

**Die Streuung
zeitharmonischer
elektromagnetischer
Wellen
an chiralen Medien**

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultäten
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von
THOMAS GERLACH
aus
Bleicherode

Göttingen 1999

D 7

Referent: Prof. Dr. R. Kreß

Korreferent: Prof. Dr. G. Lube

Tag der mündlichen Prüfung: 29. April 1999

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	i
Einleitung	iv
I Direktes Problem	1
1 Problemstellung	1
1.1 Chirale Medien	1
1.2 Dreidimensionales Randwertproblem	2
1.3 Zweidimensionales Randwertproblem	3
2 Bohrensche Zerlegung und Darstellung der Lösung	7
2.1 Zerlegung für den dreidimensionalen Fall	7
2.2 Zerlegung für den zweidimensionalen Fall	9
3 Eindeutigkeit	10
3.1 Eindeutigkeit für das dreidimensionale Problem	11
3.2 Eindeutigkeit für das zweidimensionale Problem	13
4 Existenz	15
4.1 Existenz einer Lösung für das dreidimensionale Problem	15
4.2 Existenz einer Lösung für das zweidimensionale Problem	24

5	Formulierung als Streuproblem	30
5.1	Dreidimensionales Streuproblem	30
5.2	Zweidimensionales Streuproblem	31
6	Das Fernfeld	33
6.1	Reziprozität im dreidimensionalen Fall	34
6.2	Reziprozität im zweidimensionalen Fall	38
6.3	Fréchet-Ableitung des Fernfeldes nach dem Rand im \mathbb{R}^2	39
7	Numerische Behandlung für das zweidimensionale Problem	49
7.1	Parametrisierung der Integraloperatoren	49
7.2	Nyström-Methode	53
7.3	Diskussion der Konvergenz	54
7.4	Numerische Testbeispiele	55
II	Inverses Streuproblem	60
8	Eindeutigkeit des inversen Streuproblems	60
8.1	Hilfssätze	61
8.2	Eindeutigkeit beim zweidimensionalen Problem	62
9	Numerische Ergebnisse für das inverse Problem im \mathbb{R}^2	70
9.1	Newtonverfahren und Regularisierung	70
9.2	Modifikation in der Regularisierung	73
9.3	Die rechte Seite und der hypersinguläre Operator T	74
9.4	Rekonstruktionen	78

A	Anhang	84
A.1	Beweis zu Satz 6.8	84
A.2	Ein Alternativ-Beweis zu Satz 8.4	89
A.3	Fréchet-Ableitung	90
A.3.1	Allgemeines zur Fréchet-Differenzierbarkeit	90
A.3.2	Ein Differentiationssatz	92
A.3.3	Behandlung des zweidimensionalen Falles	92
	Literaturverzeichnis	96

Einleitung

*As far as the laws of mathematics refer to reality,
they are not certain,
and as far as they are certain,
they do not refer to reality.*

Albert Einstein

Das Phänomen der optischen Aktivität in bestimmten organischen und anorganischen Substanzen wurde um 1810 entdeckt. Ein chirales Medium [29] weist in der Mikrostruktur eine Links- beziehungsweise Rechtshändigkeit auf, die zu unterschiedlichen Phasengeschwindigkeiten für links- und rechts-zirkular polarisierte elektromagnetische Wellen führt, oder anders gesagt, die Polarisationssebene erfährt eine Drehung.

In der Optik sind chirale Medien schon seit langer Zeit bekannt, eine Behandlung im Rahmen der elektromagnetischen Feldtheorie erfolgt aber erst in den letzten Jahren. Im Mikrowellenbereich läßt sich dieser Effekt nur bei künstlich hergestellten Werkstoffen beobachten, die durch das Einbetten von chiralen 3D-Objekten in ein Trägermedium erzeugt werden. Ein praktisches Verfahren zur Herstellung solcher Materialien wird von S. A. Kuehl, S. S. Grové und E. Kuehl in [39, S. 317ff] beschrieben. Derzeit ist dies aber noch nicht mit technischen Anwendungen verbunden, da momentan keine Fertigung im industriellen Maßstab möglich ist. Wie S. Bolioli in [39, S. 33ff] ausführt, sind hier aber durchaus in näherer Zukunft weitere Fortschritte zu erwarten, die auch das in den letzten Jahren zugenommene Interesse an der Thematik begründen.

Diese Arbeit soll einen Teil dazu beitragen, die gewonnenen Einsichten zu erweitern, indem hier mittels Integralgleichungsmethoden und einem klassischen Lösungsbegriff ein Teilproblem aus diesem Themenkreis bearbeitet wird, wiewohl dies auch fern von tatsächlichen praktischen Anwendungen geschieht.

Für die mathematische Beschreibung der optischen Aktivität werden statt der „gewöhnlichen“ Materialgleichungen $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ zur Beschreibung der Abhängigkeit der dielektrischen Verschiebung beziehungsweise magnetischen Induktion

vom elektrischen und magnetischen Feld die Drude-Born-Fedorov-Materialgleichungen

$$\mathbf{D} = \varepsilon[\mathbf{E} + \beta \operatorname{rot} \mathbf{E}], \quad \mathbf{B} = \mu[\mathbf{H} + \beta \operatorname{rot} \mathbf{H}]$$

in die Maxwell'schen Gleichungen eingesetzt, wobei die Chiralitätskonstante β neben der Dielektrizitätskonstante ε und der Permeabilität μ eine neue Materialgröße ist. Mit der Charakterisierung in [30, Table 1.1] handelt es sich hierbei um sogenannte Pasteur-Medien, im weiteren soll aber immer von chiralen Medien gesprochen werden.

Im zeitharmonischen Fall mit verschwindender Leitfähigkeit können zwei der Feldgrößen – \mathbf{D} und \mathbf{B} – eliminiert werden und für die verbleibenden Felder \mathbf{E} und \mathbf{H} ergibt sich ein gekoppeltes Differentialgleichungssystem.

Ziel dieser Arbeit ist es, Randwert- und Streuprobleme zu untersuchen, bei denen ein homogenes chirales Medium von einem nichtchiralen umgeben ist. Dazu wird neben der dreidimensionalen auch eine zweidimensionale Aufgabe modelliert und untersucht. Eine numerische Behandlung erfolgt nur für dieses zweidimensionale Modell. Die Betrachtungen für das drei- und zweidimensionale Problem werden meist jeweils direkt im Anschluß aneinander durchgeführt, es finden sich dabei häufig ähnliche Schlüsse und Vorgehensweisen, es sind jedoch auch Unterschiede zu berücksichtigen, die eine getrennte Behandlung rechtfertigen.

Die Arbeit gliedert sich in zwei Teile, der erste widmet sich dem direkten Problem und der zweite inversen Fragestellungen. Weiterhin sind einige Resultate in einem Anhang angefügt, um ein flüssigeres Lesen der Arbeit zu gewährleisten.

Der Teil I ist in sieben Kapitel unterteilt. Zunächst wird die Aufgabenstellung in vektorieller Schreibweise ausgehend von den Maxwell'schen Gleichungen und den Materialgleichungen im zeitharmonischen Fall modelliert und ein zugehöriges Randwertproblem formuliert. Die auftretenden Differentialgleichungen für die inneren Felder \mathbf{E}_0 und \mathbf{H}_0 sind gekoppelt und haben die Gestalt $\operatorname{rot} \mathbf{E}_0 - i\kappa \mathbf{H}_0 = \lambda \mathbf{E}_0$, $\operatorname{rot} \mathbf{H}_0 + i\kappa \mathbf{E}_0 = \lambda \mathbf{H}_0$ mit durch die inneren physikalischen Parameter ε_0 , μ_0 und β bestimmten Konstanten κ und λ . Im Außenraum gelten die zeitharmonischen Maxwell-Gleichungen $\operatorname{rot} \mathbf{E} - ik\mathbf{H} = 0$, $\operatorname{rot} \mathbf{H} + ik\mathbf{E} = 0$ zur Wellenzahl k und die Silver-Müller-Bedingungen als Abklingverhalten im Unendlichen. Am Rand müssen stetige Übergangsbedingungen für die Tangentialkomponenten der elektrischen beziehungsweise magnetischen Felder erfüllt sein.

Für den Fall eines unendlich langen zylindrischen Körpers wird hieraus eine zweidimensionale Problemstellung für skalare Felder \mathbf{e} , \mathbf{h} , \mathbf{e}_0 , \mathbf{h}_0 abgeleitet. Diese entsprechen jeweils der Komponente der Vektorfelder \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{E}_0 beziehungsweise \mathbf{H}_0 in Ausbreitungsrichtung des Zylinders. Wie im dreidimensionalen Fall weisen die Differentialgleichungen der Form $(\Delta + \eta^2) \mathbf{e}_0 = -i\rho \mathbf{h}_0$, $(\Delta + \eta^2) \mathbf{h}_0 = i\rho \mathbf{e}_0$ für die inneren Größen mit durch ε_0 , μ_0 , β bestimmten Konstanten η , ρ eine Kopplung auf, im Außengebiet

werden die Helmholtzgleichung und die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung für \mathbf{e} und \mathbf{h} verlangt. Auf dem Rand sind Übergangsbedingungen für die Dirichlet- und Neumann-Daten zu fordern, die sich aus denen für den dreidimensionalen Fall ergeben.

Im zweiten Kapitel wird eine äquivalente Formulierung der Probleme gegeben, die auf Bohren [1] zurückgeht und einen Zugang mit Integralgleichungsmethoden deutlich vereinfacht. Dabei wird durch eine geeignete Definition neuer Größen erreicht, daß die zunächst vorhandene Kopplung der Unbekannten durch die Differentialgleichungen beseitigt wird. So führt dies im dreidimensionalen Fall für die neuen Vektorfelder \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{A}_0 , \mathbf{B}_0 auf die Gleichungen für kraftfreie Felder $\operatorname{rot} \mathbf{A} = k\mathbf{A}$, $\operatorname{rot} \mathbf{B} = -k\mathbf{B}$, $\operatorname{rot} \mathbf{A}_0 = \alpha_{\mathbf{A}}\mathbf{A}_0$, $\operatorname{rot} \mathbf{B}_0 = -\alpha_{\mathbf{B}}\mathbf{B}_0$ und im zweidimensionalen auf Helmholtzgleichungen zu unterschiedlichen Wellenzahlen. Dies geschieht auf Kosten von zusätzlichen Kopplungen in den Randbedingungen, bei der Behandlung der zweidimensionalen Aufgabe kann durch eine geschickte Wahl dieser neuen Größen jedoch erreicht werden, daß diese Kopplung nur bei den Dirichlet-Daten auftritt.

Auf recht einfache Weise gelingt es in der vorliegenden Arbeit, aus den Stratton-Chu-Formeln für elektromagnetische Felder Darstellungsformeln für die Lösung des hier betrachteten dreidimensionalen Problems zu gewinnen. Bei der zweidimensionalen Aufgabe lassen sich die Resultate über die Darstellung der Lösung zur Helmholtzgleichung unmittelbar übertragen.

Im dritten Kapitel wird die Eindeutigkeit des drei- und zweidimensionalen Problems unter geeigneten Voraussetzungen gezeigt. Für die Nachweise werden das Ausstrahlungsverhalten der Lösung im Unendlichen und die in Kapitel 2 gewonnenen Darstellungen herangezogen.

Das vierte Kapitel widmet sich der Existenz von Lösungen. Für das dreidimensionale Problem wird ein Potentialansatz mit Vektorpotentialen gewählt. Unter Ausnutzung der Sprungbeziehungen werden Randintegralgleichungen zweiter Art für die in diesem Ansatz auftretenden vektoriellen Dichten abgeleitet und deren Lösbarkeit in geeigneten Hölder-Räumen diskutiert. Dabei tritt das Problem auf, daß die eindeutige Lösbarkeit des homogenen Integralgleichungssystems nicht allgemein gezeigt werden kann, um daraus mittels der Riesz-Theorie auch auf die Existenz einer Lösung der inhomogenen Aufgabe zu schließen. Es läßt sich aber das entsprechende Eindeutigkeitsresultat für eine spezielle Parameterwahl erzielen und mittels analytischer Fredholmtheorie bis auf gewisse Ausnahmen auf den allgemeinen Fall ausweiten. Ähnliche Untersuchungen hat Ola [36] in Sobolev-Räumen durchgeführt.

Bei der zweidimensionalen Aufgabe führen gemischte Einfach- und Doppelschichtpotentiale auf ein Integralgleichungssystem, dessen eindeutige Lösbarkeit in diesem Fall direkt aus der eindeutigen Lösbarkeit geeigneter Transmissionsprobleme abgeleitet werden kann. Zudem wird neben der Betrachtung in Hölder-Räumen auch ein modifizier-

tes Wohlgestelltheitsresultat unter Ausnutzung von L^2 -Normen hergeleitet, das für den Eindeutigkeitsnachweis des inversen Problems benötigt wird.

Im fünften Kapitel werden zu den Randwertaufgaben zugehörige Streuprobleme formuliert, in denen die physikalisch relevante Frage nach den transmittierten und gestreuten Feldern bei gegebenen einfallenden ebenen elektromagnetischen Wellen aufgeworfen wird. Bei der zweidimensionalen Behandlung sind dabei je nach Polarisation der einfallenden Wellen das transversalmagnetische Problem, auch elektrisches Problem genannt, und das transversalelektrische, das auch als magnetisches Problem bezeichnet wird, zu unterscheiden.

Das sechste Kapitel beschäftigt sich mit Eigenschaften des Fernfeldes, welches das asymptotische Verhalten der gestreuten Felder beschreibt. Es werden Darstellungen angegeben und Reziprozitätseigenschaften nachgewiesen. Insbesondere wird für das zweidimensionale Problem gezeigt, daß der Fernfeldoperator, der bei gegebenen einfallenden Wellen dem Rand das zugehörige Fernfeld zuordnet, Fréchet-differenzierbar nach dem Rand ist. Die Fréchet-Ableitung wird durch ein Randwertproblem charakterisiert, mit dessen Hilfe sie sich auch berechnen läßt.

Im siebten Kapitel findet sich die Beschreibung des Nyström-Verfahrens zur numerischen Lösung des zweidimensionalen Randwert- und Streuproblems. Die Ergebnisse des entsprechend implementierten Algorithmus werden an einigen Testbeispielen demonstriert, weiterhin werden einige Ausführungen zur Konvergenz gemacht. In zwei neueren Aufsätzen [5], [6] werden numerische Verfahren basierend auf Darstellungen der Lösung als Oberflächenintegrale sowohl für das drei - als auch das zweidimensionale direkte Problem vorgestellt, allerdings fehlt dort eine entsprechende Existenz- und Eindeutigkeitsanalyse.

Zu Beginn von Teil II wird zunächst die betrachtete inverse Fragestellung nach der Gestalt des Streugebietes bei bekannten Fernfelddaten erläutert.

Das achte Kapitel geht auf Eindeutigkeitsresultate ein. Ziel war es, zu zeigen, daß bei Kenntnis der Fernfelder zu allen Einfallsrichtungen ebener Wellen und fester äußerer Wellenzahl die Gestalt des Streukörpers eindeutig bestimmt ist. Dabei gelingt es leider nur, den Nachweis für den zweidimensionalen Fall zu führen. Bei der Behandlung des dreidimensionalen Problems konnte eine Lücke nicht geschlossen werden. Erforderlich wäre ein Resultat, das für ein inneres elektromagnetisches Problem mit Chiralität die elektrischen und magnetischen Randdaten in geeignete Beziehungen setzt, ähnlich wie man es im zweidimensionalen Fall für die Dirichlet- und Neumann-Daten hat.

Im neunten Kapitel wird aufbauend auf den Resultaten zur Fréchet-Differenzierbarkeit des Fernfeldoperators ein numerisches Verfahren zur Gebietsrekonstruktion einschließlich dazugehöriger Experimente dargestellt. Ausführlich wird beschrieben, wie man die nötigen Randdaten zur Berechnung der Fréchet-Ableitung numerisch gewinnt. Es kann

anhand der Testbeispiele belegt werden, daß das Newton-Verfahren, den Erwartungen aus der Behandlung anderer Aufgaben entsprechend, prinzipiell auch bei diesem Problem geeignet ist. Es wird aber auch auf Schwierigkeiten und mögliche Lösungsansätze hingewiesen.

An dieser Stelle bedanke ich mich bei meinem Doktorvater Prof. Dr. Rainer Kreß für die Anregung zu dieser Arbeit und seine wertvollen Hinweise und Diskussionen während ihrer Entstehung. Herrn Prof. Dr. Gert Lube danke ich für die Übernahme des Korreferats. Außerdem möchte ich meinen Dank auch allen Mitgliedern unserer Arbeitsgruppe „Inverse Probleme und Integralgleichungen“ sowie den sonstigen Mitarbeitern des Instituts für Numerische und Angewandte Mathematik für die mir entgegengebrachte Unterstützung aussprechen. Der Studienstiftung des deutschen Volkes danke ich für ihre finanzielle und ideelle Förderung.

Teil I Direktes Problem

1 Problemstellung

Zunächst erfolgt ausgehend von den Maxwellschen Gleichungen und den Materialgleichungen für chirale Medien eine Ableitung der Feldgleichungen. Anschließend wird ein Randwertproblem für ein beschränktes Gebiet im dreidimensionalen Raum formuliert. Unter der Annahme eines unbeschränkten zylinderförmigen Gebietes wird hieraus eine zweidimensionale Aufgabe modelliert.

1.1 Chirale Medien

Die zeitabhängigen Maxwell-Gleichungen ohne freie Ladungen oder Ströme und mit verschwindender Leitfähigkeit lauten

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathcal{D} &= 0, & \operatorname{div} \mathcal{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathcal{E} + \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} &= 0, & \operatorname{rot} \mathcal{H} - \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} &= 0. \end{aligned}$$

Hier soll angenommen werden, daß die Felder zeitharmonisch sind und sich in der Form

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \operatorname{Re} \{ \varepsilon^{-1/2} \mathbf{E} e^{-i\omega t} \}, & \mathcal{D} &= \operatorname{Re} \{ \varepsilon^{-1/2} \mathbf{D} e^{-i\omega t} \}, \\ \mathcal{H} &= \operatorname{Re} \{ \mu^{-1/2} \mathbf{H} e^{-i\omega t} \}, & \mathcal{B} &= \operatorname{Re} \{ \mu^{-1/2} \mathbf{B} e^{-i\omega t} \} \end{aligned}$$

mit Frequenz $\omega > 0$, Dielektrizität $\varepsilon > 0$ und Permeabilität $\mu > 0$ darstellen lassen. Dieser Ansatz führt auf die zeitharmonischen Maxwellschen Gleichungen

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{D} &= 0, & \operatorname{rot} \mathbf{E} - i\omega(\varepsilon/\mu)^{1/2} \mathbf{B} &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, & \operatorname{rot} \mathbf{H} + i\omega(\mu/\varepsilon)^{1/2} \mathbf{D} &= 0. \end{aligned}$$

Zusammen mit den Materialgleichungen für chirale Medien

$$\mathbf{D} = \varepsilon(\mathbf{E} + \beta \operatorname{rot} \mathbf{E}), \quad \mathbf{B} = \mu(\mathbf{H} + \beta \operatorname{rot} \mathbf{H}) \quad (1.1)$$

mit der Chiralität $\beta \geq 0$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{E} &= \kappa^2 \gamma^2 \beta \mathbf{E} + i\kappa \gamma^2 \mathbf{H}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \kappa^2 \gamma^2 \beta \mathbf{H} - i\kappa \gamma^2 \mathbf{E},\end{aligned}\tag{1.2}$$

wobei zur Abkürzung

$$\kappa^2 = \omega^2 \varepsilon \mu, \quad \gamma^2 = (1 - \kappa^2 \beta^2)^{-1},$$

gesetzt wurde. Hieraus oder auch direkt aus (1.1) und $\operatorname{div} \mathbf{D} = \operatorname{div} \mathbf{B} = 0$ folgt mit der Identität $\operatorname{div} \operatorname{rot} = 0$ die Divergenzfreiheit von \mathbf{E} und \mathbf{H} .

Im Falle verschwindender Chiralität $\beta = 0$, d. h. $\gamma^2 = 1$, nehmen die Gleichungen (1.2) die wohlbekannte Gestalt der zeitharmonischen Maxwellschen Gleichungen¹

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} - i\kappa \mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} + i\kappa \mathbf{E} = 0\tag{1.3}$$

an. Anwendung des Rotationsoperators und der obigen Beziehungen ergibt

$$\begin{aligned}-\Delta \mathbf{E} &= (-\Delta + \operatorname{grad} \operatorname{div}) \mathbf{E} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \kappa^2 \gamma^2 \beta \operatorname{rot} \mathbf{E} + i\kappa \gamma^2 \operatorname{rot} \mathbf{H} \\ &= \kappa^2 \gamma^2 \beta \operatorname{rot} \mathbf{E} + i\kappa \gamma^2 (-i\omega(\mu/\varepsilon)^{1/2} \mathbf{D}) = \kappa^2 \gamma^2 \beta \operatorname{rot} \mathbf{E} + \kappa^2 \gamma^2 (\mathbf{E} + \beta \operatorname{rot} \mathbf{E}).\end{aligned}$$

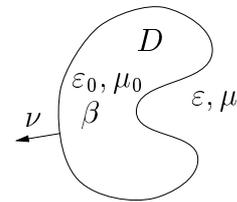
Mit einer analogen Rechnung für \mathbf{H} gilt

$$\Delta \mathbf{E} + \kappa^2 \gamma^2 \mathbf{E} = -2\kappa^2 \gamma^2 \beta \operatorname{rot} \mathbf{E}, \quad \Delta \mathbf{H} + \kappa^2 \gamma^2 \mathbf{H} = -2\kappa^2 \gamma^2 \beta \operatorname{rot} \mathbf{H}.$$

Im Falle verschwindender Chiralität sind die Felder divergenzfreie Lösungen der vektoriiellen Helmholtzgleichung zur Wellenzahl κ .

1.2 Dreidimensionales Randwertproblem

Es sei $D \subset \mathbb{R}^3$ ein beschränktes, zusammenhängendes Gebiet mit C^2 -glattem, zusammenhängendem Rand ∂D . In D sei β die konstante Chiralität, μ_0 die Permeabilität und ε_0 die Dielektrizität. Es bezeichne ν die äußere Normale an ∂D . Außerhalb habe das umgebende Medium $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ konstante Permeabilität μ und Dielektrizität ε sowie verschwindende Chiralität.



Zur Abkürzung wird

$$k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu, \quad k_0^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0, \quad \gamma^2 = (1 - k_0^2 \beta^2)^{-1}\tag{1.4}$$

gesetzt, wobei k und k_0 positiv gewählt seien. Weiter gelte, daß $1 - k_0^2 \beta^2$ positiv ist, was für physikalische Anwendungen tatsächlich der Fall ist.²

¹Vergleiche [3, (6.1)].

²Vergleiche [41].

Es sind dann Felder $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0 \in C^1(D) \cap C(\bar{D})$ und $\mathbf{E}, \mathbf{H} \in C^1(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ so zu bestimmen, daß sie den Differentialgleichungen

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} - ik\mathbf{H} = 0 \text{ in } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}, \quad (1.5 \text{ a})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} + ik\mathbf{E} = 0 \text{ in } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}, \quad (1.5 \text{ b})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}_0 - ik_0\gamma^2\mathbf{H}_0 = k_0^2\gamma^2\beta\mathbf{E}_0 \text{ in } D, \quad (1.5 \text{ c})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}_0 + ik_0\gamma^2\mathbf{E}_0 = k_0^2\gamma^2\beta\mathbf{H}_0 \text{ in } D, \quad (1.5 \text{ d})$$

genügen. Weiterhin werden zu vorgegebenen $f, g \in C^{1,\alpha}(\partial D)$, die zusätzlich der Bedingung $\nu \cdot f = \nu \cdot g = 0$ genügen, also tangential sind, die Transmissionsbedingungen

$$\varepsilon_0^{-1/2}\nu \times \mathbf{E}_0 - \varepsilon^{-1/2}\nu \times \mathbf{E} = f \text{ auf } \partial D, \quad (1.6 \text{ a})$$

$$\mu_0^{-1/2}\nu \times \mathbf{H}_0 - \mu^{-1/2}\nu \times \mathbf{H} = g \text{ auf } \partial D \quad (1.6 \text{ b})$$

und die Silver-Müller-Bedingungen (SMB)

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (\mathbf{H} \times x - r\mathbf{E}) = 0, \quad (1.7 \text{ a})$$

oder

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (\mathbf{E} \times x + r\mathbf{H}) = 0, \quad (1.7 \text{ b})$$

gleichmäßig für alle Richtungen, gefordert.

Als verkürzte Schreibweise wird der Lösungsoperator \mathcal{L} für das Problem (1.5 a) - (1.7 b) eingeführt, so daß im Falle der Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung diese in der Form

$$(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0, \mathbf{E}, \mathbf{H})^\top = \mathcal{L}(f, g)^\top \quad (1.8)$$

geschrieben werden kann.

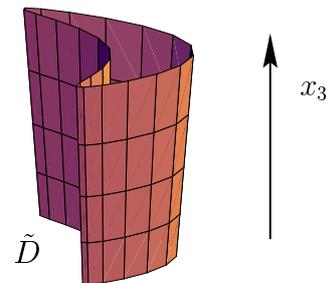
1.3 Zweidimensionales Randwertproblem

Bei der zweidimensionalen Modellierung des Problems sei angenommen, daß es sich bei dem Streugebiet $\tilde{D} \subset \mathbb{R}^3$ um einen unendlich langen zylindrischen Körper handelt. Das Koordinatensystem sei dabei so gewählt, daß diese unendlich lange Ausdehnung in x_3 -Richtung liegt, für \tilde{D} also

$$\tilde{D} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid (x_1, x_2) \in D, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

mit dem Schnitt D von \tilde{D} und der x_1 - x_2 -Ebene gilt.

Diese Symmetrieverhältnisse bedeuten, daß alle Größen von der x_3 -Komponente des



Ortes unabhängig sind, und werden in die das Problem beschreibenden Gleichungen durch die Forderung $\partial_3 = 0$ eingeführt.

Ausgehend von den Differentialgleichungen (1.2) gilt dann

$$\begin{pmatrix} \partial_2 \mathbf{E}_3 \\ -\partial_1 \mathbf{E}_3 \end{pmatrix} = \kappa^2 \gamma^2 \beta \begin{pmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \end{pmatrix} + i\kappa \gamma^2 \begin{pmatrix} \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \partial_2 \mathbf{H}_3 \\ -\partial_1 \mathbf{H}_3 \end{pmatrix} = \kappa^2 \gamma^2 \beta \begin{pmatrix} \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_2 \end{pmatrix} - i\kappa \gamma^2 \begin{pmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \end{pmatrix}$$

und

$$-\partial_2 \mathbf{E}_1 + \partial_1 \mathbf{E}_2 = \kappa^2 \gamma^2 \beta \mathbf{E}_3 + i\kappa \gamma^2 \mathbf{H}_3, \quad -\partial_2 \mathbf{H}_1 + \partial_1 \mathbf{H}_2 = \kappa^2 \gamma^2 \beta \mathbf{H}_3 - i\kappa \gamma^2 \mathbf{E}_3.$$

Dabei bedeuten \mathbf{E}_j , \mathbf{H}_j , $j = 1, 2, 3$, die erste, zweite und dritte Komponente von \mathbf{E} bzw. \mathbf{H} . Es ergibt sich hieraus

$$\begin{aligned} \partial_2^2 \mathbf{E}_3 + \partial_1^2 \mathbf{E}_3 &= \kappa^2 \gamma^2 \beta (\partial_2 \mathbf{E}_1 - \partial_1 \mathbf{E}_2) + i\kappa \gamma^2 (\partial_2 \mathbf{H}_1 - \partial_1 \mathbf{H}_2) \\ &= -[(\kappa^2 \gamma^2 \beta)^2 - (i\kappa \gamma^2)^2] \mathbf{E}_3 - 2\kappa^2 \gamma^2 \beta i\kappa \gamma^2 \mathbf{H}_3, \end{aligned}$$

also zusammengefaßt mit analogen Rechnungen für \mathbf{H}

$$(\Delta + \kappa^2 \gamma^4 (1 + \kappa^2 \beta^2)) \mathbf{E}_3 = -2i\kappa^3 \gamma^4 \beta \mathbf{H}_3, \quad (1.9 \text{ a})$$

$$(\Delta + \kappa^2 \gamma^4 (1 + \kappa^2 \beta^2)) \mathbf{H}_3 = 2i\kappa^3 \gamma^4 \beta \mathbf{E}_3. \quad (1.9 \text{ b})$$

Es bezeichne dabei in dem hier betrachteten zweidimensionalen Fall $\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2$.

Die ersten beiden Feldkomponenten hängen gemäß

$$\begin{aligned} (\kappa^4 \gamma^4 \beta^2 - \kappa^2 \gamma^4) \begin{pmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \partial_2 \\ -\partial_1 \end{pmatrix} \{ \kappa^2 \gamma^2 \beta \mathbf{E}_3 - i\kappa \gamma^2 \mathbf{H}_3 \}, \\ (\kappa^4 \gamma^4 \beta^2 - \kappa^2 \gamma^4) \begin{pmatrix} \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \partial_2 \\ -\partial_1 \end{pmatrix} \{ \kappa^2 \gamma^2 \beta \mathbf{H}_3 + i\kappa \gamma^2 \mathbf{E}_3 \} \end{aligned}$$

von den dritten ab und lassen sich wegen $\kappa^4 \gamma^4 \beta^2 - \kappa^2 \gamma^4 = -\kappa^2 \gamma^2$ durch

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_2 \\ -\partial_1 \end{pmatrix} \left\{ -\beta \mathbf{E}_3 + \frac{i}{\kappa} \mathbf{H}_3 \right\}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_2 \\ -\partial_1 \end{pmatrix} \left\{ -\beta \mathbf{H}_3 - \frac{i}{\kappa} \mathbf{E}_3 \right\}.$$

ausdrücken.

Bei verschwindender Chiralität β erhält man als Spezialfall

$$(\Delta + \kappa^2) \mathbf{E}_3 = 0, \quad (\Delta + \kappa^2) \mathbf{H}_3 = 0$$

für die dritten Komponenten und

$$\begin{pmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \end{pmatrix} = \frac{i}{\kappa} \begin{pmatrix} \partial_2 \\ -\partial_1 \end{pmatrix} \mathbf{H}_3, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{H}_1 \\ \mathbf{H}_2 \end{pmatrix} = -\frac{i}{\kappa} \begin{pmatrix} \partial_2 \\ -\partial_1 \end{pmatrix} \mathbf{E}_3$$

für die ersten beiden.³

Diese Überlegungen ermöglichen es nun, ein entsprechendes Randwertproblem für den zweidimensionalen Fall zu formulieren. Es sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes, zusammenhängendes Gebiet, der Rand ∂D sei C^2 -glatt und zusammenhängend. Weiter seien in D die Chiralität β , Dielektrizität ε_0 und Permeabilität μ_0 und in $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ die Dielektrizität und Permeabilität ε bzw. μ gegeben. Die Chiralität im Äußeren von D verschwinde.

Es bezeichne wieder wie in (1.4)

$$k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu, \quad k_0^2 = \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0, \quad \gamma^2 = (1 - k_0^2 \beta^2)^{-1}.$$

Gesucht sind $\mathbf{e}, \mathbf{h} \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}) \cap C^1(\mathbb{R}^2 \setminus D)$, $\mathbf{e}_0, \mathbf{h}_0 \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$, die den Gleichungen

$$(\Delta + k^2) \mathbf{e} = 0 \text{ in } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}, \quad (1.10 \text{ a})$$

$$(\Delta + k^2) \mathbf{h} = 0 \text{ in } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}, \quad (1.10 \text{ b})$$

$$(\Delta + k_0^2 \gamma^4 (1 + k_0^2 \beta^2)) \mathbf{e}_0 = -2ik_0^3 \gamma^4 \beta \mathbf{h}_0 \text{ in } D, \quad (1.10 \text{ c})$$

$$(\Delta + k_0^2 \gamma^4 (1 + k_0^2 \beta^2)) \mathbf{h}_0 = 2ik_0^3 \gamma^4 \beta \mathbf{e}_0 \text{ in } D \quad (1.10 \text{ d})$$

genügen. Als Forderung im Unendlichen wird die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung (SAB)

$$\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial r} - ik \mathbf{e} = o\left(\frac{1}{r^{1/2}}\right), \quad \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial r} - ik \mathbf{h} = o\left(\frac{1}{r^{1/2}}\right), \quad r \rightarrow \infty, \quad (1.11)$$

gleichmäßig für alle Richtungen, verlangt.

Die skalaren Funktionen $\mathbf{e}_0, \mathbf{h}_0, \mathbf{e}, \mathbf{h}$ entsprechen dabei gerade den dritten Komponenten der Felder $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0, \mathbf{E}, \mathbf{H}$.

Es ist nun noch zu untersuchen, wie die Transmissionsbedingungen für den zweidimensionalen Fall aussehen. Für die äußere Normale ν an ∂D , eingebettet in den \mathbb{R}^3 , und einen beliebigen Vektor $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\nu = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \nu \times \mathbf{U} = \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \\ \mathbf{U}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu_2 \mathbf{U}_3 \\ -\nu_1 \mathbf{U}_3 \\ \nu_1 \mathbf{U}_2 - \nu_2 \mathbf{U}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}_3 \nu^\perp \\ -\nu^\perp \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

mit der Bezeichnung $\nu^\perp = \begin{pmatrix} \nu_2 \\ -\nu_1 \end{pmatrix}$. Damit lauten die Transmissionsbedingungen (1.6 a), (1.6 b) zu vorgegebenen $f = (f_1, f_2, f_3)^\top, g = (g_1, g_2, g_3)^\top$ in den ersten beiden Komponenten

$$\left(\varepsilon_0^{-1/2} \mathbf{e}_0 - \varepsilon^{-1/2} \mathbf{e} \right) \nu^\perp = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix},$$

$$\left(\mu_0^{-1/2} \mathbf{h}_0 - \mu^{-1/2} \mathbf{h} \right) \nu^\perp = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$$

³Zu der Modellierung eines zweidimensionalen Problems im nichtchiralen Fall vergleiche auch [42].

bzw. nach Multiplikation mit ν^\perp

$$\begin{aligned}\varepsilon_0^{-1/2} \mathbf{e}_0 - \varepsilon^{-1/2} \mathbf{e} &= \tilde{f} := \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \cdot \nu^\perp, \\ \mu_0^{-1/2} \mathbf{h}_0 - \mu^{-1/2} \mathbf{h} &= \tilde{g} := \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} \cdot \nu^\perp.\end{aligned}$$

Wie man sieht, führt die Forderung, daß die Randdaten tangential sind, hier für die ersten beiden Komponenten zu der Bedingung $(f_1, f_2)^\top \cdot \nu = (g_1, g_2)^\top \cdot \nu = 0$.

Die Randbedingung für die dritte Komponente mit $\hat{f} := f_3$ lautet⁴

$$\begin{aligned}-\hat{f} &= \varepsilon_0^{-1/2} \nu^\perp \cdot (\mathbf{E}_{0,1}, \mathbf{E}_{0,2})^\top - \varepsilon^{-1/2} \nu^\perp \cdot (\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2)^\top \\ &= \underbrace{\nu^\perp \cdot \begin{pmatrix} \partial_2 \\ -\partial_1 \end{pmatrix}}_{\partial/\partial\nu} \left\{ \varepsilon_0^{-1/2} \left(-\beta \mathbf{e}_0 + \frac{i}{k_0} \mathbf{h}_0 \right) - \varepsilon^{-1/2} \frac{i}{k} \mathbf{h} \right\}.\end{aligned}$$

Eine analoge Rechnung ist für $\hat{g} := g_3$ auszuführen und zusammengefaßt lauten die Randbedingungen auf ∂D

$$\hat{f} = \varepsilon_0^{-1/2} \beta \frac{\partial \mathbf{e}_0}{\partial \nu} - \varepsilon_0^{-1/2} i k_0^{-1} \frac{\partial \mathbf{h}_0}{\partial \nu} + \varepsilon^{-1/2} i k^{-1} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \nu}, \quad (1.12 \text{ a})$$

$$\hat{g} = \mu_0^{-1/2} \beta \frac{\partial \mathbf{h}_0}{\partial \nu} + \mu_0^{-1/2} i k_0^{-1} \frac{\partial \mathbf{e}_0}{\partial \nu} - \mu^{-1/2} i k^{-1} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \nu}, \quad (1.12 \text{ b})$$

$$\tilde{f} = \varepsilon_0^{-1/2} \mathbf{e}_0 - \varepsilon^{-1/2} \mathbf{e}, \quad (1.12 \text{ c})$$

$$\tilde{g} = \mu_0^{-1/2} \mathbf{h}_0 - \mu^{-1/2} \mathbf{h}, \quad (1.12 \text{ d})$$

wobei $\hat{f}, \hat{g} \in C^{0,\alpha}(\partial D)$ und $\tilde{f}, \tilde{g} \in C^{1,\alpha}(\partial D)$ vorausgesetzt wird.

Auch hier wird ein Lösungsoperator \mathcal{L} für das Problem (1.10 a) - (1.12 d) eingeführt, so daß

$$(\mathbf{e}_0, \mathbf{h}_0, \mathbf{e}, \mathbf{h})^\top = \mathcal{L}(\hat{f}, \hat{g}, \tilde{f}, \tilde{g})^\top \quad (1.13)$$

gilt, falls die Aufgabe eine eindeutig bestimmte Lösung besitzt. Eine Verwechslung mit dem gleichlautenden Operator für das dreidimensionale Problem in (1.8) ist nicht möglich, da einerseits die Anzahl der Argumente verschieden ist und auch immer eindeutig aus dem Kontext hervorgehen wird, ob es sich um das drei- bzw. zweidimensionale Problem handelt.

⁴Hier werden vorübergehend die Bezeichnungen $\mathbf{E}_0 = (\mathbf{E}_{0,1}, \mathbf{E}_{0,2}, \mathbf{e}_0)^\top$, $\mathbf{E} = (\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2, \mathbf{e})^\top$, ... verwendet, die ersten beiden Komponenten aber wieder durch die dritten ausgedrückt.

2 Bohrensche Zerlegung und Darstellung der Lösung

Die Randwertprobleme weisen gekoppelte Differentialgleichungen (1.5 a) - (1.5 d) bzw. (1.10 a) - (1.10 d) zwischen \mathbf{E} - und \mathbf{H} -Feldern auf, die Transmissionsbedingungen (1.6 a), (1.6 b) und (1.12 a) - (1.12 d) sind im dreidimensionalen Fall entkoppelt und im zweidimensionalen ebenfalls gekoppelt. Mittels einer geeigneten Zerlegung, die auf C. F. Bohren [1] zurückgeht, lassen sich diese Aufgaben in äquivalente Probleme mit entkoppelten Differentialgleichungen und gekoppelten Randbedingungen überführen. Dies ermöglicht einen Zugang zur Lösungstheorie, der auf der Verwendung von Potentialen zur Grundlösung der Helmholtz-Gleichung basiert.

2.1 Zerlegung für den dreidimensionalen Fall

Es werden Felder \mathbf{A} , \mathbf{B} bzw. \mathbf{A}_0 , \mathbf{B}_0 gemäß

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{E} + i\mathbf{H}, & \mathbf{A}_0 &= \mathbf{E}_0 + i\mathbf{H}_0, \\ \mathbf{B} &= \mathbf{E} - i\mathbf{H}, & \mathbf{B}_0 &= \mathbf{E}_0 - i\mathbf{H}_0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

definiert. Falls \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{E}_0 , \mathbf{H}_0 den Differentialgleichungen (1.5 a) - (1.5 d) genügen, so gilt

$$\operatorname{rot}(\mathbf{E}_0 \pm i\mathbf{H}_0) = k_0^2 \gamma^2 \beta \mathbf{E}_0 + ik_0 \gamma^2 \mathbf{H}_0 \pm (k_0^2 \gamma^2 \beta i \mathbf{H}_0 + k_0 \gamma^2 \mathbf{E}_0) = k_0 \gamma^2 (k_0 \beta \pm 1) (\mathbf{E}_0 \pm i\mathbf{H}_0),$$

was

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = k \mathbf{A}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = -k \mathbf{B} \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}, \quad (2.2 \text{ a})$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{A}_0 = \alpha_{\mathbf{A}} \mathbf{A}_0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B}_0 = -\alpha_{\mathbf{B}} \mathbf{B}_0 \quad \text{in } D, \quad (2.2 \text{ b})$$

impliziert. Dabei sind $\alpha_{\mathbf{A}}$ und $\alpha_{\mathbf{B}}$ durch

$$\alpha_{\mathbf{A}} := k_0 \gamma^2 (1 + k_0 \beta), \quad \alpha_{\mathbf{B}} := k_0 \gamma^2 (1 - k_0 \beta) \quad (2.3)$$

erklärt. Felder, die Gleichungen der Form (2.2 a), (2.2 b) genügen, werden kraftfrei¹ genannt. Die Transmissionsbedingungen transformieren sich zu

$$\varepsilon_0^{-1/2} \nu \times (\mathbf{A}_0 + \mathbf{B}_0) - \varepsilon^{-1/2} \nu \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = 2f \quad \text{auf } \partial D, \quad (2.4 \text{ a})$$

$$\mu_0^{-1/2} \nu \times (\mathbf{A}_0 - \mathbf{B}_0) - \mu^{-1/2} \nu \times (\mathbf{A} - \mathbf{B}) = 2ig \quad \text{auf } \partial D \quad (2.4 \text{ b})$$

¹Vergleiche etwa [20].

und die Ausstrahlungsbedingungen zu

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (\mathbf{A} \times x - ir\mathbf{A}) = 0, \quad (2.5 \text{ a})$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (\mathbf{B} \times x + ir\mathbf{B}) = 0. \quad (2.5 \text{ b})$$

Aus (2.2 a) und (2.2 b) läßt sich auch unmittelbar wieder die Divergenzfreiheit der auftretenden Felder ablesen. Außerdem gilt für ein Vektorfeld \mathbf{U} mit $\text{rot } \mathbf{U} = \pm\alpha\mathbf{U}$ die Beziehung

$$\text{rot } \mathbf{U} \pm i\alpha(i\mathbf{U}) = 0, \quad \text{rot}(i\mathbf{U}) \mp i\alpha\mathbf{U} = 0,$$

so daß das Paar $(i\mathbf{U}, \mathbf{U})$ bzw. $(\mathbf{U}, i\mathbf{U})$ den Maxwell'schen Gleichungen der Form (1.3) genügt und die Stratton-Chu-Formeln² anwendbar sind. Diese führen direkt auf Darstellungsformeln für $\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0, \mathbf{A}, \mathbf{B}$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_0(x) &= -\text{rot} \int_{\partial D} \nu(y) \times \mathbf{A}_0(y) \Phi_{\alpha_A}(x, y) \, ds(y) \\ &\quad - \frac{1}{\alpha_A} \text{rot rot} \int_{\partial D} \nu(y) \times \mathbf{A}_0(y) \Phi_{\alpha_A}(x, y) \, ds(y), \quad x \in D, \end{aligned} \quad (2.6 \text{ a})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_0(x) &= -\text{rot} \int_{\partial D} \nu(y) \times \mathbf{B}_0(y) \Phi_{\alpha_B}(x, y) \, ds(y) \\ &\quad + \frac{1}{\alpha_B} \text{rot rot} \int_{\partial D} \nu(y) \times \mathbf{B}_0(y) \Phi_{\alpha_B}(x, y) \, ds(y), \quad x \in D, \end{aligned} \quad (2.6 \text{ b})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(x) &= \text{rot} \int_{\partial D} \nu(y) \times \mathbf{A}(y) \Phi_k(x, y) \, ds(y) \\ &\quad + \frac{1}{k} \text{rot rot} \int_{\partial D} \nu(y) \times \mathbf{A}(y) \Phi_k(x, y) \, ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}, \end{aligned} \quad (2.6 \text{ c})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(x) &= \text{rot} \int_{\partial D} \nu(y) \times \mathbf{B}(y) \Phi_k(x, y) \, ds(y) \\ &\quad - \frac{1}{k} \text{rot rot} \int_{\partial D} \nu(y) \times \mathbf{B}(y) \Phi_k(x, y) \, ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}. \end{aligned} \quad (2.6 \text{ d})$$

Im entsprechenden Komplementärgebiet (ohne den Rand ∂D) verschwinden diese Potentiale jeweils. Dabei ist die Grundlösung gegeben durch

$$\Phi_\kappa(x, y) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{i\kappa|x-y|}}{|x-y|}, \quad x \neq y. \quad (2.7)$$

²Siehe [3, Th. 6.2 und 6.6]. Dabei entspricht $(i\mathbf{U}, \mathbf{U})$ bzw. $(\mathbf{U}, i\mathbf{U})$ dem Paar (\mathbf{E}, \mathbf{H}) . Im Außengebiet folgen die Entsprechungen der Silver-Müller-Bedingung (1.7 a), (1.7 b) aus (2.5 a) bzw. (2.5 b).

2.2 Zerlegung für den zweidimensionalen Fall

Man transformiert das Problem durch eine Zerlegung

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \left(\frac{\mu_0}{\mu}\right)^{1/2} \mathbf{e} + i \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)^{1/2} \mathbf{h}, & \mathbf{a}_0 &= \mathbf{e}_0 + i\mathbf{h}_0, \\ \mathbf{b} &= \left(\frac{\mu_0}{\mu}\right)^{1/2} \mathbf{e} - i \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)^{1/2} \mathbf{h}, & \mathbf{b}_0 &= \mathbf{e}_0 - i\mathbf{h}_0,\end{aligned}\quad (2.8)$$

so daß die Differentialgleichungen (1.10 a) - (1.10 d) für die neuen Größen die Gestalt

$$(\Delta + k^2) \mathbf{a} = (\Delta + k^2) \mathbf{b} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D} \quad (2.9 \text{ a})$$

und

$$(\Delta + \alpha_{\mathbf{A}}^2) \mathbf{a}_0 = (\Delta + \alpha_{\mathbf{B}}^2) \mathbf{b}_0 = 0 \quad \text{in } D \quad (2.9 \text{ b})$$

annehmen, wobei wie in (2.3)

$$\alpha_{\mathbf{A}} = k_0 \gamma^2 (1 + k_0 \beta) = k_0 / (1 - k_0 \beta), \quad \alpha_{\mathbf{B}} = k_0 \gamma^2 (1 - k_0 \beta) = k_0 / (1 + k_0 \beta)$$

gesetzt wurde. Weiterhin gilt dann die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial r} - ik \mathbf{a} = o\left(\frac{1}{r^{1/2}}\right), \quad \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial r} - ik \mathbf{b} = o\left(\frac{1}{r^{1/2}}\right) \quad (2.10)$$

für \mathbf{a} und \mathbf{b} . Die Randbedingungen ergeben sich durch

$$\mathbf{e} = \left(\frac{\mu_0}{\mu}\right)^{-1/2} \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{2}, \quad \mathbf{h} = \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon}\right)^{-1/2} \frac{\mathbf{a} - \mathbf{b}}{2i}, \quad \mathbf{e}_0 = \frac{\mathbf{a}_0 + \mathbf{b}_0}{2}, \quad \mathbf{h}_0 = \frac{\mathbf{a}_0 - \mathbf{b}_0}{2i}$$

aus den Randbedingungen (1.12 a) - (1.12 d) für \mathbf{e} , \mathbf{h} , \mathbf{e}_0 , \mathbf{h}_0 , und es gilt

$$-\alpha_{\mathbf{A}} (\varepsilon_0^{1/2} \hat{f} + i\mu_0^{1/2} \hat{g}) =: N_{\mathbf{a}} = \frac{\partial \mathbf{a}_0}{\partial \nu} - \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \nu}, \quad (2.11 \text{ a})$$

$$\alpha_{\mathbf{B}} (\varepsilon_0^{1/2} \hat{f} - i\mu_0^{1/2} \hat{g}) =: N_{\mathbf{b}} = \frac{\partial \mathbf{b}_0}{\partial \nu} - \frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \nu}, \quad (2.11 \text{ b})$$

$$\varepsilon_0^{1/2} \tilde{f} + i\mu_0^{1/2} \tilde{g} =: D_{\mathbf{a}} = \mathbf{a}_0 - \xi_+ \mathbf{a} - \xi_- \mathbf{b}, \quad (2.11 \text{ c})$$

$$\varepsilon_0^{1/2} \tilde{f} - i\mu_0^{1/2} \tilde{g} =: D_{\mathbf{b}} = \mathbf{b}_0 - \xi_- \mathbf{a} - \xi_+ \mathbf{b} \quad (2.11 \text{ d})$$

mit den Abkürzungen

$$\xi := \left(\frac{\varepsilon_0 \mu}{\varepsilon \mu_0}\right)^{1/2}, \quad \xi_+ := \frac{\xi + \xi^{-1}}{2}, \quad \xi_- := \frac{\xi - \xi^{-1}}{2}. \quad (2.12)$$

Die spezielle Wahl der Koeffizienten in der Definition von \mathbf{a}_0 und \mathbf{b}_0 führt hier dazu, daß eine Kopplung bei den Randbedingungen nur noch in den Dirichlet-Daten auftritt,

was später die Potentialansätze bei der Untersuchung der Existenz von Lösungen etwas vereinfachen wird.

