

Die Navier-Stokes Gleichungen
Zur Problematik von a-posteriori Fehlerschätzern
unter Beachtung hydrodynamischer Stabilität

Diplomarbeit

vorgelegt von
Gerd Rapin
aus Haselünne

angefertigt am
Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
der Georg-August-Universität zu Göttingen

1999

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	i
Symbolverzeichnis	iii
Einleitung	1
1 Grundlagen	3
1.1 Funktionenräume	3
1.1.1 Räume stetig differenzierbarer Funktionen	3
1.1.2 Lebesgue-Räume	5
1.1.3 Sobolev-Räume	6
1.1.4 Zeitabhängige Sobolev-Räume	8
1.2 Hilfssätze	11
1.2.1 Regel der partiellen Integration	11
1.2.2 Ungleichung von Poincaré	12
1.2.3 Lemma von Gronwall	12
1.3 Dynamische Systeme	13
2 Endlich-dimensionale dynamische Systeme	17
2.1 Problemstellung und Wohldefiniiertheit	17
2.2 Stabilität	19
2.3 Beispiele	20
2.3.1 Die Lorenz-Gleichungen	20
2.3.2 Ein Modell von Trefethen	22
2.4 Eine a-posteriori Fehlerabschätzung	23
3 Navier-Stokes Gleichungen	29
3.1 Problemstellung	29
3.2 Schwache Formulierung und Lösbarkeit	30
3.2.1 Das instationäre Navier-Stokes Problem	30
3.2.2 Das stationäre Navier-Stokes Problem	33

4	Hydrodynamische Stabilität	35
4.1	Definition der hydrodynamischen Stabilität	35
4.2	Die Energie-Methode	37
4.3	Prinzip der linearisierten Stabilität	40
4.4	Beurteilung dieser Ansätze	42
4.5	Gründe für das Versagen des Prinzips der linearisierten Stabilität . .	43
4.6	'Worst scenario' - Abschätzung	43
5	Fehlerabschätzungen für Galerkin-Verfahren	47
5.1	Allgemeine Bemerkungen	47
5.2	Das stationäre Navier-Stokes Problem	48
5.2.1	Eine Finite-Elemente-Methode	48
5.2.2	A-posteriori Fehlerabschätzung	50
5.3	Das instationäre Navier-Stokes Problem	58
5.3.1	Das dG(0) - Verfahren	58
5.3.2	A-posteriori Fehlerabschätzung	59
5.3.3	A-priori Fehlerabschätzung	65
6	Anwendung auf eine spezielle Rohrströmung	69
7	Ergebnisse und Ausblick	77
	Literaturverzeichnis	79

Symbolverzeichnis

SYMBOL	BEDEUTUNG	SEITE
1. Kapitel		
\mathbf{R}	Menge der reellen Zahlen	3
\mathbf{N}	Menge der natürlichen Zahlen	
$x \cdot y$	Skalarprodukt auf dem \mathbf{R}^n	3
Ω	Teilmenge des \mathbf{R}^n	3
$ x $	Norm auf dem \mathbf{R}^n	3
$D^\alpha \varphi(x)$	Ableitung von φ in Multiindexschreibweise	4
$C(\Omega)$	Menge der stetigen Funktionen auf Ω	4
$C^m(\Omega)$	Menge der m -fach auf Ω stetig differenzierbaren Funktionen	4
$C^m(\overline{\Omega})$	Menge der m -fach auf Ω stetig differenzierbaren Funktionen, deren Ableitungen sich auf den Rand fortsetzen lassen	4
$C_0^\infty(\Omega)$	Menge der unendlich oft auf Ω differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger	4
$\partial\Omega$	Rand von Ω	5
$C^{m;\lambda}(\overline{\Omega})$	Hölder-Raum, der aus allen Funktionen aus $C^m(\overline{\Omega})$ besteht, die Hölder-stetig sind	4
$L^p(\Omega)$	Menge der Lebesgue-meßbaren Funktionen, die zur p -ten Potenz integrierbar sind	5
$L^\infty(\Omega)$	Menge der Lebesgue-meßbaren Funktionen, die wesentlich beschränkt sind	5
$L_{loc}^1(\Omega)$	Menge der lokal Lebesgue-integrierbaren Funktionen	6
$W^{k,p}(\Omega)$	Sobolev-Raum aller Funktionen, die selbst und bis zur k -ten Ableitung zu $L^p(\Omega)$ gehören	6
$W_0^{k,p}(\Omega)$	Abschluß der Menge $C_0^\infty(\Omega)$ in der Norm $\ \cdot\ _{W^{k,p}(\Omega)}$	7
$H_0^k(\Omega)$	$H_0^k(\Omega) := W_0^{k,2}(\Omega)$	7
$H^k(\Omega)$	$H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$	7
$((\cdot, \cdot))$	Skalarprodukt auf $[L^2(\Omega)]^n$	8
$\ \cdot\ $	Norm auf $[L^2(\Omega)]^n$	8
$ \cdot _{1,\Omega}$	Norm auf $[H_0^1(\Omega)]^n$	8
$ \cdot _{k,\Omega}$	Seminorm auf dem $[H^k(\Omega)]^n$	8

SYMBOL	BEDEUTUNG	SEITE
$C^m([0, T]; X)$	Menge aller stetigen Funktionen $\varphi : [0, T] \rightarrow X$ mit stetigen bis auf den Rand fortsetzbaren Ableitungen bis zur Ordnung m auf $[0, T]$	9
$\ \cdot\ _X$	Norm auf X	9
$L^p((0, T); X)$	Menge aller meßbaren Funktionen $\varphi : (0, T) \rightarrow X$, für die $\int_0^T \ \varphi\ _X^p dt < \infty$ gilt	9
$L^\infty((0, T); X)$	Menge aller meßbaren Funktionen $\varphi : (0, T) \rightarrow X$, die wesentlich beschränkt sind	9
X^*	Dualraum zu X	10
$H^1((0, T); X)$	Menge aller Funktionen aus $L^2((0, T); X)$ mit Ableitungen aus $L^2((0, T); X^*)$	10
$(\cdot, \cdot)_H$	Skalarprodukt auf H	11
$\langle \cdot, \cdot \rangle_X$	$\langle \varphi, x \rangle_X := \varphi(x), \forall \varphi \in X^*, x \in X$	11
2. Kapitel		
$\ u \ _X$	$\ u \ _X := \sup_{t \in I} e^{-L t-t_0 } u(t) $	18
V	Lyapunov Funktion	20
M	$M := \sup_{t \geq 0} \frac{\ \varphi(t)\ }{\ u_0\ }$ max. Wachstumsfaktor	23
ϵ	kritischer Wert, der den größten Betrag des Anfangswertes darstellt, der noch Stabilität sichert	23
I_n	$I_n := (t_{n-1}, t_n)$	24
U_n	$U_n := U(t_n)$	24
U_n^+	$U_n^+ := \lim_{s \rightarrow +0} U(t_n + s)$	24
U_n^-	$U_n^- := \lim_{s \rightarrow -0} U(t_n + s)$	24
$[U_n]$	$[U_n] := U_n^+ - U_n^-$	24
$S(t_N, u, U)$	starke Stabilitätskonstante	28
3. Kapitel		
∇u	$\nabla u := \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)_{i=1}^n$	29
Δu	$\Delta u := \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j^2} \right)_{i=1}^3$ Laplace von u	29
$\nabla \cdot u$	$\nabla \cdot u := \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$ Divergenz von u	29
$(u \cdot \nabla)v$	$\left(\sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)_{i=1}^3$	29
L	charakteristische Länge von Ω	30
U	charakteristische Geschwindigkeit der Strömung u	30
P	charakteristischer Druck von p	30
Re	Reynolds-Zahl	30
$H_{div}(\Omega)$	Menge der Funktionen aus $[H_0^1(\Omega)]^3$, die divergenzfrei sind	30
$L_{div}(\Omega)$	Abschluß der divergenzfreien Funktionen aus $[C_0^\infty(\Omega)]^3$ in der durch $[L^2(\Omega)]^3$ induzierten Topologie	31
$b(u; v, w)$	$b(u; v, w) := ((u \cdot \nabla)v, w)$	31

SYMBOL	BEDEUTUNG	SEITE
$a(u, v)$	$a(u, v) := \sum_{i=1}^3 ((\nabla u_i, \nabla v_i))$	31
V	$V := [H_0^1(\Omega)]^3$	32
H	$H := \{p \in H^1(\Omega) \mid \int_{\Omega} p dx = 0\}$	32
\hat{V}	$\hat{V} := V \times H$	32
4. Kapitel		
$\ \varphi\ _I$	$\ \varphi\ _I := \sup_{t \in I} \ \varphi(\cdot, t)\ $	36
R_E	kritische Reynolds-Zahl der nichtlinearen Stabilitätsanalyse	37
$D = (D_{ij})_{i,j=1}^3$	Verzerrungstensor	39
R_L	kritische Reynolds-Zahl der linearisierten Stabilitätsanalyse	41
$C_0^p(T, u)$	schwache Stabilitätskonstante	44
K	$K := \ \nabla u\ _{L^\infty(\Omega \times I)}$	44
5. Kapitel		
$F(v)$	$F(v) := ((f, v))$	48
$A(u, \hat{w}, \hat{v})$	Trilinearform	48
T_h	Familie von Zerlegungen	49
Ω_k	finites Element	49
h_k	Durchmesser des finiten Elementes Ω_k	49
\hat{V}_h	$\hat{V}_h := V_h \times H_h$ stückweise polynomialer Unterraum von \hat{V}	49
$L(u, u; \hat{v}, \hat{\varphi})$	Multilinearform	50
$\nabla v \cdot \varphi$	$\nabla v \cdot \varphi := \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \varphi_j \right)_{i=1}^3$	50
$C_1^p(u, u_h)$	Stabilitätskonstante	51
ω_k	$\omega_k := \bigcup_{\bar{\Omega}_k \cap \bar{\Omega}_j \neq \emptyset} \Omega_j$	52
$\frac{\partial u_h}{\partial n_S}$	Normalenableitung von u_h auf einer Seite S eines finiten Elements	54
V_h^1	$V_h^1 := \{v \in V \mid v _{\Omega_k} \text{ ist linear, } \Omega_k \in T_h\}$	56
H_h^1	$H_h^1 := \{q \in H \mid q _{\Omega_k} \text{ ist konstant, } \Omega_k \in T_h\}$	56
\hat{V}_h^1	$\hat{V}_h^1 := V_h^1 \times H_h^1$	56
Z	$Z := H^1((0, T); H_{div}(\Omega))$	58
$\tilde{A}(u; \hat{w}, \hat{v})$	Trilinearform	58
h_n	$h_n := t_{n+1} - t_n$	59
Z_h	Die Menge derjenigen $v \in L_2((0, T); H_{div}(\Omega))$, die konstant sind auf jedem h_n	59
W	$W := L_2((0, T); H_{div}(\Omega))$	59
$\tilde{L}(u, u; \hat{v}, \hat{\varphi}, T)$	Multilinearform	59
$C_1^p(T, u, u_h)$	Stabilitätskonstante	60
L_h	$L_h := \max_{0 \leq n \leq N} (1 + \log(h_n))^{\frac{1}{2}}$	63
$C_1^d(T, u, u_h)$	diskrete Stabilitätskonstante	65

SYMBOL	BEDEUTUNG	SEITE
6. Kapitel		
$\tilde{\varphi}$	$\tilde{\varphi} := (\varphi_2, \varphi_3)$	70
τ	$\tau(t) := \min(1, T - t)$	71

Einleitung

Zentrales Thema dieser Diplomarbeit sind die Navier-Stokes Gleichungen

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} - \nu' \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p &= f && \text{in } \Omega \times (0, T) \\ \nabla \cdot u &= 0 && \text{in } \Omega \times (0, T) \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \times (0, T) \\ u(\cdot, 0) &= u_0 && \text{in } \Omega.\end{aligned}$$

Durch diese wird die inkompressible Strömung eines Fluids in einem Gebiet Ω beschrieben, das im Zeitintervall $[0, T)$ beobachtet wird. Diese Bewegungsgleichung für Newtonsche Flüssigkeiten ist eine der Grundsäulen der Hydrodynamik.

Aufgestellt wurden sie von dem französischen Ingenieur M.H. NAVIER im Jahre 1822. G.G. STOKES systematisierte dann 1845 die Darstellung. Seither haben sich aufgrund ihrer Bedeutung in der Physik und den Ingenieurwissenschaften viele Mathematiker hiermit beschäftigt.¹ Doch ist die Lösbarkeitstheorie bis heute unbefriedigend. So ist z.B. die Frage der Eindeutigkeit einer Lösung im dreidimensionalen Fall noch offen. Auch die numerische Approximation von Lösungen ist theoretisch nicht hinreichend untermauert. Denn bislang waren nur Fehlerabschätzungen der folgenden Art verfügbar:²

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|u(t) - u_h(t)\| \leq C^s(T, u)E(h, u, p).$$

Dabei ist $E(h, u, p)$ der Konsistenz- bzw. Interpolationsfehler zwischen der Lösung (u, p) und der Näherungslösung (u_h, p_h) . h ist ein Maß für die Maschengröße in Ort und Zeit, und $C^s(T, u)$ ist eine Stabilitätskonstante von der Gestalt

$$C^s(T, u) = Ce^{TK}$$

mit $K := \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega \times I)}$. Betrachtet man ein relevantes Zeitintervall T , so liegt TK oft in der Größenordnung der Reynolds-Zahl Re , die eine wichtige Kennzahl der Gleichungen darstellt und in Anwendungen meist im Bereich von 10^2 bis 10^9 liegt³.

¹Einen interessanten historischen Abriß der Bemühungen und Fortschritte verfaßten J. BEMELMANS, S. HILDEBRANDT und W. VON WAHL [BHvW90].

²Vgl. C. JOHNSON, R. RANNACHER, M. BOMAN [JRB95], Abschnitt 2.3.

³Vgl. C. JOHNSON, R. RANNACHER, M. BOMAN [JRB95], Abschnitt 2.1.

Hierdurch wird ersichtlich, daß die bisherigen Fehlerabschätzungen aufgrund der Größe von $C^s(T, u)$ praktisch bedeutungslos sind.

C. JOHNSON und R. RANNACHER entwickelten nun ein Konzept von a-posteriori Abschätzungen, dessen Idee auf scharfen Stabilitätsabschätzungen eines zugeordneten dualen Problems beruht. Hiermit konnte in einer Modellströmung die Stabilitätskonstante auf die Größenordnung $O(Re)$ reduziert werden. (Siehe dazu Kapitel 6.) Die vorliegende Arbeit greift dieses Konzept auf und zeigt a-posteriori Fehlerabschätzungen für das stationäre und das instationäre semidiskretisierte Navier-Stokes Problem. Außerdem beschäftigt sie sich in einem Kapitel über hydrodynamische Stabilität mit der Frage, welche Strömungen überhaupt zuverlässig berechenbar sind. Um das Vorgehen transparenter zu gestalten, wird die Darstellung in den Kontext dynamischer Systeme eingebettet.

Im Einzelnen ergibt sich damit folgender Aufbau: In Kapitel 1 werden kurz die benötigten Definitionen und Notationen eingeführt. Dies sind insbesondere Definitionen verschiedener Funktionenräume und ein kurzer Abriss über dynamische Systeme. Das zweite Kapitel dient der Motivation und zeigt exemplarisch das Vorgehen anhand gewöhnlicher Differentialgleichungen auf. Thema des dritten Kapitels sind die Navier-Stokes Gleichungen. Hier werden Variationsformulierungen der Gleichungen hergeleitet und ihre Lösbarkeitseigenschaften diskutiert. Dem weiten Feld der hydrodynamischen Stabilität ist das vierte Kapitel gewidmet. Es soll einen Überblick der verschiedenen Konzepte, ihrer Verbindungen und ihrer Grenzen geben. In diesem Kontext ist dabei vor allem die Frage interessant, welche Strömungen überhaupt berechenbar sind. Dazu ist es erforderlich, die verschiedenen Stabilitätsbegriffe kritisch zu hinterfragen. Das fünfte Kapitel beschäftigt sich mit Fehlerabschätzungen für Galerkin-Verfahren. Den Schwerpunkt bilden hier die schon oben genannten a-posteriori Abschätzungen für das Navier-Stokes Problem. Um die Generalität dieser Methode von R. RANNACHER und C. JOHNSON zu demonstrieren, wird auch eine a-priori Abschätzung des semidiskretisierten instationären Navier-Stokes Problems gezeigt. Anhand einer Modellströmung wird dann im sechsten Kapitel der Nutzen dieser neuen Methode dargestellt. Abschließend werden die Ergebnisse zusammengefaßt, und es wird versucht, einen Ausblick zu geben.

Kapitel 1

Grundlagen

1.1 Funktionenräume

In diesem Abschnitt werde ich die für die Arbeit benötigten Funktionenräume einführen. Dies sind insbesondere verschiedene Sobolev-Räume. Es hat sich gezeigt, daß Sobolev-Räume geeignete Lösungsräume für partielle Differentialgleichungen darstellen. Es wird von mir ein Überblick über die hier relevanten Eigenschaften dieser Räume zusammengestellt. Auf die Beweise dieser Aussagen wird bewußt verzichtet, da man sie in fast allen Standardwerken der Funktionalanalysis findet. Der Vollständigkeit zuliebe verweise ich aber bei den Aussagen auf geeignete Literatur.

1.1.1 Räume stetig differenzierbarer Funktionen

Die Darstellung beginnt mit dem \mathbf{R}^n , der mit dem *euklidischen Skalarprodukt* versehen wird:

Satz 1.1 *Definiert man auf dem \mathbf{R}^n das Skalarprodukt*

$$x \cdot y := \sum_{i=1}^n x_i y_i, \quad \forall x := (x_1, \dots, x_n)^t, y := (y_1, \dots, y_n)^t \in \mathbf{R}^n,$$

so ist der \mathbf{R}^n ein Hilbert-Raum mit der Norm

$$|x| := \sqrt{x \cdot x}, \quad \forall x \in \mathbf{R}^n.$$

Auf einer beliebigen offenen, beschränkten Teilmenge $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ werden nun die Räume stetiger bzw. klassisch differenzierbarer Funktionen eingeführt. Doch zuerst wird die sehr praktische Notation mit Hilfe von *Multiindizes* beschrieben.

Definition 1.1 *Ein Multiindex ist ein Vektor $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, dessen Einträge α_i , $i = 1, \dots, n$ aus nichtnegativen ganzen Zahlen bestehen.*

- $|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i$ nennt man die Länge des Multiindex α .

- Für eine hinreichend oft differenzierbare Funktion $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ benutzt man für $x \in \Omega$ die Notation:

$$D^\alpha \varphi(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}(x), \quad |\alpha| \geq 1, \quad D^{(0, \dots, 0)} \varphi(x) := \varphi(x).$$

Hiermit ergeben sich nun folgende Definitionen:

Definition 1.2 Sei $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ beschränkt und offen.

(i) Die Menge der stetigen Funktionen auf Ω ist gegeben durch

$$C(\Omega) := \{\varphi : \Omega \rightarrow \mathbf{R} \mid \varphi \text{ ist stetig}\}.$$

(ii) Die Menge der m -fach auf Ω stetig differenzierbaren Funktionen ist

$$C^m(\Omega) := \{\varphi : \Omega \rightarrow \mathbf{R} \mid D^\alpha \varphi \in C(\Omega), \forall \alpha : |\alpha| \leq m\}.$$

(iii) $C^m(\overline{\Omega})$ ist die Menge aller Funktionen aus $C^m(\Omega)$, deren Ableitungen sich stetig auf den Rand fortsetzen lassen.

(iv) $C_0^\infty(\Omega_1)$ ist die Menge der unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger. Ω_1 ist dabei ein beliebiges, im Allgemeinen nicht beschränktes Gebiet im \mathbf{R}^n .

Es gilt nun folgendes Vollständigkeitsresultat:

Satz 1.2 $C^m(\overline{\Omega})$ ist mit der Norm

$$\|\varphi\|_{C^m(\overline{\Omega})} := \sup_{|\alpha| \leq m} \sup_{x \in \overline{\Omega}} |D^\alpha \varphi(x)|$$

für alle $m \in \mathbf{N}_0$ ein Banach-Raum.

Beweis: Vgl. H.W. ALT [Alt92], Lemma 1.8.

Um den Begriff der *Randglätte* einführen zu können, ist es erforderlich, *Hölder-Räume* zu definieren, die wiederum eine große Rolle in der *Schauderschen Theorie* der Differentialgleichungen spielen.

Definition 1.3 Seien $0 \leq \lambda \leq 1$ und $m \in \mathbf{N}_0$. Dann ist der Hölder-Raum $C^{m;\lambda}(\overline{\Omega})$ die Teilmenge von $C^m(\overline{\Omega})$, für deren Elemente gilt:

$$\|\varphi\|_{C^{m;\lambda}(\overline{\Omega})} := \|\varphi\|_{C^m(\overline{\Omega})} + \sum_{|\alpha|=m} \sup_{\substack{x,y \in \overline{\Omega} \\ x \neq y}} \frac{|D^\alpha \varphi(x) - D^\alpha \varphi(y)|}{|x - y|^\lambda} < \infty. \quad (1.1)$$

Auch hier gilt:

Satz 1.3 Mit der in (1.1) definierten Norm ist der Hölder-Raum $C^{m;\lambda}(\overline{\Omega})$ ein Banach-Raum.

Beweis: Vgl. H.W. ALT [Alt92], Lemma 1.8.

Die *Randglätte* des Randes $\partial\Omega := \overline{\Omega} \setminus \Omega$ wird wie folgt beschrieben:

Definition 1.4 Ein beschränktes Gebiet Ω gehört zur Klasse $C^{m;s}$ mit $m \in \mathbf{N}_0$ und $0 \leq s \leq 1$, falls es zu jedem Punkt $x_0 \in \partial\Omega$ eine Umgebung $U = U(x_0)$ um x_0 gibt, so daß eine bijektive Abbildung $\psi : U \rightarrow D \subset \mathbf{R}^n$ existiert mit den Eigenschaften:
 (i) $\psi(U \cap \Omega) \subset \mathbf{R}_+^n$; (ii) $\psi(U \cap \partial\Omega) \subset \partial\mathbf{R}_+^n$; (iii) $\psi \in C^{m;s}(U)$ und (iv) $\psi^{-1} \in C^{m;s}(D)$.

Speziell heißt ein zur Klasse $C^{0;1}$ gehörendes Gebiet Lipschitz-stetig.

1.1.2 Lebesgue-Räume

Als nächstes werden Eigenschaften über Lebesgue-Räume zusammengestellt. Dazu versehen wir den \mathbf{R}^n mit dem Lebesgue-Maß μ . Falls $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ eine meßbare Punktmenge ist, so bezeichnet man zwei meßbare Funktionen $f, g : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ als *äquivalent*, falls $f = g$ f.ü. (fast überall) in Ω gilt, d.h. nur auf einer Lebesgue-Nullmenge ist $f \neq g$. Die äquivalenten Funktionen werden nun zu Äquivalenzklassen zusammengefaßt:

Definition 1.5 Sei $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ eine meßbare Menge und sei $1 \leq p < \infty$.

(i) Man definiert $L^p(\Omega)$ als die Menge aller Äquivalenzklassen meßbarer Funktionen $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ mit der Eigenschaft

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty. \quad (1.2)$$

(ii) $L^\infty(\Omega)$ ist die Menge der Äquivalenzklassen wesentlich beschränkter meßbarer Funktionen $f : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$, d.h.

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)| := \inf_{\substack{N \text{ meßbar} \\ \mu(N)=0}} \sup_{x \in \Omega \setminus N} |f(x)| < \infty. \quad (1.3)$$

Bezüglich der Vollständigkeit dieser Räume läßt sich feststellen:

Satz 1.4 Sei $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ eine meßbare Menge. Dann gilt:

(i) Mit der Norm (1.2) ist $L^p(\Omega)$ mit $1 \leq p < \infty$ ein Banach-Raum.

(ii) $L^\infty(\Omega)$ ist mit der Norm (1.3) ein Banach-Raum.

Beweis: Vgl. H.W. ALT [Alt92], Satz 1.14 bzw. Lemma 1.11.

Wie man sofort durch Nachprüfen der Axiome sieht, gilt speziell:

Satz 1.5 Der $L^2(\Omega)$ ist mit dem Skalarprodukt

$$(f, g)_\Omega := \int_{\Omega} f g dx, \quad f, g \in L_2(\Omega)$$

ein Hilbert-Raum.

1.1.3 Sobolev-Räume

Sobolev-Räume sind spezielle Lebesgue-Räume. Für die Elemente dieser Räume werden in geeigneter Weise Ableitungen definiert. Um aber verallgemeinerte Ableitungen definieren zu können, benötigen wir noch den Raum der *lokal integrierbaren Funktionen*:

Definition 1.6 Auf einem meßbaren Gebiet Ω definieren wir den Raum der lokal Lebesgue-integrierbaren Funktionen durch

$$L^1_{loc}(\Omega) := \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbf{R} \text{ meßbar} : \int_A |f(x)| dx < \infty, \forall A \subset\subset \Omega \right\}. \quad (1.4)$$

Dabei bedeutet $A \subset\subset \Omega$, daß A kompakt ist und $A \subset \Omega$ gilt.

Definition 1.7 $f_\alpha \in L^1_{loc}(\Omega)$ wird verallgemeinerte Ableitung $D^\alpha g$ von $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ genannt, falls

$$\int_\Omega f_\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g D^\alpha \varphi dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \quad (1.5)$$

gilt, wobei α ein Multiindex ist. Man schreibt $D^\alpha g := f_\alpha$.

Wie man der klassischen Regel der partiellen Integration entnimmt, stimmen die klassischen und die verallgemeinerten Ableitungen überein, falls die klassischen Ableitungen existieren. Die Funktionenräume mit verallgemeinerten Ableitungen werden nun als *Sobolev-Räume* bezeichnet. Im Folgenden sei $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ immer eine Lebesgue-meßbare Menge.

Definition 1.8 Der Sobolev-Raum $W^{k,p}(\Omega)$ mit $1 \leq p \leq \infty$ und $k \in \mathbf{N}_0$ wird definiert durch

$$W^{k,p} := \{ u \in L^p(\Omega) : \exists D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha : |\alpha| \leq k \}.$$

Satz 1.6 (i) Für $1 \leq p < \infty$ ist der Sobolev-Raum $W^{k,p}(\Omega)$ ein Banach-Raum mit der Norm

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

(ii) $W^{k,\infty}(\Omega)$ ist ein Banach-Raum mit der Norm

$$\|u\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Beweis: Vgl. H.W. ALT [Alt92], Abschnitt 1.15.

Von besonderer Bedeutung bei der Behandlung partieller Differentialgleichungen sind auch folgende Räume:

Definition 1.9 $W_0^{k,p}(\Omega)$ ist definiert als der Abschluß der Menge $C_0^\infty(\Omega)$ in der Norm $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$.

Da nun der $W_0^{k,p}(\Omega)$ ein abgeschlossener Unterraum von $W^{k,p}(\Omega)$ ist, gilt:

Satz 1.7 Der Raum $W_0^{k,p}(\Omega)$ ist für $1 \leq p$ Banach-Raum mit der Norm $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$.

Speziell ausgezeichnet sind die Räume $W_0^{k,2}(\Omega)$ und $W^{k,2}(\Omega)$. Denn wie man sofort sieht, ist es möglich, hierauf ein Skalarprodukt zu definieren. Hierfür sind auch die Bezeichnungen $H_0^k(\Omega) := W_0^{k,2}(\Omega)$ und $H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$ für alle $k \in \mathbf{N}_0$ gebräuchlich.

Satz 1.8 Die Räume $H_0^1(\Omega)$ und $H^k(\Omega)$ sind Hilbert-Räume mit den Skalarprodukten

$$(u, v)_{H^k(\Omega)} := \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D^\alpha u D^\alpha v dx \quad \text{bzw.} \quad (u, v)_{H_0^1(\Omega)} := \sum_{|\alpha|=1} \int_{\Omega} D^\alpha u D^\alpha v dx.$$

Natürlich möchte man die verschiedenen Sobolev-Räume in Relation zueinander setzen können. Dies wird durch die bekannten *Sobolev-Einbettungssätze* erreicht. Wir beschränken uns dabei auf den Fall Lipschitz-stetiger Gebiete. Für die meisten Aussagen ist aber schon die *Kegel-Eigenschaft* des Gebietes ausreichend.

Satz 1.9 Seien $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ eine Lebesgue-messbare, beschränkte Menge mit Lipschitz-stetigem Rand, $1 \leq p < \infty$ und $k \in \mathbf{N}_0$.

- Für $kp < n$ gilt $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ für alle $q \in [1; \frac{np}{n-kp}]$.
- Für $kp = n$ gilt $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ für alle $1 \leq q < \infty$.
- Für $kp > n$ gilt $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$, wobei ggf. $u \in W^{k,p}(\Omega)$ auf einer Nullmenge abgeändert wird.

Beweis: Vgl. R.A. ADAMS [Ada75], Theorem 5.4 in Verbindung mit Theorem 2.8.

