

**Eine stabilisierte Finite-Elemente-Methode
für das k/ϵ -Turbulenzmodell
der inkompressiblen und nichtisothermen
Navier-Stokes-Gleichungen**

Diplomarbeit

vorgelegt von
Tobias Knopp
aus der
Hansestadt Lübeck

angefertigt am
**Institut für
Numerische und Angewandte Mathematik**
der
Georg-August-Universität zu Göttingen
1999



Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	5
2. Das k/ϵ-Turbulenzmodell	9
2.1. Einleitung	9
2.2. Die zufallsbehafteten Navier-Stokes-Gleichungen	9
2.3. Die Reynolds-Gleichungen	16
2.4. Mathematische Vorbemerkungen zum k/ϵ -Modell	24
2.5. Das Gleichungssystem des k/ϵ -Turbulenzmodells	31
2.6. Grenzschichttheorie und Wandfunktionen	38
2.7. Bemerkungen zum k/ϵ -Modell	45
3. Semidiskretisierung und iterative Entkopplung und Linearisierung	51
3.1. Zusammenstellung der Gleichungen	51
3.2. Zeitliche Semidiskretisierung	53
3.3. Linearisierung und Entkopplung	53
4. Finite-Elemente Diskretisierung und Stabilisierung	59
4.1. Reduktion auf Modellgleichungen	59
4.2. Schwache Formulierung	60
4.3. Finite-Elemente Approximation	65
4.4. Stabilisierung des ADR-Problems	67
4.5. SUPG- und PSPG- Stabilisierung des Oseen-Problems	73
4.6. Bemerkungen zur Implementation	75
5. Numerische Experimente zum Shock-Capturing-Verfahren bei ADR-Problemen	79
5.1. Fragestellungen	79
5.2. Vorbemerkungen zu den numerischen Experimenten	80
5.3. Qualitative Analyse des Shock-Capturing-Verfahrens	82
5.4. Quantitative Analyse	84
5.5. Genauigkeit des Verfahrens	88
5.6. Zusammenfassung und Folgerungen	90
6. Anwendung des Shock-Capturing-Verfahrens auf das k/ϵ-Turbulenzmodell	93
6.1. Vorbemerkungen zu den numerischen Experimenten	93
6.2. Fragestellungen	95
6.3. Stabilität des Verfahrens	95
6.4. Crosswind-Oszillationen und Shock-Capturing	96
6.5. Negativität von k und ϵ	97
6.6. Zusammenfassung	98

7. Vergleich zweier Linearisierungsstrategien für das nichtisotherme k-ϵ Turbulenzmodell	99
7.1. Fragestellungen	99
7.2. Vergleich der von den Algorithmen gelieferten Lösungen	99
7.3. Untersuchung des Konvergenzverhaltens	100
7.4. Zusammenfassung	102
8. Zusammenfassung und Ausblick	105
8.1. Rückblick	105
8.2. Ausblick	106
A. Anwendung des Shock-Capturing auf ADR-Probleme	107
A.1. Qualitative Wirkung des Verfahrens	107
A.2. Qualitative Analyse - Querschnitte durch die Lösungen	112
A.3. Konvergenz des Fehlers beim Shock-Capturing Verfahren	116
A.4. Konvergenz des Shock-Capturing in der Differenznorm	119
A.5. Konvergenz des Shock-Capturing in der Residuennorm	123
A.6. Lokalisierung der Wirkung des Shock-Capturing	127
A.7. Verschmieren der Lösung	132
B. Shock-Capturing und k-ϵ-Turbulenzmodell	141
B.1. Crosswind Oszillationen beim k - ϵ -Turbulenzmodell	141
B.2. Negativität von k und ϵ	145
B.3. Niveaulinien der Lösungen des Cheeswright-Testfalls	147
C. Konvergenzverhalten der Lösung beim Cheeswright-Testfall	151
D. Abkürzungs- und Symbolverzeichnis	157

1. Einleitung

Das Thema dieser Arbeit ist die numerische Behandlung turbulenter Strömungen. Sowohl laminare als auch turbulente Strömungen von Fluiden werden vollständig durch die Navier-Stokes-Gleichungen

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - \nu \Delta \mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0$$

beschrieben. Seit den Arbeiten von Richardson (1925) stellt man sich Turbulenz als Überlagerung von Wirbeln unterschiedlicher Größe vor. Ein hinreichend genaues numerisches Verfahren zur Lösung der Navier-Stokes-Gleichung muß auch die kleinsten Wirbel erfassen, wozu eine Gitterfeinheit von $h \approx \nu^{\frac{3}{4}}$ nötig ist. Bei dreidimensionalen Rechnungen führt dies zu Gleichungssystemen mit $N = \nu^{-\frac{9}{4}}$ Unbekannten. In industriellen Anwendungen liegt die Viskosität ν des Mediums in der Größenordnung $\nu \approx 10^{-6}$. Dies führt zu Gleichungssystemen mit $N \approx 10^{13.5}$ Unbekannten, was die Kapazitäten von modernsten Rechenanlagen bei weitem übersteigt.

Deswegen wurde in den letzten Jahrzehnten eine Vielzahl von Turbulenzmodellen entwickelt. Unter ihnen nehmen in den heutigen Anwendungen die sogenannten statistischen Turbulenzmodelle eine zentrale Stellung ein. Grundidee aller statistischen Turbulenzmodelle ist die Aufspaltung der Größen Geschwindigkeit \mathbf{u} und Druck p in einen (über ein Ensemble oder ein Zeitintervall) gemittelten Anteil und in einen Fluktuationsanteil:

$$\mathbf{u} = \mathbf{U} + \mathbf{u}', \quad p = P + p'.$$

Wie in Abschnitt 2.3 gezeigt wird, lösen die gemittelten Größen (\mathbf{U}, P) dann die sogenannte Reynoldsgleichung

$$(1.1) \quad \partial_t \mathbf{U} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} + \nabla P - \nabla \cdot (\nu \nabla \mathbf{U} + \langle \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}' \rangle) = 0.$$

Die gesamte Information über die Turbulenz steckt im a priori unbekanntem Korrelations-term $\langle \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}' \rangle$, dem sog. Reynoldsschen Spannungstensor. Je nachdem, wie dieser Term modelliert wird, unterscheidet man die verschiedenen Turbulenzmodelle. Eine schöne Übersicht über die geläufigen Turbulenzmodelle findet man z.B. in [Kes92]. Im Rahmen dieser Arbeit wird nur das von Daley und Harlow (1970) bzw. von Launder und Spalding (1974) vorgeschlagene k/ϵ -Turbulenzmodell behandelt. Der Reynoldsspannungstensor wird dabei modelliert durch

$$\langle \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}' \rangle = \frac{2}{3} k I + c_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \nabla \cdot (\mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T),$$

wobei $c_\mu = 0.09$ ist.

Berücksichtigt man zusätzlich nichtisotherme Effekte, so lautet das nichtlineare gekoppelte Differentialgleichungssystem, aus dem sich \mathbf{U} , P , k , ϵ und die mittlere Temperatur Θ bestimmen lassen:

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{U} + (\mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U}) + \nabla P - \nabla \cdot \left((\nu + c_\mu \frac{k^2}{\epsilon}) (\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T) \right) &= \frac{2}{3} \nabla k \\ \nabla \cdot \mathbf{U} &= 0 \\ \partial_t \Theta + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \Theta - \nabla \cdot (a_e \nabla \Theta) &= \frac{\dot{q}^V}{c_p} \\ \partial_t k + \mathbf{U} \cdot \nabla k - \frac{c_\mu}{2} \frac{k^2}{\epsilon} |\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T|^2 - \nabla \cdot (c_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \nabla k) + \epsilon &= 0 \\ \partial_t \epsilon + \mathbf{U} \cdot \nabla \epsilon - \frac{c_1}{2} k |\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T|^2 - \nabla \cdot (c_\epsilon \frac{k^2}{\epsilon} \nabla \epsilon) + c_2 \frac{\epsilon^2}{k} &= 0. \end{aligned}$$

Die Konstanten werden aus physikalischen Experimenten bestimmt zu $c_\mu = 0.09$, $c_1 = 0.126$, $c_2 = 1.92$ und $c_\epsilon = 0.07$. Das isotherme k/ϵ -Turbulenzmodell wird in Abschnitt 2.5 hergeleitet. Es hat sich gezeigt, daß das k/ϵ -Modell in Wandnähe keine befriedigenden Resultate liefert. Daher werden die Größen \mathbf{U} , Θ , k und ϵ dort durch analytische Funktionen, sog. Wandfunktionen, beschrieben (vgl. Abschnitt 2.6).

Im dritten und vierten Kapitel soll ein vollständiges numerisches Lösungsverfahren des im zweiten Kapitel hergeleiteten Differentialgleichungssystems beschrieben werden. Im dritten Kapitel wird zunächst eine zeitliche Semidiskretisierung mit dem impliziten Eulerverfahren durchgeführt und anschließend eine Entkopplung und Linearisierung der Gleichungen mit der Methode der iterativen Entkopplung vorgenommen. In der vorliegenden Arbeit werden zwei Linearisierungs- und Iterationsstrategien untersucht, die im Abschnitt 3.3 vorgestellt werden und in Kapitel 7 anhand numerischer Tests verglichen werden.

Betrachtet man das so entkoppelte Differentialgleichungssystem, so erkennt man, daß es genügt, sich im folgenden auf zwei Modellgleichungen zu beschränken. Die linearisierte Reynoldsgleichung ist im wesentlichen eine Oseen-Gleichung (mit lokal variabler Viskosität), die Gleichungen für Θ , k und ϵ sind im wesentlichen lineare Konvektions-Diffusionsgleichungen (mit lokal variabler Viskosität). In Abschnitt 4.2 wird für beide Modellgleichungen eine Variationsformulierung auf dem kontinuierlichen Level hergeleitet, in Abschnitt 4.3 erfolgt der Übergang auf den räumlich diskreten Level. Da das so erhaltene Galerkin-Schema numerisch instabil ist, werden SUPG- und in der Oseen-Gleichung auch PSPG-Stabilisierungsterme eingeführt (vgl. die Abschnitte 4.4 und 4.5).

Es ist ein zentrales Ziel dieser Arbeit, das so stabilisierte numerische Verfahren durch die zusätzliche Stabilisierung mit einer Shock-Capturing-Technik wesentlich zu verbessern. Beim k/ϵ -Modell steckt die Information über die turbulenten Effekte in der turbulenten Viskosität $c_\mu \frac{k^2}{\epsilon}$, wobei k und ϵ Lösungen von Konvektions-Diffusionsgleichungen sind. k und ϵ liegen in der Größenordnung $\sqrt{\nu}$. In der Nähe von Grenzschichten — das sind Bereiche, wo die Lösung scharfe Gradienten besitzt — können die Lösungen von Konvektions-Diffusionsgleichungen Über- und Unterschwinger aufweisen. Durch numerische Oszillationen hervorgerufene negative Werte für k und ϵ sind unphysikalisch und können insbesondere negative, sehr kleine oder auch sehr große Werte für die effektive Viskosität bedeuten. Dies ist einerseits physikalisch falsch und verschlechtert andererseits die numerische Lösbarkeit. Durch eine Shock-Capturing Technik sollen diese Über- und Unterschwinger weggedämpft

werden. Dazu wurde auch die von Codina in [Cod93] favorisierte Shock-Capturing-Variante implementiert.

Im fünften Kapitel soll die Wirkung der implementierten Shock-Capturing Technik zunächst an einigen Testbeispielen analysiert werden. Die Testrechnungen wurden mit dem Forschungscode ParallelNS durchgeführt, der in einem Gemeinschaftsprojekt zwischen dem Institut für Luft- und Raumfahrttechnik und dem Institut für Thermodynamik und Technische Gebäudeausrüstung der TU Dresden und dem Institut für Numerische und Angewandte Mathematik der Universität Göttingen entwickelt wurde. Die graphische Darstellung erfolgte mit dem kommerziellen Visualisierungspaket tecplot.

Ziel des sechsten Kapitels ist die Untersuchung der Wirksamkeit des Shock-Capturing für das nichtisotherme k/ϵ -Modell. Dazu wurde als Testbeispiel ein zweidimensionales Closed-Cavity-Problem gewählt. Im siebten Kapitel soll schließlich das Konvergenzverhalten der beiden vorgestellten Linearisierungs- und Iterationsstrategien für dieses Testbeispiel verglichen werden.

2. Das k/ϵ -Turbulenzmodell

2.1. Einleitung

Das Thema dieses Kapitels ist das k/ϵ -Turbulenzmodell. Zunächst wird eine zufallsabhängige Formulierung der inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen benötigt. Dazu werden drei Zugänge vorgestellt: Der Zugang über das Ensemble-Konzept der statistischen Physik, der Zugang über das Konzept der stochastischen dynamischen Systeme und der Zugang über stochastische Differentialgleichungen. Danach wird das Konzept der Filter eingeführt, das angewendet wird, um Aussagen über die gemittelte Lösung einer stochastischen Differentialgleichung zu erhalten. Durch Filterung der zufälligen Navier-Stokes-Gleichungen werden dann die Gleichungen für das mittlere Geschwindigkeitsfeld und den mittleren Druck hergeleitet, die sog. Reynolds-Gleichungen. Diese bilden dann den Ausgangspunkt für die Herleitung des k/ϵ -Turbulenzmodells im zweiten Teil dieses Kapitels.

Die benötigten Funktionenräume sind im Abkürzungs- und Symbolverzeichnis zusammengestellt.

2.2. Die zufallsbehafteten Navier-Stokes-Gleichungen

2.2.1. Phänomenologie turbulenter Strömungen aufgrund physikalischer Experimente

Experimentelle Untersuchungen z.B. von Kanalströmungen (mit Hitzdraht-oder Heißfilmanemometrie) mit hoher Zeitaufösung zeigen, daß in turbulenten Strömungen die gemessene Geschwindigkeit schnell oszillierende Schwankungen um eine mittlere Geschwindigkeit aufweist. Eine schöne Darstellung zur experimentellen Untersuchung turbulenter Strömungen findet man z.B. in [Eck74]. Betrachtet man homogene Turbulenz hinter einem Gitter, so scheint es eine unregelmäßige, zufällige Strömungsgestalt zu geben. Wiederholt man Experimente zur Turbulenz, so ist zwar die detaillierte Struktur einer Messung nicht reproduzierbar, aber gewisse statistisch gemittelte Größen sind reproduzierbar. Dies veranlaßte Taylor(1935), turbulente Strömungen mit statistischen Methoden zu beschreiben (vgl. [Tay35] und [Fri96], S.27ff). Es stellt sich die Frage, warum deterministische Gleichungen wie die Navier-Stokes-Gleichungen Lösungen besitzen können, die Aspekte der Zufälligkeit aufweisen.

2.2.2. Zugang über das Ensemble-Konzept der statistischen Physik

Der einfachste Zugang zu den zufallsabhängigen Navier-Stokes-Gleichungen ist das in der statistischen Physik benutzte Modell des Ensembles, vgl. [LM86]. Falls ein Experimentator ein instationäres Strömungsproblem mit vorgegebener Anfangsströmung $\mathbf{u}_0(x)$ messen will, so versucht er, die Anfangsströmung $\mathbf{u}_0(x)$ möglichst genau einzustellen, und nimmt dann die Messung auf. Er wird die Anfangsströmung $\mathbf{u}_0(x)$ aber nie genau einstellen können, sie wird immer mit einer Störung $\epsilon \mathbf{u}_0^{st}$ behaftet sein. Da diese Störung a priori unbekannt

ist, ist auch das Ergebnis der Messung a-priori unbekannt. Insbesondere sind die exakt gleichen Anfangsdaten nicht reproduzierbar. Im Falle einer sensitiven Abhängigkeit von den Anfangsdaten mißt der Experimentator bei Wiederholungen des Experimentes mitunter völlig verschiedene Lösungen. So entsteht ein Aspekt der Zufälligkeit der Lösung. Die zunächst gemachte Annahme besteht nun darin, daß die Menge der zugelassenen Störungen endlich sein soll. Ihre Anzahl sei N . Es sei ferner angenommen, die Wahrscheinlichkeit, eine dieser Störungen zufällig einzustellen, sei gleichverteilt $\frac{1}{N}$.

Die Idee des Ensemblekonzepts besteht nun darin, sich eine Gesamtheit von Systemen zu denken, von denen jedes mit genau einer der zulässigen Störungen behaftet ist.

Definition 2.1

Sei $\Omega \subset R^d$, $d = 2, 3$, ein Gebiet. Sei $\Gamma = \partial\Omega$. Unter einem Ensemble von Systemen, die alle den Navier-Stokes-Gleichungen mit den gleichen Randbedingungen und fast gleichen Anfangsbedingungen genügen, wird eine Gesamtheit von N Systemen verstanden, wobei das i -te System dabei durch folgende Spezifikationen definiert wird:

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u}^i + (\mathbf{u}^i \cdot \nabla) \mathbf{u}^i + \nabla p^i - \nu \Delta \mathbf{u}^i &= \mathbf{f} && \text{in } \Omega \times [0, T[\\ \nabla \cdot \mathbf{u}^i &= 0 && \text{in } \Omega \times [0, T[\\ \mathbf{u}^i(x, 0) &= \mathbf{u}_0(x) + \epsilon \mathbf{u}_0^i(x) && \text{auf } \Omega \times \{0\}, \quad \epsilon \ll 1 \\ \mathbf{u}^i|_{\Gamma} &= \mathbf{g} && \text{auf } \Gamma \times [0, T[. \end{aligned}$$

Dabei sei vorausgesetzt, daß auf $\Omega \times [0, T[$ eine und nur eine Lösung existiert. Im folgenden wird das so definierte Ensemble auch als Ensemble NS bezeichnet. Ferner werden einzelne Systeme dieses Ensembles auch als Systeme NS bezeichnet.

Die Zufälligkeit der Störung ergibt sich im Ensemblekonzept dann daraus, daß der Experimentator zufällig ein System aus der Gesamtheit aller Systeme auswählt und an diesem dann die Messung vornimmt. So gesehen stellt der Meßvorgang ein Zufallsexperiment dar, dessen Ergebnisraum $\Omega_P^N = \{1, 2, \dots, N\}$ die Menge aller Systeme ist und dessen Wahrscheinlichkeitsverteilung durch eine Gleichverteilung auf Ω_P^N gegeben ist, d.h., es gilt $P(\{\omega\}) = \frac{1}{N}$, $\omega \in \Omega_P^N$. P ist ein Punktmaß. Das zufällig ausgewählte System ω nennt man auch Realisierung des Zufallsexperimentes. Das zur Realisierung $\omega \in \Omega_P^N$ gehörende Geschwindigkeitsfeld wird mit $\mathbf{u}(x, t, \omega)$ bezeichnet. Es bezeichne $P(\{\mathbf{u}(\cdot, t, \omega)\})$ die Wahrscheinlichkeit, zum Zeitpunkt t das zur Realisierung ω gehörende Geschwindigkeitsfeld \mathbf{u} zu messen. Dann gilt

$$P(\{\mathbf{u}(\cdot, t, \omega)\}) = P(\{\mathbf{u}(\cdot, 0, \omega)\}) = P(\{\omega\}) = \frac{1}{N}.$$

Ein Wahrscheinlichkeitsmaß mit dieser Eigenschaft bezeichnet man auch als Invarianzmaß. Die in diesem Abschnitt eher anschaulich motivierte Darstellung wird im folgenden Abschnitt in der abstrakten Sprechweise der stochastischen dynamischen Systeme formuliert.

2.2.3. Zugang über das Konzept der stochastischen dynamischen Systeme

Zuerst soll der Begriff eines stochastischen dynamischen Systems eingeführt werden, vgl. [Fri96] S.36.

Definition 2.2

Ein stochastisches dynamisches System ist ein Quadrupel $(\Omega_P^{DS}, A, P, G_t)$, bestehend aus

- einer Menge Ω_P^{DS} , dem sog. Zustandsraum,
- einer σ -Algebra A auf Ω_P^{DS} ,
- einem Wahrscheinlichkeitsmaß P auf A sowie
- einem Evolutions- oder Zeitentwicklungsoperator G_t

Dabei ist ein Zeitentwicklungsoperator G_t eine einparametrische Familie von Abbildungen von Ω_P^{DS} in sich mit den folgenden Eigenschaften:

1. G_t bildet eine Halbgruppe, d.h. $G_0 = I$, $G_t G_{t'} = G_{t+t'}$,
2. G_t erhält P , d.h. $P(G_t^{-1}A) = P(A)$.

Der in $\omega \in \Omega_P^{DS}$ beginnende Pfad von G_t ist definiert durch $\{G_t\omega | t \in \mathbb{R}_+\}$.

An dieser Stelle sollen die wichtigsten Resultate aus der Theorie zu den Navier-Stokes-Gleichungen angegeben werden. Zunächst soll das Navier-Stokes-Problem genau definiert werden. Für die dabei verwendeten Sobolevräume sei auf das Abkürzungs- und Symbolverzeichnis verwiesen.

Definition 2.3

Gegeben seien

- $\mathbf{f} \in L^2(0, T; (H^{-1}(\Omega))^d)$,
- $\mathbf{g} \in L^2(0, T; (H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega))^d)$,
- $\mathbf{u}_0 \in (H_{div}^1(\Omega))^d$.

Dann lautet das Navier-Stokes-Problem:

Finde $(\mathbf{u}, p) \in L^2(0, T; (H_{div}^1(\Omega))^d) \cap L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^d) \times L^2(0, T; L_0^2(\Omega))$ so daß

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - \nu \Delta \mathbf{u} &= \mathbf{f} & \text{in } \Omega \times [0, T[\\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 & \text{in } \Omega \times [0, T[\\ \mathbf{u}|_\Gamma &= \mathbf{g} & \text{auf } \Gamma \times [0, T[\\ \mathbf{u}(x, 0) &= \mathbf{u}_0 & \text{auf } \Omega \times \{0\} \end{aligned}$$

gilt.

Es gilt folgende Existenz- und Regularitätsaussage.

Satz 2.1

Für $d = 2$ und $d = 3$ existiert eine Lösung des Navier-Stokes-Problems aus Definition 2.3. Sei $\mathbf{u} \in L^2(0, T; (H_{div}^1(\Omega))^d) \cap L^\infty(0, T; (L^2(\Omega))^d)$ eine Lösung des Navier-Stokes-Problems, dann gilt

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} \in \begin{cases} L^2(0, T; (H_{div}^{-1}(\Omega))^2), & \text{falls } d = 2 \\ L^{\frac{4}{3}}(0, T; (H_{div}^{-1}(\Omega))^3), & \text{falls } d = 3. \end{cases}$$

Bzgl. der Eindeutigkeit gibt es folgendes Resultat.

Satz 2.2

Unter den Voraussetzungen an die Daten wie in Definition 2.3 ist die Lösung \mathbf{u} des Navier-Stokes-Problems im Fall $d = 2$ eindeutig bestimmt.

Beweis:

Zum Beweis sei verwiesen auf [Tem77], S.294. ◇

Bemerkung 2.1

Für eine Eindeutigkeitsaussage für den Fall $d = 3$ sei verwiesen auf [Tem77], S.310.

Nun kann das von den Navier-Stokes-Gleichungen erzeugte stochastische dynamische System definiert werden, vgl. [Fri96] S.37f.

Definition 2.4

Sei $d = 2$. Es gelten die Voraussetzungen von Definition 2.3, d.h. zu jeder Anfangsbedingung

$$\mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0 \quad \text{auf } \Omega \times \{0\}, \quad \mathbf{u}_0 \in (H_{div}^1(\Omega))^d$$

besitze das in Definition (2.3) definierte Navier-Stokes-Problem eine und nur eine Lösung $(\mathbf{u}, p) \in H_{div}^1(\Omega)^d \times L_0^2(\Omega)$ zum Zeitpunkt $t \in]0, T[$.

- Als Menge Ω_P^{DS} definiert man dann den Funktionenraum $\Omega_P^{DS} := H_{div}^1(\Omega)^d$.
- Sei A eine σ -Algebra auf $\Omega_P^{DS} = (H_{div}^1)^d$.
- Sei P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf A , das jeder Teilmenge $B \in A$ von Anfangsbedingungen die Wahrscheinlichkeit zuordnet, daß die zufällig realisierte Anfangsbedingung in B liegt.
- Sei der Zeitentwicklungsoperator G_t definiert als die Abbildung, die einer Anfangsbedingung $\mathbf{u}_0(\cdot) \in (H_{div}^1(\Omega))^d$ die zugehörige eindeutig bestimmte Lösung $\mathbf{u}(\cdot, t) \in (H_{div}^1(\Omega))^d$ zur Zeit t zuordnet, definiert durch

$$(2.1) \quad \begin{aligned} G_t : (H_{div}^1(\Omega))^d &\mapsto (H_{div}^1(\Omega))^d \\ \mathbf{u}_0(\cdot) &\mapsto \mathbf{u}(\cdot, t). \end{aligned}$$

Per definitionem ist G_t eine Halbgruppe. Zusätzlich wird gefordert, daß G_t das Maß P erhält, d.h.

$$P(G_t^{-1}A) = P(A).$$

Dann ist das von den Navier-Stokes-Gleichungen erzeugte dynamische System definiert als das Quadrupel $(\Omega_P^{DS}, A, P, G_t)$.

Um zu unterstreichen, daß es für jede Anfangsbedingung kraft des auf Ω_P^{DS} definierten Maßes eine Wahrscheinlichkeit gibt, daß diese Anfangsbedingung realisiert wird, schreibt man statt $\mathbf{u}_0(\cdot)$ auch $\mathbf{u}_0(\cdot, \omega)$. Für den in $\mathbf{u}_0(\cdot, \omega)$ beginnenden Pfad $G_t(\mathbf{u}_0(\cdot, \omega))$ wird in Zukunft meist $\mathbf{u}(\cdot, t, \omega)$ geschrieben.

Der oben skizzierte Zugang folgt im wesentlichen dem Vorschlag von Kraichnan(1972), der die Zufälligkeit der Lösung auf die Zufälligkeit der Anfangsbedingung zurückführt. Dies wird durch die Eigenschaft des Zeitentwicklungsoperators, das Wahrscheinlichkeitsmaß zu erhalten, d.h. $P(G_t^{-1}(A) = P(A))$, mathematisch beschrieben.

Bemerkung 2.2

Es muß kritisch angemerkt werden, daß die Existenz von Maßen, die invariant unter dem Zeitentwicklungsoperator sind, noch nicht hinreichend geklärt ist, vgl. [VF88] und [Fri96] S.38. Für den dreidimensionalen Fall gibt es noch nicht einmal eine ausreichende Lösungstheorie der Navier-Stokes-Gleichungen zur Definition des Zeitentwicklungsoperators.

Bemerkung 2.3

Das eigentliche Ziel bei der Anwendung der Theorie der dynamischen Systeme auf die Navier-Stokes-Gleichungen ist es, die mathematische Natur der Turbulenz zu erklären. Dieser Aspekt würde jedoch den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Der interessierte Leser sei verwiesen auf [Fri96] und [BR77].

2.2.4. Zugang über das Konzept der stochastischen Differentialgleichungen

Es soll noch über einen anderen Zugang berichtet werden, die Navier-Stokes-Gleichungen als zufallsabhängige Differentialgleichungen zu formulieren. Die zentrale Idee der Arbeit von Inoue und Funaki [IF79] besteht darin, die deterministische Euler-Gleichung mit einer Brownschen Bewegung, einem sog. stochastischen Rauschen, zu überlagern.

Zunächst müssen einige Begriffe eingeführt werden. Sei dazu $\Omega \subset R^n$ ein Gebiet. Sei Φ_t eine einparametrische orientierungstreue Diffeomorphismengruppe auf dem R^n mit Jakobideterminante gleich 1. Diese beschreibt die Bewegung des Fluids. Die letzte Bedingung entspricht der Inkompressibilitätsbedingung. Dann sei folgendes Variationsproblem gegeben:

Problem 2.1

Sind Φ^0 und Φ^1 gegeben, so finde man eine einparametrische Diffeomorphismengruppe Φ_t mit

1. $\Phi_0 = \Phi^0$ und $\Phi_1 = \Phi^1$.
2. Für Φ_t verschwinde die Variation des folgenden Energiefunktionals :

$$J(\Phi_t) = \int_0^1 \int_{R^n} \sum_{i=0}^n \left[\frac{\partial \Phi_t^i(\mathbf{x})}{\partial t} \right]^2 d\mathbf{x} dt,$$

wobei $\Phi_t(\mathbf{x}) = (\Phi_t^1(\mathbf{x}), \dots, \Phi_t^n(\mathbf{x}))$ ist.

Minimiert $\Phi_t(\mathbf{x})$ dieses Funktional, so sagt man in der Theoretischen Physik, $\Phi_t(\mathbf{x})$ erfülle das Hamiltonsche Prinzip. Es ist ein Resultat der Theoretischen Mechanik, daß das Hamiltonsche Prinzip äquivalent zu den Newtonschen Bewegungsgleichungen ist. So wird der folgende Satz motiviert, vgl. [IF79] Theorem 2.1.

Satz 2.3

Das zur Lösung $\Phi_t(\mathbf{x})$ des in Problem 2.1 definierten Minimierungsproblems gehörende Geschwindigkeitsfeld

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \left(\frac{\partial \Phi_t^1(\mathbf{x})}{\partial t}, \dots, \frac{\partial \Phi_t^n(\mathbf{x})}{\partial t} \right)$$

löst die Euler-Gleichung

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} && \text{in } \Omega \times [0, T[\\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 && \text{in } \Omega \times [0, T[\\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \times]0, T[\\ \mathbf{u}(\cdot, 0) &= \mathbf{u}_0 && \text{in } \Omega. \end{aligned}$$

Bemerkung 2.4

Die Eulergleichung besitzt keinen Laplace-Term. Deshalb ist sie eine Differentialgleichung erster Ordnung in der Geschwindigkeit. Die Bewegung der Flüssigkeitsteilchen in einer Strömung, dessen Geschwindigkeitsfeld der Euler-Gleichung genügt, folgt den Charakteristiken der Euler-Gleichung. Es gibt keinen Teilchenaustausch zwischen verschiedenen Charakteristiken.

In realen Fluiden vollführt jedes Teilchen neben der Bewegung, die durch die äußeren Kräfte und Druckunterschiede bestimmt wird und die durch die Euler-Gleichung beschrieben wird, nach der kinetischen Gastheorie eine sog. Brownsche Molekularbewegung.

Nun soll der Begriff der Brownschen Bewegung mathematisch eingeführt werden, vgl. [Bre93] S.248.

Definition 2.5

Eine Brownsche Bewegung ist ein stochastischer Prozeß $\{X_t\}_{t \in T}$, dessen Pfade für alle $\omega \in \Omega$ folgende Eigenschaften erfüllen:

1. $X(t + \Delta t) - X(t)$ ist unabhängig von $X(\tau)$ für alle $\tau \leq t$.
2. Die Verteilung von $X(t + \Delta t) - X(t)$ ist unabhängig von t (Stationarität).
3. $\lim_{\Delta t \rightarrow 0+0} \frac{P(|X(t+\Delta t) - X(t)| > \delta)}{\Delta t} = 0$ für alle $\delta > 0$.

Eine Brownsche Bewegung hat folgende Eigenschaften.

Satz 2.4

Sei $\{X_t\}_{t \in T}$ eine Brownsche Bewegung mit $X(0) = 0$. Dann ist $X(t)$ normalverteilt mit

$$EX(t) = \mu t \quad \text{und} \quad \text{Var}(X(t)) = \sigma^2 t.$$

μ heißt auch (mittlere) Drift der Brownschen Bewegung.

Beweis:

Vgl. Breiman [Bre93] S.249. ◇

Hinsichtlich Stetigkeit und Differenzierbarkeit einer Brownschen Bewegung gilt folgendes Resultat.

Satz 2.5

Für jede Brownsche Bewegung sind fast alle Pfade gleichmäßig stetig. Fast jeder Pfad ist nirgends differenzierbar.

Beweis:

Vgl. Breiman [Bre93] S.257 und S.261. ◇

Nun wird folgendes Minimierungsproblem betrachtet:

Problem 2.2

Sind $\Phi^0(.,\omega)$ und $\Phi^1(.,\omega)$ gegeben, so finde man eine einparametrische Diffeomorphismengruppe $\Phi_t(.,\omega)$ mit

1. $\Phi_0(.,\omega) = \Phi^0(.,\omega)$ und $\Phi_1(.,\omega) = \Phi^1(.,\omega)$.
2. Für $\Phi_t(.,\omega)$ verschwinde die Variation des folgenden Energiefunktionals :

$$J(\Phi_t) = \int_0^1 \int_{R^n} \sum_{i=0}^n \left[\frac{\partial \Phi_t^i(\mathbf{x})}{\partial t} + \sqrt{2\nu} \frac{dB_t^i}{dt} \right]^2 d\mathbf{x} dt,$$

wobei $\Phi_t(\mathbf{x}) = (\Phi_t^1(\mathbf{x}), \dots, \Phi_t^n(\mathbf{x}))$ ist.

Bemerkung 2.5

Wie in Satz 2.5 bemerkt, kann es sich bei $\frac{dB_t^i}{dt}$ nur um eine formale Schreibweise handeln. Da B_t^i auf jedem endlichen Intervall eine unbeschränkte Variation besitzt, muß man das Konzept des Ito- bzw. Stratonovic-Integrals verwenden.

Nach [IF79] S.87 erfüllt das Geschwindigkeitsfeld $u(t,.,\omega)$ mit $u^i(t,.,\omega) = \frac{\partial \Phi_t^i}{\partial t}$ die folgende Gleichung:

$$(2.2) \quad \frac{\partial(u^i + \sqrt{2\nu} \frac{dB_t^i}{dt})}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial u^j}{\partial x^j} (u^j + \sqrt{2\nu} \frac{dB_t^j}{dt}) + \frac{\partial p}{\partial x^i} = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_t = 0.$$

Im Beweis von Theorem 4.5 in [IF79] wird nun folgende Aussage hergeleitet

Satz 2.6

Für fast jedes $\omega \in \Omega$ gilt : Das zur Lösung des Minimierungsproblems 2.2 gehörende Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t, \omega)$ löst die Navier-Stokes-Gleichungen

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - \nu \Delta \mathbf{u} &= 0 && \text{in } \Omega \times [0, T[\\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 && \text{in } \Omega \times [0, T[\\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \times]0, T[\\ \mathbf{u}(\cdot, 0) &= \mathbf{u}_0 && \text{in } \Omega. \end{aligned}$$

Bemerkung 2.6

Durch die thermische Eigenbewegung der Moleküle des Fluids, die mathematisch als Brownsche Molekularbewegung beschrieben wird, findet ein Teilchenaustausch zwischen verschiedenen Charakteristiken der Euler-Gleichung statt. Für jedes einzelne Molekül ist diese Eigenbewegung zufällig, aber die mittlere Drift jedes einzelnen Moleküls ist bekanntlich null. Das makroskopische Geschwindigkeitsfeld des Fluids ist das Resultat der mikroskopischen Bewegung aller Moleküle des Fluids. Somit wird verständlich, daß das Geschwindigkeitsfeld des Fluids als Summe eines mittleren Geschwindigkeitsfeldes und eines Anteils der zufälligen Fluktuationen behandelt werden kann. Dieser Gedanke wird im folgenden Abschnitt präzisiert werden.

2.2.5. Rückblick

Ziel dieses Abschnitts war es, die Navier-Stokes-Gleichungen als zufallsabhängige Differentialgleichungen zu formulieren. Es wurden dazu drei Ansätze angegeben, von denen der letzte recht befriedigend ist: Ausgehend von einer Analyse der mikroskopisch-physikalischen Vorgänge in einem Fluid wurde ein mathematisches Modell aufgestellt. Aus diesem konnten dann die zufallsabhängigen Navier-Stokes-Gleichungen deduziert werden.

2.3. Die Reynolds-Gleichungen

2.3.1. Das Konzept der Filter

Die Idee der Filter ist es, Aussagen über statistische Mittelwerte von Lösungen stochastischer bzw. pseudostochastischer Differentialgleichungen zu erhalten und diese von den zufälligen Fluktuationen einer einzigen Realisierung (Pfade) zu trennen. Im Sinne der Statistik ist ein Filter ein Schätzer, der aufgrund einer Menge von Lösungen zufällig gestörter Differentialgleichungen die Lösung der ungestörten Gleichung schätzen soll, vgl. [Oek92] S.58ff. Im folgenden benötigte Filter sind der Ensemblemittelwert (oder statistischer Mittelwert) sowie der räumliche und zeitliche Mittelwert.

Gegeben sei wieder das in Abschnitt 2.2.2 definierte Ensemble. Vergleicht man die zu den Systemen i gehörenden Lösungen u^i , so kommt man zu folgenden Beobachtungen:

1. Es gibt eine allen Systemen gemeinsame mittlere Strömung.
2. Dieser mittleren Strömung sind für jedes System individuelle zufällige Fluktuationen, auch Wirbel genannt, überlagert.

Diese Beobachtung motiviert die folgende

Definition 2.6

Sei $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t, \omega)$ Lösung des Problems aus Definition 2.1. Dann ist der Ensemblemittelwert, bezeichnet mit $\langle \cdot \rangle_E$, definiert als

$$(2.3) \quad \langle \mathbf{u} \rangle_E \equiv \int \mathbf{u}(\mathbf{x}, t, \omega) d\omega := \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{\omega \in \Omega_p^N} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t, \omega).$$

Der durch $\langle \cdot \rangle_E : \mathbf{u} \mapsto \langle \mathbf{u} \rangle_E$ definierte Operator heißt Ensemblemittelungsfiler.

Bemerkung 2.7

Bei Definition 2.6 bezeichnet der Ausdruck $\int \mathbf{u}(\mathbf{x}, t, \omega) d\omega$ nur eine formale Schreibweise, der durch $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{\omega \in \Omega_P^N} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t, \omega)$ definiert ist. Dabei soll die Schreibweise $\int \mathbf{u}(\mathbf{x}, t, \omega) d\omega$ an das Riemann-Stieltjesche-Integral erinnern.

Falls das Filter der Ensemblemittelung für die Zugänge der dynamischen Systeme oder der stochastischen Differentialgleichungen im Sinne der Maß- und Interationstheorie der Stochastik eingeführt wird, so gelangt man zu Integralen der Form $\int \mathbf{u}(\mathbf{x}, t, \omega) d\omega$. Für diese Arbeit ist eine exakte Einführung dieses Integralbegriffs aber nicht entscheidend. Wichtig sind allerdings die Eigenschaften dieses Filters.

Damit kann die für die gesamte Arbeit wichtige Zerlegung des Geschwindigkeitsfeldes \mathbf{u} in ein mittleres Geschwindigkeitsfeld \mathbf{U} und in einen Fluktuationsanteil \mathbf{u}' eingeführt werden:

Definition 2.7

Man nennt $\mathbf{U} \equiv \langle \mathbf{u} \rangle_E$ das mittlere Geschwindigkeitsfeld und definiert die zur Realisierung $\omega \in \Omega_P^N$ gehörende Fluktuation $\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t, \omega)$ als

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \mathbf{U}.$$

Dann kann man das zu einer Realisierung $\omega \in \Omega_P^N$ gehörende Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t, \omega)$ zerlegen in $\mathbf{u} = \mathbf{U} + \mathbf{u}'$

Definition 2.8

Sei $B \subset \Omega$ ein beschränktes und meßbares Gebiet mit Maß $|B|$. Dann ist der räumliche Mittelwert, gemittelt über B , bezeichnet mit $\langle \cdot \rangle_B$, definiert als

$$(2.4) \quad \langle \mathbf{u} \rangle_B := \frac{1}{|B|} \int_B \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}.$$

Der durch $\langle \cdot \rangle_B : \mathbf{u} \mapsto \langle \mathbf{u} \rangle_B$ definierte Operator heißt Filter der räumlichen Mittelung.

Definition 2.9

Der zeitliche Mittelwert, gemittelt über $[0, T]$, bezeichnet mit $\langle \cdot \rangle_T$, wird definiert als

$$(2.5) \quad \langle \mathbf{u} \rangle_T := \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{u}(x, t) dt.$$

Der durch $\langle \cdot \rangle_T : \mathbf{u} \mapsto \langle \mathbf{u} \rangle_T$ definierte Operator heißt Filter der zeitlichen Mittelung.

Lemma 2.1

Der Filter $\langle \dots \rangle_E$ erfüllt folgende Eigenschaften:

- (i) $\langle u + \lambda v \rangle_E = \langle u \rangle_E + \lambda \langle v \rangle_E$.
- (ii) $\langle \partial_x u \rangle_E = \partial_x \langle u \rangle_E$, $\langle \partial_t u \rangle_E = \partial_t \langle u \rangle_E$.
- (iii) $\langle \langle u \rangle_E \rangle_E = \langle u \rangle_E$.
- (iv) $\langle v \langle u \rangle_E \rangle_E = \langle v \rangle_E \langle u \rangle_E$.

Beweis:

- (i) folgt aus der Linearität des Riemann-Stieltjes- bzw des Lebesgue-Integrals.
- (ii) ist klar, da Integrationsvariable und Differentiationsvariable verschieden sind.
- (iii) $\langle \langle u \rangle_E \rangle_E = \int \langle u \rangle_E d\omega = \langle u \rangle_E \int d\omega = \langle u \rangle_E$.
- (iv) $\langle v \langle u \rangle_E \rangle_E = \int \langle v \rangle_E u d\omega = \langle v \rangle_E \int u d\omega = \langle v \rangle_E \langle u \rangle_E$. ◇

2.3.2. Herleitung der Reynolds-Gleichungen

Die Navier-Stokes-Gleichungen beschreiben das Verhalten des Geschwindigkeitsfeldes und des Druckes für jedes einzelne System des Ensembles. In diesem Abschnitt sollen nun die sogenannten Reynolds-Gleichungen, die Gleichungen für den Mittelwert des Geschwindigkeitsfeldes und des Druckes, gemittelt über alle Systeme des Ensembles, abgeleitet werden.

Satz 2.7

Sei $(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t, \omega), p(\mathbf{x}, t, \omega))$ Lösung von

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p - \nu \Delta \mathbf{u} &= 0 && \text{in } \Omega \times [0, T[\\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 && \text{in } \Omega \times [0, T[\\ \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0, \omega) &= \mathbf{u}^0(\mathbf{x}, \omega) && \text{auf } \Omega \times \{0\} \\ \mathbf{u}|_\Gamma &= g && \text{auf } \Gamma \times [0, T[. \end{aligned}$$

Sei ferner $\langle \cdot \rangle_E$ das (Ensemble-)Filter. Bezeichne ferner $\mathbf{U} = \langle \mathbf{u} \rangle_E$ und $\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \mathbf{U}$, sowie $P = \langle p \rangle_E$ und $p' = p - P$.

Dann ist (\mathbf{U}, P) Lösung der sog. Reynolds-Gleichungen

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{U} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} + \nabla P - \nabla \cdot (2\nu S\mathbf{U} + \langle \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}' \rangle) &= 0, && \text{in } \Omega \times [0, T[\\ \nabla \cdot \mathbf{U} &= 0, && \text{in } \Omega \times [0, T[\\ \mathbf{U}|_{t=0} &= \langle \mathbf{u}^0 \rangle && \text{auf } \Omega \times \{0\} \\ \mathbf{U}|_\Gamma &= \langle u|_\Gamma \rangle && \text{auf } \Gamma \times [0, T[. \end{aligned}$$

Zur Vorbereitung des Beweises sollen zwei Vektoridentitäten, die im folgenden benötigt werden, notiert und bewiesen werden.

Lemma 2.2

Sei \mathbf{u} eine hinreichend glatte vektorwertige Funktion mit $\text{div } \mathbf{u} = 0$. Dann gelten für \mathbf{u} die Identitäten

1. $\nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$,
2. $\nabla \cdot (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) = \Delta \mathbf{u}$.

Beweis:

ad 1. Komponentenweises Nachrechnen liefert unter Anwendung der Produktregel

$$(2.6) \quad (\nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}))_j = \sum_i \partial_i (u_i u_j) = \sum_i u_i \partial_i u_j + u_j \sum_i \partial_i u_i = \sum_i u_i \partial_i u_j = ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u})_j.$$

ad 2. Vertauschung der Differentiationsreihenfolge liefert

$$(2.7) \quad (\nabla \cdot \nabla \mathbf{u}^T)_j = \sum_i \partial_i (\partial_i u_j)^T = \sum_i \partial_i (\partial_j u_i) = \partial_j \nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

◇

Beweis:

Anwendung des Filters auf die Divergenzgleichung ergibt unter Ausnutzung der Filtereigenschaften aus Lemma 2.1

$$(2.8) \quad 0 = \langle \nabla \cdot \mathbf{u} \rangle_E = \nabla \cdot \langle \mathbf{u} \rangle_E = \nabla \cdot \mathbf{U}.$$

Die Filterung der Bewegungsgleichung liefert mit $\nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ zunächst

$$(2.9) \quad \begin{aligned} & \langle \partial_t \mathbf{u} + \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p - \nu \Delta \mathbf{u} \rangle = \\ & \langle \partial_t \mathbf{u} \rangle + \langle \nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) \rangle + \langle \nabla p \rangle - \langle \nu \Delta \mathbf{u} \rangle = \\ & \partial_t \langle \mathbf{u} \rangle + \nabla \cdot \langle \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \rangle + \langle \nabla p \rangle - \nu \Delta \langle \mathbf{u} \rangle = 0. \end{aligned}$$

Unter Beachtung von $\langle \mathbf{U} \otimes \mathbf{u}' \rangle_E = \mathbf{U} \otimes \langle \mathbf{u}' \rangle_E = 0$ bzw. $\langle \mathbf{u}' \otimes \mathbf{U} \rangle_E = 0$ erhält man die Identität

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \langle \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} \rangle_E &= \langle (\mathbf{U} + \mathbf{u}') \otimes (\mathbf{U} + \mathbf{u}') \rangle = \langle \mathbf{U} \otimes \mathbf{U} \rangle_E + \langle \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}' \rangle_E + \langle \mathbf{u}' \otimes \mathbf{U} \rangle_E + \langle \mathbf{U} \otimes \mathbf{u}' \rangle_E \\ &= \langle \mathbf{U} \otimes \mathbf{U} \rangle_E + \langle \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}' \rangle_E. \end{aligned}$$

Einsetzen dieser Beziehung in die gemittelte Bewegungsgleichung ergibt dann die Reynolds-Gleichungen. ◇

Bemerkung 2.8

1. Die Reynolds-Gleichungen werden auch als zentrales Resultat in Theorem 4.5 in der oben erwähnten Arbeit Inoue und Fubaki [IF79] als Gleichung für den Mittelwert der Geschwindigkeit angegeben.
2. Zieht man die Reynolds-Gleichungen von den zufallsabhängigen Navier-Stokes-Gleichungen ab, so erhält man die Gleichungen für \mathbf{u}' und p' . Unter Verwendung von $\nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ ergibt sich als Gleichung für \mathbf{u}'

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \partial_t \mathbf{u}' + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{U} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{u}' + \nabla p' - \nu \Delta \mathbf{u}' - \nabla \cdot \langle \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}' \rangle + \nabla \cdot (\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}') &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{u}' &= 0. \end{aligned}$$

Definition 2.10

Der Reynoldsche Spannungstensor R ist definiert durch

$$R := -\langle \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}' \rangle_E.$$

Bemerkung 2.9

Die gesamte Information über die Geschwindigkeitsfluktuationen, also über die Turbulenz, steckt im Korrelationsterm $\langle \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}' \rangle_E$. Die Korrelationen sind apriori unbekannt, daher stellen die Reynolds-Gleichungen kein geschlossenes Gleichungssystem mehr dar. Für die unbekanntenen Reynoldsspannungen kann man zwar exakte Gleichungen angeben, wie z.B. eine Transportgleichung der Form

$$\frac{d\langle \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}' \rangle_E}{dt} = F(\langle \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}' \rangle_E, \langle \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}' \rangle_E).$$

Gleichungen dieser Art führen aber zusätzliche unbekanntene Korrelationen höherer Ordnung ein. Man sagt, daß das Gleichungssystem nicht abgeschlossen ist und spricht von einem Schließungsproblem. Daher müssen die Reynoldsspannungen durch Mittelwerte bestimmter Größen geeignet modelliert werden. Die Reynoldsspannungen beschreiben den Impulsaustausch des Fluids aufgrund turbulenter Schwankungsbewegungen. Lax gesagt geht ein Teil der kinetischen Energie der mittleren Strömung verloren bei der Bildung von Wirbeln. Der Impulsaustausch in laminaren Strömungen, dessen Wirkung in der Bewegungsgleichung durch den Term $\nu \Delta \mathbf{U}$ beschrieben wird, ist proportional zu der als $2S(\mathbf{U})$ definierten sog. Scherung der Hauptströmung. In Analogie dazu macht das k/ϵ -Turbulenzmodell die folgende Annahme, vgl. [Kes92].

Annahme 2.1

Im k/ϵ -Turbulenzmodell wird angenommen, daß der Reynoldssche Spannungstensor $-\langle \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}' \rangle_E$ durch eine matrixwertige Funktion

$$R = R(\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T)$$

modelliert werden kann.

Zentrale Aufgabe des nächsten Abschnitts wird es sein, die genaue funktionale Gestalt für R herzuleiten.

2.3.3. Das Prinzip der Wirbelviskosität

Ziel dieses Abschnitts soll es sein, ausgehend von Annahme 2.1 die funktionale Abhängigkeit $R = R(\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T)$ zu bestimmen. Dazu wird die in der Theoretischen Physik häufig benutzte Methode verwendet, Invarianzeigenschaften, hier solche der Navier-Stokes-Gleichungen, zu betrachten.

Eine Differentialgleichung heißt invariant unter einer Transformation, falls ihre formale Gestalt unter der zugehörigen Transformation des Koordinatensystems invariant ist. In der Theoretischen Physik wird von Differentialgleichungen häufig die Invarianz unter folgenden Transformationen gefordert:

- T1 Translationsinvarianz, d.h. Invarianz unter der Transformation $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{Z}$, wobei \mathbf{Z} ein konstanter Vektor ist,
- T2 Galilei-Invarianz, d.h. Invarianz unter der zeitabhängigen Transformation $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{V}t$, wobei \mathbf{V} ein konstantes Vektorfeld ist und der Parameter t die Zeit beschreibt,

T3 Rotationsinvarianz, d.h. Invarianz unter der Transformation $\mathbf{x} = R\mathbf{y}$, wobei $R^T R = R R^T = I$ gilt, d.h. R ist eine orthogonale Matrix, und

T4 Invarianz unter zeitabhängigen Drehungen, d.h. unter der Transformation $\mathbf{x} = R(t)\mathbf{y}$, wobei $R(t)$ eine zeitabhängige orthogonale Matrix ist.

Satz 2.8

Die Navier-Stokes-Gleichungen sind invariant unter den Transformationen T1 bis T4.

Beweis:

vgl. [MP94], S.34ff. ◇

So kann folgende Annahme motiviert werden

Annahme 2.2

Der Reynoldssche Spannungstensor R ist invariant unter den Transformationen T1 bis T4.

Korollar 2.1

Aus der Invarianz der Navier-Stokes-Gleichungen unter den Transformationen T1 bis T4, folgt unter der Annahme 2.2, daß dann die Reynolds-Gleichungen und die Gleichungen (1.18) für \mathbf{u}' und p' invariant unter den Transformationen T1 bis T4 sind.

In [MP94], S.34ff, wird gezeigt, daß R invariant unter den Transformationen T1 und T2 ist. Damit R invariant unter den Transformationen T3 und T4 ist, muß folgender Zusammenhang zwischen R und $\nabla U + \nabla U^T$ gelten.

Satz 2.9

Sei $R = R(A)$ Funktion einer symmetrischen Matrix $A \in R^{d \times d}$ mit $R = R^T$. R ist invariant unter den Transformationen T1 - T4, genau dann, wenn R von der Gestalt

$$(2.12) \quad R(A) = a_0 I + a_1 A + \dots + a_{d-1} A^{d-1},$$

ist, wobei die a_i nur Funktionen von Invarianten von A sind.

Bemerkung 2.10

Diese Aussage stellt sich dar als der Satz von Cayley-Hamilton aus der linearen Algebra.

Beweis:

Nach [MP94], S.34ff. reicht es, die Aussage für die Transformation T3 zu zeigen. Zuerst soll die Hinlänglichkeit gezeigt werden. Invarianten der Matrix A sind im Falle $d = 2$ die Spur $tr(A)$, die Determinante $det(A)$ und die als $|A|_F := (\sum_{i,k=1}^n |a_{ik}|^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{tr(AA^T)}$ definierte sog. Frobeniusnorm von A , die im folgenden oft auch nur mit $|A|$ bezeichnet wird. Im Falle $d = 3$ ist eine weitere Invariante $|A^2|_F$. Denn es gilt für $M \in O(d) = \{M = (M_{ij})_{i,j=1}^d \in R^{d \times d} \mid MM^T = M^T M = I\}$

$$tr(MAM^T) = \sum_{i,j,k=1}^d M_{ij} A_{jk} M_{ik} = \sum_{j,k=1}^d \delta_{jk} A_{jk} = tr(A),$$

$$det(MAM^T) = det(M)det(A)det(M^T) = det(MM^T)det(A) = det(A),$$

$$|MAM^T|_F = \sqrt{tr(MAM^T(MAM^T)^T)} = \sqrt{tr(MAM^T M A^T M^T)} = \sqrt{tr(AA^T)} = |A|_F,$$

$$|(MAM^T)^2|_F = |MAM^T MAM^T|_F = |MA^2 M^T|_F = |A^2|_F.$$

Um die Invarianz von R unter orthogonalen Transformationen M zu zeigen, genügt es zu zeigen, daß $M^T R(MAM^T)M = R(A)$ gilt, vgl. [MP94], s.36. Dies folgt aus der Invarianz der a_i ($0 \leq i \leq d-1$) und aus

$$\begin{aligned} M^T R(MAM^T)M &= M^T (a_0 I + a_1 MAM^T + \dots a_{d-1} MA^{d-1}M^T)M \\ &= a_0 I + a_1 A + \dots a_{d-1} A^{d-1} = R(A). \end{aligned}$$

Zum Beweis der Notwendigkeit sei auf [MP94], S.38f. verwiesen. \diamond

Korollar 2.2

Unter den Annahmen 2.1 und 2.2 hat der Reynoldsche Spannungstensor R im R^2 die Gestalt

$$(2.13) \quad R(\nabla U + \nabla U^T) = aI + \mu(\nabla U + \nabla U^T).$$

Im R^3 hat er die Gestalt

$$(2.14) \quad R(\nabla U + \nabla U^T) = aI + \mu(\nabla U + \nabla U^T) + \lambda(\nabla U + \nabla U^T)^2.$$

Dabei sind $a = a(|\nabla U + \nabla U^T|)$, $\mu = \mu(|\nabla U + \nabla U^T|)$ und $\lambda = \lambda(|\nabla U + \nabla U^T|)$ Invarianten von $\nabla U + \nabla U^T$.

An dieser Stelle sollen die Turbulenzgrößen k und ϵ eingeführt werden.

Definition 2.11

Die kinetische Energie der Turbulenz k und die Dissipation turbulenter kinetischer Energie ϵ sind definiert als

$$\begin{aligned} k &= \frac{1}{2} \langle |u'|_F^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle \text{tr}(u'u'^T) \rangle, \\ \epsilon &= \frac{\nu}{2} \langle |\nabla u' + \nabla u'^T|_F^2 \rangle = \frac{\nu}{2} \langle \text{tr}((\nabla u' + \nabla u'^T)(\nabla u' + \nabla u'^T)^T) \rangle. \end{aligned}$$

Das Korollar 2.2 kann angesehen werden als Motivation für die wichtigste Annahme des k/ϵ -Turbulenzmodells.

Annahme 2.3

Die Wirbelviskositätsannahme postuliert folgenden affin-linearen Zusammenhang zwischen R und $\nabla U + \nabla U^T$:

$$(2.15) \quad R = -\frac{2}{3}kI + \nu_t 2S(\mathbf{U} + \nabla U^T).$$

Der Proportionalitätsfaktor ν_t ist dabei eine zu berechnende Feldgröße und heißt Wirbelviskosität und ist definiert als

$$(2.16) \quad \nu_t = c_\mu \frac{k^2}{\epsilon},$$

wobei c_μ eine experimentell zu bestimmende dimensionslose Konstante ist.

Bemerkung 2.11

1. Aus dem Beweis von Satz 2.9 folgt, daß k und ϵ Invarianten von $\nabla U + \nabla U^T$ sind.
2. Der erste Term $-\frac{2}{3}kI$ ist notwendig, damit die Spur des Tensors korrekt ist, vgl. [Kes92] S.7.
3. Mit der Wirbelviskositätsannahme reduziert sich die Berechnung von R auf die Berechnung von ν_t . Die Gestalt von ν_t folgt aus einer sog. Dimensionsanalyse, die besonders in der Experimentalphysik beliebt ist: Gesucht wird ein möglichst einfacher polynomialer Ausdruck aus Größen wie Länge oder Geschwindigkeit, dessen Dimension mit der Dimension der interessierenden Größe übereinstimmt. Es ergibt sich

$$(2.17) \quad \nu_t = \text{const} * u_t l_e,$$

Für das k/ϵ -Modell ergibt sich somit

$$(2.18) \quad \nu_t = \text{const} * u_t l_e = c_\mu \frac{k^2}{\epsilon},$$

wobei u_t eine charakteristische Geschwindigkeit und l_e eine charakteristische Länge der Turbulenz ist. Je nachdem, wie u_t und l_e bestimmt werden, unterscheidet man Nullgleichungs-, Eingleichungs- und Zweigleichungsmodelle.

- Bei sogenannten algebraischen oder Nullgleichungsmodellen werden u_t und l_e durch algebraische Beziehungen aus gemittelten Größen bestimmt.
- Bei Eingleichungsmodellen wird u_t bestimmt, indem eine Transportgleichung für $k = \frac{1}{2}\langle |u'|^2 \rangle$ gelöst wird und für l_e eine algebraische Gleichung. Motivation für Eingleichungsmodelle ist folgende Beobachtung: Da die Wirbel mit der Strömung U mittransportiert werden, ist die lokale Produktion von turbulenter kinetischer Energie nicht mit der lokal dissipierten Turbulenzenergie im Gleichgewicht.
- Bei Zweigleichungsmodellen werden für die zwei charakteristischen Größen zwei Transportgleichungen gelöst. Beim k/ϵ -Modell wird für die charakteristische Geschwindigkeit u_t eine Transportgleichung für k gelöst, und für die charakteristische Länge eine Gleichung für die Dissipationsrate $\epsilon = \frac{k^{3/2}}{l_e}$.

Für das k/ϵ -Modell ergibt sich somit für ν_t

$$(2.19) \quad \nu_t = \text{const} * u_t l_e = c_\mu \frac{k^2}{\epsilon},$$

mit $c_\mu = 0.09$.

4. Die Wirbelviskositätsannahme ist von zentraler Bedeutung, was die Leistungsfähigkeit des Turbulenzmodells betrifft. Im zweidimensionalen Fall läßt sich die Wirbelviskositätsannahme unter den Annahmen 2.1 und 2.2 heuristisch beweisen. Dennoch gibt es einige Phänomene, die aufgrund des Wirbelviskositätsansatzes nicht richtig wiedergegeben werden können. Als Beispiel sei hier die abgelöste turbulente Strömung an einer abgerundeten zurückspringenden Stufe (2D) angeführt. Vergleicht man die

Ergebnisse des k/ϵ -Turbulenzmodells mit denen der direkten numerischen Simulation (DNS), so weisen die Höhenlinien des mittleren Druckes im Ablösebereich und in Wandnähe signifikante Unterschiede auf. Im dreidimensionalen Fall ignoriert die Wirbelviskositätsannahme den quadratischen Term $(\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T)^2$. Das ist die Ursache dafür, daß das k/ϵ -Modell einige dreidimensionale Effekte nicht richtig beschreiben kann. Diesen quadratischen Term berücksichtigt das nichtlineare k/ϵ -Modell von Speziale, das einige Testbeispiele, bei denen das klassische k/ϵ -Modell scheitert, richtig wiedergibt, vgl. [MP94] S.88.

Im Beweis des k/ϵ -Turbulenzmodells wird für den Tensor $\langle \boldsymbol{\omega}' \otimes \boldsymbol{\omega}' \rangle_E$ eine zur Wirbelviskositätsannahme 2.3 analoge Abschlußhypothese benötigt.

Annahme 2.4

Der Tensor $\langle \boldsymbol{\omega}' \otimes \boldsymbol{\omega}' \rangle_E$ kann durch eine matrixwertige Funktion in $(\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T)$ modelliert werden.

Mit Korollar 2.2 liegt somit folgende Annahme nahe.

Annahme 2.5

Es gilt folgender affin-lineare Zusammenhang zwischen $\langle \boldsymbol{\omega}' \otimes \boldsymbol{\omega}' \rangle_E$ und $\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T$

$$(2.20) \quad 2\nu \langle \boldsymbol{\omega}' \otimes \boldsymbol{\omega}' \rangle_E = aI + c_1 \frac{\epsilon}{k} (\nu + c_\mu \frac{k^2}{\epsilon}) (\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T).$$

Bemerkung 2.12

Der Proportionalitätsfaktor wird durch eine Dimensionsanalyse motiviert.

2.3.4. Rückblick

Hauptziel dieses Abschnitts war es, ausgehend von den zufallsbehafteten Navier-Stokes-Gleichungen die Gleichungen für das gemittelte Geschwindigkeitsfeld und den gemittelten Druck, die sogenannten Reynolds-Gleichungen herzuleiten. Dazu wurde als Mittelungsverfahren das Ensemblemittelungsfilter eingeführt. Der in den Reynolds-Gleichungen auftauchende sog. Reynoldssche Spannungstensor wurde mit der sogenannten Wirbelviskositätsannahme modelliert. Somit ergeben sich als Gleichungen für das mittlere Geschwindigkeitsfeld und den mittleren Druck :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} + \nabla P - \nabla \cdot (2(\nu + c_\mu \frac{k^2}{\epsilon}) \mathcal{S}(\mathbf{U})) = \mathbf{f} - \frac{2}{3} \nabla k \quad , \quad \nabla \cdot \mathbf{U} = 0.$$

In Abschnitt 2.5 werden die Differentialgleichungen, denen k und ϵ genügen, hergeleitet.

