sup_{T\in\mathcal{T}_h} Z_T^h\Big)\|u\|_{L^2}^2$$

mit $K := \frac{(B'_\infty)^2}{4\omega} + \omega$ *und* $Z_T^h = \min\left\{\frac{1}{\delta_T^h}, \frac{(B_T^h)^2}{\gamma\varepsilon}\right\}$.

Beweis. Für $u, v \in V_h$ gilt mit den Hilfsabschätzungen (1.29) und (1.26) sowie der Bedingung (1.24)

$$\begin{aligned}
\big|N_\delta(u,v)\big| &\leq \left|\frac{1}{2}\Big[(b\cdot\nabla u, v) - (b\cdot\nabla v, u)\Big]\right| \\
&\quad + \left|\sum_{T\in\mathcal{T}_h} \delta_T^h\Big(-\varepsilon\nabla\cdot\big(a\nabla u\big) + cu, b\cdot\nabla v\Big)_T\right| \\
&\overset{\text{P.I.}}{\leq} \left|-\frac{1}{2}\big((\nabla\cdot b)u, v\big) - \big(b\cdot\nabla v, u\big)\right| + \frac{1}{2L_1}\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\delta_T^h\varepsilon^2\|\nabla\cdot(a\nabla u)\|_{L^2(T)}^2 \\
&\quad + \frac{1}{2L_2}\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\delta_T^h(C_T^h)^2\|u\|_{L^2(T)}^2 + \frac{L_1+L_2}{2}\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\delta_T^h\|b\cdot\nabla v\|_{L^2(T)}^2 \\
&\overset{(1.23)}{\leq} \frac{B'_\infty}{2}\|u\|_{L^2}\|v\|_{L^2} + \left(\sum_{T\in\mathcal{T}_h} Z_T^h\|u\|_{L^2(T)}^2\right)^{\frac{1}{2}} |||v|||_{\varepsilon,\delta} \\
&\quad + \frac{8}{L_1}\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\delta_T^h\varepsilon^2\left(\big(A'_T\big)^2 + A_T^2\frac{C_{\text{inv}}^2}{h_T^2}\right)|u|_{H^1(T)}^2 + \frac{1}{4L_2}\omega\|u\|_{L^2}^2 \\
&\quad + \frac{L_1+L_2}{2}\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\delta_T^h\|b\cdot\nabla v\|_{L^2(T)}^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\overset{(1.23)}{\leq} \frac{(B'_\infty)^2}{8L_3\omega}\|u\|^2_{L^2} + \frac{L_3}{2}\omega\|v\|^2_{L^2} + \frac{1}{2L_4}\sum_{T\in\mathcal{T}_h} Z^h_T\|u\|^2_{L^2(T)} + \frac{L_4}{2}|||v|||^2_{\varepsilon,\delta} \\
&\quad + \frac{1}{4L_1}\sum_{T\in\mathcal{T}_h} 32\,\delta^h_T\varepsilon^2\frac{\left(C'_{\mathrm{inv}}\right)^2}{h^2_T}\left(\left(A'_T\right)^2 + A^2_T\frac{C^2_{\mathrm{inv}}}{h^2_T}\right)\|u\|^2_{L^2(T)} + \frac{1}{4L_2}\omega\|u\|^2_{L^2} \\
&\quad + \frac{L_1+L_2}{2}\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\delta^h_T\|b\cdot\nabla v\|^2_{L^2(T)}.
\end{aligned}$$

Durch das Balancieren der Terme $32\,\delta^h_T\varepsilon^2\frac{\left(C'_{\mathrm{inv}}\right)^2}{h^2_T}\left(\left(A'_T\right)^2 + A^2_T\frac{C^2_{\mathrm{inv}}}{h^2_T}\right)$ und Z^h_T erhält man für die Wahl von δ^h_T die Bedingung

$$\delta^h_T \sim \begin{cases} \min\left\{\dfrac{1}{32\gamma\varepsilon(C'_{\mathrm{inv}})^2(A'_T)^2}, \dfrac{h^2_T}{32\gamma\varepsilon(C'_{\mathrm{inv}})^2C^2_{\mathrm{inv}}A^2_T}\right\}, & \text{falls } Pe^h_T \leq 1, \\ \min\left\{\dfrac{h_T}{\sqrt{32}\varepsilon C'_{\mathrm{inv}}A'_T}, \dfrac{h^2_T}{\sqrt{32}\varepsilon C'_{\mathrm{inv}}C_{\mathrm{inv}}A_T}\right\}, & \text{falls } Pe^h_T \geq 1. \end{cases} \tag{3.5}$$