Die Lösung von (2.9 a) - (2.11 d) wird in Analogie zu (1.13) mittels des Operators \mathcal{L}^B geschrieben, d.h. es gilt

$$(\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0, \mathbf{a}, \mathbf{b})^\top = \mathcal{L}^B (N_{\mathbf{a}}, N_{\mathbf{b}}, D_{\mathbf{a}}, D_{\mathbf{b}})^\top. \quad (2.13)$$

Da $\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0, \mathbf{a}, \mathbf{b}$ Helmholtzgleichungen in D bzw $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ genügen und zusätzlich \mathbf{a}, \mathbf{b} die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung erfüllen, gelten folgende Darstellungen³

$$\int_{\partial D} \left\{ \mathbf{a}_0(y) \frac{\partial \Phi_{\alpha_{\mathbf{A}}}(x, y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \mathbf{a}_0}{\partial \nu} \Phi_{\alpha_{\mathbf{A}}}(x, y) \right\} ds(y) = \begin{cases} -\mathbf{a}_0(x), & x \in D, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}, \end{cases} \quad (2.14 \text{ a})$$

$$\int_{\partial D} \left\{ \mathbf{b}_0(y) \frac{\partial \Phi_{\alpha_{\mathbf{B}}}(x, y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \mathbf{b}_0}{\partial \nu} \Phi_{\alpha_{\mathbf{B}}}(x, y) \right\} ds(y) = \begin{cases} -\mathbf{b}_0(x), & x \in D, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}, \end{cases} \quad (2.14 \text{ b})$$

$$\int_{\partial D} \left\{ \mathbf{a}(y) \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \nu} \Phi_k(x, y) \right\} ds(y) = \begin{cases} 0, & x \in D, \\ \mathbf{a}(x), & x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}, \end{cases} \quad (2.14 \text{ c})$$

$$\int_{\partial D} \left\{ \mathbf{b}(y) \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \nu} \Phi_k(x, y) \right\} ds(y) = \begin{cases} 0, & x \in D, \\ \mathbf{b}(x), & x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}. \end{cases} \quad (2.14 \text{ d})$$

Dabei bezeichnet

$$\Phi_\kappa(x, y) = \frac{i}{4} H_0^1(\kappa|x - y|), \quad x \neq y, \quad (2.15)$$

die Grundlösung zur Wellenzahl $\kappa > 0$ im \mathbb{R}^2 . Hieraus lassen sich auch leicht Darstellungen für $\mathbf{e}_0, \mathbf{h}_0, \mathbf{e}, \mathbf{h}$ angeben.

3 Eindeutigkeit

Für das zwei- und dreidimensionale Transmissionsproblem wird die Eindeutigkeit nachgewiesen, indem gezeigt wird, daß die jeweilige homogene Aufgabe nur die triviale Lösung besitzt. Zunächst wird unter Verwendung der Ausstrahlungsbedingungen gezeigt, daß bei homogenen Randwerten die Lösung im Außenraum verschwindet. Dann kann mit den Darstellungsformeln und den Transmissionsbedingungen auf die Lösung im Inneren geschlossen werden.

³Siehe [2, Th. 3.1 und 3.3].

3.1 Eindeutigkeit für das dreidimensionale Problem

Lemma 3.1 *Es seien $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0 \in C^1(D) \cap C(\bar{D})$ und $\mathbf{E}, \mathbf{H} \in C^1(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ Lösungen des dreidimensionalen Transmissionsproblems mit homogenen Randdaten, also $(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0, \mathbf{E}, \mathbf{H})^\top = \mathcal{L}(0, 0)^\top$. Dann gilt*

$$\mathbf{E} = \mathbf{H} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus D.$$

Beweis Man betrachtet

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} (\bar{\mathbf{E}}_0 \times \mathbf{H}_0) \cdot \nu \, ds &= \int_D \operatorname{div} (\bar{\mathbf{E}}_0 \times \mathbf{H}_0) \, dx \\ &= \int_D (\mathbf{H}_0 \cdot \underbrace{\operatorname{rot} \bar{\mathbf{E}}_0}_{-ik_0\gamma^2 \mathbf{H}_0 + k_0^2 \gamma^2 \beta \mathbf{E}_0} - \bar{\mathbf{E}}_0 \cdot \underbrace{\operatorname{rot} \mathbf{H}_0}_{-ik_0\gamma^2 \mathbf{E}_0 + k_0^2 \gamma^2 \beta \mathbf{H}_0}) \, dx \\ &= ik_0\gamma^2 \int_D (|\mathbf{E}_0|^2 - |\mathbf{H}_0|^2) \, dx. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Es sei nun R so groß gewählt, daß $D \subset \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| \leq R\}$. Dann gilt

$$ik \int_{\substack{x \notin \bar{D} \\ |x| < R}} (|\mathbf{E}|^2 - |\mathbf{H}|^2) \, dx = - \int_{\partial D} (\bar{\mathbf{E}} \times \mathbf{H}) \cdot \nu \, ds + \int_{|x|=R} (\bar{\mathbf{E}} \times \mathbf{H}) \cdot \nu \, ds.$$

Aus der Homogenität der Transmissionsbedingungen (1.6 a), (1.6 b) folgt

$$\left\{ \varepsilon_0^{-1/2} \mu_0^{-1/2} (\bar{\mathbf{E}}_0 \times \mathbf{H}_0) - \varepsilon^{-1/2} \mu^{-1/2} (\bar{\mathbf{E}} \times \mathbf{H}) \right\} \cdot \nu = 0,$$

womit

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re} \int_{|x|=R} (\bar{\mathbf{E}} \times \mathbf{H}) \cdot \nu \, ds \\ &= \operatorname{Re} \int_{\partial D} (\bar{\mathbf{E}} \times \mathbf{H}) \cdot \nu \, ds + k \operatorname{Re} \left(i \int_{\substack{x \notin \bar{D} \\ |x| < R}} (|\mathbf{E}|^2 - |\mathbf{H}|^2) \, dx \right) \\ &= \left(\frac{\varepsilon_0 \mu_0}{\varepsilon \mu} \right)^{-1/2} \operatorname{Re} \int_{\partial D} (\bar{\mathbf{E}}_0 \times \mathbf{H}_0) \cdot \nu \, ds \\ &= \left(\frac{\varepsilon_0 \mu_0}{\varepsilon \mu} \right)^{-1/2} k_0 \gamma^2 \operatorname{Re} \left(i \int_D (|\mathbf{E}_0|^2 - |\mathbf{H}_0|^2) \, dx \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

folgt. Für $|x| = R$ ist die Normale durch $\nu = \hat{x}$ gegeben und es folgt aus der Ausstrahlungsbedingung (1.7 a) und der Endlichkeitsbedingung¹ $\mathbf{E} = O(R^{-1})$

$$\nu \cdot (\bar{\mathbf{E}} \times \mathbf{H}) = -\bar{\mathbf{E}} \cdot (\hat{x} \times \mathbf{H}) = - \underbrace{\bar{\mathbf{E}}}_{O(R^{-1})} \cdot (-\mathbf{E} + o(R^{-1})) = |\mathbf{E}|^2 + o(R^{-2}),$$

und daraus unmittelbar

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|x|=R} |\mathbf{E}|^2 ds = 0.$$

Da \mathbf{E} als Lösung der Maxwell-Gleichungen komponentenweise der Helmholtzgleichung $\Delta \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0$ in $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ genügt, ist das Rellich-Lemma² anwendbar und es folgt

$$\mathbf{E} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus D.$$

Ein analoger Schluß ist auch für \mathbf{H} möglich, so daß die Behauptung gilt. **q. e. d.**

Satz 3.2 *Es seien die Voraussetzungen des vorigen Lemmas 3.1 erfüllt. Dann gilt*

$$\mathbf{E} = \mathbf{H} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} \quad \text{und} \quad \mathbf{E}_0 = \mathbf{H}_0 = 0 \quad \text{in } D,$$

das heißt, das dreidimensionale Randwertproblem besitzt höchstens eine Lösung.

Beweis Das Verschwinden der Lösung im Komplement von D ist Inhalt des vorangegangenen Lemmas und es folgt hieraus insbesondere das Verschwinden der gemäß (2.1) zerlegten Felder \mathbf{A} und \mathbf{B} in $\mathbb{R}^3 \setminus D$, so daß auch

$$\nu \times \mathbf{A} = \nu \times \mathbf{B} = 0 \quad \text{auf } \partial D$$

gilt. Hieraus folgt wegen der Homogenität der Randbedingungen (2.4 a), (2.4 b)

$$\nu \times \mathbf{A}_0 = \nu \times \mathbf{B}_0 = 0 \quad \text{auf } \partial D$$

und zusammen mit den Darstellungsformeln (2.6 a), (2.6 b) auch $\mathbf{A}_0 = \mathbf{B}_0 = 0$. Aus (2.1) liest man $\mathbf{E}_0 = \mathbf{H}_0 = 0$ ab. **q. e. d.**

Hieraus folgt auch unmittelbar, daß das transformierte Problem (2.2 a) - (2.5 b) höchstens eine Lösung besitzt..

¹Vergleiche dazu [3, (6.19)].

²Siehe [3, Lemma 2.11].

3.2 Eindeutigkeit für das zweidimensionale Problem

Lemma 3.3 *Es seien $\mathbf{e}_0, \mathbf{h}_0 \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ und $\mathbf{e}, \mathbf{h} \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus D) \cap C(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D})$ Lösungen des zweidimensionalen Transmissionsproblems mit homogenen Randdaten, das heißt $(\mathbf{e}_0, \mathbf{h}_0, \mathbf{e}, \mathbf{h})^\top = \mathcal{L}(0, 0, 0, 0)^\top$. Dann gilt*

$$\mathbf{e} = \mathbf{h} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus D.$$

Beweis Man betrachtet

$$\begin{aligned} & \int_{\partial D} \left\{ \beta \left[\mathbf{h}_0 \frac{\partial \bar{\mathbf{e}}_0}{\partial \nu} - \bar{\mathbf{e}}_0 \frac{\partial \mathbf{h}_0}{\partial \nu} \right] + \frac{i}{k_0} \left[\mathbf{h}_0 \frac{\partial \bar{\mathbf{h}}_0}{\partial \nu} - \bar{\mathbf{e}}_0 \frac{\partial \mathbf{e}_0}{\partial \nu} \right] \right\} ds \\ &= \int_D \left\{ \beta [\mathbf{h}_0 \Delta \bar{\mathbf{e}}_0 - \bar{\mathbf{e}}_0 \Delta \mathbf{h}_0] + \frac{i}{k_0} [\mathbf{h}_0 \Delta \bar{\mathbf{h}}_0 - \bar{\mathbf{e}}_0 \Delta \mathbf{e}_0 + |\text{grad } \mathbf{h}_0|^2 - |\text{grad } \mathbf{e}_0|^2] \right\} dx \\ &= i \int_D \left\{ (2(k_0^2 \gamma^2 \beta)(k_0 \gamma^2) - \gamma^2(1 + (k_0 \beta)^2)) (|\mathbf{h}_0|^2 - |\mathbf{e}_0|^2) \right. \\ &\quad \left. + k_0^{-1} (|\text{grad } \mathbf{h}_0|^2 - |\text{grad } \mathbf{e}_0|^2) \right\} dx \\ &\in i\mathbb{R}. \end{aligned}$$

Andererseits gilt für hinreichend großes R mit $D \subset \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq R\}$

$$\begin{aligned} & \int_{\partial D} \left\{ \beta \left[\mathbf{h}_0 \frac{\partial \bar{\mathbf{e}}_0}{\partial \nu} - \bar{\mathbf{e}}_0 \frac{\partial \mathbf{h}_0}{\partial \nu} \right] + \frac{i}{k_0} \left[\mathbf{h}_0 \frac{\partial \bar{\mathbf{h}}_0}{\partial \nu} - \bar{\mathbf{e}}_0 \frac{\partial \mathbf{e}_0}{\partial \nu} \right] \right\} ds \\ &= \int_{\partial D} \left\{ \mathbf{h}_0 \left[\beta \frac{\partial \bar{\mathbf{e}}_0}{\partial \nu} + ik_0^{-1} \frac{\partial \bar{\mathbf{h}}_0}{\partial \nu} \right] - \bar{\mathbf{e}}_0 \left[\beta \frac{\partial \mathbf{h}_0}{\partial \nu} + ik_0^{-1} \frac{\partial \mathbf{e}_0}{\partial \nu} \right] \right\} ds \\ &= \left(\frac{\mu_0 \varepsilon_0}{\mu \varepsilon} \right)^{1/2} \frac{i}{k} \int_{\partial D} \left\{ \mathbf{h} \frac{\partial \bar{\mathbf{h}}}{\partial \nu} - \bar{\mathbf{e}} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \nu} \right\} ds \\ &= \left(\frac{\mu_0 \varepsilon_0}{\mu \varepsilon} \right)^{1/2} \frac{i}{k} \left[- \int_{\substack{x \notin \bar{D} \\ |x| < R}} \left\{ \mathbf{h} \Delta \bar{\mathbf{h}} + |\text{grad } \mathbf{h}|^2 - \bar{\mathbf{e}} \Delta \mathbf{e} - |\text{grad } \mathbf{e}|^2 \right\} dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{|x|=R} \left\{ \mathbf{h} \frac{\partial \bar{\mathbf{h}}}{\partial \nu} - \bar{\mathbf{e}} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \nu} \right\} ds \right] \\ &= - \left(\frac{\mu_0 \varepsilon_0}{\mu \varepsilon} \right)^{1/2} \frac{i}{k} \int_{\substack{x \notin \bar{D} \\ |x| < R}} \left\{ k^2 (|\mathbf{e}|^2 - |\mathbf{h}|^2) + |\text{grad } \mathbf{h}|^2 - |\text{grad } \mathbf{e}|^2 \right\} dx \\ &\quad + \left(\frac{\mu_0 \varepsilon_0}{\mu \varepsilon} \right)^{1/2} \frac{i}{k} \int_{|x|=R} \left\{ \mathbf{h} \frac{\partial \bar{\mathbf{h}}}{\partial \nu} - \bar{\mathbf{e}} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \nu} \right\} ds. \end{aligned}$$

Bildung des Realteiles führt auf

$$\operatorname{Re} \left(i \int_{|x|=R} \left\{ \mathbf{h} \frac{\partial \bar{\mathbf{h}}}{\partial \nu} - \bar{\mathbf{e}} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \nu} \right\} ds \right) = 0.$$

Aus den Ausstrahlungsbedingungen (1.11) und den Endlichkeitsbedingungen $\mathbf{h} = O(R^{-1/2})$, $\mathbf{e} = O(R^{-1/2})$ erhält man

$$\begin{aligned} \mathbf{h} \frac{\partial \bar{\mathbf{h}}}{\partial \nu} &= \mathbf{h}(o(R^{-1/2}) - ik\bar{\mathbf{h}}) = o(R^{-1}) - ik|\mathbf{h}|^2, \\ \bar{\mathbf{e}} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \nu} &= \bar{\mathbf{e}}(o(R^{-1/2}) + ik\mathbf{e}) = o(R^{-1}) + ik|\mathbf{e}|^2, \end{aligned}$$

womit

$$\int_{|x|=R} (|\mathbf{e}|^2 + |\mathbf{h}|^2) ds(x) = o(1)$$

folgt. Nach dem Rellich-Lemma gilt dann $\mathbf{e} = \mathbf{h} = 0$ in $\mathbb{R}^2 \setminus D$.

q. e. d.

Satz 3.4 *Es seien die Voraussetzungen des vorigen Lemmas 3.3 erfüllt. Dann gilt*

$$\mathbf{e} = \mathbf{h} = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D} \quad \text{und} \quad \mathbf{e}_0 = \mathbf{h}_0 = 0 \quad \text{in } D,$$

das heißt das zweidimensionale Randwertproblem besitzt höchstens eine Lösung.

Beweis Das Verschwinden der Lösung im Komplement von D gilt nach dem vorangegangenen Lemma und es folgt hieraus insbesondere das Verschwinden von \mathbf{a} und \mathbf{b} gemäß (2.8) in $\mathbb{R}^2 \setminus D$, so daß auch

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \nu} = \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \nu} = 0 \quad \text{auf } \partial D$$

gilt. Dies impliziert bei homogenen Randbedingungen³

$$\mathbf{a}_0 = \mathbf{b}_0 = \frac{\partial \mathbf{a}_0}{\partial \nu} = \frac{\partial \mathbf{b}_0}{\partial \nu} = 0 \quad \text{auf } \partial D,$$

so daß aus den Darstellungsformeln (2.14 a), (2.14 b) $\mathbf{a}_0 = \mathbf{b}_0 = 0$ in D folgt, was wiederum $\mathbf{e}_0 = \mathbf{h}_0 = 0$ nach sich zieht. **q. e. d.**

Aus dem vorangegangenen Satz ergibt sich sofort die Eindeutigkeit auch für die Aufgabe (2.9 a) - (2.11 d) in der Bohrenschen Zerlegung.

³Falls $\hat{f} = \hat{g} = \tilde{f} = \tilde{g} = 0$, so gilt auch $N_{\mathbf{a}} = N_{\mathbf{b}} = D_{\mathbf{a}} = D_{\mathbf{b}} = 0$ für die Randbedingungen (2.11 a)-(2.11 d) des gemäß (2.8) transformierten Problems.

4 Existenz

Mittels geeigneter Potentialansätze werden Felder definiert, die bereits den geforderten Differentialgleichungen und Ausstrahlungsbedingungen genügen. Für die darin auftretenden Dichten werden mit Hilfe der Sprungbeziehungen Integralgleichungen abgeleitet, so daß die Transmissionsbedingungen ebenfalls erfüllt sind, falls die Dichten diesen Integralgleichungen genügen. Es werden Bedingungen angegeben, unter denen diese Integralgleichungssysteme zweiter Art eindeutig lösbar sind. Unter Ausnutzung bekannter Beziehungen für die Potentiale können die Lösungen der Transmissionsprobleme durch die Daten in geeigneten Normen abgeschätzt werden.

Die Behandlung für das drei- und zweidimensionale Problem unterscheidet sich hier insoweit voneinander, daß bei der Aufgabe im \mathbb{R}^3 die Lösungsbedingungen an die Koeffizienten für das Integralgleichungssystem nicht konkret angegeben werden können, sondern nur bis auf eine abzählbare, aber nicht näher charakterisierte, Ausnahmemenge.

4.1 Existenz einer Lösung für das dreidimensionale Problem

Zunächst sollen einige Funktionenräume eingeführt werden. Es bezeichnen $T(\partial D)$, $T^{0,\alpha}(\partial D)$, $T^{1,\alpha}(\partial D)$, $0 < \alpha < 1$, die Räume aller Tangentialfelder, die stetig, gleichmäßig Hölder-stetig bzw. Hölder-stetig differenzierbar sind, ausgestattet mit den entsprechenden Normen der Räume $C(\partial D)$, $C^{0,\alpha}(\partial D)$, $C^{1,\alpha}(\partial D)$.

Das Vektorpotential¹

$$(\mathfrak{V}_\kappa \varphi)(x) := \int_{\partial D} \varphi(y) \Phi_\kappa(x, y) \, ds(y), \quad x \text{ in } \mathbb{R}^3 \setminus \partial D,$$

mit stetigem Tangentialfeld $\varphi \in T(\partial D)$ läßt sich durch

$$2(\mathfrak{V}_\kappa \varphi)(x) = (S_\kappa \varphi)(x), \quad x \in \partial D,$$

mit dem Einfachsichtoperator

$$(S_\kappa \varphi)(x) = 2 \int_{\partial D} \varphi(y) \Phi_\kappa(x, y) \, ds(y), \quad x \in \partial D, \quad (4.1)$$

¹Vergleiche [3, Th. 6.11] zu den folgenden Aussagen über die Sprungbeziehungen des Vektorpotentials \mathfrak{V} .

stetig in den \mathbb{R}^3 fortsetzen. Es sei

$$\nu(x) \times \operatorname{rot} (\mathfrak{V}_\kappa \varphi)_\pm(x) := \lim_{h \rightarrow +0} \nu(x) \times \operatorname{rot} (\mathfrak{V}_\kappa \varphi)(x \pm h\nu(x)),$$

dann gilt

$$2\nu(x) \times \operatorname{rot} (\mathfrak{V}_\kappa \varphi)_\pm(x) = (M_\kappa \varphi)(x) \pm \varphi(x) \quad (4.2)$$

mit dem elektrischen Dipoloperator

$$(M_\kappa \varphi)(x) := 2 \int_{\partial D} \nu(x) \times \operatorname{rot}_x \{ \varphi(y) \Phi_\kappa(x, y) \} ds(y). \quad (4.3)$$

Weiterhin besteht die Beziehung

$$\lim_{h \rightarrow +0} \nu(x) \times [\operatorname{rot} \operatorname{rot} (\mathfrak{V}_\kappa \varphi)(x + h\nu(x)) - \operatorname{rot} \operatorname{rot} (\mathfrak{V}_\kappa \varphi)(x - h\nu(x))] = 0. \quad (4.4)$$

Es bezeichne

$$(L_\kappa \varphi)(x) := 2 \int_{\partial D} \nu(x) \times \operatorname{rot}_x \operatorname{rot}_x \{ \varphi(y) [\Phi_\kappa(x, y) - \Phi_0(x, y)] \} ds(y), \quad x \in \partial D \quad (4.5)$$

die Fortsetzung von $2\nu \times \operatorname{rot} \operatorname{rot} (\mathfrak{V}_\kappa - \mathfrak{V}_0) \varphi$ auf den Rand. Diese existiert, da die zweiten Ableitungen von $\Phi_\kappa - \Phi_0$ das gleiche singuläre Verhalten wie die Grundlösung Φ_0 selbst aufweisen.

Die Operatoren

$$\begin{aligned} M_\kappa &: T(\partial D) \rightarrow T^{0,\alpha}(\partial D), & T^{0,\alpha}(\partial D) &\rightarrow T^{0,\alpha'}(\partial D), \\ L_\kappa &: T(\partial D) \rightarrow T^{0,\alpha}(\partial D), & T^{0,\alpha}(\partial D) &\rightarrow T^{0,\alpha'}(\partial D), & T^{0,\alpha}(\partial D) &\rightarrow T^{1,\alpha}(\partial D) \end{aligned}$$

sind für $0 < \alpha < \alpha' < 1$ beschränkt.² Unter der zusätzlichen Annahme, daß der Rand $C^{2,\alpha}$ -glatt ist, ist auch³

$$M_\kappa : T^{0,\alpha}(\partial D) \rightarrow T^{1,\alpha}(\partial D)$$

eine beschränkte Abbildung und die Kompaktheit der Einbettungen $T^{0,\alpha}(\partial D) \hookrightarrow T(\partial D)$, $T^{0,\alpha'}(\partial D) \hookrightarrow T^{0,\alpha}(\partial D)$ und $T^{1,\alpha}(\partial D) \hookrightarrow T^{0,\alpha}(\partial D)$ sichert die Kompaktheit von

$$\begin{aligned} M_\kappa &: T(\partial D) \rightarrow T(\partial D), & T^{0,\alpha}(\partial D) &\rightarrow T^{0,\alpha}(\partial D), \\ L_\kappa &: T(\partial D) \rightarrow T(\partial D), & T^{0,\alpha}(\partial D) &\rightarrow T^{0,\alpha}(\partial D), & T^{1,\alpha}(\partial D) &\rightarrow T^{1,\alpha}(\partial D) \end{aligned}$$

und, im Falle einer $C^{2,\alpha}$ -glatten Berandung, auch von

$$M_\kappa : T^{1,\alpha}(\partial D) \rightarrow T^{1,\alpha}(\partial D).$$

²Vergleiche [43, Satz 3.3], [2, Th. 2.32 und 2.33], [31, Abschn. 4.1], [14].

³Siehe [14, Th. 2.5].

Für die Existenzuntersuchungen wird im weiteren vorausgesetzt, daß ∂D ein $C^{2,\alpha}$ -glatter Rand ist. Die Darstellungsformeln (2.6 a) - (2.6 d) legen einen gemischten Potentialansatz gemäß

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_0(x) &= \alpha_{\mathbf{A}} \operatorname{rot} \int_{\partial D} \varphi(y) \Phi_{\alpha_{\mathbf{A}}}(x, y) \, ds(y) \\ &\quad + \operatorname{rot} \operatorname{rot} \int_{\partial D} \varphi(y) \Phi_{\alpha_{\mathbf{A}}}(x, y) \, ds(y), \quad x \in D, \end{aligned} \quad (4.6 \text{ a})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_0(x) &= -\alpha_{\mathbf{B}} \operatorname{rot} \int_{\partial D} \psi(y) \Phi_{\alpha_{\mathbf{B}}}(x, y) \, ds(y) \\ &\quad + \operatorname{rot} \operatorname{rot} \int_{\partial D} \psi(y) \Phi_{\alpha_{\mathbf{B}}}(x, y) \, ds(y), \quad x \in D, \end{aligned} \quad (4.6 \text{ b})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(x) &= k \operatorname{rot} \int_{\partial D} (c_1 \varphi(y) + m_1 \psi(y)) \Phi_k(x, y) \, ds(y) \\ &\quad + \operatorname{rot} \operatorname{rot} \int_{\partial D} (c_1 \varphi(y) + m_1 \psi(y)) \Phi_k(x, y) \, ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}, \end{aligned} \quad (4.6 \text{ c})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(x) &= -k \operatorname{rot} \int_{\partial D} (c_2 \varphi(y) + m_2 \psi(y)) \Phi_k(x, y) \, ds(y) \\ &\quad + \operatorname{rot} \operatorname{rot} \int_{\partial D} (c_2 \varphi(y) + m_2 \psi(y)) \Phi_k(x, y) \, ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} \end{aligned} \quad (4.6 \text{ d})$$

nahe, aus dem mittels der Transmissionsbedingungen ein System von Randintegralgleichungen gewonnen werden soll, wobei die komplexen Konstanten c_1, c_2, m_1, m_2 noch geeignet zu wählen sind.

Für die so gebildeten Potentiale mit Dichten $\varphi, \psi \in T^{1,\alpha}(\partial D)$ gilt

$$\operatorname{rot} \mathbf{A}_0 = \alpha_{\mathbf{A}} \mathbf{A}_0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B}_0 = -\alpha_{\mathbf{B}} \mathbf{B}_0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{A} = k \mathbf{A}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = -k \mathbf{B},$$

d.h. sie erfüllen die Differentialgleichungen (2.2 a), (2.2 b). Weiter gilt nach [2, Th. 4.12] für in obiger Weise definierte Felder \mathbf{U}

$$\operatorname{rot} \mathbf{U} \times \hat{x} + \hat{x} \operatorname{div} \mathbf{U} - i\kappa \mathbf{U} = o(1/|x|), \quad |x| \rightarrow \infty,$$

was zusammen mit $\operatorname{rot} \mathbf{U} = \pm \kappa \mathbf{U}$ und $\operatorname{div} \mathbf{U} = 0$ auf die Gültigkeit der Ausstrahlungsbedingungen (2.5 a), (2.5 b) führt. Außerdem haben $\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0, \mathbf{A}, \mathbf{B}$ die geforderten Regularitäten.⁴

Die Sprungbeziehungen (4.2), (4.4) für Vektorpotentiale sollen nun verwendet werden, um Integralgleichungen für die Dichten φ, ψ aus den Transmissionsbedingungen abzuleiten.

In den Anteilen der Potentiale, in denen der Rotationsoperator zweimal auftritt, wird die Grundlösung Φ_κ ($\kappa \in \{k, \alpha_{\mathbf{A}}, \alpha_{\mathbf{B}}\}$) durch $(\Phi_\kappa - \Phi_0) + \Phi_0$ ersetzt. Um dann den

⁴Vergleiche dazu [43, Satz 3.3].

stetigen Übergang von $\nu \times \text{rot rot } \mathfrak{Y}_0$ gemäß (4.4) ausnutzen zu können, werden die noch freien Konstanten im Potentialansatz (4.6 c), (4.6 d) so gewählt, daß

$$\begin{aligned}\varepsilon_0^{-1/2} &= \varepsilon^{-1/2}(c_1 + c_2) = \varepsilon^{-1/2}(m_1 + m_2), \\ \mu_0^{-1/2} &= \mu^{-1/2}(c_1 - c_2) = -\mu^{-1/2}(m_1 - m_2),\end{aligned}$$

also

$$c_1 = m_2 = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^{1/2} + \left(\frac{\mu}{\mu_0} \right)^{1/2} \right\}, \quad c_2 = m_1 = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^{1/2} - \left(\frac{\mu}{\mu_0} \right)^{1/2} \right\} \quad (4.7)$$

gilt. Dies führt für die mit Φ_0 erklärten Anteile zu

$$\begin{aligned}\nu \times \text{rot rot } \mathfrak{Y}_0 \left(\varepsilon_0^{-1/2}(\varphi + \psi) \right) (\cdot - h\nu) \\ - \nu \times \text{rot rot } \mathfrak{Y}_0 \left(\varepsilon^{-1/2}(c_1 + c_2)\varphi + \varepsilon^{-1/2}(m_1 + m_2)\psi \right) (\cdot + h\nu) \rightarrow 0, \\ \nu \times \text{rot rot } \mathfrak{Y}_0 \left(\mu_0^{-1/2}(\varphi - \psi) \right) (\cdot - h\nu) \\ - \nu \times \text{rot rot } \mathfrak{Y}_0 \left(\mu^{-1/2}(c_1 - c_2)\varphi + \mu^{-1/2}(m_1 - m_2)\psi \right) (\cdot + h\nu) \rightarrow 0\end{aligned}$$

für $h \rightarrow 0$.

Genügen die Dichten den Integralgleichungen

$$\begin{aligned}4f &= \varepsilon_0^{-1/2} \alpha_{\mathbf{A}} [M_{\alpha_{\mathbf{A}}} \varphi - \varphi] - \varepsilon_0^{-1/2} \alpha_{\mathbf{B}} [M_{\alpha_{\mathbf{B}}} \psi - \psi] \\ &\quad - \varepsilon^{-1/2} k [M_k(c_1 \varphi + m_1 \psi) + (c_1 \varphi + m_1 \psi)] \\ &\quad + \varepsilon^{-1/2} k [M_k(c_2 \varphi + m_2 \psi) + (c_2 \varphi + m_2 \psi)] \\ &\quad + \varepsilon_0^{-1/2} L_{\alpha_{\mathbf{A}}} \varphi + \varepsilon_0^{-1/2} L_{\alpha_{\mathbf{B}}} \psi \\ &\quad - \varepsilon^{-1/2} L_k(c_1 \varphi + m_1 \psi) - \varepsilon^{-1/2} L_k(c_2 \varphi + m_2 \psi), \\ 4ig &= \mu_0^{-1/2} \alpha_{\mathbf{A}} [M_{\alpha_{\mathbf{A}}} \varphi - \varphi] + \mu_0^{-1/2} \alpha_{\mathbf{B}} [M_{\alpha_{\mathbf{B}}} \psi - \psi] \\ &\quad - \mu^{-1/2} k [M_k(c_1 \varphi + m_1 \psi) + (c_1 \varphi + m_1 \psi)] \\ &\quad - \mu^{-1/2} k [M_k(c_2 \varphi + m_2 \psi) + (c_2 \varphi + m_2 \psi)] \\ &\quad + \mu_0^{-1/2} L_{\alpha_{\mathbf{A}}} \varphi - \mu_0^{-1/2} L_{\alpha_{\mathbf{B}}} \psi \\ &\quad - \mu^{-1/2} L_k(c_1 \varphi + m_1 \psi) + \mu^{-1/2} L_k(c_2 \varphi + m_2 \psi),\end{aligned}$$

so folgt aus den Sprungbeziehungen, daß die zu diesen Dichten erklärten Potentiale die Randbedingungen (2.4 a), (2.4 b) erfüllen.

Man kann diese Integralgleichungen in geschlossener Form

$$(E + A) \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\varepsilon_0^{1/2} f \\ 4i\mu_0^{1/2} g \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

schreiben. Setzt man die Konstanten c_1, c_2, m_1, m_2 gemäß (4.7) ein, so sind E und A durch

$$E = \begin{pmatrix} -\alpha_{\mathbf{A}} - k\xi & \alpha_{\mathbf{B}} + k\xi \\ -\alpha_{\mathbf{A}} - k\xi^{-1} & -\alpha_{\mathbf{B}} - k\xi^{-1} \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{\mathbf{A}} M_{\alpha_{\mathbf{A}}} - \xi k M_k + L_{\alpha_{\mathbf{A}}} - L_k & -\alpha_{\mathbf{B}} M_{\alpha_{\mathbf{B}}} + \xi k M_k + L_{\alpha_{\mathbf{B}}} - L_k \\ \alpha_{\mathbf{A}} M_{\alpha_{\mathbf{A}}} - \xi^{-1} k M_k + L_{\alpha_{\mathbf{A}}} - L_k & \alpha_{\mathbf{B}} M_{\alpha_{\mathbf{B}}} - \xi^{-1} k M_k - L_{\alpha_{\mathbf{B}}} + L_k \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

gegeben, wobei zur Abkürzung wie in (2.12) $\xi = \left(\frac{\varepsilon_0 \mu}{\varepsilon \mu_0}\right)^{1/2}$ gesetzt wurde. Zur Untersuchung der Invertierbarkeit von E betrachtet man die Determinante

$$\begin{aligned} \det E &= 2\alpha_{\mathbf{A}}\alpha_{\mathbf{B}} + 2k^2 + k(\alpha_{\mathbf{A}} + \alpha_{\mathbf{B}})(\xi + \xi^{-1}) \\ &= 2 \{k_0^2 \gamma^2 + k^2 + k k_0 \gamma^2 (\xi + \xi^{-1})\}. \end{aligned}$$

Die Bedingung $\det E \neq 0$ ist damit äquivalent zu

$$k k_0 \gamma^2 \xi^2 + (k^2 + k_0^2 \gamma^2) \xi + k k_0 \gamma^2 \neq 0 \quad (4.11)$$

und wegen der Positivität aller darin auftretender Größen immer erfüllt.

Der Operator A ist ein in $T^{1,\alpha}(\partial D) \times T^{1,\alpha}(\partial D)$ kompakter Operator, da seine Komponenten dies sind. In diesem Raum soll die Riesz-Theorie angewendet werden.

Unter Ausnutzung der Abbildungseigenschaften folgt für jede Lösung $(\varphi, \psi) \in T(\partial D) \times T(\partial D)$ der Integralgleichung (4.8) auch $\varphi, \psi \in T^{1,\alpha}(\partial D)$, falls $f, g \in T^{1,\alpha}(\partial D)$ gilt, so daß man die Untersuchungen zunächst auch in den Räumen stetiger Tangentialfelder durchführen könnte.

Bemerkung 4.1 In [21] wird als adäquater Hölderraum für die Lösung der aus einem äußeren elektromagnetischen Problem resultierenden Integralgleichung der Raum von Tangentialfeldern, bei denen die Oberflächendivergenz gebildet werden kann, durch

$$T_d^{0,\alpha}(\partial D) = \{\chi \in T^{0,\alpha}(\partial D) \mid \text{Div } \chi \in C^{0,\alpha}(\partial D)\}$$

mit der Norm

$$\|\chi\|_{T_d^{0,\alpha}} = \|\chi\|_{C^{0,\alpha}(\partial D)} + \|\text{Div } \chi\|_{C^{0,\alpha}(\partial D)}$$

eingeführt.

Dieser ist für die Behandlung des hier auftretenden Integralgleichungssystems zweiter Art nicht unmittelbar geeignet, da der Operator L_{κ} beschränkt aber nicht kompakt von $T_d^{0,\alpha}(\partial D)$ in sich abbildet.⁵

⁵Vergleiche [31, (4.1)].

\mathbf{A}_0 hat die Darstellung

$$\mathbf{A}_0 = \alpha_{\mathbf{A}} \operatorname{rot} \mathfrak{Y}_{\alpha_{\mathbf{A}}} \varphi + \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{Y}_{\alpha_{\mathbf{A}}} \varphi = \alpha_{\mathbf{A}} \operatorname{rot} \mathfrak{Y}_{\alpha_{\mathbf{A}}} \varphi + \alpha_{\mathbf{A}}^2 \mathfrak{Y}_{\alpha_{\mathbf{A}}} \varphi + \operatorname{grad} \mathfrak{Y}_{\alpha_{\mathbf{A}}} (\operatorname{Div} \varphi),$$

analoges gilt für \mathbf{B}_0 , \mathbf{A} , \mathbf{B} . Mit Hilfe von [2, Th. 2.24] ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}_0\|_{C^{0,\alpha}(D)} &\leq C_\alpha \|\varphi\|_{C^{1,\alpha}(\partial D)}, & \|\mathbf{A}\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D})} &\leq C_\alpha (\|\varphi\|_{C^{1,\alpha}(\partial D)} + \|\psi\|_{C^{1,\alpha}(\partial D)}), \\ \|\mathbf{B}_0\|_{C^{0,\alpha}(D)} &\leq C_\alpha \|\psi\|_{C^{1,\alpha}(\partial D)}, & \|\mathbf{B}\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D})} &\leq C_\alpha (\|\varphi\|_{C^{1,\alpha}(\partial D)} + \|\psi\|_{C^{1,\alpha}(\partial D)}), \end{aligned} \quad (4.12)$$

wobei C_α eine vom Hölderexponenten α , sowie von ∂D und den physikalischen Parametern abhängige Konstante ist.

Es wird nun die Riesz-Theorie in $T^{1,\alpha}(\partial D) \times T^{1,\alpha}(\partial D)$ angewendet. Dazu ist das homogene Problem $(E + A)(\varphi) = 0$ hinsichtlich der Eindeutigkeit einer Lösung zu untersuchen.

Es soll zunächst der Spezialfall $\xi = 1$ betrachtet werden. Hierfür gilt mit (4.7)

$$c_1 = m_2 = \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right)^{1/2} = \left(\frac{\mu}{\mu_0}\right)^{1/2}, \quad c_2 = m_1 = 0.$$

Lemma 4.2 *Sei $\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \in T^{1,\alpha}(\partial D) \times T^{1,\alpha}(\partial D)$ eine Lösung des homogenen Integralgleichungssystems (4.8) mit $\xi = 1$. Dann gilt $\varphi = \psi = 0$ auf ∂D .*

Beweis Unter der Voraussetzung $\xi = 1$ entkoppelt das Integralgleichungssystem und es gilt

$$\begin{aligned} 0 &= (\alpha_{\mathbf{A}} + k)\varphi - (\alpha_{\mathbf{A}} M_{\alpha_{\mathbf{A}}} - k M_k + L_{\alpha_{\mathbf{A}}} - L_k)\varphi, \\ 0 &= (\alpha_{\mathbf{B}} + k)\psi - (\alpha_{\mathbf{B}} M_{\alpha_{\mathbf{B}}} - k M_k - L_{\alpha_{\mathbf{B}}} + L_k)\psi. \end{aligned}$$

Es seien φ, ψ Lösungen dieses Systems und $\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{A}}_0, \tilde{\mathbf{B}}, \tilde{\mathbf{B}}_0$ die zu diesen Dichten in $\mathbb{R}^3 \setminus \partial D$ entsprechend (4.6 a) - (4.6 d) definierten Potentiale. Dann lösen $\mathbf{A} = \tilde{\mathbf{A}}|_{\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}}, \mathbf{A}_0 = \tilde{\mathbf{A}}_0|_D, \mathbf{B} = \tilde{\mathbf{B}}|_{\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}}, \mathbf{B}_0 = \tilde{\mathbf{B}}_0|_D$ das homogene Randwertproblem (2.2 a) - (2.5 b) und verschwinden wegen dessen eindeutiger Lösbarkeit nach Satz 3.2.

Für $\mathbf{A}' = \tilde{\mathbf{A}}|_D, \mathbf{A}'_0 = \tilde{\mathbf{A}}_0|_{\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}}, \mathbf{B}' = \tilde{\mathbf{B}}|_D, \mathbf{B}'_0 = \tilde{\mathbf{B}}_0|_{\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}}$ gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{A}'_0 &= \alpha_{\mathbf{A}} \mathbf{A}_0 \text{ in } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}, & \operatorname{rot} \mathbf{A}' &= k \mathbf{A}' \text{ in } D, \\ \operatorname{rot} \mathbf{B}'_0 &= -\alpha_{\mathbf{B}} \mathbf{B}_0 \text{ in } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}, & \operatorname{rot} \mathbf{B}' &= -k \mathbf{B}' \text{ in } D \end{aligned}$$

und

$$\mathbf{A}'_0 \times \hat{x} - i \mathbf{A}'_0 = o\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad \mathbf{B}'_0 \times \hat{x} + i \mathbf{B}'_0 = o\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Aus den Sprungrelationen erhält man auf ∂D

$$\begin{aligned}\nu \times \mathbf{A}'_0 &= \nu \times (\mathbf{A}'_0 - \mathbf{A}_0) = \alpha_{\mathbf{A}} \varphi, \\ \nu \times \mathbf{B}'_0 &= \nu \times (\mathbf{B}'_0 - \mathbf{B}_0) = -\alpha_{\mathbf{B}} \psi, \\ \nu \times \mathbf{A}' &= -\nu \times (\mathbf{A} - \mathbf{A}') = -k(c_1 \varphi + m_1 \psi) = -kc_1 \varphi, \\ \nu \times \mathbf{B}' &= -\nu \times (\mathbf{B} - \mathbf{B}') = k(c_2 \varphi + m_2 \psi) = kc_1 \psi,\end{aligned}$$

wobei bei den letzten beiden Identitäten die Voraussetzung $\xi = 1$, d.h. $c_1 = m_2$ und $c_2 = m_1 = 0$, eingegangen ist. Hieraus folgt

$$\begin{aligned}\nu \times \mathbf{A}' + k \frac{c_1}{\alpha_{\mathbf{A}}} \nu \times \mathbf{A}'_0 &= 0 \text{ auf } \partial D, \\ \nu \times \mathbf{B}' + k \frac{c_1}{\alpha_{\mathbf{B}}} \nu \times \mathbf{B}'_0 &= 0 \text{ auf } \partial D.\end{aligned}$$

Nach dem folgenden Lemma 4.3 mit der Wahl

$$(\mathbf{U}, \mathbf{U}_0, \kappa, \kappa_0) = (-kc_1/\alpha_{\mathbf{A}} \mathbf{A}'_0, \mathbf{A}', \alpha_{\mathbf{A}}, k) \quad \text{und} \quad (4.13 \text{ a})$$

beziehungsweise

$$(\mathbf{U}, \mathbf{U}_0, \kappa, \kappa_0) = (-kc_1/\alpha_{\mathbf{B}} \mathbf{B}'_0, \mathbf{B}', -\alpha_{\mathbf{B}}, -k) \quad \text{und} \quad (4.13 \text{ b})$$

gilt $\mathbf{A}' = \mathbf{B}' = 0$ in D und $\mathbf{A}'_0 = \mathbf{B}'_0 = 0$ in $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$. Aus den obigen Sprungbeziehungen folgt $\varphi = \psi = 0$ auf ∂D . **q. e. d.**

Lemma 4.3 *Es seien $\kappa, \kappa_0 \in \mathbb{R}$ und $\mathbf{U} \in C^1(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus D)$, $\mathbf{U}_0 \in C^1(D) \cap C(\bar{D})$ Lösung von*

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{U}_0 - \kappa_0 \mathbf{U}_0 &= 0 \text{ in } D, \\ \operatorname{rot} \mathbf{U} - \kappa \mathbf{U} &= 0 \text{ in } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}, \\ \nu \times \mathbf{U} - \nu \times \mathbf{U}_0 &= 0 \text{ auf } \partial D, \\ \mathbf{U} \times \hat{x} - i\mathbf{U} &= o\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \rightarrow \infty\end{aligned} \quad (4.13 \text{ a})$$

$$\text{oder } \mathbf{U} \times \hat{x} + i\mathbf{U} = o\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (4.13 \text{ b})$$

Dann gilt

$$\mathbf{U} = 0 \text{ in } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} \quad \text{und} \quad \mathbf{U}_0 = 0 \text{ in } D.$$

Beweis Anwendung der Greenschen Vektorsätze liefert für hinreichend großes $R \in \mathbb{R}$

$$\int_{|x|=R} (\bar{\mathbf{U}} \times \mathbf{U}) \cdot \nu \, ds(x)$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\substack{x \notin \bar{D} \\ |x| < R}} \operatorname{div}(\bar{\mathbf{U}} \times \mathbf{U}) \, dx + \int_{\partial D} (\bar{\mathbf{U}} \times \mathbf{U}) \cdot \nu \, ds(x) \\
&= \int_{\substack{x \notin \bar{D} \\ |x| < R}} (\mathbf{U} \cdot \operatorname{rot} \bar{\mathbf{U}} - \bar{\mathbf{U}} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{U}) \, dx + \int_{\partial D} (\bar{\mathbf{U}}_0 \times \mathbf{U}_0) \cdot \nu \, ds(x) \\
&= \int_D (\mathbf{U}_0 \cdot \operatorname{rot} \bar{\mathbf{U}}_0 - \bar{\mathbf{U}}_0 \cdot \operatorname{rot} \mathbf{U}_0) \, dx \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Nach der Ausstrahlungsbedingung (4.13 a) bzw. (4.13 b) gilt nun aber auf der Kugel $|x| = R$

$$(\bar{\mathbf{U}} \times \mathbf{U}) \cdot \nu = (\mathbf{U} \times \hat{x}) \cdot \bar{\mathbf{U}} = \bar{\mathbf{U}} \cdot (\pm i \mathbf{U} + o(R^{-1})) = \pm i |\mathbf{U}|^2 + o(R^{-2}),$$

woraus

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|x|=R} |\mathbf{U}|^2 \, ds(x) = 0$$

folgt. Das Rellich-Lemma liefert wegen $\Delta \mathbf{U} + \kappa^2 \mathbf{U} = 0$ dann $\mathbf{U} = 0$ in $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$. Damit ist \mathbf{U}_0 Lösung von $\operatorname{rot} \mathbf{U}_0 = \kappa_0 \mathbf{U}_0$ in D , $\nu \times \mathbf{U}_0 = 0$ auf ∂D , so daß eine Darstellungsformel analog zu (2.6 a) - (2.6 d) das Verschwinden von \mathbf{U}_0 in D zeigt. **q. e. d.**

Mittels der analytischen Fredholmtheorie⁶ kann das Existenzresultat auf den Fall $\xi \neq 1$ bis auf eine abzählbare Ausnahmemeenge wie folgt ausgedehnt werden.⁷

Es seien $\beta \geq 0$, $\varepsilon_0 > 0$, $\mu_0 > 0$, $\varepsilon > 0$ fest, so daß $1 - k_0^2 \beta^2 > 0$ gilt. k_0 , γ^2 , $\alpha_{\mathbf{A}}$ und $\alpha_{\mathbf{B}}$ sind dann auch fixiert und $\mu = \xi^2 \mu_0 \varepsilon / \varepsilon_0$ sowie $k = \xi k_0 \varepsilon / \varepsilon_0$ hängen analytisch von ξ ab. Die Matrixoperatoren A und E , die gemäß (4.9), (4.10) erklärt sind, weisen eine Abhängigkeit von $\alpha_{\mathbf{A}}$, $\alpha_{\mathbf{B}}$, k und ξ auf. Unter den eben getroffenen Annahmen, kann dies alles durch eine Abhängigkeit nur von ξ in der Form $A = A(\xi)$ und $E = E(\xi)$ ausgedrückt werden.

Es sei $\delta > 0$ hinreichend klein. $A(\xi)$ und $E(\xi)$ sind dann in einer komplexen Umgebung von $\mathbb{R}_{>\delta} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) = 0, \operatorname{Re}(z) > \delta\}$ analytisch von ξ abhängig, da die einzelnen Einträge dies sind. Hier wird benutzt, daß die Grundlösung $\Phi_\kappa(\cdot, \cdot)$ analytisch von der Wellenzahl κ abhängt.

Es existiert eine zusammenhängende Umgebung $V \subset \mathbb{C}$ von $\mathbb{R}_{>\delta}$ in der $E(\xi)$ beschränkt invertierbar ist. Dies folgt aus der Bedingung (4.11) für die Invertierbarkeit von $E(\xi)$, die, in Abhängigkeit von ξ ausgedrückt, die Form

$$0 \neq \xi \left(\xi^2 \left(k_0 \gamma^2 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} + k_0^2 \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon_0^2} \right) + k_0^2 \gamma^2 + k_0^2 \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)$$

⁶Vergleiche [3, sect. 8.5].