In den Gleichungen der Strömungsmechanik entstehen nun vektorwertige Funktionen. Deshalb ist es erforderlich, die Sobolev-Räume entsprechend zu erweitern. Für unsere Zwecke ist es nützlich, die Räume $[H_0^1(\Omega)]^n$ und $[L^2(\Omega)]^n$ zu betrachten.

Satz 1.10 (i) $[H_0^1(\Omega)]^n$ ist ein Hilbert-Raum mit dem Skalarprodukt

$$(u, v)_{[H_0^1(\Omega)]^n} := \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx, \quad u, v \in [H_0^1(\Omega)]^n.$$

Für die Norm benutzen wir die Notation $|v|_{1,\Omega} := \sqrt{(v, v)_{[H_0^1(\Omega)]^n}}$.

(ii) $[L_2(\Omega)]^n$ ist ein Hilbert-Raum mit dem Skalarprodukt

$$((u, v)) := \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n u_i v_i dx, \quad u, v \in [L_2(\Omega)]^n.$$

Die Norm $\|u\|_{[L_2(\Omega)]^n} := \sqrt{((u, u))}$ wird einfach durch $\|u\| := \|u\|_{[L_2(\Omega)]^n}$ bezeichnet.

Sobolev-Räume höherer Ordnung $[H^k(\Omega)]^n$ mit $k \in \mathbf{N}$ verstehen wir mit der Seminorm

$$|u|_{k,\Omega} := \left(\sum_{i=1}^n \sum_{|\alpha|=k} \int_{\Omega} (D^{\alpha} u_i(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad u \in [H^k(\Omega)]^n.$$

Ist offensichtlich über welches Gebiet Ω integriert wird, so schreibt man $|u|_{k,\Omega}$ auch einfach als $|u|_k$.

1.1.4 Zeitabhängige Sobolev-Räume

Betrachtet man zeitabhängige Differentialgleichungen, so erfordert eine adäquate Lösungstheorie Räume zeitabhängiger Funktionen. Da die genaue Definition dieser Räume sehr aufwendig ist, werden hier nur die für diese Arbeit nötigen Definitionen eingeführt. Eine ausführliche Darstellung findet man bei E. ZEIDLER [Zei90] oder bei H. GAJEWSKI, K. GRÖGER, K. ZACHARIAS [GGZ74].

Sei nun in diesem Abschnitt X immer ein reflexiver, separabler Banach-Raum.

Definition 1.10 (i) Eine Menge X heißt separabel, falls sie eine abzählbare dichte Teilmenge enthält.

(ii) Ein Raum X heißt reflexiv, falls die kanonische Einbettung $E : X \rightarrow X^{**}$, die definiert ist durch

$$(Eu)(f) := f(u), \quad u \in X, f \in X^*,$$

surjektiv ist. Durch X^{**} wird der Bidualraum bezeichnet.

Beginnen wollen wir die Diskussion mit den stetig differenzierbaren Vektorfunktionen $\varphi : [0, T] \rightarrow X$ mit $0 < T < \infty$.

Definition 1.11 $\varphi : [0, T] \rightarrow X$ ist differenzierbar, falls für alle $t_0 \in [0, T]$ ein $\tilde{\varphi}(t_0) \in X$ existiert, so daß

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t_0+t \in [0, T]}} \left\| \frac{\varphi(t_0+t) - \varphi(t_0)}{t} - \tilde{\varphi}(t_0) \right\|_X = 0$$

gilt. Man schreibt $\varphi'(t) := \tilde{\varphi}(t), \forall t \in [0, T]$.

Definiert man induktiv höhere Ableitungen, so erhält man:

Definition 1.12 $C^m([0, T]; X)$ ist die Menge aller stetigen Funktionen $\varphi : [0, T] \rightarrow X$ mit stetigen, auf den Rand stetig fortsetzbaren Ableitungen bis zur Ordnung m auf $[0, T]$.

Versieht man nun $C^m([0, T]; X)$ mit der Norm

$$\|\varphi\| := \sum_{i=0}^m \max_{0 \leq t \leq T} \|\varphi^{(i)}(t)\|_X, \quad \forall \varphi \in C^m([0, T]; X), \quad (1.6)$$

so gilt:

Satz 1.11 $C^m([0, T]; X)$ ist mit der Norm (1.6) ein Banachraum.

Beweis: Vgl. E. ZEIDLER [Zei90], Proposition 23.2.

Als nächstes betrachten wir *Lebesgue-integrierbare Vektorfunktionen*:

Definition 1.13 Für $1 \leq p < \infty$ besteht $L^p((0, T); X)$ aus allen Äquivalenzklassen meßbarer Funktionen $\varphi : (0, T) \rightarrow X$, für die

$$\|\varphi\|_{L^p((0, T); X)} := \left(\int_0^T \|\varphi(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \quad (1.7)$$

endlich ist.

Satz 1.12 Mit der Norm (1.7) ist $L^p((0, T); X)$ ein Banach-Raum.

Beweis: Vgl. E. ZEIDLER [Zei90], Proposition 23.2.

Analog gilt auch für den Fall $p = \infty$:

Definition 1.14 Für $p = \infty$ definiert man $L^\infty((0, T); X)$ als die Menge aller Äquivalenzklassen meßbarer Funktionen $\varphi : (0, T) \rightarrow X$, für die

$$\|\varphi\|_{L^\infty((0, T); X)} := \text{ess sup}_{0 < t < T} \|\varphi(t)\|_X < \infty \quad (1.8)$$

gilt.

Satz 1.13 *Mit der Norm (1.8) ist $L^\infty((0, T); X)$ ein Banach-Raum.*

Beweis: Vgl. H. GAJEWSKI, K. GRÖGER, K. ZACHARIAS [GGZ74], Kap. IV, Satz 1.12.

Eine verallgemeinerte Ableitung bezüglich der Zeit ergibt sich jetzt für eine beliebige Funktion $L^2((0, T); X)$ fast analog wie im räumlichen Fall:

Definition 1.15 $u' \in L^2((0, T); X^*)$ heißt verallgemeinerte Ableitung von $u \in L^2((0, T); X)$, falls gilt:

$$\int_0^T \phi'(t)u(t)dt = (-1) \int_0^T \phi(t)u'(t)dt, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(0, T).$$

X^* ist dabei der Dualraum zu X .

Allerdings ist zu beachten, daß das oben auftretende Integral ein *Bochner-Integral* ist, dessen präzise Einführung hier aus Platzgründen nicht gegeben werden kann.¹ Doch läßt sich so folgender Sobolev-Raum definieren:

Definition 1.16 $H^1((0, T); X)$ ist gegeben durch

$$H^1((0, T); X) := \{u \in L^2((0, T); X), \quad u' \in L^2((0, T); X^*)\}.$$

Auch hier gilt das Vollständigkeitsresultat:

Satz 1.14 $H^1((0, T); X)$ ist ein Banach-Raum mit der Norm

$$\|u\|_{H^1((0, T); X)} := \|u\|_{L^2((0, T); X)} + \|u'\|_{L^2((0, T); X^*)}.$$

Beweis: Vgl. H. GAJEWSKI, K. GRÖGER, K. ZACHARIAS [GGZ74], Kap. IV, Satz 1.16.

Ebenfalls interessant ist folgende Dichteigenschaft:

Satz 1.15 *Die Menge $C^1((0, T); X) \cap H^1((0, T); X)$ liegt dicht in $H^1((0, T); X)$.*

Beweis: Vgl. H. GAJEWSKI, K. GRÖGER, K. ZACHARIAS [GGZ74], Kap. IV, Lemma 1.12.

Weitere Resultate lassen sich für den Fall erzielen, daß wir *Evolutionstriplet* betrachten:

Definition 1.17 *Ein Evolutionstriplet $X \subset H \subset X^*$ wird durch folgende Merkmale charakterisiert:*

¹Vgl. z.B. H. GAJEWSKI, K. GRÖGER, K. ZACHARIAS [GGZ74], Kap. IV, Abschnitt 1.2.

- X ist reeller, separabler und reflexiver Banach-Raum.
- H ist reeller, separabler Hilbert-Raum.
- X ist stetig und dicht in H eingebettet.

Satz 1.16 (i) Es gilt die stetige Einbettung

$$H^1((0, T); X) \subset C((0, T); H),$$

wobei $u \in H^1((0, T); X)$ eventuell auf einer Nullmenge abgeändert wird.

(ii) Für $u, v \in H^1((0, T); X)$ und $0 \leq s \leq t \leq T$ gilt die Regel der partiellen Integration:

$$(u(t), v(t))_H - (u(s), v(s))_H = \int_s^t \langle u'(\tau), v(\tau) \rangle_X + \langle v'(\tau), u(\tau) \rangle_X d\tau,$$

wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ das duale Produkt auf X ist.

Beweis: Vgl. H. GAJEWSKI, K. GRÖGER und K. ZACHARIAS [GGZ74], Kap. IV, Satz 1.17.

1.2 Hilfssätze

Es werden Hilfssätze formuliert, die im Weiteren benötigt werden. Auf die Beweise dieser Aussagen wird wieder zumeist verzichtet, da es sich um Standardargumente der angewandten Mathematik handeln.

1.2.1 Regel der partiellen Integration

Von fundamentaler Bedeutung beim Aufstellen einer schwachen Formulierung eines Randwertproblems ist die *verallgemeinerte Regel der partiellen Integration*. Wir benötigen sie in der folgenden Form.

Satz 1.17 Sei $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ein Gebiet mit Lipschitz-stetigem Rand. Ist dann $u \in W^{1,p}(\Omega)$ und $v \in W^{1,q}(\Omega)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $p, q \geq 1$, so gilt für $i = 1, \dots, n$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} u dx + \int_{\partial\Omega} uv \nu_i ds, \quad (1.9)$$

wobei ν_i die i -te Komponente des äußeren Normalenvektors $\nu := (\nu_i)_{i=1}^n$ auf $\partial\Omega$ darstellt.

Beweis: Vgl. H.W. ALT [Alt92], A 5.9.

1.2.2 Ungleichung von Poincaré

Sie ermöglicht es uns, Normen zu finden, die zu $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ äquivalent sind. Außerdem ist sie eine der essentiellen Bausteine der Beweise zur hydrodynamischen Stabilität. Wir benötigen diese Ungleichung in einer Version, die ohne die Beschränktheit des Gebietes Ω auskommt. Ein Beweis dieser Aussage findet sich in dem Buch von P. CONSTANTIN und C. FOIAS ([CF88], Proposition 1.2).

Satz 1.18 *Sei $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ in mindestens eine Richtung beschränkt. Dann gilt*

$$\|u\| \leq C(\Omega)\|\nabla u\|, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega). \quad (1.10)$$

Hierbei ist $\nabla u := (\frac{\partial u}{\partial x_i})_{i=1}^n$ die übliche Schreibweise für den Gradientenvektor und $C(\Omega)$ eine Konstante, die nur vom Gebiet Ω abhängt. Sie ist kleiner oder gleich dem Durchmesser von Ω in der beschränkten Richtung.

Wie man sofort sieht, bleibt (1.10) gültig für Funktionen $u \in [H_0^1(\Omega)]^n$.

1.2.3 Lemma von Gronwall

Diese nützliche Ungleichung ist ein unentbehrliches Werkzeug in der gesamten Differentialgleichungstheorie. Sie wird hier speziell benötigt, um eine obere Schranke für eine Stabilitätskonstante anzugeben. Aufgrund ihrer Bedeutung sei hier auch ein kurzer Beweis dieser Ungleichung gegeben. Hierbei orientiere ich mich an A. QUARTERONI, A. VALLI [QV94]².

Satz 1.19 *Sei $f \in L^1((t_0, T))$ eine nichtnegative Funktion und $g, \varphi \in C([t_0, T])$. Falls nun φ der Ungleichung*

$$\varphi(t) \leq g(t) + \int_{t_0}^t f(\tau)\varphi(\tau)d\tau, \quad \forall t \in [t_0, T] \quad (1.11)$$

genügt, so gilt

$$\varphi(t) \leq g(t) + \int_{t_0}^t f(s)g(s)\exp\left(\int_s^t f(\tau)d\tau\right)ds, \quad \forall t \in [t_0, T]. \quad (1.12)$$

Falls zusätzlich g monoton steigend ist, gilt

$$\varphi(t) \leq g(t)\exp\left(\int_{t_0}^t f(\tau)d\tau\right), \quad \forall t \in [t_0, T]. \quad (1.13)$$

Beweis: Mit der Hilfsfunktion $R(t) := \int_{t_0}^t f(\tau)\varphi(\tau)d\tau$ gilt unter Beachtung von (1.11)

$$\frac{dR}{dt}(t) = f(t)\varphi(t) \leq f(t)[g(t) + R(t)].$$

²Vgl. Lemma 1.4.1.

Weiter folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[R(t) \exp \left(- \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau \right) \right] &= \left[\frac{dR}{dt}(t) - R(t)f(t) \right] \exp \left(- \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau \right) \\ &\leq f(t)g(t) \exp \left(- \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau \right). \end{aligned}$$

Integrieren über (t_0, t) , ergibt

$$R(t) \exp \left(- \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau \right) \leq \int_{t_0}^t f(s)g(s) \exp \left(- \int_{t_0}^s f(\tau) d\tau \right) ds,$$

da $R(t_0) = 0$ ist. Hiermit und mit Voraussetzung (1.11) erhält man die Ungleichung (1.12):

$$\begin{aligned} \varphi(t) &\leq g(t) + R(t) \\ &\leq g(t) + \int_{t_0}^t f(s)g(s) \exp \left(- \int_{t_0}^s f(\tau) d\tau + \int_{t_0}^t f(\tau) d\tau \right) ds \\ &\leq g(t) + \int_{t_0}^t f(s)g(s) \exp \left(\int_s^t f(\tau) d\tau \right) ds. \end{aligned}$$

Aus Vergrößerung von Ungleichung (1.12) folgert man die Ungleichung (1.13). Da g monoton steigend ist, gilt nämlich

$$\varphi(t) \leq g(t) \left[1 + \int_{t_0}^t f(s) \exp \left(\int_s^t f(\tau) d\tau \right) ds \right].$$

Hieraus resultiert die Behauptung durch weiteres Abschätzen. □

1.3 Dynamische Systeme

In den Naturwissenschaften werden immer mehr Phänomene in Form dynamischer Systeme modelliert. Auch das Navier-Stokes Problem kann als dynamisches System aufgefaßt werden. Daher erscheint es sinnvoll, eine kurze Einführung in die Begriffswelt der dynamischen Systeme zu geben. Ich hoffe, daß dadurch der abstrakte Kern der folgenden Kapitel deutlich wird. Die Darstellung stütze ich auf J.N. FLAVIN, S. RIONERO [FR96] und R. TEMAM [Tem97].

Beginnen will ich mit der Definition *dynamischer Systeme*.

Definition 1.18 *Ein dynamisches System auf einem normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$ ist eine Abbildung*

$$\vartheta : X \times \mathbf{R} \rightarrow X$$

mit der Eigenschaft

$$\vartheta(\vartheta_0, 0) = \vartheta_0, \quad \forall \vartheta_0 \in X.$$

Da $\vartheta(\vartheta_0, t)$ nicht unbedingt für alle $t \in \mathbf{R}$ existiert, kann die Definition auch auf ein Zeitintervall $I \subset \mathbf{R}$ mit $0 \in I$ eingeschränkt werden. Besonders hervorgehoben wird die Veränderung in der Zeit:

Definition 1.19 Für ein gegebenes $\vartheta_0 \in X$ und ein dynamisches System ϑ wird die Abbildung

$$\vartheta(\vartheta_0, \cdot) : t \mapsto \vartheta(\vartheta_0, t) \in X$$

Fluß genannt und durch $\vartheta_t(\vartheta_0)$ bezeichnet.

Bei Stabilitätsfragen untersucht man meist Flüsse, die sich im Zeitablauf nicht verändern.

Definition 1.20 Gilt $\vartheta_t(\vartheta_0) = \vartheta_0$ für alle $t \in \mathbf{R}$, so heißt der Fluß stationär, und ϑ_0 wird kritischer Punkt, Fixpunkt oder Gleichgewichtspunkt genannt.

Im Kapitel über *hydrodynamische Stabilität* werden Stabilitätseigenschaften bestimmter Strömungen (Flüsse des zugehörigen dynamischen Systems) untersucht. Basis dafür sind folgende Definitionen:

Definition 1.21 (i) Ein Fluß $\vartheta_t(\vartheta_0)$ heißt stabil, falls für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß gilt:

$$\|\vartheta_1 - \vartheta_0\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|\vartheta_t(\vartheta_1) - \vartheta_t(\vartheta_0)\| < \epsilon, \quad \forall t \in \mathbf{R}_+.$$

(ii) Ein Fluß $\vartheta_t(\vartheta_0)$ heißt instabil, falls er nicht stabil ist.

(iii) Ein Fluß $\vartheta_t(\vartheta_0)$ heißt asymptotisch stabil, falls er stabil und attraktiv ist. Dabei bedeutet Attraktivität, daß es ein $\delta > 0$ gibt, so daß gilt:

$$\|\vartheta_1 - \vartheta_0\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|\vartheta_t(\vartheta_1) - \vartheta_t(\vartheta_0)\| = 0. \quad (1.14)$$

(iv) Ein Fluß $\vartheta_t(\vartheta_0)$ heißt einschränkungslos asymptotisch stabil, falls er stabil ist und (1.14) für alle $\delta > 0$ gilt.

Bemerkung 1.1 Die obigen Stabilitätsdefinitionen beziehen sich nur auf Störungen der Anfangswerte. Um sie von anderen Stabilitätskonzepten zu unterscheiden, spricht man auch von der Stabilität im Sinne von Lyapunov.

In dieser Arbeit werden dynamische Systeme immer durch eine Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = F(x, t) \quad (1.15)$$

generiert, wobei $F : X \times \mathbf{R} \rightarrow X$ eine Abbildung ist. Hängt F nicht von t ab, so wird (1.15) als *autonomes System* bezeichnet. Das dynamische System dazu wird gebildet, indem $\vartheta(\vartheta_0, t)$ als Lösung von (1.15) zum Anfangswert $\vartheta(0) = \vartheta_0$ zum Zeitpunkt t definiert wird. Allerdings ist das dynamische System nur dann *wohldefiniert*, wenn die Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen von (1.15) garantiert und jede Lösung auf ganz \mathbf{R} bzw. ganz I fortsetzbar ist.

Ist X ein endlich-dimensionaler Raum, so ist (1.15) eine gewöhnliche Differentialgleichung. Bei partiellen Differentialgleichungen ist X dagegen ein unendlich-dimensionaler Funktionenraum (z.B. $H_0^1(\Omega)$).

Kapitel 2

Endlich-dimensionale dynamische Systeme

Um das Vorgehen in den weiteren Kapiteln zu motivieren und eine geometrische Vorstellung dynamischer Systeme zu vermitteln, stelle ich die Problemstellung zuerst im endlich-dimensionalen Fall dar.

2.1 Problemstellung und Wohldefiniertheit

Als Beispiel endlich-dimensionaler dynamischer Systeme betrachten wir speziell gewöhnliche Differentialgleichungen. Das Anfangswertproblem lautet dann: Suche $u \in C^1(I, \mathbf{R}^d)$, so daß gilt

$$\frac{du}{dt} = f(t, u), \quad u(t_0) = u_0. \quad (2.1)$$

Dabei ist $u_0 \in \mathbf{R}^d$ ein Anfangswert, $I := [t_0 - c, t_0 + c]$, $c > 0$ ein Zeitintervall und $f(t, \cdot) : \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^d$ ein Vektorfeld für alle $t \in I$.

Um die Wohldefiniertheit des zugehörigen dynamischen Systems zu gewährleisten, wird zusätzlich die *Lipschitz-Stetigkeit* des Vektorfeldes f unterstellt, d. h. es gibt ein $L > 0$ mit

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|, \quad \forall t \in I, \forall x, y \in \mathbf{R}^d. \quad (2.2)$$

Außerdem erfordert die Definition dynamischer Systeme, daß $t_0 = 0$ gilt. Doch diese Forderung würde in diesem Kontext eine unnötige Einschränkung darstellen.

Denn auch so läßt sich auf die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung von (2.1) mit Hilfe des *Fixpunktsatzes von Banach* schließen:

Lemma 2.1 (Fixpunktsatz von Banach)

Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banach-Raum. Gilt für einen Operator $T : M \subset X \rightarrow M$ die Eigenschaft der Kontraktivität

$$\|T(x_1) - T(x_2)\|_X \leq K\|x_1 - x_2\|_X, \quad \forall x_1, x_2 \in M$$

mit $0 < K < 1$, so existiert genau ein $x \in M$ mit $T(x) = x$.

Beweis: Vgl. E. ZEIDLER [Zei86], Abschnitt 1.1.

Es ergibt sich:

Satz 2.1 (Picard-Lindelöf)¹

Gilt (2.2) auf einem Intervall $I = [t_0 - c, t_0 + c]$, so existiert eine eindeutige Lösung $u \in C^1(I, \mathbf{R}^d)$ von (2.1).

Beweis: Durch Integrieren von (2.1) erhält man folgende äquivalente Integralgleichung in Fixpunktform:

$$u(t) = u_0 + \underbrace{\int_{t_0}^t f(\tau, u(\tau)) d\tau}_{=: T(u)}, \quad \forall t \in I.$$

Betrachtet wird dazu der Raum $X := [C(I)]^d$ mit der Norm

$$\|u\|_X := \sup_{t \in I} |u(t)|, \quad \forall u \in X,$$

der, wie aus Satz 1.2 folgt, vollständig ist. Definiert man eine modifizierte Norm auf X durch

$$\| \|u\| \|_X := \sup_{t \in I} |e^{-L|t-t_0}| u(t)|, \quad \forall u \in X,$$

so ersieht man aus der Normäquivalenz

$$e^{-Lc} \|u\|_X \leq \| \|u\| \|_X \leq \|u\|_X,$$

daß $(X, \| \| \cdot \| \|_X)$ ebenfalls ein Banach-Raum ist. Offensichtlich ist der Operator $T : X \rightarrow X$ eine Selbstabbildung. Setzt man o.B.d.A. $t_0 = 0$ und benutzt die Lipschitz-Stetigkeit (2.2) sowie die Definitionen der Normen $\| \cdot \|_X$ und $\| \| \cdot \| \|_X$, so folgt die

¹Vgl. E. ZEIDLER [Zei86], Abschnitt 3.3.

Kontraktivität aus

$$\begin{aligned}
\|T(u_1) - T(u_2)\|_X &\leq \sup_{t \in I} \left| \int_0^t [f(\tau, u_1(\tau)) - f(\tau, u_2(\tau))] d\tau e^{-L|t|} \right| \\
&\leq \sup_{t \in I} \int_0^t L |u_1(\tau) - u_2(\tau)| d\tau e^{-L|t|} \\
&\leq \sup_{t \in I} \int_0^t L e^{L|\tau|} (e^{-L|\tau|} |u_1(\tau) - u_2(\tau)|) d\tau e^{-L|t|} \\
&\leq \sup_{t \in I} \int_0^t L e^{L|\tau|} \|u_1 - u_2\|_X d\tau e^{-L|t|} \\
&\leq \left(\sup_{t \in I} \int_0^t L e^{L(|\tau| - |t|)} d\tau \right) \|u_1 - u_2\|_X \\
&\leq \underbrace{(1 - e^{-Lc})}_{<1} \|u_1 - u_2\|_X.
\end{aligned}$$

Dann ergibt sich aus dem Fixpunktsatz von Banach die Existenz und Eindeutigkeit eines $u \in X$ mit

$$T(u) = u.$$

Hieraus folgt die Behauptung. \square

Man kann außerdem auf endlichen Zeitintervallen die stetige Abhängigkeit der Lösungen von den Anfangswerten zeigen.² Beachtet man aber die modifizierte Norm $\|\cdot\|$ in (2.1), so erkennt man, daß die Lösungstrajektorien exponentiell auseinanderdriften können. Daran wird die potentielle Dynamik des Modells deutlich.

Betrachtet man z.B. die Aufgabe $\frac{dx}{dt} = x$, so gilt für die Differenz zweier Lösungen x_1 und x_2 zu den Anfangswerten $x_1(0) = x^1$ und $x_2(0) = x^2$

$$x_1(t) - x_2(t) = (x^1 - x^2)e^t, \quad t > 0.$$

2.2 Stabilität

Bei gewöhnlichen Differentialgleichungen gibt es eine sehr umfassende, im Allgemeinen befriedigende Stabilitätstheorie. Kern dieser Theorie sind die folgenden beiden Ansätze.

Der eine ist der berühmte *Linearisierungssatz von Lyapunov*. Danach ist es möglich, Stabilitätseigenschaften kritischer Punkte eines nichtlinearen Systems mit Hilfe des Lösungsverhaltens des zugehörigen linearisierten Systems zu charakterisieren.

Satz 2.2 *Sei ein Problem der Form*

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)), \quad \forall t > t_0, \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.3)$$

²Vgl. E. ZEIDLER [Zei86], Korollar 3.9.

mit $f \in C^1(\mathbf{R}^d, \mathbf{R}^d)$ gegeben. Ein kritischer Punkt u_0 des Systems (2.3) ist asymptotisch stabil, falls die Realteile der Eigenwerte der Jacobi-Matrix $f'(u_0)$ negativ sind. Hat ein Eigenwert einen positiven Realteil, so ist u_0 instabil.

Beweis: Vgl. H. AMANN [Ama83], Theorem 15.6.

Darüber hinaus kann man aus der Struktur der Lösungstrajektorien des linearisierten Systems Rückschlüsse auf die Struktur des originalen Systems in einer Umgebung des kritischen Punktes ziehen:

Satz 2.3 (Hartmann-Grobmann)

Sei $f : \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^d$ differenzierbar mit einem hyperbolischem Fixpunkt u_0 , d.h. alle Eigenwerte von $f'(u_0)$ haben einen Realteil ungleich 0, und es gilt $f(u_0) = 0$. Dann existieren eine Nullumgebung U , eine Umgebung V von u_0 und ein Homöomorphismus $h : U \rightarrow V$, der die Trajektorien der linearen Gleichung $\frac{dx(t)}{dt} = f'(u_0)x(t)$ in die Trajektorien der nichtlinearen Gleichung (2.3) unter Erhaltung des Richtungssinns überführt.

Beweis: Vgl. H. AMANN [Ama83], Theorem 19.9.

Daneben ist auch *Lyapunovs direkte Methode* als hinreichendes Kriterium für Stabilität nützlich.

Satz 2.4 Sei u_0 ein kritischer Punkt des Systems (2.3), und $V : W \rightarrow \mathbf{R}$ sei eine differenzierbare Funktion auf einer Umgebung W von u_0 . Gilt

- (i) $V(u_0) = 0$, $V(x) > 0$, $\forall x \in W \setminus \{u_0\}$,
- (ii) $\dot{V}(x) := \text{grad } V(x) \cdot f(x) \leq 0$, $\forall x \in W \setminus \{u_0\}$,

dann ist u_0 stabil. Gilt außerdem noch

- (iii) $\dot{V}(x) < 0$, $\forall x \in W \setminus \{u_0\}$,

so ist u_0 asymptotisch stabil.

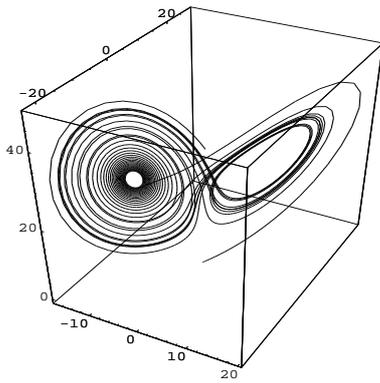
Beweis: Vgl. M.W. HIRSCH, S. SMALE [HS74], Abschnitt 9.3.

Leider gibt es keine einheitliche Methode zur Bestimmung der *Lyapunov Funktion* V . Aber oft führt die Wahl $V(x) := |x|^2$ zum Ziel.

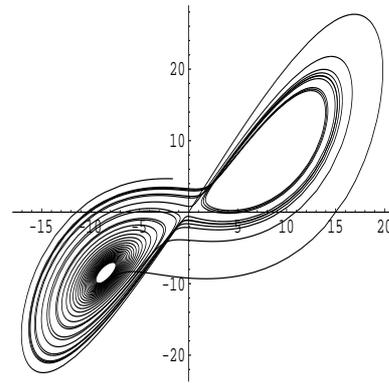
2.3 Beispiele

Vorgestellt werden zwei Beispiele. Das eine sind die Lorenz-Gleichungen. Sie sollen demonstrieren, wie kompliziert die Gestalt dynamischer Systeme schon im endlich-dimensionalen Fall sein kann.

Das zweite Beispiel ist interessant, da es die Grenzen der linearisierten Stabilitätsanalyse aufzeigt.