2.4. Mathematische Vorbemerkungen zum k/ϵ -Modell

Dieser Abschnitt hat vorbereitenden Charakter. Sein Ziel ist es, im Beweis des k/ϵ -Modells benötigte Umformungen zusammen zu stellen. Diese Umformungen werden als Annahmen formuliert, da sie sich aus der bisher bekannten mathematischen Theorie nicht exakt ableiten, sondern nur motivieren lassen. Der Sinn dieses Abschnittes ist es, einen Bogen von den stochastischen Grundlagen zu den konkret benötigten Anwendungen zu spannen. Eine schöne Darstellung der stochastischen Grundlagen findet man in [Wal82] oder in [Sin94]. Die elementaren Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie findet man z.B. in [Kre91].

2.4.1. Birkhoffs Ergodentheorem

Wie in Abschnitt 2.2.3 beschrieben, kann die Zeitentwicklung der Navier-Stokes-Gleichungen als dynamisches System beschrieben werden. Für einen exakt gegebenen Anfangswert ist dessen Zeitentwicklung deterministisch. Für einen beliebigen, zufällig gegebenen Anfangswert lassen sich trotzdem gewisse Vorhersagen machen, sofern das System ergodisch ist.

Satz 2.10

(Birkhoffs Ergodentheorem)

Sei $(\Omega_P^{DS}, A, P, G_t)$ ein dynamisches System. Gelte für $B \in A$ und für alle $t \in \mathbb{R}^+$

$$(2.21) \quad G_t(B) = B \implies (B = \emptyset \quad \text{oder} \quad B = \Omega_P^{DS})$$

bis auf eine Menge vom Maß Null. Dann gilt für jede auf Ω_P^{DS} definierte, Lebesgue-integrierbare Funktion f und für fast alle $\omega' \in \Omega_P^{DS}$

$$(2.22) \quad \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(G_t \omega') dt = \int_{\Omega} f(\omega') dP(\omega').$$

Insbesondere liegt dann fast jeder Pfad $\{G_t \omega'\}_{t \in \mathbb{R}^+}$ dicht in Ω_P^{DS} .

Eine streng mathematische Darstellung ist in [Wal82] S.34 oder [Sin94] S.19 zu finden. Die Aussage von Birkhoffs Ergodentheorem ist, daß der zeitliche Mittelwert einer beliebigen integrierbaren Funktion f unabhängig vom Startpunkt ω' ist, also insbesondere davon, ob er deterministisch oder zufällig ist. Dieses Ergodenkonzept, wonach Ensemblemittel durch zeitliche Mittel ersetzt werden können, kann dahingehend erweitert werden, daß man versucht, unter geeigneten Bedingungen Ensemblemittel durch räumliche Mittel zu ersetzen, vorausgesetzt, daß Gebiet Ω ist in wenigstens einer Richtung unbeschränkt. Diese Variante der Ergodizität, die für die Navier-Stokes-Gleichungen noch nicht bewiesen ist und daher als Ergoden-Hypothese formuliert werden soll, lautet (vgl. [Fri96]) :

Annahme 2.6

(Ergoden Hypothese)

Sei $u(x, t, \omega)$ ein zufälliges Vektorfeld, das dem Birkhoffschen Ergodentheorem genügt. Sei das Gebiet in wenigstens einer Richtung unbeschränkt. Dann gilt

$$(2.23) \quad \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L} \int_0^L \int_0^L \int_0^L \mathbf{u}(x, y, z, \omega) dx dy dz = \langle \mathbf{u} \rangle_E.$$

2.4.2. Das Problem des turbulenten Transports

Nun soll das sog. Problem des turbulenten Transports beschrieben werden, wobei der Zugang nach [KP80] in der Formulierung von [MP94], S.149ff. wiedergegeben wird.

Definition 2.12

(Problem des turbulenten Transportes)

- Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet mit $\Gamma = \partial\Omega$.

2. Das k/ϵ -Turbulenzmodell

- Sei \mathbf{u} eine zufälliges Vektorfeld mit
 - $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ in $\Omega \times]0, T[$,
 - $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ auf Γ .
- Sei $\langle \cdot \rangle_E$ das Filter der Ensemblemittelwertbildung.
- Sei das Skalarfeld c Lösung des stochastischen Konvektionsproblems

$$(2.24) \quad \begin{aligned} \partial_t c + \mathbf{u} \cdot \nabla c &= f, & \text{in } \Omega \times]0, T[, \\ c(0) &= c_0. \end{aligned}$$

Dann lautet das Problem des turbulenten Transportes:
Finde das Problem, das $C = \langle c \rangle$ löst.

Zunächst benötigen wir den Begriff des mischenden stochastischen dynamischen Systems, vgl. [Sin94] S.21, oder auch [Wal82] S.39ff.

Definition 2.13

Ein stochastisches dynamisches System $(\Omega_P^{DS}, A, P, G_t)$ heißt mischend, falls für je zwei beliebige L^2 -meßbare (integrierbare) Funktionen f, h gilt

$$(2.25) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\Omega_P^{DS}} f(G^t \omega) h(\omega) d\omega = \int_{\Omega_P^{DS}} f d\omega \int_{\Omega_P^{DS}} h d\omega.$$

Ohne Beweis soll jetzt folgender Satz aus der stochastischen Analysis zitiert werden, vgl. [MP94] S.150:

Satz 2.11

Gegeben sei das Problem des turbulenten Transports im Falle $d = 2$. Ferner sei \mathbf{u} stationär und mischend, und es gelte $|\mathbf{U}| = |\langle \mathbf{u} \rangle| \gg \sqrt{\langle \mathbf{u}'^2 \rangle}$, wobei $\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \mathbf{U}$ ist. Bezeichne ferner $F = \langle f \rangle$. Dann löst $C = \langle c \rangle$ die Konvektions-Diffusionsgleichung

$$(2.26) \quad \begin{aligned} \partial_t C + \mathbf{U} \cdot \nabla C - \nabla \cdot [M \nabla C] &= F, & \text{in } \Omega \times]0, T[, \\ C(0) &= C_0. \end{aligned}$$

Dabei ist die Matrix M eine Funktion der Korrelationen der Komponenten von \mathbf{u}' , gegeben durch

$$(2.27) \quad M_{ij} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle u'_i(\mathbf{x} + \mathbf{U}t) u'_j(\mathbf{x}) \rangle dt.$$

Bemerkung 2.13

1. Es wird vermutet, daß ein analoger Satz auch im R^3 gilt. Dann ist jedoch die Gestalt von M wesentlich komplizierter.
2. Es lassen sich Gegenbeispiele angeben falls \mathbf{u} nicht mischend ist oder $\mathbf{U} = 0$ gilt, vgl. [MP94] S.151.

Bemerkung 2.14

Eine andere Abhandlung des Problems des turbulenten Transports und des dabei entstehenden Abschlußproblems findet man in [PO97], S.10ff.

Die Aussage von Satz 2.11 soll als Motivation der folgenden zwei Annahmen dienen, die für die Herleitung der k - und ϵ -Gleichung von Bedeutung sind.

Annahme 2.7

Sei \mathbf{u}' ein zufälliges Vektorfeld, das den Voraussetzungen von Satz 2.11 genügt. Sei \mathbf{u}' Lösung der zufallsbehafteten Konvektionsgleichung

$$(2.28) \quad \partial_t \frac{\mathbf{u}'^2}{2} + (\mathbf{U} + \mathbf{u}') \cdot \nabla \frac{\mathbf{u}'^2}{2} = f(\mathbf{u}').$$

Dann löst $k = \langle \frac{\mathbf{u}'^2}{2} \rangle$ die Konvektions-Diffusionsgleichung

$$(2.29) \quad \partial_t \langle \frac{\mathbf{u}'^2}{2} \rangle + \mathbf{U} \cdot \nabla \langle \frac{\mathbf{u}'^2}{2} \rangle - \nabla \cdot (\mu_k \nabla \langle \frac{\mathbf{u}'^2}{2} \rangle) = \langle f(\mathbf{u}') \rangle.$$

Für μ_k gelte die Abschlußhypothese

$$(2.30) \quad \mu_k = \left(\nu + \frac{\nu_t}{Pr_k} \right) = \left(\nu + \frac{1}{Pr_k} c_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \right).$$

Annahme 2.8

Sei \mathbf{u}' ein zufälliges Vektorfeld, so daß $\boldsymbol{\omega}' = \nabla \times \mathbf{u}'$ den Voraussetzungen von Satz 2.11 genügt. Sei $\boldsymbol{\omega}'$ Lösung der zufallsbehafteten Konvektionsgleichung

$$(2.31) \quad \partial_t \boldsymbol{\omega}'^2 + (\mathbf{U} + \mathbf{u}') \cdot \nabla \boldsymbol{\omega}'^2 = f(\mathbf{u}', \boldsymbol{\omega}').$$

Dann löst $\langle \boldsymbol{\omega}'^2 \rangle$ die Konvektions-Diffusionsgleichung

$$(2.32) \quad \partial_t \langle \boldsymbol{\omega}'^2 \rangle + \mathbf{U} \cdot \nabla \langle \boldsymbol{\omega}'^2 \rangle - \nabla \cdot (\mu_\epsilon \nabla \langle \boldsymbol{\omega}'^2 \rangle) = \langle f(\mathbf{u}', \boldsymbol{\omega}') \rangle.$$

Für μ_ϵ gelte die Abschlußhypothese

$$(2.33) \quad \mu_\epsilon = \left(\nu + \frac{\nu_t}{Pr_\epsilon} \right) = \left(\nu + \frac{1}{Pr_\epsilon} c_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \right).$$

Bemerkung 2.15

Die Annahmen 2.7 und 2.8 sind keine echten Folgerungen aus Satz 2.11.

1. Die Anwendung des Satzes 2.11 ist dahingehend problematisch, daß die transportierten Größen \mathbf{u}'^2 bzw. $\boldsymbol{\omega}'^2$ natürlich nicht unabhängig vom Transportfeld $\mathbf{U} + \mathbf{u}'$ sind.
2. Weil $\mu(R)$ nach Satz 2.11 eine Funktion der zweiten Momente von \mathbf{u}' ist, sind Abschlußhypothesen nötig (vgl. die Vorgehensweise bei den Reynolds-Gleichungen).

2.4.3. Homogene isotrope Turbulenz

Beobachtet man eine turbulente Strömung hinter einem Gitter in einer Entfernung von etwa der zwanzigfachen Gitterkonstante, so scheint die Strömung dort räumlich völlig ungeordnet zu sein. Geschwindigkeitsmittelwerte scheinen invariant unter räumlichen Translationen und Rotationen zu sein. Man spricht dann auch von homogener isotroper Turbulenz, vgl.[Fri96] S.9. In diesem Abschnitt soll diese Phänomenologie mathematisch präzisiert werden.

Im gesamten Abschnitt wird der Begriff der normalverteilten Zufallsvariable benötigt.

Definition 2.14

Eine normalverteilte Zufallsvariable X hat die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$(2.34) \quad \phi(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Dabei ist μ der Erwartungswert und σ^2 die Varianz von X . Man sagt auch, X ist $N(\mu, \sigma^2)$ -verteilt. Eine vektorwertige Zufallsvariable $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_d)^T$ heißt normalverteilt, falls für jeden Vektor $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^d$ die Zufallsvariable $\sum_{i=1}^d c_i X_i$ normalverteilt ist.

Im Beweis zum k/ϵ -Modell werden gewisse Eigenschaften von Turbulenz benötigt. Die bisher in der Literatur vorfindbaren Definitionen von Turbulenz sind deswegen wenig geeignet, weil diese benötigten Eigenschaften nicht genau genug herausgearbeitet werden. Daher soll in diesem Unterabschnitt ein konstruktiver Zugang nach [MP94] beschrieben werden, vgl. [MP94] S.20-24. Es soll eine turbulente Strömung \mathbf{u}' mit $\langle \mathbf{u}' \rangle_E = 0$ als Fourierreihe konstruiert werden, die gewisse minimale physikalische und mathematische Designeigenschaften erfüllt. Das Spektrum der Dichte der kinetischen Energie soll das berühmte $|\mathbf{k}|^{-\frac{5}{3}}$ -Gesetz von Kolmogorow erfüllen, s. z.B. [MP94] S.23. Außerdem sollen $\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t)$ und $(\nabla \mathbf{u}'(\mathbf{x}, t)) \cdot \mathbf{n}$ normalverteilte Zufallsvariablen sein für alle $(\mathbf{x}, t) \in \Omega \times]0, T[$, $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^d$.

Zunächst soll an einige Grundbegriffe aus der Fourieranalysis erinnert werden. Sei $\Omega = \mathbb{R}^3$. Für eine quadratintegrierbare Funktion \mathbf{u} ist die \mathbf{k} -te Fourier-Mode von \mathbf{u} zur Zeit t ein Vektor im \mathbb{R}^3 :

$$(2.35) \quad \mathbf{F}\mathbf{u} \equiv \mathbf{U}(\mathbf{k}, t) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x}.$$

Dieser ist wohldefiniert für alle $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3$. Es gilt die Umkehrformel

$$(2.36) \quad \mathbf{F}^{-1}\mathbf{U} \equiv \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{U}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{k}.$$

Die Fourier-Transformierte der Navier-Stokes-Gleichungen ist das System

$$(2.37) \quad \partial_t \mathbf{U}(\mathbf{k}) + i \int_{\mathbf{p}+\mathbf{q}=\mathbf{k}} \mathbf{U}(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{q} \mathbf{U}(\mathbf{q}) + i\mathbf{k}P(\mathbf{k}) + \nu|\mathbf{k}|^2 \mathbf{U}(\mathbf{k}) = \mathbf{F}(\mathbf{k}),$$

$$(2.38) \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{U}(\mathbf{k}) = 0,$$

wobei P und \mathbf{F} die Fouriertransformierten von p bzw. \mathbf{f} sind.

Bemerkung 2.16

Es gibt Vorschläge, den Begriff der Turbulenz über das Fourier-Spektrum zu definieren, vgl. [MP94] S.21. Periodische und quasi-periodische Funktionen haben ein diskretes oder abzählbares Spektrum, d.h. $\{\mathbf{k} \mid \mathbf{U}(\mathbf{k}) \neq \mathbf{0}\}$ ist endlich oder abzählbar. Liegt das Spektrum von \mathbf{u} (d.i. $\{\mathbf{k} \mid \mathbf{U}(\mathbf{k}) \neq \mathbf{0}\}$) dicht in einem großen Intervall $|\mathbf{k}_1|, |\mathbf{k}_2|$, $|\mathbf{k}_2| \gg |\mathbf{k}_1|$, so heißt die Strömung turbulent.

In theoretischen Behandlungen der Turbulenz wird oft der Begriff der homogenen isotropen Turbulenz benötigt.

Definition 2.15

Eine vektorwertige Zufallsfunktion heiße homogen, falls sämtliche Ensemblemittelwerte und Momente von $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t, \omega)$ unabhängig von \mathbf{x} sind, d.h.

$$(2.39) \quad \langle \mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{Y}, t) \rangle_E = \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \rangle_E, \quad \text{für alle } \mathbf{Y} \in R^d.$$

Eine vektorwertige Zufallsfunktion heiße isotrop, falls sämtliche Ensemblemittelwerte und Momente von $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ unter orthogonalen Transformationen M invariant sind, d.h.

$$(2.40) \quad \langle \mathbf{u}(M\mathbf{x}, t) \rangle_E = \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \rangle_E$$

für alle orthogonalen Matrizen M . Ferner wird bei homogener isotroper Turbulenz verlangt, daß die durch

$$(2.41) \quad R_{ij}(\mathbf{x}, t, \mathbf{r}) := \int u_i(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t, \omega) u_j(\mathbf{x}, t, \omega) d\omega$$

definierten Korrelationsfunktionen nur von $|\mathbf{r}|$ abhängen, d.h.

$$(2.42) \quad R_{ij}(\mathbf{x}, t, \mathbf{r}) = R_{ij}(\mathbf{r}) = R_{ij}(-\mathbf{r}).$$

Im folgenden bezeichne $\langle \dots \rangle = \int \dots d\omega$ den Ensemblemittelwert. Sei $\mathbf{U}(\mathbf{p}) = (U_n(\mathbf{p}))_{n=1}^d$ die \mathbf{p} -te Fouriermode von $\mathbf{u} = (u_n)_{n=1}^d$. Im Fourierraum gilt die Beziehung

$$(2.43) \quad \langle U_m(\mathbf{p}) U_n(\mathbf{q}) \rangle = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^6 \int \langle u_m(\mathbf{x}) u_n(\mathbf{y}) \rangle e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x} - i\mathbf{q}\cdot\mathbf{y}} d\mathbf{x} d\mathbf{y} = \Phi_{mn}(\mathbf{p}) \delta(\mathbf{p} + \mathbf{q}),$$

mit $m, n \in \{1, \dots, d\}$, $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in Z^d$ und $\delta(\mathbf{p} + \mathbf{q}) = 1$, falls $\mathbf{p} + \mathbf{q} = \mathbf{0}$ und null sonst. Dabei ist

$$(2.44) \quad \Phi_{mn}(\mathbf{p}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{\Omega} R_{mn}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r}$$

die Fouriertransformierte von R , vgl. [MP94] S.22.

Bei homogen isotroper turbulenter Strömung hat der Tensor Φ die Gestalt

$$(2.45) \quad \Phi_{mn}(\mathbf{k}) = \frac{E(|\mathbf{k}|)}{4\pi|\mathbf{k}|^2} \left(\delta_{mn} - \frac{k_m k_n}{|\mathbf{k}|^2} \right),$$

vgl. [MP94], S.22. Dabei bezeichnet δ_{mn} das Kronecker-Symbol. Die skalare Funktion $E(|\mathbf{k}|)$ als Funktion von $|\mathbf{k}|$ wird dabei interpretiert als spektrale Dichte der kinetischen Energie

der turbulenten Strömung.

Die Abhängigkeit von $|\mathbf{k}|$ wird genauer durch das berühmte Kolmogorow-Gesetz gegeben: Im Bereich mit $\frac{|\mathbf{U}|}{\nu} \ll |\mathbf{k}| \ll \epsilon^{\frac{1}{4}} \nu^{-\frac{3}{4}}$ gilt

$$(2.46) \quad E(|\mathbf{k}|) \approx 1.5 \epsilon^{\frac{2}{3}} |\mathbf{k}|^{-\frac{5}{3}}.$$

Eine kurze Begründung findet man z.B. bei [MP94] S.23.

Die Fourierkoeffizienten $\mathbf{U}(\mathbf{k})$ einer turbulenten Strömung sind angenähert normalverteilt mit Erwartungswert $\mathbf{0}$. Folgende Fourierreihe beschreibt dann eine turbulente Strömung :

$$(2.47) \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^d} \mathbf{U}(\mathbf{k}, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}.$$

Dabei sind die $\mathbf{U}(\mathbf{k})$ Zufallsvariablen mit Erwartungswert null und zweiten Momenten, die

$$(2.48) \quad \Phi_{ij}(\mathbf{k}, t) = \frac{E(|\mathbf{k}|, t)}{4\pi|\mathbf{k}|^2} (\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{|\mathbf{k}|^2})$$

genügen. Dabei bezeichnet δ_{ij} das Kronecker-Symbol und E ist durch das Kolmogorow-Spektrum gegeben. Die Kontinuitätsgleichung im Fourierraum impliziert die Bedingung $\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}(\mathbf{k}) = 0$. Für den folgenden Satz ist noch eine Zusatzforderung an die $\mathbf{U}(\mathbf{k}, t)$ nötig. Es soll \mathbf{u} als abzählbar unendliche Summe normalverteilter vektorwertiger Zufallsvariablen wieder eine normalverteilte vektorwertige Zufallsvariable sein.

Für die Herleitung der Gleichungen für turbulente kinetische Energie k und Dissipation turbulenter kinetischer Energie ϵ wird die folgende Aussage über das Verschwinden folgender Integrale benötigt.

Satz 2.12

Sei \mathbf{u} ein (deterministisches) Vektorfeld und sei $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$. Seien \mathbf{u}' und $\boldsymbol{\omega}' = \nabla \times \mathbf{u}'$ normalverteilte zufällige Vektorfelder, sei p ein normalverteiltes zufälliges Skalarfeld. Es sei weiterhin angenommen, daß die zwei in den Integranden auftauchenden Zufallsvariablen jeweils stochastisch unabhängig sind. Bezeichne $B(\mathbf{x}, r)$ die Kugel um \mathbf{x} mit (hinreichend großem) Radius r . Dann gilt für fast alle $\omega \in \Omega_P^N$

$$(2.49) \quad \frac{1}{|B|} \int_{\partial B(\mathbf{x}, r) \cap \Omega} \mathbf{u}' \cdot (\nabla \mathbf{u}') \mathbf{n} ds = 0,$$

$$(2.50) \quad \frac{1}{|B|} \int_{\partial B(\mathbf{x}, r) \cap \Omega} \boldsymbol{\omega}' \cdot (\nabla \boldsymbol{\omega}') \mathbf{n} ds = 0,$$

$$(2.51) \quad \frac{1}{|B|} \int_{\partial B(\mathbf{x}, r) \cap \Omega} p' \mathbf{u}' \cdot \mathbf{n} ds = 0,$$

$$(2.52) \quad \frac{1}{|B|} \int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} u'_i \nabla u'_j \mathbf{n} do = 0, \quad \forall i \neq j,$$

$$(2.53) \quad \int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} \mathbf{u}' (\boldsymbol{\omega}' \cdot \boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{n} do - \int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} \boldsymbol{\omega}' (\mathbf{u}' \cdot \boldsymbol{\omega}') \cdot \mathbf{n} do = 0.$$

Ferner gilt

$$(2.54) \quad \langle (\boldsymbol{\omega}' \otimes \boldsymbol{\omega}') : \nabla \mathbf{u}' \rangle = 0.$$

Beweis:

Exemplarisch soll (2.51) 2.51 bewiesen werden. Sei $\{\Delta_i\}_{i=1}^N$ eine Zerlegung von $\partial B(\mathbf{x}, r)$ in gleichgroße Oberflächenelemente Δ_i mit Oberflächenmaß $\mu(\Delta_i) = \mu(\Delta) = \frac{4\pi r^2}{N}$ für alle $i = 1, \dots, N$. Dann gilt für eine $L^1(\partial B(\mathbf{x}, r))$ -integrierbare Funktion f

$$\int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} f(s) ds = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N f(s_i) \mu(\Delta_i) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mu(\Delta) \sum_{i=1}^N f(s_i)$$

für eine beliebige Wahl von Stützstellen $s_i \in \Delta_i$. Daher gilt

$$\begin{aligned} \int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} p'(s, t, \omega) \mathbf{u}(s, t, \omega) \cdot \mathbf{n}(s, t) ds &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N p'(s_i, t, \omega) \mathbf{u}(s_i, t, \omega) \cdot \mathbf{n}(s_i, t) \mu(\Delta_i) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N p'(s_i, t, \omega) \mathbf{u}(s_i, t, \omega) \cdot \mathbf{n}(s_i, t) \mu(\Delta) \\ &= 4\pi r^2 \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p'(s_i, t, \omega) \mathbf{u}(s_i, t, \omega) \cdot \mathbf{n}(s_i, t). \end{aligned}$$

Für jedes $i \in \{1, \dots, N\}$ ist $p'(s_i, t, \omega) \mathbf{u}(s_i, t, \omega) \cdot \mathbf{n}(s_i, t)$ eine Zufallsvariable. Da p' und $\mathbf{u}' \cdot \mathbf{n}$ als stochastisch unabhängig angenommen werden, gilt $\langle p' \mathbf{u}' \cdot \mathbf{n} \rangle_E = \langle p' \rangle_E \langle \mathbf{u}' \cdot \mathbf{n} \rangle_E = 0$. Denn aufgrund der angenommenen Normalverteilung von p' und \mathbf{u}' gilt $\langle p' \rangle_E = 0$ und $\langle \mathbf{u}' \cdot \mathbf{n} \rangle_E = 0$. Nach dem starken Gesetz der großen Zahl (vgl. [Kre91] S.149) folgt damit

$$4\pi r^2 \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N p'(s_i, t, \omega) \mathbf{u}(s_i, t, \omega) \cdot \mathbf{n}(s_i, t) = 0$$

fast sicher, d.h. für fast alle $\omega \in \Omega_P^N$. Die anderen Beweise gehen analog, falls man bei (2.62) annimmt, daß u_i und u_j für $i \neq j$ unabhängig sind. Für (2.59) bzw. (2.60) muß man annehmen, daß u_i und $\sum_j \partial_j u_i n_j$ bzw. ω_i und $\sum_j \partial_j \omega_i n_j$ unabhängig sind. \diamond

Für den im nächsten Abschnitt gebrachten Beweis wird noch folgende Annahme über das betrachtete zufällige Vektorfeld benötigt.

Annahme 2.9

Es gelte die folgende Modellierungsannahme

$$(2.55) \quad 2\nu^2 \langle |\nabla \boldsymbol{\omega}'|^2 \rangle = c_2 \epsilon^2 / k.$$

Bemerkung 2.17

Diese Modellierungsannahme kann durch eine Dimensionsanalyse motiviert werden.

2.5. Das Gleichungssystem des k/ϵ -Turbulenzmodells

In diesem Abschnitt soll das Gleichungssystem des k/ϵ -Turbulenzmodells abgeleitet werden. Es kann aus einer gewissen mathematischen Sicht unbefriedigend erscheinen, daß der

angegebene Beweis mehrere Annahmen verwendet. Ein Teil der gemachten Annahmen (2.1 bis 2.8) sind sozusagen Pseudo-Korollare mathematischer Sätze. Eine mathematisch weniger faßbare Forderung wurde in der letzten Annahme 2.9 postuliert. Zunächst soll jedoch noch ein im folgenden benötigtes Lemma angegeben werden, dessen Beweis etwas länglich ist.

Lemma 2.3

Sei \mathbf{u}' ein zufälliges Vektorfeld, das die Aussagen von Satz 2.12 erfüllt. Sei $\boldsymbol{\omega}' = \nabla \times \mathbf{u}'$. Dann gilt

$$\langle \boldsymbol{\omega}' \cdot \nabla \times (\mathbf{u}' \times \boldsymbol{\omega}) \rangle = 0$$

Beweis:

Zunächst wendet man die Formel

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$$

der Vektoranalysis (s. [Gro74] S.126) auf $\nabla \cdot (\boldsymbol{\omega}' \times (\mathbf{u}' \times \boldsymbol{\omega}))$ an. Man erhält

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\omega}' \times (\mathbf{u}' \times \boldsymbol{\omega})) = (\mathbf{u}' \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \nabla \times \boldsymbol{\omega}' - \boldsymbol{\omega}' \cdot \nabla \times (\mathbf{u}' \times \boldsymbol{\omega}).$$

Anwendung des Filters liefert

$$\langle \nabla \cdot (\boldsymbol{\omega}' \times (\mathbf{u}' \times \boldsymbol{\omega})) \rangle = \langle (\mathbf{u}' \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \nabla \times \boldsymbol{\omega}' \rangle - \langle \boldsymbol{\omega}' \cdot \nabla \times (\mathbf{u}' \times \boldsymbol{\omega}) \rangle.$$

Nun wird gezeigt, daß gilt

$$\langle \nabla \cdot (\boldsymbol{\omega}' \times (\mathbf{u}' \times \boldsymbol{\omega})) \rangle = 0.$$

Denn wegen der Ergodizitätshypothese und mit der Vektorbeziehung $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$ folgt letztlich mit Satz 2.12

$$\begin{aligned} \langle \nabla \cdot (\boldsymbol{\omega}' \times (\mathbf{u}' \times \boldsymbol{\omega})) \rangle &= \int_{B(\mathbf{x},r)} \nabla \cdot (\boldsymbol{\omega}' \times (\mathbf{u}' \times \boldsymbol{\omega})) dx \\ &= \int_{\partial B(\mathbf{x},r)} (\boldsymbol{\omega}' \times (\mathbf{u}' \times \boldsymbol{\omega})) \cdot \mathbf{n} do \\ &= \int_{\partial B(\mathbf{x},r)} \mathbf{u}' (\boldsymbol{\omega}' \cdot \boldsymbol{\omega}) \cdot \mathbf{n} do - \int_{\partial B(\mathbf{x},r)} \boldsymbol{\omega} (\mathbf{u}' \cdot \boldsymbol{\omega}') \cdot \mathbf{n} do = 0. \end{aligned}$$

Also gilt

$$(\mathbf{u}' \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \nabla \times \boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\omega}' \cdot \nabla \times (\mathbf{u}' \times \boldsymbol{\omega}).$$

Mit der Beziehung

$$-\Delta \mathbf{u} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} - \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) = \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} = \nabla \times \boldsymbol{\omega}$$

folgt

$$\begin{aligned} \langle (\mathbf{u}' \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \nabla \times \boldsymbol{\omega}' \rangle &= -\langle (\mathbf{u}' \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \Delta \mathbf{u}' \rangle \\ &= -(u'_2 \omega_3 - u'_3 \omega_2) \Delta u'_1 - (u'_3 \omega_1 - u'_1 \omega_3) \Delta u'_2 - (u'_1 \omega_2 - u'_2 \omega_1) \Delta u'_3 \\ &= \omega_3 (u'_1 \Delta u'_2 - u'_2 \Delta u'_1) + \omega_2 (u'_3 \Delta u'_1 - u'_1 \Delta u'_3) + \omega_1 (u'_2 \Delta u'_3 - u'_3 \Delta u'_2) \end{aligned}$$

Die Ergodizitätseigenschaft und zweifache Anwendung der Greenschen-Formel liefert z.B. für den Term

$$\begin{aligned} \langle u'_1 \Delta u'_2 \rangle &= \frac{1}{|B|} \int_B u'_1 \Delta u'_2 dx \\ &= \frac{1}{|B|} \int_{\partial B} u'_1 \nabla u'_2 \cdot \mathbf{n} do - \frac{1}{|B|} \int_B \nabla u'_1 \cdot \nabla u'_2 dx \\ &= \frac{1}{|B|} \int_{\partial B} u'_1 \nabla u'_2 \cdot \mathbf{n} do - \frac{1}{|B|} \int_{\partial B} u'_2 \nabla u'_1 \cdot \mathbf{n} do + \frac{1}{|B|} \int_B u'_2 \Delta u'_1 dx \\ &= \langle u'_2 \Delta u'_1 \rangle + \frac{1}{|B|} \int_{\partial B} [u'_1 \nabla u'_2 - u'_2 \nabla u'_1] \cdot \mathbf{n} do \\ &= \langle u'_2 \Delta u'_1 \rangle, \end{aligned}$$

da das Randintegral nach Satz 2.12 verschwindet. Damit verschwindet auch $\langle (\mathbf{u}' \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \nabla \boldsymbol{\omega}' \rangle$. Daraus folgt die Behauptung. \diamond

Nun kann endlich der zentrale Satz dieses Kapitels formuliert werden.

Satz 2.13

Sei $(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t, \omega), p(\mathbf{x}, t, \omega))$ Lösung der zufallsabhängigen Navier-Stokes-Gleichungen aus Satz 2.7. Sei $\langle \dots \rangle_E$ das Filter der Ensemblemittelung. Es gelten zusätzlich die Annahmen 2.1 bis 2.9. Dann läßt sich aus den zufallsabhängigen Navier-Stokes-Gleichungen folgendes Gleichungssystem für (U, P) , k und ϵ ableiten :

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{U} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} + \nabla P - \nabla \cdot \left((\nu + c_\mu \frac{k^2}{\epsilon}) (\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T) \right) &= \frac{2}{3} \nabla k \\ \nabla \cdot \mathbf{U} &= 0 \\ (2.56) \quad \partial_t k + \mathbf{U} \cdot \nabla k - \frac{c_\mu k^2}{2 \epsilon} |\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T|^2 - \nabla \cdot (\mu_k \nabla k) + \epsilon &= 0 \\ \partial_t \epsilon + \mathbf{U} \cdot \nabla \epsilon - c_1 \frac{\nu_t}{k} \frac{\epsilon}{2} |\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T|^2 - \nabla \cdot (\mu_\epsilon \nabla \epsilon) + c_2 \frac{\epsilon^2}{k} &= 0. \end{aligned}$$

Dabei sind μ_k und μ_ϵ wie in den Annahmen 2.7 und 2.8 gegeben. Die Konstanten werden aus physikalischen Experimenten bestimmt und betragen $c_\mu = 0.09$, $c_1 = 0.126$, $c_2 = 1.92$ und $c_\epsilon = 0.07$.

Beweis:

Ausgangspunkt ist die Gleichung (2.11) für (\mathbf{u}', p') . Unter Verwendung von $\nabla \cdot (\mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} (2.57) \quad \partial_t \mathbf{u}' + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{U} + ((\mathbf{U} + \mathbf{u}') \cdot \nabla) \mathbf{u}' + \nabla p' - \nu \Delta \mathbf{u}' - \nabla \cdot \langle \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}' \rangle &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{u}' &= 0. \end{aligned}$$

Das Skalarprodukt der ersten Gleichung mit \mathbf{u}' ist

$$(2.58) \quad \partial_t \frac{\mathbf{u}'^2}{2} + \mathbf{u}' \cdot ((\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{U}) + (\mathbf{U} + \mathbf{u}') \cdot \nabla \frac{\mathbf{u}'^2}{2} + \mathbf{u}' \cdot \nabla p' - \nu \mathbf{u}' \cdot \Delta \mathbf{u}' - \mathbf{u}' \cdot (\nabla \cdot (\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}')) = 0.$$

Jetzt wendet man auf diese Gleichung den Filter der statistischen Mittelwertbildung an. An dieser Stelle sei an Definition 2.11 erinnert, in der k und ϵ eingeführt wurden. Mit den **Hilfsrechnungen**

- $\langle \partial_t \frac{\mathbf{u}'^2}{2} \rangle = \partial_t \langle \frac{\mathbf{u}'^2}{2} \rangle = \partial_t \langle k \rangle$
- $\langle \mathbf{u}' \cdot ((\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{U}) \rangle = \langle \sum_j u'_j \sum_i u'_i \partial_i U_j \rangle = \langle \sum_{ij} u'_i u'_j \partial_i U_j \rangle = \langle \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}' : \nabla \mathbf{U} \rangle = \langle \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}' \rangle : \nabla \mathbf{U} = -R : \nabla \mathbf{U}$
- $\langle \nabla \cdot (p' \mathbf{u}') \rangle = \langle \nabla p' \cdot \mathbf{u}' + p' \nabla \cdot \mathbf{u}' \rangle = \langle \nabla p' \cdot \mathbf{u}' \rangle$
- $\langle \mathbf{u}' \cdot (\nabla \cdot (\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}')) \rangle = \langle \mathbf{u}' \rangle \cdot (\nabla \cdot \langle \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}' \rangle) = 0,$

ergibt sich

$$\langle \partial_t \frac{\mathbf{u}'^2}{2} + (\mathbf{U} + \mathbf{u}') \cdot \nabla \frac{\mathbf{u}'^2}{2} \rangle - R : \nabla \mathbf{U} - \nu \langle \mathbf{u}' \cdot \Delta \mathbf{u}' \rangle + \nabla \cdot \langle p' \mathbf{u}' \rangle = 0.$$

Nun wird Annahme 2.7 zur Vereinfachung des Terms $\langle \partial_t \frac{\mathbf{u}'^2}{2} + (\mathbf{U} + \mathbf{u}') \cdot \nabla \frac{\mathbf{u}'^2}{2} \rangle$ verwendet. Man erhält so

$$\partial_t \langle \frac{\mathbf{u}'^2}{2} \rangle + \mathbf{U} \cdot \nabla \langle \frac{\mathbf{u}'^2}{2} \rangle - \nabla \cdot (\mu_k \nabla \langle \frac{\mathbf{u}'^2}{2} \rangle) - R : \nabla \mathbf{U} - \nu \langle \mathbf{u}' \cdot \Delta \mathbf{u}' \rangle + \nabla \cdot \langle p' \mathbf{u}' \rangle = 0.$$

Die letzten zwei Terme können nicht analytisch durch \mathbf{U} , k und ϵ ausgedrückt werden. Zur Vereinfachung des Terms $\langle \mathbf{u}' \cdot \Delta \mathbf{u}' \rangle$ wendet man die Ergoden-Hypothese und Satz 2.12 an :

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}' \cdot \Delta \mathbf{u}' \rangle &= \frac{1}{|B|} \int_{B(x,r)} \mathbf{u}' \cdot \Delta \mathbf{u}' dx = -\frac{1}{|B|} \int_{B(x,r)} |\nabla \mathbf{u}'|^2 dx + \frac{1}{|B|} \int_{\partial B(x,r)} \mathbf{u}' \cdot \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial \mathbf{n}} do \\ &= -\frac{1}{|B|} \int_{B(x,r)} |\nabla \mathbf{u}'|^2 = -\langle |\nabla \mathbf{u}'|^2 \rangle = -\frac{\epsilon}{\nu}. \end{aligned}$$

Zur Vereinfachung des Terms $\nabla \cdot \langle p' \mathbf{u}' \rangle$ wendet man ebenfalls die Ergoden-Hypothese und Satz 2.12 an :

$$\nabla \cdot \langle p' \mathbf{u}' \rangle = \langle \nabla \cdot (p' \mathbf{u}') \rangle = \frac{1}{|B|} \int_{B(x,r)} \nabla \cdot (p' \mathbf{u}') dx = \frac{1}{|B|} \int_{\partial B(x,r)} p' \mathbf{u}' \cdot \mathbf{n} ds = 0.$$

Damit ergibt sich als Gleichung für k :

$$(2.59) \quad \partial_t k + \mathbf{U} \cdot \nabla k - \nabla \cdot (\mu_k \nabla k) - R : \nabla \mathbf{U} + \epsilon = 0.$$

Wegen $I : (\nabla \mathbf{U}) = I : (\nabla \mathbf{U}^T) = \nabla \cdot \mathbf{U} = 0$ ist $R : \nabla \mathbf{U} = R : (\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T)/2 = \nu_t |\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T|^2/2$ und somit

$$(2.60) \quad \partial_t k + \mathbf{U} \nabla k - \frac{c_\mu k^2}{2 \epsilon} |\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T|^2 - \nabla \cdot (\mu_k \nabla k) + \epsilon = 0.$$

Führt man den Produktionsterm

$$(2.61) \quad P := \frac{\nu_t}{2} |\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T|^2$$

ein, so erhält man die gängige Schreibweise

$$(2.62) \quad \partial_t k + \mathbf{U} \cdot \nabla k - \nabla \cdot (\mu_k \nabla k) = P - \epsilon.$$

Nun soll die Gleichung für ϵ hergeleitet werden. Zunächst soll gezeigt werden, daß unter den gemachten Voraussetzungen gilt

$$\epsilon = \nu \langle |\nabla \times \mathbf{u}'|^2 \rangle_E.$$

Wegen $\nabla \cdot \mathbf{u}' = 0$ ist

$$\Delta \mathbf{u}' = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}') - \nabla \times \nabla \times \mathbf{u}' = -\nabla \times \nabla \times \mathbf{u}'.$$

Da für \mathbf{u}' Dirichlet-Randbedingungen gefordert sind, liefert das mehrfache Anwenden der partieller Integration (vgl. [MP94] S.22)

$$\int |\nabla \mathbf{u}'|^2 dx = - \int \mathbf{u}' \cdot \Delta \mathbf{u}' dx = \int \mathbf{u}' \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{u}' dx = \int |\nabla \times \mathbf{u}'|^2 dx.$$

Die Ergodenhypothese erlaubt die Vertauschung von Ensemblemittelwert und räumlichem Mittelwert. Somit gilt

$$\epsilon = \nu \langle |\nabla \mathbf{u}'|^2 \rangle_E = \nu \int |\nabla \mathbf{u}'|^2 d\omega = \nu \int |\nabla \times \mathbf{u}'|^2 d\omega = \nu \langle |\nabla \times \mathbf{u}'|^2 \rangle_E,$$

was zu zeigen war.

Ausgangspunkt für die Herleitung der Gleichung für ϵ ist wieder die Gleichung für \mathbf{u}' ,

$$\partial_t \mathbf{u}' + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \mathbf{U} + ((\mathbf{U} + \mathbf{u}') \cdot \nabla) \mathbf{u}' + \nabla p' - \nu \Delta \mathbf{u}' - \nabla \cdot \langle \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}' \rangle = \mathbf{0},$$

Jetzt wendet man auf diese Gleichung den Rotationsoperator an. Sei $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{U}$ und $\boldsymbol{\omega}' = \nabla \times \mathbf{u}'$. Mit den **Hilfsrechnungen**

- $\nabla \times \partial_t \mathbf{u}' = \partial_t \boldsymbol{\omega}'$,
- $\nabla \times \nabla p' = \mathbf{0}$ und
- $-\nabla \times \Delta \mathbf{u}' = \nabla \times \nabla \times \nabla \times \mathbf{u}' - \nabla \times \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}') = \nabla \times \nabla \times \nabla \times \mathbf{u}' = \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{\omega}' = -\Delta \boldsymbol{\omega}' + \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}') = -\Delta \boldsymbol{\omega}'$, da $\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}' = \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{u}' = 0$ (vgl. [Gro74] S.123)

ergibt sich die Gleichung

$$\partial_t \omega' + ((\mathbf{U} + \mathbf{u}') \cdot \nabla) \omega' + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \omega - ((\omega + \omega') \cdot \nabla) \mathbf{u}' - (\omega' \cdot \nabla) \mathbf{U} - \nu \Delta \omega' - \nabla \times \nabla \cdot \langle \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}' \rangle = 0.$$

Multiplikation der Gleichung mit $2\nu\omega'$ und Ensemblemittelwertbildung liefern wegen der Beziehung $\langle \omega' \cdot (\nabla \times \nabla \cdot \langle \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}' \rangle) \rangle = \langle \omega' \cdot (\nabla \times \nabla \cdot \langle \mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}' \rangle) \rangle = 0$

$$2\nu \langle \omega' \cdot (\partial_t \omega' + ((\mathbf{U} + \mathbf{u}') \cdot \nabla) \omega' + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \omega - ((\omega + \omega') \cdot \nabla) \mathbf{u}' - (\omega' \cdot \nabla) \mathbf{U} - \nu \Delta \omega') \rangle = 0$$

oder

$$\langle 2\nu \partial_t \frac{\omega'^2}{2} + 2\nu (\mathbf{U} + \mathbf{u}') \cdot \nabla \frac{\omega'^2}{2} \rangle + \langle 2\nu \omega' \cdot ((\mathbf{u}' \cdot \nabla) \omega - (\omega \cdot \nabla) \mathbf{u}' - (\omega' \cdot \nabla) \mathbf{u}' - (\omega' \cdot \nabla) \mathbf{U}) \rangle - \langle 2\nu^2 \omega' \cdot \Delta \omega' \rangle = 0.$$

Für die erste der folgenden Hilfsrechnungen benötigt man die Formel

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B}) + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B},$$

vgl. [Gro74] S.126. Mit den **Hilfsrechnungen**

- $(\mathbf{u}' \cdot \nabla) \omega - (\omega \cdot \nabla) \mathbf{u}' = -\nabla \times (\mathbf{u}' \times \omega),$
- $\omega' \cdot (\omega' \cdot \nabla) \mathbf{U} = \sum_i \omega'_i (\sum_j \omega'_j \partial_j U_i) = \sum_i \sum_j \omega'_i \omega'_j \partial_j U_i = (\omega' \otimes \omega') : \nabla \mathbf{U}$
- $\omega' \cdot (\omega' \cdot \nabla) \mathbf{u}' = (\omega' \otimes \omega') : \nabla \mathbf{u}'$

gelangt man zu

$$\langle \partial_t \nu \omega'^2 + (\mathbf{U} + \mathbf{u}') \cdot \nabla \nu \omega'^2 \rangle - 2\nu \langle \omega' \cdot \nabla \times (\mathbf{u}' \times \omega) \rangle - 2\nu \langle \omega' \otimes \omega' \rangle : \nabla \mathbf{U} - 2\nu \langle (\omega' \otimes \omega') : \nabla \mathbf{u}' \rangle - 2\nu^2 \langle \omega' \Delta \omega' \rangle = 0.$$

Nun wird Annahme 2.8 zur Vereinfachung des Terms $\langle \partial_t \nu \omega'^2 + (\mathbf{U} + \mathbf{u}') \cdot \nabla \nu \omega'^2 \rangle$ verwendet. Man erhält so

$$\partial_t \nu \langle \omega'^2 \rangle + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \nu \langle \omega'^2 \rangle - \nabla \cdot (\mu_\epsilon \nabla \nu \langle \omega'^2 \rangle) - 2\nu \langle \omega' \cdot \nabla \times (\mathbf{u}' \times \omega) \rangle - 2\nu \langle \omega' \otimes \omega' \rangle : \nabla \mathbf{U} - 2\nu \langle (\omega' \otimes \omega') : \nabla \mathbf{u}' \rangle - 2\nu^2 \langle \omega' \Delta \omega' \rangle = 0.$$

Zur Vereinfachung des Terms $\langle \omega' \Delta \omega' \rangle$ wendet man wieder die Ergoden-Hypothese und Satz 2.12 an

$$\begin{aligned} \langle \omega' \Delta \omega' \rangle &= \frac{1}{|B|} \int_{B(x,r)} \omega' \Delta \omega' dx = -\frac{1}{|B|} \int_{B(x,r)} |\nabla \omega'|^2 dx + \frac{1}{|B|} \int_{\partial B(x,r)} \omega' \frac{\partial \omega'}{\partial \mathbf{n}} do \\ &= -\frac{1}{|B|} \int_{B(x,r)} |\nabla \omega'|^2 = -\langle |\nabla \omega'|^2 \rangle. \end{aligned}$$

Nach Lemma 2.3 gilt $\langle \omega' \cdot \nabla \times (\mathbf{u}' \times \omega) \rangle = 0$. Mit der Definition 2.11 gelangt man zur Gleichung

$$\partial_t \epsilon + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \epsilon - \nabla \cdot (\mu_\epsilon \nabla \epsilon) - 2\nu \langle \omega' \otimes \omega' \rangle : \nabla \mathbf{U} - 2\nu \langle (\omega' \otimes \omega') : \nabla \mathbf{u}' \rangle + 2\nu^2 \langle |\nabla \omega'|^2 \rangle = 0.$$

Für den Term $2\nu^2 \langle |\nabla \boldsymbol{\omega}'|^2 \rangle$ wird Annahme 2.9 verwendet. Nach Satz 2.12 verschwindet der Term $\langle (\boldsymbol{\omega}' \otimes \boldsymbol{\omega}') : \nabla \mathbf{u}' \rangle$. Wegen $I : (\nabla \mathbf{U}) = I : (\nabla \mathbf{U}^T) = \nabla \cdot \mathbf{U} = 0$ gilt mit der Annahme 2.5 die Beziehung

$$2\nu \langle \boldsymbol{\omega}' \otimes \boldsymbol{\omega}' \rangle : \nabla \mathbf{U} = 2\nu \langle \boldsymbol{\omega}' \otimes \boldsymbol{\omega}' \rangle : (\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T)/2 = c_1 \frac{\epsilon}{k} \nu_t |\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T|^2/2 = c_1 \frac{\epsilon}{k} P,$$

wobei P durch Gleichung (2.61) gegeben ist. Es ergibt sich schließlich

$$(2.63) \quad \partial_t \epsilon + \mathbf{U} \cdot \nabla \epsilon - c_1 \frac{\epsilon}{k} P - \nabla \cdot (\mu_\epsilon \nabla \epsilon) + c_2 \frac{\epsilon^2}{k} = 0.$$

Wieder soll diese Gleichung in die gebräuchliche Form gebracht werden. Man erhält

$$\partial_t \epsilon + \mathbf{U} \cdot \nabla \epsilon - \nabla \cdot (\mu_\epsilon \nabla \epsilon) = c_1 \frac{\epsilon}{k} P - c_2 \frac{\epsilon^2}{k}.$$

◇

2.6. Grenzschichttheorie und Wandfunktionen

Der Inhalt dieses Abschnittes ist die Untersuchung und Modellierung laminarer und turbulenter Strömungen in den Nähe fester Wände. Die Motivation dieses Abschnitts ist die, daß bei der numerischen Behandlung des k/ϵ -Modells \mathbf{U} , P , Θ , k und ϵ in Wandnähe mittels analytischer Funktionen gesetzt werden müssen.

2.6.1. Prandtlsche Grenzschichttheorie

In diesem Abschnitt soll eine kurze Einführung in die Prandtlsche Grenzschichttheorie gegeben werden. Dazu werden auch einige Grundbegriffe und Grundprinzipien zur Lösung singular gestörter Probleme eingeführt.

Betrachtet werde folgendes Außenraumproblem für die Navier-Stokes-Gleichungen. Sei $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \gamma(B[\mathbf{0}, 1])$, wobei $B \equiv B[\mathbf{0}, 1] = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$ und $\gamma : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine stückweise stetig-differenzierbare Abbildung mit $\gamma(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ und $|\gamma| = 1$. Die Abbildung γ beschreibt die Geometrie des Körpers, der umströmt wird. Zu lösen sind die Navier-Stokes-Gleichungen

$$\begin{aligned} -\nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} && \text{in } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 && \text{in } \Omega \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \mathbf{u}(x, y) &= (1, 0)^T \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= 0 && \text{auf } \partial\gamma(B). \end{aligned}$$

Die erste der beiden Randbedingungen nennt man auch Anströmbedingung, die zweite Haftbedingung.

Im Falle sehr kleiner Diffusion ν kann zur Lösung die Methode der asymptotischen Entwicklung verwendet werden, vgl [RST96] S.3ff.

Definition 2.16

Sei $\beta_i(\nu) = \nu^{q_i}$ für rationales q_i ($i = 1, \dots, m+1$) eine Folge von Funktionen mit $\beta_{i+1}(\nu) = o(\beta_i(\nu))$ für $\nu \rightarrow 0$. Eine asymptotische Entwicklung \mathbf{u}_{as} der Ordnung m von \mathbf{u} (in der Maximumnorm $|\cdot|_\infty$) ist eine Entwicklung der Form

$$(2.64) \quad u_{as}(x) = \sum_{i=0}^m \beta_i(\nu) u_i(\mathbf{x}),$$

so daß für eine Konstante C gilt

$$(2.65) \quad |u(\mathbf{x}) - u_{as}(\mathbf{x})|_\infty \leq C \beta_{m+1}(\nu), \quad \forall \mathbf{x},$$

falls ν hinreichend klein ist. Man bezeichnet u_0 auch als Hauptglied der asymptotischen Entwicklung.

Im Grenzfall $\nu = 0$ gehen die Navier-Stokes-Gleichungen über in die zugehörigen reduzierten Gleichungen, die sog. Euler-Gleichungen

$$(2.66) \quad (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Ziel der Prandtlschen Grenzschichttheorie ist es nun, rotationsfreie Lösungen der Euler-Gleichungen zu finden. Setzt man für \mathbf{u} bzw. p die folgenden asymptotischen Entwicklungen an

$$\mathbf{u}_{as}(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^m \beta_i(\nu) \mathbf{u}_i(\mathbf{x}), \quad p_{as}(\mathbf{x}) = \sum_{i=0}^m \beta_i(\nu) p_i(\mathbf{x}),$$

so erkennt man, daß das Hauptglied (\mathbf{u}_0, p_0) die Euler-Gleichungen löst.

Die folgende Darstellung ist dicht angelehnt an [KC96] S.172 ff. Im folgenden wird der R^2 mit der komplexen Ebene identifiziert. Man faßt \mathbf{u}_0 als komplexe Funktion auf und schreibt $\mathbf{u}_0(x, y) \equiv \mathbf{u}_0(z) = \Re \mathbf{u}_0(z) + i \Im \mathbf{u}_0(z)$ mit $z = x + iy$. Dabei bezeichnet \Re den Realteil und \Im den Imaginärteil. Fordert man, daß das Hauptglied \mathbf{u}_0 rotationsfrei, also eine Potentialströmung ist, so gibt es nach der Funktionentheorie eine holomorphe Funktion $F(z) = \phi(z) + i\psi(z)$ mit $F'(z) = \mathbf{u}_0 = \Re \mathbf{u}_0 + i \Im \mathbf{u}_0$ und

$$\Re \mathbf{u}_0 = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad \Re \mathbf{u}_0 = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \Im \mathbf{u}_0 = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad \Im \mathbf{u}_0 = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Dabei bezeichnet man $\phi = const$ auch als Stromlinien und $\psi = const$ als Potentiallinien, weil alle Punkte auf einer Potentiallinie die gleiche potentielle Energie besitzen. Damit hat man mit (ϕ, ψ) ein der Strömung angepaßtes krummliniges Koordinatensystem gefunden. Zunächst soll die sogenannte globale Entwicklung, die in ganz Ω außer in der Nähe von Grenzschichten gültig ist, bzgl. dieser krummlinigen Koordinaten angegeben werden. Dabei sei $\mathbf{u}(\phi, \psi) = (w_\phi(\phi, \psi), w_\psi(\phi, \psi))$ die Koordinatenschreibweise von \mathbf{u} . Dann gilt für die globale Entwicklung zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} w_\phi(\phi, \psi, \nu) &= \beta_0(\nu) w_\phi^0(\phi, \psi, \nu) + \beta_1(\nu) w_\phi^1(\phi, \psi, \nu) + O(\beta_2(\nu)), \\ w_\psi(\phi, \psi, \nu) &= \beta_0(\nu) w_\psi^0(\phi, \psi, \nu) + \beta_1(\nu) w_\psi^1(\phi, \psi, \nu) + O(\beta_2(\nu)), \\ p(\phi, \psi, \nu) &= \beta_0(\nu) p^0(\phi, \psi, \nu) + \beta_1(\nu) p^1(\phi, \psi, \nu) + O(\beta_2(\nu)). \end{aligned}$$

Da die reduzierte Gleichung nur von erster Ordnung ist, kann nur eine der zwei Randbedingungen erfüllt werden :

$$\begin{aligned} w_\phi(\phi, \psi) &\rightarrow 1, \quad w_\psi(\phi, \psi) \rightarrow 0 \quad (\phi \rightarrow -\infty), \\ w_\phi(\phi, 0) &= w_\psi(\phi, 0) = 0 \quad (\phi_1 \leq \phi \leq \phi_2). \end{aligned}$$

Mit der zweiten Randbedingung wird implizit eine Parametrisierung von $\partial\gamma(B)$ definiert. Man entscheidet, daß die Anströmbedingung erfüllt werden soll, die Haftbedingung kann verletzt werden. Damit ergibt sich als Zwischenresultat für die globale Entwicklung

$$\begin{aligned} w_\phi(\phi, \psi, \nu) &= 1 + \beta_1(\nu) w_\phi^1(\phi, \psi, \nu) + O(\beta_2(\nu)), \\ w_\psi(\phi, \psi, \nu) &= \beta_1(\nu) w_\psi^1(\phi, \psi, \nu) + O(\beta_2(\nu)). \end{aligned}$$

Idee des Verfahrens der asymptotischen Entwicklung ist es, zur globalen Entwicklung eine lokale Grenzschichtkorrektur zu addieren. Von dieser lokalen Grenzschichtkorrektur (oder lokalen Entwicklung) wird erstens gefordert, daß sie mit wachsender Entfernung von der Grenzschicht so schnell abfällt, daß weit weg von der Grenzschicht die Lösung durch die

globale Entwicklung gegeben bleibt und daß insbesondere die Anströmbedingung erfüllt bleibt. Zweitens soll sie sich in der Nähe der Grenzschicht so verhalten, daß die Haftbedingung erfüllt ist. Und drittens sollen globale und lokale Lösung im Übergangsbereich zwischen Grenzschicht und dem Gültigkeitsbereich der globalen Lösung zusammenpassen. Für die lokale Entwicklung wird folgender Ansatz zweiter Ordnung gemacht

$$\begin{aligned} w_\phi(\phi, \psi, \nu) &= W_\phi^0(\phi, \psi^*, \nu) + \delta(\nu)W_\phi^1(\phi, \psi^*, \nu) + O(\delta^2(\nu)), \\ w_\psi(\phi, \psi, \nu) &= W_\psi^0(\phi, \psi^*, \nu) + \delta(\nu)W_\psi^1(\phi, \psi^*, \nu) + O(\delta^2(\nu)), \\ p(\phi, \psi, \nu) &= P^0(\phi, \psi^*, \nu) + \delta(\nu)P^1(\phi, \psi^*, \nu) + O(\delta^2(\nu)). \end{aligned}$$

Dabei wurde die lokale Variable $\psi^* = \frac{\psi}{\delta(\nu)}$ eingeführt.

Nun soll $W_\psi^0 = 0$ gezeigt werden. Sei $W_\phi(\phi, \psi^*, \nu) = w_\phi(\phi, \psi, \nu)$ und $W_\psi(\phi, \psi^*, \nu) = w_\psi(\phi, \psi, \nu)$. Die Kontinuitätsgleichung lautet in krummlinigen Koordinaten

$$\frac{\partial w_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial w_\psi}{\partial \psi} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial W_\phi}{\partial \phi} + \frac{1}{\delta(\nu)} \frac{\partial W_\psi}{\partial \psi^*} = 0.$$

Einsetzen der lokalen Entwicklung liefert

$$\frac{\partial W_\phi^0}{\partial \phi} + \delta(\nu) \frac{\partial W_\phi^1}{\partial \phi} + O(\delta^2(\nu)) + \frac{1}{\delta(\nu)} \frac{\partial W_\psi^0}{\partial \psi^*} + \frac{\partial W_\psi^1}{\partial \psi^*} + O(\delta(\nu)) = 0.$$

Um eine nichttriviale Kontinuitätsgleichung zu erhalten muß $\frac{\partial W_\psi^0}{\partial \psi^*} = 0$ sein. Aufgrund der Randbedingung $w_\psi(\phi, 0) = 0$ folgt aus der Theorie gewöhnlicher Differentialgleichungen $W_\psi^0 \equiv 0$. Als Zwischenresultat für die lokale Entwicklung ergibt sich somit

$$\begin{aligned} w_\phi(\phi, \psi^*, \nu) &= W_\phi^0(\phi, \psi^*, \nu) + \delta(\nu)W_\phi^1(\phi, \psi^*, \nu) + O(\delta^2(\nu)), \\ w_\psi(\phi, \psi^*, \nu) &= \delta(\nu)W_\psi^1(\phi, \psi^*, \nu) + O(\delta^2(\nu)), \\ p(\phi, \psi^*, \nu) &= P^0(\phi, \psi^*, \nu) + \delta(\nu)P^1(\phi, \psi^*, \nu) + O(\delta^2(\nu)). \end{aligned}$$

Nun soll $\delta(\nu) = \sqrt{\nu}$ gezeigt werden. Setzt man die Grenzschichtkorrektur in die Navier-Stokes-Gleichungen ein, so generiert der Term $\nu \Delta \mathbf{u}$ (in krummlinigen Koordinaten) u.a. den Term $\nu \frac{\partial^2 W_\phi}{\partial \psi^2}$, der von der Ordnung $\frac{\nu}{\delta^2}$ ist. Damit globale und lokale Lösung im Übergangsbereich zwischen Grenzschicht und dem Gültigkeitsbereich der globalen Lösung zusammenpassen, muß

$$(2.67) \quad \delta(\nu) = \sqrt{\nu}$$

gelten. Man sagt daher, die Grenzschicht habe die Dicke $\sqrt{\nu}$. Für die weitere Rechnung sei verwiesen auf [KC96], S.177f.

2.6.2. Grundidee des Wandgesetz-Konzepts

In diesem Abschnitt soll die Grundidee des Wandgesetz-Konzeptes vorgestellt werden. Als Randbedingung an festen Wänden Γ fordert man meist die Haftbedingung

$$(2.68) \quad \mathbf{u}|_\Gamma = 0.$$

Wegen Gleichung (2.67) steigt die Geschwindigkeit von 0 auf $O(1)$ über eine Distanz von $\delta = O(\sqrt{\nu})$. Man definiert einen schmalen Streifen um die festen Wände, an denen die Haftbedingung gefordert wird

$$(2.69) \quad B_\delta = \{\mathbf{x} - \lambda \mathbf{n}(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in \Gamma, \lambda \in]0, \delta(\mathbf{x})[\},$$

wobei $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ der (ins Gebietsinnere zeigende) Normalenvektor auf Γ in $\mathbf{x} \in \Gamma$ ist und $\delta(\mathbf{x})$ die Dicke der Grenzschicht beschreibt. Man definiert weiter das neue Gebiet, den sogenannten Euler-Bereich als

$$(2.70) \quad \Omega_\delta = \Omega \setminus B_\delta$$

und den zugehörigen (künstlichen) Rand als

$$(2.71) \quad \Sigma = \partial\Omega_\delta$$

Im Euler-Bereich für die zu den Navier-Stokes-Gleichungen gehörigen Euler-Gleichungen ($\nu = 0$) kann man eine einfache (rotationsfreie) Lösung angeben, die eine Potentialströmung ist. Die Frage ist, wie die neuen Randbedingungen auf dem künstlichen Rand Σ lauten? Mittels Taylor-Entwicklung kann man die Randbedingungen auf Σ aus den Randbedingungen auf Γ herleiten. Taylorentwicklung von \mathbf{u} um den Punkt $\mathbf{x}' + \delta(\mathbf{x}')\mathbf{n}(\mathbf{x}') \in \Gamma$ liefert für den Punkt $\mathbf{x}' \in \Sigma$:

$$(2.72) \quad 0 = \mathbf{u}(\mathbf{x}' + \delta(\mathbf{x}')\mathbf{n}(\mathbf{x}')) = \mathbf{u}(\mathbf{x}') + \delta(\mathbf{x}') \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{x}') + o(\delta).$$

Wegen der alten Randbedingung $\mathbf{u}|_\Gamma = \mathbf{0}$ folgt

$$(2.73) \quad \mathbf{u} + \delta \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}} \approx 0 \quad \text{auf } \Sigma.$$

2.6.3. Wandgesetze für die turbulente Grenzschicht

Das Ziel dieses Abschnitts ist es, die analytischen Funktionen bereitzustellen, die das Verhalten von \mathbf{U} , P , Θ , k und ϵ in Wandnähe beschreiben.

