

**Analytische und numerische Untersuchung
von direkten und inversen Randwertproblemen
in Gebieten mit Ecken
mittels Integralgleichungsmethoden**

**Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultäten
der Georg-August-Universität zu Göttingen**

vorgelegt von
ANDREAS VOGT
aus
Leinefelde

Göttingen 2001

D7

Referent:

Prof. Dr. R. Kreß

Korreferent:

Prof. Dr. G. Lube

Tag der mündlichen Prüfung:

31. Oktober 2001

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Grundlagen	8
2.1	Zu den Grundlösungen von Laplace- und Helmholtzgleichung	8
2.1.1	Eigenschaften der Hankelfunktionen	9
2.2	Definition und Rechenregeln zur Fréchet-Ableitung	10
2.3	Funktionalanalytische Grundlagen	12
3	Eine singuläre Integralgleichung	14
3.1	Zur Existenz und Eindeutigkeit	14
3.2	Die Substitutionsmethode	16
3.3	Ein Nyström - Verfahren	21
4	Das direkte Streuproblem	24
4.1	Randwertprobleme zur Helmholtzgleichung	25
4.2	Zur Eindeutigkeit beim äußeren Dirichlet-Problem	25
4.3	Potenziale und Sprungbeziehungen	31
4.4	Zur Existenz beim direkten Dirichletproblem	33
4.5	Der Fernfeldoperator	35
4.6	Numerische Ergebnisse	37

5	Das inverse Streuproblem	45
5.1	Eindeutigkeit beim inversen Streuproblem	45
5.2	Ableitung der Randintegraloperatoren	47
5.3	Die Fréchet - Ableitung des Fernfeldoperators	63
6	Numerische Ergebnisse beim inversen Streuproblem	69
6.1	Newtonverfahren und Regularisierung	69
6.2	Modifizierung im Tikhonov-Funktional	73
6.3	Die rechte Seite der Fréchet - Ableitung	75
6.4	Rekonstruktionen mit glatten Kurven	78
6.5	Rekonstruktionen mit nicht-glatten Kurven	83
6.6	Eingeschränkter Messbereich	86
7	Ein spezielles Impedanzrandwertproblem	90
7.1	Formulierung des Impedanzrandwertproblems	90
7.2	Existenz und Eindeutigkeit beim direkten Impedanzrandwertpr.	92
7.3	Der hypersinguläre Operator T_0	96
7.4	Numerische Ergebnisse	102
8	Das inverse Impedanzrandwertproblem	108
8.1	Eindeutigkeit beim inversen Impedanzrandwertproblem	108
8.2	Die Fréchet - Ableitung des Randwerteoperators	110
8.3	Numerische Ergebnisse	117
	Literaturverzeichnis	123

Kapitel 1

Einleitung

Zwei Probleme heißen zueinander *invers*, wenn die Formulierung des einen die Formulierung des anderen erfordert und umgekehrt. Zunächst ist es unwichtig, welches der beiden Probleme als *direktes* und welches als *inverses* Problem bezeichnet wird. In der Regel wird das historisch ältere und besser verstandene Problem als *direktes* Problem bezeichnet. Für eine Reihe von physikalisch motivierten Beispielen sei auf das Buch von Groetsch [17] verwiesen.

Zahlreiche physikalische Fragestellungen führen auf partielle Differenzialgleichungen, deren Lösung zusätzliche Bedingungen auf dem Rand eines Gebietes erfüllen muss. Stellvertretend seien an dieser Stelle die Streuung von akustischen und elektromagnetischen Wellen, die Elastizitätstheorie und Strömungsprobleme erwähnt.

Für partielle Differenzialgleichungen mit konstanten Koeffizienten sind Integralgleichungsmethoden ein wesentliches Hilfsmittel zur Untersuchung dieser direkten Randwertprobleme.

Bei den zugehörigen inversen Problemen sind aus gemessenen Daten bestimmte physikalische Parameter, wie etwa der Rand eines Gebietes, die Wellenzahl oder die Leitfähigkeit, zu rekonstruieren. Während in der Regel das direkte Problem linear und wohlgestellt ist, ist das inverse Problem nichtlinear und schlecht gestellt im Sinne von Hadamard. Für eine numerische Behandlung sind neben einer geeigneten Linearisierung, die zum Begriff der Fréchet-Differenzierbarkeit führt, daher auch Regularisierungstechniken erforderlich.

In dieser Arbeit habe ich stellvertretend zwei Beispiele betrachtet, zum einen das direkte und inverse Dirichletproblem zur Helmholtzgleichung in Gebieten mit Ecken und zum anderen ein spezielles Impedanzrandwertproblem, bei dem in natürlicher Weise (durch Korrosionseffekte) Ecken auftreten.

Die mathematische Modellierung der Streuung von zeitharmonischen Wellen an Hindernissen führt zu äußeren Randwertproblemen für die Helmholtzgleichung

$$\Delta u + k^2 u = 0.$$

Je nachdem, ob der Druck oder die Geschwindigkeit der Welle beim Auftreffen auf das Hindernis vorgeschrieben werden, führt dies zu einem Dirichletproblem (schallweiches Hindernis) oder zum Neumannproblem (schallhartes Hindernis). Falls der Rand des Gebietes hinreichend glatt ist, führen Potenzialansätze auf Integralgleichungen zweiter Art mit einem kompakten Operator. Die auf diese Weise erzielten Existenz-, Eindeutigkeits- und Konvergenzresultate finden sich bei Leis [40] im Fall des Dirichlet-Problems und bei Kussmaul [38] für das Neumann-Problem im \mathbb{R}^2 .

Falls das Gebiet Ecken aufweist, tritt eine zusätzliche Problematik auf. Die resultierende Randintegralgleichung hat nicht mehr die Form Identität plus kompakter Operator (siehe Willers [57, Seiten 90-94].) Die Riesz-Theorie ist trotzdem anwendbar, denn der Operator ist Summe aus einem kompakten Operator, der Identität und einem Operator mit Norm kleiner eins. Die Konvergenz- und Fehleranalyse für ein Nyström-Verfahren zur numerischen Behandlung der Integralgleichung, die sich bei der Laplace-Gleichung ergibt und dessen Kern Singularitäten in den Ecken aufweist, geht zurück auf Kreß [28]. Der bei der Helmholtzgleichung zusätzlich auftretende logarithmische Anteil ist in der Arbeit von Kumpel [39] berücksichtigt worden.

Weitere ähnlich gelagerte Beispiele ergeben sich bei der Reflexion an lokal gestörten Ebenen (siehe Willers [57], Hartke [19] oder Boeckh [2]) oder der Streuung am Kurvenbogen (siehe Kreß [31] oder Mönch [44]).

Für Beispiele, wie mit Integralgleichungen erster Art ähnliche Konvergenzresultate erzielt werden, sei verwiesen auf Mönch [43], Chapko-Kreß [5], Kreß-Sloan [29] und die Arbeiten von Elschner [12], [13].

Beim direkten Problem ist bei bekanntem Gebiet im \mathbb{R}^2 das gestreute Feld u^s zu ermitteln. Die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung impliziert für u^s das asymptotische Verhalten

$$u^s(x) = \frac{e^{ik|x|}}{\sqrt{|x|}} \left\{ u_\infty(\hat{x}) + O\left(\frac{1}{|x|}\right) \right\}, \quad |x| \rightarrow \infty,$$

gleichmäßig für alle Richtungen $\hat{x} = x/|x|$. Der Amplitudenfaktor u_∞ heißt Fernfeld von u . Vom funktionalanalytischen Standpunkt bedeutet dies, den sogenannten Fernfeldoperator

$$\mathcal{F} : C_{2\pi}(\mathbb{R}) \cap C^{2,\alpha}[0, 2\pi] \rightarrow L^2(\Omega), \quad z \mapsto u_\infty,$$

der den Rand des Streugebiets auf das Fernfeld abbildet, auszuwerten. Hierbei ist Ω gegeben durch $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = 1\}$.

Beim inversen Problem besteht die Aufgabe darin, aus der Kenntnis von Fernfelddaten für eine oder mehrere einfallende ebene Wellen, den Rand des Gebietes zu rekonstruieren. Demnach ist \mathcal{F} zu invertieren. Da der Fernfeldoperator nichtlinear und kompakt ist, wird für ein numerisches Verfahren sowohl eine geeignete Linearisierung benötigt, als auch eine Regularisierung erforderlich.

Neben dem akustischen Streuproblem habe ich ein spezielles Impedanzrandwertproblem betrachtet. Durch Vergraben eines metallischen Gegenstandes (mit konstanter Leitfähigkeit) kommt es zu Korrosionseffekten auf dem in der Erde befindlichen Teil der Oberfläche und daher zur Ausbildung von Ecken. Durch Einprägen von Strom auf einem nicht korrodierten Oberflächenstück kommt es zu einer Spannungsverteilung im Körper.

Das direkte Problem besteht darin, bei bekannter Oberfläche den Strom auf einem nicht korrodierten Teil zu ermitteln. Mathematisch modelliert bedeutet dies, die Neumannrandwerte der Lösung eines inneren Dirichletproblems zur Laplacegleichung zu ermitteln.

Beim inversen Problem besteht die Aufgabe darin, aus der Kenntnis der Dirichlet- und Neumannwerte auf einem Teilstück, die unbekannte Oberfläche zu ermitteln. Dabei habe ich mich wiederum auf den zweidimensionalen Fall beschränkt.

Für weitere Beispiele von inversen Problemen, die mit newtonartigen Verfahren gelöst wurden, verweise ich stellvertretend auf Gerlach [14], Hohage-Schormann [22], Kreß [30], [31], [32], Kreß-Tran [37], Mönch [44], Potthast [45], [46], [47] und Schormann [51], [52].

Nachfolgend erläutere ich den Aufbau der Arbeit.

Im **Kapitel 2** habe ich die Grundlösungen zur Laplace- und Helmholtzgleichung angegeben. Aufgrund der komplizierteren Struktur der Grundlösung im \mathbb{R}^2 , die durch die Hankelfunktion $H_0^{(1)}$ gegeben ist, habe ich für $H_n^{(1,2)}$ die später benötigten Eigenschaften im Abschnitt 2.1 separat aufgeführt. Der Abschnitt 2.2 ist der Fréchet-Ableitung und deren Eigenschaften gewidmet.

Im **Kapitel 3** habe ich eine singuläre Integralgleichung der Form

$$\begin{aligned} \varphi(t) - \int_0^{2\pi} \left\{ K_A(t, \tau) + K_B(t, \tau) + K_C(t, \tau) \ln \left(4 \sin^2 \frac{t - \tau}{2} \right) \right\} [\varphi(\tau) - \varphi(0)] d\tau \\ + \gamma(t)\varphi(0) = f(t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \end{aligned} \quad (1.1)$$

betrachtet, bei denen die auftretenden Kerne stetig oder schwach singular sind oder in den Ecken integrierbare Singularitäten aufweisen. Im Abschnitt 3.1 zeige ich, dass für

diese Gleichung zweiter Art die Riesz-Theorie angewendet werden kann. Im Abschnitt 3.2 gehe ich auf die numerische Behandlung von eindimensionalen Integralen über kompakten Mengen, deren Integranden Endpunktsingularitäten besitzen, ein. Die Idee besteht darin, Singularitäten zunächst durch geeignete Substitutionen zu beseitigen und anschließend die Trapezregel anzuwenden. In [55] habe ich bereits verschiedene Substitutionen vorgestellt und miteinander verglichen, sodass ich in der vorliegenden Arbeit stillschweigend darauf zurückgreifen kann. Im Abschnitt 3.3 gehe ich auf das Nyström - Verfahren zur approximativen Lösung der singulären Integralgleichung ein. Abschließend habe ich das Konvergenzresultat, dessen ausführlicher Beweis bei Kümpel [39] nachzulesen ist, angegeben und den Beweisgang grob skizziert.

Im **Kapitel 4** ist das direkte Streuproblem von mir behandelt worden. Nach der Formulierung des äußeren Dirichlet- und inneren Neumannproblems werden im Abschnitt 4.2 die Eindeutigkeitssätze formuliert und bewiesen. Mit den im Abschnitt 4.3 erklärten Potenzialen und deren Sprungbeziehungen zeige ich im Abschnitt 4.4, dass das äußere Dirichletproblem (für Gebiete mit genau einer Ecke) eine Lösung besitzt. Dabei wird gezeigt, dass die unbekannte Dichte eine injektive Integralgleichung vom Typ (1.1) löst. Im Abschnitt 4.5 ist das Fernfeld einer ausstrahlenden Lösung der Helmholtzgleichung erklärt. Im letzten Abschnitt 4.6 habe ich numerische Ergebnisse für verschiedene Gebiete mit verschiedenen Substitutionen angeführt.

Das **Kapitel 5** habe ich dem inversen Streuproblem gewidmet. Im Abschnitt 5.1 zeige ich, dass bei Übereinstimmung der Fernfelder für alle Einfallsrichtungen $d \in \Omega$ die Streugebiete gleich sind, also die Injektivität des Fernfeldoperators \mathcal{F} . In den beiden nächsten Abschnitten wird die Fréchet-Differenzierbarkeit der Abbildung $z \mapsto \mathcal{F}(z)$ nachgewiesen und die Ableitung $\mathcal{F}'(z, h)$ durch ein Randwertproblem charakterisiert. Satz 5.13 ist damit das Hauptresultat des Kapitels 5.

Im **Kapitel 6** habe ich das numerische Verfahren zur Lösung des inversen Streuproblems erläutert und Beispiele von Rekonstruktionen angegeben. Den Darstellungen ist zu entnehmen, dass es sich lohnt, Gebiete mit Ecken nicht nur mit glatten Ansatzfunktionen zu rekonstruieren, sondern nicht-glatte Anteile zur besseren Rekonstruktion zu berücksichtigen. Ein Konvergenzbeweis für das Newtonverfahren zur Lösung inverser Streuprobleme ist bisher in der Literatur nicht bekannt. Zur Problematik der Konvergenz von newtonartigen Verfahren gibt es zwar allgemeine funktionalanalytische Sätze (siehe etwa [11]), deren Voraussetzungen jedoch bei Streuproblemen im allgemeinen nicht erfüllt sind.

Die **Kapitel 7** und **8** widmen sich dem Impedanzproblem. Zunächst habe ich für das direkte Problem Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung gezeigt. Bei der numerischen Behandlung der resultierenden Randintegralgleichung für die unbekannte Dichte tritt auf-

grund von zwei Ecken eine zusätzliche Problematik auf. Im Abschnitt 7.3 gehe ich auf die Behandlung des hypersingulären Operators T_0 ein und im Abschnitt 7.4 habe ich die numerischen Ergebnisse angeführt.

Anstelle des Fernfeldoperators tritt hier der Randwerteoperator \mathcal{F} , der bei einem festen Dirichletwert f hinreichend glatte Randkurven z abbildet auf die Neumannwerte $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ der Lösung u des inneren Dirichletproblems.

Im **Kapitel 8** stelle ich dar, wie sich, wiederum mit einem regularisierten Newtonverfahren, der unbekannte Rand aus Messdaten rekonstruieren lässt. Dazu zeige ich zunächst im Abschnitt 8.1 die Injektivität des Randwerteoperators \mathcal{F} und im Abschnitt 8.2 die Fréchet-Differenzierbarkeit von \mathcal{F} bei geeigneten Funktionenräumen. Anschließend charakterisiere ich die Ableitung durch ein Randwertproblem. Dabei stellt Satz 8.7 das Analogon zu Satz 5.13 dar. Die numerischen Ergebnisse habe ich im Abschnitt 8.3 angeführt.

Herrn Prof. Dr. Rainer Kreß danke ich recht herzlich für die Anregung zur Beschäftigung mit dieser Thematik und seine wertvollen Ratschläge bei der Anfertigung dieser Arbeit. Herrn Prof. Dr. Gert Lube danke ich für die Übernahme des Korreferats.

Kapitel 2

Grundlagen

2.1 Zu den Grundlösungen von Laplace- und Helmholtzgleichung

Für die in den nachfolgenden Kapiteln behandelten Randwertprobleme werden die Grundlösungen zur Laplace- und Helmholtzgleichung benötigt. Diese lauten

$$\Phi_0(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x-y|} & : m = 2 \\ \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x-y|} & : m = 3 \end{cases} \quad x, y \in \mathbb{R}^m, x \neq y$$

im Fall der Laplacegleichung und

$$\Phi_k(x, y) = \begin{cases} \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|x-y|) & : m = 2 \\ \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} & : m = 3 \end{cases} \quad x, y \in \mathbb{R}^m, x \neq y$$

für die Helmholtzgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$. In dieser Arbeit beschränken wir uns weitestgehend auf den zweidimensionalen Fall. Insbesondere bei den numerischen Verfahren werden Eigenschaften der Hankelfunktionen benötigt, die daher im nächsten Abschnitt zusammengetragen werden.

2.1.1 Eigenschaften der Hankelfunktionen

In Polarkoordinaten erhält die Gleichung $\Delta u + k^2 u = 0$ die Form

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + k^2 u = 0.$$

Wir suchen im \mathbb{R}^2 Lösungen der Helmholtzgleichung der Form

$$u(x) = f(kr)e^{\pm i n \varphi}.$$

Dies führt auf die Besselsche Differenzialgleichung

$$t^2 f''(t) + t f'(t) + [t^2 - n^2] f(t) = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0. \quad (2.1)$$

Offensichtlich ist die Besselfunktion

$$J_n(t) := \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!(n+p)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{n+2p}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (2.2)$$

Lösung von (2.1) und analytisch für $t \in \mathbb{C}$. Eine zweite linear unabhängige Lösung wird durch die Neumannfunktion

$$Y_n(t) := \frac{2}{\pi} \left\{ \ln \frac{t}{2} + C_E \right\} J_n(t) - \frac{1}{\pi} \sum_{p=0}^{n-1} \frac{(n-1-p)!}{p!} \left(\frac{2}{t}\right)^{n-2p} \\ - \frac{1}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!(n+p)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{n+2p} \{\psi(p+n) + \psi(p)\}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \quad (2.3)$$

mit der Funktion

$$\psi(0) := 0, \quad \psi(p) := \sum_{m=1}^p \frac{1}{m}, \quad p \in \mathbb{N}$$

und der Eulerkonstanten

$$C_E := \lim_{p \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{m=1}^p \frac{1}{m} - \ln p \right\},$$

gegeben. Offenbar sind die Y_n für $t > 0$ analytisch. Die Linearkombinationen

$$H_n^{(1,2)} := J_n \pm i Y_n$$

heißen Hankelfunktionen erster und zweiter Art der Ordnung n . Für das asymptotische Verhalten mit $t \rightarrow \infty$ findet man

$$\begin{aligned} H_n^{(1,2)}(t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi t}} e^{\pm i(t - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4})} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{t}\right) \right\}, \quad t \rightarrow \infty, \\ H_n^{(1,2)'}(t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi t}} e^{\pm i(t - \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4})} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{t}\right) \right\}, \quad t \rightarrow \infty. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Den Potenzreihen (2.2) und (2.3) ist für die Fundamentallösung

$$\Phi_k(x, y) := \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|x - y|), \quad x \neq y, \tag{2.5}$$

der Helmholtzgleichung im \mathbb{R}^2 das asymptotische Verhalten

$$\Phi_k(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x - y|} + \frac{i}{4} - \frac{1}{2\pi} \ln \frac{k}{2} - \frac{C_E}{2\pi} + O\left(|x - y|^2 \ln \frac{1}{|x - y|}\right) \tag{2.6}$$

für $|x - y| \rightarrow 0$ abzulesen.

2.2 Definition und Rechenregeln zur Fréchet-Ableitung

Für normierte Räume X und Y wird unter dem Symbol $\mathcal{L}(X, Y)$ die Menge der linearen und beschränkten Abbildungen von X nach Y verstanden. Die Menge $\mathcal{L}(X, Y)$ wird mit den üblichen punktweise erklärten Operationen zum linearen Raum, auf dem durch

$$\|F\|_{\mathcal{L}(X, Y)} := \sup_{\|x\|_X=1} \|F(x)\|_Y, \quad F \in \mathcal{L}(X, Y),$$

eine Norm gegeben ist. Mit Y ist auch $\mathcal{L}(X, Y)$ ein Banachraum.

Definition 2.1 (Definition der Fréchet-Ableitung)

Seien X, Y normierte Räume und $U \subset X$ offen. $F : U \rightarrow Y$ heißt Fréchet-differenzierbar in $x \in U$, wenn eine Abbildung $F'(x) \in \mathcal{L}(X, Y)$ existiert, sodass gilt

$$\|F(x + h) - F(x) - F'(x)h\|_Y = o(\|h\|_X), \quad h \rightarrow 0.$$

Zur Vereinfachung der Darstellung wird statt $F'(x)h$ lediglich $F'(x, h)$ geschrieben. Ist F in jedem $x \in U$ Fréchet-differenzierbar, dann heißt die Abbildung

$$\begin{aligned} F' : U &\longrightarrow \mathcal{L}(X, Y) \\ x &\longmapsto F'(x, \cdot) \end{aligned}$$

die Fréchet-Ableitung von F .

Satz 2.2 (Kettenregel)

Seien X, Y, Z normierte Räume und $X' \subset X, Y' \subset Y$ offen. Weiter seien $G : X' \rightarrow Y'$ in $x \in X'$ und $F : Y' \rightarrow Z$ in $G(x) \in Y'$ Fréchet-differenzierbar. Dann ist $F \circ G : X' \rightarrow Z$ in $x \in X'$ Fréchet-differenzierbar, und es gilt

$$(F \circ G)'(x, h) = F'(G(x), G'(x, h)) \text{ für alle } h \in X.$$

Satz 2.3 (Produktregel)

Seien U, X_1, X_2, Y normierte Räume, $U' \subset U$ offen und

$$b : X_1 \times X_2 \longrightarrow Y, (x_1, x_2) \longmapsto b(x_1, x_2)$$

eine bilineare, beschränkte Abbildung. Desweiteren seien $F_1 : U' \rightarrow X_1$ und $F_2 : U' \rightarrow X_2$ Fréchet-differenzierbare Abbildungen. Dann ist

$$\begin{aligned} b(F_1, F_2) : U' &\rightarrow Y \\ u &\longmapsto b(F_1(u), F_2(u)) \end{aligned}$$

Fréchet-differenzierbar und besitzt die Ableitung

$$b(F_1, F_2)'(u, h) = b(F_1'(u, h), F_2(u)) + b(F_1(u), F_2'(u, h)), \quad u \in U', h \in U.$$

Beispiel 2.4 Seien X_2, Y normierte Räume, $X_1 = \mathcal{L}(X_2, Y)$ und

$$b : \mathcal{L}(X_2, Y) \times X_2 \rightarrow Y, (A, x_2) \mapsto A(x_2).$$

Die Bilinearform entspricht also der Anwendung eines Operators auf ein Element des Definitionsbereichs. Die Ableitung von $u \mapsto A(u)(x_2(u))$ lautet demnach $h \mapsto A'(u, h)(x_2(u)) + A(u)(x_2'(u, h))$.

Satz 2.5 (Quotientenregel) *Seien X normierter Raum, Y Banachraum, $U \subset X$ offen. Weiterhin sei die Abbildung $F : U \rightarrow \mathcal{L}(Y, Y)$ Fréchet-differenzierbar in $\varphi_0 \in U$ und $F(\varphi) \in \mathcal{L}(Y, Y)$ beschränkt invertierbar für alle $\varphi \in U$. Dann ist*

$$G : U \rightarrow \mathcal{L}(Y, Y), \varphi \mapsto (F(\varphi))^{-1}$$

Fréchet-differenzierbar in φ_0 mit der Ableitung $G'(\varphi_0, \cdot) \in \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(Y, Y))$,

$$G'(\varphi_0, h) = -G(\varphi_0)F'(\varphi_0, h)G(\varphi_0).$$

Definition 2.6 (Ableitungen höherer Ordnung) *Seien X, Y normierte Räume, $U \subset X$ offen und $F : U \rightarrow Y$ ein Fréchet-differenzierbarer Operator. Dann heißt F an der Stelle $\varphi_0 \in X$ zweimal Fréchet-differenzierbar, wenn die Abbildung $F' : U \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ an der Stelle φ_0 Fréchet-differenzierbar ist. Mit anderen Worten: wenn ein linearer und beschränkter Operator $F''(\varphi_0) : X \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ existiert, mit der Eigenschaft*

$$\|F'(\varphi_0 + h) - F'(\varphi_0) - F''(\varphi_0, h)\|_{\mathcal{L}(X, Y)} = o(\|h\|_X), \quad h \rightarrow 0. \quad (2.7)$$

Gleichung (2.7) lässt sich in ausführlicher Form schreiben als

$$\sup_{\|\tilde{h}\|_X=1} \|F'(\varphi_0 + h, \tilde{h}) - F'(\varphi_0, \tilde{h}) - F''(\varphi_0, h, \tilde{h})\|_Y = o(\|h\|_X), \quad h \rightarrow 0.$$

Da die Räume $\mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y))$ und $\mathcal{L}(X \times X, Y)$ isometrisch isomorph sind, lässt sich $F''(\varphi_0)$ als beschränkter bilinear Operator von $X \times X$ nach Y interpretieren.

Später werden lediglich Terme $F''(\varphi_0, h_1, h_2) \in Y$ mit $h_1 = h_2 \in X$ benötigt. In diesem Fall ist wegen der Isometrie eine abkürzende Schreibweise

$$F''(\varphi_0, h) := F''(\varphi_0, h, h)$$

naheliegend.

2.3 Funktionalanalytische Grundlagen

Satz 2.7 *Sei $G \subset \mathbb{R}^m$ nichtleer, offen und beschränkt. Desweiteren sei*

$$k : \overline{G} \times \overline{G} \rightarrow \mathbb{C}, (x, y) \mapsto k(x, y),$$

stetig oder schwach singulär. Dann ist der Operator $A : C(\overline{G}) \rightarrow C(\overline{G})$, definiert durch

$$(A\varphi)(x) = \int_G k(x, y)\varphi(y) dy, \quad x \in \overline{G},$$

linear, beschränkt und kompakt.

Beweis: siehe [35, Chapter 2].

■

Kapitel 3

Eine singuläre Integralgleichung

Die Behandlung von Randwertproblemen für C^2 -glatte Gebiete D im \mathbb{R}^2 mittels Integralgleichungsmethoden führt nach einer Parametrisierung auf Integralgleichungen mit stetigen oder schwach singulären Kernen. Weist das Gebiet D hingegen Ecken auf, so spiegelt sich das im singulären Verhalten der Kerne wider. Für eine Behandlung der Randintegralgleichung (4.12) im Kapitel 4 ist es daher erforderlich, auf diese Problematik einzugehen. An dieser Stelle ist nicht die Kenntnis über die exakte Form der Gleichung (4.12) erforderlich. Es soll vielmehr, losgelöst vom konkreten Problem, ausschließlich mit funktionalanalytischen Hilfsmitteln gearbeitet werden.

Daher wird in diesem Kapitel eine singuläre Integralgleichung zweiter Art behandelt, deren Kern sich in den Ecken des Quadrats $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ wie ein Mellin-Kern verhält. Das singuläre Verhalten des Kerns spiegelt sich in den Singularitäten der Ableitungen der Lösung wider.

3.1 Zur Existenz und Eindeutigkeit

Betrachte die Gleichung zweiter Art

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \int_0^{2\pi} \left\{ K_A(t, \tau) + K_B(t, \tau) + K_C(t, \tau) \ln \left(4 \sin^2 \frac{t - \tau}{2} \right) \right\} [\varphi(\tau) - \varphi(0)] d\tau \\ &+ \gamma(t)\varphi(0) = f(t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \end{aligned} \tag{3.1}$$

bei gegebenen $f, \gamma \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und den in beiden Variablen 2π -periodischen Kernen K_A, K_B, K_C .

An die Kerne werden die folgenden Voraussetzungen gestellt:

1. $K_C \in C_{2\pi}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$,
2. K_B ist beschränkt auf $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ und dort mit Ausnahme der vier Ecken stetig,
3. K_A ist stetig auf $(0, 2\pi] \times (0, 2\pi]$,
4. $K_A \geq 0$ oder $K_A \leq 0$,
5. K_A hat Träger in $[0, \delta] \times [0, \delta]$, $0 < \delta < 2\pi$.

Desweiteren existiere eine beschränkte, stetig differenzierbare Funktion

$$k : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$$

mit beschränkter Ableitung k' und

$$\begin{aligned} k(0) &= 0, \\ k(s) &= O\left(\frac{1}{s}\right), \quad s \rightarrow \infty, \\ |K_A(t, \tau)| &\leq \frac{1}{\tau} k\left(\frac{t}{\tau}\right) \quad \text{für } \tau > 0, \end{aligned} \tag{3.2}$$

$$\int_0^\infty \frac{k(s)}{s} ds < 1. \tag{3.3}$$

Mit den Integraloperatoren

$$(A\varphi)(t) := \int_0^{2\pi} K_A(t, \tau) [\varphi(\tau) - \varphi(0)] d\tau, \tag{3.4}$$

$$(B\varphi)(t) := \int_0^{2\pi} K_B(t, \tau) [\varphi(\tau) - \varphi(0)] d\tau - \gamma(t)\varphi(0), \tag{3.5}$$

$$(C\varphi)(t) := \int_0^{2\pi} K_C(t, \tau) \ln\left(\sin^2 \frac{t-\tau}{2}\right) [\varphi(\tau) - \varphi(0)] d\tau, \tag{3.6}$$

erhält die Integralgleichung (3.1) die Form

$$(I - A - B - C)\varphi = f. \tag{3.7}$$

Mit der zur gewöhnlichen Supremumnorm äquivalenten Norm

$$\|\varphi\|_{\infty,0} := \max_{0 \leq t \leq 2\pi} |\varphi(t) - \varphi(0)| + |\varphi(0)|$$

wird $C_{2\pi} := C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ein Banachraum.

Satz 3.1 *Die durch (3.4) - (3.6) erklärten Operatoren A, B, C haben die Abbildungseigenschaft*

$$A, B, C : C_{2\pi} \rightarrow C_{2\pi},$$

sind linear und beschränkt. Weiterhin sind B, C kompakt und es gilt

$$\|A\|_{\infty,0} \leq \int_0^\infty \frac{k(s)}{s} ds < 1.$$

Beweis: Die Resultate für B und C ergeben sich aus den Sätzen über schwach singuläre Kerne. Die Eigenschaften des Operators A sind in [28] oder [55] nachgewiesen worden. ■

Der Satz über die Neumannsche Reihe zusammen mit Satz 3.1 liefern das nachfolgende Korollar.

Korollar 3.2 *Für die Operatorgleichung $(I - A - B - C)\varphi = f$ lässt sich die Riesz-Theorie anwenden.*

3.2 Die Substitutionsmethode

Eine Konsequenz der Euler - Maclaurin Formel ist die, dass die Trapezregel zur numerischen Integration von periodischen und hinreichend oft stetig differenzierbaren Funktionen gut geeignet ist. Für Integranden mit (integrierbaren) Endpunktsingularitäten bleibt dieses Resultat nicht richtig. Gesucht wird

$$\int_0^{2\pi} g(t) dt,$$

wobei $g : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$ hinreichend glatt ist, aber in den Endpunkten $t = 0$ und $t = 2\pi$ Singularitäten besitzt. Sei

$$w : [0, 2\pi] \rightarrow [0, 2\pi]$$

bijektiv, streng monoton wachsend und hinreichend oft differenzierbar. Desweiteren haben w in 0 und $2\pi - w$ in 2π Nullstellen höherer Ordnung. Aufgrund der Substitution in

$$\int_0^{2\pi} g(t) dt = \int_0^{2\pi} w'(s)g(w(s)) ds$$

liefert die Trapezregel, angewendet auf den substituierten Integranden, eine Quadraturformel

$$\int_0^{2\pi} g(t) dt \approx \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^{2n-1} \alpha_j^{(n)} g\left(s_j^{(n)}\right) =: Q_n(g) \quad (3.8)$$

mit den Gewichten

$$\alpha_j^{(n)} = w' \left(\frac{j\pi}{n} \right), \quad j = 1, \dots, 2n-1,$$

und den Stützstellen

$$s_j^{(n)} = w \left(\frac{j\pi}{n} \right), \quad j = 1, \dots, 2n-1.$$

Aufgrund der Wahl von w verschwindet der substituierte Integrand an den Intervallenden, sodass die Randterme in (3.8) nicht auftreten.

Die angegebenen Forderungen an die Substitution sollen nun konkretisiert werden.

Definition 3.3 *Es sei $w : [0, 2\pi] \rightarrow [0, 2\pi]$ eine bijektive, streng monoton wachsende Funktion. Dann heißt w zulässig mit Parameter $p \in \mathbb{N}$, falls $w \in C^{p+1}[0, 2\pi]$,*

$$\begin{aligned} 2\pi - w(t) &= w(t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \\ w^{(j)}(0) = w^{(j)}(2\pi) &= 0 \quad \text{für } j = 1, \dots, p-1 \end{aligned}$$

und $w^{(p)}(0) \neq 0$, $w^{(p)}(2\pi) \neq 0$ ist.

In Vogt [55] wurden einige Substitutionen untersucht. Für die numerischen Ergebnisse in der vorliegenden Arbeit wurden die von Korobov vorgeschlagene polynomiale Substitution

$$w_p(t) = \frac{2p-1}{(2\pi)^{2p-2}} \binom{2p-2}{p-1} \int_0^t [u(2\pi-u)]^{p-1} du, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad (3.9)$$

die von Sidi [53] vorgeschlagene trigonometrische Substitution

$$w_p(t) = \frac{2\pi}{\vartheta_p(2\pi)} \vartheta_p(t), \quad \vartheta_p(t) = \int_0^t \left(\sin \frac{u}{2} \right)^{p-1} du, \quad (3.10)$$

sowie die von Kreß vorgeschlagene rationale Substitution

$$w_p(t) = 2\pi \frac{[v(t)]^p}{[v(t)]^p + [v(2\pi - t)]^p}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad p \geq 2, \quad (3.11)$$

mit dem kubischen Polynom

$$v(t) = \left(\frac{2}{p} - 1\right) \frac{(\pi - t)^3}{\pi^2} + \frac{2}{p}(t - \pi) + \pi, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad p \geq 2,$$

verwendet.

Der passende Funktionenraum für die Anwendung der Quadraturformel (3.8) ist

$$S^{q,\alpha} = \left\{ g \in C^q(0, 2\pi) \mid \int_0^{2\pi} [t(2\pi - t)]^{j-\alpha} |g^{(j)}(t)| dt \text{ existiert für } j = 0, \dots, q \right\}, \quad (3.12)$$

wobei für die Parameter gelte $q \in \mathbb{N}$ und $0 < \alpha \leq q$. $S^{q,\alpha}$ wird mit der Norm

$$\|g\|_{q,\alpha} := \max_{j=0,\dots,q} \int_0^{2\pi} [t(2\pi - t)]^{j-\alpha} |g^{(j)}(t)| dt \quad (3.13)$$

ein normierter Raum.

Der nachfolgende Satz macht eine Aussage über den Quadraturfehler für Funktionen aus $S^{q,\alpha}$.

Satz 3.4 *Seien $g \in S^{2q+1,\alpha}$ mit $0 < \alpha \leq q$ und w zulässig mit Parameter $p \in \mathbb{N}$ derart, dass*

$$\alpha p \geq 2q + 1 \text{ und } p > 2q + 1.$$

Dann gilt für den Fehler

$$E_{n,p}(g) := \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^{2n-1} \alpha_j^{(n)} g\left(s_j^{(n)}\right) - \int_0^{2\pi} g(t) dt$$

in der Quadraturformel (3.8)

$$|E_{n,p}(g)| \leq \frac{C}{n^{2q+1}} \|g\|_{2q+1,\alpha}$$

mit einer Konstanten $C = C(w, \alpha, q)$.