⁷Siehe dazu auch [36].

besitzt. V so zu wählen, daß $0 \notin V$ gilt, ist für beliebig kleines $\delta > 0$ immer möglich. Da in dem zweiten Faktor sowohl das Absolutglied als auch der Koeffizient vor ξ^2 positiv sind, ist in einer geeigneten Umgebung der positiven reellen Achse dieser von Null verschieden.

Da $E(\xi)$ in V invertierbar ist, gilt nach der analytischen Fredholmtheorie, daß auch $E(\xi) + A(\xi)$ in V mit Ausnahme einer diskreten Menge invertierbar ist, falls die Invertierbarkeit in mindestens einem Punkt vorliegt.⁸ Für $\xi = 1 \in \mathbb{R}_{>\delta} \subset V$ ist dies aber in Lemma 4.2 gezeigt worden. Das direkte Problem ist also für fast alle Parameterwerte wohlgestellt.

Es liege ein solcher Satz von Parametern vor. Unter den Glätttevoraussetzungen an f und g gilt dann für die Lösung der Integralgleichung (4.8)

$$\|\varphi\|_{T^{1,\alpha}(\partial D)} + \|\psi\|_{T^{1,\alpha}(\partial D)} \leq c' \{ \|f\|_{T^{1,\alpha}(\partial D)} + \|g\|_{T^{1,\alpha}(\partial D)} \},$$

so daß sich zusammen mit (4.12) insgesamt die Lösung gegen die Daten in der $T^{1,\alpha}$ -Norm abschätzen läßt

$$\|\mathbf{A}_0\|_{C^{0,\alpha}(D)} + \|\mathbf{B}_0\|_{C^{0,\alpha}(D)} + \|\mathbf{A}\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D})} + \|\mathbf{B}\|_{C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D})} \leq c \{ \|f\|_{T^{1,\alpha}(\partial D)} + \|g\|_{T^{1,\alpha}(\partial D)} \} \quad (4.14)$$

mit einer geeigneten Konstanten $c = c(\alpha, \partial D)$.

Zusammengefaßt läßt sich der folgende Satz formulieren.

Satz 4.4 *Es sei D ein $C^{2,\alpha}$ -glattes Gebiet im \mathbb{R}^3 . Weiter seien die positiven Parameter $\beta, \varepsilon_0, \mu_0, \varepsilon$ so, daß $1 - k_0^2 \beta^2 > 0$ gilt. Dann ist für alle positiven μ mit Ausnahme einer höchstens abzählbaren Menge das Transmissionsproblem (2.2a) - (2.5b) zu beliebigen rechten Seiten $f, g \in T^{1,\alpha}(\partial D)$ eindeutig lösbar. In diesem Fall hängt die Lösung stetig von den Daten gemäß (4.14) ab.*

Zum Abschluß dieses Abschnittes soll noch eine Darstellung für die Fernfelder $\mathbf{A}_\infty, \mathbf{B}_\infty$ angegeben werden, die das asymptotische Verhalten

$$\mathbf{A}(x) = \frac{e^{ik|x|}}{|x|} \left\{ \mathbf{A}_\infty(\hat{x}) + O\left(\frac{1}{|x|}\right) \right\}, \quad \mathbf{B}(x) = \frac{e^{ik|x|}}{|x|} \left\{ \mathbf{B}_\infty(\hat{x}) + O\left(\frac{1}{|x|}\right) \right\},$$

$|x| \rightarrow \infty, \hat{x} = x/|x|$ von \mathbf{A} und \mathbf{B} in Abhängigkeit von der Lösung des Integralgleichungssystems beschreiben. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\infty(\hat{x}) &= \frac{k^2}{4\pi} \hat{x} \times \int_{\partial D} \{ i(c_1\varphi + m_1\psi) + (c_1\varphi + m_1\psi) \times \hat{x} \} e^{-ik\hat{x}\cdot y} ds(y), \\ \mathbf{B}_\infty(\hat{x}) &= \frac{k^2}{4\pi} \hat{x} \times \int_{\partial D} \{ -i(c_2\varphi + m_2\psi) + (c_2\varphi + m_2\psi) \times \hat{x} \} e^{-ik\hat{x}\cdot y} ds(y). \end{aligned}$$

⁸Siehe [3, Th. 8.19].

4.2 Existenz einer Lösung für das zweidimensionale Problem

Es soll nun die Existenz von Lösungen im zweidimensionalen Fall untersucht werden. Dazu wird folgender Potentialansatz verwendet.

$$\mathbf{a}_0(x) = \int_{\partial D} \left\{ \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k} \frac{\partial \Phi_{\alpha_{\mathbf{A}}}(x, y)}{\partial \nu(y)} \psi_1 + \Phi_{\alpha_{\mathbf{A}}}(x, y) m_1 \varphi_1 \right\} ds(y), \quad x \in D, \quad (4.15 \text{ a})$$

$$\mathbf{b}_0(x) = \int_{\partial D} \left\{ \frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k} \frac{\partial \Phi_{\alpha_{\mathbf{B}}}(x, y)}{\partial \nu(y)} \psi_2 + \Phi_{\alpha_{\mathbf{B}}}(x, y) m_2 \varphi_2 \right\} ds(y), \quad x \in D, \quad (4.15 \text{ b})$$

$$\mathbf{a}(x) = \int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial \nu(y)} \psi_1 + \Phi_k(x, y) c_1 \varphi_1 \right\} ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}, \quad (4.15 \text{ c})$$

$$\mathbf{b}(x) = \int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial \nu(y)} \psi_2 + \Phi_k(x, y) c_2 \varphi_2 \right\} ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}. \quad (4.15 \text{ d})$$

Es bezeichnen $S_\kappa, K_\kappa, K_\kappa^* : C(\partial D) \rightarrow C(\partial D)$ die Integraloperatoren

$$(S_\kappa \varphi)(x) := 2 \int_{\partial D} \Phi_\kappa(x, y) \varphi(y) ds(y), \quad x \in \partial D, \quad (4.16)$$

$$(K_\kappa \varphi)(x) := 2 \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi_\kappa(x, y)}{\partial \nu(y)} \varphi(y) ds(y), \quad x \in \partial D, \quad (4.17)$$

$$(K_\kappa^* \varphi)(x) := 2 \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi_\kappa(x, y)}{\partial \nu(x)} \varphi(y) ds(y), \quad x \in \partial D \quad (4.18)$$

und $T_\kappa : C^{1,\alpha}(\partial D) \rightarrow C(\partial D)$

$$(T_\kappa \varphi)(x) := 2 \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi_\kappa(x, y)}{\partial \nu(y)} \varphi(y) ds(y), \quad x \in \partial D \quad (4.19)$$

mit der Grundlösung $\Phi_\kappa(x, y) = \frac{i}{4} H_0^1(\kappa|x - y|)$.

Für eine Lösung des Integralgleichungssystems

$$\begin{aligned} 2N_{\mathbf{a}} &= \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k} (T_{\alpha_{\mathbf{A}}} - T_k) \psi_1 + m_1 (K_{\alpha_{\mathbf{A}}}^* + I) \varphi_1 - \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k} c_1 (K_k^* - I) \varphi_1, \\ 2N_{\mathbf{b}} &= \frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k} (T_{\alpha_{\mathbf{B}}} - T_k) \psi_2 + m_2 (K_{\alpha_{\mathbf{B}}}^* + I) \varphi_2 - \frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k} c_2 (K_k^* - I) \varphi_2, \\ 2D_{\mathbf{a}} &= \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k} (K_{\alpha_{\mathbf{A}}} - I) \psi_1 + m_1 S_{\alpha_{\mathbf{A}}} \varphi_1 \\ &\quad - \xi_+ (K_k + I) \psi_1 - \xi_+ c_1 S_k \varphi_1 - \xi_- (K_k + I) \psi_2 - \xi_- c_2 S_k \varphi_2, \\ 2D_{\mathbf{b}} &= \frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k} (K_{\alpha_{\mathbf{B}}} - I) \psi_2 + m_2 S_{\alpha_{\mathbf{B}}} \varphi_2 \\ &\quad - \xi_- (K_k + I) \psi_1 - \xi_- c_1 S_k \varphi_1 - \xi_+ (K_k + I) \psi_2 - \xi_+ c_2 S_k \varphi_2 \end{aligned}$$

folgt mit den Sprungbeziehungen, daß für die oben definierten Potentiale die Randbedingungen (2.11 a) - (2.11 d) erfüllt sind.

Dieses Integralgleichungssystem läßt sich in Operatorform

$$\begin{pmatrix} 2N_{\mathbf{a}} \\ 2N_{\mathbf{b}} \\ 2D_{\mathbf{a}} \\ 2D_{\mathbf{b}} \end{pmatrix} = (E + A) \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

mit

$$E = \begin{pmatrix} m_1 + \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k}c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 + \frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k}c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\xi_+ - \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k} & -\xi_- \\ 0 & 0 & -\xi_- & -\xi_+ - \frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k} \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

und

$$A = \begin{pmatrix} m_1 K_{\alpha_{\mathbf{A}}}^* - \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k}c_1 K_k^* & 0 & \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k}(T_{\alpha_{\mathbf{A}}} - T_k) & 0 \\ 0 & m_2 K_{\alpha_{\mathbf{B}}}^* - \frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k}c_2 K_k^* & 0 & \frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k}(T_{\alpha_{\mathbf{B}}} - T_k) \\ m_1 S_{\alpha_{\mathbf{A}}} - c_1 \xi_+ S_k & -c_2 \xi_- S_k & -\xi_+ K_k + \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k}K_{\alpha_{\mathbf{A}}} & -\xi_- K_k \\ -c_1 \xi_- S_k & m_2 S_{\alpha_{\mathbf{B}}} - c_2 \xi_+ S_k & -\xi_- K_k & -\xi_+ K_k + \frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k}K_{\alpha_{\mathbf{B}}} \end{pmatrix}. \quad (4.22)$$

schreiben. Man interessiert sich jetzt für die Invertierbarkeit von E . Es gilt

$$\det E = (m_1 + \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k}c_1)(m_2 + \frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k}c_2) \underbrace{(\xi_+^2 - \xi_-^2)}_{=1} + \underbrace{\alpha_{\mathbf{A}}\alpha_{\mathbf{B}}}_{k_0^2\gamma^2} k^{-2} + \xi_+ \underbrace{(\alpha_{\mathbf{A}} + \alpha_{\mathbf{B}})}_{2k_0\gamma^2} k^{-1},$$

so daß die Bedingung $\det E \neq 0$ unter Ausnutzung von $2\xi\xi_+ = \xi^2 + 1$ äquivalent zu

$$kk_0\gamma^2\xi^2 + (k^2 + k_0^2\gamma^2)\xi + kk_0\gamma^2 \neq 0, \quad (4.23)$$

$$km_1 + \alpha_{\mathbf{A}}c_1 \neq 0, \quad km_2 + \alpha_{\mathbf{B}}c_2 \neq 0 \quad (4.24)$$

ist. Dabei ist (4.23) nach den Annahmen über die physikalischen Parameter immer erfüllt. Für die folgenden Betrachtungen sei auch die Gültigkeit von (4.24) vorausgesetzt.

Der Operator $A : (C(\partial D))^4 \rightarrow (C(\partial D))^4$ ist kompakt, da alle seine Komponenten dies sind⁹.

Wenn man für die Inhomogenitäten $N_{\mathbf{a}}, N_{\mathbf{b}} \in C^{0,\alpha}(\partial D)$, $D_{\mathbf{a}}, D_{\mathbf{b}} \in C^{1,\alpha}(\partial D)$ voraussetzt, gilt für eine Lösung $(\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2) \in (C(\partial D))^4$ von (4.20) auch $\varphi_1, \varphi_2 \in C^{0,\alpha}(\partial D)$ und $\psi_1, \psi_2 \in C^{1,\alpha}(\partial D)$. In diesem Fall folgen dann auch für die mit diesen Dichten gebildeten Potentiale die geforderten Regularitäten $\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0 \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$

⁹Vergleiche [3, Th. 2.30 und 2.31].

und $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}) \cap C^1(\mathbb{R}^2 \setminus D)$. Die Differentialgleichungen (2.9 a), (2.9 b) sowie die Ausstrahlungsbedingungen (2.10) sind aufgrund des Ansatzes (4.15 a) - (4.15 d) erfüllt.

Es genügt also, die Existenzanalyse für stetige Dichten durchzuführen. Die Riesz-Theorie liefert die Existenz einer Lösung, wenn für das homogene Integralgleichungssystem gezeigt werden kann, daß es nur die triviale Lösung besitzt.

Es seien $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ stetige Lösungen des homogenen Integralgleichungssystems und $\mathbf{a}_{0-} := \mathbf{a}_0, \mathbf{b}_{0-} := \mathbf{b}_0, \mathbf{a}_+ := \mathbf{a}, \mathbf{b}_+ := \mathbf{b}$ die zu diesen Dichten gemäß (4.15 a) - (4.15 d) definierten Potentiale. Weiter bezeichnen $\mathbf{a}_{0+}, \mathbf{b}_{0+}, \mathbf{a}_-, \mathbf{b}_-$ die im jeweiligen Komplement $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ bzw. D analog erklärten Potentiale.

Wegen der eindeutigen Lösbarkeit des homogenen Randwertproblems nach Satz 3.4 gilt

$$\mathbf{a}_{0-} = \mathbf{b}_{0-} = 0 \text{ in } D, \quad \mathbf{a}_+ = \mathbf{b}_+ = 0 \text{ in } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}.$$

Aus den Sprungbeziehungen für das Einfach- und Doppelschichtpotential erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{a}_{0+}}{\partial \nu} &= \frac{\partial \mathbf{a}_{0+}}{\partial \nu} - \frac{\partial \mathbf{a}_{0-}}{\partial \nu} = -m_1 \varphi_1, & \frac{\partial \mathbf{b}_{0+}}{\partial \nu} &= \frac{\partial \mathbf{b}_{0+}}{\partial \nu} - \frac{\partial \mathbf{b}_{0-}}{\partial \nu} = -m_2 \varphi_2, \\ -\frac{\partial \mathbf{a}_-}{\partial \nu} &= \frac{\partial \mathbf{a}_+}{\partial \nu} - \frac{\partial \mathbf{a}_-}{\partial \nu} = -c_1 \varphi_1, & -\frac{\partial \mathbf{b}_-}{\partial \nu} &= \frac{\partial \mathbf{b}_+}{\partial \nu} - \frac{\partial \mathbf{b}_-}{\partial \nu} = -c_2 \varphi_2, \\ \mathbf{a}_{0+} &= \mathbf{a}_{0+} - \mathbf{a}_{0-} = \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k} \psi_1, & \mathbf{b}_{0+} &= \mathbf{b}_{0+} - \mathbf{b}_{0-} = \frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k} \psi_2, \\ -\mathbf{a}_- &= \mathbf{a}_+ - \mathbf{a}_- = \psi_1, & -\mathbf{b}_- &= \mathbf{b}_+ - \mathbf{b}_- = \psi_2. \end{aligned}$$

Damit lösen $\mathbf{a}_{0+}, \mathbf{a}_-$ bzw. $\mathbf{b}_{0+}, \mathbf{b}_-$ folgende zwei Transmissionsprobleme.

$$\begin{aligned} (\text{Pa}) \quad & (\Delta + \alpha_{\mathbf{A}}^2) \mathbf{a}_{0+} = 0 \text{ in } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}, \\ & (\Delta + k^2) \mathbf{a}_- = 0 \text{ in } D, \\ & c_1 \frac{\partial \mathbf{a}_{0+}}{\partial \nu} + m_1 \frac{\partial \mathbf{a}_-}{\partial \nu} = 0 \text{ auf } \partial D, \\ & \mathbf{a}_{0+} + \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k} \mathbf{a}_- = 0 \text{ auf } \partial D, \\ & \frac{\partial \mathbf{a}_{0+}}{\partial \nu} - i \alpha_{\mathbf{A}} \mathbf{a}_{0+} = o(r^{-1/2}), \\ (\text{Pb}) \quad & (\Delta + \alpha_{\mathbf{B}}^2) \mathbf{b}_{0+} = 0 \text{ in } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}, \\ & (\Delta + k^2) \mathbf{b}_- = 0 \text{ in } D, \\ & c_2 \frac{\partial \mathbf{b}_{0+}}{\partial \nu} + m_2 \frac{\partial \mathbf{b}_-}{\partial \nu} = 0 \text{ auf } \partial D, \\ & \mathbf{b}_{0+} + \frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k} \mathbf{b}_- = 0 \text{ auf } \partial D, \\ & \frac{\partial \mathbf{b}_{0+}}{\partial \nu} - i \alpha_{\mathbf{B}} \mathbf{b}_{0+} = o(r^{-1/2}). \end{aligned}$$

Dies sind gewöhnliche Transmissionsprobleme, wie sie in [27] behandelt werden. Mit den Ersetzungen (Pa) : $\mu_1 = c_1^{-1}, \mu_2 = m_1^{-1} \alpha_{\mathbf{A}} k^{-1}, k_1 = k, k_2 = \alpha_{\mathbf{A}}$ bzw. (Pb) : $\mu_1 = c_2^{-1}, \mu_2 = m_2^{-1} \alpha_{\mathbf{B}} k^{-1}, k_1 = k, k_2 = \alpha_{\mathbf{B}}$ haben sie die Gestalt [27, (2.1), (2.2)]. Die

dort in Theorem 3.1 angegebene Bedingung $\frac{\mu_2 \bar{k}_2^2}{\mu_1 k_1} \in \mathbb{R}$ für die eindeutige Lösbarkeit bedeutet dann mit den hier verwendeten Bezeichnungen $\frac{m_1^{-1}}{c_1}, \frac{m_2^{-1}}{c_2} \in \mathbb{R}$.

(Pa) und (Pb) sind also eindeutig lösbar, falls m_1, c_1, m_2, c_2 von Null verschieden und $\frac{c_1}{m_1}, \frac{c_2}{m_2} \in \mathbb{R}$ erfüllt sind. Dies läßt sich zusammen mit (4.24) in

$$\frac{c_1}{m_1} \in \mathbb{R} \setminus \{0, -k/\alpha_{\mathbf{A}}\}, \quad \frac{c_2}{m_2} \in \mathbb{R} \setminus \{0, -k/\alpha_{\mathbf{B}}\} \quad (4.25)$$

zusammenfassen.

Unter diesen Bedingungen folgt dann unmittelbar

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \psi_1 = \psi_2 = 0 \text{ auf } \partial D,$$

das zweidimensionale Randwertproblem ist also für alle rechten Seiten (mit entsprechender Regularität) eindeutig lösbar.

Für die Dichten gilt nach der Riesz-Theorie

$$\begin{aligned} & \|\varphi_1\|_{C(\partial D)} + \|\varphi_2\|_{C(\partial D)} + \|\psi_1\|_{C(\partial D)} + \|\psi_2\|_{C(\partial D)} \\ & \leq c \{ \|N_{\mathbf{a}}\|_{C(\partial D)} + \|N_{\mathbf{b}}\|_{C(\partial D)} + \|D_{\mathbf{a}}\|_{C(\partial D)} + \|D_{\mathbf{b}}\|_{C(\partial D)} \}. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Die Beziehung

$$(\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2)^\top = E^{-1} \{ 2(N_{\mathbf{a}}, N_{\mathbf{b}}, D_{\mathbf{a}}, D_{\mathbf{b}})^\top - A(\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2)^\top \} \quad (4.27)$$

und die Abbildungseigenschaften von A implizieren

$$\begin{aligned} & \|\varphi_1\|_{C^{0,\alpha}(\partial D)} + \|\varphi_2\|_{C^{0,\alpha}(\partial D)} + \|\psi_1\|_{C^{1,\alpha}(\partial D)} + \|\psi_2\|_{C^{1,\alpha}(\partial D)} \\ & \leq c \{ \|N_{\mathbf{a}}\|_{C^{0,\alpha}(\partial D)} + \|N_{\mathbf{b}}\|_{C^{0,\alpha}(\partial D)} + \|D_{\mathbf{a}}\|_{C^{1,\alpha}(\partial D)} + \|D_{\mathbf{b}}\|_{C^{1,\alpha}(\partial D)} \} \end{aligned}$$

mit einer geeigneten Konstanten c .

Nach [3, Th. 3.3] folgt aus (4.15 a) - (4.15 d)

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{a}_0\|_{C^{1,\alpha}(\bar{D})} + \|\mathbf{b}_0\|_{C^{1,\alpha}(\bar{D})} + \|\mathbf{a}\|_{C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^2 \setminus D)} + \|\mathbf{b}\|_{C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^2 \setminus D)} \\ & \leq c \{ \|N_{\mathbf{a}}\|_{C^{0,\alpha}(\partial D)} + \|N_{\mathbf{b}}\|_{C^{0,\alpha}(\partial D)} + \|D_{\mathbf{a}}\|_{C^{1,\alpha}(\partial D)} + \|D_{\mathbf{b}}\|_{C^{1,\alpha}(\partial D)} \}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Zusammengefaßt gilt also das folgende Eindeutigkeits- und Wohlgestelltheitsresultat.

Satz 4.5 *Für ein C^2 -glattes Gebiet D besitzt das Transmissionsproblem (2.9 a) - (2.11 d) zu beliebigen rechten Seiten $N_{\mathbf{a}}, N_{\mathbf{b}} \in C^{0,\alpha}(\partial D)$, $D_{\mathbf{a}}, D_{\mathbf{b}} \in C^{1,\alpha}(\partial D)$ genau eine Lösung. Diese hängt stetig von den Daten im Sinne von (4.28) ab.*

Man kann nun noch ein modifiziertes Wohlgestelltheitsresultat angeben. Die im Operator A auftretenden Integraloperatoren sind ebenfalls kompakt von $L^2(\partial D)$ in sich, so daß zweimalige Anwendung der Fredholmschen Alternative – angewendet auf die nicht entarteten Dualsysteme $\langle (C(\partial D))^4, (L^2(\partial D))^4 \rangle$ und $\langle (L^2(\partial D))^4, (L^2(\partial D))^4 \rangle$, jeweils ausgestattet mit der L^2 -Bilinearform – auch die beschränkte Invertierbarkeit von $E + A$ in $L^2(\partial D)$ liefert, das heißt, es existiert eine Konstante c_0 mit

$$\begin{aligned} & \|\varphi_1\|_{L^2(\partial D)} + \|\varphi_2\|_{L^2(\partial D)} + \|\psi_1\|_{L^2(\partial D)} + \|\psi_2\|_{L^2(\partial D)} \\ & \leq c_0 \{ \|N_{\mathbf{a}}\|_{L^2(\partial D)} + \|N_{\mathbf{b}}\|_{L^2(\partial D)} + \|D_{\mathbf{a}}\|_{L^2(\partial D)} + \|D_{\mathbf{b}}\|_{L^2(\partial D)} \}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Es sei ein Punkt $x_0 \in \partial D$ fixiert und für $0 < r < R$ eine Funktion $\chi \in C^2(\partial D)$ gewählt, so daß

$$\chi|_{B_{r'}} = 1, \quad \text{supp}(\chi) \subset B_{R'}$$

gilt, wobei $B_\rho = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x - x_0| < \rho\}$ für $\rho > 0$ bezeichnet und $r < r' < R' < R$ gelte. Man zerlegt jetzt die Dichten gemäß $\varphi_1 = (1 - \chi)\varphi_1 + \chi\varphi_1$, $\varphi_2 = (1 - \chi)\varphi_2 + \chi\varphi_2$, $\psi_1 = (1 - \chi)\psi_1 + \chi\psi_1$, $\psi_2 = (1 - \chi)\psi_2 + \chi\psi_2$ und behandelt die zugehörigen Potentiale separat. Exemplarisch ist $\mathbf{a}_0 = u + u'$, wobei die beiden Anteile gemäß

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\partial D} \left\{ \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k} \frac{\partial \Phi_{\alpha_{\mathbf{A}}}(x, y)}{\partial \nu(y)} (1 - \chi(y))\psi_1(y) + \Phi_{\alpha_{\mathbf{A}}}(x, y)m_1(1 - \chi(y))\varphi_1(y) \right\} ds(y), \\ u'(x) &= \int_{\partial D} \left\{ \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k} \frac{\partial \Phi_{\alpha_{\mathbf{A}}}(x, y)}{\partial \nu(y)} \chi(y)\psi_1(y) + \Phi_{\alpha_{\mathbf{A}}}(x, y)m_1\chi(y)\varphi_1(y) \right\} ds(y) \end{aligned}$$

erklärt sind. Für u gilt $\|u\|_{C^{1,\alpha}(\bar{D} \setminus B_R)} \leq \|u\|_{C^{1,\alpha}(\bar{D})}$ und

$$\begin{aligned} \|u\|_{C^{1,\alpha}(\bar{D})} &\leq c_1 \{ \|(1 - \chi)\varphi_1\|_{C^{0,\alpha}(\partial D)} + \|(1 - \chi)\psi_1\|_{C^{1,\alpha}(\partial D)} \} \\ &\leq c_2 \{ \|\varphi_1\|_{C^{0,\alpha}(\partial D \setminus B_{r'})} + \|\psi_1\|_{C^{1,\alpha}(\partial D \setminus B_{r'})} \}, \end{aligned}$$

dies läßt sich nun unter Ausnutzung von (4.27) und den Abbildungseigenschaften von A zwischen Hölder-Räumen weiter abschätzen gemäß

$$\begin{aligned} & \|u\|_{C^{1,\alpha}(\bar{D})} \\ & \leq c_3 \{ \|N_{\mathbf{a}}\|_{C^{0,\alpha}(\partial D \setminus B_{r''})} + \|N_{\mathbf{b}}\|_{C^{0,\alpha}(\partial D \setminus B_{r''})} + \|D_{\mathbf{a}}\|_{C^{1,\alpha}(\partial D \setminus B_{r''})} + \|D_{\mathbf{b}}\|_{C^{1,\alpha}(\partial D \setminus B_{r''})} \\ & \quad + \|\varphi_1\|_{C(\partial D \setminus B_{r''})} + \|\varphi_2\|_{C(\partial D \setminus B_{r''})} + \|\psi_1\|_{C(\partial D \setminus B_{r''})} + \|\psi_2\|_{C(\partial D \setminus B_{r''})} \} \end{aligned} \quad (4.30)$$

mit $r < r'' < r'$.

Wiederum (4.27) und die Eigenschaft von A , von $(L^2(\partial D))^4$ nach $(C(\partial D))^4$ beschränkt abzubilden, sowie (4.29) implizieren

$$\begin{aligned} & \|\varphi_1\|_{C(\partial D \setminus B_{r''})} + \|\varphi_2\|_{C(\partial D \setminus B_{r''})} + \|\psi_1\|_{C(\partial D \setminus B_{r''})} + \|\psi_2\|_{C(\partial D \setminus B_{r''})} \\ & \leq c_4 \{ \|N_{\mathbf{a}}\|_{C(\partial D \setminus B_r)} + \|N_{\mathbf{b}}\|_{C(\partial D \setminus B_r)} + \|D_{\mathbf{a}}\|_{C(\partial D \setminus B_r)} + \|D_{\mathbf{b}}\|_{C(\partial D \setminus B_r)} \\ & \quad + \|N_{\mathbf{a}}\|_{L^2(\partial D)} + \|N_{\mathbf{b}}\|_{L^2(\partial D)} + \|D_{\mathbf{a}}\|_{L^2(\partial D)} + \|D_{\mathbf{b}}\|_{L^2(\partial D)} \}. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Setzt man (4.31) in (4.30) ein, so folgt

$$\begin{aligned} & \|u\|_{C^{1,\alpha}(\bar{D})} \\ & \leq c_5 \left\{ \|N_{\mathbf{a}}\|_{C^{0,\alpha}(\partial D \setminus B_r)} + \|N_{\mathbf{b}}\|_{C^{0,\alpha}(\partial D \setminus B_r)} + \|D_{\mathbf{a}}\|_{C^{1,\alpha}(\partial D \setminus B_r)} + \|D_{\mathbf{b}}\|_{C^{1,\alpha}(\partial D \setminus B_r)} \right. \\ & \quad \left. + \|N_{\mathbf{a}}\|_{L^2(\partial D)} + \|N_{\mathbf{b}}\|_{L^2(\partial D)} + \|D_{\mathbf{a}}\|_{L^2(\partial D)} + \|D_{\mathbf{b}}\|_{L^2(\partial D)} \right\}. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Jetzt ist noch der zweite Anteil u' zu untersuchen. Wertet man u' bezüglich $\|\cdot\|_{C^{1,\alpha}(\bar{D} \setminus B_R)}$ aus, so sieht man, daß der tatsächliche Integrationsbereich und das Gebiet auf dem ausgewertet wird, positiven Abstand haben, so daß mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung und (4.29)

$$\begin{aligned} \|u'\|_{C^{1,\alpha}(\bar{D} \setminus B_R)} & \leq c_6 \left\{ \|\varphi_1\|_{L^2(\partial D)} + \|\psi_1\|_{L^2(\partial D)} \right\} \\ & \leq c_7 \left\{ \|N_{\mathbf{a}}\|_{L^2(\partial D)} + \|N_{\mathbf{b}}\|_{L^2(\partial D)} + \|D_{\mathbf{a}}\|_{L^2(\partial D)} + \|D_{\mathbf{b}}\|_{L^2(\partial D)} \right\} \end{aligned}$$

folgt. Mit analogen Betrachtungen für \mathbf{b}_0 folgt insgesamt

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{a}_0\|_{C^{1,\alpha}(\bar{D} \setminus B_R)} + \|\mathbf{b}_0\|_{C^{1,\alpha}(\bar{D} \setminus B_R)} \\ & \leq c \left\{ \|N_{\mathbf{a}}\|_{C^{0,\alpha}(\partial D \setminus B_r)} + \|N_{\mathbf{b}}\|_{C^{0,\alpha}(\partial D \setminus B_r)} + \|D_{\mathbf{a}}\|_{C^{1,\alpha}(\partial D \setminus B_r)} + \|D_{\mathbf{b}}\|_{C^{1,\alpha}(\partial D \setminus B_r)} \right. \\ & \quad \left. + \|N_{\mathbf{a}}\|_{L^2(\partial D)} + \|N_{\mathbf{b}}\|_{L^2(\partial D)} + \|D_{\mathbf{a}}\|_{L^2(\partial D)} + \|D_{\mathbf{b}}\|_{L^2(\partial D)} \right\} \end{aligned} \quad (4.33)$$

mit einer Konstanten c , die nur von vom Gebiet D , dem Hölder-Exponenten α , dem Punkt $x_0 \in \partial D$, und den Radien r, R abhängt.

Aus der Lösungsdarstellung als gemischtes Potential ergibt sich eine Darstellung für die Fernfelder¹⁰ \mathbf{a}_∞ und \mathbf{b}_∞

$$\mathbf{a}_\infty(\hat{x}) = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k}} \int_{\partial D} \{k \nu(y) \cdot \hat{x} \psi_1(y) + ic_1 \varphi_1(y)\} e^{-ik\hat{x} \cdot y} ds(y), \quad (4.34 \text{ a})$$

$$\mathbf{b}_\infty(\hat{x}) = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k}} \int_{\partial D} \{k \nu(y) \cdot \hat{x} \psi_2(y) + ic_2 \varphi_2(y)\} e^{-ik\hat{x} \cdot y} ds(y), \quad (4.34 \text{ b})$$

die das asymptotische Verhalten

$$\mathbf{a}(x) = \frac{e^{ik|x|}}{\sqrt{|x|}} \left\{ \mathbf{a}_\infty(\hat{x}) + O\left(\frac{1}{|x|}\right) \right\}, \quad \mathbf{b}(x) = \frac{e^{ik|x|}}{\sqrt{|x|}} \left\{ \mathbf{b}_\infty(\hat{x}) + O\left(\frac{1}{|x|}\right) \right\}, \quad |x| \rightarrow \infty,$$

von \mathbf{a} und \mathbf{b} im Unendlichen beschreiben.

¹⁰Vergleiche [3, S. 71].

5 Formulierung als Streuproblem

In diesem Kapitel soll die allgemeine Behandlung der Randwertprobleme auf die physikalisch relevante Beschreibung von Streuproblemen spezialisiert werden. Dabei sind nun die Randwerte nicht willkürlich vorgegeben, sondern resultieren aus einfallenden ebenen Wellen, die im Außenraum den Feldgleichungen genügen. Von dem entstehenden Streufeld verlangt man ebenfalls das Erfülltsein der Feldgleichungen sowie ein dimensionsabhängiges Abstrahlverhalten, das transmittierte Feld muß den inneren Feldgleichungen genügen.

5.1 Dreidimensionales Streuproblem

Beim dreidimensionalen Streuproblem setzen sich die äußeren Felder $\mathbf{E} = \mathbf{E}^i + \mathbf{E}^s$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}^i + \mathbf{H}^s$ aus einem bekannten einfallenden Feld \mathbf{E}^i bzw. \mathbf{H}^i und einem gestreuten Feld \mathbf{E}^s bzw. \mathbf{H}^s zusammen. Gesucht sind dann Lösungen $(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0, \mathbf{E}^s, \mathbf{H}^s)$ des direkten Problems (1.5 a) - (1.7 b) mit den Inhomogenitäten

$$f = \varepsilon^{-1/2} \nu \times \mathbf{E}^i|_{\partial D} \quad \text{und} \quad g = \mu^{-1/2} \nu \times \mathbf{H}^i|_{\partial D},$$

also

$$(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0, \mathbf{E}^s, \mathbf{H}^s)^\top = \mathcal{L} (\varepsilon^{-1/2} \nu \times \mathbf{E}^i|_{\partial D}, \mu^{-1/2} \nu \times \mathbf{H}^i|_{\partial D})^\top =: \mathcal{L}^s (\mathbf{E}^i, \mathbf{H}^i)^\top \quad (5.1)$$

mit dem gemäß (1.8) erklärten Operator.

Dabei sind \mathbf{E}^i und \mathbf{H}^i aus Richtung d einfallende ebene Wellen¹ der Form

$$\mathbf{E}^i = \mathbf{E}^i(x; d, p) = \frac{i}{k} \text{rot rot } p e^{ikx \cdot d} = ik(d \times p) \times d e^{ikx \cdot d}, \quad (5.2)$$

$$\mathbf{H}^i = \mathbf{H}^i(x; d, p) = \text{rot } p e^{ikx \cdot d} = ik(d \times p) e^{ikx \cdot d}, \quad (5.3)$$

wobei p die Polarisationsrichtung beschreibt und $|d| = |p| = 1$ gilt. Falls $d \perp p$, so vereinfacht sich die Darstellung zu

$$\mathbf{E}^i(x; d, p) = ikp e^{ikx \cdot d}, \quad \mathbf{H}^i(x; d, p) = ikd \times p e^{ikx \cdot d}.$$

¹Daß die Maxwellgleichungen erfüllt sind, rechnet man leicht mit den Beziehungen $(x \times y) \times z = (xz)y - (yz)x$ und $\text{rot}_x (y e^{\alpha x \cdot z}) = \alpha (z \times y) e^{\alpha x \cdot z}$ nach.

5.2 Zweidimensionales Streuproblem

Es soll nun das Streuproblem für den zweidimensionalen Fall formuliert werden. Dazu sind zwei Probleme bezüglich der Polarisationsrichtung der einfallenden Felder, nämlich das transversalmagnetische oder auch elektrische Problem (TM) und das transversalelektrische oder auch magnetische Problem (TE), zu unterscheiden. Zu den Bezeichnungen vergleiche [12, S. 404f.].

Beim (TM), dies entspricht gerade der Polarisation $p = (0, 0, 1)^\top$ in x_3 -Richtung, sind die einfallenden Felder durch

$$\mathbf{E}^i = ik e^{ikx \cdot d} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}^i = ik d^\perp e^{ikx \cdot d}$$

gegeben, wobei $d = (d_1, d_2, 0)^\top$ mit $|d| = 1$, $d^\perp = (d_2, -d_1, 0)^\top$ ist.

Analog gilt beim (TE), was der Polarisation $p = -d^\perp$ orthogonal zu d und der x_3 -Richtung entspricht,

$$\mathbf{H}^i = ik e^{ikx \cdot d} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}^i = -ik d^\perp e^{ikx \cdot d}.$$

Gesucht sind Lösungen $\mathbf{e}_0, \mathbf{h}_0 \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$, $\mathbf{e}^s, \mathbf{h}^s \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}) \cap C(\mathbb{R}^2 \setminus D)$ von (1.10 a) - (1.12 d), wobei die Inhomogenitäten gegeben sind durch²

$$\begin{aligned} \text{(TM)} \quad f &= ik \varepsilon^{-1/2} e^{ikx \cdot d} \nu^\perp, & \hat{f} &= 0, & \tilde{f} &= ik \varepsilon^{-1/2} e^{ikx \cdot d}, \\ g_1 = g_2 &= 0, & \hat{g} &= -ik \mu^{-1/2} e^{ikx \cdot d} \nu \cdot d, & \tilde{g} &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(TE)} \quad g &= ik \mu^{-1/2} e^{ikx \cdot d} \nu^\perp, & \hat{g} &= 0, & \tilde{g} &= ik \mu^{-1/2} e^{ikx \cdot d}, \\ f_1 = f_2 &= 0, & \hat{f} &= ik \varepsilon^{-1/2} e^{ikx \cdot d} \nu \cdot d, & \tilde{f} &= 0. \end{aligned}$$

Dies kann mittels

$$\begin{aligned} \text{(TM)} \quad \mathbf{e}^i(x; d) &= ik e^{ikx \cdot d}, & \mathbf{h}^i &= 0, \\ \text{(TE)} \quad \mathbf{h}^i(x; d) &= ik e^{ikx \cdot d}, & \mathbf{e}^i &= 0 \end{aligned} \tag{5.4}$$

auch in der Form

$$\tilde{f} = \varepsilon^{-1/2} \mathbf{e}^i, \quad \tilde{g} = \mu^{-1/2} \mathbf{h}^i, \quad \hat{f} = -\varepsilon^{-1/2} ik^{-1} \frac{\partial \mathbf{h}^i}{\partial \nu}, \quad \hat{g} = \mu^{-1/2} ik^{-1} \frac{\partial \mathbf{e}^i}{\partial \nu}$$

geschrieben werden, so daß

$$(\mathbf{e}_0, \mathbf{h}_0, \mathbf{e}^s, \mathbf{h}^s)^\top = \mathcal{L} \begin{pmatrix} -\varepsilon^{-1/2} ik^{-1} \frac{\partial \mathbf{h}^i}{\partial \nu} \\ \mu^{-1/2} ik^{-1} \frac{\partial \mathbf{e}^i}{\partial \nu} \\ \varepsilon^{-1/2} \mathbf{e}^i \\ \mu^{-1/2} \mathbf{h}^i \end{pmatrix} =: \mathcal{L}^s (\mathbf{e}^i, \mathbf{h}^i)^\top$$

²Es wird benutzt, daß $f = \varepsilon^{-1/2} \nu \times \mathbf{E}^i|_{\partial D}$, $g = \mu^{-1/2} \nu \times \mathbf{H}^i|_{\partial D}$ und $\nu^\perp \cdot d^\perp = \nu \cdot d$ gelten.

mit \mathcal{L} gemäß (1.13) gilt.

Für das Problem in Bohrenscher Zerlegung ergeben sich hieraus die folgenden Randbedingungen gemäß (2.11 a) - (2.11 d)

$$\begin{aligned} (TM) \quad N_{\mathbf{a}} &= -k\alpha_{\mathbf{A}}(\mu_0/\mu)^{1/2}e^{ikx \cdot d} \nu \cdot d, \\ N_{\mathbf{b}} &= -k\alpha_{\mathbf{B}}(\mu_0/\mu)^{1/2}e^{ikx \cdot d} \nu \cdot d, \\ D_{\mathbf{a}} = D_{\mathbf{b}} &= ik(\varepsilon_0/\varepsilon)^{1/2}e^{ikx \cdot d}, \end{aligned} \quad (5.5 a)$$

$$\begin{aligned} (TE) \quad N_{\mathbf{a}} &= -ik\alpha_{\mathbf{A}}(\varepsilon_0/\varepsilon)^{1/2}e^{ikx \cdot d} \nu \cdot d, \\ N_{\mathbf{b}} &= ik\alpha_{\mathbf{B}}(\varepsilon_0/\varepsilon)^{1/2}e^{ikx \cdot d} \nu \cdot d, \\ -D_{\mathbf{a}} = D_{\mathbf{b}} &= k(\mu_0/\mu)^{1/2}e^{ikx \cdot d}. \end{aligned} \quad (5.5 b)$$

Setzt man

$$(TM) \quad \mathbf{a}^i = \mathbf{b}^i = ik(\mu_0/\mu)^{1/2}e^{ikx \cdot d}, \quad (5.6 a)$$

$$(TE) \quad -\mathbf{a}^i = \mathbf{b}^i = k(\varepsilon_0/\varepsilon)^{1/2}e^{ikx \cdot d} \quad (5.6 b)$$

so daß bei beiden Problemen

$$N_{\mathbf{a}} = \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k} \frac{\partial \mathbf{a}^i}{\partial \nu}, \quad N_{\mathbf{b}} = \frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k} \frac{\partial \mathbf{b}^i}{\partial \nu}, \quad D_{\mathbf{a}} = \xi_+ \mathbf{a}^i + \xi_- \mathbf{b}^i, \quad D_{\mathbf{b}} = \xi_- \mathbf{a}^i + \xi_+ \mathbf{b}^i,$$

gilt, dann läßt sich das Streuproblem in der Bohrenschen Zerlegung in der folgenden Form schreiben.

Gesucht sind $\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0 \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$, $\mathbf{a}^s, \mathbf{b}^s \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}) \cap C(\mathbb{R}^2 \setminus D)$ mit

$$\begin{aligned} (\Delta + \alpha_{\mathbf{A}}^2) \mathbf{a}_0 &= (\Delta + \alpha_{\mathbf{B}}^2) \mathbf{b}_0 = 0 \text{ in } D, \\ (\Delta + k^2) \mathbf{a}^s &= (\Delta + k^2) \mathbf{b}^s = 0 \text{ in } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}, \\ \frac{\partial \mathbf{a}_0}{\partial \nu} - \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k} \frac{\partial \mathbf{a}^s}{\partial \nu} &= \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k} \frac{\partial \mathbf{a}^i}{\partial \nu} \text{ auf } \partial D, \\ \frac{\partial \mathbf{b}_0}{\partial \nu} - \frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k} \frac{\partial \mathbf{b}^s}{\partial \nu} &= \frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k} \frac{\partial \mathbf{b}^i}{\partial \nu} \text{ auf } \partial D, \\ \mathbf{a}_0 - \xi_+ \mathbf{a}^s - \xi_- \mathbf{b}^s &= \xi_+ \mathbf{a}^i + \xi_- \mathbf{b}^i \text{ auf } \partial D, \\ \mathbf{b}_0 - \xi_- \mathbf{a}^s - \xi_+ \mathbf{b}^s &= \xi_- \mathbf{a}^i + \xi_+ \mathbf{b}^i \text{ auf } \partial D, \\ \frac{\partial \mathbf{a}^s}{\partial r} - ik \mathbf{a}^s &= o(r^{-1/2}), \\ \frac{\partial \mathbf{b}^s}{\partial r} - ik \mathbf{b}^s &= o(r^{-1/2}). \end{aligned} \quad (5.7)$$

oder kurz

$$(\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0, \mathbf{a}^s, \mathbf{b}^s)^\top = \mathcal{L}^B \begin{pmatrix} \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k} \frac{\partial \mathbf{a}^i}{\partial \nu} \\ \frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k} \frac{\partial \mathbf{b}^i}{\partial \nu} \\ \xi_+ \mathbf{a}^i + \xi_- \mathbf{b}^i \\ \xi_- \mathbf{a}^i + \xi_+ \mathbf{b}^i \end{pmatrix} =: \mathcal{L}^{Bs} (\mathbf{a}^i, \mathbf{b}^i)^\top \quad (5.8)$$

mit \mathcal{L}^B gemäß (2.13).

Bei der Betrachtung von Streuproblemen bezeichnen \mathbf{a}_∞ und \mathbf{b}_∞ die zu \mathbf{a}^s beziehungsweise \mathbf{b}^s gehörigen Fernfelder.

6 Das Fernfeld

Die Parameter seien im folgenden immer so gewählt, daß Existenz und Eindeutigkeit bei den direkten Problemen gesichert sind. Insbesondere sind dann die Lösungen durch die angegebenen Potentiale darstellbar.

Die Lösungen des dreidimensionalen Problems im Außengebiet haben das asymptotische Verhalten

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(x) &= \frac{e^{ik|x|}}{|x|} \left\{ \mathbf{E}_\infty(\hat{x}) + O\left(\frac{1}{|x|}\right) \right\}, \quad |x| \rightarrow \infty, \\ \mathbf{H}(x) &= \frac{e^{ik|x|}}{|x|} \left\{ \mathbf{H}_\infty(\hat{x}) + O\left(\frac{1}{|x|}\right) \right\}, \quad |x| \rightarrow \infty,\end{aligned}$$

gleichmäßig für alle Richtungen $\hat{x} = x/|x|$. Dabei haben die Fernfelder \mathbf{E}_∞ , \mathbf{H}_∞ die Darstellung¹

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_\infty(\hat{x}) &= \frac{ik}{4\pi} \hat{x} \times \int_{\partial D} \{ \nu(y) \times \mathbf{E}(y) + [\nu(y) \times \mathbf{H}(y)] \times \hat{x} \} e^{-ik\hat{x}\cdot y} ds(y), \\ \mathbf{H}_\infty(\hat{x}) &= \frac{ik}{4\pi} \hat{x} \times \int_{\partial D} \{ \nu(y) \times \mathbf{H}(y) - [\nu(y) \times \mathbf{E}(y)] \times \hat{x} \} e^{-ik\hat{x}\cdot y} ds(y).\end{aligned}$$

Entsprechende Aussagen gelten für \mathbf{A} , \mathbf{B} bzw. \mathbf{A}_∞ , \mathbf{B}_∞ .

Für die Fernfelder gelten die Orthogonalitätsrelationen²

$$\mathbf{H}_\infty(\hat{x}) = \hat{x} \times \mathbf{E}_\infty(\hat{x}), \quad \hat{x} \cdot \mathbf{E}_\infty(\hat{x}) = \hat{x} \cdot \mathbf{H}_\infty(\hat{x}) = 0. \quad (6.1)$$

Bei den zerlegten Feldern ergeben sich die Beziehungen

$$\mathbf{A}_\infty(\hat{x}) = i\hat{x} \times \mathbf{A}_\infty(\hat{x}), \quad \mathbf{B}_\infty(\hat{x}) = -i\hat{x} \times \mathbf{B}_\infty(\hat{x}), \quad \hat{x} \cdot \mathbf{A}_\infty(\hat{x}) = \hat{x} \cdot \mathbf{B}_\infty(\hat{x}) = 0.$$

Im zweidimensionalen Fall gilt³

$$\begin{aligned}\mathbf{e}(x) &= \frac{e^{ik|x|}}{\sqrt{|x|}} \left\{ \mathbf{e}_\infty(\hat{x}) + O\left(\frac{1}{|x|}\right) \right\}, \quad |x| \rightarrow \infty, \\ \mathbf{h}(x) &= \frac{e^{ik|x|}}{\sqrt{|x|}} \left\{ \mathbf{h}_\infty(\hat{x}) + O\left(\frac{1}{|x|}\right) \right\}, \quad |x| \rightarrow \infty,\end{aligned}$$

¹Siehe dazu [3, (6.24)].

²Vergleiche [3, (6.23)].

³Vergleiche [3, (3.63) und (3.64)].

gleichmäßig für alle Richtungen $\hat{x} = x/|x|$ mit den Darstellungen

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_\infty(\hat{x}) &= \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k}} \int_{\partial D} \left\{ \mathbf{e}(y) \frac{\partial e^{-ik\hat{x}\cdot y}}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial \nu}(y) e^{-ik\hat{x}\cdot y} \right\} ds(y), \\ \mathbf{h}_\infty(\hat{x}) &= \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k}} \int_{\partial D} \left\{ \mathbf{h}(y) \frac{\partial e^{-ik\hat{x}\cdot y}}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \nu}(y) e^{-ik\hat{x}\cdot y} \right\} ds(y)\end{aligned}$$

für die Fernfelder. Für \mathbf{a} , \mathbf{b} und \mathbf{a}_∞ , \mathbf{b}_∞ gilt dies entsprechend.