3D-Darstellung



Projektion auf die xy-Ebene

Abbildung 2.1: Trajektorie der Lorenz-Gleichungen zum Anfangswert $(0.1, 0.1, 0.05)$ für $t < 30$

2.3.1 Die Lorenz-Gleichungen

1963 stellte der Meteorologe und Mathematiker E.N. LORENZ [Lor63] ein System von drei Differentialgleichungen vor. Sie entstehen aus einer 3-Moden Galerkin Approximation der Oberbeck-Boussinesq Gleichungen, die eine zweidimensionale Bénard-Konvektion zwischen zwei senkrecht zum Schwerfeld liegenden Platten unterschiedlicher Temperatur widerspiegeln. Die Gleichungen lauten

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \sigma(y - x) \\ \frac{dy}{dt} &= \rho x - y - xz \\ \frac{dz}{dt} &= -\beta z + xy.\end{aligned}\tag{2.4}$$

Trotz der einfachen algebraischen Struktur (polynomial) des Modells, zeigen die Lösungstrajektorien ein sehr komplexes Verhalten. Dadurch wurde das Modell zum vielzitierten Paradebeispiel der Chaos-Theorie. E.N. LORENZ versuchte damit zu erklären, warum Wettervorhersagen nur für wenige Tage zuverlässig sein können. Einen Eindruck der Komplexität gewinnt man aus den Darstellungen. Dabei wurden die Parameter mit den Standardwerten $\sigma = 10$, $\beta = \frac{8}{3}$ und $\rho = 28$ spezifiziert.

Aus den Abbildungen 2.1 und 2.2 ersieht man, daß das Verhalten zweier Lösungen mit leicht unterschiedlichen Anfangswerten extrem verschieden sein kann, denn die Abbildung 2.2 stellt den Abstand der Nulllösung von derjenigen mit Anfangswert $(0.1, 0.1, 0.05)$ dar.³ Dies zeigt, daß die numerische Approximation derartiger Lösungstrajektorien äußerst sensibel gegenüber Störungen ist. Es ist deswegen zu erwarten, daß eine zuverlässige Approximation nur für kleine Zeitintervalle möglich ist.

³Die Abbildungen wurden mit MATHEMATICA erstellt.

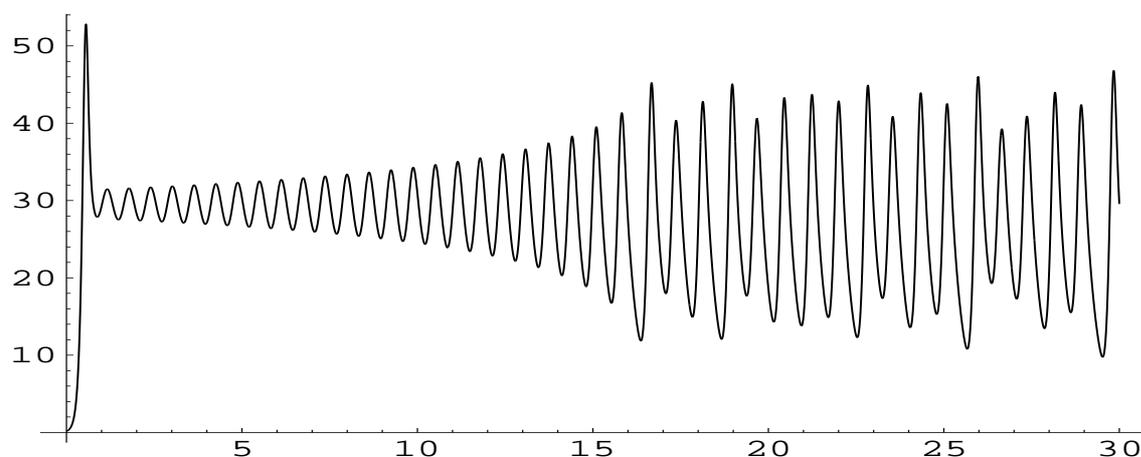


Abbildung 2.2: Norm der Trajektorie zum Anfangswert $(0.1, 0.1, 0.05)$ für $t < 30$

Doch diese Eigenschaften liegen an der Oberfläche. Betreffs einer tiefen Analyse dieser Gleichungen sei auf C. SPARROW [Spa82] verwiesen.

2.3.2 Ein Modell von Trefethen

Dieses Beispiel ist der Arbeit von L.N. TREFETHEN et al. [TTR92]⁴ entnommen. Bearbeitet wurde es neben anderen Beispielen auch von E. EMMRICH [Emm94]⁵. Das Modell ist im Kontext der hydrodynamischen Stabilität von theoretischem Interesse. J.S. BAGGETT und L.N. TREFETHEN [BT97] geben einen Überblick über derartige Modelle gewöhnlicher Differentialgleichungen und zeigen, daß alle bisher bekannten Modelle ähnlich sind und sich auf die unten angegebene Gestalt transformieren lassen. Somit erscheint es ausreichend, anhand dieses einen charakteristischen Beispiels das auftretende Phänomen zu studieren.

Untersucht wird folgendes Problem: Gesucht ist ein $u : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}^2$, so daß gilt:

$$\frac{du}{dt} = Au + \|u\|Bu, \quad u(0) = u_0. \quad (2.5)$$

Die Matrizen A und B sind gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} -1 & R \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

R ist dabei eine Konstante, die die Reynolds-Zahl symbolisiert. Die Reynolds-Zahl ist eine wichtige Kennzahl der Navier-Stokes Gleichungen. Linearisiert man die Differentialgleichung (2.5) um den Fixpunkt (stationäre Lösung) $u(t) = 0$, so erhält

⁴Vgl. Kapitel 2.

⁵Vgl. Beispiel 3.1.

man das lineare System:

$$\frac{d\varphi}{dt} = A\varphi, \quad \varphi(0) = \varphi_0. \quad (2.6)$$

Über das linearisierte System (2.6) läßt sich folgendes aussagen:

Lemma 2.2 (i) Die Matrix A besitzt die Eigenwerte $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = -2$ mit den Eigenvektoren $v_1 = (1, 0)^t$ und $v_2 = (1, -R^{-1})^t$.

(ii) Sei $u_0 := (\alpha, \beta)^t$. Dann besitzt das Anfangswertproblem (2.6) die Lösung

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} (\alpha + R\beta)e^{-t} - R\beta e^{-2t} \\ \beta e^{-2t} \end{pmatrix}.$$

(iii) Für die Lösung φ gilt, daß die erste Komponente φ_1 in $t^* = \log\left(\frac{2R\beta}{\alpha + R\beta}\right)$ für $\alpha + R\beta > 0, \beta > 0$ ein Maximum annimmt in Höhe von

$$\varphi_1(t^*) = \frac{1}{R\beta} \left(\frac{\alpha + R\beta}{2} \right)^2.$$

Der Betrag der 2. Komponente $|\varphi_2|$ dagegen fällt streng monoton gegen 0. Für $t \rightarrow \infty$ strebt $\|\varphi\|$ exponentiell gegen 0.

Wendet man nun den *Linearisierungssatz von Lyapunov* (Satz 2.2) aus dem letzten Abschnitt an, so bedeutet dies, daß für hinreichend kleine Anfangswerte u_0 die Lösung u aus (2.5) für $t \rightarrow \infty$ gegen den Fixpunkt 0 konvergiert, da die Eigenwerte der linearisierten Gleichung (2.6) negativ sind. L.N. TREFETHEN et al. wählen nun spezielle Anfangswerte der Form $u_0 = (0, \beta)^t$ und untersuchen, ab welcher Größe von $\|u_0\|$ Instabilität eintritt. Sie nennen diesen Wert ϵ *kritischen Wert*. Hierbei variieren sie den Parameter R . Die Ergebnisse sind in der Tabelle 2.1 zusammengestellt.

Parameter R	max. lin. Wachstumsfaktor M	kritischer Wert ϵ	$M^2\epsilon$
12.5	3.18	0.43	.433
25	6.28	0.0105	.414
50	12.5	0.0026	.406
100	25.0	0.00065	.406

Tabelle 2.1: Zusammenhang zwischen dem maximalen linearen Wachstumsfaktor M und dem kritischen Wert ϵ bei Variation von R

L.N. TREFETHEN et al. stellten fest, daß zwischen dem kritischen Wert und dem maximalen relativen Anwachsen $M := \sup_{t \geq 0} \frac{\|\varphi(t)\|}{\|u_0\|}$ der Lösung des linearisierten Problems ein Zusammenhang besteht. Wie man der letzten Spalte der Tabelle entnimmt, liegt der kritische Wert ϵ in der Größenordnung $O(M^{-2})$. Und da der maximale Wachstumsfaktor M nach dem letzten Lemma mit der Konstante R steigt,

ersieht man, daß für große R das Prinzip der linearisierten Stabilität versagt, da schon kleine, in der Natur unvermeidlich auftretende Störungen durch das Wechselspiel des linearen Anstiegs mit dem nichtlinearen Term zu Instabilität führen. Dies zeigt, daß man sich verstärkt quantitativen Abschätzungen des linearisierten und des nichtlinearen Systems zuwenden muß.

2.4 Eine a-posteriori Fehlerabschätzung für das dG(0)-Verfahren

Besonders klar wird die Struktur der a-posteriori Fehlerabschätzungen, führt man sie am Fall gewöhnlicher Differentialgleichungen vor. Entnommen ist die folgende Darstellung dem Artikel von C. JOHNSON [Joh95]. Die Struktur des Beweises beruht auf vier Punkten:

- Repräsentation des Fehlers durch ein zugeordnetes linearisiertes, duales Problem,
- Eigenschaft der Galerkin-Orthogonalität,
- Interpolationsfehlerabschätzungen für das duale Problem und
- Stabilitätsabschätzungen für das stetige duale Problem.

Gelöst werden soll folgendes System nichtlinearer gewöhnlicher Differentialgleichungen: Gesucht wird ein $u : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}^d$, so daß gilt

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + f(t, u) &= 0 \\ u(0) &= u_0, \end{aligned} \tag{2.7}$$

wobei $f(t, \cdot) : \mathbf{R}^d \rightarrow \mathbf{R}^d$ für alle $t > 0$ ein differenzierbares Vektorfeld ist.

Approximiert werden soll die Lösung mit dem discontinuous-Galerkin Verfahren mit stückweise konstanten Ansatzfunktionen, kurz dG(0)-Verfahren genannt. Eine systematische Einführung geben die Bücher von C. GROSSMANN, H.-G. ROOS [GR94]⁶ oder A. QUARTERONI, A. VALLI [QV94]⁷.

Zunächst werden einige nützliche Notationen eingeführt. Sei dazu $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots$ eine Zerlegung des Zeitintervalls $(0, \infty)$ und $h_n := t_n - t_{n-1}$ die Schrittweite des Intervalls $I_n := (t_{n-1}, t_n)$. Ferner sei W_k der Raum der stückweise konstanten Funktionen auf I_n mit Werten im \mathbf{R}^d . Da Unstetigkeiten an den Intervallenden t_n erlaubt sind, sind folgende Definitionen sinnvoll :

$$U_n^+ := \lim_{s \rightarrow +0} U(t_n + s), \quad U_n^- := \lim_{s \rightarrow -0} U(t_n + s), \quad [U_n] := U_n^+ - U_n^-.$$

⁶Vgl. Abschnitt 6.3.3.

⁷Vgl. Abschnitt 12.3 für stabilisierte Probleme.

Definieren wir noch zusätzlich $P_0(I_n)$ als Menge der konstanten Funktionen auf I_n , $U_n := U|_{I_n}$ und die Anfangsbedingung $U_0 := U_0^- := u_0$, so läßt sich das dG(0)-Verfahren wie folgt darstellen: Finde $U \in W_k$, so daß für alle $v \in [P_0(I_n)]^d, n = 1, 2, \dots$ gilt:

$$\int_{I_n} \left(\frac{dU}{dt} + f(t, U) \right) \cdot v dt + [U_{n-1}] \cdot v_{n-1}^+ = 0. \quad (2.8)$$

Für den Beweis sind noch Interpolationsfehlerabschätzungen erforderlich. Vorbereitend wird bewiesen:

Lemma 2.3 Sei $\phi \in C^1((a, b), \mathbf{R}^d)$ mit der Eigenschaft

$$\int_a^b \phi(\tau) d\tau = 0$$

gegeben. Dann gilt für alle $t \in (a, b)$

$$|\phi(t)| \leq \sqrt{d} \int_a^b \left| \frac{d\phi}{dt} \right| d\tau. \quad (2.9)$$

Beweis: Sei zunächst $d = 1$ und $t \in (a, b)$ beliebig vorgegeben. Außerdem sei o. E. $\phi(t) > 0$ angenommen. Aufgrund von $\int_a^b \phi(\tau) d\tau = 0$ gibt es ein $y \in (a, b)$ mit $\phi(y) < 0$. Nutzt man jetzt den Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung

$$\phi(t) - \phi(y) = \int_y^t \frac{d\phi}{dt}(\tau) d\tau,$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned} |\phi(t)| &= \left| \int_y^t \frac{d\phi}{dt}(\tau) d\tau + \overbrace{\phi(y)}^{<0} \right| \leq \left| \int_y^t \frac{d\phi}{dt}(\tau) d\tau \right| \\ &\leq \int_a^b \left| \frac{d\phi}{dt}(\tau) \right| d\tau. \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung im eindimensionalen Fall gezeigt. Der Fall $d > 1$ wird auf diesen Fall zurückgeführt. Hilfreich dabei ist die Normäquivalenz im \mathbf{R}^d gegeben durch

$$\sum_{i=1}^d |\xi_i| \geq |\xi| \geq \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i=1}^d |\xi_i|, \quad \forall \xi := (\xi_1, \dots, \xi_d)^t \in \mathbf{R}^d. \quad (2.10)$$

Denn definiert man $e_i := (e_{ij})_{j=1}^d \in \mathbf{R}^d$ mit $e_{ij} = \delta_{ij}$, so ersieht man die linke Seite aus

$$|\xi| = \left| \sum_{i=1}^d \xi_i e_i \right| \leq \sum_{i=1}^d |\xi_i| \overbrace{|e_i|}^{=1} \leq \sum_{i=1}^d |\xi_i|.$$

δ_{ij} ist dabei das Kronecker-Symbol. Die rechte Seite ergibt sich aus der Ungleichung von Cauchy-Schwarz

$$\sum_{i=1}^d 1|\xi_i| = (1, \dots, 1)^t \cdot (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d)^t \leq \sqrt{d}|\xi|.$$

Daraus folgt die Behauptung

$$|\phi(t)| \leq \sum_{i=1}^d |\phi_i(t)| \leq \sum_{i=1}^d \int_a^b \left| \frac{d\phi_i}{dt}(\tau) \right| d\tau \leq \int_a^b \sqrt{d} \left| \frac{d\phi}{dt}(\tau) \right| d\tau.$$

□

Hieraus ergibt sich leicht:

Lemma 2.4 Sei $\varphi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^d$ differenzierbar. Definiert man $\pi_k \varphi \in W_k$ durch die Mittelwerteigenschaft

$$\int_{I_n} (\varphi - \pi_k \varphi) dt = 0, \quad n \in \mathbf{N}, \quad (2.11)$$

so gilt

$$\sup_{t \in I_n} |\varphi - \pi_k \varphi| \leq \sqrt{d} \int_{I_n} \left| \frac{d\varphi}{dt} \right| dt \quad (2.12)$$

und

$$|(\varphi - \pi_k \varphi)_{n-1}^+| \leq \sqrt{d} \int_{I_n} \left| \frac{d\varphi}{dt} \right| dt, \quad (2.13)$$

wobei $|\cdot|$ die euklidische Norm im \mathbf{R}^d ist.

Die erste Ungleichung ergibt sich aus dem vorherigen Lemma, indem man $\phi := \varphi - \pi_k \varphi$ setzt. Die zweite Ungleichung folgt sofort aus der ersten. Damit läßt sich der entscheidende Satz dieses Abschnitts beweisen.

Satz 2.5 Ist u die Lösung des Problems (2.7) und U die Lösung der $dg(0)$ -Methode (2.8), so gilt für $N = 1, 2, \dots$

$$|u(t_N) - U_N| \leq S(t_N, u, U) \sqrt{d} \max_{n=1, \dots, N} (|U_n - U_{n-1}| + h_n \|f(\cdot, U_n)\|_{I_n}). \quad (2.14)$$

Dabei ist $S(t_N, u, U)$ eine noch zu definierende Stabilitätskonstante (vgl. Beweis) und $\|\varphi\|_I := \max_{t \in I} |\varphi(t)|$.

Beweis:

(i) Formulierung des dualen Problems:

Zuerst definiert man den Fehler durch $e(t) := u(t) - U(t)$ und ein rückwärts in der Zeit gerichtetes stetiges duales Problem durch

$$-\frac{d\varphi}{dt} + A(t)^*\varphi = 0 \quad \text{in } (0, t_N), \quad \varphi(t_N) = e_N := e(t_N). \quad (2.15)$$

$A(t)^*$ ist hier die transponierte Matrix von $A(t)$, die definiert ist durch

$$A(t) := \int_0^1 f'(t, su + (1-s)U) ds, \quad (2.16)$$

wobei $f'(t, \cdot)$ die Jacobi Matrix von $f(t, \cdot)$ ist und das Integral komponentenweise zu verstehen ist.

Da $A(t)$ stetig ist, besitzt das linearisierte duale Problem (2.15) eine eindeutige Lösung φ .⁸ Unter Beachtung von

$$\frac{d}{ds} f(t, su + (1-s)U) = f'(t, su + (1-s)U) \cdot (u - U)$$

ergibt sich aus dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung

$$\begin{aligned} A(t)(u - U) &= \int_0^1 f'(t, su + (1-s)U) \cdot (u - U) ds \\ &= \int_0^1 \frac{d}{ds} f(t, su + (1-s)U) ds \\ &= f(t, u) - f(t, U). \end{aligned}$$

⁸Den einfachen Beweis dieser Aussage findet man z.B. in dem Buch von W. WALTER [Wal93] auf Seite 135.

Nullergänzung, partielle Integration und die Definitionen der exakten Gleichung (2.7) sowie des dualen Problems (2.15) ergeben für den Fehler:

$$\begin{aligned}
|e_N|^2 &= |e_N|^2 + \sum_{n=1}^N \int_{I_n} e \cdot \overbrace{\left(-\frac{d\varphi}{dt} + A^* \varphi\right)}{=0} dt \\
&= |e_N|^2 + \sum_{n=1}^N \int_{I_n} -e \cdot \frac{d}{dt} \varphi + \overbrace{Ae \cdot \varphi}^{=e \cdot A^* \varphi} dt \\
&= |e_N|^2 + \left(\sum_{n=1}^N \int_{I_n} \varphi \cdot \frac{d}{dt} e dt + \sum_{n=1}^{N-1} [e_n] \cdot \varphi_n^+ + (u_0 - U_0)^+ \cdot \varphi_0^+ - \overbrace{\varphi_N^+ \cdot e_N}^{=e_N} \right) \\
&\quad + \sum_{n=1}^N \int_{I_n} (f(t, u) - f(t, U)) \cdot \varphi dt \\
&= \sum_{n=1}^N \int_{I_n} \left(-\overbrace{\frac{d}{dt} U}^{=0} - f(t, U) + \overbrace{\frac{d}{dt} u + f(t, u)}^{=0} \right) \cdot \varphi dt \\
&\quad + \sum_{n=1}^{N-1} [e_n] \cdot \varphi_n^+ + (u_0 - U_0)^+ \cdot \varphi_0^+ \\
&= - \sum_{n=1}^N \left(\int_{I_n} f(t, U) \cdot \varphi dt + [U_{n-1}] \cdot \varphi_{n-1}^+ \right),
\end{aligned}$$

wobei $\frac{d}{dt}U = 0$ ist, da U stückweise konstant ist.

(ii) Galerkin-Orthogonalität:

Benutzt wird nun die Galerkin-Orthogonalität (2.8). Sei dazu $v := \pi_k \varphi \in W_k$ definiert durch die Mittelwerteneigenschaft (2.11). Es gilt dann:

$$\begin{aligned}
|e_N|^2 &= - \sum_{n=1}^N \left(\int_{I_n} f(t, U) \cdot (\varphi - \pi_k \varphi) dt + [U_{n-1}] \cdot (\varphi - \pi_k \varphi)_{n-1}^+ \right) \\
&= - \int_0^{t_N} f(t, U) \cdot (\varphi - \pi_k \varphi) dt - \sum_{n=0}^{N-1} [U_n] \cdot (\varphi - \pi_k \varphi)_n^+.
\end{aligned}$$

(iii) Interpolationsabschätzungen:

Die Nutzung der Abschätzungen aus Lemma 2.4 und mehrfache Anwendung der

Ungleichung von Cauchy-Schwarz ergeben

$$\begin{aligned}
|e_N|^2 &\leq \sum_{n=1}^N \int_{t_{n-1}}^{t_n} |f(t, U)| |\varphi - \pi_k \varphi| dt + \sum_{n=0}^{N-1} |[U_n]| |(\varphi - \pi_k \varphi)_n^+| \\
&\leq \sqrt{d} \sum_{n=1}^N \|f(\cdot, U)\|_{I_n} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left| \frac{d}{dt} \varphi \right| dt ds + \sum_{n=1}^N |[U_{n-1}]| \sqrt{d} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left| \frac{d}{dt} \varphi \right| dt \\
&\leq \sqrt{d} \sum_{n=1}^N (h_n \|f(\cdot, U)\|_{I_n} + |[U_{n-1}]|) \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left| \frac{d}{dt} \varphi \right| dt \\
&\leq \sqrt{d} \int_0^{t_N} \left| \frac{d}{dt} \varphi \right| dt \max_{n=1, \dots, N} (|[U_{n-1}]| + h_n \|f(\cdot, U)\|_{I_n}).
\end{aligned}$$

(iv) Stabilitätskonstante $S(t_N, u, U)$:

Sei

$$S(t_N, u, U) := \sup_{\psi(t_N) \in \mathbf{R}^d - \{0\}} \frac{\int_0^{t_N} \left| \frac{d}{dt} \psi \right| dt}{|\psi(t_N)|} \quad (2.17)$$

und ψ genüge dem dualen Problem $-\frac{d}{dt} \psi + A(t)^* \psi = 0$ in $(0, t_N)$, so folgt die Behauptung durch Einsetzen der Definition in obige Ungleichung. \square

Da die Abschätzung des Fehlers für jedes $t_i < t_N$ gilt, ergibt sich die Folgerung:

Satz 2.6 *Seien die Voraussetzungen des Satzes 2.5 erfüllt, und sei durch $|u - U|_N := \max_{n=1, \dots, N} |u(t_n) - U_n|$ eine diskrete Norm für den Fehler erklärt, so gilt*

$$|u - U|_N \leq S(t_N, u, U) \sqrt{d} \max_{n=1, \dots, N} (|U_n - U_{n-1}| + h_n \|f(\cdot, U_n)\|_{I_n}). \quad (2.18)$$

In der Praxis bereitet die Bestimmung der Stabilitätskonstante $S(t_N, u, U)$ besondere Schwierigkeiten, denn dies erfordert streng genommen die Berechnung der Lösung des linearen dualen Problems (2.15) für beliebige Startwerte und die Kenntnis der exakten Lösung u des Ausgangsproblems (2.7). C. JOHNSON schlägt vor (vgl. [Joh95]), den relevanten Anfangswert e_{t_N} durch die Differenz zweier Näherungslösungen zu unterschiedlichen Schrittweiten zu schätzen und auch die exakte Lösung u durch eine Näherungslösung zu ersetzen.

Bei ihm wird das Prinzip dann auch anhand des Lorenz-Systems demonstriert. Es zeigt sich, daß die Methode nur für kleine Zeitintervalle zuverlässig ist. Dies ist aber auch zu erwarten, da im Allgemeinen die Fehler der Daten im Zeitablauf verstärkt werden, denn die Stabilitätskonstante wird durch die Lösung der Differentialgleichung des dualen Problems repräsentiert. Diese Lösung nun aber kann im Zeitablauf groß werden. Weitere Ausführungen zum Fall gewöhnlicher Differentialgleichungen werden bei K. BÖTTCHER, R. RANNAKER [BR96] dargestellt.

Kapitel 3

Navier-Stokes Gleichungen

3.1 Problemstellung

Die Navier-Stokes Gleichungen beschreiben die instationäre Bewegung eines realen, inkompressiblen Fluids in einem Gebiet $\Omega \in \mathbf{R}^d$, $d \in \{2, 3\}$. Ich beschränke mich hier auf den komplizierteren dreidimensionalen Fall, da in der Realität vor allem dreidimensionale Strömungen auftreten. Die Gleichungen weisen folgende Gestalt auf:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} - \nu' \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p &= f && \text{in } \Omega \times (0, T) \\ \nabla \cdot u &= 0 && \text{in } \Omega \times (0, T) \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \times (0, T) \\ u(\cdot, 0) &= u_0 && \text{in } \Omega, \end{aligned} \tag{3.1}$$

wobei $I := [0, T)$ das beobachtete Zeitintervall angibt. $(u \cdot \nabla)u$, Δu und $\nabla \cdot u$ sind definiert durch

$$(u \cdot \nabla)v := \left(\sum_{j=1}^3 u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)_{i=1}^3, \quad \Delta u := \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \right)_{i=1}^3 \quad \text{bzw.} \quad \nabla \cdot u := \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i}.$$

$u : \bar{\Omega} \times I \rightarrow \mathbf{R}^3$ ist der Geschwindigkeitsvektor mit einem anfänglichen Geschwindigkeitsfeld u_0 . Weiter bezeichne $p : \bar{\Omega} \times I \rightarrow \mathbf{R}$ den kinematischen Druck, also den Quotienten aus Druck und konstanter Dichte, und $\nu' > 0$ sei die kinematische Viskosität. $f : \Omega \times I \rightarrow \mathbf{R}^3$ stellt von außen auf das Modell wirkende Körperkräfte dar.

Man nennt die erste Gleichung von (3.1) Geschwindigkeitsgleichung; die zweite wird als Kontinuitätsgleichung bezeichnet. In der dritten Gleichung werden homogene Dirichlet Randbedingungen (Haftbedingung) unterstellt und die letzte Gleichung stellt eine Anfangsbedingung dar.

Ist die gesuchte Lösung von (3.1) nicht zeitabhängig, so fällt der Term $\frac{du}{dt}$ weg, und

die Gleichungen (3.1) vereinfachen sich zum stationären Navier-Stokes Problem. Faßt man die Navier-Stokes Gleichungen als dynamisches System auf, so sind die stationären Lösungen Fixpunkte des dynamischen Systems.

Die auftretenden Größen werden nun entdimensioniert. Dazu bestimmt man eine charakteristische Geschwindigkeit U , einen charakteristischen Druck P und L als eine durch das Gebiet Ω gegebene charakteristische Länge (z.B. der Durchmesser). Führt man die Transformationen

$$x^* := \frac{x}{L}, \quad t^* := \frac{U}{L}t, \quad u^* := \frac{u}{U}, \quad p^* := \frac{p - P}{U^2} \quad (3.2)$$

durch, so erhält man folgendes entdimensioniertes Problem, wobei die Sternchen aus Notationsgründen weggelassen werden:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p &= f && \text{in } \Omega \times (0, T) \\ \nabla \cdot u &= 0 && \text{in } \Omega \times (0, T) \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \times (0, T) \\ u(\cdot, 0) &= u_0 && \text{in } \Omega. \end{aligned} \quad (3.3)$$

$\nu > 0$ ist dabei eine Konstante, die durch den Kehrwert der Reynolds-Zahl gegeben ist, wobei die Reynolds-Zahl Re definiert ist durch $Re := \frac{UL}{\nu}$.

Die Reynolds-Zahl hat eine wichtige physikalische Bedeutung: Strömungen mit gleicher Reynolds-Zahl, die durch einfache Maßstabsänderung ineinander transformierbar sind, nennt man aufgrund ihres Strömungsverhaltens *ähnlich*. Dieses Ähnlichkeitsgesetz ist bereits von REYNOLDS im Jahre 1883 festgestellt worden. Eine detaillierte Darstellung dazu findet man in den Büchern von L. D. LANDAU, E. M. LIFSCHITZ [LL66] und D.J. TRITTON [Tri88].

3.2 Schwache Formulierung und Lösbarkeit

In diesem Kapitel wird die schwache Formulierung der instationären bzw. stationären Navier-Stokes Gleichungen eingeführt. Es werden die dazu nötigen Funktionenräume definiert und schließlich Lösbarkeitseigenschaften zusammengestellt.

3.2.1 Das instationäre Navier-Stokes Problem

Der Einfachheit halber beschränke ich mich auf den Fall, daß Ω eine Lebesgue-meßbare, beschränkte Menge mit Lipschitz-stetigem Rand ist. Wesentlich für eine schwache Formulierung ist die geeignete Wahl der Funktionenräume:

Definition 3.1 (i) Der Raum der divergenzfreien Funktionen ist gegeben durch

$$H_{div}(\Omega) := \{v \in [H_0^1(\Omega)]^n : \nabla \cdot v = 0\}.$$

(ii) $L_{div}(\Omega)$ ist der Abschluß der Menge

$$\{\varphi \in [C_0^\infty(\Omega)]^n : \nabla \cdot \varphi = 0\}$$

bezüglich der durch $[L^2(\Omega)]^n$ induzierten Topologie.