Beweis: Für den Beweis sei auf [28] oder [55] verwiesen. ■

Bemerkung 3.5 In [34] wird gezeigt, dass sich bei modifizierter Definition des Raumes $S^{q,\alpha}$ und der speziellen Substitution w , mit

$$w(z) = \frac{1}{1 + e^{-z}},$$

die die Differenzialgleichung $w' = w(1 - w)$ erfüllt, für die Quadraturformel

$$\int_0^1 g(t) dt \approx h \sum_{j=-n}^n w'(jh) g(w(jh)) =: Q_{n,h}(g)$$

eine exponentielle Fehlerabschätzung gewinnen lässt.

Für den Integraloperator C gemäß (3.6) ist eine numerische Auswertung mit einer Trapezregel beziehungsweise „gewichteten“ Trapezregel (3.8) nicht vielversprechend. Zur Approximation von Integralen mit schwach singulärer Gewichtsfunktion, hier $\ln\left(4 \sin^2 \frac{t-\tau}{2}\right)$, werden Quadraturformeln benötigt, deren Gewichte wiederum Funktionen sind. Eine ausführliche Darstellung findet man bei Sloan [54]. Für die hier vorliegende logarithmische Singularität wird wie in Kussmaul [38] und Martensen [42] vorgegangen.

Sei dazu $g \in C_{2\pi}$. Die Quadraturformel

$$\begin{aligned} (Qg)(t) &= \int_0^{2\pi} \ln\left(4 \sin^2 \frac{t-\tau}{2}\right) g(\tau) d\tau \\ &\approx \int_0^{2\pi} \ln\left(4 \sin^2 \frac{t-\tau}{2}\right) (P_n g)(\tau) d\tau =: (Q_n g)(t), \end{aligned} \quad (3.14)$$

mit dem trigonometrischen Interpolationsoperator

$$\begin{aligned} P_n : \quad C_{2\pi} &\rightarrow T_n := \left\{ \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} [\alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt] + \frac{\alpha_n}{2} \cos nt \mid \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R} \right\}, \\ P_n g &= \sum_{j=0}^{2n-1} g(t_j^{(n)}) l_j^{(n)}, \quad l_j^{(n)}(t_k^{(n)}) = \delta_{jk}, \end{aligned}$$

zu den äquidistanten Stützstellen $t_j^{(n)} = j\pi/n$, $j = 0, \dots, 2n-1$, führt auf

$$(Q_n g)(t) = \sum_{j=0}^{2n-1} R_j^{(n)}(t) g(t_j^{(n)}) \quad (3.15)$$

mit den Gewichten

$$\begin{aligned}
R_j^{(n)}(t) &= \int_0^{2\pi} \ln \left(4 \sin^2 \frac{t-\tau}{2} \right) l_j^{(n)}(\tau) d\tau \\
&= -\frac{2\pi}{n} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m} \cos m(t-t_j^{(n)}) - \frac{\pi}{n^2} \cos n(t-t_j^{(n)}), j = 0, \dots, 2n-1,
\end{aligned} \tag{3.16}$$

wobei die Lagrangebasis $l_j^{(n)}$ gegeben ist durch

$$\begin{aligned}
l_j^{(n)}(t) &= \operatorname{Re} \frac{1}{2n} \left\{ 1 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} e^{ik(t-t_j^{(n)})} + e^{in(t-t_j^{(n)})} \right\} \\
&= \operatorname{Re} \frac{1}{2n} i(1 - e^{in(t-t_j^{(n)})}) \cot \frac{t-t_j^{(n)}}{2} \\
&= \frac{1}{2n} \sin n(t-t_j^{(n)}) \cot \frac{t-t_j^{(n)}}{2}, t \neq t_j^{(n)}, j = 0, \dots, 2n-1.
\end{aligned}$$

Um die Quadraturformeln (3.8) und (3.15) gleichzeitig auf die Gleichung (3.7) anwenden zu können, ist auch beim logarithmischen Anteil eine Substitution erforderlich.

Mit $t = w(s)$ und $\tau = w(\sigma)$ gilt

$$\begin{aligned}
&\int_0^{2\pi} \ln \left(4 \sin^2 \frac{t-\tau}{2} \right) g(\tau) d\tau \\
&= \int_0^{2\pi} \ln \left(4 \sin^2 \frac{w(s)-w(\sigma)}{2} \right) g(w(\sigma))w'(\sigma) d\sigma \\
&= \int_0^{2\pi} \ln \left(4 \sin^2 \frac{s-\sigma}{2} \right) g(w(\sigma))w'(\sigma) d\sigma + \int_0^{2\pi} T(s, \sigma) g(w(\sigma))w'(\sigma) d\sigma \\
&\approx \sum_{j=1}^{2n-1} R_j^{(n)}(s) \alpha_j^{(n)} g(s_j^{(n)}) + \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^{2n-1} T(s, t_j^{(n)}) \alpha_j^{(n)} g(s_j^{(n)})
\end{aligned} \tag{3.17}$$

mit der stetigen Funktion

$$w'T : [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}, (s, \sigma) \mapsto w'(\sigma) T(s, \sigma),$$

wobei T erklärt ist durch

$$T(s, \sigma) = \begin{cases} \ln \left(\frac{\sin^2 \frac{w(s)-w(\sigma)}{2}}{\sin^2 \frac{s-\sigma}{2}} \right) & : 0 \leq s, \sigma \leq 2\pi, |s - \sigma| \notin \{0, 2\pi\}, \\ 2 \ln w'(s) & : 0 < s = \sigma < 2\pi. \end{cases} \quad (3.18)$$

3.3 Ein Nyström - Verfahren

Eine Möglichkeit (3.7) approximativ zu lösen besteht darin, die Integrale zu ersetzen durch die Quadraturformeln (3.8) und (3.17). Für den Rest des Kapitels werden von w_p die Eigenschaften aus Definition 3.3 gefordert.

Für $n \in \mathbb{N}$ ist $\varphi_n \in C_{2\pi}$ so zu bestimmen, dass für $0 \leq t \leq 2\pi$ gilt

$$\begin{aligned} \varphi_n(t) & - \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^{2n-1} \left\{ (K_A + K_B)(t, s_j^{(n)}) + K_C(t, s_j^{(n)}) \left[T(w^{-1}(t), t_j^{(n)}) + \frac{n}{\pi} R_j^{(n)}(w^{-1}(t)) \right] \right\} \times \\ & \times \alpha_j^{(n)} [\varphi(s_j^{(n)}) - \varphi(0)] + \gamma(t)\varphi(0) = f(t), \end{aligned} \quad (3.19)$$

wobei weiterhin die Bezeichnungen $t_j^{(n)} = j\pi/n$, $s_j^{(n)} = w(t_j^{(n)})$ und $\alpha_j^{(n)} = w'(t_j^{(n)})$ gelten.

Für jede Lösung $\varphi_n \in C_{2\pi}$ von (3.19) erfüllen die Werte $\varphi_l^{(n)} := \varphi(s_l^{(n)})$, $l = 0, \dots, 2n-1$, das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \varphi_l^{(n)} & - \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^{2n-1} \left\{ (K_A + K_B)(s_l^{(n)}, s_j^{(n)}) + K_C(s_l^{(n)}, s_j^{(n)}) \left[T(t_l^{(n)}, t_j^{(n)}) + \frac{n}{\pi} R_{|j-l|}^{(n)} \right] \right\} \times \\ & \times \alpha_j^{(n)} [\varphi_j^{(n)} - \varphi_0^{(n)}] + \gamma(s_l^{(n)})\varphi_0^{(n)} = f(s_l^{(n)}), \end{aligned} \quad (3.20)$$

wobei für die Matrixelemente $R_{|j-l|}^{(n)} := R_j^{(n)}(t_l^{(n)})$ gilt

$$R_k^{(n)} = -\frac{2\pi}{n} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m} \cos \left(\frac{mk\pi}{n} \right) - \frac{(-1)^k \pi}{n^2}, \quad k = 0, \dots, 2n-1. \quad (3.21)$$

Umgekehrt erhält man für eine Lösung $\varphi_0^{(n)}, \dots, \varphi_{2n-1}^{(n)}$ des Gleichungssystems (3.20) durch

$$\begin{aligned} \varphi_n(t) & := \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^{2n-1} \left\{ (K_A + K_B)(t, s_j^{(n)}) + K_C(t, s_j^{(n)}) \left[T(w^{-1}(t), t_j^{(n)}) + \frac{n}{\pi} R_j^{(n)}(w^{-1}(t)) \right] \right\} \times \\ & \times \alpha_j^{(n)} [\varphi_j^{(n)} - \varphi_0^{(n)}] + f(t) - \gamma(t)\varphi_0^{(n)} \end{aligned}$$

eine Lösung von (3.19), denn $\varphi_n(s_i^{(n)}) = \varphi_i^{(n)}$.

Um eine Konvergenzaussage formulieren zu können, werden weitere Voraussetzungen an die Kerne gestellt. Dazu gelte

- K_B und K_C sind bezüglich der zweiten Variablen $2q + 1$ -mal stetig differenzierbar auf $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$.
- Für den im Punkt $(0, 0)$ singulären Kern K_A existieren die partiellen Ableitungen bezüglich τ bis zur Ordnung $2q + 1$ und diese sind stetig auf $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \setminus \{(0, 0)\}$.
- Es existieren Funktionen

$$k_l : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), \quad l = 0, \dots, 2q + 1,$$

mit den Eigenschaften

$$k_l(s) = O\left(\frac{1}{s}\right), \quad s \rightarrow \infty, \quad (3.22)$$

$$\left| \frac{\partial^l}{\partial \tau^l} K_A(t, \tau) \right| \leq \frac{1}{\tau^{l+1}} k_l\left(\frac{t}{\tau}\right), \quad \tau > 0. \quad (3.23)$$

Mit den Operatoren

$$(A_n \varphi)(t) = \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^{2n-1} \alpha_j^{(n)} K_A(t, s_j^{(n)}) [\varphi(s_j^{(n)}) - \varphi(0)], \quad (3.24)$$

$$(B_n \varphi)(t) = \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^{2n-1} \alpha_j^{(n)} K_B(t, s_j^{(n)}) [\varphi(s_j^{(n)}) - \varphi(0)] - \gamma(t) \varphi(0), \quad (3.25)$$

$$(C_n \varphi)(t) = \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^{2n-1} \alpha_j^{(n)} K_C(t, s_j^{(n)}) \left\{ T(w^{-1}(t), t_j^{(n)}) + \frac{n}{\pi} R_j^{(n)}(w^{-1}(t)) \right\} [\varphi(s_j^{(n)}) - \varphi(0)] \quad (3.26)$$

wird im nachfolgenden Satz ein Konvergenzresultat zitiert. Vorab werden mit einer stetigen Funktion $g : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$, mit

$$g(s) = \begin{cases} 0 & : s \leq 0.5 \\ 1 & : s \geq 1 \end{cases},$$

die Operatoren A_n modifiziert, das heißt für $r \in \{1, 2, \dots, 2n-1\}$ werden die Operatoren $A_{n,r} : C_{2\pi} \rightarrow C_{2\pi}$ erklärt durch

$$(A_{n,r}\varphi)(t) = g\left(\frac{t}{s_r^{(n)}}\right) (A_n\varphi)(t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \quad (3.27)$$

Satz 3.6 *Seien $0 < \alpha < 1$, $\alpha p \geq 2q + 1$. Für die Lösung der Gleichung*

$$(I - A - B - C)\varphi = f$$

gelte $\varphi - \varphi(0) \in S^{2q+1, \alpha+1}$. Dann existiert ein $r \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n \geq r$ die Operatoren $I - A_{n,r} - B_n - C_n$ beschränkt invertierbar sind. Insbesondere besitzt

$$(I - A_{n,r} - B_n - C_n)\varphi_n = f$$

genau eine Lösung $\varphi_n \in C_{2\pi}$. Es gilt die Fehlerabschätzung

$$\|\varphi_n - \varphi\|_\infty \leq C(\alpha, p, q) \frac{\ln(n)}{n^{2q-1}} \|\varphi - \varphi(0)\|_{2q+1, \alpha+1}$$

mit einer von n und φ unabhängigen Konstanten $C(\alpha, p, q)$.

Beweis: Der Beweis soll nur skizziert werden. Für eine ausführliche Darstellung sei auf Kümpel [39] verwiesen. Wie in Kreß [28] erhält man zunächst mit dem Integral (3.3) und dem Satz über die Neumannsche Reihe ein $r > 0$ so, dass die Operatoren $(I - A_{n,r})^{-1}$ für $n \geq r$ existieren und gleichmäßig beschränkt sind. Mit den zusätzlich vorausgesetzten Glätteeigenschaften der Kerne K_A, K_B, K_C lässt sich punktweise Konvergenz der Operatoren $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}, (B_n)_{n \in \mathbb{N}}, (C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ folgern, das heißt

$$\begin{aligned} \|(A - A_n)\psi\|_{\infty,0} &\leq \frac{c}{n^{2q+1}} \|\psi - \psi(0)\|_{2q+1, \alpha+1}, \\ \|(B - B_n)\psi\|_{\infty,0} &\leq \frac{c}{n^{2q+1}} \|\psi - \psi(0)\|_{2q+1, \alpha+1}, \\ \|(C - C_n)\psi\|_{\infty,0} &\leq \frac{c \ln n}{n^{2q-1}} \|\psi - \psi(0)\|_{2q+1, \alpha+1}, \end{aligned}$$

vorausgesetzt $\psi - \psi(0) \in S^{2q+1, \alpha+1}$. Mit der Kollektiv-Kompaktheit der Folgen $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}, (C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und der Dreiecksungleichung

$$\|(A - A_{n,r})\psi\|_{\infty,0} \leq \|(A - A_n)\psi\|_{\infty,0} + \sup_{0 \leq t \leq s_r^{(n)}} |(A\psi)(t)|$$

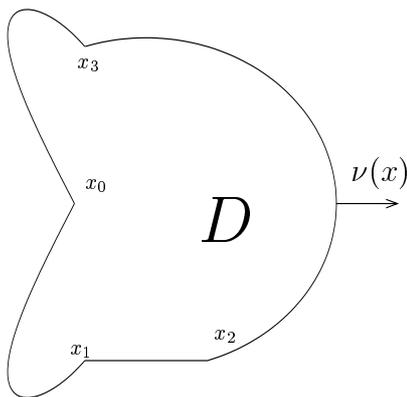
ergibt sich die Behauptung aus Kreß [35, Theorem 10.8 und Problem 10.3]. ■

Kapitel 4

Das direkte Streupproblem

Seien $D \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet, $\mathbb{R}^2 \setminus D$ zusammenhängend und x_0, x_1, \dots, x_m endlich viele Punkte aus ∂D so, dass gilt $\partial D \setminus \{x_0, x_1, \dots, x_m\}$ besteht aus $m+1$ Randstücken der Klasse C^2 .

Mit $\Gamma_j := \overline{x_j, x_{j+1}}$, $j = 0, \dots, m-1$, $\Gamma_m := \overline{x_m, x_0}$ werden die C^2 -glatten Randstücke bezeichnet. Für Punkte $x \in \partial D$ werden mit $\beta(x)$ die Innenwinkel bei x bezeichnet. Insbesondere gelte $0 < \beta(x_j) < 2\pi$, $j = 0, \dots, m$ und $\beta(x) = \pi$, $x \in \partial D \setminus \{x_0, x_1, \dots, x_m\}$.



Für die Wellenzahl $k \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ setzen wir $k \in \mathbb{R}^+$ oder $\text{Im}(k) > 0$, $\text{Re}(k) \geq 0$ voraus. Die Normale $\nu(x)$ (in den regulären Randpunkten) weise in das unbeschränkte Außengebiet.

4.1 Randwertprobleme zur Helmholtzgleichung

Definition 4.1 (Äußeres Dirichletproblem)

Gegeben ist $f \in C(\partial D)$. Gesucht wird eine Funktion $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}) \cap C(\mathbb{R}^2 \setminus D)$ als Lösung der Helmholtzgleichung

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}, \quad (4.1)$$

die die Randbedingung

$$u = f \quad \text{auf } \partial D \quad (4.2)$$

und die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung (SAB)

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{1/2} \left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) = 0, \quad r = |x| \quad (4.3)$$

gleichmäßig für alle Richtungen $\hat{x} = \frac{x}{|x|}$ erfüllt.

Definition 4.2 (Inneres Neumannproblem)

Gegeben ist $g \in C(\partial D)$. Gesucht wird eine Funktion $u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$, deren Normalableitung

$$\frac{\partial u_-(x)}{\partial \nu} := \lim_{h \downarrow 0} \text{grad } u(x - h\nu(x)) \nu(x), \quad x \in \partial D \setminus \{x_0, \dots, x_m\}$$

in den regulären Randpunkten existiert, die in D die Helmholtzgleichung löst und die Randbedingung

$$\frac{\partial u_-(x)}{\partial \nu} = g(x), \quad x \in \partial D \setminus \{x_0, \dots, x_m\} \quad (4.4)$$

erfüllt.

4.2 Zur Eindeutigkeit beim äußeren Dirichlet-Problem

Prinzipiell lässt sich der Eindeutigkeitsbeweis wie in [7, Lemma 3.8] führen, da der Satz von Gauß auf Funktionen aus $C_0^1(D_R)$ angewendet wird. An dieser Stelle soll jedoch ein anderer Weg besprochen werden, der auch auf andere Differentialgleichungen anwendbar ist.

Lemma 4.3 Für $\varepsilon_1 > 0$ sei $\tilde{f} :]0, \varepsilon_1] \rightarrow \mathbb{R}$ monoton fallend, differenzierbar und erfülle die Differenzialungleichung

$$|\tilde{f}(\varepsilon)| \leq C_1 \varepsilon^2 + C_2 \sqrt{-\varepsilon \tilde{f}'(\varepsilon)}, \quad 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_1 \quad (4.5)$$

mit von ε unabhängigen Konstanten $C_1 \geq 0, C_2 > 0$. Dann existiert der rechtsseitige Grenzwert

$$\tilde{f}(0) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \tilde{f}(\varepsilon)$$

und ist Null.

Beweis: Siehe [24] oder im Fall $C_1 = 0$ [55, Lemma 5.2]. ■

Für den Eindeutigkeitsbeweis führen wir die Bezeichnungen $D_{\varepsilon, R}$ und Γ_ε ein. Dazu sei $R > 0$ so groß, dass \overline{D} in der offenen Kreisscheibe $B(0, R)$ enthalten ist.

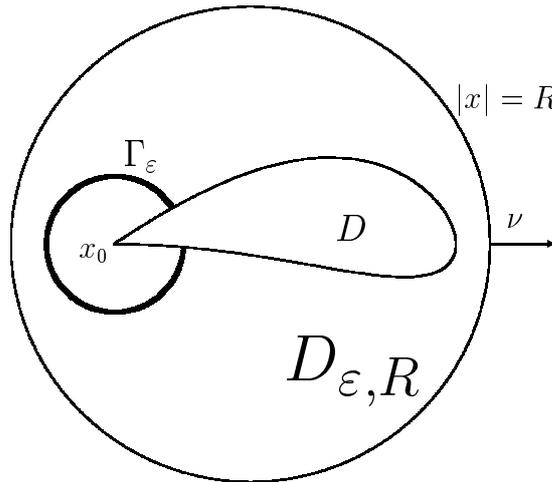


Abbildung: Darstellung für den Fall genau einer Ecke.

Für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ ist die Menge

$$D_{\varepsilon, R} := \{x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D} \mid |x| < R, |x - x_j| > \varepsilon \text{ für alle } j = 0, \dots, m\}$$

ebenfalls ein Gebiet und

$$\Gamma_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D} \mid \exists j \in \{0, \dots, m\} \text{ mit } |x - x_j| = \varepsilon\}$$

besteht aus $m+1$ glatten Kurvenstücken. Für die Normalenrichtung auf dem Kurvenstück Γ_ε wird nachfolgendes vereinbart: Bei Oberflächenintegralen, bei dem der Integrationsbereich der Rand eines Gebiets ist, weist die Normale in das Außengebiet. Tritt das Integral über Γ_ε separat auf, so wird auf dem Teil von Γ_ε mit $|x - x_j| = \varepsilon$ die Normale durch $\nu(x) = \frac{x - x_j}{\varepsilon}$ gegeben.

Lemma 4.4 Für $\varepsilon_1 > 0$ sei $u \in C(\overline{D_{\varepsilon_1, R}})$. Dann ist

$$\tilde{f}(\varepsilon) := \int_{D_{\varepsilon, R}} u(x) dx, \quad \varepsilon > \varepsilon_1$$

differenzierbar mit Ableitung

$$\tilde{f}'(\varepsilon) = - \int_{\Gamma_\varepsilon} u(x) ds(x).$$

Beweis: Siehe [55, Lemma 5.1]. ■

Satz 4.5 Das äußere Dirichletproblem (4.1) - (4.3) besitzt höchstens eine Lösung.

Beweis: Aufgrund der Linearität genügt der Nachweis der Eindeutigkeit für das homogene Problem. Sei u Lösung zu $f = 0$. Für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ und großes $R > 0$ ist $D_{\varepsilon, R}$ ein Gebiet mit stückweise glattem Rand. Es ist bekannt (siehe Bemerkung 4.7), dass u bis in den Rand von $D_{\varepsilon, R}$ differenzierbar ist. Der erste Greensche Satz angewendet auf das Gebiet $D_{\varepsilon, R}$ und die Funktionen u, \bar{u} liefert

$$\int_{D_{\varepsilon, R}} \left[|\text{grad } u|^2 - \bar{k}^2 |u|^2 \right] dx = \int_{\partial D_{\varepsilon, R}} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} ds. \quad (4.6)$$

Wir bilden den Realteil dieser Gleichung und erhalten für

$$\tilde{f}(\varepsilon) := \int_{D_{\varepsilon, R}} |\text{grad } u|^2 dx - \text{Re}(\bar{k}^2) \int_{|x| \leq R, x \notin D} |u|^2 dx - \text{Re} \int_{|x|=R} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} ds$$

die Beziehung

$$\tilde{f}(\varepsilon) = - \text{Re}(\bar{k}^2) \sum_{j=0}^m \int_{|x-x_j| \leq \varepsilon, x \notin D} |u|^2 dx - \text{Re} \int_{\Gamma_\varepsilon} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} ds. \quad (4.7)$$

Die auf $]0, \varepsilon_1]$ definierte Funktion \tilde{f} ist monoton fallend (Das Gebiet $D_{\varepsilon,R}$ wird mit wachsendem ε kleiner.) und ist nach Lemma 4.4 differenzierbar mit Ableitung

$$\tilde{f}'(\varepsilon) = - \int_{\Gamma_\varepsilon} |\text{grad } u|^2 ds.$$

Es verbleibt der Nachweis, dass \tilde{f} eine Differentialungleichung wie in Lemma 4.3 erfüllt. Mit $M = \|u\|_{\infty, B[0,R] \setminus D}$ liefert die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung angewendet auf den zweiten Summanden in (4.7)

$$\begin{aligned} |\tilde{f}(\varepsilon)| &\leq |k|^2(m+1)\pi\varepsilon^2 M^2 + \left(\int_{\Gamma_\varepsilon} |u|^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_{\Gamma_\varepsilon} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 ds \right)^{1/2} \\ &\leq C_1 \varepsilon^2 + M \sqrt{m+1} \sqrt{2\pi\varepsilon} \sqrt{-\tilde{f}'(\varepsilon)} \\ &= C_1 \varepsilon^2 + C_2 \sqrt{-\varepsilon \tilde{f}'(\varepsilon)}. \end{aligned}$$

Demnach ist $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \tilde{f}(\varepsilon) = 0$. Da der erste Summand in der Darstellung (4.7) quadratisch gegen Null strebt, folgt für den zweiten Summanden

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{Re} \int_{\Gamma_\varepsilon} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} ds = 0. \quad (4.8)$$

Insbesondere folgt die Existenz von

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{D_{\varepsilon,R}} |\text{grad } u|^2 dx = \text{Re}(\bar{k}^2) \int_{|x| \leq R, x \notin D} |u|^2 dx + \text{Re} \int_{|x|=R} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} ds.$$

Als nächstes wird

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{Im} \int_{\Gamma_\varepsilon} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} ds = 0$$

gezeigt. Die Bildung des Imaginärteils von (4.6) ergibt

$$0 = \underbrace{\text{Im}(\bar{k}^2) \int_{D_{\varepsilon,R}} |u|^2 dx + \text{Im} \int_{|x|=R} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} ds}_{=: h(\varepsilon, R)} - \text{Im} \int_{\Gamma_\varepsilon} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} ds.$$

Wir wissen $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h(\varepsilon, R)$ existiert und für das Argument der Wellenzahl gilt $\arg(k) \in [0, \pi/2]$, also $\text{Im}(\bar{k}^2) \leq 0$. Damit ist $h(\cdot, R)$ sowohl für $k \in \mathbb{R}^+$, als auch für $\text{Im}(k) >$

0, $\operatorname{Re}(k) \geq 0$, monoton wachsend. Die Cauchy-Schwarzsche-Ungleichung

$$|h(\varepsilon, R)| \leq M \sqrt{m+1} \sqrt{2\pi\varepsilon} \left(\int_{\Gamma_\varepsilon} \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} \right|^2 ds \right)^{1/2}$$

liefert wegen

$$\int_{\Gamma_\varepsilon} |\operatorname{grad} u|^2 ds \geq \frac{|h(\varepsilon, R)|^2}{M^2 (m+1) 2\pi\varepsilon}$$

sowohl für $h(0, R) > 0$ als auch $h(0, R) < 0$ einen Widerspruch zur Existenz von

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{D_{\varepsilon, R}} |\operatorname{grad} u|^2 dx,$$

denn: Für hinreichend kleine $\varepsilon_2 > \varepsilon_1 \geq 0$ und geeignete Funktionen $\vartheta_{1,j}, \vartheta_{2,j}$, gilt

$$\begin{aligned} \int_{|x| \leq R, x \notin D} |\operatorname{grad} u|^2 dx &\geq \sum_{j=0}^m \int_{\varepsilon_1 \leq |x-x_j| \leq \varepsilon_2} |\operatorname{grad} u|^2 dx \\ &= \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \sum_{j=0}^m \int_{\vartheta_{1,j}(r)}^{\vartheta_{2,j}(r)} |\operatorname{grad} u(r, \vartheta)|^2 r d\vartheta dr \\ &\geq \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} \frac{|h(r, R)|^2}{M^2 (m+1) 2\pi r} dr. \end{aligned}$$

Im Fall $h(0, R) > 0$ setzen wir $\varepsilon_1 = 0$ und schätzen das letzte Integral nach unten ab durch

$$\frac{|h(0, R)|^2}{M^2 (m+1) 2\pi} \int_0^{\varepsilon_2} \frac{dr}{r} \geq \infty.$$

Im Fall $h(0, R) < 0$ ergibt sich die gleiche Abschätzung unter Verwendung von $|h(r, R)|^2 > C > 0$ auf $0 \leq r \leq \varepsilon_2$ und festem R . Also gilt $h(0, R) = 0$.

Demnach verschwinden sowohl der Real- als auch Imaginärteil von

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} ds.$$

Die (bei festem R) bezüglich ε gleichmäßige Beschränktheit der Terme

$$\int_{D_{\varepsilon, R}} |u|^2 dx, \int_{D_{\varepsilon, R}} |\operatorname{grad} u|^2 dx$$

und Existenz von

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} ds = 0$$

erlaubt in (4.6) den Grenzübergang $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\int_{|x| \leq R, x \notin D} |\text{grad } u|^2 dx = \overline{k^2} \int_{|x| \leq R, x \notin D} |u|^2 dx + \int_{|x|=R} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} ds.$$

Multiplikation mit k und Imaginärteilbildung zusammen mit der (SAB) (4.3) ergibt

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{R \rightarrow \infty}{\longleftarrow} \int_{|x|=R} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} - iku \right|^2 ds \\ &= \int_{|x|=R} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 + |ku|^2 \right) ds + 2 \operatorname{Im} \left(k \int_{|x|=R} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} ds \right) \\ &= \int_{|x|=R} \left(\left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 + |ku|^2 \right) ds + \underbrace{2 \operatorname{Im}(k)}_{\geq 0} \int_{|x| \leq R, x \notin D} |\text{grad } u|^2 dx \\ &\quad - \underbrace{2 \operatorname{Im}(\bar{k})}_{\geq 0} |k|^2 \int_{|x| \leq R, x \notin D} |u|^2 dx \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

Für $k \in \mathbb{R}^+$ folgt aus $\int_{|x|=R} |u|^2 ds \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty$, die Behauptung $u = 0$ aus dem Rellich-Lemma [7, Lemma 2.11], während sie für $\operatorname{Im}(k) > 0$ unmittelbar aus $\int_{|x| \leq R, x \notin D} |u|^2 dx \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty$, folgt. ■

Bemerkung 4.6 Die Beweisidee für Satz 4.5 ist den Arbeiten von Lewis-Wickham [41] und Wickham [56] entnommen worden. Die erwähnten Autoren behandeln in ihren Artikeln jeweils ein äußeres Neumannproblem (in [56] zur Helmholtzgleichung) außerhalb eines Bogens. In Vogt [55, Abschnitt 5.2] ist auf ähnliche Weise ein Eindeutigkeitsbeweis zum Dirichletproblem bei der Elastizitätsgleichung geführt worden.

Bemerkung 4.7 Die Anwendung des Greenschen Satzes auf das Gebiet $D_{\varepsilon,R}$ und die Funktionen u, \bar{u} ist noch zu rechtfertigen. Dazu ist das Gebiet D in jeweils $\varepsilon/2$ -Umgebungen der Ecken x_0, \dots, x_m so zu modifizieren, dass das neue Gebiet \tilde{D} einen C^2 -glatten Rand besitzt und $D \subset \tilde{D}$ gilt. Betrachtet man nun das äußere Dirichletproblem mit Randwerten

$u|_{\partial\tilde{D}}$ bezüglich \tilde{D} , so folgt aus den Abbildungseigenschaften der Randintegral- und Potenzialoperatoren die $C^{1,\alpha}$ -Regularität von \tilde{u} bis in den Rand von \tilde{D} . Wegen der Eindeutigkeit stimmen u und \tilde{u} auf $\mathbb{R}^2 \setminus \tilde{D}$ überein. Damit ist $u \in C^2(D_{\varepsilon,R}) \cap C^1(\overline{D_{\varepsilon,R}})$.

Es ist gelegentlich günstig, auch für das adjungierte Problem die Eindeutigkeit sicherzustellen.

Satz 4.8 *Für $\text{Im}(k) > 0$ besitzt das innere Neumannproblem (4.2) höchstens eine Lösung, während für $k \in \mathbb{R}^+$ die Eindeutigkeit bis auf eine abzählbare Menge von Wellenzahlen, die sich nur im Unendlichen häufen, sichergestellt ist.*

Beweis: Sei u Lösung mit Randwerten $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$. Analog zum Beweis der Eindeutigkeit beim äußeren Dirichletproblem erklären wir für hinreichend kleine ε Gebiete

$$D_\varepsilon := \{x \in D \mid |x - x_j| > \varepsilon \forall j = 0, \dots, m\}$$

und Ränder

$$\Gamma_\varepsilon := \{x \in D \mid \exists j \in \{0, \dots, m\} \text{ mit } |x - x_j| = \varepsilon\}.$$

Der Greensche Satz angewendet auf D_ε , u , \bar{u} ergibt wegen der homogenen Randbedingung $u = 0$ auf ∂D

$$\int_{D_\varepsilon} (|\text{grad } u|^2 - \overline{k^2} |u|^2) dx = \int_{\Gamma_\varepsilon} u \frac{\partial \bar{u}}{\partial \nu} ds, \quad (4.9)$$

wobei die Normale $\nu(x)$, $x \in \Gamma_\varepsilon$, in die Punkte x_0, \dots, x_m zeigt. Wiederum sichern Lemma 4.3 und 4.4 in (4.9) die Existenz der Grenzwerte für $\varepsilon \rightarrow 0$. Für $\text{Im}(k) > 0$ folgt die Behauptung aus

$$\int_D |u|^2 dx = 0.$$

Für $k \in \mathbb{R}^+$ folgt die Aussage aus der schwachen Formulierung des Randwertproblems. Mit einem Monotonieargument wird das Problem reduziert auf C^2 -glatte Gebiete. Der dazugehörige Operator ist kompakt und besitzt daher nur abzählbar viele Eigenwerte, die sich höchstens bei Null häufen können. Für eine detaillierte Darstellung siehe [9]. ■

4.3 Potenziale und Sprungbeziehungen

Definition 4.9 *Für $\varphi \in C(\partial D)$ heißt*

$$u(x) = \int_{\partial D} \Phi_k(x, y) \varphi(y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D,$$

Einfachschichtpotenzial mit Dichte φ .

Definition 4.10 Für $\varphi \in C(\partial D)$ heißt

$$v(x) = \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial \nu(y)} \varphi(y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D,$$

Doppelschichtpotenzial mit Dichte φ .

Satz 4.11

- i) Das Einfachschichtpotenzial u mit stetiger Dichte φ ist stetig in ganz \mathbb{R}^2 .
 ii) Für die Normalableitung des Einfachschichtpotenzials mit stetiger Dichte $\varphi \in C(\partial D)$ gilt

$$\frac{\partial u_{\pm}(x)}{\partial \nu(x)} = \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial \nu(x)} \varphi(y) ds(y) \mp \frac{1}{2} \varphi(x), \quad x \in \partial D \setminus \{x_0, \dots, x_m\}.$$

Beweis: zu i) Da Φ_0 und Φ_k für $|x - y| \rightarrow 0$ das gleiche singuläre Verhalten aufweisen, folgt die Behauptung aus Hackbusch [18, Satz 8.1.7].

zu ii) Für C^2 -glatte Ränder sind die Beweise in [6, Theorem 2.19] im 3-dimensionalen Fall und in [51, Satz 2.29] im 2-dimensionalen Fall ausgeführt worden. Da Sprungbeziehungen lokale Eigenschaften sind, bleiben die Resultate für stückweise glatte Ränder richtig. ■

Satz 4.12

- i) Das Doppelschichtpotenzial v mit stetiger Dichte φ lässt sich stetig von D nach \overline{D} beziehungsweise von $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ nach $\mathbb{R}^2 \setminus D$ fortsetzen mit den Randwerten

$$v_{\pm}(x) = \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi_k(x, y)}{\partial \nu(y)} \varphi(y) ds(y) + \frac{\beta(x) - \pi \pm \pi}{2\pi} \varphi(x), \quad x \in \partial D.$$

- ii) Für die Normalableitung des Doppelschichtpotenzials mit stetiger Dichte $\varphi \in C(\partial D)$ gilt

$$\frac{\partial v_+(x)}{\partial \nu(x)} = \frac{\partial v_-(x)}{\partial \nu(x)}, \quad x \in \partial D \setminus \{x_0, \dots, x_m\}.$$

Beweis: zu i) Für $x \in \partial D \setminus \{x_0, \dots, x_m\}$ verläuft der Beweis wie in [51, Satz 2.24]. Nach Abspalten der konstanten Dichte erhält man (siehe [2, Lemma 3.2]) zunächst

$$\int_{\partial D} \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial \nu(y)} ds(y) = \begin{cases} 0 & : x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}, \\ -1 & : x \in D, \\ -\frac{\beta(x)}{2\pi} & : x \in \partial D. \end{cases} \quad (4.10)$$

Wie im Beweis von [6, Theorem 2.13] zeigt man die Stetigkeit von

$$\int_{\partial D} \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial \nu(y)} [\varphi(y) - \varphi(x_0)] ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

in einer (einseitigen) Umgebung von x_0 . Zusammen mit (4.10) und dem gleichen singulären Verhalten von Φ_0 und Φ_k ergibt sich die Behauptung.

zu ii) Für C^2 -glatte Ränder sind die Beweise in [6, Theorem 2.21] im 3-dimensionalen Fall und in [51, Satz 2.32] im 2-dimensionalen Fall ausgeführt worden. Wiederum bleibt die Aussage richtig, denn Sprungbeziehungen sind lokale Eigenschaften. ■

4.4 Zur Existenz beim direkten Dirichletproblem

Der Existenzbeweis soll zur Vereinfachung der Darstellung nur für den Fall einer Ecke geführt werden. Der Greensche Darstellungssatz motiviert den Potenzialansatz

$$u(x) = \int_{\partial D} \left[\frac{\partial \Phi_k}{\partial \nu(y)}(x, y) - i\eta \Phi_k(x, y) \right] \varphi(y) ds(y), \quad x \notin \partial D, \quad (4.11)$$

mit Kopplungsparameter $\eta > 0$ und Dichte $\varphi \in C(\partial D)$.