Die Bedingung (3.5) unterscheidet sich von der nach Voraussetzung gültigen Wahl (1.24) nur durch von ε unabhängige Konstanten und kann damit schon als erfüllt angesehen werden.
Es ergibt sich somit

$$\begin{aligned}
\left|N_\delta(u,v)\right| &\leq \frac{L_4}{2}\gamma\varepsilon|v|^2_{H^1} + \frac{L_3+L_4}{2}\omega\|v\|^2_{L^2} + \frac{L_1+L_2+L_4}{2}\sum_{T\in\mathcal{T}_h}\delta^h_T\|b\cdot\nabla v\|^2_{L^2(T)} \\
&\quad + \left(\frac{1}{4L_1}+\frac{1}{2L_4}\right)\sum_{T\in\mathcal{T}_h} Z^h_T\|u\|^2_{L^2(T)} + \left(\frac{(B'_\infty)^2}{8L_3\omega}+\frac{\omega}{4L_2}\right)\|u\|^2_{L^2}.
\end{aligned}$$

Mit der Wahl $L_1 = L_2 = \frac{1}{4}$ und $L_3 = L_4 = \frac{1}{2}$ folgt daraus die Behauptung. □

3.2.1 Der modifizierte Basis-Algorithmus

Zunächst wird der Basis-Algorithmus 2.1 aus Abschnitt 2.2.1 modifiziert. Man erhält den

Algorithmus 3.3

1. Finde $u_H \in V_H$, so daß gilt $\hat{A}_\delta(u_H,\varphi) = f_\delta(\varphi)$ für alle $\varphi \in V_H$.
2. Finde $u^h \in V_h$, so daß gilt $A_\delta(u^h,\chi) = f_\delta(\chi) - N_\delta(u_H,\chi)$ für alle $\chi \in V_h$.

Als Konvergenzresultat für den Algorithmus 3.3 erhält man

Satz 3.7 *Sei $u^h \in V_h$ die aus Algorithmus 3.3 gewonnene Lösung. Es seien die Bedingungen 1.24 und 1.32 an δ_T^h und analog an δ_T^H erfüllt. Dann gelten unter der Voraussetzung $u \in H^{r+1}(\Omega)$ für $r \geq 1$ die Abschätzungen*

$$\begin{aligned}
&|||u_h - u^h|||_{\varepsilon,\delta} \\
&\lesssim \sup_{T\in\mathcal{T}_H} \Big(H_T^{r+1}\big(1 + Pe_T^H + R_T^H\big)\Big) \left[1 + \sup_{T\in\mathcal{T}_h}\left(\frac{B_T^h}{h_T}\min\left\{1, Pe_T^h\right\}\right)\right]^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \cdot \left(1 + C_\infty + \frac{B_\infty}{\sqrt{\varepsilon}}\right)|u|_{H^{r+1}}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
|||u - u^h|||_{\varepsilon,\delta} &\leq |||u - u_h|||_{\varepsilon,\delta} + |||u_h - u^h|||_{\varepsilon,\delta} \\
&\lesssim |||u_h - u^h|||_{\varepsilon,\delta} + \sup_{T\in\mathcal{T}_h}\left(h_T^r\sqrt{\varepsilon\big(1 + Pe_T^h + R_T^h\big)}\right)|u|_{H^{r+1}}
\end{aligned}$$

mit $R_T^H := \frac{\omega H_T^2}{\varepsilon}$, $R_T^h := \frac{\omega h_T^2}{\varepsilon}$.

Beweis. Sei $\chi := u_h - u^h$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
|||\chi|||_{\varepsilon,\delta}^2 &\overset{\text{L.3.5}}{\leq} A_\delta(\chi,\chi) \\
&= \Big(\hat{A}_\delta(u_h,\chi) - N_\delta(u_h,\chi)\Big) - \big(f_\delta(\chi) - N_\delta(u_H,\chi)\big) \\
&\leq \big|N_\delta(u_h - u_H,\chi)\big| \\
&\overset{\text{L.3.6}}{\leq} \frac{1}{2}|||\chi|||_{\varepsilon,\delta}^2 + \left(K + 2\sup_{T\in\mathcal{T}_h} Z_T^h\right)\|u_h - u_H\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

mit $K = \frac{(B'_\infty)^2}{4\omega} + \omega$ und $Z_T^h = \min\left\{\frac{1}{\delta_T^h}, \frac{(B_T^h)^2}{\gamma\varepsilon}\right\} = \frac{B_T^h}{h_T}\min\left\{1, Pe_T^h\right\}$. Daraus erhält man

$$|||\chi|||_{\varepsilon,\delta}^2 \lesssim \left(1 + \sup_{T\in\mathcal{T}_h} Z_T^h\right)\|u_h - u_H\|_{L^2}^2. \tag{3.6}$$