Betrachtet werde eine 2D-Strömung. Sei (ϕ, ψ) das angepaßte krummlinige Koordinatensystem aus dem letzten Abschnitt. In Übereinstimmung mit der gängigen Literatur wird statt (ϕ, ψ) ab jetzt (x, y) verwendet. Sei also $x \equiv \phi$ die Richtung des mittleren (Euler-) Flusses, parallel zur Wand, sei $y \equiv \psi$ die Richtung senkrecht zur Wand. Man definiert

$$(2.74) \quad u^* = \sqrt{\nu \frac{\partial U_x}{\partial y} |_{y=0}} \quad , \quad y^* = \frac{\nu}{u^*}.$$

Dabei ist \mathbf{U} der zeitliche Mittelwert der Geschwindigkeit

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) dt.$$

Ferner definiert man sich skalierte Längen und Geschwindigkeiten

$$(2.75) \quad y^+ = \frac{y}{y^*} \quad , \quad u^+ = \frac{U}{u^*}$$

Aufgrund von Experimenten schlugen von Kármán und Prandtl folgendes Wandgesetz vor, das sich unter Ähnlichkeitsannahmen auch herleiten läßt:

Im Bereich $20 \leq y^+ \leq 100$, in der sog. logarithmischen Schicht, gilt

$$(2.76) \quad u^+ = \frac{1}{\chi} \log y^+ + 5.5,$$

wobei $\chi = 0.41$ die von Karmansche Konstante ist. Im Bereich $0 \leq y^+ \leq 20$, in der sog. viskosen Unterschicht, gilt ein linearer Zusammenhang

$$(2.77) \quad u^+ = y^+.$$

Bemerkung 2.18

In [Mue99] wird auch eine von Neitzke [Nei99] vorgeschlagene Beziehung angegeben, die dahingehend eine Verbesserung bringt, daß die Wandfunktion auch in der Ableitung stetig ist

$$\begin{aligned} u^+ = y^+ & \quad : \quad y^+ \leq R_u \\ u^+ = R_u \sqrt{2 \ln\left(\frac{y^+}{R_u}\right) + 1} & \quad : \quad y^+ > R_u \end{aligned}$$

Die Konstante R_u wird aufgrund experimenteller Ergebnisse zu $R_u = 6.25$ bestimmt.

Die Gleichungen (2.76), (2.77) sowie (2.18) sind nichtlineare Beziehungen zwischen \mathbf{u} und $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{n}}$. Jetzt wählt man δ so, daß Σ in der logarithmischen Schicht enthalten ist. Setzt man die in den Gleichungen (2.74) und (2.75) definierten Größen in die Gleichung (2.76) ein, die die Strömung in der logarithmischen Schicht beschreibt, so ergibt sich :

$$\frac{U}{u^*} = \frac{1}{\chi} \log \frac{y}{y^*} + 5.5 \quad , \quad \text{bzw.}$$

$$\frac{U}{\sqrt{\nu \frac{\partial U_x}{\partial y}|_{y=0}}} = \frac{1}{\chi} \log \frac{y \sqrt{\nu \frac{\partial U_x}{\partial y}|_{y=0}}}{\nu} + 5.5 .$$

Bezeichnet man nun mit $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ die Komponente von \mathbf{u} in y-Richtung und mit $\mathbf{u} \cdot \mathbf{s}$ die Komponente von \mathbf{u} in x-Richtung, so ergibt sich : Die Haftbedingung $\mathbf{u} = 0$ auf Γ ist somit äquivalent zu folgenden Randbedingungen auf Σ

$$(2.78) \quad \begin{aligned} & \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \\ & \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{s}}{\sqrt{\nu \left| \frac{\partial \mathbf{u} \cdot \mathbf{s}}{\partial \mathbf{n}} \right|}} - \frac{1}{\chi} \log \left(\delta \sqrt{\frac{1}{\nu} \left| \frac{\partial \mathbf{u} \cdot \mathbf{s}}{\partial \mathbf{n}} \right|} \right) - 5.5 = 0. \end{aligned}$$

Für den Nachweis, daß die Navier-Stokes-Gleichungen mit diesen Randbedingungen ein wohlgestelltes Problem bilden, sei verwiesen auf [MP94] S.15.

Bemerkung 2.19

Die zweite Gleichung in (2.78) liefert die implizite Definition einer Funktion $g(\mathbf{u} \cdot \mathbf{s})$ mit

$$(2.79) \quad \frac{\partial \mathbf{u} \cdot \mathbf{s}}{\partial n} = -g(\mathbf{u} \cdot \mathbf{s})$$

Damit lassen sich die Randbedingungen auf Σ angeben als

$$(2.80) \quad \begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{u} \cdot \mathbf{s}}{\partial n} &= -g(\mathbf{u} \cdot \mathbf{s}). \end{aligned}$$

Bemerkung 2.20

Voraussetzung für das Verwenden von Wandfunktionen ist es, daß

$$20 \leq \frac{\delta}{y^*} \leq 100$$

gilt und daß sich die Grenzschichten nicht ablösen.

Nun sollen Wandfunktionen für k und ϵ bestimmt werden.

Satz 2.14

Sei u^* wie in Gleichung (2.74) definiert. Sei δ so gewählt, daß Σ in der logarithmischen Schicht enthalten ist. Ferner werde angenommen, daß in der logarithmischen Schicht k und ϵ stationär sind und daß dort die Turbulenz homogen in x -Richtung ist, d.h., daß $k = k(y)$ und $\epsilon = \epsilon(y)$ gilt. Dann lösen

$$(2.81) \quad k = \frac{u^{*2}}{\sqrt{c_\mu}}, \quad \text{bzw.} \quad \epsilon = \frac{u^{*3}}{\chi y} \quad \text{und} \quad E := (\partial_y U_x)^2 = \frac{u^{*2}}{\chi^2 y^2}$$

die Gleichungen für k bzw. ϵ .

Bemerkung 2.21

Setzt man in Gleichung (2.81) $y = \delta$, so erhält man die Randbedingungen auf Σ für k und ϵ .

Beweis:

Die Gleichung für k war

$$(2.82) \quad \partial_t k + \mathbf{U} \cdot \nabla k - \frac{c_\mu}{2} \frac{k^2}{\epsilon} |\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T|^2 - \nabla \cdot (\mu_k \nabla k) + \epsilon = 0.$$

In der logarithmischen Schicht wird der Fluß als stationär angenommen, also ist $\partial_t k = 0$. Wegen der angenommenen homogenen Turbulenz in x -Richtung gilt $k = k(y)$. In der logarithmischen Schicht ist nach Gleichung (2.78) $U_y = 0$. Damit ist $\mathbf{U} \cdot \nabla k = U_x \frac{\partial k}{\partial x} + U_y \frac{\partial k}{\partial y} = 0$. Ferner gilt wegen $\mathbf{U} = \mathbf{U}(y)$ in der logarithmischen Schicht $|\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T|^2 = 2(\partial_y U_x)^2$. Man definiert $E := (\partial_y U_x)^2$ und erhält somit als Gleichung für k

$$(2.83) \quad -\frac{\partial}{\partial y} \left(c_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \frac{\partial k}{\partial y} \right) - c_\mu \frac{k^2}{\epsilon} E + \epsilon = 0.$$

Nun kann nachgerechnet werden, daß k , ϵ und E die Gleichung für k erfüllen. Nach Gleichung (2.74) ist $u^* = u^*(x)$ und somit $\frac{\partial u^*}{\partial y} = 0$. Damit ergibt sich :

$$-\frac{\partial}{\partial y} \left(c_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \frac{\partial k}{\partial y} \right) - c_\mu \frac{k^2}{\epsilon} E + \epsilon = 0 - c_\mu \frac{\left(\frac{u^{*2}}{\sqrt{c_\mu}} \right)^2}{\frac{u^{*3}}{\chi y}} \cdot \frac{u^{*2}}{\chi^2 y^2} + \frac{u^{*3}}{\chi y} = -c_\mu \frac{u^{*4}}{c_\mu} \frac{\chi y}{u^{*3}} \cdot \frac{u^{*2}}{\chi^2 y^2} + \frac{u^{*3}}{\chi y} = 0$$

Die Gleichung für ϵ war

$$(2.84) \quad \partial_t \epsilon + \mathbf{U} \cdot \nabla \epsilon - \frac{c_1}{2} k |\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T|^2 - \nabla \cdot \left(\mu_\epsilon \frac{k^2}{\epsilon} \nabla \epsilon \right) + c_2 \frac{\epsilon^2}{k} = 0,$$

Wegen der Stationarität ist $\partial_t \epsilon = 0$. Mit den selben Argumenten, wie sie oben für die k -Gleichung angegeben wurden, ergibt sich als Gleichung für ϵ

$$(2.85) \quad -\frac{\partial}{\partial y} \left(\mu_\epsilon \frac{k^2}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right) - c_1 \frac{\epsilon}{k} \frac{\nu_t}{2} E + c_2 \frac{\epsilon^2}{k} = 0.$$

In der logarithmischen Grenzschicht ist $\nu \ll \frac{c_\mu}{Pr_\epsilon} \frac{k^2}{\epsilon}$ und somit $\mu_\epsilon \approx \frac{c_\mu}{Pr_\epsilon} \frac{k^2}{\epsilon}$. Nach Gleichung (2.74) ist wieder $u^* = u^*(x)$ und somit $\frac{\partial u^*}{\partial y} = 0$. Somit ergibt sich

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{c_\mu}{Pr_\epsilon} \frac{k^2}{\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right) - c_1 c_\mu k E + c_2 \frac{\epsilon^2}{k} &= -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{c_\mu}{Pr_\epsilon} \frac{\left(\frac{u^{*2}}{\sqrt{c_\mu}} \right)^2}{\frac{u^{*3}}{\chi y}} \frac{\partial \frac{u^{*3}}{\chi y}}{\partial y} \right) - c_1 c_\mu \frac{u^{*2}}{\sqrt{c_\mu}} \frac{u^{*2}}{\chi^2 y^2} + c_2 \sqrt{c_\mu} \frac{u^{*4}}{\chi^2 y^2} \\ &= -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{c_\mu}{Pr_\epsilon} \frac{\left(\frac{u^{*2}}{\sqrt{c_\mu}} \right)^2}{\frac{u^{*3}}{\chi y}} \frac{(-u^{*3})}{\chi y^2} \right) - c_1 \sqrt{c_\mu} \frac{u^{*4}}{\chi^2 y^2} + c_2 \sqrt{c_\mu} \frac{u^{*4}}{\chi^2 y^2} \\ &= -\frac{1}{Pr_\epsilon} \frac{u^{*4}}{y^2} - c_1 \sqrt{c_\mu} \frac{u^{*4}}{\chi^2 y^2} + c_2 \sqrt{c_\mu} \frac{u^{*4}}{\chi^2 y^2} = 0. \end{aligned}$$

Da die Konstanten die sogenannte Kompatibilitätsbedingung

$$\frac{1}{Pr_\epsilon} = \frac{\sqrt{c_\mu}}{\chi^2} (c_2 - c_1),$$

erfüllen, folgt die Behauptung. ◇

2.6.4. Wandfunktionen in PNS

In diesem Abschnitt soll nun das in PNS implementierte Wandfunktionen-Konzept vorgestellt werden, vgl. [Mue99] S.12ff. Für das Geschwindigkeitsfeld wird die von Neitzke [Nei99] vorgeschlagene Beziehung

$$\begin{aligned} u^+ &= y^+ & : & \quad y^+ \leq R_u \\ u^+ &= R_u \sqrt{2 \ln \left(\frac{y^+}{R_u} \right) + 1} & : & \quad y^+ > R_u \end{aligned}$$

mit $R_u = 6.25$ verwendet.

Im Fall nichtisothermer Strömungen mit Dirichletschen Temperaturrandbedingungen wird als Wandfunktion für die passend skalierte Temperatur θ^+ die Beziehung

$$\begin{aligned} \theta^+ &= Pr y^+ & : & \quad y^+ \leq R_\theta \\ \theta^+ &= Pr R_\theta \sqrt{2 \ln\left(\frac{y^+}{R_\theta}\right) + 1} & : & \quad y^+ > R_\theta \end{aligned}$$

verwendet, wobei die Konstanten $Pr = 0.71$ und $R_\theta = 8.0$ aufgrund von Experimenten gewählt wurden. Für k und ϵ definiert man

$$(2.86) \quad k^+ := \frac{k}{u^{*2}}, \quad \epsilon^+ := \frac{\epsilon \nu}{u^{*4}}.$$

Mit Satz 2.14 und der Definition von y^+ in Gleichung (2.75) folgt nun

$$(2.87) \quad \begin{aligned} k^+ &= \frac{k}{u^{*2}} = \frac{u^{*2}}{\sqrt{c_\mu} u^{*2}} = \frac{1}{\sqrt{c_\mu}}, \\ \epsilon^+ &= \frac{\epsilon \nu}{u^{*4}} = \frac{u^{*3} \nu}{\chi y u^{*4}} = \frac{1}{\chi y^+}. \end{aligned}$$

Aufgrund von Messungen schlugen Yuan et al.[Yua92] folgende Verbesserungen vor

$$(2.88) \quad k^+ = \min\left(\frac{1}{\sqrt{c_\mu}}; 0.05(y^+)^2\right), \quad \epsilon^+ = \frac{0.1 + 0.003(y^+)^2}{1 + 0.00125(y^+)^3}.$$

Die Gleichungen (2.6.4), (2.6.4) und (2.88) geben also an, wie \mathbf{U} , Θ , k und ϵ in Wandnähe analytisch in PNS gesetzt werden.

2.7. Bemerkungen zum k/ϵ -Modell

Die Information über die Turbulenz steckt in den Termen, die die Fluktuationsgrößen \mathbf{u}' bzw. $\boldsymbol{\omega}'$ enthalten und die nicht direkt durch k und ϵ ausgedrückt werden können. Die Fluktuationsterme sind a priori unbekannt, vgl. Bemerkung 2.9. Daher werden sie durch Terme aus gemittelten Größen modelliert. Mit mathematischen Konzepten ist bislang zwar die grobe Struktur dieser Modellierungsterme begründbar, nicht aber ihre genaue Gestalt wie z.B. die Wahl von Vorfaktoren. Ziel dieses letzten Abschnitts soll es sein, aus einem Vergleich mit der Herleitung der k - und ϵ -Gleichung in der Physik ein genaueres Verständnis für diese Modellierungsterme zu erlangen.

Es sollen die folgenden Fragen beantwortet werden. Wo liegen die mathematischen Ursachen für das Auftreten der Fluktuationsterme (z.B. die Anwendung welcher Sätze generiert sie)? Wie entstehen sie in der Herleitung der Theoretischen Physik und wie werden sie dort behandelt? Kann man die sie generierenden mathematischen und physikalischen Strukturen miteinander vergleichen?

2.7.1. Auftreten der Fluktuationsterme in der mathematischen Herleitung

Bei der mathematischen Herleitung tauchen folgende Fluktuationsterme auf.

- Die Terme $R = \langle u' \otimes u' \rangle$, modelliert durch $\frac{2}{3}kI + c_\mu \frac{k^2}{\epsilon}(\nabla U + \nabla U^T)$, und $\langle \omega' \otimes \omega' \rangle$, modelliert durch $aI + \frac{\epsilon}{k}(\nu + c_\mu \frac{k^2}{\epsilon})(\nabla U + \nabla U^T)$, entstehen durch direkte Filterung der zufallsabhängigen Navier-Stokes-Gleichungen. Die Modellierung dieser Terme durch Anwendung des Prinzips der Wirbelviskosität läßt sich mathematisch wenigstens partiell rechtfertigen, vgl. Abschnitt 2.3.3.
- Der Term $\nu^2 \langle |\nabla \omega'|^2 \rangle$, modelliert als $c_2 \epsilon^2 / k$, entsteht auch durch Filterung. Für die Modellierung gibt es keine mathematische Motivation.
- Zwei weitere Fluktuationsterme entstehen durch Anwendung des Satzes von Kesten-Papanicolaou, also im wesentlichen auch durch Filterung. Da die Korrelationsterme nicht bekannt sind und außerdem die auszuwertenden Integrale i.a. nicht geschlossen angebar sind, müssen sie modelliert werden. Die Wahl $\mu(R) = (\nu + \frac{\nu_t}{Pr_k})$ bzw. $\mu(R) = (\nu + \frac{\nu_t}{Pr_\epsilon})$ kann nicht mathematisch motiviert werden. Sie erscheint aber sinnvoll, wenn man die Struktur des zu modellierenden Integrals in Gleichung (2.27) mit der Wirbelviskositätsannahme 2.3 vergleicht.

2.7.2. Herleitung des k/ϵ -Modells in der Physik

Zunächst sollen folgende heuristische physikalische Erklärungen für die Annahmen 2.9 und 2.5 gegeben werden.

- Experimente haben gezeigt, daß die Dissipation klein in Bereichen mit quasi-gleichförmiger Rotation ist. So kann es physikalisch motiviert werden, den Term $\nu^2 \langle |\nabla \omega'|^2 \rangle$ durch $c_2 \epsilon^2 / k$ zu modellieren.
- Bei der Modellierung von $\langle \omega' \otimes \omega' \rangle$ muß aus Dimensionsgründen der zweite Term proportional k sein. Motivieren könnte man diese Abschlußhypothese aus der Tatsache, daß zwischen der zeitlichen Änderung der in der Strömung gespeicherten Energie und der als $\Omega \equiv \langle \frac{1}{2} |\omega \times \omega|^2 \rangle$ definierten sogenannten Enstrophie, die eine in etwa analoge Struktur wie der zu modellierende Term $\langle \omega' \otimes \omega' \rangle$ besitzt, die Beziehung

$$(2.89) \quad \frac{d}{dt} E = -2\nu\Omega$$

besteht. Da bei einer turbulenten Strömung ein Teil der Energie der mittleren Strömung in die Energie der Wirbel, die ja durch die Größe k beschrieben wird, umgewandelt wird, d.h. 'verloren geht', liegt es nahe, den zweiten Modellierungsterm proportional zu k anzusetzen.

Nun soll kurz skizziert werden, wie die Gleichungen für k und ϵ in der Physik hergeleitet werden, vgl. [Kes92] S.5ff.

Ausgangspunkt für die Herleitung der Gleichungen für k und ϵ ist die exakte Transportgleichung für den Reynoldsschen Spannungstensor. Beachtet man, daß die turbulente kinetische Energie gleich der Spur des Reynoldsspannungstensors ist, so ergibt sich eine exakte

Transportgleichung für k durch Summation über die Diagonalelemente von R :

$$(2.90) \quad \frac{dk}{dt} = -P_k + T_k + D_k - \epsilon.$$

Dabei ist

- $P_k = -\sum_{i,k=1}^d \langle u'_i u'_k \rangle_E \langle \partial_k U_i \rangle_E$. Dies ist der Produktionsterm für k . Auf ihn wendet man die Wirbelviskositätsannahme und die Definition von ν_t an.
- $T_k = \sum_{k=1}^d \partial_k \left(\frac{\langle \sum_{i=1}^d u'_i u'_i u'_k \rangle_E}{2} + \frac{\langle p' u'_k \rangle_E}{\rho} \right)$. Dieser Term stellt turbulente Transportprozesse aufgrund von Geschwindigkeits- und Druckschwankungen dar. Es sei angemerkt, daß dies nach [MP94] im wesentlichen als ein Problem des turbulenten Transports wie in Definition 2.12 aufgefaßt werden kann. Der Term wird von Physikern interpretiert als turbulente Diffusion. Dies ist letztlich auch die Aussage des Satzes 2.11. Im Satz 2.11 wird allerdings nicht zwischen turbulenter und molekularer Diffusion unterschieden. In der Physik modelliert man

$$(2.91) \quad T_k = \sum_{k=1}^d \partial_k \left(\frac{\langle \sum_{i=1}^d u'_i u'_i u'_k \rangle_E}{2} + \frac{\langle p' u'_k \rangle_E}{\rho} \right) = \nabla \cdot \left[\frac{\nu_t}{\sigma_k} \nabla k \right].$$

Die Effekte der Druckschwankungen werden dabei als vernachlässigbar klein angesehen. Bei der Herleitung der k -Gleichung nach [MP94] verschwindet der Druckkorrelationsterm $\nabla \cdot \langle p' \mathbf{u}' \rangle$ aufgrund des Satzes 2.12.

- $D_k = \nabla \cdot (\nu \nabla k)$ stellt die Diffusion von k aufgrund der Diffusivität des Mediums dar.
- $\epsilon_{ij} = 2\nu \langle (\sum_{k=1}^d (\partial_k u'_i + \partial_k u'_j)) \rangle_E$ ist schließlich die Dissipation turbulenter kinetischer Energie in Wärme.

Damit ergibt sich als Gleichung für k

$$(2.92) \quad \frac{dk}{dt} = c_\mu \frac{k^2}{\epsilon} 2S(U) : S(U) + \nabla \cdot \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right] - \epsilon.$$

Bemerkung 2.22

Man erkennt an dieser Herleitung, warum die Gesamtdiffusivität in der k -Gleichung durch $\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k}$ gegeben ist. Bei [MP94] S.52 fehlt die Diffusivität des Mediums ν . Dies setzt aber dann stillschweigend voraus, daß global $\nu \ll \frac{\nu_t}{\sigma_k}$ gilt, was aber nicht immer richtig ist.

Für die Dissipation ϵ läßt sich folgende exakte Transportgleichung angeben :

$$(2.93) \quad \frac{d\epsilon}{dt} = P_\epsilon^1 + P_\epsilon^2 + P_\epsilon^3 + P_\epsilon^4 + T_\epsilon + D_\epsilon - \Gamma_\epsilon.$$

Dabei beschreibt

- $P_\epsilon^4 = -2\nu \langle \sum_{i,m=1}^d \partial_k u'_i \partial_m u'_i \partial_m u'_k \rangle_E$ die turbulente Produktion,
- $T_\epsilon = -\nu \sum_{k=1}^d \partial_k \left(\langle (u'_k \sum_{m,i=1}^d \partial_m u'_i \partial_m u'_i) \rangle_E - 2\frac{\nu}{\rho} \sum_{k=1}^d \partial_k \left(\langle \sum_{m=1}^d \partial_m p' \partial_m u'_k \rangle_E \right) \right)$ den turbulenten Transport,

- $D_\epsilon = \sum_{k=1}^d \partial_k (\nu \partial_k \epsilon)$ die viskose Diffusion und
- $\Gamma_\epsilon = 2\nu^2 \langle \sum_{i,k,m=1}^d \partial_k \partial_m u'_i \partial_k \partial_m u'_i \rangle_E$ die viskose Umwandlung (Vernichtung) turbulenter Energie in Wärme.

Die Terme $P_\epsilon^1, P_\epsilon^2, P_\epsilon^3$ sind Produktionsterme, die bei hohen Reynoldszahlen vernachlässigt werden können. Der Produktionsterm P_ϵ^4 und der Dissipationsterm Γ_ϵ haben die Eigenschaft, daß sie für $Re \rightarrow \infty$ beide gegen unendlich gehen, ihre Differenz aber endlich bleibt. Daher werden sie zusammen modelliert. Der Produktionsterm P_ϵ^4 wird proportional zur Produktion von k angenommen. Die Vernichtung Γ_ϵ wird proportional zu ϵ angenommen. Diese beiden Annahmen werden durch experimentelle Ergebnisse motiviert. Der Faktor $\frac{\epsilon}{k}$ erscheint aus Dimensionsgründen.

$$(2.94) \quad P_\epsilon^4 - \Gamma_\epsilon = (c_{\epsilon 1} P_k - c_{\epsilon 2} \epsilon) \frac{\epsilon}{k}.$$

In der mathematischen Herleitung der ϵ -Gleichung entsteht der Produktionsterm durch Anwendung der Annahme 2.5 für den Term $\langle \boldsymbol{\omega}' \otimes \boldsymbol{\omega}' \rangle$. Die Vernichtung turbulenter kinetischer Energie wird durch den Term $2\nu^2 \langle |\nabla \boldsymbol{\omega}'|^2 \rangle$ beschrieben und mit Annahme 2.9 modelliert. Der Term, der die turbulente Diffusion von ϵ beschreibt, wird modelliert durch

$$(2.95) \quad T_\epsilon = \nabla \left[\frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \nabla \epsilon \right].$$

Es sei wieder darauf hingewiesen, daß die Effekte von turbulenter und molekularer Diffusion im Satz 2.11 nicht getrennt werden. Damit erhält man als modellierte Gleichung für ϵ :

$$(2.96) \quad \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + (U \nabla) \epsilon = \nabla \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \nabla \epsilon \right] + (c_{\epsilon 1} P_k - c_{\epsilon 2} \epsilon) \frac{\epsilon}{k}.$$

2.7.3. Vergleich von mathematischer und physikalischer Herleitung

Gerade durch den Vergleich der Herleitung von Mohammadi und Pironneau in [MP94] mit der physikalischen Herleitung nach [Kes92] wird deutlich, daß man die von Mohammadi und Pironneau vorgelegte Darstellung — trotz vieler Vorbehalte — positiv auffassen kann. Denn sie unternehmen den schwierigen Versuch, stochastische Konzepte und Modelle zu finden, mit denen ein mathematisches Verständnis des k/ϵ -Turbulenzmodells gewonnen werden kann. Mohammadi und Pironneau geben einen recht schlüssigen Beweis. Das Problem dieses Beweises ist allerdings, daß sich die dort verwendeten Hilfsaussagen meist nicht mathematisch exakt und oft nur heuristisch begründen lassen. Dies kann von Mathematikern als große Schwäche gesehen werden. Ein Vorteil des Beweises in [MP94] liegt aber darin, daß man die physikalische Bedeutung der Terme der Gleichungen meist schon daraus erkennt, wie sie im Beweis abgeleitet werden, und man muß nicht erst hinterher eine physikalische Bedeutung in ihnen suchen, wie es bei dem physikalischen Beweis nötig ist. So führt die Anwendung des Satzes von Kesten zu den Termen der turbulenten Diffusion. Durch die geeignete Definition von homogener isotroper Turbulenz und das Argument, daß gewisse Randintegrale aufgrund von isotroper Turbulenz verschwinden, kann darauf verzichtet werden, gewisse Terme aufgrund physikalischer Erfahrungen als vernachlässigbar klein zu betrachten.

Der Vergleich mit der physikalischen Ableitung zeigt, daß die verwendeten mathematischen Konzepte geeignet waren, und er hilft weiter, falls die bisherige mathematische Theorie gewisse Details Aussagen noch nicht treffen kann, wie z.B. bei der expliziten Angabe von Vorfaktoren. Die weiteren Kapitel dieser Arbeit behandeln nun die numerische Lösung dieses Modells. Dabei stehen die Aspekte einer stabilen und effizienten Lösungsstrategie im Vordergrund.

2. Das k/ϵ -Turbulenzmodell

3. Semidiskretisierung und iterative Entkopplung und Linearisierung

Im vorangegangenen Abschnitt wurde das nichtlineare gekoppelte Gleichungssystem des instationären isothermen k/ϵ -Modells hergeleitet. Durch Hinzunahme der Temperaturgleichung gelangt man zum nicht-isothermen Modell. In diesem Abschnitt soll dieses Gleichungssystem auf dem räumlich kontinuierlichen Level semidiskretisiert und danach entkoppelt und linearisiert werden. Die Semidiskretisierung in der Zeit wird durch das implizite Eulerverfahren realisiert. Die Linearisierung geschieht dann mit der Methode der iterativen Entkopplung.

3.1. Zusammenstellung der Gleichungen

Zunächst soll das System von Gleichungen des nicht-isothermen k/ϵ -Modells zusammengestellt und die darin enthaltenen analytischen Schwierigkeiten bemerkt werden. Eine knappe Ableitung der Temperaturgleichung findet man in [MP94] S.4-6.

Definition 3.1

Als Konstanten für das $k-\epsilon$ -Modell werden verwendet :

C_1	C_2	C_μ	Pr_k	Pr_ϵ	C_t	Pr_t
1.44	1.92	0.09	1.0	1.3	0.8	0.9

Sei ν die molekulare Viskosität und sei a die molekulare Temperaturleitfähigkeit. Die effektiven Viskositäten ν_e , ν_k , ν_ϵ und die effektive Temperaturleitfähigkeit a_e seien definiert als

$$\begin{aligned} \nu_t &= c_\mu \frac{k^2}{\epsilon}, & \nu_e &= \nu + \nu_t, & \nu_k &= \nu + \frac{\nu_t}{Pr_k}, \\ \nu_\epsilon &= \nu + \frac{\nu_t}{Pr_\epsilon}, & a_t &= \frac{\nu_t}{Pr_t}, & a_e &= a + a_t. \end{aligned}$$

Als Produktionsterme bezeichnet man die Terme

$$\begin{aligned} P_k &= 2\nu_t(S(\mathbf{U}) : S(\mathbf{U})), & P_\epsilon &= C_1 \frac{\epsilon}{k}(P_k + G), \\ G &= C_t \beta \frac{\nu_t}{Pr_t} \mathbf{g} \cdot \nabla \Theta. \end{aligned}$$

Damit kann das System von Gleichungen des k/ϵ -Modells in der Standardformulierung, bezeichnet mit (V1), geschrieben werden als

$$\begin{aligned}
 \partial_t \mathbf{U} - \nabla \cdot (2\nu_e S(\mathbf{U})) + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} + \nabla P_{red} &= -\frac{2}{3} \nabla k \\
 \nabla \cdot \mathbf{U} &= 0 \\
 \partial_t \Theta + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \Theta - \nabla \cdot (a_e \nabla \Theta) &= \frac{\dot{q}^V}{c_p} \\
 \partial_t k + (\mathbf{U} \cdot \nabla) k - \nabla \cdot (\nu_k \nabla k) &= P_k + G - \epsilon \\
 \partial_t \epsilon + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \epsilon - \nabla \cdot (\nu_\epsilon \nabla \epsilon) + C_2 \frac{\epsilon^2}{k} &= C_1 \frac{\epsilon}{k} (P_k + G)
 \end{aligned}
 \tag{V1}$$

In der Temperatur-Gleichung bezeichnet \dot{q}^V die Wärmestromdichte und c_p die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck. In der folgenden Bemerkung soll auf die wesentlichen analytischen Schwierigkeiten dieses Gleichungssystems aufmerksam gemacht werden.

Bemerkung 3.1

1. Das Differentialgleichungssystem ist nichtlinear und gekoppelt. Die Nichtlinearität steckt in den Viskositäten ν_e , ν_k und ν_ϵ , in den Termen der rechten Seite und im Konvektionsterm $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}$ der Geschwindigkeitsgleichung. Die Kopplung erfolgt ebenfalls in den Viskositäten ν_e , ν_k und ν_ϵ und über das Geschwindigkeitsfeld in den konvektiven Termen.
2. Aus mathematischen und physikalischen Gründen sollten k und ϵ nicht-negative Werte annehmen. Den Ansatz einer mathematischen Analyse hierzu findet man in [MP94], S.63ff.
3. Mit der Beziehung $\epsilon = \frac{c_\mu}{\nu_t} k^2$ können die Gleichungen für k und ϵ alternativ formuliert werden als

$$\begin{aligned}
 \partial_t \mathbf{U} - \nabla \cdot (2\nu_e S(\mathbf{U})) + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{U} + \nabla P_{red} &= -\frac{2}{3} \nabla k, \\
 \nabla \cdot \mathbf{U} &= 0, \\
 \partial_t \Theta + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \Theta - \nabla \cdot (a_e \nabla \Theta) &= \frac{\dot{q}^V}{c_p}, \\
 \partial_t k + (\mathbf{U} \cdot \nabla) k - \nabla \cdot (\nu_k \nabla k) + \frac{c_\mu}{\nu_t} k^2 &= P_k + G, \\
 \partial_t \epsilon + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \epsilon - \nabla \cdot (\nu_\epsilon \nabla \epsilon) + C_2 \frac{\epsilon^2}{k} &= P_\epsilon.
 \end{aligned}
 \tag{V2}$$

Der Vorteil der Variante (V2) liegt darin, daß durch Einführung eines nichtnegativen Reaktionsterms in der k -Gleichung in der später hergeleiteten Variationsformulierung die Koerzitivität der entstehenden Bilinearform verstärkt wird. Durch diese Maßnahme soll das gesamte Gleichungssystem stabilisiert werden.

3.2. Zeitliche Semidiskretisierung

Zur Semidiskretisierung in der Zeit wird das implizite Eulerverfahren verwendet. Sei dazu $\{t_m\}_{m=1}^M$ eine Zerlegung des betrachteten Zeitintervalls $[0, T]$ mit $t_0 := 0$ und $t_M := T$ sowie $\tau_m = t_m - t_{m-1}$ die Zeitschrittweite. Ferner bezeichne $I_m := (t_{m-1}, t_m)$ das jeweilige Zeitintervall. Für eine Funktion F definiert man $F^m := F(t_m) := F(t_m, \cdot)$. Nach der Semidiskretisierung liest sich dann das Gleichungssystem (V1) als

$$(V1') \quad \begin{aligned} \frac{\mathbf{U}^m - \mathbf{U}^{m-1}}{\tau_m} - \nabla \cdot (2\nu_e^m S(\mathbf{U}^m)) + (\mathbf{U}^m \cdot \nabla) \mathbf{U}^m + \nabla P_{red}^m &= -\frac{2}{3} \nabla k^m \\ \nabla \cdot \mathbf{U}^m &= 0 \\ \frac{\Theta^m - \Theta^{m-1}}{\tau_m} + (\mathbf{U}^m \cdot \nabla) \Theta^m - \nabla \cdot (a_e^m \nabla \Theta^m) &= \frac{\dot{q}^{V^m}}{c_p} \\ \frac{k^m - k^{m-1}}{\tau_m} + (\mathbf{U}^m \cdot \nabla) k^m - \nabla \cdot (\nu_k^m \nabla k^m) &= P_k^m + G^m - \epsilon^m \\ \frac{\epsilon^m - \epsilon^{m-1}}{\tau_m} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \epsilon^m - \nabla \cdot (\nu_\epsilon^m \nabla \epsilon^m) + C_2 \frac{\epsilon^{m2}}{k^m} &= C_1 \frac{\epsilon^m}{k^m} (P_k^m + G^m) \end{aligned}$$

Die Gleichungen (V2) werden entsprechend nach der Semidiskretisierung zu

$$(V2') \quad \begin{aligned} \frac{\mathbf{U}^m - \mathbf{U}^{m-1}}{\tau_m} - \nabla \cdot (2\nu_e^m S(\mathbf{U}^m)) + (\mathbf{U}^m \cdot \nabla) \mathbf{U}^m + \nabla P_{red}^m &= -\frac{2}{3} \nabla k^m \\ \nabla \cdot \mathbf{U}^m &= 0 \\ \frac{\Theta^m - \Theta^{m-1}}{\tau_m} + (\mathbf{U}^m \cdot \nabla) \Theta^m - \nabla \cdot (a_e^m \nabla \Theta^m) &= \frac{\dot{q}^{V^m}}{c_p} \\ \frac{k^m - k^{m-1}}{\tau_m} + (\mathbf{U}^m \cdot \nabla) k^m - \nabla \cdot (\nu_k^m \nabla k^m) + \frac{c_\mu}{\nu_t} k^{m2} &= P_k^m + G^m \\ \frac{\epsilon^m - \epsilon^{m-1}}{\tau_m} + (\mathbf{U}^m \cdot \nabla) \epsilon^m - \nabla \cdot (\nu_\epsilon^m \nabla \epsilon^m) + C_2 \frac{\epsilon^{m2}}{k^m} &= P_\epsilon^m. \end{aligned}$$

Bemerkung 3.2

In PNS wird zur Raum-Zeit-Diskretisierung das Discontious-Galerkin-Verfahren DG(0) verwendet. Dadurch ergibt sich im wesentlichen dieselbe Variationsformulierung wie durch das in dieser Arbeit gewählte Vorgehen. Eine genauere zeitliche Auflösung kann in PNS durch Verwendung des DG(1)-Verfahrens erzielt werden.

3.3. Linearisierung und Entkopplung

Um ein gekoppeltes System von mehreren nichtlinearen (partiellen) Differentialgleichungen zu lösen, wird häufig ein Verfahren der iterativen Entkopplung verwendet. Abstrakt

formuliert ist folgendes Problem (Q) zu lösen:

$$\begin{aligned}
 (3.1) \quad & A_{(\mathbf{U}, P)}[(\mathbf{U}, P), \Theta, k, \epsilon](\mathbf{U}, P) = L_{(\mathbf{U}, P)}[(\mathbf{U}, P), \Theta, k, \epsilon], \\
 (3.2) \quad & A_{\Theta}[(\mathbf{U}, P), \Theta, k, \epsilon]\Theta = L_{\Theta}[(\mathbf{U}, P), \Theta, k, \epsilon], \\
 (3.3) \quad & A_k[(\mathbf{U}, P), \Theta, k, \epsilon]k = L_k[(\mathbf{U}, P), \Theta, k, \epsilon], \\
 (3.4) \quad & A_{\epsilon}[(\mathbf{U}, P), \Theta, k, \epsilon]\epsilon = L_{\epsilon}[(\mathbf{U}, P), \Theta, k, \epsilon].
 \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet $A_{\cdot}[(\mathbf{U}, P), \Theta, k, \epsilon]$ einen Operator, der von (\mathbf{U}, P) , Θ , k und ϵ abhängt. Die Grundidee dabei ist es, ausgehend von den Startwerten $(\mathbf{U}, P)^0$, Θ^0 , k^0 , ϵ^0 bzw. den Ergebnissen des letzten Iterationsschritts $(\mathbf{U}, P)^{i-1}$, Θ^{i-1} , k^{i-1} , ϵ^{i-1} neue Lösungen $(\mathbf{U}, P)^i$, Θ^i , k^i , ϵ^i gemäß folgendem Algorithmus zu erhalten:

$$\begin{aligned}
 (3.5) \quad & A_{(\mathbf{U}, P)}[(\mathbf{U}, P)^{i-1}, \Theta^{i-1}, k^{i-1}, \epsilon^{i-1}](\mathbf{U}, P)^i = L_{(\mathbf{U}, P)}[(\mathbf{U}, P)^{i-1}, \Theta^{i-1}, k^{i-1}, \epsilon^{i-1}], \\
 (3.6) \quad & A_{\Theta}[(\mathbf{U}, P)^i, \Theta^{i-1}, k^{i-1}, \epsilon^{i-1}]\Theta^i = L_{\Theta}[(\mathbf{U}, P)^i, \Theta^{i-1}, k^{i-1}, \epsilon^{i-1}], \\
 (3.7) \quad & A_k[(\mathbf{U}, P)^i, \Theta^i, k^{i-1}, \epsilon^{i-1}]k^i = L_k[(\mathbf{U}, P)^i, \Theta^i, k^{i-1}, \epsilon^{i-1}], \\
 (3.8) \quad & A_{\epsilon}[(\mathbf{U}, P)^i, \Theta^i, k^i, \epsilon^{i-1}]\epsilon^i = L_{\epsilon}[(\mathbf{U}, P)^i, \Theta^i, k^i, \epsilon^{i-1}].
 \end{aligned}$$

Dabei kennzeichnet ein hochgestellter Index $i - 1$ die Verwendung eines alten Wertes aus dem letzten Iterationsschritt und ein hochgestellter Index i die Verwendung eines gerade berechneten Wertes aus dem aktuellen Iterationsschritt.

Bemerkung 3.3

Schreibt man ganz formal $((\mathbf{U}, P), \Theta, k, \epsilon)^T = (x_1, \dots, x_D)^T$ mit $D = d + 4$, so erinnert das vorgestellte Iterationsschema an das Einzelschrittverfahren nach Gauß-Seidel, da für die Komponenten x_{n+1}^i die schon berechneten neuen Werte x_1^i, \dots, x_n^i benutzt werden.

3.3.1. Bisherige Realisierung von (V1) in PNS für den m -ten Zeitschritt

Im Programm-Paket PNS wird bisher die Standardformulierung (V1) der Gleichungen des k/ϵ -Modells gewählt. Die zugehörige Semidiskretisierung ist durch die Gleichungen (V1') gegeben. In diesem Unterabschnitt soll das in PNS bisher implementierte Iterationsschema beschrieben werden.

Um genau zu spezifizieren, aus welchem Zeit- bzw. Iterationsschritt ein Wert stammt, wird folgende Notation eingeführt : Der erste der beiden hochgestellten Indizes bezeichnet den Zeitschritt, der zweite den Iterationsschritt. Außerdem werden folgende Bezeichnungen

eingeführt :

$$\begin{aligned}
 \nu_t^m(k^{m,i}, \epsilon^{m,i}) &= c_\mu \frac{k^{(m,i)^2}}{\epsilon^{(m,i)}} , \\
 \nu_e^m(k^{m,i}, \epsilon^{m,i}) &= \nu + \nu_t^m(k^{m,i}, \epsilon^{m,i}) , \\
 \nu_k^m(k^{m,i}, \epsilon^{m,i}) &= \nu + \frac{\nu_t^m(k^{m,i}, \epsilon^{m,i})}{Pr_k} , \\
 \nu_\epsilon^m(k^{m,i}, \epsilon^{m,i}) &= \nu + \frac{\nu_t^m(k^{m,i}, \epsilon^{m,i})}{Pr_\epsilon} , \\
 P_k^m(k^{m,i}, \epsilon^{m,i}, \mathbf{U}^{m,i}) &= 2\nu_t^m(k^{m,i}, \epsilon^{m,i})(S(\mathbf{U}^{m,i}) : S(\mathbf{U}^{m,i})) , \\
 P_\epsilon^m(k^{m,i}, \epsilon^{m,i}, \mathbf{U}^{m,i}) &= \frac{\epsilon^{m,i}}{k^{m,i}} c_1 P_k^m(k^{m,i}, \epsilon^{m,i}, \mathbf{U}^{m,i}) .
 \end{aligned}$$

Gegeben seien $k^{m,i-1}$, $\epsilon^{m,i-1}$ und $\mathbf{U}^{m,i-1}$ als Resultat des letzten Durchlaufs der Iterationsschleife. Als Startwert einer Iterationsschleife verwendet man das Ergebnis des letzten Zeitschritts.

Bisherige Realisierung von (V1) in PNS

- (1) Setze $it_{dlc} \leftarrow 1$.
- (2) Setze $i \leftarrow it_{dlc}$ und aktualisiere die turbulente Viskosität $\nu_t^m \leftarrow \nu_t^m(k^{m,i-1}, \epsilon^{m,i-1})$.
- (3) Löse linearisierte Navier-Stokes-Gleichung.

(3.1) Löse

$$\frac{\mathbf{U}^{m,i} - \mathbf{U}^{m-1}}{\tau_m} + (\mathbf{U}^{m,i-1} \cdot \nabla) \mathbf{U}^{m,i} + \nabla \cdot (2(\nu + \nu_t^m) S(\mathbf{U}^{m,i})) + \nabla P_{red}^{m,i} = \mathbf{f} - \frac{2}{3} \nabla k^{m,i-1} .$$

(3.2) Stop-Kriterium 1 für $\mathbf{U}^{m,i}$:

$$\frac{\|\mathbf{U}^{m,i} - \mathbf{U}^{m,i-1}\|_0}{\|\mathbf{U}^{m,i}\|_0} < \mu_U .$$

(4) Löse k - und ϵ -Gleichung.

(4.1) Aktualisiere die turbulenten Viskositäten und die Produktionsterme

- (a) $\nu_k^m \leftarrow \nu_k^m(k^{m,i-1}, \epsilon^{m,i-1})$,
- (b) $\nu_\epsilon^m \leftarrow \nu_\epsilon^m(k^{m,i-1}, \epsilon^{m,i-1})$,
- (c) $P_k^m \leftarrow P_k^m(k^{m,i-1}, \epsilon^{m,i-1}, \mathbf{U}^{m,i})$.

(4.2) Löse

$$\frac{k^{m,i} - k^{m-1}}{\tau_m} + (\mathbf{U}^{m,i} \cdot \nabla) k^{m,i} - \nabla \cdot (\nu_k^m \nabla k^{m,i}) = P_k^m - \epsilon^{m,i-1} .$$

Aktualisiere $P_k^m \leftarrow P_k^m(k^{m,i}, \epsilon^{m,i-1}, \mathbf{U}^{m,i})$ und löse

$$\frac{\epsilon^{m,i} - \epsilon^{m-1}}{\tau_m} + (\mathbf{U}^{m,i} \cdot \nabla) \epsilon^{m,i} - \nabla \cdot (\nu_\epsilon^m \nabla \epsilon^{m,i}) + c_2 \frac{\epsilon^{m,i-1}}{k^{m,i}} \epsilon^{m,i} = c_1 \frac{\epsilon^{m,i-1}}{k^{m,i}} P_k^m .$$

(4.3) Stop-Kriterium 2 bzw. 3 für k bzw. ϵ :

$$\frac{\|k^{m,i} - k^{m,i-1}\|_0}{\|k^{m,i}\|_0} < \mu_k,$$

$$\frac{\|\epsilon^{m,i} - \epsilon^{m,i-1}\|_0}{\|\epsilon^{m,i}\|_0} < \mu_\epsilon.$$

(5) Stop-Kriterium für die Linearisierungsschleife :

Falls $it_{dlc} < max_{dlc}$ und nicht alle Stop-Kriterien (1 – 3) erfüllt, dann setze $it_{dlc} \leftarrow it_{dlc} + 1$ und gehe zu Schritt (2). Anderenfalls gehe zum nächsten Zeitschritt.

Bemerkung 3.4

Durch die Schreibweise $x \leftarrow y$ soll eine Wertzuweisung symbolisiert werden : Weise der Variablen x den in der Variablen y gespeicherten Wert zu.

Dieser Algorithmus verfolgt die einfachste iterative Lösungsstrategie. Innerhalb eines Zeitschrittes werden alle Gleichungen gleichberechtigt nacheinander in der Linearisierungsschleife gelöst. Der Linearisierungsschritt wird im folgenden mit it_{dlc} bezeichnet. Die maximale Anzahl von Linearisierungsschritten pro Zeitschritt wird mit max_{dlc} bezeichnet.

Bemerkung 3.5

Bei nicht-isothermen Rechnungen kann die Temperaturgleichung sowohl nach der Geschwindigkeitsgleichung als auch nach der ϵ -Gleichung gelöst werden.

Bemerkung 3.6

Es sei bemerkt, daß in dieser Variante nach der Lösung der k -Gleichung die Größe ν_t zur Lösung der ϵ -Gleichung nicht mit der aktuellen Lösung der k -Gleichung neu berechnet wird.

3.3.2. Realisierung von (V2) bei Codina/Soto

Da eine Advektions-Diffusions-Gleichung um etwa eine Größenordnung günstiger zu lösen ist als eine Navier-Stokes-Gleichung, könnte ein anderer, von Codina und Soto vorgeschlagener Iterationsalgorithmus schneller zu auskonvergierten Lösungen führen.

Gegeben seien $\mathbf{U}^{m,i-1}$, $\Theta^{m,i-1}$, $k^{m,i-1}$ und $\epsilon^{m,i-1}$ als Resultat des letzten Durchlaufs der Iterationsschleife. Als Startwert einer Iterationsschleife verwendet man das Ergebnis des letzten Zeitschritts. Dann lautet der Algorithmus in Anlehnung an Codina-Soto :

Realisierung von (V2) in Anlehnung an Codina/Soto für den m -ten Zeitschritt

(1) Setze $it_{dlc} \leftarrow 1$.

(2) Setze $i \leftarrow it_{dlc}$. Löse linearisierte Navier-Stokes-Gleichung

$$\frac{\mathbf{U}^{m,i} - \mathbf{U}^{m-1}}{\tau_m} + (\mathbf{U}^{m,i-1} \cdot \nabla) \mathbf{U}^{m,i} + \nabla \cdot (2(\nu + \nu_t^m) S(\mathbf{U}^{m,i})) + \nabla P^{m,i} = f - \frac{2}{3} \nabla k^{m,i-1}.$$

(3) Stop-Kriterium 1 für \mathbf{U}

$$\frac{\|\mathbf{U}^{m,i} - \mathbf{U}^{m,i-1}\|_0}{\|\mathbf{U}^{m,i}\|_0} < \mu_U.$$

(4) Setze $it_L \leftarrow 1$. Löse Block aus k - und ϵ -Gleichung.

(4.1) Aktualisiere die Produktionsterme bzw. Viskositäten

- $P_k^m \leftarrow P_k^m(k^{m,i-1}, \epsilon^{m,i-1}, \mathbf{U}^{m,i})$,
- $P_\epsilon^m \leftarrow P_\epsilon^m(k^{m,i-1}, \epsilon^{m,i-1}, \mathbf{U}^{m,i})$,
- $\nu_t^m \leftarrow \nu_t^m(k^{m,i-1}, \epsilon^{m,i-1})$,
- $\nu_k^m \leftarrow \nu_k^m(k^{m,i-1}, \epsilon^{m,i-1})$,
- $\nu_\epsilon^m \leftarrow \nu_\epsilon^m(k^{m,i-1}, \epsilon^{m,i-1})$.

(4.2) Setze $it_{k\epsilon} \leftarrow 1$. Wiederhole bis zur Konvergenz von L

(4.2.1) Setze $i \leftarrow it_{k\epsilon}$ und löse (mit Newton-Raphson-Methode linearisierte) k -Gleichung (bis Konvergenz erreicht ist)

$$\begin{aligned} \frac{k^{m,i} - k^{m-1}}{\tau_m} + (\mathbf{U}^{m,i} \cdot \nabla)k^{m,i} - \nabla \cdot (\nu_k^m \nabla k^{m,i}) \\ + \frac{c_\mu}{\nu_t^m} (2k^{(m,i-1)}k^{(m,i)} - k^{(m,i-1)^2}) = P_k^m. \end{aligned}$$

(4.2.2) Stop-Kriterium 2 für k

$$\frac{\|k^{m,i} - k^{m,i-1}\|_0}{\|k^{m,i}\|_0} < \mu_k.$$

Falls Stop-Kriterium 2 erfüllt ist oder $it_{k\epsilon} = \max_{k\epsilon}$, setze $it_{k\epsilon} \leftarrow 1$ und gehe zu (4.2.3). Sonst setze $it_{k\epsilon} \leftarrow it_{k\epsilon} + 1$ und gehe zu (4.2.1).

(4.2.3) Aktualisiere $\nu_t^m \leftarrow \nu_t^m(k^{m,i}, \epsilon^{m,i-1})$, $\nu_\epsilon^m \leftarrow \nu + \frac{\nu_t^m}{Pr_\epsilon}$,
 $P_\epsilon^m \leftarrow P_\epsilon^m(k^{m,i}, \epsilon^{m,i-1}, \mathbf{U}^{m,i})$.

(4.2.4) Setze $i \leftarrow it_{k\epsilon}$ und löse ϵ -Gleichung (bis Konvergenz erreicht ist)

$$\begin{aligned} \frac{\epsilon^{m,i} - \epsilon^{m-1}}{\tau_m} + (\mathbf{U}^{m,i} \cdot \nabla)\epsilon^{m,i} - \nabla \cdot (\nu_\epsilon^m \nabla \epsilon^{m,i}) \\ + \frac{c_2}{k^{m,i}} (2\epsilon^{(m,i-1)}\epsilon^{(m,i)} - \epsilon^{(m,i-1)^2}) = P_\epsilon^m. \end{aligned}$$

(4.2.5) Stop-Kriterium 3 für ϵ

$$\frac{\|\epsilon^{m,i} - \epsilon^{m,i-1}\|_0}{\|\epsilon^{m,i}\|_0} < \mu_\epsilon.$$

Falls Stop-Kriterium 3 erfüllt ist oder $it_{k\epsilon} = \max_{k\epsilon}$, setze $it_{k\epsilon} \leftarrow 1$ und gehe zu (4.2.6). Sonst setze $it_{k\epsilon} \leftarrow it_{k\epsilon} + 1$ und gehe zu (4.2.4).

(4.2.6) Berechne $L^{m,i} = c_\mu \frac{k^{m,i \frac{3}{2}}}{\epsilon^{m,i}}$.

(4.2.7) Update

- $\nu_t^m \leftarrow \nu_t^m(k^{m,i}, \epsilon^{m,i})$,
- $\nu_k^m \leftarrow \nu_k^m(k^{m,i}, \epsilon^{m,i})$,
- $P_k^m \leftarrow P_k^m(k^{m,i}, \epsilon^{m,i}, \mathbf{U}^{m,i})$,
- $P_\epsilon^m \leftarrow P_\epsilon^m(k^{m,i}, \epsilon^{m,i}, \mathbf{U}^{m,i})$.

(4.2.8) Prüfe auf Konvergenz von L (Stopkriterium 4)

$$\frac{\|L^{m,i} - L^{m,i-1}\|_0}{\|L^{m,i}\|_0} < \mu_L.$$

Stopkriterium für die Linearisierungsschleife :

Falls Stopkriterium 1 und Stopkriterium 4 erfüllt ist oder falls Stop-Kriterium 1 erfüllt ist und $it_L = \max_L$ ist oder falls $it_{dc} = \max_{dc}$, so gehe zum nächsten Zeitschritt. Falls Stopkriterium 4 aber nicht Stop-Kriterium 1 erfüllt ist oder falls $it_L = \max_L$ und Stop-Kriterium 1 nicht erfüllt, setze $it_{dc} \leftarrow it_{dc} + 1$ und gehe zu (2). Falls Stopkriterium 4 nicht erfüllt ist, setze $it_L \leftarrow it_L + 1$ und gehe zu (4.2.1).

In der Linearisierungsschleife wird zunächst einmal die Geschwindigkeitsgleichung gelöst. Dann wird der Block aus k - und ϵ -Gleichung für diese erhaltene Lösung der Geschwindigkeitsgleichung ausiteriert. Der Linearisierungsschritt wird wieder mit it_{dc} bezeichnet. Die maximale Anzahl von Linearisierungsschritten pro Zeitschritt wird mit \max_{dc} bezeichnet.

Bemerkung 3.7

Bei nicht-isothermen Rechnungen kann die Temperaturgleichung sowohl nach der Geschwindigkeitsgleichung und vor dem k - ϵ -Block als auch nach dem k - ϵ -Block gelöst werden.

Nun soll das Iterationsschema für den k - ϵ -Block näher erläutert werden. Die Nichtlinearität der k - bzw. ϵ -Gleichung wird einzeln ausiteriert. Der zugehörige Iterationsschritt wird mit $it_{k\epsilon}$ bezeichnet. Die maximale Anzahl von Iterationen sei $\max_{k\epsilon}$. Nachdem die k - und die ϵ -Gleichung jeweils einmal ausiteriert worden sind, wird als Abbruchkriterium für den k - ϵ -Block die charakteristische Länge, die in Bemerkung 2.11 erwähnt wurde,

$$L = c_\mu \frac{k^{\frac{3}{2}}}{\epsilon}$$

auf Konvergenz getestet. Der jeweilige Iterationsschritt des k - ϵ -Blocks wird mit it_L bezeichnet, die maximale Anzahl von Iterationen sei \max_L .

Bemerkung 3.8

1. Man beachte, daß ν_t und P_k während der iterativen Lösung der k -Gleichung konstant gehalten werden. Analog werden ν_t und P_ϵ während der iterativen Lösung der ϵ -Gleichung konstant gehalten.
2. Nachdem die k - bzw. ϵ -Gleichung ausiteriert worden ist, werden ν_t und der jeweilige Produktionsterm mit der gerade berechneten Lösung für k bzw. ϵ neu berechnet, d.h. ν_t und die Produktionsterme werden sozusagen ständig aktualisiert.

4. Finite-Elemente Diskretisierung und Stabilisierung

Um die hergeleiteten Variationsprobleme numerisch lösen zu können, ist noch eine Diskretisierung bezüglich des Ortes erforderlich. Beim direkten Übergang zum diskreten Level erhält man jedoch keine numerisch stabilen Verfahren. Daher müssen verschiedene Stabilisierungsterme eingeführt werden. Räumliche Diskretisierung und Stabilisierung sind Inhalt dieses Kapitels.

4.1. Reduktion auf Modellgleichungen

Bei den linearisierten Gleichungen für Θ , k und ϵ handelt es sich um skalare Konvektions-Diffusionsgleichungen. Daher soll die Variationsformulierung für die folgende Modellgleichung einer Konvektions-Diffusionsgleichung hergeleitet werden :

$$(4.1) \quad -\nabla \cdot (\nu \nabla) u + (\mathbf{b} \cdot \nabla) u + cu = f.$$

Die Definition der Terme ν , \mathbf{b} , c und f für die Θ , k und ϵ -Gleichung entnimmt man den folgenden Tabellen. Sie folgt unmittelbar aus den in den Abschnitten 3.3.1 und 3.3.2 aufgestellten Gleichungen. Dabei wird die in Abschnitt 3.3.1 eingeführte Notation benutzt, wonach der erste der hochgestellten Indizes den Zeitschritt und der zweite den Iterationsschritt bezeichnet.

Für das Verfahren (V1) gilt:

Gleichung	u	ν	\mathbf{b}	cu	f
Θ -Gleichung	$\Theta^{m,i}$	a_e	$\mathbf{U}^{m,i}$	$\frac{1}{\tau_m} \Theta^{m,i}$	$\frac{\dot{q}^V}{c_p} + \frac{1}{\tau_m} \Theta^{m-1}$
k -Gleichung	$k^{m,i}$	ν_k	$\mathbf{U}^{m,i}$	$\frac{1}{\tau_m} k^{m,i}$	$(P_k + G) - \epsilon^{m,i-1} + \frac{1}{\tau_m} k^{m-1}$
ϵ -Gleichung	$\epsilon^{m,i}$	ν_ϵ	$\mathbf{U}^{m,i}$	$C_2 \frac{\epsilon^{m,i-1}}{k^{m,i}} \epsilon^{m,i} + \frac{1}{\tau_m} \epsilon^{m,i}$	$C_1 \frac{\epsilon^{m,i-1}}{k^{m,i}} (P_k + G) + \frac{1}{\tau_m} \epsilon^{m-1}$

Für das Schema (V2) gilt:

Gleichung	u	ν	\mathbf{b}	cu	f
Θ -Gleichung	$\Theta^{m,i}$	a_e	$\mathbf{U}^{m,i}$	$\frac{1}{\tau_m} \Theta^{m,i}$	$\frac{\dot{q}^V}{c_p} + \frac{1}{\tau_m} \Theta^{m-1}$
k -Gleichung	$k^{m,i}$	ν_k	$\mathbf{U}^{m,i}$	$2 \frac{c_\mu}{\nu_t} k^{m,i-1} k^{m,i} + \frac{1}{\tau_m} k^{m,i}$	$(P_k + G) + \frac{c_\mu}{\nu_t} k^{(m,i-1)^2} + \frac{1}{\tau_m} k^{m-1}$
ϵ -Gleichung	$\epsilon^{m,i}$	ν_ϵ	$\mathbf{U}^{m,i}$	$2C_2 \frac{\epsilon^{m,i-1}}{k^{m,i}} \epsilon^{m,i} + \frac{1}{\tau_m} \epsilon^{m,i}$	$C_1 \frac{\epsilon^{m,i-1}}{k^{m,i}} (P_k + G) + C_2 \frac{\epsilon^{m,i-1^2}}{k^{m,i}} + \frac{1}{\tau_m} \epsilon^{m-1}$

Bemerkung 4.1

Nach den Bemerkungen 3.6 und 3.8 kann für die Viskositäten und die Produktionsterme auf die hochgestellten Indizes ab jetzt verzichtet werden.

Die linearisierte Navier-Stokes-Gleichung ist im wesentlichen eine um einen Reaktionsterm modifizierte Oseen-Gleichung mit nichtkonstanter Viskosität.

$$(4.2) \quad \begin{cases} -\nabla \cdot (\nu \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{u} + c\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \end{cases}$$

Die Definition der Terme entnimmt man folgender Tabelle

Gleichung	\mathbf{u}	ν	\mathbf{a}	$c\mathbf{u}$	p	\mathbf{f}
Navier-Stokes-Gleichung	$\mathbf{U}^{m,i}$	ν_e	$\mathbf{U}^{m,i-1}$	$\frac{1}{\tau_m} \mathbf{U}^{m,i}$	$P^{m,i}$	$\mathbf{f} + \frac{1}{\tau_m} \mathbf{U}^{m-1}$

Bemerkung 4.2

Vom physikalischen Standpunkt aus betrachtet ist die in Gleichung (4.2) angegebene Oseen-Gleichung nur im inkompressiblen Fall ($\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$) mit der linearisierten Navier-Stokes-Gleichung aus dem letzten Kapitel äquivalent. Denn in diesem Fall gilt $\nabla \cdot (\nabla \mathbf{u}) = \frac{1}{2} \nabla \cdot (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u})$.

4.2. Schwache Formulierung

Im folgenden sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$) ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-stetigem Rand $\Gamma := \partial\Omega$. Seien $\Gamma_D, \Gamma_N \subset \Gamma$ mit $\Gamma_D \cup \Gamma_N = \Gamma$ und $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$.

4.2.1. Variationsformulierung für das Konvektions-Diffusionsproblem

Zunächst betrachten wir folgendes allgemeine Konvektion-Diffusions-Problem :

$$(ADR1) \quad \begin{cases} -\nabla \cdot (\nu \nabla u) + (\mathbf{b} \cdot \nabla) u + cu = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \Gamma_D \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{auf } \Gamma_N. \end{cases}$$

Bemerkung 4.3

Die Variationsformulierung soll zunächst für homogene Dirichlet-Daten und inhomogene Neumann-Daten abgeleitet werden. Im FEM-Code PNS werden aber für Θ, k und ϵ Wandfunktionen verwendet. Dies entspricht der Vorgabe inhomogener Dirichlet-Daten. Daher wird am Ende dieses Abschnitts gezeigt, wie der Fall inhomogener Dirichlet-Daten auf den Fall homogener Dirichlet-Daten zurückgeführt werden kann.

Annahme 4.1

Der Diffusionskoeffizient ν sei stückweise konstant mit $\nu \geq \nu_0 > 0$. Von den anderen Daten wird verlangt

$$f \in L^2(\Omega), c \in L^\infty(\Omega), \mathbf{b} \in (W^{1,\infty}(\Omega))^d, c(x) - \frac{1}{2} \nabla \cdot \mathbf{b} \geq 0 \text{ f.ü. in } \Omega.$$

Nun soll eine Variationsformulierung dieses Problems gegeben werden.