6.1 Reziprozität im dreidimensionalen Fall

Es bezeichnen

$$\mathbf{E}^i(x; d, p) = ik(d \times p) \times d e^{ikx\cdot d}, \quad \mathbf{H}^i(x; d, p) = ikd \times p e^{ikx\cdot d} = \frac{1}{ik} \operatorname{rot} \mathbf{E}^i(x; d, p)$$

die einfallenden elektromagnetischen Wellen und

$$(\mathbf{E}_0(\cdot; d, p), \mathbf{H}_0(\cdot; d, p), \mathbf{E}^s(\cdot; d, p), \mathbf{H}^s(\cdot; d, p))^\top = \mathcal{L} \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1/2} \nu \times \mathbf{E}^i(\cdot; d, p) \\ \mu^{-1/2} \nu \times \mathbf{H}^i(\cdot; d, p) \end{pmatrix}$$

die Lösung des zugehörigen Streuproblems, sowie $\mathbf{E}_\infty(\cdot; d, p)$, $\mathbf{H}_\infty(\cdot; d, p)$ die zu \mathbf{E}^s beziehungsweise \mathbf{H}^s gehörigen Fernfelder.

Für diese gilt der folgende Satz.

Satz 6.1 *Das elektrische Fernfeld für die Streuung einer ebenen elektromagnetischen Welle am chiralen Gebiet erfüllt die Reziprozitätsrelation*

$$q \cdot \mathbf{E}_\infty(\hat{x}; d, p) = p \cdot \mathbf{E}_\infty(-d; -\hat{x}, q) \quad (6.2)$$

für alle $\hat{x}, d \in \Omega$ und alle $p, q \in \mathbb{R}^3$.

Beweis Nach [3, (6.78)] gilt für die Fernfelder, ausgedrückt durch die Gesamfelder,

$$\begin{aligned} &4\pi (q \cdot \mathbf{E}_\infty(\hat{x}; d, p) - p \cdot \mathbf{E}_\infty(-d; -\hat{x}, q)) \\ &= \int_{\partial D} \{ \nu(y) \times \mathbf{E}(y; d, p) \cdot \mathbf{H}(y; -\hat{x}, q) + \nu(y) \times \mathbf{H}(y; d, p) \cdot \mathbf{E}(y; -\hat{x}, q) \} ds(y) \end{aligned}$$

für alle $\hat{x}, d \in \Omega$ und alle $p, q \in \mathbb{R}^3$. Mit den Transmissionsbedingungen (1.6 a), (1.6 b) folgt daraus

$$4\pi (q \cdot \mathbf{E}_\infty(\hat{x}; d, p) - p \cdot \mathbf{E}_\infty(-d; -\hat{x}, q))$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0} \right)^{1/2} \int_{\partial D} \{ \mathbf{E}_0(y; d, p) \times \mathbf{H}_0(y; -\hat{x}, q) + \mathbf{H}_0(y; d, p) \times \mathbf{E}_0(y; -\hat{x}, q) \} \cdot \nu(y) \, ds(y) \\
&= \left(\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0} \right)^{1/2} \int_D \operatorname{div} \{ \mathbf{E}_0(y; d, p) \times \mathbf{H}_0(y; -\hat{x}, q) + \mathbf{H}_0(y; d, p) \times \mathbf{E}_0(y; -\hat{x}, q) \} \, dy \\
&= \left(\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0} \right)^{1/2} \int_D \{ \mathbf{H}_0(y; -\hat{x}, q) \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E}_0(y; d, p) - \mathbf{E}_0(y; d, p) \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H}_0(y; -\hat{x}, q) \\
&\quad + \mathbf{E}_0(y; -\hat{x}, q) \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H}_0(y; d, p) - \mathbf{H}_0(y; d, p) \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E}_0(y; -\hat{x}, q) \} \, dy \\
&= \left(\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0} \right)^{1/2} \int_D \{ \mathbf{H}_0(y; -\hat{x}, q) \cdot [ik_0\gamma^2 \mathbf{H}_0(y; d, p) + k_0^2\gamma^2\beta \mathbf{E}_0(y; d, p)] \\
&\quad - \mathbf{E}_0(y; d, p) \cdot [-ik_0\gamma^2 \mathbf{E}_0(y; -\hat{x}, q) + k_0^2\gamma^2\beta \mathbf{H}_0(y; -\hat{x}, q)] \\
&\quad + \mathbf{E}_0(y; -\hat{x}, q) \cdot [-ik_0\gamma^2 \mathbf{E}_0(y; d, p) + k_0^2\gamma^2\beta \mathbf{H}_0(y; d, p)] \\
&\quad - \mathbf{H}_0(y; d, p) \cdot [ik_0\gamma^2 \mathbf{H}_0(y; -\hat{x}, q) + k_0^2\gamma^2\beta \mathbf{E}_0(y; -\hat{x}, q)] \} \, dy \\
&= 0.
\end{aligned}$$

q. e. d.

Ein analoges Resultat läßt sich für das magnetische Fernfeld formulieren.

Korollar 6.2 *Das magnetische Fernfeld für die Streuung einer ebenen elektromagnetischen Welle am chiralen Gebiet erfüllt die Reziprozitätsrelation*

$$q \cdot \mathbf{H}_\infty(\hat{x}; d, p) = p \cdot \mathbf{H}_\infty(-d; -\hat{x}, q) \quad (6.3)$$

für alle $\hat{x}, d \in \Omega$ und alle $p, q \in \mathbb{R}^3$.

Beweis Mit der Orthogonalitätsbeziehung (6.1) und der Reziprozität (6.2) gilt

$$q \cdot \mathbf{H}_\infty(\hat{x}; d, p) = q \cdot (\hat{x} \times \mathbf{E}_\infty(\hat{x}; d, p)) = (q \times \hat{x}) \cdot \mathbf{E}_\infty(\hat{x}; d, p) = p \cdot \mathbf{E}_\infty(-d; -\hat{x}, q \times \hat{x}).$$

Dabei ist $\mathbf{E}_\infty(\cdot; -\hat{x}, q \times \hat{x})$ Fernfeld des elektrischen Streufeldes bei einfallenden Wellen

$$\mathbf{E}^i(\cdot; -\hat{x}, q \times \hat{x}) = \mathbf{H}^i(\cdot; -\hat{x}, q), \quad \mathbf{H}^i(\cdot; -\hat{x}, q \times \hat{x}) = \mathbf{E}^i(\cdot; -\hat{x}, q),$$

so daß

$$\mathbf{E}_\infty(-d; -\hat{x}, q \times \hat{x}) = \mathbf{H}_\infty(-d; -\hat{x}, q)$$

und zusammen mit der ersten Gleichungskette die Behauptung gilt.

q. e. d.

Definition 6.3 *Es bezeichnet $T^2(\Omega)$ den Raum der quadratintegrablen Tangentialfelder auf Ω .⁴ Ein elektromagnetisches Herglotz-Paar ist ein Paar von Vektorfeldern der Form*

$$\mathbf{E}(x) = \int_{\Omega} e^{ikx \cdot d} g(d) \, ds(d), \quad \mathbf{H}(x) = \frac{1}{ik} \operatorname{rot} \mathbf{E}(x), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad (6.4)$$

wobei $g \in T^2(\Omega)$ der Herglotz-Kern von \mathbf{E}, \mathbf{H} genannt wird.

⁴Das ist die Vervollständigung von $T(\Omega)$ bezüglich der gewöhnlichen L^2 -Norm.

In Analogie zu [3, Lemma 6.31] gilt der folgende Hilfssatz.

Lemma 6.4 *Es sei $g \in L^2(\Omega)$. Die Lösung des Streuproblems zu einfallenden Feldern der Form*

$$\tilde{\mathbf{E}}^i(x) = \int_{\Omega} \mathbf{E}^i(x; d, g(d)) ds(d), \quad \tilde{\mathbf{H}}^i(x) = \int_{\Omega} \mathbf{H}^i(x; d, g(d)) ds(d)$$

ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{E}}^s(x) &= \int_{\Omega} \mathbf{E}^s(x; d, g(d)) ds(d), & \tilde{\mathbf{H}}^s(x) &= \int_{\Omega} \mathbf{H}^s(x; d, g(d)) ds(d), \\ \tilde{\mathbf{E}}_0(x) &= \int_{\Omega} \mathbf{E}^s(x; d, g(d)) ds(d), & \tilde{\mathbf{H}}_0(x) &= \int_{\Omega} \mathbf{H}^s(x; d, g(d)) ds(d) \end{aligned}$$

für $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ bzw. $x \in D$ mit den zugehörigen Fernfeldern

$$\tilde{\mathbf{E}}_{\infty}(\hat{x}) = \int_{\Omega} \mathbf{E}_{\infty}(\hat{x}; d, g(d)) ds(d), \quad \tilde{\mathbf{H}}_{\infty}(\hat{x}) = \int_{\Omega} \mathbf{H}_{\infty}(\hat{x}; d, g(d)) ds(d)$$

für $\hat{x} \in \Omega$.

Beweis Für den Beweis wird die Problemformulierung nach der Bohrenschen Zerlegung gemäß (2.1) benutzt. Es gelten für die zerlegten Felder $\mathbf{A}_0(\cdot; d, g(d))$, $\mathbf{B}_0(\cdot; d, g(d))$, $\mathbf{A}^s(\cdot; d, g(d))$ und $\mathbf{B}^s(\cdot; d, g(d))$ zu den durch $\mathbf{E}^i(\cdot; d, g(d))$ und $\mathbf{H}^i(\cdot; d, g(d))$ bestimmten Feldern $\mathbf{E}_0(\cdot; d, g(d))$, $\mathbf{H}_0(\cdot; d, g(d))$, $\mathbf{E}^s(\cdot; d, g(d))$, $\mathbf{H}^s(\cdot; d, g(d))$ Darstellungen gemäß (4.6 a) - (4.6 d), wobei die dabei verwendeten Dichten $\varphi(\cdot; d, g(d))$, $\psi(\cdot; d, g(d))$ dem Integralgleichungssystem

$$(E + A) \begin{pmatrix} \varphi(\cdot; d, g(d)) \\ \psi(\cdot; d, g(d)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4(\varepsilon_0/\varepsilon)^{1/2} \nu \times \mathbf{E}^i(\cdot; d, g(d)) \\ 4i(\mu_0/\mu)^{1/2} \nu \times \mathbf{H}^i(\cdot; d, g(d)) \end{pmatrix}$$

genügen. Integration dieser Darstellungen und des Integralgleichungssystems bezüglich d über Ω führt nach Vertauschung der Integrationsreihenfolge auf Darstellungen für $\tilde{\mathbf{A}}_0$, $\tilde{\mathbf{B}}_0$, $\tilde{\mathbf{A}}^s$, $\tilde{\mathbf{B}}^s$ gemäß (4.6 a) - (4.6 d) mit Dichten

$$\tilde{\varphi}(y) := \int_{\Omega} \varphi(y; d, g(d)) ds(d), \quad \tilde{\psi}(y) := \int_{\Omega} \psi(y; d, g(d)) ds(d), \quad y \in \partial D,$$

die Lösungen des Integralgleichungssystems

$$(E + A) \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4(\varepsilon_0/\varepsilon)^{1/2} \nu \times \tilde{\mathbf{E}}^i \\ 4i(\mu_0/\mu)^{1/2} \nu \times \tilde{\mathbf{H}}^i \end{pmatrix}$$

sind. Eine entsprechende Darstellung folgt dann auch für die Fernfelder $\tilde{\mathbf{A}}_{\infty}$, $\tilde{\mathbf{B}}_{\infty}$. Wegen der eindeutigen Zuordnung zwischen den zerlegten und den ursprünglichen Feldern durch (2.1) gilt die Behauptung. **q. e. d.**

Bemerkung 6.5 Für $g \in T^2(\Omega)$ gilt

$$\tilde{\mathbf{E}}^i(x) = ik \int_{\Omega} g(d) e^{ikx \cdot d} ds(d), \quad \tilde{\mathbf{H}}^i(x) = \text{rot} \int_{\Omega} g(d) e^{ikx \cdot d} ds(d), \quad x \in \mathbb{R}^3,$$

das heißt $\tilde{\mathbf{E}}^i, \tilde{\mathbf{H}}^i$ ist ein elektromagnetisches Herglotz-Paar mit Kern ikg .

Definition 6.6 Es sei $\{d_n\}$ eine Folge von in Ω dichten Einheitsvektoren und es bezeichnen

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} &:= \{\mathbf{E}_{\infty}(\cdot; d_n, e_j) \mid n \in \mathbb{N}, j = 1, 2, 3\}, \\ \mathfrak{H} &:= \{\mathbf{H}_{\infty}(\cdot; d_n, e_j) \mid n \in \mathbb{N}, j = 1, 2, 3\} \end{aligned}$$

die Mengen der elektrischen bzw. magnetischen Fernfelder zu den Einfallsrichtungen d_n und den kartesischen Einheitsvektoren e_j als Polarisationen⁵.

Weiter bezeichne Θ die Menge der Herglotz-Kerne $g \in T^2(\Omega)$ mit der Eigenschaft, daß $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0 \in C^1(D) \cap C(\bar{D})$ existieren, so daß $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$ und das elektromagnetische Herglotz-Paar \mathbf{E}, \mathbf{H} zum Herglotz-Kern g Lösungen des inneren Problems

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E} - ik\mathbf{H} &= 0 \quad \text{in } D, \\ \text{rot } \mathbf{H} + ik\mathbf{E} &= 0 \quad \text{in } D, \\ \text{rot } \mathbf{E}_0 - ik_0\gamma^2\mathbf{H}_0 &= k_0^2\gamma^2\beta\mathbf{E}_0 \quad \text{in } D, \\ \text{rot } \mathbf{H}_0 + ik_0\gamma^2\mathbf{E}_0 &= k_0^2\gamma^2\beta\mathbf{H}_0 \quad \text{in } D, \end{aligned}$$

$$\varepsilon_0^{-1/2} \nu \times \mathbf{E}_0 - \varepsilon^{-1/2} \nu \times \mathbf{E} = 0 \quad \text{auf } \partial D, \quad (6.5 \text{ a})$$

$$\mu_0^{-1/2} \nu \times \mathbf{H}_0 - \mu^{-1/2} \nu \times \mathbf{H} = 0 \quad \text{auf } \partial D \quad (6.5 \text{ b})$$

sind.

Es gilt dann analog zu [3, Th. 6.32] der folgende Zusammenhang zwischen der Vollständigkeit der Fernfelder und der eindeutigen Lösbarkeit dieses zugeordneten inneren Problems.

Satz 6.7 \mathfrak{E} und \mathfrak{H} sind vollständig in $T^2(\Omega)$ genau dann, wenn $\Theta = \{0\}$ gilt.

Beweis Der Beweis wird für \mathfrak{E} geführt, für \mathfrak{H} verläuft er analog. Die Vollständigkeit von \mathfrak{E} ist gleichbedeutend damit, daß

$$\int_{\Omega} h(\hat{x}) \mathbf{E}_{\infty}(\hat{x}; d_n, e_j) ds(\hat{x}) = 0, \quad n \in \mathbb{N}, j = 1, 2, 3$$

⁵Hier kann man auch drei beliebige linear unabhängige Einheitsvektoren des \mathbb{R}^3 wählen.

für $h \in T^2(\Omega)$ das Verschwinden von h impliziert. Wegen der vorausgesetzten Wohlgestellttheit des Streuproblems und der Dichtheit der d_n in Ω ist die Vollständigkeitsrelation äquivalent zu

$$\int_{\Omega} h(\hat{x}) \mathbf{E}_{\infty}(\hat{x}; d, e_j) ds(\hat{x}) = 0, \quad d \in \Omega, \quad j = 1, 2, 3$$

für $h \in T^2(\Omega)$. Ausnutzen der Reziprozitätseigenschaft (6.2) und der Eigenschaft, daß e_j , $j = 1, 2, 3$ eine Basis des \mathbb{R}^3 bilden sowie Ersetzung von \hat{x} durch $-d$ führen auf die äquivalente Bedingung

$$\tilde{\mathbf{E}}_{\infty, g} := \int_{\Omega} \mathbf{E}_{\infty}(\hat{x}; d, g(d)) ds(d) = 0$$

für $g \in T^2(\Omega)$, wobei $g(d) := h(-d)$ gesetzt wurde.

Dann ist $\tilde{\mathbf{E}}_{\infty, g}$ Fernfeld zur Lösung des Streuproblems zu einfallenden Wellen⁶ $\tilde{\mathbf{E}}_g^i$, $\tilde{\mathbf{H}}_g^i$ gemäß Lemma 6.4. Mit den Maxwellgleichungen im Außenraum und dem Rellich-Lemma folgt aus $\tilde{\mathbf{E}}_{\infty, g} = 0$ das Verschwinden von $\tilde{\mathbf{E}}_g^s, \tilde{\mathbf{H}}_g^s$ in $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$.

Nach [3, Th. 3.15] ergibt sich aus der Existenz eines nichttrivialen Tangentialfeldes g mit $\tilde{\mathbf{E}}_{\infty, g} = 0$ das Nichtverschwinden des zugehörigen elektromagnetischen Herglotz-Paares $\tilde{\mathbf{E}}_g^i, \tilde{\mathbf{H}}_g^i$. Für dieses gilt wegen $\tilde{\mathbf{E}}_g^s = \tilde{\mathbf{H}}_g^s = 0$ in $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$ und wegen der Transmissionsbedingungen (6.5 a), (6.5 b), daß auch die Randbedingungen $\varepsilon_0^{-1/2} \nu \times \tilde{\mathbf{E}}_{0, g} - \varepsilon^{-1/2} \nu \times \tilde{\mathbf{E}}_g^i = 0$ und $\mu_0^{-1/2} \nu \times \tilde{\mathbf{H}}_{0, g} - \mu^{-1/2} \nu \times \tilde{\mathbf{H}}_g^i = 0$ auf ∂D erfüllt sind. Außerdem genügen $\tilde{\mathbf{E}}_g^i, \tilde{\mathbf{H}}_g^i$ den Maxwellgleichungen in \mathbb{R}^3 , also insbesondere in D . Damit ist $g \neq 0$ in der Menge Θ enthalten. Es ist also gezeigt, daß die Nichtvollständigkeit von \mathfrak{L} die Nichttrivialität von Θ nach sich zieht.

Umgekehrt folgt aus der Existenz eines Tangentialfeldes $g \in \Theta \setminus \{0\}$ mit der Eindeutigkeit des Transmissionsproblems zu den einfallenden Wellen $\tilde{\mathbf{E}}_g^i, \tilde{\mathbf{H}}_g^i$ das Verschwinden von $\tilde{\mathbf{E}}_g^s, \tilde{\mathbf{H}}_g^s$ und damit auch von $\tilde{\mathbf{E}}_{\infty, g}$. \mathfrak{L} ist also in diesem Fall nicht vollständig.

q. e. d.

6.2 Reziprozität im zweidimensionalen Fall

Das Ergebnis für den dreidimensionalen Fall legt die Vermutung nahe, daß

$$\mathbf{e}_{\infty}(\hat{x}; d) = \mathbf{e}_{\infty}(-d; -\hat{x}), \quad \mathbf{h}_{\infty}(\hat{x}; d) = \mathbf{h}_{\infty}(-d; -\hat{x})$$

⁶Der untere Index g kennzeichnet dabei den zugrundeliegenden Herglotz-Kern.

gilt, wobei wieder das zweite Argument die Zugehörigkeit der Lösung des Streuproblems zu den einfallenden Wellen $\mathbf{e}^i(\cdot; d)$, $\mathbf{h}^i(\cdot; d)$ kennzeichne.

Ein solch allgemeines Resultat konnte hier aber nicht erzielt werden, sondern nur das Ergebnis des folgenden Satzes.

Satz 6.8 *Das elektrische Fernfeld \mathbf{e}_∞ für die Streuung einer ebenen elektromagnetischen Welle am chiralen Gebiet beim transversalmagnetischen Problem erfüllt die Reziprozitätsrelation*

$$\mathbf{e}_\infty(\hat{x}; d) = \mathbf{e}_\infty(-d; -\hat{x}) \quad (6.6)$$

und das magnetische Fernfeld \mathbf{h}_∞ für die Streuung einer ebenen elektromagnetischen Welle am chiralen Gebiet beim transversalelektrischen Problem

$$\mathbf{h}_\infty(\hat{x}; d) = \mathbf{h}_\infty(-d; -\hat{x}) \quad (6.7)$$

für alle $\hat{x}, d \in \Omega$.

Beweis Der Nachweis ist recht umfangreich, macht im wesentlichen aber nur von den Greenschen Sätzen und der Problemformulierung (5.7) Gebrauch. Der vollständige Beweis findet sich im Anhang A.1. **q. e. d.**

6.3 Fréchet-Ableitung des Fernfeldes nach dem Rand im \mathbb{R}^2

Im folgenden werden die Bezeichnungen und Resultate aus dem Anhang A.3.3 benutzt. Es seien die Einfallrichtung d und die Wellenzahl k , die die einfallenden ebenen Wellen \mathbf{a}^i , \mathbf{b}^i erklären, im weiteren als fest angenommen, so daß diese Abhängigkeit in der Notation nicht gekennzeichnet wird. Es bezeichne $z \in RP$ eine zulässige Randparametrisierung von ∂D .

Der Randwertoperator $\mathcal{R} : RP \rightarrow C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}^4)$, der das Doppelte der Randwerte⁷ der einfallenden ebenen Wellen $\mathbf{a}^i(x) = \mathbf{a}^i(x, d)$, $\mathbf{b}^i(x) = \mathbf{b}^i(x, d)$ gemäß (5.6 a) bzw. (5.6 b) auf der durch $x = z(t)$ parametrisierten Randkurve ∂D angibt, ist gegeben durch

$$(\mathcal{R}(z))(t) = 2 \begin{pmatrix} \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k} \frac{\partial}{\partial \nu(z(t))} \mathbf{a}^i(z(t)) \\ \frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k} \frac{\partial}{\partial \nu(z(t))} \mathbf{b}^i(z(t)) \\ \xi_+ \mathbf{a}^i(z(t)) + \xi_- \mathbf{b}^i(z(t)) \\ \xi_- \mathbf{a}^i(z(t)) + \xi_+ \mathbf{b}^i(z(t)) \end{pmatrix}.$$

⁷Das ist gerade die rechte Seite des entsprechenden Integralgleichungssystems (4.20) für das Streuproblem (5.7).

Weiter seien $\mathcal{P}_0(z) : (C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}))^4 \rightarrow (C^{1,\alpha}(D))^2$ der Potentialoperator entsprechend (4.15 a), (4.15 b)

$$\begin{aligned} & \left(\mathcal{P}_0(z) (\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2)^\top \right) (x) = \\ & \left(\int_0^{2\pi} \left\{ \frac{im_1}{4} H_0^1(\alpha_{\mathbf{A}} \tilde{r}_z(x, \tau)) |z'(\tau)| \varphi_1(\tau) + \frac{i\alpha_{\mathbf{A}}^2}{4k} \begin{pmatrix} z_2'(\tau) \\ -z_1'(\tau) \end{pmatrix} \cdot (x - z(\tau)) \frac{H_1^1(\alpha_{\mathbf{A}} \tilde{r}_z(x, \tau))}{\tilde{r}_z(x, \tau)} \psi_1(\tau) \right\} d\tau \right. \\ & \left. \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{im_2}{4} H_0^1(\alpha_{\mathbf{B}} \tilde{r}_z(x, \tau)) |z'(\tau)| \varphi_2(\tau) + \frac{i\alpha_{\mathbf{B}}^2}{4k} \begin{pmatrix} z_2'(\tau) \\ -z_1'(\tau) \end{pmatrix} \cdot (x - z(\tau)) \frac{H_1^1(\alpha_{\mathbf{B}} \tilde{r}_z(x, \tau))}{\tilde{r}_z(x, \tau)} \psi_2(\tau) \right\} d\tau \right) \end{aligned}$$

und

$\mathcal{P}(z) : (C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}))^4 \rightarrow (C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^2 \setminus D))^2$ der Potentialoperator gemäß (4.15 c), (4.15 d)

$$\begin{aligned} & \left(\mathcal{P}(z) (\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2)^\top \right) (x) = \\ & \left(\int_0^{2\pi} \left\{ \frac{ic_1}{4} H_0^1(k \tilde{r}_z(x, \tau)) |z'(\tau)| \varphi_1(\tau) + \frac{ik}{4} \begin{pmatrix} z_2'(\tau) \\ -z_1'(\tau) \end{pmatrix} \cdot (x - z(\tau)) \frac{H_1^1(k \tilde{r}_z(x, \tau))}{\tilde{r}_z(x, \tau)} \psi_1(\tau) \right\} d\tau \right. \\ & \left. \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{ic_2}{4} H_0^1(k \tilde{r}_z(x, \tau)) |z'(\tau)| \varphi_2(\tau) + \frac{ik}{4} \begin{pmatrix} z_2'(\tau) \\ -z_1'(\tau) \end{pmatrix} \cdot (x - z(\tau)) \frac{H_1^1(k \tilde{r}_z(x, \tau))}{\tilde{r}_z(x, \tau)} \psi_2(\tau) \right\} d\tau \right), \end{aligned}$$

die den parametrisierten Dichten $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2$ die Potentiale $(\mathbf{a}_0, \mathbf{b}_0)$ im Inneren bzw. $(\mathbf{a}^s, \mathbf{b}^s)$ im Außenraum zuordnen. Dabei bezeichnet $\tilde{r}_z(x, \tau)$ den Abstand $|x - z(\tau)|$ zwischen dem Punkt $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D$ und dem Randpunkt $z(\tau)$.

Ferner sei $\mathcal{F}(z) : (C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}))^4 \rightarrow L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$ der Fernfeldoperator entsprechend (4.34 a), (4.34 b)

$$\begin{aligned} & \left(\mathcal{F}(z) (\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2)^\top \right) (\hat{x}) \\ & = \left(\frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k}} \int_0^{2\pi} \left\{ ic_1 |z'(\tau)| \varphi_1(\tau) + k \left(\hat{x}, \begin{pmatrix} z_2'(\tau) \\ -z_1'(\tau) \end{pmatrix} \right) \psi_1(\tau) \right\} e^{-ik\hat{x} \cdot z(\tau)} d\tau \right. \\ & \left. \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k}} \int_0^{2\pi} \left\{ ic_2 |z'(\tau)| \varphi_2(\tau) + k \left(\hat{x}, \begin{pmatrix} z_2'(\tau) \\ -z_1'(\tau) \end{pmatrix} \right) \psi_2(\tau) \right\} e^{-ik\hat{x} \cdot z(\tau)} d\tau \right). \end{aligned}$$

Es gilt

$$\mathcal{F}' = (\mathcal{P}')_\infty,$$

da für das Einfach- und Doppelschichtpotential entsprechende Beziehungen gelten.

Mit den gemäß (4.21) beziehungsweise (4.22) erklärten Matrixoperatoren E und $A(z) \in L((C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}))^4, (C_{2\pi}^{0,\alpha}(\mathbb{R}, \mathbb{C}))^2 \times (C_{2\pi}^{1,\alpha}(\mathbb{R}, \mathbb{C}))^2)$, wobei für die Integraloperatoren die Randparametrisierung z verwendet wird, definiert man

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_0(z) &= \mathcal{P}_0(z) \circ (E + A(z))^{-1} \circ \mathcal{R}(z), \\ \mathfrak{B}(z) &= \mathcal{P}(z) \circ (E + A(z))^{-1} \circ \mathcal{R}(z), \\ \mathfrak{F}(z) &= \mathcal{F}(z) \circ (E + A(z))^{-1} \circ \mathcal{R}(z). \end{aligned}$$

Dann kann die Lösung des Problems beziehungsweise das Fernfeld in der Form

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \mathbf{b}_0 \end{pmatrix}(\cdot, z) = \mathfrak{P}_0(z), \quad \begin{pmatrix} \mathbf{a}^s \\ \mathbf{b}^s \end{pmatrix}(\cdot, z) = \mathfrak{P}(z), \quad \begin{pmatrix} \mathbf{a}_\infty \\ \mathbf{b}_\infty \end{pmatrix}(\cdot, z) = \mathfrak{F}(z)$$

dargestellt werden.

Seien G_0 und G Gebiete mit $\bar{G}_0 \subset D$, $\bar{G} \subset \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ und bezeichne $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = 1\}$ den Einheitskreis. Dann sind die Abbildungen $\mathfrak{P}_0 : RP_r \rightarrow C(G_0)$, $\mathfrak{P} : RP_r \rightarrow C(G)$ und $\mathfrak{F} : RP \rightarrow L^2(\Omega)$ Fréchet-differenzierbar und die Ableitungen sind nach der Ketten- und Quotientenregel durch

$$\begin{aligned} \mathfrak{P}'_0(z; h) &= \mathcal{P}'_0(z; h) \circ (E + A(z))^{-1} \circ \mathcal{R}(z) \\ &\quad - \mathcal{P}_0(z) \circ (E + A(z))^{-1} \circ A'(z; h) \circ (E + A(z))^{-1} \circ \mathcal{R}(z) \\ &\quad + \mathcal{P}_0(z) \circ (E + A(z))^{-1} \circ \mathcal{R}'(z; h), \\ \mathfrak{P}'(z; h) &= \mathcal{P}'(z; h) \circ (E + A(z))^{-1} \circ \mathcal{R}(z) \\ &\quad - \mathcal{P}(z) \circ (E + A(z))^{-1} \circ A'(z; h) \circ (E + A(z))^{-1} \circ \mathcal{R}(z) \\ &\quad + \mathcal{P}(z) \circ (E + A(z))^{-1} \circ \mathcal{R}'(z; h), \\ \mathfrak{F}'(z; h) &= \mathcal{F}'(z; h) \circ (E + A(z))^{-1} \circ \mathcal{R}(z) \\ &\quad - \mathcal{F}(z) \circ (E + A(z))^{-1} \circ A'(z; h) \circ (E + A(z))^{-1} \circ \mathcal{R}(z) \\ &\quad + \mathcal{F}(z) \circ (E + A(z))^{-1} \circ \mathcal{R}'(z; h) \end{aligned}$$

gegeben. Dabei ist die Differenzierbarkeit der einzelnen Operatoren durch die Sätze aus Abschnitt A.3.3 bzw. diejenige von \mathcal{R} durch Nachrechnen⁸ gesichert. Es gilt $\mathfrak{F}' = (\mathfrak{P}')_\infty$. Ziel soll es nun sein, die Fréchet-Ableitung des Fernfeldoperators \mathfrak{F}' durch ein geeignetes Randwertproblem zu charakterisieren.

Seien im weiteren z und h fest. Man definiert

$$\begin{aligned} v_1(x) &= (\mathcal{P}'_0(z; h) \circ (E + A(z))^{-1} \circ \mathcal{R}(z))(x), \\ v_2(x) &= -(\mathcal{P}_0(z) \circ (E + A(z))^{-1} \circ A'(z; h) \circ (E + A(z))^{-1} \circ \mathcal{R}(z))(x), \\ v_3(x) &= (\mathcal{P}_0(z) \circ (E + A(z))^{-1} \circ \mathcal{R}'(z; h))(x), \\ v(x) &= v_1(x) + v_2(x) + v_3(x) \end{aligned}$$

für $x \in D$ und

$$\begin{aligned} w_1(x) &= (\mathcal{P}'(z; h) \circ (E + A(z))^{-1} \circ \mathcal{R}(z))(x), \\ w_2(x) &= -(\mathcal{P}(z) \circ (E + A(z))^{-1} \circ A'(z; h) \circ (E + A(z))^{-1} \circ \mathcal{R}(z))(x), \\ w_3(x) &= (\mathcal{P}(z) \circ (E + A(z))^{-1} \circ \mathcal{R}'(z; h))(x), \\ w(x) &= w_1(x) + w_2(x) + w_3(x) \end{aligned}$$

⁸Siehe (6.8 a)-(6.8 d).

für $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$. Die beiden in jedem dieser Ausdrücke vorhandenen Komponenten werden mit Index a bzw. b gekennzeichnet.

Es sind dann v und w die nach dem Rand abgeleiteten inneren beziehungsweise äußeren Potentiale und die gesuchte Fréchet-Ableitung \mathfrak{F}' des Fernfeldoperators ist durch w_∞ bestimmbar. Die Aufgabe besteht jetzt also darin, die Felder v und w als Lösungen eines Randwertproblems darzustellen.

Wegen der Definition von \mathcal{P}_0 als kombiniertem Einfach- und Doppelschichtpotential folgt

$$(\Delta + \alpha_{\mathbf{A}}^2)v_{a,j} = 0, \quad (\Delta + \alpha_{\mathbf{B}}^2)v_{b,j} = 0, \quad j = 2, 3, \text{ in } D.$$

Das gleiche erhält man auch für $j = 1$, da bei der Auswertung in D , also außerhalb des Randes, die Fréchet-Ableitung mit dem Differentialoperator vertauschbar ist. Ein analoges Resultat gilt für w , so daß insgesamt die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} (\Delta + \alpha_{\mathbf{A}}^2)v_{a,j} &= 0 \text{ in } D, \\ (\Delta + \alpha_{\mathbf{B}}^2)v_{b,j} &= 0 \text{ in } D, \\ (\Delta + k^2)w_{a,j} &= 0 \text{ in } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}, \\ (\Delta + k^2)w_{b,j} &= 0 \text{ in } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D} \end{aligned}$$

für $j = 1, 2, 3$ gelten. Für w folgt auf Grund der Darstellung auch das asymptotische Verhalten

$$\frac{\partial w_{a,j}}{\partial r} - ikw_{a,j} = o\left(\frac{1}{r^{1/2}}\right), \quad \frac{\partial w_{b,j}}{\partial r} - ikw_{b,j} = o\left(\frac{1}{r^{1/2}}\right), \quad j = 1, 2, 3.$$

Damit sind die Differentialgleichungen und das asymptotische Verhalten, denen v bzw. w genügen, ermittelt. Es bleiben jetzt noch Bedingungen auf ∂D zu bestimmen.

Für v_3, w_3 folgt sofort aus der Form der Darstellung, daß sie Lösungen des Transmissionsproblems (2.9 a) - (2.11 d) mit Randwerten $\frac{1}{2}\mathcal{R}'(z; h)$ sind, also

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_{a,3}}{\partial \nu}(z(t)) - \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k} \frac{\partial w_{a,3}}{\partial \nu}(z(t)) &= \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k} \sum_{j,k=1}^2 \frac{\partial^2 \mathbf{a}^i}{\partial x_j \partial x_k}(z(t)) h_j(t) \nu_k(z(t)) \\ &+ \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k} \left(\text{grad } \mathbf{a}^i(z(t)), \frac{\partial}{\partial z} \nu(z(t); h(t)) \right), \quad (6.8 \text{ a}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_{b,3}}{\partial \nu}(z(t)) - \frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k} \frac{\partial w_{b,3}}{\partial \nu}(z(t)) &= \frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k} \sum_{j,k=1}^2 \frac{\partial^2 \mathbf{b}^i}{\partial x_j \partial x_k}(z(t)) h_j(t) \nu_k(z(t)) \\ &+ \frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k} \left(\text{grad } \mathbf{b}^i(z(t)), \frac{\partial}{\partial z} \nu(z(t); h(t)) \right), \quad (6.8 \text{ b}) \end{aligned}$$

$$(v_{a,3} - \xi_+ w_{a,3} - \xi_- w_{b,3})(z(t)) = \xi_+ \left(\text{grad } \mathbf{a}^i(z(t)), h(t) \right)$$

$$+\xi_- (\text{grad } \mathbf{b}^i(z(t)), h(t)), \quad (6.8 \text{ c})$$

$$(v_{b,3} - \xi_- w_{a,3} - \xi_+ w_{b,3})(z(t)) = \xi_- (\text{grad } a^i(z(t)), h(t)) \\ + \xi_+ (\text{grad } b^i(z(t)), h(t)). \quad (6.8 \text{ d})$$

Es bezeichne $\chi := (E + A(z))^{-1} \circ \mathcal{R}(z)$. Dann ist $A'(z; h)\chi$ gerade das Doppelte der Randwerte des Transmissionsproblems für v_2, w_2

$$\frac{\partial v_{a,2}}{\partial \nu}(z(t)) - \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k} \frac{\partial w_{a,2}}{\partial \nu}(z(t)) = -\frac{1}{2} [A'(z; h)\chi]_1(t), \quad (6.9 \text{ a})$$

$$\frac{\partial v_{b,2}}{\partial \nu}(z(t)) - \frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k} \frac{\partial w_{b,2}}{\partial \nu}(z(t)) = -\frac{1}{2} [A'(z; h)\chi]_2(t), \quad (6.9 \text{ b})$$

$$(v_{a,2} - \xi_+ w_{a,2} - \xi_- w_{b,2})(z(t)) = -\frac{1}{2} [A'(z; h)\chi]_3(t), \quad (6.9 \text{ c})$$

$$(v_{b,2} - \xi_- w_{a,2} - \xi_+ w_{b,2})(z(t)) = -\frac{1}{2} [A'(z; h)\chi]_4(t), \quad (6.9 \text{ d})$$

wobei die Indizes 1, 2, 3, 4 die jeweilige Komponente des Vektors $A'(z; h)\chi$ bezeichnen. Das negative Vorzeichen resultiert aus der Definition von v_2 und w_2 .

Für die Untersuchung der Randbedingungen für v_1 und w_1 schreibt man die Operatoren $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}$ in der Form

$$(\mathcal{P}_0(z)\chi)(x) = \left(\frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k} (\mathfrak{D}_{\alpha_{\mathbf{A}}}(z)\chi_3)(x) + m_1 (\mathfrak{E}_{\alpha_{\mathbf{A}}}(z)\chi_1)(x) \right), \quad x \in D,$$

$$(\mathcal{P}(z)\chi)(x) = \left(\begin{array}{l} (\mathfrak{D}_k(z)\chi_3)(x) + c_1 (\mathfrak{E}_k(z)\chi_1)(x) \\ (\mathfrak{D}_k(z)\chi_4)(x) + c_2 (\mathfrak{E}_k(z)\chi_2)(x) \end{array} \right), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$$

und nutzt die Sprungbeziehungen aus Satz A.9 für die Ableitungen des Einfach- und Doppelschichtpotentials aus. Dabei ist zu beachten, daß für den $C^{2,\alpha}$ -glatten Rand ∂D die Normale eine Funktion aus $C^{1,\alpha}$ ist und damit $u^i|_{\partial D} \in C^{2,\alpha}(\partial D)$, $\frac{\partial u^i}{\partial \nu}|_{\partial D} \in C^{1,\alpha}(\partial D)$ gilt. Die Abbildungseigenschaften der Integraloperatoren implizieren dann $\chi_1, \chi_2 \in C_{2\pi}^{1,\alpha}(\mathbb{R})$, $\chi_3, \chi_4 \in C_{2\pi}^{2,\alpha}(\mathbb{R})$.

Es bezeichnen vorübergehend

$$U_- = \mathfrak{E}_{\alpha_{\mathbf{A}}}(z)\chi_1, \quad V_- = \mathfrak{D}_{\alpha_{\mathbf{A}}}(z)\chi_3, \quad U_+ = \mathfrak{E}_k(z)\chi_1, \quad V_+ = \mathfrak{D}_k(z)\chi_3.$$

Mit dieser Definition gilt $\mathbf{a}_0 = \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k} V_- + m_1 U_-$, $\mathbf{a}^s = V_+ + c_1 U_+$. Mit den Sprungbeziehungen aus Satz A.9 folgt

$$\frac{\partial v_{a,1}}{\partial \nu} - \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k} \frac{\partial w_{a,1}}{\partial \nu} \\ = \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k} \frac{1}{2} (T'_{\alpha_{\mathbf{A}}}(z; h) - T'_k(z; h)) \chi_3 + \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k} \left(\text{grad}(V_+ - V_-), \frac{\partial \nu}{\partial z}(z; h) \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k} \sum_{j,k=1}^2 \frac{\partial^2 (V_+ - V_-)}{\partial x_j \partial x_k} h_j \nu_k(z) + \frac{1}{2} \left(m_1 K_{\alpha_{\mathbf{A}}}^*{}'(z; h) - \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k} c_1 K_k^*{}'(z; h) \right) \chi_1 \\
& + \left(\text{grad} \left(\frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k} c_1 U_+ - m_1 U_- \right), \frac{\partial \nu}{\partial z}(z; h) \right) + \sum_{j,k=1}^2 \frac{\partial^2 \left(\frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k} c_1 U_+ - m_1 U_- \right)}{\partial x_j \partial x_k} h_j \nu_k(z) \\
& = \frac{1}{2} [A'(z; h)\chi]_1 + \left(\text{grad} \left(\frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k} \mathbf{a}^s - \mathbf{a}_0 \right), \frac{\partial \nu}{\partial z}(z; h) \right) + \sum_{j,k=1}^2 \frac{\partial^2 \left(\frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k} \mathbf{a}^s - \mathbf{a}_0 \right)}{\partial x_j \partial x_k} h_j \nu_k(z),
\end{aligned} \tag{6.10 a}$$

und analog

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial v_{b,1}}{\partial \nu} - \frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k} \frac{\partial w_{b,1}}{\partial \nu} \\
& = \frac{1}{2} [A'(z; h)\chi]_2 + \left(\text{grad} \left(\frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k} \mathbf{b}^s - \mathbf{b}_0 \right), \frac{\partial \nu}{\partial z}(z; h) \right) + \sum_{j,k=1}^2 \frac{\partial^2 \left(\frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k} \mathbf{b}^s - \mathbf{b}_0 \right)}{\partial x_j \partial x_k} h_j \nu_k(z).
\end{aligned} \tag{6.10 b}$$

Es bezeichnen weiter vorübergehend

$$\hat{U}_+ = \mathfrak{E}_k(z)\chi_2, \quad \hat{V}_+ = \mathfrak{D}_k(z)\chi_4,$$

hiermit gilt $\mathbf{b}^s = \hat{V}_+ + c_2 \hat{U}_+$. Man erhält wieder mit den Sprungbeziehungen

$$\begin{aligned}
& v_{a,1} - \xi_+ w_{a,1} - \xi_- w_{b,1} \\
& = \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k} \frac{1}{2} K_{\alpha_{\mathbf{A}}}^*{}'(z; h)\chi_3 - \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k} (\text{grad } V_-, h) + m_1 \frac{1}{2} S_{\alpha_{\mathbf{A}}}^*{}'(z; h)\chi_1 - m_1 (\text{grad } U_-, h) \\
& \quad - \xi_+ \frac{1}{2} K_k^*{}'(z; h)\chi_3 + \xi_+ (\text{grad } V_+, h) - \xi_+ c_1 \frac{1}{2} S_k^*{}'(z; h)\chi_1 + \xi_+ c_1 (\text{grad } U_+, h) \\
& \quad - \xi_- \frac{1}{2} K_k^*{}'(z; h)\chi_4 + \xi_- (\text{grad } \hat{V}_+, h) - \xi_- c_2 \frac{1}{2} S_k^*{}'(z; h)\chi_2 + \xi_- c_2 (\text{grad } \hat{U}_+, h) \\
& = \frac{1}{2} [A'(z; h)\chi]_3 + (\text{grad} (\xi_+ \mathbf{a}^s + \xi_- \mathbf{b}^s - \mathbf{a}_0), h)
\end{aligned} \tag{6.10 c}$$

und analog

$$v_{b,1} - \xi_- w_{a,1} - \xi_+ w_{b,1} = \frac{1}{2} [A'(z; h)\chi]_4 + (\text{grad} (\xi_- \mathbf{a}^s + \xi_+ \mathbf{b}^s - \mathbf{b}_0), h). \tag{6.10 d}$$

Benutzt man $\mathbf{a} = \mathbf{a}^i + \mathbf{a}^s$, $\mathbf{b} = \mathbf{b}^i + \mathbf{b}^s$ und die Identitäten

$$\begin{aligned}
\text{grad} (\xi_+ \mathbf{a} + \xi_- \mathbf{b} - \mathbf{a}_0) &= \left(\xi_+ \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \nu} + \xi_- \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \nu} - \frac{\partial \mathbf{a}_0}{\partial \nu} \right) \nu, \\
\text{grad} (\xi_- \mathbf{a} + \xi_+ \mathbf{b} - \mathbf{b}_0) &= \left(\xi_- \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \nu} + \xi_+ \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \nu} - \frac{\partial \mathbf{b}_0}{\partial \nu} \right) \nu,
\end{aligned}$$

die aus

$$\xi_+ \mathbf{a} + \xi_- \mathbf{b} - \mathbf{a}_0 = 0, \quad \xi_- \mathbf{a} + \xi_+ \mathbf{b} - \mathbf{b}_0 = 0 \quad \text{auf } \partial D$$

folgen, so führt Addition der jeweils drei Beziehungen (6.8 a) + (6.9 a) + (6.10 a), ..., (6.8 d) + (6.9 d) + (6.10 d) auf dem Rand für die drei Teilprobleme auf den folgenden Satz.

Satz 6.9 Die Fréchet-Ableitung $\mathfrak{F}'(z; h)$ des Fernfeldoperators bei vorgegebenen einfallenden Wellen $\mathbf{a}^i, \mathbf{b}^i$ ist gegeben durch das Fernfeld w_∞ der Lösung des Transmissionsproblems

$$\begin{aligned} (\Delta + \alpha_{\mathbf{A}}^2)v_a &= (\Delta + \alpha_{\mathbf{B}}^2)v_b = 0 \quad \text{in } D, \\ (\Delta + k^2)w_a &= (\Delta + k^2)w_b = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial w_a}{\partial r} - ikw_a = o\left(\frac{1}{r^{1/2}}\right), \quad \frac{\partial w_b}{\partial r} - ikw_b = o\left(\frac{1}{r^{1/2}}\right),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_a}{\partial \nu}(z(t)) - \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k} \frac{\partial w_a}{\partial \nu}(z(t)) &= \left(\text{grad} \left(\frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k} \mathbf{a} - \mathbf{a}_0 \right) (z(t)), \frac{\partial \nu}{\partial z}(z(t); h(t)) \right) \\ &+ \sum_{j,k=1}^2 \frac{\partial^2 (\frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k} \mathbf{a} - \mathbf{a}_0)}{\partial x_j \partial x_k} (z(t)) h_j(t) \nu_k(z(t)), \quad (6.11 \text{ a}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_b}{\partial \nu}(z(t)) - \frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k} \frac{\partial w_b}{\partial \nu}(z(t)) &= \left(\text{grad} \left(\frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k} \mathbf{b} - \mathbf{b}_0 \right) (z(t)), \frac{\partial \nu}{\partial z}(z(t); h(t)) \right) \\ &+ \sum_{j,k=1}^2 \frac{\partial^2 (\frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k} \mathbf{b} - \mathbf{b}_0)}{\partial x_j \partial x_k} (z(t)) h_j(t) \nu_k(z(t)), \quad (6.11 \text{ b}) \end{aligned}$$

$$(v_a - \xi_+ w_a - \xi_- w_b)(z(t)) = (\nu(z(t)), h(t)) \left(\xi_+ \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \nu} + \xi_- \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \nu} - \frac{\partial \mathbf{a}_0}{\partial \nu} \right) (z(t)), \quad (6.12 \text{ a})$$

$$(v_b - \xi_- w_a - \xi_+ w_b)(z(t)) = (\nu(z(t)), h(t)) \left(\xi_- \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \nu} + \xi_+ \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \nu} - \frac{\partial \mathbf{b}_0}{\partial \nu} \right) (z(t)). \quad (6.12 \text{ b})$$

Lemma 6.10 Die Randbedingungen (6.11 a), (6.11 b) für die Neumanndaten können auch in einer Form gegeben werden, in der nur Ableitungen nach dem Parameter des Randes auftreten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_a}{\partial \nu}(z) - \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k} \frac{\partial w_a}{\partial \nu}(z) &= -\frac{1}{|z'|} \left(\frac{(\nu(z), h)}{|z'|} \left(\frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k} \mathbf{a} \circ z - \mathbf{a}_0 \circ z \right)' \right)' \\ &- (\nu(z), h) (\alpha_{\mathbf{A}} k \mathbf{a} \circ z - \alpha_{\mathbf{A}}^2 \mathbf{a}_0 \circ z), \quad (6.13 \text{ a}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_b}{\partial \nu}(z) - \frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k} \frac{\partial w_b}{\partial \nu}(z) &= -\frac{1}{|z'|} \left(\frac{(\nu(z), h)}{|z'|} \left(\frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k} \mathbf{b} \circ z - \mathbf{b}_0 \circ z \right)' \right)' \\ &- (\nu(z), h) (\alpha_{\mathbf{B}} k \mathbf{b} \circ z - \alpha_{\mathbf{B}}^2 \mathbf{b}_0 \circ z). \quad (6.13 \text{ b}) \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $(u \circ z)'$ die Ableitung der Abbildung $t \mapsto u(z(t))$ nach t .