Bemerkung 3.1 In der Literatur wird der Raum $L_{div}(\Omega)$ häufig durch

$$L_{div}(\Omega) = \left\{ v \in [L^2(\Omega)]^3 : \nabla \cdot v = 0, v \cdot n|_{\partial\Omega} = 0 \text{ in } H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \right\}$$

definiert, wobei n der äußere Normalenvektor ist. Diese beiden Definitionen sind äquivalent.

Beweis: Vgl. P. CONSTANTIN, C. FOIAS [CF88], Proposition 1.8.

Versieht man den Raum $L_{div}(\Omega)$ mit dem Skalarprodukt $((\cdot, \cdot))$, so ergibt sich leicht (vgl. E. ZEIDLER [Zei94], Abschnitt 72.5):

Satz 3.1 $H_{div}(\Omega) \subset L_{div}(\Omega) \subset H_{div}(\Omega)^*$ ist ein Evolutionstripel.

Nun sind wir in der Lage eine schwache Formulierung abzuleiten. Nehmen wir dazu an, daß (u, p) eine klassische Lösung des Problems (3.3) ist. Multipliziert man die 1. Gleichung in (3.3) komponentenweise mit einem beliebigen $v \in H_{div}(\Omega)$, integriert über Ω und addiert die Komponenten auf, so erhält man

$$\left(\frac{du}{dt}, v \right) + ((u \cdot \nabla)u, v) - \nu((\Delta u, v)) + ((\nabla p, v)) = ((f, v)) \quad \text{in } (0, T).$$

Definiert man

$$b(u; v, w) := (((u \cdot \nabla)v, w)) \quad \text{und} \quad a(u, v) := \nu \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx,$$

so sieht man mit Hilfe der Regel der partiellen Integration (1.9), daß sich die obige Gleichung auch in der Form

$$\frac{d}{dt}((u, v)) + b(u; u, v) + a(u, v) = \langle f, v \rangle \quad (3.4)$$

darstellen läßt. Der Druck p fällt hierbei aufgrund der Inkompressibilität der Testfunktionen heraus. Dies rechtfertigt folgende Variationsformulierung des Problems (3.3):

Definition 3.2 Seien $f \in L^2((0, T); H_{div}(\Omega)^*)$ und $u_0 \in L_{div}(\Omega)$ gegeben. $u \in L^2((0, T); H_{div}(\Omega))$ heißt schwache Lösung von (3.3), falls

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}((u, v)) + b(u; u, v) + a(u, v) &= \langle f, v \rangle \quad \text{in } (0, T), \quad \forall v \in H_{div}(\Omega) \\ u(0) &= u_0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

gilt.

Bemerkung 3.2 *Berücksichtigt man die Tatsache, daß die schwache Lösung u fast überall mit einer stetigen Funktion von $[0, T)$ nach $H_{div}(\Omega)^*$ übereinstimmt¹, so erkennt man, daß die Anfangsbedingung in (3.5) Sinn macht.*

Die Trilinearform $b(u; v, w)$ besitzt folgende Eigenschaften:

Lemma 3.1 (i) *Für $u, v, w \in [H^1(\Omega)]^3$ gilt*

$$b(u; v, w) \leq c \|u\|_{[H^1(\Omega)]^3} \|v\|_{1,\Omega} \|w\|_{[H^1(\Omega)]^3}.$$

(ii) *Ist außerdem $u \in H_{div}(\Omega)$, so gilt*

$$b(u; v, w) + b(u; w, v) = 0 \quad \Rightarrow \quad b(u; v, v) = 0.$$

Beweis: Vgl. V. GIRAULT, P. A. RAVIART [GR86], Kapitel IV, Lemma 2.1 und 2.2.

Bezüglich der Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung läßt sich folgendes konstatieren:

Satz 3.2 (i) *Von Problem (3.5) existiert mindestens eine Lösung $u \in L^2((0, T); H_{div}(\Omega)) \cap L^\infty((0, T); L_{div}(\Omega))$ mit $u' \in L^1((0, T); H_{div}(\Omega)^*)$.*

(ii) *Es existiert höchstens eine Lösung $u \in L^2((0, T); H_{div}(\Omega)) \cap L^\infty((0, T); L_{div}(\Omega))$ mit $u \in L^8((0, T); [L^4(\Omega)]^3)$. Hierfür gilt dann auch $u \in C([0, T]; L_{div}(\Omega))$ (eventuell nach Änderung von u auf einer Nullmenge).*

(iii) *Gilt sogar $u_0 \in H_{div}(\Omega)$, $f \in L^\infty((0, T); L_{div}(\Omega))$ und $\partial\Omega \in C^{2;0}$, so existiert ein $T^* \leq T$, so daß Problem (3.5) genau eine Lösung aus $H^1((0, T^*); H_{div}(\Omega))$ besitzt.*

Beweis: Vgl. R. TEMAM [Tem84], Theoreme 3.1, 3.4 und 3.11.

Bei der Diskretisierung der schwachen Formulierung (3.5) entsteht das Problem, daß nur schwer konforme Approximationsräume konstruiert werden können. Es ist deshalb nötig, einen Ansatzraum zu wählen, der auf die Inkompressibilität der Ansatzfunktionen verzichtet. So muß allerdings auch noch der Druck p berücksichtigt werden.

Wählt man den Ansatzraum $\hat{V} = V \times H$ mit $V := [H_0^1(\Omega)]^3$ und $H := \{p \in L_2(\Omega) \mid \int_\Omega p dx = 0\}$, so ergibt sich:

Definition 3.3 *Finde $(u(t), p(t)) \in \hat{V}$, so daß für fast alle $t \in (0, T)$ gilt*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}((u, v)) + b(u; u, v) + a(u, v) - (\nabla \cdot v, p) &= \langle f, v \rangle, \quad \forall v \in V \\ (\nabla \cdot u, q) &= 0, \quad \forall q \in H \\ u(0) &= u_0. \end{aligned} \tag{3.6}$$

¹Vgl. R. TEMAM [Tem84], S. 282 f.

Es ist klar, daß eine Lösung von (3.6) auch eine Lösung von (3.5) darstellt. Der umgekehrte Fall ist nur dann richtig, falls die Lösung u von (3.5) genügend regulär ist, denn nicht in jedem Fall ist die Existenz des Druckes p gesichert (vgl. dazu auch A. QUARTERONI, A. VALLI [QV94], Abschnitt 13.2).

Es läßt sich aber zeigen, daß sich zu einer Lösung von (3.5) zumindest im distributionellen Sinn ein Druck p bestimmen läßt. Dargestellt wird dies bei W. VON WAHL [vW85]² oder bei J.L. LIONS [Lio69]³. Interessant sind auch die Ausführungen in dem Artikel von L. CAFFARELLI, R. KOHN und L. NIRENBERG [CKN82].

3.2.2 Das stationäre Navier-Stokes Problem

Die schwache Formulierung des stationären Navier-Stokes Problems ergibt sich prinzipiell auf die gleiche Art und Weise wie im instationären Fall. Doch wird hier gleich auf die Inkompressibilität der Ansatzfunktionen verzichtet.

Ausgangspunkt ist das Problem: Finde $\hat{u} := (u, p) \in [H^2(\Omega)]^3 \times H^1(\Omega)$, so daß

$$\begin{aligned} (u \cdot \nabla)u - \nu \Delta u + \nabla p &= f \quad \text{in } \Omega \\ \nabla \cdot u &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{3.7}$$

gilt. Sei dabei Ω wieder eine Lebesgue-meßbare, beschränkte Menge mit Lipschitzstetigem Rand. Benutzt man erneut den Ansatzraum $\hat{V} := V \times H$ mit $V := [H_0^1(\Omega)]^3$ und $H := \{p \in L_2(\Omega) \mid \int_{\Omega} p dx = 0\}$, so ergibt sich durch komponentenweise Multiplikation mit einer Testfunktion $\hat{v} := (v, q) \in \hat{V}$, Integration über Ω , partielle Integration und Aufsummation der Komponenten analog die Variationsformulierung:

Definition 3.4 Für $f \in V^*$ heißt $(u, p) \in \hat{V}$ schwache Lösung von (3.7), falls

$$a(u, v) + b(u; u, v) - (p, \nabla \cdot v) + (q, \nabla \cdot u) = \langle f, v \rangle, \quad \forall (v, q) \in \hat{V} \tag{3.8}$$

gilt.

Auch hier fasse ich kurz die Aussagen über Existenz und Eindeutigkeit des Problems (3.8) zusammen. Bezüglich der Existenz läßt sich feststellen:

Satz 3.3 Es existiert mindestens eine Lösung $(u, p) \in \hat{V}$ des Problems (3.8).

Beweis: Vgl. V. GIRAULT, P.A. RAVIART [GR86], Kapitel IV, Theorem 2.1.

Für den Fall kleiner Daten ist die Lösung sogar eindeutig.

²Vgl. Seite 143 ff.

³Vgl. Seite 67-69.

Satz 3.4 *Definiert man*

$$N := \sup_{\substack{u,v,w \in H_{div}(\Omega) \\ |u|_1, |v|_1, |w|_1 \neq 0}} \frac{b(u; v, w)}{|u|_1 |v|_1 |w|_1} \quad \text{und} \quad \|f\|_{H_{div}(\Omega)^*} := \sup_{\substack{v \in H_{div}(\Omega) \\ |v|_1 \neq 0}} \frac{\langle f, v \rangle}{|v|_1}$$

und gilt

$$\frac{N}{\nu^2} \|f\|_{H_{div}(\Omega)^*} < 1,$$

so existiert genau eine Lösung $(u, p) \in \hat{V}$.

Beweis: Vgl. V. GIRAULT, P.A. RAVIART [GR86], Kapitel IV, Theorem 2.2.

Speziell läßt sich der Satz auf folgende Klasse von Problemen anwenden:⁴

Bemerkung 3.3 *Läßt sich f darstellen durch $f = \nabla \Psi$ mit $\Psi \in H^1(\Omega)$, so ist die Lösung $(u, p) \in \hat{V}$ eindeutig.*

Beweis: Die Behauptung folgt sofort aus Satz 3.4. Denn aus

$$((f, v)) = ((\nabla \Psi, v)) = -(\Psi, \nabla \cdot v) = 0, \quad \forall v \in H_{div}(\Omega)$$

ergibt sich $\|f\|_{H_{div}(\Omega)^*} = 0$. □

⁴Vgl. H.-G. ROOS, M. STYNES, L. TOBISKA [RST96], Kapitel IV, Bemerkung 2.9.

Kapitel 4

Hydrodynamische Stabilität

Die Problematik der hydrodynamischen Stabilität ist wichtig für physikalische Anwendungen. Es sind nämlich nur solche stationären bzw. periodischen Strömungen in der Realität beobachtbar, die gegen unvermeidlich auftretende Störungen stabil sind, d.h. die Störungen klingen im Zeitablauf ab. Wachsen Störungen dagegen im Zeitablauf an, so ist die Strömung instabil.

Da jede Strömung eine Lösung des Navier-Stokes Problems darstellt, hat man versucht, dieser physikalischen Interpretation eine mathematische entgegenzustellen, um so Vorhersagen über das Stabilitätsverhalten bestimmter Strömungen machen zu können.

Im Allgemeinen verstärken sich auch die Diskretisierungsfehler im Zeitablauf. Deshalb liegt die Vermutung nahe, daß sich besonders stabile Strömungen zuverlässig numerisch approximieren lassen. Doch zeigt die folgende Diskussion, daß dies nur mit Einschränkungen gilt.

4.1 Definition der hydrodynamischen Stabilität

In der Literatur existieren verschiedene Definitionen und Konzepte des Stabilitätsbegriffs. Ich werde versuchen, einen Überblick zu geben und Zusammenhänge zwischen verschiedenen Konzepten aufzuzeigen.

Betrachtet man eine Lösung (u, p) des Navier-Stokes Problems (3.3) und überlagert diese mit einer Störung (φ, q) , so ist auch $(u + \varphi, p + q)$ eine Lösung des Navier-Stokes Problems mit der gestörten rechten Seite $f + g$ und der gestörten Anfangsbedingung $u_0 + \varphi_0$. Nutzt man jetzt die Eigenschaft, daß (u, p) eine Lösung von (3.3) ist, so vereinfachen sich die Gleichungen zu

$$\begin{aligned}
\frac{d\varphi}{dt} - \nu \Delta \varphi + (u \cdot \nabla) \varphi + (\varphi \cdot \nabla) u + (\varphi \cdot \nabla) \varphi + \nabla q &= g && \text{in } \Omega \times (0, T) \\
\nabla \cdot \varphi &= 0 && \text{in } \Omega \times (0, T) \\
\varphi &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \times (0, T) \\
\varphi(\cdot, 0) &= \varphi_0 && \text{in } \Omega.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Bemerkung 4.1

- Die Störungsgleichung (4.1) bezeichnet man auch als Stabilitätsproblem.
- Um mathematische Probleme zu vermeiden, wird gefordert, daß genau eine Lösung mit $(\varphi, q) \in H^1((0, T); H_{\text{div}}(\Omega)) \times L^2((0, T); H)$ existiert. Denkbar wäre auch eine schwache Formulierung analog zum Navier-Stokes Problem mit Lösungen aus $L^2((0, T); H_{\text{div}}(\Omega)) \cap L^\infty((0, T); L_{\text{div}}(\Omega)) \times L^2((0, T); L^2(\Omega))$ (vgl. (3.5)). Da dann aber die Regel der partiellen Integration bezüglich der Zeit (vgl. Satz 1.16) nicht mehr gelten würde, müßte man zusätzlich die Energieungleichung

$$\|\varphi(t_1)\|^2 + 2 \int_{t_1}^{t_2} \nu \|\nabla \varphi\|^2 + b(\varphi; u, \varphi) dt \leq \|\varphi(t_2)\|^2, \quad \forall t_2 > t_1 \geq 0$$

fordern. Hiermit würden sich dann die wichtigsten Aussagen dieses Kapitels übertragen.

- In der klassischen qualitativen Stabilitätsanalyse ist das betrachtete Zeitintervall $(0, T)$ meist $(0, \infty)$, da man an dem asymptotischen Verhalten der Lösung φ von (4.1) interessiert ist. Daher wird auch unterstellt, daß die Strömung (u, p) und die Störung (φ, q) auf dem ganzen Intervall $[0, \infty)$ existieren.
- (u, p) wird auch als Basisströmung bezeichnet.

Die vorliegende Arbeit wird sich vereinfachend auf den Fall gestörter Anfangsbedingungen beschränken. Es wird also angenommen, daß für die rechte Seite $g = 0$ gilt. Wie man sieht, ist durch (4.1) die Frage der Stabilität der Basisströmung (u, p) auf die Stabilität der Nulllösung von (4.1) zurückgespielt worden. Deshalb gilt:

Satz 4.1 Sei (u, p) eine Lösung des Navier-Stokes Problems (3.3).

(i) (u, p) ist stabil, falls für alle $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so daß gilt:

$$\|\varphi_0\| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|\varphi\|_{[0, \infty)} := \sup_{t \in [0, \infty)} \|\varphi(\cdot, t)\| < \epsilon. \tag{4.2}$$

(ii) (u, p) ist asymptotisch stabil, falls (u, p) stabil ist und es ein $\gamma > 0$ gibt, so daß gilt

$$\|\varphi_0\| < \gamma \quad \Rightarrow \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi(\cdot, t)\| = 0. \tag{4.3}$$

(iii) Gilt (4.3) für alle $\gamma > 0$ und ist (u, p) stabil, so ist (u, p) einschränkungslos asymptotisch stabil.

Hierbei sollen die Stabilitätsaussagen speziell mit der Norm $\|\cdot\| := \|\cdot\|_{[L^2(\Omega)]^3}$ verstanden werden. Denkbar wären auch andere Normen. Zu bemerken ist aber, daß eine Strömung bezüglich einer Norm stabil sein kann, dies aber bezüglich einer anderen nicht unbedingt sein muß (vgl. J. FLAVIN, S. RIONERO [FR96], Abschnitt 1.10).

4.2 Die Energie-Methode

Unterstellt wird im Folgenden ein in mindestens eine Richtung beschränktes Gebiet Ω , so daß die Ungleichung von Poincaré (1.10) gültig ist. Außerdem sei der Rand hinreichend glatt. Der Fall eines unbeschränkten Gebiets wird bei G.P. GALDI, S. RIONERO [GR85] ausführlich dargestellt.

Die Frage, ob eine Strömung stabil ist, beantwortet für stationäre Strömungen folgender Satz, den man bei B. STRAUGHAN [Str92], Kapitel 3.1 oder bei J. FLAVIN, S. RIONERO [FR96], Abschnitt 8.5.1 findet. Allerdings wird dort eine andere Entdimensionierung benutzt.

Satz 4.2 *Sei (u, p) eine stationäre Basisströmung. Existiert außerdem*

$$\frac{1}{R_E} := \max_{\substack{\varphi \in H_{div}(\Omega) \\ \|\nabla\varphi\| \neq 0}} -\frac{b(\varphi; u, \varphi)}{\|\nabla\varphi\|^2}, \quad (4.4)$$

so ist (u, p) einschränkungslos asymptotisch stabil für alle Reynolds-Zahlen Re mit $Re < R_E$.

Beweis: Sei (φ, q) eine Lösung des Stabilitätsproblems (4.1), die auf $(0, \infty)$ existiert. Multipliziert man die erste Gleichung von (4.1) mit φ und integriert über Ω , so erhält man unter Beachtung der Definition von $b(u; v, w)$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\varphi}{dt}, \varphi\right) - \nu((\Delta\varphi, \varphi)) + b(u; \varphi, \varphi) + b(\varphi; \varphi, \varphi) + b(\varphi; u, \varphi) + ((\nabla q, \varphi)) \\ = 0 \text{ in } (0, \infty). \end{aligned}$$

Wendet man dann die Regel der partiellen Integration (1.9) an und nutzt die Eigenschaft, daß $b(u; v, v) = 0$ ist (Lemma 3.1), so ergibt sich

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\varphi\|^2 = -\nu \|\nabla\varphi\|^2 - b(\varphi; u, \varphi) \quad \text{in } (0, \infty).$$

Dies wird nun unter Beachtung der Voraussetzungen wie folgt nach oben abgeschätzt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\varphi\|^2 &= -\nu \|\nabla \varphi\|^2 - b(\varphi; u, \varphi) \\ &\leq -\|\nabla \varphi\|^2 \left(\frac{1}{Re} - \max_{\substack{\varphi \in H_{div}(\Omega) \\ \|\nabla \varphi\| \neq 0}} \frac{-b(\varphi; u, \varphi)}{\|\nabla \varphi\|^2} \right) \\ &\leq -\|\nabla \varphi\|^2 \underbrace{\left(\frac{1}{Re} - \frac{1}{R_E} \right)}_{=: a}. \end{aligned}$$

Für Reynolds-Zahlen $Re < R_E$ gilt somit $a > 0$. Hieraus folgt mit der Ungleichung von Poincaré (1.10)

$$\frac{d}{dt} \|\varphi\|^2 \leq -2ac \|\varphi\|^2.$$

Sei ohne Einschränkung $\|\varphi(\cdot, t)\| > 0$ für alle $t > 0$. Denn andernfalls ist die Behauptung trivialerweise erfüllt. Dann folgt durch Division mit $\|\varphi(\cdot, t)\|^2$ und Integration über t :

$$\int_0^t \frac{2\|\varphi(\cdot, \tau)\| \frac{d}{d\tau} \|\varphi(\cdot, \tau)\|}{\|\varphi(\cdot, \tau)\|^2} d\tau \leq -2act.$$

Die Auswertung des Integrals ergibt

$$\|\varphi(\cdot, t)\|^2 \leq e^{-2act} \|\varphi(\cdot, 0)\|^2.$$

Man sieht daraus, daß $\|\varphi(\cdot, t)\|$ für $t \rightarrow \infty$ exponentiell gegen 0 strebt, falls $Re < R_E$ ist. \square

Bemerkung 4.2

- Die eben gezeigte Beweistechnik wird Energie-Methode genannt, denn $\|\varphi\|^2$ ist ein Maß für die Energie der Störung φ . Man sieht, daß für $Re < R_E$ kein Energietransfer von der Basisströmung in die Störung φ existiert.
- Die Energie-Methode läßt sich auch als direkte Methode von Lyapunov interpretieren. Dazu faßt man $\|\varphi\|^2$ als Lyapunov Funktion $V(\varphi)$ auf (vgl. Satz 2.4).
- Betrachtet man eine instationäre Basisströmung (u, p) und definiert

$$\frac{1}{R_E} := \sup_{t \geq 0} \sup_{\substack{\varphi \in H_{div}(\Omega) \\ \|\nabla \varphi\| \neq 0}} \frac{-b(\varphi; u(t), \varphi)}{\|\nabla \varphi\|^2},$$

so zeigt man analog zum obigen Beweis, daß (u, p) für alle $Re < R_E$ einschränkungslos asymptotisch stabil ist. Dieses und weitere Aussagen zum Fall instationärer Basisströmungen werden bei S.H. DAVIS, C. VON KERCZEK [DvK73] dargestellt.

Um das Supremum in (4.4) zu ermitteln, ist es möglich, das Problem mit Hilfe der Variationsrechnung in ein Eigenwertproblem zu überführen (vgl. B. STRAUGHAN [Str92], Kap. 3.1). Daraus folgt dann auch die Existenz des Maximums (4.4), die von S. RIONERO [Rio68]¹ gezeigt wurde. Ohne darauf näher einzugehen, wird hier noch eine leichter zu berechnende untere Schranke für R_E hergeleitet.

Dazu definiert man den symmetrischen Verzerrungstensor $D : \Omega \rightarrow \mathbf{R}^{3 \times 3}$ durch

$$D = (D_{ij}) \text{ mit } D_{ij} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

und beachtet

$$\begin{aligned} b(\varphi; u, \varphi) &= \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \varphi_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \varphi_i dx = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \varphi_j \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \varphi_i dx \\ &= \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \varphi_j D_{ij} \varphi_i dx = ((\varphi, D\varphi)). \end{aligned}$$

Nun berücksichtigt man noch das folgende Lemma:

Lemma 4.1 Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ mit $A^t = A$. Es gilt

$$-x \cdot Ax \leq |\mu| |x|^2, \quad \forall x \in \mathbf{R}^n,$$

wobei μ der vom Betrag her größte Eigenwert von A ist.

Beweis:

Da A eine symmetrische Matrix ist, existiert eine orthogonale Basis $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ aus Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$. Für alle $x \in \mathbf{R}^n$ existiert eine eindeutige Darstellung $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i$ mit $\alpha_i \in \mathbf{R}$. Hieraus folgt

$$-x \cdot Ax = - \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \mu_i \phi_i \right) = - \sum_{i=1}^n \mu_i \alpha_i^2 |\phi_i|^2 \leq \left(\max_{i=1, \dots, n} |\mu_i| \right) |x|^2.$$

□

Aus dem Lemma ergibt sich

$$-((\varphi, D\varphi)) = - \int_{\Omega} \varphi \cdot D\varphi dx \leq \int_{\Omega} |\hat{\lambda}| |\varphi|^2 dx \leq \lambda \|\varphi\|^2,$$

wobei $\lambda := \sup_{x \in \Omega} |\hat{\lambda}(x)|$ und $\hat{\lambda}(x)$ der vom Betrag her maximale Eigenwert von $D(x)$ ist. Existiert λ , so folgt aus der Ungleichung von Poincaré (1.10)

$$\frac{1}{R_E} = \max_{\substack{\varphi \in H_{div}(\Omega) \\ \|\nabla \varphi\| \neq 0}} \frac{-((\varphi, D\varphi))}{\|\nabla \varphi\|^2} \leq \frac{\lambda \|\varphi\|^2}{c \|\varphi\|^2} = \frac{\lambda}{c}.$$

Dies halten wir noch in einem Satz fest:

¹Vgl. Abschnitt 7.

Satz 4.3 Existiert das oben definierte λ , so ist für

$$\operatorname{Re} \leq \frac{c}{\lambda}$$

(u, p) einschränkungslos asymptotisch stabil. $\frac{1}{c}$ ist dabei die Konstante der Poincaré Ungleichung.

4.3 Prinzip der linearisierten Stabilität

Da die Störung als klein angenommen wird, wird der nichtlineare Term $(\varphi \cdot \nabla)\varphi$ oft vernachlässigt. Das daraus resultierende Problem wird als *linearisiertes Stabilitätsproblem* bezeichnet. Gesucht wird also ein (ϕ, χ) , so daß gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt} - \nu \Delta \phi + (u \cdot \nabla)\phi + (\phi \cdot \nabla)u + \nabla \chi &= 0 && \text{in } \Omega \times (0, T) \\ \nabla \cdot \phi &= 0 && \text{in } \Omega \times (0, T) \\ \phi &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \times (0, T) \\ \phi(\cdot, 0) &= \phi_0 && \text{in } \Omega. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Nehmen wir weiter an, daß die Basisströmung (u, p) stationär ist. Dann ist die Gleichung (4.5) eine autonome, lineare Differentialgleichung und man sucht deswegen Lösungen der Form

$$\phi(x, t) = a(x)e^{-\sigma t}, \quad \chi(x, t) = q_0(x)e^{-\sigma t}, \quad (4.6)$$

wobei σ ein komplexer Parameter ist. Setzt man (4.6) in (4.5) ein, so erhält man nach Kürzen des Faktors $e^{-\sigma t}$

$$\begin{aligned} \sigma a &= (u \cdot \nabla)a + (a \cdot \nabla)u + \nabla q_0 - \nu \Delta a && \text{in } \Omega \\ \nabla \cdot a &= 0 && \text{in } \Omega \\ a &= 0 && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Das Problem der hydrodynamischen Stabilität ist somit auf dieses stationäre Eigenwertproblem für (a, σ) reduziert worden. Die Funktion q_0 muß dabei nicht berücksichtigt werden, da sie in der zugehörigen Variationsformulierung mit divergenzfreien Ansatzfunktionen herausfällt. Über die Lage der gesuchten Eigenwerte in der komplexen Ebene läßt sich konstatieren:

Lemma 4.2 Es gibt eine unendliche Anzahl von Eigenwerten $\sigma_1, \sigma_2, \dots$, die in dem parabolischen Gebiet

$$G := \{\lambda := r + is \mid cs^2 < r + c'\}$$

liegen. Dabei sind c, c' Konstanten.

Beweis: Vgl. D.H. SATTINGER [Sat70], Lemma 3.6.

Durch (4.7) wird folgende Definition bezüglich des Verhaltens der Lösung von (4.5) möglich.

Definition 4.1 (i) Die stationäre Basisströmung (u, p) heißt linear stabil, falls für alle Lösungen (a, σ) von (4.7) gilt

$$\operatorname{Re}(\sigma) > 0.$$

(ii) Analog ist (u, p) linear instabil, falls eine Lösung (a, σ) existiert, so daß

$$\operatorname{Re}(\sigma) < 0$$

gilt.

Zu klären bleibt die Frage, was für Lösungen von (4.5) gilt, die nicht von der Form (4.6) sind. Eine Antwort liefert folgender Satz:

Satz 4.4 Falls (u, p) linear stabil ist, gilt für alle Lösungen ϕ der linearen Gleichung (4.5), daß $\|\phi\|$ für $t \rightarrow \infty$ exponentiell gegen 0 fällt, d.h. die Nulllösung in (4.5) ist einschränkungslos asymptotisch stabil.

Beweis: Vgl. G.P. GALDI, S. RIONERO [GR85], S. 6.

Im Kontext hydrodynamischer Stabilität wird nun wieder nach einer *kritischen Reynoldszahl* R_L gesucht. Dazu geht man davon aus, daß im *laminaren Fall*, also für kleine Reynolds-Zahlen, die Strömung (u, p) linear stabil ist.

Definition 4.2 Die kritische Reynolds-Zahl R_L ist die kleinste Reynolds-Zahl, bei der das Eigenwertproblem (4.7) eine Lösung mit $\operatorname{Re}(\sigma) \leq 0$ besitzt.

Für $R > R_L$ dürfte die Strömung dann linear instabil sein. Sind nun aber linear stabile Strömungen auch nichtlinear stabil? Aufschluß darüber geben die folgenden Sätze:

Satz 4.5 Sei (u, p) eine stationäre Basisströmung, die linear stabil ist. Dann ist (u, p) auch (nichtlinear) stabil, d.h. hinreichend kleine Störungen verschwinden für $t \rightarrow \infty$.

Beweis: Vgl. D.H. SATTINGER [Sat70], Theorem 4.1 oder D.H. SATTINGER [Sat73], Theorem 6.3.1.

Satz 4.6 Ist die stationäre Basisströmung (u, p) linear instabil, so ist sie auch (nichtlinear) instabil.

Beweis: Vgl. D.H. SATTINGER [Sat70], Theorem 5.1.