Man hat nun mit Lemma 1.34

$$\begin{aligned}
\|u_h - u_H\|_{L^2(T)}^2 &\lesssim \left(\|u - u_h\|_{L^2}^2 + \|u - u_H\|_{L^2}^2\right) \\
&\lesssim \left\{\sup_{T\in\mathcal{T}_h}\left(\frac{h_T^{r+1}\big(G_T^h\big)^2}{\varepsilon}\right)^2\left(1 + C_\infty + \frac{B_\infty}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2\right. \\
&\qquad \left. + \sup_{T\in\mathcal{T}_H}\left(\frac{H_T^{r+1}\big(G_T^H\big)^2}{\varepsilon}\right)^2\left(1 + C_\infty + \frac{B_\infty}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2\right\}|u|_{H^{r+1}}^2.
\end{aligned}$$

Daraus erhält man mit $\frac{G_T^H}{\sqrt{\varepsilon}} = \sqrt{(\gamma+1) + Pe_T^H + R_T^H}$, $R_T^H := \frac{\omega H_T^2}{\varepsilon}$, $\frac{G_T^h}{\sqrt{\varepsilon}} = \sqrt{(\gamma+1) + Pe_T^h + R_T^h}$, $R_T^h := \frac{\omega h_T^2}{\varepsilon}$ nach dem Einsetzen in (3.6) unter Berücksichtigung von $h_T < H_T$, $Pe_T^h < Pe_T^H$ und $R_T^h < R_T^H$ die erste Behauptung.

Die zweite Abschätzung folgt nach direkter Anwendung von Lemma 1.32.

□

3.2.2 Der modifizierte iterative Algorithmus

Die Anpassung des iterativen Algorithmus aus Abschnitt 2.2.2 führt zu dem

---

Algorithmus 3.4

Sei $u_h^0 := 0$ die vorgegebene Startlösung.

Für $j = 0, \dots, k-1$:

1. Finde $e_H \in V_H$, so daß gilt $\hat{A}_\delta(e_H + u_h^j, \varphi) = f_\delta(\varphi)$ für alle $\varphi \in V_H$.
2. Finde $u_h^{j+1} \in V_h$, so daß gilt $A_\delta(u_h^{j+1}, \chi) = f_\delta(\chi) - N_\delta(u_h^j + e_H, \chi)$ für alle $\chi \in V_h$.

Für Algorithmus 3.4 ergibt sich die folgende Konvergenzaussage.

Satz 3.8 *Sei $u_h^k \in V_h$ die aus Algorithmus 3.4 gewonnene Lösung mit $k \geq 1$. Es seien die Bedingungen 1.24 und 1.32 an δ_T^h und analog an δ_T^H erfüllt. Dann gelten unter der Voraussetzung $u \in H^{r+1}(\Omega)$ für $r \geq 1$ die Abschätzungen*

$$
\begin{aligned}
&|||u_h - u_h^k|||_{\varepsilon,\delta} \\
&\lesssim \frac{1}{\left(\sqrt{\varepsilon}\right)^{k-1}} \sup_{T \in \mathcal{T}_H} \left(H_T^{r+k} \left(\sqrt{1 + Pe_T^H + R_T^H} \right)^{k+1} \right) \\
&\quad \left[1 + \sup_{T \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{B_T^h}{h_T} \min\left\{1, Pe_T^h\right\} \right) \right]^{k-\frac{1}{2}} \left(1 + C_\infty + \frac{B_\infty}{\sqrt{\varepsilon}} \right)^k |u|_{H^{r+1}}
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
|||u - u_h^k|||_{\varepsilon,\delta} &\leq |||u - u_h|||_{\varepsilon,\delta} + |||u_h - u_h^k|||_{\varepsilon,\delta} \\
&\lesssim |||u_h - u_h^k|||_{\varepsilon,\delta} + \sup_{T \in \mathcal{T}_h} \left(h_T^r \sqrt{\varepsilon \left(1 + Pe_T^h + R_T^h\right)} \right) |u|_{H^{r+1}}
\end{aligned}
$$

mit $R_T^H := \frac{\omega H_T^2}{\varepsilon}$, $R_T^h := \frac{\omega h_T^2}{\varepsilon}$.