Nach Multiplikation der Differentialgleichung mit einer beliebigen Testfunktion v aus $C^\infty(\Omega)$ mit $v \equiv 0$ auf Γ_D und anschließender Integration über das Gebiet Ω ergibt sich

$$-\int_{\Omega} \nabla \cdot (\nu \nabla u) v \, dx + \int_{\Omega} ((\mathbf{b} \cdot \nabla)u + cu)v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx.$$

Nach partieller Integration des elliptischen Hauptteils folgt daraus

$$-\int_{\Gamma_D} \nu \frac{\partial u}{\partial n} v \, ds - \int_{\Gamma_N} \nu \frac{\partial u}{\partial n} v \, ds + \int_{\Omega} \nu \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} ((\mathbf{b} \cdot \nabla)u + cu)v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx.$$

Einarbeitung der Randbedingung ergibt schließlich

$$\int_{\Omega} \nu \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} ((\mathbf{b} \cdot \nabla)u + cu)v \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma_N} \nu g v \, ds.$$

Man kann zeigen, daß der Raum $C_{0,D}^\infty(\Omega) = \{v \in C^\infty(\Omega) \mid v = 0 \text{ auf } \Gamma_D\}$ dicht im Hilbertraum $H_{0,D}^1(\Omega) = \{v \text{ in } H^1(\Omega) \mid \gamma v|_{\Gamma_D} \equiv 0\}$ liegt. Dabei ist γ der Spuroperator, der unten in Definition 4.2 eingeführt wird. So gelangt man zur

Definition 4.1

Die verallgemeinerte Aufgabenstellung des Konvektions-Diffusions-Problem (ADR) lautet:

$$(ADR) \quad \begin{cases} \text{Finde } u \in V := \{v \text{ in } H^1(\Omega) \mid \gamma v|_{\Gamma_D} \equiv 0\}, \text{ so daß} \\ b_G(u, v) = l_G(v) \quad \forall v \in V \text{ ist.} \end{cases}$$

Dabei ist

$$(4.3) \quad b_G(u, v) = \int_{\Omega} \nu \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} ((\mathbf{b} \cdot \nabla)u + cu)v \, dx \quad \text{und}$$

$$(4.4) \quad l_G(v) = \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma_N} \nu g v \, ds.$$

An dieser Stelle soll eine Aussage über die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung angegeben werden.

Satz 4.1

1. Unter der Annahme 4.1 existiert im Falle $\mu(\Gamma_D) \neq 0$ eine und nur eine Lösung von (ADR).
2. Es gelten Annahme 4.1 und zusätzlich $\mathbf{b} \cdot \mathbf{n} \geq 0$ auf Γ_N , wobei bei den Ungleichungen mindestens einmal $>$ vorkommt. Dann existiert für $\mu(\Gamma_D) = 0$ eine und nur eine Lösung von (ADR).

Beweis:

Die erste Aussage folgt aus [GR94] Lemma 3.6 unter Ausnutzung von [Tri72] Satz 28.5, für die zweite Aussage vgl. [Ott99] S.36. \diamond

Im FEM-Code PNS werden aber für Θ , k und ϵ Wandfunktionen verwendet, die in Abschnitt 2.6.4 angegeben wurden. Dies entspricht der Vorgabe inhomogener Dirichlet-Daten. Nun soll abschließend gezeigt werden, wie sich der Fall inhomogener Dirichlet-Daten auf den Fall homogener Dirichlet-Daten zurückführen läßt. Dafür muß die sog. Spurabbildung eingeführt werden.

Definition 4.2

Die Spurabbildung γ ist erklärt als

$$\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega).$$

Die Spurabbildung ist eine lineare, stetige Abbildung, vgl. [Alt92] Satz A 5.7. Für den Fall inhomogener Dirichletscher Randbedingungen $u = h$ auf Γ_D sei $\tilde{h} \in H^1(\Omega)$ eine geeignete Fortsetzung, für die $\gamma\tilde{h} = h$ gilt. Wir betrachten nun $U = u - \tilde{h} \in V$. Wegen $u = U + \tilde{h}$ lautet die entsprechende verallgemeinerte Aufgabenstellung für U dann

$$(ADR) \quad \begin{cases} \text{Finde } U \in V := \{v \text{ in } H^1(\Omega) \mid \gamma v|_{\Gamma_D} \equiv 0\}, \text{ so daß} \\ b_G(U, v) = l_G(v) - b_G(\tilde{h}, v) \quad \forall v \in V \text{ ist.} \end{cases}$$

Damit wurde das Problem auf ein schon bekanntes zurückgeführt. Die Funktion h ist dabei durch die in Abschnitt 2.6.4 angegebenen Wandfunktionen gegeben.

In PNS wird aber eine andere Variante verwendet. Die Bedingung $u = h$ auf dem Rand wird im schwachen Sinne aufgefaßt. Sei W der durch

$$W = \gamma(V)$$

definierte Unterraum von $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$. Dann wird die Randbedingung $u = h$ formuliert als Forderung, daß

$$\int_{\partial\Omega} (u - h)v ds = 0 \quad \text{für alle } v \in W$$

gilt. Somit ergibt sich :

Definition 4.3

Die verallgemeinerte Aufgabenstellung des Konvektions-Diffusions-Problem (ADR_i) für inhomogene Dirichlet-Bedingungen lautet:

$$(ADR_i) \quad \begin{cases} \text{Finde } u \in H^1(\Omega), \text{ so daß} \\ b_G(u, v) = l_G(v) \quad \forall v \in H^1(\Omega) \text{ ist.} \end{cases}$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} b_G(u, v) &= \int_{\Omega} \nu \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} ((\mathbf{b} \cdot \nabla)u + cu)v \, dx + \int_{\Gamma_D} \gamma(u)\gamma(v) \, ds \quad \text{und} \\ l_G(v) &= \int_{\Omega} f v \, dx + \int_{\Gamma_N} \nu g v \, ds + \int_{\Gamma_D} h \gamma(v) \, ds. \end{aligned}$$

4.2.2. Variationsformulierung für das Oseen-Problem

In Abschnitt 2.6.3 wurde beschrieben, wie die Navier-Stokes-Gleichungen in Wandnähe behandelt werden: In der Grenzschicht wird \mathbf{u} analytisch gesetzt z.B. nach den Gleichungen (2.76) bzw. (2.77). Als Randbedingung wird dann gefordert, daß der Übergang von der Grenzschicht ins Gebietsinnere glatt ist, vgl. Gleichung (2.80).

Zunächst soll die Variationsformulierung für das Oseen-Problem für homogene Dirichlet-Randbedingungen hergeleitet werden. Darauf aufbauend wird dann im Anschluß die Variationsformulierung für die in Gleichung (2.80) spezifizierte Randbedingung angegeben. Seien also Ω , Γ , Γ_D und Γ_N wie oben. Wir betrachten nun folgendes Oseen-Problem

$$(Os1) \quad \begin{cases} -\nabla \cdot (\nu \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{u} + c \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{in } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{in } \Omega \\ \mathbf{u} = 0 & \text{auf } \Gamma \end{cases}$$

Annahme 4.2

Der Diffusionskoeffizient ν sei stückweise konstant mit $\nu \geq \nu_0 > 0$. An die übrigen Daten werden folgende Forderungen gestellt

$$f \in (L^2(\Omega))^d, \quad c \in L^\infty(\Omega) \text{ mit } c(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega, \quad \mathbf{a} \in (W^{1,\infty}(\Omega))^d \text{ mit } \nabla \cdot \mathbf{a} = 0.$$

Nun soll für das Oseen-Problem eine Variationsformulierung hergeleitet werden.

Multiplikation der i -ten Geschwindigkeitsgleichung mit einer beliebigen Testfunktion $v_i \in C_0^\infty(\Omega)$ und anschließende Integration über das Gebiet Ω liefern

$$(4.5) \quad \int_{\Omega} ((\mathbf{a} \cdot \nabla) u_i + c u_i) v_i dx + \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x_i} v_i dx - \int_{\Omega} \nabla \cdot (\nu \nabla u_i) v_i dx = \int_{\Omega} f_i v_i dx.$$

Partielle Integration der Terme mit den höchsten Ableitungen, das sind Δu_i und $\frac{\partial p}{\partial x_i}$, und Einarbeitung der Randbedingungen liefert

$$(4.6) \quad \int_{\Omega} ((\mathbf{a} \cdot \nabla) u_i + c u_i) v_i dx - \int_{\Omega} p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} dx + \nu \int_{\Omega} \nabla u_i \cdot \nabla v_i dx = \int_{\Omega} f_i v_i dx.$$

Bei Summation über $i = 1, \dots, d$ folgt

$$(4.7) \quad \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} ((\mathbf{a} \cdot \nabla) u_i + c u_i) v_i dx - \int_{\Omega} p \sum_{i=1}^d \frac{\partial v_i}{\partial x_i} dx + \nu \int_{\Omega} \sum_{i=1}^d \nabla u_i \cdot \nabla v_i dx = \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} f_i v_i dx.$$

Multiplikation der Kontinuitätsgleichung mit einer Testfunktion $q \in L^2(\Omega)$ und anschließende Integration über das Gebiet liefert

$$(4.8) \quad \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) q dx = 0.$$

Somit gelangt man unter Berücksichtigung der Dichtheit von $C_0^\infty(\Omega)$ im Hilbertraum $H_0^1(\Omega)$ zur folgenden

Definition 4.4

Es gelte die Annahme 4.2. Mit den Bezeichnungen

$$(4.9) \quad a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} dx + \int_{\Omega} ((\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{u} + c \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} dx ,$$

$$(4.10) \quad b(\mathbf{v}, p) = - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v} dx ,$$

$$(4.11) \quad L(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx$$

sowie

$$(4.12) \quad \mathbf{U} = (\mathbf{u}, p), \quad \mathbf{V} = (\mathbf{v}, q),$$

$$(4.13) \quad \mathcal{A}(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) - b(\mathbf{u}, q),$$

$$(4.14) \quad \mathcal{L}(\mathbf{V}) = L(\mathbf{v})$$

lautet die verallgemeinerte Aufgabenstellung des Oseen-Problems

$$(Os) \quad \begin{cases} \text{Finde } \mathbf{U} = (\mathbf{u}, p) \in V \times Q := (H_0^1(\Omega))^d \times L_0^2(\Omega), \text{ so da\ss} \\ \mathcal{A}(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = \mathcal{L}(\mathbf{V}) \quad \forall \mathbf{V} \in V \times Q \text{ gilt.} \end{cases}$$

Bemerkung 4.4

Die Inkompressibilitätsbedingung kann man als Nebenbedingung ansehen. Arbeitet man sie in den Raum $(H_0^1(\Omega))^d$ ein, so gelangt man zum abgeschlossenen Unterraum $(H_{div}^1(\Omega))^d = \{\mathbf{v} \in (H_0^1(\Omega))^d \mid \nabla \cdot \mathbf{v} = 0\}$. Für $\mathbf{v} \in (H_{div}^1(\Omega))^d$ verschwindet der Term $(p, \nabla \cdot \mathbf{v})_{\Omega}$, so daß der Druck p in der Variationsformulierung nicht mehr explizit auftritt. Dennoch wird der Term $(p, \nabla \cdot \mathbf{v})_{\Omega}$ in der Gleichung belassen, da die meisten Finite-Elemente-Methoden nicht divergenzfrei sind.

Nun soll die Herleitung einer Variationsformulierung für die in Gleichung (2.80) spezifizierte Randbedingung skizziert werden, vgl. hierzu [MP94] S.47.

Ausgangspunkt sei Gleichung (4.6). Partielle Integration der Terme mit den höchsten Ableitungen liefert

$$\int_{\Omega} ((\mathbf{a} \cdot \nabla) u_i + c u_i) v_i dx - \int_{\Omega} p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} dx + \nu \int_{\Omega} \nabla u_i \cdot \nabla v_i dx - \nu \int_{\partial \Omega} \nabla u_i \cdot \mathbf{n} v_i ds = \int_{\Omega} f_i v_i dx.$$

Bei Summation über $i = 1, \dots, d$ folgt

$$\int_{\Omega} ((\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{u} + c \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} dx - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v} dx + \nu \int_{\Omega} \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} dx - \nu \int_{\partial \Omega} (\nabla \mathbf{u}) \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} ds = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx.$$

Verwendet man beim Diffusionsterm statt $\nabla \mathbf{u}$ den symmetrisierten Tensor $\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T$, so ergibt sich analog

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} ((\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{u} + c \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} dx - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v} dx + \nu \int_{\Omega} [\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T] \cdot [\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T] dx \\ - \nu \int_{\partial \Omega} [\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T] \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} ds = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx \end{aligned}$$

Mit der Nebenrechnung

$$[\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T] \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot [\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T] \mathbf{n} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{s} \partial_s \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} + \partial_n \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{s} \partial_n \mathbf{u} \cdot \mathbf{s}$$

folgt bei Einarbeitung der Randbedingungen

$$\int_{\Omega} ((\mathbf{a} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \mathbf{c} \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} dx - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v} dx + \nu \int_{\Omega} [\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T] \cdot [\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T] dx + \nu \int_{\partial \Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{s} g(\mathbf{u} \cdot \mathbf{s}) ds = \int_{\Omega} \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} dx.$$

Somit gelangt man zu folgender Definition.

Definition 4.5

Es gelten die Annahme 4.2 und die Bezeichnungen aus Definition 4.4. Sei u Lösung des Oseen-Problems mit den Randbedingungen wie in Gleichung (2.80). Dann lautet die verallgemeinerte Aufgabenstellung des Oseen-Problems

$$(Os) \quad \begin{cases} \text{Finde } \mathbf{U} = (\mathbf{u}, p) \in V \times Q := (H_0^1(\Omega))^d \times L_0^2(\Omega), \text{ so da\ss} \\ \mathcal{A}(\mathbf{U}, \mathbf{V}) + \int_{\Gamma} g(\mathbf{u} \cdot \mathbf{s}) \mathbf{v} \cdot \mathbf{s} ds = \mathcal{L}(\mathbf{V}) \quad \forall \mathbf{V} \in V \times Q. \end{cases}$$

Die oben hergeleiteten schwachen Formulierungen stellen sogenannte gemischte Variationsgleichungen dar. Man kann zeigen, da\ss die Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ koerzitiv ist und da\ss die Bilinearform $b(\cdot, \cdot)$ die sogenannte Babu\sska-Brezzi-Bedingung

$$\inf_{q \in Q \setminus \{0\}} \sup_{v \in V \setminus \{0\}} \frac{b(v, q)}{\|v\|_V \|q\|_Q} \geq \beta > 0$$

erf\u00fcllt. Die Existenz und Eindeutigkeit eines L\u00f6sung des gemischten Problems folgt dann unmittelbar aus folgendem Existenz- und Eindeutigkeitsatz f\u00fcr gemischte Probleme.

Satz 4.2

Die Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ sei stetig und koerzitiv und die Bilinearform $b(\cdot, \cdot)$ erf\u00fclle die Babu\sska-Brezzi-Bedingung. Dann gibt es eine und nur eine L\u00f6sung des gemischten Problems aus Definition 4.4.

Beweis:

Zum Verweis sei verwiesen auf [Mue98] S.16. \(\diamond\)

4.3. Finite-Elemente Approximation

Im vorangegangenen Abschnitt wurden die Variationsformulierungen der Modellprobleme in unendlich-dimensionalen Sobolev-R\u00e4umen vorgestellt. In diesem Abschnitt betrachten wir eine konforme Finite-Elemente-Methode zur approximativen L\u00f6sung des kontinuierlichen Problems in endlichdimensionalen Unterr\u00e4umen.

Sei dazu Ω ein polygonal berandetes Gebiet. Sei \mathcal{T}_h ($h > 0$) eine Familie zul\u00e4ssiger regul\u00e4rer Triangulierungen von Ω , d.h. es gilt $\Omega = \cup_{T \in \mathcal{T}_h} T$ mit den Eigenschaften :

- (Zulässigkeit) Zwei verschiedene Elemente der Triangulierung haben entweder genau eine vollständige gemeinsame Fläche (nur für $d=3$), genau eine vollständige gemeinsame Kante, genau einen gemeinsamen Punkt oder sie sind durchschnittsfremd.
- (Regularität) Es existiert eine positive Konstante C mit

$$\sup_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{h_T}{\rho_T} \leq C,$$

wobei h_T der Durchmesser und ρ_T der Inkreisradius von $T \in \mathcal{T}_h$ ist.

4.3.1. Finite-Elemente Approximation des ADR-Problems

Auf \mathcal{T}_h definieren wir den Finite-Elemente Raum

$$X_h^k := \{v \in C(\bar{\Omega}) \mid v|_T \in \Pi_k(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\}, \quad k \geq 1$$

der stetigen und stückweise polynomialen Funktionen, der einen Unterraum des $H^1(\Omega)$ bildet. Im folgenden werden nur homogene Dirichlet-Randbedingungen betrachtet. Um diese Randbedingungen in den diskreten Lösungsraum einzuarbeiten, wird der Raum

$$V_h := X_h^k \cap H_{0,D}^1(\Omega)$$

eingeführt.

Dann lautet die diskrete Formulierung des ADR-Problems

$$(ADR_h) \quad \begin{cases} \text{Finde } u \in V_h \subset V \equiv H_{0,D}^1(\Omega), \text{ so daß} \\ b_G(u, v) = l_G(v) \quad \forall v \in V_h \text{ gilt.} \end{cases}$$

Satz 4.3

Die Aussage von Satz 4.1 überträgt sich analog auf das diskrete ADR-Problem.

Beweis:

Für konforme Finite-Elemente-Methoden überträgt sich die Koerzitivität vom kontinuierlichen auf den diskreten Level. Somit überträgt sich der Beweis von Satz 4.1. \diamond

4.3.2. Finite-Elemente Approximation des Oseen-Problems

Auf \mathcal{T}_h definieren wir wieder den Finite-Elemente Raum

$$X_h^k := \{v \in C(\bar{\Omega}) \mid v|_T \in \Pi_k(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\}, \quad k \geq 1$$

der stetigen und stückweise polynomialen Funktionen mit $X_h^k \subset H^1(\Omega)$. Für Test- und Ansatzfunktionen werden folgende Räume verwendet

$$\begin{aligned} \text{Geschwindigkeit} & : V_h := (X_h^k \cap H_0^1(\Omega))^d \subset V, \\ \text{Druck} & : Q_h := X_h^l \cap Q \subset Q. \end{aligned}$$

Dann lautet die diskrete Formulierung des Oseen-Problems

$$(Os_h) \quad \begin{cases} \text{Finde } \mathbf{U} = (\mathbf{u}, p) \in V_h \times Q_h, \text{ so da\ss} \\ \mathcal{A}(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = \mathcal{L}(\mathbf{V}) \quad \forall \mathbf{V} \in V_h \times Q_h. \end{cases}$$

Über Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung macht der folgende Satz eine Aussage. Es sei jedoch bereits schon hier ausdrücklich betont, daß seine Voraussetzung nicht erfüllt ist, falls man für Geschwindigkeit und Druck Elemente gleicher Ordnung verwendet.

Satz 4.4

Unter der Voraussetzung, daß die Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ stetig und koerzitiv ist und daß die Bilinearform $b(\cdot, \cdot)$ die sogenannte diskrete Babuška-Brezzi-Bedingung

$$\inf_{q \in Q_h \setminus \{0\}} \sup_{v \in V_h \setminus \{0\}} \frac{b(v, q)}{\|v\|_V \|q\|_Q} \geq \beta_h > 0$$

erfüllt, gibt es eine und nur eine Lösung des diskreten Oseen-Problems.

Beweis:

Zum Verweis sei verwiesen auf [Mue98] S.21. ◇

Bemerkung 4.5

Die beiden Voraussetzungen übertragen sich nicht notwendig vom kontinuierlichen auf den diskreten Level. Insbesondere ist die diskrete Babuška-Brezzi-Bedingung nicht erfüllt, wenn für Geschwindigkeit und Druck Elemente gleicher Ordnung verwendet werden. Um die Babuška-Brezzi-Bedingung zu erfüllen, müssen Stabilisierungsmaßnahmen eingesetzt werden. So ist es möglich, eine Norm zu definieren, bzgl. der die Babuška-Brezzi-Bedingung erfüllt ist.

4.4. Stabilisierung des ADR-Problems

Es ist hinlänglich bekannt, daß die oben vorgestellte Galerkin-FEM Diskretisierung numerisch instabil ist. Hauptidee der hier betrachteten Stabilisierungstechnik ist es, isotrop oder in ausgezeichneten Richtungen, meist in Richtung des Transportfeldes, d.h. in Stromlinienrichtung, oder senkrecht dazu, d.h. in sogenannter Crosswind-Richtung, künstliche Diffusivität zu addieren. Zunächst soll diese Idee am Beispiel des ADR-Problems motiviert werden. Anschließend sollen das ADR- und das Oseen-Problem in der stabilisierten Variationsformulierung angegeben werden.

4.4.1. Motivation der SUGP-Stabilisierung für das ADR-Problem

Betrachtet wird zur Motivation zunächst folgende eindimensionale Konvektions-Diffusionsgleichung auf]0, 1[:

$$-\epsilon u'' + bu' = 1, \quad u(0) = u(1) = 0,$$

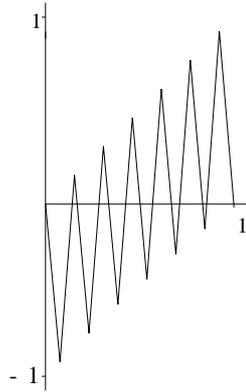


Abbildung 4.1.: ohne Upwind-Diskretisierung

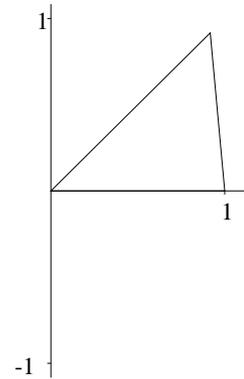


Abbildung 4.2.: mit Upwind-Diskretisierung

vgl. hierzu [RST96], S. 31ff. Zunächst werde vereinfachend $b = 1$ angenommen. Man beachte, daß das zugehörige reduzierte Problem $u' = 1$ die zwei Lösungen $u = x$ und $u = x - 1$ besitzt, wobei $u = x$ nur die erste Randbedingung und $u = x - 1$ nur die zweite Randbedingung erfüllt. Nun soll eine Finite-Differenzen-Diskretisierung des Problems betrachtet werden. Gegeben sei eine äquidistante Zerlegung von $[0, 1]$ mit Schrittweite $h = (2n - 1)^{-1}$. Es bezeichne $u_i = u(ih)$. Die Randbedingungen implizieren $u_0 = u_{2n-1} = 0$. Es werde u' durch den zentralen Differenzenquotienten approximiert. Man erhält das folgende Finite-Differenzen-Schema :

$$(4.15) \quad -\epsilon \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = 1$$

Um zu zeigen, daß die zugehörige Lösung im singular gestörten Fall Oszillationen aufweisen kann, werde zur näherungsweisen Lösung des Gleichungssystems (4.15) der Diffusionsterm wegen $\epsilon \ll 1$ zunächst einfach weggelassen. Wie man leicht nachrechnet, gilt dann für die geradzahigen Knoten die Rekursionsformel $u_{2i+2} = u_{2i} + 2h$ und somit $u_{2i} = 2ih$. Für die ungeradzahigen Knoten gilt $u_{2i-1} = u_{2i+1} - 2h$ und somit $u_{2i-1} = (2i - 1)h - 1$. Die geraden Knoten sehen also nur die linke Randbedingung und liefern die erste Lösung $u = x$ des reduzierten Problems, die ungeradzahigen Knoten sehen nur die rechte Randbedingung und liefern die zweite Lösung $u = x - 1$ des reduzierten Problems. Die Lösung ist in Figur 4.1 schematisch dargestellt. Sie weist starke Oszillationen auf und hat mit der Lösung des Problems (auf den ersten Blick) nichts zu tun.

Der Ausweg besteht darin, statt des zentralen Differenzenquotienten einen sogenannten Upwind-Differenzenquotienten zu verwenden, d.h. den Rückwärts-Differenzenquotienten im Falle $b > 0$ bzw. den Vorwärts-Differenzenquotienten im Falle $b < 0$. Zur Approximation der ersten Ableitung wird also immer der stromaufwärts (upwind) liegende Knoten verwendet. Dann liefert das Upwind-Finite-Differenzen-Schema bei Vernachlässigung des Diffusionsterms für die Knotenwerte die Rekursionsformel $u_{i+1} = u_i + h$ und somit $u_i = ih$ ($1 \leq i \leq 2n - 2$). Die Lösung ist in Figur 4.2 skizziert.

Nun soll die Wirkung des Upwind-Schemas verdeutlicht werden. Sei nun $b > 0$ eine positive

Konstante. Bildet man die Differenz zwischen Upwind- und zentralem Differenzenquotienten, so ergibt sich

$$b \frac{u_i - u_{i-1}}{h} - b \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = -b \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{2h} = -\frac{bh}{2} \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}.$$

Daher kann das Upwind-Schema auch geschrieben werden als

$$-(\epsilon + \frac{bh}{2}) \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + b \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h} = 1.$$

Im eindimensionalen Fall ist das Upwind-Schema also äquivalent mit dem zentralen Differenzschema bei gleichzeitiger Addition von künstlicher Diffusivität der Stärke $\frac{|b|h}{2}$.

Bemerkung 4.6

Das gleiche Resultat ergibt sich im Fall $b < 0$.

Bemerkung 4.7

Eine genauere mathematische Analyse zeigt, daß das Auftreten von Oszillationen beim zentralen Differenzschema mit der stabilen Lösbarkeit des entstehenden Gleichungssystems für die Knotenwerte zusammenhängt. Auf eine Definition des Begriffs der stabilen Lösbarkeit wird an dieser Stelle verzichtet. Es sei jedoch verwiesen auf [RST96] S.29f. Die stabile Lösbarkeit ist gesichert, falls für die sog. Peclet-Zahl

$$(4.16) \quad Pe = |b| \frac{h}{\epsilon}$$

gilt, daß $Pe < 1$ ist. Dies bedeutet aber, daß für Probleme mit kleinen Viskositäten des Mediums das Gitter unakzeptabel fein gewählt werden muß, vgl. [RST96] S.32 und S.63. Dagegen sichert das Upwind-Verfahren generell die stabile Lösbarkeit. Falls b nicht konstant ist oder die Zerlegung nicht äquidistant ist, genügt es, dort lokal künstliche Diffusivität zu addieren, wo $Pe > 1$ gilt.

Die Frage ist, wie das Upwind-Schema in den FEM-Kontext übersetzt werden kann. Zur Lösung wird die Tatsache ausgenutzt, daß die Wirkung des Upwind-Schemas gleichbedeutend mit der Addition künstlicher Diffusivität der Stärke $\frac{|b|h}{2}$ ist. Es zeigt sich, daß dies nur in Richtung von \mathbf{b} geschehen darf. Daher wird zur Bilinearform elementweise der Term

$$\frac{|\mathbf{b}|_{T,\infty} h_T}{2} \left(\frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|_{T,\infty}} \cdot \nabla u, \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|_{T,\infty}} \cdot \nabla v \right)_T = \frac{h_T}{2 |\mathbf{b}|_{T,\infty}} (\mathbf{b} \cdot \nabla u, \mathbf{b} \cdot \nabla v)_T.$$

addiert, wobei h_T der Durchmesser des finiten Elementes T und $|\mathbf{b}|_{T,\infty} = \max_{j=1,\dots,d} \sup_{x \in T} |b_j(x)|$ ist. Somit ergibt sich für die stabilisierte Bilinearform

$$b_{SG}(u, v) = b_G(u, v) + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{h_T}{2 |\mathbf{b}|_{T,\infty}} (\mathbf{b} \cdot \nabla u, \mathbf{b} \cdot \nabla v)_T.$$

Abschließend soll diese Basisversion verbessert werden. Die bisherige Methode ist nicht konsistent. Konsistenz im FEM-Sinne meint, daß die exakte Lösung des ursprünglichen

Problems auch das stabilisierte Problem löst, sofern sie hinreichend glatt ist. Konsistenz wird erreicht, indem man den elementweisen Stabilisierungsterm durch Verwendung des elementweisen Residuums modifiziert zu

$$\frac{h_T}{2|\mathbf{b}|_{T,\infty}}((-\nabla \cdot (\nu \nabla u) + \mathbf{b} \cdot \nabla u + cu - f, \mathbf{b} \cdot \nabla v)_T).$$

Man beachte, daß der Laplace-Term verschwindet, falls mit P_1 -Elementen gearbeitet wird. Eine weitere Verbesserung besteht darin, die Stabilisierung lokal zu steuern. Aus der Betrachtung des eindimensionalen Finite-Differenzen-Verfahrens haben wir gelernt, daß Stabilisierung nur dort nötig ist, wo $Pe > 1$ gilt. Im FEM-Kontext berechnet sich die lokale Peclet-Zahl nach

$$Pe_T = |\mathbf{b}|_{T,\infty} \frac{h_T}{\epsilon}.$$

Die naheliegendste Modifikation ist daher

$$\delta_T = \frac{h_T}{2|\mathbf{b}|_{T,\infty}}, \quad \text{falls } Pe_T > 1, \quad \text{und } \delta_T = 0, \quad \text{sonst.}$$

Mit der folgenden Modifikation erreicht man, daß δ_T außerdem noch stetig von der Peclet-Zahl abhängt. Man setzt

$$(4.17) \quad \delta_T = \frac{h_T}{2|\mathbf{b}|_{T,\infty}} \min(1, Pe_T).$$

4.4.2. SUPG-Stabilisierung des ADR-Problems

Im letzten Abschnitt wurde die sog. Stromlinien-Diffusions-Finite-Elemente-Methode (SD-FEM) motiviert. Sie wird auch als SUPG-Methode (streamline upwind Petrov-Galerkin) bezeichnet. In diesem Abschnitt soll das SUPG-stabilisierte ADR-Problem dargestellt werden. Dazu führt man folgende stabilisierte Bi-/Linearformen ein

$$(4.18) \quad b_{SG}(u, v) = b_G(u, v) + b_S(u, v)$$

$$(4.19) \quad l_{SG}(v) = l_G(v) + l_S(v)$$

wobei

$$(4.20) \quad b_S(u, v) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \delta_T (-\nabla \cdot (\nu \nabla u) + \mathbf{b} \cdot \nabla u + cu, \mathbf{b} \cdot \nabla v)_T \quad \text{und}$$

$$(4.21) \quad l_S(v) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \delta_T (f, \mathbf{b} \cdot \nabla v)_T \quad \text{ist.}$$

Dann lautet die SUPG-stabilisierte diskrete Formulierung des ADR-Problems

$$(ADR_s) \quad \begin{cases} \text{Finde } u \in V_h \subset V \equiv H_0^1(\Omega), \text{ so daß} \\ b_{SG}(u, v) = l_{SG}(v) \quad \forall v \in V_h \text{ gilt.} \end{cases}$$

Man kann eine stabilisierte Energienorm angeben, so daß die Bilinearform $b_S(\cdot, \cdot)$ koerzitiv ist.

Satz 4.5

Die stabilisierte Energienorm sei definiert durch

$$\|u\|_S = (\nu|u|_1^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \delta_T \|b \cdot \nabla u\|_{0,T}^2 + c_0 \|u\|_{0,T}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Seien ferner Konstanten c_T und c_0 definiert als

$$c_T := \max_{x \in T} |c(x)|, \quad c - \frac{1}{2} \nabla \cdot \mathbf{b} \geq c_0 > 0 \quad \text{in } \Omega.$$

Die Stabilisierungsparameter δ_T erfüllen für alle $T \in \mathcal{T}_h$

$$0 < \delta_T \leq \frac{1}{2} \min\left(\frac{c_0}{c_T^2}, \frac{h_T^2}{\epsilon \mu_{inv}^2}\right).$$

Dann ist die Bilinearform $b_S(\cdot, \cdot)$ stetig und koerzitiv, d.h. es gilt

$$b_S(u, u) \geq \frac{1}{2} \|u\|_S^2.$$

Bemerkung 4.8

Die Konstante μ_{inv} stammt aus der sog. inversen Ungleichung, vgl. Gleichung (3.49) auf Seite 230 bei [RST96].

Beweis:

Einen Beweis findet man z.B. in [RST96] S.231. ◇

Das Lemma von Lax-Milgram liefert dann die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung.

Bemerkung 4.9

Der Stabilisierungsparameter δ_T wird genauer gesagt so gewählt, daß bei der Fehlerabschätzung ein optimales Konvergenzverhalten für $h \rightarrow 0$ erzielt wird. Dies wird z.B. durch die folgende in PNS realisierte Wahl erreicht :

$$(4.22) \quad \delta_T = \frac{h_T^2}{2\nu} \left(1 + \left(\frac{h_T \|b\|_{\infty, T}}{\nu}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

4.4.3. Discontinuity Capturing

Trotz der SUPG-Stabilisierung können noch kleinere Oszillationen senkrecht zum Konvektionsfeld \mathbf{b} auftreten. In inneren Grenzschichten (aufgrund von Unstetigkeiten am Einströmrand) und in parabolischen Grenzschichten besitzt die Lösung oft scharfe Gradienten. In direkter Umgebung dieser Grenzschichten können bei SUPG-Verfahren im konvektionsdominanten Fall Über- und Unterschwingen (Over- and Undershootings) auftreten. Hauptidee einer Shock-Capturing Technik ist es, diese Oszillationen wegzudämpfen durch künstliche Vergrößerung der Diffusivität in der Umgebung solcher Grenzschichten und nur dort.

Dabei soll die zusätzliche Diffusivität proportional zum Residuum sein, um gute Konsistenz-eigenschaften zu sichern. Außerdem soll sie im Bereich glatter Lösung und im Bereich kleiner Konvektion klein sein, um gute Fehlereigenschaften zu erzielen. Jedes Shock-Capturing

Verfahren, das diese Forderungen erfüllt, liefert ein nichtlineares Verfahren, da es von der Lösung selbst abhängt. Da innere und parabolische Grenzschichten senkrecht zur Strömungsrichtung verlaufen, wird die zusätzliche Diffusivität nur in Crosswind-Richtung zugeführt. Codina verglich verschiedene Shock-Capturing-Techniken, s. [Cod93]. Das hier besprochene Verfahren findet man in [CS99]. Die auf einem Element addierte zusätzliche Diffusivität beträgt für dieses Verfahren

$$(4.23) \quad \nu_{dc} = \frac{1}{2} \xi_c h \frac{|R(u)|_T}{|\nabla u|_T}.$$

Dabei wird der Parameter ξ_c elementweise berechnet nach

$$(4.24) \quad \xi_c = \max\left\{0, C_{dc} - \frac{2\nu}{|\mathbf{b}^*|_T h}\right\} \quad \text{mit} \quad \mathbf{b}^* = \frac{1}{|\nabla u|_T^2} (\mathbf{b} \cdot \nabla u + cu - f) \nabla u.$$

Aufgrund numerischer Experimente schlug Codina $C_{dc} = 0.7$ für lineare Elemente für die Konstante C_{dc} vor.

Die Shock-Capturing-Methode besteht nun in der Addition des zusätzlichen Terms

$$(4.25) \quad \sum_{T \in \mathcal{T}_h} [\nu_{dc} (\nabla u, \nabla v)_T + (\nu_{sl} - \nu_{dc}) \frac{1}{|\mathbf{b}|_T^2} (\mathbf{b} \cdot \nabla u, \mathbf{b} \cdot \nabla v)_T] \quad \text{mit}$$

$$(4.26) \quad \nu_{sl} = \max\{0, \nu_{dc} - \nu_{supg}\} \quad \text{wobei} \quad \nu_{supg} = \frac{\delta_T}{|\mathbf{b}|_T^2} \quad \text{ist.}$$

Bemerkung 4.10

Im Falle $\nu_{dc} < \nu_{supg}$ ist $\nu_{sl} = 0$. Dann wird isotrop künstliche Diffusivität der Stärke ν_{dc} addiert. Ferner wird in Strömungsrichtung künstliche Diffusivität der Stärke ν_{dc} subtrahiert. Damit soll eine Überdämpfung in Strömungsrichtung vermieden werden. Die Gesamtwirkung von SUPG- und SC-Stabilisierung besteht darin, daß in Strömungsrichtung künstliche Diffusivität der Stärke ν_{supg} und in Crosswind-Richtung Diffusivität der Stärke ν_{dc} addiert wird.

Im Falle $\nu_{dc} > \nu_{supg}$ ist $\nu_{sl} > 0$. Dann wird isotrop künstliche Diffusivität der Stärke ν_{dc} addiert und gleichzeitig in Strömungsrichtung künstliche Diffusivität der Stärke ν_{supg} , das ist gerade die Wirkung der SUPG-Stabilisierung, subtrahiert. Auch damit soll eine Überdämpfung in Strömungsrichtung vermieden werden. Als Gesamtwirkung von SUPG- und SC-Stabilisierung wird dann sowohl in Strömungsrichtung als auch in Crosswind-Richtung Diffusivität der Stärke ν_{dc} addiert.

Mit der zusätzlich eingeführten Form

$$(4.27) \quad b_{DC}(u, v) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} [\nu_{dc} (\nabla u, \nabla v)_T + (\nu_{sl} - \nu_{dc}) \frac{1}{|\mathbf{b}|_T^2} (\mathbf{b} \cdot \nabla u, \mathbf{b} \cdot \nabla v)_T]$$

lautet die Shock-Capturing und SUPG-stabilisierte diskrete Formulierung des ADR-Problems

$$(ADR_s) \quad \begin{cases} \text{Finde } u \in V_h \subset V \equiv H_0^1(\Omega), \text{ so daß} \\ b_{SG}(u, v) + b_{DC}(u, v) = l_{SG}(v) \quad \forall v \in V_h \quad \text{gilt.} \end{cases}$$

4.5. SUPG- und PSPG- Stabilisierung des Oseen-Problems

Für das Oseen-Problem sind mehrere Stabilisierungsmaßnahmen nötig. Zur Oszillationsvermeidung im Falle konvektionsdominanter Strömungen wird ähnlich wie beim ADR-Problem eine SUPG-Stabilisierung der Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ vorgenommen. Dazu werden mit $\delta_{1u}^T(\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{v}$ elementweise gewichtete Residuen addiert

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \delta_{1u}^T (-\nabla \cdot (\nu \nabla \mathbf{u}) + (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{u} + c\mathbf{u} + \nabla p - f, (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{v})_T.$$

Außerdem ist bei Verwendung von Ansatzfunktionen gleicher Ordnung für Geschwindigkeit und Druck die Lösbarkeit des bei der Diskretisierung entstehenden linearen Gleichungssystems nicht garantiert, da die diskrete Babuska-Brezzi-Bedingung nicht erfüllt ist. Dieses Problem wird umgangen durch Stabilisierung der Bilinearform $b(\cdot, \cdot)$, d.h. durch elementweise Addition von sog. PSPG-Termen

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \delta_{1p}^T (-\nabla \cdot (\nu \nabla \mathbf{u}) + (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{u} + c\mathbf{u} + \nabla p - f, \nabla q)_T.$$

Falls die Diffusivität ν klein ist, muß auch die Kontinuitätsgleichung stabilisiert werden mit dem Zusatzterm

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \delta_{2u}^T (\nabla \cdot \mathbf{u}, \nabla \cdot \mathbf{v})_T.$$

Damit ergeben sich als modifizierte Bi-/Linearformen

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^s(\mathbf{U}, \mathbf{V}) &= \mathcal{A}(\mathbf{U}, \mathbf{V}) + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \delta_{1u}^T (-\nabla \cdot (\nu \nabla \mathbf{u}) + (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{u} + c\mathbf{u} + \nabla p, (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{v})_T \\ &\quad + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \delta_{1p}^T (-\nabla \cdot (\nu \nabla \mathbf{u}) + (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{u} + c\mathbf{u} + \nabla p, \nabla q)_T \\ &\quad + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \delta_{2u}^T (\nabla \cdot \mathbf{u}, \nabla \cdot \mathbf{v})_T \\ \mathcal{L}^s(\mathbf{V}) &= \mathcal{L}(\mathbf{V}) + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \delta_{1u}^T (f, (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{v})_T + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \delta_{1p}^T (f, \nabla q)_T \end{aligned}$$

Dann lautet die stabilisierte diskrete Formulierung des Oseen-Problems

$$(Os_s) \quad \begin{cases} \text{Finde } \mathbf{U} = (\mathbf{u}, p) \in V_h \times Q_h, \text{ so daß} \\ \mathcal{A}^s(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = \mathcal{L}^s(\mathbf{V}) \quad \forall \mathbf{V} \in V_h \times Q_h \text{ gilt.} \end{cases}$$

Der folgende Satz besagt, daß man eine stabilisierte Energienorm angeben kann, bezüglich der die Bilinearform \mathcal{A}^s im Fall $\delta_{1u} = \delta_{1p}$ koerzitiv ist.

Satz 4.6

Die modifizierte stabilisierte Energienorm $||| \cdot |||_h$ sei definiert als

$$|||(\mathbf{v}, q)|||_h := \{\nu |\mathbf{v}|_1^2 + c \|\mathbf{v}\|_0^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \delta_{2u}^T \|\nabla \cdot \mathbf{v}_T\|_{0,T}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \delta_{1u}^T \|(\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \nabla q\|_{0,T}^2\}^{\frac{1}{2}}.$$

Dann ist $\mathcal{A}^s(\cdot, \cdot)$ bezl. dieser Norm koerzitiv, d.h. es gilt

$$\mathcal{A}^s(\mathbf{U}, \mathbf{U}) > \frac{1}{2} \|\mathbf{U}\|_h^2$$

Beweis:

Zum Beweis sei verwiesen auf [RST96] S.303. \diamond

Folgender Satz, vgl. [RST96] S.302, sichert die diskrete Babuška-Brezzi-Bedingung.

Satz 4.7

Seien $c \geq 0$, $\delta_{2u}^T > 0$ und die Stabilisierungsparameter δ_{1u}^T so, daß es Konstanten μ_0 und δ gibt mit

$$0 < \mu_0 h_T^2 \leq \delta_{1u}^T \leq \min\left(\delta, \frac{h_T^2}{2\nu\mu_{mv}^2}\right) \quad \text{und} \quad 0 \leq c\delta_{1u}^T \leq \frac{1}{2}.$$

Sei ferner die stabilisierte Energienorm $\|\cdot\|_{GLS}$ definiert als

$$\|(v, q)\|_{GLS} = \sqrt{\|(v, q)\|_h^2 + \nu \|q\|_0^2}$$

Dann gibt es ein von ν und h unabhängiges $\beta > 0$ mit

$$\inf_{U \in V_h \times Q_h \setminus \{0\}} \sup_{V \in V_h \times Q_h \setminus \{0\}} \frac{\mathcal{A}^s(\mathbf{U}, \mathbf{V})}{\|\mathbf{U}\|_{GLS} \|\mathbf{V}\|_{GLS}} \geq \beta.$$

Beweis:

Einen Beweis findet man z.B. bei [RST96] S.302f. \diamond

Bemerkung 4.11

Die Sätze 4.6 und 4.7 implizieren, daß das diskrete stabilisierte Oseen-Problem eine und nur eine Lösung besitzt (s. [RST96] S.306).

Die Stabilisierungsparameter werden so gewählt, daß man ein optimales Konvergenzverhalten erzielt. In PNS werden die Parameter wie folgt berechnet (s. hierzu [Mue97] S.55f.)

$$(4.28) \quad \begin{aligned} \delta_{1u}^T &= C_1^u \frac{h_T^2}{2\nu} \left(1 + \left(\frac{h_T \|b\|_{\infty, T}}{\nu}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}, \\ \delta_{1p}^T &= C_1^p \frac{h_T^2}{2\nu}, \\ \delta_2^T &= C_2 \nu \left(1 + \left(\frac{h_T \|b\|_{\infty, \Omega}}{\nu}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Meist wird $C_1^u = C_1^p = C_2 = 1.0$ gewählt. Für den Fall $\delta_{m,u}^T = \delta_p^T$ erhält man die sog. GLS-Stabilisierung.

4.6. Bemerkungen zur Implementation

Das Programmpaket PNS verwendet elementweise lineare Ansatz- und Testfunktionen. Dem entsprechend werden die Daten elementweise linear interpoliert. Vektorwertige Daten werden in jeder Komponente stückweise linear interpoliert. Zur Auswertung der Integrale der Variationsformulierung werden dann für P1-Elemente exakte Quadraturformeln verwendet.

4.6.1. Berechnung der Größen

Bei der Vorstellung des Shock-Capturing-Verfahrens wurde bisher noch nicht spezifiziert, wie das elementweise Residuum und der elementweise Gradient zu berechnen ist. Da für P1-Elemente der Laplace-Term verschwindet, definiert man als neue Bilinearform auf dem Element $T \in \mathcal{T}_h$

$$a_{res,T}(u, v) = (\mathbf{b} \cdot \nabla u + cu, v)_T.$$

Sei V_T die Menge der Indizes der Knoten, die Ecken von T sind, und bezeichne ϕ_j die zum Knoten $j \in V_T$ gehörende Basisfunktion. Bei der Berechnung des Residuums wird dann folgende Zerlegung der Einheit ausgenutzt

$$1 = \sum_{j \in V_T} \phi_j.$$

Das elementweise Residuum $|R(u)|_T$ wird dann berechnet durch

$$|R(u)|_T = \frac{|a_{res,T}(u, 1) - (f, 1)_T|}{meas(T)}.$$

Dabei bezeichnet $meas(T)$ das Lebesgue-Maß von T . Besitzen u bzw. f die Darstellung $u = \sum_{i \in V_T} u_i \phi_i$ bzw. $f = \sum_{i \in V_T} f_i \phi_i$ bzgl. der Basisfunktionen, so kann das elementweise Residuum berechnet werden nach

$$\begin{aligned} |R(u)|_T &= \frac{|a_{res,T}(\sum_{i \in V_T} u_i \phi_i, 1) - (\sum_{i \in V_T} f_i \phi_i, 1)_T|}{meas(T)} \\ &= \frac{|a_{res,T}(\sum_{i \in V_T} u_i \phi_i, \sum_{j \in V_T} \phi_j) - (\sum_{i \in V_T} f_i \phi_i, \sum_{j \in V_T} \phi_j)_T|}{meas(T)} \\ &= \frac{|\sum_{i \in V_T} \sum_{j \in V_T} a_{res,T}(u_i \phi_i, \phi_j) - (f_i \phi_i, \phi_j)_T|}{meas(T)} \\ &= \frac{|\sum_{i \in V_T} \sum_{j \in V_T} a_{res,T}(\phi_i, \phi_j) u_i - f_i(\phi_i, \phi_j)_T|}{meas(T)}. \end{aligned}$$

Für P1-Elemente ist ∇u elementweise konstant. Somit kann der Ausdruck $|\nabla u|_T$ als über T gemittelte euklidische Norm von ∇u berechnet werden :

$$|\nabla u|_T := \left| \nabla \sum_{i \in V_T} u_i \phi_i \right|_2 := \left| \sum_{i \in V_T} u_i \nabla \phi_i \right|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^d \left(\sum_{i \in V_T} u_i \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} \right)^2},$$

wobei d die Raumdimension ist.

Abschließend soll noch eine Implementationsbesonderheit angegeben werden. Das Shock-Capturing soll nur in der Nähe von Grenzschichten wirken. Dazu modifiziert man das Verfahren zu

$$(4.29) \quad \nu_{dc} = \frac{1}{2} \xi_c h \frac{|R(u)|_T}{1 + |\nabla u|_T}.$$

In Bereichen konstanter Lösung, also abseits von Grenzschichten, ist der Term $|\nabla u|_T$ verschwindend klein. Ziel dieser Modifikation ist es zu verhindern, daß die künstliche Viskosität aufgrund des fast verschwindenden Nenners dort sehr groß wird.

4.6.2. Einbau des Shock-Capturing-Verfahrens in einen FEM-Code

In diesem Abschnitt soll am Beispiel von PNS besprochen werden, wie das Shock-Capturing-Verfahren in einen FEM-Code eingebaut werden kann. Der bisher in PNS implementierte Lösungsprozeß ist folgendermaßen strukturiert :

Bisherige Realisierung in PNS

- (1) Beginn des Linearisierungszyklus
 - (2) Berechnung der Steifigkeitsmatrix A und der rechten Seite F
 - (3) Konvergenzkontrolle für Linearisierungs-Zyklus. Falls keine Konvergenz eingetreten ist, gehe zu Schritt (1), anderenfalls fertig.
-

Bei Überlegungen, wie das Shock-Capturing-Verfahren in einen FEM-Code eingebaut werden soll, kommt man zu folgender Schwierigkeit. Das Shock-Capturing ist ein nichtlineares Verfahren. Falls man nur lineare Probleme lösen will, so bietet es sich an, das SC-Verfahren in einer gesonderten Schleife auszuiterieren. In der Formulierung der Gleichungen des k/ϵ -Modells nach Codina/Soto treten jedoch nichtlineare Gleichungen auf. Unter diesem Aspekt könnte man analog zum SUPG-Verfahren für das Navier-Stokes-Problem vorgehen. Die Navier-Stokes-Gleichung ist eine nichtlineare Gleichung und der Stabilisierungsparameter δ_u hängt von der Lösung ab. In diesem Fall wird das SUPG-Verfahren nicht in einer extra Schleife ausiteriert, sondern zusammen mit der Nichtlinearität der Navier-Stokes-Gleichung in der Linearisierungsschleife. In Analogie hierzu könnte man die Nichtlinearität des Shock-Capturing zusammen mit der (eventuell vorhandenen) Nichtlinearität des Problems in der Linearisierungsschleife ausiterieren.

Es bieten sich also folgende zwei Alternativen an :

SC-Variante 1

- (1) Beginn des Linearisierungszyklus
 - (2) Berechnung der Steifigkeitsmatrix A und der rechten Seite F .
 - (3) Shock-Capturing-Schleife (SC-Zyklus)
 - (3.1) Subtraktion der SC-Terme des vorangegangenen SC-Zyklus
 - (3.2) Addition der aktuellen SC-Terme
 - (3.3) Lösung des Gleichungssystems $AU = F$
 - (3.4) Konvergenzkontrolle für SC-Zyklus. Falls keine Konvergenz eingetreten ist, gehe zu Schritt (3), anderenfalls gehe zu Schritt (4).
 - (4) Konvergenzkontrolle für Linearisierungs-Zyklus. Falls keine Konvergenz eingetreten ist, gehe zu Schritt (1), anderenfalls fertig.
-

SC-Variante 2

- (1) Beginn des Linearisierungszyklus
 - (2) Berechnung der Steifigkeitsmatrix A und der rechten Seite F . Addition der SC-Terme.
 - (3) Konvergenzkontrolle für Linearisierungs-Zyklus. Falls keine Konvergenz eingetreten ist, gehe zu Schritt (1), anderenfalls fertig.
-

Eine Entscheidung hängt von den Ergebnissen der im folgenden Kapitel durchgeführten Experimente ab. Falls für lineare Probleme ein einziger SC-Zyklus reicht, um Über- und Unterschwinger zu beseitigen, und falls durch die folgenden Zyklen keine deutliche weitere qualitative und quantitative Verbesserung feststellbar ist, kann die zweite Alternative gewählt werden.

Bei einem Einbau in einen FEM-Code hat die zweite Variante die folgenden wichtigen Vorteile. Falls das SC-Verfahren in einer eigenen Routine implementiert wird, liegt der Rechenaufwand für das Subtrahieren und Addieren der SC-Terme jeweils in der Größenordnung des Rechenaufwandes für die Assemblierung der Steifigkeitsmatrix. Denn zur Berechnung von Residuum und Gradient werden dieselben Unterroutinen aufgerufen und somit dieselben Speicherzugriffe und dieselben arithmetischen Operationen durchgeführt wie bei der Matrixassemblierung. Variante 2 nutzt aus, daß zur Berechnung der SC-Stabilisierungsterme die ohnehin bei der Assemblierung berechneten und somit bereitstehenden Werte weiter verwendet werden. Dadurch wird die zusätzlich benötigte CPU- und Zugriffszeit minimiert. Ein weiterer Vorteil besteht darin, daß dann auf Routinen zur Abbruchkontrolle der SC-Schleife verzichtet werden kann. Zum einen wird hierdurch Zeit für die Berechnung und das Verschicken von Normen gespart. Zum anderen umgeht man das Problem, daß im Falle der Verwendung eines Gebietszerlegungsalgorithmus auf einigen Teilgebieten länger ausiteriert werden muß als auf anderen und es somit zu einer ineffizienten Lastverteilung kommen kann. Drittens braucht bei einem Verzicht auf eine zusätzliche SC-Schleife und weitere Postprozeßroutinen für das Shock-Capturing der bisher bestehende Code nicht wesentlich verändert zu werden.

5. Numerische Experimente zum Shock-Capturing-Verfahren bei ADR-Problemen

In diesem Kapitel soll die Wirkung des Shock-Capturing für ADR-Probleme, die innere oder parabolische Grenzschichten aufweisen, getestet werden.

5.1. Fragestellungen

Die durchgeführten Versuche sollen helfen, Antworten auf folgende Fragen zu finden.

1. Qualitative Analyse : Werden Über- und Unterschwinger beseitigt ?
 - a) Parabolische und innere Grenzschichten
 - Wirkt das Verfahren sowohl bei inneren als auch bei parabolischen Grenzschichten ?
 - b) Unabhängigkeit vom Gitter
 - Ist die Wirksamkeit der implementierten Shock-Capturing-Methode unabhängig von der Feinheit h des gewählten Netzes ?
 - Hängt sie davon ab, ob auf strukturierten oder unstrukturierten Gittern gerechnet wird ?
 - c) Unabhängigkeit vom Strömungsfeld
 - Wie wirken sich (starke) lokale Änderungen des Geschwindigkeitsfeldes auf das Verfahren aus ?
2. Quantitative Analyse
 - a) Als mögliche Güte- und Abbruchkriterien sollen die euklidische Norm des diskreten Residuums der Lösung und die euklidische Norm der Differenz zweier aufeinanderfolgender Lösungen untersucht werden.
 - Kann das Beseitigen der Über- und Unterschwinger an der Entwicklung der Normen nachvollzogen werden ?
 - Ist das Verfahren konvergent und kann ein eventuelles Konvergenzverhalten anhand der Normen nachvollzogen werden ?
 - Gibt es (qualitativ gesehen) eine notwendige bzw. hinreichende Anzahl von Shock-Capturing-Zyklen, um Über- und Unterschwinger zu beseitigen ?
 - Gibt es eine notwendige bzw. hinreichende Anzahl von Shock-Capturing-Zyklen, um eine befriedigende Lösung zu erhalten ?
 - b) Genauigkeit des Verfahrens
 - Wie stark wird durch die zusätzlich addierte Viskosität die Lösung verfälscht (verschmiert) ?

- Wirkt das Shock-Capturing nur ganz lokal in unmittelbarer Umgebung von Grenzschichten, oder wird auch in Bereichen, wo keine Über- und Unterschwinger auftreten, zusätzliche Diffusivität addiert ?
- c) Konvergenzverhalten
- Wie verändert sich die Konvergenzordnung, wenn zusätzlich zu einer SUPG-Stabilisierung noch eine SC-Technik benutzt wird ?

Bemerkung 5.1

1. Von der Antwort auf die Fragen in 1.b) hängt es ab, ob der betrachtete Shock-Capturing-Algorithmus mit der Verwendung einer adaptiven Gitterverfeinerung verträglich ist.
2. Frage 1.c) ist wichtig im Hinblick auf eine Anwendung für das k/ϵ -Modell, da das Geschwindigkeitsfeld dort im allgemeinen nicht konstant ist.
3. Die letzten beiden Fragen in 2.a) sind wichtig für Überlegungen, wie das Shock-Capturing-Verfahren letztlich in einen FEM-Code eingebaut wird, s. Abschnitt 4.6.2.

5.2. Vorbemerkungen zu den numerischen Experimenten

In diesem Unterabschnitt sollen die in den Experimenten verwendeten Testströmungen vorgestellt werden. Außerdem sollen einige Bemerkungen zu den Programmierarbeiten gemacht werden, die zur Durchführung dieser Experimente gemacht wurden. Des weiteren soll die Nomenklatur der Grafiken erläutert werden.

5.2.1. Vorstellung der Testprobleme

Zunächst sollen die in den Experimenten verwendeten Testströmungen vorgestellt werden. Alle Testbeispiele in diesem Kapitel werden auf dem Einheitsquadrat gerechnet. In diesem Kapitel ist also stets $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ mit Rand $\partial\Omega = \Gamma$. Ferner seien $\Gamma_0, \Gamma_1 \subset \Gamma$ mit $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$ und $\Gamma_0 \cup \Gamma_1 = \Gamma$. Insbesondere ist also $\Gamma_0 = \Gamma \setminus \Gamma_1$, falls nichts anderes angegeben wird.

Achsenparallele Strömung und Schrägströmung

Achsenparallele Strömung und Schrägströmung sind Spezialfälle eines zweidimensionalen stationären Konvektions-Diffusions-Problems der Form

$$(5.1) \quad \begin{cases} -\nabla \cdot (\nu \nabla u) + \mathbf{b} \cdot \nabla u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \Gamma_0 \\ u = 1 & \text{auf } \Gamma_1. \end{cases}$$

Dabei wird $\nu = 10^{-6}$ fest gewählt. Es werden folgende zwei Probleme untersucht :
Testproblem ACHSEN

$$b = (1, 0)^T, \quad f \equiv 0, \quad \Gamma_1 = \{(0, y) \in \Gamma \mid y < \frac{2}{3}\} \cup \{(x, 0) \in \Gamma \mid x < 1\},$$

Testproblem SCHRÄG

$$b = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)^T, \quad f \equiv 0, \quad \Gamma_1 = \{(0, y) \in \Gamma \mid y < \frac{1}{3}\} \cup \{(x, 0) \in \Gamma \mid x < 1\}.$$

Beide Probleme besitzen innere Grenzschichten. Als analytische Vergleichslösung wird für Testproblem ACHSEN

$$(5.2) \quad u_1(x, y) = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{erf}(\frac{-y + \frac{2}{3}}{2\sqrt{\nu}\sqrt{x}}))$$

bzw für Testproblem SCHRÄG

$$(5.3) \quad u_1(x, y) = \frac{1}{2}(1 + \operatorname{erf}(\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}(x - 2y + \frac{2}{3})}{2\sqrt{\frac{2}{\sqrt{5}}\nu}\sqrt{\frac{1}{\sqrt{5}}(2x + y - \frac{1}{3})}}))$$

verwendet, vgl. [RST96] S.184 oder [Rup97] S.53f. Dabei ist die Fehlerfunktion erf definiert als

$$\operatorname{erf}(x) := \frac{2}{\pi} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Achsenparallele Strömung mit parabolischer Grenzschicht

Zur Untersuchung der Wirkung des Shock-Capturing bei parabolischen Grenzschichten wird das folgende Testproblem verwendet :

Testproblem PARABOL

$$(5.4) \quad \begin{cases} -\nabla \cdot (\nu \nabla u) + (\mathbf{b} \cdot \nabla)u = f & \text{in } \Omega = (0, 1) \times (0, 1) \\ u = 0 & \text{auf } \Gamma_0 = \{(x, y) \in \Gamma \mid y = 0 \text{ oder } y = 1\} \\ u = 1 & \text{auf } \Gamma_1. \end{cases}$$

Dabei werden $b = (1, 0)^T$ und $\nu = 10^{-6}$ fest gewählt.

Viertelkreisströmung

Hierunter soll folgendes zweidimensionale stationäre Konvektions-Diffusions-Problem verstanden werden :

Testproblem CIRCULAR

$$(5.5) \quad \begin{cases} -\nabla \cdot (\nu \nabla u) + (\mathbf{b} \cdot \nabla)u = f & \text{in } \Omega = (0, 1) \times (0, 1) \\ u = 1 & \text{auf } \Gamma_1 = \{(x, y) \in \Gamma \mid \frac{1}{3} < x < \frac{2}{3} \text{ und } y = 0\} \\ u = 0 & \text{auf } \Gamma_0. \end{cases}$$

Dies ist ein einfaches Beispiel eines stationären Konvektions-Diffusions-Problems mit nicht-konstantem Geschwindigkeitsfeld und mit innerer Grenzschicht. Dabei werden $b = (-y, x)$ und $\nu = 10^{-6}$ fest gewählt.

5.2.2. Bemerkungen zur Implementation

Zur Durchführung der Versuche wurde in das bestehende Programmsystem PNS das besprochene Shock-Capturing-Verfahren mit einer gesonderten Schleife eingebaut. Um die Ergebnisse der einzelnen Shock-Capturing-Zyklen untersuchen zu können, wurden auch die zugehörigen Routinen für die Konvergenzkontrolle und den Postprozeß (Ausgabe der Lösungen, der Normen und der Fehler) implementiert.

5.2.3. Nomenklatur der Grafiken

In diesem Unterabschnitt soll kurz die Nomenklatur für die im Anhang abgebildeten Grafiken erläutert werden. Der jeweilige Shock-Capturing-Schritt wird gekennzeichnet durch die Zahl it_{sc} . Dabei werden im zweiten SC-Schritt erstmalig SC-Stabilisierungsterme addiert. Gerechnet wurde auf dem Einheitsquadrat, bezeichnet durch den Präfix us (=unit square). Es wurden Gitter mit 33, 65 und 129 Gitterpunkten pro Raumdimension betrachtet, bezeichnet durch den Infix {Anzahl der Gitterpunkte} \times {Anzahl der Gitterpunkte}, und zwar strukturierte und unstrukturierte, bezeichnet durch den Postfix s (=structured) bzw. u (=unstructured). Beispielsweise bezeichnet $us65 \times 65u$ ein unstrukturiertes Gitter auf dem Einheitsquadrat mit 65 Gitterpunkten pro Raumdimension.

5.3. Qualitative Analyse des Shock-Capturing-Verfahrens

In diesem Abschnitt soll die qualitative Wirkung des SC-Verfahrens untersucht werden, d.h., ob die Crosswind-Oszillationen beseitigt werden.