Satz 4.13 *Das Gebiet D erfülle die angegebenen Voraussetzungen mit $m = 0$. Weiterhin sei $f \in C(\partial D)$. Dann gilt: Für jede Lösung $\varphi \in C(\partial D)$ der Integralgleichung*

$$\begin{aligned} 2f(x) &= \varphi(x) + 2 \int_{\partial D} \left[\frac{\partial \Phi_k}{\partial \nu(y)}(x, y) - i\eta \Phi_k(x, y) \right] (\varphi(y) - \varphi(x_0)) ds(y) \\ &\quad + \varphi(x_0) \gamma(x), \quad x \in \partial D, \end{aligned} \quad (4.12)$$

mit der stetigen Funktion γ gemäß

$$\gamma(x) = 2 \int_{\partial D} \left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial \nu(y)}(x, y) - \frac{\partial \Phi_0}{\partial \nu(y)}(x, y) - i\eta \Phi_k(x, y) \right) ds(y) - 1,$$

wird durch

$$u(x) = \int_{\partial D} \left[\frac{\partial \Phi_k}{\partial \nu(y)}(x, y) - i\eta \Phi_k(x, y) \right] \varphi(y) ds(y), \quad x \notin \overline{D}, \quad (4.13)$$

eine Lösung des äußeren Dirichletproblems (4.1) - (4.3) gegeben.

Beweis: Die durch (4.13) definierte Funktion u erfüllt die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung (weil Φ_k sie erfüllt), löst die Helmholtzgleichung in $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ und ist stetig bis in den Rand ∂D . Weil

$$\int_{\partial D} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \nu(y)}(x, y) ds(y) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D},$$

liefern die Sprungbeziehungen für Einfach- (Satz 4.11) und Doppelschichtpotenzial (Satz 4.12) angewendet auf

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\partial D} \left[\frac{\partial \Phi_k}{\partial \nu(y)}(x, y) - i\eta \Phi_k(x, y) \right] (\varphi(y) - \varphi(x_0)) ds(y) \\ &+ \varphi(x_0) \int_{\partial D} \left[\frac{\partial \Phi_k}{\partial \nu(y)}(x, y) - \frac{\partial \Phi_0}{\partial \nu(y)}(x, y) - i\eta \Phi_k(x, y) \right] ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}, \end{aligned}$$

die Gleichung

$$\begin{aligned} 2u_+(x) &= \varphi(x) + 2 \int_{\partial D} \left[\frac{\partial \Phi_k}{\partial \nu(y)}(x, y) - i\eta \Phi_k(x, y) \right] (\varphi(y) - \varphi(x_0)) ds(y) \\ &+ \varphi(x_0) \gamma(x) = 2f(x), \quad x \in \partial D. \end{aligned}$$

Daher ist die Randbedingung $u = f$ ebenfalls erfüllt. ■

Satz 4.14 *Für jedes $f \in C(\partial D)$ hat die Integralgleichung (4.12) genau eine Lösung $\varphi \in C(\partial D)$.*

Beweis: Sei $\varphi \in C(\partial D)$ eine Lösung der homogenen Gleichung. Dann erfüllt nach Satz 4.13 das durch (4.11) definierte u das homogene äußere Dirichlet-Problem. Nach Satz 4.5 verschwindet u in $\mathbb{R}^2 \setminus D$. Die Sprungbeziehungen (siehe Sätze 4.11 und 4.12) liefern

$$-u_- = \varphi, \quad -\frac{\partial u_-}{\partial \nu} = i\eta \varphi \text{ auf } \partial D \setminus \{x_0\}.$$

Der erste Greensche Satz, dessen Anwendung wie im Beweis von Satz 4.5 sichergestellt werden kann, ergibt

$$\begin{aligned} \int_D \{|\text{grad } u(x)|^2 - k^2 |u(x)|^2\} dx &= \int_{\partial D} \overline{u_-(x)} \frac{\partial u_-(x)}{\partial \nu(x)} ds \\ &= i\eta \int_{\partial D} |\varphi(x)|^2 ds. \end{aligned}$$

Durch Imaginärteilbildung und Beachtung von $\text{Im}(k^2) \geq 0$, $\eta > 0$ ergibt sich $\varphi = 0$.

Es genügt nun nachzuweisen, dass der Randintegraloperator in (4.12) darstellbar ist als Summe aus einem kompakten und einem beschränkt invertierbaren Operator, denn dann liefert die Riesz-Theorie die Behauptung. Für den Nachweis, dass sich A mit

$$(A\varphi)(x) = 2 \int_{\partial D} \left[\frac{\partial \Phi_k}{\partial \nu(y)}(x, y) - i\eta \Phi_k(x, y) \right] (\varphi(y) - \varphi(x_0)) ds(y) \\ + \varphi(x_0) \left(2 \int_{\partial D} \left[\frac{\partial \Phi_k}{\partial \nu(y)}(x, y) - \frac{\partial \Phi_0}{\partial \nu(y)}(x, y) - i\eta \Phi_k(x, y) \right] ds(y) - 1 \right), \quad x \in \partial D,$$

mit Hilfe einer geeigneten Abschneidefunktion aufspalten lässt in $A = A_1 + A_2$, mit einem kompakten Operator $A_1 : C(\partial D) \rightarrow C(\partial D)$ und einem Operator A_2 mit Norm $\|A_2\| < 1$, sei auf [2, Sätze 3.12 - 3.14] verwiesen. ■

4.5 Der Fernfeldoperator

Satz 4.15 *Eine ausstrahlende Lösung u der Helmholtzgleichung hat das asymptotische Verhalten*

$$u(x) = \frac{e^{ik|x|}}{\sqrt{|x|}} \left\{ u_\infty(\hat{x}) + O\left(\frac{1}{|x|}\right) \right\}, \quad |x| \rightarrow \infty. \quad (4.14)$$

Falls bis auf endlich viele Punkte der Grenzwert

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \lim_{h \rightarrow +0} \nu(x) \cdot \text{grad } u(x + h\nu(x)), \quad x \in \partial D,$$

existiert, und zwar gleichmäßig auf ∂D , so gilt

$$u_\infty(\hat{x}) = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{8\pi k}} \int_{\partial D} \left\{ u(y) \frac{\partial e^{-ik\hat{x}\cdot y}}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) e^{-ik\hat{x}\cdot y} \right\} ds(y), \quad (4.15)$$

wobei $\hat{x} = x/|x|$ bezeichnet.

Beweis: Vergleiche [7, Theorem 2.5]. ■

Definition 4.16 (Direktes Streuproblem)

Für eine ebene einfallende Welle $u^i(x, d) = e^{ikx \cdot d}$ mit Einfallrichtung $d \in \mathbb{R}^2$, $|d| = 1$,

wird das gestreute Feld $u^s \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}) \cap C(\mathbb{R}^2 \setminus D)$ gesucht (beziehungsweise das Fernfeld von $u^s + u^i$) als Lösung der Helmholtzgleichung

$$\Delta u^s + k^2 u^s = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}, \quad (4.16)$$

das die Randbedingung (für schallweiche Hindernisse)

$$u^s = -u^i \quad \text{auf } \partial D \quad (4.17)$$

und die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung (SAB)

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{1/2} \left(\frac{\partial u^s}{\partial r} - i k u^s \right) = 0, \quad r = |x|, \quad (4.18)$$

gleichmäßig für alle Richtungen $\hat{x} = \frac{x}{|x|}$ erfüllt.

Insbesondere folgt aus dem asymptotischen Verhalten (2.4) der Hankelfunktion für das Fernfeld u_∞ von

$$u^s(x) = \int_{\partial D} \left[\frac{\partial \Phi_k}{\partial \nu(y)}(x, y) - i \eta \Phi_k(x, y) \right] \varphi(y) ds(y), \quad x \notin \overline{D},$$

die Darstellung

$$u_\infty(\hat{x}) = \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{8\pi k}} \int_{\partial D} \{k\nu(y) \cdot \hat{x} + \eta\} e^{-ik\hat{x} \cdot y} \varphi(y) ds(y), \quad |\hat{x}| = 1. \quad (4.19)$$

Der Operator \mathcal{F} , der einem zulässigen Rand ∂D das Fernfeld u_∞ zuordnet, heißt Fernfeldoperator. Beim direkten Problem sind folglich (bei fester Wellenzahl k und verschiedenen Einfallrichtungen d) bei gegebener Parametrisierung z die Fernfelder $\mathcal{F}(z)$ zu berechnen. Beim inversen Problem wird versucht, aus gemessenen Fernfeldern zu verschiedenen einfallenden Wellen die Parametrisierung und damit den Rand des Gebietes zu rekonstruieren.

4.6 Numerische Ergebnisse

Zunächst soll die numerische Implementierung beschrieben werden.

In diesem Abschnitt beschränken wir uns wieder auf zulässige Gebiete D mit nur einer Ecke. Aus dem Abschnitt 4.4 ist bekannt, dass die Lösung des äußeren Dirichletproblems mit Randwerten $f \in C(\partial D)$ gegeben ist durch

$$u(x) = \int_{\partial D} \left[\frac{\partial \Phi_k}{\partial \nu(y)}(x, y) - i\eta \Phi_k(x, y) \right] \varphi(y) ds(y), \quad x \notin \overline{D},$$

mit der eindeutig bestimmten Lösung $\varphi \in C(\partial D)$ der Randintegralgleichung

$$\begin{aligned} 2f(x) &= \varphi(x) + 2 \int_{\partial D} \left[\frac{\partial \Phi_k}{\partial \nu(y)}(x, y) - i\eta \Phi_k(x, y) \right] (\varphi(y) - \varphi(x_0)) ds(y) \quad (4.20) \\ &+ \varphi(x_0) \gamma(x), \quad x \in \partial D. \end{aligned}$$

Dabei ist die auf ∂D stetige Funktion γ gegeben durch

$$\gamma(x) = 2 \int_{\partial D} \left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial \nu(y)}(x, y) - \frac{\partial \Phi_0}{\partial \nu(y)}(x, y) - i\eta \Phi_k(x, y) \right) ds(y) - 1.$$

Wir parametrisieren den Rand von D mit einer Funktion $z \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \partial D)$ mit den Eigenschaften:

- $z|_{[0, 2\pi]} \in C^2([0, 2\pi], \mathbb{R}^2)$,
- $z|_{[0, 2\pi]}$ ist injektiv und linksorientiert,
- $z(0) = x_0$, $|z'(t)| > 0 \forall t \in \mathbb{R}$ und
- $z'(0) \cdot z'(2\pi) \neq -|z'(0)||z'(2\pi)|$.

Die letzte Bedingung stellt sicher, dass ∂D keine Spitzen besitzt. Wegen

$$2 \frac{\partial \Phi_k}{\partial \nu(y)}(x, y) = \frac{ik}{2} H_1^{(1)}(k|x-y|) \frac{\nu(y) \cdot (x-y)}{|x-y|}$$

ergibt sich für $\tilde{f}(t) = 2f(z(t))$, $\tilde{\varphi}(t) = \varphi(z(t))$

$$\begin{aligned} \tilde{f}(t) &= \tilde{\varphi}(t) + \int_0^{2\pi} \{L_k(t, \tau) - i\eta M_k(t, \tau)\} [\tilde{\varphi}(\tau) - \tilde{\varphi}(0)] d\tau \\ &\quad + \tilde{\varphi}(0) \left[\int_0^{2\pi} \{(L_k - L_0)(t, \tau) - i\eta M_k(t, \tau)\} d\tau - 1 \right], \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Der Einfachheit halber werden zukünftig statt \tilde{f} und $\tilde{\varphi}$ einfach f und φ geschrieben. Die Kerne M_k , L_k , L_0 sind gegeben durch

$$\begin{aligned} M_k(t, \tau) &= \frac{i}{2} H_0^{(1)}(k|z(t) - z(\tau)|) |z'(\tau)|, \\ L_k(t, \tau) &= \frac{ik}{2} H_1^{(1)}(k|z(t) - z(\tau)|) \frac{(z_2'(\tau), -z_1'(\tau)) \cdot [z(t) - z(\tau)]}{|z(t) - z(\tau)|}, \\ L_0(t, \tau) &= \frac{1}{\pi} \frac{(z_2'(\tau), -z_1'(\tau)) \cdot [z(t) - z(\tau)]}{|z(t) - z(\tau)|^2}. \end{aligned}$$

Die Abspaltung der logarithmischen Singularität führt zu

$$\begin{aligned} M_k(t, \tau) &= M_k^{(1)}(t, \tau) \ln \left(4 \sin^2 \frac{t - \tau}{2} \right) + M_k^{(2)}(t, \tau), \\ L_k(t, \tau) &= L_k^{(1)}(t, \tau) \ln \left(4 \sin^2 \frac{t - \tau}{2} \right) + L_k^{(2)}(t, \tau) \end{aligned}$$

mit den Kernen

$$M_k^{(1)}(t, \tau) := -\frac{1}{2\pi} J_0(k|z(t) - z(\tau)|) |z'(\tau)|, \quad (4.22)$$

$$M_k^{(2)}(t, \tau) := M_k(t, \tau) - M_k^{(1)}(t, \tau) \ln \left(4 \sin^2 \frac{t - \tau}{2} \right), \quad (4.23)$$

$$L_k^{(1)}(t, \tau) := -\frac{k}{2\pi} J_1(k|z(t) - z(\tau)|) \frac{(z_2'(\tau), -z_1'(\tau)) \cdot [z(t) - z(\tau)]}{|z(t) - z(\tau)|}, \quad (4.24)$$

$$L_k^{(2)}(t, \tau) := L_k(t, \tau) - L_k^{(1)}(t, \tau) \ln \left(4 \sin^2 \frac{t - \tau}{2} \right). \quad (4.25)$$

Aus den Definitionen von Bessel- (2.2) und Neumannfunktionen (2.3) ist bei C^2 -glatten Rändern $\partial D \setminus \{x_0\}$ für die Diagonalterme

$$M_k^{(1)}(t, t) = -\frac{1}{2\pi} |z'(t)|, \quad (4.26)$$

$$M_k^{(2)}(t, t) = \left(\frac{i}{2} - \frac{1}{\pi} \left\{ C_E + \ln \left(\frac{k}{2} |z'(t)| \right) \right\} \right) |z'(t)|, \quad (4.27)$$

$$L_k^{(1)}(t, t) = 0, \quad (4.28)$$

$$L_k^{(2)}(t, t) = \frac{1}{2\pi} \frac{(z_2'(t), -z_1'(t)) \cdot z''(t)}{|z'(t)|^2} \quad (4.29)$$

abzulesen. Falls $\partial D \setminus \{x_0\}$ die Randglätte C^{2q+3} besitzt, so sind $M_k^{(1)}$, $M_k^{(2)}$, L_0 , $L_k^{(1)}$ und $L_k^{(2)}$ bis auf die Punkte $(0, 2\pi)$, $(2\pi, 0)$ aus $C^{2q+1}([0, 2\pi] \times [0, 2\pi])$.

Im Fall des Streuproblems bei einfallender ebener Welle $u^i(x, d)$ lauten die Komponenten f_l , $l = 0, \dots, 2n - 1$, der rechten Seite des Gleichungssystems (3.20)

$$f_l = -2e^{ikz(s_l^{(n)}) \cdot d}. \quad (4.30)$$

Für die Kerne K_A, K_B, K_C in (3.4) - (3.6) gilt

$$\begin{aligned} (K_A + K_B)(t, \tau) &= -L_k^{(2)}(t, \tau) + i\eta M_k^{(2)}(t, \tau), \\ K_C(t, \tau) &= -L_k^{(1)}(t, \tau) + i\eta M_k^{(1)}(t, \tau). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Auf einen detaillierten Nachweis dafür, dass sich $L_k^{(2)}$ in den Ecken tatsächlich wie ein Mellin-Kern verhält, wird an dieser Stelle verzichtet, denn dieser ist (als Spezialfall) im zweiten Teil des Beweises von Satz 5.10 enthalten. Damit ist die Integralgleichung (4.21) von der Form (3.1) aus Kapitel 3.

Durch Lösen des resultierenden Gleichungssystems (3.20) ergeben sich Näherungswerte $\varphi_j^{(n)}$ für die exakten Werte $\varphi(z(w(j\pi/n)))$, $j = 0, \dots, 2n - 1$. Anwendung der Quadraturformel (3.8) zur approximativen Auswertung von (4.19) ergibt

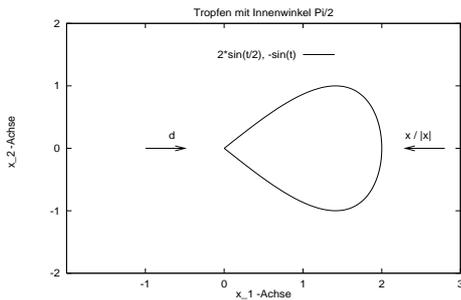
$$\begin{aligned} u_\infty^s(\hat{x}) &\approx \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}} \pi}{\sqrt{8\pi k} n} \sum_{j=0}^{2n-1} \left(k(\hat{x}_1 z_2'(s_j^{(n)}) - \hat{x}_2 z_1'(s_j^{(n)})) + \eta |z'(s_j^{(n)})| \right) \varphi_j^{(n)} \times \\ &\times \alpha_j^{(n)} e^{-ik(\hat{x}_1 z_1(s_j^{(n)}) + \hat{x}_2 z_2(s_j^{(n)}))} \text{ für } \hat{x} \in \Omega. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Der Summand für $j = 0$ in (4.32) tritt nur bei glatten Rändern (mit der Substitution $w(t) = t$) auf, weil für die betrachteten Substitutionen w gemäß Definition 3.3 der Term $\alpha_0^{(n)} = w'(0)$ verschwindet.

Beispiel 4.17 Es wird ein konvexes Gebiet in Form eines Tropfens betrachtet, das in $(0, 0)^t$ eine Ecke mit Innenwinkel $\frac{\pi}{2}$ besitzt. Der Rand wird durch

$$z(t) = \left(2 \sin \frac{t}{2}, -\sin(t) \right), \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

parametrisiert.



In Tabelle 4.1 sind bei einfallender ebener Welle $u^i(x, d) = e^{ikx \cdot d}$ das Fernfeld u_∞ für die Beobachtungsrichtungen $\hat{x} = d = (1, 0)^t$ und $\hat{x} = -d$ dargestellt. Dabei wurden Kopplungsparameter η und Wellenzahl k jeweils 1 gesetzt. Beim Aufstellen des Gleichungssystems zur Ermittlung von Näherungswerten $\varphi_j \approx \varphi(z(s_j^{(n)}))$ wurde die Substitution nach Kreß verwendet.

Abbildung 4.1: Tropfen mit Innenwinkel $\frac{\pi}{2}$

Beispiel 4.18 Es wird ein nichtkonvexes Gebiet in Form eines Schmetterlings betrachtet, das in $(-1/2, 0)^t$ eine Ecke mit Innenwinkel $\frac{3\pi}{2}$ besitzt. Der Rand wird durch

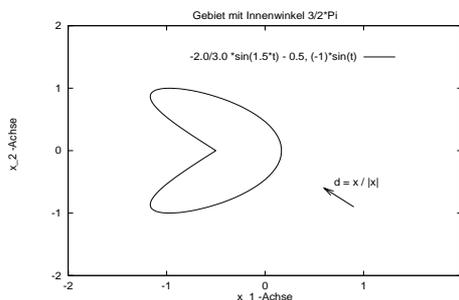
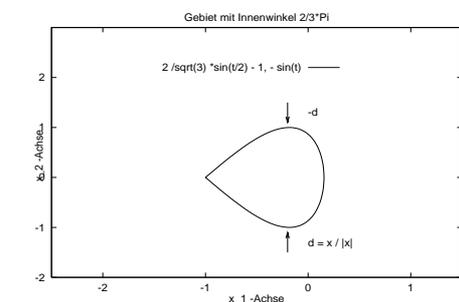
$$z(t) = \left(-\frac{2}{3} \sin \frac{3}{2}t - \frac{1}{2}, -\sin(t) \right), \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

parametrisiert.

Beispiel 4.19 Mit der Parametrisierung

$$z(t) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{t}{2} - 1, -\sin(t) \right), \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

wird ein weiteres konvexes tropfenförmiges Gebiet betrachtet. Im Punkt $(-1, 0)^t$ liegt eine Ecke mit Innenwinkel $\frac{2\pi}{3}$ vor.

Abbildung 4.2: Schmetterling mit Innenwinkel $\frac{3}{2}\pi$ Abbildung 4.3: Tropfen mit Innenwinkel $\frac{2}{3}\pi$

In Tabelle 4.2 sind bei einfallender ebener Welle $u^i(x, d) = e^{ikx \cdot d}$ das Fernfeld u_∞ für die Beobachtungsrichtung $\hat{x} = d = 1/\sqrt{2}(-1, 1)^t$ dargestellt. Dabei wurden Kopplungsparameter η und Wellenzahl k jeweils 5 gesetzt. Als Substitutionen wurden die trigonometrische nach Sidi beziehungsweise die rationale nach Kreß verwendet.

In Tabelle 4.3 sind bei einfallender ebener Welle $u^i(x, d) = e^{ikx \cdot d}$ das Fernfeld u_∞ für die Beobachtungsrichtungen $\hat{x} = d = (0, +1)^t$ und $\hat{x} = -d$ dargestellt. Dabei wurden Kopplungsparameter η und Wellenzahl k jeweils 2 gesetzt. Als Substitution wurde die polynomiale nach Korobov verwendet.

Den Tabellen ist zu entnehmen, dass sich die erwartete schnelle Konvergenz einstellt. Bei $n = 32$ ist, von wenigen Ausnahmen abgesehen, bereits die vierte Nachkommastelle exakt. Zu diesem Zeitpunkt beträgt der relative Fehler rund 10^{-4} .

Um die Korrektheit des Algorithmus' zu testen, wird dieser auf Randwertprobleme angewendet, bei denen die Lösung bekannt ist. Eine Möglichkeit besteht darin, für Gebiete D , die den Nullpunkt enthalten, die Hankelfunktion $H_0^{(1)}$ auf dem Rand vorzugeben. Anschließend ist ein Vergleich der numerischen Werte mit dem exakten Fernfeld

$$u_\infty(\hat{x}) = \sqrt{\frac{2}{\pi k}} e^{-i\frac{\pi}{4}}$$

möglich. Auf eine explizite Angabe von Zahlenwerten bei diesen Tests wurde hier verzichtet.

Tabelle 4.1: Tabelle zu Beispiel 4.17.

Parametrisierung $z(t) = (2 \sin \frac{t}{2}, -\sin t)$, Substitution w mit kubischem v von Kreis, $d = (1, 0)^t$ und $\eta = k = 1$.					
p	n	$\operatorname{Re} u_\infty(d)$	$\operatorname{Im} u_\infty(d)$	$\operatorname{Re} u_\infty(-d)$	$\operatorname{Im} u_\infty(-d)$
4	8	-1.2854092987	+0.3069295365	-0.5299830219	-0.4116485500
	16	-1.2854914279	+0.3068663543	-0.5302057209	-0.4109821566
	32	-1.2854934933	+0.3068662265	-0.5302102214	-0.4109640354
	64	-1.2854935289	+0.3068662733	-0.5302102602	-0.4109636617
	128	-1.2854935289	+0.3068662774	-0.5302102576	-0.4109636563
6	8	-1.2854395462	+0.3069903503	-0.5297463540	-0.4120187868
	16	-1.2854916555	+0.3068673994	-0.5302051881	-0.4109787775
	32	-1.2854935188	+0.3068662834	-0.5302102343	-0.4109637370
	64	-1.2854935288	+0.3068662778	-0.5302102572	-0.4109636567
	128	-1.2854935288	+0.3068662777	-0.5302102573	-0.4109636564
8	8	-1.2855031044	+0.3067855340	-0.5291350715	-0.4118560099
	16	-1.2854906812	+0.3068680469	-0.5302019695	-0.4109864359
	32	-1.2854935212	+0.3068662820	-0.5302102389	-0.4109637183
	64	-1.2854935288	+0.3068662777	-0.5302102573	-0.4109636565
	128	-1.2854935288	+0.3068662777	-0.5302102573	-0.4109636564

Tabelle 4.2: Tabelle zu Beispiel 4.18.

Parametrisierung: $z(t) = (-\frac{2}{3} \sin \frac{3}{2}t - \frac{1}{2}, -\sin t)$ Substitution: \sin^p nach Sidi im Vergleich mit w nach Kreß Einfallsrichtung $d = 1/\sqrt{2}(-1, 1)^t$ und $\eta = k = 5$.					
p	n	$\operatorname{Re} u_\infty(d)$	$\operatorname{Im} u_\infty(d)$	$\operatorname{Re} u_\infty(d)$	$\operatorname{Im} u_\infty(d)$
4	8	-1.4072330285	+1.0508604210	-1.4346817212	+1.0745565340
	16	-1.5547401666	+0.9955621878	-1.5717267351	+1.0036287382
	32	-1.5888757116	+1.0133676423	-1.5889141580	+1.0133688113
	64	-1.5889159254	+1.0133686822	-1.5889159251	+1.0133686816
	128	-1.5889159232	+1.0133686783	-1.5889159231	+1.0133686783
6	8	-1.3183668788	+1.0288005117	-1.4163739389	+1.0669492206
	16	-1.5081680918	+1.0013490961	-1.5669699572	+1.0006366873
	32	-1.5878331045	+1.0131264006	-1.5889116095	+1.0133685759
	64	-1.5889159230	+1.0133686780	-1.5889159230	+1.0133686780
	128	-1.5889159230	+1.0133686780	-1.5889159230	+1.0133686780
8	8	-1.3183365112	+1.0188463707	-1.4113929424	+1.0763835530
	16	-1.4785434564	+1.0238904333	-1.5618664155	+0.9966208876
	32	-1.5840429983	+1.0114688763	-1.5889052456	+1.0133676473
	64	-1.5889159104	+1.0133686802	-1.5889159230	+1.0133686780
	128	-1.5889159230	+1.0133686780	-1.5889159230	+1.0133686780

Tabelle 4.3: Tabelle zu Beispiel 4.19.

Parametrisierung: $z(t) = (\frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{t}{2} - 1, -\sin t)$ Substitution: polynomial nach Korobov Einfallsrichtung $d = (0, +1)^t$ und $\eta = k = 2$.					
p	n	$\operatorname{Re} u_\infty(d)$	$\operatorname{Im} u_\infty(d)$	$\operatorname{Re} u_\infty(-d)$	$\operatorname{Im} u_\infty(-d)$
4	8	-1.1771133343	+0.2647983899	+0.4036409437	-0.1740620044
	16	-1.1810605251	+0.2650020399	+0.4128910217	-0.1616384258
	32	-1.1810599660	+0.2650032202	+0.4128923494	-0.1616367680
	64	-1.1810598834	+0.2650033097	+0.4128924320	-0.1616366785
	128	-1.1810598782	+0.2650033150	+0.4128924373	-0.1616366731
6	8	-1.1674860269	+0.2599372003	+0.3650325653	-0.2088868287
	16	-1.1810403140	+0.2649968821	+0.4128818530	-0.1616823652
	32	-1.1810598774	+0.2650033152	+0.4128924380	-0.1616366729
	64	-1.1810598778	+0.2650033154	+0.4128924376	-0.1616366728
	128	-1.1810598778	+0.2650033154	+0.4128924376	-0.1616366728
8	8	-1.1474431832	+0.2702118104	+0.3042351489	-0.2260422069
	16	-1.1808743769	+0.2649685379	+0.4127626480	-0.1620798300
	32	-1.1810598785	+0.2650033145	+0.4128924378	-0.1616366743
	64	-1.1810598778	+0.2650033154	+0.4128924376	-0.1616366728
	128	-1.1810598778	+0.2650033154	+0.4128924376	-0.1616366728

Kapitel 5

Das inverse Streuproblem

In diesem Kapitel wird das inverse Streuproblem behandelt. Es ist die Gestalt des Streukörpers, unter Kenntnis der Wellenzahl k , zu ermitteln. Als Daten stehen Fernfelder zu gestreuten Feldern bei aus unterschiedlichen Richtungen einfallenden ebenen Wellen zur Verfügung. Im gesamten Kapitel werden nur zulässige Gebiete $D \subset \mathbb{R}^2$ im Sinne von Kapitel 4 betrachtet.

Im Abschnitt 5.1 wird das Problem der Eindeutigkeit untersucht, in den Abschnitten 5.2 und 5.3 die Fréchet-Differenzierbarkeit des Fernfeldoperators gezeigt sowie deren Ableitung durch ein Randwertproblem charakterisiert.

5.1 Eindeutigkeit beim inversen Streuproblem

Satz 5.1 *Es seien D_1 und D_2 zwei Streugebiete derart, dass die Fernfelder der zugehörigen Streuprobleme bei fester Wellenzahl und allen Einfallsrichtungen einfallender ebener Wellen übereinstimmen, d.h.*

$$u_{\infty,1}(\hat{x}, d) = u_{\infty,2}(\hat{x}, d) \text{ für alle } \hat{x}, d \in \Omega.$$

Dann gilt $D_1 = D_2$.

Beweis: Sei G die unbeschränkte Komponente von $\mathbb{R}^2 \setminus (\overline{D_1} \cup \overline{D_2})$.

1. Aus der Übereinstimmung der Fernfelder folgt aus dem Rellich-Lemma die Übereinstimmung der gestreuten Felder, das heißt

$$u_1^s(y, d) = u_2^s(y, d) \text{ für alle } y \in G, d \in \Omega.$$

2. Für festes $y \in G$ betrachte man die Streuprobleme (bezüglich der Gebiete D_1 und D_2) bei einfallenden Wellen

$$w^i(x, y) = \Phi_k(x, y) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|x - y|).$$

Mit anderen Worten: Gesucht werden $w_j^s \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D_j}) \cap C(\mathbb{R}^2 \setminus D_j)$ mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} \Delta w_j^s(\cdot, y) + k^2 w_j^s(\cdot, y) &= 0 \text{ in } \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D_j}, \\ w_j^s(x, y) &= -\Phi_k(x, y) \text{ für } x \in \partial D_j, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r^{1/2} \left(\frac{\partial w_j^s(\cdot, y)}{\partial r} - ik w_j^s(\cdot, y) \right) &= 0, \quad r = |x|, \end{aligned} \quad (5.1)$$

gleichmäßig für alle Richtungen $\hat{x} = x/|x|$. Unter Ausnutzen der Symmetrie

$$w_j^s(x, y) = w_j^s(y, x), \quad x, y \in G, \quad j = 1, 2,$$

lässt sich mit Hilfe der Greenschen Sätze die gemischte Reziprozität

$$w_j^s(y, d) = 4\pi w_{\infty, j}(-d, y) \text{ für alle } y \in G, \quad d \in \Omega,$$

beweisen.

3. Aus den beiden ersten Teilen folgt unmittelbar

$$w_{\infty, 1}(d, y) = w_{\infty, 2}(d, y) \text{ für alle } y \in G, \quad d \in \Omega.$$

Das Rellich-Lemma liefert

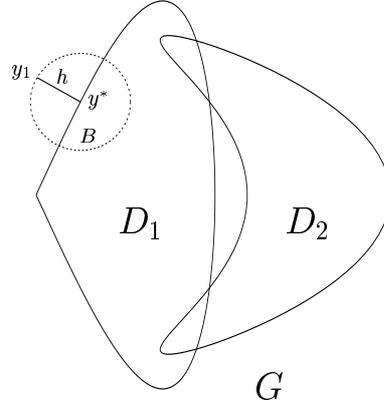
$$w_1^s(x, y) = w_2^s(x, y) \text{ für alle } x, y \in G. \quad (5.2)$$

4. Angenommen es gilt $D_1 \neq D_2$. Dann existiert ohne Beschränkung der Allgemeinheit ein Punkt $y^* \in \partial G$ mit $y^* \in \partial D_1$ und $y^* \notin \overline{D_2}$. (Anmerkung: Der Fall $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ kann ausgeschlossen werden, denn ganze Lösungen der Helmholtzgleichung, die die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung erfüllen, verschwinden auf ganz \mathbb{R}^2 .)

Weiterhin existiert ein $h > 0$ so, dass zum einen für die abgeschlossene Kugel $B := B[y^*, h] = \{y \in \mathbb{R}^2 \mid |y - y^*| \leq h\}$ die Beziehung $B \cap \overline{D_2} = \emptyset$ gilt und zum anderen die Folge

$$y_n := y^* + \frac{h}{n} \nu(y^*), \quad n \in \mathbb{N},$$

in G enthalten ist.



Einerseits existiert aufgrund der Wahl von $y^* \in G \setminus \overline{D_2}$ und der Wohlgestellttheit des Streuproblems bezüglich D_2 der Grenzwert

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_2^s(y^*, y_n) = w_2^s(y^*, y^*) \quad (5.3)$$

und andererseits ist wegen der Randbedingung auf ∂D_1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w_1^s(y^*, y_n) = - \lim_{n \rightarrow \infty} w^i(y^*, y_n) = -\frac{i}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} H_0^{(1)}\left(\frac{kh}{n}\right) = \infty. \quad (5.4)$$

Die Resultate in (5.3) und (5.4) widersprechen (5.2). ■

5.2 Ableitung der Randintegraloperatoren

Sei D ein zulässiges Gebiet mit nur einer Ecke. Die im Raum $C(\partial D)$ zu lösende Randintegralgleichung

$$2f(x) = \varphi(x) + 2 \int_{\partial D} \left[\frac{\partial \Phi_k}{\partial \nu(y)}(x, y) - i\eta \Phi_k(x, y) \right] (\varphi(y) - \varphi(x_0)) ds(y) \quad (5.5)$$

$$+ \varphi(x_0) \gamma(x), \quad x \in \partial D,$$

mit der auf ∂D stetigen Funktion γ ,

$$\gamma(x) = 2 \int_{\partial D} \left(\frac{\partial \Phi_k}{\partial \nu(y)}(x, y) - \frac{\partial \Phi_0}{\partial \nu(y)}(x, y) - i\eta \Phi_k(x, y) \right) ds(y) - 1,$$

wurde im Abschnitt 4.6 bereits parametrisiert. Von der Randkurve $z \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \partial D)$ werden nun nachfolgende (leicht verschärfte) Eigenschaften vorausgesetzt:

- $z|_{[0, 2\pi]} \in C^{2, \alpha}([0, 2\pi], \mathbb{R}^2)$,
- $z|_{[0, 2\pi]}$ ist injektiv und linksorientiert,
- $z(0) = x_0$, $|z'(t)| > 0 \forall t \in \mathbb{R}$ und
- $z'(0) \cdot z'(2\pi) \neq -|z'(0)||z'(2\pi)|$.