Aus Satz 4.6 ergibt sich die wichtige Folgerung:

Satz 4.7 *Für die kritischen Reynoldszahlen R_E und R_L der nichtlinearen bzw. linearen Stabilitätsanalyse gilt die Relation:*

$$R_E \leq R_L.$$

4.4 Beurteilung dieser Ansätze

Betrachtet man beide Methoden, so läßt sich folgendes konstatieren: Ist die Reynoldszahl Re kleiner als R_E , so ist die Basisströmung (u, p) gegenüber beliebigen Störungen stabil. Im Fall $Re > R_L$ kann man im Allgemeinen davon ausgehen, daß (u, p) instabil ist.

Liegen bei Strömungen R_E und R_L dicht zusammen, so führen die vorgestellten Theorien somit zu befriedigenden Ergebnissen. So stimmen z.B. bei der Rayleigh-Benard Konvektion (Strömung, die durch Temperaturdifferenz verursacht wird) R_E und R_L überein.² Tatsächlich ergeben die praktischen Experimente dieselbe kritische Reynolds-Zahl. Auch für die Taylor-Couette-Strömung (Strömung zwischen einem ruhenden äußeren und einem rotierenden inneren Zylinder) ergibt die linearisierte Stabilitätstheorie befriedigende Ergebnisse.³

Was aber passiert im Fall $R_E \ll R_L$ und $Re \in (R_E, R_L)$? Dieser Fall ist durchaus nicht nur theoretisch interessant. In vielen physikalisch relevanten Strömungen beobachtet man genau dieses Phänomen. So ist z. B. für die planare Poiseuille Strömung (Strömung zwischen zwei ruhenden, parallelen Platten) $R_E \approx 49.6$ und $R_L \approx 5772$. Die planare Couette Strömung (Strömung zwischen zwei gegeneinander verschobenen, parallelen Ebenen) ist linear stabil für alle Reynolds-Zahlen und R_E ist gegeben durch $R_E \approx 20.7$. In der Realität beobachtet man nun für die Poiseuille Strömung, daß die Strömung für Reynolds-Zahlen größer als 1000 instabil werden kann. Bei der Couette Strömung liegt dieser Wert bei circa 360.⁴ Man stellt also fest, daß das Prinzip der linearisierten Stabilität bei bestimmten Strömungen das Stabilitätsverhalten falsch prognostiziert. L.N. TREFETHEN et al. [TTR92] vermuten das Versagen besonders bei Scherströmungen. *Scherströmungen* sind Strömungen, bei denen sich die Geschwindigkeit vor allem senkrecht zur Strömungsrichtung ändert.

²Vgl. B. STRAUGHAN [Str92], Kap. 3.3: Allerdings ist R hier die Rayleigh-Zahl. Aktuelle Erweiterungen dieses Modells findet man bei J.N. FLAVIN, S. RIONERO [FR99].

³Vgl. L.N. TREFETHEN et al. [TTR92], Seite 3.

⁴Vgl. S.C. REDDY, D.S. HENNINGSON [RH93], Kapitel 1.

4.5 Gründe für das Versagen des Prinzips der linearisierten Stabilität

Wieso versagt das Prinzip der linearisierten Stabilität bei bestimmten Strömungen in der Praxis? Man betrachte dazu noch einmal die mathematische Definition der Stabilität. Gefordert wird, daß hinreichend kleine Störungen im Zeitablauf nicht anwachsen. Es wird argumentiert, daß die in der Realität auftretenden Störungen nicht klein genug sind. Als Erklärung bislang weitestgehend unbeachtet blieb dabei die Tatsache, daß, obwohl die Lösung der linearen Gleichung ϕ asymptotisch stabil ist, es doch zu einem wesentlichen vorübergehenden Anstieg von ϕ kommen kann. Hierdurch kann im Wechselspiel mit dem nichtlinearen Term Instabilität entstehen, obwohl die Störung sehr klein ist.

Dieses wurde bereits im Beispiel von L.N. TREFETHEN aus dem letzten Kapitel über gewöhnliche Differentialgleichungen deutlich. Dort wurde gezeigt, daß zwischen dem Parameter R und dem kritischen Wert ϵ , der die maximal 'erlaubte' Größe der Anfangsstörung angibt, der Zusammenhang $\epsilon = O(R^{-2})$ besteht. Dasselbe Phänomen erklärt auch das Versagen bei der planaren Couette Strömung und der planaren Poiseuille Strömung. Denn auch dort konnte der Zusammenhang $\epsilon = O(R^{-\alpha})$ mit $\alpha > 1$ festgestellt werden.⁵

Liegt kein Anstieg der Lösung der linearen Gleichung (4.5) vor, so erwarten wir, daß das Prinzip der linearisierten Stabilität gute Ergebnisse liefert. Dieser Fall liegt insbesondere vor, falls der zugehörige linearisierte Operator normal ist (z.B. Rayleigh-Benard Konvektion). Um den Grad der Normalität eines Operators und damit seine Stabilitätseigenschaften zu bestimmen, führen L.N. TREFETHEN et al. als Maß das *Pseudospektrum* ein.⁶ Doch eine erschöpfende Erörterung dieses Konzeptes würde zu weit vom Thema dieser Arbeit wegführen.

Insgesamt ergibt sich aus der obigen Diskussion, daß die qualitative Stabilitätsanalyse unzureichend ist. Es ist nötig, sie durch eine quantitative Stabilitätsanalyse des nichtlinearen und des linearen Stabilitätsproblems zu ergänzen. Abschätzungen spezieller Strömungen werden in der Arbeit von C. JOHNSON, R. RANNACHER und M. BOMAN [JRB94] durchgeführt. Dort wird auch versucht, den Übergang zur Instabilität im Fall einer Rohrströmung anhand eines Modells gewöhnlicher Differentialgleichungen zu erklären.

4.6 'Worst scenario' - Abschätzung

In den Fehlerabschätzungen bei Diskretisierungen des Navier-Stokes Problems benötigt man üblicherweise eine Stabilitätskonstante, die angibt, wie groß die Störung im Zeitablauf im Verhältnis zu ihrer Anfangsstörung werden kann (vgl. dazu C. JOHN-

⁵Vgl. J.S. BAGGETT, L.N. TREFETHEN [BT97], Seite 2.

⁶Zur Definition vgl. L.N. TREFETHEN [Tre97], zur Anwendung vgl. L.N. TREFETHEN et al. [TTR92].

SON, R. RANNAKER, M. BOMAN [JRB95], Abschnitt 2.3 oder A. QUARTERONI, A. VALLI [QV94], Abschnitt 13.3).

Definition 4.3 Sei φ eine Lösung von (4.1) zum Anfangswert φ_0 ($g = 0$) und $\|\varphi\|_I := \sup_{t \in I} \|\varphi(t, \cdot)\|$, so läßt sich die Stabilitätskonstante $C_0^p(T, u)$ definieren durch

$$C_0^p(T, u) := \sup_{\varphi_0 \in [L^2(\Omega)]^3 - \{0\}} \frac{\|\varphi\|_{(0,T)}}{\|\varphi_0\|}. \quad (4.8)$$

Hierfür gibt folgender Satz eine obere Schranke an. Allerdings berücksichtigt der Beweis keine speziellen Eigenschaften der Basisströmung (u, p) .

Satz 4.8 Sei (u, p) eine Basisströmung, die auf $I := (0, T)$ existiert mit der Eigenschaft $K := \|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega \times I)} < \infty$. Dann gilt:

$$C_0^p(T, u) \leq \exp(CTK).$$

Beweis: Multipliziert man die erste Gleichung von (4.1) mit φ und integriert über $\Omega \times I$, so erhält man

$$\int_I \left(\left(\frac{d\varphi}{dt}, \varphi \right) + \left((u \cdot \nabla)\varphi, \varphi \right) + \left((\varphi \cdot \nabla)u, \varphi \right) - \nu(\Delta\varphi, \varphi) + (\nabla q, \varphi) \right) dt = 0.$$

Mit Hilfe der Regel der partiellen Integration (1.9) und der Definition von $b(\cdot; \cdot, \cdot)$ ergibt sich

$$\int_I \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \|\varphi\|^2 dt + \int_I b(u; \varphi, \varphi) + \nu \|\nabla\varphi\|^2 + b(\varphi; u, \varphi) - (q, \nabla \cdot \varphi) dt = 0.$$

Nun benutzt man die Inkompressibilität von φ , das Lemma 3.1 und die Formel aus Satz 1.16:

$$\frac{1}{2} (\|\varphi(\cdot, T)\|^2 - \|\varphi(\cdot, 0)\|^2) + \int_I b(\varphi; u, \varphi) + \nu \|\nabla\varphi\|^2 dt = 0.$$

Berücksichtigt man schließlich $\|\nabla\varphi\| \geq 0$, so folgt

$$\frac{1}{2} (\|\varphi(\cdot, T)\|^2 - \|\varphi(\cdot, 0)\|^2) + \int_I \int_\Omega \sum_{i,j=1}^3 \varphi_i \varphi_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx dt \leq 0$$

oder anders geschrieben

$$\|\varphi(\cdot, T)\|^2 \leq \|\varphi_0\|^2 - 2 \int_I \int_\Omega \sum_{i,j=1}^3 \varphi_i \varphi_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx dt.$$

Weiter schätzt man jetzt ab:

$$\begin{aligned}
\|\varphi(\cdot, T)\|^2 &\leq \|\varphi_0\|^2 + 2\|\nabla u\|_{L^\infty(\Omega \times I)} \left| \int_I \int_\Omega \sum_{i,j=1}^3 \varphi_i \varphi_j dx dt \right| \\
&\leq \|\varphi_0\|^2 + 2K \left| \int_I \int_\Omega \left[\sum_{i=1}^3 \varphi_i \right]^2 dx dt \right| \\
&\leq \|\varphi_0\|^2 + 2K \left| \int_I \int_\Omega \sum_{i=1}^3 3^2 \varphi_i^2 dx dt \right| \\
&\leq \|\varphi_0\|^2 + 18K \int_0^T \|\varphi(\cdot, t)\|^2 dt.
\end{aligned}$$

Hierauf wendet man das Lemma von Gronwall an (Satz 1.19) und erhält:

$$\|\varphi(\cdot, T)\|^2 \leq \|\varphi_0\|^2 \exp(18KT).$$

Hieraus folgt das gesuchte Resultat. \square

In den meisten technisch relevanten Strömungen gilt $TK \gg 1$.⁷ Dies bedeutet aber, daß für diese Strömungen die Fehlerabschätzungen praktisch bedeutungslos sind.

Als Konsequenz daraus ergibt sich, daß es nicht sinnvoll ist, für alle Strömungen gemeinsam eine Stabilitätskonstante zu bestimmen. Man muß also spezielle Eigenschaften der zu untersuchenden Strömung ausnutzen, um Stabilitätskonstanten zu erhalten, die die Störung nicht überschätzen.

Es stellt sich die Frage, welche Klasse von Strömungen überhaupt berechenbar sind. Eine teilweise Antwort gibt die Eigenschaft der Stabilität. Ist eine Strömung stabil, so bedeutet das, daß genügend kleine Störungen sich nicht verstärken. Das bewirkt, daß die Stabilitätskonstante $C_0^p(T, u)$ klein ist. Problematisch ist dabei die Größe des Diskretisierungsfehlers. Denn nur für genügend kleine Fehler bleibt die Stabilität erhalten. Sind die Fehler dagegen zu groß, bleibt im Allgemeinen nur die obige Fehlerabschätzung. Von besonderer Bedeutung ist daher die einschränkungslose Stabilität, denn nur sie garantiert eine kleine Stabilitätskonstante. Numerische Experimente von R. RANNACHER [Ran98]⁸ bestätigen auch im stationären Fall, daß stabile Lösungen der Navier-Stokes Gleichungen eher berechenbar erscheinen.

⁷Vgl. C. JOHNSON, R. RANNACHER, M. BOMAN [JRB95], Abschnitt 2.1.

⁸Vgl. Seite 18.

Kapitel 5

Fehlerabschätzungen für Galerkin-Verfahren

5.1 Allgemeine Bemerkungen

In diesem Kapitel soll gezeigt werden, wie durch Ausnutzung eines dualen Arguments a-posteriori Fehlerabschätzungen für den Diskretisierungsfehler bestimmter Galerkin-Verfahren gewonnen werden können. Dies sind Fehlerabschätzungen, die sich ohne Kenntnis der exakten Lösung aus den gegebenen Daten und der Näherungslösung ergeben. Sie sind von enormer Bedeutung bei adaptiven Finite-Elemente-Methoden, bei denen das Gebiet solange verfeinert wird, bis der Fehler der Näherungslösung unter einer zu Beginn vorgegebenen Toleranz liegt.

Die Darstellung lehnt sich dabei an den Arbeiten von C. JOHNSON, R. RANNACHER und M. BOMAN (vgl. [Joh95], [JR94], [JRB95]) an. Das allgemeine Vorgehen wird bei K. ERIKSSON, D. ESTEP, P. HANSBO, C. JOHNSON [EEHJ95] oder bei R. RANNACHER [Ran98] beschrieben. Das Besondere dieser Beweisidee ist das geschickte Zusammenspiel folgender vier Punkte:

- Repräsentation des Fehlers durch ein zugeordnetes linearisiertes, duales Problem,
- Eigenschaft der Galerkin-Orthogonalität,
- Interpolationsfehlerabschätzungen für das duale Problem und
- Stabilitätsabschätzungen für das stetige duale Problem.

Besondere Schwierigkeiten bereitet der letzte Punkt. Scharfe Stabilitätsabschätzungen sind für einen effektiven adaptiven Algorithmus unabdingbar. Leider sind scharfe Abschätzungen nur für bestimmte Aufgabenstellungen bekannt. Im allgemeinen Fall ist jedoch die Bestimmung der Stabilitätskonstante a-priori nicht möglich. Vorgeschlagen wird deshalb, diese Konstanten numerisch zu schätzen. Allerdings ist fraglich, ob der Aufwand hierfür vertretbar ist.

Wird die Stabilitätskonstante zu groß geschätzt, so wird das Gitter unnötig stark verfeinert und der Rechenaufwand ist zu hoch. Wird die Konstante zu klein geschätzt, kann die vorgegebene Fehlertoleranz im Allgemeinen nicht eingehalten werden und die Abschätzung ist sinnlos.

Um die Größenordnung der Stabilitätskonstante anzugeben, ist es denkbar, das duale Problem mit Hilfe der Mittel des letzten Kapitels über hydrodynamische Stabilität zu bearbeiten.

Angewendet wird die Methode auf die stationären Navier-Stokes Gleichungen und auf das semidiskretisierte zeitabhängige Navier-Stokes Problem. Im ersten Fall wird mit einer Finite-Elemente-Methode diskretisiert, im zweiten Fall wird das $dG(0)$ -Verfahren benutzt.

5.2 Das stationäre Navier-Stokes Problem

5.2.1 Eine Finite-Elemente-Methode

Zur Erinnerung seien hier noch einmal die stationären Navier-Stokes Gleichungen wiederholt: Finde $\hat{u} := (u, p) \in [H^2(\Omega)]^3 \times H^1(\Omega)$ so daß

$$\begin{aligned} (u \cdot \nabla)u - \nu \Delta u + \nabla p &= f \quad \text{in } \Omega \\ \nabla \cdot u &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \quad (5.1)$$

gilt, wobei $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ ein beschränktes Gebiet mit polygonalem, Lipschitz-stetigem Rand ist.

Führt man die Räume $\hat{V} = V \times H$, $V := [H_0^1(\Omega)]^3$ und $H := \{p \in L_2(\Omega) \mid \int_{\Omega} p dx = 0\}$ ein, so ergibt sich die Variationsformulierung¹: Finde $\hat{u} := (u, p)$ mit

$$A(u, \hat{u}, \hat{v}) = F(v), \quad \forall \hat{v} := (v, q) \in \hat{V}. \quad (5.2)$$

Hierbei ist mit $\hat{w} := (w, r)$

$$A(u, \hat{w}, \hat{v}) := a(w, v) + b(u; w, v) - (r, \nabla \cdot v) + (q, \nabla \cdot w),$$

$$b(u; w, v) = \int_{\Omega} (u \cdot \nabla)w \cdot v dx,$$

$$a(w, v) = \nu \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 \nabla w_i \cdot \nabla v_i dx \quad \text{und} \quad F(v) = ((f, v)).$$

Wie wir aus Kapitel 3.2 wissen, existiert eine Lösung \hat{u} (vgl. Satz 3.3). Außerdem gehen wir davon aus, daß diese eindeutig ist. Im Fall kleiner Daten ist dieses nach Satz 3.4 auf jeden Fall gesichert.

¹Die Details findet man in Kapitel 3.2.

Zu (5.2) wird jetzt ein konformes Finite-Elemente-Verfahren konstruiert. Dazu wird das Gebiet Ω durch eine *isotrope* Familie *zulässiger Zerlegungen* $\{T_h\}_h$ in Tetraeder Ω_k zerlegt.² Dabei ist h ein Index, der durch den maximalen Durchmesser aller finiten Elemente einer Zerlegung $T_h = \{\Omega_k\}$ gegeben ist.

Definition 5.1 (i) Eine Zerlegung $\bar{\Omega} = \cup_{k=1}^M \bar{\Omega}_k$ heißt *zulässig*, falls jeweils zwei finite Elemente $\bar{\Omega}_{k_1}$ und $\bar{\Omega}_{k_2}$

- genau eine vollständige gemeinsame Fläche,
- genau eine vollständige gemeinsame Kante oder
- genau einen gemeinsamen Punkt haben oder aber
- disjunkt sind.

(ii) Eine Familie von Zerlegungen heißt *isotrop*, falls gleichmäßig eine Konstante $0 < c_1$ existiert, so daß jedes Element Ω_k einen Kreis vom Radius ρ_k mit

$$\frac{h_k}{\rho_k} \leq c_1$$

enthält, wobei h_k der Durchmesser von Ω_k ist (vgl. G. LUBE [Lub98], Kapitel 10).

Bemerkung 5.1 C. JOHNSON, R. RANNACHER ([JR94], Abschnitt 5.1) schlagen vor, eine Familie von quasiuniformen Zerlegungen zu benutzen. Dies widerspricht aber meiner Ansicht nach der Idee der Adaptivität, da so lokale Verfeinerungen nicht möglich sind. Deshalb fordere ich nur die Bedingung der Isotropie. Denn schon die Isotropie stellt sicher, daß die finiten Elemente nicht entarten.

Weiter definiert man einen diskreten Unterraum $\hat{V}_h := V_h \times H_h$ von \hat{V} , indem man vorschreibt, daß die Elemente aus V_h bzw. H_h auf jedem finiten Element Ω_k Polynome mit vorgegebenem maximalen Grad sind. Die Finite-Elemente-Approximation des Problems (5.2) ist dann $\hat{u}_h := (u_h, p_h) \in \hat{V}_h$, so daß

$$A(u_h, \hat{u}_h, \hat{v}) = F(v), \quad \forall \hat{v} \in \hat{V}_h \quad (5.3)$$

gilt. Um zu garantieren, daß (5.3) eine Lösung besitzt, muß \hat{V} die *diskrete Babuska-Brezzi-Bedingung*

$$\inf_{q \in H_h - \{0\}} \sup_{\substack{v \in V_h \\ \|v\|_1 \neq 0}} \frac{(q, \nabla \cdot v)}{\|\nabla v\| \|q\|} \geq \alpha, \quad \alpha > 0 \quad (5.4)$$

erfüllen.³

²Alle Tetraeder Ω_k seien als offen definiert.

³Vgl. V. GIRAULT, P.A. RAVIART [GR86], Kapitel IV.

5.2.2 A-posteriori Fehlerabschätzung

Gesucht wird nach einer a-posteriori Fehlerabschätzung des Finite-Elemente-Verfahrens (5.3) für die stationären Navier-Stokes Gleichungen (5.1). Die Struktur des Beweises ist die gleiche wie bei dem des Anfangswertproblems aus Kapitel 2.4. Entwickelt wurde der vorliegende Ansatz von C. JOHNSON und R. RANNACHER (vgl. [JR94], [Joh95]). Allerdings wird dort der Beweis nur grob skizziert. Wesentlich beruht er auf folgendem dualen linearisierten Problem:

Definition 5.2 *Das duale Problem ist gegeben durch: Finde $\hat{\varphi} := (\varphi, \chi) \in \hat{V}$, so daß gilt*

$$L(u, u_h; \hat{v}, \hat{\varphi}) = ((v, g)), \quad \forall \hat{v} := (v, q) \in \hat{V} \quad (5.5)$$

mit $g \in [L_2(\Omega)]^3$, $\nabla u_h \cdot \varphi := \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_{hj}}{\partial x_i} \varphi_j \right)_{i=1}^3$ und

$$L(u, u_h; \hat{v}, \hat{\varphi}) := -(((u \cdot \nabla)\varphi - \nabla u_h \cdot \varphi, v)) + a(\varphi, v) + (\nabla \cdot v, \chi) - (\nabla \cdot \varphi, q). \quad (5.6)$$

Leider ist nicht a-priori sichergestellt, daß für das duale Problem auch eine Lösung existiert. Aber die Gleichung (5.5) läßt sich näher charakterisieren. Denn nimmt man zunächst an, daß die Lösung φ und die Ansatzfunktionen divergenzfrei sind, so vereinfacht sich das Problem. Gesucht ist dann ein $\varphi \in H_{div}(\Omega)$, so daß gilt:

$$c(\varphi, v) := -(((u \cdot \nabla)\varphi - \nabla u_h \cdot \varphi, v)) + a(\varphi, v) = ((v, g)), \quad \forall v \in H_{div}(\Omega). \quad (5.7)$$

Bemerkung 5.2

- *Wie man nachrechnen kann, ist $c(\cdot, \cdot)$ eine Gardingsche Form bezüglich des Evolutionstripels $H_{div}(\Omega) \subset L_{div}(\Omega) \subset H_{div}(\Omega)^*$. Vielleicht kann man aus der Theorie der Gardingschen Formen Kriterien für die Lösbarkeit von (5.7) ableiten. Denn ist so eine Lösung gefunden, stellt die Theorie der gemischten Probleme die Existenz des Druckes χ sicher.*
- *Gegenüber dem Ansatz von C. JOHNSON ist hier das duale Problem leicht modifiziert worden. Denn bei C. JOHNSON wird implizit gefordert, daß die Druck-Komponenten verallgemeinerte Ableitungen besitzen. Dies ist hier aber durch die Wahl der Ansatzräume nicht garantiert.*
- *Auch der a-posteriori Fehlerschätzer von R. VERFÜRTH [Ver96] beruht auf einem geeigneten Hilfsproblem.⁴ Gefordert wird, daß für alle $(w, r) \in [L^2(\Omega)]^3 \times (H \cap H^1(\Omega))$ eindeutig ein*

$$(v, q) \in ([H^2(\Omega)]^3 \cap V) \times (H^1(\Omega) \cap H)$$

⁴Vgl. Bemerkung 3.23.

existiert, so daß gilt:

$$\begin{aligned} -\nu\Delta v - (u \cdot \nabla)v + (v \cdot \nabla)u - \nabla q &= w \quad \text{in } \Omega \\ -\nabla \cdot v &= r \quad \text{in } \Omega. \end{aligned}$$

Leider ist auch hier zweifelhaft, ob für alle (w, r) eindeutig eine Lösung (v, q) existiert.

Die Existenz einer Lösung von (5.5) vorausgesetzt, wird eine Stabilitätskonstante definiert:

Definition 5.3 Die Stabilitätskonstante $C_1^p(u, u_h)$ des dualen Problems wird definiert als die kleinste Konstante derart, daß folgende Ungleichung gilt:

$$\|\nabla\chi\| + \nu|\varphi|_2 \leq C_1^p(u, u_h)\|g\|, \quad \forall g \in [L_2(\Omega)]^3, \quad (5.8)$$

wobei $\hat{\varphi} = (\varphi, \chi)$ Lösung des Problems (5.5) mit g als Störung auf der rechten Seite ist.

Vorbereitend wird zunächst bewiesen:

Lemma 5.1 Für $u, v, w \in V$ und $\nabla \cdot u = 0$ gilt

$$-(((u \cdot \nabla)w - \nabla v \cdot w, u - v)) = b(u; u, w) - b(v; v, w). \quad (5.9)$$

Beweis: Der Beweis ergibt sich durch einfache Umformungen. Wiederholt wird die Inkompressibilität von u und die partielle Integration benutzt unter Berücksichtigung der Tatsache, daß die entstehenden Randintegrale aufgrund der Nullrandbedingungen verschwinden. Es gilt:

$$\begin{aligned} &- (((u \cdot \nabla)w - \nabla v \cdot w, u - v)) \\ &= \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 -u_j \frac{\partial w_i}{\partial x_j} (u_i - v_i) dx + \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 w_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} (u_i - v_i) dx \\ &= \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 -u_j \frac{\partial w_i}{\partial x_j} u_i + u_j \frac{\partial w_i}{\partial x_j} v_i + w_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} u_i dx - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 w_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} v_i dx \\ &= \underbrace{\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 w_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} u_i dx}_{=0} + \underbrace{\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 w_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j} u_j dx}_{=(((u \cdot \nabla)u, w))} - (((v \cdot \nabla)v, w)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 u_j \frac{\partial w_i}{\partial x_j} v_i + w_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} u_i dx \\
& = b(u; u, w) - b(v; v, w) + \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 w_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} u_i dx \\
& \quad - \overbrace{\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 w_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} v_i dx}^{=0} - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 u_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} w_i dx \\
& = b(u; u, w) - b(v; v, w),
\end{aligned}$$

da die zuletzt auftretenden Summen gleich sind. \square

Die Verbindung zwischen dem dualen Problem (5.5) und den Variationsformulierungen des Navier-Stokes Problems (5.2) und (5.3) wird durch folgendes Lemma hergestellt:

Lemma 5.2 *Ist $\hat{u} = (u, p) \in \hat{V}$ eine Lösung des Variationsproblems (5.2) und $\hat{u}_h = (u_h, p_h) \in \hat{V}_h$ eine Lösung des diskreten Problems (5.3), so gilt*

$$A(u, \hat{u}, \hat{\varphi}) - A(u_h, \hat{u}_h, \hat{\varphi}) = L(u, u_h; \hat{e}, \hat{\varphi}), \quad (5.10)$$

wobei $\hat{e} := (u - u_h, p - p_h)$ der Diskretisierungsfehler und $\hat{\varphi} = (\varphi, \chi) \in \hat{V}$ ist.

Beweis: Sei $e := u - u_h$. Der Beweis ergibt sich aus dem vorherigen Lemma und wiederum durch partielle Integration:

$$\begin{aligned}
& A(u, \hat{u}, \hat{\varphi}) - A(u_h, \hat{u}_h, \hat{\varphi}) \\
& = a(u, \varphi) + b(u; u, \varphi) - (p, \nabla \cdot \varphi) + (\chi, \nabla \cdot u) \\
& \quad - (a(u_h, \varphi) + b(u_h; u_h, \varphi) - (p_h, \nabla \cdot \varphi) + (\chi, \nabla \cdot u_h)) \\
& = (b(u; u, \varphi) - b(u_h; u_h, \varphi)) + a(u - u_h, \varphi) - (p - p_h, \nabla \cdot \varphi) + (\chi, \nabla \cdot (u - u_h)) \\
& = -(((u \cdot \nabla) \varphi - \nabla u_h \cdot \varphi, u - u_h)) + a(e, \varphi) + (\nabla \cdot e, \chi) - (p - p_h, \nabla \cdot \varphi) \\
& = L(u, u_h; \hat{e}, \hat{\varphi}).
\end{aligned}$$

\square

Es werden jetzt noch Interpolationsabschätzungen benötigt. Dazu wird auf den Quasi-Interpolationsoperator von P. CLÉMENT [Cle75] zurückgegriffen. Definiert man

$$\omega_k := \bigcup_{\substack{\bar{\Omega}_k \cap \bar{\Omega}_j \neq \emptyset \\ \Omega_j \in \mathcal{T}_h}} \Omega_j$$

als die Vereinigung aller finiten Elemente Ω_j , deren Abschlüsse eine nichtleere Schnittmenge mit $\bar{\Omega}_k$ besitzen, so läßt sich formulieren:

Lemma 5.3 *Es gibt Operatoren $I_h : V \rightarrow V_h$ und $J_h : H \rightarrow H_h$, so daß für $\hat{\varphi} = (\varphi, \chi) \in \hat{V}$, $l \in \mathbf{N}_0$ und alle $\Omega_k \in T_h$*

$$|\varphi - I_h \varphi|_{l, \Omega_k} \leq C^i h_k^{j-l} |\varphi|_{j, \omega_k}, \quad j = 1, 2, \quad j \geq l + 1 \quad (5.11)$$

und

$$|\chi - J_h \chi|_{0, \Omega_k} \leq C^i h_k |\chi|_{1, \omega_k} \quad (5.12)$$

gilt, falls $\hat{\varphi}$ der zusätzlichen Regularitätsbedingung $\hat{\varphi} \in [H^2(\Omega)]^n \times H^1(\Omega)$ genügt.