Beweis. Sei $\chi_k := u_h - u_h^k$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
|||\chi_k|||_{\varepsilon,\delta}^2 &\leq A_\delta(\chi_k,\chi_k) \\
&= \big(\hat{A}_\delta(u_h,\chi_k) - N_\delta(u_h,\chi_k)\big) - \big(f_\delta(\chi_k) - N_\delta(u_h^{k-1}+e_H,\chi_k)\big) \\
&\leq \big|N_\delta\big((I-\hat{P}_H^\delta)\chi_{k-1},\chi_k\big)\big| \\
&\overset{\text{L.3.6}}{\leq} \frac{1}{2}|||\chi_k|||_{\varepsilon,\delta}^2 + \left(K' + 2\sup_{T\in\mathcal{T}_h} Z_T^h\right)\|(I-\hat{P}_H^\delta)\chi_{k-1}\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

mit $K' = \frac{(B'_\infty)^2}{4\omega} + \omega$ und $Z_T^h = \min\left\{\frac{1}{\delta_T^h}, \frac{(B_T^h)^2}{\gamma\varepsilon}\right\} = \frac{B_T^h}{h_T}\min\left\{1, Pe_T^h\right\}$.
Daraus erhält man

$$|||\chi_k|||_{\varepsilon,\delta}^2 \lesssim \left(1 + \sup_{T\in\mathcal{T}_h} Z_T^h\right)\|(I-\hat{P}_H^\delta)\chi_{k-1}\|_{L^2}^2. \tag{3.7}$$

Es ist zunächst

$$\begin{aligned}
\|(I-\hat{P}_H^\delta)\chi_{k-1}\|_{L^2(T)}^2 &\overset{(1.37)}{\lesssim} \sup_{T\in\mathcal{T}_H}\left(\frac{H_T G_T^H}{\varepsilon}\right)^2\left(1 + C_\infty + \frac{B_\infty}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2 \\
&\qquad |||(I-\hat{P}_H^\delta)\chi_{k-1}|||_{\varepsilon,\delta}^2.
\end{aligned}$$

Nun hat man

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}|||\hat{P}_H^\delta\chi_{k-1}|||_{\varepsilon,\delta}^2 &\leq \hat{A}_\delta\big(\hat{P}_H^\delta\chi_{k-1},\hat{P}_H^\delta\chi_{k-1}\big) \\
&\overset{\text{Def.1.31}}{=} \hat{A}_\delta\big(\chi_{k-1},\hat{P}_H^\delta\chi_{k-1}\big) \\
&\leq \left|\hat{A}_\delta\big(\chi_{k-1},\hat{P}_H^\delta\chi_{k-1}\big)\right| \\
&\overset{(1.30)}{\leq} \frac{1}{4}|||\hat{P}_H^\delta\chi_{k-1}|||_{\varepsilon,\delta}^2 \\
&\quad + 2\left[\big(K+2\big)|||\chi_{k-1}|||_{\varepsilon,\delta}^2 + \sum_{T\in\mathcal{T}_h} Z_T^h\|\chi_{k-1}\|_{L^2(T)}^2\right] \\
&\leq \frac{1}{4}|||\hat{P}_H^\delta\chi_{k-1}|||_{\varepsilon,\delta}^2 + 2\left(K + 2 + \frac{1}{\omega}\sup_{T\in\mathcal{T}_h} Z_T^h\right)|||\chi_{k-1}|||_{\varepsilon,\delta}^2
\end{aligned}$$

mit $K = \max\left\{\frac{\Gamma^2}{\gamma^2}, \kappa^2\right\}$. Dies führt zu der Abschätzung

$$|||\hat{P}_H^\delta\chi_{k-1}|||_{\varepsilon,\delta}^2 \leq 8\left(K + 2 + \frac{1}{\omega}\sup_{T\in\mathcal{T}_h} Z_T^h\right)|||\chi_{k-1}|||_{\varepsilon,\delta}^2.$$