Beweis Der Beweis verläuft im wesentlichen wie in [10, Lemma 4.5], soll aber hier in der für das Transmissionsproblem passenden Form kurz ausgeführt werden.

In einer (hinreichend kleinen) Umgebung des Randes führt man mittels

$$x(t, r) := z(t) + rn(t), \quad t \in [0, 2\pi], \quad r \in [-r_0, r_0],$$

ein lokales Koordinatensystem ein, wobei $n(t) := \nu(z(t)) = \frac{1}{|z'(t)|} \begin{pmatrix} z_2'(t) \\ -z_1'(t) \end{pmatrix}$ die äußere Normale bezeichnet. Für die lokalen Basisvektoren $x_{,t} = \frac{\partial x}{\partial t}$, $x_{,r} = \frac{\partial x}{\partial r}$ gilt

$$x_{,t} = z'(t) + rn'(t), \quad x_{,r} = n(t).$$

Für den Maßtensor $(g_{ij}) = (x_{,t} \cdot x_{,r})$ erhält man

$$\begin{aligned} g_{11}(t, r) &= |z'(t) + rn'(t)|^2, \\ g_{12}(t, r) &= g_{21}(t, r) = z'(t) \cdot n(t) + rn'(t) \cdot n(t) \\ &= \frac{1}{|z'(t)|} \begin{pmatrix} z_1'(t) \\ z_2'(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_2'(t) \\ -z_1'(t) \end{pmatrix} + \frac{r}{2}(n(t) \cdot n(t))' = 0, \\ g_{22}(t, r) &= 1. \end{aligned}$$

Es bezeichnen (g^{ij}) die inverse Matrix zu (g_{ij}) und $g := \det(g_{ij})$. Es gilt also $g = g_{11}$, $g^{11} = 1/g$, $g^{12} = g^{21} = 0$, $g^{22} = 1$.

Der Gradient und der Laplace-Operator berechnen sich für eine Funktion v , wobei $\tilde{v}(t, r) := v(x(t, r))$ gesetzt wird, in den neuen Koordinaten gemäß

$$(\text{grad } v) \circ z = g^{11} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} x_{,t} + g^{22} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} x_{,r} = \frac{1}{g} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} x_{,t} + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} x_{,r}, \quad (6.14)$$

$$\begin{aligned} (\Delta v) \circ z &= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\sqrt{g} g^{11} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} \right) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial r} \left(\sqrt{g} g^{22} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r} \right) \\ &= \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial r^2} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial(1/\sqrt{g})}{\partial t} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial r} \frac{\partial \tilde{v}}{\partial r}. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Es sei nun $u := \frac{\alpha}{k} \mathbf{a} - \mathbf{a}_0$, $\tilde{u} = u \circ x$. Wegen der Transmissionsbedingung⁹ gilt

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial r}(t, 0) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(x(t, 0)) = 0, \quad t \in [0, 2\pi] \quad (6.16)$$

und damit

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t \partial r}(t, 0) = 0, \quad t \in [0, 2\pi]. \quad (6.17)$$

⁹Vergleiche (5.7).

Mit (6.15) und der Helmholtz-Gleichung $(\Delta + k^2)\mathbf{a} = 0$ folgt

$$0 = \left(k^2 \tilde{\mathbf{a}} + \frac{1}{|z'(t)|^2} \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{a}}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{a}}}{\partial r^2} + \frac{1}{|z'(t)|} \left(\frac{1}{|z'(t)|} \right)' \frac{\partial \tilde{\mathbf{a}}}{\partial t} + \frac{z'(t) \cdot n'(t)}{|z'(t)|} \frac{\partial \tilde{\mathbf{a}}}{\partial r} \right) (t, 0)$$

und analog wegen $(\Delta + \alpha_{\mathbf{A}}^2)\mathbf{a}_0 = 0$

$$0 = \left(\alpha_{\mathbf{A}}^2 \tilde{\mathbf{a}}_0 + \frac{1}{|z'(t)|^2} \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{a}}_0}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\mathbf{a}}_0}{\partial r^2} + \frac{1}{|z'(t)|} \left(\frac{1}{|z'(t)|} \right)' \frac{\partial \tilde{\mathbf{a}}_0}{\partial t} + \frac{z'(t) \cdot n'(t)}{|z'(t)|} \frac{\partial \tilde{\mathbf{a}}_0}{\partial r} \right) (t, 0).$$

Zusammengefaßt gilt nach Multiplikation der ersten Gleichung mit $\frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k}$ und Subtraktion der zweiten unter Verwendung von (6.16)

$$0 = \left((\alpha_{\mathbf{A}} k \tilde{\mathbf{a}} - \alpha_{\mathbf{A}}^2 \tilde{\mathbf{a}}_0) + \frac{1}{|z'(t)|^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial r^2} + \frac{1}{|z'(t)|} \left(\frac{1}{|z'(t)|} \right)' \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} \right) (t, 0). \quad (6.18)$$

Für den ersten Summanden in (6.11 a) gilt nun

$$\begin{aligned} & \left(\text{grad} \left(\frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k} \mathbf{a} - \mathbf{a}_0 \right), \frac{\partial \nu}{\partial z}(z; h) \right) \\ &= \left(\frac{1}{g} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} x_{,t} + \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} x_{,r} \right) \cdot \left(-\frac{1}{|z'|} \begin{pmatrix} h'_2 \\ -h'_1 \end{pmatrix} - \frac{z' \cdot h'}{|z'|^3} \begin{pmatrix} z'_2 \\ -z'_1 \end{pmatrix} \right) \Big|_{r=0} \\ &= -\frac{1}{|z'|^3} (z'_1 h'_2 - z'_2 h'_1) \frac{\partial \tilde{u}(\cdot, 0)}{\partial t} \\ &= \frac{(n, h')}{|z'|^2} \frac{\partial \tilde{u}(\cdot, 0)}{\partial t} \end{aligned}$$

und für den zweiten

$$\begin{aligned} & \sum_{j,k=1}^2 h_j \nu_k \frac{\partial^2 (\frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k} \mathbf{a} - \mathbf{a}_0)}{\partial x_j \partial x_k} (x(\cdot, 0)) \\ &= \sum_{j=1}^2 h_j \nu \cdot \left(\text{grad}_x \frac{\partial u}{\partial x_j} (x(\cdot, 0)) \right) \\ &= \sum_{j=1}^2 h_j \left(\underbrace{(n, x_{,t})}_{=0} \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \circ x \right) + \underbrace{(n, x_{,r})}_{=1} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \circ x \right) \right) \Big|_{r=0} \\ &= \sum_{j=1}^2 h_j \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{g} (x_{,t}, e_j) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + (x_{,r}, e_j) \frac{\partial \tilde{u}}{\partial r} \right) \Big|_{r=0} \\ &= \sum_{j=1}^2 h_j \left(\frac{\partial (x_{,t}/g)}{\partial r} \cdot e_j \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} + n_j \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial r^2} \right) \Big|_{r=0} \\ &= \frac{\partial (x_{,t}/g)}{\partial r} \Big|_{r=0} \cdot h \frac{\partial \tilde{u}(\cdot, 0)}{\partial t} + (n, h) \frac{\partial^2 \tilde{u}(\cdot, 0)}{\partial r^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{(n', h)}{|z'|^2} \frac{\partial \tilde{u}(\cdot, 0)}{\partial t} - (n, h) \left(\frac{1}{|z'(t)|^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}(\cdot, 0)}{\partial t^2} + \frac{1}{|z'(t)|} \left(\frac{1}{|z'(t)|} \right)' \frac{\partial \tilde{u}(\cdot, 0)}{\partial t} \right) \\
&\quad - (n, h) (\alpha_A k \tilde{\mathbf{a}}(\cdot, 0) - \alpha_A^2 \tilde{\mathbf{a}}_0(\cdot, 0)).
\end{aligned}$$

Dabei wurde in der letzten Zeile (6.18) und die Beziehung

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial(x, t/g)}{\partial r} \right|_{r=0} \cdot h &= \frac{(n', h)}{|z'|^2} - 2 \frac{(n', z')(z', h)}{|z'|^4} \\
&= \frac{(n', h)}{|z'|^2} - \frac{2}{|z'|^2} \underbrace{((n', z'/|z'|)(z'/|z'|, h) + \overbrace{(n', n)}^{=0}(n, h))}_{=(n', h)} = -\frac{(n', h)}{|z'|^2}
\end{aligned}$$

benutzt. Zusammensetzen der beiden Ausdrücke und Anwendung der Produktregel führen dann auf die Darstellung (6.13 a). Die Beziehung (6.13 b) wird durch eine analoge Betrachtung nachgewiesen. **q. e. d.**

Korollar 6.11 *In Kurzform gilt mit dem in (2.13) definierten Operator*

$$\mathfrak{F}'(z; h) = w_\infty, \quad (v, w)^\top = \mathcal{L}^B \mathcal{U} \quad (6.19)$$

mit

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_1 &= -\frac{1}{|z'|} \left(\frac{(\nu(z), h)}{|z'|} \left(\left(\left(\frac{\alpha_A}{k} \xi_+ - 1 \right) \mathbf{a}_0 - \frac{\alpha_A}{k} \xi_- \mathbf{b}_0 \right) \circ z \right)' \right)' \\
&\quad - \alpha_A (\nu(z), h) \left((k \xi_+ - \alpha_A) \mathbf{a}_0 - k \xi_- \mathbf{b}_0 \right) \circ z, \quad (6.20 \text{ a})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{U}_2 &= -\frac{1}{|z'|} \left(\frac{(\nu(z), h)}{|z'|} \left(\left(\left(\frac{\alpha_B}{k} \xi_+ - 1 \right) \mathbf{b}_0 - \frac{\alpha_B}{k} \xi_- \mathbf{a}_0 \right) \circ z \right)' \right)' \\
&\quad - \alpha_B (\nu(z), h) \left((k \xi_+ - \alpha_B) \mathbf{b}_0 - k \xi_- \mathbf{a}_0 \right) \circ z, \quad (6.20 \text{ b})
\end{aligned}$$

$$\mathcal{U}_3 = (\nu(z), h) \left(\left(\xi_+ \frac{k}{\alpha_A} - 1 \right) \frac{\partial \mathbf{a}_0}{\partial \nu} + \xi_- \frac{k}{\alpha_B} \frac{\partial \mathbf{b}_0}{\partial \nu} \right) (z), \quad (6.20 \text{ c})$$

$$\mathcal{U}_4 = (\nu(z), h) \left(\left(\xi_+ \frac{k}{\alpha_B} - 1 \right) \frac{\partial \mathbf{b}_0}{\partial \nu} + \xi_- \frac{k}{\alpha_A} \frac{\partial \mathbf{a}_0}{\partial \nu} \right) (z). \quad (6.20 \text{ d})$$

Beweis Diese Darstellung folgt sofort aus

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \nu} = \frac{k}{\alpha_A} \frac{\partial \mathbf{a}_0}{\partial \nu}, \quad \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \nu} = \frac{k}{\alpha_B} \frac{\partial \mathbf{b}_0}{\partial \nu}, \quad \mathbf{a} = \xi_+ \mathbf{a}_0 - \xi_- \mathbf{b}_0, \quad \mathbf{b} = \xi_+ \mathbf{b}_0 - \xi_- \mathbf{a}_0$$

und (6.12 a) - (6.13 b). **q. e. d.**

Die zur Berechnung von \mathcal{U} benötigten Randwerte können aus (4.15 a), (4.15 b) mittels der Sprungbeziehungen gemäß

$$2\mathbf{a}_0 = \frac{\alpha_A}{k} (K_{\alpha_A} - I) \psi_1 + m_1 S_{\alpha_A} \varphi_1, \quad (6.21 \text{ a})$$

$$2\mathbf{b}_0 = \frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k}(K_{\alpha_{\mathbf{B}}} - I)\psi_2 + m_2 S_{\alpha_{\mathbf{A}}}\varphi_2, \quad (6.21 \text{ b})$$

$$2\frac{\partial \mathbf{a}_0}{\partial \nu} = \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k}T_{\alpha_{\mathbf{A}}}\psi_1 + m_1(K_{\alpha_{\mathbf{A}}}^* + I)\varphi_1, \quad (6.21 \text{ c})$$

$$2\frac{\partial \mathbf{b}_0}{\partial \nu} = \frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k}T_{\alpha_{\mathbf{B}}}\psi_2 + m_2(K_{\alpha_{\mathbf{B}}}^* + I)\varphi_2 \quad (6.21 \text{ d})$$

aus der Lösung des Integralgleichungssystems (4.20) für das direkte Streuproblem (5.7) ermittelt werden. Auf technische Details zur numerischen Bestimmung der Fréchet-Ableitung und dafür benötigter Hilfsgrößen wird im Abschnitt 9.3 näher eingegangen.

7 Numerische Behandlung für das zweidimensionale Problem

Die numerische Behandlung der zweidimensionalen direkten Aufgabe soll für das durch die Bohrensche Zerlegung transformierte Streuproblem (5.7) durchgeführt werden. Das heißt, zu gegebener Parametrisierung des Randes und vorgegebener Einfallrichtung d , die die Randbedingungen festlegt, soll sowohl für das transversalmagnetische als auch das transversalelektrische Problem das Fernfeld der zugehörigen Streufelder berechnet werden.

7.1 Parametrisierung der Integraloperatoren

Für die numerische Lösung sind die Parametrisierungen für die Integraloperatoren S, K, K^*, \tilde{T} zu verschiedenen Wellenzahlen $(k, \alpha_{\mathbf{A}}, \alpha_{\mathbf{B}})$ zu bestimmen. Dabei bezeichnet

$$\begin{aligned} (\tilde{T}_\kappa \varphi)(x) &:= (T_\kappa \varphi)(x) - (T_0 \varphi)(x) \\ &= \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \left[\frac{i}{2} H_0^1(\kappa|x-y|) + \frac{1}{\pi} \ln(|x-y|) \right] \varphi(y) \, ds(y) \end{aligned} \quad (7.1)$$

für $x \in \partial D$ den Differenzoperator von T_κ und T_0 mit schwach singulärem Kern, so daß also $T_{\alpha_{\mathbf{A}}} - T_k = \tilde{T}_{\alpha_{\mathbf{A}}} - \tilde{T}_k$, $T_{\alpha_{\mathbf{B}}} - T_k = \tilde{T}_{\alpha_{\mathbf{B}}} - \tilde{T}_k$ gilt.

Für die Hankelfunktionen erster Art der n -ten Ordnung gilt

$$H_n^1(z) = J_n(z) + iY_n(z), \quad n \in \mathbb{N}_0, z \in \mathbb{C},$$

wobei J_n und Y_n die Bessel- bzw. Neumannfunktionen bezeichnen. Für die Neumannfunktionen zu $n = 0, 1$ gilt

$$Y_0(z) = \frac{2}{\pi} \left(C_E + \ln \frac{z}{2} \right) J_0(z) - \frac{4}{\pi} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j} J_{2j}(z),$$

$$Y_1(z) = -\frac{1}{\pi}(z/2)^{-1}J_0(z) + \frac{2}{\pi}\left(\ln\frac{z}{2} + C_E - 1\right)J_1(z) - \frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^j(2j+1)}{j(j+1)}J_{2j+1}(z),$$

diese tragen also die logarithmische Singularität der Hankelfunktionen. Hierbei bezeichnet $C_E = 0,577215\dots$ die Eulersche Zahl.

Der Rand ∂D des Gebietes D sei durch

$$z(t) = (z_1(t), z_2(t)), \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

in mathematisch positiver Orientierung parametrisiert, wobei $[z'_1(t)]^2 + [z'_2(t)]^2 > 0$ für alle t gelten soll. Zur Abkürzung wird

$$r(t, \tau) := ([z_1(t) - z_1(\tau)]^2 + [z_2(t) - z_2(\tau)]^2)^{1/2}$$

gesetzt. Es ergibt sich mit

$$\frac{ds(z(\tau))}{d\tau} = |z'(\tau)|, \quad \nu(z(\tau)) = \frac{1}{|z'(\tau)|} \begin{pmatrix} z'_2(\tau) \\ -z'_1(\tau) \end{pmatrix}$$

für die gemäß (4.16) - (4.18), (7.1) erklärten Integraloperatoren in der Parameterdarstellung¹

$$S_k \varphi(t) = \int_0^{2\pi} \varphi(\tau) M_k(t, \tau) d\tau, \quad (7.2 \text{ a})$$

$$K_k \varphi(t) = \int_0^{2\pi} \varphi(\tau) L_k(t, \tau) d\tau, \quad (7.2 \text{ b})$$

$$K_k^* \varphi(t) = \int_0^{2\pi} \varphi(\tau) L_k^*(t, \tau) d\tau, \quad (7.2 \text{ c})$$

$$\tilde{T}_k \varphi(t) = \int_0^{2\pi} \varphi(\tau) N_k(t, \tau) d\tau \quad (7.2 \text{ d})$$

mit den Kernen²

$$M_k(t, \tau) = \frac{i}{2} H_0^1(kr(t, \tau)|z'(\tau)|), \quad (7.3 \text{ a})$$

$$L_k(t, \tau) = \frac{ik}{2} \{z'_2(\tau)[z_1(t) - z_1(\tau)] - z'_1(\tau)[z_2(t) - z_2(\tau)]\} \frac{H_1^1(kr(t, \tau))}{r(t, \tau)}, \quad (7.3 \text{ b})$$

$$\begin{aligned} L_k^*(t, \tau) &= -\frac{ik}{2} \{z'_2(t)[z_1(t) - z_1(\tau)] - z'_1(t)[z_2(t) - z_2(\tau)]\} \frac{|z'(\tau)|}{|z'(t)|} \frac{H_1^1(kr(t, \tau))}{r(t, \tau)} \\ &= \frac{|z'(\tau)|}{|z'(t)|} L_k(\tau, t), \end{aligned} \quad (7.3 \text{ c})$$

¹Als vereinfachte Schreibweise wird dabei $\varphi(t) = \varphi(z(t))$ verwendet.

²Vergleiche [3, 3.5] und für \tilde{T}_k [13, S.53f] oder [33, S.29].

$$\begin{aligned}
N_k(t, \tau) &= \{z'_2(t)[z_1(\tau) - z_1(t)] - z'_1(t)[z_2(\tau) - z_2(t)]\} \\
&\quad \times \{z'_2(\tau)[z_1(\tau) - z_1(t)] - z'_1(\tau)[z_2(\tau) - z_2(t)]\} \\
&\quad \times \frac{1}{|z'(t)||r(t, \tau)|^4} \left(\frac{ik^2}{2} H_0^1(kr(t, \tau))[r(t, \tau)]^2 - ikH_1^1(kr(t, \tau))r(t, \tau) + \frac{2}{\pi} \right) \\
&\quad + \frac{z'_1(t)z'_1(\tau) + z'_2(t)z'_2(\tau)}{|z'(t)||r(t, \tau)|^2} \left(\frac{ik}{2} H_1^1(kr(t, \tau))r(t, \tau) - \frac{1}{\pi} \right). \tag{7.3 d}
\end{aligned}$$

Es sollen nun die logarithmischen Singularitäten abgespalten werden. Man benutzt hierfür $H_0^1(z) = \frac{2i}{\pi} \ln(z/2)J_0(z) + \dots$, $H_1^1(z) = \frac{2i}{\pi} \ln(z/2)J_1(z) + \dots$ und $\ln(z/2) = \ln\left(\frac{kr(t, \tau)}{4|\sin((t-\tau)/2)|}\right) + \frac{1}{2} \ln\left(4 \sin^2 \frac{t-\tau}{2}\right)$ für $z = kr(t, \tau)$, wobei in dem ersten Summanden die Nullstelle von $r(.,.)$ bei $t = \tau$ kompensiert wird und die 2π -Periodizität dieser Summe gesichert ist. Dies führt auf die folgende Zerlegung

$$M_k(t, \tau) = M_k^1(t, \tau) \ln\left(4 \sin^2 \frac{t-\tau}{2}\right) + M_k^2(t, \tau), \tag{7.4 a}$$

$$L_k(t, \tau) = L_k^1(t, \tau) \ln\left(4 \sin^2 \frac{t-\tau}{2}\right) + L_k^2(t, \tau), \tag{7.4 b}$$

$$L_k^*(t, \tau) = L_k^{*1}(t, \tau) \ln\left(4 \sin^2 \frac{t-\tau}{2}\right) + L_k^{*2}(t, \tau), \tag{7.4 c}$$

$$N_k(t, \tau) = N_k^1(t, \tau) \ln\left(4 \sin^2 \frac{t-\tau}{2}\right) + N_k^2(t, \tau) \tag{7.4 d}$$

mit

$$M_k^1(t, \tau) = -\frac{1}{2\pi} J_0(kr(t, \tau))|z'(\tau)|, \tag{7.5 a}$$

$$M_k^2(t, \tau) = M_k(t, \tau) - M_k^1(t, \tau) \ln\left(4 \sin^2 \frac{t-\tau}{2}\right), \tag{7.5 b}$$

$$L_k^1(t, \tau) = -\frac{k}{2\pi} \{z'_2(\tau)[z_1(t) - z_1(\tau)] - z'_1(\tau)[z_2(t) - z_2(\tau)]\} \frac{J_1(kr(t, \tau))}{r(t, \tau)}, \tag{7.5 c}$$

$$L_k^2(t, \tau) = L_k(t, \tau) - L_k^1(t, \tau) \ln\left(4 \sin^2 \frac{t-\tau}{2}\right), \tag{7.5 d}$$

$$L_k^{*1}(t, \tau) = \frac{|z'(\tau)|}{|z'(t)|} L_k^1(\tau, t), \tag{7.5 e}$$

$$L_k^{*2}(t, \tau) = L_k^*(t, \tau) - L_k^{*1}(t, \tau) \ln\left(4 \sin^2 \frac{t-\tau}{2}\right) = \frac{|z'(\tau)|}{|z'(t)|} L_k^2(\tau, t), \tag{7.5 f}$$

$$\begin{aligned}
N_k^1(t, \tau) &= \frac{z'_2(t)[z_1(\tau) - z_1(t)] - z'_1(t)[z_2(\tau) - z_2(t)]}{[r(t, \tau)]^2} \\
&\quad \times \frac{z'_2(\tau)[z_1(\tau) - z_1(t)] - z'_1(\tau)[z_2(\tau) - z_2(t)]}{[r(t, \tau)]^2} \\
&\quad \times \frac{1}{|z'(t)|} \left(\frac{-k^2}{2\pi} J_0(kr(t, \tau))[r(t, \tau)]^2 + \frac{k}{\pi} J_1(kr(t, \tau))[r(t, \tau)] \right)
\end{aligned}$$

$$-\frac{k}{2\pi} \frac{z'_1(t)z'_1(\tau) + z'_2(t)z'_2(\tau)}{|z'(t)||r(t, \tau)|} J_1(kr(t, \tau)), \quad (7.5 \text{ g})$$

$$N_k^2(t, \tau) = N_k(t, \tau) - N_k^1(t, \tau) \ln \left(4 \sin^2 \frac{t - \tau}{2} \right) \quad (7.5 \text{ h})$$

für $t \neq \tau$. Bei analytischer Randparametrisierung sind die Funktionen $M_k^1, M_k^2, L_k^1, L_k^2, L_k^{*1}, L_k^{*2}, N_k^1, N_k^2$ analytisch und für die Diagonalelemente gilt

$$M_k^1(t, t) = -\frac{1}{2\pi} |z'(t)|, \quad (7.6 \text{ a})$$

$$M_k^2(t, t) = |z'(t)| \left\{ \frac{i}{2} - \frac{C_E}{\pi} - \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{k^2}{4} |z'(t)|^2 \right) \right\}, \quad (7.6 \text{ b})$$

$$L_k^1(t, t) = 0, \quad (7.6 \text{ c})$$

$$L_k^2(t, t) = -\frac{1}{2\pi} \frac{z'_1(t)z''_2(t) - z'_2(t)z''_1(t)}{|z'(t)|^2}, \quad (7.6 \text{ d})$$

$$L_k^{*1}(t, t) = 0, \quad (7.6 \text{ e})$$

$$L_k^{*2}(t, t) = -L_k^2(t, t) \quad (7.6 \text{ f})$$

$$N_k^1(t, t) = -\frac{k^2}{4\pi} |z'(t)|, \quad (7.6 \text{ g})$$

$$N_k^2(t, t) = \frac{k^2}{2} \left\{ \frac{i}{2} - \frac{C_E}{\pi} - \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{k^2}{4} |z'(t)|^2 \right) + \frac{1}{2\pi} \right\} |z'(t)|. \quad (7.6 \text{ h})$$

Die Integralgleichung (4.20) läßt sich nun in der Form

$$(E + A)\chi(t) = U(t) \quad (7.7)$$

mit

$$\chi(t) = \begin{pmatrix} \varphi_1(z(t)) \\ \varphi_2(z(t)) \\ \psi_1(z(t)) \\ \psi_2(z(t)) \end{pmatrix}, \quad U(t) = 2 \begin{pmatrix} N_{\mathbf{a}}(z(t)) \\ N_{\mathbf{b}}(z(t)) \\ D_{\mathbf{a}}(z(t)) \\ D_{\mathbf{b}}(z(t)) \end{pmatrix} \quad (7.8)$$

schreiben, wobei der Integraloperator A dargestellt werden kann als

$$A\chi(t) = \int_0^{2\pi} \mathcal{K}(t, \tau) \chi(\tau) d\tau, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

mit einer Zerlegung

$$\mathcal{K}(t, \tau) = \mathcal{K}^1(t, \tau) \ln \left(4 \sin^2 \frac{t - \tau}{2} \right) + \mathcal{K}^2(t, \tau),$$

wo $\mathcal{K}^1(., .)$ und $\mathcal{K}^2(., .)$ analytisch auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sind, falls dies für die Parametrisierung z zutrifft.

7.2 Nyström-Methode

Für die Diskretisierung des Problems soll die Nyström-Methode angewandt werden, die auf einer direkten Approximation der Integrale durch Quadraturformeln basiert. Dazu werden äquidistante Stützstellen $t_j = \pi j/n$, $j = 0, \dots, 2n - 1$ gewählt und die Quadraturformeln

$$\int_0^{2\pi} \ln \left(4 \sin^2 \frac{t - \tau}{2} \right) f(\tau) d\tau \approx \sum_{j=0}^{2n-1} R_j^{(n)}(t) f(t_j), \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad (7.9)$$

mit Gewichten³

$$R_j^{(n)}(t) := -\frac{2\pi}{n} \sum_{l=1}^{n-1} \frac{1}{l} \cos(l(t - t_j)) - \frac{\pi}{n^2} \cos(n(t - t_j)), \quad j = 0, \dots, 2n - 1 \quad (7.10)$$

und

$$\int_0^{2\pi} f(\tau) d\tau \approx \frac{\pi}{n} \sum_{j=0}^{2n-1} f(t_j). \quad (7.11)$$

benutzt, die man durch trigonometrische Interpolation und anschließende exakte Integration erhält. Bei (7.11) handelt es sich um die Trapezregel.

Die Integralgleichung (7.7) wird ersetzt durch die approximative Gleichung

$$E\chi^{(n)}(t) + \sum_{j=0}^{2n-1} \left\{ R_j^{(n)}(t) \mathcal{K}^1(t, t_j) + \frac{\pi}{n} \mathcal{K}^2(t, t_j) \right\} \chi_j^{(n)}(t_j) = U(t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad (7.12)$$

wobei $\chi^{(n)}$ die gesuchte Näherung an die wahre Lösung χ ist. Mit $\chi_i^{(n)} := \chi^{(n)}(t_i)$, $i = 0, \dots, 2n - 1$, und der Abkürzung $R_{|i-j|}^{(n)} := R_j^{(n)}(t_i)$ führt dies auf das lineare Gleichungssystem⁴

$$E\chi_i^{(n)} + \sum_{j=0}^{2n-1} \left\{ R_{|i-j|}^{(n)} \mathcal{K}^1(t_i, t_j) + \frac{\pi}{n} \mathcal{K}^2(t_i, t_j) \right\} \chi_j^{(n)} = U(t_i), \quad i = 0, \dots, 2n - 1. \quad (7.13)$$

Die auftretenden Gewichte lassen sich dabei gemäß

$$R_l^{(n)} = R_l^{(n)}(0) = -\frac{2\pi}{n} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m} \cos \frac{ml\pi}{n} - \frac{(-1)^l \pi}{n^2}, \quad j = 0, \dots, 2n - 1$$

berechnen.

³Vergleiche etwa [28, (3.31)-(3.35)].

⁴Man beachte, daß hier $\chi_i^{(n)}$ aus vier Komponenten $\chi_{i;k}^{(n)}$, $k = 1, 2, 3, 4$ besteht, das Gleichungssystem also insgesamt $8n$ Gleichungen hat.

Umgekehrt liefert für eine Lösung $\chi_j^{(n)}$, $j = 0, \dots, 2n-1$ von (7.13) die vierkomponentige Funktion $\chi^{(n)}$, die durch

$$\chi^{(n)}(t) := E^{-1} \left[U(t) - \sum_{j=0}^{2n-1} \left\{ R_{|i-j|}^{(n)} \mathcal{K}^1(t_i, t_j) + \frac{\pi}{n} \mathcal{K}^2(t_i, t_j) \right\} \chi_j^{(n)} \right]$$

definiert ist, eine Lösung für die Approximationsgleichung (7.12)⁵.

Für die Fernfelder in der Darstellung (4.34 a), (4.34 b) erhält man in parametrisierter Form und nach Anwendung der Trapezregel

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_\infty(\hat{x}) &= \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k}} \int_0^{2\pi} \{k[\hat{x}_1 z_2'(\tau) - \hat{x}_2 z_1'(\tau)]\chi_3(\tau) + ic_1 |z'(\tau)|\chi_1(\tau)\} e^{-ik[\hat{x}_1 z_1(\tau) + \hat{x}_2 z_2(\tau)]} d\tau \\ &\approx \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k}} \frac{\pi}{n} \sum_{j=0}^{2n-1} \left\{ k[\hat{x}_1 z_2'(t_j) - \hat{x}_2 z_1'(t_j)]\chi_{j;3}^{(n)} + ic_1 |z'(t_j)|\chi_{j;1}^{(n)} \right\} e^{-ik[\hat{x}_1 z_1(t_j) + \hat{x}_2 z_2(t_j)]}, \end{aligned} \quad (7.14 \text{ a})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_\infty(\hat{x}) &= \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k}} \int_0^{2\pi} \{k[\hat{x}_1 z_2'(\tau) - \hat{x}_2 z_1'(\tau)]\chi_4(\tau) + ic_2 |z'(\tau)|\chi_2(\tau)\} e^{-ik[\hat{x}_1 z_1(\tau) + \hat{x}_2 z_2(\tau)]} d\tau \\ &\approx \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k}} \frac{\pi}{n} \sum_{j=0}^{2n-1} \left\{ k[\hat{x}_1 z_2'(t_j) - \hat{x}_2 z_1'(t_j)]\chi_{j;4}^{(n)} + ic_2 |z'(t_j)|\chi_{j;2}^{(n)} \right\} e^{-ik[\hat{x}_1 z_1(t_j) + \hat{x}_2 z_2(t_j)]}. \end{aligned} \quad (7.14 \text{ b})$$

Damit ist das Problem der näherungsweise Berechnung der Fernfelder auf das Lösen des linearen Gleichungssystems (7.13) zurückgeführt.

7.3 Diskussion der Konvergenz

Für die hier durchgeführte numerische Behandlung soll die eindeutige Lösbarkeit von (4.20) vorausgesetzt werden, d.h. die Bedingung (4.25) sei erfüllt. Die Eigenschaft, daß genau eine Lösung existiert, überträgt sich unmittelbar auf das parametrisierte Integralgleichungssystem (7.7).

Mit den Resultaten aus [22], insbesondere der Kapitel 10 und 12, kann gezeigt werden, daß für hinreichend großes n das lineare Gleichungssystem (7.13) und damit die Approximationsgleichung (7.12) eindeutig lösbar sind. Ferner konvergiert die approximative Lösung $\chi^{(n)}$ für $n \rightarrow \infty$ gleichmäßig gegen die Lösung χ des Integralgleichungssystems, wobei sich die Konvergenzordnung der Quadraturen (7.9), (7.11) vererbt⁶.

⁵Vergleiche [22, Th. 12.7].

⁶Siehe speziell [22, (10.7)].

Die Fehler bei den Quadraturformeln (7.9), (7.11) fallen bei analytischem f exponentiell bei wachsender Stützstellenzahl $2n$. Es gilt genauer, daß der Fehler die Ordnung $O(\exp(-na))$ hat, wenn sich f analytisch in einen Streifen $\mathbb{R} \times (-a, a) \subset \mathbb{C}$ fortsetzen läßt. Man vergleiche hierzu [26, Th. 9.28].

Ist der Rand analytisch, so gilt dies auch für die rechte Seite U der Integralgleichung. Die Kerne \mathcal{K}^1 und \mathcal{K}^2 sind dann analytisch, so daß die Quadraturformeln exponentiell konvergieren und auch insgesamt für die Lösung der Integralgleichung exponentielle Konvergenz vorliegt. Das heißt, es existieren positive Konstanten C und a mit

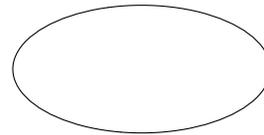
$$\|\chi^{(n)} - \chi\| \leq C e^{-na}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Eine analoge Beziehung gilt auch für die approximierten Fernfelder, was sich darin äußern sollte, daß eine Verdopplung der Knotenzahl $2n$ auch zu einer Verdopplung der Anzahl der korrekten Ziffern in der Lösung führt.

7.4 Numerische Testbeispiele

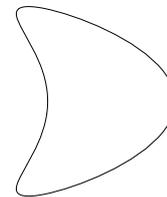
Das beschriebene numerische Verfahren soll für verschiedene Beispiele getestet werden. Betrachtet werden dazu spezielle Gebiete im \mathbb{R}^2 , die Ellipse mit Parametrisierung

$$z(t) = \begin{pmatrix} \delta \cos t \\ \sin t \end{pmatrix},$$



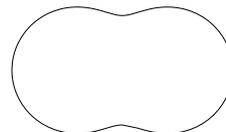
der Drachen mit

$$z(t) = \begin{pmatrix} \cos t + 0.65 \cos(2t) - 0.65 \\ 1.5 \sin t \end{pmatrix},$$



und die Erdnuß mit

$$z(t) = \sqrt{\cos^2 t + 0.25 \sin^2 t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$



Randwertproblem

Um die Korrektheit des implementierten Algorithmus zu testen, wird dieser auf Randwertprobleme angewendet, deren Lösungen exakt bekannt sind. Genauer werden, wie im folgenden angegeben, Lösungen im Innen- und Außengebiet vorgegeben und die dadurch gemäß (2.11 a)- (2.11 d) erklärten Größen $N_{\mathbf{a}}, N_{\mathbf{b}}, D_{\mathbf{a}}, D_{\mathbf{b}}$ als Input-Daten für das Programm verwendet. Dabei werden die Untersuchungen zu verschiedenen Gebieten und willkürlich gewählten Parametern durchgeführt.

Es sei $x_0 \in D$. Die Felder

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_0(x) &= l_1 J_0(\alpha_{\mathbf{A}} |x - x_0|), & \mathbf{b}_0(x) &= l_2 J_0(\alpha_{\mathbf{B}} |x - x_0|), & x &\in D, \\ \mathbf{a}(x) &= l_3 H_0^1(k|x - x_0|), & \mathbf{b}(x) &= l_4 H_0^1(k|x - x_0|), & x &\in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D} \end{aligned}$$

sind Lösungen des Randwertproblems (2.9 a) - (2.11 d) mit Randwerten

$$\begin{aligned} N_{\mathbf{a}}(x) &= -\alpha_{\mathbf{A}} \{l_1 J_1(\alpha_{\mathbf{A}} |x - x_0|) - l_3 H_1^1(k|x - x_0|)\} \frac{\nu(x)(x - x_0)}{|x - x_0|}, \\ N_{\mathbf{b}}(x) &= -\alpha_{\mathbf{B}} \{l_2 J_1(\alpha_{\mathbf{B}} |x - x_0|) - l_4 H_1^1(k|x - x_0|)\} \frac{\nu(x)(x - x_0)}{|x - x_0|}, \\ D_{\mathbf{a}}(x) &= l_1 J_0(\alpha_{\mathbf{A}} |x - x_0|) - (l_3 \xi_+ + l_4 \xi_-) H_0^1(k|x - x_0|), \\ D_{\mathbf{b}}(x) &= l_2 J_0(\alpha_{\mathbf{B}} |x - x_0|) - (l_3 \xi_- + l_4 \xi_+) H_0^1(k|x - x_0|) \end{aligned}$$

auf ∂D . Diese sind in parametrisierter Form durch

$$\begin{aligned} 2N_{\mathbf{a}}(t) &= -2\alpha_{\mathbf{A}} \{l_1 J_1(\alpha_{\mathbf{A}} |z(t) - x_0|) - l_3 H_1^1(k|z(t) - x_0|)\} \frac{\begin{pmatrix} z_2'(t) \\ -z_1'(t) \end{pmatrix} \cdot (z(t) - x_0)}{|z(t) - x_0| |z'(t)|}, \\ 2N_{\mathbf{b}}(t) &= -2\alpha_{\mathbf{B}} \{l_2 J_1(\alpha_{\mathbf{B}} |z(t) - x_0|) - l_4 H_1^1(k|z(t) - x_0|)\} \frac{\begin{pmatrix} z_2'(t) \\ -z_1'(t) \end{pmatrix} \cdot (z(t) - x_0)}{|z(t) - x_0| |z'(t)|}, \\ 2D_{\mathbf{a}}(x) &= 2l_1 J_0(\alpha_{\mathbf{A}} |z(t) - x_0|) - 2(l_3 \xi_+ + l_4 \xi_-) H_0^1(k|z(t) - x_0|), \\ 2D_{\mathbf{b}}(x) &= 2l_2 J_0(\alpha_{\mathbf{B}} |z(t) - x_0|) - 2(l_3 \xi_- + l_4 \xi_+) H_0^1(k|z(t) - x_0|) \end{aligned}$$

gegeben. Aufgrund des asymptotischen Verhaltens⁷ der Hankelfunktion gilt für $x_0 = 0$

$$\mathbf{a}_{\infty}(\hat{x}) = l_3 \sqrt{\frac{2}{\pi k}} e^{-i\pi/4}, \quad \mathbf{b}_{\infty}(\hat{x}) = l_4 \sqrt{\frac{2}{\pi k}} e^{-i\pi/4}.$$

Bei einem numerischen Experiment mit $l_1 = 1+i$, $l_2 = 3$, $l_3 = 1$, $l_4 = 2$, $\varepsilon = \mu = \omega = 1$, $\varepsilon_0 = 1.4$, $\mu_0 = 1.2$, $\beta = 0.1$ ($\leadsto k = 1.0$, $k_0 = 1.296$) ergibt sich bei Stützstellenzahl $2n = 32$ und einer Wahl $c_1 = m_1 = 1$, $c_2 = m_2 = 2$ im Potentialansatz

⁷Vergleiche [3, (3.59)].

Fehler	$\text{Re } \mathbf{a}_\infty(1, 0)^\top$	$\text{Im } \mathbf{a}_\infty(1, 0)^\top$	$\text{Re } \mathbf{b}_\infty(1, 0)^\top$	$\text{Im } \mathbf{b}_\infty(1, 0)^\top$
Kreis	—	—	—	—
Ellipse	4.5 e -9	3.8 e -9	1.2 e -8	6.0 e -9
Erdnuß	3.7 e -4	2.6 e -4	1.9 e -3	9.7 e -4
Drachen	1.6 e -7	5.7 e -7	2.4 e -7	1.1 e -7

Fehler	$\text{Re } \mathbf{a}_\infty(0, 1)^\top$	$\text{Im } \mathbf{a}_\infty(0, 1)^\top$	$\text{Re } \mathbf{b}_\infty(0, 1)^\top$	$\text{Im } \mathbf{b}_\infty(0, 1)^\top$
Kreis	—	—	—	—
Ellipse	7.5 e -10	1.7 e -10	5.0 e -10	3.5 e -9
Erdnuß	7.0 e -5	6.4 e -6	2.1 e -3	5.7 e -4
Drachen	3.7 e -7	2.6 e -7	7.9 e -7	3.9 e -7

wobei die korrekten Werte (auf 22 Stellen genau)

$$\mathbf{a}_\infty(\hat{x}) = 0.5641895835477562869481(1 - i),$$

$$\mathbf{b}_\infty(\hat{x}) = 1.1283791670955125738962(1 - i)$$

unabhängig von der Beobachtungsrichtung \hat{x} und dem entsprechenden Gebiet sind und beim Kreis bis auf 16 Stellen genau auch erzielt werden.

Zur Konvergenz ergibt sich beim Drachen folgendes Resultat (mit gleicher Parameterwahl wie eben, aber unterschiedlichen Werten für n)

Fehler	$\text{Re } \mathbf{a}_\infty(1, 0)^\top$	$\text{Im } \mathbf{a}_\infty(1, 0)^\top$	$\text{Re } \mathbf{b}_\infty(1, 0)^\top$	$\text{Im } \mathbf{b}_\infty(1, 0)^\top$
4	7.6 e -2	2.2 e -2	1.9 e -1	4.9 e -2
8	5.9 e -4	1.3 e -3	9.1 e -5	1.6 e -4
16	1.6 e -7	5.7 e -7	2.3 e -7	1.1 e -7
32	1.6 e -13	3.3 e -13	4.1 e -12	3.4 e -12
64	—	—	—	—

wobei Fehler der Größenordnung 10^{-16} und kleiner nicht mehr angegeben sind.

Bei der Erdnuß oder auch bei größeren Wellenzahlen lassen sich schlechtere Resultate beobachten. So erhält man für die Ellipse mit $l_1 = 1 + i$, $l_2 = 3$, $l_3 = 1$, $l_4 = 1$, $\varepsilon = \mu = 1$, $\omega = 5$, ($\rightsquigarrow k = 5$), $\varepsilon_0 = 1.4$, $\mu_0 = 1.2$, $\beta = 0.1$, $c_1 = m_1 = 1$, $c_2 = m_2 = 2$ als exakte Lösung

$$\mathbf{a}_\infty = \mathbf{b}_\infty = 0.25231325220201600482(1 - i)$$

und im numerischen Experiment

Fehler	$\text{Re } \mathbf{a}_\infty(1, 0)^\top$	$\text{Im } \mathbf{a}_\infty(1, 0)^\top$	$\text{Re } \mathbf{b}_\infty(1, 0)^\top$	$\text{Im } \mathbf{b}_\infty(1, 0)^\top$
8	2.2 e -2	1.3 e -1	2.3 e -1	1.0 e -1
16	3.5 e -2	2.5 e -2	1.7 e -1	3.5 e -1
32	1.2 e -4	1.9 e -4	4.2 e -3	1.2 e -4
64	4.1 e -12	5.1 e -12	2.3 e -11	1.3 e -10
128	—	—	7.8 e -15	1.3 e -15

Streuproblem

Hier wird der Algorithmus für das eigentliche, auch für die inverse Fragestellung interessante, Streuproblem numerisch getestet.

Für den Drachen erhält man für

$$\varepsilon = 1.0, \quad \varepsilon_0 = 1.4, \quad \mu = 1.0, \quad \mu_0 = 1.2, \quad \omega = 1.0, \quad \beta = 0.1$$

und Einfallrichtung $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ bei verschiedenen Diskretisierungen und Beobachtungsrichtungen \hat{x} im transversalmagnetischen Fall

\hat{x}	n	$\mathbf{a}_\infty(\hat{x})$	$\mathbf{b}_\infty(\hat{x})$
$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	8	-0.13359043238065 + 0.04300119234498 i	-0.42209550809467 - 0.02735122520861 i
	16	-0.13364771237597 + 0.04296288391846 i	-0.42219122854833 - 0.02755767553683 i
	32	-0.13364766443120 + 0.04296288826471 i	-0.42219137770142 - 0.02755782251173 i
	64	-0.13364766443424 + 0.04296288826123 i	-0.42219137771110 - 0.02755782252817 i
	128	-0.13364766443424 + 0.04296288826123 i	-0.42219137771110 - 0.02755782252817 i
	256	-0.13364766443424 + 0.04296288826123 i	-0.42219137771111 - 0.02755782252817 i
$\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$	8	-0.23210748222796 + 0.09231324807461 i	-0.90543842819382 + 0.09776172021991 i
	16	-0.23219454900381 + 0.09228216893244 i	-0.90555284175777 + 0.09757240721812 i
	32	-0.23219443179846 + 0.09228223731314 i	-0.90555277272083 + 0.09757287290924 i
	64	-0.23219443179970 + 0.09228223731215 i	-0.90555277272309 + 0.09757287291275 i
	128	-0.23219443179970 + 0.09228223731215 i	-0.90555277272309 + 0.09757287291275 i
	256	-0.23219443179970 + 0.09228223731215 i	-0.90555277272309 + 0.09757287291275 i
$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	8	-0.24127294209982 + 0.17877587247742 i	-1.06663337461236 + 0.42015140732797 i
	16	-0.24131853563047 + 0.17883584743138 i	-1.06659699796002 + 0.42016866267815 i
	32	-0.24131845358299 + 0.17883570955156 i	-1.06659680716968 + 0.42016844349451 i
	64	-0.24131845358251 + 0.17883570954974 i	-1.06659680715732 + 0.42016844349046 i
	128	-0.24131845358251 + 0.17883570954974 i	-1.06659680715732 + 0.42016844349046 i
	256	-0.24131845358251 + 0.17883570954974 i	-1.06659680715732 + 0.42016844349046 i
$\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$	8	-0.16740124955170 + 0.18461496635031 i	-0.76721516217778 + 0.47044227584829 i
	16	-0.16734396626029 + 0.18468741909176 i	-0.76689476415258 + 0.47042973671511 i
	32	-0.16734411325381 + 0.18468736023272 i	-0.76689548555535 + 0.47042980306522 i
	64	-0.16734411325404 + 0.18468736023464 i	-0.76689548555261 + 0.47042980307000 i
	128	-0.16734411325404 + 0.18468736023464 i	-0.76689548555261 + 0.47042980307000 i
	256	-0.16734411325404 + 0.18468736023464 i	-0.76689548555261 + 0.47042980307001 i
$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$	8	-0.11413641100608 + 0.08841548645313 i	-0.41178385174998 + 0.15019031528010 i
	16	-0.11408666633912 + 0.08843467674538 i	-0.41153277571356 + 0.15023063483991 i

	32	$-0.11408666704600 + 0.08843477024973 i$	$-0.41153315635196 + 0.15023086465573 i$
	64	$-0.11408666704197 + 0.08843477025360 i$	$-0.41153315634037 + 0.15023086466927 i$
	128	$-0.11408666704197 + 0.08843477025360 i$	$-0.41153315634037 + 0.15023086466927 i$
	256	$-0.11408666704197 + 0.08843477025360 i$	$-0.41153315634037 + 0.15023086466927 i$
$\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$	8	$-0.06993035625994 - 0.00494886385149 i$	$-0.15519523173526 - 0.06381113465812 i$
	16	$-0.06992542474012 - 0.00495922623701 i$	$-0.15531063576943 - 0.06382045778201 i$
	32	$-0.06992536513686 - 0.00495915722265 i$	$-0.15531018795742 - 0.06382061995945 i$
	64	$-0.06992536513546 - 0.00495915722025 i$	$-0.15531018794952 - 0.06382061995603 i$
	128	$-0.06992536513546 - 0.00495915722025 i$	$-0.15531018794952 - 0.06382061995603 i$
	256	$-0.06992536513546 - 0.00495915722025 i$	$-0.15531018794952 - 0.06382061995603 i$
$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$	8	$-0.02621322352421 - 0.01126888257812 i$	$-0.04087073023185 - 0.08400502197927 i$
	16	$-0.02619918794183 - 0.01127817117549 i$	$-0.04091616821299 - 0.08414929250476 i$
	32	$-0.02619922602963 - 0.01127816256067 i$	$-0.04091588975363 - 0.08414918484102 i$
	64	$-0.02619922603066 - 0.01127816256089 i$	$-0.04091588974892 - 0.08414918484261 i$
	128	$-0.02619922603065 - 0.01127816256089 i$	$-0.04091588974892 - 0.08414918484261 i$
	256	$-0.02619922603065 - 0.01127816256089 i$	$-0.04091588974892 - 0.08414918484261 i$
$\frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$	8	$-0.04652035183988 + 0.02407370530639 i$	$-0.09528794117985 - 0.04971162443640 i$
	16	$-0.04652686944515 + 0.02408672234876 i$	$-0.09530033643502 - 0.04976490698984 i$
	32	$-0.04652687150631 + 0.02408662185549 i$	$-0.09530028238565 - 0.04976526574971 i$
	64	$-0.04652687150802 + 0.02408662185328 i$	$-0.09530028238598 - 0.04976526576056 i$
	128	$-0.04652687150802 + 0.02408662185328 i$	$-0.09530028238598 - 0.04976526576056 i$
	256	$-0.04652687150802 + 0.02408662185328 i$	$-0.09530028238598 - 0.04976526576056 i$

Es soll außerdem die Abhängigkeit vom Parameter β untersucht werden, dazu werden an dieser Stelle nicht die Felder \mathbf{a}_∞ , \mathbf{b}_∞ , sondern \mathbf{e}_∞ , \mathbf{h}_∞ betrachtet.