Dort zeigt P. CLÉMENT auch die Spur-Ungleichung⁵

$$h_k |u|_{0, \partial \Omega_k}^2 \leq c' [|u|_{0, \Omega_k}^2 + h_k^2 |u|_{1, \Omega_k}^2], \quad (5.13)$$

wobei $u \in H^1(\Omega_k)$ ist. Diese nutzen wir, um zu beweisen:

Lemma 5.4 *Für $u \in H^2(\Omega)$ gilt*

$$|u - I_h u|_{0, \partial \Omega_k} \leq c C^i h_k^{\frac{3}{2}} |u|_{2, \omega_k}. \quad (5.14)$$

Beweis: Teilt man in (5.13) durch h_k , so erhält man

$$|u - I_h u|_{0, \partial \Omega_k}^2 \leq c' \left[\frac{1}{h_k} |u - I_h u|_{0, \Omega_k}^2 + h_k |u - I_h u|_{1, \Omega_k}^2 \right].$$

Nun folgt aus Lemma 5.3 die Existenz einer Konstante c , so daß

$$|u - I_h u|_{0, \partial \Omega_k}^2 \leq \frac{1}{2} c^2 C^{i^2} [h_k^3 |u|_{2, \omega_k} + h_k^3 |u|_{2, \omega_k}]$$

gilt. Hieraus folgt die Behauptung. \square

Die Verallgemeinerung auf den Fall $u \in [H^2(\Omega_k)]^n$ ergibt sich einfach durch komponentenweises Ausnutzen von (5.14). Nach diesen Vorbereitungen läßt sich das entscheidende Resultat dieses Abschnitts zeigen:

Satz 5.1 *Besitzt das duale Problem (5.5) eine Lösung $\hat{\varphi} \in \hat{V}$ mit $\varphi \in [H_0^2(\Omega)]^3$, so gilt unter den Voraussetzungen von Lemma 5.2 die a-posteriori Fehlerabschätzung:*

$$\begin{aligned} \|u - u_h\| &\leq C^i C_1^p(u, u_h) \tilde{C} \sum_{\Omega_k \in T_h} \left(\nu^{-1} h_k^2 R_1(u_h, \Omega_k) + h_k R_2(u_h, \Omega_k) \right) \\ &\quad + \nu^{-1} h_k^{\frac{3}{2}} R_3(u_h, \Omega_k) \end{aligned}$$

⁵Vgl. P. CLÉMENT [Cle75], Lemma 4 oder auch R. VERFÜRTH [Ver98b], Lemma 3.1.

mit

$$\begin{aligned} R_1(u_h, \Omega_k) &:= \|(u_h \cdot \nabla)u_h + \nabla p_h - \nu \Delta u_h - f\|_{\Omega_k}, \\ R_2(u_h, \Omega_k) &:= \|\nabla \cdot u_h\|_{\Omega_k} \quad \text{und} \\ R_3(u_h, \Omega_k) &:= \left| [p_h n_S - \nu \frac{\partial u_h}{\partial n_S}] \right|_{0, \partial \Omega_k}. \end{aligned}$$

Dabei ist $[p_h n_S - \nu \frac{\partial u_h}{\partial n_S}]$ der Sprung der Normalenableitung auf einer Seite S eines Elements $\Omega_k \in T_h$.

Beweis: Der Fehler $e = u - u_h$ wird dargestellt durch das duale Problem. Sei dazu in Definition 5.2 g durch e ersetzt, d.h. $\hat{\varphi} \in \hat{V}$ ist also eine Lösung von

$$L(u, u_h; \hat{v}, \hat{\varphi}) = ((v, e)), \quad \forall \hat{v} \in \hat{V}.$$

Unter Beachtung von (5.2) und Lemma 5.2 ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \|e\|^2 &= L(u, u_h; \hat{e}, \hat{\varphi}) \\ &= A(u, \hat{u}, \hat{\varphi}) - A(u_h, \hat{u}_h, \hat{\varphi}) \\ &= F(\hat{\varphi}) - A(u_h, \hat{u}_h, \hat{\varphi}). \end{aligned}$$

Führt man nun zu $\hat{\varphi}$ die Quasi-Interpolierende $\hat{\varphi}_h := (\varphi_h, \chi_h) := (I_h \varphi, J_h \chi) \in \hat{V}_h$ aus Lemma 5.3 ein und berücksichtigt (5.3), so folgt:

$$\begin{aligned} \|e\|^2 &= F(\hat{\varphi} - \hat{\varphi}_h) - A(u_h, u_h, \hat{\varphi} - \hat{\varphi}_h) \\ &= -((-f + (u_h \cdot \nabla)u_h, \varphi - \varphi_h)) - a(u_h, \varphi - \varphi_h) \\ &\quad - (\nabla \cdot u_h, \chi - \chi_h) + (p_h, \nabla \cdot (\varphi - \varphi_h)). \end{aligned}$$

Weiterhin ergibt sich aus partieller Integration für $z \in V_h, v \in V$:

$$\begin{aligned} a(z, v) &= \nu \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial z_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx \\ &= - \sum_{\Omega_k \in T_h} \nu \int_{\Omega_k} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2 z_i}{\partial x_j^2} v_i dx + \sum_{\Omega_k \in T_h} \nu \int_{\partial \Omega_k} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial z_i}{\partial x_j} n_{Sj} v_i ds \\ &= -\nu \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 v_i \Delta z_i dx + \sum_{\Omega_k \in T_h} \nu \int_{\partial \Omega_k} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial z_i}{\partial n_S} v_i ds \\ &= -\nu((\Delta z, v)) + \sum_{\Omega_k \in T_h} \nu \int_{\partial \Omega_k} \frac{\partial z}{\partial n_S} \cdot v ds. \end{aligned}$$

Analog berechnet man

$$\begin{aligned}
(p_h, \nabla \cdot v) &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 p_h \frac{\partial v_i}{\partial x_i} dx \\
&= - \sum_{\Omega_k \in T_h} \int_{\Omega_k} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial p_h}{\partial x_i} v_i dx + \sum_{\Omega_k \in T_h} \int_{\partial \Omega_k} \sum_{i=1}^3 p_h v_i n_{S_i} ds \\
&= -((\nabla p_h, v)) + \sum_{\Omega_k \in T_h} \int_{\partial \Omega_k} p_h n_S \cdot v ds.
\end{aligned}$$

Definiert man nun E als die Menge aller Flächen, die die Oberfläche der Tetraeder der Zerlegung bilden, so erhält man:

$$\begin{aligned}
&(p_h, \nabla \cdot (\varphi - \varphi_h)) - a(u_h, \varphi - \varphi_h) \\
&= -((\nabla p_h, \varphi - \varphi_h)) + \sum_{S \in E} \int_S [p_h n_S] \cdot (\varphi - \varphi_h) ds \\
&\quad + \nu((\Delta u_h, \varphi - \varphi_h)) - \sum_{S \in E} \int_S \nu \left[\frac{\partial u_h}{\partial n_S} \right] \cdot (\varphi - \varphi_h) ds \\
&\leq ((\nu \Delta u_h - \nabla p_h, \varphi - \varphi_h)) + \sum_{\Omega_k \in T_h} \frac{1}{2} \left| \int_{\partial \Omega_k} [p_h n_S - \nu \frac{\partial u_h}{\partial n_S}] \cdot (\varphi - \varphi_h) ds \right| \\
&\leq ((\nu \Delta u_h - \nabla p_h, \varphi - \varphi_h)) + \sum_{\Omega_k \in T_h} \frac{1}{2} \left| \varphi - \varphi_h \right|_{0, \partial \Omega_k} \left| [p_h n_S - \nu \frac{\partial u_h}{\partial n_S}] \right|_{0, \partial \Omega_k}.
\end{aligned}$$

Dies setzt man jetzt in die obige Fehlergleichung ein:

$$\begin{aligned}
\|e\|^2 &= -((-f + (u_h \cdot \nabla) u_h, \varphi - \varphi_h)) - a(u_h, \varphi - \varphi_h) \\
&\quad - (\nabla \cdot u_h, \chi - \chi_h) + (p_h, \nabla \cdot (\varphi - \varphi_h)) \\
&\leq - \sum_{\Omega_k \in T_h} \int_{\Omega_k} (-f + (u_h \cdot \nabla) u_h + \nabla p_h - \nu \Delta u_h) \cdot (\varphi - \varphi_h) dx \\
&\quad + \sum_{\Omega_k \in T_h} \frac{1}{2} \left| \varphi - \varphi_h \right|_{0, \partial \Omega_k} \left| [p_h n_S - \nu \frac{\partial u_h}{\partial n_S}] \right|_{0, \partial \Omega_k} - \sum_{\Omega_k \in T_h} \int_{\Omega_k} \nabla \cdot u_h (\chi - \chi_h) dx.
\end{aligned}$$

Jetzt wendet man die Ungleichung von Cauchy-Schwarz, die Interpolationsabschätzungen aus Lemma 5.3 und die Ungleichung (5.14) an:

$$\begin{aligned}
\|e\|^2 &\leq \sum_{\Omega_k \in T_h} \left\| -f + (u_h \cdot \nabla)u_h + \nabla p_h - \nu \Delta u_h \right\|_{\Omega_k} \|\varphi - \varphi_h\|_{\Omega_k} \\
&\quad + \frac{1}{2} \left| \left[p_h n_S - \nu \frac{\partial u_h}{\partial n_S} \right] \right|_{0, \partial \Omega_k} \left| \varphi - \varphi_h \right|_{0, \partial \Omega_k} + \|\nabla \cdot u_h\|_{\Omega_k} \|\chi - \chi_h\|_{\Omega_k} \\
&\leq \sum_{\Omega_k \in T_h} \left\| -f + (u_h \cdot \nabla)u_h + \nabla p_h - \nu \Delta u_h \right\|_{\Omega_k} C^i h_k^2 |\varphi|_{2, \omega_k} \\
&\quad + \sum_{\Omega_k \in T_h} \frac{1}{2} \left| \left[p_h n_S - \nu \frac{\partial u_h}{\partial n_S} \right] \right|_{0, \partial \Omega_k} c C^i h_k^{\frac{3}{2}} |\varphi|_{2, \omega_k} + \|\nabla \cdot u_h\|_{\Omega_k} C^i h_k |\chi|_{1, \omega_k}.
\end{aligned}$$

Berücksichtigt man nun noch die Stabilitätskonstante $C_1^p(u, u_h)$ aus Definition 5.3, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\|e\|^2 &\leq C^i C_1^p(u, u_h) \tilde{C} \sum_{\Omega_k \in T_h} \left(h_k^2 \nu^{-1} \left\| -f + (u_h \cdot \nabla)u_h + \nabla p_h - \nu \Delta u_h \right\|_{\Omega_k} \right. \\
&\quad \left. + h_k^{\frac{3}{2}} \nu^{-1} \left| \left[p_h n_S - \nu \frac{\partial u_h}{\partial n_S} \right] \right|_{0, \partial \Omega_k} + h_k \|\nabla \cdot u_h\|_{\Omega_k} \right) \|e\|.
\end{aligned}$$

Dabei gilt $\tilde{C} := \max\{1, \frac{1}{2}c\}$. Hieraus folgt dann die Behauptung. \square

Wie schon erwähnt, bereitet neben der Existenz einer Lösung des dualen Problems aus Definition 5.2 auch die Bestimmung der Stabilitätskonstante $C_1^p(u, u_h)$ große Schwierigkeiten. Um eine Größenordnung dieser Konstante angeben zu können, schlägt R. BECKER [Bec98]⁶ im Wesentlichen zwei Möglichkeiten vor: Die erste Option sind scharfe Abschätzungen der Lösung des dualen Problems. Das wird aber nur bei einfachen Modellströmungen gelingen. In diesem Zusammenhang sind die Abschätzungen bei C. JOHNSON, R. RANNACHER [JR94]⁷ zu sehen. Zum zweiten kann man auch das duale Problem diskretisieren und aus der so bestimmten Lösung des dualen Problems die Stabilitätskonstante $C_1^p(u, u_h)$ berechnen. Dabei ersetzt man in geeigneter Weise die Lösung u durch die Näherungslösung u_h . Um den Aufwand gering zu halten, wird vorgeschlagen, das gleiche Gitter wie beim primalen Problem zu benutzen.

Numerische Experimente dazu findet man bei R. BECKER ([Bec95], Abschnitt 6.1 bzw. [Bec98], Abschnitt 3) oder bei R. RANNACHER ([Ran98], Abschnitt 4.1).

Abschließend wollen wir den Satz 5.1 auf den diskreten Raum $\hat{V}_h^1 := V_h^1 \times H_h^1$ mit

$$\begin{aligned}
V_h^1 &:= \{v \in V \mid v|_{\Omega_k} \text{ ist linear, } \Omega_k \in T_h\} \quad \text{und} \\
H_h^1 &:= \{q \in H \mid q|_{\Omega_k} \text{ ist konstant, } \Omega_k \in T_h\}
\end{aligned}$$

⁶Vgl. Abschnitt 2.

⁷Vgl. Abschnitt 4.

anwenden. Also soll die Geschwindigkeit stückweise linear und der Druck stückweise konstant approximiert werden. Diese Wahl wurde von C. JOHNSON, R. RANANCHER (vgl. [JR94], [Joh95]) vorgeschlagen. Leider erfüllt \hat{V}_h^1 aber nicht die Babuska-Brezzi-Bedingung (5.4).⁸ Aber so vereinfacht sich das Problem, denn für die Approximation (u_h, p_h) gilt

$$\nabla p_h = 0 \quad \text{und} \quad \Delta u_h = 0.$$

Berücksichtigt man außerdem, daß $p_h n_S - \nu \frac{\partial u_h}{\partial n_S}$ auf jeder Fläche $S \in E$ der Tetraeder der Zerlegung konstant ist, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \left| [p_h n_S - \nu \frac{\partial u_h}{\partial n_S}] \right|_{0, \partial \Omega_k}^2 &= \sum_{i=1}^3 \sum_{S \subset \Omega_k} \int_S [p_h n_S - \nu \frac{\partial u_{hi}}{\partial n_S}]^2 ds \\ &\leq \max_{\substack{i=1, \dots, 3 \\ S \subset \partial \Omega_k}} \left| [p_h n_S - \nu \frac{\partial u_{hi}}{\partial n_S}] \right|^2 \underbrace{\left(\sum_{i=1}^3 \int_{\partial \Omega_k} 1 ds \right)}_{\leq 3h_k^2} \\ &\leq 3h_k^2 \max_{S \subset \Omega_k} \left| [p_h n_S - \nu \frac{\partial u_h}{\partial n_S}] \right|^2. \end{aligned}$$

Hierdurch ergibt sich folgende Version von Satz 5.1:

Satz 5.2 *Unter den Voraussetzungen von Satz 5.1 gilt für $(u_h, p_h) \in V_h^1$ die a-posteriori Fehlerabschätzung:*

$$\|u - u_h\| \leq C^i C_1^p(u, u_h) \tilde{C} \sum_{\Omega_k \in T_h} \left(\nu^{-1} h_k^2 R_1(u_h, \Omega_k) + h_k R_2(u_h, \Omega_k) + \nu^{-1} h_k^{\frac{5}{2}} R_3(u_h, \Omega_k) \right), \quad (5.15)$$

wobei

$$\begin{aligned} R_1(u_h, \Omega_k) &:= \|(u_h \cdot \nabla) u_h - f\|_{\Omega_k}, \\ R_2(u_h, \Omega_k) &:= \|\nabla \cdot u_h\|_{\Omega_k} \quad \text{und} \\ R_3(u_h, \Omega_k) &:= \max_{S \subset \partial \Omega_k} \left| [p_h n_S - \nu \frac{\partial u_h}{\partial n_S}] \right| \end{aligned}$$

ist. Dabei ist $[p_h n_S - \nu \frac{\partial u_h}{\partial n_S}]$ der Sprung der Normalenableitung auf einer Seite S eines Elements $\Omega_k \in T_h$.

⁸Vgl. A. QUARTERONI, A. VALLI [QV94], Abschnitt 9.3.1.

5.3 Das instationäre Navier-Stokes Problem

5.3.1 Das dG(0) - Verfahren

In diesem Abschnitt werden Fehlerabschätzungen für die instationären Navier-Stokes Gleichungen bewiesen. Das dabei benutzte discontinuous-Galerkin Verfahren mit stückweise konstanten Ansatzfunktionen ist bereits im Abschnitt über das Anfangswertproblem eingeführt worden. Die dort definierten Notationen werden hier so weit wie möglich übernommen. Es wird nur bezüglich der Zeit diskretisiert. Man spricht deswegen auch von einer Semidiskretisierung. Der hier vorgestellte Ansatz bezieht sich auf die Arbeit von C. JOHNSON et al. [JRB95].

Zuerst sei noch einmal an die Problemstellung erinnert: Finde

$$(u, p) \in H^1((0, T); [H^2(\Omega)]^3) \times L_2((0, T); H^1(\Omega)),$$

so daß gilt

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} + (u \cdot \nabla)u - \nu \Delta u + \nabla p &= f && \text{in } \Omega \times I \\ \nabla \cdot u &= 0 && \text{in } \Omega \times I \\ u &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \times I \\ u(\cdot, 0) &= u_0 && \text{in } \Omega. \end{aligned}$$

Dabei ist $I := (0, T)$ das zu betrachtende Zeitintervall. Um dazu eine Variationsformulierung aufstellen zu können, ist noch die Definition eines geeigneten Ansatzraumes nötig. Sei dazu

$$Z := H^1((0, T); H_{div}(\Omega)),$$

wobei $H_{div}(\Omega) := \{v \in [H_0^1(\Omega)]^3 : \nabla \cdot v = 0\}$ der Sobolevraum der divergenzfreien Funktionen ist. Es ergibt sich dann folgende Formulierung: Finde $u \in Z^{u_0} := \{v \in Z : v(0) = u_0\}$, so daß gilt:

$$\left(\frac{du}{dt}, v\right)_I + b_I(u; u, v) + a_I(u, v) = ((f, v))_I, \quad \forall v \in Z^0. \quad (5.16)$$

Hierbei ist

$$\left((v, w)\right)_I := \int_I \int_{\Omega} v \cdot w dx dt, \quad b_I(u; v, w) := \int_I \int_{\Omega} (u \cdot \nabla)v \cdot w dx dt \quad \text{und}$$

$$a_I(v, w) := \nu \int_I \int_{\Omega} \sum_{i=1}^3 \nabla v_i \cdot \nabla w_i dx dt \quad \text{mit } u, v, w \in Z.$$

Führt man noch die Notationen

$$\tilde{A}(u; v, w) := \left(\frac{du}{dt}, w\right)_I + b_I(u; v, w) + a_I(v, w) + ((v(0), w(0))) \quad \text{und}$$

$$F(v) := ((f, v))_I + ((u^0, v(0)))$$

ein, so läßt sich (5.16) kurz schreiben als

$$\tilde{A}(u; u, v) = F(v), \quad \forall v \in Z. \quad (5.17)$$

Leider ist die Existenz einer solchen Lösung nicht auf dem ganzen Zeitintervall I gesichert (vgl. dazu Satz 3.2). Nehmen wir jedoch dennoch an, daß eine solche Lösung eindeutig existiert.

Definiert man nun eine Zerlegung des Intervalls $(0, T)$ durch $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{N+1} = T$, Zeitintervalle $I_n := (t_n, t_{n+1})$ und die Zeitschrittweite $h(t)$ durch $h(t) := h_n := t_{n+1} - t_n$ für $t \in I_n$, so läßt sich folgendes dG(0)-Verfahren für (5.17) aufstellen: Finde $u_h \in Z_h$, so daß gilt

$$A_h(u_h; u_h, v) = F(v), \quad \forall v \in Z_h, \quad (5.18)$$

wobei

$$A_h(u; v, w) := \sum_{n=0}^N \left\{ \left(\left(\frac{dv}{dt}, w \right) \right)_{I_n} + a_{I_n}(v, w) + b_{I_n}(u; v, w) \right\} + \sum_{n=1}^N \left(([v^n], w_+^n) \right) + \left((v_+^0, w_+^0) \right)$$

und $Z_h := \{v \in W := L_2((0, T); H_{div}(\Omega)) : v \text{ ist konstant auf jedem } I_n\}$ ist. Natürlich erfüllt eine Lösung von (5.17) auch die Gleichung (5.18).

5.3.2 A-posteriori Fehlerabschätzung

Untersucht wird eine Fehlerabschätzung für den Diskretisierungsfehler $e := u - u_h$. Dabei ist u die Lösung der Variationsformulierung (5.16) und u_h ist eine Lösung von (5.18). Im Wesentlichen benutzt man die Vorgehensweise der vorherigen Abschnitte. Wir definieren zuerst wieder ein linearisiertes duales Problem:

Definition 5.4 Seien $g \in [L^2(\Omega)]^3$ und $\hat{T} \in (0, T]$. Finde $\varphi \in Z$, so daß gilt:

$$\tilde{L}(u, u_h; v, \varphi, \hat{T}) = ((g, v(\hat{T}))), \quad \forall v \in Z \quad (5.19)$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{L}(u, u_h; v, \varphi, \hat{T}) := & \sum_{n=0}^N \left\{ - \left(\left(\frac{d\varphi}{dt}, v \right) \right)_{I_n} - \left((u \cdot \nabla) \varphi - \nabla u_h \cdot \varphi, v \right)_{I_n} + a_{I_n}(\varphi, v) \right\} \\ & - \sum_{n=1}^N \left(([\varphi^n], v_-^n) \right) + \left((v(\hat{T}), \varphi(\hat{T})) \right). \end{aligned}$$

Bemerkung 5.3

- Für $u = u_h$ ist (5.19) das rückwärts in die Zeit gerichtete, duale Problem des linearisierten Stabilitätsproblems (4.5) in Variationsformulierung.

- Die Existenz einer Lösung von (5.19) ist a-priori nicht gesichert.
- Bei R. VERFÜRTH [Ver98a] findet man ein ähnliches Hilfsproblem. Dort wird für jede Wahl von (w, r) gefordert, daß

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} - \nu \Delta v + (u \cdot \nabla)u - \nabla q &= w \quad \text{in } \Omega \times (0, T) \\ \nabla \cdot v &= r \quad \text{in } \Omega \times (0, T) \\ v &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \times (0, T) \\ v(\cdot, 0) &= 0 \quad \text{in } \Omega \end{aligned}$$

eine eindeutige Lösung (v, q) besitzt.

Analog zum vorherigen Abschnitt definieren wir für das duale Problem (5.19) eine *starke Stabilitätskonstante*. Wir nennen eine Stabilitätskonstante *stark*, wenn sie auch Ableitungen kontrolliert.

Definition 5.5 Die starke Stabilitätskonstante $C_1^p(T, u, u_h)$ ist definiert durch

$$C_1^p(T, u, u_h) := \sup_{g \in [L^2(\Omega)]^3 - \{0\}} \sup_{0 \leq \hat{T} \leq T} \frac{\max \left(\|\varphi\|_{(0, \hat{T})}, \sup_{0 < \epsilon \leq e^{-1}} |\log(\epsilon)|^{-\frac{1}{2}} \int_0^{\hat{T}-\epsilon} \left\| \frac{d\varphi}{dt} \right\| dt \right)}{\|g\|}. \quad (5.20)$$

Dabei ist φ eine Lösung von (5.19) mit g auf der rechten Seite.

Bemerkung 5.4 In der Definition der starken Stabilitätskonstanten $C_1^p(T, u, u_h)$ ist die schwache Stabilitätskonstante $C_0^p(T, u, u_h)$ definiert durch

$$C_0^p(T, u, u_h) := \sup_{g \in [L^2(\Omega)]^3 - \{0\}} \sup_{0 \leq \hat{T} \leq T} \frac{\|\varphi\|_{(0, \hat{T})}}{\|g\|} \quad (5.21)$$

enthalten. φ ist wieder eine Lösung von (5.19). Die schwache Stabilitätskonstante, die in Abschnitt 4.6 auftrat, läßt sich also durch die entsprechende starke nach oben abschätzen.

Um die Fehlerabschätzung zeigen zu können, benötigen wir noch folgende Approximation $\bar{\varphi} \in Z_h$ eines Elements $\varphi \in Z$:

Definition 5.6 Zu $\varphi \in Z$ definieren wir ein Element $\bar{\varphi} \in Z_h$ so, daß für alle $x \in \Omega$ $\bar{\varphi}(x)$ auf jedem Intervall I_n den Mittelwert von $\varphi(x)$ darstellt. Es gilt also für $n = 0, \dots, N$; $x \in \Omega$:

$$\int_{I_n} \varphi(x, t) dt = \int_{I_n} \bar{\varphi}(x) dt. \quad (5.22)$$

Interessant ist folgende Eigenschaft:

Lemma 5.5 *Seien $\varphi \in Z$ und $\psi \in Z_h$ gegeben. Dann folgt*

$$((\psi, \varphi - \bar{\varphi}))_{I_n} = 0, \quad n = 0, \dots, N.$$

Beweis: Aus der Eigenschaft (5.22) folgt

$$((\psi, \varphi - \bar{\varphi}))_{I_n} = \int_{\Omega} \psi \overbrace{\int_{I_n} \varphi - \bar{\varphi} dt}^{=0} dx = 0.$$

□

Außerdem gelten für das so eingeführte Element $\bar{\varphi}$ die Interpolationsabschätzungen:

Lemma 5.6 *Sei $\varphi \in H^1((0, T); [H_0^1(\Omega)]^3)$ gegeben. Es gilt für $\bar{\varphi}$:*

$$\|\varphi - \bar{\varphi}\|_{I_n} \leq \sqrt{3} \int_{I_n} \left\| \frac{d\varphi}{dt}(\cdot, \tau) \right\| d\tau, \quad n = 0, \dots, N, \quad (5.23)$$

$$\|\varphi - \bar{\varphi}\|_{I_N} \leq 2\|\varphi\|_{I_N}, \quad (5.24)$$

wobei $\|\varphi\|_I := \max_{t \in I} \|\varphi(\cdot, t)\|$ ist.⁹

Beweis: Nehmen wir zuerst an, daß φ in $C^1((0, T); [H_0^1(\Omega)]^3)$ liegt. Dann folgt für $t \in I_n$ mit Lemma 2.4, der Hölder-Ungleichung und durch mehrfaches Anwenden des Satzes von Fubini:

$$\begin{aligned} \|\varphi(\cdot, t) - \bar{\varphi}(\cdot, t)\|^2 &= \int_{\Omega} |\varphi(x, t) - \bar{\varphi}(x, t)|^2 dx \\ &\leq \int_{\Omega} 3 \left(\int_{I_n} \left| \frac{d\varphi}{dt}(x, \tau) \right| d\tau \right)^2 dx \\ &\leq 3 \int_{\Omega} \int_{I_n} \int_{I_n} \left| \frac{d\varphi}{dt}(x, \tau) \right| \left| \frac{d\varphi}{dt}(x, \sigma) \right| d\tau d\sigma dx \\ &\leq 3 \int_{I_n} \int_{I_n} \left(\int_{\Omega} \left| \frac{d\varphi}{dt}(x, \tau) \right| \left| \frac{d\varphi}{dt}(x, \sigma) \right| dx \right) d\tau d\sigma \\ &\leq 3 \int_{I_n} \int_{I_n} \left(\int_{\Omega} \left| \frac{d\varphi}{dt}(x, \tau) \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} \left| \frac{d\varphi}{dt}(x, \sigma) \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} d\tau d\sigma \\ &\leq 3 \int_{I_n} \int_{I_n} \left\| \frac{d\varphi}{dt}(\cdot, \tau) \right\| \left\| \frac{d\varphi}{dt}(\cdot, \sigma) \right\| d\tau d\sigma \\ &\leq 3 \left(\int_{I_n} \left\| \frac{d\varphi}{dt}(\cdot, \tau) \right\| d\tau \right)^2. \end{aligned}$$

⁹In C. JOHNSON, R. RANNACHER, M. BOMAN [JRB95] werden die Abschätzungen (5.23) und (5.24) ohne Konstante angegeben. Zumindest (5.24) gilt im Allgemeinen dann aber nicht.

Hiermit folgt die erste Ungleichung aus

$$\|\varphi - \bar{\varphi}\|_{I_n}^2 = \sup_{t \in I_n} \|\varphi(\cdot, t) - \bar{\varphi}(\cdot, t)\|^2 \leq 3 \left(\int_{I_n} \left\| \frac{d\varphi}{dt}(\cdot, \tau) \right\| d\tau \right)^2.$$

Durch Grenzübergang ergibt sich dann die Behauptung, da $C^1((0, T); [H_0^1(\Omega)]^3) \cap H^1((0, T); [H_0^1(\Omega)]^3)$ nach Satz 1.15 dicht in $H^1((0, T); [H_0^1(\Omega)]^3)$ liegt.