5.3.1. Wirksamkeit bei inneren und parabolischen Grenzschichten

Um einen ersten qualitativen Eindruck von der Wirkung des Shock-Capturing-Verfahrens zu geben, werden im Anhang A.1 dreidimensionale Plots für die betrachteten Testprobleme gezeigt (vgl. die Abbildungen A.1-A.24), gerechnet auf strukturierten und unstrukturierten Gittern. Man erkennt, daß sowohl bei inneren Grenzschichten als auch bei parabolischen Grenzschichten die Über- und Unterschinger fast vollständig beseitigt werden. Einen genaueren Eindruck davon, wie gut diese Crosswind-Oszillationen beseitigt werden, entnimmt man den Querschnitten durch den Lösungsplot, auf die im folgenden Unterabschnitt Bezug genommen wird. Die Über- und Unterschinger werden stark reduziert, aber es können sehr kleine Rest-über- und unterschinger verbleiben. Das liegt daran, daß die implementierte SC-Methode einen Kompromiß zwischen bestmöglichem Beseitigen der Oszillationen und minimaler Verschlechterung des Gradienten der Lösung bei SC gegenüber SUPG anstrebt. Es kann passieren, daß bei gewissen Problemen für gewisse Netze die Über- und Unterschinger innerer Grenzschichten direkt am Einströmrand nicht beseitigt werden können, vgl. Abb. A.4 und A.32. Weiter ist zu bemerken, daß die Randgrenzschichten am Ausströmrand nicht beseitigt werden können. Diese resultieren aber daraus, daß am Ausströmrand homogene Dirichletdaten vorgegeben werden, was für Anwendungen jedoch uninteressant ist.

Bemerkung 5.2

Falls man ν_{dc} verdreifacht, werden sowohl die Über- und Unterschwinger an inneren und parabolischen Grenzschichten als auch die Überschwinger am Ausströmrand vollständig beseitigt. Der Nachteil ist, daß dann die Grenzschicht deutlich verschmiert wird.

5.3.2. Invarianz des Shock-Capturing unter Änderung der Netzweite

Eine notwendige Eigenschaft der Shock-Capturing-Methode muß es sein, daß sie nahezu unabhängig von der Geometrie der Diskretisierung ist. Die Oszillationsvermeidung muß unabhängig von der Feinheit des Gitters und unabhängig davon, ob ein strukturiertes oder ein unstrukturiertes Gitter vorliegt, wirksam sein. Denn nur dann ist der Einsatz des verwendeten Shock-Capturing-Verfahrens z.B. im Zusammenhang mit adaptiven Verfahren möglich.

Um festzustellen, wie die Crosswind-Oszillationen beseitigt werden, wurden Querschnitte durch die Lösung senkrecht zum Strömungsfeld aufgezeichnet. Dazu wurden die Querschnitte durch die Lösung nur mit SUPG-Stabilisierung und durch die Lösung mit SUPG-Stabilisierung und einmaliger Addition von SC-Termen jeweils in ein Diagramm gezeichnet. Im Anhang A.2 findet man Querschnitte für die Testprobleme CIRCULAR (s.Abb.A.25-A.30), SCHRÄG (s.Abb.A.31-A.36) und PARABOL (s.Abb.A.37-A.39).

Folgende Beobachtungen können gemacht werden. Erstens werden die Über- und Unterschwinger für alle Gitterweiten (weitestgehend) beseitigt. Schwierigkeit bereitet nur der Fall *SCHRÄG, us33x33u*. Zweitens fällt positiv auf, daß der Gradient der Lösung mit SUPG- und SC-Stabilisierung gegenüber der bloßen SUPG-Stabilisierung nicht verschlechtert wird. Ein Verschmieren der Lösung ist nur am Rande der Grenzschicht zu beobachten, also dort, wo vorher die Über- und Unterschwinger auftraten.

5.3.3. Wirksamkeit des Verfahrens für nichtkonstante Geschwindigkeitsfelder

Die bei der betrachteten Shock-Capturing-Methode auf einem Element addierte künstliche Diffusion ist proportional dem Residuum. Bei verschwindendem Reaktionsterm und rechter Seite reduziert sich das Residuum auf den Transportterm und ist somit proportional der lokalen Stärke der Konvektion. Die Geschwindigkeitsfelder in den Testbeispielen ACHSEN, SCHRÄG und PARABOL sind konstant und betragsmäßig auf eins normiert. Beim Testbeispiel CIRCULAR hingegen ändert sich das Geschwindigkeitsfeld sowohl betragsmäßig als auch richtungsmäßig. Dieses Beispiel kann als wichtiger Vorbereitungstest für die numerischen Experimente zur Wirksamkeit des Shock-Capturing beim k/ϵ -Turbulenzmodell angesehen werden. Denn z.B. beim betrachteten Closed-Cavity-Beispiel treten in den Ecken der Cavity im wesentlichen Viertelkreisströmungen auf, denen allerdings noch Wirbel überlagert sind.

Für die Ergebnisse betrachte man wieder die Abbildungen A.25-A.30. Als Ergebnis kann festgehalten werden, daß das implementierte Verfahren auch bei betrags- und richtungsmäßig nichtkonstanten Geschwindigkeitsfeldern im wesentlichen die gleiche zufrieden stellende Wirksamkeit zeigt wie bei konstanten Geschwindigkeitsfeldern, wobei nur das Ergebnis aus Abb.A.25 nicht als voll befriedigend angesehen werden kann. Aber in Anwendungen werden zweidimensionale Testfälle gewöhnlich mit mehr als doppelt so vielen Gitterpunkten

gerechnet, so daß dieses Resultat nicht von großer praktischer Bedeutung ist.

5.4. Quantitative Analyse

In diesem Abschnitt sollen quantitative Erkenntnisse über das Shock-Capturing-Verfahren gewonnen werden.

5.4.1. Abbruchkriterien für die Shock-Capturing-Schleife

Dieser Abschnitt soll auch der Beantwortung der im Abschnitt 4.6.2 gestellte Frage nach einem geeigneten Einbau des Shock-Capturing-Verfahrens in den FEM-Code PNS dienen. In diesem Abschnitt werden nur lineare Konvektions-Diffusions-Probleme behandelt. Durch die Addition der Shock-Capturing-Terme wird in die ursprünglich linearen Probleme eine Nichtlinearität eingebracht. Das daraus entstehende nichtlineare Problem wird durch Verwendung eines iteratives Lösungsverfahrens linearisiert. Damit stellt sich sofort die Frage nach geeigneten Abbruchkriterien für die Shock-Capturing-Schleife.

Abstrakt gesprochen soll die Shock-Capturing-Schleife dann abgebrochen werden, wenn keine wesentliche Verbesserung der Lösung mehr erreicht wird. Falls eine analytische Lösung existiert, versteht man unter der Güte der Lösung den Abstand der erhaltenen Lösung zur analytischen Lösung in einer geeigneten Sobolev-Norm und bricht ab, falls der Abstand eine vorgegebene Toleranz unterschritten hat.

Analytische Referenzlösungen existieren jedoch nur in den seltensten Fällen. Also muß das Güte- bzw. Abbruchkriterium nur durch berechnete Größen ausgedrückt werden. Es wurden zwei Kriterien implementiert und getestet:

1. Residuenbasiertes Güte- bzw. Abbruchkriterium
2. Differenzenbasiertes Güte- bzw. Abbruchkriterium.

Es sei u_k^i der Wert der Lösung des i -ten Iterationsschritts am Knoten k . Analog bezeichne f_k den Wert der rechten Seite am Knoten k . Dann kann man u^i , Au^i und f als Vektoren auffassen, deren Dimension gleich der Anzahl der Gitterpunkte ist. Für diese Vektoren $\mathbf{a} = (a_k)_{k=1}^N$ kann dann die euklidische Norm definiert werden durch

$$(5.6) \quad \|\mathbf{a}\|_2 = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N a_k^2},$$

wobei N die Anzahl der Gitterpunkte ist. Das residuenbasierte Kriterium nimmt die euklidische Norm des Residuums der Iterationslösung als Maßstab für die Güte der Lösung

$$(5.7) \quad \|\mathbf{R}(\mathbf{u}^i)\|_2 = \|\mathbf{A}\mathbf{u}^i - \mathbf{f}\|_2.$$

Das differenzenbasierte Kriterium nimmt dagegen die euklidische Norm der Differenz zweier aufeinanderfolgender Lösungen als Maßstab für die Güte der Lösung :

$$(5.8) \quad \|\mathbf{u}^i - \mathbf{u}^{i-1}\|_2.$$

5.4.2. Vorbemerkungen zur Untersuchung des Konvergenzverhaltens

Zur Untersuchung des Konvergenzverhaltens des SC-Verfahrens sollen die folgenden drei Punkte untersucht werden :

- Konvergenzverhalten des Fehlers bzgl. einer analytischen Näherungslösung,
- Konvergenzverhalten der euklidischen Norm zweier aufeinanderfolgender Lösungen und
- Konvergenzverhalten der euklidischen Norm des Residuums der Lösung.

5.4.3. Konvergenzverhalten des Fehlers bzgl. einer analytischen Näherungslösung

Zur Analyse des Konvergenzverhaltens des Fehlers bzgl. einer analytischen Näherungslösung wurden numerische Experimente mit den Testbeispielen ACHSEN und SCHRÄG durchgeführt, da für diese Beispiele analytische Näherungslösungen zum Vergleich mit der numerischen Lösung bekannt sind.

Der Fehler zur Vergleichslösung wird vergrößert durch Unter- und Überschwinger der numerischen Lösung. Es stellt sich nun folgendes Problem. Einerseits wird durch Beseitigung der Crosswind-Oszillationen dieser Beitrag des Fehlers stark verringert. Andererseits wird durch die Addition von zusätzlicher Diffusion in Crosswind-Richtung das Verfahren und damit die Lösung mit einem neuen Fehler behaftet. Die Frage ist, ob der zweite Fehler gegenüber dem ersten gering ist.

Zuerst soll für das Testbeispiel ACHSEN der Fehler der Lösung des i -ten SC-Zyklus zur analytischen Näherungslösung untersucht werden. Denn für dieses Problem treten Über- und Unterschinger nur bei Rechnungen auf unstrukturierten und nicht auf strukturierten Gittern auf, da das Transportfeld parallel zu einer Gitterkante verläuft. Eine grafische Darstellung des Fehlers findet man in den Abbildungen A.40-A.45 im Anhang A.3.

Man erkennt, daß der Fehler auf den unstrukturierten Gittern, wo daß SC-Verfahren aktiv wird, nur halb so schnell konvergiert. Außerdem ist auf dem Gitter $us129x129u$ ein oszillationsartiges Verhalten des Fehlers zu beobachten. Die folgende Tabelle faßt die Ergebnisse zusammen. Der Eintrag gibt die Anzahl der SC-Zyklen an, bis Konvergenz erreicht ist. Falls keine Konvergenz erreicht wird, weil der Fehler oszilliert, wird dies mit O gekennzeichnet.

$h^{-1} + 1$	ACHSEN	
	strukturiert	unstrukturiert
33	5	12
65	6	15
129	8	>20 bzw. O

Nun soll für das Testbeispiel SCHRÄG der Fehler der Lösung zur analytischen Näherungslösung betrachtet werden. Hierbei treten sowohl auf dem strukturierten als auch auf dem unstrukturierten Gitter Über- und Unterschinger auf. Die grafische Darstellung des Fehlers findet man in den Abbildungen A.46-A.51 im Anhang A.3. Man erkennt, daß der

Fehler oszilliert. Auf den unstrukturierten Gittern sowie auf dem groben strukturierten Gitter $us33x33s$ nehmen die Oszillationen mit zunehmender Iterationszahl ab und der Fehler konvergiert. Auf den feineren strukturierten Gittern $us65x65s$ und $us129x129s$ bleiben diese Oszillationen bestehen. Die Größe der Oszillationen liegen auf dem Gitter $us65x65s$ bei ca. 1% und auf dem Gitter $us129x129s$ bei ca. 1,8% der Größe des Fehlers. Folgende Tabelle faßt die Resultate in der oben beschriebenen Art zusammen.

	SCHRÄG	
$h^{-1} + 1$	strukturiert	unstrukturiert
33	20	7
65	O	15
129	O	38

Das wünschenswerte Verhalten des Fehlers der iterierten Lösung zur analytischen Näherungslösung wäre es, daß der Fehler gegen eine Konstante konvergiert. Die Rechnungen des Testbeispiels ACHSEN auf strukturierten Gittern, wo das SC-Verfahren nicht aktiviert wird, zeigen, daß der Fehler ohne SC konvergiert. Bei Rechnungen auf unstrukturierten Gittern konvergiert das Verfahren nur halb so schnell. Für das Testbeispiel SCHRÄG erhält man für feine unstrukturierte Gitter nur eine langsame und für feine strukturierte Gitter (streng genommen) überhaupt keine Konvergenz.

Diese Beobachtung zeigt bereits, daß das SC-Verfahren auch bei langem Ausiterieren kein notwendigerweise konvergentes Verfahren ist. Darüberhinaus ist anzumerken, daß das langsame Konvergenzverhalte für feine Gitter den Rechenaufwand um mindestens eine Größenordnung vergrößert. Hier stellt sich sofort die Frage, inwieweit durch diesen enormen zusätzlichen Rechenaufwand eine wirklich bessere Lösung erhalten wird und welche Vorzüge diese ausiterierte Lösung gegenüber der Lösung besitzt, die durch einmalige Anwendung des Shock-Capturing erhalten wurde.

Abschließend soll das Konvergenzverhalten des Fehlers in Abhängigkeit von h untersucht werden. In der folgenden Tabelle wird das Fehlerniveau nach 40 SC-Iterationen dargestellt. Falls der Fehler oszilliert, wurde der Mittelwert des Fehlers gewählt.

	ACHSEN	
$h^{-1} + 1$	strukturiert	unstrukturiert
33	7.66e-02	9.36e-02
65	5.45e-02	6.89e-02
129	3.89e-02	5.13e-02

Auf dem strukturierten Gitter (also bei reiner SUPG-Stabilisierung) verhält sich der Fehler ziemlich genau wie $h^{0.5}$, während er sich auf dem unstrukturierten Gitter etwa wie $h^{0.45}$ verhält.

	SCHRÄG	
$h^{-1} + 1$	strukturiert	unstrukturiert
33	1.09e-01	9.20e-02
65	8.13e-02	7.59e-02
129	6,12e-02	5.66e-02

Für das Testbeispiel SCHRÄG verhält sich der Fehler auf dem strukturierten Gitter etwa wie $h^{0.42}$ und auf dem unstrukturierten Gitter wie $h^{0.3}$ (von $h = 32^{-1}$ auf $h = 64^{-1}$) bzw. $h^{0.42}$ (von $h = 64^{-1}$ auf $h = 128^{-1}$). Im Vergleich zur bloßen SUPG-Stabilisierung ist also eine geringfügige Verschlechterung der Konvergenzordnung festzustellen.

5.4.4. Konvergenzverhalten der euklidischen Norm zweier aufeinanderfolgender Lösungen

In diesem Abschnitt soll das Verhalten der euklidischen Norm zweier aufeinanderfolgender Lösungen in Abhängigkeit von der Anzahl der SC-Iterationen untersucht werden. Im Anhang A.4 sind in halblogarithmischer Darstellung die Differenznormen angegeben für die Testbeispiele SCHRÄG (s. die Abbildungen A.52-A.57), CIRCULAR (s. Abb. A.58-A.63) und PARABOL (s. Abb. A.64-A.66).

Das wünschenswerte Verhalten der Differenznorm wäre ein Konvergieren der Differenznorm beliebig genau gegen Null. Dies entspräche dem Erreichen eines stationären Zustands. Für die Mehrzahl der Tests wird die Residuennorm sehr klein. Für feinere strukturierte Gitter nimmt sie z.T. jedoch nur auf 10^{-5} ab, siehe die Abbildungen A.54, A.56 und A.62. Abgesehen davon, daß ein beliebig genaues Ausiterieren in der Differenznorm mindestens 40 Iterationen und somit gerade auf feineren Gittern sehr viel Rechenzeit benötigt, ist also nicht garantiert, daß das SC-Verfahren in der Differenznorm überhaupt gegen Null konvergiert. Ein beliebig genaues Ausiterieren in der Differenznorm ist daher als Abbruchkriterium weder möglich noch geeignet.

Die entscheidende Beobachtung ist nun, daß durch die erstmalige Wirkung des SC-Verfahrens die Differenznorm um einen Faktor 10 bis 100, verkleinert wird, während durch die folgenden Schritte bestenfalls eine Verkleinerung um den Faktor fünf erreicht wird, meistens aber nur um einen Faktor kleiner als zwei. Die folgende Tabelle faßt die Ergebnisse zusammen. Der Eintrag in einem Feld gibt an, um welchen Faktor die Differenznorm durch die erstmalige Anwendung des SC-Verfahrens verkleinert worden ist. Bei allen Tabellen gehört die erste Unterspalte zur Rechnung auf einem strukturierten, die zweite zum unstrukturierten Gitter.

$h^{-1} + 1$	SCHRÄG		CIRCULAR		PARABOL	
33	20	20	10	10		50
65	23	30	20	17		50
129	???	17	11	11		40

Bemerkung 5.3

Bei der Rechnung des Beispiels SCHRÄG auf dem Gitter $us129x129s$ weist die Lösung nach dem ersten Iterationsschritt aufgrund der crisscross-Vernetzung sehr starke Oszillationen am crisscross-Punkt des Ausströmrandes auf, die nach dem ersten SC-Schritt verschwinden. Daher wurde der Wert der zugehörigen Differenznorm mit ??? gekennzeichnet.

5.4.5. Konvergenzverhalten der euklidischen Norm des Residuums der Lösung

In diesem Abschnitt soll das Verhalten der euklidischen Norm des Residuums der Lösung in Abhängigkeit von der Anzahl der SC-Iterationen untersucht werden. Im Anhang A.5 sind

in halblogarithmischer Darstellung die Residuennormen angegeben für die Testbeispiele SCHRÄG (s. Abb. A.67-A.72), CIRCULAR (s. Abb. A.73-A.78) und PARABOL (s. Abb. A.79-A.81).

Das wünschenswerte Verhalten der Residuennorm wäre ein Konvergieren der Residuennorm gegen Null oder zumindest gegen einen konstanten Fehler. Der Verlauf der Residuennorm zeigt im wesentlichen für bestimmte Testbeispiele auf bestimmten Gittern denselben Verlauf wie die Differenznorm. Für den Testfall SCHRÄG, gerechnet auf den Gittern $us65 \times 65s$ und $us129 \times 129s$, und den Testfall CIRCULAR, gerechnet auf dem Gitter $us129 \times 129s$, verringern sich beide Normen nur während der beiden ersten Schritte sehr stark, um dann konstant zu bleiben. Ansonsten nimmt die Residuennorm im wesentlichen monoton ab, wenn man von den begleitenden kleinen Oszillationen absieht.

Die wichtigste Beobachtung ist wieder, daß durch den bzw. die ersten SC-Schritte das Residuum bereits entscheidend verkleinert wird. Man erkennt, daß das Residuum durch den ersten SC-Zyklus deutlich um mehr als einen Faktor zehn reduziert wird. Durch den zweiten SC-Zyklus wird das Residuum nochmal um einen Faktor von etwa fünf verkleinert. In der folgenden Tabelle wird der Faktor angegeben, um den das Residuum vom ersten zum zweiten Shock-Capturing-Zyklus abnimmt.

$h^{-1} + 1$	SCHRÄG		CIRCULAR		PARABOL	
33	25	33	40	12		25
65	3750	10	10	33		50
129	???	9	1E05	100		20

In der folgenden Tabelle wird der Faktor angegeben, um den das Residuum vom ersten zum dritten Shock-Capturing-Zyklus abnimmt.

$h^{-1} + 1$	SCHRÄG		CIRCULAR		PARABOL	
33	40	266	66	20		83
65	5000	66	80	166		142
129	???	250	2.5E06	333		111

Eine merkliche Verbesserung wird also bereits durch den ersten SC-Schritt erzielt.

5.5. Genauigkeit des Verfahrens

5.5.1. Lokalisation und Quantisierung der addierten Diffusivität

Ziel des Shock-Capturing ist es, Über- und Unterschwinger durch lokale Addition zusätzlicher Diffusion zu beseitigen. Diese Oszillationen können nicht direkt als Über- bzw. Unterschwinger erkannt werden. Man weiß lediglich, daß sie nur in der Umgebung von Grenzschichten auftreten können. Damit stellt sich die Frage, wie gut die implementierte Shock-Capturing-Methode Grenzschichten erkennt. Andererseits soll das Verfahren in Bereichen, wo keine Oszillationen auftreten, möglichst keine oder nur wenig Diffusivität addieren. Die Frage ist also, wieviel künstliche Diffusivität in solchen Regionen addiert wird. Außerdem soll die Wirkung von Formel 4.25 veranschaulicht werden. Ist ν_{dc} kleiner als ν_{supg} , so wird

zusätzliche Diffusivität nur in Crosswind-Richtung addiert. Anderenfalls wird zusätzlich zur Crosswind-Diffusion in Stromlinienrichtung Diffusivität der Größe $\nu_{dc} - \nu_{supg}$ addiert.

Zunächst wird das Testbeispiel SCHRÄG betrachtet. Gerechnet wurde auf strukturierten und unstrukturierten Gittern. Die grafische Darstellung der Ergebnisse dazu findet man im Teil A.6 des Anhangs als Abbildungen A.82-A.93.

Auffällig bei allen Grafiken ist, daß ν_{dc} am Ausströmrand etwa zwei- bis dreimal so groß wie am Einströmrand und dort etwa zwei- bis dreimal so groß wie im Innern des Gebietes ist. Die Grenzschicht am Ausströmrand wird also auch richtig erkannt, aber sie ist für praktische Zwecke uninteressant. Es sei ergänzt, daß ν_{dc} am Ausströmrand etwa halb so groß wie ν_{supg} ist, so daß gemäß Formel 4.25 sowohl im Gebietsinnern als auch am Ausströmrand Shock-Capturing-Diffusivität nur in Crosswind-Richtung addiert wird.

In einiger Entfernung zu den Grenzschichten ist $\nu_{dc} = 0$. Je feiner das Gitter, desto schmaler ist der Bereich, wo ν_{dc} deutlich nichtverschwindende Werte annimmt. Betrachtet man Schnitte in Crosswind-Richtung durch das Profil von ν_{dc} , so erkennt man deutlich, daß ν_{dc} eingeschränkt auf diesen Schnitt zwei Maxima besitzt. Besonders starke Diffusion wird also nicht mitten in, sondern am Rande der inneren Grenzschicht, wo ja die Über- bzw. Unterschwinger auftreten, addiert. Besonders gut ist dies zu erkennen in den Abbildungen A.82, A.84 und A.86.

Vergleicht man für feste Gitterfeinheit ν_{dc} für den zweiten, dritten und vierten Iterationsschritt, so stellt man fest, daß im Gebietsinnern das Profil von ν_{dc} ein wenig kleiner und glatter und der Bereich nichtverschwindender Werte von ν_{dc} ein wenig schmaler wird. Das ist darauf zurückzuführen, daß durch das Beseitigen der Über- und Unterschwinger die lokalen Residuen im zweiten Iterationsschritt kleiner geworden sind, was im Einklang mit dem Verhalten der Residuennorm steht.

Als Zwischenergebnis kann festgehalten werden, daß für das Testbeispiel 2 die implementierte Shock-Capturing-Methode die auftretenden Über- und Unterschwinger genau lokalisiert und an diesen Stellen gezielt künstliche Diffusivität addiert.

Für das Testbeispiel CIRCULAR betrachte man die Abbildungen A.94-A.105. Die am Ausströmrand addierte Diffusivität ist deutlich größer als die am Einströmrand addierte, und diese ist größer als die im Gebietsinnern. Interessant ist die Untersuchung von ν_{dc} in Abhängigkeit von der Transportgeschwindigkeit. Die addierte Diffusivität ist proportional dem Residuum und im vorliegenden Problem somit proportional der Transportgeschwindigkeit. Insbesondere am Ausströmrand läßt sich dies gut nachvollziehen. Man erkennt, daß ν_{dc} wie der Betrag der Transportgeschwindigkeit u proportional mit dem Abstand vom Ursprung zunimmt. Es sei ergänzt, daß sich ν_{dc} am Ausströmrand ähnlich wie ν_{supg} verhält, und etwa halb so groß ist.

Vergleicht man für eine feste Gitterfeinheit ν_{dc} im zweiten und dritten Iterationsschritt, so stellt man wieder fest, daß im Gebietsinnern das Profil von ν_{dc} kleiner und glatter und der Bereich nichtverschwindender Werte von ν_{dc} etwas schmaler wird. Auch kann man beobachten, daß am Rande der inneren Grenzschicht ν_{dc} größer als in der Mitte der Grenzschicht ist.

5.5.2. Verschmieren der Lösung

Die generelle Wirkung des diffusiven Terms einer Konvektions-Diffusions-Gleichung ist die, daß ein am Einströmrand vorgegebenes z.B. stufenförmiges Profil während des Transports senkrecht zu den Stromlinien des Geschwindigkeitsfeldes verschmiert wird. Je größer die Diffusivität des Mediums, desto stärker wird die Lösung verschmiert. Im letzten Abschnitt wurde dargestellt, daß zusätzliche Diffusivität nur in Grenzschichtnähe addiert wird. In diesem Abschnitt soll untersucht werden, wie dadurch die Grenzschicht zusätzlich verschmiert wird.

Die Ergebnisse findet man im Teil A.7 des Anhangs. In den Abbildungen A.106 bis A.153 werden jeweils die Höhenlinien nach der ersten bis vierten Shock-Capturing-Iteration gezeigt, wobei in der zweiten Iteration erstmalig Shock-Capturing-Terme addiert werden. Dicht beieinanderliegende Höhenlinien weisen auf scharfe Gradienten der Lösung hin und zeigen insbesondere an, wo die Grenzschichten liegen. Während der drei SC-Schritte verbreitert sich der Abstand der Höhenlinien nur unmerklich. Das zeigt das wichtige Ergebnis an, daß durch das verwendete Shock-Capturing-Verfahren der Gradient der Lösung nicht verschlechtert wird. Die Über- und Unterschinger erkennt man an den schmalen geschlossenen Kurvenzügen, die die Grenzschicht rechts und links umgeben. Man erkennt, daß diese Über- und Unterschinger weggedämpft werden.

5.6. Zusammenfassung und Folgerungen

5.6.1. Zusammenfassung der Ergebnisse

Abschließend sollen die Ergebnisse in Form von kurzen Antworten auf die zu Beginn dieses Kapitels gestellten Fragen zusammengefaßt werden.

1. Qualitative Analyse : Über- und Unterschinger werden fast vollständig beseitigt.
 - a) Das SC ist bei parabolischen und inneren Grenzschichten erfolgreich.
 - b) Der Erfolg der implementierten Shock-Capturing-Methode ist unabhängig von der Feinheit h des gewählten Netzes und davon, ob auf einem strukturierten oder unstrukturierten Gitter gerechnet wird.
 - c) Das SC wirkt auch bei (starken) lokalen Änderungen des Geschwindigkeitsfeldes erfolgreich.
2. Quantitative Analyse
 - a) Das Konvergenzverhalten des Fehlers der Lösung kann mit Oszillationen behaftet sein. Auch das Konvergenzverhalten der Norm der Differenz zweier aufeinanderfolgender Lösungen und der Norm des Residuums kann Oszillationen aufweisen.
 - b) Betrachtet man die Entwicklung der Norm der Differenz zweier aufeinanderfolgender Lösungen und des Residuums der Lösung, so wird vor allem durch den ersten aktiven SC-Schritt eine deutliche Verbesserung der Lösung erzielt. Auch qualitative Betrachtungen legen dies nahe, da die Über- und Unterschinger bereits durch den ersten aktiven SC-Zyklus beseitigt werden.

- c) Die Gradient der Lösung (in Grenzschichtnähe) wird nicht verschlechtert.
- d) Das Shock-Capturing wirkt nur ganz lokal in unmittelbarer Umgebung von Grenzschichten.
- e) Das implementierte SC-Verfahren stellt also einen Kompromiß dar. Einerseits werden Überschwinger fast vollständig beseitigt. Andererseits nimmt man kleinste Restüberschwinger in Kauf, damit der Gradient in Grenzschichten nicht verschlechtert wird.

5.6.2. Folgerungen für den Einbau des SC-Verfahrens in das Programmsystem PNS

Nach den in diesem Kapitel gewonnen Erkenntnissen ist es bei linearen Problemen ausreichend, einmalig Shock-Capturing-Diffusivität zu addieren. Damit kann das Shock-Capturing-Verfahren genauso als Stabilisierungsschema aufgefaßt werden wie das SUPG-Verfahren. Daher wird das SC-Verfahren in die Assemblierungsroutine eingebaut und somit das SC-Verfahren nicht in einer gesonderten Schleife ausiteriert.

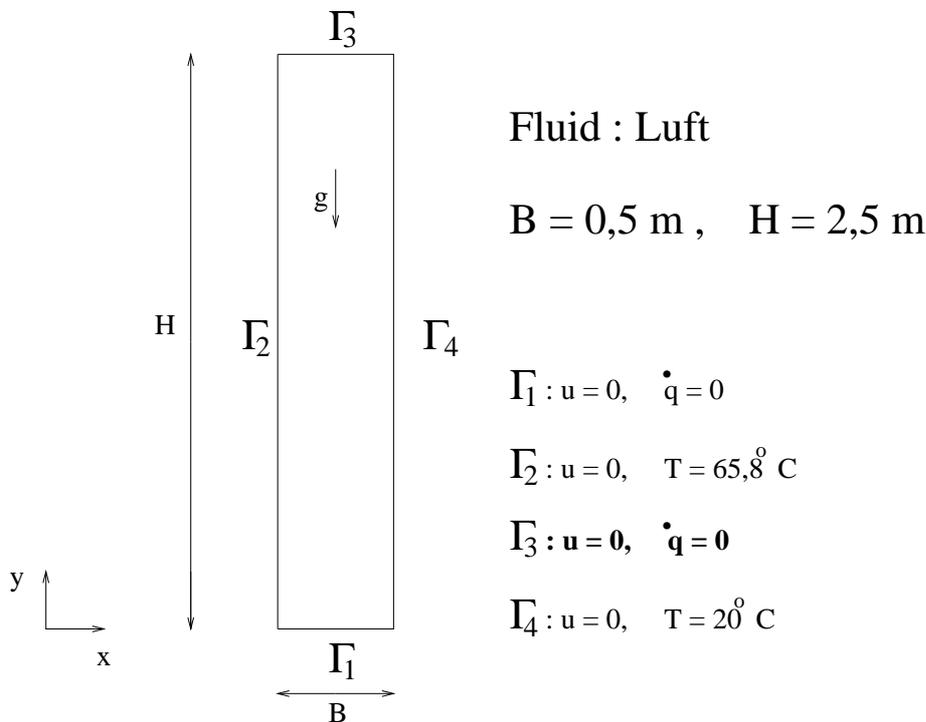
6. Anwendung des Shock-Capturing-Verfahrens auf das k/ϵ -Turbulenzmodell

In diesem Kapitel soll die Wirkung des Shock-Capturing-Verfahrens beim nichtisothermen k/ϵ -Turbulenzmodell untersucht werden. Als Testströmung wird das unten vorgestellte Cheesewright-Problem behandelt.

6.1. Vorbemerkungen zu den numerischen Experimenten

6.1.1. Der Testfall von Cheesewright

Im Rahmen dieser Arbeit wurde der Testfall von Cheesewright als Modellproblem für das nichtisotherme inkompressible k/ϵ -Turbulenzmodell gerechnet. In einem rechteckigen Hohlraum werden rechte und linke Begrenzungswand auf konstanten, aber unterschiedlichen Temperaturen gehalten, obere und untere Begrenzungswand sind adiabat. Im Hohlraum wird dadurch eine Zirkulationsströmung des Fluids induziert. Die genauen Daten entnimmt man der folgenden Abbildung.



Für diese Versuchsanordnung wurde eine detaillierte experimentelle Untersuchung von Cheesewright, vgl. [CKZ86], durchgeführt, mit der numerische Ergebnisse verglichen werden können.

6.1.2. Probleme bei der numerischen Lösung des k/ϵ -Turbulenzmodells

Zunächst sollen die Probleme erläutert werden, die bei der numerischen Lösung des k/ϵ -Turbulenzmodells in der bisher im Programm PNS implementierten Form auftreten. Erstens treten beim betrachteten Testproblem bei der k - und ϵ -Gleichung nach einer gewissen Anzahl von Zeitschritten in der Nähe der Grenzschichten Über- und Unterschwinger auf. Ein weiteres Problem liegt darin, daß k und ϵ zwar per Definition nichtnegative Größen sind, daß aber die numerischen Lösungen für k und ϵ im Gebietsinneren gehäuft negative Werte annehmen.

Welche physikalischen und mathematischen Probleme folgen nun hieraus? Zunächst sind negative Werte für k und ϵ aus physikalischer Sicht meist falsch, daß heißt, sie stellen keine real stattfindenden physikalischen Prozesse dar. Aus der Sicht der numerischen Analysis kann es zu folgenden Schwierigkeiten kommen. Negative Werte für k und ϵ können negative Reaktionsterme in den k - bzw. ϵ -Gleichungen bedeuten. Aus dem Lemma von Lax-Milgram folgt, daß dies die stabile numerische Lösbarkeit verschlechtern kann. Ein weiteres Problem besteht darin, daß k und ϵ im Gebietsinneren zu gewissen Zeitpunkten das Vorzeichen häufig wechseln. Dadurch können aus diesen Größen gebildete Quotienten, insbesondere auch die turbulenten Viskositäten ν_t , ν_k und ν_ϵ , betragsmäßig sowohl sehr groß werden, falls der Nenner in der Umgebung eines Vorzeichenwechsels beinahe verschwindet, als auch sehr klein werden, falls der Zähler sehr klein wird. Im letzteren Fall kann die in Gleichung (4.16) eingeführte lokale Peclet-Zahl größer als eins werden, was zu numerischen Problemen führen kann (vgl. Abschnitt 4.4).

Auch die eventuell auftretenden Unterschwinger liefern negative Werte. Zusätzlich zu den oben genannten Problemen kommt hierbei hinzu, daß die negativen Werte betragsmäßig mehrere Größenordnungen größer sind.

6.1.3. Bisherige Strategie in PNS

Zur Behandlung negativer Werte wurde bisher in PNS eine sog. Abschneidetechnik benutzt. So wird für den Reaktionsterm in der k -Gleichung getestet, ob $k^{m,i-1}$ größer als Null ist. Für den Reaktionsterm in der ϵ -Gleichung wird getestet, ob $\frac{\epsilon^{m,i-1}}{k^{m,i-1}}$ größer als null und kleiner als 10^5 ist. Falls ja, so wird dieser Term mit den vorgefundenen Werten berechnet, anderenfalls wird er zu null gesetzt.

Durch das Abschneiden wird die Lösung offenbar rauher, andererseits wird sich zeigen, daß dadurch die Stabilität des Verfahrens gesichert wird, vgl. Abschnitt 6.3. Diese Abschneidetechnik ist aber letztendlich nur eine nachträgliche Korrekturmaßnahme. Die wirklichen Probleme werden dadurch nicht beseitigt.

6.1.4. Motivation für den Einsatz einer Shock-Capturing-Technik

Es ist eine der Aufgaben dieser Arbeit zu untersuchen, ob die oben dargestellten Probleme durch den Einsatz einer Shock-Capturing-Technik wenigstens teilweise gelöst werden können. Denn im vorigen Kapitel wurde gezeigt, daß das Shock-Capturing-Verfahren erfolgreich Crosswind-Oszillationen bei Konvektions-Diffusionsgleichungen beseitigt, und k und ϵ sind im wesentlichen Lösungen von Konvektions-Diffusionsgleichungen. Dagegen ist die Hoffnung eher gering, daß das Shock-Capturing-Verfahren die häufigen Vorzeichenwechsel

im Gebietsinneren beseitigt und damit das Abschneiden überflüssig macht. Denn im Gebietsinneren erhält man für die betrachteten Zeitpunkte betragsmäßig kleine Werte, so daß dort das Shock-Capturing nicht merklich aktiv wird.

6.1.5. Die Lösungsstrategie nach Codina und Soto

Eine weitere Aufgabe dieser Arbeit ist der Vergleich des bisher in PNS implementierten Lösungsverfahrens mit einer Strategie, die sich sehr eng an einen Vorschlag von Codina und Soto hält, s.[CS99]. Der zugehörige Algorithmus wurde im Abschnitt 3.3.2 ausführlich vorgestellt. Bei den Experimenten wurden die Rechnungen daher sowohl für die bisher in PNS realisierte Variante (V1) als auch für die neu implementierte Variante (V2) durchgeführt. Es wird sich zeigen, daß die Formulierung nach Codina und Soto nur mit Verwendung einer Shock-Capturing-Technik stabil läuft (vgl. hierzu Abschnitt 6.3) und daß beide Formulierungen für große Zeiten die gleichen Lösungen liefern, vgl. hierzu Abschnitt 7.2.

6.2. Fragestellungen

Es sollen folgende Fragestellungen beantwortet werden

1. Sind die Verfahren stabil ? Die bisher in PNS implementierte Variante (mit Abschneidetechnik) ist numerisch stabil ohne Verwendung einer Shock-Capturing Technik. Ist nun (V1) stabil mit Verwendung einer Shock-Capturing-Technik ? Und ist Formulierung (V2) (mit Abschneidetechnik) nach Codina-Soto stabil ohne bzw. mit Shock-Capturing ?
2. Ist das Auftreten der Unterschwinger abhängig von der implementierten Formulierung der k - und ϵ -Gleichung nach (V1) bzw. (V2) ?
3. Wie wirksam ist das Shock-Capturing gegen Unterschwinger ? Werden die Unterschwinger betragsmäßig kleiner ?
4. Ist das Auftreten negativer Werte im Gebietsinneren für k und ϵ abhängig von der Wahl der Formulierung (V1) bzw. (V2) ?
Hilft das Shock-Capturing, negative Werte der Lösung zu vermeiden ?
5. Wird die Lösung durch Verwendung des Shock-Capturing-Verfahrens verfälscht (siehe 7.Kapitel) ?
6. Wie beeinflußt das SC-Verfahren das Konvergenzverhalten (siehe 7.Kapitel)?

6.3. Stabilität des Verfahrens

Die durchgeführten numerischen Experimente haben gezeigt, daß die bisher in PNS implementierte Variante (V1) (mit Abschneidetechnik) numerisch stabil bei der Verwendung einer Shock-Capturing Technik ist. Desweiteren hat sich gezeigt, daß die Variante (V2) ohne Verwendung einer Shock-Capturing-Technik nicht stabil läuft. Denn bei dieser Formulierung treten beim betrachteten Testproblem zu frühen Zeitpunkten zackenförmige Unter-

und Überschwinger auf. Diese sind Keime numerischer Oszillationen und werden erst durch Anwendung des Shock-Capturing-Verfahrens erfolgreich weggedämpft. Anderenfalls werden diese Oszillationen bereits beim nächsten Zeitschritt die Lösung völlig verdorben haben. Dies wird in Abbildungen B.13 und B.14 im Anhang B.1 gezeigt. Dort wird die Lösung der ϵ -Gleichung zum Zeitpunkt $tc = 7$ mit und ohne Shock-Capturing gezeigt. Man erkennt deutlich, wie die Oszillationskeime erkannt und weggedämpft werden. Die Variante (V2) mit Shock-Capturing ist also numerisch stabil. Eine anschauliche Begründung, warum Variante (V2) ohne Shock-Capturing instabil ist, wird in Abschnitt 6.5 gegeben.

6.4. Crosswind-Oszillationen und Shock-Capturing

In diesem Abschnitt soll das Auftreten von Unterschwingern bei den Lösungen für k - und ϵ -Gleichung für die beiden Varianten (V1) und (V2) dargestellt werden. Dann soll untersucht werden, ob und inwieweit diese Unterschwinger durch den Einsatz einer Shock-Capturing-Technik beseitigt werden können.

Zunächst sollen die Ergebnisse für Variante (V1) ohne Shock-Capturing beschrieben werden. Die zugehörigen Abbildungen findet man in den Abbildungen B.1, B.3, B.5 und B.7 im Teil B.1 des Anhangs. Zu den Zeitpunkten $tc = 6$ und $tc = 7$ weist besonders die k -Gleichung, s. Abb. B.1, aber auch die ϵ -Gleichung, s. Abb. B.5, deutliche Unterschwinger parallel zu den langen Seiten der Cavity auf. Die Größenordnung der Unterschwinger bei der k -Gleichung liegt bei 10% des Maximums von k . Nach dem neunten Zeitschritt sind diese Unterschwinger jedoch wieder verschwunden, s. Abb. B.3 und B.7.

Mit Verwendung der Shock-Capturing-Technik erhält man dieselben Ergebnisse, wie man anhand der Abbildungen B.2, B.4, B.6 und B.8 erkennt.

Es soll nun eine heuristische Begründung dafür gegeben werden, daß das Shock-Capturing-Verfahren keinen zusätzlichen Effekt bringt. Betrachtet man die Lage der Unterschwinger, so erkennt man, daß sie im Abstand von mehr als drei Gitterebenen von der Grenzschicht liegen. Eine Analyse zeigt, daß dort das elementweise Residuum in der Größenordnung $Res_u \approx 0.001$ und der Gradient in der Größenordnung $Grad u \approx 0.0005$ liegt. Damit wird aber dort nur eine unzureichend kleine künstliche Viskosität in der Größenordnung von $a_{sc} \approx 10^{-5}$ addiert. Zum Vergleich sei daran erinnert, daß die lokal addierte künstliche Viskosität a_{sc} in Grenzschichtnähe für die im vorigen Kapitel betrachteten Konvektions-Diffusionsprobleme in der Größenordnung $a_{sc} = 10^{-3}$ lag.

Bemerkung 6.1

Es wurde folgendes Zusatzexperiment mit dem im letzten Kapitel vorgestellten Testproblem SCHRÄG durchgeführt: Die durch das SC addierte künstliche Viskosität ν_{dc} wurde um einen Faktor zehn verkleinert. Damit ist ν_{dc} in der Grenzschicht trotzdem um einen Faktor zehn größer als in dem Bereich, wo die k -Gleichung Unterschwinger zeigt. Dann werden die Crosswind-Oszillationen durch das SC nicht beseitigt. Dieses Zusatzexperiment zeigt, daß das SC-Verfahren deshalb nicht die Unterschwinger bei der k -Gleichung beseitigen kann, weil für die betreffenden Elemente der Triangulierung der jeweilige Wert ν_{dc} zu klein ist.

Nun sollen die Ergebnisse für Variante (V2) (mit Verwendung der SC-Technik) behandelt werden. Die zugehörigen Abbildungen B.9 - B.12 sind im Teil B.1 des Anhangs zu finden. Zu den Zeitpunkten $tc = 4$ bis $tc = 8$ weist die ϵ -Gleichung Unterschwinger auf, die in

der Größenordnung der Unterschwinger der ϵ -Gleichung für Variante (V1) liegen. Dagegen weist die gemäß (V2) formulierte k -Gleichung keine Unterschwinger auf. Dies ist ein bemerkenswerter Vorteil von (V2) gegenüber (V1).

6.5. Negativität von k und ϵ

In diesem Abschnitt soll das Problem der Negativität der Werte von k und ϵ behandelt werden. Es hat sich in der bisherigen Arbeit mit der in PNS implementierten Variante (V1) gezeigt, daß der Algorithmus ohne die beschriebene Abschneidetechnik nicht stabil ist, d.h. er kollabiert nach wenigen Zeitschritten aufgrund numerischer Oszillationen. In diesem Abschnitt soll nun analysiert werden, wie die negativen Werte von k und ϵ im Gebiet verteilt sind, um zu erfahren, wo und wie oft die Abschneidetechnik aktiv werden muß. Daneben soll für die beiden Formulierungen (V1) und (V2) geklärt werden, ob durch die Verwendung einer Shock-Capturing-Technik das Auftreten negativer Werte vermindert oder sogar vermieden wird.

Die Ergebnisse sind im Anhang B.2 in den Abbildungen B.15 - B.22 zu finden. Negative Werte sind dunkel und positive Werte sind hell dargestellt. Man erkennt, daß k und ϵ ihr Vorzeichen häufig wechseln. Man beachte aber, daß die Größenordnung der Werte im Inneren des Gebiets um mehr als vier Zehnerpotenzen kleiner ist als in den Maxima in den Grenzschichten. Um eine Aussage über den Einfluß des Shock-Capturing auf die negativen Werte zu erhalten, werden die Abbildungen ohne und mit Shock-Capturing einander gegenübergestellt.

Man erkennt, daß durch das Verwenden der Shock-Capturing-Methode die Bereiche negativer und positiver Werte bei Variante (V1) nicht wesentlich verändert werden. Man erkennt jedoch bei der ϵ -Gleichung, daß in der linken unteren und in der rechten oberen Ecke kleinere Bereiche, wo ϵ das Vorzeichen wechselt, zu größeren Bereichen mit gleichem Vorzeichen zusammengefaßt werden. Dies stabilisiert den Algorithmus, da in Bereichen, wo ϵ , aber nicht k das Vorzeichen wechselt, der Abschneidemechanismus auf sehr kleinen Skalen abwechselnd ein und ausgeschaltet wird. Dadurch wird die Lösung dort rauher. Insgesamt muß aber festgestellt werden, daß durch die Verwendung der SC-Technik das gehäufte Auftreten negativer Werte nicht vermieden werden kann.

Bei der Variante (V2) kann man erkennen, daß bei der k -Gleichung die Bereiche negativer Werte etwas weniger, kleiner und insbesondere schmaler werden. Bei der ϵ -Gleichung beobachtet man eine Veränderung der Höhenlinien. Kleine Bereiche, wo die Lösung häufig das Vorzeichen wechselt, werden zu einem großen Teil zusammengefaßt zu größeren Bereichen ausschließlich negativer oder positiver Werte. Dies stabilisiert den Algorithmus. Denn bei der implementierten Abschneidetechnik in der ϵ -Gleichung wird getestet, ob ϵ/k größer als Null ist. Die Werte der Lösung für ϵ ohne Shock-Capturing wechseln gerade in den Ecken der Cavity auf sehr kleinen räumlichen Skalen das Vorzeichen. Bei der Lösung der k -Gleichung dagegen beobachtet man in den Ecken und am Rande der Cavity viel weniger Vorzeichenwechsel. Dadurch wird in der rechten unteren Ecke auf sehr kleinen räumlichen Skalen das Abschneiden abwechselnd ein- und ausgeschaltet. Dies ist anschaulich die Ursache der Oszillationen, die den Algorithmus (V2) ohne Shock-Capturing kollabieren lassen.

6.5.1. Einfluß des Linearisierungsschemas

Abschließend sollen die beiden Algorithmen (V1) und (V2) (jeweils mit Shock-Capturing) hinsichtlich des Auftretens negativer Werte verglichen werden. (V2) hat den Vorteil gegenüber (V1), daß es weniger Bereiche negativer Werte gibt und diese kleiner sind. Andererseits hat (V2) den Nachteil, daß die Lösungen für k und besonders für ϵ in der linken unteren und in der rechten oberen Ecke der Cavity viele Vorzeichenwechsel auf kleinen Skalen aufweisen. Deswegen kann man für (V2) in diesen beiden Ecken für kleine Zeiten keine glatten Lösungen erwarten. Im Gegenteil zeigt es sich, daß in diesen Bereichen die Lösungen zu späteren Zeitpunkten ($tc > 300$) kleine Oszillationen aufweisen können, die während der gesamten Rechnung nicht verschwinden. Diese Oszillationen stören aber nicht die Korrektheit des Verfahrens, vgl. Abschnitt 7.2. Die Rauheit der Lösung in den Ecken kann besonders dann zum Problem werden, wenn die Nichtlinearität in der k - und ϵ -Gleichung mehrfach ausiteriert werden soll oder wenn der k - und ϵ -Block, wie im Algorithmus (V2) vorgesehen, ausiteriert werden soll.

6.6. Zusammenfassung

Zusammenfassend kann festgehalten werden, daß unter dem Aspekt des Auftretens von Unterschwingern die Formulierung der Gleichungen nach Codina-Soto vorzuziehen ist. Bezüglich des Auftretens negativer Werte für k und ϵ kann keine der beiden Varianten favorisiert werden. Die Shock-Capturing-Technik hat sich als eine notwendige Stabilisierungsmaßnahme für (V2) erwiesen. Bei beiden Varianten gelingt es jedoch dem SC-Verfahren nicht, zwischenzeitlich auftretende Über- und Unterschwinger zu beseitigen oder das Auftreten negativer Werte für k und ϵ wesentlich zu vermindern.

Bei nichtisothermen Problemen, bei denen große Temperaturunterschiede auftreten, kann es vorkommen, daß die Lösung der Temperaturgleichung Über- und Unterschwinger aufweist. Es wäre interessant zu untersuchen, ob das Shock-Capturing-Verfahren diese Oszillationen erfolgreich beseitigen kann.

7. Vergleich zweier Linearisierungsstrategien für das nichtisotherme k - ϵ Turbulenzmodell

In diesem letzten Kapitel sollen die zwei in Abschnitt 3.2 vorgestellten Linearisierungsstrategien, die bisher in PNS realisierte Formulierung (V1) und die an Codina und Soto orientierte (V2), hinsichtlich ihres Konvergenzverhaltens verglichen werden. Codina und Soto haben für stationäre isotherme Rechnungen für (V2) ein deutlich besseres Konvergenzverhalten beobachtet, vgl. [CS99]. Es soll untersucht werden, ob sich diese Ergebnisse auch auf den instationären nichtisothermen Fall übertragen.

Bemerkung 7.1

Es sei an dieser Stelle noch einmal ausdrücklich darauf hingewiesen, daß der mit (V2) bezeichnete Algorithmus nicht exakt mit dem von Codina-Soto realisierten übereinstimmt, sondern eine Vereinfachung davon darstellt.

Als Testströmung wird wieder der Testfall nach Cheesewright betrachtet.

7.1. Fragestellungen

Es sollen folgende Fragen beantwortet werden.

1. Liefert das Verfahren nach (V1) mit Verwendung der Shock-Capturing-Technik dasselbe Ergebnis wie ohne ? Konvergieren beide Verfahren (V1) und (V2) gegen die gleiche Lösung für $t \rightarrow \infty$ oder gegen zwei verschiedene Lösungen ?
2. Erreichen die Algorithmen (V1) bzw. (V2) stationäre Lösungen ? Welcher Algorithmus zeigt ein besseres Konvergenzverhalten ?
3. Wird das Erreichen einer (eventuell vorhandenen) stationären Lösung durch die Verwendung einer Shock-Capturing-Methode verbessert ? Ist dies abhängig von der Anzahl der Shock-Capturing-Iterationen ?
4. Hängt das Erreichen einer (eventuell vorhandenen) stationären Lösung für (V2) von der Anzahl der Iterationen von k - bzw. ϵ - Gleichung oder von der Anzahl der Iterationen des k - ϵ -Blocks ab ?

7.2. Vergleich der von den Algorithmen gelieferten Lösungen

Im Rahmen dieses Kapitels werden folgende drei Varianten zur Lösung des k - ϵ -Turbulenzmodells verglichen : (V1) mit und ohne SC-Technik und (V2) mit SC-Technik. In diesem Abschnitt soll nun geprüft werden, ob alle drei Algorithmen gegen dieselbe Lösung konvergieren.

Aus dem Konvergenzverhalten (s. Abschnitt 7.3) der drei Algorithmen folgt, daß es sinnvoll ist, die Lösungen zu einem Zeitpunkt um $tc = 250$ zu betrachten. Die Ergebnisse findet man im Anhang B.3. Dort sind die Höhenlinien der Geschwindigkeitskomponenten u_1 und u_2 , der turbulenten kinetischen Energie k , der Dissipation turbulenter kinetischer Energie ϵ und der Temperatur θ abgebildet.

Die Lösungen der drei Algorithmen stimmen gut überein. Lediglich für u_1 sind geringe Unterschiede erkennbar. Dazu ist allerdings zu bemerken, daß die Darstellung durch Höhenlinien sehr sensibel bezüglich Abweichungen ist.

7.3. Untersuchung des Konvergenzverhaltens

In diesem Abschnitt sollen die zweite und die dritte Frage beantwortet werden, es soll also überprüft werden, ob das Konvergenzverhalten von (V1) durch Verwendung der betrachteten Shock-Capturing-Technik verbessert wird und dann das Konvergenzverhalten der beiden Algorithmen (V1) und (V2) verglichen werden.

7.3.1. Konvergenz- und Stationaritätskriterium

Zunächst soll das hier benutzte Konvergenz- bzw. Stationaritätskriterium erläutert werden. Es bezeichne u_k^i , $k = 1, 2$ die k -te Komponente der Lösung der Geschwindigkeitsgleichung zum Zeitpunkt $tc = i$. Man verwechsle diese Schreibweise nicht mit der im Abschnitt 5.4.1 benutzten Notation. Ferner bezeichne $\|u_k\|_2$ die diskrete L^2 -Norm von u_k . Dann wird als Maß für das Konvergenzverhalten des Algorithmus das Konvergenzverhalten der diskretisierten Zeitableitung des i -ten Zeitschritts, $\|u_k^i - u_k^{i-1}\|_2$, für die beiden Geschwindigkeitskomponenten u_k , $k = 1, 2$ verwendet.

Bemerkung 7.2

Falls die Zeitschrittweite nicht konstant ist (z.B. bei der Verwendung von Zeit-adaptiven Verfahren), muß die diskretisierte Zeitableitung des i -ten Zeitschritts durch $\|u_k^i - u_k^{i-1}\|_2 / \tau_i$ berechnet werden, wobei τ_i die Größe des i -ten Zeitschritts ist.

Es liegt nahe, dann vom Erreichen einer stationären Lösung zu sprechen, wenn $\|u_k^i - u_k^{i-1}\|_2 \rightarrow 0$ für $i \rightarrow \infty$ gilt.

7.3.2. Beeinflussung des Konvergenzverhaltens von (V1) durch die Shock-Capturing-Methode

Zunächst soll nur (V1) betrachtet werden und untersucht werden, ob das Konvergenzverhalten von (V1) durch Verwendung der Shock-Capturing-Technik verbessert wird. Die Ergebnisse findet man im Teil C des Anhangs in den Abbildungen C.1, C.2, C.5 und C.6. Dargestellt ist $\|u_k^i - u_k^{i-1}\|_2$ in Abhängigkeit von der Anzahl der Zeitschritte.

Ohne SC-Methode nimmt $\|u_k^i - u_k^{i-1}\|_2$ bis zum Zeitschritt $tc = 100$ stark ab, um dann bis zum Zeitschritt $tc = 500$ auf konstantem Niveau zu bleiben. Etwas nach dem Zeitschritt $tc = 500$ verfünffacht sich $\|u_k^i - u_k^{i-1}\|_2$ und behält dann dieses schlechtere Niveau bei, wobei $\|u_k^i - u_k^{i-1}\|_2$ leicht oszilliert, vgl. hierzu die Abbildungen C.1 und C.2.

Das Konvergenzverhalten mit SC ist in den Abbildungen C.5 und C.6 dargestellt. Man

erhält einen ähnlichen Verlauf der Norm wie bei den Rechnungen ohne SC, jedoch springt die Norm bei etwa $tc = 350$ Zeitschritten auf ein Niveau, daß etwa doppelt so hoch liegt wie ohne SC.

Bemerkung 7.3

Ab etwa dem Zeitschritt $tc = 350$ stimmen die Lösungen für (V1) mit und ohne Shock-Capturing nicht mehr sehr gut überein. Ob dies ein prinzipielles Problem bei der Verwendung des SC-Verfahrens in Verbindung mit (V1) darstellt, kann nur durch weitere Versuche an anderen Testbeispielen untersucht werden.

Als Ergebnis kann also festgehalten werden, daß durch die Shock-Capturing-Methode das Konvergenzverhalten bei (V1) nicht nur nicht verbessert worden ist, sondern es ist verschlechtert worden.

7.3.3. Vergleich des Konvergenzverhaltens von (V1) und (V2)

In diesem Unterabschnitt soll das Konvergenzverhalten von (V1) und (V2) verglichen werden. Da es sich im letzten Unterabschnitt gezeigt hat, daß (V1) ohne SC-Technik ein besseres Konvergenzverhalten aufweist, werden (V1) ohne SC-Technik und (V2) mit SC-Technik verglichen. Es wurde pro Zeitschritt nur ein Linearisierungsschritt gerechnet, d.h. $max_{dlc} = 1$ gesetzt. Bei (V2) wurde $max_{dlc} = 1$, $max_{k\epsilon} = 1$ und $max_L = 4$ gesetzt. Die Ergebnisse entnimmt man den Abbildungen C.1-C.4. Die Variante (V2) zeigt in drei wesentlichen Punkten ein besseres Konvergenzverhalten als (V1).

Erstens springt die Norm $\|u_k^i - u_k^{i-1}\|_2$ zu späteren Zeitschritten nicht auf ein höheres Niveau. Zweitens erreicht die Norm $\|u_k^i - u_k^{i-1}\|_2$ bei (V2) ein Niveau, das fast zehnmalkleiner ist als bei (V1). Das entnimmt man der folgenden Tabelle, in der die Mittelwerte von $\|u_k^i - u_k^{i-1}\|_2$ zwischen den Zeitschritten $tc = 550$ und $tc = 1000$ angegeben sind.

	ACHSEN	
	u_1	u_2
PNS ohne SC	2e-3	4e-3
CS mit SC	2e-4	5e-4

Die Werte für (V2) mit SC entnimmt man genauer der halblogarithmischen Darstellung in den Abbildungen C.7 und C.8.

Und drittens weist besonders die Komponente u_1 bei (V2) deutlich schwächere Oszillationen auf als bei (V1).

Bemerkung 7.4

Als Maß für die Geschwindigkeit der Algorithmen kann die Echtzeit genutzt werden, die vergeht, um eine gewisse Anzahl von Zeitschritten auf einer festen Architektur zu rechnen. Die vielen durchgeführten Rechnungen haben ergeben, daß die Variante (V2) mindestens genauso schnell läuft wie (V1). Durch die Erhöhung von max_L wird die Rechenzeit nur unwesentlich vergrößert.

Auch bei (V2) wird strenggenommen keine stationäre Lösung erreicht. Ein wichtiger Grund hierfür ist die Tatsache, daß die k - und ϵ -Gleichungen etwa ab dem Zeitschritt $tc = 350$

in den Ecken sehr kleine Oszillationen aufweisen, die sich zeitlich verändern. In den Abbildungen C.19 bis C.24 sind dazu die Lösungen der ϵ -Gleichung für verschiedene Zeitschritte dargestellt. Durch diese sehr kleinen Oszillationen wird aber die Richtigkeit der Lösungen für die k - und ϵ -Gleichung und auch für die Geschwindigkeitsgleichung nicht verändert. Lediglich auf kleinen Skalen oszillieren die Lösungen. Daher oszilliert auch die turbulente Viskosität an diesen Orten. Dies führt dann zu einem oszillationsbehafteten Konvergenzverhalten für die Norm der Geschwindigkeitskomponenten.

Es gelingt dem Shock-Capturing-Verfahren nicht, diese Oszillationen zu beseitigen, weil aufgrund zu kleiner lokaler Residua ν_{dc} zu klein ist.

7.3.4. Beeinflussung des Konvergenzverhaltens durch die Iterationsparameter

Nun soll geprüft werden, wie das Konvergenzverhalten von den Iterationsparametern max_{dlc} , $max_{k\epsilon}$ und max_L abhängt. Zunächst ist zu sagen, daß (V2) nicht stabil ist, falls $max_{k\epsilon} > 1$ ist. Nun soll die Abhängigkeit der Konvergenz von $L = max_L$ bei (V2) untersucht werden. Man beachte, daß in diesem Kapitel mit L eine maximale Iterationszahl und nicht die charakteristische Länge der Turbulenz bezeichnet wird. Die Ergebnisse sind im Anhang C in den Abbildungen C.7 - C.12 dargestellt. Für eine genauere Darstellung wurde eine halblogarithmische Darstellung gewählt. Man erkennt, daß das Konvergenzverhalten durch Erhöhung von L nicht merklich verbessert werden kann.

Abschließend soll der Vollständigkeit halber untersucht werden, wie bei (V1) und (V2) das Konvergenzverhalten von max_{dlc} abhängt. Die Ergebnisse sind in den Abbildungen C.13 bis C.18 dargestellt. Man erkennt, daß durch eine Vergrößerung von max_{dlc} das Konvergenzverhalten von (V1) leicht verbessert werden kann. Für (V2) ist so dagegen keine Verbesserung erzielbar. Es ist zu bemerken, daß es sich herausgestellt hat, daß eine Verdreifachung der Anzahl der Linearisierungsschritte pro Zeitschritt ungefähr auch eine Verdreifachung der Rechenzeit bedeutet. Es war aber ein erklärtes Hauptziel dieser Arbeit, ein schnelleres Konvergenzverhalten ohne Vergrößerung der Rechenzeit zu erzielen. Vom praktischen Standpunkt aus gesehen ist dieses Resultat daher eher uninteressant.

7.4. Zusammenfassung

Das Lösungsverfahren (V2) zeigt für den Testfall nach Cheesewright ein deutlich besseres Konvergenzverhalten als die bisher in PNS benutzte Lösungsstrategie (V1). Man erinnere sich daran, daß sich (V1) und (V2) erstens in der Formulierung und Linearisierung der k - und ϵ - Gleichung und zweitens in der Art der iterativen Lösung unterscheiden. Man kann davon ausgehen, daß sich die Variante (V2) noch optimieren läßt. Ein wichtiger Aspekt hierbei ist die Tatsache, daß bislang noch keine geeigneten Abbruchschranken für μ_k , μ_ϵ und μ_L für die Schleifen zum Ausiterieren von k , ϵ und der turbulenten Länge angebar sind. Das bedeutet aber, daß bei der Wahl $\mu_k = \mu_\epsilon = \mu_L = 0.0$ die Anzahl der Iterationen (fast) immer gleich der maximalen Anzahl von Iterationen ist und somit nicht gezielt gesteuert werden kann. Ein geringes Problem bei (V2) ist es noch, daß der Algorithmus nicht stabil ist, falls $max_{k\epsilon} > 1$ gewählt wird. Aber dieses Problem ist nicht von großer Bedeutung, da das Entscheidende die freie Wahl von max_L ist.