Somit ergibt sich

$$
\begin{aligned}
|||\big(I-\hat{P}_H^{\delta}\big)\chi_{k-1}|||_{\varepsilon,\delta}^2 &\leq 2\,|||\chi_{k-1}|||_{\varepsilon,\delta}^2 + 2\,|||\hat{P}_H^{\delta}\chi_{k-1}|||_{\varepsilon,\delta}^2 \\
&\leq \left(16K + 34 + \frac{16}{\omega}\sup_{T\in\mathcal{T}_h} Z_T^h\right)|||\chi_{k-1}|||_{\varepsilon,\delta}^2 \\
&\lesssim \left(1 + \sup_{T\in\mathcal{T}_h} Z_T^h\right)|||\chi_{k-1}|||_{\varepsilon,\delta}^2 .
\end{aligned}
$$

Einsetzen in (3.7) und anschließendes Wurzelziehen liefern

$$
\begin{aligned}
|||\chi_k|||_{\varepsilon,\delta} \lesssim\; & \left[1 + \sup_{T\in\mathcal{T}_h}\left(\frac{B_T^h}{h_T}\min\left\{1, Pe_T^h\right\}\right)\right] \\
& \sup_{T\in\mathcal{T}_H}\left(\frac{H_T G_T^H}{\varepsilon}\right)\left(1 + C_\infty + \frac{B_\infty}{\sqrt{\varepsilon}}\right)|||\chi_{k-1}|||_{\varepsilon,\delta} .
\end{aligned}
$$

Durch sukzessives Anwenden dieser Abschätzung erhält man

$$
\begin{aligned}
|||\chi_k|||_{\varepsilon,\delta} \lesssim\; & \left[1 + \sup_{T\in\mathcal{T}_h}\left(\frac{B_T^h}{h_T}\min\left\{1, Pe_T^h\right\}\right)\right]^{k-1} \\
& \sup_{T\in\mathcal{T}_H}\left(\frac{H_T G_T^H}{\varepsilon}\right)^{k-1}\left(1 + C_\infty + \frac{B_\infty}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^{k-1}|||\chi_1|||_{\varepsilon,\delta} .
\end{aligned}
$$

Die erste Behauptung folgt (mit $u_h^1 = u^h$) nach Anwendung der ersten Abschätzung des Satzes 3.8.

Die zweite Aussage folgt nach direkter Anwendung von Lemma 1.32.

□

3.2.3 Diskussion der Resultate

Abschließend soll die Frage untersucht werden, ob die Anwendung der Algorithmen 3.3 und 3.4 auf singulär gestörte Randwertprobleme sinnvoll ist, d. h. ob die entsprechenden Konvergenzresultate die Wahl

$$
H = O(h^{\lambda}) \quad \text{für } \lambda \in (0,1) \tag{3.8}
$$

mit $H := \sup_{T\in\mathcal{T}_H} H_T$ und $h := \sup_{T\in\mathcal{T}_h} h_T$ zulassen. Dabei wird analog der Vorgehensweise aus Abschnitt 2.3.1 verfahren.

Diskussion des Basis-Algorithmus

Betrachtet wird zunächst das Konvergenzresultat Satz 3.7 bezüglich des modifizierten Basis-Algorithmus. Die Untersuchung desselben ergibt, daß die sinnvolle Anwendbarkeit dieses Algorithmus auf die betrachteten singulär gestörten Randwertprobleme erzwungen werden kann durch die folgenden Beschränkungen:

- $\dfrac{B_\infty}{\sqrt{\varepsilon}} \lesssim 1,$
- $Pe_T^H,\, R_T^H \lesssim 1$ für alle $T \in \mathcal{T}_H$,
- $\sup\limits_{T\in\mathcal{T}_h} \left(\dfrac{B_T^h}{h_T} \min\left\{1, Pe_T^h\right\} \right) \lesssim 1$ für alle $T \in \mathcal{T}_h$.

Um diese Beschränkungen zu sichern, ist es offenbar hinreichend, die Bedingungen

$$\frac{H}{\sqrt{\varepsilon}} \lesssim 1 \quad \text{und} \quad \frac{B_\infty}{\sqrt{\varepsilon}} \lesssim 1$$

zu erfüllen. Es ist dabei zu beachten, daß im Falle $Pe_T^h > 1$ durch den Term

$$\sup_{T\in\mathcal{T}_h} \left(\frac{B_T^h}{h_T} \min\left\{1, Pe_T^h\right\} \right)$$

eine halbe h-Potenz eingebüßt wird. Um das Verhältnis $H^{r+1} \sim h^r$ sicherzustellen, hat man daher als zusätzliche Bedingung $Pe_T^h \leq 1$ zu fordern.