Schreibt man die resultierende Gleichung (4.21) in Operatorform, so erhält man

$$\tilde{f}(t) = (I + K_k - i\eta S_k) \psi(t) + \psi(0) \tilde{\gamma}(t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

mit den Funktionen $\tilde{f}(t) := 2f(z(t))$, $\psi(t) := \varphi(z(t))$, $\tilde{\gamma}(t) := \gamma(z(t))$ und den Operatoren

$$\begin{aligned} S_k, K_k &: C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \longrightarrow C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \\ (S_k \psi)(t) &= \frac{i}{2} \int_0^{2\pi} H_0^{(1)}(k|z(t) - z(\tau)|) |z'(\tau)| [\psi(\tau) - \psi(0)] d\tau, \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$(K_k \psi)(t) = \frac{ik}{2} \int_0^{2\pi} H_1^{(1)}(k|z(t) - z(\tau)|) \frac{z'(\tau)^\perp \cdot [z(t) - z(\tau)]}{|z(t) - z(\tau)|} [\psi(\tau) - \psi(0)] d\tau. \quad (5.7)$$

Die stetige Funktion $\tilde{\gamma}$ entspricht (im wesentlichen) dem Potenzialoperator $K_k - K_0 - i\eta S_k$, bei dem anstatt $\psi(\tau) - \psi(0)$ die konstante Dichte 1 auftritt. Es gilt demnach

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}(t) &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{ik}{2} H_1^{(1)}(k|z(t) - z(\tau)|) + \frac{1}{\pi} \frac{1}{|z(t) - z(\tau)|} \right) \frac{z'(\tau)^\perp \cdot [z(t) - z(\tau)]}{|z(t) - z(\tau)|} d\tau \\ &\quad + \frac{\eta}{2} \int_0^{2\pi} H_0^{(1)}(k|z(t) - z(\tau)|) |z'(\tau)| d\tau - 1. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Wir werden der Einfachheit halber γ und f statt $\tilde{\gamma}$ und \tilde{f} schreiben und γ als Multiplikationsoperator γ_k auffassen, sodass die Randintegralgleichung die Form

$$f = (I + K_k - i\eta S_k + \gamma_k) \psi$$

erhält.

Um die Abhängigkeit der Operatoren S_k, K_k, γ_k von der Parametrisierung z zu verdeutlichen, werden wir auch $S_k(z), K_k(z)$ und $\gamma_k(z)$ schreiben. Unter $S_k(\varphi, z)$ (bzw. $S_k(\varphi, z, t)$)

verstehen wir die Funktion $S_k(z)\varphi$ (bzw. die komplexe Zahl $(S_k(z)\varphi)(t)$, also S_k angewendet auf φ und ausgewertet an der Stelle t).

Wir fassen die Menge der zulässigen Parametrisierungen

$$U := \left\{ z \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) \mid \begin{array}{l} z|_{[0,2\pi]} \in C^{2,\alpha}([0, 2\pi], \mathbb{R}^2), z|_{[0,2\pi]} \text{ injektiv und linksorientiert,} \\ |z'(t)| > 0 \forall t \in \mathbb{R}, z'(0) \cdot z'(2\pi) \neq -|z'(0)| |z'(2\pi)| \end{array} \right\}$$

als Teilmenge des normierten Raumes

$$X := C_{2\pi} \cap C^{2,\alpha} := \left\{ h \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) \mid h|_{[0,2\pi]} \in C^{2,\alpha}([0, 2\pi], \mathbb{R}^2) \right\}$$

auf und verwenden als Norm

$$\|h\|_{C^2[0,2\pi]} := \max\{\|h\|_\infty, \|h'\|_\infty, \|h''\|_\infty\}.$$

Auf $C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ wird die Norm $\|\varphi\|_{\infty,0} = |\varphi(0)| + \max_{0 \leq t \leq 2\pi} |\varphi(t) - \varphi(0)|$ verwendet.

Mit dem nachfolgenden Differenziationssatz wird die Fréchet-Differenzierbarkeit der Randintegraloperatoren gezeigt.

Satz 5.2 *Sei X ein normierter Raum, $U \subset X$ offen,*

$$Q = \{(t, \tau) \in [0, 2\pi]^2 \mid t \neq \tau\} \setminus \{(0, 0), (0, 2\pi), (2\pi, 0), (2\pi, 2\pi)\},$$

und $f = f_1 \cdots f_n$, $f_l : Q \times U \rightarrow \mathbb{C}$, $(t, \tau, z) \mapsto f_l(t, \tau, z)$, $l = 1, \dots, n$, ein Produkt von auf $Q \times U$ erklärten Funktionen, die (bei festem dritten Argument) bezüglich der beiden ersten Variablen 2π -periodisch sind und nachfolgende Eigenschaften besitzen.

1. Die Funktionen f_l , $l = 1, \dots, n$ sind für festes $(t, \tau) \in Q$ zweimal stetig Fréchet-differenzierbar nach der dritten Variablen.
2. Für jedes $z \in U$ und $h \in X$ sind $f(\cdot, \cdot, z)$ und $\frac{\partial f}{\partial z}(\cdot, \cdot, z, h)$ auf $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ stetig oder schwach singulär oder bei den Ecken des Quaders $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ durch einen Mellin-Kern abschätzbar, d.h. $f(\cdot, \cdot, z)$ und $\frac{\partial f}{\partial z}(\cdot, \cdot, z, h)$ sind stetig auf $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \setminus \{(0, 0), (0, 2\pi), (2\pi, 0), (2\pi, 2\pi)\}$ und es gebe (von z und h abhängige) stetig differenzierbare Funktionen $k_1, \dots, k_8 : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ und $T > 0$ hinreichend

klein, sodass gilt $k_l(0) = 0$, $\int_0^\infty \frac{k_l(s)}{s} ds < \infty$, $l = 1, \dots, 8$,

$$\begin{aligned} |f(t, \tau, z)| &\leq \frac{1}{\tau} k_1 \left(\frac{t}{\tau} \right), & 0 \leq t \leq T, 0 < \tau \leq T, \\ |f(t, 2\pi - \tau, z)| &\leq \frac{1}{\tau} k_2 \left(\frac{t}{\tau} \right), & 0 \leq t \leq T, 0 < \tau \leq T, \\ |f(2\pi - t, \tau, z)| &\leq \frac{1}{\tau} k_3 \left(\frac{t}{\tau} \right), & 0 \leq t \leq T, 0 < \tau \leq T, \\ |f(2\pi - t, 2\pi - \tau, z)| &\leq \frac{1}{\tau} k_4 \left(\frac{t}{\tau} \right), & 0 \leq t \leq T, 0 < \tau \leq T, \end{aligned}$$

und desgleichen für $\frac{\partial f}{\partial z}(\cdot, \cdot, z, h)$ mit Kernen k_5, \dots, k_8 .

3. Für ein $z_0 \in U$ existieren integrierbare Funktionen $g_l^{(j)} : Q \rightarrow [0, \infty)$, $j = 0, 1, 2$, $l = 1, \dots, n$ und Konstanten $R, C > 0$ so, dass

$$\left| \frac{\partial^j f_l}{\partial z^j}(t, \tau, z, h) \right| \leq g_l^{(j)}(t, \tau) \|h\|_X^j \text{ für } (t, \tau) \in Q, z \in B[z_0, R] \subset U, h \in X, j = 0, 1, 2,$$

$$\sup_{0 < t < 2\pi} \int_0^{2\pi} g_1^{(j_1)} \dots g_n^{(j_n)}(t, \tau) d\tau \leq C \quad \text{für alle } j = (j_1, \dots, j_n) \in \mathbb{N}_0^n \text{ mit}$$

$$|j| := j_1 + \dots + j_n \leq 2.$$

Dann sind die Abbildungen

$$A(z) : C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), (A(z)\varphi)(t) = \int_0^{2\pi} f(t, \tau, z)[\varphi(\tau) - \varphi(0)] d\tau,$$

$$A^1(z, h) : C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), (A^1(z, h)\varphi)(t) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial z}(t, \tau, z, h)[\varphi(\tau) - \varphi(0)] d\tau$$

für alle $z \in U$ und $h \in X$ wohldefiniert, linear und beschränkt. Desweiteren ist die Abbildung

$$A : U \longrightarrow \mathcal{L}(C_{2\pi}, C_{2\pi}), z \mapsto A(z)$$

Fréchet-differenzierbar in z_0 mit $A'(z_0, h) = A^1(z_0, h)$.

Bemerkung 5.3 Die Voraussetzung 2 in Satz 5.2 sichert die Existenz und Beschränktheit von $A(z)$ und $A^1(z, h)$. Aufgrund der Linearität des Integrals und der Fréchet-Ableitung darf die Forderung 2. an f auch modifiziert werden: $f(\cdot, \cdot, z)$ ist Summe aus einem stetigen, einem schwach singulären und einem in den Ecken singulären Anteil, der sich wie ein Mellin-Kern verhält.

Bemerkung 5.4 Die Forderung 2., nach dem $f(\cdot, \cdot, z)$ auf $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ stetig ist, kann abgeschwächt werden zu beschränkt auf $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ und bis auf die Ecken stetig.

Bemerkung 5.5 Läßt man in Satz 5.2 nur stetige oder schwach singuläre Kerne zu und ersetzt für ein Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$ die Menge Q durch $G \times [0, 2\pi]$, so bleibt die Aussage des Satzes ebenfalls richtig.

Beweis: Vergleiche [47, Theorem 1] oder [51, Satz 4.8]. ■

Beweis von Satz 5.2: 1. Zunächst wird die Abbildungseigenschaft

$$A(z), A^1(z, h) \in \mathcal{L}(C_{2\pi}, C_{2\pi})$$

diskutiert. Seien dazu $z \in U$ und $h \in X$ beliebig, aber fest. Für auf $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ stetige oder schwach singuläre Kerne $f(\cdot, \cdot, z)$ bzw. $\frac{\partial f}{\partial z}(\cdot, \cdot, z, h)$ sind die Operatoren $A(z)$ und $A^1(z, h)$ nach Satz 2.7 (Abschnitt 2.3) aus $\mathcal{L}(C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}))$. In allen anderen Fällen sind nach Voraussetzung 2. $f(\cdot, \cdot, z)$ und $\frac{\partial f}{\partial z}(\cdot, \cdot, z, h)$ bis auf die Ecken stetig und verhalten sich in den Ecken wie ein Mellin-Kern. Mit einer geeigneten Abschneidefunktion lassen sich diese Kerne aufspalten in einen stetigen Anteil und vier in jeweils einer Ecke singuläre Anteile, deren Träger jeweils in einer T -Umgebung der Ecke des Quadrats $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ liegt. Die Abbildungseigenschaft von A und die Existenz von $\|A\|_{\infty, 0}$ folgen dann aus [28, Theorem 3.1]. Die gleiche Argumentation für $\frac{\partial f}{\partial z}$ führt zu $A^1(z, h) \in \mathcal{L}(C_{2\pi}, C_{2\pi})$.

2. Als nächstes ist nachzuweisen, dass die Abbildung

$$X \rightarrow \mathcal{L}(C_{2\pi}, C_{2\pi}), \quad h \mapsto A^1(z_0, h)$$

linear und beschränkt ist. Nach der ersten Voraussetzung ist $h \mapsto \frac{\partial f}{\partial z}(t, \tau, z, h)$ für festes $z \in U$ und alle $(t, \tau) \in Q$ linear. Demnach gilt für $z \in U$, $\varphi \in C_{2\pi}$ und $0 < t < 2\pi$

$$(A^1(z, \lambda h_1 + \mu h_2)\varphi)(t) = \lambda (A^1(z, h_1)\varphi)(t) + \mu (A^1(z, h_2)\varphi)(t).$$

Aus Stetigkeitsgründen ist obige Gleichheit auch gültig für $t = 0$. Damit ist $h \mapsto A^1(z, h)$ für jedes $z \in U$ linear. Mit Voraussetzung 3. für die erste Fréchet-Ableitung von f wird abgeschätzt

$$|(A^1(z_0, h)\varphi)(t)| \leq \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial f}{\partial z}(t, \tau, z_0, h) \right| |\varphi(\tau) - \varphi(0)| d\tau$$

$$\begin{aligned}
&\leq \int_0^{2\pi} \sum_{j \in \mathbb{N}_0^n, |j|=1} (g_1^{(j_1)} \dots g_n^{(j_n)})(t, \tau) \|h\|_X |\varphi(\tau) - \varphi(0)| d\tau \\
&\leq 2\pi n C \|\varphi\|_{\infty,0} \|h\|_X \text{ für alle } t \in \mathbb{R}, \varphi \in C_{2\pi}.
\end{aligned}$$

Damit folgt $\|A^1(z_0, h)\varphi\|_{\infty,0} \leq \tilde{C} \|\varphi\|_{\infty,0} \|h\|_X$ für jedes $\varphi \in C_{2\pi}$ und daher

$$\|A^1(z_0, h)\|_{\mathcal{L}(C_{2\pi}, C_{2\pi})} \leq \tilde{C} \|h\|_X \text{ für alle } h \in X.$$

3. Es bleibt $\|A(z_0 + h) - A(z_0) - A^1(z_0, h)\| = o(\|h\|_X)$ nachzurechnen. Für $(t, \tau) \in Q$ und $\|h\|_X < R$ gilt

$$\begin{aligned}
&\left| f(t, \tau, z_0 + h) - f(t, \tau, z_0) - \frac{\partial f}{\partial z}(t, \tau, z_0, h) \right| \\
&\leq \int_0^1 |1 - \vartheta| \left| \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(t, \tau, z_0 + \vartheta h, h) \right| d\vartheta \\
&\leq \sum_{|j|=2} (g_1^{(j_1)} \dots g_n^{(j_n)})(t, \tau) \|h\|_X^2
\end{aligned}$$

und wegen der Normäquivalenz $\|\varphi\|_{\infty,0} \leq 3\|\varphi\|_{\infty} \leq 3\|\varphi\|_{\infty,0}$ sowie

$$\begin{aligned}
&\|A(z_0 + h) - A(z_0) - A^1(z_0, h)\|_{\mathcal{L}(C_{2\pi}, C_{2\pi})} \\
&= \sup_{\|\varphi\|_{\infty,0}=1} \left\| \int_0^{2\pi} \left[f(\cdot, \tau, z_0 + h) - f(\cdot, \tau, z_0) - \frac{\partial f}{\partial z}(\cdot, \tau, z_0, h) \right] (\varphi(\tau) - \varphi(0)) d\tau \right\|_{\infty,0} \\
&\leq 3 \|h\|_X^2 \sum_{|j|=2} \sup_{0 < t < 2\pi} \int_0^{2\pi} g_1^{(j_1)} \dots g_n^{(j_n)}(t, \tau) d\tau \\
&\leq C \|h\|_X^2
\end{aligned}$$

ergibt sich die Behauptung. ■

Lemma 5.6 *Die Menge der zulässigen Parametrisierungen U ist offen im Raum $X = \{h \in C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) \mid h|_{[0,2\pi]} \in C^{2,\alpha}([0, 2\pi], \mathbb{R}^2)\}$.*

Beweis: $\frac{z'(0) \cdot z'(2\pi)}{|z'(0)| |z'(2\pi)|}$ ist stetig in z . Daher folgt die Behauptung aus [21, Lemma 3.7]. ■

Für die Anwendung von Satz 5.2 auf das modifizierte Einfach- und Doppelschichtpotenzial, werden vorab einige Lemmata bewiesen. Das nächste Lemma zeigt für eine Klasse von Kernen $f(t, \tau, z)$ die zweimalige stetige Fréchet-Differenzierbarkeit nach der dritten Variablen.

Lemma 5.7 Für $(t, \tau) \in Q = \{(x, y) \in [0, 2\pi]^2 \mid x \neq y\} \setminus \{(0, 0), (2\pi, 0), (0, 2\pi), (2\pi, 2\pi)\}$, $z \in U$ und $h \in X$, sind die nachfolgenden Abbildungen zweimal Fréchet-differenzierbar von U nach \mathbb{R} bzw. \mathbb{R}^2

1. $F_1 : z \rightarrow z(t) - z(\tau)$ mit $F_1'(z, h) = h(t) - h(\tau)$ und $F_1''(z, h, \tilde{h}) = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$,

2. $F_2 : z \rightarrow |z(t) - z(\tau)|$ mit $F_2'(z, h) = \frac{[z(t) - z(\tau)] \cdot [h(t) - h(\tau)]}{|z(t) - z(\tau)|}$ und

$$F_2''(z, h) = \frac{|h(t) - h(\tau)|^2}{|z(t) - z(\tau)|} - \frac{|[z(t) - z(\tau)] \cdot [h(t) - h(\tau)]|^2}{|z(t) - z(\tau)|^3},$$

3. $F_3 : z \rightarrow z'(t)$ mit $F_3'(z, h) = h'(t)$ und $F_3''(z, h, \tilde{h}) = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$,

4. $F_4 : z \rightarrow |z'(t)|$ mit $F_4'(z, h) = \frac{z'(t) \cdot h'(t)}{|z'(t)|}$ und

$$F_4''(z, h) = \frac{|h'(t)|^2}{|z'(t)|} - \frac{|z'(t) \cdot h'(t)|^2}{|z'(t)|^3}.$$

Beweis: Anwenden der Rechenregeln zur Fréchet-Ableitung. ■

Lemma 5.8 Seien $z \in U$ eine zulässige Parametrisierung und $(t, \tau) \in Q$. Dann sind die Kerne der Integraloperatoren $S_k(z)$, $K_k(z)$ und $\gamma_k(z)$ zweimal stetig Fréchet-differenzierbar.

Beweis: Für $z \in U$ und $0 < t, \tau < 2\pi$, $t \neq \tau$ erklären wir die Kerne

$$\begin{aligned} M_k(t, \tau, z) &:= \frac{i}{2} H_0(k|z(t) - z(\tau)|) |z'(\tau)|, \\ L_0(t, \tau, z) &:= \frac{1}{\pi} \frac{1}{|z(t) - z(\tau)|^2}, \\ L_k(t, \tau, z) &:= -\frac{ik}{2} \frac{H_0'(k|z(t) - z(\tau)|)}{|z(t) - z(\tau)|}, \\ q(t, \tau, z) &:= (z_2'(\tau), -z_1'(\tau)) \cdot [z(t) - z(\tau)]. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Dann lassen sich die Operatoren $S_k(z)$, $K_k(z)$ und $\gamma_k(z)$ in nachfolgender Form darstellen

$$\begin{aligned} (S_k(z)\psi)(t) &= \int_0^{2\pi} M_k(t, \tau, z) [\psi(\tau) - \psi(0)] d\tau, \\ (K_k(z)\psi)(t) &= \int_0^{2\pi} L_k(t, \tau, z) q(t, \tau, z) [\psi(\tau) - \psi(0)] d\tau, \\ (\gamma_k(z)\psi)(t) &= \left(\int_0^{2\pi} ((L_k - L_0)q - i\eta M_k)(t, \tau, z) d\tau - 1 \right) \psi(0). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Nach Lemma 5.7 sind die Kerne M_k , L_0 , L_k und q für $(t, \tau) \in Q$ zweimal stetig differenzierbar nach der dritten Variablen. Die ersten Ableitungen lauten

$$\begin{aligned} M'_k(t, \tau, z, h) &= \frac{ik}{2} H'_0(k|z(t) - z(\tau)|) \frac{[z(t) - z(\tau)] \cdot [h(t) - h(\tau)]}{|z(t) - z(\tau)|} |z'(\tau)| \\ &\quad + \frac{i}{2} H_0(k|z(t) - z(\tau)|) \frac{z'(\tau) \cdot h'(\tau)}{|z'(\tau)|}, \\ L'_0(t, \tau, z, h) &= \frac{-2}{\pi} \frac{[z(t) - z(\tau)] \cdot [h(t) - h(\tau)]}{|z(t) - z(\tau)|^4}, \\ L'_k(t, \tau, z, h) &= -\frac{ik}{2} \left\{ \frac{kH''_0(k|z(t) - z(\tau)|)}{|z(t) - z(\tau)|} - \frac{H'_0(k|z(t) - z(\tau)|)}{|z(t) - z(\tau)|^2} \right\} \times \\ &\quad \times \frac{[z(t) - z(\tau)] \cdot [h(t) - h(\tau)]}{|z(t) - z(\tau)|} \\ q'(t, \tau, z, h) &= (h'_2(\tau), -h'_1(\tau)) \cdot [z(t) - z(\tau)] + (z'_2(\tau), -z'_1(\tau)) \cdot [h(t) - h(\tau)]. \end{aligned} \quad (5.11)$$

■

Ziel ist nachzuweisen, dass die Fréchet-Ableitungen von $z \mapsto S_k(z)$, $z \mapsto K_k(z)$ und $z \mapsto \gamma_k(z)$ gegeben sind durch

$$\begin{aligned} S'_k(z) &: C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap C^2[0, 2\pi] \rightarrow \mathcal{L}(C_{2\pi}, C_{2\pi}) \\ &\quad h \longmapsto S'_k(\cdot, z, h) \\ (S'_k(\varphi, z, h))(t) &= \int_0^{2\pi} M'_k(t, \tau, z, h) [\varphi(\tau) - \varphi(0)] d\tau \\ K'_k(z) &: C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap C^2[0, 2\pi] \rightarrow \mathcal{L}(C_{2\pi}, C_{2\pi}) \\ &\quad h \longmapsto K'_k(\cdot, z, h) \\ (K'_k(\varphi, z, h))(t) &:= \int_0^{2\pi} \left\{ L'_k(t, \tau, z, h) q(t, \tau, z) + L_k(t, \tau, z) q'(t, \tau, z, h) \right\} [\varphi(\tau) - \varphi(0)] d\tau, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma'_k(z) &: C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap C^2[0, 2\pi] \rightarrow \mathcal{L}(C_{2\pi}, C_{2\pi}) \\
&h \longmapsto \gamma'_k(\cdot, z, h) \\
(\gamma'_k(\varphi, z, h))(t) &= \varphi(0) \int_0^{2\pi} \left\{ (L'_k - L'_0)(t, \tau, z, h)q(t, \tau, z) + (L_k - L_0)(t, \tau, z)q'(t, \tau, z, h) \right. \\
&\quad \left. - i\eta M'_k(t, \tau, z, h) \right\} d\tau.
\end{aligned}$$

Für den Beweis sind die übrigen Voraussetzungen des Differenziationsatzes 5.2 einschließlich Bemerkung 5.3 zu prüfen.

Wegen $H_n^{(1)}(r) = J_n(r) + iY_n(r)$ und der Darstellung (2.2) gilt für $H_0^{(1)}$

$$\begin{aligned}
H_0^{(1)}(k|z(t) - z(\tau)|) &= \frac{i}{\pi} J_0(k|z(t) - z(\tau)|) \ln \left(4 \sin^2 \frac{t - \tau}{2} \right) \\
&+ J_0(k|z(t) - z(\tau)|) \left[\frac{i}{\pi} \ln \left(\frac{|z(t) - z(\tau)|^2}{4 \sin^2 \frac{t - \tau}{2}} \right) + 1 + \frac{2i}{\pi} \ln \frac{k}{2} + \frac{2i}{\pi} C_E \right] \\
&- \frac{2i}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p! p!} \left(\frac{k|z(t) - z(\tau)|}{2} \right)^{2p} \psi(p)
\end{aligned}$$

und wegen (2.3) für $H_1^{(1)}$

$$\begin{aligned}
H_1^{(1)}(k|z(t) - z(\tau)|) &= \frac{i}{\pi} J_1(k|z(t) - z(\tau)|) \ln \left(4 \sin^2 \frac{t - \tau}{2} \right) \\
&+ J_1(k|z(t) - z(\tau)|) \left[\frac{i}{\pi} \ln \left(\frac{|z(t) - z(\tau)|^2}{4 \sin^2 \frac{t - \tau}{2}} \right) + 1 + \frac{2i}{\pi} \ln \frac{k}{2} + \frac{2i}{\pi} C_E \right] \\
&- \frac{i}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p! (p+1)!} \left(\frac{k|z(t) - z(\tau)|}{2} \right)^{2p+1} \{ \psi(p+1) + \psi(p) \} \\
&- \frac{2i}{\pi} \frac{1}{k|z(t) - z(\tau)|}.
\end{aligned}$$

Satz 5.9 Sei $V : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine analytische und gerade Funktion und $z \in U$ eine zulässige Parametrisierung.

Für $(t, \tau) \in Q = \{(x, y) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] \mid x \neq y\} \setminus \{(0, 0), (0, 2\pi), (2\pi, 0), (2\pi, 2\pi)\}$ habe der Kern f die Form

$$f(t, \tau, z) = V(k|z(t) - z(\tau)|) |z'(\tau)| \quad \text{oder}$$

$$f(t, \tau, z) = V(k|z(t) - z(\tau)|) |z'(\tau)| \ln \left(4 \sin^2 \frac{t - \tau}{2} \right) \quad \text{oder}$$

$$f(t, \tau, z) = V(k|z(t) - z(\tau)|) |z'(\tau)| \ln \left(\frac{|z(t) - z(\tau)|^2}{4 \sin^2 \frac{t - \tau}{2}} \right).$$

Dann erfüllt der Kern f die Voraussetzungen aus Satz 5.2. Insbesondere ist die Abbildung $U \rightarrow \mathcal{L}(C_{2\pi}, C_{2\pi})$, $z \mapsto S_k(z)$, mit

$$(S_k(z)\varphi)(t) = \int_0^{2\pi} M_k(t, \tau, z) [\varphi(\tau) - \varphi(0)] d\tau, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

Fréchet-differenzierbar mit Ableitung $X \rightarrow \mathcal{L}(C_{2\pi}, C_{2\pi})$, $h \mapsto S'_k(z, h)$, wobei

$$(S'_k(z, h)\varphi)(t) = \int_0^{2\pi} M'_k(t, \tau, z, h) [\varphi(\tau) - \varphi(0)] d\tau, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Dabei sind die Kerne M_k und M'_k durch (5.9) und (5.11) gegeben.

Beweis: Es werden die Voraussetzungen von Satz 5.2 geprüft.

1. Voraussetzung 1 ist wegen der Regularität von V und Lemma 5.7 gegeben.

2. Als nächstes wird Voraussetzung 2 nachgerechnet. Die Funktionen f sind in den beiden ersten Argumenten 2π -periodisch. Im ersten Fall ist f (bei festem $z \in U$) stetig auf $[0, 2\pi]^2$, im zweiten Fall schwach singulär. Es bleibt der Nachweis der Beschränktheit (siehe Bemerkung 5.3) von

$$\ln \left(\frac{|z(t) - z(\tau)|^2}{4 \sin^2 \frac{t - \tau}{2}} \right)$$

zu beweisen. Die Stetigkeit auf $Q \setminus \{(0, 0), (2\pi, 2\pi), (0, 2\pi), (2\pi, 0)\}$ ist offensichtlich. Eine Taylorentwicklung zeigt, dass der Ausdruck durch

$$\ln(|z'(t)|^2), \quad 0 \leq t = \tau \leq 2\pi,$$

stetig ergänzt wird. Es verbleibt die Beschränktheit bei $(0, 2\pi)$ und $(2\pi, 0)$ nachzuweisen. Sei dazu $\delta > 0$ hinreichend klein und

$$0 < \tau \leq \delta, \quad 2\pi - \delta \leq t < 2\pi.$$

Offenbar gilt

$$\frac{|z(t) - z(\tau)|^2}{4 \sin^2 \frac{t - \tau}{2}} = \frac{|z(t) - z(\tau)|^2 / (t - 2\pi - \tau)^2}{4 \sin^2 \left(\frac{t - \tau}{2} \right) / (t - 2\pi - \tau)^2}.$$

Der Nenner ist im Quadrat $[2\pi - \delta, 2\pi) \times (0, \delta]$ stetig, läßt sich durch 1 in $(2\pi, 0)$ stetig ergänzen und hat keine Nullstellen. Der Zähler bleibt in obigem Quadrat beschränkt, denn aus dem Mittelwertsatz folgt

$$|z(t) - z(\tau)| = |z(t - 2\pi) - z(\tau)| \leq |t - 2\pi - \tau| \|z'\|_\infty$$

und damit

$$\left| \frac{|z(t) - z(\tau)|^2}{(t - 2\pi - \tau)^2} \right| \leq \|z'\|_\infty^2, \quad (t, \tau) \in [2\pi - \delta, 2\pi) \times (0, \delta].$$

Als nächstes ist die Voraussetzung 2 für die erste Ableitung $\frac{\partial f}{\partial z}$ zu prüfen. Mit der Bezeichnung $f_1(t, \tau, z) = V(k|z(t) - z(\tau)|) |z'(\tau)|$ folgen aus der Produktregel (Satz 2.3) und Lemma 5.7 die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial z}(t, \tau, z, h) &= kV'(k|z(t) - z(\tau)|) \frac{(z(t) - z(\tau)) \cdot (h(t) - h(\tau))}{|z(t) - z(\tau)|} |z'(\tau)| \\ &\quad + V(k|z(t) - z(\tau)|) \frac{z'(\tau) \cdot h'(\tau)}{|z'(\tau)|} \quad \text{oder} \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(t, \tau, z, h) = \frac{\partial f_1}{\partial z}(t, \tau, z, h) \ln \left(4 \sin^2 \frac{t - \tau}{2} \right) \quad \text{oder} \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z}(t, \tau, z, h) &= \frac{\partial f_1}{\partial z}(t, \tau, z, h) \ln \left(\frac{|z(t) - z(\tau)|^2}{4 \sin^2 \frac{t - \tau}{2}} \right) \\ &\quad + f_1(t, \tau, z) 2 \frac{(z(t) - z(\tau)) \cdot (h(t) - h(\tau))}{|z(t) - z(\tau)|^2}. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Offenbar ist $\frac{\partial f_1}{\partial z}$ stetig auf $[0, 2\pi]^2$ mit Ausnahme der Punkte $(0, 2\pi)$ und $(2\pi, 0)$. Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung ergibt sich

$$\left| \frac{(z(t) - z(\tau)) \cdot (h(t) - h(\tau))}{|z(t) - z(\tau)|} \right| \leq 2 \|h\|_\infty,$$

und daher (bei festen z und h) die Beschränktheit von $\frac{\partial f_1}{\partial z}(t, \tau, z, h)$ auf Q . Für $\frac{\partial f}{\partial z}$ wie in (5.14) ist der Ausdruck ebenfalls beschränkt, für $\frac{\partial f}{\partial z}$ wie in (5.13) ist der Term Summe aus einem schwach singulären und einem beschränkten Anteil.

3. Es bleibt das Prüfen der Voraussetzung 3. Dazu sei $z_0 \in U$ beliebig, aber fest vorgegeben. Zu z_0 setze $R := \frac{1}{2} \inf_{0 \leq \tau \leq 2\pi} |z'_0(\tau)| > 0$. Für den Rest des Beweises seien $z \in B[z_0, R] \subset U$ und $h \in X$. Der Radius R wurde gerade so gewählt, dass $\inf_{0 \leq \tau \leq 2\pi} |z'(\tau)| \geq R$ für alle $z \in B[z_0, R]$ gilt. Der Integrand $f(\cdot, \cdot, z)$ ist jeweils ein Produkt der Terme

$|z'(\tau)|, V(k|z(t) - z(\tau)|)$ und $\ln\left(\frac{|z(t)-z(\tau)|^2}{4\sin^2\frac{t-\tau}{2}}\right)$. Sei zunächst $f(t, \tau, z) = |z'(\tau)|$. Offenbar gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z}(t, \tau, z, h) &= \frac{z'(\tau) \cdot h'(\tau)}{|z'(\tau)|}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(t, \tau, z, h) &= \frac{|h'(\tau)|^2}{|z'(\tau)|} - \frac{|z'(\tau) \cdot h'(\tau)|^2}{|z'(\tau)|^3}.\end{aligned}$$

Mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung ergeben sich die Majoranten

$$\begin{aligned}|f(t, \tau, z)| &\leq R + \|z_0\|_X \leq C(R, z_0), \\ \left|\frac{\partial f}{\partial z}(t, \tau, z, h)\right| &\leq \|h'\|_\infty \leq \|h\|_X, \\ \left|\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(t, \tau, z, h)\right| &\leq 2\frac{\|h'\|_\infty^2}{|z'(\tau)|} \leq \frac{2}{R}\|h\|_X^2.\end{aligned}$$

Für $f(t, \tau, z) = V(r)$, mit $r = k|z(t) - z(\tau)|$, ergeben sich

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z}(t, \tau, z, h) &= V'(r) k \frac{(z(t) - z(\tau)) \cdot (h(t) - h(\tau))}{|z(t) - z(\tau)|}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(t, \tau, z, h) &= V''(r) k^2 \frac{[(z(t) - z(\tau)) \cdot (h(t) - h(\tau))]^2}{|z(t) - z(\tau)|^2} \\ &\quad + V'(r) k \left[\frac{|h(t) - h(\tau)|^2}{|z(t) - z(\tau)|} - \frac{|(z(t) - z(\tau)) \cdot (h(t) - h(\tau))|^2}{|z(t) - z(\tau)|^3} \right].\end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung an V die Abbildungen $r \mapsto V(r), V'(r), r^{-1}V'(r), V''(r)$ auf der Menge $\{w \in \mathbb{C} \mid |w| \leq 2|k|(R + \|z_0\|_X)\}$ beschränkt sind, erhält man mit einer geeigneten Konstanten die Abschätzungen

$$\left|\frac{\partial^j f}{\partial z^j}(t, \tau, z, h)\right| \leq C(z_0, R) \|h\|_X^j, \quad j = 0, 1, 2, \quad z \in B[z_0, R] \subset U, \quad h \in X.$$

Schließlich sei $f(t, \tau, z) = \ln\left(\frac{|z(t)-z(\tau)|^2}{4\sin^2\frac{t-\tau}{2}}\right)$. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial z}(t, \tau, z, h) &= 2\frac{(z(t) - z(\tau)) \cdot (h(t) - h(\tau))}{|z(t) - z(\tau)|^2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(t, \tau, z, h) &= 2\frac{|h(t) - h(\tau)|^2}{|z(t) - z(\tau)|^2} - 4\frac{|(z(t) - z(\tau)) \cdot (h(t) - h(\tau))|^2}{|z(t) - z(\tau)|^4}.\end{aligned}$$

Auch hier erhält man die Abschätzungen

$$\begin{aligned} |f(t, \tau, z, h)| &\leq C(z_0, R) \\ \left| \frac{\partial f}{\partial z}(t, \tau, z, h) \right| &\leq 2 \frac{\|h'\|_\infty}{\inf_{0 \leq w \leq 2\pi} |z'(w)|} \leq C(z_0, R) \|h\|_X, \\ \left| \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(t, \tau, z, h) \right| &\leq 6 \frac{\|h'\|_\infty^2}{\inf_{0 \leq w \leq 2\pi} |z'(w)|^2} \leq C(z_0, R) \|h\|_X^2. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt nun aus dem Differenziationssatz 5.2, wobei die dortigen Funktionen $g_l^{(j)}$ in unserem Fall sämtlich konstante Funktionen sind. ■

Satz 5.10 Sei $W : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine analytische und ungerade Funktion sowie $z \in U$ eine zulässige Parametrisierung.