Die folgenden Daten sind beim (TM) für

$$\varepsilon = 1.0, \quad \varepsilon_0 = 1.4, \quad \mu = 1.0, \quad \mu_0 = 1.2, \quad \omega = 1.5,$$

und Einfallrichtung $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, Beobachtungsrichtung $\hat{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, sowie $n = 32$ bestimmt worden.

β	$\mathbf{e}_\infty(\hat{x})$	$\mathbf{h}_\infty(\hat{x})$
10^{-1}	$-0.2077081450 - 0.1297778411 i$	$0.2200993387 - 0.0919987716 i$
10^{-2}	$-0.2988333988 + 0.0262107796 i$	$0.0194877287 - 0.0179263846 i$
10^{-3}	$-0.2994275566 + 0.0278939744 i$	$0.0019452908 - 0.0018005373 i$
10^{-4}	$-0.2994334682 + 0.0279108150 i$	$0.0001945256 - 0.0001800616 i$
10^{-5}	$-0.2994335273 + 0.0279109834 i$	$0.0000194526 - 0.0000180062 i$
10^{-6}	$-0.2994335279 + 0.0279109851 i$	$0.0000019453 - 0.0000018006 i$
10^{-7}	$-0.2994335279 + 0.0279109851 i$	$0.0000001945 - 0.0000001801 i$
0	$-0.2994335279 + 0.0279109851 i$	$0.0000000000 - 0.0000000000 i$

Man erkennt also, daß erwartungsgemäß für $\beta \rightarrow 0$ das (TM) zu einem reinen elektrischen Problem wird, die Kopplung sich also immer mehr abschwächt. Eine analoge Beobachtung läßt sich für das (TE) machen.

Teil II Inverses Streuproblem

In diesem Teil soll das inverse Streuproblem behandelt werden. Es sind mehrere inverse Fragestellungen, wie die nach der Ermittlung der Gestalt oder einzelner physikalischer Größen (Chiralität, Permeabilität, Dielektrizität) im Inneren des Streukörpers, denkbar, wobei man geeignete Daten im Außenraum, die durch Messungen ermittelt werden können, zur Verfügung hat.

Hier soll die Frage nach der Gestalt des Streukörpers unter Kenntnis der physikalischen Parameter behandelt werden. Als Daten stehen Fernfelder zu gestreuten Feldern bei aus unterschiedlichen Richtungen einfallenden ebenen Wellen zur Verfügung.

Es werden sowohl das Problem der Eindeutigkeit dieser Aufgabe als auch seine numerische Lösung untersucht.

8 Eindeutigkeit des inversen Streuproblems

In diesem Abschnitt wird die Eindeutigkeit des Streugebietes unter geeigneten Voraussetzungen gezeigt. Zunächst wird ein Hilfsresultat bewiesen, das sowohl für den zweidimensionalen als auch den dreidimensionalen Fall Gültigkeit hat. Dann wird der Beweis für den zweidimensionalen Fall geführt.

Der Beweis für das dreidimensionale Problem ist leider nicht gelungen, da eine Lücke im Beweis nicht geschlossen werden konnte. Es wurde, wie es hier für die zweidimensionale Aufgabe beschrieben wird oder sich auch in [15], [7], [8] findet, versucht, einen Widerspruch zur Existenz zweier verschiedener Körper mit identischen Fernfelddaten zu erzeugen, indem man eine Punktquelle gegen den Rand des einen Streukörpers streben läßt und die Wohlgestelltheit des Problems bezüglich des anderen ausnutzt. Dabei tritt bei Transmissionsproblemen die Schwierigkeit auf, die auftretende Singularität im inneren geeignet zu charakterisieren. Dabei macht man von Eigenschaften der Abbildung von Dirichlet- nach Neumann-Daten, oder umgekehrt, beziehungsweise bei elektromagnetischen Problemen von elektrischen nach magnetischen Randdaten, oder umgekehrt, entsprechender innerer Aufgaben Gebrauch. Für die hier auftretende innere Aufgabe mit $\operatorname{rot} \mathbf{E}_0 - ik_0 \gamma^2 \mathbf{H}_0 = k_0^2 \gamma^2 \beta \mathbf{E}_0$, $\operatorname{rot} \mathbf{H}_0 + ik_0 \gamma^2 \mathbf{E}_0 = k_0^2 \gamma^2 \beta \mathbf{H}_0$ mit Chiralität ist dies allerdings nicht gelungen.

8.1 Hilfssätze

Für den Beweis des Eindeutigkeitsatzes benötigt man die Approximation von singulären Quellen durch einfallende ebene Wellen. Dazu verwendet man folgenden Hilfssatz.

Lemma 8.1 *Es sei D ein beschränktes Gebiet im \mathbb{R}^m , $m = 2, 3$, mit C^2 -glattem Rand, so daß $\mathbb{R}^m \setminus \bar{D}$ zusammenhängend ist. Weiter sei $u \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ Lösung der Helmholtzgleichung $\Delta u + \kappa^2 u = 0$. Es bezeichnen*

$$\mathbb{V} := \text{span} \{u^i(\cdot; d) \mid d \in \Omega\}$$

den Raum, der von den ebenen Wellen $u^i(x, d) = e^{i\kappa x \cdot d}$ aufgespannt wird, und Q eine beliebige kompakte Teilmenge von D . Dann gibt es eine Folge $(v_n) \subset \mathbb{V}$ mit der Eigenschaft

$$\|D^\sigma v_n - D^\sigma u\|_{C(Q)} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

für alle Multiindizes $\sigma \in \mathbb{N}_0^m$, wobei D^σ den Differentialoperator

$$\frac{\partial^{|\sigma|}}{\partial x_1^{\sigma_1} \partial x_2^{\sigma_2}} \quad \text{für } m = 2 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial^{|\sigma|}}{\partial x_1^{\sigma_1} \partial x_2^{\sigma_2} \partial x_3^{\sigma_3}} \quad \text{für } m = 3$$

bezeichnet.

Beweis Der Beweis findet sich in [15, Lemma 3.2], hier sollen nur die wesentlichen Schritte dargestellt werden. Als erstes wird die Vollständigkeit der Menge

$$\mathbb{H} := \left\{ \frac{\partial u^i(\cdot; d)}{\partial \nu} - iu^i(\cdot; d) \mid d \in \Omega \right\}$$

in $L^2(\partial D)$ gezeigt. Sei $\varphi \in L^2(\partial D)$ so, daß $\int_{\partial D} \bar{\varphi}(y) \left\{ \frac{\partial u^i(y; d)}{\partial \nu(y)} - iu^i(y; d) \right\} ds(y) = 0$ für alle $d \in \Omega$ gilt. Dieses Integral ist gerade das Fernfeld zum gemischten Einfach- und Doppelschichtpotential $v(x) := \int_{\partial D} \bar{\varphi}(y) \left\{ \frac{\partial \Phi_\kappa(x, y)}{\partial \nu(y)} - i\Phi_\kappa(x, y) \right\} ds(y)$, $x \in \mathbb{R}^m \setminus \bar{D}$. Wegen des Rellich-Lemmas verschwindet v in $\mathbb{R}^m \setminus \bar{D}$. Mittels der L^2 -Sprungbeziehungen, der Invertierbarkeit von $I + K_\kappa - iS_\kappa$ und zweimaliger Anwendung der Fredholmschen Alternative kann auf $\varphi = 0$ geschlossen werden, womit die Vollständigkeit von \mathbb{H} in $L^2(\partial D)$ gezeigt ist.

Es existiert dann eine Folge $(v_n) \subset \mathbb{V}$ mit

$$\left\| \frac{\partial v_n}{\partial \nu} - i v_n - \frac{\partial u}{\partial \nu} + i u \right\|_{L^2(\partial D)} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Man definiert eine Folge $w_n(x) := \int_{\partial D} \psi_n(y) \Phi_\kappa(x, y) \, ds(y)$, $x \in D$, von Einfachschichtpotentialen, wobei die Dichten $\psi_n \in C(\partial D)$ Lösungen der Integralgleichung $\psi_n + K_\kappa^* \psi_n - iS_\kappa \psi_n = 2f_n$ mit $f_n := \frac{\partial v_n}{\partial \nu} - i v_n - \frac{\partial u}{\partial \nu} + i u$ sind. Aus der Eindeutigkeit des Impedanzproblems ergibt sich $w_n = v_n - u$. Daraus folgt mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\begin{aligned} \|D^\sigma v_n - D^\sigma u\|_{C(Q)} &= \|D^\sigma w_n\|_{C(Q)} \\ &\leq \sup_{x \in Q} \int_{\partial D} 2 \left| ((I + K_\kappa^* - iS_\kappa)^{-1} f_n)(y) \right| |D^\sigma \Phi_\kappa(x, y)| \, ds(y) \\ &\leq \|D^\sigma \Phi_\kappa(\cdot, \cdot)\|_{C(Q \times \partial D)} |\partial D|^{1/2} \|(I + K_\kappa^* - iS_\kappa)^{-1} f_n\|_{L^2(\partial D)} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

wobei die Beschränktheit von $(I + K_\kappa^* - iS_\kappa)^{-1}$ in $L^2(\partial D)$ und $\|f_n\|_{L^2(\partial D)} \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$ ausgenutzt werden. **q. e. d.**

8.2 Eindeutigkeit beim zweidimensionalen Problem

Für die Untersuchung der Eindeutigkeit wird hier das transversalmagnetische Streuproblem (TM) (5.6 a), (5.7) in der Bohrenschen Zerlegung untersucht, wobei im folgenden die Abhängigkeit der betrachteten Felder von der Einfallrichtung $d \in \Omega := \{z \in \mathbb{R}^2 \mid |z| = 1\}$ als zweites Argument gekennzeichnet wird, so daß $\mathbf{a}^i(x; d) = \mathbf{b}^i(x; d) = ik(\mu_0/\mu)^{1/2} e^{ikx \cdot d}$ die einfallenden Felder sind.

Weiter wird o.B.d.A. vorausgesetzt, daß die inneren Permeabilitäten μ_0 für alle Streukörper übereinstimmen. Dies läßt sich durch eine Ersetzung aller auftretender Felder u_j durch $(\mu_{0,j})^{-1/2} u_j$ aufgrund der Linearität des Streuproblems erreichen, dabei bezeichnet j die Abhängigkeit vom entsprechenden Streugebiet D_j . Hierdurch wird die durch die Bohrensche Zerlegung (2.8) künstlich eingeführte zusätzliche Abhängigkeit der einfallenden Wellen von μ_0 wieder „entfernt“. Man beachte dabei, daß nach (5.4) für das (TM) $h^i = 0$ gilt, die durch (2.8) auftretende Abhängigkeit von ε_0 also nicht vorhanden ist.

Die gleichen Schlüsse sind auch für das transversalelektrische Streuproblem durchführbar. Will man dort die Beweise analog nachvollziehen, ist o.B.d.A. die Übereinstimmung der inneren Dielektrizitäten ε_0 vorzusetzen.

Desweiteren sei in den betrachteten Höldernormen α eine positive Konstante echt kleiner als eins. Diese Voraussetzung ist erforderlich, um später einen Widerspruch zwischen (8.9 a), (8.9 b) und (8.10) zu erhalten.

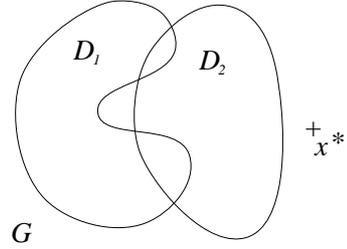
Lemma 8.2 *Es seien D_1 und D_2 zwei Streugebiete und G die unbeschränkte Komponente von $\mathbb{R}^2 \setminus (\bar{D}_1 \cup \bar{D}_2)$. Weiter seien $\mathbf{a}_{\infty,1}(\cdot; d)$, $\mathbf{b}_{\infty,1}(\cdot; d)$ bzw. $\mathbf{a}_{\infty,2}(\cdot; d)$, $\mathbf{b}_{\infty,2}(\cdot; d)$ die Fernfelder der zu D_1 bzw. D_2 gehörigen Streuprobleme bei einfallenden Wellen $\mathbf{a}^i(\cdot; d)$, $\mathbf{b}^i(\cdot; d)$, $d \in \Omega$. Aus $\mathbf{a}_{\infty,1}(\hat{x}; d) = \mathbf{a}_{\infty,2}(\hat{x}; d)$ und $\mathbf{b}_{\infty,1}(\hat{x}; d) = \mathbf{b}_{\infty,2}(\hat{x}; d)$ für alle $\hat{x} \in \Omega$ folgt dann*

$$\mathbf{a}_1^s(x; d) = \mathbf{a}_2^s(x; d), \quad \mathbf{b}_1^s(x; d) = \mathbf{b}_2^s(x; d), \quad x \in G.$$

Beweis Wegen des Rellich-Lemmas impliziert das Verschwinden von $\mathbf{a}_{\infty,1}(\hat{x}; d) - \mathbf{a}_{\infty,2}(\hat{x}; d)$, $\hat{x} \in \Omega$, daß auch $\mathbf{a}_1^s(x; d) - \mathbf{a}_2^s(x; d)$, $x \in G$, verschwindet, das analoge Resultat gilt für die \mathbf{b} -Felder. **q. e. d.**

Lemma 8.3 *Es seien die Bezeichnungen wie im vorangegangenen Lemma, es sei $x^* \in G$. Die Streukörper D_1 und D_2 seien derart, daß (bei fester Wellenzahl k) für alle Einfallrichtungen die Fernfelder übereinstimmen, das heißt für alle $d \in \Omega$ gilt*

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{\infty,1}(\cdot; d) &= \mathbf{a}_{\infty,2}(\cdot; d), \\ \mathbf{b}_{\infty,1}(\cdot; d) &= \mathbf{b}_{\infty,2}(\cdot; d). \end{aligned}$$



Für gegebenes $x^* \in G$ seien \mathbf{a}_j^* , \mathbf{b}_j^* , $\mathbf{a}_{0,j}^*$, $\mathbf{b}_{0,j}^*$, $j = 1, 2$, Lösungen des Streuproblems mit singulärer Quelle $\mathbf{a}^i = \mathbf{b}^i = u(\cdot, x^*) := ik(\mu_0/\mu)^{1/2}\Phi(\cdot, x^*)$, also

$$(\mathbf{a}_{0,j}^*, \mathbf{b}_{0,j}^*, \mathbf{a}_j^*, \mathbf{b}_j^*)^\top = \mathcal{L}_j^{Bs}(u(\cdot, x^*), u(\cdot, x^*))^\top,$$

wobei der Index $j = 1, 2$ am gemäß (5.8) definierten Operator \mathcal{L}^{Bs} die Abhängigkeit vom Gebiet D_j einschließlich der inneren Parameter $\alpha_{\mathbf{A},j}$, $\alpha_{\mathbf{B},j}$, $\xi_{+,j}$, $\xi_{-,j}$ kennzeichnet.

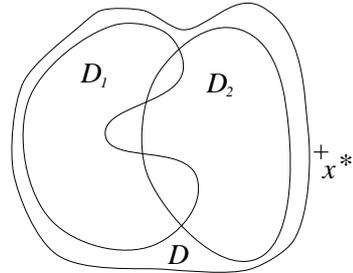
Dann gelten in G die Übereinstimmungen

$$\mathbf{a}_1^* = \mathbf{a}_2^* \quad \text{und} \quad \mathbf{b}_1^* = \mathbf{b}_2^*.$$

Beweis Man wählt ein C^2 -glattes Gebiet D so, daß $\mathbb{R}^2 \setminus D$ zusammenhängend ist und $\bar{D}_1 \cup \bar{D}_2 \subset D$ sowie $x^* \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ gilt. Es existiert nach Lemma 8.1 eine Folge $(u_n^i)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{W}$ mit

$$u_n^i \rightarrow u(\cdot, x^*)$$

für $n \rightarrow \infty$ gleichmäßig auf $\bar{D}_1 \cup \bar{D}_2$ als kompakter Teilmenge von D . Da die u_n^i Linearkombinationen ebener Wellen sind, stimmen die zugehörigen Streufelder von



$$(\mathbf{a}_{0,j;n}, \mathbf{b}_{0,j;n}, \mathbf{a}_{j;n}^s, \mathbf{b}_{j;n}^s)^\top = \mathcal{L}^{Bs}(u_n^i, u_n^i)^\top$$

für $j = 1$ beziehungsweise $j = 2$ und alle $n \in \mathbb{N}$ nach Lemma 8.2 auf G überein. Wegen der korrekten Gestelltheit des Problems und der gleichmäßigen Konvergenz der Randwerte auf ∂D_j , $j = 1, 2$, gilt

$$\mathbf{a}_{j;n}^s \rightarrow \mathbf{a}_j^*, \quad \mathbf{b}_{j;n}^s \rightarrow \mathbf{b}_j^*, \quad n \rightarrow \infty$$

gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von G . Da dort $\mathbf{a}_{1;n}^s = \mathbf{a}_{2;n}^s$ und $\mathbf{b}_{1;n}^s = \mathbf{b}_{2;n}^s$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, folgt die Behauptung. **q. e. d.**

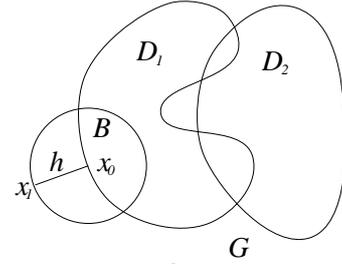
Satz 8.4 *Es seien D_1 und D_2 zwei Streugebiete, so daß die Fernfelder des zugehörigen Streuproblems bei fester Wellenzahl und allen Einfallrichtungen einfallender ebener Wellen übereinstimmen. Weiter sei vorausgesetzt, daß eine der Bedingungen $\alpha_{\mathbf{A}} \neq k\xi$ oder $\alpha_{\mathbf{B}} \neq k\xi$ erfüllt ist.¹ Dann gilt $D_1 = D_2$.*

Beweis Angenommen es gilt $D_1 \neq D_2$. Dann existiert ohne Beschränkung der Allgemeinheit ein Punkt $x_0 \in \partial G$ mit $x_0 \in \partial D_1$ und $x_0 \notin \bar{D}_2$. Es sei $h > 0$ so gewählt, daß die Folge

$$x_n := x_0 + \frac{h}{n} \nu(x_0), \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.1)$$

in G enthalten ist und für die abgeschlossene Kreisscheibe $B := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x - x_0| \leq h\}$ die Beziehung

$B \cap \bar{D}_2 = \emptyset$ gilt. Außerdem gelte für ein $R > h$, daß für $B_R := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x - x_0| \leq R\}$ der Durchschnitt $D_1 \cap B_R$ eine zusammenhängende Teilmenge von D_1 ist.



Betrachtet man die Lösungen $\mathbf{a}_{j;n}^s$, $\mathbf{b}_{j;n}^s$, $\mathbf{a}_{0,j;n}$, $\mathbf{b}_{0,j;n}$, zu den beiden Streukörpern D_j , $j = 1, 2$, mit den Quellen

$$\mathbf{a}_n^i = \mathbf{b}_n^i = u(\cdot; x_n) = ik(\mu_0/\mu)^{1/2} \Phi_k(\cdot; x_n), \quad n \in \mathbb{N},$$

so gilt nach Lemma 8.3

$$\mathbf{a}_{1;n}^s|_G = \mathbf{a}_{2;n}^s|_G =: \mathbf{a}_n^s, \quad \mathbf{b}_{1;n}^s|_G = \mathbf{b}_{2;n}^s|_G =: \mathbf{b}_n^s$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen $B \cap \bar{D}_2 = \emptyset$ gilt für die rechten Seiten gemäß (5.7)

$$\begin{aligned} D_{\mathbf{a};n} &:= \xi_{+,2} \mathbf{a}_n^i + \xi_{-,2} \mathbf{b}_n^i, & N_{\mathbf{a};n} &:= \frac{\alpha_{\mathbf{A},2}}{k} \frac{\partial \mathbf{a}_n^i}{\partial \nu}, \\ D_{\mathbf{b};n} &:= \xi_{-,2} \mathbf{a}_n^i + \xi_{+,2} \mathbf{b}_n^i, & N_{\mathbf{b};n} &:= \frac{\alpha_{\mathbf{B},2}}{k} \frac{\partial \mathbf{b}_n^i}{\partial \nu} \end{aligned}$$

¹Wäre keine dieser beiden Bedingungen erfüllt, so folgte aus $\frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k} = \frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k} = \xi$ wegen (1.4), (2.3), (2.12), daß β verschwindet und μ mit μ_0 übereinstimmt, so daß es sich nicht um ein „echtes“ Transmissionsproblem handelt.

Im transversalelektrischen Fall ist $\frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k} \neq \xi^{-1}$ oder $\frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k} \neq \xi^{-1}$ zu fordern. Die Annahme des Gegenteils führt dort auf $\beta = 0$, $\varepsilon = \varepsilon_0$.

die Ungleichung

$$\|D_{\mathbf{a};n}\|_{C^{1,\alpha}(\partial D_2)} + \|D_{\mathbf{b};n}\|_{C^{1,\alpha}(\partial D_2)} + \|N_{\mathbf{a};n}\|_{C^{0,\alpha}(\partial D_2)} + \|N_{\mathbf{b};n}\|_{C^{0,\alpha}(\partial D_2)} \leq c_1, \quad n = 1, 2, \dots,$$

mit einer geeigneten Konstanten c_1 , woraus mit der korrekten Gestelltheit (4.28) des direkten Problems

$$\|\mathbf{a}_n^s\|_{C^{1,\alpha}(G \cap B)} + \|\mathbf{b}_n^s\|_{C^{1,\alpha}(G \cap B)} \leq c_2, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (8.2)$$

folgt.

Man untersucht nun das Streuproblem bezüglich D_1 – der Index 1 wird im folgenden weggelassen.² Mit dem Ziel, das singuläre Verhalten im Inneren näher zu charakterisieren, werden modifizierte rechte Seiten

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{\mathbf{a};n} &= D_{\mathbf{a};n} - s\Phi_{\alpha_{\mathbf{A}}}(\cdot, x_n), & \tilde{N}_{\mathbf{a};n} &= N_{\mathbf{a};n} - s\frac{\partial\Phi_{\alpha_{\mathbf{A}}}(\cdot, x_n)}{\partial\nu}, \\ \tilde{D}_{\mathbf{b};n} &= D_{\mathbf{b};n} - t\Phi_{\alpha_{\mathbf{A}}}(\cdot, x_n), & \tilde{N}_{\mathbf{b};n} &= N_{\mathbf{b};n} - t\frac{\partial\Phi_{\alpha_{\mathbf{A}}}(\cdot, x_n)}{\partial\nu} \end{aligned}$$

mit noch frei zu wählenden Parametern $s, t \in \mathbb{C}$ betrachtet. Diese führen auf die Lösungen

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{a}}_n^s &= \mathbf{a}_n^s, & \tilde{\mathbf{a}}_{0;n} &= \mathbf{a}_{0;n} - s\Phi_{\alpha_{\mathbf{A}}}(\cdot, x_n), \\ \tilde{\mathbf{b}}_n^s &= \mathbf{b}_n^s, & \tilde{\mathbf{b}}_{0;n} &= \mathbf{b}_{0;n} - t\Phi_{\alpha_{\mathbf{B}}}(\cdot, x_n). \end{aligned}$$

Wählt man

$$s = t = ik\xi(\mu_0/\mu)^{1/2}, \quad (8.3)$$

so folgt

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{\mathbf{a};n} &= ik\xi(\mu_0/\mu)^{1/2} \{\Phi_k(\cdot, x_n) - \Phi_{\alpha_{\mathbf{A}}}(\cdot, x_n)\}, \\ \tilde{D}_{\mathbf{b};n} &= ik\xi(\mu_0/\mu)^{1/2} \{\Phi_k(\cdot, x_n) - \Phi_{\alpha_{\mathbf{B}}}(\cdot, x_n)\}, \\ \tilde{N}_{\mathbf{a};n} &= i(\mu_0/\mu)^{1/2} \left\{ \alpha_{\mathbf{A}} \frac{\partial\Phi_k(\cdot, x_n)}{\partial\nu} - k\xi \frac{\partial\Phi_{\alpha_{\mathbf{A}}}(\cdot, x_n)}{\partial\nu} \right\}, \end{aligned} \quad (8.4 \text{ a})$$

$$\tilde{N}_{\mathbf{b};n} = i(\mu_0/\mu)^{1/2} \left\{ \alpha_{\mathbf{B}} \frac{\partial\Phi_k(\cdot, x_n)}{\partial\nu} - k\xi \frac{\partial\Phi_{\alpha_{\mathbf{B}}}(\cdot, x_n)}{\partial\nu} \right\}. \quad (8.4 \text{ b})$$

Die Differenzen $\Phi_k(\cdot, x_n) - \Phi_{\alpha_{\mathbf{A}}}(\cdot, x_n)$, $\Phi_k(\cdot, x_n) - \Phi_{\alpha_{\mathbf{B}}}(\cdot, x_n)$ sind gleichmäßig für alle $n \in \mathbb{N}$ an der Stelle x_0 beschränkt, $\tilde{N}_{\mathbf{a};n}$, $\tilde{N}_{\mathbf{b};n}$ besitzen dort Singularitäten der Ordnung n , wie noch näher ausgeführt werden wird.

Eine alternative Beweis-Variante, in der durch andere Wahl von s und t eine Singularität bei den Dirichlet-Werten auftritt, ist im Anhang A.2 zu finden.

²Man beachte, daß insbesondere auch $\alpha_{\mathbf{A}}$, $\alpha_{\mathbf{B}}$, ξ , ξ_{\pm} zu den Größen $\varepsilon_{0,1}$, $\mu_{0,1}$, β_1 definiert sind.

Nach dem modifizierten Wohlgestelltheitsresultat (4.33) gilt für ein hinreichend kleines $r > 0$ und Kreise $B_r, B_{r/2}$ um x_0 mit Radien r bzw. $r/2$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} & \|\tilde{\mathbf{a}}_{0;n}\|_{C^{1,\alpha}(\bar{D}\setminus B_r)} + \|\tilde{\mathbf{b}}_{0;n}\|_{C^{1,\alpha}(\bar{D}\setminus B_r)} \\ & \leq c \left\{ \|\tilde{N}_{\mathbf{a};n}\|_{C^{0,\alpha}(\partial D\setminus B_{r/2})} + \|\tilde{N}_{\mathbf{b};n}\|_{C^{0,\alpha}(\partial D\setminus B_{r/2})} \right. \\ & \quad + \|\tilde{D}_{\mathbf{a};n}\|_{C^{1,\alpha}(\partial D\setminus B_{r/2})} + \|\tilde{D}_{\mathbf{b};n}\|_{C^{1,\alpha}(\partial D\setminus B_{r/2})} \\ & \quad \left. + \|\tilde{N}_{\mathbf{a};n}\|_{L^2(\partial D)} + \|\tilde{N}_{\mathbf{b};n}\|_{L^2(\partial D)} + \|\tilde{D}_{\mathbf{a};n}\|_{L^2(\partial D)} + \|\tilde{D}_{\mathbf{b};n}\|_{L^2(\partial D)} \right\}. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Dabei sind die auftretenden Höldernormen auf $\partial D \setminus B_{r/2}$ gleichmäßig für alle $n \in \mathbb{N}$ beschränkt, ebenso die L^2 -Normen von $\tilde{D}_{\mathbf{a};n}, \tilde{D}_{\mathbf{b};n}$. Für die verbleibenden zwei Terme erhält man aufgrund der Singularität der Ordnung n nach dem nachfolgenden Lemma 8.5 a) eine Abschätzung

$$\|\tilde{N}_{\mathbf{a};n}\|_{L^2(\partial D)} + \|\tilde{N}_{\mathbf{b};n}\|_{L^2(\partial D)} \leq c'_3 n^{1/2},$$

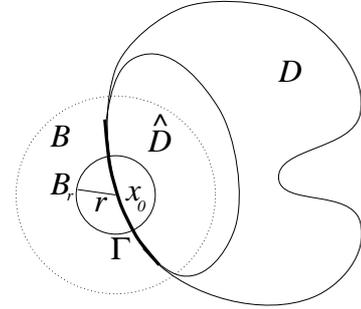
so daß insgesamt

$$\|\tilde{\mathbf{a}}_{0;n}\|_{C^{1,\alpha}(\bar{D}\setminus B_r)} + \|\tilde{\mathbf{b}}_{0;n}\|_{C^{1,\alpha}(\bar{D}\setminus B_r)} \leq c_3 n^{1/2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.6)$$

mit einer geeigneten Konstanten c_3 gilt.

Man wählt nun ein hinreichend kleines, C^2 -glattes Gebiet $\hat{D} \subset D$ so, daß $\alpha_{\mathbf{A}}^2, \alpha_{\mathbf{B}}^2$ keine Dirichlet-Eigenwerte von $-\Delta$ sind und für $\Gamma := \partial D \cap \partial \hat{D}$ die Bedingungen $x_0 \in \Gamma, \Gamma \subset B, \nu(x_0) \cdot \nu(y) \geq \frac{1}{2} \forall y \in \Gamma$ erfüllt sind. Weiter sei r so, daß $\partial \hat{D} \setminus \Gamma \subset \bar{D} \setminus B_r$.³

Mit [8, Lemma 3.2] folgt dann für $x_0 \in \Gamma_0 \subset \Gamma, \text{dist}(\Gamma_0, \partial \hat{D} \setminus \Gamma) > 0$ die Existenz einer Konstanten c'_4 , so daß



$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \tilde{\mathbf{a}}_{0;n}}{\partial \nu} \right\|_{C^{0,\alpha}(\Gamma_0)} & \leq c'_4 \left\{ \|\tilde{\mathbf{a}}_{0;n}\|_{C^{1,\alpha}(\Gamma)} + \|\tilde{\mathbf{a}}_{0;n}\|_{C(\partial \hat{D})} \right\}, \\ \left\| \frac{\partial \tilde{\mathbf{b}}_{0;n}}{\partial \nu} \right\|_{C^{0,\alpha}(\Gamma_0)} & \leq c'_4 \left\{ \|\tilde{\mathbf{b}}_{0;n}\|_{C^{1,\alpha}(\Gamma)} + \|\tilde{\mathbf{b}}_{0;n}\|_{C(\partial \hat{D})} \right\}, \end{aligned}$$

beziehungsweise einer Konstanten c_4 , so daß

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \tilde{\mathbf{a}}_{0;n}}{\partial \nu} \right\|_{C^{0,\alpha}(\Gamma_0)} & \leq c_4 \left\{ \|\tilde{\mathbf{a}}_{0;n}\|_{C^{1,\alpha}(\Gamma)} + \|\tilde{\mathbf{a}}_{0;n}\|_{C(\partial \hat{D} \setminus \Gamma)} \right\}, \\ \left\| \frac{\partial \tilde{\mathbf{b}}_{0;n}}{\partial \nu} \right\|_{C^{0,\alpha}(\Gamma_0)} & \leq c_4 \left\{ \|\tilde{\mathbf{b}}_{0;n}\|_{C^{1,\alpha}(\Gamma)} + \|\tilde{\mathbf{b}}_{0;n}\|_{C(\partial \hat{D} \setminus \Gamma)} \right\} \end{aligned} \quad (8.7)$$

³Die Existenz von \hat{D} und passendem Γ wird durch Lemma 3.26 beziehungsweise Formel (2.11) in [2] gesichert.

Wollte man etwas genauer sein, so müßten erst nach dieser Wahl von r die Beziehungen (8.5) und (8.6) hergeleitet werden.

gilt. Auf $\Gamma \subset \partial D$ ist

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{a}}_{0;n} &= \xi_+ \mathbf{a}_n^s + \xi_- \mathbf{b}_n^s + ik\xi(\mu_0/\mu)^{1/2} \{\Phi_k(\cdot, x_n) - \Phi_{\alpha_{\mathbf{A}}}(\cdot, x_n)\}, \\ \tilde{\mathbf{b}}_{0;n} &= \xi_- \mathbf{a}_n^s + \xi_+ \mathbf{b}_n^s + ik\xi(\mu_0/\mu)^{1/2} \{\Phi_k(\cdot, x_n) - \Phi_{\alpha_{\mathbf{B}}}(\cdot, x_n)\},\end{aligned}$$

woraus mit Hilfe von (8.2) und Lemma 8.5 b)

$$\begin{aligned}\|\tilde{\mathbf{a}}_{0;n}\|_{C^{1,\alpha}(\Gamma)} &\leq (|\xi_+| + |\xi_-|)c_2 + |k\xi(\frac{\mu_0}{\mu})^{1/2}| \|\Phi_k(\cdot, x_n) - \Phi_{\alpha_{\mathbf{A}}}(\cdot, x_n)\|_{C^{1,\alpha}(\Gamma)} \leq c_5 n^\alpha, \\ \|\tilde{\mathbf{b}}_{0;n}\|_{C^{1,\alpha}(\Gamma)} &\leq (|\xi_+| + |\xi_-|)c_2 + |k\xi(\frac{\mu_0}{\mu})^{1/2}| \|\Phi_k(\cdot, x_n) - \Phi_{\alpha_{\mathbf{B}}}(\cdot, x_n)\|_{C^{1,\alpha}(\Gamma)} \leq c_5 n^\alpha\end{aligned}\quad (8.8)$$

mit einer geeigneten Konstanten c_5 folgt.

Die Beziehungen $\tilde{N}_{\mathbf{a};n} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{a}}_{0;n}}{\partial \nu} - \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k} \frac{\partial \mathbf{a}_n^s}{\partial \nu}$ und $\tilde{N}_{\mathbf{b};n} = \frac{\partial \tilde{\mathbf{b}}_{0;n}}{\partial \nu} - \frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k} \frac{\partial \mathbf{b}_n^s}{\partial \nu}$ ergeben mit der Dreiecksungleichung in Kombination mit den Abschätzungen (8.6), (8.7), (8.8) für den ersten Summanden und (8.2) für den zweiten die Ungleichungen

$$\|\tilde{N}_{\mathbf{a};n}\|_{C^{0,\alpha}(\Gamma_0)} \leq \left\| \frac{\partial \tilde{\mathbf{a}}_{0;n}}{\partial \nu} \right\|_{C^{0,\alpha}(\Gamma_0)} + \left| \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k} \right| \left\| \frac{\partial \mathbf{a}_n^s}{\partial \nu} \right\|_{C^{0,\alpha}(\Gamma_0)} \leq c_4 \{c_5 n^\alpha + c_3 n^{1/2}\} + c_6, \quad (8.9 \text{ a})$$

$$\|\tilde{N}_{\mathbf{b};n}\|_{C^{0,\alpha}(\Gamma_0)} \leq \left\| \frac{\partial \tilde{\mathbf{b}}_{0;n}}{\partial \nu} \right\|_{C^{0,\alpha}(\Gamma_0)} + \left| \frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k} \right| \left\| \frac{\partial \mathbf{b}_n^s}{\partial \nu} \right\|_{C^{0,\alpha}(\Gamma_0)} \leq c_4 \{c_5 n^\alpha + c_3 n^{1/2}\} + c_6, \quad (8.9 \text{ b})$$

wobei $c_6 = c_2 \max\{|\frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k}|, |\frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k}|\}$ ist.

Andererseits gilt aber

$$\begin{aligned}\left\| \frac{\partial \Phi_\kappa(\cdot, x_n)}{\partial \nu} \right\|_{C^{0,\alpha}(\Gamma_0)} &\geq |\nu(x_0) \cdot \text{grad } \Phi_\kappa(x_0, x_n)| \\ &= \frac{\kappa}{4} \left| H_1^1(\kappa|x_0 - x_n|) \nu(x_0) \cdot \frac{x_0 - x_n}{|x_0 - x_n|} \right| = \frac{\kappa}{4} \left| H_1^1\left(\frac{\kappa h}{n}\right) \right| \geq c_7 n,\end{aligned}$$

da $H_1^1(t)$ sich bei $t = 0$ wie t^{-1} verhält.

Falls nun $\alpha_{\mathbf{A}} \neq k\xi$ beziehungsweise $\alpha_{\mathbf{B}} \neq k\xi$ erfüllt ist, so gibt es wegen (8.4 a), (8.4 b) eine Konstante $c_7 > 0$, so daß

$$\left| \tilde{N}_{\mathbf{a};n}(x_0) \right| \geq c_7 n \quad \text{bzw.} \quad \left| \tilde{N}_{\mathbf{b};n}(x_0) \right| \geq c_7 n \quad (8.10)$$

gilt. Dies steht aber im Widerspruch zu (8.9 a) oder (8.9 b).

Damit ist die Annahme der Existenz zweier verschiedener Streukörper mit gleichen Fernfeldern zum Widerspruch geführt und alles gezeigt. **q. e. d.**

Lemma 8.5 Seien D, Γ und $x_n, n \in \mathbb{N}_0$, wie im vorangegangenen Satz und $k, \kappa > 0$. Dann gilt

$$a) \quad \left\| \frac{\partial \Phi_{\kappa}(\cdot, x_n)}{\partial \nu} \right\|_{L^2(\partial D)} \leq cn^{1/2}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

und

$$b) \quad \|\Phi_{\kappa}(\cdot, x_n) - \Phi_k(\cdot, x_n)\|_{C^{1,\alpha}(\Gamma)} \leq cn^{\alpha}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

mit einer geeigneten Konstanten $c > 0$.

Beweis

a) Es gilt für $n = 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \Phi_{\kappa}(\cdot, x_n)}{\partial \nu} \right\|_{L^2(\partial D)}^2 &= \int_{\partial D} |\nu(y) \cdot \text{grad}_y \Phi_{\kappa}(y, x_n)|^2 ds(y) \\ &= \int_{\partial D} \frac{\kappa^2}{16} \left| H_1^1(\kappa|y - x_n|) \frac{\nu(y) \cdot (y - x_n)}{|y - x_n|} \right|^2 ds(y) \\ &\leq \int_{\partial D} \frac{\kappa^2}{16} |H_1^1(\kappa|y - x_n|)|^2 ds(y) \\ &\leq c_1 + c_2 \int_{\partial D \cap U(x_0)} \frac{ds(y)}{|y - x_n|^2}, \end{aligned}$$

wobei $U(x_0) = \{z(t) | t \in [-\delta, \delta]\}$ eine Umgebung von x_0 ist, in der

$$|z(t) - x_n|^2 \geq \frac{1}{2} \left(t^2 + \left(\frac{h}{n} \right)^2 \right)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Dabei bezeichnet $z(\cdot)$ die Parametrisierung des Randes nach der Bogenlänge. Solch eine Umgebung existiert wegen der vorausgesetzten C^2 -Glätte von ∂D .

Dann folgt

$$\int_{\partial D \cap U(x_0)} \frac{ds(y)}{|y - x_n|^2} \leq 4 \int_{-\delta}^{\delta} \frac{dt}{t^2 + \left(\frac{h}{n} \right)^2} = \frac{4n}{h} \left[\arctan \frac{nt}{h} \right]_{-\delta}^{\delta} \leq c_3 n.$$

Insgesamt ergibt sich also die Behauptung a).

b) Nach der Wahl von Γ gilt $\nu(x_0) \cdot \nu(y) \geq \frac{1}{2}$ für alle $y \in \Gamma$. Mit geometrischen Überlegungen folgt $\text{dist}(x_n, \Gamma) \geq \frac{h}{2n}$, $n = 1, 2, \dots$. Weiter gilt

$$\begin{aligned} &\|\Phi_{\kappa}(\cdot, x_n) - \Phi_k(\cdot, x_n)\|_{C^{1,\alpha}(\Gamma)} \\ &\leq c_1 \left\{ \|\Phi_{\kappa}(\cdot, x_n) - \Phi_k(\cdot, x_n)\|_{C(\Gamma)} + \|\text{grad} [\Phi_{\kappa}(\cdot, x_n) - \Phi_k(\cdot, x_n)]\|_{C(\Gamma)} \right. \\ &\quad \left. + \|\text{grad} [\Phi_{\kappa}(\cdot, x_n) - \Phi_k(\cdot, x_n)]\|_{\alpha, \Gamma} \right\}, \end{aligned}$$

wobei die ersten beiden Summanden gleichmäßig für alle $n \in \mathbb{N}$ beschränkt bleiben und $|\cdot|_{\alpha, \Gamma}$ die α -Halbnorm auf Γ bezeichnet. Für diese gilt

$$\begin{aligned} & |\text{grad} [\Phi_\kappa(\cdot, x_n) - \Phi_k(\cdot, x_n)]|_{\alpha, \Gamma} \\ &= \sup_{\substack{y \neq z \\ y, z \in \Gamma}} \frac{|\text{grad} \{[\Phi_\kappa(y, x_n) - \Phi_k(y, x_n)] - [\Phi_\kappa(z, x_n) - \Phi_k(z, x_n)]\}|}{|y - z|^\alpha} \\ &\leq \left(\frac{h}{4n}\right)^{1-\alpha} \sup_{x \in S_n} |\text{grad grad} [\Phi_\kappa(x, x_n) - \Phi_k(x, x_n)]| \\ &\quad + 2 \left(\frac{h}{4n}\right)^{-\alpha} \sup_{x \in \Gamma, n \in \mathbb{N}} |\text{grad} [\Phi_\kappa(x, x_n) - \Phi_k(x, x_n)]|, \end{aligned}$$

wobei für die Supremumbildung die Menge $\{(y, z) \in \Gamma \times \Gamma \mid y \neq z\}$ zerlegt wurde in $\{(y, z) \in \Gamma \times \Gamma \mid |y - z| < h/4n\}$ und $\{(y, z) \in \Gamma \times \Gamma \mid |y - z| \geq h/4n\}$. Für den hier entstehenden ersten Anteil wurde der Mittelwertsatz angewendet. Dabei bezeichnet

$$S_n := \cup_{x \in \Gamma} B(x, h/4n)$$

und garantiert, daß für $y, z \in \Gamma$, $|y - z| < h/4n$ die Verbindungsstrecke zwischen y und z ganz in S_n liegt. Eine detailliertere Betrachtung der Ableitungen der Grundlösung zeigt, daß dann

$$|\text{grad} [\Phi_\kappa(\cdot, x_n) - \Phi_k(\cdot, x_n)]_{\alpha, \Gamma} \leq \left(\frac{h}{4n}\right)^{1-\alpha} \sup_{x \in S_n} \frac{c_2}{|x - x_n|} + c_3 \left(\frac{h}{4n}\right)^{-\alpha}$$

gilt. Nach der Wahl von Γ ist für alle $x \in S_n$ und ein zugehöriges $y_x \in \Gamma$ mit $x \in B(y_x, h/4n)$ die Abschätzung

$$|x - x_n| \geq \left| |x_n - y_x| - |x - y_x| \right| \geq \frac{h}{2n} - \frac{h}{4n} = \frac{h}{4n},$$

erfüllt, was

$$\sup_{x \in S_n} \frac{1}{|x - x_n|} \leq \frac{4n}{h}$$

impliziert. Insgesamt folgt also

$$|\text{grad} (\Phi_\kappa(\cdot, x_n) - \Phi_k(\cdot, x_n))|_{\alpha, \Gamma} \leq c_2 \left(\frac{h}{4n}\right)^{1-\alpha} \frac{4n}{h} + c_3 \left(\frac{h}{4n}\right)^{-\alpha} \leq c_4 n^\alpha$$

mit einer nur von $\Gamma, x_0, h, k, \kappa$ abhängenden Konstanten c_4 . Daraus ergibt sich sofort die Behauptung. **q. e. d.**

9 Numerische Ergebnisse für das inverse Problem im \mathbb{R}^2

In diesem Kapitel wird demonstriert, wie man mit einem regularisierten Newton-Verfahren unter Ausnutzung der in Abschnitt 6.3 gewonnenen Aussagen über die Fréchet-Ableitung des Fernfeldoperators aus „gemessenen“ Fernfelddaten, das Streugebiet rekonstruieren kann. Dazu wird hier lediglich der transversalmagnetische Fall untersucht, eine Übertragung auf das transversalelektrische Problem ist aber evident.

9.1 Newtonverfahren und Regularisierung

Ausgangspunkt für das hier zu beschreibende Verfahren ist die nichtlineare und schlecht gestellte Operatorgleichung¹

$$\mathfrak{F}(z) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_\infty^m \\ \mathbf{b}_\infty^m \end{pmatrix}$$

für die Randparametrisierung z des entsprechenden unbekanntes Streugebietes. Dabei sind \mathbf{a}_∞^m , \mathbf{b}_∞^m gegebene Größen, die z.B. aus Messungen bekannt sind. Diese Gleichung wird durch die linearisierte Gleichung

$$\mathfrak{F}(z) + \mathfrak{F}'(z; h) = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_\infty^m \\ \mathbf{b}_\infty^m \end{pmatrix} \quad (9.1)$$

für h bei gegebenem z ersetzt, so daß sich ein Iterationsverfahren

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}'(z_p; h_p) &= (\mathbf{a}_\infty^m, \mathbf{b}_\infty^m)^\top - \mathfrak{F}(z_p), \\ z_{p+1} &= z_p + h_p, \quad p = 0, 1, \dots, \end{aligned}$$

mit einer geeigneten Startparametrisierung z_0 ergibt.

Die linearisierte Gleichung soll nun in einem Unterraum $\mathbb{Q}_N = \text{span}\{q_1, \dots, q_N\} \subset RP$ der Dimension N approximativ gelöst werden. Um aus der daraus entstehenden semidiskreten Gleichung ein Gleichungssystem zu erhalten, wird eine Kollokation in den M Punkten $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_M \in \Omega$ durchgeführt. Es ergibt sich das lineare Gleichungssystem für die N Unbekannten $a_1^{(p)}, \dots, a_N^{(p)} \in \mathbb{R}$

$$\sum_{j=1}^N a_j^{(p)} \mathfrak{F}'(z_p; q_j)(\hat{x}_i) = (\mathbf{a}_\infty^m, \mathbf{b}_\infty^m)^\top(\hat{x}_i) - \mathfrak{F}(z_p)(\hat{x}_i), \quad i = 1, \dots, M, \quad (9.2)$$

¹Zu den Bezeichnungen vergleiche Abschnitt 6.3.

wobei

$$h_p := \sum_{j=1}^N a_j^{(p)} q_j$$

die gesuchte Näherungslösung von (9.1) ist.

Da man an reellen Lösungen $a_1^{(p)}, \dots, a_N^{(p)}$ interessiert ist, entspricht (9.2) $2M$ reellen Gleichungen mit zwei Komponenten. In der Regel wird $4M > N$ sein, so daß das Gleichungssystem überbestimmt ist, es wird demzufolge eine Lösung im Sinne der kleinsten Quadrate ermittelt. Da das Problem zudem schlecht gestellt ist², wird eine Tikhonov-Regularisierung durchgeführt.