Diskussion des iterativen Algorithmus

Bezüglich des modifizierten iterativen Algorithmus kann für $k \geq 2$ keine sinnvolle Anwendbarkeit auf die betrachteten singulär gestörten Randwertprobleme gesichert werden. Der Grund dafür liegt darin, daß mit jeder Iteration in der Fehlerabschätzung zwischen der SUPG- und der approximierten Lösung eine halbe negative ε-Potenz hinzukommt, die sich nicht durch zusätzliche Bedingungen auffangen läßt, ohne daß dabei die Voraussetzung (3.8) verletzt wird.

Ergebnis

Die theoretische Analyse der mit Hilfe der SUPG-FEM modifizierten Algorithmen hat gezeigt, daß zwar nur der modifizierte Basis-Algorithmus bei Anwendung auf singulär gestörte Randwertprobleme unter gewissen zusätzlichen Bedingungen ein sinnvolles Ergebnis erwarten läßt; diese Bedingungen konnten jedoch gegenüber denen, die für den Basis-Algorithmus 3.1 erforderlich sind, um eine halbe negative ε-Potenz abgeschwächt werden. Für den Fall „moderat kleiner“ ε-Werte können diese Bedingungen dann in der Praxis noch erfüllt werden.

Eine weitere Verbesserung durch die Anpassung der Algorithmen mit Hilfe der SUPG-FEM liegt speziell für $\varepsilon \ll 1$ durch die verwendete „schärfere“ Norm $|||\cdot|||_{\varepsilon,\delta}$ in dem Gewinn der Kontrolle über die gewichteten Stromlinienableitungen.

Kapitel 4

Zusammenfassung

4.1 Ergebnis

Die Konvergenzanalyse der direkt auf die betrachteten singulär gestörten elliptischen Randwertprobleme übertragenen Algorithmen von Xu hat gezeigt, daß diese Algorithmen bei der verwendeten Abschätzungstechnik nur unter einschneidenden Bedingungen an die Probleme effizient sein können. Das Problem liegt dabei in der Diskrepanz der ε-Abhängigkeit zwischen den Konvergenzkonstanten aus der Fehlerabschätzung der Galerkin-FEM und der Fehlerabschätzung zwischen der approximierten und exakten Galerkin-Lösung.

Eine erste Anpassung der Algorithmen an den singulär gestörten Fall durch eine geeignete Zerlegung der Bilinearform hat Abschätzungen in einer schärferen Norm möglich gemacht. Die Bedingungen, welche gestellt werden müssen, um eine sinnvolle Anwendbarkeit der Algorithmen zu erzwingen, konnten gegenüber jenen für die ursprünglichen Algorithmen leicht abgeschwächt werden. Jedoch bleiben diese Bedingungen in der Praxis immer noch sehr restriktiv.

Durch eine weitere Anpassung mit Hilfe der SUPG-FEM wurde durch Verwendung einer noch schärferen Norm erreicht, daß man in den Konvergenzabschätzungen die Kontrolle über die Stromlinienableitungen hat. Diese Verschärfung führte jedoch dazu, daß der iterative Algorithmus der theoretischen Analyse nach kein sinnvolles Ergebnis mehr liefert. Der Grund dafür ist darin zu finden, daß die bei jeder neuen Iteration in der Kovergenzabschätzung hinzukommenden negativen halben ε-Potenzen nicht mehr durch sinnvolle Bedingungen aufgefangen werden können. Bezüglich des modifizierten Basis-Algorithmus konnten jedoch die Bedingungen, die eine sinnvolle Anwendbarkeit des Algorithmus sichern sollen, gegenüber denen der ursprünglichen Basis-Algorithmen abgeschwächt werden. Für den Fall „moderat kleiner“ ε-Werte können diese Bedingungen auch praktisch noch erfüllt werden.

Zusammenfassend kann geagt werden, daß man für die Algorithmen von Xu bei Übertragung auf singulär gestörte Probleme nicht dieselbe (gute) Effizienz wie im Falle $\varepsilon = 1$ erwarten kann. Trotzdem scheint insbesondere der unter Benutzung der SUPG-FEM angepaßte Basis-Algorithmus für die Verwendung in der Praxis interessant zu sein.