Für $(t, \tau) \in Q = \{(x, y) \in [0, 2\pi]^2 \mid x \neq y\} \setminus \{(0, 0), (2\pi, 0), (0, 2\pi), (2\pi, 2\pi)\}$ habe der Kern f die Form

$$\begin{aligned} f(t, \tau, z) &= \frac{W(k|z(t) - z(\tau)|)}{|z(t) - z(\tau)|} (z_2'(\tau), -z_1'(\tau)) \cdot [z(t) - z(\tau)] \ln \left(4 \sin^2 \frac{t - \tau}{2} \right) \quad \text{oder} \\ f(t, \tau, z) &= \frac{W(k|z(t) - z(\tau)|)}{|z(t) - z(\tau)|} (z_2'(\tau), -z_1'(\tau)) \cdot [z(t) - z(\tau)] \ln \left(\frac{|z(t) - z(\tau)|^2}{4 \sin^2 \frac{t - \tau}{2}} \right) \quad \text{oder} \\ f(t, \tau, z) &= \frac{1}{\pi} \frac{(z_2'(\tau), -z_1'(\tau)) \cdot [z(t) - z(\tau)]}{|z(t) - z(\tau)|^2}. \end{aligned}$$

Dann erfüllt der Kern f die Voraussetzungen von Satz 5.2. Insbesondere ist die Abbildung $U \rightarrow \mathcal{L}(C_{2\pi}, C_{2\pi})$, $z \mapsto K_k(z)$, mit

$$(K_k(z)\varphi)(t) = \int_0^{2\pi} L_k(t, \tau, z) q(t, \tau, z) [\varphi(\tau) - \varphi(0)] d\tau, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

Fréchet-differenzierbar mit Ableitung $X \rightarrow \mathcal{L}(C_{2\pi}, C_{2\pi})$, $h \mapsto K_k'(z, h)$, wobei

$$(K_k'(z, h)\varphi)(t) = \int_0^{2\pi} \{L_k'(t, \tau, z, h)q(t, \tau, z) + L_k(t, \tau, z)q'(t, \tau, z, h)\} [\varphi(\tau) - \varphi(0)] d\tau.$$

Dabei sind die Kerne L_k, q, L_k' und q' durch (5.9) und (5.11) gegeben.

Beweis: Es werden erneut die Voraussetzungen von Satz 5.2 geprüft.

1. Voraussetzung 1 ist wegen der Regularität von W erfüllt.

2. Da W analytisch und ungerade ist, ist

$$\frac{W(k|z(t) - z(\tau)|)}{|z(t) - z(\tau)|}, \quad (t, \tau) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi],$$

stetig. In den beiden ersten Fällen ist f Summe aus einem beschränkten und einem schwach singulären Anteil. Es ist lediglich

$$f(t, \tau, z) = \frac{1}{\pi} \frac{(z_2'(\tau), -z_1'(\tau)) \cdot [z(t) - z(\tau)]}{|z(t) - z(\tau)|^2}$$

zu untersuchen. Für $(t, \tau) \in Q$ ist der Kern stetig. Eine Taylorentwicklung zeigt, dass sich f auf die Diagonale $0 \leq t = \tau \leq 2\pi$ mit den Werten $\frac{1}{2\pi} \frac{(z_2'(t), -z_1'(t)) \cdot z''(t)}{|z'(t)|^2}$ stetig ergänzen lässt. Es verbleibt eine Betrachtung von f bei den Ecken $(2\pi, 0)$ und $(0, 2\pi)$. Obwohl an dieser Stelle der Nachweis ausreicht, dass sich zu festem z eine (von z abhängige) integrierbare Majorante finden lässt, wird zur Vorbereitung von Teil 3 gleich allgemeiner argumentiert. Dazu sei $z_0 \in U$ beliebig, aber fest vorgegeben. Man darf ohne Einschränkung $z_0'(0) \neq z_0'(2\pi)$ voraussetzen, denn andernfalls hat das von z_0 berandete Gebiet keine Ecke und f ist stetig. Für beliebiges $z \in U$ seien die Zahlen $a(z) = |z'(0)| > 0$, $b(z) = |z'(2\pi)| > 0$ und $\beta(z)$ als Innenwinkel bei der Ecke $z(0) = x_0(z)$ erklärt.

Weiter werden Funktionen $k_z : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, mit

$$k_z(s) = \frac{1}{\pi} \frac{a(z)b(z)s |\sin \beta(z)|}{[b(z)s - a(z) \cos(\beta(z))]^2 + (a(z))^2 \sin^2(\beta(z))}, \quad s \geq 0,$$

erklärt. Aus Stetigkeitsgründen gibt es zu z_0 ein $R > 0$ derart, dass für alle $z \in B[z_0, R] \subset U$ die Abschätzung $0 \leq k_z(s) \leq 2k_{z_0}(s)$, $s \geq 0$ gültig ist. Für $a = a(z_0)$, $b = b(z_0)$, $\beta = \beta(z_0)$ und $k = k_{z_0}$ lässt sich die Existenz von $\int_0^\infty \frac{k(s)}{s} ds$ nachweisen, denn für $0 < \beta < \pi$ gilt

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{k(s)}{s} ds &= \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\frac{b}{a \sin \beta}}{\left(\frac{bs - a \cos \beta}{a \sin \beta}\right)^2 + 1} ds \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\cot \beta}^\infty \frac{1}{t^2 + 1} dt = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\pi}{2} - \arctan(-\cot \beta) \right] \\ &= 1 - \frac{\beta}{\pi}. \end{aligned}$$

Ohne Einschränkung sei $R > 0$ so klein gewählt, dass $\sin(\beta(z))$ auf $B[z_0, R] \subset U$ das Vorzeichen nicht wechselt. Dann ist der durch Linearisierung von z erhaltene „Hauptteil“ \tilde{f} von f , mit

$$\begin{aligned}\tilde{f}(t, \tau, z) &= \frac{1}{\pi} \frac{z'(2\pi) \cdot (z'(0))^\perp (t - 2\pi)}{|z'(2\pi)|^2 (t - 2\pi)^2 + |z'(0)|^2 \tau^2 - 2\tau(t - 2\pi)|z'(0)| |z'(2\pi)| \cos \beta(z)} \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{a(z)b(z) (t - 2\pi) \sin \beta(z)}{[b(z)(t - 2\pi) - a(z)\tau \cos \beta(z)]^2 + (a(z))^2 \sin^2 \beta(z)}\end{aligned}$$

wohldefiniert. Zu z_0 und R existiert ein $\delta > 0$ so, dass

$$|f(t, \tau, z)| \leq 2|\tilde{f}(t, \tau, z)| \text{ für alle } (t, \tau) \in [2\pi - \delta, 2\pi] \times (0, \delta], z \in B[z_0, R]. \quad (5.15)$$

Um die Existenz von δ einzusehen, wird

$$\begin{aligned}z(t) &= z(2\pi) + z'(2\pi)(t - 2\pi) + O(t - 2\pi)^2, \\ z(\tau) &= z(0) + z'(0)\tau + O(\tau^2)\end{aligned}$$

entwickelt und damit folgt

$$|z(t) - z(\tau)|^2 = |z'(2\pi)|(t - 2\pi)^2 + |z'(0)|^2 \tau^2 - 2(t - 2\pi)\tau z'(2\pi) \cdot z'(0) + R_2(t, \tau, z)$$

mit einem Restterm R_2 . Wegen $z'(\tau) = z'(0) + O(\tau)$ ergibt sich

$$\begin{aligned}& f(t, \tau, z) \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{z'_2(0)[z'_1(2\pi)(t - 2\pi) - z'_1(0)\tau] - z'_1(0)[z'_2(2\pi)(t - 2\pi) - z'_2(0)\tau] + R_1(t, \tau, z)}{|z'(2\pi)|^2 (t - 2\pi)^2 + |z'(0)|^2 \tau^2 - 2\tau(t - 2\pi)z'(0) \cdot z'(2\pi) + R_2(t, \tau, z)} \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{z'(2\pi) \cdot (z'(0))^\perp (t - 2\pi) + R_1(t, \tau, z)}{|z'(2\pi)|^2 (t - 2\pi)^2 + |z'(0)|^2 \tau^2 - 2\tau(t - 2\pi)|z'(0)| |z'(2\pi)| \cos \beta + R_2(t, \tau, z)}.\end{aligned}$$

Die Restterme R_1, R_2 lassen sich durch $z^{(j)}$, $j = 0, 1, 2$, ausdrücken und man erhält

$$|R_1(t, \tau, z)| \leq C \delta^2 \|z\|_X^2, \quad |R_2(t, \tau, z)| \leq C \delta^3 \|z\|_X^2$$

mit einer von z unabhängigen Konstanten C . Damit ist die Existenz von $\delta > 0$ mit der Eigenschaft (5.15) gezeigt. Aufgrund der Wahl von R und δ erhält man für alle $z \in B[z_0, R]$ und $(t, \tau) \in [0, \delta] \times (0, \delta]$

$$\begin{aligned}|f(2\pi - t, \tau, z)| &\leq 2|\tilde{f}(2\pi - t, \tau, z)| \\ &\leq \frac{2}{\tau} k_z \left(\frac{t}{\tau}\right) \\ &\leq \frac{4}{\tau} k_{z_0} \left(\frac{t}{\tau}\right).\end{aligned}$$

Desweiteren ist für

$$f(t, \tau, z) = \frac{1}{\pi} \frac{z'(\tau)^\perp \cdot [z(t) - z(\tau)]}{|z(t) - z(\tau)|^2}$$

der Term

$$\frac{\partial f}{\partial z}(t, \tau, z, h)$$

durch eine integrierbare Funktion mal $\|h\|_X^1$ (gleichmäßig für $z \in B[z_0, R]$) abzuschätzen. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z}(t, \tau, z, h) &= f_1(t, \tau, z, h) + f_2(t, \tau, z, h) \text{ mit} \\ f_1(t, \tau, z, h) &= \frac{1}{\pi} \frac{h'(\tau)^\perp \cdot [z(t) - z(\tau)] + z'(\tau)^\perp \cdot [h(t) - h(\tau)]}{|z(t) - z(\tau)|^2}, \\ f_2(t, \tau, z, h) &= \frac{-2}{\pi} \frac{z'(\tau)^\perp \cdot [z(t) - z(\tau)]}{|z(t) - z(\tau)|^2} \frac{[z(t) - z(\tau)] \cdot [h(t) - h(\tau)]}{|z(t) - z(\tau)|^2} \\ &= -2f(t, \tau, z) \frac{[z(t) - z(\tau)] \cdot [h(t) - h(\tau)]}{|z(t) - z(\tau)|^2}. \end{aligned}$$

Der Summand f_2 ist Produkt aus einem Mellin-Kern und einem Ausdruck, der für $z \in B[z_0, R]$ durch $C\|h\|_X$ beschränkt bleibt. Für den ersten Summanden liefert eine Taylorentwicklung

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\pi} \frac{h'(0)^\perp \tau \cdot [z'(2\pi)(t - 2\pi) - z'(0)\tau] + z'(0)^\perp \tau \cdot [h'(2\pi)(t - 2\pi) - h'(0)\tau] + O(\delta^2)}{|z'(2\pi)|^2(t - 2\pi)^2 + |z'(0)|^2\tau^2 - 2(t - 2\pi)\tau z'(2\pi) \cdot z'(0) + O(\delta^2)} \\ &= \frac{1}{\pi} \frac{(h'(0)^\perp \cdot z'(2\pi) + z'(0)^\perp \cdot h'(2\pi))(t - 2\pi)\tau + O(\delta^2)}{|z'(2\pi)|^2(t - 2\pi)^2 + |z'(0)|^2\tau^2 - 2(t - 2\pi)\tau z'(2\pi) \cdot z'(0) + O(\delta^2)}. \end{aligned}$$

Der wesentliche Teil hat wiederum die Form

$$\frac{C(z, h)(2\pi - t)\tau}{a^2(t - 2\pi)^2 + b^2\tau^2 - 2\tau(t - 2\pi)ab \cos \beta}$$

Dabei sind die Konstanten a, b von h unabhängig, hängen aber von z stetig ab. Die von z und h abhängende Konstante $C(z, h)$ genügt einer Abschätzung von der Form $|C(z, h)| \leq \|h\|_X^1 C(z_0, R)$. Damit lässt sich ganz analog durch Wahl von R und anschließender Wahl von δ eine Majoranteneigenschaft bei den Ecken gewinnen, s.d. schließlich gilt

$$\left| \frac{\partial f}{\partial z}(t, \tau, z, h) \right| \leq g(t, \tau) \|h\|_X^1, \quad (t, \tau) \in Q, \quad z \in B[z_0, R],$$

wobei $\sup_{0 < t < 2\pi} \int_0^{2\pi} g(t, \tau) d\tau < \infty$.

3. Weil im zweiten Teil des Beweises gleich allgemeiner argumentiert wurde, ist nur noch $\frac{\partial^2}{\partial z^2} f(t, \tau, z, h)$ abzuschätzen. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(t, \tau, z, h) &= \frac{\partial}{\partial z}(f_1 + f_2)(t, \tau, z, h) \\ &= \sum_{j=1}^4 g_j(t, \tau, z, h) \end{aligned}$$

mit den Funktionen

$$\begin{aligned} g_1(t, \tau, z, h) &= \frac{1}{\pi} \frac{2h'(\tau)^\perp \cdot [h(t) - h(\tau)]}{|z(t) - z(\tau)|^2}, \\ g_2(t, \tau, z, h) &= \frac{-2}{\pi} \frac{h'(\tau)^\perp \cdot [z(t) - z(\tau)] + z'(\tau)^\perp \cdot [h(t) - h(\tau)]}{|z(t) - z(\tau)|^2} \frac{[z(t) - z(\tau)] \cdot [h(t) - h(\tau)]}{|z(t) - z(\tau)|^2} \\ &= -2f_1(t, \tau, z, h) \frac{[z(t) - z(\tau)] \cdot [h(t) - h(\tau)]}{|z(t) - z(\tau)|^2}, \\ g_3(t, \tau, z, h) &= -2 \frac{\partial f}{\partial z}(t, \tau, z, h) \frac{[z(t) - z(\tau)] \cdot [h(t) - h(\tau)]}{|z(t) - z(\tau)|^2}, \\ g_4(t, \tau, z, h) &= -2f(t, \tau, z) \left\{ \frac{|h(t) - h(\tau)|^2}{|z(t) - z(\tau)|^2} - 2 \frac{|[z(t) - z(\tau)] \cdot [h(t) - h(\tau)]|^2}{|z(t) - z(\tau)|^4} \right\}. \end{aligned}$$

Die Anteile mit Singularitäten vom Mellin-Typ wurden schon bei f , f_1 und $\frac{\partial f}{\partial z}$ behandelt. Alle anderen Faktoren und Summanden werden mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung abgeschätzt. Es ist leicht abzulesen, dass sich alle Summanden $g_j(t, \tau, z, h)$ durch $\|h\|_X^2$ mal eine integrierbare Funktion abschätzen lassen, und zwar gleichmäßig für $z \in B[z_0, R]$. ■

5.3 Die Fréchet - Ableitung des Fernfeldoperators

In diesem Abschnitt wird die Fréchet-Differenzierbarkeit des Fernfeldoperators \mathcal{F} ,

$$\mathcal{F} : C_{2\pi}(\mathbb{R}) \cap C^{2,\alpha}[0, 2\pi] \rightarrow L^2(\Omega), \quad z \mapsto u_\infty,$$

der den Rand des Streugebiets auf das Fernfeld abbildet, nachgewiesen und die Fréchet-Ableitung $\mathcal{F}'(z, h)$ durch die Lösung eines Randwertproblems charakterisiert.

Um deutlich zu machen, auf welchem Rand die entsprechenden Funktionen auszuwerten sind, wird für eine zulässige Parametrisierung z die Schreibweise

$$\partial D_z = \{z(t) \mid 0 \leq t \leq 2\pi\}$$

vereinbart. Weiterhin wird (für ein Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$) für die Menge der von G nach \mathbb{C} beschränkten stetigen Funktionen abkürzend das Symbol $C_b(G)$ verwendet.

Da \mathcal{F} Komposition verschiedener Operatoren ist, wird für die Anwendung der Kettenregel unter anderem die Differenzierbarkeit der Potenzialoperatoren benötigt. Diese wird durch den nachfolgenden Satz geklärt.

Satz 5.11

Seien z_0 eine zulässige Parametrisierung und $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet mit $\overline{G} \subset \mathbb{R}^2 \setminus \partial D_0$ sowie $R > 0$ hinreichend klein. P_z bezeichne den Potenzialoperator

$$P_z : C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow C_b(G)$$

in parametrisierter Form

$$\begin{aligned} (P_z \psi)(x) &= \int_0^{2\pi} (f_{K_k} - i\eta f_{S_k})(x, \tau, z) \psi(\tau) d\tau, \quad x \in G, \\ f_{K_k}(x, \tau, z) &:= -\frac{ik}{4} H_0^{(1)'}(k|x - z(\tau)|) \frac{z'(\tau)^\perp \cdot (x - z(\tau))}{|x - z(\tau)|}, \\ f_{S_k}(x, \tau, z) &:= \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|x - z(\tau)|) |z'(\tau)|. \end{aligned}$$

Die Abbildung $z \mapsto P_z$ ist Fréchet-differenzierbar von $B(z_0, R) \subset U \rightarrow \mathcal{L}(C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), C_b(G))$ mit Ableitung

$$\begin{aligned} C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap C^{2,\alpha}[0, 2\pi] &\rightarrow \mathcal{L}(C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}), C_b(G)), \quad h \mapsto P'(z, h), \\ (P'(z, h)\psi)(x) &:= \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} (f_{K_k} - i\eta f_{S_k})(x, \tau, z, h) \psi(\tau) d\tau, \quad x \in G, \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{S_k}}{\partial z}(x, \tau, z, h) &= \frac{ik}{4} H_0'(k|x - z(\tau)|) \frac{[x - z(\tau)] \cdot (-h(\tau))}{|x - z(\tau)|} |z'(\tau)| \\ &\quad + \frac{i}{4} H_0(k|x - z(\tau)|) \frac{z'(\tau) \cdot h'(\tau)}{|z'(\tau)|}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{K_k}}{\partial z}(x, \tau, z, h) &= \frac{ik}{4} \left\{ \frac{kH_0''(k|x-z(\tau)|)}{|x-z(\tau)|} - \frac{H_0'(k|x-z(\tau)|)}{|x-z(\tau)|^2} \right\} \times \\ &\times \frac{[x-z(\tau)] \cdot h(\tau)}{|x-z(\tau)|} z'(\tau)^\perp \cdot (x-z(\tau)) \\ &- \frac{ik}{4} \frac{H_0'(k|x-z(\tau)|)}{|x-z(\tau)|} \{h'(\tau)^\perp \cdot (x-z(\tau)) - z'(\tau)^\perp \cdot h(\tau)\}. \end{aligned}$$

Beweis: Vergleiche Bemerkung 5.5 zum Satz 5.2. ■

Wir erklären die parametrisierten Einfach- und Doppelschichtpotenziale

$$\begin{aligned} (E_k(z)\varphi)(x) &= \int_0^{2\pi} f_{S_k}(x, \tau, z) [\varphi(\tau) - \varphi(0)] d\tau, \quad x \notin \partial D_z, \\ (D_k(z)\psi)(x) &= \int_0^{2\pi} f_{K_k}(x, \tau, z) [\psi(\tau) - \psi(0)] d\tau, \quad x \notin \partial D_z. \end{aligned}$$

Satz 5.12 Für die Potenziale $u(x) = (E_k(z)\varphi)(x)$ und $v(x) = (D_k(z)\psi)(x)$ sowie deren Ableitungen $u'(x) = (E'_k(z, h)\varphi)(x)$, $v'(x) = (D'_k(z, h)\psi)(x)$ mit Dichten $\varphi \in C_{2\pi}^{0,\alpha}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, $\psi \in C_{2\pi}^{1,\alpha}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ gelten die Sprungbeziehungen

$$\begin{aligned} u'_\pm(z(t)) &= \frac{1}{2}(S'_k(z, h)\varphi)(t) - \text{grad } u_\pm(z(t)) \cdot h(t), \quad 0 < t < 2\pi, \\ v'_\pm(z(t)) &= \frac{1}{2}(K'_k(z, h)\psi)(t) - \text{grad } v_\pm(z(t)) \cdot h(t), \quad 0 < t < 2\pi. \end{aligned}$$

Beweis: Vergleiche [22, Theorem 3.2]. In den Beweis gehen lediglich Sprungbeziehungen und Abbildungseigenschaften für Einfach- und Doppelschichtpotenziale ein. Weil wir uns nur für Sprungbeziehungen außerhalb der Ecke interessieren, bleibt die Aussage des Satzes richtig. ■

Mit dem Restriktionsoperator $R_z : C(\mathbb{R}^2) \rightarrow C_{2\pi}[0, 2\pi]$,

$$(R_z f)(t) := -2f(z(t)), \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

und dem Randintegraloperator

$$A_z = K_k(z) - i\eta S_k(z) + \gamma_k(z) \tag{5.16}$$

hat das zur einfallenden Welle u^i am schallweichen Hindernis D_z gestreute Feld u^s die Form

$$u^s(x) = \left(P_z(I + A_z)^{-1} R_z u^i \right)(x), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D_z}.$$

Das zugehörige Fernfeld u_∞ ergibt sich als Fernfeld des Potentials P_z mit Dichte $(I + A_z)^{-1} R_z u^i$, d.h.

$$u_\infty = P_{z,\infty}(I + A_z)^{-1} R_z u^i.$$

Nach der Kettenregel sind

$$\begin{aligned} B(z_0, R) \subset U &\rightarrow C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D_{z_0}}), & z &\mapsto u^s, \\ B(z_0, R) \subset U &\rightarrow L^2(\Omega), & z &\mapsto u_\infty \end{aligned}$$

Fréchet-differenzierbar mit Ableitung

$$C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \cap C^{2,\alpha}([0, 2\pi], \mathbb{C}) \rightarrow C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D_{z_0}}), \quad h \mapsto v = v_1 + v_2 + v_3,$$

beziehungsweise $h \mapsto v_\infty$, wobei

$$\begin{aligned} v_1 &= P'(z, h)(I + A_z)^{-1} R_z u^i, \\ v_2 &= -P_z(I + A_z)^{-1} A'(z, h)(I + A_z)^{-1} R_z u^i, \\ v_3 &= P_z(I + A_z)^{-1} R'(z, h) u^i \end{aligned}$$

gilt und v_∞ das Fernfeld von v darstellt.

Als nächstes soll v durch ein Randwertproblem charakterisiert werden. v_2 und v_3 lösen die Helmholtzgleichung in $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ und erfüllen die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung. Da außerhalb des Randes die Fréchet-Differenziation und gewöhnliche Differenziation nach x vertauschbar sind, erfüllt auch v_1 diese Bedingungen. Die Randwerte von v sind zu bestimmen. v_3 löst das äußere Dirichletproblem zu den Randwerten $\frac{1}{2} R'(z, h) u^i$, d.h.

$$\begin{aligned} v_3(z(t)) &= \frac{1}{2} \left(R'(z, h) u^i \right)(z(t)) \\ &= -\text{grad } u^i(z(t)) \cdot h(t) \\ &= -\text{grad } u(z(t)) \cdot h(t) + \text{grad } u^s(z(t)) \cdot h(t) \\ &= -\nu(z(t)) \frac{\partial u}{\partial \nu}(z(t)) \cdot h(t) + \text{grad } u^s(z(t)) \cdot h(t), \quad 0 < t < 2\pi. \end{aligned} \tag{5.17}$$

Dabei wurden die Gleichungen $u = u^i + u^s$ und $u(z(t)) = 0$, $t \in [0, 2\pi]$, verwendet. Insbesondere wird aus Gleichung (5.17) die Regularität

$$v_3 \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D_z}) \cap C(\mathbb{R}^2 \setminus D_z)$$

deutlich. Desgleichen ergibt sich aufgrund der Definition als kombiniertes Einfach- und Doppelschichtpotenzial

$$v_2(z(t)) = -\frac{1}{2} \left(A'(z, h)(I + A_z)^{-1} R_z u^i \right) (z(t)) = \frac{1}{2} \left(A'(z, h)(I + A_z)^{-1} R_z u^s \right) (z(t)).$$

Aufgrund der Abbildungseigenschaft $A'(z, h) : C_{2\pi} \rightarrow C_{2\pi}$ sind die Randwerte von v_2 ebenfalls stetig.

Es verbleibt v_1 zu untersuchen. Es gilt $v_1(z(t)) = (P'(z, h)\varphi)_+(z(t))$ mit der Dichte $\varphi = (I + A_z)^{-1} R_z u^i$. Es gilt

$$\begin{aligned} (P'(z, h)\varphi)(x) &= \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} (f_{K_k} - i\eta f_{S_k})(x, \tau, z, h) [\varphi(\tau) - \varphi(0)] d\tau \\ &\quad + \varphi(0) \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} (f_{K_k} - f_{K_0} - i\eta f_{S_k})(x, \tau, z, h) d\tau, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D_z}. \end{aligned}$$

Weil die Dichte φ auf jedem abgeschlossenen Teilstück von $]0, 2\pi[$ $C^{1,\alpha}$ -glatt ist, erhält man unter Verwendung von Satz 5.12 für $0 < t < 2\pi$

$$\begin{aligned} &(P'(z, h)\varphi)_+(z(t)) \\ &= \frac{1}{2} ((K_k - i\eta S_k)'(z, h)\varphi)(t) - \text{grad}(D_k(z) - i\eta E_k(z))\varphi_+(z(t)) \cdot h(t) \\ &\quad + \varphi(0) \left[\frac{1}{2} ((K_k - K_0 - i\eta S_k)'(z, h)\mathbf{1})(t) - \text{grad}(D_k(z) - D_0(z) - i\eta E_k(z))\mathbf{1}_+(z(t)) \cdot h(t) \right] \\ &= \frac{1}{2} (A'(z, h)\varphi)(t) - \text{grad}(D_k(z) - i\eta E_k(z))\varphi_+(z(t)) \cdot h(t) \\ &\quad - \varphi(0) \text{grad}(D_k(z) - D_0(z) - i\eta E_k(z))\mathbf{1}_+(z(t)) \cdot h(t) \\ &= -\frac{1}{2} (A'(z, h)(I + A_z)^{-1} R_z u^s)(z(t)) - \text{grad} u^s(z(t)) \cdot h(t). \end{aligned}$$

Durch Zusammenfügen der drei Randbedingungen für v_j , $j = 1, 2, 3$, erhält man als Randbedingung für $v = v_1 + v_2 + v_3$ schließlich

$$v(z(t)) = -\nu(z(t)) \frac{\partial u}{\partial \nu}(z(t)) \cdot h(t), \quad 0 < t < 2\pi.$$

Es wurde unter anderem festgestellt, dass v_2 und v_3 bis in den Rand von D_z stetig sind. Damit lässt sich die Fréchet-Ableitung des Fernfeldoperators durch den nachfolgenden Satz charakterisieren.

Satz 5.13 Die Fréchet-Ableitung $\mathcal{F}'(z, h)$ ist gegeben durch das Fernfeld v_∞ , wobei v das Randwertproblem

$$\begin{aligned}\Delta v + k^2 v &= 0 \text{ in } \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D_z}, \\ v(z(t)) &= -\nu(z(t)) \frac{\partial u}{\partial \nu}(z(t)) \cdot h(t), \quad 0 < t < 2\pi,\end{aligned}$$

löst derart, dass $v - v_1$ stetig in $\mathbb{R}^2 \setminus D_z$ ist.

Ausgewertet wird obige Fréchet-Ableitung dadurch, dass für $b := v - v_1$ das Randwertproblem

$$\begin{aligned}\Delta b + k^2 b &= 0 \text{ in } \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}, \\ b(z(t)) &= -\text{grad } u^i(z(t)) \cdot h(t) - \frac{1}{2} (A'(z, h)(I + A_z)^{-1} R_z u^i)(z(t)), \quad 0 \leq t \leq 2\pi,\end{aligned}\tag{5.18}$$

gelöst wird und

$$v_\infty = b_\infty + v_{1,\infty}\tag{5.19}$$

zu setzen ist.

Mit der Asymptotik (2.4) sowie

$$H_0''(t) = -H_0^{(1)}(t) \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{t}\right) \right\}, \quad t \rightarrow \infty,$$

erhält man für das Fernfeld $v_{1,\infty}$ von v_1 die Darstellung

$$\begin{aligned}(v_{1,\infty})(\hat{x}) &= \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{8\pi k}} \int_0^{2\pi} \left[k h'(\tau)^\perp \cdot \hat{x} - ik^2 z'(\tau)^\perp \cdot \hat{x} \hat{x} \cdot h(\tau) + \right. \\ &\quad \left. + \eta \left\{ \frac{z'(\tau) \cdot h'(\tau)}{|z'(\tau)|} - ik \hat{x} \cdot h(\tau) |z'(\tau)| \right\} \right] e^{-ik \hat{x} \cdot z(\tau)} \varphi(z(\tau)) d\tau, \quad |\hat{x}| = 1,\end{aligned}\tag{5.20}$$

mit der Dichte

$$\varphi = (I + A_z)^{-1} R_z u^i.$$

Das Ergebnis (5.20) ist auch plausibel, denn formales Differenzieren nach z in der parametrisierten Form von (4.19) liefert das gleiche Resultat.

Satz 5.13 ermöglicht nun die Auswertung der Fréchet-Ableitung von \mathcal{F} . Eine ausführliche Beschreibung des inversen Verfahrens und dessen numerische Umsetzung erfolgt im Abschnitt 6.1 des nächsten Kapitels.

Kapitel 6

Numerische Ergebnisse beim inversen Streuproblem

In diesem Kapitel wird dargestellt, wie sich mit einem regularisierten Newtonverfahren der in Abschnitt 5.3 gewonnene Satz 5.13 zur Rekonstruktion des Streugebietes einsetzen lässt. Dabei wird im Abschnitt 6.1 das Verfahren allgemein erläutert. Im zweiten Teil wird eine Modifizierung im Tikhonov-Funktional vorgenommen und ein zu lösendes Gleichungssystem hergeleitet. Im Abschnitt 6.3 wird auf den Operator $A'(z, h)$ und dessen numerische Behandlung eingegangen. In den Abschnitten 6.4 bis 6.6 werden für verschiedene Test-situationen numerische Ergebnisse vorgestellt. Dabei wurde sowohl für eine einfallende ebene Welle, als auch für mehrere Messdaten gerechnet. Desweiteren wurde auch der Fall eines eingeschränkten Messbereichs untersucht.

6.1 Newtonverfahren und Regularisierung

Die zu lösende Operatorgleichung

$$\mathcal{F}(z) = u_{\infty}^{meas} \quad (6.1)$$

für die Parametrisierung z des unbekanntes Streugebietes bei gegebenen Meßwerten u_{∞}^{meas} , ist nichtlinear und schlecht gestellt.

Gleichung 6.1 wird durch die linearisierte Gleichung

$$\mathcal{F}(z) + \mathcal{F}'(z, h) = u_{\infty}^{meas} \quad (6.2)$$

ersetzt, sodass sich bei geeigneter Startparametrisierung z_0 ein Iterationsverfahren

$$\begin{aligned}\mathcal{F}'(z_p, h_p) &= u_\infty^{meas} - \mathcal{F}(z_p), \\ z_{p+1} &= z_p + h_p, \quad p = 0, 1, 2, \dots,\end{aligned}\tag{6.3}$$

ergibt.

Die linearisierte Gleichung (6.3) soll nun auf einem endlichdimensionalen Unterraum $Q_N = \text{span}\{q_1, \dots, q_N\} \subset X$ näherungsweise gelöst werden. Dabei wird das semidiskrete Problem

$$\sum_{j=1}^N a_j^{(p)} \mathcal{F}'(z_p, q_j) = u_\infty^{meas} - \mathcal{F}(z_p)$$

zur Ermittlung von

$$h_p = \sum_{j=1}^N a_j^{(p)} q_j \in Q_N$$

ersetzt durch ein volldiskretes Problem. Durch Wahl von M Kollokationspunkten $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_M \in \Omega$ ergibt sich das lineare Gleichungssystem

$$\sum_{j=1}^N a_j^{(p)} \mathcal{F}'(z_p, q_j)(\hat{x}_i) = u_\infty^{meas}(\hat{x}_i, d) - \mathcal{F}(z_p)(\hat{x}_i), \quad i = 1, \dots, M,\tag{6.4}$$

für die N Unbekannten $a_1^{(p)}, \dots, a_N^{(p)} \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$h_p = \sum_{j=1}^N a_j^{(p)} q_j \in Q_N$$

eine Näherungslösung von (6.3).

Da sich die Schlechtgestellttheit von (6.1) auf (6.4) vererbt, macht es keinen Sinn, das Gleichungssystem exakt zu lösen.

Grundlage für ein numerisches Verfahren zur Lösung von (6.4) bildet der nachfolgende Satz zur Tikhonov-Regularisierung.

Satz 6.1 *Seien X, Y Hilberträume, $A : X \rightarrow Y$ linear, kompakt und $\alpha > 0$. Dann gilt:*

- a) *Für A existiert ein singuläres System (μ_n, φ_n, g_n) .*

b) $\alpha I + A^*A : X \rightarrow X$ ist bijektiv und beschränkt invertierbar. Insbesondere ist $R_\alpha = (\alpha I + A^*A)^{-1}A^*$ aus $\mathcal{L}(Y, X)$.

c) Die für $f \in Y$ eindeutig bestimmte Lösung $\varphi_\alpha \in X$ der Gleichung

$$\alpha\varphi_\alpha + A^*A\varphi_\alpha = A^*f$$

hat die Darstellung

$$\varphi_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n}{\alpha + \mu_n^2} (f, g_n) \varphi_n. \quad (6.5)$$

d) Die Optimierungsaufgabe $\min_{\varphi \in X} J(\varphi)$ für das Tikhonov-Funktional

$$J(\varphi) = \|A\varphi - f\|^2 + \alpha\|\varphi\|^2$$

besitzt genau eine Lösung φ_α . Diese wird durch (6.5) gegeben.

e) Zusätzlich sei A injektiv und für den Wertebereich gelte $\overline{A(X)} = Y$. Für $\delta > 0$, $f \in A(X)$, $f^\delta \in Y$ mit $\|f - f^\delta\| \leq \delta < \|f^\delta\|$ existiert genau ein $\alpha = \alpha(\delta) > 0$ so, dass gilt

$$\|AR_{\alpha(\delta)}f^\delta - f^\delta\| = \delta.$$

Für dieses $\alpha(\delta)$ konvergiert (mit $\delta \rightarrow 0$) die Lösung $\varphi_{\alpha(\delta)}$ der Gleichung

$$R_{\alpha(\delta)}\varphi_{\alpha(\delta)} = f^\delta$$

gegen die Lösung von $A\varphi = f$.