Wie man leicht zeigt, gilt $\|\bar{\varphi}\|_{I_N} \leq \|\varphi\|_{I_N}$. Damit ergibt sich die zweite Ungleichung aus

$$\|\varphi - \bar{\varphi}\|_{I_N} \leq \|\varphi\|_{I_N} + \|\bar{\varphi}\|_{I_N} \leq 2\|\varphi\|_{I_N}.$$

□

Nun wird der Zusammenhang zwischen dem dualen Problem (5.19) und den Variationsgleichungen (5.16) und (5.18) hergestellt:

Lemma 5.7 *Es gilt für alle $\varphi \in Z$:*

$$\tilde{L}(u, u_h; e, \varphi, T) = \tilde{A}(u; u, \varphi) - A_h(u_h; u_h, \varphi). \quad (5.25)$$

Beweis: Sei $\varphi \in Z$ beliebig vorgegeben. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} & \tilde{A}(u; u, \varphi) - A_h(u_h; u_h, \varphi) \\ = & \sum_{n=0}^N \left[\left(\left(\frac{du}{dt}, \varphi \right) \right)_{I_n} + \left((u \cdot \nabla)u, \varphi \right)_{I_n} + a_{I_n}(u, \varphi) \right] + ((u(0), \varphi(0))) - ((u_{h+}^0, \varphi_+^0)) \\ & - \sum_{n=0}^N \left[\left(\left(\frac{du_h}{dt}, \varphi \right) \right)_{I_n} + \left((u_h \cdot \nabla)u_h, \varphi \right)_{I_n} + a_{I_n}(u_h, \varphi) \right] - \sum_{n=1}^N (([u_h^n], \varphi_+^n)). \end{aligned}$$

Faßt man nun die beiden Summenterme zusammen, führt eine partielle Integration des Terms $((\frac{d(u-u_h)}{dt}, \varphi))_{I_n}$ bezüglich der Zeit durch (vgl. Satz 1.16) und benutzt das Lemma 5.1, so erhält man

$$\begin{aligned} & \tilde{A}(u; u, \varphi) - A_h(u_h; u_h, \varphi) \\ = & \sum_{n=0}^N \left[a_{I_n}(\varphi, e) - \left(((u \cdot \nabla)\varphi - \nabla u_h \cdot \varphi, e) \right)_{I_n} - \left(\left(\frac{d\varphi}{dt}, e \right) \right)_{I_n} \right] + ((u(0), \varphi(0))) \\ & - ((u_{h+}^0, \varphi_+^0)) - \sum_{n=1}^N (([u_h^n], \varphi_+^n)) + \sum_{n=0}^N \left[((e_-^{n+1}, \varphi_-^{n+1})) - ((e_+^n, \varphi_+^n)) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^N \left[a_{I_n}(\varphi, e) - (((u \cdot \nabla)\varphi - \nabla u_h \cdot \varphi, e))_{I_n} - \left(\left(\frac{d\varphi}{dt}, e \right) \right)_{I_n} \right] \\
&\quad + ((e_+^0, \varphi_+^0)) + \sum_{n=1}^N (([e^n], \varphi_+^n)) \\
&\quad + \left[((e_-^{N+1}, \varphi_-^{N+1})) - ((e_+^0, \varphi_+^0)) + \sum_{n=1}^N \{ -(([e^n], \varphi_+^n)) - ((e_-^n, [\varphi^n])) \} \right] \\
&= \sum_{n=0}^N \left[a_{I_n}(\varphi, e) - (((u \cdot \nabla)\varphi - \nabla u_h \cdot \varphi, e))_{I_n} - \left(\left(\frac{d\varphi}{dt}, e \right) \right)_{I_n} \right] \\
&\quad - \sum_{n=1}^N (([\varphi^n], e_-^n)) + ((e(T), \varphi(T))) \\
&= \tilde{L}(u, u_h; e, \varphi, T),
\end{aligned}$$

da $[e] = -[u_h]$ ist. Denn u ist nach Satz 1.16 bezüglich der durch $((\cdot, \cdot))$ definierten Topologie stetig. \square

Nach diesen Vorüberlegungen sind wir in der Lage, die a-posteriori Fehlerabschätzung zu beweisen.

Satz 5.3 *Sei u eine Lösung des exakten Navier-Stokes Problems (5.17) und u_h die semidiskretisierte $dG(0)$ -Lösung definiert durch die Gleichung (5.18). Existiert für das duale Problem (5.19) eine Lösung, so ergibt sich mit $L_h := \max_{0 \leq n \leq N} (1 + |\log(h_n)|^{\frac{1}{2}})$*

$$\|u(T) - u_h(T)\| \leq 2L_h C_1^p(T, u, u_h) \left(\| [u_h] \|_I + \min(2\|hf\|_I, \sqrt{3}\|h^2 \frac{df}{dt}\|_I) \right), \quad (5.26)$$

wobei $[u_h] = [u_h^n]$ auf I_n ist.

Beweis: Die Idee des Beweises ist wieder, den Fehler $e(T) = u(T) - u_h(T)$ durch das duale Problem darzustellen. Durch Spezifizierung der rechten Seite in (5.19), erhält man das duale Problem: Finde $\varphi \in Z$, so daß

$$\tilde{L}(u, u_h; v, \varphi, T) = ((v(T), e(T))), \quad \forall v \in Z$$

gilt. Setzt man nun $v = e$ und integriert partiell, so erhält man :

$$\begin{aligned}
\|e(\cdot, T)\|^2 &= \tilde{L}(u, u_h; e, \varphi, T) = \tilde{A}(u; u, \varphi) - A_h(u_h; u_h, \varphi) \\
&= F(\varphi) - A_h(u_h; u_h, \varphi) = F(\varphi - \bar{\varphi}) - A_h(u_h; u_h, \varphi - \bar{\varphi}) \\
&= - \sum_{n=0}^N \left(\left(\left(\frac{du_h}{dt} + (u_h \cdot \nabla)u_h - f, \varphi - \bar{\varphi} \right) \right)_{I_n} + a_{I_n}(u_h, \varphi - \bar{\varphi}) \right) \\
&\quad - \sum_{n=0}^N (([u_h^n], (\varphi - \bar{\varphi})_+^n)),
\end{aligned}$$

wobei u_{h-}^0 definiert ist durch $u_{h-}^0 := u^0$ und $\bar{\varphi} \in Z_h$ durch (5.22) bestimmt ist. Definiert man analog $\bar{f} \in Z_h$ nach (5.22), so ergibt sich mit Hilfe von Lemma 5.5 aus $((\bar{f}, \varphi - \bar{\varphi}))_{I_n} = 0$, daß

$$\|e(\cdot, T)\|^2 = \sum_{n=0}^N ((f - \bar{f}, \varphi - \bar{\varphi}))_{I_n} - \sum_{n=0}^N (([u_h^n], (\varphi - \bar{\varphi})_+^n))$$

gilt. Wendet man hierauf die Ungleichung von Cauchy-Schwarz an, so erhält man:

$$\begin{aligned} \|e(\cdot, T)\|^2 &= \sum_{n=0}^N \int_{I_n} \int_{\Omega} (f - \bar{f}) \cdot (\varphi - \bar{\varphi}) dx dt - \sum_{n=0}^N (([u_h^n], (\varphi - \bar{\varphi})_+^n)) \\ &\leq \sum_{n=0}^N \int_{I_n} \|f - \bar{f}\| \|\varphi - \bar{\varphi}\| dt - \sum_{n=0}^N (([u_h^n], (\varphi - \bar{\varphi})_+^n)) \\ &\leq \sum_{n=0}^N \|h(f - \bar{f})\|_{I_n} \|\varphi - \bar{\varphi}\|_{I_n} + \sum_{n=0}^N \|[u_h^n]\| \|\varphi - \bar{\varphi}\|_{I_n}. \end{aligned}$$

Diese Ungleichung kann man auf zwei verschiedene Arten weiter abschätzen. Beide Fälle ergeben dann zusammen die Behauptung:

Fall 1 Im ersten Fall benutzt man die beiden Interpolationsabschätzungen (5.23) und (5.24):

$$\begin{aligned} \|e(\cdot, T)\|^2 &\leq \sqrt{3} \sum_{n=0}^{N-1} \left[\int_{I_n} \sqrt{3} \|h \frac{df}{dt}\| dt + \|[u_h]\|_{I_n} \right] \int_{I_n} \left\| \frac{d\varphi}{dt} \right\| dt \\ &\quad + 2 \left[\int_{I_N} \sqrt{3} \|h \frac{df}{dt}\| dt + \|[u_h]\|_{I_N} \right] \|\varphi\|_{I_N} \\ &\leq 2 \left[\sqrt{3} \|h^2 \frac{df}{dt}\|_I + \|[u_h]\|_I \right] \left(\|\varphi\|_{I_N} + \sum_{n=0}^{N-1} \int_{I_n} \left\| \frac{d\varphi}{dt} \right\| dt \right) \\ &\leq 2 \left[\sqrt{3} \|h^2 \frac{df}{dt}\|_I + \|[u_h]\|_I \right] \left(\|\varphi\|_{I_N} + \int_0^{t_N} \left\| \frac{d\varphi}{dt} \right\| dt \right). \end{aligned}$$

Bezieht man noch die Definition der Stabilitätskonstante $C_1^p(T, u, u_h)$ aus Definition 5.5 mit ein, so folgt

$$\begin{aligned} \|e(\cdot, T)\|^2 &\leq 2 \left[\sqrt{3} \|h^2 \frac{df}{dt}\|_I + \|[u_h]\|_I \right] \left[|\log(h_N)|^{\frac{1}{2}} + 1 \right] C_1^p(T, u, u_h) \|e(\cdot, T)\| \\ &\leq 2L_h C_1^p(T, u, u_h) \left[\sqrt{3} \|h^2 \frac{df}{dt}\|_I + \|[u_h]\|_I \right] \|e(\cdot, T)\|. \end{aligned}$$

Fall 2 In diesem Fall benutzt man die Interpolationsabschätzung $\|f - \bar{f}\|_I \leq 2\|f\|_I$ und erhält analog zum Fall 1:

$$\begin{aligned} \|e(\cdot, T)\|^2 &\leq [2\|hf\|_I + \|[u_h]\|_I] \left(2\|\varphi\|_{I_N} + \sqrt{3} \int_0^{t_N} \left\| \frac{d\varphi}{dt} \right\| dt \right) \\ &\leq 2[2\|hf\|_I + \|[u_h]\|_I] L_h C_1^p(T, u, u_h) \|e(\cdot, T)\|. \end{aligned}$$

Setzt man beide Ungleichungen zusammen, ergibt sich die Behauptung. \square

Wie man sieht, gilt die Ungleichung für alle $t_i \leq T$. Deshalb kann man folgenden Satz formulieren:

Satz 5.4 *Sei u eine Lösung des exakten Navier-Stokes Problems (5.17) und u_h die semidiskretisierte $dG(0)$ -Lösung definiert durch die Gleichung (5.18). Existiert für das duale Problem (5.19) eine Lösung, so gilt mit $L_h := \max_{0 \leq n \leq N} (1 + |\log(h_n)|^{\frac{1}{2}})$ und $|u - u_h|_I := \max_{i=0, \dots, N+1} \|u(t_i) - u_h(t_i)\|$*

$$|u - u_h|_I \leq 2L_h C_1^p(T, u, u_h) \left(\|[u_h]\|_I + \min(2\|hf\|, \sqrt{3}\|h^2 \frac{df}{dt}\|_I) \right), \quad (5.27)$$

wobei $[u_h] = [u_h^n]$ auf I_n ist.

5.3.3 A-priori Fehlerabschätzung

Mit Hilfe der gleichen Technik ist es auch möglich, eine a-priori Fehlerabschätzung zu beweisen. Eine a-priori Fehlerabschätzung wird dadurch charakterisiert, daß die rechte Seite von der exakten Lösung der Navier-Stokes Gleichungen (5.16) abhängt und nicht von der diskreten Lösung aus Gleichung (5.18).

Als erstes definieren wir wieder ein duales Problem. Zu beachten ist, daß im Gegensatz zum letzten Abschnitt dieses Problem endlich-dimensional ist.

Definition 5.7 *Bestimme $\varphi_h \in Z_h$, so daß gilt:*

$$\tilde{L}(u, u_h; v, \varphi_h, t_{N+1}) = ((v_-^{N+1}, \bar{u}_-^{N+1} - u_{h-}^{N+1})), \quad \forall v \in Z_h, \quad (5.28)$$

wobei \bar{u} die Interpolation gemäß Definition 5.6 ist und $\tilde{L}(u, u_h; v, \varphi_h, t_{N+1})$ wie in (5.19) definiert ist.

Das neue diskrete duale Problem erfordert wieder eine Stabilitätskonstante:

Definition 5.8 *Die Stabilitätskonstante $C_1^d(T, u, u_h)$ ist gegeben durch*

$$C_1^d(T, u, u_h) := \sup_{\varphi^0 \in [L^2(\Omega)]^3 - \{0\}} \max_{\hat{N} \in \{1, \dots, N\}} \frac{\max \left(1, \|\varphi_h\|_{(0, t_{\hat{N}+1})}, |\log(h_{\hat{N}})|^{-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\hat{N}} \|\varphi_h^n\| \right)}{\|\varphi^0\|}. \quad (5.29)$$

Dabei ist φ_h die Lösung des diskreten dualen Problems (5.28), wobei φ_0 anstatt $\bar{u}_-^{N+1} - u_{h-}^{N+1}$ auf der rechten Seite eingesetzt wird und N durch \hat{N} ersetzt wird.

Es läßt sich jetzt folgende Fehlerabschätzung beweisen:

Satz 5.5 *Sei u eine Lösung der exakten Navier-Stokes Gleichungen (5.17) und u_h die semidiskretisierte $dG(0)$ -Lösung definiert durch die Gleichung (5.18). Existiert dann noch eine Lösung der Gleichung (5.28), so gilt*

$$\|u(T) - u_h(T)\| \leq \sqrt{3}C_1^d(T, u, u_h) \|h \frac{du}{dt}\|_I \left(\sqrt{3}T \|h \frac{d\nabla u}{dt}\|_\infty + L_h + 1 \right), \quad (5.30)$$

wobei $\|u\|_\infty = \sup_{(t,x) \in I \times \Omega} |u(t, x)|$ ist.

Beweis: Zuerst definiert man zu u ein \bar{u} gemäß Definition 5.6. Dann nutzt man die Repräsentation des Fehlers $\hat{e} := \bar{u} - u_h$ durch (5.28):

$$\|\bar{e}(T)\|^2 = \|\bar{u}_-^{N+1} - u_h^{N+1}\|^2 = \tilde{L}(u, u_h; \bar{e}, \varphi_h, T).$$

Aus der Galerkin-Orthogonalität und Nullergänzung ergibt sich unter Berücksichtigung von Lemma 5.7

$$\begin{aligned} \|\bar{e}(T)\|^2 &= \tilde{L}(u, u_h; \bar{e}, \varphi_h, T) \overbrace{- \tilde{A}(u; u, \varphi_h) + A_h(u_h; u_h, \varphi_h)}^{=0} \\ &= \tilde{L}(u, u_h; \bar{u} - u_h, \varphi_h, T) - \tilde{L}(u, u_h; u - u_h, \varphi_h, T) \\ &= \tilde{L}(u, u_h; \bar{u} - u, \varphi_h, T) \\ &= \sum_{n=0}^N \left[- \left(\left(\frac{d\varphi_h}{dt}, \bar{u} - u \right)_{I_n} - \left((u \cdot \nabla) \varphi_h - \nabla u_h \cdot \varphi_h, \bar{u} - u \right)_{I_n} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \nu \left((\nabla \varphi_h, \nabla(\bar{u} - u)) \right)_{I_n} \right] - \sum_{n=1}^N \left(([\varphi_h^n], \bar{u}_-^n - u_-^n) \right) \\ &\quad + \left((\bar{u}(T) - u(T), \varphi_h(T)) \right). \end{aligned}$$

Nun nutzt man die Tatsache, daß nach Lemma 5.5 $\left((\nabla u_h \cdot \varphi_h, \bar{u} - u) \right)_{I_n} = 0$ und $\left((\nabla \varphi_h, \nabla(\bar{u} - u)) \right)_{I_n} = 0$ für alle $n \in \{0, \dots, N\}$ ist. Außerdem ist nach Definition $\frac{d\varphi_h}{dt} = 0$. Es folgt

$$\begin{aligned} \|\bar{e}(T)\|^2 &= \sum_{n=0}^N - \left((u \cdot \nabla) \varphi_h, \bar{u} - u \right)_{I_n} \\ &\quad - \sum_{n=1}^N \left(([\varphi_h^n], \bar{u}_-^n - u_-^n) \right) + \left((\bar{u}(T) - u(T), \varphi_h(T)) \right). \end{aligned}$$

Aus partieller Integration (1.9) und der Inkompressibilität von u und \bar{u} , folgt nun

$$\begin{aligned} \|\bar{e}(T)\|^2 &= \sum_{n=0}^N \int_{I_n} \overbrace{\sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} \varphi_{hi} \frac{\partial u_j}{\partial x_j} (\bar{u}_i - u_i) dx dt}^{=0} + \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} \overbrace{\varphi_{hi} u_j \frac{\partial (\bar{u}_i - u_i)}{\partial x_j} dx dt}^{= ((\varphi_h \cdot \nabla(\bar{u} - u), u))} \\ &\quad - \sum_{n=1}^N \left(([\varphi_h^n], \bar{u}_-^n - u_-^n) \right) + \left((\bar{u}(T) - u(T), \varphi_h(T)) \right). \end{aligned}$$

Außerdem gilt nach Lemma 5.5 auch $((\varphi_h \cdot \nabla(u - \bar{u}), \bar{u}))_{I_n} = 0$. Ergänzt man dieses, so folgt

$$\begin{aligned} \|\bar{e}(T)\|^2 &= - \sum_{n=0}^N ((\varphi_h \cdot \nabla(u - \bar{u}), u - \bar{u}))_{I_n} \\ &\quad - \sum_{n=1}^N (([\varphi_h^n], \bar{u}_-^n - u_-^n)) + ((\bar{u}(T) - u(T), \varphi_h(T))). \end{aligned}$$

Jetzt wird die rechte Seite mit Hilfe der Ungleichung von Cauchy-Schwarz nach oben abgeschätzt.

$$\begin{aligned} \|\bar{e}(T)\|^2 &\leq \sum_{n=0}^N \int_{I_n} \|u - \bar{u}\| \|\varphi_h \cdot \nabla(u - \bar{u})\| dt + \sum_{n=1}^N \|[\varphi_h^n]\| \|u - \bar{u}\|_{I_{n-1}} \\ &\quad + \|\varphi_{h_-}^{N+1}\| \|u - \bar{u}\|_{I_N} \\ &\leq \left(T \|\varphi_h\|_I \|\nabla(u - \bar{u})\|_\infty + \sum_{n=1}^N \|[\varphi_h^n]\| + \|\varphi_{h_-}^{N+1}\| \right) \|u - \bar{u}\|_I \end{aligned}$$

Beachtet man noch die Stabilitätskonstante aus (5.29) und nutzt die Interpolationsabschätzungen (5.23) und (5.24), so folgt

$$\|\bar{e}(T)\|^2 \leq \sqrt{3} C_1^d(T, u, u_h) \|\bar{e}(T)\| \|h \frac{du}{dt}\|_I \left[\sqrt{3} T \|h \frac{d\nabla u}{dt}\|_\infty + \overbrace{|\log(h_N)|^{\frac{1}{2}} + 1}^{\leq L_h} \right].$$

Nach Nullergänzung und der Dreiecksungleichung ergibt sich aus

$$\begin{aligned} \|e(T)\| &= \|u(T) - u_h(T)\| \leq \|u(T) - \bar{u}(T)\| + \|\bar{u}(T) - u_h(T)\| \\ &\leq \sqrt{3} \|h \frac{du}{dt}\|_I + \sqrt{3} C_1^d(T, u, u_h) \|h \frac{du}{dt}\|_I \left[\sqrt{3} T \|h \frac{d\nabla u}{dt}\|_\infty + L_h \right] \\ &\leq \sqrt{3} C_1^d(T, u, u_h) \|h \frac{du}{dt}\|_I \left[\sqrt{3} T \|h \frac{d\nabla u}{dt}\|_\infty + L_h + 1 \right] \end{aligned}$$

die Behauptung, da $C_1^d(T, u, u_h) \geq 1$ ist. \square

Kapitel 6

Anwendung auf eine spezielle Rohrströmung

In diesem Kapitel wird anhand eines Beispiels gezeigt, daß es durch Ausnutzen spezieller Eigenschaften einer Strömung möglich ist, scharfe Abschätzungen der Stabilitätskonstante zu beweisen. Hierdurch werden realistische a-posteriori Fehlerschätzer ermöglicht. Das nachfolgende Beispiel entstammt der Arbeit von C. JOHNSON et al. [JRB95]¹. Allerdings wird dort die Abschätzung der Stabilitätskonstante nur für ein wesentlich einfacheres Beispiel gezeigt.

Betrachtet wird dazu der Fall einer Strömung in einem unendlich langen geraden Rohr $\Omega = \mathbf{R} \times \omega$, wobei ω der Querschnitt des Rohres in der (x_2, x_3) -Ebene ist und die Längsachse des Rohres entlang der x_1 -Achse orientiert ist.

Das Problem sei speziell reduziert auf eine Lösung der Navier-Stokes Gleichungen mit dem Geschwindigkeitsvektor $u = (u_1, 0, 0)$ und dem Druck $p = p(t)$. u_1 ist dabei von der Form $u_1 = u_1(x_2, x_3, t)$.

Das Navier-Stokes Problem vereinfacht sich dann zu

$$\frac{du_1}{dt} - \nu \Delta u_1 = f_1 \quad \text{in } \omega \times I, \quad u_1 = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \times I, \quad (6.1)$$

wobei I das Zeitintervall $(0, T)$ und $f = (f_1, 0, 0)$ mit $f_1 = f_1(x_2, x_3, t)$ die einwirkende Kraft ist.

Die physikalische Situation könnte ein langes vertikales mit einem Fluid gefülltes Rohr sein, auf das die Gravitationskräfte wirken. Denkbar wäre auch ein langes rotierendes Rohr mit variabler Rotationsgeschwindigkeit. (u, p) wird „*parallele Rohrströmung*“ genannt.

Die Stabilitätskonstante $C_p^1(T, u, u_h)$ aus Definition 5.5 ergibt sich dann aus der Lösung φ des dualen Problems (5.19):

$$\tilde{L}(u, u_h; v, \varphi, T) = ((\varphi^0, v(T))), \quad \forall v \in Z$$

¹Vgl. Abschnitt 4.2 und Abschnitt 5.6.

mit

$$\begin{aligned} \tilde{L}(u, u_h; v, \varphi, T) &:= \sum_{n=0}^N \left\{ -\left(\frac{d\varphi}{dt}, v\right)_{I_n} - \left(\left(u \cdot \nabla\right)\varphi - \nabla u_h \cdot \varphi, v\right)_{I_n} + a_{I_n}(\varphi, v) \right\} \\ &\quad - \sum_{n=1}^N \left(([\varphi^n], v_-^n) + (v(T), \varphi(T)) \right), \end{aligned}$$

wobei $\varphi^0 \in [L^2(\Omega)]^3$ variiert wird.

Um nun einen Zusammenhang mit den Stabilitätsbetrachtungen aus Kapitel 4 herzustellen, definiert man zu φ zusätzlich einen Druck q . Wir nehmen an, daß φ und q unabhängig von x_1 sind und daß die Elemente des Ansatzraumes Z_h x_1 -unabhängig sind. Außerdem gelte für alle $u_h \in Z_h$ $u_{hi} = 0$ mit $i = 2, 3$. Ist nun (φ, q) genügend regulär, dann erhält man die Lösung φ des dualen Problems aus der Lösung (φ, q) des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} -\frac{d\varphi_1}{dt} - \nu \Delta \varphi_1 &= 0 \quad \text{in } \omega \times I \\ -\frac{d\varphi_2}{dt} - \nu \Delta \varphi_2 + \frac{\partial u_{h1}}{\partial x_2} \varphi_1 + \frac{\partial q}{\partial x_2} &= 0 \quad \text{in } \omega \times I \\ -\frac{d\varphi_3}{dt} - \nu \Delta \varphi_3 + \frac{\partial u_{h1}}{\partial x_3} \varphi_1 + \frac{\partial q}{\partial x_3} &= 0 \quad \text{in } \omega \times I \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3} &= 0 \quad \text{in } \omega \times I \\ \varphi &= 0 \quad \text{auf } \partial\omega \times I \\ \varphi(\cdot, T) &= \varphi^0 \quad \text{in } \omega, \end{aligned} \tag{6.2}$$

denn wegen $(u \cdot \nabla)\varphi = 0$ ist die Variationsformulierung von (6.2) genau das obige duale Problem. Betrachtet man (6.2), so stellt man fest, daß sich die Gleichungen durch die vorgegebenen Restriktionen entkoppeln lassen.

Um eine obere Schranke der starken Stabilitätskonstante beweisen zu können, ist es hilfreich, die Notation $\tilde{\varphi} := (\varphi_2, \varphi_3)$ mit $\tilde{\varphi}^0 := \tilde{\varphi}(\cdot, T)$ einzuführen. Damit läßt sich folgendes Lemma zeigen:

Lemma 6.1 *Für die Lösung φ von (6.2) gilt*

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|\varphi_1(\cdot, t)\| \leq \|\varphi_1^0\|, \tag{6.3}$$

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|\tilde{\varphi}(\cdot, t)\| \leq \|\tilde{\varphi}^0\| + 2TK\|\varphi_1^0\|, \tag{6.4}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{T-\epsilon} \left\| \frac{d\varphi_1}{dt} \right\| dt &\leq \frac{1}{2} (|\log \epsilon| + T - 1)^{\frac{1}{2}} \|\varphi_1^0\|, \\ \int_0^{T-\epsilon} \left\| \frac{d\tilde{\varphi}}{dt} \right\| dt &\leq \sqrt{8} (|\log \epsilon| + T - 1)^{\frac{1}{2}} (\|\tilde{\varphi}^0\|^2 + K^2 T \|\varphi_1^0\|^2)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

wobei $K := \|\nabla u_{h1}\|_{L^\infty(\omega \times I)}$ und $0 < \epsilon \leq e^{-1}$ ist. Außerdem seien $T, TK \geq 1$ angenommen und $\|\cdot\|$ sei durch $\|\cdot\|_{L_2(\omega)}$ definiert.

Beweis:

(i) Behauptung: $\max_{0 < t < T} \|\varphi_1(\cdot, t)\| \leq \|\varphi_1^0\|$

Zuerst multipliziert man die erste Gleichung von (6.2) mit φ_1 und integriert über ω :

$$\int_{\omega} -\frac{d\varphi_1}{dt} \varphi_1 dx - \nu \int_{\omega} \Delta \varphi_1 \varphi_1 dx = 0.$$

Aus der Regel der partiellen Integration (1.9) resultiert

$$-\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\varphi_1\|^2 + \nu \|\nabla \varphi_1\|^2 = 0.$$

Integriert man dieses bezüglich der Zeit über (t, T) mit $0 \leq t \leq T$, so erhält man:

$$-\int_t^T \frac{d}{ds} \|\varphi_1\|^2 ds + 2\nu \int_t^T \|\nabla \varphi_1\|^2 ds = 0$$

oder nach Satz 1.16

$$\|\varphi_1(\cdot, t)\|^2 + 2\nu \overbrace{\int_t^T \|\nabla \varphi_1\|^2 ds}^{\geq 0} \leq \|\varphi_1(\cdot, T)\|^2. \quad (6.5)$$

Hieraus folgt die Behauptung.