Mit den Bezeichnungen

$$\begin{aligned} c_{ij}^{(p)} &= \operatorname{Re} \left((\mathfrak{F}'(z_p; q_j)(\hat{x}_i))_a \right), & i = 1, \dots, M, j = 1, \dots, N, \\ c_{ij}^{(p)} &= \operatorname{Re} \left((\mathfrak{F}'(z_p; q_j)(\hat{x}_{i-M}))_b \right), & i = M + 1, \dots, 2M, j = 1, \dots, N, \\ c_{ij}^{(p)} &= \operatorname{Im} \left((\mathfrak{F}'(z_p; q_j)(\hat{x}_{i-2M}))_a \right), & i = 2M + 1, \dots, 3M, j = 1, \dots, N, \\ c_{ij}^{(p)} &= \operatorname{Im} \left((\mathfrak{F}'(z_p; q_j)(\hat{x}_{i-3M}))_b \right), & i = 3M + 1, \dots, 4M, j = 1, \dots, N, \\ C^{(p)} &= (c_{ij}^{(p)})_{\substack{i=1, \dots, 4M \\ j=1, \dots, N}} \in \mathbb{R}^{4M \times N}, \\ g_i^{(p)} &= \operatorname{Re} \left(\mathbf{a}_\infty^m(\hat{x}_i) - (\mathfrak{F}(z_p)(\hat{x}_i))_a \right), & i = 1, \dots, M, \\ g_i^{(p)} &= \operatorname{Re} \left(\mathbf{b}_\infty^m(\hat{x}_{i-M}) - (\mathfrak{F}(z_p)(\hat{x}_{i-M}))_b \right), & i = M + 1, \dots, 2M, \\ g_i^{(p)} &= \operatorname{Im} \left(\mathbf{a}_\infty^m(\hat{x}_{i-2M}) - (\mathfrak{F}(z_p)(\hat{x}_{i-2M}))_a \right), & i = 2M + 1, \dots, 3M, \\ g_i^{(p)} &= \operatorname{Im} \left(\mathbf{b}_\infty^m(\hat{x}_{i-3M}) - (\mathfrak{F}(z_p)(\hat{x}_{i-3M}))_b \right), & i = 3M + 1, \dots, 4M, \\ g^{(p)} &= (g_i^{(p)})_{i=1, \dots, 4M}, \\ a^{(p)} &= (a_j^{(p)})_{j=1, \dots, N}, \end{aligned}$$

wobei sich die Indizes a und b auf die jeweilige zum Fernfeld von \mathbf{a} bzw. \mathbf{b} gehörige Komponente beziehen, lautet der zu minimierende Ausdruck mit einem geeigneten Regularisierungsparameter $\alpha_p > 0$

$$\|C^{(p)}a^{(p)} - g^{(p)}\|^2 + \alpha_p \|a^{(p)}\|^2 = \sum_{i=1}^{4M} \left| \sum_{j=1}^N c_{ij}^{(p)} a_j^{(p)} - g_i^{(p)} \right|^2 + \alpha_p \sum_{j=1}^N (a_j^{(p)})^2,$$

was äquivalent³ zur Lösung von

$$\left(\alpha_p I + C^{(p)\top} C^{(p)} \right) a^{(p)} = C^{(p)\top} g^{(p)} \quad (9.3)$$

mit der Einheitsmatrix $I \in \mathbb{R}^{N \times N}$ ist.

²Die Kompaktheit von \mathfrak{F} überträgt sich auf \mathfrak{F}' .

³Vergleiche [22, Th. 16.1].

Verfügt man über Daten zu D Einfallsrichtungen $d_1, \dots, d_D \in \Omega$, so kann das System einfach erweitert werden. Man setzt $c_{ij,l}^{(p)}, g_{i,l}^{(p)}$ wie oben, wobei der Index $l = 1, \dots, D$ die Abhängigkeit von d_l kennzeichnet. Mit

$$\begin{aligned} c_{ij}^{(p)} &= c_{(i-4(l-1)M)j,l}^{(p)}, \quad i = 1, \dots, 4DM, \quad j = 1, \dots, N, \\ C^{(p)} &= (c_{ij}^{(p)})_{\substack{i=1, \dots, 4DM \\ j=1, \dots, N}} \in \mathbb{R}^{4DM \times N}, \\ g_i^{(p)} &= g_{(i-4(l-1)M),l}^{(p)}, \quad i = 1, \dots, 4DM, \\ g^{(p)} &= (g_i^{(p)})_{i=1, \dots, 4DM} \end{aligned}$$

ist dann das Gleichungssystem (9.3) zu lösen.

Ein Newton-Schritt für eine Einfallsrichtung läßt sich nun wie folgt beschreiben

- Bestimme für eine gegebene Kurve z_p die zum Operator $E + A(z_p)$ gehörige Matrix gemäß (7.13) und deren LU-Zerlegung.
Zu dem gegebenen einfallenden Feld $(\mathbf{a}^i, \mathbf{b}^i)^\top$ bestimme die rechte Seite U gemäß (7.8).
Bestimme die Lösung $\chi_i^{(n)}, i = 0, \dots, 2n - 1$ vom zugehörigen linearen Gleichungssystem (7.13).
Für $i = 1, \dots, M$ berechne $\mathfrak{F}(z_p)(\hat{x}_i)$ mit Hilfe von (7.14 a), (7.14 b) und daraus $g_i^{(p)}, i = 1, \dots, 4M$.
- Zur Berechnung von $\mathfrak{F}'(z_p; q_j)$ ermittle die rechten Seiten gemäß (6.20 a) - (6.20 d) für $h = q_1, \dots, q_N$. (Siehe dazu den Abschnitt 9.3.)
Zu diesen rechten Seiten ermittle mit der oben gewonnenen LU-Zerlegung die Fernfelder dieser N direkten Probleme an den Kollokationspunkten $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_M$, dies sind die Werte $\mathfrak{F}'(z_p; q_j)(\hat{x}_i)$. Berechne daraus $c_{ij}^{(p)}, i = 1, \dots, 4M, j = 1, \dots, N$.
- Berechne $a_j^{(p)}$ durch Lösen von (9.3). Bestimme eine neue Kurve durch $z_{p+1} = z_p + \sum_{j=1}^N a_j^{(p)} q_j$.
Brich ab, falls das Residuum

$$Res := \frac{\sum_{i=1}^M \left| \begin{pmatrix} \mathbf{a}_\infty^m \\ \mathbf{b}_\infty^m \end{pmatrix}(\hat{x}_i) - \mathfrak{F}(z_p)(\hat{x}_i) \right|}{\sum_{i=1}^M \left| \begin{pmatrix} \mathbf{a}^m \\ \mathbf{b}^m \end{pmatrix}(\hat{x}_i) \right|}$$

hinreichend klein.

Man sieht, daß in jedem Newton-Schritt $N + 1$ direkte Probleme zu lösen sind, wobei aber die zu invertierende Matrix $E + A$ stets die gleiche ist, so daß der einmalige Aufwand einer LU-Zerlegung sinnvoll erscheint. Bei D Einfallsrichtungen sind $D(N + 1)$ direkte Probleme mit gleicher Koeffizientenmatrix zu lösen.

Zum Testen der Methode ist die Erzeugung von synthetischen Fernfelddaten $(\mathbf{a}_\infty^m, \mathbf{b}_\infty^m)$ erforderlich. Um dabei „Inverse Crimes“ zu vermeiden, werden hierfür eine andere Stützstellenzahl und ein anderer Satz von Kopplungsparametern m_1, m_2, c_1, c_2 im Ansatz (4.15 a)-(4.15 d) benutzt als bei der Lösung der direkten Probleme im Newton-Algorithmus. Außerdem ist darauf zu achten, daß die gesuchte (in den Testbeispielen natürlich bekannte) Berandung z nicht im Ansatzraum \mathbb{Q}_N liegt.

Für die hier durchgeführten Untersuchungen soll nur der Fall sternförmiger Gebiete betrachtet werden. Die Basisfunktionen lassen sich in der Form

$$q_j(t) = r_j(t) \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi], \quad j = 1, \dots, N \quad (9.4)$$

mit linear unabhängigen Radialfunktionen r_j schreiben. Es wird $\tilde{\mathbb{Q}}_N = \text{span} \{r_1, \dots, r_N\}$ gesetzt.

9.2 Modifikation in der Regularisierung

Im Gegensatz zu der bisher beschriebenen Tikhonov-Regularisierung sollen jetzt auch zusätzliche Glätteeigenschaften in den Rekonstruktionen durch eine „Bestrafung“ von Ableitungen der Störung berücksichtigt werden.

Dies wird erreicht, indem die Minimierungsaufgabe

$$\|\tilde{\mathfrak{F}}'(z_p; h_p) + \tilde{\mathfrak{F}}(z_p) - (\mathbf{a}_\infty^m, \mathbf{b}_\infty^m)\|_{L^2}^2 + \alpha_p \|h_p\|_{H^s}^2 = \min ! \quad (9.5)$$

unter Verwendung einer geeigneten Sobolev-Norm ($s \in \mathbb{N}$) gelöst wird.

Mit dem bereits vorgestellten Ansatz

$$h_p := \sum_{j=1}^N a_j^{(p)} q_j$$

läßt sich dieses Minimierungsproblem in die Form

$$\text{Min} \left\| \sum_{j=1}^N a_j^{(p)} \tilde{\mathfrak{F}}'(z_p; q_j) + \tilde{\mathfrak{F}}(z_p) - \begin{pmatrix} \mathbf{a}_\infty^m \\ \mathbf{b}_\infty^m \end{pmatrix} \right\|_{L^2}^2 + \left\| \sqrt{\alpha_p} \sum_{j=1}^N a_j^{(p)} q_j \right\|_{L^2}^2 + \left\| \sqrt{\alpha_p} \sum_{j=1}^N a_j^{(p)} q_j^{(s)} \right\|_{L^2}^2 !$$

bringen und durch

$$\|Ca - g\|^2 = \min ! \quad \text{bzw.} \quad C^\top Ca = C^\top g$$

diskretisieren, wobei folgende Bezeichnungen verwendet werden.

$$\begin{aligned}
c_{ij}^{(p)} &= \operatorname{Re} \left((\mathfrak{F}'(z_p; q_j)(\hat{x}_i))_a \right), & i = 1, \dots, M, j = 1, \dots, N, \\
c_{ij}^{(p)} &= \operatorname{Re} \left((\mathfrak{F}'(z_p; q_j)(\hat{x}_{i-M}))_b \right), & i = M + 1, \dots, 2M, j = 1, \dots, N, \\
c_{ij}^{(p)} &= \operatorname{Im} \left((\mathfrak{F}'(z_p; q_j)(\hat{x}_{i-2M}))_a \right), & i = 2M + 1, \dots, 3M, j = 1, \dots, N, \\
c_{ij}^{(p)} &= \operatorname{Im} \left((\mathfrak{F}'(z_p; q_j)(\hat{x}_{i-3M}))_b \right), & i = 3M + 1, \dots, 4M, j = 1, \dots, N, \\
c_{ij}^{(p)} &= \sqrt{\alpha_p N / K} r_j(t_{i-4M}^K), & i = 4M + 1, \dots, 4M + K, j = 1, \dots, N, \\
c_{ij}^{(p)} &= \sqrt{\alpha_p N / K} r_j^{(s)}(t_{i-4M-K}^K), & i = 4M + K + 1, \dots, 4M + 2K, j = 1, \dots, N, \\
C^{(p)} &= (c_{ij}^{(p)})_{\substack{i=1, \dots, 4M+2K \\ j=1, \dots, N}} \in \mathbb{R}^{(4M+2K) \times N}, \\
g_i^{(p)} &= \operatorname{Re} \left(\mathbf{a}_\infty^m(\hat{x}_i) - (\mathfrak{F}(z_p)(\hat{x}_i))_a \right), & i = 1, \dots, M, \\
g_i^{(p)} &= \operatorname{Re} \left(\mathbf{b}_\infty^m(\hat{x}_{i-M}) - (\mathfrak{F}(z_p)(\hat{x}_{i-M}))_b \right), & i = M + 1, \dots, 2M, \\
g_i^{(p)} &= \operatorname{Im} \left(\mathbf{a}_\infty^m(\hat{x}_{i-2M}) - (\mathfrak{F}(z_p)(\hat{x}_{i-2M}))_a \right), & i = 2M + 1, \dots, 3M, \\
g_i^{(p)} &= \operatorname{Im} \left(\mathbf{b}_\infty^m(\hat{x}_{i-3M}) - (\mathfrak{F}(z_p)(\hat{x}_{i-3M}))_b \right), & i = 3M + 1, \dots, 4M, \\
g_i^{(p)} &= 0, & i = 4M + 1, \dots, 4M + 2K, \\
g^{(p)} &= (g_i^{(p)})_{i=1, \dots, 4M+2K}, \\
a^{(p)} &= (a_j^{(p)})_{j=1, \dots, N}, \\
t_i^K &= 2\pi i / K.
\end{aligned}$$

Dabei sind die in der Definition von $c_{ij}^{(p)}$, $i = 4M + 1, \dots, 4M + 2K$ auftretenden Funktionen r_j durch (9.4) erklärt.

Durch diese Art der Regularisierung ist es möglich, bei der Berechnung des von der Sobolev-Norm stammenden Anteils eine andere Stützstellenauswahl t_i^K zu treffen und dadurch den Rand der Rekonstruktion auch unabhängig von den Beobachtungsrichtungen \hat{x}_i zu kontrollieren.

9.3 Die rechte Seite und der hypersinguläre Operator T

Um die Randwerte für die Berechnung der Fréchet-Ableitung nach (6.21 a) - (6.21 d) zu bestimmen, ist neben der numerischen Auswertung der Operatoren⁴ S_κ , K_κ , K_κ^* , $\kappa \in \{\alpha_A, \alpha_B\}$ auch eine des hypersingulären Operator T_κ erforderlich. Für diesen gilt mit der in (7.1) eingeführten Bezeichnung $T_\kappa = \tilde{T}_\kappa + T_0$, so daß es für die weiteren Betrachtungen ausreichend wäre, nur noch den Hauptbestandteil

$$(T_0\varphi)(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial\nu(x)} \int_{\partial D} \varphi(y) \frac{\partial}{\partial\nu(y)} \ln \frac{1}{|x-y|} ds(y), \quad x \in \partial D$$

⁴Dies ist in Abschnitt 7.1 beschrieben.

in parametrisierte Form zu überführen und anschließend zu diskretisieren.⁵ Hier soll aber gleich der gesamte Operator T_κ entsprechend der Darstellung in [25, Abschn. 2] untersucht werden. Es gilt die Beziehung

$$T_\kappa \varphi = \frac{d}{ds} S_\kappa \frac{d\varphi}{ds} + \kappa^2 \nu \cdot S(\nu \varphi).$$

Mit den Bezeichnungen aus Abschnitt 7.1 gilt

$$\left(\frac{d}{ds} S_\kappa \frac{d\varphi}{ds} \right) (z(t)) = \frac{1}{|z'(t)|} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{1}{2\pi} \cot \frac{\tau - t}{2} \frac{d\varphi(z(\tau))}{d\tau} - \hat{N}_\kappa(t, \tau) \varphi(z(\tau)) \right\} d\tau$$

mit

$$\begin{aligned} \hat{N}_\kappa(t, \tau) &= \frac{i}{2} \frac{(z'(t), z(t) - z(\tau))(z'(\tau), z(t) - z(\tau))}{[r(t, \tau)]^2} \left\{ \kappa^2 H_0^1(\kappa r(t, \tau)) - 2\kappa \frac{H_1^1(\kappa r(t, \tau))}{r(t, \tau)} \right\} \\ &\quad + \frac{i\kappa}{2} \frac{(z'(t), z'(\tau))}{r(t, \tau)} H_1^1(\kappa r(t, \tau)) + \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sin^2 \frac{t-\tau}{2}}. \end{aligned}$$

Durch Abspalten der logarithmischen Singularität erhält man die analytischen Funktionen

$$\begin{aligned} \hat{N}_\kappa^1(t, \tau) &= \frac{-1}{2\pi} \frac{(z'(t), z(t) - z(\tau))(z'(\tau), z(t) - z(\tau))}{[r(t, \tau)]^2} \left\{ \kappa^2 J_0(\kappa r(t, \tau)) - 2\kappa \frac{J_1(\kappa r(t, \tau))}{r(t, \tau)} \right\} \\ &\quad - \frac{\kappa}{2\pi} \frac{(z'(t), z'(\tau))}{r(t, \tau)} J_1(\kappa r(t, \tau)), \\ \hat{N}_\kappa^2(t, \tau) &= \hat{N}_\kappa(t, \tau) - \hat{N}_\kappa^1(t, \tau) \ln \left(4 \sin^2 \frac{t-\tau}{2} \right) \end{aligned}$$

mit Diagonaltermen

$$\begin{aligned} \hat{N}_\kappa^1(t, t) &= -\frac{\kappa^2 |z'(t)|^2}{4\pi}, \\ \hat{N}_\kappa^2(t, t) &= \left(\pi i - 1 - 2C_E - 2 \ln \frac{\kappa |z'(t)|}{2} \right) \frac{\kappa^2 |z'(t)|^2}{4\pi} \\ &\quad + \frac{1}{12\pi} + \frac{(z'(t), z''(t))^2}{2\pi |z'(t)|^4} - \frac{|z''(t)|^2}{4\pi |z'(t)|^2} - \frac{(z'(t), z'''(t))}{6\pi |z'(t)|^2}. \end{aligned}$$

Es wird nun neben (7.9) und (7.11) die folgende Quadraturformel verwendet, die man ebenfalls als Interpolationsquadratur mit trigonometrischen Polynomen erhält⁶

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2\pi} \cot \frac{\tau - t}{2} f'(\tau) d\tau \approx \sum_{j=0}^{2n-1} T_j^{(n)}(t) f(t_j) \quad (9.6)$$

⁵Vergleiche etwa [33, S.26].

⁶Vergleiche [34, Abschn. 3.1].

mit Quadratgewichten

$$T_j^{(n)}(t) := -\frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n-1} l \cos(l(t-t_j)) - \frac{1}{2} \cos(n(t-t_j)), \quad j = 0, \dots, 2n-1. \quad (9.7)$$

Dabei bezeichnet wieder $t_j = \pi j/n$ für $j = 0, \dots, 2n-1$. Auch hier werden später, wie in (7.13), nur

$$T_{|i-j|}^{(n)} := T_{|i-j|}^{(n)}(0) = T_j^{(n)}(t_i)$$

benötigt, wofür

$$T_l^{(n)} = \begin{cases} \frac{1}{2n \sin^2(\pi l/2n)}, & l \text{ ungerade,} \\ 0, & l \text{ gerade, } l \neq 0, \\ -\frac{n}{2}, & l = 0 \end{cases}$$

gilt. Mit diesen Überlegungen ist es nun möglich, die Bestimmung von \mathcal{U} in (6.19) zu beschreiben.

Exemplarisch erhält man für die Normalenableitung von \mathbf{a}_0 , die für (6.20 c), (6.20 d) benötigt wird, gemäß (6.21 c)

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial \mathbf{a}_0}{\partial \nu}(z(t)) &= \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k} (T_{\alpha_{\mathbf{A}}} \psi_1)(t) + m_1 ((K_{\alpha_{\mathbf{A}}}^* + I) \varphi_1)(t) \\ &\approx \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k} \left(\frac{1}{|z'(t)|} \left\{ \sum_{j=0}^{2n-1} T_j^{(n)}(t) \psi_1(t_j) - \sum_{j=0}^{2n-1} R_j^{(n)}(t) \hat{N}_{\alpha_{\mathbf{A}}}^1(t, t_j) \psi_1(t_j) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\pi}{n} \sum_{j=0}^{2n-1} \hat{N}_{\alpha_{\mathbf{A}}}^2(t, t_j) \psi_1(t_j) \right\} \right. \\ &\quad \left. + \alpha_{\mathbf{A}}^2 \left\{ \nu_1(t) \left[\sum_{j=0}^{2n-1} R_j^{(n)}(t) M_{\alpha_{\mathbf{A}}}^1(t, t_j) \nu_1(t_j) \psi_1(t_j) + \frac{\pi}{n} \sum_{j=0}^{2n-1} M_{\alpha_{\mathbf{A}}}^2(t, t_j) \nu_1(t_j) \psi_1(t_j) \right] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \nu_2(t) \left[\sum_{j=0}^{2n-1} R_j^{(n)}(t) M_{\alpha_{\mathbf{A}}}^1(t, t_j) \nu_2(t_j) \psi_1(t_j) + \frac{\pi}{n} \sum_{j=0}^{2n-1} M_{\alpha_{\mathbf{A}}}^2(t, t_j) \nu_2(t_j) \psi_1(t_j) \right] \right\} \right) \\ &\quad \left. + m_1 \left\{ \sum_{j=0}^{2n-1} R_j^{(n)}(t) L_{\alpha_{\mathbf{A}}}^{*1}(t, t_j) \varphi_1(t_j) + \frac{\pi}{n} \sum_{j=0}^{2n-1} L_{\alpha_{\mathbf{A}}}^{*2}(t, t_j) \varphi_1(t_j) + \varphi_1(t) \right\}, \end{aligned}$$

wobei wieder bei den Dichten φ_1 , ψ_1 die gleiche Symbolik für die parametrisierte Form (auf der rechten Seite) wie für die nicht parametrisierte (auf der linken) verwendet wird. Dabei gilt $\nu_1(t) = z_2'(t)/|z'(t)|$ und $\nu_2(t) = -z_1'(t)/|z'(t)|$.

Daraus ergeben sich dann unmittelbar die Werte

$$\mathbf{a}_j^{\text{Neum}} := \frac{\partial \mathbf{a}_0}{\partial \nu}(z(t_j)), \quad \mathbf{b}_j^{\text{Neum}} := \frac{\partial \mathbf{b}_0}{\partial \nu}(z(t_j)), \quad j = 0, \dots, 2n-1$$

an den Stützstellen t_j .

Die Dirichletdaten nach (6.21 a), (6.21 b) können unmittelbar an den Stützstellen gemäß

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_j^{\text{Diri}} &:= \mathbf{a}_0(z(t_j)) = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k} (K_{\alpha_{\mathbf{A}}} - I) \psi_1 + m_1 S_{\alpha_{\mathbf{A}}} \varphi_1 \right) (t_j), \\ \mathbf{b}_j^{\text{Diri}} &:= \mathbf{b}_0(z(t_j)) = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k} (K_{\alpha_{\mathbf{B}}} - I) \psi_2 + m_2 S_{\alpha_{\mathbf{B}}} \varphi_2 \right) (t_j)\end{aligned}$$

mit dem in Abschnitt 7.1 beschriebenen Verfahren ermittelt werden.

Um die erforderlichen Ableitungen in (6.20 a), (6.20 b) zu berechnen, wird zunächst trigonometrisch interpoliert

$$\mathbf{a}_0^{\text{tr.int.}}(t) = \sum_{j=0}^{2n-1} \mathbf{a}_j^{\text{Diri}} l_j(t), \quad \mathbf{b}_0^{\text{tr.int.}}(t) = \sum_{j=0}^{2n-1} \mathbf{b}_j^{\text{Diri}} l_j(t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

mit den trigonometrischen Polynomen

$$l_j(t) = \frac{1}{2n} \left\{ 1 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \cos k(t - t_j) + \cos n(t - t_j) \right\}, \quad j = 0, \dots, 2n - 1,$$

als Lagrange-Funktionen⁷.

$\mathbf{a}_0 \circ z$ und $\mathbf{b}_0 \circ z$ in (6.20 a), (6.20 b) werden durch $\mathbf{a}_0^{\text{tr.int.}}$ beziehungsweise $\mathbf{b}_0^{\text{tr.int.}}$ substituiert. In dieser Darstellung kann dann die Differentiation nach dem Randparameter unmittelbar durchgeführt werden. Es wird lediglich von den Ableitungen

$$\begin{aligned}l_j'(t) &= -\frac{1}{2n} \left\{ 2 \sum_{k=1}^{n-1} k \sin k(t - t_j) + n \sin n(t - t_j) \right\}, \\ l_j''(t) &= -\frac{1}{2n} \left\{ 2 \sum_{k=1}^{n-1} k^2 \cos k(t - t_j) + n^2 \cos n(t - t_j) \right\}\end{aligned}$$

Gebrauch gemacht, die nur in den Punkten t_i benötigt werden.

So ergibt sich exemplarisch

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_1(t_i) &= -\alpha_{\mathbf{A}}(\nu(z), h)|_{t=t_i} \left((k\xi_+ - \alpha_{\mathbf{A}}) \mathbf{a}_i^{\text{Diri}} - k\xi_- \mathbf{b}_i^{\text{Diri}} \right) \\ &\quad - \frac{1}{|z'(t_i)|} \sum_{j=0}^{2n-1} \left\{ \left(\frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k} \xi_+ - 1 \right) \mathbf{a}_j^{\text{Diri}} - \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k} \xi_- \mathbf{b}_j^{\text{Diri}} \right\} \left[\left(\frac{(\nu(z), h)}{|z'|} \right)' l_j' + \frac{(\nu(z), h)}{|z'|} l_j'' \right]_{t=t_i}.\end{aligned}$$

⁷Siehe [22, (11.13)].

9.4 Rekonstruktionen

Trigonometrische Polynome als Ansatzfunktionen

Zunächst wird als Approximationsraum der Raum der trigonometrischen Polynome

$$\tilde{\mathbb{Q}}_N^{trig} := T_{\tilde{N}} = \left\{ \sum_{j=0}^{\tilde{N}} c_j \cos(j \cdot) + \sum_{j=1}^{\tilde{N}} s_j \sin(j \cdot) \mid c_0, \dots, c_{\tilde{N}}, s_1, \dots, s_{\tilde{N}} \in \mathbb{R} \right\}$$

mit $N = 2\tilde{N} + 1$ verwendet.

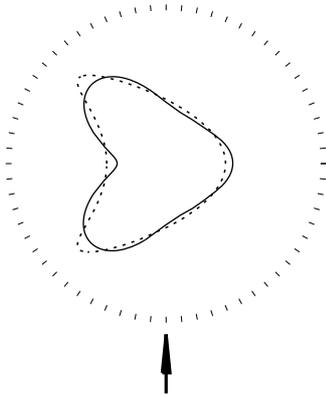
Als Startkurve z_0 dient der Einheitskreis

$$z_0(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

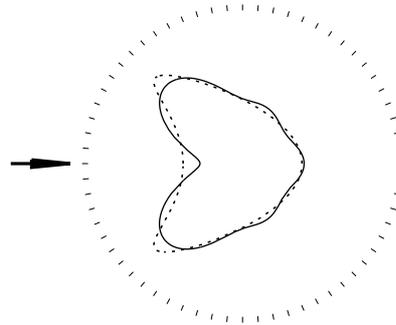
Die synthetischen Fernfelddaten des direkten Streuproblems wurden mit der Parameterwahl $c_1 = c_2 = m_1 = m_2 = 1.0$ und halber Stützstellenzahl $n = 64$ bestimmt. Dabei waren $\varepsilon = 1.0$, $\varepsilon_0 = 1.4$, $\mu = 1.0$, $\mu_0 = 1.2$, $\omega = 1.0$, $\beta = 0.1$.

Für den inversen Löser wurde $c_1 = c_2 = 2.0$, $m_1 = m_2 = 0.5$ sowie $n = 98$ gewählt. Die gezeigten Beispiele sollen demonstrieren, daß das beschriebene Verfahren prinzipiell zur Gebietsrekonstruktion geeignet ist. Es besteht hier allerdings nicht der Anspruch, eine möglichst hohe Rekonstruktionsgüte zu erzielen. Vielmehr haben die numerischen Tests gezeigt, daß der Wahl insbesondere des Regularisierungsparameters eine große Rolle zukommt.

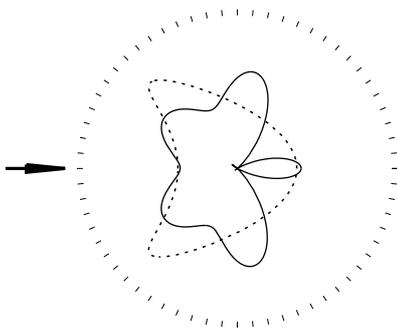
Bei der Tikhonov-Regularisierung wird dies an den dargestellten Kurven deutlich. Die beiden Rekonstruktionen zum Regularisierungsparameter 10 liefern rechte gute Darstellungen, die Kurve zum Regularisierungsparameter 1 hingegen ist nicht zulässig. Die Pfeile zeigen die Einfallsrichtung und die kurzen Striche die benutzten Beobachtungsrichtungen an, die gestrichelte Linie ist der zu rekonstruierende Drachen, die durchgezogene Linie die Rekonstruktion.



$\alpha = 10.0, N = 5, n = 98$
 $Res = 2.3 \cdot 10^{-5}, p_{end} = 59$

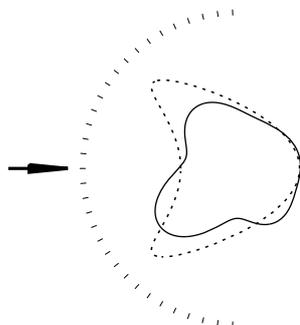


$\alpha = 10.0, N = 5, n = 98$
 $Res = 1.7 \cdot 10^{-5}, p_{end} = 100$



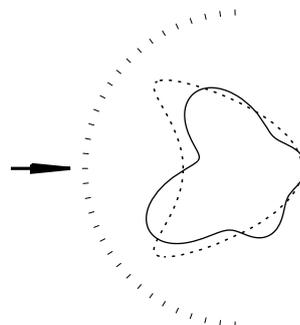
$\alpha = 1.0, N = 5, n = 98,$
 $Res = 2.4 \cdot 10^{-2}, p_{end} = 12$

Bei eingeschränktem Meßbereich, wie in den folgenden beiden Bildern demonstriert, ist das Residuum größer, aber die Konturen werden weiterhin teilweise approximiert.



$$\alpha = 10.0, N = 5, n = 98$$

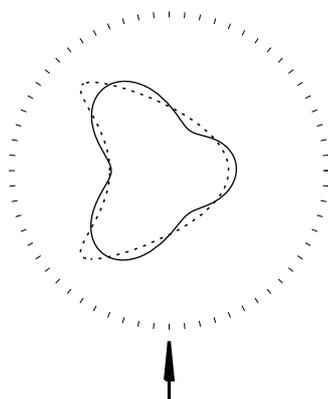
$$Res = 3.9 \cdot 10^{-2}, p_{end} = 100$$



$$\alpha = 1.0, N = 5, n = 98$$

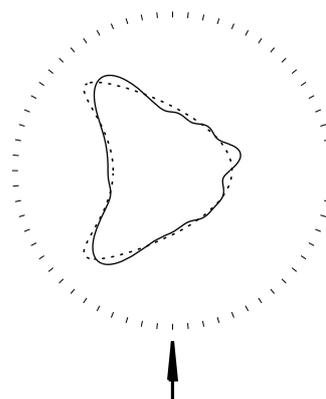
$$Res = 3.8 \cdot 10^{-2}, p_{end} = 41$$

Besser verhielt sich das Verfahren bei der modifizierten Regularisierung. Mit den gleichen Parametern wie eben, jedoch zusätzlich $K = 100$ erhält man bei unterschiedlichen Werten von s die folgenden Resultate. Dabei war die Zahl der Iterationen zu $n = 48$, $N = 5$ geringer, bezüglich der Rechenzeit und der erzielten Genauigkeit waren die Experimente mit geringerer Stützstellenzahl $n = 24$ und höherer Anzahl von Ansatzfunktionen $N = 10$ aber deutlich im Vorteil. Eventuell sollte man also zunächst mit niedriger Stützstellenzahl rechnen und das erzielte Resultat als neue Startkurve für einige Schritte mit höherer Stützstellenzahl nutzen.



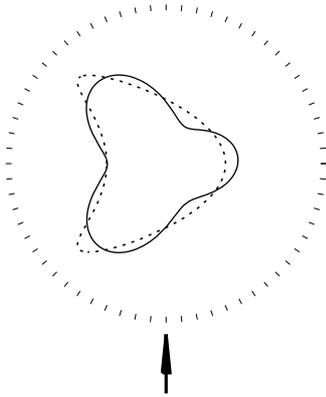
$$\alpha = 1.0 \cdot 0.8^p, s = 1, N = 5, n = 48,$$

$$Res = 2.1 \cdot 10^{-4}, p_{end} = 19$$

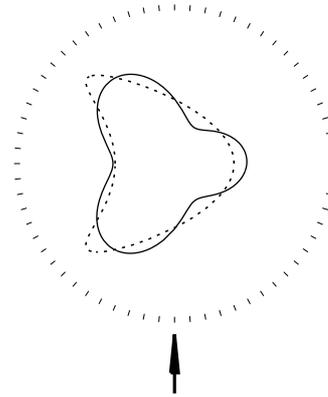


$$\alpha = 10.0 \cdot 0.8^p, s = 1, N = 10, n = 24,$$

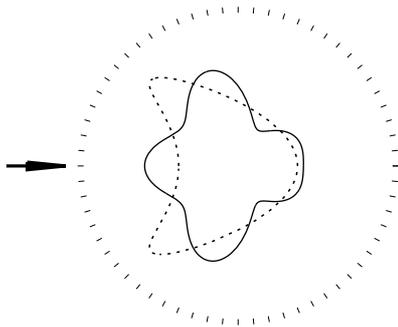
$$Res = 1.5 \cdot 10^{-5}, p_{end} = 53$$



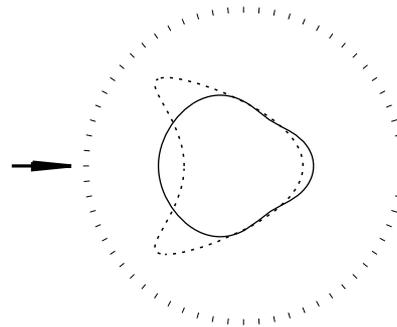
$$\alpha = 10.0 \cdot 0.5^p, s = 2, N = 5, n = 48, \\ Res = 1.2 \cdot 10^{-4}, p_{end} = 17$$



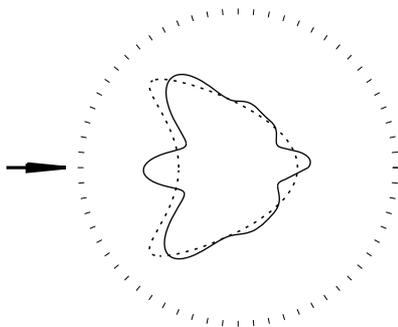
$$\alpha = 10.0 \cdot 0.5^p, s = 3, N = 5, n = 48, \\ Res = 2.7 \cdot 10^{-4}, p_{end} = 19$$



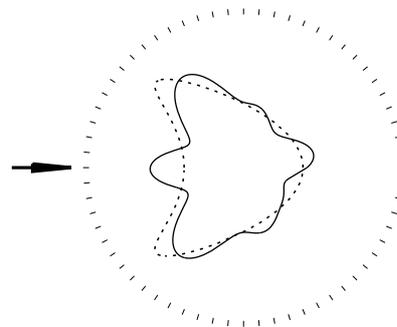
$$\alpha = 10.0 \cdot 0.5^p, s = 2, N = 5, n = 48, \\ Res = 5.2 \cdot 10^{-4}, p_{end} = 21$$



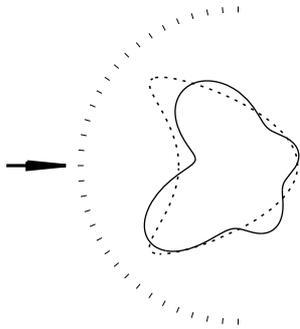
$$\alpha = 10.0 \cdot 0.5^p, s = 3, N = 5, n = 48, \\ Res = 1.4 \cdot 10^{-3}, p_{end} = 19$$



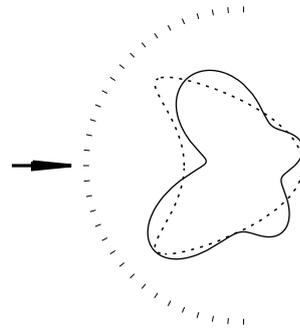
$$\alpha = 10.0 \cdot 0.8^p, s = 1, N = 10, n = 24, \\ Res = 9.9 \cdot 10^{-5}, p_{end} = 49$$



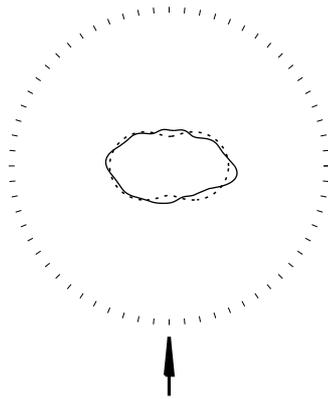
$$\alpha = 10.0 \cdot 0.8^p, s = 2, N = 10, n = 24, \\ Res = 1.4 \cdot 10^{-4}, p_{end} = 63$$



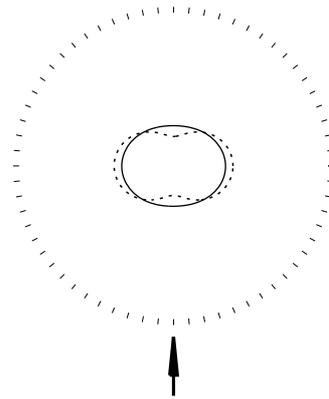
$$\alpha = 10.0 \cdot 0.5^p, s = 1, N = 5, n = 48, \\ Res = 3.8 \cdot 10^{-2}, p_{end} = 16$$



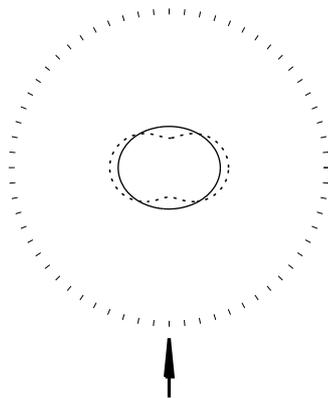
$$\alpha = 10.0 \cdot 0.5^p, s = 3, N = 5, n = 48, \\ Res = 3.8 \cdot 10^{-2}, p_{end} = 24$$



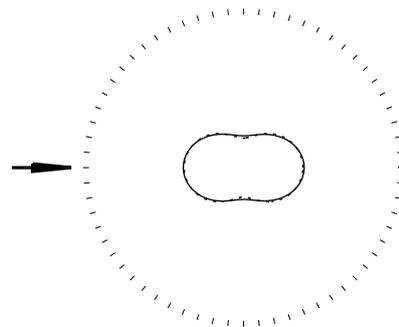
$$\alpha = 10.0 \cdot 0.8^p, s = 1, N = 10, n = 24, \\ Res = 4.8 \cdot 10^{-6}, p_{end} = 60$$



$$\alpha = 10.0 \cdot 0.8^p, s = 3, N = 10, n = 24, \\ Res = 2.1 \cdot 10^{-4}, p_{end} = 49$$



$$\alpha = 1.0 \cdot 0.8^p, s = 2, N = 5, n = 48, \\ Res = 2.8 \cdot 10^{-4}, p_{end} = 27$$



$$\alpha = 1.0 \cdot 0.8^p, s = 2, N = 5, n = 48, \\ Res = 1.1 \cdot 10^{-5}, p_{end} = 26$$

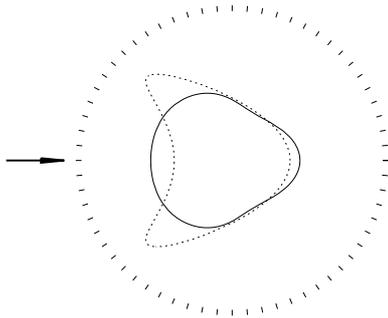
Bei den Beispielen mit Einfallrichtung in den konkaven Teil ist zu erkennen, daß sich diese Struktur nicht voll ausbildet (dies war bei allen gerechneten Test zu beobachten). Die Residuen in den Fernfeldern, der einzige Maßstab, an dem man die Rekonstruktionsgüte objektiv messen kann, werden hiervon aber wenig beeinflusst. Zum Teil läßt sich dieser Effekt sicher durch das zusätzliche „Bestrafen“ der Ableitungen erklären.

Radiale Basisfunktionen als Ansatzfunktionen

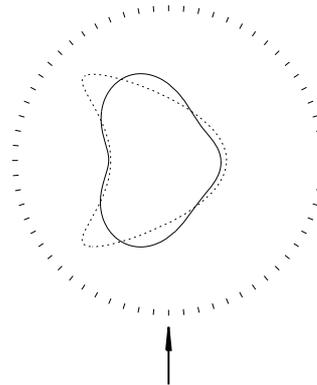
Hier dienen radiale Basisfunktionen als Ansatzfunktionen

$$\tilde{\mathbb{Q}}_{N+1}^{RBF} := \left\{ a_0 + \sum_{j=1}^N a_j e^{\gamma(\cos(t-2\pi j/N)-1)} \cos(\sin(t-2\pi j/N)) \mid a_0, \dots, a_N \in \mathbb{R} \right\}$$

mit geeignetem Parameter $\gamma > 0$. Die auftretenden Funktionen sind 2π -periodisch und unendlich oft differenzierbar.⁸ Realisiert wurde das Verfahren für die Tikhonov-Regularisierung, die Zahl der Stützstellen betrug $2n = 160$.



$$\alpha = 10.0, \gamma = 5.0, N = 10, \\ Res = 1.3 \cdot 10^{-3}, p_{end} = 100$$



$$\alpha = 10.0, \gamma = 4.0, N = 10, \\ Res = 1.1 \cdot 10^{-3}, p_{end} = 100$$

Hier läßt sich bei Einstrahlung von links das gleiche Phänomen wie zuvor beobachten, die Konvergenz ist sehr langsam, so daß jeweils nach höchstens 100 Iterationen abgebrochen wurde.

Insgesamt läßt sich einschätzen, daß das beschriebene Rekonstruktionsverfahren geeignet ist, um aus den Fernfelddaten auf den Gebietsrand zu schließen. Allerdings werden auch Schwierigkeiten hierbei deutlich, wie man an den graphischen Darstellungen erkennt. Durch eine Verfeinerung bei der Parameterauswahl und eine effektivere Programmierung sowie gemischte Strategien, wie sie bereits angedeutet wurden, könnten die Resultate sicher noch verbessert werden.

⁸Vergleiche [32, S. 33].

A Anhang

A.1 Beweis zu Satz 6.8

Satz 6.8 *Das elektrische Fernfeld \mathbf{e}_∞ für die Streuung einer ebenen elektromagnetischen Welle am chiralen Gebiet beim transversalmagnetischen Problem erfüllt die Reziprozitätsrelation*

$$\mathbf{e}_\infty(\hat{x}; d) = \mathbf{e}_\infty(-d; -\hat{x})$$

und das magnetische Fernfeld \mathbf{h}_∞ für die Streuung einer ebenen elektromagnetischen Welle am chiralen Gebiet beim transversalelektrischen Problem

$$\mathbf{h}_\infty(\hat{x}; d) = \mathbf{h}_\infty(-d; -\hat{x})$$

für alle $\hat{x}, d \in \Omega$.

Beweis Sei $d \in \Omega$, es bezeichne $u^i(x; d) = e^{ikx \cdot d}$, $c_a = c_b = ik(\mu_0/\mu)^{1/2}$ für das transversalmagnetische und $-c_a = c_b = k(\varepsilon_0/\varepsilon)^{1/2}$ für das transversalelektrische Problem, so daß also

$$\mathbf{a}^i(x; d) = c_a u^i(x; d), \quad \mathbf{b}^i(x; d) = c_b u^i(x; d)$$

gilt. Weiter seien $\mathbf{a}_0(\cdot; d)$, $\mathbf{b}_0(\cdot; d)$, $\mathbf{a}^s(\cdot; d)$, $\mathbf{b}^s(\cdot; d)$ die Lösungen des zugehörigen Streuproblems, $\mathbf{a}_\infty(\cdot; d)$, $\mathbf{b}_\infty(\cdot; d)$ die zu \mathbf{a}^s beziehungsweise \mathbf{b}^s gehörigen Fernfelder und $\mathbf{a}(\cdot; d) = \mathbf{a}^i(\cdot; d) + \mathbf{a}^s(\cdot; d)$, $\mathbf{b}(\cdot; d) = \mathbf{b}^i(\cdot; d) + \mathbf{b}^s(\cdot; d)$. Mit $m = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{8\pi k}}$ gilt¹

$$\mathbf{a}_\infty(\hat{x}; d) = m \int_{\partial D} \left\{ \mathbf{a}^s(y; d) \frac{\partial u^i(y; -\hat{x})}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \mathbf{a}^s(y; d)}{\partial \nu(y)} u^i(y; -\hat{x}) \right\} ds(y), \quad (\text{A.1 a})$$

$$\mathbf{b}_\infty(\hat{x}; d) = m \int_{\partial D} \left\{ \mathbf{b}^s(y; d) \frac{\partial u^i(y; -\hat{x})}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \mathbf{b}^s(y; d)}{\partial \nu(y)} u^i(y; -\hat{x}) \right\} ds(y) \quad (\text{A.1 b})$$

und analog

$$\mathbf{a}_\infty(-d, -\hat{x}) = m \int_{\partial D} \left\{ \mathbf{a}^s(y; -\hat{x}) \frac{\partial u^i(y; d)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \mathbf{a}^s(y; -\hat{x})}{\partial \nu(y)} u^i(y; d) \right\} ds(y), \quad (\text{A.2 a})$$

$$\mathbf{b}_\infty(-d, -\hat{x}) = m \int_{\partial D} \left\{ \mathbf{b}^s(y; -\hat{x}) \frac{\partial u^i(y; d)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \mathbf{b}^s(y; -\hat{x})}{\partial \nu(y)} u^i(y; d) \right\} ds(y) \quad (\text{A.2 b})$$

¹Vergleiche [3, Th. 2.5].