Beweis: siehe [7, Theorem 4.13 und 4.16] ■

Da die Matrixeinträge $\mathcal{F}(z_p, q_j)(\hat{x}_i)$ und die rechte Seite $u_\infty^{meas}(\hat{x}_i, d) - \mathcal{F}(z_p)(\hat{x}_i)$ des linearen Gleichungssystems (6.4) komplexwertig sind, wir aber eine reelle Lösung $a_1^{(p)}, \dots, a_N^{(p)}$ suchen, ist (6.4) ein Gleichungssystem mit $2M$ Gleichungen und N Unbekannten. Für $2M > N$ ist dieses überbestimmt, sodass das lineare Ausgleichsproblem nach der Methode der kleinsten Quadrate zusammen mit Satz 6.1 auf das Problem

$$(\alpha_p I + C^{(p)t} C^{(p)}) a^{(p)} = C^{(p)t} g^{(p)} \quad (6.6)$$

führt, wobei $\alpha_p > 0$ ein geeigneter Regularisierungsparameter ist und für die Komponenten der Matrix $C^{(p)} \in \mathbb{R}^{2M \times N}$, beziehungsweise der rechten Seite $g^{(p)} \in \mathbb{R}^{2M}$, gilt

$$\begin{aligned} c_{ij}^{(p)} &= \operatorname{Re} \left(\mathcal{F}'(z_p, q_j)(\hat{x}_i) \right), & i = 1, \dots, M, j = 1, \dots, N, \\ c_{ij}^{(p)} &= \operatorname{Im} \left(\mathcal{F}'(z_p, q_j)(\hat{x}_{i-M}) \right), & i = M + 1, \dots, 2M, j = 1, \dots, N, \\ C^{(p)} &= (c_{ij}^{(p)})_{\substack{1 \leq i \leq 2M \\ 1 \leq j \leq N}} \in \mathbb{R}^{2M \times N}, \\ g_i^{(p)} &= \operatorname{Re} (u_\infty^{meas}(\hat{x}_i, d) - \mathcal{F}(z_p)(\hat{x}_i)), & i = 1, \dots, M, \\ g_i^{(p)} &= \operatorname{Im} (u_\infty^{meas}(\hat{x}_{i-M}, d) - \mathcal{F}(z_p)(\hat{x}_{i-M})), & i = M + 1, \dots, 2M, \\ g^{(p)} &= (g_i^{(p)})_{1 \leq i \leq 2M} \in \mathbb{R}^{2M}, \\ a^{(p)} &= (a_j^{(p)})_{1 \leq j \leq N} \in \mathbb{R}^N. \end{aligned}$$

Ein Iterationsschritt für das Newtonverfahren (6.3) lässt sich wie folgt beschreiben:

1. Für eine gegebene Parametrisierung z_p wird die zum Operator $I + A(z_p)$ gemäß (5.16) gehörige Matrix (3.20) mit den Kernen (4.31) und deren LU -Zerlegung ermittelt.
Für eine einfallende ebene Welle $u^i(\cdot, d)$ ist die rechte Seite gemäß (4.30) zu bestimmen. Die Lösung $\varphi_i^{(n)}$, $i = 0, \dots, 2n-1$, des zugehörigen linearen Gleichungssystems (3.20) sind Näherungswerte für $\varphi(z(w(i\pi/n)))$.
2. Berechne $\mathcal{F}(z_p)(\hat{x}_i)$, $i = 1, \dots, M$, gemäß (4.32) und hieraus $g^{(p)}$.
3. Berechne $\mathcal{F}'(z_p, h)$ für $h = q_1, \dots, q_N$: Dazu sind zu den N rechten Seiten gemäß (5.18) und der unter 1. gewonnenen LU -Zerlegung die Fernfelder dieser N direkten Probleme an den Kollokationspunkten $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_M$, auszuwerten. Unter Berücksichtigung der Fernfelder der singulären Anteile (siehe Gleichungen (5.19) - (5.20)) ergeben sich die Werte $\mathcal{F}'(z_p, q_j)(\hat{x}_i)$. Stelle die Matrix $C^{(p)} = (c_{ij}^{(p)})_{\substack{1 \leq i \leq 2M \\ 1 \leq j \leq N}}$ auf.
4. Löse (6.6) zur Ermittlung von $a_j^{(p)}$, $j = 1, \dots, N$ und bilde $z_{p+1} = z_p + \sum_{j=1}^N a_j^{(p)} q_j$.
5. Bilde das Residuum

$$Res := \frac{\sum_{i=1}^M |\mathcal{F}(z_{p+1})(\hat{x}_i) - u_\infty^{meas}(\hat{x}_i)|^2}{\sum_{i=1}^M |u_\infty^{meas}(\hat{x}_i)|^2}.$$

Breche ab, falls $Res < \varepsilon$. Andernfalls erhöhe p um 1 und fahre fort mit Schritt 1.

In jedem Newton-Schritt sind demzufolge $N + 1$ direkte Probleme zu lösen. Die dabei zu invertierende Matrix $I + A(z_p)$ ist stets die gleiche.

Es bleibt die Frage nach der Wahl von passenden Ansatzräumen Q_N und der benötigten Fernfelddaten u_∞^{meas} . Die Fernfelddaten werden synthetisch erzeugt, wobei zur Vermeidung von „Inverse Crimes“ beim Vorwärtslöser mit einer anderen Stützstellenzahl n , einem anderen Kopplungsparameter η und mit einer anderen Substitutionsfunktion w gearbeitet wird. Desweiteren darf die eigentlich unbekannte Parametrisierung z nicht im Ansatzraum Q_N enthalten sein.

Abschließend wird angemerkt, dass bei sternförmigen Gebieten die Ableitung des Fernfeldoperators zum Dirichlet-Problem sowohl injektiv ist, als auch dichten Wertebereich hat. Das für glatte Ränder bekannte Resultat (siehe Kreß [30]) lässt sich auf den hier vorliegenden Fall übertragen. Die Basiselemente q_j von Q_N lassen sich in der Form

$$q_j(t) = r_j(t) \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad j = 1, \dots, N,$$

schreiben. Dabei sind die Radialfunktionen r_j linear unabhängig.

6.2 Modifizierung im Tikhonov-Funktional

In diesem Abschnitt wird beschrieben, wie sich durch eine zusätzliche „Bestrafung“ von Ableitungen der Störung im Tikhonov-Funktional das zu lösende Gleichungssystem verändert. Dabei wird ein Ansatz wie in Hohage-Schormann [22] gewählt. Zusätzlich wird davon ausgegangen, dass Messdaten für D Einfallrichtungen vorliegen, das heißt gegeben sind

$$u_\infty^{meas}(\hat{x}_i, d_l), \quad 1 \leq i \leq M, \quad 1 \leq l \leq D.$$

Das Tikhonov-Funktional wird ersetzt durch

$$J(h_p) = \sum_{l=1}^D \|\mathcal{F}'(z_p, h_p)(\cdot, d_l) - [u_\infty^{meas} - \mathcal{F}(z_p)](\cdot, d_l)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \alpha_p \|h_p\|_{H^s[0, 2\pi]}^2. \quad (6.7)$$

Dabei ist $s \in \mathbb{N}$ und $\|\cdot\|_{H^s}$ eine geeignete Sobolev-Norm, etwa

$$\|\psi\|_{H^s[0, 2\pi]}^2 = \|r\|_{L^2[0, 2\pi]}^2 + \|r^{(s)}\|_{L^2[0, 2\pi]}^2, \quad \psi(t) = r(t) (\cos t, \sin t)^t.$$

Mit den Approximationen

$$\begin{aligned}\|\psi\|_{L^2(\Omega)}^2 &\approx \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M |\psi(\hat{x}_i)|^2, \\ \|\psi\|_{H^s[0,2\pi]}^2 &\approx \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K (|r(\hat{t}_i)|^2 + |r^{(s)}(\hat{t}_i)|^2)\end{aligned}$$

hat das zu (6.7) zugehörige endlichdimensionale Problem die Form

$$\begin{aligned}\text{Minimiere} \quad & \sum_{l=1}^D \sum_{i=1}^M \left| \sum_{j=1}^N a_j^{(p)} \mathcal{F}'(z_p, q_j)(\hat{x}_i, d_l) + \mathcal{F}(z_p)(\hat{x}_i, d_l) - u_\infty^{meas}(\hat{x}_i, d_l) \right|^2 \\ & + \sum_{i=1}^K \left| \sqrt{\alpha_p \frac{M}{K}} \sum_{j=1}^N a_j^{(p)} r_j(\hat{t}_i) \right|^2 + \sum_{i=1}^K \left| \sqrt{\alpha_p \frac{M}{K}} \sum_{j=1}^N a_j^{(p)} r_j^{(s)}(\hat{t}_i) \right|^2. \quad (6.8)\end{aligned}$$

Dabei sind die K Punkte $\hat{t}_1, \dots, \hat{t}_K$ zur Auswertung der Sobolev-Norm aus $(0, 2\pi)$ in der Regel verschieden von $s_i^{(n)}$, $i = 0, \dots, 2n - 1$.

Das Minimierungsproblem (6.8) ist äquivalent zu

$$\text{Minimiere } \|C^{(p)} a^{(p)} - g^{(p)}\|_2 \quad \text{beziehungsweise } C^{(p)t} C^{(p)} a^{(p)} = C^{(p)t} g^{(p)}.$$

Die Komponenten der Matrix $C^{(p)} \in \mathbb{R}^{(2MD+2K) \times N}$ und die der Vektoren $a^{(p)} \in \mathbb{R}^N$ und $g^{(p)} \in \mathbb{R}^{2MD+2K}$ sind gegeben durch

$$\begin{aligned}c_{2M(l-1)+i, j}^{(p)} &= \text{Re}(\mathcal{F}'(z_p, q_j)(\hat{x}_i, d_l)), & i = 1, \dots, M, j = 1, \dots, N, \\ & & l = 1, \dots, D, \\ c_{2M(l-1)+i+M, j}^{(p)} &= \text{Im}(\mathcal{F}'(z_p, q_j)(\hat{x}_i, d_l)), & i = 1, \dots, M, j = 1, \dots, N, \\ & & l = 1, \dots, D, \\ c_{ij}^{(p)} &= \sqrt{\alpha_p M/K} r_j(\hat{t}_{i-2MD}), & i = 2MD + 1, \dots, 2MD + K, \\ & & j = 1, \dots, N, \\ c_{ij}^{(p)} &= \sqrt{\alpha_p M/K} r_j^{(s)}(\hat{t}_{i-2MD-K}), & i = 2MD + K + 1, \dots, 2MD + 2K, \\ & & j = 1, \dots, N, \\ g_{2M(l-1)+i}^{(p)} &= \text{Re}(u_\infty^{meas}(\hat{x}_i, d_l) - \mathcal{F}(z_p)(\hat{x}_i, d_l)), & i = 1, \dots, M, l = 1, \dots, D, \\ g_{2M(l-1)+i+M}^{(p)} &= \text{Im}(u_\infty^{meas}(\hat{x}_i, d_l) - \mathcal{F}(z_p)(\hat{x}_i, d_l)), & i = 1, \dots, M, l = 1, \dots, D, \\ g_i^{(p)} &= 0, & i = 2MD + 1, \dots, 2MD + 2K, \\ \hat{t}_i &= (i - 1/2) 2\pi/K, & i = 1, \dots, K.\end{aligned}$$

6.3 Die rechte Seite der Fréchet - Ableitung

Für die Auswertung der rechten Seite in (5.18) sind die zu $A'(z, h)$ gehörenden Operatoren zu parametrisieren.

Zur vereinfachten Darstellung weichen die Notationen der Kerne von denen im Abschnitt 5.2 leicht ab. Für die Randintegraloperatoren

$$S'_k(z), K'_k(z), K'_0(z), \gamma'_k(z) : C_{2\pi} \rightarrow C_{2\pi}$$

gelten die Darstellungen

$$\begin{aligned} (S'_k(z, h)\varphi)(t) &= \int_0^{2\pi} M'_k(t, \tau, z, h) [\varphi(\tau) - \varphi(0)] d\tau, \\ (K'_k(z, h)\varphi)(t) &= \int_0^{2\pi} L'_k(t, \tau, z, h) [\varphi(\tau) - \varphi(0)] d\tau, \\ (K'_0(z, h)\varphi)(t) &= \int_0^{2\pi} L'_0(t, \tau, z, h) [\varphi(\tau) - \varphi(0)] d\tau, \\ (\gamma'_k(z, h)\varphi)(t) &= \varphi(0) \int_0^{2\pi} (L'_k - L'_0 - i\eta M'_k)(t, \tau, z, h) d\tau. \end{aligned}$$

Mit der abkürzenden Schreibweise $r(t, \tau) = |z(t) - z(\tau)|$ haben die zugehörigen Kerne die Form

$$\begin{aligned} M'_k(t, \tau, z, h) &= -\frac{ik}{2} H_1^{(1)}(kr(t, \tau)) \frac{(z(t) - z(\tau)) \cdot (h(t) - h(\tau))}{r(t, \tau)} |z'(\tau)| \\ &\quad + \frac{i}{2} H_0^{(1)}(kr(t, \tau)) \frac{z'(\tau) \cdot h'(\tau)}{|z'(\tau)|}, \\ L'_k(t, \tau, z, h) &= \frac{ik}{2} H_1^{(1)}(kr(t, \tau)) \frac{h'(\tau)^\perp \cdot (z(t) - z(\tau)) + z'(\tau)^\perp \cdot (h(t) - h(\tau))}{r(t, \tau)} \\ &\quad + \frac{i}{2} \left\{ k^2 H_0^{(1)}(kr(t, \tau)) - 2k \frac{H_1^{(1)}(kr(t, \tau))}{r(t, \tau)} \right\} \times \\ &\quad \times \frac{(z(t) - z(\tau)) \cdot (h(t) - h(\tau))}{[r(t, \tau)]^2} z'(\tau)^\perp \cdot (z(t) - z(\tau)), \\ L'_0(t, \tau, z, h) &= \frac{1}{\pi} \frac{h'(\tau)^\perp \cdot (z(t) - z(\tau)) + z'(\tau)^\perp \cdot (h(t) - h(\tau))}{[r(t, \tau)]^2} \\ &\quad - \frac{2}{\pi} \frac{(z(t) - z(\tau)) \cdot (h(t) - h(\tau))}{[r(t, \tau)]^4} z'(\tau)^\perp \cdot (z(t) - z(\tau)). \end{aligned}$$

Dabei wurde die Ableitung H_0'' mit den Identitäten (2.1) und $H_0^{(1)'} = -H_1^{(1)}$ gemäß

$$-H_0''(t) = \frac{1}{t} H_0'(t) + H_0(t) = -\frac{1}{t} H_1^{(1)}(t) + H_0^{(1)}(t), \quad t > 0,$$

ersetzt. Die Abspaltung der logarithmischen Anteile führt auf

$$M_k'(t, \tau, z, h) = M_k'^{(1)}(t, \tau, z, h) \ln \left(4 \sin^2 \frac{t - \tau}{2} \right) + M_k'^{(2)}(t, \tau, z, h), \quad (6.9)$$

$$L_k'(t, \tau, z, h) = L_k'^{(1)}(t, \tau, z, h) \ln \left(4 \sin^2 \frac{t - \tau}{2} \right) + L_k'^{(2)}(t, \tau, z, h), \quad (6.10)$$

$$L_0'(t, \tau, z, h) = L_0'^{(1)}(t, \tau, z, h) \ln \left(4 \sin^2 \frac{t - \tau}{2} \right) + L_0'^{(2)}(t, \tau, z, h). \quad (6.11)$$

Entweder aus der Asymptotik von $H_0^{(1)}$ und $H_1^{(1)}$ oder durch direktes Differenzieren in den Darstellungen (4.22) - (4.25) ergeben sich die Kerne

$$\begin{aligned} M_k'^{(1)}(t, \tau, z, h) &= \frac{k}{2\pi} J_1(k r(t, \tau)) \frac{(z(t) - z(\tau)) \cdot (h(t) - h(\tau))}{r(t, \tau)} |z'(\tau)| \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} J_0(k r(t, \tau)) \frac{z'(\tau) \cdot h'(\tau)}{|z'(\tau)|}, \end{aligned} \quad (6.12)$$

$$\begin{aligned} L_k'^{(1)}(t, \tau, z, h) &= -\frac{k}{2\pi} J_1(k r(t, \tau)) \frac{h'(\tau)^\perp \cdot (z(t) - z(\tau)) + z'(\tau)^\perp \cdot (h(t) - h(\tau))}{r(t, \tau)}, \\ &\quad + \left\{ -\frac{k^2}{2\pi} J_0(k r(t, \tau)) + \frac{k}{\pi} \frac{J_1(k r(t, \tau))}{r(t, \tau)} \right\} \times \\ &\quad \times \frac{(z(t) - z(\tau)) \cdot (h(t) - h(\tau))}{[r(t, \tau)]^2} z'(\tau)^\perp \cdot (z(t) - z(\tau)), \end{aligned} \quad (6.13)$$

$$L_0'^{(1)}(t, \tau, z, h) = 0. \quad (6.14)$$

Für die Diagonalterme erhält man unter anderem wegen $J_0(0) = 1$, $J_1(0) = 0$, und Taylorentwicklung die Ausdrücke

$$M_k'^{(1)}(t, t, z, h) = -\frac{1}{2\pi} \frac{z'(t) \cdot h'(t)}{|z'(t)|}, \quad (6.15)$$

$$M_k'^{(2)}(t, t, z, h) = \left(\frac{i}{2} - \frac{1}{\pi} \left\{ 1 + C_E + \ln \left(\frac{k}{2} |z'(t)| \right) \right\} \right) \frac{z'(t) \cdot h'(t)}{|z'(t)|}, \quad (6.16)$$

$$L_k'^{(1)}(t, t, z, h) = 0, \quad (6.17)$$

$$L_k'^{(2)}(t, t, z, h) = \frac{1}{2\pi} \frac{h'(t)^\perp \cdot z''(t) + z'(t)^\perp \cdot h''(t)}{|z'(t)|^2} - \frac{1}{\pi} \frac{z'(t) \cdot h'(t) z'(t)^\perp \cdot z''(t)}{|z'(t)|^4}, \quad (6.18)$$

$$L_0'^{(1)}(t, t, z, h) = 0, \quad (6.19)$$

$$L_0'^{(2)}(t, t, z, h) = L_k'^{(2)}(t, t, z, h). \quad (6.20)$$

Für eine feste Einfallrichtung d und ein $h \in Q_N$ wird mit der an den diskreten Stellen $z(s_j^{(n)})$, $j = 0, \dots, 2n-1$, ermittelten Dichte

$$\varphi = (I + A_z)^{-1} R_z u^i \in C(\partial D_z), \quad \varphi_j^{(n)} = \varphi(z(s_j^{(n)})),$$

die rechte Seite in (5.18) ausgewertet durch

$$\begin{aligned} & 2b(z(w(s))) \\ & \approx -2ike^{ikz(w(s)) \cdot d} \cdot h(w(s)) \\ & - \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^{2n-1} \alpha_j^{(n)} (L_k'^{(2)} - i\eta M_k'^{(2)})(w(s), s_j^{(n)}, z, h) [\varphi_j^{(n)} - \varphi_0^{(n)}] \\ & - \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^{2n-1} \alpha_j^{(n)} (L_k'^{(1)} - i\eta M_k'^{(1)})(w(s), s_j^{(n)}, z, h) \times \\ & \quad \times [T(s, t_j^{(n)}) + \frac{n}{\pi} R_j^{(n)}(s)] [\varphi_j^{(n)} - \varphi_0^{(n)}] \\ & - \varphi_0^{(n)} \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^{2n-1} \alpha_j^{(n)} (L_k'^{(2)} - L_0'^{(2)} - i\eta M_k'^{(2)})(w(s), s_j^{(n)}, z, h) \\ & - \varphi_0^{(n)} \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^{2n-1} \alpha_j^{(n)} (L_k'^{(1)} - L_0'^{(1)} - i\eta M_k'^{(1)})(w(s), s_j^{(n)}, z, h) [T(s, t_j^{(n)}) + \frac{n}{\pi} R_j^{(n)}(s)]. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Dabei sind die Funktionen T und $R_j^{(n)}$ durch (3.18) und (3.16) gegeben und die auftretenden Kerne in (6.9) - (6.20) erklärt.

6.4 Rekonstruktionen mit glatten Kurven

Zunächst wird als Approximationsraum für die radialen Anteile der Raum der trigonometrischen Polynome

$$\hat{Q}_N = T_{\tilde{N}} = \left\{ \varphi \in C_{2\pi} \left| \varphi(t) = \sum_{j=0}^{\tilde{N}} c_j \cos(jt) + \sum_{j=1}^{\tilde{N}} s_j \sin(jt), c_0, \dots, c_{\tilde{N}}, s_1, \dots, s_{\tilde{N}} \in \mathbb{R} \right. \right\}$$

mit $N = 2\tilde{N} + 1$ verwendet.

In diesem Abschnitt wird versucht, die nachfolgenden Kurven zu rekonstruieren

$$\text{Erdnuss: } z(t) = \sqrt{\cos^2(t) + 0.25 \sin^2(t)} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix},$$

$$\text{Drachen: } z(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) + 0.65(\cos(2t) - 1) \\ 1.5 \sin(t) \end{pmatrix},$$

$$\text{Tropfen: } z(t) = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{3} \sin(0.5t) + 0.5 \\ \sin(t) \end{pmatrix},$$

$$\text{Schmetterling: } z(t) = \begin{pmatrix} 2/3 \sin(1.5t) + 0.3 \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Die synthetischen Fernfelddaten $u_\infty(\hat{x}_i, d_l)$, $1 \leq i \leq M$, $1 \leq l \leq D$, wurden mit den Parametern $k = 1$, $\eta = 1$, $n = 64$ und der polynomialen Substitution w_m (3.9) nach Korobov mit Substitutionsgrad $m = 4$ (beim Tropfen und Schmetterling) beziehungsweise $w(t) = t$ (für die Erdnuss und den Drachen) erzeugt.

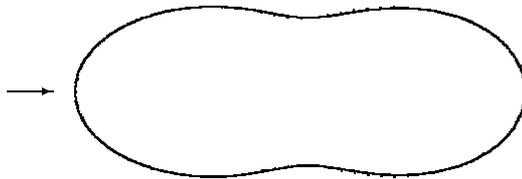
Für den inversen Löser wurde mit der Substitution (3.11) nach Kreß mit Grad $m = 4$, mit exakter Wellenzahl $k = 1$ und Kopplungsparameter $\eta = 1.2$ gerechnet. Alle übrigen Parameter, wie die Anzahl der Stützstellen $2n$, die Dimension N des Ansatzraumes, unterschiedliche Anzahl von Beobachtungs- und Einfallsrichtungen M bzw. D , der Regularisierungsparameter α_p im p -ten Iterationsschritt, die verwendete Sobolevnorm $\|\cdot\|_{H^s}$ und zugehörige Anzahl K von Stützstellen sind den Legenden zu entnehmen.

Als Startkurve z_0 diente jeweils der Einheitskreis

$$z_0(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, 0 \leq t \leq 2\pi.$$

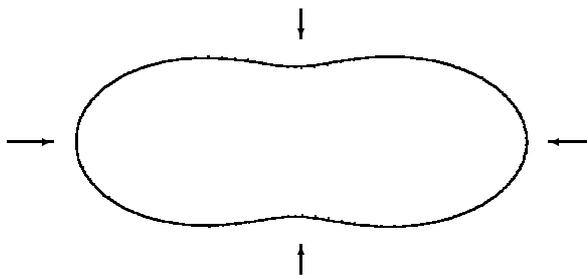
Es wurden jeweils 30 Newton-Schritte bei der Erdnuss, 70 beim Drachen, 40 beim Tropfen und 50 Iterationen beim Schmetterling durchgeführt, wobei jedoch zur Darstellung die Kurve $z_{p_{end}}$ zum kleinsten Residuum verwendet wurde.

Rekonstruktion der Erdnuss mit einer Welle



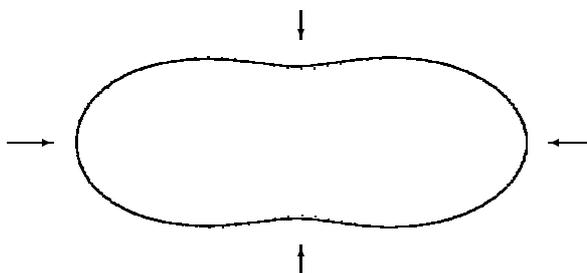
$$\begin{aligned}
 p_{end} &= 30, \\
 n &= 48, \\
 N &= 11, \\
 M &= 64, \\
 D &= 1, \\
 \alpha_p &= 1.0 \cdot 0.6^p, \\
 Res &= 1.3 \cdot 10^{-7}, \\
 s &= 1, \\
 K &= 128.
 \end{aligned}$$

Rekonstruktion der Erdnuss mit 4 Wellen



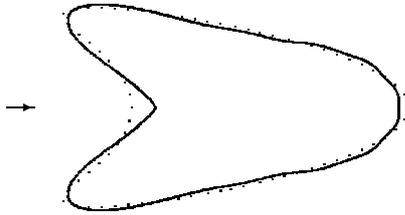
$$\begin{aligned}
 p_{end} &= 26, \\
 n &= 48, \\
 N &= 11, \\
 M &= 64, \\
 D &= 4, \\
 \alpha_p &= 1.0 \cdot 0.6^p, \\
 Res &= 4.9 \cdot 10^{-7}, \\
 s &= 1, \\
 K &= 128.
 \end{aligned}$$

Rek. der Erdnuss mit kleinerem n und mehr Ansatzfunktionen



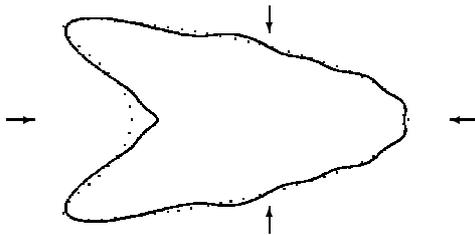
$$\begin{aligned}
 p_{end} &= 29, \\
 n &= 24, \\
 N &= 15, \\
 M &= 64, \\
 D &= 4, \\
 \alpha_p &= 1.0 \cdot 0.6^p, \\
 Res &= 4.9 \cdot 10^{-7}, \\
 s &= 2, \\
 K &= 128.
 \end{aligned}$$

Rekonstruktion des Drachens mit einer Welle



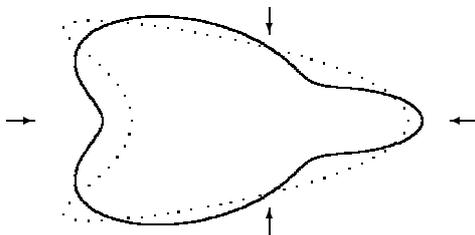
$$\begin{aligned}
 p_{end} &= 70, \\
 n &= 36, \\
 N &= 25, \\
 M &= 64, \\
 D &= 1, \\
 \alpha_p &= 10.0 \cdot 0.9^p, \\
 Res &= 1.7 \cdot 10^{-5}, \\
 s &= 1, \\
 K &= 128.
 \end{aligned}$$

Rekonstruktion des Drachens mit 4 Wellen



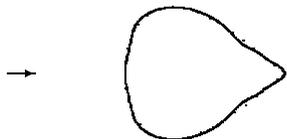
$$\begin{aligned}
 p_{end} &= 60, \\
 n &= 36, \\
 N &= 25, \\
 M &= 64, \\
 D &= 4, \\
 \alpha_p &= 2.0 \cdot 0.8^p, \\
 Res &= 1.3 \cdot 10^{-8}, \\
 s &= 1, \\
 K &= 256.
 \end{aligned}$$

Rek. des Drachens mit $s=3$ und weniger Ansatzfkt.



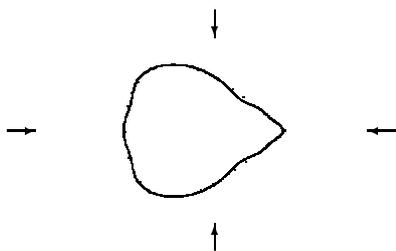
$$\begin{aligned}
 p_{end} &= 70, \\
 n &= 24, \\
 N &= 15, \\
 M &= 64, \\
 D &= 4, \\
 \alpha_p &= 10.0 \cdot 0.9^p, \\
 Res &= 3.9 \cdot 10^{-3}, \\
 s &= 3, \\
 K &= 256.
 \end{aligned}$$

Rekonstruktion des Tropfens mit einer Welle



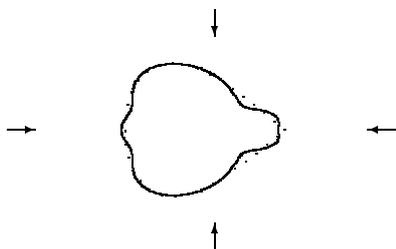
$$\begin{aligned}
 p_{end} &= 40, \\
 n &= 36, \\
 N &= 15, \\
 M &= 64, \\
 D &= 1, \\
 \alpha_p &= 2.0 \cdot 0.8^p, \\
 Res &= 9.5 \cdot 10^{-8}, \\
 s &= 1, \\
 K &= 128.
 \end{aligned}$$

Rekonstruktion des Tropfens mit 4 Wellen



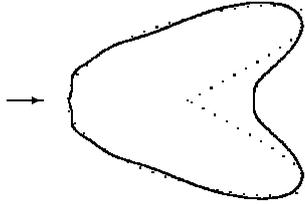
$$\begin{aligned}
 p_{end} &= 40, \\
 n &= 36, \\
 N &= 15, \\
 M &= 64, \\
 D &= 4, \\
 \alpha_p &= 2.0 \cdot 0.8^p, \\
 Res &= 4.0 \cdot 10^{-8}, \\
 s &= 1, \\
 K &= 128.
 \end{aligned}$$

Rek. des Tropfens mit weniger Ansatzfunktionen



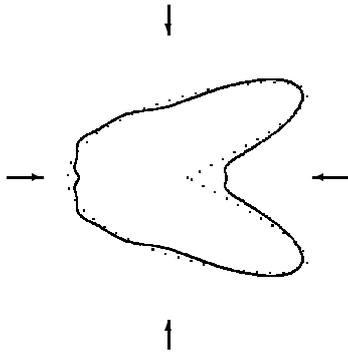
$$\begin{aligned}
 p_{end} &= 40, \\
 n &= 24, \\
 N &= 11, \\
 M &= 64, \\
 D &= 4, \\
 \alpha_p &= 2.0 \cdot 0.8^p, \\
 Res &= 6.2 \cdot 10^{-8}, \\
 s &= 1, \\
 K &= 256.
 \end{aligned}$$

Rekonstruktion des Schmetterlings mit einer Welle



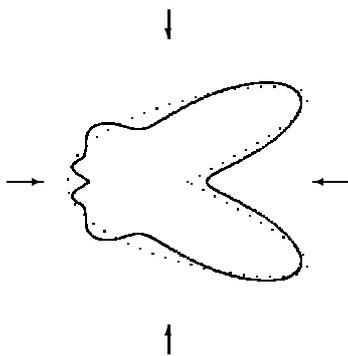
$$\begin{aligned}
 p_{end} &= 50, \\
 n &= 48, \\
 N &= 17, \\
 M &= 64, \\
 D &= 1, \\
 \alpha_p &= 5.0 \cdot 0.85^p, \\
 Res &= 1.1 \cdot 10^{-5}, \\
 s &= 1, \\
 K &= 128.
 \end{aligned}$$

Rekonstruktion des Schmetterlings mit 4 Wellen



$$\begin{aligned}
 p_{end} &= 50, \\
 n &= 48, \\
 N &= 21, \\
 M &= 64, \\
 D &= 4, \\
 \alpha_p &= 5.0 \cdot 0.85^p, \\
 Res &= 1.6 \cdot 10^{-6}, \\
 s &= 1, \\
 K &= 128.
 \end{aligned}$$

Rek. des Schmetterlings mit weniger Ansatzfunktionen



$$\begin{aligned}
 p_{end} &= 50, \\
 n &= 24, \\
 N &= 15, \\
 M &= 64, \\
 D &= 4, \\
 \alpha_p &= 5.0 \cdot 0.85^p, \\
 Res &= 3.3 \cdot 10^{-6}, \\
 s &= 1, \\
 K &= 128.
 \end{aligned}$$

Bei den numerischen Experimenten wurden folgende Beobachtungen gemacht:

Die konvexen Gebiete lassen sich stets besser rekonstruieren, als nicht-konvexe Gebiete. Das Verfahren liefert im ersten Fall, sowohl bei glatten Rändern, als auch bei Gebieten mit Ecken, bei geringer Anzahl von Basisfunktionen und wenigen Newton-Schritten gute Rekonstruktionen.

Um gute Approximationen an nicht-konvexe Gebiete zu erhalten, ist eine höhere Anzahl an Basisfunktionen und Newton-Schritten erforderlich. Zusätzlich muss das Verfahren mit einem hohen Regularisierungsparameter gestartet werden, der im Laufe des Verfahrens nicht zu schnell abfallen darf.

Die Experimente, bei denen im Strafterm $\|h\|_{H^s}$ der Parameter $s = 3$ verwendet wurde, lieferten teilweise unzulässige Ränder, das heißt die ermittelten Parametrisierungen waren auf $[0, 2\pi)$ nicht injektiv.

6.5 Rekonstruktionen mit nicht-glatten Kurven

Die Funktionen r_1, r_2 , mit

$$\begin{aligned} r_1(t) &= t^2(2\pi - t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \\ r_2(t) &= t(2\pi - t)^2, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \end{aligned}$$

besitzen die Eigenschaften

$$r_1(0) = r_1(2\pi) = 0 = r_2(0) = r_2(2\pi)$$

und

$$r_1'(0) = r_2'(2\pi) = 0, \quad r_1'(2\pi) = -4\pi^2, \quad r_2'(0) = 4\pi^2.$$

Demnach sind

$$q_j(t) = r_j(t)(\cos t, \sin t)^t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad j = 1, 2,$$

periodisch mit Periode 2π , auf $[0, 2\pi]$ beliebig oft differenzierbar und die Gebiete mit durch q_1, q_2 parametrisierten Rändern besitzen Ecken.

Für den Ansatzraum werden nun die Terme $\sin(\tilde{N}t)$ und $\cos(\tilde{N}t)$ weggelassen und dafür r_1, r_2 hinzugefügt, das heißt

$$\hat{Q}_N = \left\{ \varphi \in C_{2\pi} \left| \varphi(t) = \sum_{j=0}^{\tilde{N}-1} c_j \cos(jt) + \sum_{j=1}^{\tilde{N}-1} s_j \sin(jt) + c_{\tilde{N}} r_1(t) + s_{\tilde{N}} r_2(t) \right. \right\}$$

mit $N = 2\tilde{N} + 1$.

In diesem Abschnitt wird versucht, die nachfolgenden Kurven zu rekonstruieren

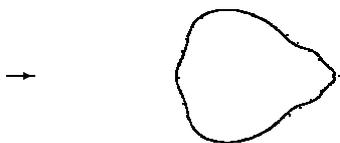
$$\text{Tropfen: } z(t) = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{3} \sin(0.5t) + 0.5 \\ \sin(t) \end{pmatrix},$$

$$\text{Schmetterling: } z(t) = \begin{pmatrix} 2/3 \sin(1.5t) + 0.3 \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Die synthetischen Fernfelddaten $u_\infty(\hat{x}_i, d_l)$, $1 \leq i \leq M$, $1 \leq l \leq D$, wurden diesmal mit den Parametern $k = 2$, $\eta = 2$, $n = 64$ und der polynomialen Substitution w_m (3.9) nach Korobov mit Substitutionsgrad $m = 4$ erzeugt.

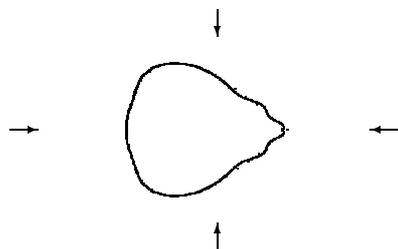
Für den inversen Löser wurde mit exakter Wellenzahl k , dem Kopplungsparameter $\eta = 2.5$, der Substitution (3.11) von Kreß mit Grad $m = 4$ und dem Einheitskreis als Startkurve gerechnet.