Es müssen weitere Versuche mit anderen Testproblemen durchgeführt werden, um die folgenden Fragen zu beantworten :

1. Liefert (V2) auch für andere Testprobleme dieselbe Lösung wie (V1) ?
2. Zeigt sich auch bei anderen Testproblemen ein klar besseres Konvergenzverhalten ?
3. Können geeignete Abbruchschranken für μ_k , μ_ϵ und μ_L angegeben werden ?
4. Ist (V2) stets instabil, falls $\max_{k\epsilon} > 1$ gewählt wird ?
5. Lassen sich die feinskaligen Oszillationen in den Ecken der Cavity beseitigen ?

Für einen Einbau der Iterationsstrategie nach Codina-Soto war ein tiefer Eingriff in das Programm PNS nötig. Es wurde eine Version implementiert, die das Lösungsverfahren (V2) realisiert. Gegen eine sofortige Übernahme von (V2) in das Programmsystem PNS sprechen aber noch einige praktische Gründe. Der Einbau der Iterationsstrategie nach Codina-Soto ist, wie schon gesagt, ein tiefer Eingriff in das Programm PNS. Außerdem ist die Korrektheit und die Stabilität der bisher implementierten Variante von Seite der TU Dresden anhand vieler, oft auch praxisrelevanter Testrechnungen meist erfolgreich getestet worden. Eventuell auftauchende Probleme der bisher realisierten Fassung sind größtenteils bekannt. Dagegen ist der Algorithmus (V2) erst an einem relativ einfachen Beispiel getestet worden, seine Vor- und Nachteile bei anderen Testproblemen sind noch nicht bekannt. Aus Zeitgründen und vor allem aus Mangel an geeigneten weiteren Testproblemen mußte auf weitere Tests verzichtet werden. Aus diesen Gründen wird auf einen vollständigen Einbau des Algorithmus (V2) in eine neue Version von PNS vorerst verzichtet.

7. Vergleich zweier Linearisierungsstrategien für das nichtisotherme k - ϵ Turbulenzmodell

8. Zusammenfassung und Ausblick

8.1. Rückblick

Seit mehr als hundert Jahre beschäftigen sich nun Wissenschaftler - Ingenieure, Physiker und Mathematiker - mit turbulenten Strömungen. Die Forschung hat in den letzten drei Jahrzehnten immense Fortschritte gemacht. Dies liegt zum einen an der rasanten Entwicklung der Computertechnologie. Zum anderen liegt es aber wesentlich auch an der mindestens ebenso bedeutsamen Entwicklung neuer mathematischer Verfahren, wie z.B. Stabilisierungstechniken, schnelle Löser für die bei der Diskretisierung erhaltenen linearen Gleichungssysteme, parallele Gebietszerlegungsalgorithmen und räumlich-adaptive Verfahren. Demgegenüber ist der Fortschritt in der physikalischen Modellbildung - Stichwort Turbulenzmodelle - vergleichsweise gering. Im Gegenteil, das Problem, komplizierte Strömungen wie z.B. das Ablöseverhalten turbulenter Strömungen richtig zu beschreiben, ist meist auf ein unzureichendes Turbulenzmodell zurückzuführen.

Im Rahmen dieser Diplomarbeit standen die Modellbildung und die numerische Lösungsstrategie im Vordergrund. Andere mathematische Aspekte wie zum Beispiel das Zusammenspiel von k/ϵ -Modell und Gebietszerlegungsalgorithmus konnten nicht verfolgt werden. Dabei ging es bei der Modellbildung allerdings nur darum, die Herleitung des k/ϵ -Modells mathematisch zu verstehen und nicht darum, die Vorhersagekraft dieses Modells zu testen. Zunächst wurde der mathematische Zugang zum k/ϵ -Turbulenzmodell nach [MP94] nachgezeichnet. Es stellte sich zum einen heraus, daß sich die Wirbelviskositätsannahme — die zentrale Annahme beim k/ϵ -Turbulenzmodell — nur für den zweidimensionalen Fall mathematisch einigermaßen begründen läßt. Dadurch wurde die Beschreibung der Turbulenz reduziert auf die Berechnung der turbulenten Viskosität. Die Gleichungen, aus deren Lösungen dann die turbulente Viskosität ν_t berechnet werden konnte, ließen sich nicht exakt herleiten. Insbesondere wurden dabei einige Resultate aus der Stochastik benötigt, die teils noch nicht bewiesen werden konnten und teils durch weitere Modellierungsannahmen vereinfacht werden mußten.

Im zweiten Abschnitt des Theorieteils wurde dann ein vollständiges Diskretisierungsverfahren für das erhaltene Gleichungssystem vorgestellt. Dabei war es nicht möglich, die verwendeten Lösungsalgorithmen zum k/ϵ -Modell mathematisch zu begründen und geeignete Konvergenzresultate anzugeben, da es hierfür beim gegenwärtigen Stand der Forschung noch keine befriedigenden Arbeiten gibt. Im Rahmen der Diskretisierung wurden auch die verwendeten Stabilisierungstechniken behandelt. Zum einen wurden SUPG und PSPG-Stabilisierungen verwendet, zum anderen eine Shock-Capturing-Technik nach [Cod93] zunächst für Konvektions-Diffusionsprobleme getestet und dann für Rechnungen zum k/ϵ -Modell eingesetzt. Auch die mathematische Theorie des Shock-Capturing-Verfahrens ist zum gegenwärtigen Zeitpunkt im wesentlichen noch nicht geklärt.

Ein wesentliches Ziel der Arbeit war es, zwei alternative Linearisierungs- und Iterationsstrategien zu vergleichen. Als Beispiel für ein nichtisothermes turbulentes Navier-Stokes-

Problem wurde der Testfall von Cheesewright untersucht.

Da eine theoretische Fundierung wesentlicher Teile dieser Arbeit beim gegenwärtigen Stand der Forschung noch nicht existiert, hat die gesamte Arbeit eher experimentellen Charakter. Statt strenger Beweise können oft nur heuristische Erklärungen gegeben werden. Dies liegt in der Komplexität und Kompliziertheit des Themas. Zur Legitimation dieses Vorgehens kann man sich aber stets die Tatsache vor Augen halten, daß gerade das k/ϵ -Modell seit Jahren mit Erfolg von Ingenieuren für viele Problemklassen verwendet wird, obwohl das Modell in mathematischer Hinsicht noch längst nicht verstanden ist.

Abschließend sei noch eine Bemerkung dazu gemacht, daß viele mathematische und physikalische Aspekte der Turbulenz in dieser Arbeit nicht behandelt wurden. In der hier gewählten Darstellung wurde versucht, daß der Leser stets den roten Faden von der mathematisch-physikalischen Modellbildung über das numerische Lösungsverfahren bis hin zu den konkreten Rechnungen sieht. Dazu wurde bewußt an einigen Stellen nicht abschweift. So wurde z.B. im Kapitel 2.4.3 darauf verzichtet, die spektrale Verteilung der kinetischen Energie und das Gesetz von Kolmogorov genauer zu behandeln. Und auch die Versuche, Turbulenz mit den Methoden der Stochastik zu analysieren, wie es z.B. in [BR77] oder in [Fri96] angegangen wird, konnten im Rahmen dieser Arbeit überhaupt nicht betrachtet werden.

8.2. Ausblick

In diesem die Arbeit beschließenden Abschnitt soll ein Ausblick darüber gegeben werden, wie die im Rahmen dieser Arbeit gewonnenen Erkenntnisse für das Programmpaket PNS genutzt werden. Für Konvektions-Diffusionsprobleme hat sich das Shock-Capturing-Verfahren als sehr erfolgreich herausgestellt. Es hat sich insbesondere gezeigt, daß das Shock-Capturing am günstigsten in die Routinen zur Berechnung der Steifigkeitsmatrix eingebaut wird. So wird es auch in PNS optional eingebaut. Insbesondere wird vom Shock-Capturing erhofft, daß ein Fehlerschätzer im Rahmen einer adaptiven Gitterverfeinerungsstrategie besser arbeitet. Ob sich diese Erwartung erfüllt, müssen freilich spätere Experimente zeigen.

Obwohl das Shock-Capturing beim k/ϵ -Modell nicht den erhofften Erfolg gezeigt hat, wird es ebenfalls optional in PNS eingebaut. Denn die Experimente wurden nur für ein Testbeispiel durchgeführt. Bei komplizierteren Problemen können gerade in der Temperaturgleichung an jenen Orten merkliche Über- und Unterschwinger auftreten, an denen Fluide stark unterschiedlicher Temperatur aufeinandertreffen. Es bleibt zu testen, ob das Shock-Capturing dort die gewünschte Wirkung zeigt.

Die Formulierung der Gleichungen nach Codina-Soto wurde ebenfalls optional in PNS übernommen. Aus vorwiegend praktischen Gründen wurde das neue Lösungsverfahren (V2) noch nicht in eine neue PNS-Version aufgenommen, obwohl eine im Rahmen dieser Arbeit fertig entwickelte Version bereits vorliegt und an wenigen Beispielen getestet wurde. Denn dazu soll noch in weiteren Experimenten untersucht werden, ob sich die beim Testproblem nach Cheesewright gezeigten Vorteile von (V2) auch bei anderen Testproblemen beobachten lassen.

A. Anwendung des Shock-Capturing auf ADR-Probleme

A.1. Qualitative Wirkung des Verfahrens

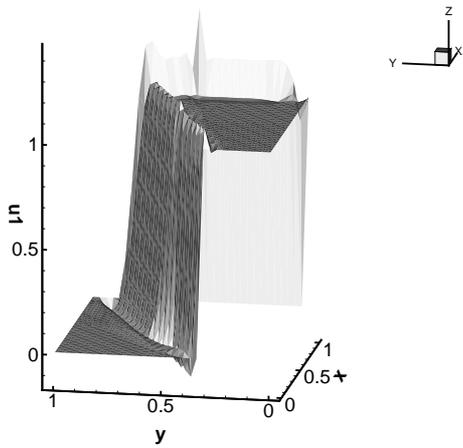


Abbildung A.1.: SCHRÄG,
us33x33s, $it_{sc} = 1$

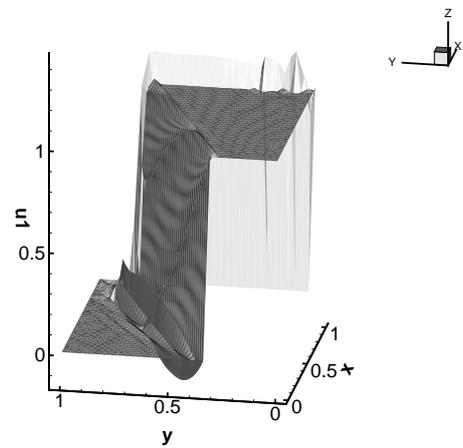


Abbildung A.2.: SCHRÄG,
us33x33u, $it_{sc} = 1$

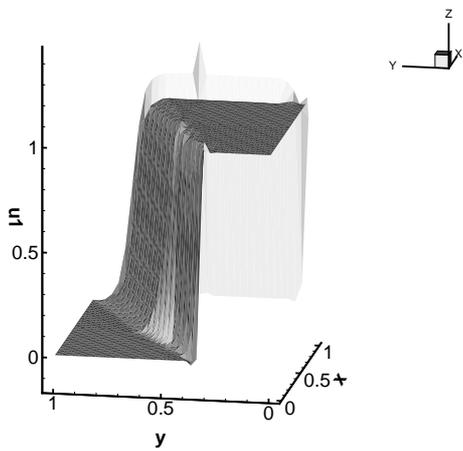


Abbildung A.3.: SCHRÄG,
us33x33s, $it_{sc} = 2$

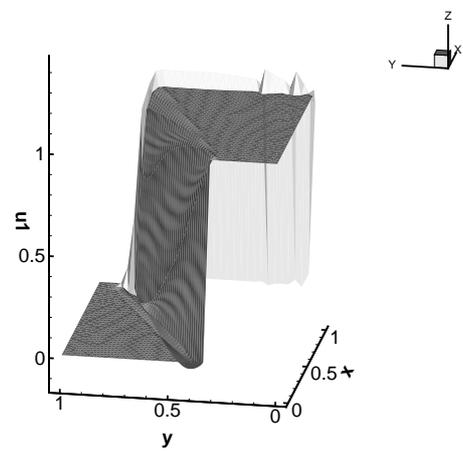


Abbildung A.4.: SCHRÄG,
us33x33u, $it_{sc} = 2$

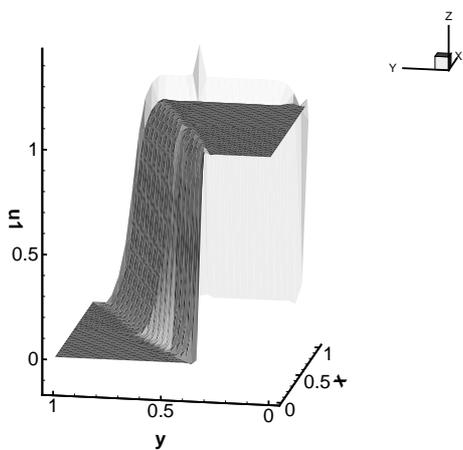


Abbildung A.5.: SCHRÄG,
us33x33s, $it_{sc} = 3$

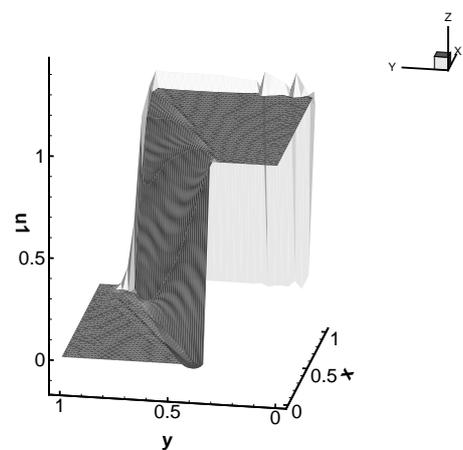


Abbildung A.6.: SCHRÄG,
us33x33u, $it_{sc} = 3$

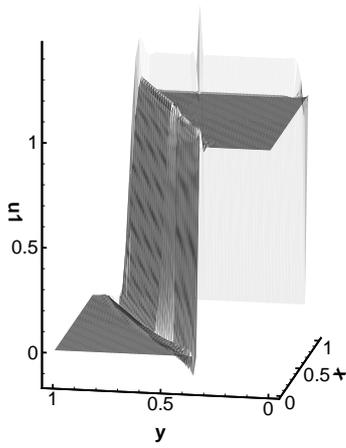


Abbildung A.7.: SCHRÄG,
us65x65s, $it_{sc}=1$

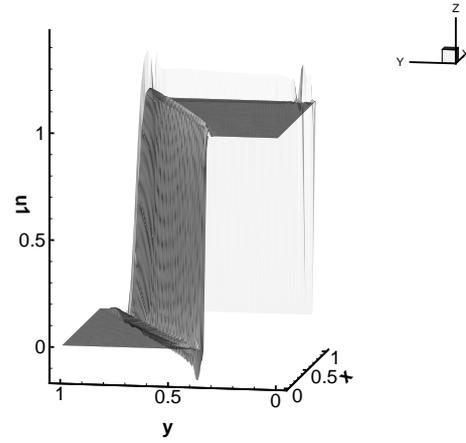


Abbildung A.8.: SCHRÄG,
us65x65u, $it_{sc}=1$

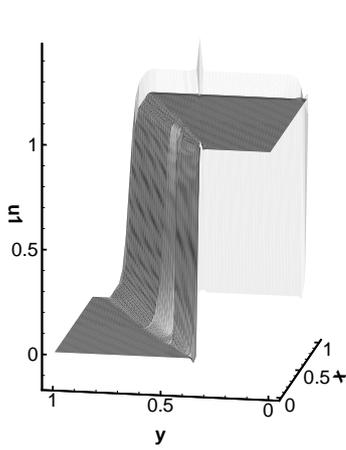


Abbildung A.9.: SCHRÄG,
us65x65s, $it_{sc}=2$

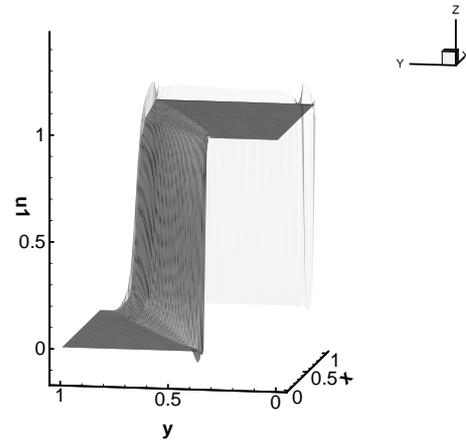


Abbildung A.10.: SCHRÄG,
us65x65u, $it_{sc}=2$

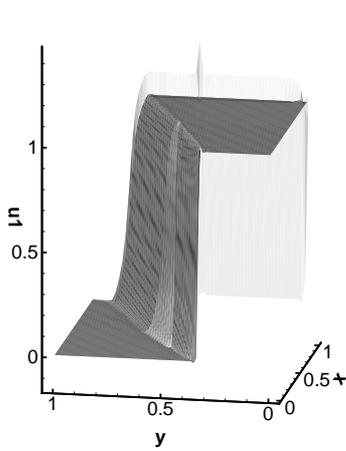


Abbildung A.11.: SCHRÄG,
us65x65s, $it_{sc}=3$

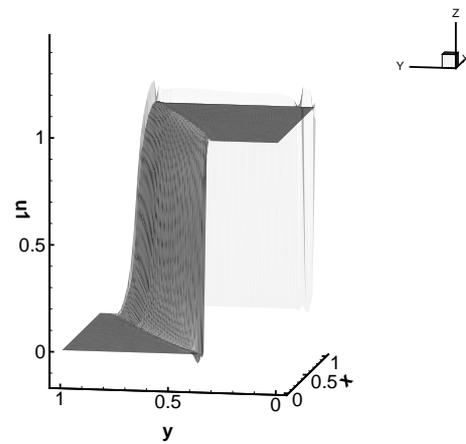


Abbildung A.12.: SCHRÄG,
us65x65u, $it_{sc}=3$

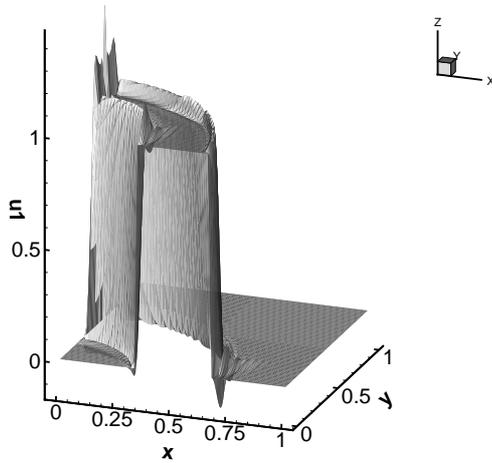


Abbildung A.13.: CIRCULAR,
us65x65s, $it_{sc}=1$

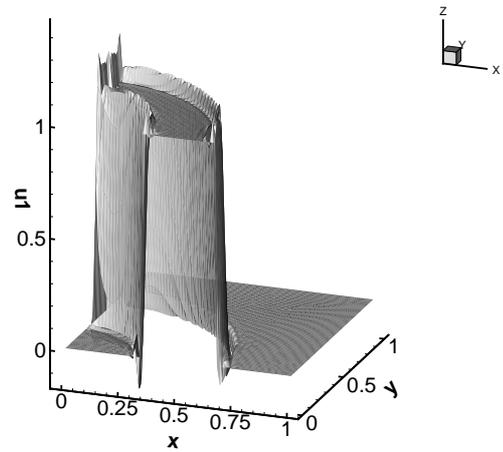


Abbildung A.14.: CIRCULAR,
us65x65u, $it_{sc}=1$

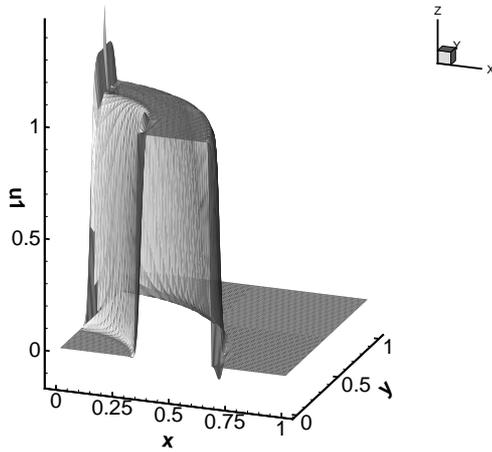


Abbildung A.15.: CIRCULAR,
us65x65s, $it_{sc}=2$

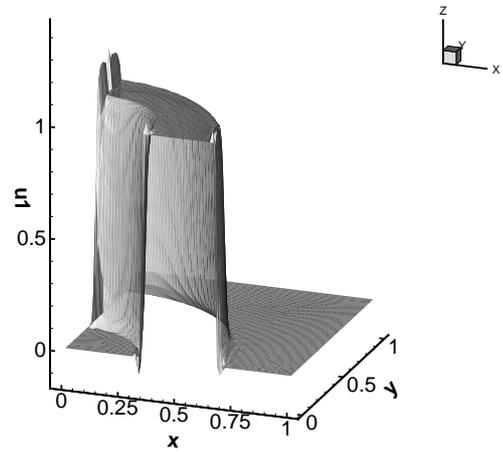


Abbildung A.16.: CIRCULAR,
us65x65u, $it_{sc}=2$

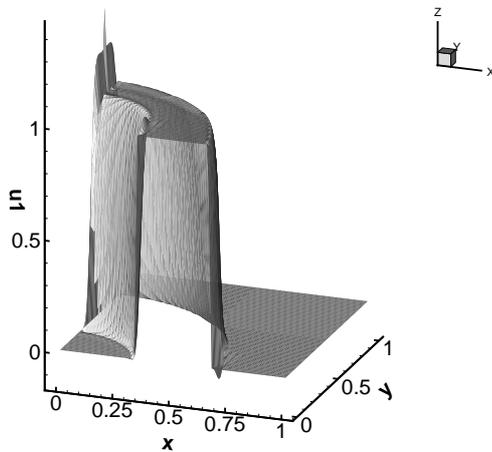


Abbildung A.17.: CIRCULAR,
us65x65s, $it_{sc}=3$

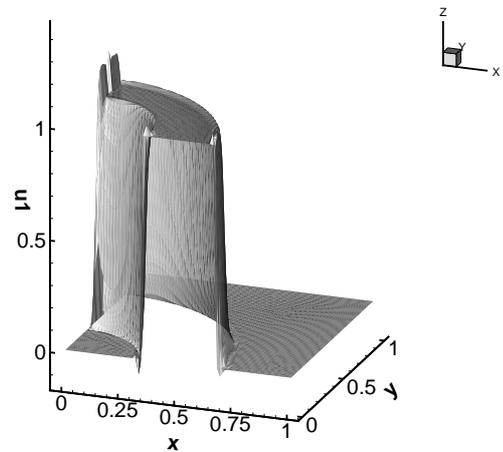


Abbildung A.18.: CIRCULAR,
us65x65u, $it_{sc}=3$

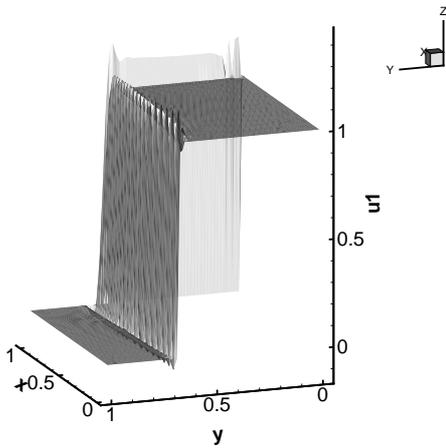


Abbildung A.19.: ACHSEN,
us65x65u, $it_{sc}=1$

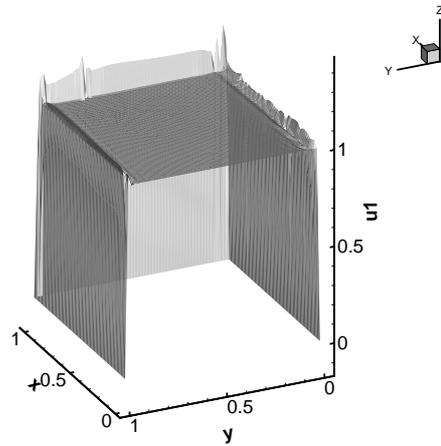


Abbildung A.20.: PARABOL,
us65x65u, $it_{sc}=1$

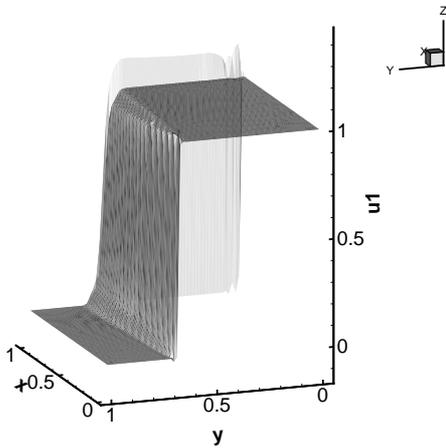


Abbildung A.21.: ACHSEN,
us65x65u, $it_{sc}=2$

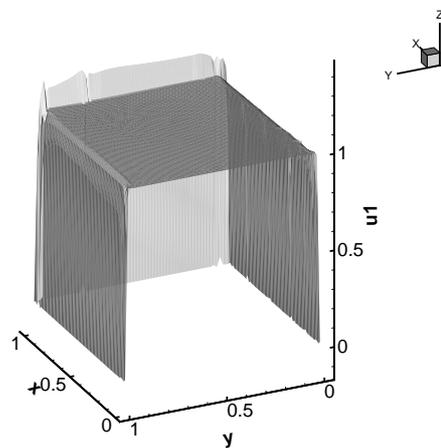


Abbildung A.22.: PARABOL,
us65x65u, $it_{sc}=2$

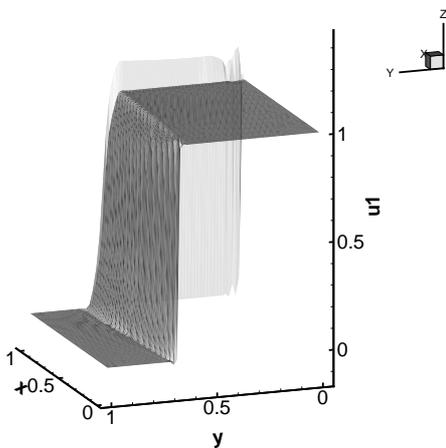


Abbildung A.23.: ACHSEN,
us65x65u, $it_{sc}=3$

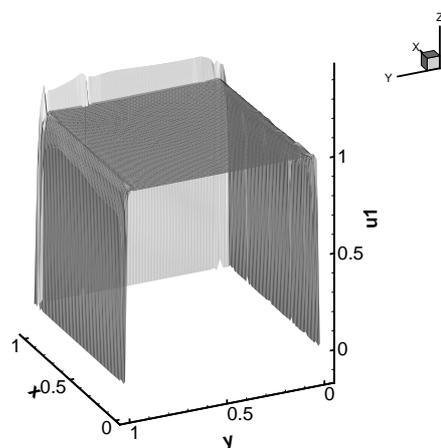


Abbildung A.24.: PARABOL,
us65x65u, $it_{sc}=3$

A.2. Qualitative Analyse - Querschnitte durch die Lösungen

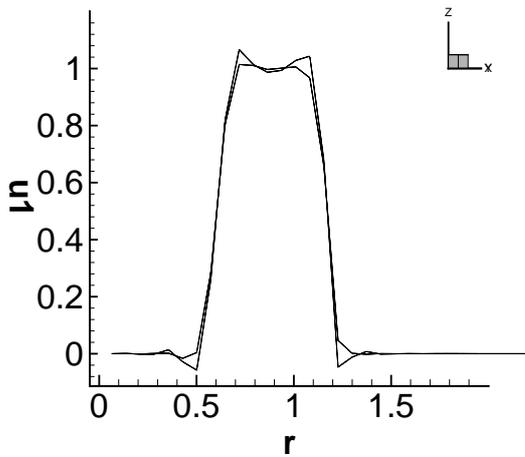


Abbildung A.25.: CIRCULAR,
us33x33s, $it_{sc}=1,2$

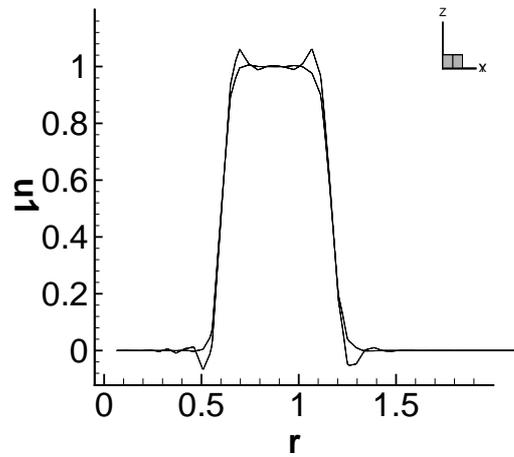


Abbildung A.26.: CIRCULAR,
us33x33u, $it_{sc}=1,2$

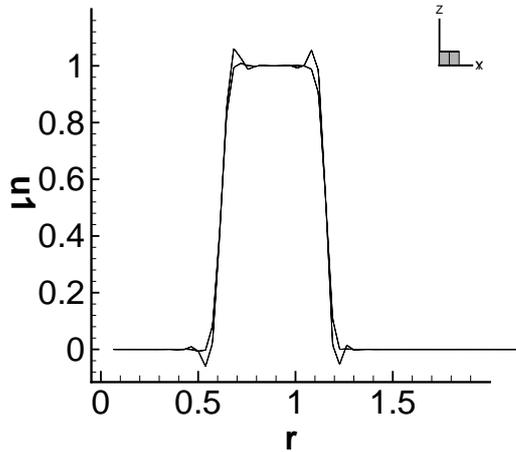


Abbildung A.27.: CIRCULAR,
us65x65s, $it_{sc}=1,2$

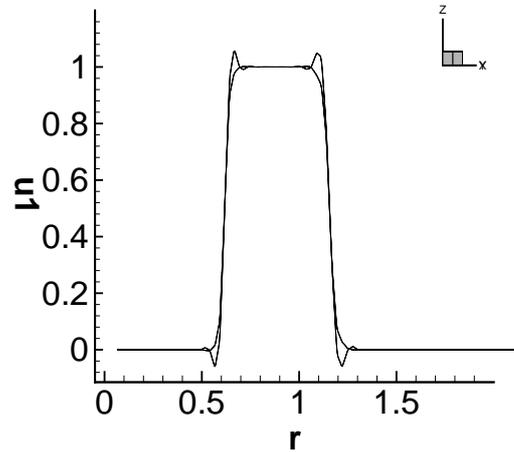


Abbildung A.28.: CIRCULAR,
us65x65u, $it_{sc}=1,2$

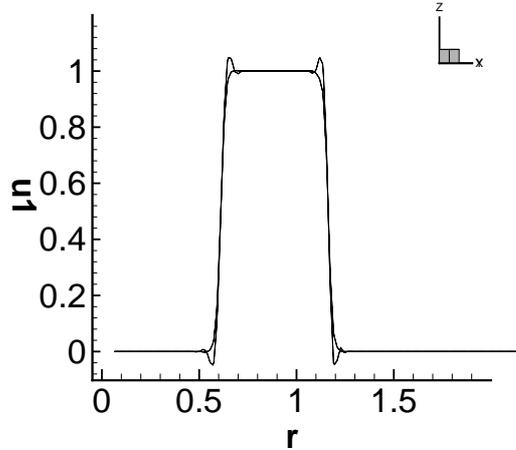


Abbildung A.29.: CIRCULAR,
us129x129s, $it_{sc}=1,2$

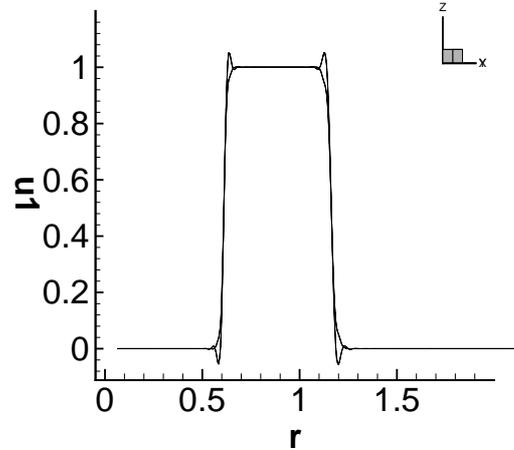


Abbildung A.30.: CIRCULAR,
us129x129u, $it_{sc}=1,2$

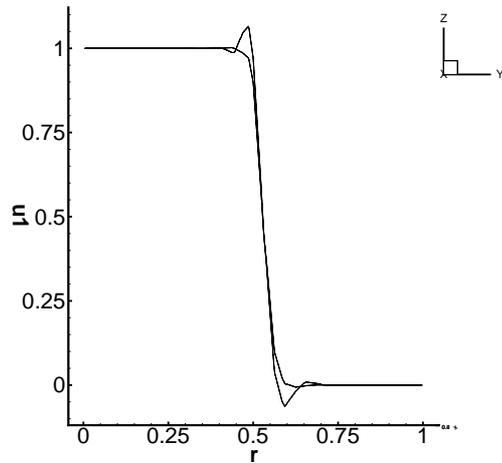


Abbildung A.31.: SCHRÄG,
us33x33s, $it_{sc}=1,2$

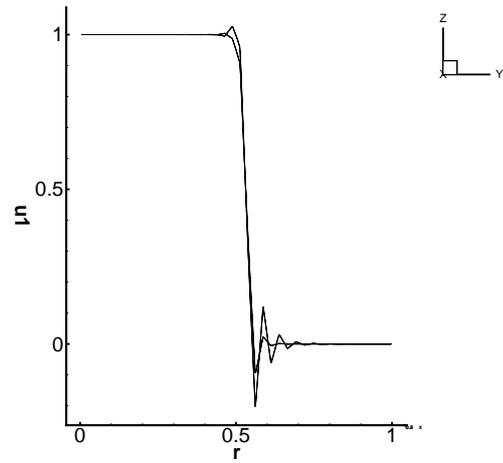


Abbildung A.32.: SCHRÄG,
us33x33u, $it_{sc}=1,2$

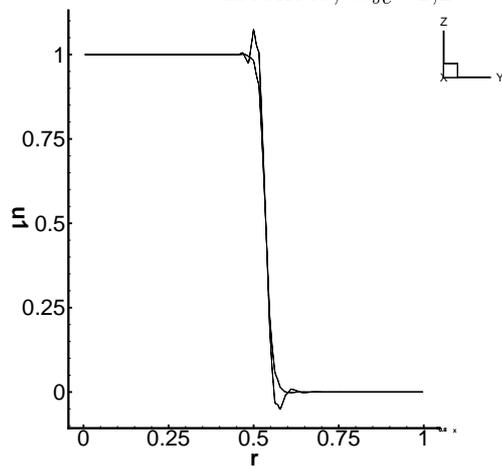


Abbildung A.33.: SCHRÄG,
us65x65s, $it_{sc}=1,2$

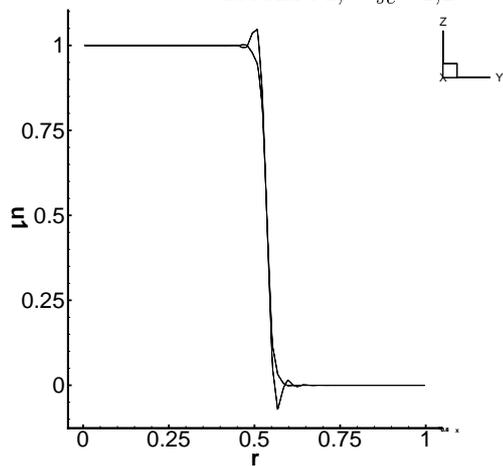


Abbildung A.34.: SCHRÄG,
us65x65u, $it_{sc}=1,2$

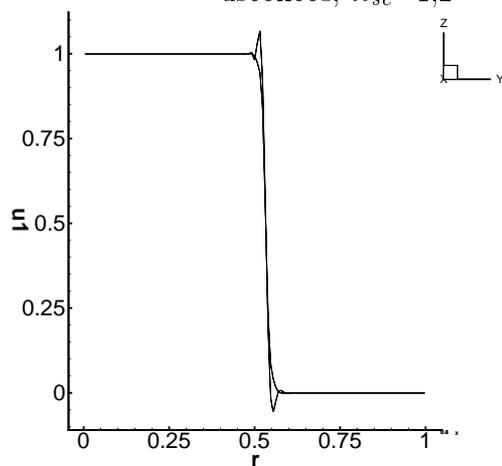


Abbildung A.35.: SCHRÄG,
us129x129s, $it_{sc}=1,2$

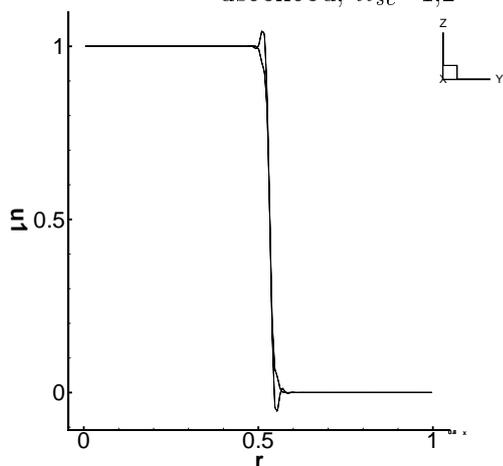


Abbildung A.36.: SCHRÄG,
us129x129u, $it_{sc}=1,2$

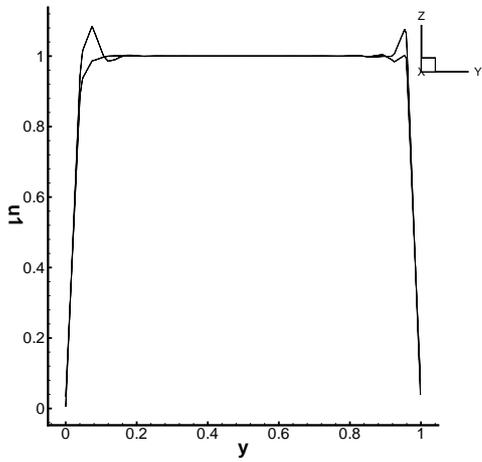


Abbildung A.37.: PARABOL,
us33x33u, $it_{sc}=1,2$

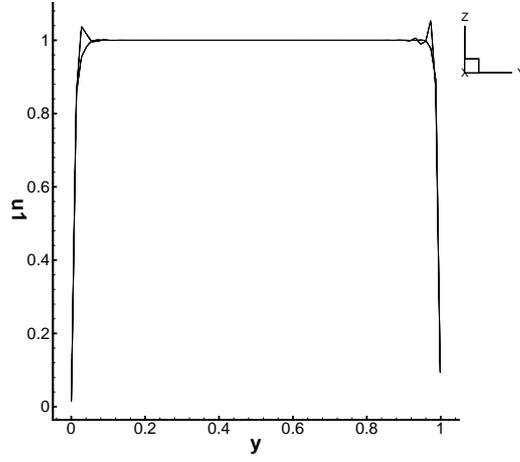


Abbildung A.38.: PARABOL,
us65x65u, $it_{sc}=1,2$

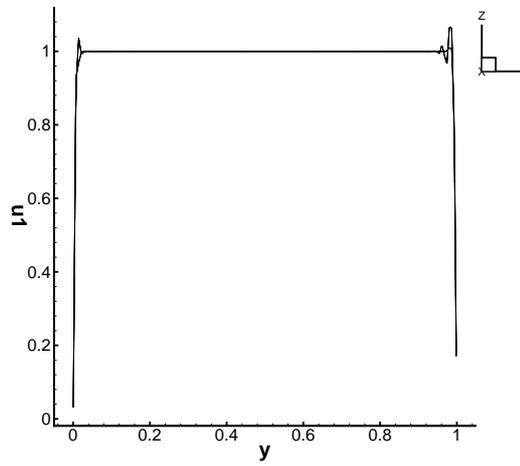


Abbildung A.39.: PARABOL,
us129x129u, $it_{sc}=1,2$

A.3. Konvergenz des Fehlers beim Shock-Capturing Verfahren

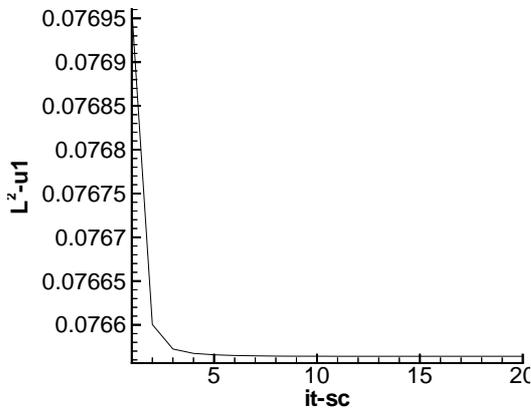


Abbildung A.40.: ACHSEN, us33x33s

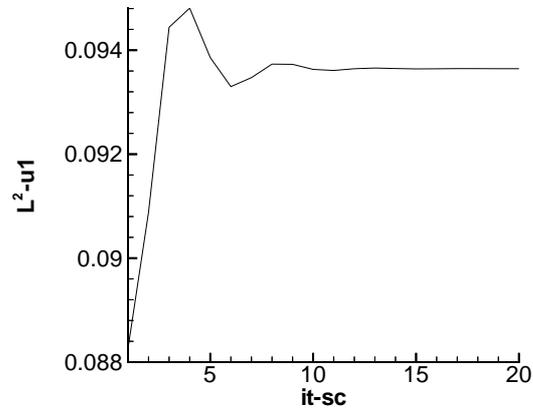


Abbildung A.41.: ACHSEN, us33x33u

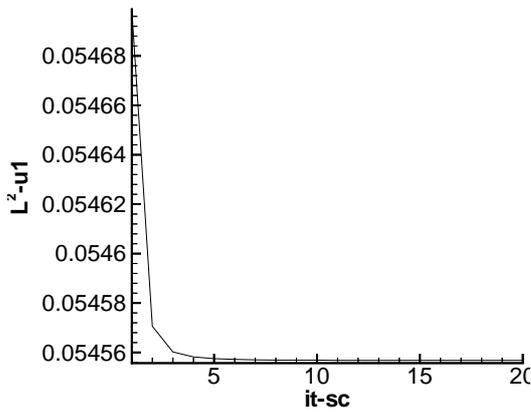


Abbildung A.42.: ACHSEN, us65x65s

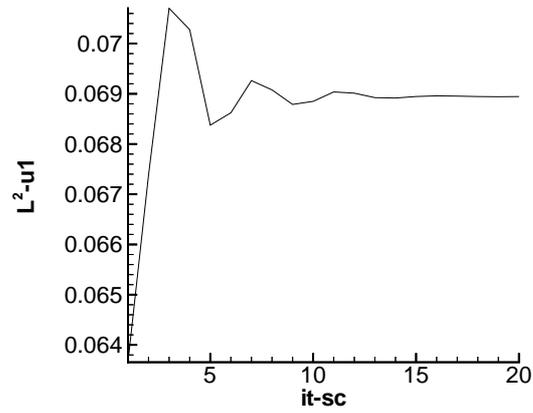


Abbildung A.43.: ACHSEN, us65x65u

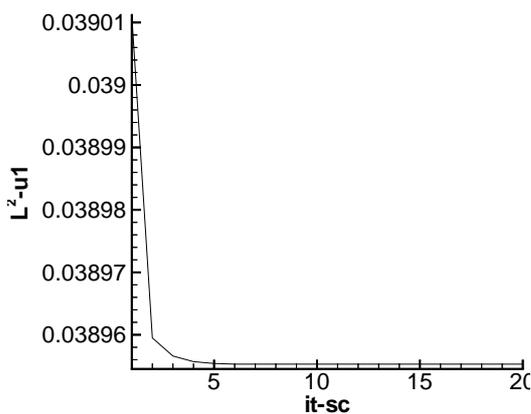


Abbildung A.44.: ACHSEN, us129x129s

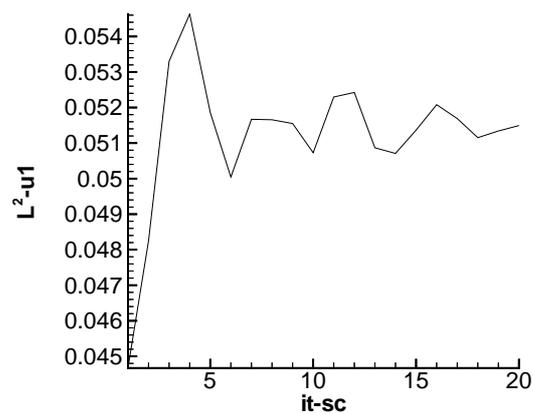


Abbildung A.45.: ACHSEN, us129x129u

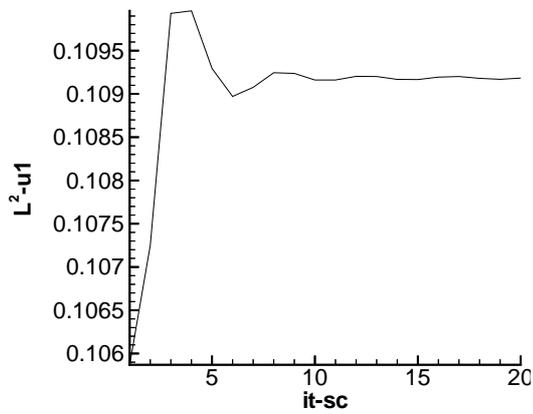


Abbildung A.46.: SCHRÄG, us33x33s

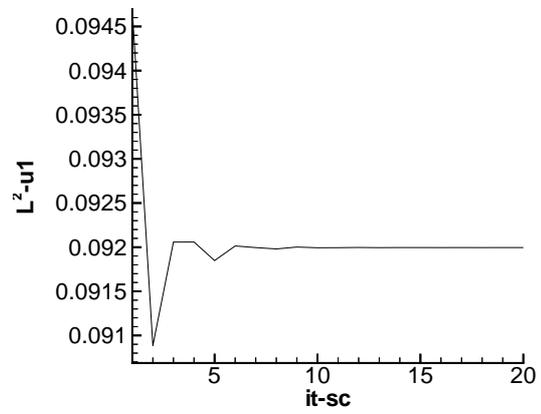


Abbildung A.47.: SCHRÄG, us33x33u

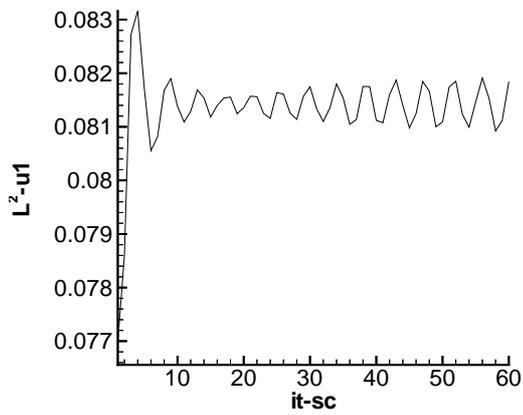


Abbildung A.48.: SCHRÄG, us65x65s

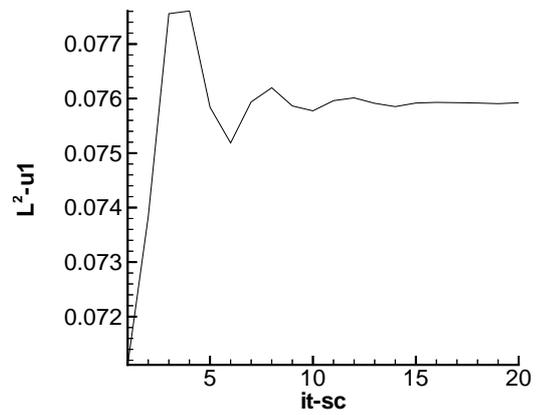


Abbildung A.49.: SCHRÄG, us65x65u

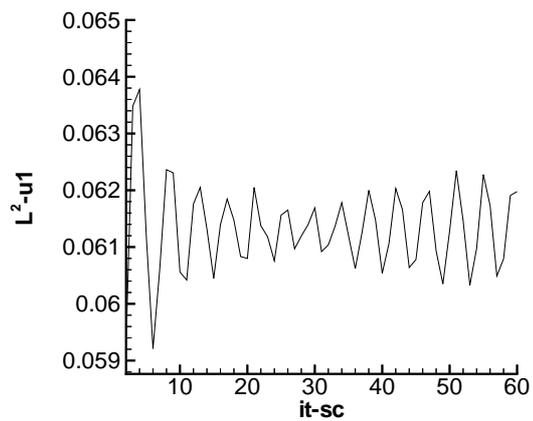


Abbildung A.50.: SCHRÄG, us129x129s

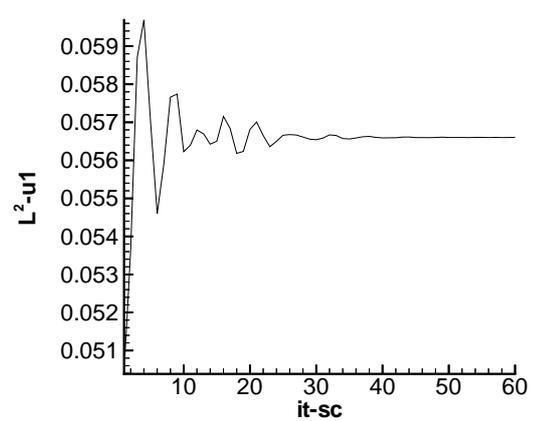


Abbildung A.51.: SCHRÄG, us129x129u

A.4. Konvergenz des Shock-Capturing in der Differenzennorm

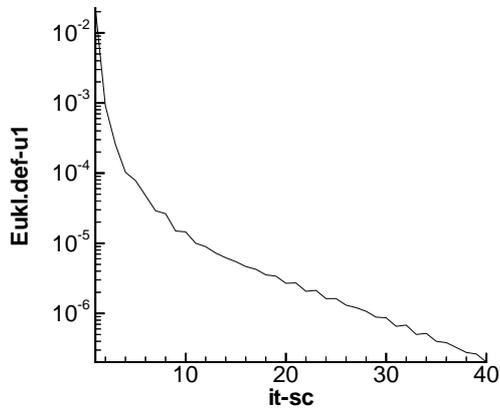


Abbildung A.52.: SCHRÄG, us33x33s

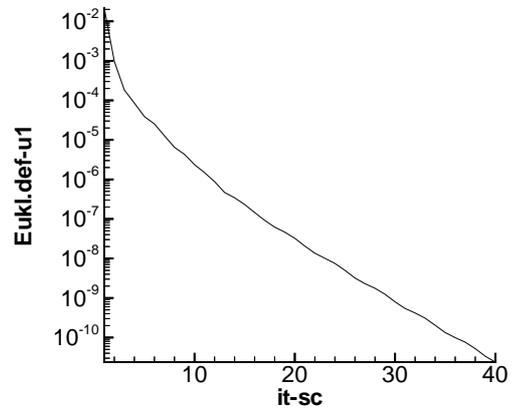


Abbildung A.53.: SCHRÄG, us33x33u

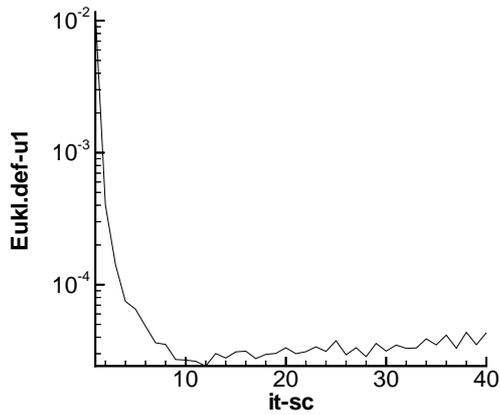


Abbildung A.54.: SCHRÄG, us65x65s

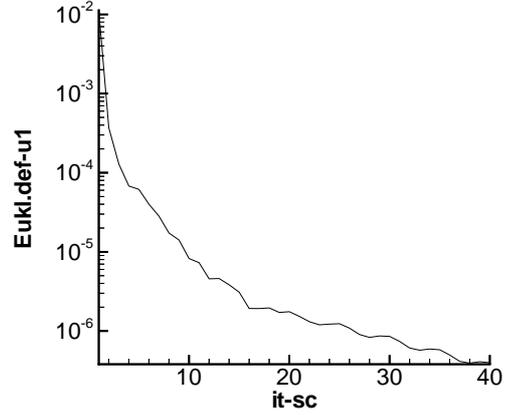


Abbildung A.55.: SCHRÄG, us65x65u

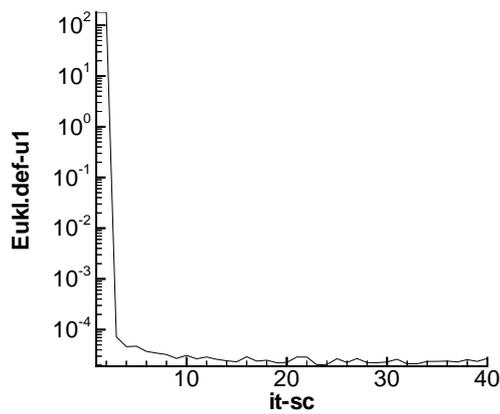


Abbildung A.56.: SCHRÄG, us129x129s

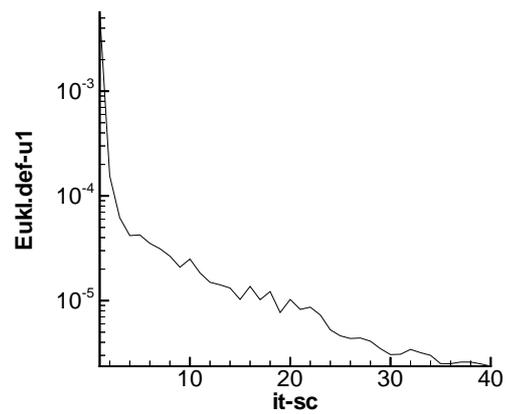


Abbildung A.57.: SCHRÄG, us129x129u

A.4. Konvergenz des Shock-Capturing in der Differenzennorm

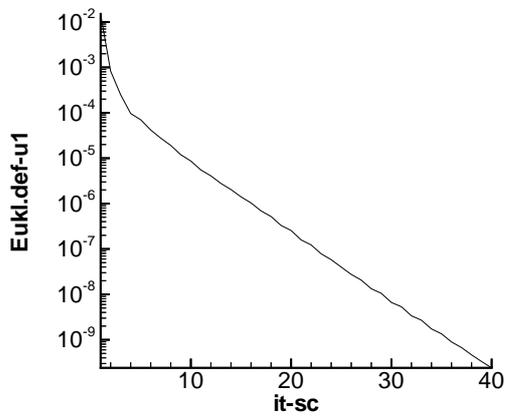


Abbildung A.58.: CIRCULAR, us33x33s

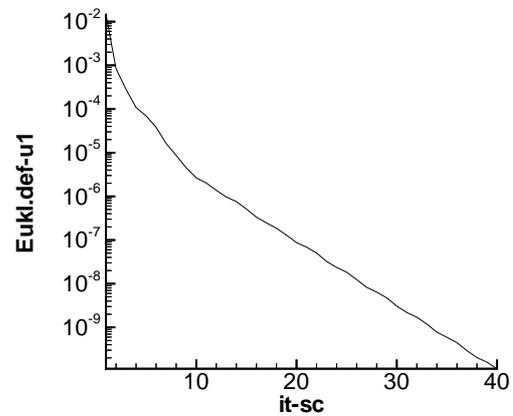


Abbildung A.59.: CIRCULAR, us33x33u

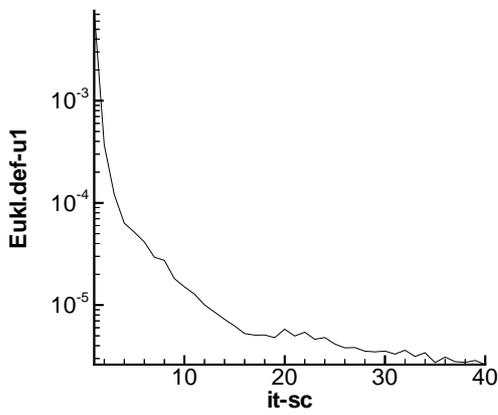


Abbildung A.60.: CIRCULAR, us65x65s

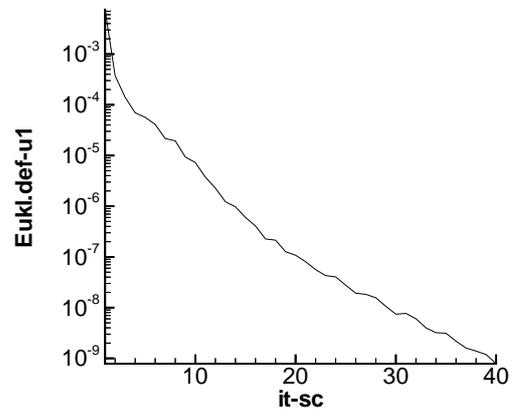


Abbildung A.61.: CIRCULAR, us65x65u

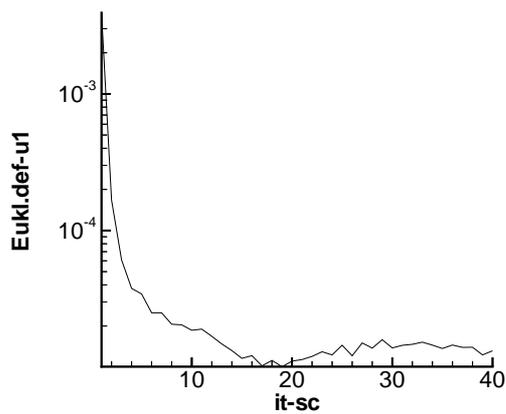


Abbildung A.62.: CIRCULAR,
us129x129s

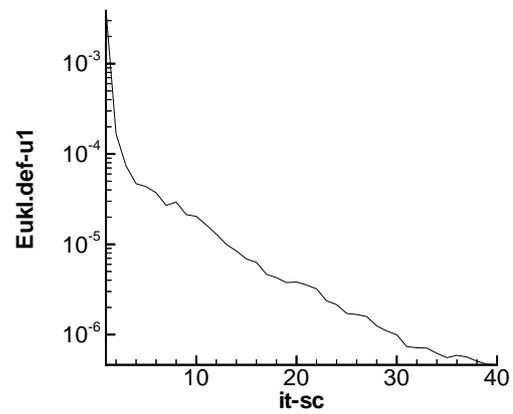


Abbildung A.63.: CIRCULAR,
us129x129u

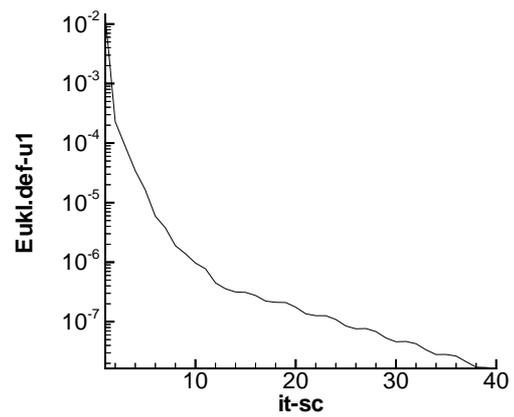
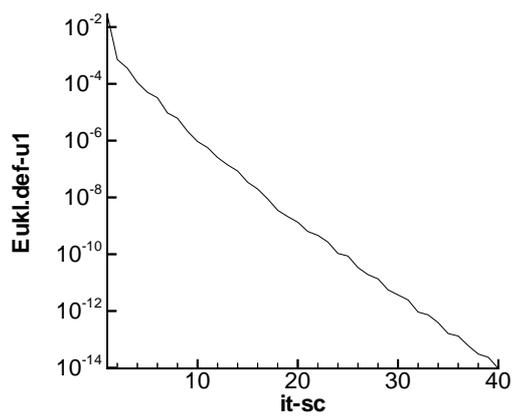