(ii) Behauptung: $\int_0^{T-\epsilon} \left\| \frac{d\varphi_1}{dt} \right\| dt \leq \frac{1}{2} (|\log \epsilon| + T - 1)^{\frac{1}{2}} \|\varphi_1^0\|$

Um den Beweis zu führen, wird zusätzlich die Abbildung $\tau(t) := \min(1, T - t)$ eingeführt. Aus Multiplikation der ersten Gleichung von (6.2) mit $\tau \frac{d\varphi_1}{dt}$ und Integration über ω ergibt sich dann

$$-\int_{\omega} \tau \left(\frac{d\varphi_1}{dt} \right)^2 dx - \int_{\omega} \nu \Delta \varphi_1 \tau \frac{d\varphi_1}{dt} dx = 0.$$

Beachtet man nun unter Berücksichtigung der Regel der partiellen Integration (1.9)

$$\begin{aligned} \int_{\omega} \Delta \varphi_1 \frac{d\varphi_1}{dt} dx &= \sum_{i=2}^3 \int_{\omega} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x_i^2} \frac{d\varphi_1}{dt} dx \\ &= -\sum_{i=2}^3 \int_{\omega} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} \right) dx \\ &= -\sum_{i=2}^3 \int_{\omega} \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_i} \right)^2 dx \\ &= -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla \varphi_1\|^2, \end{aligned}$$

so erhält man

$$-\tau \left\| \frac{d\varphi_1}{dt} \right\|^2 + \frac{1}{2} \nu \tau \frac{d}{dt} \|\nabla \varphi_1\|^2 = 0$$

oder umgeformt

$$-\tau \left\| \frac{d\varphi_1}{dt} \right\|^2 + \frac{1}{2} \nu \frac{d}{dt} (\tau \|\nabla \varphi_1\|^2) = \frac{1}{2} \nu \frac{d\tau}{dt} \|\nabla \varphi_1\|^2.$$

Dieses integriert man jetzt bezüglich der Zeit von 0 bis T :

$$\begin{aligned} \int_0^T \tau \left\| \frac{d\varphi_1}{dt} \right\|^2 dt &= \int_0^T \frac{1}{2} \nu \frac{d}{dt} (\tau \|\nabla \varphi_1\|^2) dt - \int_0^T \frac{1}{2} \nu \overbrace{\frac{d\tau}{dt}}^{\geq -1} \|\nabla \varphi_1\|^2 dt \\ &\leq \int_0^T \frac{1}{2} \nu \|\nabla \varphi_1\|^2 dt + \frac{1}{2} \nu \overbrace{\tau(T)}^{=0} \|\nabla \varphi_1(\cdot, T)\|^2 - \frac{1}{2} \nu \tau(0) \|\nabla \varphi_1(\cdot, 0)\|^2. \end{aligned}$$

Das Integral auf der rechten Seite wird nun durch (6.5) nach oben abgeschätzt:

$$\int_0^T \tau \left\| \frac{d\varphi_1}{dt} \right\|^2 dt \leq \int_0^T \frac{1}{2} \nu \|\nabla \varphi_1\|^2 dt \leq \frac{1}{4} \|\varphi_1^0\|^2. \quad (6.6)$$

Hiermit folgt die Behauptung, da nach der Ungleichung von Cauchy-Schwarz gilt:

$$\begin{aligned} \int_0^{T-\epsilon} \left\| \frac{d\varphi_1}{dt} \right\| &\leq \left(\int_0^{T-\epsilon} \tau(t)^{-1} dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{T-\epsilon} \tau(t) \left\| \frac{d\varphi_1}{dt} \right\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\stackrel{(6.6)}{\leq} \left(\int_0^{T-1} 1 dt + \int_{T-1}^{T-\epsilon} \frac{1}{T-t} dt \right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \|\varphi_1^0\| \\ &\leq \frac{1}{2} (T-1 - \log \epsilon + \overbrace{\log 1}^{=0})^{\frac{1}{2}} \|\varphi_1^0\| \\ &\leq \frac{1}{2} (|\log \epsilon| + T-1)^{\frac{1}{2}} \|\varphi_1^0\|. \end{aligned}$$

(iii) Behauptung: $\max_{0 \leq t \leq T} \|\tilde{\varphi}(\cdot, t)\| \leq \|\tilde{\varphi}^0\| + 2TK \|\varphi_1^0\|$

Multipliziert man die zweite Gleichung von (6.2) mit φ_2 und die dritte Gleichung mit φ_3 , so ergibt sich nach Integration über ω und Aufsummation:

$$-\|\tilde{\varphi}\| \frac{d}{dt} \|\tilde{\varphi}\| + \nu \|\nabla \tilde{\varphi}\|^2 + \int_{\omega} \frac{\partial u_{h1}}{\partial x_2} \varphi_1 \varphi_2 + \frac{\partial u_{h1}}{\partial x_3} \varphi_1 \varphi_3 dx = 0.$$

Dabei fällt der Druck wegen der Divergenzfreiheit von φ nach partieller Integration heraus. Hieraus schätzt man nach Cauchy-Schwarz ab:

$$\begin{aligned} -\|\tilde{\varphi}\| \frac{d}{dt} \|\tilde{\varphi}\| + \nu \|\nabla \tilde{\varphi}\|^2 &\leq K \|\varphi_1\| \|\varphi_2 + \varphi_3\| \\ &\leq 2K \|\varphi_1\| \|\tilde{\varphi}\|, \end{aligned} \quad (6.7)$$

wodurch aus $\nu \|\nabla \tilde{\varphi}\|^2 \geq 0$ und Kürzen folgt:

$$-\frac{d}{dt} \|\tilde{\varphi}\| \leq 2K \|\varphi_1\|.$$

Sei nun ein beliebiges $s \in [0, T]$ gegeben. Integration bezüglich der Zeit von s bis T , ergibt unter Beachtung des schon Gezeigten die Behauptung:

$$\begin{aligned} \|\tilde{\varphi}(\cdot, s)\| &\leq \int_s^T 2K \|\varphi_1\| dt + \|\tilde{\varphi}(\cdot, T)\| \\ &\leq 2KT \max_{0 \leq t \leq T} \|\varphi_1(\cdot, t)\| + \|\tilde{\varphi}^0\| \\ &\stackrel{(6.3)}{\leq} 2KT \|\varphi_1^0\| + \|\tilde{\varphi}^0\|. \end{aligned}$$

(iv) Behauptung: $\int_0^{T-\epsilon} \left\| \frac{d\tilde{\varphi}}{dt} \right\| dt \leq \sqrt{8} (\log \epsilon + T - 1)^{\frac{1}{2}} (\|\tilde{\varphi}^0\|^2 + K^2 T \|\varphi_1^0\|^2)^{\frac{1}{2}}$
Benötigt wird die folgende Ungleichung, die sich aus Integration von (6.7) ergibt:

$$\begin{aligned} \int_{T-1}^T \nu \|\nabla \tilde{\varphi}\|^2 dt &\leq \int_{T-1}^T \|\tilde{\varphi}\| \left(2K \|\varphi_1\| + \frac{d}{dt} \|\tilde{\varphi}\| \right) dt \\ &\leq \left(\max_{T-1 \leq s \leq T} \|\tilde{\varphi}(\cdot, s)\| \right) \left(\int_{T-1}^T 2K \|\varphi_1\| dt \right. \\ &\quad \left. + \|\tilde{\varphi}(\cdot, T)\| - \|\tilde{\varphi}(\cdot, T-1)\| \right) \\ &\stackrel{(6.3)}{\leq} \left(\max_{T-1 \leq s \leq T} \|\tilde{\varphi}(\cdot, s)\| \right) \left(2K \|\varphi_1^0\| + \|\tilde{\varphi}^0\| \right). \end{aligned}$$

Betrachtet man den Beweis von (iii) genau, so sieht man, daß für das Intervall $(T-1, T)$ speziell

$$\max_{T-1 \leq s \leq T} \|\tilde{\varphi}(\cdot, s)\| \leq \|\tilde{\varphi}^0\| + 2K \|\varphi_1^0\|$$

gilt. Damit folgt

$$\int_{T-1}^T \nu \|\nabla \tilde{\varphi}\|^2 dt \leq (\|\tilde{\varphi}^0\| + 2K \|\varphi_1^0\|)^2. \quad (6.8)$$

Als nächstes wird die zweite Zeile von (6.2) mit $\tau \frac{d\varphi_2}{dt}$ multipliziert. Integration über ω ergibt

$$-\tau \left\| \frac{d\varphi_2}{dt} \right\|^2 + \frac{1}{2} \nu \tau \frac{d}{dt} \|\nabla \varphi_2\|^2 + \int_{\omega} \frac{\partial u_{h1}}{\partial x_2} \varphi_1 \tau \frac{d\varphi_2}{dt} dx + \int_{\omega} \frac{\partial q}{\partial x_2} \tau \frac{d\varphi_2}{dt} dx = 0.$$

Hieraus folgt unter Beachtung der Youngschen Ungleichung

$$\begin{aligned} \tau \left\| \frac{d\varphi_2}{dt} \right\|^2 &\leq \frac{1}{2} \nu \frac{d}{dt} (\tau \|\nabla \varphi_2\|^2) - \frac{1}{2} \nu \frac{d\tau}{dt} \|\nabla \varphi_2\|^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} K^2 \tau \|\varphi_1\|^2 + \frac{1}{2} \tau \left\| \frac{d\varphi_2}{dt} \right\|^2 + \int_{\omega} \frac{\partial q}{\partial x_2} \tau \frac{d\varphi_2}{dt} dx. \end{aligned}$$

Integriert man die letzte Ungleichung über t von 0 bis T und berücksichtigt, daß $\frac{d\tau}{dt} = 0$ ist für $t \in [0, T-1]$, so resultiert daraus

$$\begin{aligned} \int_0^T \tau \left\| \frac{d\varphi_2}{dt} \right\|^2 dt &\leq \nu \overbrace{\tau(T)}^{=0} \|\nabla \varphi_2(\cdot, T)\|^2 - \nu \tau(0) \|\nabla \varphi_2(\cdot, 0)\|^2 \\ &\quad + \int_{T-1}^T \nu \|\nabla \varphi_2\|^2 dt + \int_0^T K^2 \|\varphi_1\|^2 dt + 2 \int_0^T \int_{\omega} \frac{\partial q}{\partial x_2} \tau \frac{d\varphi_2}{dt} dx dt. \end{aligned}$$

Ein analoges Resultat gilt auch für φ_3 . Addiert man dann beide Ungleichungen auf, so fällt nach partieller Integration der Term mit dem Druck heraus, da φ divergenzfrei ist, und man erhält aus (6.8)

$$\begin{aligned} \int_0^T \tau \left\| \frac{d\tilde{\varphi}}{dt} \right\|^2 dt &= \int_0^T \tau \left\| \frac{d\varphi_2}{dt} \right\|^2 dt + \int_0^T \tau \left\| \frac{d\varphi_3}{dt} \right\|^2 dt \\ &\leq \int_{T-1}^T \nu \|\nabla \tilde{\varphi}\|^2 dt + 2 \int_0^T K^2 \|\varphi_1\|^2 dt \\ &\stackrel{(6.8)}{\leq} (\|\tilde{\varphi}^0\| + 2K \|\varphi_1^0\|)^2 + 2K^2 T \|\varphi_1^0\|^2 \\ &\leq 8 (\|\tilde{\varphi}^0\|^2 + TK^2 \|\varphi_1^0\|^2), \end{aligned} \tag{6.9}$$

wobei noch die Youngsche Ungleichung benutzt wurde. Die Behauptung folgt nun wieder aus der Ungleichung von Cauchy-Schwarz:

$$\begin{aligned} \int_0^{T-\epsilon} \left\| \frac{d\tilde{\varphi}}{dt} \right\| dt &\leq \left(\int_0^{T-\epsilon} \tau(t)^{-1} dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{T-\epsilon} \tau(t) \left\| \frac{d\tilde{\varphi}}{dt} \right\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\stackrel{(6.9)}{\leq} \sqrt{8} (|\log \epsilon| + T - 1)^{\frac{1}{2}} (\|\tilde{\varphi}^0\|^2 + TK^2 \|\varphi_1^0\|^2)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Damit ist alles gezeigt und das Lemma bewiesen. \square

Das nächste Lemma gibt eine obere Abschätzung des Terms $(|\log \epsilon| + T - 1)$ an:

Lemma 6.2 *Seien $A \geq e$ und $T \geq 1$ gegeben. Dann gilt:*

$$\log A + T - 1 \leq T \log A.$$

Beweis: Definiert man

$$g(A) := T \log A - (\log A + T - 1),$$

so ersieht man aus

$$g(e) = T \log e - \log e - T + 1 = 0$$

und

$$g'(A) = \frac{T}{A} - \frac{1}{A} = \frac{1}{A} (T - 1) \geq 0, \quad \forall A \geq e,$$

daß $g(A) \geq 0$ für alle $A \geq e$ gilt, woraus die Behauptung folgt. \square

Benutzt man die beiden vorherigen Lemmata mit $A := \epsilon^{-1}$, so läßt sich für diesen Spezialfall eine Stabilitätsabschätzung zeigen. Denn zum einen gilt für beliebige $0 < \epsilon \leq \frac{1}{e}$ und $0 \leq \tilde{T} \leq T$

$$\begin{aligned} \|\varphi(\tilde{T})\| &\leq \|\varphi_1(\tilde{T})\| + \|\tilde{\varphi}(\tilde{T})\| \\ &\leq \|\varphi_1^0\| + (\|\tilde{\varphi}^0\| + 2TK\|\varphi_1^0\|) \\ &\leq 6TK\|\varphi^0\|. \end{aligned}$$

Zum anderen gilt

$$\begin{aligned} \int_0^{T-\epsilon} \left\| \frac{d\varphi}{dt} \right\| dt &\leq \int_0^{T-\epsilon} \left(\left\| \frac{d\varphi_1}{dt} \right\| + \left\| \frac{d\tilde{\varphi}}{dt} \right\| \right) dt \\ &\leq \int_0^{T-\epsilon} \left\| \frac{d\varphi_1}{dt} \right\| dt + \int_0^{T-\epsilon} \left\| \frac{d\tilde{\varphi}}{dt} \right\| dt \\ &\leq \left(\frac{1}{2} + \sqrt{8} \right) (|\log \epsilon| + T - 1)^{\frac{1}{2}} (\|\tilde{\varphi}^0\|^2 + K^2 T \|\varphi_1^0\|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\frac{1}{2} + \sqrt{8} \right) T^{\frac{1}{2}} |\log \epsilon|^{\frac{1}{2}} (\|\tilde{\varphi}^0\|^2 + K^2 T \|\varphi_1^0\|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq |\log \epsilon|^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} + \sqrt{8} \right) TK (\|\tilde{\varphi}^0\|^2 + \|\varphi_1^0\|^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq |\log \epsilon|^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} + \sqrt{8} \right) TK \|\varphi^0\|. \end{aligned}$$

Berücksichtigt man jetzt noch die Definitionen der Stabilitätskonstanten $C_i^p(T, u, u_h)$, $i = 0, 1$ (vgl. (5.21) bzw. (5.20)), so folgt:

Satz 6.1 *Sei (u, p) eine Strömung vom Typ (6.1). Für die Stabilitätskonstanten gilt dann*

$$C_i^p(T, u, u_h) \leq \hat{C}TK, \quad i = 0, 1 \quad (6.10)$$

mit $K := \|\nabla u_{h1}\|_{L^\infty(\omega \times I)} < \infty$, falls $T, TK \geq 1$ sind.²

Setzt man nun diese Abschätzung der Stabilitätskonstante in die a-posteriori Fehlerabschätzung von Satz 5.3 ein, so ergibt sich für das semidiskretisierte Problem folgende Aussage, wobei allerdings vorausgesetzt wird, daß die Funktionen der Räume Z und Z_h x_1 -unabhängig sind und für alle $u_h \in Z_h$ gilt $u_{hi} = 0$ mit $i = 2, 3$.

Satz 6.2 Sei u eine 'parallele Rohrströmung', die durch (6.1) bestimmt ist, und u_h die semidiskretisierte $dG(0)$ -Lösung, die durch die Gleichung (5.18) definiert ist. Mit $K(u_h) := \|\nabla u_{h1}\|_{L^\infty(\omega \times I)} < \infty$ und $|u - u_h|_I := \max_{i=0, \dots, N+1} \|u(t_i) - u_h(t_i)\|$ gilt

$$|u - u_h|_I \leq 2\hat{C}L_h K(u_h)T \left(\| [u_h] \|_I + \min(2\|hf\|, \sqrt{3}\|h^2 \frac{df}{dt}\|_I) \right), \quad (6.11)$$

wobei $[u_h] = [u_h^n]$ auf I_n ist.

Vergleicht man an dieser Stelle das Ergebnis mit der in der Einleitung angegebenen Abschätzung $C_1^p(T, u, u_h) \leq Ce^{TK}$, so erkennt man das Ausmaß der Verbesserung.

²Bei C. JOHNSON et al. [JRB95] wird die Konstante \hat{C} mit 2 angegeben. Dies ist jedoch falsch, da durch Einbeziehung der 3. Komponente \hat{C} größer wird.

Kapitel 7

Ergebnisse und Ausblick

In diesem Kapitel fasse ich die dargestellten Ergebnisse zusammen und versuche sie zu ordnen und zu werten. Außerdem möchte ich einen Ausblick auf die mögliche weitere Entwicklung dieser Methode geben.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit dem Problem der zuverlässigen Berechenbarkeit einer Strömung mit Hilfe adaptiver Verfahren. Hinter der Fragestellung verbergen sich zwei Schwierigkeiten: zum einen die Konstruktion adaptiver Verfahren mit scharfen a-posteriori Fehlerabschätzungen und zum anderen die Frage, wann eine Strömung überhaupt berechenbar ist.

Diskutiert wurden adaptive Verfahren und a-posteriori Fehlerabschätzungen des stationären Navier-Stokes Problems, der instationären, semidiskretisierten Navier-Stokes Gleichungen und zur Motivation der Fall gewöhnlicher Differentialgleichungen.

Das stationäre Navier-Stokes Problem ist mit einer Finite-Elemente-Methode diskretisiert worden. Allerdings ist die gezeigte a-posteriori Fehlerabschätzung noch nicht voll befriedigend. Denn es konnte nicht bewiesen werden, daß das zugeordnete duale Problem eine Lösung besitzt. Vielleicht ist es möglich, das duale Problem so zu modifizieren, daß die Lösbarkeit garantiert werden kann. Ein weiterer Schwachpunkt ist die auftretende Stabilitätskonstante. Denn a-priori ist die Größenordnung dieser Konstante völlig unbekannt. Nur wenn es gelingt, diese Konstante effektiv zu kontrollieren, ist die Abschätzung sinnvoll verwendbar. R. BECKER ([Bec98], Abschnitt 3) und R. RANNACHER ([Ran98], Abschnitt 4.1) schildern verschiedene Strategien und belegen diese durch numerische Experimente anhand einer zweidimensionalen *Benchmark-Strömung*, bei der ein Zylinder umströmt wird (vgl. Kapitel 5.2). Allerdings wird hier ein stabilisiertes Galerkin-Verfahren benutzt. Zeigt sich, daß diese Methode auch bei komplexeren Strömungen zu guten Ergebnissen führt, ist sie sicherlich eine Alternative zu den bekannten Abschätzungen. Ein weiterer Schwachpunkt ist die Beschränkung auf Lösungen, die eindeutig existieren. R. VERFÜRTH ([Ver96], Kapitel 3.5) z.B. zeigt mit einer ähnlichen Technik eine a-posteriori Abschätzung für den Fall von *nichtsingulären Lösungszweigen*. Es sollte möglich sein, die vorgestellte Methode hierauf zu verallgemeinern.

Im instationären Fall steht die Entwicklung von a-posteriori Fehlerabschätzungen noch am Anfang. Neben dem vorgestellten Ansatz von C. JOHNSON, R. RANNACHER und M. BOMAN [JRB95] ist mir nur eine Arbeit von R. VERFÜRTH [Ver98a] bekannt, in der zur Diskretisierung Raum-Zeit-Elemente benutzt werden. Der vorgestellte Ansatz beschränkt sich auf den semidiskretisierten Fall. Bei einer Diskretisierung auch des Ortes entstehen durch nicht divergenzfreie Ansatzfunktionen neue Probleme, die einer gründlichen Klärung bedürfen. Daneben bereitet auch das duale Problem wieder Schwierigkeiten, denn weder die Existenz einer Lösung ist gesichert, noch ist klar, ob die Stabilitätskonstante effektiv kontrolliert werden kann. Immerhin konnte für den speziellen Fall einer „parallelen Rohrströmung“ eine realistische obere Schranke für die Stabilitätskonstante bestimmt werden (Kapitel 6). Ein weiterer Schwachpunkt der Methode ist die Forderung an die zu diskretisierende Strömung u , daß sie Ableitungen aus $L^2((0, T); H_{div}(\Omega))$ enthalte. Wie man den Ausführungen von Kapitel 3.2.1 entnimmt, ist diese Forderung nur lokal gerechtfertigt. Von der Beseitigung dieser Probleme wird es abhängen, ob die Methode für das instationäre Navier-Stokes Problem etabliert werden kann.

Anders stellt sich die Problematik bei gewöhnlichen Differentialgleichungen dar. Das duale Problem ist wohldefiniert, und auch die Bestimmung der Stabilitätskonstante scheint mit vertretbarem Arbeitsaufwand möglich, wie numerische Experimente zeigen.

Der zweite hier behandelte Problemkreis beschäftigte sich mit der Frage, wann eine Strömung überhaupt mit dieser Methode zuverlässig berechenbar ist oder ob es nicht sinnvoller ist, beispielsweise Turbulenz-Modelle anzuwenden. In dem Kapitel über hydrodynamische Stabilität habe ich gezeigt, daß der Begriff der Stabilität dazu nur mit Einschränkungen gebraucht werden kann. Denn nur hinreichend kleine Diskretisierungsfehler werden bei stabilen Strömungen nicht verstärkt. Doch wie klein muß der Diskretisierungsfehler hierzu sein? Die einschränkungslose Stabilität sichert zwar, daß die Fehler nicht verstärkt werden, aber dieser Fall liegt nur für sehr kleine Reynolds-Zahlen vor. Hieraus resultiert, daß auch im Kontext hydrodynamischer Stabilität den quantitativen Aspekten mehr Bedeutung beigemessen werden sollte. Insgesamt muß die Aussage von C. JOHNSON et al. [JRB95]¹

„There seems to be a light at the end of the tunnel.“

doch stark relativiert werden. Aber die vorgestellte Methode läßt einen Ansatz zu weiteren Entwicklungen erkennen.

¹Vgl. Abschnitt 3.3.

Literaturverzeichnis

- [Ada75] R.A. Adams. *Sobolev Spaces*. Academic Press Inc., 1975.
- [Alt92] H.W. Alt. *Lineare Funktionalanalysis*. Springer, 1992. 2. Auflage.
- [Ama83] H. Amann. *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. de Gruyter, 1983.
- [Bec95] R. Becker. An adaptive Finite Element Method for the Incompressible Navier-Stokes Equations on Time-dependent Domains. Dissertation, Universität Heidelberg, 1995.
- [Bec98] R. Becker. Weighted Error Estimators for Finite Element Approximation of the Incompressible Navier-Stokes Equations. Preprint 98-48, Universität Heidelberg, 1998.
- [BHvW90] J. Bemelmans, S. Hildebrandt, and W. von Wahl. Partielle Differentialgleichungen und Variationsrechnung. In *Ein Jahrhundert Mathematik 1890-1990*, Dokumente zur Geschichte der Mathematik, Band 6. Vieweg, 1990.
- [BR96] K. Böttcher and R. Rannacher. Adaptive Error Control in Solving Ordinary Differential Equations by the Discontinuous Galerkin Method. Preprint 96-53, Universität Heidelberg, 1996.
- [BT97] J.S. Baggett and L.N. Trefethen. Low-dimensional models of subcritical transition to turbulence. *Physics of Fluids*, 9:1043–1053, 1997.
- [CF88] P. Constantin and C. Foias. *The Navier-Stokes equations*. The University of Chicago Press, 1988.
- [CKN82] L. Caffarelli, R. Kohn, and L. Nirenberg. Partial Regularity of Suitable Weak Solutions of the Navier-Stokes Equations. *Comm. Pure Appl. Math.*, 35:771–831, 1982.
- [Cle75] P. Clement. Approximation by finite element functions using local regularization. *R.A.I.R.O. Anal. Numer.* 9, R2:77–84, 1975.
- [DvK73] S.H. Davis and C. von Kerczek. A reformulation of Energy stability theory. *Arch. Rat. Anal.*, 52:112–117, 1973.

- [EEHJ95] K. Eriksson, D. Estep, P. Hansbo, and C. Johnson. Introduction to adaptive methods for differential equations. In *Acta Numerica*, pages 105–158. Cambridge University Press, 1995.
- [Emm94] E. Emmrich. Hydrodynamische Stabilität beim instationären Navier-Stokes-Problem. Preprint MBI-94-3, Otto-von-Guericke-Universität Magdeburg, 1994.
- [FR96] J.N. Flavin and S. Rionero. *Qualitative Estimates for Partial Differential Equations: An Introduction*. CRC Press, 1996.
- [FR99] J.N. Flavin and S. Rionero. The Benard Problem for Nonlinear Heat Conduction: Unconditional Stability. *Q. Jl Mech. appl. Math.*, 52(3):441–452, 1999.
- [GGZ74] H. Gajewski, K. Gröger, and K. Zacharias. *Nichtlineare Operatorgleichungen und Operatordifferentialgleichungen*. Akademie-Verlag, 1974.
- [GR85] G.P. Galdi and S. Rionero. *Weighted Energy Methods in Fluid Dynamics and Elasticity*. Springer-Verlag, 1985.
- [GR86] V. Girault and P.A. Raviart. *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations*. Springer, 1986.
- [GR94] C. Großmann and H.-G. Roos. *Numerik partieller Differentialgleichungen*. Teubner, 1994. 2. Auflage.
- [HS74] M.W. Hirsch and S. Smale. *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*. Academic Press Inc., 1974.
- [Joh95] C. Johnson. On Computability and Error Control in CFD. In *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, volume 20, pages 777–788, 1995.
- [JR94] C. Johnson and R. Rannacher. On Error Control in CFD. Preprint 1994-7, Chalmers University of Technology Göteborg, 1994.
- [JRB94] C. Johnson, R. Rannacher, and M. Boman. On Transition to Turbulence and Error Control in CFD. Preprint 1994-26, Chalmers University of Technology Göteborg, 1994.
- [JRB95] C. Johnson, R. Rannacher, and M. Boman. Numerics and Hydrodynamic Stability: Error Control in Computational Fluid Dynamics. *SIAM J. Numer. Anal.*, 32:1058–1079, 1995.
- [Lio69] J.L. Lions. *quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Dunod, 1969.

- [LL66] L.D. Landau and E.M. Lifschitz. *Lehrbuch der theoretischen Physik*, volume VI: Hydrodynamik. Akademie-Verlag, 1966.
- [Lor63] E.N. Lorenz. Deterministic Nonperiodic Flow. *J. Atmos. Sci.*, 20:130–141, 1963.
- [Lub98] G. Lube. Diskretisierungsverfahren für partielle Differentialgleichungen I. Vorlesungsausarbeitung, Sommersemester 1998.
- [QV94] A. Quarteroni and A. Valli. *Numerical approximation of partial differential equations*. Springer-Verlag, 1994.
- [Ran98] R. Rannacher. Error Control in Finite Element Computations. Preprint 98-54, Universität Heidelberg, 1998.
- [RH93] S.C. Reddy and D.S. Henningson. Energy growth in viscous channel flows. *J. Fluid Mech.*, 252:209–238, 1993.
- [Rio68] S. Rionero. Metodi variazionali per la stabilità asintotica in media in magnetoidrodinamica. *Ann. Mat. Pura Appl.*, 78:339–364, 1968.
- [RST96] H.-G. Roos, M. Stynes, and L. Tobiska. *Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equations*. Springer, 1996.
- [Sat70] D.H. Sattinger. The Mathematical Problem of Hydrodynamic Stability. *Joun. Math. Mech.*, 19:797–817, 1970.
- [Sat73] D.H. Sattinger. *Topics in Stability and Bifurcation Theory*. Springer-Verlag, 1973.
- [Spa82] C. Sparrow. *The Lorenz Equations: Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors*. Springer, 1982.
- [Str92] B. Straughan. *The Energy Method, Stability and Nonlinear Convection*. Springer-Verlag, 1992.
- [Tem84] R. Temam. *Navier-Stokes equations*. North-Holland, 1984. 3. Auflage.
- [Tem97] R. Temam. *Infinite-Dimensional Dynamical Systems in Mechanics and Physics*. Springer, 1997. 2. Auflage.
- [Tre97] L.N. Trefethen. Pseudospectra of Linear Operators. *SIAM Review*, 39:383–406, 1997.
- [Tri88] D.J. Tritton. *Physical Fluid Dynamics*. Oxford Univ. Press, 1988.

- [TTR92] L.N. Trefethen, A.E. Trefethen, and S.C. Reddy. Pseudospectra of the Linear Navier-Stokes Operator and Instability of Plane Poiseuille and Couette Flows. Technical Report TR 92-1291, Cornell University Ithaca, New York, 1992.
- [Ver96] R. Verfürth. *A Review of A Posteriori Error Estimation and Adaptive Mesh-Refinement Techniques*. Teubner, 1996.
- [Ver98a] R. Verfürth. A Posteriori Error Estimates for Nonlinear Problems: $L^r(0, T; W^{1,\rho}(\Omega))$ -Error Estimates for Finite Element Discretizations of Parabolic Equations. *Numer Methods Partial Differential Eq*, 14:487–518, 1998.
- [Ver98b] R. Verfürth. A posteriori error estimators for convection-diffusion problems. *Numer. Math.*, 80:641–663, 1998.
- [vW85] W. von Wahl. *The Equations of Navier-Stokes and Abstract Parabolic Equations*. Vieweg, 1985.
- [Wal93] W. Walter. *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Springer, 1993. 5. Auflage.
- [Zei86] E. Zeidler. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications*, volume I: Fixed-Point Theorems. Springer, 1986.
- [Zei90] E. Zeidler. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications*, volume II/A: Linear Monotone Operators. Springer, 1990.
- [Zei94] E. Zeidler. *Nonlinear Functional Analysis and its Applications*, volume IV: Applications to Mathematical Physics. Springer, 1994.

Danksagung

Ich danke allen, die mich während der Erstellung meiner Arbeit moralisch unterstützt und meine nicht immer gute Laune ertragen haben.

Besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. Lube, der stets für mich Zeit hatte und immer versucht hat, mich zu motivieren und mir mit Rat und Tat zur Seite zu stehen.

Gedankt sei auch meinen Eltern, die durch ihre finanzielle Unterstützung mein Studium erst möglich gemacht haben.

Versicherung

Hiermit versichere ich, daß ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfaßt und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt habe.

Göttingen, den 8. September 1999