Rekonstruktion des Tropfens mit einer Welle



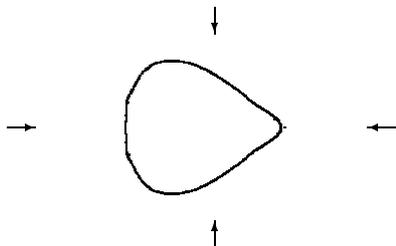
$$\begin{aligned} p_{end} &= 40, \\ n &= 36, \\ N &= 17, \\ M &= 64, \\ D &= 1, \\ \alpha_p &= 2.0 \cdot 0.8^p, \\ Res &= 1.4 \cdot 10^{-7}, \\ s &= 1, \\ K &= 128. \end{aligned}$$

Rekonstruktion des Tropfens mit 4 Wellen



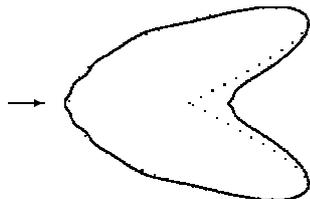
$$\begin{aligned} p_{end} &= 40, \\ n &= 36, \\ N &= 17, \\ M &= 64, \\ D &= 4, \\ \alpha_p &= 2.0 \cdot 0.8^p, \\ Res &= 2.3 \cdot 10^{-7}, \\ s &= 1, \\ K &= 128. \end{aligned}$$

Rek. des Tropfens mit mehr Ansatzfunktionen



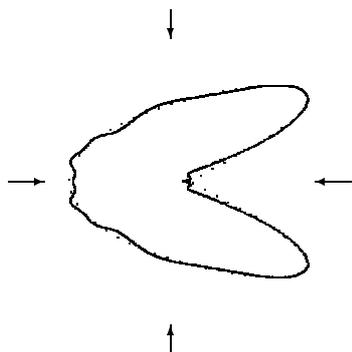
$$\begin{aligned}
 p_{end} &= 40, \\
 n &= 48, \\
 N &= 25, \\
 M &= 64, \\
 D &= 4, \\
 \alpha_p &= 3.0 \cdot 0.8^p, \\
 Res &= 8.1 \cdot 10^{-9}, \\
 s &= 1, \\
 K &= 128.
 \end{aligned}$$

Rekonstruktion des Schmetterlings mit einer Welle



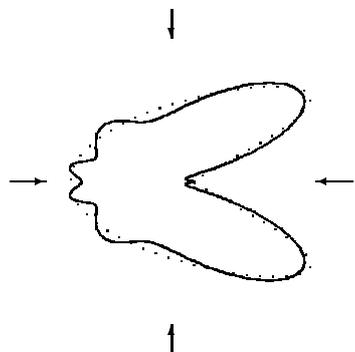
$$\begin{aligned}
 p_{end} &= 50, \\
 n &= 48, \\
 N &= 25, \\
 M &= 64, \\
 D &= 1, \\
 \alpha_p &= 5.0 \cdot 0.85^p, \\
 Res &= 1.2 \cdot 10^{-5}, \\
 s &= 1, \\
 K &= 128.
 \end{aligned}$$

Rekonstruktion des Schmetterlings mit 4 Wellen



$$\begin{aligned}
 p_{end} &= 50, \\
 n &= 48, \\
 N &= 25, \\
 M &= 64, \\
 D &= 4, \\
 \alpha_p &= 5.0 \cdot 0.85^p, \\
 Res &= 8.8 \cdot 10^{-7}, \\
 s &= 1, \\
 K &= 128.
 \end{aligned}$$

Rek. des Schmetterlings mit weniger Ansatzfkt.



$$\begin{aligned}
 p_{end} &= 50, \\
 n &= 36, \\
 N &= 17, \\
 M &= 64, \\
 D &= 4, \\
 \alpha_p &= 10.0 \cdot 0.9^p, \\
 Res &= 2.6 \cdot 10^{-4}, \\
 s &= 1, \\
 K &= 128.
 \end{aligned}$$

An der letzten Darstellung (und weiteren, hier nicht angeführten Beispielen) wird deutlich, dass bei Rekonstruktionen mit einer zu geringen Anzahl von Ansatzfunktionen, die Größe des Eckenwinkels nicht mehr rekonstruiert wird.

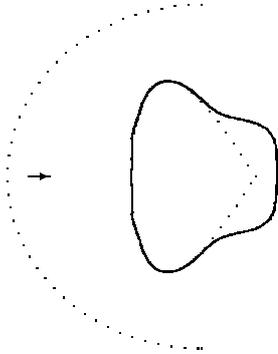
Ein Vergleich der Ergebnisse aus den Abschnitten 6.4 und 6.5 lässt keine eindeutige Schlussfolgerung zu. Während sich beim Tropfen die Hinzunahme nicht-glatte Ansatzfunktionen negativ auf das Residuum auswirkt, verhält es sich beim Schmetterling genau umgekehrt. Theoretisch könnte man auf ein anderes Qualitätsmerkmal statt dem Residuum ausweichen, etwa dem Vergleich der Radialanteile von exakter und numerischer Lösung in der C^2 -Norm. Auf der anderen Seite erscheint dieser Ausweg wenig sinnvoll, denn im Allgemeinen ist der exakte Rand unbekannt und ist erst zu rekonstruieren.

6.6 Eingeschränkter Messbereich

In diesem Abschnitt wurde versucht, mit den gleichen Ansatzfunktionen wie im Abschnitt 6.5 den Tropfen und Schmetterling zu rekonstruieren, wobei die Messpunkte \hat{x}_i , an denen das Fernfeld gemessen wird, nicht gleichmäßig auf dem Einheitskreis verteilt sind, sondern nur aus einem eingeschränkten Winkelbereich stammen.

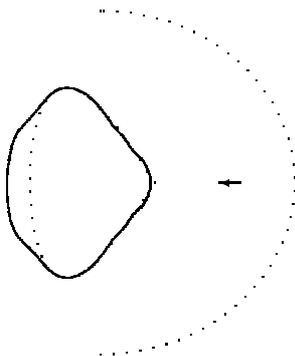
Für die Erzeugung der Messdaten und den Parametern im inversen Löser gilt das in Abschnitt 6.5 gesagte. In den Darstellungen wurde zusätzlich der „beleuchtete Bereich“ gepunktet aufgenommen. Für jedes Objekt wurde mit einer einzigen einfallenden Welle und einem Halbkreis als Messbereich gearbeitet.

Tropfen: Eckenbereich im Schatten



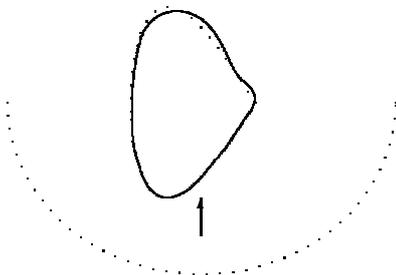
$$\begin{aligned}
 p_{end} &= 40, \\
 n &= 48, \\
 N &= 25, \\
 M &= 64, \\
 D &= 1, \\
 \alpha_p &= 3.0 \cdot 0.8^p, \\
 Res &= 7.6 \cdot 10^{-7}, \\
 s &= 1, \\
 K &= 128.
 \end{aligned}$$

Tropfen: Eckenbereich beleuchtet



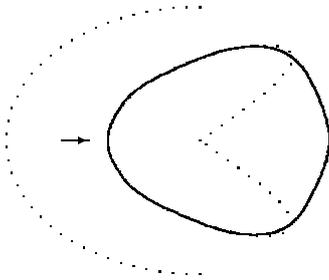
$$\begin{aligned}
 p_{end} &= 40, \\
 n &= 48, \\
 N &= 25, \\
 M &= 64, \\
 D &= 1, \\
 \alpha_p &= 3.0 \cdot 0.8^p, \\
 Res &= 1.5 \cdot 10^{-6}, \\
 s &= 1, \\
 K &= 128.
 \end{aligned}$$

Tropfen: Messungen von unten



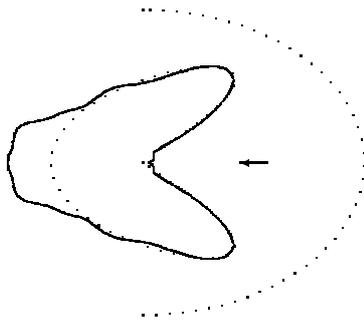
$$\begin{aligned}
 p_{end} &= 40, \\
 n &= 48, \\
 N &= 25, \\
 M &= 64, \\
 D &= 1, \\
 \alpha_p &= 3.0 \cdot 0.8^p, \\
 Res &= 3.8 \cdot 10^{-6}, \\
 s &= 1, \\
 K &= 128.
 \end{aligned}$$

Schmetterling: Eckenbereich im Schatten



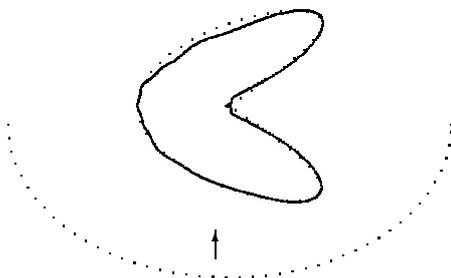
$$\begin{aligned}
 p_{end} &= 50, \\
 n &= 48, \\
 N &= 25, \\
 M &= 64, \\
 D &= 1, \\
 \alpha_p &= 5.0 \cdot 0.85^p, \\
 Res &= 3.1 \cdot 10^{-6}, \\
 s &= 1, \\
 K &= 128.
 \end{aligned}$$

Schmetterling: Eckenbereich beleuchtet



$$\begin{aligned}
 p_{end} &= 50, \\
 n &= 48, \\
 N &= 25, \\
 M &= 64, \\
 D &= 1, \\
 \alpha_p &= 5.0 \cdot 0.85^p, \\
 Res &= 9.2 \cdot 10^{-6}, \\
 s &= 1, \\
 K &= 128.
 \end{aligned}$$

Schmetterling: Messungen von unten



$$\begin{aligned}
 p_{end} &= 50, \\
 n &= 48, \\
 N &= 25, \\
 M &= 64, \\
 D &= 1, \\
 \alpha_p &= 5.0 \cdot 0.85^p, \\
 Res &= 2.4 \cdot 10^{-6}, \\
 s &= 1, \\
 K &= 128.
 \end{aligned}$$

Aus den zahlreichen numerischen Experimenten lässt sich feststellen, dass die Rekonstruktionen bei eingeschränktem Messbereich deutlich schlechter sind als bei vollem Datensatz. Auch durch Hinzunahme weiterer Basisfunktionen und höhere Anzahl von Newton-Schritten wurde der nicht „beleuchtete Teil“ des Gebietes schlecht rekonstruiert. In den Beispielen, bei denen der Eckenbereich beleuchtet wurde, ergaben sich bessere Ergebnisse. Die mit Abstand besten Rekonstruktionen wurden bei „Beleuchtung“ im unteren (oder oberen) Bereich erzielt. Am Residuum, dem eigentlich einzigen objektiven Kriterium (denn der Rand ist ja unbekannt), ist diese Beobachtung nicht abzulesen.

Wiederum ist festzustellen, dass sich konvexe Gebiete mit weniger Aufwand (kleinere N , p_{end} , n) rekonstruieren lassen, als nicht-konvexe Gebiete.

Kapitel 7

Ein spezielles Impedanzrandwertproblem

In diesem Kapitel wird ein weiteres Randwertproblem betrachtet, bei dem in natürlicher Weise Ecken auftreten. Nach Vergraben eines metallischen Gegenstandes, von dem ein Teil weiterhin aus dem Boden herausragt, werden Korrosionseffekte zu Veränderungen der Oberfläche sorgen. Man ist bestrebt, die nicht einsichtbare Oberfläche aufgrund von (Spannungs-) Messungen zu ermitteln, ohne den Gegenstand aus der Erde auszugraben. Zunächst wird jedoch an dieser Stelle das direkte Problem behandelt.

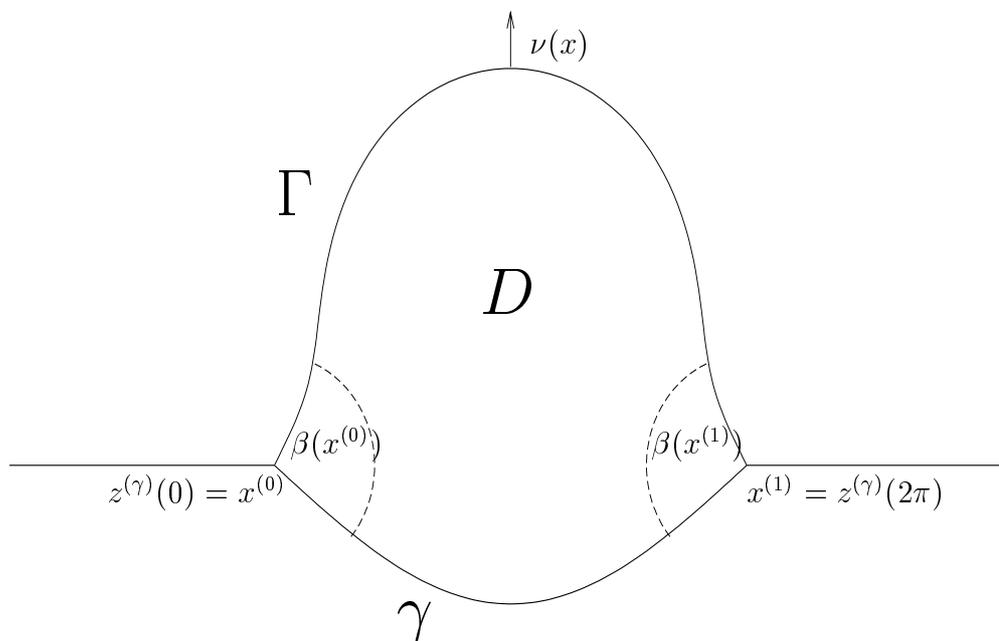
Nach der mathematischen Formulierung des resultierenden Randwertproblems erfolgt im Abschnitt 7.2 der Nachweis der Existenz und Eindeutigkeit. Für die numerische Umsetzung wird der hypersinguläre Operator T_0 benötigt, dessen Darstellung im dritten Teil notiert wird. Abschließend sind im Abschnitt 7.4 für verschiedene Objekte numerische Beispiele angeführt.

7.1 Formulierung des Impedanzrandwertproblems

Gegeben sei ein beschränktes, leitfähiges Medium $D \subset \mathbb{R}^2$, dessen Leitfähigkeit im gesamten Gebiet D konstant ist. Der Rand ∂D von D setze sich aus zwei zusammenhängenden, C^3 -glatten Randstücken Γ , γ zusammen, sodass gilt

$$\partial D = \Gamma \cup \gamma, \quad \Gamma \cap \gamma = \{x^{(0)}, x^{(1)}\}.$$

Desweiteren setze $\Gamma_0 := \Gamma \setminus \{x^{(0)}, x^{(1)}\}$ und $\gamma_0 := \gamma \setminus \{x^{(0)}, x^{(1)}\}$.



Darstellung zum Impedanzproblem

Ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit wird von den Ecken $x^{(0)}, x^{(1)}$ vorausgesetzt, dass deren zweite Koordinaten Null sind. Desweiteren gelten einschränkend für die Parametrisierungen $z^{(\Gamma)}, z^{(\gamma)}$ der Randstücke Γ, γ nachfolgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} z^{(\gamma)}(0) &= z^{(\Gamma)}(4\pi) = x^{(0)}, \\ z^{(\gamma)}(2\pi) &= z^{(\Gamma)}(2\pi) = x^{(1)}, \\ z_2^{(\Gamma)}(t) &> 0, \quad 2\pi < t < 4\pi, \\ z_2^{(\gamma)}(t) &< 0, \quad 0 < t < 2\pi. \end{aligned}$$

Definition 7.1 (Inneres Dirichletproblem)

Gegeben ist $f \in C(\partial D)$. Gesucht wird eine Funktion $u \in C^2(D) \cap C(\overline{D})$ als Lösung der Laplacegleichung

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } D, \tag{7.1}$$

die die Randbedingung

$$u = f \quad \text{auf } \partial D \quad (7.2)$$

erfüllt.

Bei der Modellierung des eingangs von Kapitel 7 geschilderten Problems repräsentiert u eine Spannung. Weil auf dem korrodierten Teil des Randes kein Strom fließt, die Spannung demzufolge Null ist, erhält das direkte Problem die nachfolgende Form.

Definition 7.2 (Direktes Problem)

Gegeben sind D und $f \in C(\partial D)$. Desweiteren erfülle f die Bedingungen $f|_{\Gamma} \in C^{1,\alpha}(\Gamma)$ und $f|_{\gamma} = 0$. Gesucht werden die Neumannrandwerte

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{\Gamma_0}$$

der nach Abschnitt 7.2 eindeutig bestimmten Lösung u von (7.1) - (7.2).

Definition 7.3 (Inverses Problem)

Für festes Γ ist der Dirichlet- nach Neumannoperator gegeben, das heißt für alle f gemäß Definition 7.2 sind die Paare $(f|_{\Gamma}, \left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{\Gamma_0})$ bekannt. Gesucht wird der Rand γ .

7.2 Existenz und Eindeutigkeit beim direkten Impedanzrandwertproblem

Satz 7.4 Das Randwertproblem (7.1) - (7.2) besitzt höchstens eine Lösung.

Beweis: Das Maximum-Minimum Prinzip für harmonische Funktionen erfordert keine Randglätte. ■

Satz 7.5 Das Gebiet D erfülle die angegebenen Voraussetzungen. Sei $f \in C(\partial D)$. Dann gilt: Für jede Lösung $\varphi \in C(\partial D)$ der Integralgleichung

$$-2f(x) = \frac{2\pi - \beta(x)}{\pi} \varphi(x) - 2 \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial \nu(y)} \varphi(y) ds(y), \quad x \in \partial D, \quad (7.3)$$

wird durch das Doppelschichtpotenzial

$$u(x) = \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial \nu(y)} \varphi(y) ds(y), \quad x \in D,$$

eine Lösung des inneren Dirichletproblems (7.1) - (7.2) gegeben.

Beweis: Das Doppelschichtpotenzial ist harmonisch in D und lässt sich nach Satz 4.12 von D nach \overline{D} stetig fortsetzen mit den Randwerten

$$2u_-(x) = \frac{\beta(x) - 2\pi}{\pi} \varphi(x) + 2 \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial \nu(y)} \varphi(y) ds(y) = 2f(x), \quad x \in \partial D.$$

■

Satz 7.6 Die Integralgleichung (7.3) hat für jedes $f \in C(\partial D)$ genau eine Lösung $\varphi \in C(\partial D)$.

Beweis: Die Injektivität von (7.3) zeigt man wie in [35, Theorem 6.20] unter anderem mit der Eindeutigkeit des äußeren Neumannproblems. Für den Nachweis der Surjektivität ist wie im Beweis von Satz 4.14 eine Aufspaltung in einen beschränkt invertierbaren und einen kompakten Operator hinreichend. Es kann wiederum auf [2, Sätze 3.12 - 3.13] verwiesen werden, wobei wegen der fehlenden logarithmischen Singularität (setze $\eta = 0$) und dem gleichen singulären Verhalten von Φ_k und Φ_0 sich die Darstellung vereinfacht. Für den Spezialfall, bei dem der Rand in der Nähe der Ecken geradlinig verläuft, ist der vereinfachte Beweis in [35, Section 6.5] nachzulesen. ■

Auf die Randintegralgleichung (7.3) lässt sich das Nyström-Verfahren nicht direkt anwenden, denn die Gleichung hat nicht die Form (3.1) aus Kapitel 3. Daher wird eine Modifizierung erforderlich. Dazu seien u_j , $j = 0, 1$, auf \mathbb{R}^2 harmonische Funktionen mit $u_j(x^{(k)}) = \delta_{jk}$. Schreibt man $x^{(j)} = (x_1^{(j)}, x_2^{(j)})$, so erfüllen die bezüglich x_1 linearen Funktionen

$$\begin{aligned} u_0(x) &= \frac{x_1 - x_1^{(1)}}{x_1^{(0)} - x_1^{(1)}}, \\ u_1(x) &= \frac{x_1 - x_1^{(0)}}{x_1^{(1)} - x_1^{(0)}}, \end{aligned}$$

die Forderungen. Mit Hilfe des Darstellungssatzes

$$\int_{\partial D} \left\{ \Phi_0(x, y) \frac{\partial u_l}{\partial \nu}(y) - \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial \nu(y)} u_l(y) \right\} ds(y) = \frac{\beta(x)}{2\pi} u_l(x), \quad x \in \partial D,$$

und der Identität

$$\left(1 - \frac{\beta(x)}{\pi}\right) \varphi(x) + \sum_{l=0}^1 \frac{\beta(x)}{\pi} \varphi(x^{(l)}) u_l(x) = \sum_{l=0}^1 \varphi(x^{(l)}) u_l(x), \quad x \in \partial D,$$

wird die rechte Seite in (7.3) umgeformt zu

$$\begin{aligned} -2f(x) &= \varphi(x) - (K_0 \varphi)(x) \\ &= \frac{2\pi - \beta(x)}{\pi} \varphi(x) - 2 \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial \nu(y)} \left\{ \varphi(y) - \sum_{l=0}^1 u_l(y) \varphi(x^{(l)}) \right\} ds(y) \\ &\quad - 2 \sum_{l=0}^1 \varphi(x^{(l)}) \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial \nu(y)} u_l(y) ds(y) \\ &= \varphi(x) - (\tilde{K}_0 \varphi)(x) + \sum_{l=0}^1 \varphi(x^{(l)}) \left\{ u_l(x) - 2 \int_{\partial D} \Phi_0(x, y) \frac{\partial u_l}{\partial \nu}(y) ds(y) \right\}. \end{aligned} \tag{7.4}$$

Dabei sind die Operatoren K_0 und \tilde{K}_0 gegeben durch

$$(K_0 \varphi)(x) = - \left(1 - \frac{\beta(x)}{\pi}\right) \varphi(x) + 2 \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial \nu(y)} \varphi(y) ds(y), \quad x \in \partial D, \quad \varphi \in C(\partial D), \tag{7.5}$$

$$(\tilde{K}_0 \varphi)(x) = 2 \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial \nu(y)} \left\{ \varphi(y) - \sum_{l=0}^1 u_l(y) \varphi(x^{(l)}) \right\} ds(y), \quad x \in \partial D, \quad \varphi \in C(\partial D). \tag{7.6}$$

Insbesondere verschwindet bei \tilde{K}_0 die Dichte in den Ecken $x^{(0)}$ und $x^{(1)}$, sodass die Gleichung (7.4), abgesehen von geringen Modifizierungen, mit dem bereits in Kapitel 3 erklärten Nyström-Verfahren behandelt werden kann.

Die bereits aus Abschnitt 3.2 bekannten Substitutionen $w : [0, 2\pi] \rightarrow [0, 2\pi]$ werden zur Ermittlung der Näherungswerte

$$\varphi_j^{(n)} \approx \varphi(z(w(j\pi/n))), \quad j = 0, \dots, 4n - 1,$$

durch

$$w(t + 2\pi) := 2\pi + w(t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

auf $[0, 4\pi]$ fortgesetzt. Mit den Bezeichnungen

$$t_j^{(n)} = \frac{j\pi}{n}, \quad s_j^{(n)} = w\left(\frac{j\pi}{n}\right), \quad \alpha_j^{(n)} = w'\left(\frac{j\pi}{n}\right), \quad f_j^{(n)} = -2f(z(s_j^{(n)})), \quad j = 0, \dots, 4n,$$

$$u_{l,k}^{(0)} = u_l(z(s_k^{(n)})),$$

$$u_{l,k}^{(1)} = \frac{\partial u_l}{\partial \nu}(z(s_k^{(n)})), \quad l \in \{0, 1\}, \quad k = 1, \dots, 2n-1, 2n+1, \dots, 4n-1,$$

den Kernen

$$L_0(t, \tau) = \frac{1}{\pi} \frac{z'(\tau)^\perp \cdot (z(t) - z(\tau))}{|z(t) - z(\tau)|^2}, \quad (7.7)$$

$$\begin{aligned} M_0(t, \tau) &= \frac{1}{\pi} \ln \frac{1}{|z(t) - z(\tau)|} |z'(\tau)| \\ &= M_0^{(1)}(t, \tau) \ln \left(4 \sin^2 \frac{t - \tau}{2} \right) + M_0^{(2)}(t, \tau), \end{aligned} \quad (7.8)$$

$$M_0^{(1)}(t, \tau) = -\frac{1}{2\pi} |z'(\tau)|, \quad (7.9)$$

$$M_0^{(2)}(t, \tau) = M_0(t, \tau) - M_0^{(1)}(t, \tau) \ln \left(4 \sin^2 \frac{t - \tau}{2} \right), \quad (7.10)$$

und den Diagonaltermen

$$L_0(t, t) = \frac{1}{2\pi} \frac{z'(t)^\perp \cdot z''(t)}{|z'(t)|^2}, \quad (7.11)$$

$$M_0^{(1)}(t, t) = -\frac{1}{2\pi} |z'(t)|, \quad (7.12)$$

$$M_0^{(2)}(t, t) = 0, \quad (7.13)$$

ist das lineare Gleichungssystem

$$f_j^{(n)} = \varphi_j^{(n)} - \frac{\pi}{n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 2n}}^{4n-1} \alpha_k^{(n)} L_0(s_j^{(n)}, s_k^{(n)}) \left\{ \varphi_k^{(n)} - u_{0,k}^{(0)} \varphi_0^{(n)} - u_{1,k}^{(0)} \varphi_{2n}^{(n)} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{l=0}^1 \varphi_{2nl}^{(n)} \left\{ u_{l,j}^{(0)} - \frac{\pi}{n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 2n}}^{4n-1} \alpha_k^{(n)} \left(M_0^{(2)}(s_j^{(n)}, s_k^{(n)}) + M_0^{(1)}(s_j^{(n)}, s_k^{(n)}) \times \right. \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. \left. \times \left[T(t_j^{(n)}, t_k^{(n)}) + \frac{n}{\pi} R_{|k-j|}^{(n)} \right] \right) u_{l,k}^{(1)} \right\}, \quad (7.14)
\end{aligned}$$

$j = 0, \dots, 4n - 1$, zu lösen. Dabei sind T und $R_k^{(n)}$ durch (3.18) und (3.21) erklärt.

7.3 Der hypersinguläre Operator T_0

Zur Auswertung der Normalableitung $\frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Gamma_0}$ wird der Operator T_0 , mit

$$(T_0 \varphi)(x) = 2 \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \int_{\partial D} \varphi(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \Phi_0(x, y) ds(y), \quad x \in \partial D \setminus \{x^{(0)}, x^{(1)}\}, \quad (7.15)$$

benötigt. Da die Dichte φ auf jeder abgeschlossenen Teilmenge von Γ_0 und γ_0 die Regularität $C^{1,\alpha}$ besitzt und sich φ bei $x^{(l)}$ wie $(x - x^{(l)})^\delta$, $\delta = \frac{\pi}{\pi + |\pi - \beta(x^{(l)})|}$, verhält (siehe Grisvard [15] und [16]), gilt der nachfolgende Satz.

Satz 7.7 *Sei z eine Parametrisierung von ∂D wie im Abschnitt 7.1 beschrieben. Sei $\chi \in C(\partial D)$ und gelte $\chi(x^{(0)}) = \chi(x^{(1)}) = 0$ sowie $\chi \circ z|_{[0, 2\pi]} \in S^{2,1+\delta}$ mit $0 < \delta < 1$. Dann gilt für die Normalableitung des Doppelschichtpotenzials für $x \in \Gamma_0 \cup \gamma_0$ die Darstellung*

$$\frac{\partial}{\partial \nu(x)} \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial \nu(y)} \chi(y) ds(y) = \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi_0(x, y)}{\partial t(x)} \frac{\partial \chi}{\partial t}(y) ds(y).$$

Dabei ist $t = (t_1, t_2) = (-\nu_2, \nu_1)$ der Tangentialvektor.

Beweis: Das obige Resultat ist sowohl für geschlossene Ränder $\partial D \in C^2$ mit Dichte $\chi \in C^{1,\alpha}(\partial D)$ (siehe Kress [35, Theorem 7.29]), als auch beim offenen Bogen der Klasse C^3 mit Dichte $\chi \in C^{1,\alpha,*}$ (siehe Mönch [44, Satz 2.8]) bekannt.

Hierbei ist χ im Funktionenraum $C^{1,\alpha,*}(\Gamma)$ genau dann, wenn die Dichte in den Endpunkten verschwindet, die parametrisierte Dichte $\chi \circ z$ differenzierbar in Γ_0 ist, die Ableitung $(\chi \circ z)'$ ein wurzelsinguläres Verhalten an den Endpunkten aufweist und im Inneren hölderstetig ist.

Mit einer geeigneten Abschneidetechnik wird das Problem auf die bereits bewiesenen Gleichungen reduziert.

Dazu sei $x \in \Gamma_0$ fest. Dann existieren Teilbögen Γ_2, Γ_1 und eine Funktion $\rho \in C^2(\Gamma)$ mit den Eigenschaften:

- Γ_1 lässt sich zu einer geschlossenen C^2 -glatten Kurve $\tilde{\Gamma}$ ergänzen.
- $x \in \Gamma_2 \subset \Gamma_1 \subset \Gamma_0$.
- $\rho|_{\Gamma_2} \equiv 1, \rho|_{\Gamma \setminus \Gamma_1} \equiv 0$.

Die Dichte χ wird aufgespalten in

$$\chi = \rho\chi + (1 - \rho)\chi.$$

Weil $\rho\chi$ außerhalb von Γ_1 verschwindet, ergibt sich mit dem bereits erwähnten Satz [35, Theorem 7.29], angewendet auf den Rand $\tilde{\Gamma}$,

$$\frac{\partial}{\partial\nu(x)} \int_{\partial D} \frac{\partial\Phi_0(x, y)}{\partial\nu(y)} \rho(y)\chi(y) ds(y) = \int_{\partial D} \frac{\partial\Phi_0(x, y)}{\partial t(x)} \frac{\partial(\rho\chi)}{\partial t}(y) ds(y). \quad (7.16)$$

Desgleichen folgt aus [44, Satz 2.8], angewendet auf 3 Bogenstücke (γ sowie den linken und rechten Teil von $\Gamma \setminus \Gamma_2$) und die Dichte $(1 - \rho)\chi \in C^{1, \alpha, *}$, die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial\nu(x)} \int_{\partial D} \frac{\partial\Phi_0(x, y)}{\partial\nu(y)} (1 - \rho(y))\chi(y) ds(y) = \int_{\partial D} \frac{\partial\Phi_0(x, y)}{\partial t(x)} \frac{\partial}{\partial t(y)} ((1 - \rho)\chi)(y) ds(y). \quad (7.17)$$

Addieren von (7.16) und (7.17) ergibt die Behauptung. ■

Aus der Darstellung

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_{\partial D} \frac{\partial\Phi_0(x, y)}{\partial\nu(y)} \varphi(y) ds(y) \\ &= \int_{\partial D} \frac{\partial\Phi_0(x, y)}{\partial\nu(y)} \left\{ \varphi(y) - \sum_{l=0}^1 \varphi(x^{(l)})u_l(y) \right\} ds(y) \\ &\quad + \sum_{l=0}^1 \varphi(x^{(l)}) \left\{ \int_{\partial D} \Phi_0(x, y) \frac{\partial u_l}{\partial\nu}(y) ds(y) - u_l(x) \right\}, x \in D, \end{aligned}$$

gewinnt man für die zu ermittelnde Normalableitung

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \frac{1}{2} (\tilde{T}_0 \varphi)(x) + \sum_{l=0}^1 \varphi(x^{(l)}) \left[\frac{1}{2} \left(K_0^* \frac{\partial u_l}{\partial \nu} \right) (x) - \frac{1}{2} \frac{\partial u_l}{\partial \nu}(x) \right], \quad x \in \Gamma_0. \quad (7.18)$$

Hierbei ist \tilde{T}_0 der Operator, bei dem nicht die Dichte φ , sondern die in den Ecken verschwindende Dichte $\varphi - \sum_{l=0}^1 \varphi(x^{(l)}) u_l$ eingetragen wird.

Zur Vereinfachung der Darstellung sei nun $\chi := \varphi - \sum_{l=0}^1 \varphi(x^{(l)}) u_l$, also eine Dichte, die nach den o.g. Regularitätsresultaten von Grisvard den Voraussetzungen von Satz 7.7 genügt. Dann gilt für $2\pi < t < 4\pi$

$$(\tilde{T}_0 \varphi)(z(t)) = \frac{1}{|z'(t)|} \frac{1}{2\pi} \int_0^{4\pi} K_{T_0}(t, \tau) (\chi \circ z)'(\tau) d\tau,$$

wobei der auf der Diagonalen $t = \tau$ singuläre Kern K_{T_0} gegeben ist durch

$$K_{T_0}(t, \tau) = 2 \frac{z'(t) \cdot (z(\tau) - z(t))}{|z(t) - z(\tau)|^2}, \quad t \neq \tau.$$

Während der Integrand über $[0, 2\pi]$ glatt ist, muss beim zweiten Anteil die Singularität berücksichtigt werden.

Aus diesem Grund wird die Cotangens-Singularität auf nachfolgende Weise abgespalten.

$$\begin{aligned} (\tilde{T}_0 \varphi)(z(t)) &= \frac{1}{|z'(t)|} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_{T_0}(t, \tau) (\chi \circ z)'(\tau) d\tau \\ &+ \frac{1}{|z'(t)|} \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi}^{4\pi} \left[K_{T_0}(t, \tau) - \cot \frac{\tau - t}{2} \right] (\chi \circ z)'(\tau) d\tau \\ &+ \frac{1}{|z'(t)|} \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi}^{4\pi} \cot \frac{\tau - t}{2} (\chi \circ z)'(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Partielle Integration beim ersten und zweiten Summanden führen für $2\pi < t < 4\pi$ auf

$$\begin{aligned} &(\tilde{T}_0 \varphi)(z(t)) \\ &= \frac{1}{|z'(t)|} \left\{ \int_0^{2\pi} N_0^{(1)}(t, \tau) (\chi \circ z)(\tau) d\tau + \int_{2\pi}^{4\pi} N_0^{(2)}(t, \tau) (\chi \circ z)(\tau) d\tau \right\} \\ &+ \frac{1}{|z'(t)|} \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi}^{4\pi} \cot \frac{\tau - t}{2} (\chi \circ z)'(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Dabei sind die Kerne $N_0^{(1)}$ und $N_0^{(2)}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} N_0^{(1)}(t, \tau) &= \frac{-1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \tau} K_{T_0}(t, \tau) \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{z'(t) \cdot (z(t) - z(\tau)) z'(\tau) \cdot (z(t) - z(\tau))}{|z(t) - z(\tau)|^4} - \frac{1}{\pi} \frac{z'(t) \cdot z'(\tau)}{|z(t) - z(\tau)|^2}, \quad (7.20) \\ &0 \leq \tau \leq 2\pi < t < 4\pi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_0^{(2)}(t, \tau) &= \frac{-1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[K_{T_0}(t, \tau) - \cot \frac{\tau - t}{2} \right] \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{z'(t) \cdot (z(t) - z(\tau)) z'(\tau) \cdot (z(t) - z(\tau))}{|z(t) - z(\tau)|^4} - \frac{1}{\pi} \frac{z'(t) \cdot z'(\tau)}{|z(t) - z(\tau)|^2} \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \frac{1}{\sin^2 \frac{t-\tau}{2}}, \quad 2\pi < t < 4\pi, \quad 2\pi \leq \tau \leq 4\pi. \quad (7.21) \end{aligned}$$

Während die Diagonalterme für $N_0^{(1)}$ nicht benötigt werden, ergibt sich für $N_0^{(2)}$

$$N_0^{(2)}(t, t) = -\frac{1}{12\pi} - \frac{|z'(t) \cdot z''(t)|^2}{2\pi |z'(t)|^4} + \frac{|z''(t)|^2}{4\pi |z'(t)|^2} + \frac{z'(t) \cdot z'''(t)}{6\pi |z'(t)|^2}. \quad (7.22)$$

Eine Substitution $t = w(s)$, $\tau = w(\sigma)$ in (7.19) und die Vereinbarung

$$h(s, \sigma) := \begin{cases} \frac{\cot \frac{w(\sigma) - w(s)}{2}}{\cot \frac{\sigma - s}{2}} & : 0 \leq s, \sigma \leq 4\pi, |s - \sigma| \notin \{0, 2\pi, 4\pi\} \\ \frac{1}{w'(\sigma)} & : 2\pi < s = \sigma < 4\pi \end{cases}, \quad (7.23)$$

führen für $2\pi < s < 4\pi$ zu

$$\begin{aligned} (\tilde{T}_0 \varphi)(z(w(s))) &= \frac{1}{|z'(w(s))|} \int_0^{2\pi} N_0^{(1)}(w(s), w(\sigma)) (\chi \circ z \circ w)(\sigma) w'(\sigma) d\sigma \\ &\quad + \frac{1}{|z'(w(s))|} \int_{2\pi}^{4\pi} N_0^{(2)}(w(s), w(\sigma)) (\chi \circ z \circ w)(\sigma) w'(\sigma) d\sigma \\ &\quad + \frac{1}{|z'(w(s))|} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cot \frac{\sigma - s}{2} h(s, \sigma) (\chi \circ z \circ w)'(\sigma + 2\pi) d\sigma. \quad (7.24) \end{aligned}$$

Beim letzten Integral wurde von $w(\sigma + 2\pi) = 2\pi + w(\sigma)$ und der Periodizität vom Cotangens Gebrauch gemacht.