Weiter gilt nach dem Greenschen Satz, angewendet auf das Außengebiet, unter Ausnutzung der Helmholtzgleichung und der (SAB)

$$0 = \int_{\partial D} \left\{ \mathbf{a}^s(y; d) \frac{\partial \mathbf{a}^s(y; -\hat{x})}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \mathbf{a}^s(y; d)}{\partial \nu(y)} \mathbf{a}^s(y; -\hat{x}) \right\} ds(y), \quad (\text{A.3 a})$$

$$0 = \int_{\partial D} \left\{ \mathbf{a}^s(y; d) \frac{\partial \mathbf{b}^s(y; -\hat{x})}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \mathbf{a}^s(y; d)}{\partial \nu(y)} \mathbf{b}^s(y; -\hat{x}) \right\} ds(y), \quad (\text{A.3 b})$$

$$0 = \int_{\partial D} \left\{ \mathbf{b}^s(y; d) \frac{\partial \mathbf{b}^s(y; -\hat{x})}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \mathbf{b}^s(y; d)}{\partial \nu(y)} \mathbf{b}^s(y; -\hat{x}) \right\} ds(y), \quad (\text{A.3 c})$$

$$0 = \int_{\partial D} \left\{ \mathbf{b}^s(y; d) \frac{\partial \mathbf{a}^s(y; -\hat{x})}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \mathbf{b}^s(y; d)}{\partial \nu(y)} \mathbf{a}^s(y; -\hat{x}) \right\} ds(y) \quad (\text{A.3 d})$$

und bei Anwendung auf das Innengebiet

$$0 = \int_{\partial D} \left\{ u^i(y; d) \frac{\partial u^i(y; -\hat{x})}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u^i(y; d)}{\partial \nu(y)} u^i(y; -\hat{x}) \right\} ds(y). \quad (\text{A.4})$$

Addition von (A.1 a) und dem $\frac{m}{c_a}$ -fachen von (A.3 a) führt auf

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_\infty(\hat{x}; d) &= \frac{m}{c_a} \int_{\partial D} \left\{ \mathbf{a}^s(y; d) \frac{\partial \mathbf{a}(y; -\hat{x})}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \mathbf{a}^s(y; d)}{\partial \nu(y)} \mathbf{a}(y; -\hat{x}) \right\} ds(y) \\ &= \frac{m}{c_a} \int_{\partial D} \left\{ \mathbf{a}(y; d) \frac{\partial \mathbf{a}(y; -\hat{x})}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \mathbf{a}(y; d)}{\partial \nu(y)} \mathbf{a}(y; -\hat{x}) \right\} ds(y) \\ &\quad - m \int_{\partial D} \left\{ u^i(y; d) \frac{\partial \mathbf{a}(y; -\hat{x})}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u^i(y; d)}{\partial \nu(y)} \mathbf{a}(y; -\hat{x}) \right\} ds(y). \end{aligned}$$

Weiterhin ergibt Subtraktion des mc_a -fachen von (A.4) von (A.2 a)

$$\mathbf{a}_\infty(-d; -\hat{x}) = m \int_{\partial D} \left\{ \mathbf{a}(y; -\hat{x}) \frac{\partial u^i(y; d)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \mathbf{a}(y; -\hat{x})}{\partial \nu(y)} u^i(y; d) \right\} ds(y),$$

so daß

$$\mathbf{a}_\infty(\hat{x}; d) = \mathbf{a}_\infty(-d; -\hat{x}) + \frac{m}{c_a} \int_{\partial D} \left\{ \mathbf{a}(y; d) \frac{\partial \mathbf{a}(y; -\hat{x})}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \mathbf{a}(y; d)}{\partial \nu(y)} \mathbf{a}(y; -\hat{x}) \right\} ds(y) \quad (\text{A.5 a})$$

folgt. Analog kann man auch für \mathbf{b} rechnen und erhält

$$\mathbf{b}_\infty(\hat{x}; d) = \mathbf{b}_\infty(-d; -\hat{x}) + \frac{m}{c_b} \int_{\partial D} \left\{ \mathbf{b}(y; d) \frac{\partial \mathbf{b}(y; -\hat{x})}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \mathbf{b}(y; d)}{\partial \nu(y)} \mathbf{b}(y; -\hat{x}) \right\} ds(y). \quad (\text{A.5 b})$$

Addition von (A.1 a) und dem $\frac{m}{c_b}$ -fachen von (A.3 b) führt auf

$$\mathbf{a}_\infty(\hat{x}; d) = \frac{m}{c_b} \int_{\partial D} \left\{ \mathbf{a}^s(y; d) \frac{\partial \mathbf{b}(y; -\hat{x})}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \mathbf{a}^s(y; d)}{\partial \nu(y)} \mathbf{b}(y; -\hat{x}) \right\} ds(y)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{m}{c_b} \int_{\partial D} \left\{ \mathbf{a}(y; d) \frac{\partial \mathbf{b}(y; -\hat{x})}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \mathbf{a}(y; d)}{\partial \nu(y)} \mathbf{b}(y; -\hat{x}) \right\} ds(y) \\
&\quad - \frac{mc_a}{c_b} \int_{\partial D} \left\{ u^i(y; d) \frac{\partial \mathbf{b}(y; -\hat{x})}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u^i(y; d)}{\partial \nu(y)} \mathbf{b}(y; -\hat{x}) \right\} ds(y).
\end{aligned}$$

Weiterhin ergibt Subtraktion des mc_b -fachen von (A.4) von (A.2 b)

$$\mathbf{b}_\infty(-d; -\hat{x}) = m \int_{\partial D} \left\{ \mathbf{b}(y; -\hat{x}) \frac{\partial u^i(y; d)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \mathbf{b}(y; -\hat{x})}{\partial \nu(y)} u^i(y; d) \right\} ds(y),$$

so daß

$$c_b \mathbf{a}_\infty(\hat{x}; d) = c_a \mathbf{b}_\infty(-d; -\hat{x}) + m \int_{\partial D} \left\{ \mathbf{a}(y; d) \frac{\partial \mathbf{b}(y; -\hat{x})}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \mathbf{a}(y; d)}{\partial \nu(y)} \mathbf{b}(y; -\hat{x}) \right\} ds(y) \quad (\text{A.6 a})$$

gilt. Eine ganz ähnliche Rechnung führt auf

$$c_a \mathbf{b}_\infty(\hat{x}; d) = c_b \mathbf{a}_\infty(-d; -\hat{x}) + m \int_{\partial D} \left\{ \mathbf{b}(y; d) \frac{\partial \mathbf{a}(y; -\hat{x})}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \mathbf{b}(y; d)}{\partial \nu(y)} \mathbf{a}(y; -\hat{x}) \right\} ds(y). \quad (\text{A.6 b})$$

Es werden nun die Randbedingungen

$$\mathbf{a} = \xi_+ \mathbf{a}_0 - \xi_- \mathbf{b}_0, \quad \mathbf{b} = \xi_+ \mathbf{b}_0 - \xi_- \mathbf{a}_0, \quad \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \nu} = \frac{k}{\alpha_{\mathbf{A}}} \frac{\partial \mathbf{a}_0}{\partial \nu}, \quad \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial \nu} = \frac{k}{\alpha_{\mathbf{B}}} \frac{\partial \mathbf{b}_0}{\partial \nu}$$

und der Greensche Satz benutzt, um die Beziehungen

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial D} \left\{ \mathbf{a}(y; d) \frac{\partial \mathbf{a}(y; -\hat{x})}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \mathbf{a}(y; d)}{\partial \nu(y)} \mathbf{a}(y; -\hat{x}) \right\} ds(y) \\
&= \frac{k}{\alpha_{\mathbf{A}}} \int_{\partial D} \left\{ (\xi_+ \mathbf{a}_0(y; d) - \xi_- \mathbf{b}_0(y; d)) \frac{\partial \mathbf{a}_0(y; -\hat{x})}{\partial \nu(y)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial \mathbf{a}_0(y; d)}{\partial \nu(y)} (\xi_+ \mathbf{a}_0(y; -\hat{x}) - \xi_- \mathbf{b}_0(y; -\hat{x})) \right\} ds(y) \\
&= -\frac{k\xi_-}{\alpha_{\mathbf{A}}} \int_{\partial D} \left\{ \mathbf{b}_0(y; d) \frac{\partial \mathbf{a}_0(y; -\hat{x})}{\partial \nu(y)} - \mathbf{b}_0(y; -\hat{x}) \frac{\partial \mathbf{a}_0(y; d)}{\partial \nu(y)} \right\} ds(y) \\
&= -\frac{k\xi_-}{\alpha_{\mathbf{A}}} \int_D \{ (\text{grad } \mathbf{b}_0(y; d), \text{grad } \mathbf{a}_0(y; -\hat{x})) - (\text{grad } \mathbf{b}_0(y; -\hat{x}), \text{grad } \mathbf{a}_0(y; d)) \\
&\quad - \alpha_{\mathbf{A}}^2 [\mathbf{b}_0(y; d) \mathbf{a}_0(y; -\hat{x}) - \mathbf{b}_0(y; -\hat{x}) \mathbf{a}_0(y; d)] \} dy, \quad (\text{A.7 a})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\int_{\partial D} \left\{ \mathbf{b}(y; d) \frac{\partial \mathbf{b}(y; -\hat{x})}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \mathbf{b}(y; d)}{\partial \nu(y)} \mathbf{b}(y; -\hat{x}) \right\} ds(y) \\
&= \frac{k}{\alpha_{\mathbf{B}}} \int_{\partial D} \left\{ (\xi_+ \mathbf{b}_0(y; d) - \xi_- \mathbf{a}_0(y; d)) \frac{\partial \mathbf{b}_0(y; -\hat{x})}{\partial \nu(y)} \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\partial \mathbf{b}_0(y; d)}{\partial \nu(y)} (\xi_+ \mathbf{b}_0(y; -\hat{x}) - \xi_- \mathbf{a}_0(y; -\hat{x})) \Big\} ds(y) \\
= & -\frac{k\xi_-}{\alpha_{\mathbf{B}}} \int_D \{ (\text{grad } \mathbf{a}_0(y; d), \text{grad } \mathbf{b}_0(y; -\hat{x})) - (\text{grad } \mathbf{a}_0(y; -\hat{x}), \text{grad } \mathbf{b}_0(y; d)) \\
& -\alpha_{\mathbf{B}}^2 [\mathbf{a}_0(y; d)\mathbf{b}_0(y; -\hat{x}) - \mathbf{a}_0(y; -\hat{x})\mathbf{b}_0(y; d)] \} dy, \tag{A.7 b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\partial D} \left\{ \mathbf{a}(y; d) \frac{\partial \mathbf{b}(y; -\hat{x})}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \mathbf{a}(y; d)}{\partial \nu(y)} \mathbf{b}(y; -\hat{x}) \right\} ds(y) \\
= & k \int_{\partial D} \left\{ \frac{1}{\alpha_{\mathbf{B}}} (\xi_+ \mathbf{a}_0(y; d) - \xi_- \mathbf{b}_0(y; d)) \frac{\partial \mathbf{b}_0(y; -\hat{x})}{\partial \nu(y)} \right. \\
& \left. - \frac{1}{\alpha_{\mathbf{A}}} \frac{\partial \mathbf{a}_0(y; d)}{\partial \nu(y)} (\xi_+ \mathbf{b}_0(y; -\hat{x}) - \xi_- \mathbf{a}_0(y; -\hat{x})) \right\} ds(y) \\
= & k \int_D \{ \xi_+ (\alpha_{\mathbf{A}} - \alpha_{\mathbf{B}}) \mathbf{a}_0(y; d) \mathbf{b}_0(y; -\hat{x}) \\
& + \xi_- [\alpha_{\mathbf{B}} \mathbf{b}_0(y; d) \mathbf{b}_0(y; -\hat{x}) - \alpha_{\mathbf{A}} \mathbf{a}_0(y; d) \mathbf{a}_0(y; -\hat{x})] \\
& + \xi_+ (\alpha_{\mathbf{B}}^{-1} - \alpha_{\mathbf{A}}^{-1}) (\text{grad } \mathbf{a}_0(y; d), \text{grad } \mathbf{b}_0(y; -\hat{x})) \\
& - \xi_- [\alpha_{\mathbf{B}}^{-1} (\text{grad } \mathbf{b}_0(y; d), \text{grad } \mathbf{b}_0(y; -\hat{x})) \\
& - \alpha_{\mathbf{A}}^{-1} (\text{grad } \mathbf{a}_0(y; d), \text{grad } \mathbf{a}_0(y; -\hat{x}))] \} dy, \tag{A.7 c}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\partial D} \left\{ \mathbf{b}(y; d) \frac{\partial \mathbf{a}(y; -\hat{x})}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \mathbf{b}(y; d)}{\partial \nu(y)} \mathbf{a}(y; -\hat{x}) \right\} ds(y) \\
= & k \int_{\partial D} \left\{ \frac{1}{\alpha_{\mathbf{A}}} (\xi_+ \mathbf{b}_0(y; d) - \xi_- \mathbf{a}_0(y; d)) \frac{\partial \mathbf{a}_0(y; -\hat{x})}{\partial \nu(y)} \right. \\
& \left. - \frac{1}{\alpha_{\mathbf{B}}} \frac{\partial \mathbf{b}_0(y; d)}{\partial \nu(y)} (\xi_+ \mathbf{a}_0(y; -\hat{x}) - \xi_- \mathbf{b}_0(y; -\hat{x})) \right\} ds(y) \\
= & k \int_D \{ \xi_+ (\alpha_{\mathbf{B}} - \alpha_{\mathbf{A}}) \mathbf{b}_0(y; d) \mathbf{a}_0(y; -\hat{x}) \\
& + \xi_- [\alpha_{\mathbf{A}} \mathbf{a}_0(y; d) \mathbf{a}_0(y; -\hat{x}) - \alpha_{\mathbf{B}} \mathbf{b}_0(y; d) \mathbf{b}_0(y; -\hat{x})] \\
& + \xi_+ (\alpha_{\mathbf{A}}^{-1} - \alpha_{\mathbf{B}}^{-1}) (\text{grad } \mathbf{b}_0(y; d), \text{grad } \mathbf{a}_0(y; -\hat{x})) \\
& - \xi_- [\alpha_{\mathbf{A}}^{-1} (\text{grad } \mathbf{a}_0(y; d), \text{grad } \mathbf{a}_0(y; -\hat{x})) \\
& - \alpha_{\mathbf{B}}^{-1} (\text{grad } \mathbf{b}_0(y; d), \text{grad } \mathbf{b}_0(y; -\hat{x}))] \} dy \tag{A.7 d}
\end{aligned}$$

zu erhalten. Addition von (A.6 a) und (A.6 b) ergibt wegen (A.7 c) und (A.7 d)

$$\begin{aligned} & c_b(\mathbf{a}_\infty(\hat{x}; d) - \mathbf{a}_\infty(-d; -\hat{x})) + c_a(\mathbf{b}_\infty(\hat{x}; d) - \mathbf{b}_\infty(-d; -\hat{x})) \\ &= mk \int_D \{ \xi_+(\alpha_{\mathbf{A}} - \alpha_{\mathbf{B}}) [\mathbf{a}_0(y; d)\mathbf{b}_0(y; -\hat{x}) - \mathbf{b}_0(y; d)\mathbf{a}_0(y; -\hat{x})] \\ &\quad - \xi_+(\alpha_{\mathbf{A}}^{-1} - \alpha_{\mathbf{B}}^{-1}) [(\text{grad } \mathbf{a}_0(y; d), \text{grad } \mathbf{b}_0(y; -\hat{x})) \\ &\quad - (\text{grad } \mathbf{b}_0(y; d), \text{grad } \mathbf{a}_0(y; -\hat{x}))] \} dy. \end{aligned}$$

Addition des $c_a\alpha_{\mathbf{A}}$ -fachen von (A.5 a) und des $c_b\alpha_{\mathbf{B}}$ -fachen von (A.5 b) ergibt wegen (A.7 a) und (A.7 b)

$$\begin{aligned} & c_a\alpha_{\mathbf{A}}(\mathbf{a}_\infty(\hat{x}; d) - \mathbf{a}_\infty(-d; -\hat{x})) + c_b\alpha_{\mathbf{B}}(\mathbf{b}_\infty(\hat{x}; d) - \mathbf{b}_\infty(-d; -\hat{x})) \\ &= mk\xi_- \int_D \{ (\alpha_{\mathbf{A}}^2 - \alpha_{\mathbf{B}}^2) [\mathbf{b}_0(y; d)\mathbf{a}_0(y; -\hat{x}) - \mathbf{a}_0(y; d)\mathbf{b}_0(y; -\hat{x})] \} dy. \end{aligned}$$

Weiter liefert Addition des $\frac{c_a}{\alpha_{\mathbf{A}}}$ -fachen von (A.5 a) und des $\frac{c_b}{\alpha_{\mathbf{B}}}$ -fachen von (A.5 b) mit (A.7 a) und (A.7 b)

$$\begin{aligned} & c_a\alpha_{\mathbf{A}}^{-1}(\mathbf{a}_\infty(\hat{x}; d) - \mathbf{a}_\infty(-d; -\hat{x})) + c_b\alpha_{\mathbf{B}}^{-1}(\mathbf{b}_\infty(\hat{x}; d) - \mathbf{b}_\infty(-d; -\hat{x})) \\ &= mk\xi_- \int_D \{ (\alpha_{\mathbf{A}}^{-2} - \alpha_{\mathbf{B}}^{-2}) [(\text{grad } \mathbf{a}_0(y; d), \text{grad } \mathbf{b}_0(y; -\hat{x})) \\ &\quad - (\text{grad } \mathbf{b}_0(y; d), \text{grad } \mathbf{a}_0(y; -\hat{x}))] \} dy. \end{aligned}$$

Die Bildung einer geeigneten Linearkombination der letzten drei Beziehungen führt auf

$$\begin{aligned} & \left\{ c_b + c_a\alpha_{\mathbf{A}} \frac{\xi_+(\alpha_{\mathbf{A}} - \alpha_{\mathbf{B}})}{\xi_-(\alpha_{\mathbf{A}}^2 - \alpha_{\mathbf{B}}^2)} + c_a\alpha_{\mathbf{A}}^{-1} \frac{\xi_+(\alpha_{\mathbf{A}}^{-1} - \alpha_{\mathbf{B}}^{-1})}{\xi_-(\alpha_{\mathbf{A}}^{-2} - \alpha_{\mathbf{B}}^{-2})} \right\} (\mathbf{a}_\infty(\hat{x}; d) - \mathbf{a}_\infty(-d; -\hat{x})) \\ &+ \left\{ c_a + c_b\alpha_{\mathbf{B}} \frac{\xi_+(\alpha_{\mathbf{A}} - \alpha_{\mathbf{B}})}{\xi_-(\alpha_{\mathbf{A}}^2 - \alpha_{\mathbf{B}}^2)} + c_b\alpha_{\mathbf{B}}^{-1} \frac{\xi_+(\alpha_{\mathbf{A}}^{-1} - \alpha_{\mathbf{B}}^{-1})}{\xi_-(\alpha_{\mathbf{A}}^{-2} - \alpha_{\mathbf{B}}^{-2})} \right\} (\mathbf{b}_\infty(\hat{x}; d) - \mathbf{b}_\infty(-d; -\hat{x})) = 0. \end{aligned}$$

Dies vereinfacht sich wegen

$$\alpha_{\mathbf{A}} \frac{\alpha_{\mathbf{A}} - \alpha_{\mathbf{B}}}{\alpha_{\mathbf{A}}^2 - \alpha_{\mathbf{B}}^2} + \alpha_{\mathbf{A}}^{-1} \frac{\alpha_{\mathbf{A}}^{-1} - \alpha_{\mathbf{B}}^{-1}}{\alpha_{\mathbf{A}}^{-2} - \alpha_{\mathbf{B}}^{-2}} = \alpha_{\mathbf{B}} \frac{\alpha_{\mathbf{A}} - \alpha_{\mathbf{B}}}{\alpha_{\mathbf{A}}^2 - \alpha_{\mathbf{B}}^2} + \alpha_{\mathbf{B}}^{-1} \frac{\alpha_{\mathbf{A}}^{-1} - \alpha_{\mathbf{B}}^{-1}}{\alpha_{\mathbf{A}}^{-2} - \alpha_{\mathbf{B}}^{-2}} = 1$$

zu

$$\{\xi_-c_b + \xi_+c_a\} (\mathbf{a}_\infty(\hat{x}; d) - \mathbf{a}_\infty(-d; -\hat{x})) + \{\xi_-c_a + \xi_+c_b\} (\mathbf{b}_\infty(\hat{x}; d) - \mathbf{b}_\infty(-d; -\hat{x})) = 0,$$

also im Falle des (TM), hier gilt $\xi_-c_b + \xi_+c_a = \xi_-c_a + \xi_+c_b$, zu

$$(\mathbf{a}_\infty(\hat{x}; d) - \mathbf{a}_\infty(-d; -\hat{x})) + (\mathbf{b}_\infty(\hat{x}; d) - \mathbf{b}_\infty(-d; -\hat{x})) = 0$$

und im Falle des (TE), es gilt $\xi_-c_b + \xi_+c_a = -(\xi_-c_a + \xi_+c_b)$, zu

$$(\mathbf{a}_\infty(\hat{x}; d) - \mathbf{a}_\infty(-d; -\hat{x})) - (\mathbf{b}_\infty(\hat{x}; d) - \mathbf{b}_\infty(-d; -\hat{x})) = 0.$$

Dies bedeutet, daß im transversalmagnetischen Fall die Reziprozitätseigenschaft für \mathbf{e} gilt, also

$$\mathbf{e}_\infty(\hat{x}; d) = \mathbf{e}_\infty(-d; -\hat{x}),$$

und im transversalelektrischen für \mathbf{h}

$$\mathbf{h}_\infty(\hat{x}; d) = \mathbf{h}_\infty(-d; -\hat{x}).$$

q. e. d.

A.2 Ein Alternativ-Beweis zu Satz 8.4

Beweis Es seien die Überlegungen bis zur Gleichung (8.3) wie im Beweis zu Satz 8.4 auf Seite 64ff durchgeführt. Jetzt sei aber statt (8.3)

$$s = i\alpha_{\mathbf{A}}(\mu/\mu_0)^{1/2}, \quad t = i\alpha_{\mathbf{B}}(\mu/\mu_0)^{1/2}$$

gewählt. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \tilde{N}_{\mathbf{a};n} &= i\alpha_{\mathbf{A}}(\mu/\mu_0)^{1/2} \left\{ \frac{\partial\Phi_k(\cdot, x_n)}{\partial\nu} - \frac{\partial\Phi_{\alpha_{\mathbf{A}}}(\cdot, x_n)}{\partial\nu} \right\}, \\ \tilde{N}_{\mathbf{b};n} &= i\alpha_{\mathbf{B}}(\mu/\mu_0)^{1/2} \left\{ \frac{\partial\Phi_k(\cdot, x_n)}{\partial\nu} - \frac{\partial\Phi_{\alpha_{\mathbf{B}}}(\cdot, x_n)}{\partial\nu} \right\}, \\ \tilde{D}_{\mathbf{a};n} &= i(\mu/\mu_0)^{1/2} \{k\xi\Phi_k(\cdot, x_n) - \alpha_{\mathbf{A}}\Phi_{\alpha_{\mathbf{A}}}(\cdot, x_n)\}, \\ \tilde{D}_{\mathbf{b};n} &= i(\mu/\mu_0)^{1/2} \{k\xi\Phi_k(\cdot, x_n) - \alpha_{\mathbf{B}}\Phi_{\alpha_{\mathbf{B}}}(\cdot, x_n)\}. \end{aligned}$$

Dabei sind die Differenzen

$$\frac{\partial\Phi_k(\cdot, x_n)}{\partial\nu} - \frac{\partial\Phi_{\alpha_{\mathbf{A}}}(\cdot, x_n)}{\partial\nu}, \quad \frac{\partial\Phi_k(\cdot, x_n)}{\partial\nu} - \frac{\partial\Phi_{\alpha_{\mathbf{B}}}(\cdot, x_n)}{\partial\nu}$$

gleichmäßig für alle $n \in \mathbb{N}$ an der Stelle x_0 beschränkt, $\tilde{D}_{\mathbf{a};n}$, $\tilde{D}_{\mathbf{b};n}$ haben dort Singularitäten der Ordnung $\ln n$.

Wie in der Ableitung der Abschätzung (8.6) mit Hilfe von (8.5) folgt unter Ausnutzung der Tatsache, daß alle zu betrachtenden Höldernormen wie auch die L^2 -Normen gleichmäßig beschränkt sind, die Beziehung

$$\|\tilde{\mathbf{a}}_{0;n}\|_{C^{1,\alpha}(\bar{D}\setminus B_r)} + \|\tilde{\mathbf{b}}_{0;n}\|_{C^{1,\alpha}(\bar{D}\setminus B_r)} \leq c_3, \quad n = 1, 2, \dots$$

für eine hinreichend kleine Kugel $B_r = \{z \in \mathbb{R}^2 \mid |z - x_0| < r\}$. Dabei benutzt man für die „kritischen“ Terme $\tilde{D}_{\mathbf{a};n}$ und $\tilde{D}_{\mathbf{b};n}$ im wesentlichen die Beziehung $\int (\ln \tau)^2 d\tau = \tau(\ln \tau)^2 - 2\tau \ln \tau + 2\tau$ und die Beschränktheit von $(\ln n)^2/n$, $(\ln n)/n$ und $1/n$ für $n \in \mathbb{N}$.

Insbesondere folgt hieraus

$$\|\tilde{\mathbf{a}}_{0;n}\|_{C(\partial D \setminus B_r)} + \|\tilde{\mathbf{b}}_{0;n}\|_{C(\partial D \setminus B_r)} + \left\| \frac{\partial \tilde{\mathbf{a}}_{0;n}}{\partial \nu} \right\|_{C(\partial D \setminus B_r)} + \left\| \frac{\partial \tilde{\mathbf{b}}_{0;n}}{\partial \nu} \right\|_{C(\partial D \setminus B_r)} \leq 2c_3. \quad (\text{A.8})$$

Nach [15, Lemma 4.4] ist

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{a}}_{0;n}\|_{C(\partial D)} &\leq c'_4 \left\{ \|\tilde{\mathbf{a}}_{0;n}\|_{C(\partial D \setminus B_r)} + \left\| \frac{\partial \tilde{\mathbf{a}}_{0;n}}{\partial \nu} \right\|_{C(\partial D)} \right\}, \\ \|\tilde{\mathbf{b}}_{0;n}\|_{C(\partial D)} &\leq c'_4 \left\{ \|\tilde{\mathbf{b}}_{0;n}\|_{C(\partial D \setminus B_r)} + \left\| \frac{\partial \tilde{\mathbf{b}}_{0;n}}{\partial \nu} \right\|_{C(\partial D)} \right\}. \end{aligned}$$

Dabei gilt mit (8.2)

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \tilde{\mathbf{a}}_{0;n}}{\partial \nu} \right\|_{C(\partial D \cap B_r)} &= \left\| \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k} \left\{ \frac{\partial \mathbf{a}_n^s}{\partial \nu} + \tilde{N}_{\mathbf{a};n} \right\} \right\|_{C(\partial D \cap B_r)} \leq \left| \frac{\alpha_{\mathbf{A}}}{k} \right| (c_2 + \tilde{c}) \leq c''_4, \\ \left\| \frac{\partial \tilde{\mathbf{b}}_{0;n}}{\partial \nu} \right\|_{C(\partial D \cap B_r)} &= \left\| \frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k} \left\{ \frac{\partial \mathbf{b}_n^s}{\partial \nu} + \tilde{N}_{\mathbf{b};n} \right\} \right\|_{C(\partial D \cap B_r)} \leq \left| \frac{\alpha_{\mathbf{B}}}{k} \right| (c_2 + \tilde{c}) \leq c''_4, \end{aligned}$$

wobei \tilde{c} eine obere Schranke für $\tilde{N}_{\mathbf{a};n}$, $\tilde{N}_{\mathbf{b};n}$ ist, so daß zusammen mit (A.8)

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{a}}_{0;n}\|_{C(\partial D)} &\leq c'_4 \{2c_3 + c''_4\} \leq c_4, \\ \|\tilde{\mathbf{b}}_{0;n}\|_{C(\partial D)} &\leq c'_4 \{2c_3 + c''_4\} \leq c_4 \end{aligned}$$

folgt. Hiermit ergibt sich für

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{\mathbf{a};n} &= \tilde{\mathbf{a}}_{0;n} - \xi_+ \mathbf{a}_n^s - \xi_- \mathbf{b}_n^s, \\ \tilde{D}_{\mathbf{b};n} &= \tilde{\mathbf{b}}_{0;n} - \xi_- \mathbf{a}_n^s - \xi_+ \mathbf{b}_n^s \end{aligned}$$

die gleichmäßige Beschränktheit auf dem Rand in einer Umgebung von x_0

$$\|\tilde{D}_{\mathbf{a};n}\|_{C(\partial D \cap B_r)} + \|\tilde{D}_{\mathbf{b};n}\|_{C(\partial D \cap B_r)} \leq c_5, \quad n = 1, 2, \dots$$

Eine direkte Auswertung bei x_0 ergibt aber, da $k\xi \neq \alpha_{\mathbf{A}}$ beziehungsweise $k\xi \neq \alpha_{\mathbf{B}}$ vorausgesetzt ist, ein singuläres Verhalten der Ordnung $\ln n$. Dies ist ein Widerspruch zur gleichmäßigen Beschränktheit durch c_5 . Damit ist alles gezeigt. **q. e. d.**

A.3 Fréchet-Ableitung

A.3.1 Allgemeines zur Fréchet-Differenzierbarkeit

Zunächst soll der Begriff der Fréchet-Ableitung eingeführt werden, der eine Verallgemeinerung des Differenzierbarkeitsbegriffes auf normierte Räume darstellt. Ziel ist es dabei, nichtlineare Operatorgleichungen lokal durch lineare zu ersetzen.

Definition A.1 *Es seien X, Y normierte Räume und $X' \subset X$ eine offene Teilmenge. Ein Operator $A : X' \rightarrow Y$ heißt Fréchet-differenzierbar an der Stelle $\varphi \in X'$, wenn es einen beschränkten linearen Operator $A'(\varphi) : X \rightarrow Y$ gibt, derart daß*

$$\|A(\varphi + h) - A(\varphi) - A'(\varphi)h\| = o(\|h\|). \quad (\text{A.9})$$

Der Operator $A'(\varphi)$ heißt Fréchet-Ableitung von A an der Stelle φ . Existiert die Fréchet-Ableitung für alle $\varphi \in X'$, dann heißt die Abbildung $A' : X' \rightarrow L(X, Y)$ mit $\varphi \mapsto A'(\varphi)$ die Fréchet-Ableitung von A auf X' und wird auch mit $\frac{\partial A}{\partial \varphi}$ bezeichnet. Für $A'(\varphi)h$ wird auch die Bezeichnung $A'(\varphi; h)$ verwendet.

Es gelten folgende Rechenregeln für die Fréchet-Ableitung.

Satz A.2

(i) (Kettenregel) *Es seien X, Y, Z normierte Räume, $X' \subset X, Y' \subset Y$ offen und $A : X' \rightarrow Y', B : Y' \rightarrow Z$ Fréchet-differenzierbare Abbildungen. Dann ist $B \circ A : X' \rightarrow Z$ Fréchet-differenzierbar mit*

$$(B \circ A)'(\varphi) = B'(A\varphi) \circ A'(\varphi)$$

beziehungsweise

$$(B \circ A)'(\varphi; h) = B'(A\varphi; A'(\varphi; h)), \quad \varphi \in X', h \in X.$$

(ii) (Produktregel) *Es seien X_1, X_2, Y, Z normierte Räume und $[\cdot, \cdot] : X_1 \times X_2 \rightarrow Y, (x_1, x_2) \mapsto [x_1, x_2]$ eine beschränkte bilineare Abbildung. Weiter seien $Z' \subset Z$ eine offene Teilmenge und $A_1 : Z' \rightarrow X_1, A_2 : Z' \rightarrow X_2$ Fréchet-differenzierbare Abbildungen. Dann ist auch $[A_1, A_2] : Z' \rightarrow Y, \varphi \mapsto [A_1\varphi, A_2\varphi]$ Fréchet-differenzierbar mit*

$$[A_1, A_2]'(\varphi; h) = [A_1'(\varphi; h), A_2\varphi] + [A_1\varphi, A_2(\varphi; h)], \quad \varphi \in Z', h \in Z.$$

(iii) (Quotientenregel) *Es seien X ein Banach-Raum, Y ein normierter Raum und $Y' \subset Y$ offen. Die Abbildung $A : Y' \rightarrow L(X, X)$ sei Fréchet-differenzierbar in $\varphi_0 \in Y'$ und $A\varphi$ sei beschränkt invertierbar für alle $\varphi \in Y'$. Dann ist*

$$\begin{aligned} A^{-1} &: U \rightarrow L(X, X) \\ \varphi &\mapsto (A\varphi)^{-1} \end{aligned}$$

Fréchet-differenzierbar in φ_0 mit der Ableitung

$$A^{-1}'(\varphi_0; h) = -A^{-1}(\varphi_0) \circ A'(\varphi_0; h) \circ A^{-1}(\varphi_0), \quad h \in Y.$$

A.3.2 Ein Differentiationsatz

Es soll hier ein allgemeiner Differentiationsatz angegeben werden, der die Fréchetdifferenzierbarkeit von Integraloperatoren auf die Ableitung der Kerne zurückführt.

Satz A.3 *Es seien $G_2 \subset \mathbb{R}^n$ meßbar und $G_1 \subset \mathbb{R}^m$, $m, n \in \mathbb{N}$. Weiter sei X ein normierter Raum und $X' \subset X$ offen. Für $m \neq n$ bezeichne $Q := G_1 \times G_2$ und für $m = n$ sei $Q := \{(t, \tau) \in G_1 \times G_2 \mid t \neq \tau\}$. Die Funktion $f : Q \times X' \rightarrow \mathbb{C}$ sei für festes (t, τ) zweimal stetig Fréchet-differenzierbar nach der dritten Variable. Weiter gebe es integrierbare Funktionen $g_j : Q \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, 2$ und Konstanten $r, C > 0$ mit*

$$\int_{G_2} g_j(t, \tau) \, d\tau \leq C \text{ für alle } t \in G_1, j = 1, 2$$

$$\left| \frac{\partial^j f}{\partial z^j}(t, \tau, z; h) \right| \leq g_j(t, \tau) \|h\|_X^j \text{ für alle } (t, \tau) \in Q, z \in B[z_0, r] \subset X', h \in X.$$

Die Abbildungen

$$A(z) : C(G_2) \rightarrow C(G_1), \quad (A(z)\varphi)(t) := \int_{G_2} f(t, \tau, z)\varphi(\tau) \, d\tau,$$

$$A^1(z; h) : C(G_2) \rightarrow C(G_1), \quad (A^1(z; h)\varphi)(t) := \int_{G_2} \frac{\partial f}{\partial z}(t, \tau, z; h)\varphi(\tau) \, d\tau$$

seien für alle $z \in X'$ und alle $h \in X$ wohldefiniert. Dann ist die Abbildung

$$A : X' \rightarrow L(C(G_2), C(G_1))$$

$$z \mapsto A(z)$$

Fréchet-differenzierbar in z_0 mit der Ableitung $A'(z_0; h) = A^1(z_0; h)$.

Beweis Vergleiche [40, Satz 4.8] oder auch [38, Th. 1].

A.3.3 Behandlung des zweidimensionalen Falles

Für die Behandlung des zweidimensionalen Problems soll wieder eine 2π -periodische Parametrisierung des Randes zugrunde gelegt werden, der hier als $C^{2,\alpha}$ -glatt vorausgesetzt wird.

Definition A.4 Es sei $\alpha \in (0, 1)$. Es bezeichnet $C_{2\pi}^{2,\alpha}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ den Raum der 2π -periodischen $C^{2,\alpha}$ -glatten Funktionen von \mathbb{R} nach \mathbb{R}^2 , versehen mit der Norm $\|z\| := \max\{\|z\|_\infty, \|z'\|_\infty, \|z''\|_{0,\alpha}\}$. Weiter wird mit

$$RP := \{z \in C_{2\pi}^{2,\alpha}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) \mid z|_{[0,2\pi)} \text{ injektiv, } |z'(t)| > 0 \forall t \in \mathbb{R}, z \text{ linksorientiert}\}$$

der Raum der zulässigen Parametrisierungen bezeichnet.

Lemma A.5 RP ist offene Teilmenge von $C_{2\pi}^{2,\alpha}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$.

Beweis Siehe [10, Lemma 3.7].

Es bezeichnen $S_\kappa, K_\kappa, K_\kappa^*, \tilde{T}_\kappa$ die Potentialoperatoren gemäß (4.16)-(4.18), (7.1) in parametrisierter Form jeweils zur Wellenzahl κ . Es gilt dann für die Fréchet-Differenzierbarkeit dieser Operatoren das folgende Resultat.

Satz A.6 Sei $L \in \{S_\kappa, K_\kappa, K_\kappa^*, \tilde{T}_\kappa\}$ mit

$$(L(z)\chi)(t) = \int_0^{2\pi} f_L(t, \tau, z)\chi(\tau) d\tau,$$

wobei $z \in RP$, $\chi \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. So ist L Fréchet-differenzierbar mit der Ableitung

$$(L'(z; h)\varphi)(t) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial f_L}{\partial z}(t, \tau, z; h)\varphi(\tau).$$

Beweis Siehe [40, Satz 4.11].

Bemerkung A.7 Es gilt mit der Abkürzung $r(t, \tau, z) = |z(t) - z(\tau)|$

$$\begin{aligned} f_{S_\kappa}(t, \tau, z) &= \frac{i}{2} H_0^1(\kappa r(t, \tau, z)) |z'(\tau)|, \\ f_{K_\kappa}(t, \tau, z) &= \frac{i\kappa}{2} \{z_2'(\tau)[z_1(t) - z_1(\tau)] - z_1'(\tau)[z_2(t) - z_2(\tau)]\} \frac{H_1^1(\kappa r(t, \tau, z))}{r(t, \tau, z)}, \\ f_{K_\kappa^*}(t, \tau, z) &= -\frac{|z'(\tau)|}{|z'(t)|} f_{K_\kappa}(t, \tau, z), \\ f_{\tilde{T}_\kappa}(t, \tau, z) &= \{z_2'(t)[z_1(\tau) - z_1(t)] - z_1'(t)[z_2(\tau) - z_2(t)]\} \\ &\quad \times \{z_2'(\tau)[z_1(\tau) - z_1(t)] - z_1'(\tau)[z_2(\tau) - z_2(t)]\} \\ &\quad \times \frac{1}{|z'(t)|[r(t, \tau, z)]^4} \\ &\quad \times \left(\frac{i\kappa^2}{2} H_0^1(\kappa r(t, \tau, z)) [r(t, \tau, z)]^2 - i\kappa H_1^1(\kappa r(t, \tau, z)) r(t, \tau, z) + \frac{2}{\pi} \right) \\ &\quad + \frac{z_1'(t)z_1'(\tau) + z_2'(t)z_2'(\tau)}{|z'(t)|[r(t, \tau, z)]^2} \left(\frac{i\kappa}{2} H_1^1(\kappa r(t, \tau, z)) r(t, \tau, z) - \frac{1}{\pi} \right). \end{aligned}$$

Es seien \mathfrak{E}_κ und \mathfrak{D}_κ der jeweils zur Wellenzahl κ definierte Einfach- bzw Doppelschichtpotentialoperator

$$\begin{aligned} (\mathfrak{E}_\kappa(z)\varphi)(x) &= \int_0^{2\pi} \frac{i}{4} H_0^1(\kappa|x-z(\tau)|) |z'(\tau)| \varphi(\tau) \, d\tau, \quad x \notin \partial D, \\ (\mathfrak{D}_\kappa(z)\psi)(x) &= \int_0^{2\pi} \frac{i\kappa}{4} \left(\begin{pmatrix} z_2'(\tau) \\ -z_1'(\tau) \end{pmatrix}, x-z(\tau) \right) \frac{H_1^1(\kappa|x-z(\tau)|)}{|x-z(\tau)|} \psi(\tau) \, d\tau, \quad x \notin \partial D. \end{aligned}$$

Auch hier gilt, daß sich die Fréchet-Ableitung des Potentials durch die Ableitung des Kernes ausdrücken läßt.

Satz A.8 Sei z_0 Parametrisierung eines Gebietes mit Rand ∂D_0 , $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet mit $\bar{G} \subset \mathbb{R}^2 \setminus \partial D_0$ und $r > 0$ so, daß für

$$\begin{aligned} RP_r &:= \left\{ z \in RP \mid \|z - z_0\|_{C_{2\pi}^{2,\alpha}} < r \right\}, \\ S_r &:= \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \exists z \in RP_r \text{ und } \exists t \in [0, 2\pi) : x = z(t) \right\} \end{aligned}$$

die Inklusion $\bar{G} \subset \mathbb{R}^2 \setminus \bar{S}_r$ gilt, G liege also außerhalb einer Umgebung des Randes ∂D_0 . Dann sind die Operatoren² $L : RP_r \rightarrow L(C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), C_b(G))$, $L \in \{\mathfrak{E}_\kappa, \mathfrak{D}_\kappa\}$ mit

$$(L(z)\chi)(x) = \int_0^{2\pi} f_L(x, \tau, z)\chi(\tau) \, d\tau,$$

Fréchet-differenzierbar mit der Ableitung

$$(L'(z; h)\chi)(x) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial f_L}{\partial z}(x, \tau, z; h)\chi(\tau) \, d\tau.$$

Beweis Vergleiche [40, Satz 4.13].

Es seien φ, ψ Dichten entsprechender Regularität und $u(x) = (\mathfrak{E}_\kappa(z)\varphi)(x)$, $v(x) = (\mathfrak{D}_\kappa(z)\psi)(x)$ die dazu definierten Potentiale sowie $u'(x) = (\mathfrak{E}'_\kappa(z; h)\varphi)(x)$, $v'(x) = (\mathfrak{D}'_\kappa(z; h)\psi)(x)$ die entsprechenden Fréchet-Ableitungen nach dem Rand. Diese sind in $\mathbb{R}^2 \setminus \partial D$ wohldefiniert. Es können dann Sprungbeziehungen, wie sie für u und v bekannt sind, auch für u' und v' hergeleitet werden.

Satz A.9 Sei $z \in RP$ Parametrisierung von ∂D und $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt für $\varphi \in C_{2\pi}^{0,\alpha}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

$$u'_\pm(z(t)) = \frac{1}{2}(S'_\kappa(z; h)\varphi)(t) - (\text{grad } u_\pm(z(t)), h(t)),$$

²Dabei bezeichnet $C_b(G)$ die Menge der beschränkten stetigen Funktionen auf G .

für $\psi \in C_{2\pi}^{1,\alpha}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

$$v'_{\pm}(z(t)) = \frac{1}{2}(K'_{\kappa}(z; h)\psi)(t) - (\text{grad } v_{\pm}(z(t)), h(t)),$$

für $\varphi \in C_{2\pi}^{1,\alpha}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u'_{\pm}}{\partial \nu}(z(t)) &= \frac{1}{2}(K'^{*'}_{\kappa}(z; h)\varphi)(t) - \left(\text{grad } u_{\pm}(z(t)), \frac{\partial \nu}{\partial z}(z(t); h) \right) \\ &\quad - \sum_{j,k=1}^2 \frac{\partial^2 u_{\pm}(z(t))}{\partial x_j \partial x_k} h_j(t) \nu_k(z(t)), \end{aligned}$$

und für $\psi \in C_{2\pi}^{2,\alpha}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v'_{\pm}}{\partial \nu}(z(t)) &= \frac{1}{2}(T'_{\kappa}(z; h)\psi)(t) - \left(\text{grad } v_{\pm}(z(t)), \frac{\partial \nu}{\partial z}(z(t); h) \right) \\ &\quad - \sum_{j,k=1}^2 \frac{\partial^2 v_{\pm}(z(t))}{\partial x_j \partial x_k} h_j(t) \nu_k(z(t)). \end{aligned}$$

Beweis Siehe [40, Sätze 4.14 und 4.16].

Literaturverzeichnis

- [1] C.F. Bohren, Light scattering by optically active particles, *Chem. Phys. Lett.* 29 (1974), 458
- [2] D. Colton and R. Kress, *Integral equation methods in scattering theory*, Wiley-Interscience Publication, New York, 1983
- [3] D. Colton and R. Kress, *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1992
- [4] D. Colton, R. Kress, and P. Monk, Inverse scattering from an orthotropic medium *J. Comp. Appl. Math.* 81 (1997), 269-298
- [5] A. G. Dmitrienko, A. I. Mukomolov, and V. V. Fisanov, A Numerical Method for Solving the Problem of Electromagnetic Scattering by a Three-Dimensional Chiral Body, *J. Communications Technology Electronics*, 43.8 (1998), 910-914
- [6] A. I. Fedorenko, Solution of the Problem of Electromagnetic Wave Scattering by a Homogeneous Chiral Cylinder Using the Surface Integral Equation Method, *J. Communications Technology Electronics*, 40.4 (1995), 134-145
- [7] T. Gerlach, *Zur Eindeutigkeit beim inversen Randwertproblem zur Helmholtzgleichung bei konduktiven und resistiven Randbedingungen*, Diplomarbeit, NAM Universität Göttingen 1995
- [8] T. Gerlach and R. Kress, Uniqueness in inverse obstacle scattering with conductive boundary condition, *Inverse Problems* 12 (1996), 619-625, 1075
- [9] P. Hähner, A uniqueness theorem for a transmission problem in inverse electromagnetic scattering, *Inverse Problems* 9 (1993), 667-678
- [10] T. Hohage, *Newton-Verfahren beim inversen Neumann-Problem zur Helmholtz-Gleichung*, Diplomarbeit, NAM Universität Göttingen 1996
- [11] T. Hohage and C. Schormann, A Newton-type method for a transmission problem in inverse scattering, *Inverse Problems* 14 (1998), 1207-1228
- [12] J. D. Jackson, *Klassische Elektrodynamik*, de Gruyter, Berlin New York 1983

-
- [13] G. Jost, *Integralgleichungsmethoden mit kombiniertem einfachen und doppelten Potentialansatz beim gemischten Außenraumproblem bei der Helmholtzgleichung*, Diplomarbeit, NAM Universität Göttingen, 1983
- [14] A. Kirsch, Surface Gradients and Continuity Properties for Some Integral Operators in Classical Scattering Theory, *Math. Methods Appl. Sciences* 11 (1989), 789-804
- [15] A. Kirsch and R. Kress, Uniqueness in inverse obstacle scattering, *Inverse Problems* 9 (1993), 285-299
- [16] R. E. Kleinman and G. F. Roach, Boundary integral equations for the three-dimensional Helmholtz equation, *SIAM Review* 16.2 (1974), 214-236
- [17] W. Knauff and R. Kress, On the Exterior Boundary-Value Problem for the Time-Harmonic Maxwell-Equation, *J. Math. Anal. Appl.* 72 (1979), 215-235
- [18] R. Kress, A Remark on a Boundary Value Problem for Force-free Fields, *J. Appl. Math. Phys. ZAMP* 28 (1977), 715-722
- [19] R. Kress, The treatment of a Neumann boundary value problem for force-free fields by an integral equation method, *Proc. Roy. Soc. Edinb.* 82A (1978), 71-86
- [20] R. Kress, A boundary integral equation method for a Neumann boundary problem for force-free fields, *J. Engineering Math.* 15 (1981), 29-48
- [21] R. Kress, On the boundary operator in electromagnetic scattering, *Proc. Roy. Soc. Edinb.* 103A (1986), 91-98
- [22] R. Kress, *Linear Integral Equations*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1989
- [23] R. Kress, A Newton Method in inverse obstacle scattering, In: *Inverse Problems in Engineering Mechanics*, (Bui et al, eds), Balkema, Rotterdam 1994
- [24] R. Kress, Integral equation methods in inverse obstacle scattering, *Engineering Anal. with Boundary Elements* 15 (1995), 171-179
- [25] R. Kress, On the numerical solution of a hypersingular integral equation in scattering theory, *J. Comput. Appl. Math* 61 (1995), 345-360
- [26] R. Kress, *Numerical Analysis*, Springer-Verlag, New York 1998
- [27] R. Kress and G. F. Roach, Transmission problems for the Helmholtz equation, *J. Math. Phys.* 19.6 (1978), 1433-1437
- [28] R. Kussmaul, Ein numerisches Verfahren zur Lösung des Neumannschen Außenraumproblems für die Helmholtzsche Schwingungsgleichung, *Computing* 4 (1969), 246-273
- [29] A. Lakhtakia, V. K. Varadan, and V. V. Varadan, *Time-Harmonic Electromagnetic Fields in Chiral Media*, Lecture Notes in Physics 335, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New-York 1989

-
- [30] I. V. Lindell, A. H. Sihvola, S. A. Tretyakov, A. J. Viitanen, *Electromagnetic Waves in Chiral and Bi-Isotropic Media*, Artech House, Boston London 1994
- [31] P. A. Martin and P. Ola, Boundary integral equations for the scattering of electromagnetic waves by a homogeneous dielectric obstacle, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* 123A (1993), 185-208
- [32] A. Meyenburg, *Interpolation mit Translaten einer geraden, 2π -periodischen, stetigen Funktion*, Hausarbeit im Rahmen der 1. Staatsprüfung für das Lehramt an Gymnasien, Universität Göttingen, 1996
- [33] L. Mönch, *Ein Quadraturformelverfahren für eine hypersinguläre Integralgleichung bei der Helmholtzgleichung im \mathbb{R}^2* , Diplomarbeit, Universität Göttingen, 1994
- [34] L. Mönch, *Die numerische Lösung des inversen akustischen Streuproblems am schallharten Kurvenbogen*, Dissertation, Universität Göttingen 1996
- [35] C. Müller, *Foundations of the Mathematical Theory of Electromagnetic Waves*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1969
- [36] P. Ola, Boundary integral equations for the scattering of electromagnetic waves by a homogenous chiral obstacle, *J. Math. Phys.* 35.8 (1994), 3969-3980
- [37] R. Potthast, *Fréchet Differenzierbarkeit von Randintegraloperatoren und Randwertproblemen zur Helmholtzgleichung und den zeitharmonischen Maxwellgleichungen*, Dissertation, Universität Göttingen 1994
- [38] R. Potthast, Domain Derivatives in Electromagnetic Scattering, *Math. Meth. Appl. Sciences* 19 (1996), 1157-1175
- [39] A. Priou, A. Sihvola, S. Tretyakov, and A. Vinogradov, *Advances in Complex Electromagnetic Materials*, Proceedings of the NATO Advanced Research Workshop on Electromagnetism of Chiral, Bi-isotropic, and Bi-anisotropic Media, Kluwer Academic, Dordrecht 1997
- [40] C. Schormann, *Newton-Verfahren für ein inverses Transmissionsproblem bei elektromagnetischen Wellen*, Diplomarbeit, NAM Universität Göttingen 1996
- [41] A. Sihvola and I. V. Lindell, Bi-isotropic constitutive relations, *Microwave Opt. Tech. Lett.* 5 (1992), 79-81
- [42] W. Sternberg, Anwendung der Integralgleichungen in der elektromagnetischen Lichttheorie, *Composito Mathematica* 3 (1936), 254-275
- [43] P. Wilde, *Über Transmissionsprobleme bei der vektorialen Helmholtzgleichung*, Dissertation, Universität Göttingen 1985
- [44] P. Wilde, Transmission problems for the vector Helmholtz equation, *Proc. Roy. Soc. Edinb.* 105A (1987), 61-76

Lebenslauf

persönliche Daten

Name	Thomas Gerlach
Geburtstag	27. Juli 1971
Geburtsort	Bleicherode
Eltern	Lenore Gerlach, geb. Gerbach, Lehrerin Otto Gerlach, Lehrer
Anschrift	Königsstieg 3, 37081 Göttingen
email	thomas.gerlach@usa.net

Ausbildung

1978 - 1986	Polytechnische Oberschule Haynrode
1986 - 1990	Spezialschule mathematisch – naturwissenschaftlich – technischer Richtung Erfurt, Abitur Juli 1990
WS 90/91 - SS 92	Studium der Mathematik mit Nebenfach Physik an der Universität Leipzig, Vordiplom Juli 1992
WS 92/93 - WS 95/96	Studium der Mathematik mit Nebenfach Theoretische Physik an der Universität Göttingen, Diplom Mai 1996
seit SS 96	Promotionsstudium in Mathematik, Betriebswirt- schaftslehre und Theoretische Physik als Nebenfächer

Tätigkeiten

seit 1991	Korrektor, Koordinator und Juror bei mathematischen Schülerwettbewerben auf Landes- und Bundesebene (Mathematikolympiaden)
WS 93/94, 94/95, 95/96, WS 96/97 - WS 97/98	wissenschaftliche Hilfskraft am Institut für Numerische und Angewandte Mathematik der Universität Göttingen
seit April 1998	wissenschaftlicher Angestellter am Institut für Nume- rische und Angewandte Mathematik der Universität Göttingen