Abbildung A.64.: PARABOL, us33x33u Abbildung A.65.: PARABOL, us65x65u

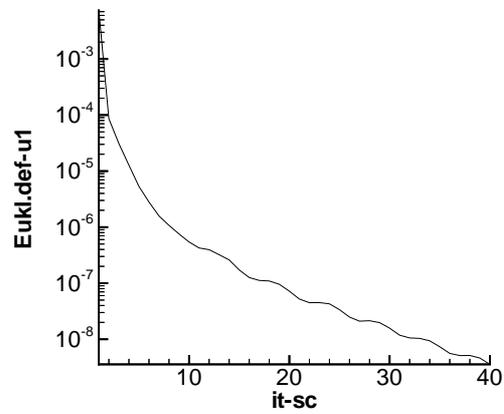


Abbildung A.66.: PARABOL, us129x129u

A.5. Konvergenz des Shock-Capturing in der Residuennorm

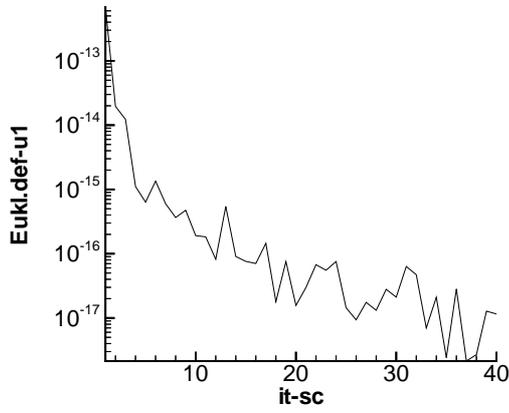


Abbildung A.67.: SCHRÄG, us33x33s

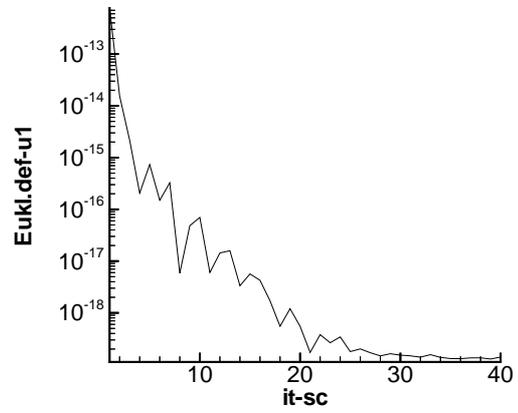


Abbildung A.68.: SCHRÄG, us33x33u

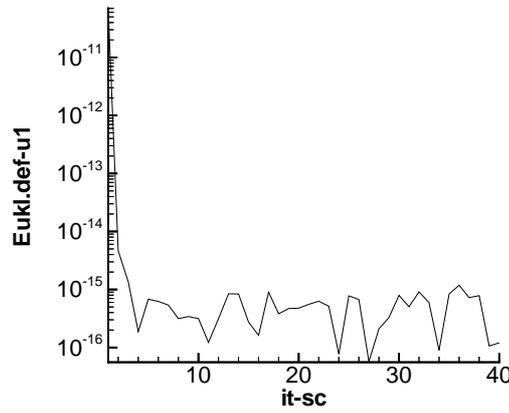


Abbildung A.69.: SCHRÄG, us65x65s

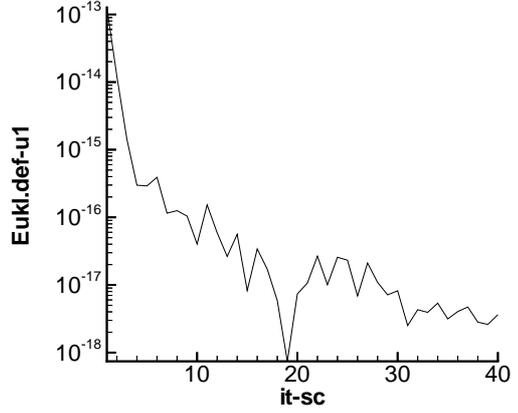


Abbildung A.70.: SCHRÄG, us65x65u

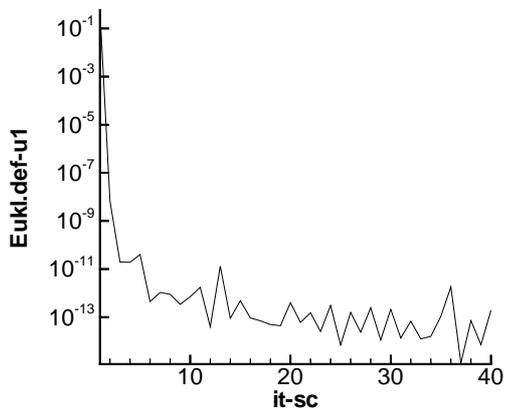


Abbildung A.71.: SCHRÄG, us129x129s

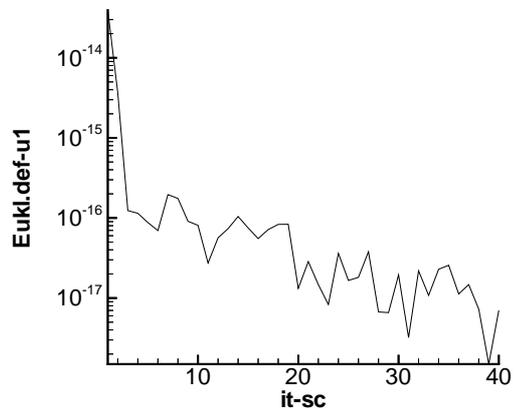


Abbildung A.72.: SCHRÄG, us129x129u

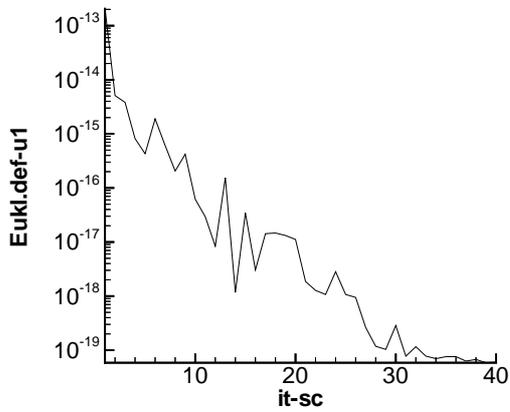


Abbildung A.73.: CIRCULAR, us33x33s

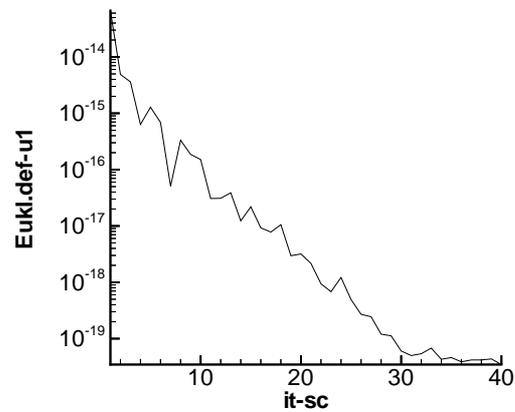


Abbildung A.74.: CIRCULAR, us33x33u

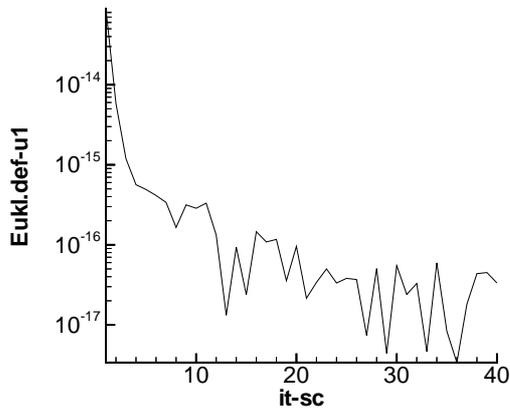


Abbildung A.75.: CIRCULAR, us65x65s

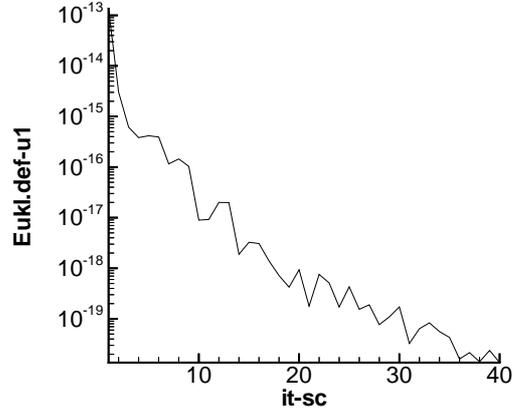


Abbildung A.76.: CIRCULAR, us65x65u

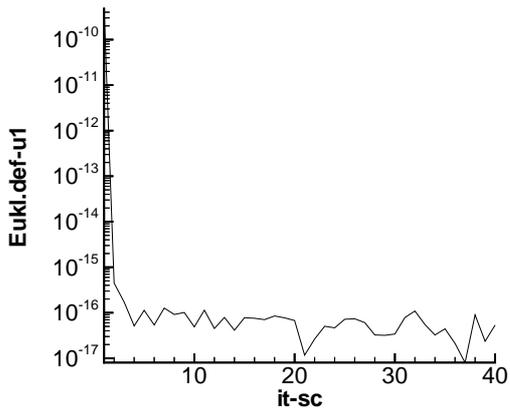


Abbildung A.77.: CIRCULAR,
us129x129s

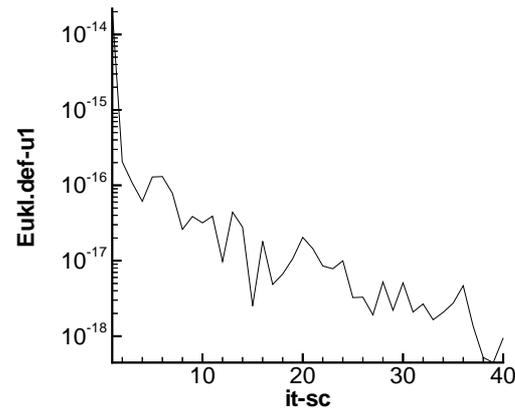


Abbildung A.78.: CIRCULAR,
us129x129u

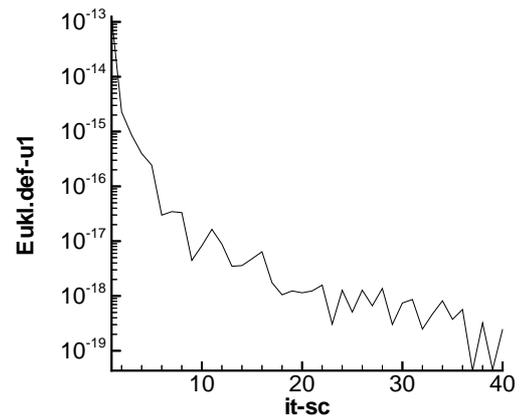
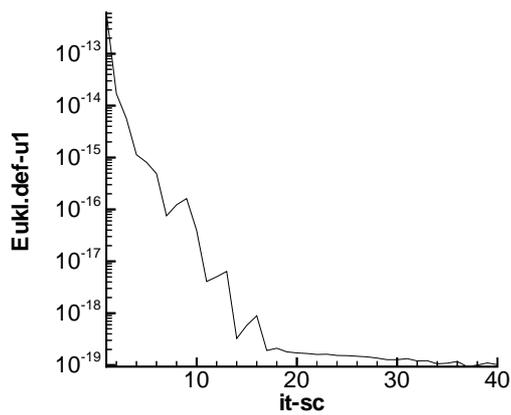


Abbildung A.79.: PARABOL, us33x33u Abbildung A.80.: PARABOL, us65x65u

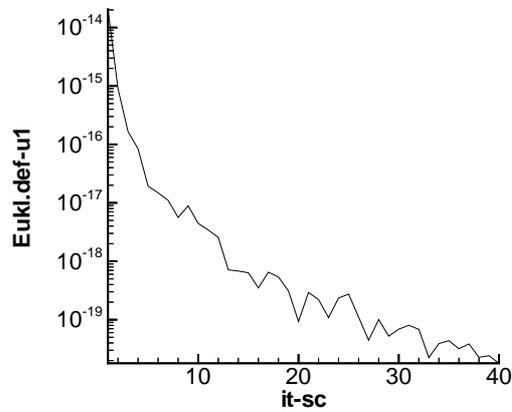


Abbildung A.81.: PARABOL, us129x129u

A.6. Lokalisierung der Wirkung des Shock-Capturing

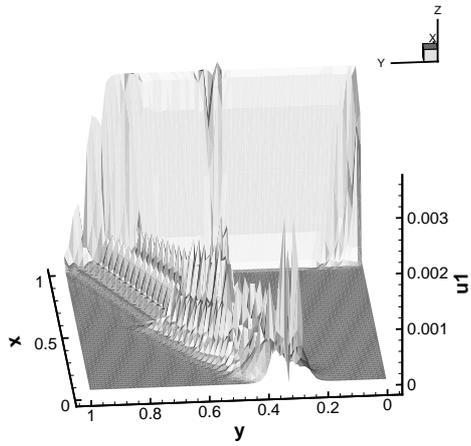


Abbildung A.82.: SCHRÄG,
us65x65s, $it_{sc}=2$

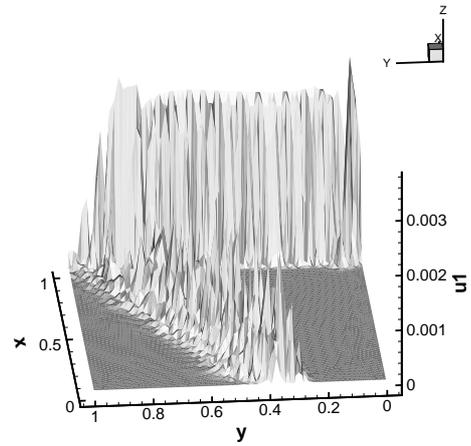


Abbildung A.83.: SCHRÄG,
us65x65u, $it_{sc}=2$

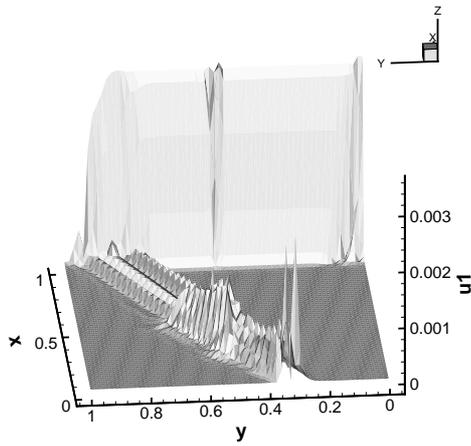


Abbildung A.84.: SCHRÄG,
us65x65s, $it_{sc}=3$

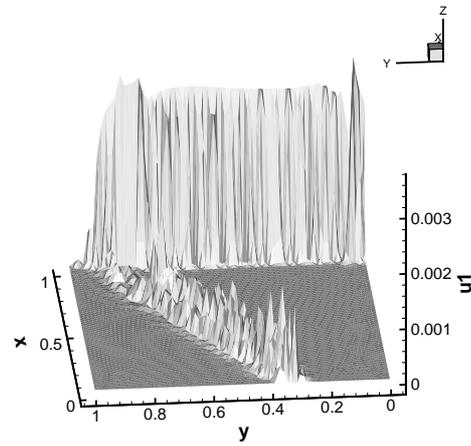


Abbildung A.85.: SCHRÄG,
us65x65u, $it_{sc}=3$

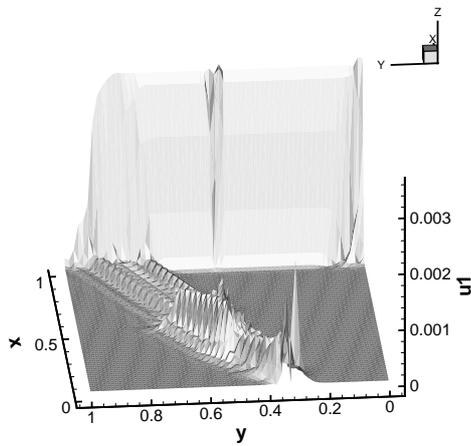


Abbildung A.86.: SCHRÄG,
us65x65s, $it_{sc}=4$

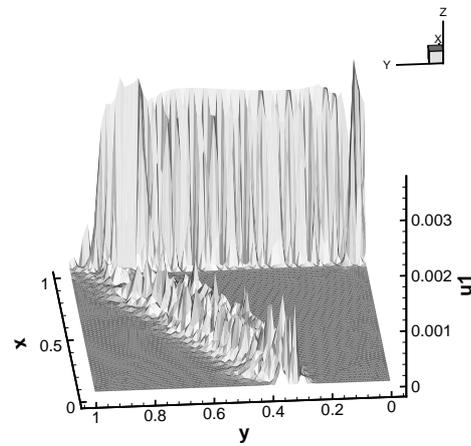


Abbildung A.87.: SCHRÄG,
us65x65u, $it_{sc}=4$

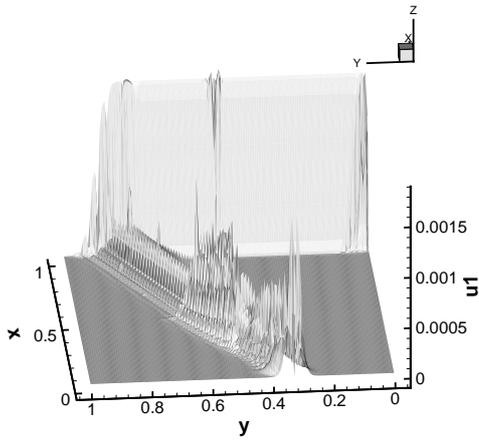


Abbildung A.88.: SCHRÄG,
us129x129s, $it_{sc}=2$

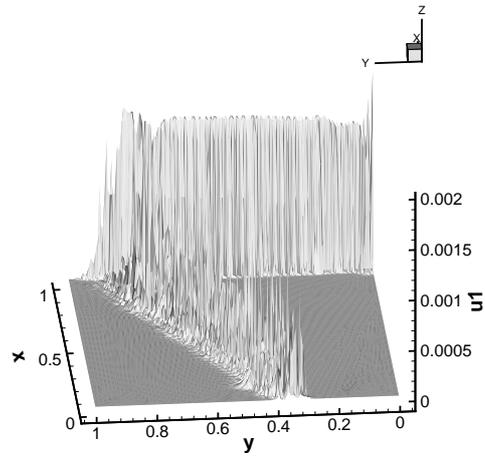


Abbildung A.89.: SCHRÄG,
us129x129u, $it_{sc}=2$

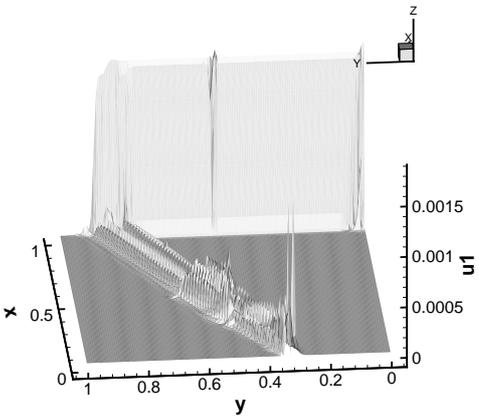


Abbildung A.90.: SCHRÄG,
us129x129s, $it_{sc}=3$

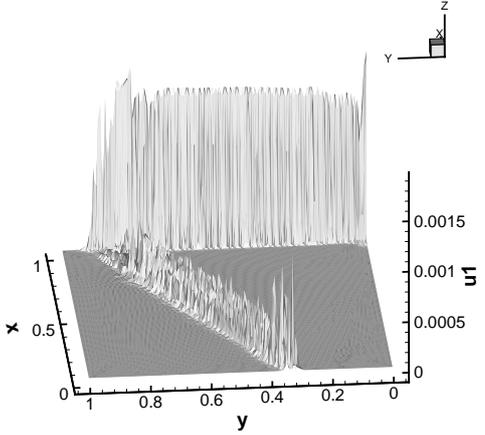


Abbildung A.91.: SCHRÄG,
us129x129u, $it_{sc}=3$

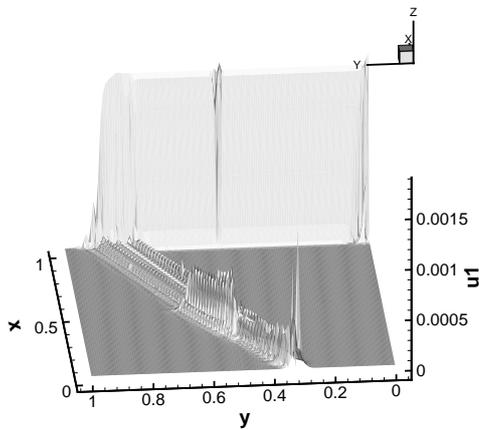


Abbildung A.92.: SCHRÄG,
us129x129s, $it_{sc}=4$

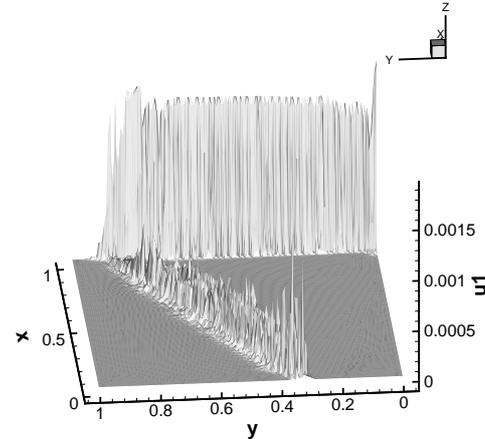


Abbildung A.93.: SCHRÄG,
us129x129u, $it_{sc}=4$

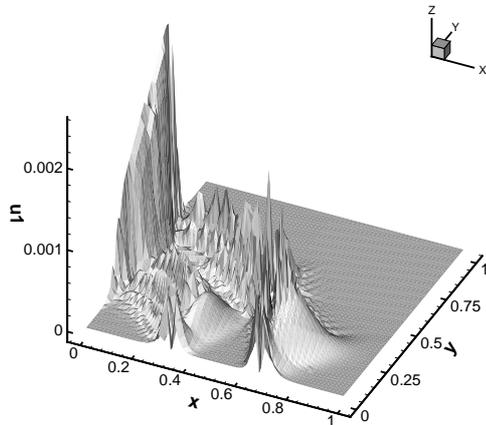


Abbildung A.94.: CIRCULAR,
us65x65s, $it_{sc}=2$

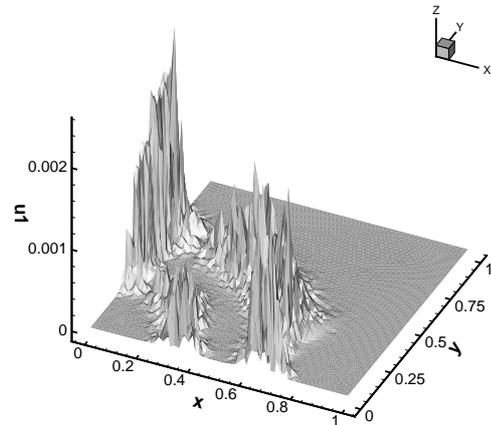


Abbildung A.95.: CIRCULAR,
us65x65u, $it_{sc}=2$

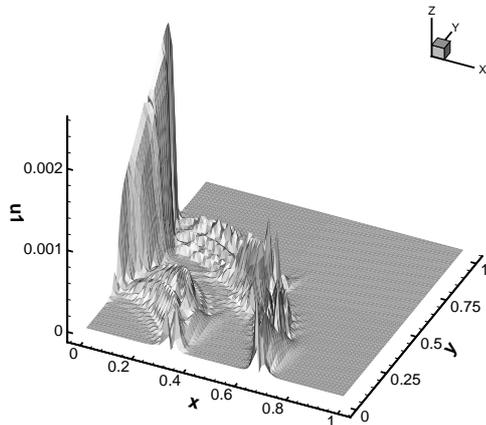


Abbildung A.96.: CIRCULAR,
us65x65s, $it_{sc}=3$

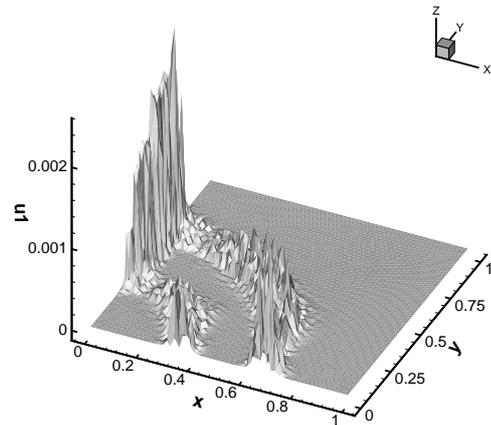


Abbildung A.97.: CIRCULAR,
us65x65u, $it_{sc}=3$

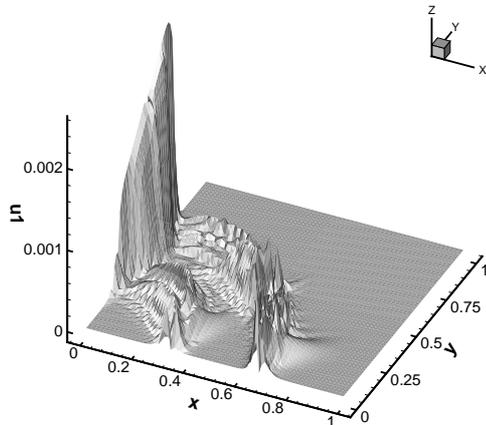


Abbildung A.98.: CIRCULAR,
us65x65s, $it_{sc}=4$

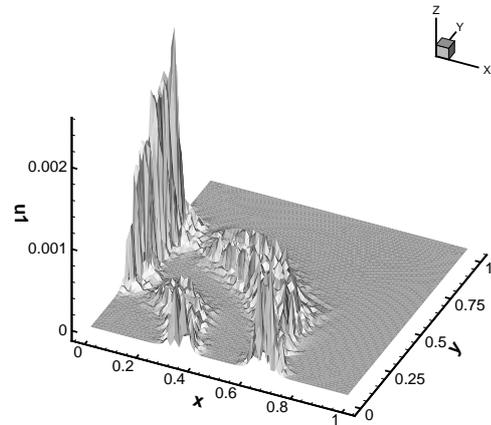


Abbildung A.99.: CIRCULAR,
us65x65u, $it_{sc}=4$

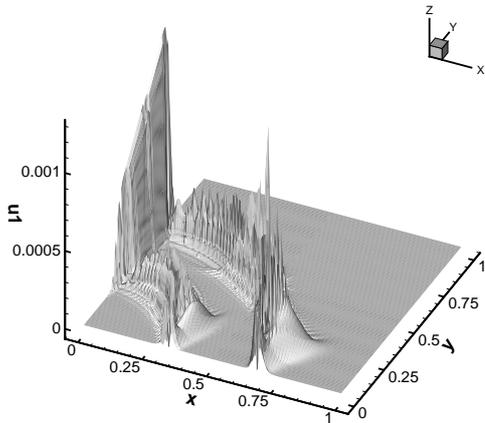


Abbildung A.100.: CIRCULAR,
us129x129s, $it_{sc}=2$

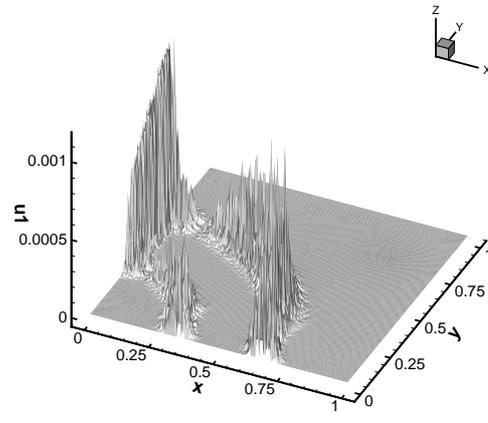


Abbildung A.101.: CIRCULAR,
us129x129u, $it_{sc}=2$

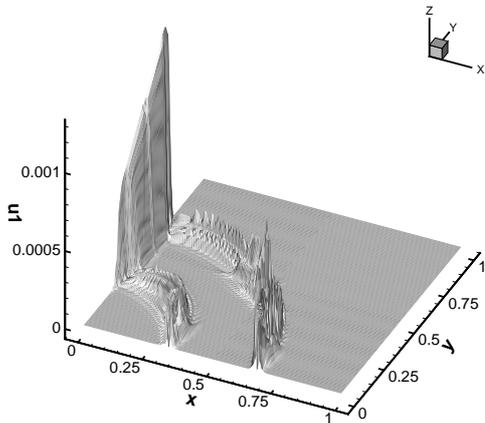


Abbildung A.102.: CIRCULAR,
us129x129s, $it_{sc}=3$

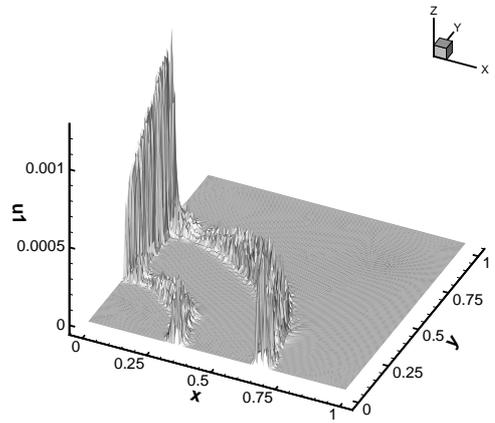


Abbildung A.103.: CIRCULAR,
us129x129u, $it_{sc}=3$

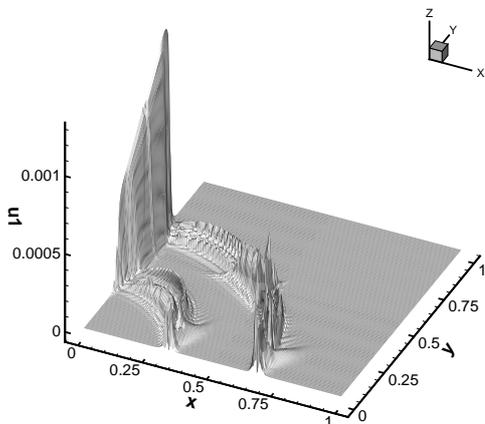


Abbildung A.104.: CIRCULAR,
us129x129s, $it_{sc}=4$

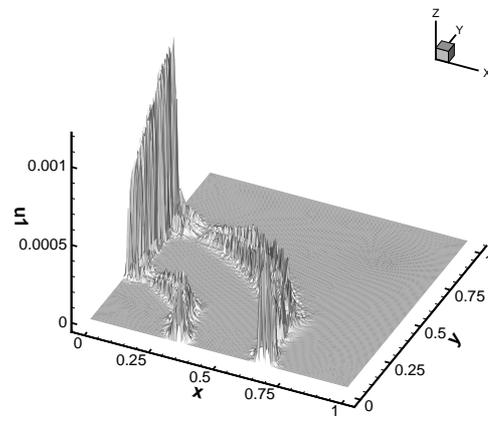


Abbildung A.105.: CIRCULAR,
us129x129u, $it_{sc}=4$

A.7. Verschmieren der Lösung

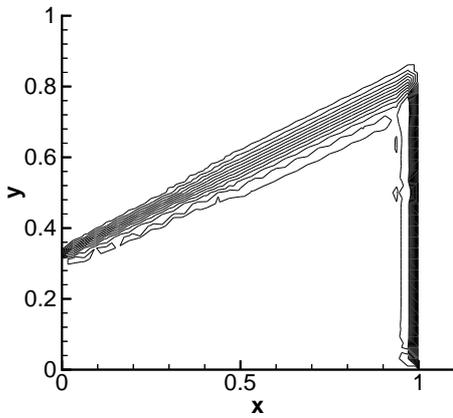


Abbildung A.106.: SCHRÄG,
us33x33s, $it_{sc}=1$

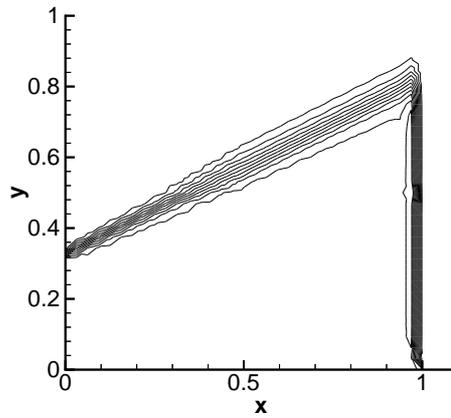


Abbildung A.107.: SCHRÄG,
us33x33s, $it_{sc}=2$

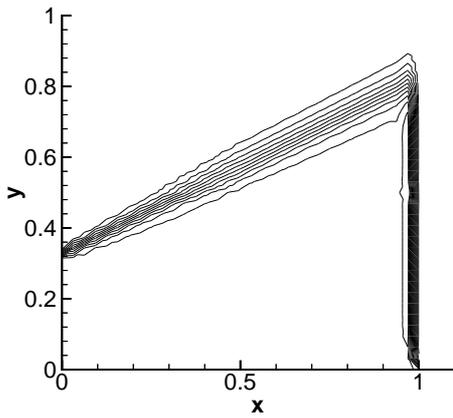


Abbildung A.108.: SCHRÄG,
us33x33s, $it_{sc}=3$

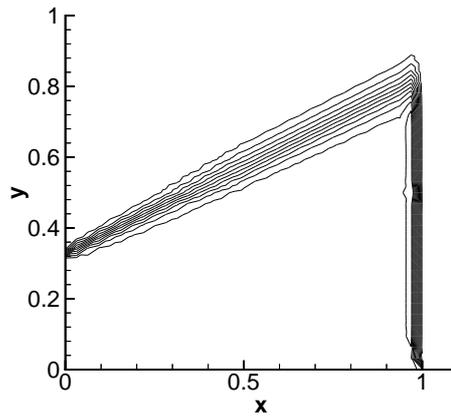


Abbildung A.109.: SCHRÄG,
us33x33s, $it_{sc}=4$

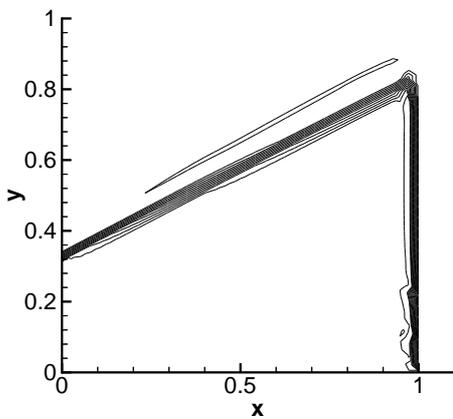


Abbildung A.110.: SCHRÄG,
us33x33u, $it_{sc}=1$

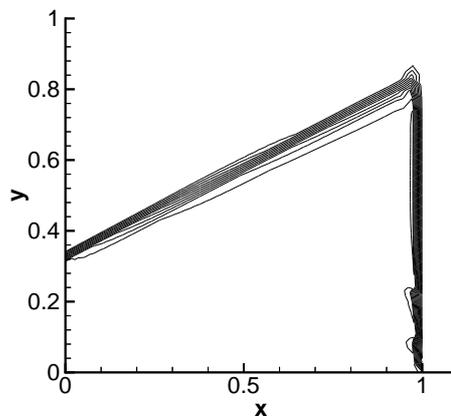


Abbildung A.111.: SCHRÄG,
us33x33u, $it_{sc}=2$

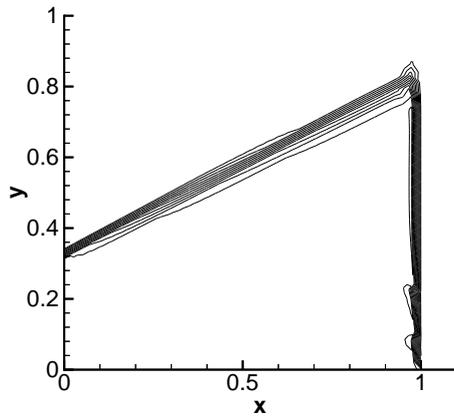


Abbildung A.112.: SCHRÄG,
us33x33u, $it_{sc}=3$

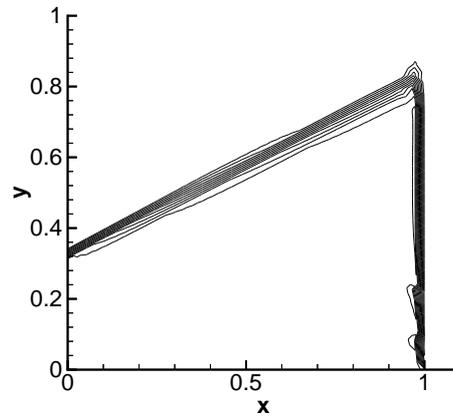


Abbildung A.113.: SCHRÄG,
us33x33u, $it_{sc}=4$

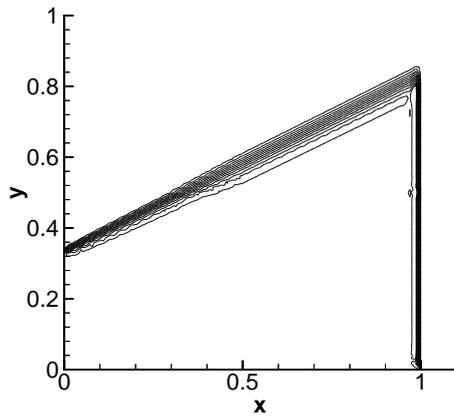


Abbildung A.114.: SCHRÄG,
us65x65s, $it_{sc}=1$

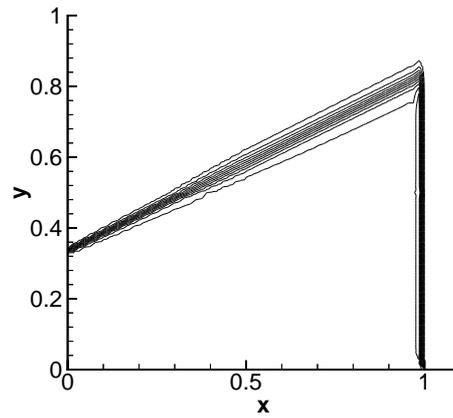


Abbildung A.115.: SCHRÄG,
us65x65s, $it_{sc}=2$

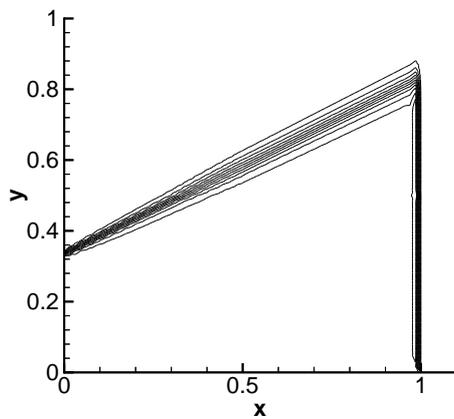


Abbildung A.116.: SCHRÄG,
us65x65s, $it_{sc}=3$

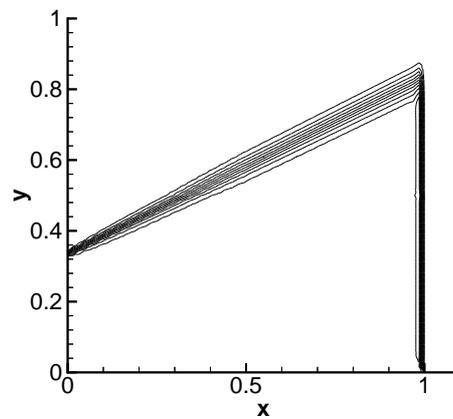


Abbildung A.117.: SCHRÄG,
us65x65s, $it_{sc}=4$

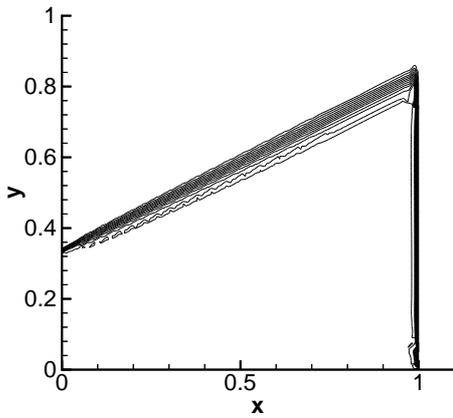


Abbildung A.118.: SCHRÄG,
us65x65u, $it_{sc}=1$

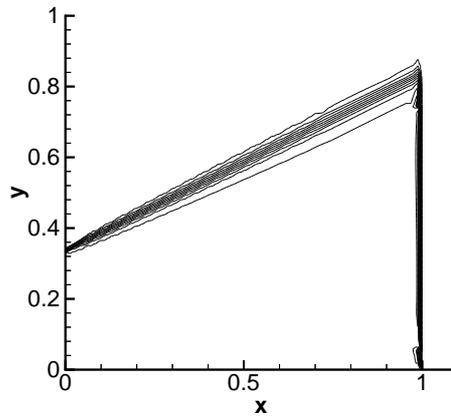


Abbildung A.119.: SCHRÄG,
us65x65u, $it_{sc}=2$

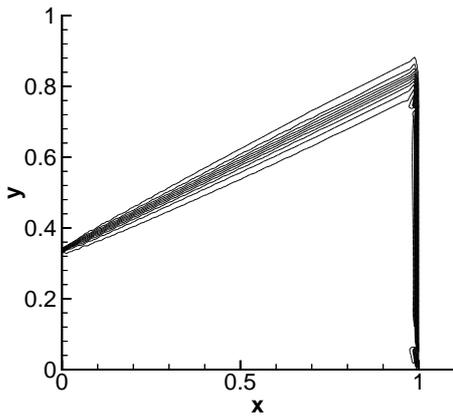


Abbildung A.120.: SCHRÄG,
us65x65u, $it_{sc}=3$

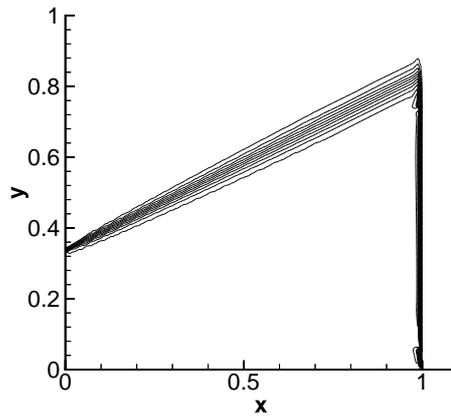


Abbildung A.121.: SCHRÄG,
us65x65u, $it_{sc}=4$

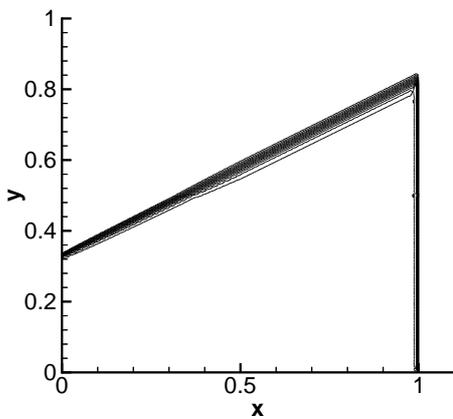


Abbildung A.122.: SCHRÄG,
us129x129s, $it_{sc}=1$

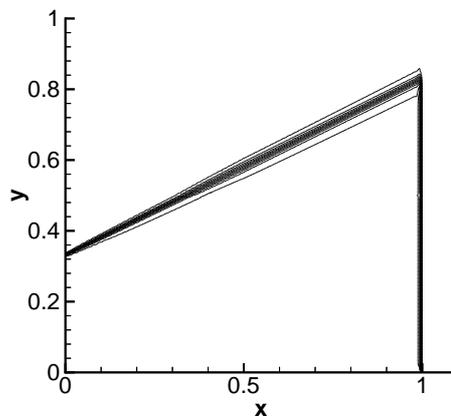


Abbildung A.123.: SCHRÄG,
us129x129s, $it_{sc}=2$

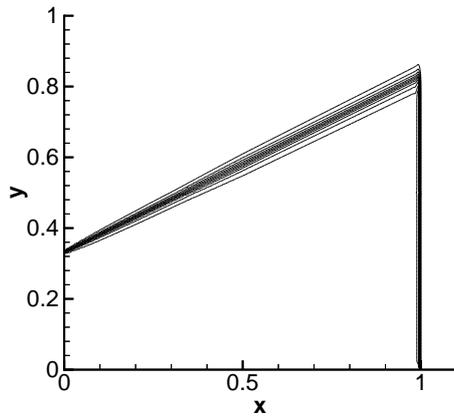


Abbildung A.124.: SCHRÄG,
us129x129s, $it_{sc}=3$

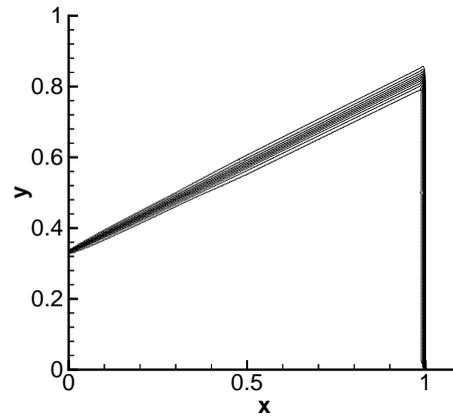


Abbildung A.125.: SCHRÄG,
us129x129s, $it_{sc}=4$

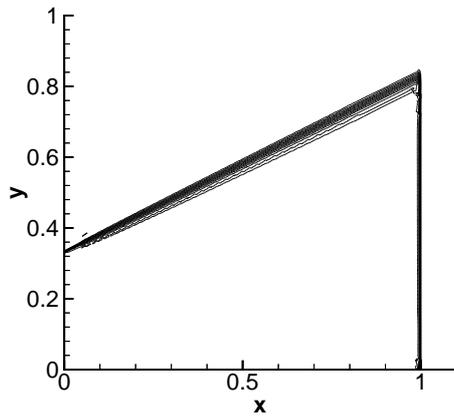


Abbildung A.126.: SCHRÄG,
us129x129u, $it_{sc}=1$

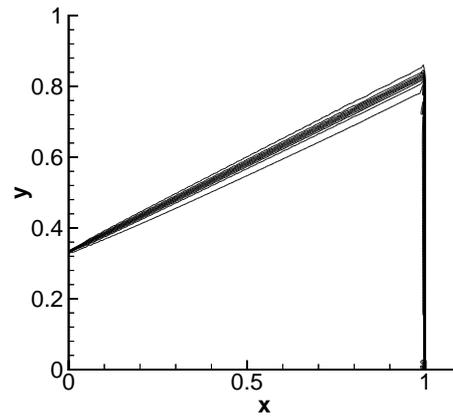


Abbildung A.127.: SCHRÄG,
us129x129u, $it_{sc}=2$

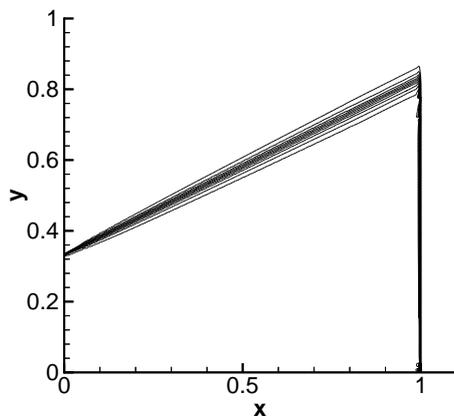


Abbildung A.128.: SCHRÄG,
us129x129u, $it_{sc}=3$

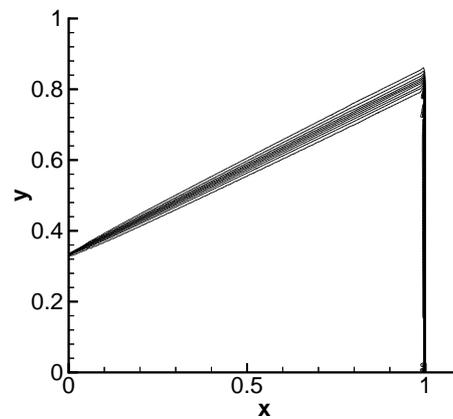


Abbildung A.129.: SCHRÄG,
us129x129u, $it_{sc}=4$

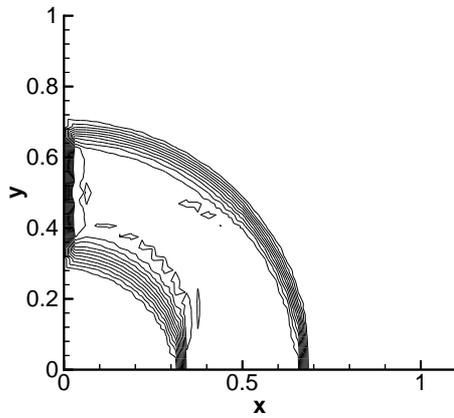


Abbildung A.130.: CIRCULAR,
us33x33s, $it_{sc}=1$

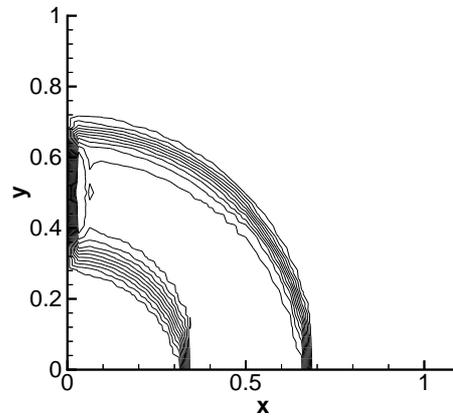


Abbildung A.131.: CIRCULAR,
us33x33s, $it_{sc}=2$

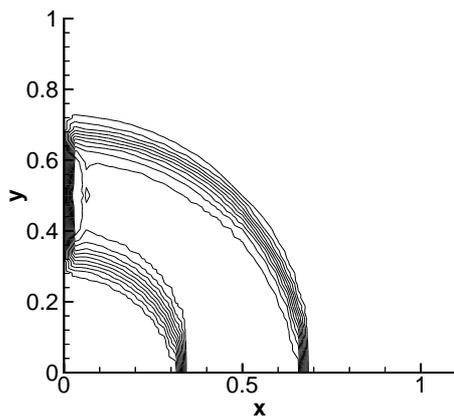


Abbildung A.132.: CIRCULAR,
us33x33s, $it_{sc}=3$

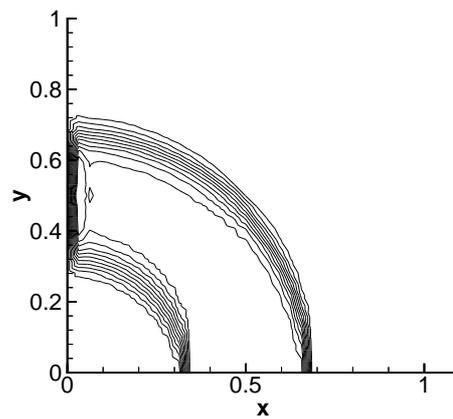


Abbildung A.133.: CIRCULAR,
us33x33s, $it_{sc}=4$

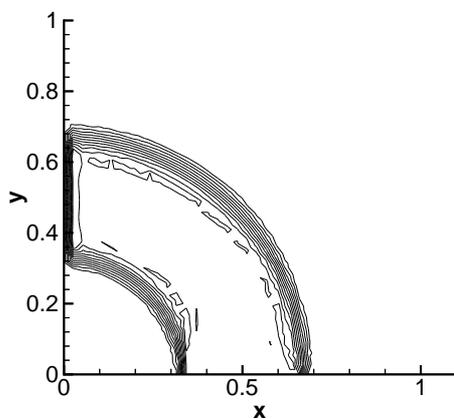


Abbildung A.134.: CIRCULAR,
us33x33u, $it_{sc}=1$

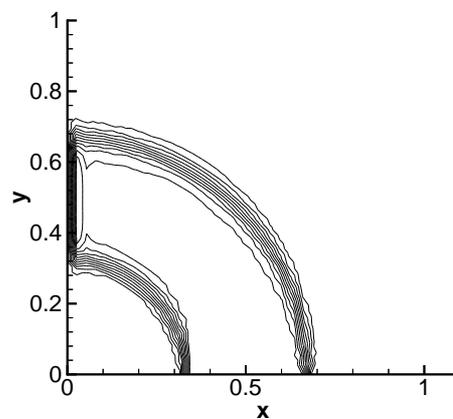


Abbildung A.135.: CIRCULAR,
us33x33u, $it_{sc}=2$

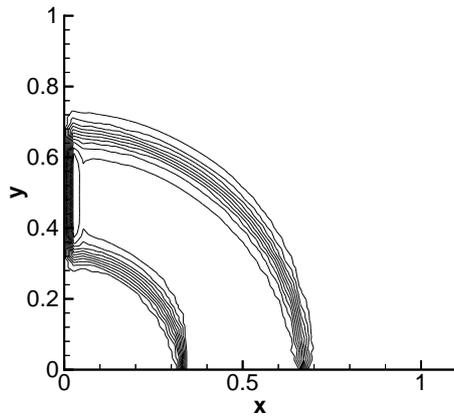


Abbildung A.136.: CIRCULAR,
us33x33u, $it_{sc}=3$

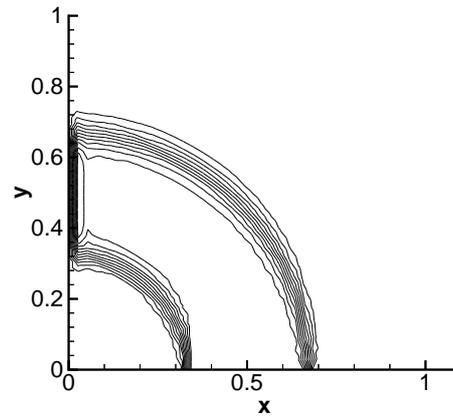


Abbildung A.137.: CIRCULAR,
us33x33u, $it_{sc}=4$

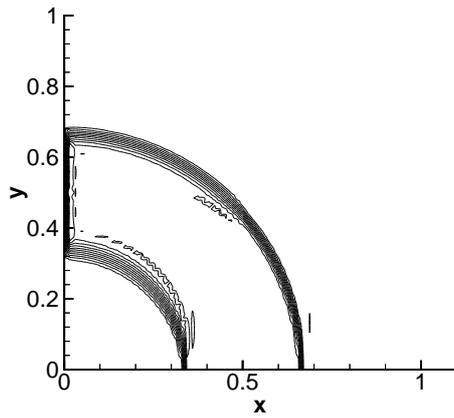


Abbildung A.138.: CIRCULAR,
us65x65s, $it_{sc}=1$

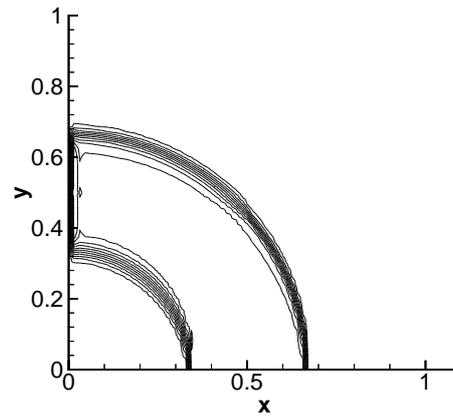


Abbildung A.139.: CIRCULAR,
us65x65s, $it_{sc}=2$

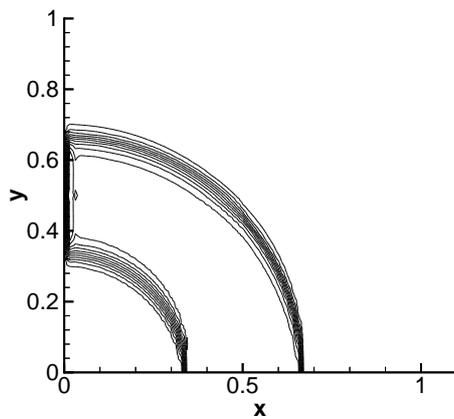


Abbildung A.140.: CIRCULAR,
us65x65s, $it_{sc}=3$

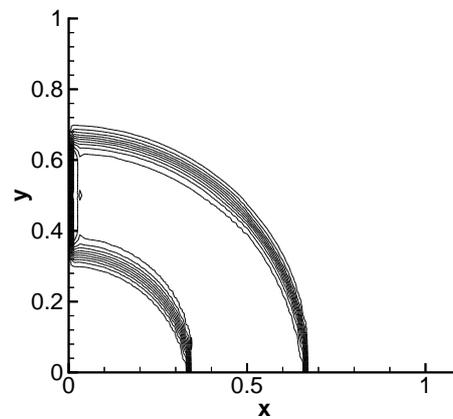


Abbildung A.141.: CIRCULAR,
us65x65s, $it_{sc}=4$

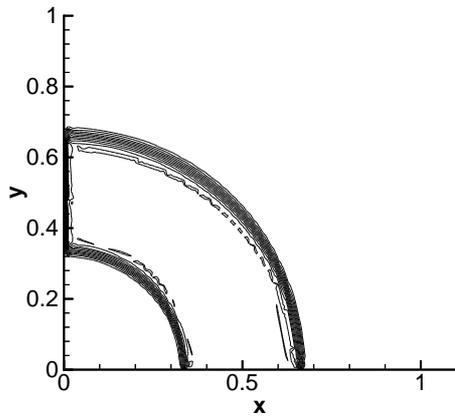


Abbildung A.142.: CIRCULAR,
us65x65u, $it_{sc}=1$

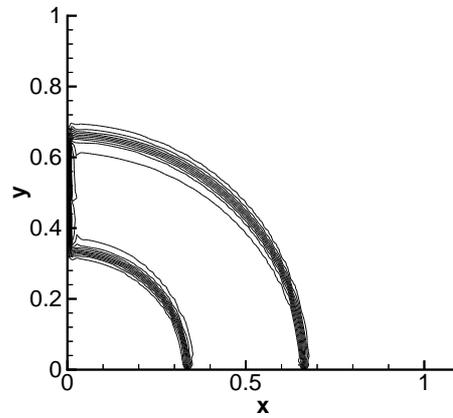


Abbildung A.143.: CIRCULAR,
us65x65u, $it_{sc}=2$

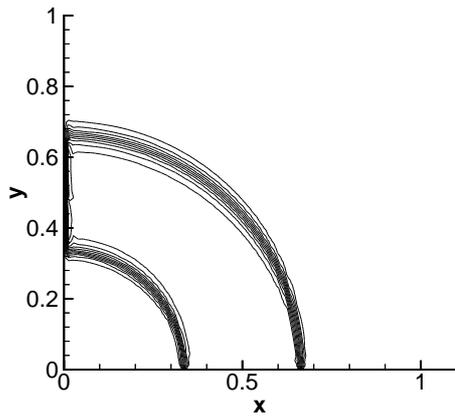


Abbildung A.144.: CIRCULAR,
us65x65u, $it_{sc}=3$

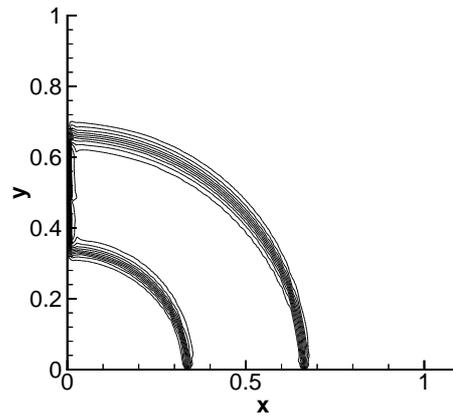


Abbildung A.145.: CIRCULAR,
us65x65u, $it_{sc}=4$

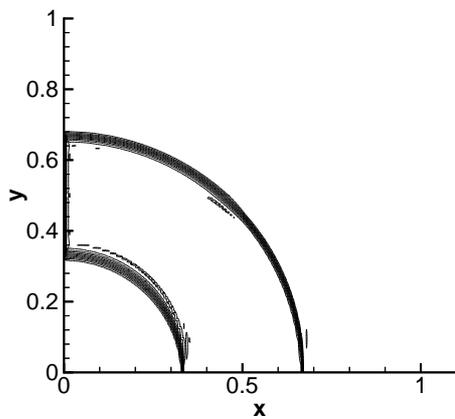


Abbildung A.146.: CIRCULAR,
us129x129s, $it_{sc}=1$

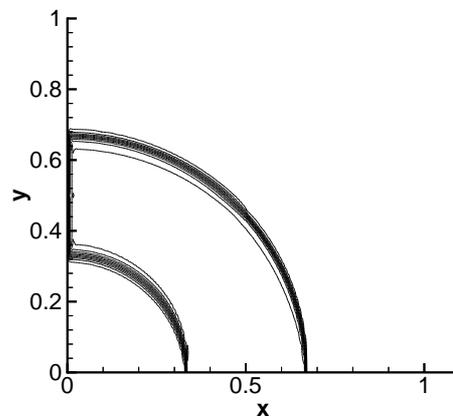


Abbildung A.147.: CIRCULAR,
us129x129s, $it_{sc}=2$

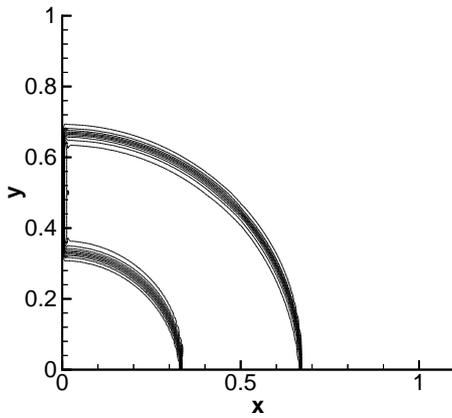


Abbildung A.148.: CIRCULAR,
us129x129s, $it_{sc}=3$

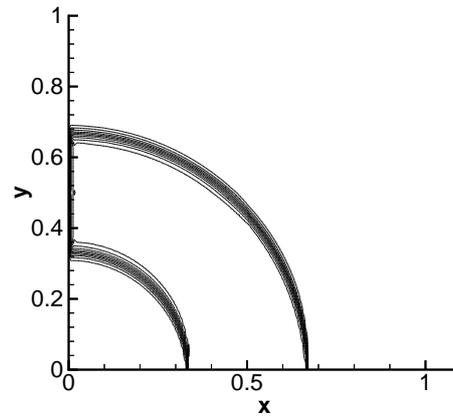


Abbildung A.149.: CIRCULAR,
us129x129s, $it_{sc}=4$

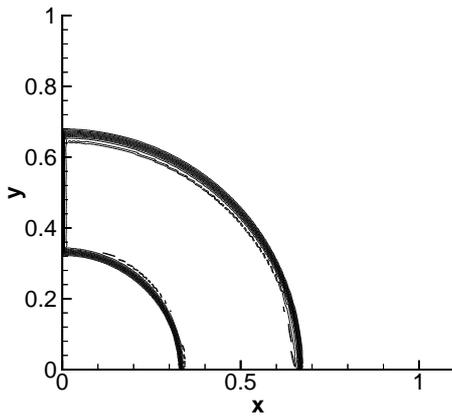


Abbildung A.150.: CIRCULAR,
us129x129u, $it_{sc}=1$

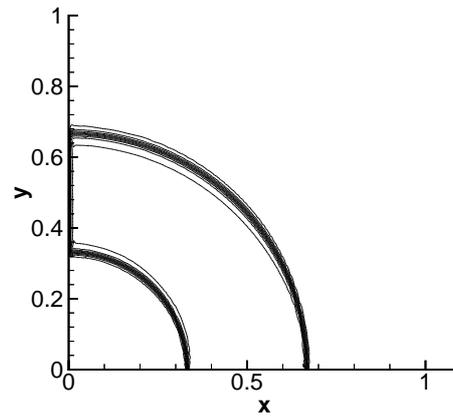


Abbildung A.151.: CIRCULAR,
us129x129u, $it_{sc}=2$

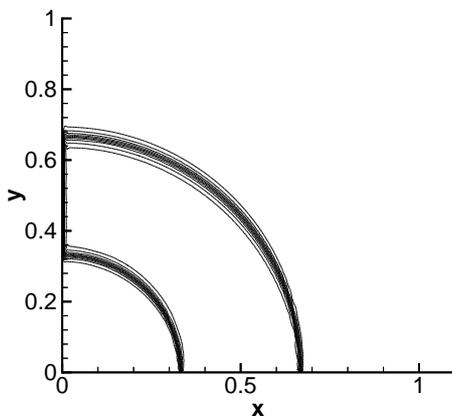


Abbildung A.152.: CIRCULAR,
us129x129u, $it_{sc}=3$

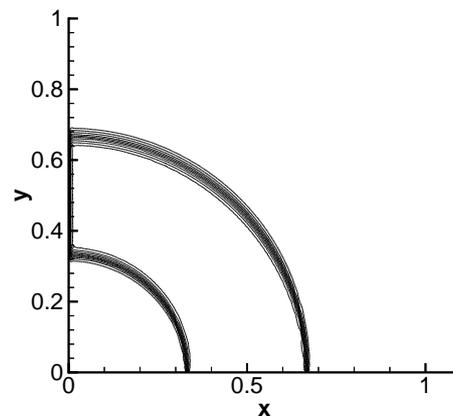


Abbildung A.153.: CIRCULAR,
us129x129u, $it_{sc}=4$

B. Shock-Capturing und k - ϵ -Turbulenzmodell

B.1. Crosswind Oszillationen beim k - ϵ -Turbulenzmodell

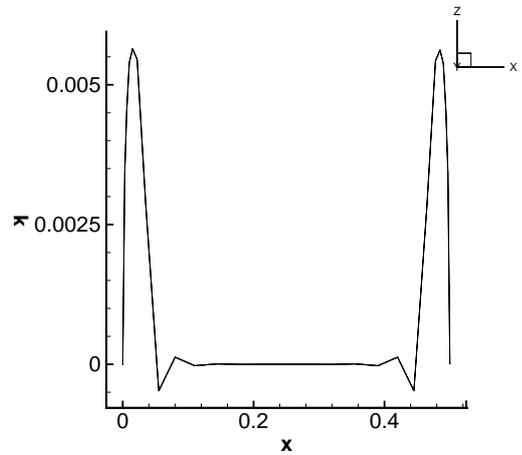
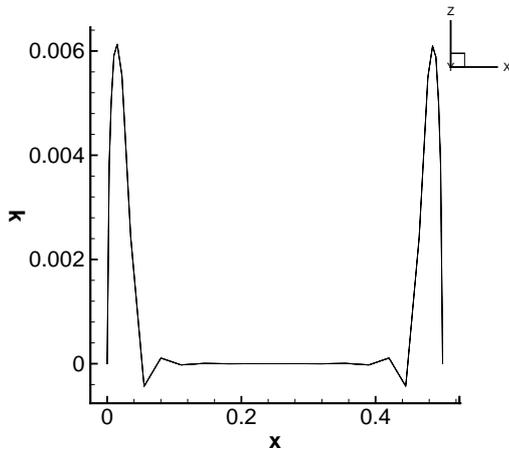