4.2 Ausblick

An dieser Stelle soll noch kurz auf mögliche Strategien zur Verbesserung der Konvergenzresultate eingegangen werden.

Dabei ist zunächst anzumerken, daß die bei den Konvergenzanalysen der mit Hilfe der SUPG-FEM angepaßten Algorithmen verwendete Abschätzungstechnik zwei potentielle Schwachpunkte aufweist. Dabei handelt es sich einmal um die Regularitätsaussage Lemma 1.14. Hierbei wäre besonders bei der Anwendung derselben im Beweis zu Lemma 1.34 eine „lokalisierte“ Variante wünschenswert. Es ist daher als weiterer potentieller Schwachpunkt das Lemma 1.34 anzuführen. Neben der fehlenden Lokalisierung, resultierend aus der Verwendung des Lemmas 1.14, liegt im Beweis eine weitere Schwachstelle darin, daß das verwendete Dualitätsargument auf der Galerkin-FEM und nicht auf der SUPG-FEM basiert.

Hier könnte ein möglicher Ansatzpunkt für eine Verbesserung der Konvergenzabschätzungen der unter Benutzung der SUPG-FEM angepaßten Algorithmen liegen. Für eine eventuelle Verbesserung der Konvergenzabschätzungen aller betrachteten Algorithmen könnte ein Artikel von *Axelsson* und *Layton* (vgl. [AL90]) interessant sein. Dort wird u. a. gezeigt, daß sich unter gewissen Voraussetzungen die Abschätzungen der zweiten Ableitungen der Lösung um eine halbe negative ε-Potenz verbessern lassen. Es wäre zu prüfen, inwiefern sich die Verwendung dieser Regularitätsaussage in den Konvergenzanalysen der Algorithmen auf die Konvergenzresultate auswirkt, und ob eine positive Auswirkung auch die Abschwächung der Anwendbarkeitsbedingungen nach sich ziehen könnte.

Es besteht weiterhin die Möglichkeit, daß die Abschätzungen bezüglich der Konvergenzanalysen der betrachteten Algorithmen zu pessimistisch gewesen sein könnten. Eine praktische Überprüfung der Ergebnisse der theoretischen Analyse könnte daher sinnvoll sein.

Literaturverzeichnis

[AL90] O. Axelsson und W. Layton, *Defect Correction Methods for convection dominated Convection-Diffusion Problems*, M^2AN 24 (1990), S. 423–455.

[Bra97] D. Braess, *Finite Elemente*, Springer-Verlag, 1997.

[BS94] S. C. Brenner und L. R. Scott, *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, Springer Verlag, 1994.

[Cia91] P. G. Ciarlet, *Basic Error Estimates for Elliptic Problems*, erschienen in: P. G. Ciarlet und J. L. Lions (Herausgeber), *Handbook of Numerical Analysis, Volume II: Finite Element Methods (Part 1)*, North-Holland, 1991.

[GT83] D. Gilbarg und N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer Verlag, 1983.

[GR94] C. Grossmann und H.-G. Roos, *Numerik partieller Differentialgleichungen*, Teubner, Stuttgart, 1994.

[Lub96] G. Lube, *Diskretisierungsverfahren für partielle Differentialgleichungen I*, Vorlesungsskript, Institut für Numerische und Angewandte Mathematik, Göttingen, 1996.

[Lub97] G. Lube, *Diskretisierungsverfahren für partielle Differentialgleichungen II*, Vorlesungsskript, Institut für Numerische und Angewandte Mathematik, Göttingen, 1997.

[RST96] H.-G. Roos, M. Stynes und L. Tobiska, *Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equations*, Springer Verlag, 1996.

[Xu96] J. Xu, *Two-Grid Discretization Techniques for linear and nonlinear PDEs*, SIAM Journal of Numerical Analysis 33 (1996), S. 1759–1777.

Danksagung

Ich möchte mich an dieser Stelle ganz herzlich bei Herrn Prof. Dr. Gert Lube für die intensive und hilfreiche Betreuung bedanken.

Weiterhin danke ich Rike, Matze und ganz besonders Julia für das Korrekturlesen und Marcus für das letzte Durchsehen meiner Arbeit.

Ein besonderer Dank gilt meinen Eltern, die mir mein Studium ermöglicht haben.