Abbildung B.1.: PNS, ohne SC, $k(tc = 7)$ Abbildung B.2.: PNS, mit SC, $k(tc = 7)$

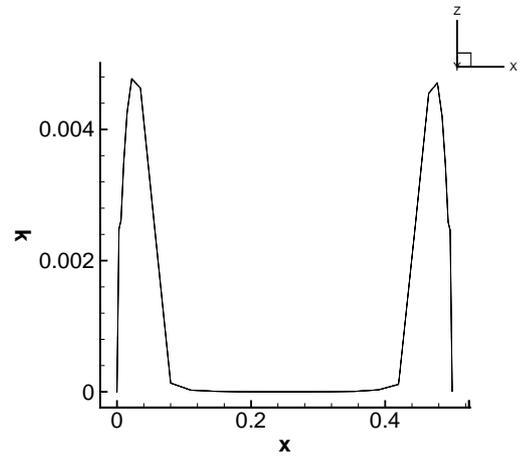
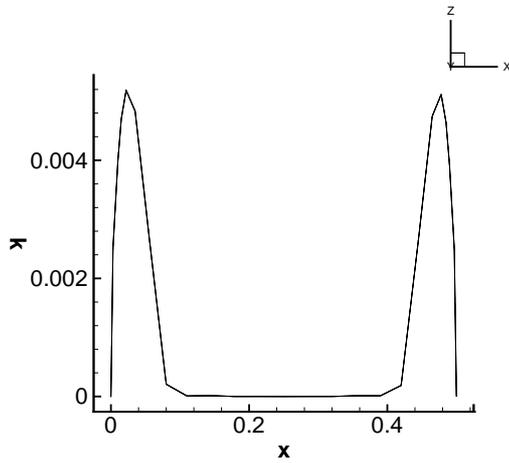


Abbildung B.3.: PNS, ohne SC, $k(tc = 9)$ Abbildung B.4.: PNS, mit SC, $k(tc = 9)$

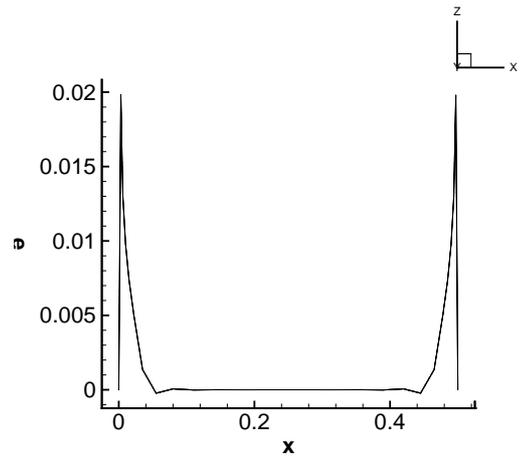
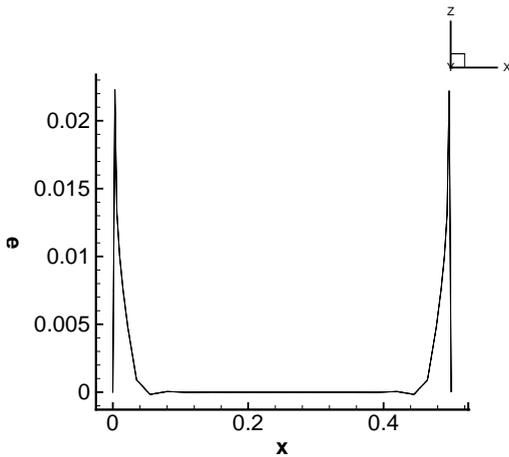


Abbildung B.5.: PNS, ohne SC, $\epsilon(tc = 7)$ Abbildung B.6.: PNS, mit SC, $\epsilon(tc = 7)$

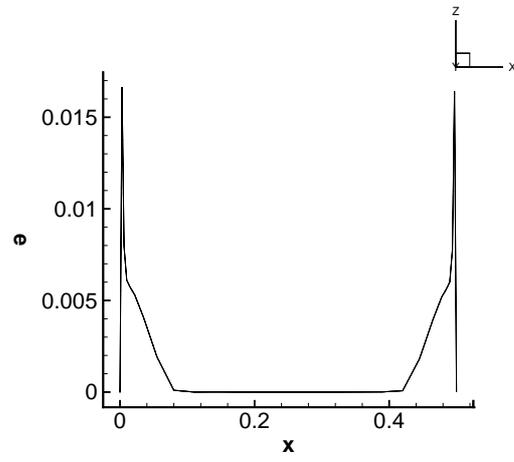
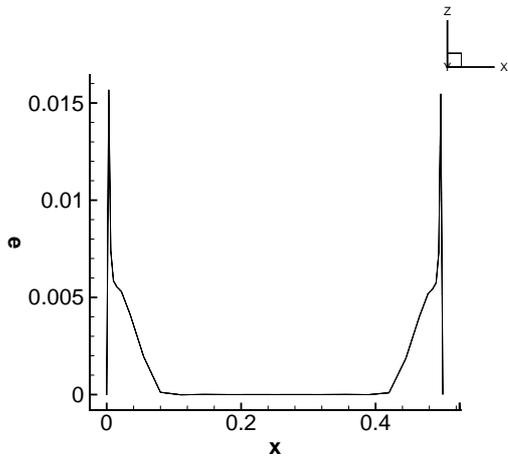


Abbildung B.7.: PNS, ohne SC, $\epsilon(tc = 10)$ Abbildung B.8.: PNS, mit SC, $\epsilon(tc = 10)$

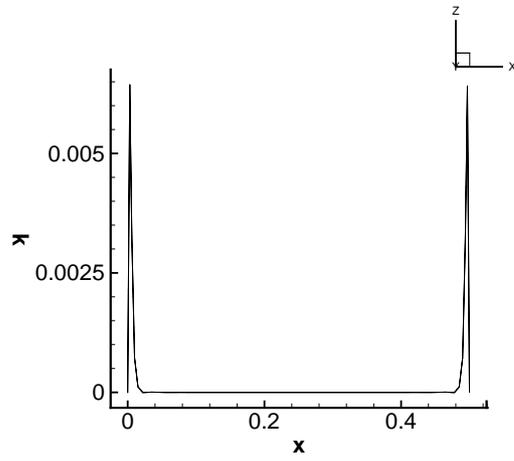
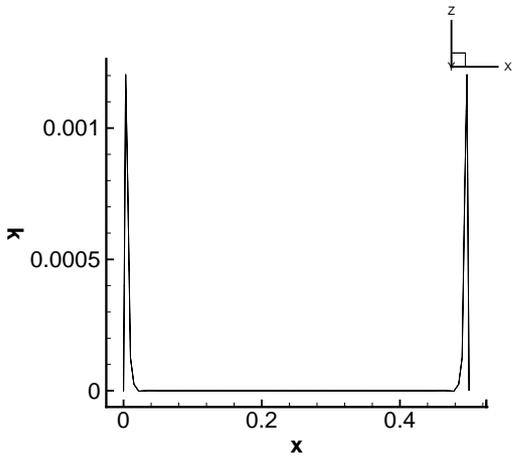


Abbildung B.9.: CS, mit SC, $k(tc = 4)$ Abbildung B.10.: CS, mit SC, $k(tc = 8)$

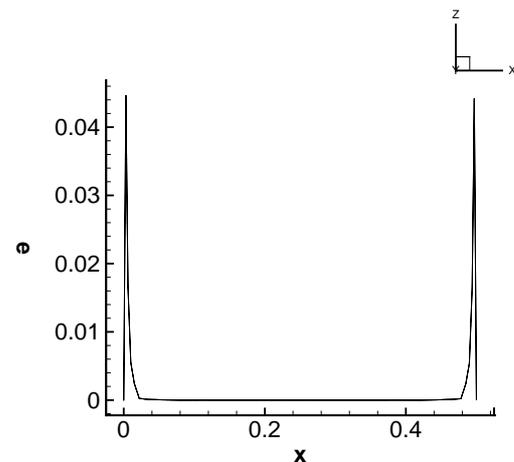
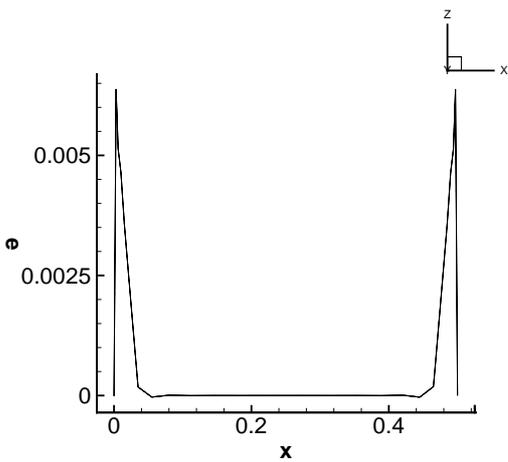


Abbildung B.11.: CS, mit SC, $\epsilon(tc = 4)$ Abbildung B.12.: CS, mit SC, $\epsilon(tc = 8)$

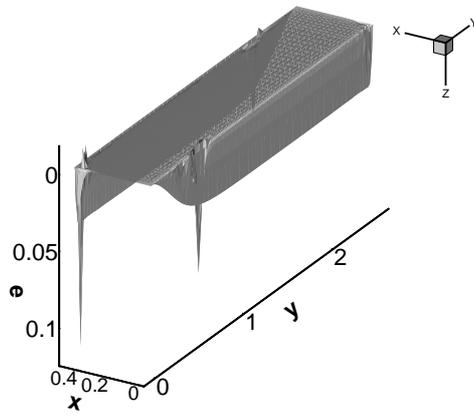


Abbildung B.13.: CS, ohne SC,
 $L = 2$, $\epsilon(tc = 7)$

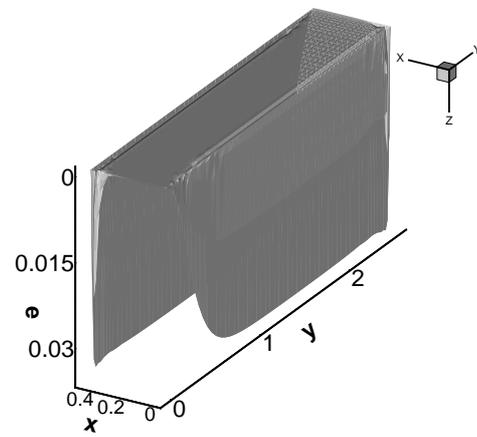


Abbildung B.14.: CS, mit SC,
 $L = 2$, $\epsilon(tc = 7)$

B.2. Negativität von k und ϵ

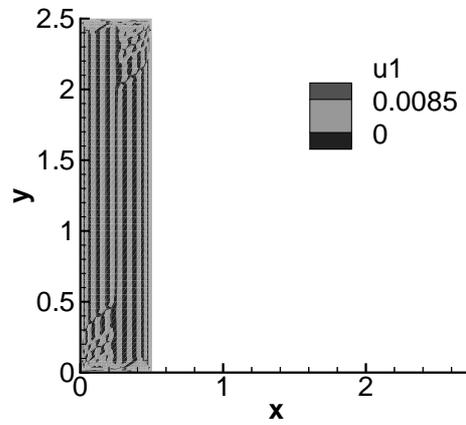
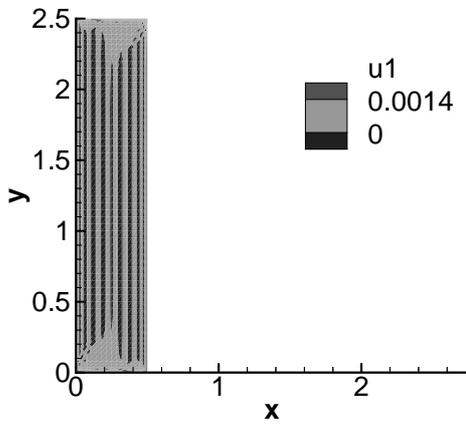


Abbildung B.15.: PNS, ohne SC, $k(tc = 5)$ Abbildung B.16.: PNS, ohne SC, $\epsilon(tc = 5)$

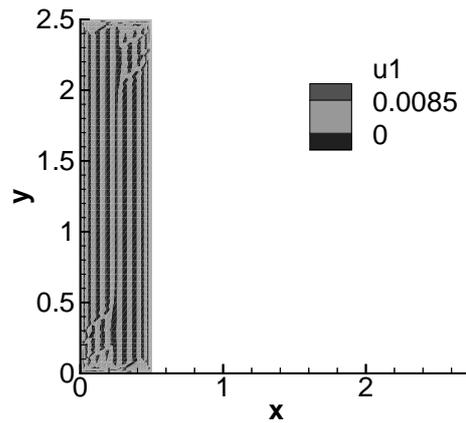
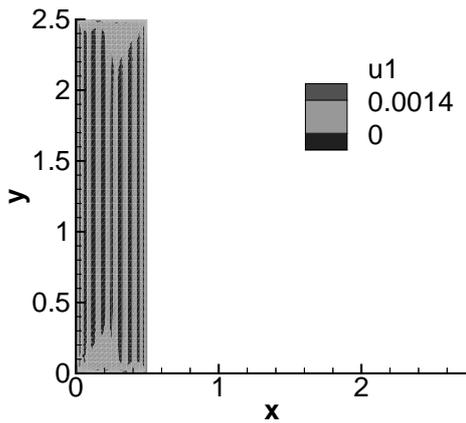


Abbildung B.17.: PNS, mit SC, $k(tc = 5)$ Abbildung B.18.: PNS, mit SC, $\epsilon(tc = 5)$

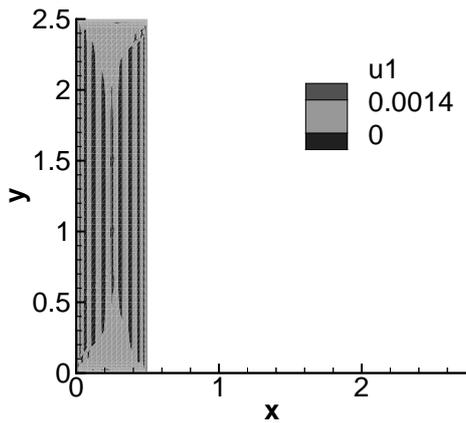


Abbildung B.19.: CS, $max_L = 3$,
ohne SC, $k(tc = 5)$

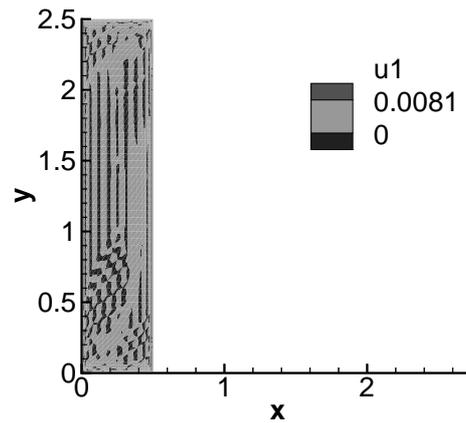


Abbildung B.20.: CS, $max_L = 3$,
ohne SC, $\epsilon(tc = 5)$

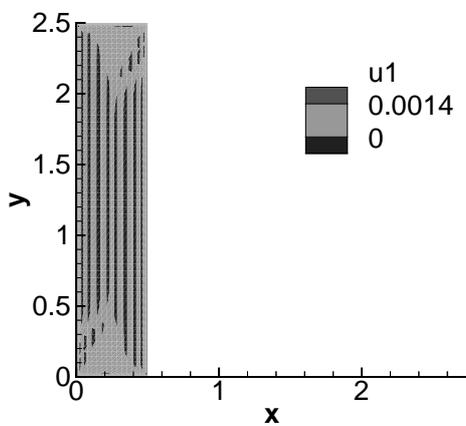


Abbildung B.21.: CS, $max_L = 3$,
mit SC, $k(tc = 5)$

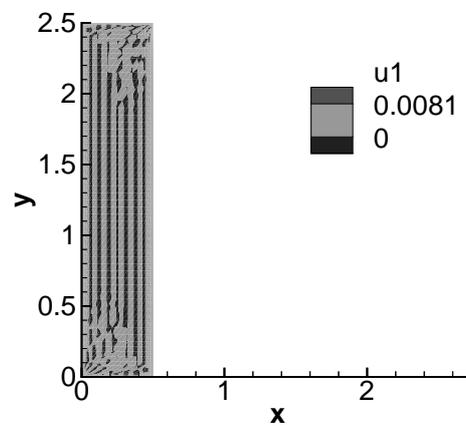


Abbildung B.22.: CS, $max_L = 3$,
mit SC, $\epsilon(tc = 5)$

B.3. Niveaulinien der Lösungen des Cheeswright-Testfalls

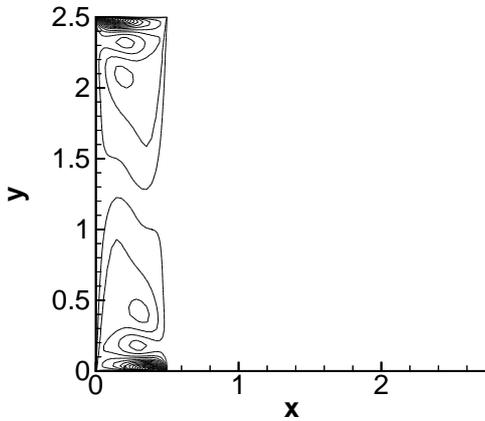


Abbildung B.23.: CS, mit SC,
 $L = 4, u_1(tc = 250)$

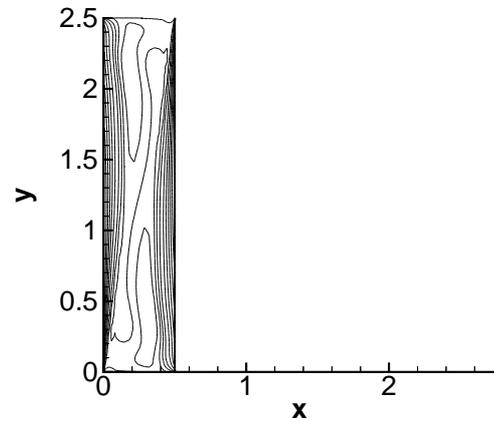


Abbildung B.24.: CS, mit SC,
 $L = 4, u_2(tc = 250)$

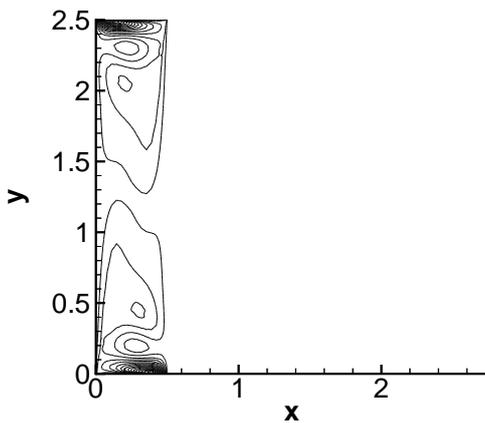


Abbildung B.25.: PNS, ohne SC,
 $u_1(tc = 250)$

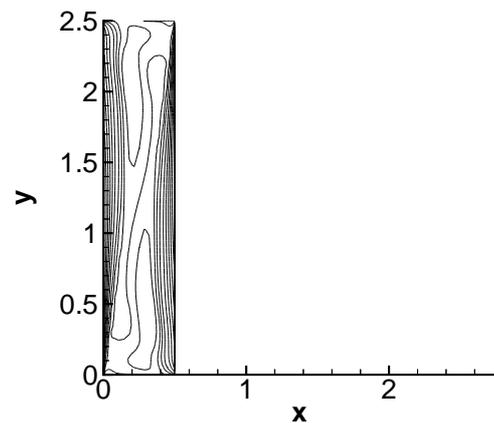


Abbildung B.26.: PNS, ohne SC,
 $u_2(tc = 250)$

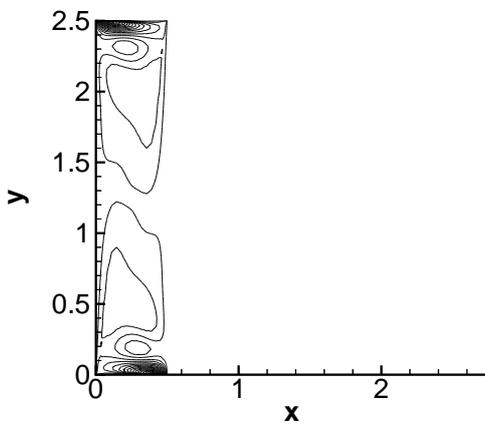


Abbildung B.27.: PNS, mit SC,
 $u_1(tc = 250)$

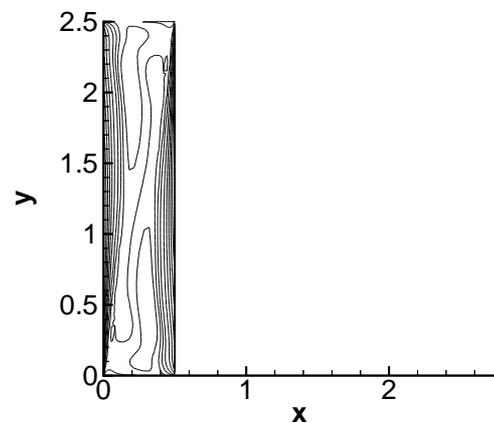


Abbildung B.28.: PNS, mit SC,
 $u_2(tc = 250)$

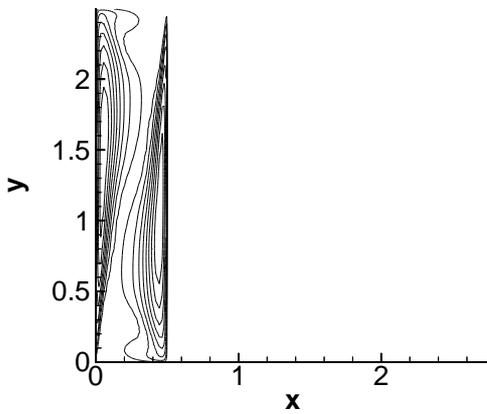


Abbildung B.29.: CS, mit SC,
 $L = 4, k(tc = 250)$

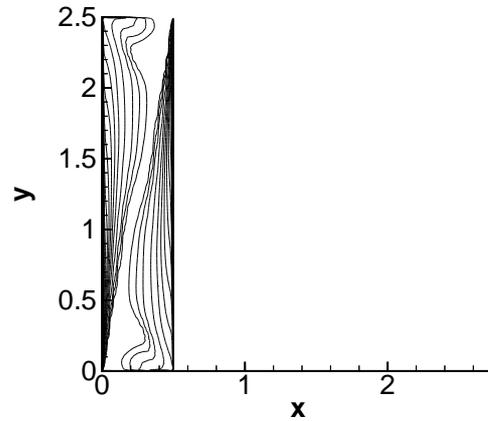


Abbildung B.30.: CS, mit SC,
 $L = 4, \epsilon(tc = 250)$

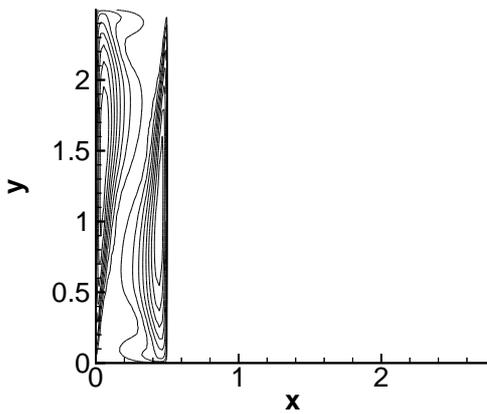


Abbildung B.31.: PNS, ohne SC,
 $k(tc = 250)$

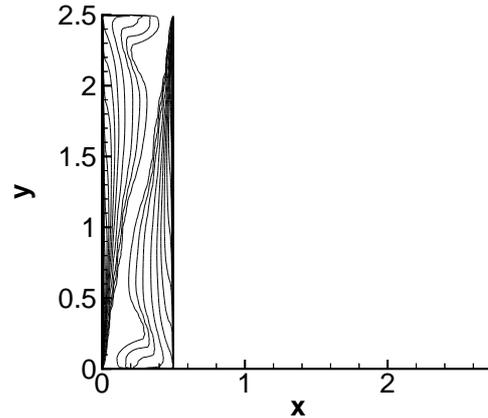


Abbildung B.32.: PNS, ohne SC,
 $\epsilon(tc = 250)$

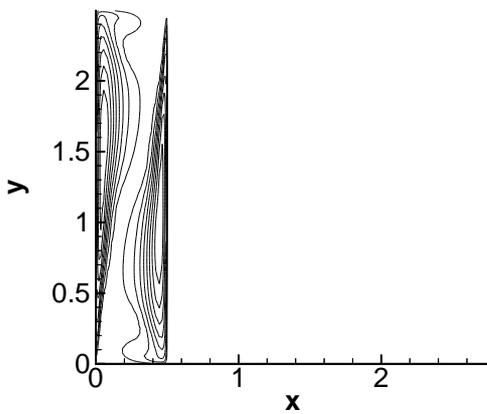


Abbildung B.33.: PNS, mit SC,
 $k(tc = 250)$

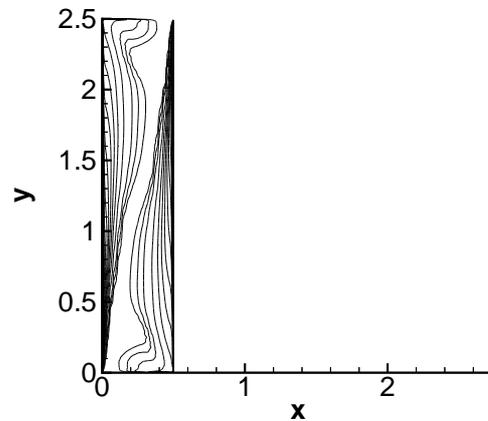


Abbildung B.34.: PNS, mit SC,
 $\epsilon(tc = 250)$

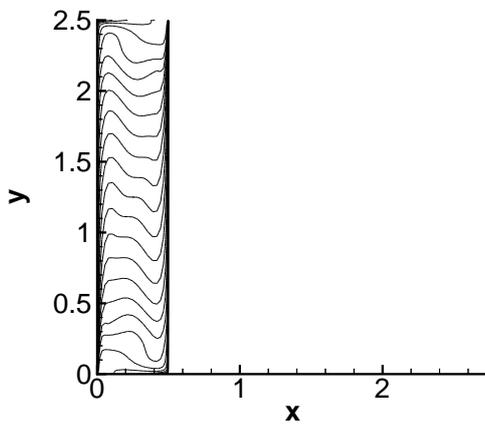


Abbildung B.35.: CS, ohne SC,
 $\theta(tc = 1000)$

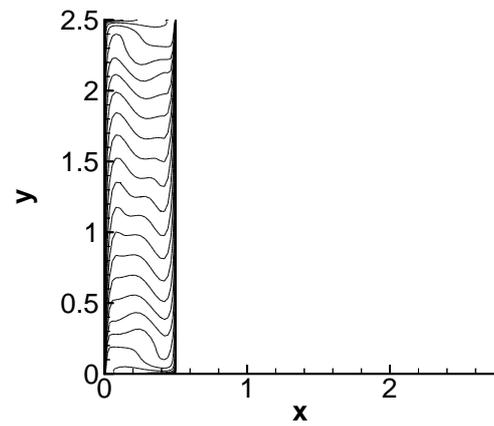


Abbildung B.36.: CS, mit SC, $\theta(tc = 250)$

C. Konvergenzverhalten der Lösung beim Cheesewright-Testfall

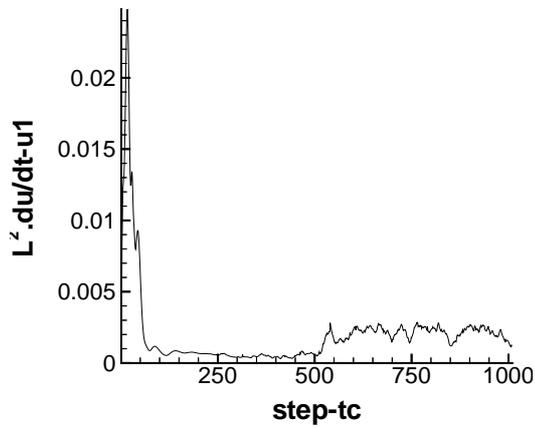


Abbildung C.1.: PNS, ohne SC,
 $\|u_1^i - u_1^{i-1}\|$

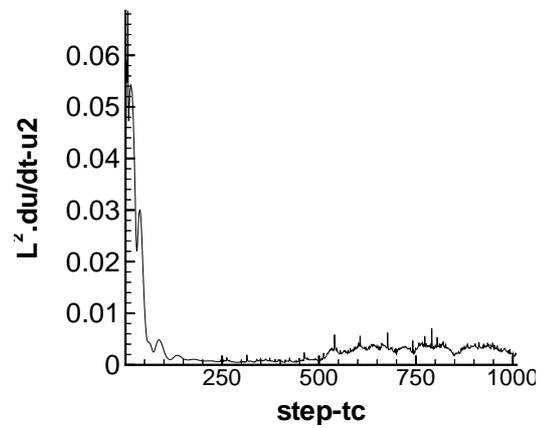


Abbildung C.2.: PNS, ohne SC,
 $\|u_2^i - u_2^{i-1}\|$

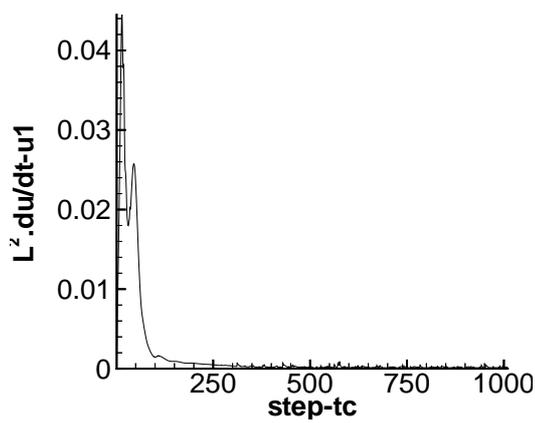


Abbildung C.3.: CS, mit SC,
 $L = 4, \|u_1^i - u_1^{i-1}\|$

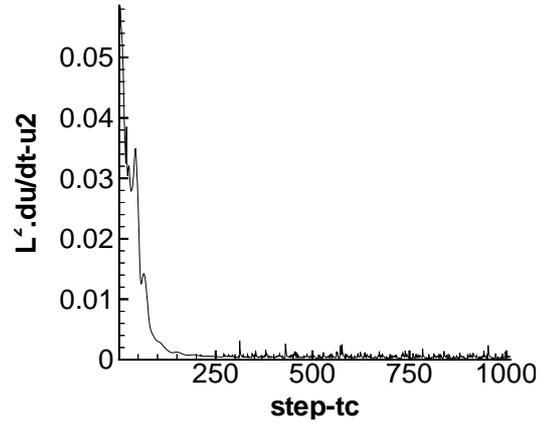


Abbildung C.4.: CS, mit SC,
 $L = 4, \|u_2^i - u_2^{i-1}\|$

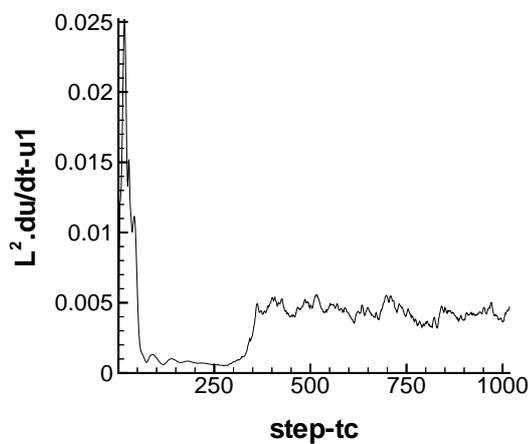


Abbildung C.5.: PNS, mit SC, $\|u_1^i - u_1^{i-1}\|$

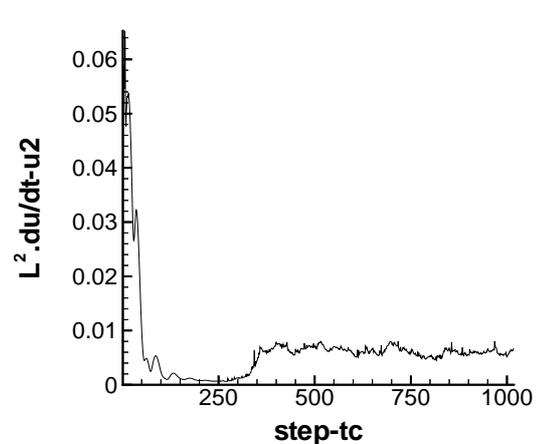


Abbildung C.6.: PNS, mit SC, $\|u_2^i - u_2^{i-1}\|$

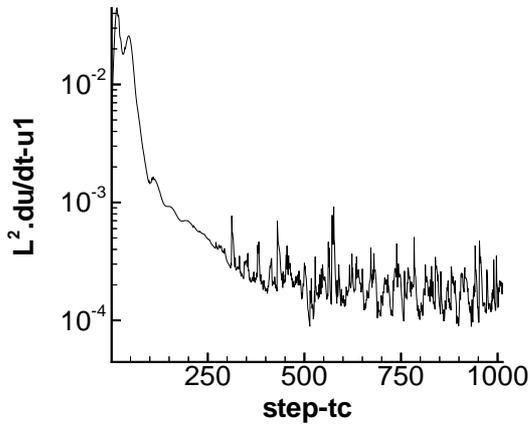


Abbildung C.7.: CS, mit SC,
 $max_{dtc} = 1$
 $L = 4, \|u_1^i - u_1^{i-1}\|$

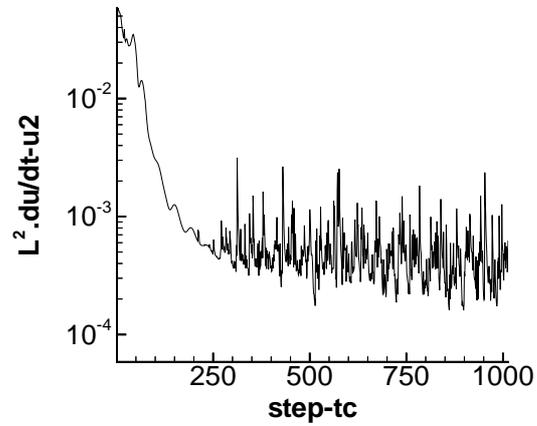


Abbildung C.8.: CS, mit SC,
 $max_{dtc} = 1$
 $L = 4, \|u_2^i - u_2^{i-1}\|$

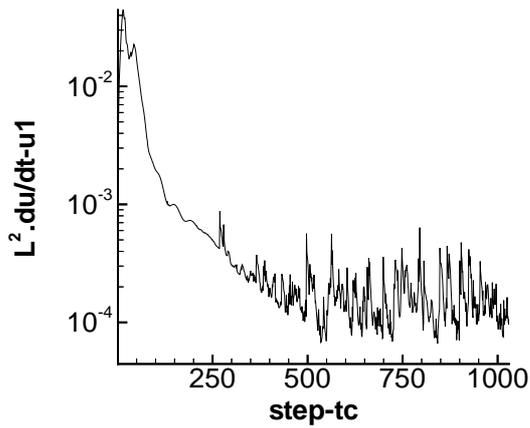


Abbildung C.9.: CS, mit SC,
 $max_{dtc} = 1$
 $L = 10, \|u_1^i - u_1^{i-1}\|$

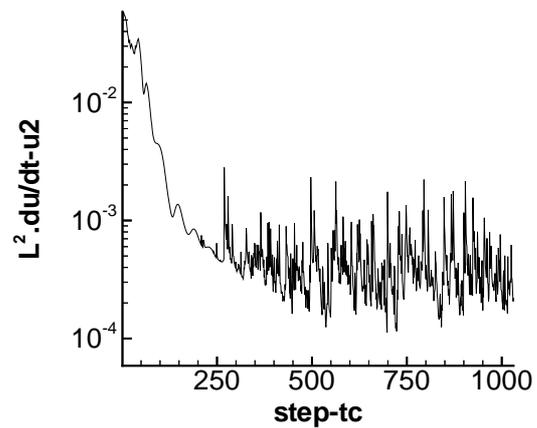


Abbildung C.10.: CS, mit SC,
 $max_{dtc} = 1$
 $L = 10, \|u_2^i - u_2^{i-1}\|$

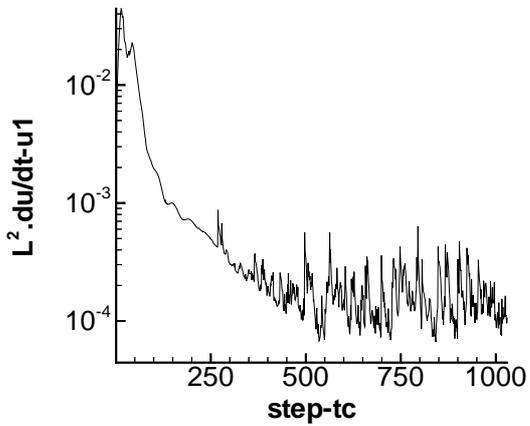


Abbildung C.11.: CS, mit SC,
 $max_{dtc} = 1$
 $L = 15, \|u_1^i - u_1^{i-1}\|$

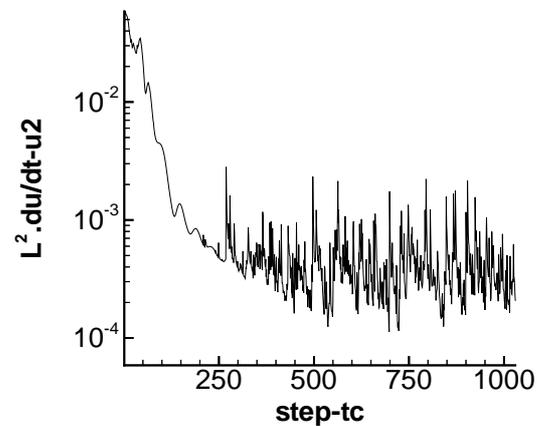


Abbildung C.12.: CS, mit SC,
 $max_{dtc} = 1$
 $L = 15, \|u_2^i - u_2^{i-1}\|$

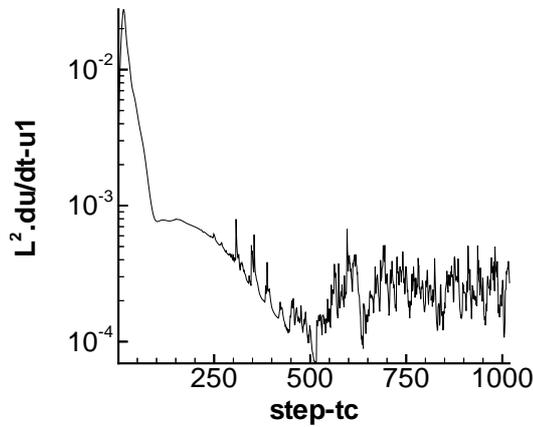


Abbildung C.13.: PNS, ohne SC,
 $max_{dlc} = 3$
 $\|u_1^i - u_1^{i-1}\|$

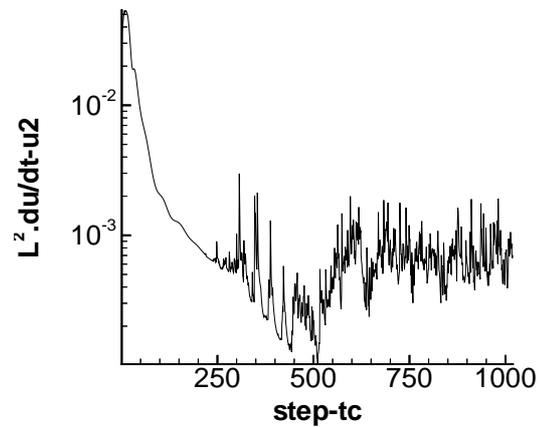


Abbildung C.14.: PNS, ohne SC,
 $max_{dlc} = 3$
 $\|u_2^i - u_2^{i-1}\|$

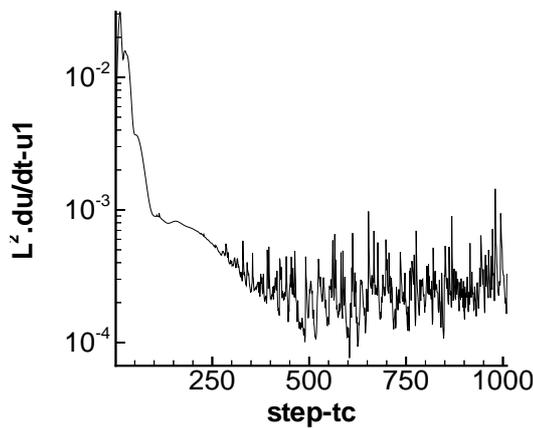


Abbildung C.15.: CS, mit SC,
 $max_{dlc} = 3$
 $L = 3, \|u_1^i - u_1^{i-1}\|$

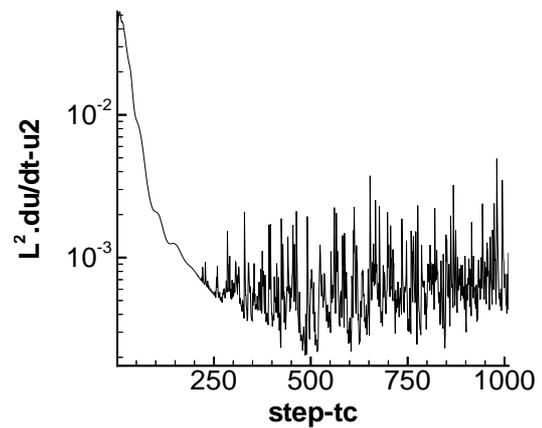
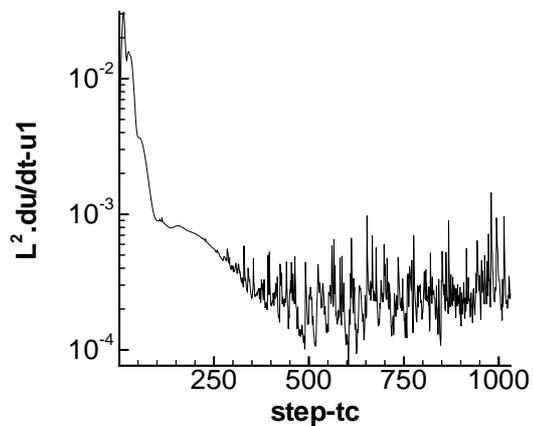


Abbildung C.16.: CS, mit SC,
 $max_{dlc} = 3$
 $L = 3, \|u_2^i - u_2^{i-1}\|$



154Abbildung C.17.: CS, mit SC,
 $max_{dlc} = 3$
 $L = 10, \|u_1^i - u_1^{i-1}\|$

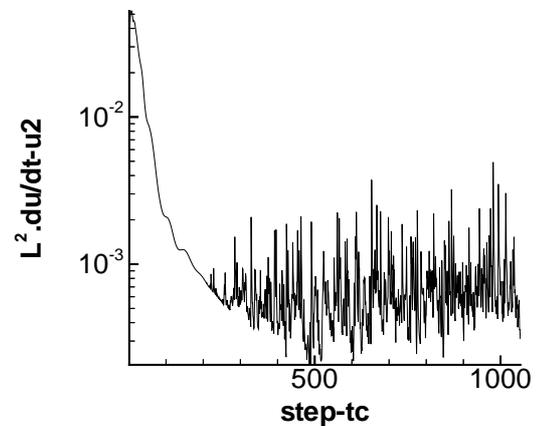


Abbildung C.18.: CS, mit SC,
 $max_{dlc} = 3$
 $L = 10, \|u_2^i - u_2^{i-1}\|$

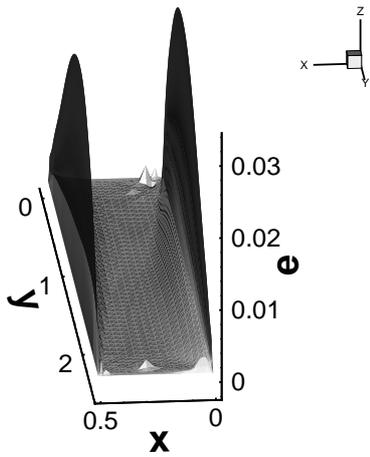


Abbildung C.19.: CS, mit SC,
 $max_{dlc} = 1$, $L = 15$,
 $\epsilon(tc = 600)$

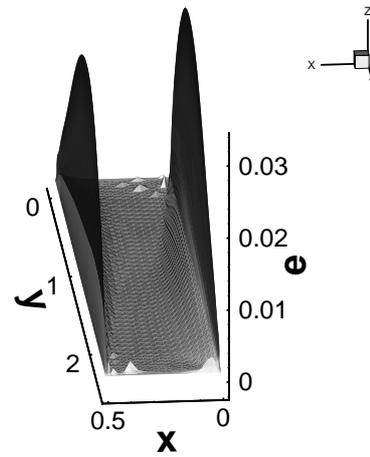


Abbildung C.20.: CS, mit SC,
 $max_{dlc} = 1$, $L = 15$,
 $\epsilon(tc = 800)$

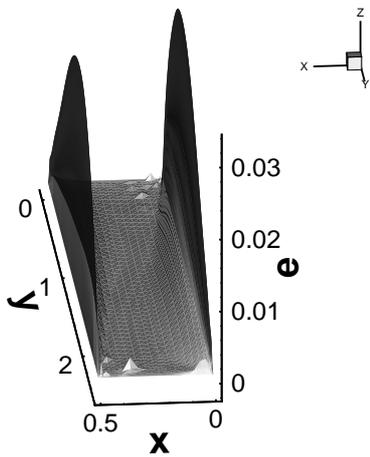


Abbildung C.21.: CS, mit SC,
 $max_{dlc} = 1$, $L = 15$,
 $\epsilon(tc = 1000)$

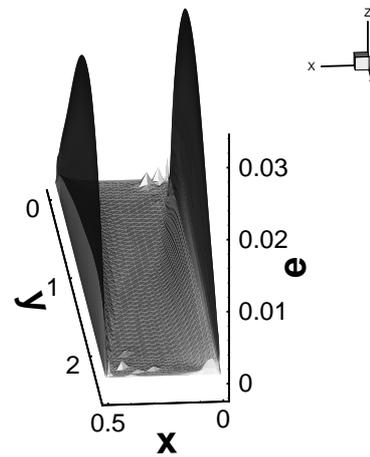


Abbildung C.22.: CS, mit SC,
 $max_{dlc} = 1$, $L = 15$,
 $\epsilon(tc = 1400)$

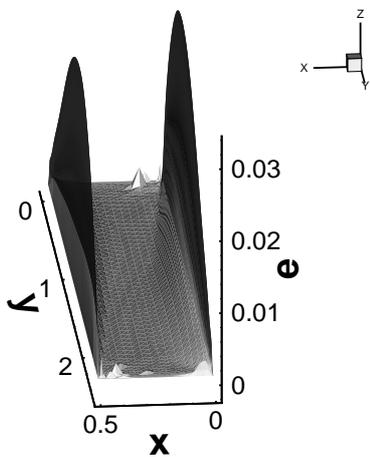


Abbildung C.23.: CS, mit SC,
 $max_{dlc} = 1$, $L = 15$,
 $\epsilon(tc = 2000)$

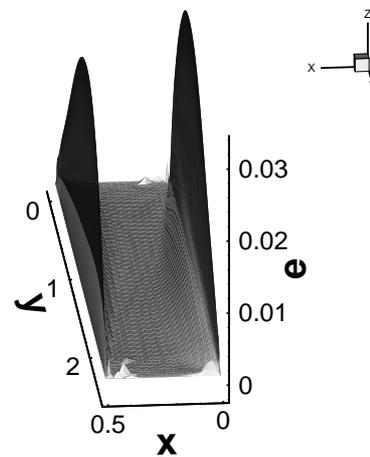


Abbildung C.24.: CS, mit SC,
 $max_{dlc} = 1$, $L = 15$,
 $\epsilon(tc = 2800)$

D. Abkürzungs- und Symbolverzeichnis

Abkürzungs- und Symbolverzeichnis

In diesem Abschnitt sollen die in der Arbeit verwendeten Symbole erklärt werden. Es bezeichne $\mathbf{u}, \mathbf{v} : R^d \times (0, T] \mapsto R^d$ eine vektorwertige und $M, N : R^{d \times d} \times (0, T] \mapsto R^{d \times d}$ eine matrixwertige Funktion.

Symbol	Bedeutung
$\partial_t \mathbf{u}$	$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}$
$\partial_i \mathbf{u}$	$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}$
∇p	$(\nabla p)_i = \partial_i p$
$\nabla \cdot \mathbf{u}$	$\nabla \cdot \mathbf{u} = \sum_i \partial_i u_i$
$\nabla \mathbf{u}$	$(\nabla \mathbf{u})_{ij} = \partial_j u_i$
$\nabla \mathbf{u}^T$	$(\nabla \mathbf{u}^T)_{ij} = \partial_i u_j$
$\mathbf{S}(\mathbf{u})$	$\mathbf{S}(\mathbf{u}) = (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)/2$
$\nabla \cdot M$	$(\nabla \cdot M)_j = \sum_i \partial_i M_{ij}$
$\nabla \cdot (\nabla \mathbf{u})$	$(\nabla \cdot (\nabla \mathbf{u}))_j = \sum_i \partial_i \partial_j u_i$
$\Delta \mathbf{u}$	$(\Delta \mathbf{u})_j = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i^2}$
$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v}$	$((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v})_j = \sum_i u_i \partial_i v_j$
$\nabla \times \mathbf{u}$	Rotation von \mathbf{u}
$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$	$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \sum_i u_i v_i$
$M : N$	$M : N = \sum_{ij} M_{ij} N_{ij}$
$\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$	$(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})_{ij} = u_i v_j$

D. Abkürzungs- und Symbolverzeichnis

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet. Nun sollen die benötigten Funktionenräume definiert werden.

Symbol	Bedeutung
$C^\infty(\Omega)$	Menge der unendlich oft auf Ω stetig differenzierbaren Funktionen.
$C_0^\infty(\Omega)$	$\{u \in C^\infty(\Omega) : \overline{\{x : u(x) \neq 0\}} \text{ ist beschränkt und } \subset \Omega\}$
$L^p(\Omega)$	Menge aller Äquivalenzklassen meßbarer Funktionen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\ f\ _{L^p(\Omega)} := \left(\int_\Omega f(x) ^p dx\right)^{\frac{1}{p}} < \infty, 1 \leq p < \infty$. Für $p = 2$ schreibt man oft nur $\ \cdot\ _0$ statt $\ \cdot\ _{L^2(\Omega)}$.
$L^\infty(\Omega)$	Menge der Äquivalenzklassen meßbarer Funktionen $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, die wesentlich beschränkt sind, d.h. für die $ f < M < \infty$ f.ü. gilt.
$L^p_0(\Omega)$	$\{u \in L^p(\Omega) : \int_\Omega u(x) dx = 0\}$
$L^1_{loc}(\Omega)$	$\{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ meßbar} : \int_A f(x) dx < \infty, \forall A \text{ abgeschlossen und } A \subset \Omega\}$
$H^1(\Omega)$	$\{u \in L^2(\Omega) : \exists u' \in L^1_{loc}(\Omega) \text{ s.d. } \int_\Omega u \phi' dx = - \int_\Omega u' \phi dx, \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega)\}$ Auf $H^1(\Omega)$ definiert man die Norm $\ u\ _1 := \left(\int_\Omega u ^2 dx + \int_\Omega \nabla u ^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$. Oft benötigt man die Halbnorm $ u _1 := \left(\int_\Omega \nabla u ^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$.
$H^1_0(\Omega)$	Abschluß des C_0^∞ in der Norm $\ u\ _1 := \left(\int_\Omega u ^2 dx + \int_\Omega \nabla u ^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$.
$H^1_{div}(\Omega)^d$	$\{u \in H^1(\Omega)^d : \nabla \cdot u = 0\}$.
$\ \cdot\ _X$	Norm auf X ,
$L^p((0, T); X)$	Menge der Äquivalenzklassen meßbarer Funktionen $\phi : (0, T) \mapsto X$ mit $\int_0^T \ \phi\ _X^p dt < \infty$
$L^\infty((0, T); X)$	Menge der Äquivalenzklassen meßbarer Funktionen $\phi : (0, T) \mapsto X$ mit $\ \phi\ _X < M < \infty$ f.ü.
X^*	Dualraum zu X .
$H^{-1}(\Omega)$	Dualraum zu $H^1(\Omega)$
$H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$	$\{u \in L^2(\partial\Omega) \mid \int \int_{\partial\Omega \times \partial\Omega} \frac{ u(x)-u(y) ^2}{ x-y ^2} ds(x) ds(y) < \infty\}$, vgl. auch [Ott99] S.159.
$H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$	Dualraum zu $H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$

Literaturverzeichnis

- [Alt92] ALT, H. W.: *Lineare Funktionalanalysis. Eine anwendungsorientierte Einführung.* Springer, Berlin, 1992.
- [BR77] BERNARD, P., RATIU, P.: *Turbulence seminar.* Lecture Notes in Mathematics, Bd.615, Springer, 1977.
- [Bre93] BREIMAN, L.: *Probability.* Classics in Applied Mathematics, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1993.
- [CKZ86] CHEESEWRIGHT, R., KING, K. J., ZIAI, S.: *Experimental data for the evaluation of computer codes for the prediction of two-dimensional bouyant cavity flows.* ASME winter annual meeting, S.75-81, Anaheim, 1986.
- [Cod93] CODINA, R.: *A Finite Element Formulation for the Numerical Solution of the Convection-Diffusion Equation.* Monografia (14), Centro Internacional de Mto-dos Numricos en Ingenieria, Barcelona, 1993.
- [CS99] CODINA, R., SOTO, O.: *Finite element implementation of two-equation and algebraic stress turbulence models for steady incompressible flows* International Journal for Numerical Methods in Fluids, Volume 30 Number3, 309-334, 1999.
- [Eck74] ECKELMANN, H.: *The structure of the viscous sublayer and the adjacent wall region in a turbulent channel flow* J.Fluid Mech., vol.65, part 3, pp. 439-459, 1974.
- [Fri96] FRISCH, U.: *Turbulence. The legacy of A.N.Kolmogorov.* Cambridge University Press, 1996.
- [GR94] GROSSMANN, C., ROOS, H.G.: *Numerik partieller Differentialgleichungen.* Teubner Studienbücher Mathematik, Teubner, Stuttgart, 1994.
- [Gro74] GROSSMANN, S.: *Mathematischer Einführungskurs für die Physik.* Teubner Studienbücher Physik, Teubner, Stuttgart, 1974.
- [IF79] INOUE, A., FUNAKI, T.: *On an New Derivation of the Navier-Stokes-Equation.* Commun.math.Phys.65, 83-90 (1979)
- [KC96] KEVORKIAN, J., COLE, J.D.: *Multiple Scale and Singular Perturbation Methods.* Applied Mathematical Sciences, Volume 114, Springer, 1996.
- [Kes92] KESSLER, R.: *Eigenschaften und Anwendungsbereiche von Turbulenzmodellen.* IB 221-92 A 15, DLR Göttingen, 1992.

- [KP80] KESTEN, H., PAPANICOLAOU, G.: *A limit theorem for stochastic acceleration*. Commun. Math. phys. Vol. 78, pp.19-63, 1980.
- [Kra64] KRAICHNAN, R.: Phys. Fluids. Vol 7, pp. 1163, 1964.
- [Kre91] KRENGEL, U.: *Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik* Vieweg, 1991
- [LM86] LANDAHL, M. T., MOLLO-CHRISTENSEN, E.: *Turbulence and random processes in fluid mechanics*. Cambridge University Press, 1986.
- [Lub98] LUBE, G.: *Funktionalanalysis*. Vorlesungsskript, 1998.
- [MP94] MOHAMMADI, B., PIRONNEAU, O.: *Analysis of the K-Epsilon Turbulence Model*. John Wiley & sons, 1994.
- [Mue97] MÜLLER, L.: *Untersuchung einer stabilisierten Finite-Elemente-Methode für die Oseen-Gleichungen*. Göttingen, Univ., Dipl.-Arb., 1997.
- [Mue98] MÜLLER, S.: *Untersuchung von iterativen Lösungsverfahren und Vorkonditionierungsstrategien für die Oseen-Gleichungen*. Göttingen, Univ., Dipl.-Arb., 1998.
- [Mue99] MUELLER, H.: *Ein Konzept zur numerischen Berechnung inkompressibler Strömungen auf der Grundlage einer diskontinuierlichen Galerkin-Methode in Verbindung mit nichtüberlappender Gebietszerlegung*. Dissertation, TU Dresden, 1999.
- [Nei99] NEITZKE, K. P.: *Experimentelle Untersuchung und numerische Modellierung von wandnahen thermischen Auftriebsströmungen*. Dissertation, TU Dresden, 1999.
- [Oek92] OEKSENDAHL, B.: *Stochastic Differential Equations. An Introduction with Applications*. Springer, 1992
- [Par88] PARÈS, C.: Un traitement faible par éléments finis de la condition de glissement sur une paroi pour les équations de Navier-Stokes. Note C.R.A.S., Vol.307, pp.101-106, 1988.
- [PO97] PITERBARG, L.O., OSTROVSKII, A.G.: *Advection and Diffusion in Random Media. Implications for Sea Surface Temperature Anomalies*. Kluwer, Dordrecht, 1997.
- [Ott99] OTTO, F. C.: *A non-overlapping Domain Decomposition Method for elliptic Problems*. Göttingen, Univ., Dissertation, 1999.
- [Rup97] RUPPIN, A.: *Shock-Capturing-Methoden bei stabilisierten Galerkin-Verfahren*. Göttingen, Univ., Dipl.-Arb., 1998.

- [RST96] ROOS, H.-G., STYNES, M., TOBISKA, L.: *Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equations. Convection-Diffusion and Flow Problems*. Springer, 1996.
- [Sin94] SINAI, Y.G.: *Topics in Ergodic Theory*. Princeton University Press, Prince/New Jersey, 1994.
- [Tay35] TAYLOR, G.I.: *Statistical theorie of turbulence*. Proc. R. Soc. Lond. A 151, 421-478, 1935.
- [Tem77] TEMAN, R.M.: *Navier-Stokes-Equations. Theory and Numerical Analysis*. Studies in Mathematics and its Applications, Volume 2, North Holland, 1977.
- [Tri72] TRIEBEL, H.: *Höhere Analysis*. Hochschulbücher fr Mathematik, Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1972.
- [VF88] VISHIK, M.J., FURSIKOV, A.V.: *Mathematical Problems of Statistical Hydrodynamics*. Kluwer, Dordrecht, 1988.
- [Wal82] WALTERS, P.: *An Introduction to Ergodic Theorie*. Graduale Texts in Mathematics, 79, Springer, 1982.
- [Yua92] YUAN: *New wall functions for the numerical simulation of air flow patterns in rooms*. Proceedings ROOMVENT '92, Aalborg, 1992.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei all jenen bedanken, die zur Abfassung dieser Arbeit beigetragen haben.

Mein ganz besonderer Dank gilt Herrn Prof. Gert Lube für das interessante Thema, die ungemein intensive und motivierende Betreuung und auch dafür, daß er mir die Teilnahme an einer Sommerschule über die Navier-Stokes-Gleichung und das Absolvieren eines Praktikums an der TU Dresden ermöglicht hat.

Ich möchte auch Frank-Christian Otto danken für die Einarbeitung in PNS und die Hilfe bei so vielen Fragen zur Numerik partieller Differentialgleichungen.

Ein besonderer Dank gilt Ralf Gritzki, Hannes Müller und Dr. Markus Rösler von der TU Dresden für die anregende Zusammenarbeit, insbesondere bei der Implementierung der zu testenden Verfahren in PNS, und natürlich für die Ermöglichung eines Praktikums an der TU Dresden.

Außerdem möchte ich Andreas Priesnitz für die Hilfe bei so vielen kleinen und großen Problemen mit *C* und *Unix*, sowie Heiko Schilling und Markus Looft für die Hilfe bei Problemen mit L^AT_EX danken. Ferner sei Gerd Rapin für das Korrekturlesen gedankt. Der ganzen CFD-Arbeitsgruppe sei für die inspirierende Arbeitsatmosphäre und dem Operating für die stets freundliche Unterstützung gedankt.

Weiterhin sei Holger Frahnert von der *DLR* Göttingen für die vielen hilfreichen Literaturhinweise zur Physik der Turbulenz gedankt.

Schließlich möchte mich ganz besonders bei meinen Eltern bedanken, die mir mein Studium ermöglicht haben.