Für den dritten Summanden in (7.24) sind Quadraturformeln

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cot \frac{\sigma - s}{2} \psi'(\sigma + 2\pi) d\sigma &\approx \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cot \frac{\sigma - s}{2} (P_n \psi)'(\sigma) d\sigma, \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cot \frac{\sigma - s}{2} \psi(\sigma + 2\pi) d\sigma &\approx \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cot \frac{\sigma - s}{2} (P_n \psi)(\sigma) d\sigma \end{aligned}$$

erforderlich. Dabei ist P_n der trigonometrische Interpolationsoperator

$$P_n : C_{2\pi} \rightarrow T_n, \quad P_n \psi = \sum_{j=2n}^{4n-1} \psi(t_j^{(n)}) l_j^{(n)} = \sum_{j=0}^{2n-1} \psi(t_{j+2n}^{(n)}) l_j^{(n)}$$

zu den äquidistanten Knoten $t_j^{(n)} = j\pi/n$, $j = 2n, \dots, 4n - 1$. Durch exaktes Integrieren von

$$T_j^{(n)}(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cot \frac{\sigma - s}{2} l_j^{(n)' }(\sigma) d\sigma$$

und

$$U_j^{(n)}(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cot \frac{\sigma - s}{2} l_j^{(n)}(\sigma) d\sigma$$

ergeben sich die Quadraturformeln (vergleiche Mönch [43, Kapitel 3.1] und Kreß [26])

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cot \frac{\sigma - s}{2} \psi'(\sigma + 2\pi) d\sigma \approx \sum_{j=0}^{2n-1} \psi(t_{j+2n}^{(n)}) T_j^{(n)}(s), \quad (7.25)$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cot \frac{\sigma - s}{2} \psi(\sigma + 2\pi) d\sigma \approx \sum_{j=0}^{2n-1} \psi(t_{j+2n}^{(n)}) U_j^{(n)}(s) \quad (7.26)$$

mit den Quadraturgewichten

$$T_j^{(n)}(s) = -\frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n-1} m \cos m(s - t_j^{(n)}) - \frac{1}{2} \cos n(s - t_j^{(n)}), \quad j = 0, \dots, 2n - 1, \quad (7.27)$$

$$U_j^{(n)}(s) = \frac{1}{2n} (1 - (-1)^j \cos(ns)) \cot \frac{t_j^{(n)} - s}{2}, \quad j = 0, \dots, 2n - 1. \quad (7.28)$$

Mit der abkürzenden Schreibweise

$$T_{|j-l|}^{(n)} := T_j^{(n)}(t_l^{(n)}), \quad U_{j-l}^{(n)} := U_j^{(n)}(t_l^{(n)}) = -U_l^{(n)}(t_j^{(n)}),$$

ergeben sich die Matrixelemente

$$T_k^{(n)} = -\frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n-1} m \cos\left(\frac{mk\pi}{n}\right) - \frac{(-1)^k}{2}, \quad k = 0, \dots, 2n-1, \quad (7.29)$$

$$U_k^{(n)} = \begin{cases} 0 & : k \text{ ist gerade} \\ \frac{1}{n} \cot \frac{k\pi}{2n} & : k \text{ ist ungerade} \end{cases}, \quad k = -2n+1, \dots, 2n-1. \quad (7.30)$$

Die Produktregel $h\psi' = (h\psi)' - h'\psi$ motiviert mit den Funktionen $\hat{U}_j^{(n)}$,

$$\hat{U}_j^{(n)}(s) = h(s, t_{j+2n}^{(n)}) T_j^{(n)}(s) - \frac{\partial h}{\partial \sigma}(s, t_{j+2n}^{(n)}) U_j^{(n)}(s), \quad j = 0, \dots, 2n-1,$$

die Approximation

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cot \frac{\sigma-s}{2} h(s, \sigma) \psi'(\sigma+2\pi) d\sigma \approx \sum_{j=0}^{2n-1} \psi(t_{j+2n}^{(n)}) \hat{U}_j^{(n)}(s).$$

In dieser Arbeit wird stattdessen

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cot \frac{\sigma-s}{2} h(s, \sigma) \psi'(\sigma+2\pi) &\approx \sum_{j=0}^{2n-1} h(s, t_{j+2n}^{(n)}) \psi'(t_{j+2n}^{(n)}) U_j^{(n)}(s) \\ &\approx \sum_{j,k=0}^{2n-1} h(s, t_{j+2n}^{(n)}) \psi(t_{k+2n}^{(n)}) l_k^{(n)'}(t_{j+2n}^{(n)}) U_j^{(n)}(s) \end{aligned}$$

verwendet. Wegen der Singularitäten der Kerne ist nicht zu erwarten, dass obige Quadraturformeln gleichmäßig bezüglich $s \in (2\pi, 4\pi)$ konvergieren. Eine gleichmäßige Konvergenz auf kompakten Teilmengen von $(2\pi, 4\pi)$ erscheint plausibel.

Insgesamt ergibt sich für den gemäß (7.18) benötigten hypersingulären Anteil die Approximation

$$\begin{aligned} (\tilde{T}_0\varphi)(z(w(s))) &\approx \frac{1}{|z'(w(s))|} \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^{2n-1} \alpha_j^{(n)} N_0^{(1)}(w(s), s_j^{(n)}) \chi_j^{(n)} \\ &+ \frac{1}{|z'(w(s))|} \frac{\pi}{n} \sum_{j=2n+1}^{4n-1} \alpha_j^{(n)} N_0^{(2)}(w(s), s_j^{(n)}) \chi_j^{(n)} \\ &+ \frac{1}{|z'(w(s))|} \sum_{j,k=0}^{2n-1} h(s, t_{j+2n}^{(n)}) l_k^{(n)'}(t_{j+2n}^{(n)}) U_j^{(n)}(s) \chi_{k+2n}^{(n)}. \end{aligned}$$

7.4 Numerische Ergebnisse beim direkten Impedanzrandwertproblem

In diesem Abschnitt werden die nachfolgenden Parametrisierungen z_j als Beispiele für γ betrachtet:

$$z_1(t) = -(\cos(t/2), \sin(t/2)), \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad (7.31)$$

$$z_2(t) = \frac{0.5(t - 2\pi) - 1}{1 + \frac{\pi}{2}} (\cos(t/2), \sin(t/2)) + \left(\frac{\frac{\pi}{2}}{1 + \frac{\pi}{2}}, 0 \right), \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad (7.32)$$

$$z_3(t) = -\frac{1 + 0.5t}{1 + \frac{\pi}{2}} (\cos(t/2), \sin(t/2)) - \left(\frac{\frac{\pi}{2}}{1 + \frac{\pi}{2}}, 0 \right), \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad (7.33)$$

$$z_4(t) = -\left(1 - \frac{1}{3} \sin(t/2) + \frac{1}{6} \sin(1.5t) \right) (\cos(t/2), \sin(t/2)), \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad (7.34)$$

$$z_5(t) = -(1 + \sin(t/2)) (\cos(t/2), \sin(t/2)), \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad (7.35)$$

$$z_6(t) = \left(\frac{1}{\pi} (t - \pi), -\sin(t/2) \right), \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \quad (7.36)$$

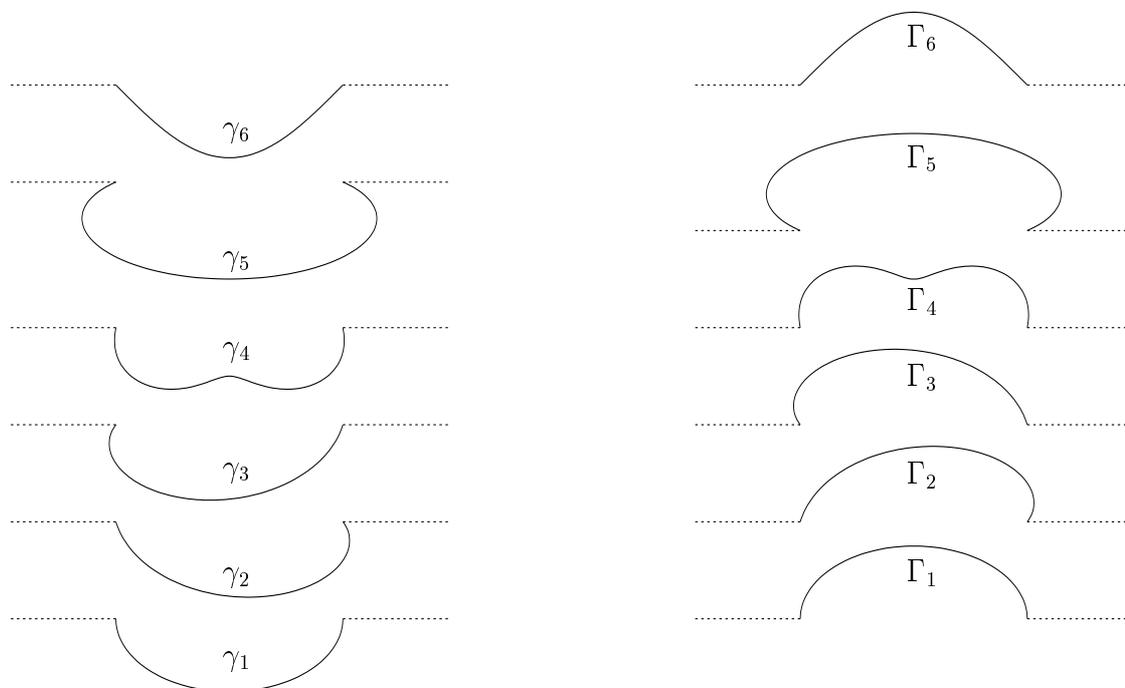
Durch Spiegelung an der x_1 -Achse erhält man ebenfalls 6 Parametrisierungen für Γ , sodass durch Kombination mit denen für γ hinreichend viele Gebiete mit Ecken zur Verfügung stehen. In Abbildung 7.1 sind die Kurven, abgesehen von Skalierungsfaktoren in x_2 -Richtung, dargestellt. Entsprechend der Parametrisierung sind sie mit $\gamma_j, \Gamma_j, j = 1, \dots, 6$ bezeichnet.

Beispiel 7.8 Der Poisson-Kern

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{|y|^2 - |x|^2}{|x - y|^2}, \quad x \neq y,$$

ist harmonisch in $\mathbb{R}^2 \setminus \{y\}$. Für γ wird der Halbkreis (7.31) verwendet. Für Γ_6 wähle $y = 0.5\sqrt{2}(1, 1)^t$ und in den anderen Fällen setze $y = (0, 1)^t$, wobei für $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ und Γ_5 noch ein geeigneter Skalierungsfaktor (hier $1/3$) für die x_2 -Richtung zu wählen ist, damit die Singularität y außerhalb des Gebietes D liegt. In allen Fällen hat u auf γ homogene Dirichletwerte. Es gilt

$$\text{grad } u(x) = \frac{-1}{\pi} \left[\frac{(|y|^2 - |x|^2)(x - y)}{|x - y|^4} + \frac{x}{|x - y|^2} \right], \quad x \neq y.$$

Abbildung 7.1: Darstellungen von γ_j und Γ_j .

In Tabelle 7.1 ist für verschiedene Punkte $x \in \Gamma$ die Differenz zwischen exakter Lösung $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x)$ und dem numerisch ermittelten Wert dargestellt. Die erwartete schnelle Konvergenz ist ersichtlich, obwohl die Lösung eine Singularität in der Nähe des Randes besitzt.

Beispiel 7.9 Die in Polarkoordinaten $(r, \vartheta) \in \mathbb{R}^+ \times [-\pi, \pi)$ dargestellte Funktion

$$u(r, \vartheta) = r^\alpha \sin(\alpha \vartheta), \quad \alpha > 0, \quad (7.37)$$

ist harmonisch in $\mathbb{R}^2 \setminus \{y \in \mathbb{R}^2 \mid y_1 \leq 0, y_2 = 0\}$. Durch Transformation des Koordinatenursprungs in die Ecke $x^{(0)}$ ist die Lösung mit den durch (7.37) gegebenen Randwerten in der Regel ($\alpha < 1$) in $x^{(0)}$ nicht mehr differenzierbar. Es gilt

$$\text{grad } u(x) = \frac{\partial u}{\partial r} (\cos \vartheta, \sin \vartheta)^t + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} (-\sin \vartheta, \cos \vartheta)^t, \quad x \neq (0, 0)^t.$$

In Tabelle 7.2 ist für Punkte $x \in \Gamma$ (nicht zu nahe bei $x^{(0)}$) der Fehler zwischen exakter Lösung und Näherungslösung dargestellt. Die Ergebnisse sind mit dem unteren Rand

(7.34) und $\alpha = 1.5$ erzeugt worden. Die Konvergenz ist in allen Beispielen ersichtlich. Aus weiteren hier nicht angeführten numerischen Ergebnissen kann der Einfluss von α auf die Konvergenzgeschwindigkeit abgelesen werden.

Beispiel 7.10 Die durch

$$u(y) = y_1^2 - y_2^2, \quad y \in \mathbb{R}^2,$$

gegebene Funktion ist harmonisch mit dem Gradienten

$$\text{grad } u(y) = (2y_1, -2y_2)^t.$$

Die numerischen Ergebnisse zu diesem Beispiel sind der Tabelle 7.3 zu entnehmen, wobei als unterer Rand die Parametrisierung (7.35) benutzt wurde.

Tabelle 7.1: Ergebnisse zu Beispiel 7.8.

Substitution w mit kubischem v von Kreis					
p	n	Γ_1 $x = z_1(3\pi)$	Γ_2 $x = z_2(3\pi)$	Γ_4 $x = z_4(3.5\pi)$	Γ_5 $x = z_5(2.5\pi)$
3	8	0.04088360	0.05049941	0.17503877	0.96828029
	16	0.00074931	0.00100419	0.01842683	0.53299242
	32	0.00000031	0.00000783	0.00004801	0.08639986
	64	0.00000002	0.00000009	0.00000001	0.00110266
4	8	0.04133535	0.05309112	0.19044679	0.92087003
	16	0.00071517	0.00097180	0.02108091	0.50384811
	32	0.00000013	0.00000725	0.00005583	0.08132141
	64	0.00000000	0.00000007	0.00000000	0.00103137
5	8	0.04158528	0.05423901	0.21091141	0.90181860
	16	0.00067048	0.00096883	0.02464884	0.49011772
	32	0.00000011	0.00000685	0.00006677	0.07873004
	64	0.00000000	0.00000002	0.00000000	0.00099171

Tabelle 7.2: Ergebnisse zu Beispiel 7.9.

Substitution w mit kubischem v von Kreis					
p	n	Γ_2 $x = z_2(3\pi)$	Γ_4 $x = z_4(3\pi)$	Γ_5 $x = z_5(3.5\pi)$	Γ_6 $x = z_6(2.5\pi)$
3	8	0.22945000	0.07289228	0.02033373	0.02378610
	16	0.08930281	0.00010944	0.01237641	0.01045901
	32	0.01503920	0.00000242	0.00693285	0.00490836
	64	0.00411923	0.00000024	0.00361821	0.00018632
4	8	0.23192281	0.08646251	0.01853098	0.02380779
	16	0.08891620	0.00006236	0.01033554	0.00971269
	32	0.00942235	0.00000011	0.00534853	0.00048331
	64	0.00030716	0.00000000	0.00229175	0.00000952
5	8	0.24106712	0.10780456	0.01159671	0.02414860
	16	0.08734712	0.00005093	0.00613904	0.00915583
	32	0.00536076	0.00000000	0.00215999	0.00033804
	64	0.00021094	0.00000000	0.00029054	0.00000053

Tabelle 7.3: Ergebnisse zu Beispiel 7.10.

Substitution w mit kubischem v von Kreis					
p	n	Γ_2 $x = z_2(3\pi)$	Γ_4 $x = z_4(3\pi)$	Γ_5 $x = z_5(3.5\pi)$	Γ_6 $x = z_6(2.5\pi)$
3	8	0.51023910	0.13156863	0.00129772	0.00009755
	16	0.00360023	0.00007646	0.00000002	0.00002093
	32	0.00005687	0.00000010	0.00000000	0.00000260
	64	0.00000105	0.00000000	0.00000000	0.00000029
4	8	0.52840933	0.16794200	0.00861640	0.00094984
	16	0.00370941	0.00006325	0.00000084	0.00000114
	32	0.00005327	0.00000000	0.00000000	0.00000005
	64	0.00000087	0.00000000	0.00000000	0.00000000
5	8	0.53700627	0.21474953	0.02691411	0.00128323
	16	0.00371588	0.00012555	0.00000460	0.00000075
	32	0.00005004	0.00000000	0.00000000	0.00000000
	64	0.00000067	0.00000000	0.00000000	0.00000000

Kapitel 8

Das inverse Impedanzrandwertproblem

In diesem Kapitel wird das inverse Impedanzrandwertproblem behandelt. Es ist die Gestalt des Körpers D unter Kenntnis des oberen Randes Γ zu ermitteln. Als Daten stehen Paare $(u|_{\Gamma}, \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Gamma_0})$ zur Verfügung. Im gesamten Kapitel 8 werden nur zulässige Gebiete $D \subset \mathbb{R}^2$, wie zu Beginn von Kapitel 7 erläutert, betrachtet.

Im Abschnitt 8.1 wird das Problem der Eindeutigkeit untersucht, im Abschnitt 8.2 die Fréchet-Differenzierbarkeit des Randwerteoperators gezeigt und die Ableitung durch ein Randwertproblem charakterisiert. Im letzten Teil des Kapitels werden numerische Beispiele vorgestellt.

8.1 Eindeutigkeit beim inversen Impedanzrandwertproblem

Satz 8.1 *Es seien D_1 und D_2 zwei Gebiete mit gemeinsamen oberen Rand Γ und jeweiligem unteren Rand γ_j . Weiterhin seien $\tilde{\Gamma}$ ein nichtleeres zusammenhängendes Teilstück von Γ_0 und*

$$u_j \in C^2(D_j) \cap C(\overline{D_j}) \cap C^1(\overline{D_j} \setminus \{x^{(0)}, x^{(1)}\}), \quad j = 1, 2,$$

Lösungen von

$$\Delta u_j = 0 \quad \text{in } D_j,$$

$$\begin{aligned} u_1 &= u_2 \neq 0 && \text{auf } \Gamma, \\ \frac{\partial u_1}{\partial \nu} &= \frac{\partial u_2}{\partial \nu} && \text{auf } \tilde{\Gamma} \subset \Gamma_0, \\ u_j &= 0 && \text{auf } \gamma_j. \end{aligned}$$

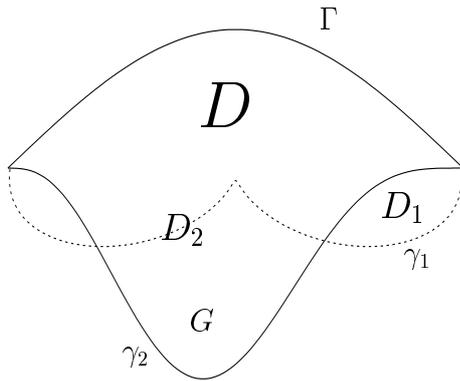
Dann stimmen die Gebiete D_1 und D_2 überein.

Beweis: 1. Für die Parametrisierungen $z^{(\gamma_j)}$ und $z^{(\Gamma)}$ gilt nach Voraussetzung

$$z_2^{(\gamma_j)}(t) < 0 < z_2^{(\Gamma)}(t + 2\pi), \quad 0 < t < 2\pi.$$

Demnach ist $D := D_1 \cap D_2$ ein nichtleeres Gebiet. Die auf D erklärte Funktion $u := u_1 - u_2$ ist harmonisch und hat auf $\tilde{\Gamma}$ Cauchy-Randwerte Null. Nach dem Satz von Holmgren (siehe Rauch [49, Section 1.7]) verschwindet u in D .

2. Angenommen es gilt $\gamma_1 \neq \gamma_2$.



Dann existiert ein $t_0 \in \mathbb{R}$ so, dass die Gerade durch $(t_0, 0)$ mit Richtungsvektor $(0, 1)$ die Kurven γ_j in Punkten P_j , $j = 1, 2$, schneidet, wobei $P_1 \neq P_2$ gilt. Demnach existiert ein Gebiet G so, dass ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit gilt

$$G \subset D_2 \setminus D_1 \text{ und } \partial G \subset \gamma_1 \cup \gamma_2.$$

(Anmerkung: Falls sich γ_j durch $(t, z_2^{(\gamma_j)}(t))$, $0 \leq t \leq 2\pi$, $j = 1, 2$, parametrisieren lässt, so seien $0 \leq t_A < t_E \leq 2\pi$ mit

$$\begin{aligned} |z_2^{(\gamma_1)}(t) - z_2^{(\gamma_2)}(t)| &> 0, && t_A < t < t_B, \\ z_2^{(\gamma_1)}(t_A) &= z_2^{(\gamma_2)}(t_A), \\ z_2^{(\gamma_1)}(t_E) &= z_2^{(\gamma_2)}(t_E). \end{aligned}$$

Dann erfüllt G mit Rand

$$\partial G = \{\max_{j=1,2} z_2^{(\gamma_j)}(t) \mid t_A \leq t \leq t_E\} \cup \{\min_{j=1,2} z_2^{(\gamma_j)}(t) \mid t_A \leq t \leq t_E\}.$$

obige Forderung.)

Die Funktion u_2 ist auf G definiert und harmonisch. Auf $\partial G \cap \gamma_2$ verschwindet u_2 nach Voraussetzung. Auf $\partial G \cap \gamma_1$ gilt nach Teil 1

$$u_2|_{\partial G \cap \gamma_1} = u_1|_{\partial G \cap \gamma_1} = 0.$$

Das Maximum-Minimum Prinzip in G und die Analytizität in D_2 liefern $u_2 = 0$ in $\overline{D_2}$ und daher einen Widerspruch zur Voraussetzung, nach der u_2 auf Γ nicht identisch verschwindet. ■

8.2 Die Fréchet - Ableitung des Randwerteoperators

In diesem Abschnitt soll bei festem $f \in C_0^{2,\alpha}(\Gamma) := \{g \in C^{2,\alpha}(\Gamma) \mid g(x^{(0)}) = g(x^{(1)}) = 0\}$ die Fréchet-Differenzierbarkeit der Abbildung

$$z \longmapsto \frac{\partial u}{\partial \nu}$$

gezeigt werden, wobei die zugehörigen normierten Räume noch zu konkretisieren sind. (Die höhere Regularität von f , nämlich $C^{2,\alpha}$ statt $C^{1,\alpha}$ wird benötigt, damit eine Beziehung zwischen $\mathcal{T}'_0(z, h)$ und der Normalableitung von der Fréchet-Ableitung des Doppelschichtpotenzials genutzt werden kann.)

Dazu sei $\tilde{\Gamma} \subset \Gamma_0$ ein zusammenhängendes abgeschlossenes Kurvenstück von Γ_0 mit der Eigenschaft

$$\text{dist}(\tilde{\Gamma}, x^{(j)}) \geq C > 0, \quad j = 0, 1,$$

mit einer Konstanten C . Weiterhin sei \hat{z} eine Funktion mit den Eigenschaften:

- $\hat{z} \in C_{4\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$, \hat{z} ist injektiv auf $[0, 4\pi)$ und gegen den Uhrzeigersinn orientiert,
- $\hat{z}(0) = x^{(0)}$, $\hat{z}(2\pi) = x^{(1)}$, $\hat{z}|_{[0, 2\pi]} \in C^{3,\alpha}[0, 2\pi]$, $\hat{z}([2\pi, 4\pi]) = \Gamma$,
- $|\hat{z}'(t)| > 0$ auf $[0, 4\pi]$ und $\hat{z}_2(t) < 0$, $0 < t < 2\pi$.

Desweiteren werden die Räume X und U erklärt durch

$$\begin{aligned} X &= \{z \in C_{4\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2) \mid z(t) = (0, 0) \in \mathbb{R}^2 \forall 2\pi \leq t \leq 4\pi, z|_{[0, 2\pi]} \in C^{3,\alpha}\}, \\ U &= \{z \in X \mid z \text{ ist injektiv auf } [0, 2\pi], z_2(t) < 0 \text{ für alle } 0 < t < 2\pi \\ &\quad |z'(t)| > 0, 0 \leq t \leq 2\pi.\} \end{aligned}$$

und mit der Norm

$$\|z\|_X = \max\{\|z\|_\infty, \|z'\|_\infty, \|z''\|_\infty, \|z'''\|_\infty\}$$

versehen. U ist offen in X .

Für eine zulässige Parametrisierung $z \in U$ werden nun, um (einheitlich) Integrale über geschlossenen Rändern zu erhalten, die auftretenden Operatoren zum Rand $z + \hat{z}$ betrachtet. Unter dem Symbol $\partial D_{z+\hat{z}}$ wird demzufolge

$$\partial D_{z+\hat{z}} = \{z(t) + \hat{z}(t) \mid 0 \leq t \leq 4\pi\}$$

verstanden. Bei der Notation der Kerne L_0 , M_0 , $M_0^{(1)}$ und $M_0^{(2)}$ gemäß (7.7) - (7.10) wird die Parametrisierung mit aufgenommen, das heißt

$$L_0(t, \tau, z + \hat{z}) = \frac{1}{\pi} \frac{(z + \hat{z})'(\tau)^\perp \cdot ((z + \hat{z})(t) - (z + \hat{z})(\tau))}{|(z + \hat{z})(t) - (z + \hat{z})(\tau)|^2}, \quad t \neq \tau, \quad (8.1)$$

$$L_0(t, t, z + \hat{z}) = \frac{1}{2\pi} \frac{(z + \hat{z})'(t)^\perp \cdot (z + \hat{z})''(t)}{|(z + \hat{z})'(t)|^2}, \quad (8.2)$$

$$\begin{aligned} M_0(t, \tau, z + \hat{z}) &= \frac{1}{\pi} \ln \frac{1}{|(z + \hat{z})(t) - (z + \hat{z})(\tau)|} |(z + \hat{z})'(\tau)| \\ &= M_0^{(1)}(t, \tau, z + \hat{z}) \ln \left(4 \sin^2 \frac{t - \tau}{2} \right) + M_0^{(2)}(t, \tau, z + \hat{z}). \end{aligned} \quad (8.3)$$

Wie im Kapitel 5 wird zunächst der zur Gleichung (7.4) gehörende Randintegraloperator in parametrisierter Form diskutiert.

Dazu sei $A_0(z) \in \mathcal{L}(C_{4\pi}, C_{4\pi})$ gegeben durch

$$(A_0(z)\varphi)(t) := - \left(1 - \frac{\beta(z(t) + \hat{z}(t))}{\pi} \right) \varphi(t) + \int_0^{4\pi} L_0(t, \tau, z + \hat{z}) \varphi(\tau) d\tau, \quad 0 \leq t \leq 4\pi.$$

Für den Nachweis der Existenz von $A_0'(z, h)$ und eine geeignete Darstellung dieser Ableitung werden weitere Operatoren eingeführt. Analog zum Einfachschichtpotenzial $S_k(z)$ zur Helmholtzgleichung gemäß (5.6) wird in diesem Abschnitt der Operator $S_0(z) \in \mathcal{L}(C_{4\pi}, C_{4\pi})$ benötigt, wobei gilt

$$(S_0(z)\varphi)(t) := \int_0^{4\pi} M_0(t, \tau, z + \hat{z}) \varphi(\tau) d\tau, \quad 0 \leq t \leq 4\pi, \quad \varphi \in C_{4\pi}.$$

Es wird angemerkt, dass $S_0(z)$ der Einfachschichtpotenzialoperator ist, bei dem (abweichend zum Kapitel 5) nicht eine konstante Dichte subtrahiert wird. Neben dem bereits bekannten Raum $C_{4\pi}$ wird unter $C_{4\pi \text{ null}}$ der Teilraum verstanden, bei denen die Funktionen in 0 und 2π verschwinden.

Weiterhin wird unter $z \mapsto \frac{\partial u_l}{\partial \nu}(z)$ ebenfalls ein Operator verstanden, das heißt

$$\left(\frac{\partial u_l}{\partial \nu}(z) \right) (\tau) = \nu((z + \hat{z})(\tau)) \cdot \text{grad } u_l((z + \hat{z})(\tau)), \tau \notin 2\pi\mathbb{Z}.$$

Es gelte

$$(B_0(z)\varphi)(t) := \int_0^{4\pi} L_0(t, \tau, z + \hat{z}) \varphi(\tau) d\tau, \quad 0 \leq t \leq 4\pi, \varphi \in C_{4\pi \text{ null}}, \quad (8.4)$$

$$(B_1(z)\varphi)(t) := \varphi(t) - \sum_{l=0}^1 \varphi(2\pi l) u_l((z + \hat{z})(t)), \quad 0 \leq t \leq 4\pi, \varphi \in C_{4\pi}, \quad (8.5)$$

$$(C(z)\varphi)(t) := \sum_{l=0}^1 \varphi(2\pi l) \left[\left(S_0(z) \frac{\partial u_l}{\partial \nu}(z) \right) (t) - u_l((z + \hat{z})(t)) \right], \quad 0 \leq t \leq 4\pi, \varphi \in C_{4\pi}. \quad (8.6)$$

Die Operatoren wurden gerade so gewählt, dass einerseits

$$A_0(z) = B_0(z) \circ B_1(z) + C(z)$$

gilt und andererseits die Fréchet-Differenzierbarkeit leicht abzulesen ist.

Satz 8.2 Die Abbildungen $U \rightarrow \mathcal{L}(C_{4\pi \text{ null}}, C_{4\pi})$, $z \mapsto B_0(z)$, $U \rightarrow \mathcal{L}(C_{4\pi}, C_{4\pi \text{ null}})$, $z \mapsto B_1(z)$ und $U \rightarrow \mathcal{L}(C_{4\pi}, C_{4\pi})$, $z \mapsto C(z)$ bzw. $z \mapsto A_0(z)$ sind Fréchet-differenzierbar. Die Ableitungen sind gegeben durch

$$(B'_0(z, h)\varphi)(t) = \int_0^{4\pi} \frac{\partial L_0}{\partial z}(t, \tau, z + \hat{z}, h) \varphi(\tau) d\tau,$$

$$(B'_1(z, h)\varphi)(t) = - \sum_{l=0}^1 \varphi(2\pi l) \text{grad } u_l((z + \hat{z})(t)) \cdot h(t),$$

$$(C'(z, h)\varphi)(t) = \sum_{l=0}^1 \varphi(2\pi l) \left[\left(S'_0(z, h) \frac{\partial u_l}{\partial \nu}(z) \right) (t) + \left(S_0(z) \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial u_l}{\partial \nu}(z, h) \right) (t) - \text{grad } u_l((z + \hat{z})(t)) \cdot h(t) \right],$$

$$A'_0(z, h) = B'_0(z, h) \circ B_1(z) + B_0(z) \circ B'_1(z, h) + C'(z, h).$$

Beweis: Für $B_1(z)$ ist die Aussage offensichtlich. Bei den Operatoren $B_0(z)$ und $C(z)$ wird auf den Differenziationssatz 5.2, Lemma 5.8 sowie die Sätze 5.9 und 5.10 verwiesen. (Für $B_0(z)$ ist der Definitionsbereich $C_{4\pi}$ null erforderlich.)

Die Aussage für $A_0(z)$ folgt aus der Produktregel Satz 2.3. ■

Der nachfolgende Satz kann als Analogon zu Satz 5.11 angesehen werden.

Satz 8.3 Seien $z_0 \in U$ und $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet mit $\overline{G} \subset \mathbb{R}^2 \setminus \partial D_{z_0+\hat{z}}$. Für hinreichend kleines $R > 0$ sei z aus $B(z_0, R) \subset U$. $P(z)$ bezeichne den Potenzialoperator

$$P(z) : C_{4\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \longrightarrow C_b(G)$$

in parametrisierter Form

$$(P(z)\psi)(x) = \int_0^{4\pi} f_{K_0}(x, \tau, z + \hat{z}) \psi(\tau) d\tau, \quad x \in G,$$

mit dem auf $G \times [0, 4\pi] \times \{z \mid z - \hat{z} \in B(z_0, R) \subset U\}$ erklärten Kern

$$f_{K_0}(x, \tau, z + \hat{z}) = \frac{1}{2\pi} \frac{(z + \hat{z})'(\tau)^\perp \cdot (x - z(\tau) - \hat{z}(\tau))}{|x - (z + \hat{z})(\tau)|^2}. \quad (8.7)$$

Die Abbildung $z \mapsto P(z)$ ist Fréchet-differenzierbar von $B(z_0, R) \subset U$ nach $\mathcal{L}(C_{4\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), C_b(G))$ mit Ableitung

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow \mathcal{L}(C_{4\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), C_b(G)), \quad h \mapsto P'(z, h), \\ (P'(z, h)\psi)(x) &= \int_0^{4\pi} \frac{\partial}{\partial z} f_{K_0}(x, \tau, z + \hat{z}, h) \psi(\tau) d\tau, \quad x \in G. \end{aligned} \quad (8.8)$$

Beweis: Siehe Bemerkung 5.5 zum Satz 5.2. ■

Desweiteren wird ein Operator benötigt, der ein gegebenes $f \in C_0^{2,\alpha}(\Gamma)$ zu einer auf einer geschlossenen Kurve stetigen Funktion fortsetzt.

Lemma 8.4 Für $z \in U$ wird $R(z) : C_0^{2,\alpha}(\Gamma) \rightarrow C_{4\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ erklärt durch

$$(R(z)f)(t) := \begin{cases} 0 & : 0 \leq t \leq 2\pi, \\ -2f(z(t) + \hat{z}(t)) & : 2\pi \leq t \leq 4\pi. \end{cases}$$

Dann ist $z \mapsto R(z)$ Fréchet-differenzierbar von U nach $\mathcal{L}(C_0^{2,\alpha}(\Gamma), C_{4\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$ mit Ableitung $R'(z, h) = 0 \in C_{4\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Beweis: Für $z \in U$ und $h \in X$ gilt $z(t) = h(t) = 0$, $2\pi \leq t \leq 4\pi$, also $R(z+h) = R(z)$. ■

Als nächstes soll der Operator T_0 in parametrisierter Form betrachtet werden. Dazu wird an die Darstellung (7.19) mit den Kernen $N_0^{(1)}$, $N_0^{(2)}$ gemäß (7.20) - (7.22) erinnert.

Wegen der Identität (siehe (7.18))

$$T_0\varphi = \tilde{T}_0\varphi + \sum_{l=0}^1 \varphi(x^{(l)}) \left[K_0^* \frac{\partial u_l}{\partial \nu} - \frac{\partial u_l}{\partial \nu} \right] \text{ auf } \Gamma_0,$$

ergibt sich für die parametrisierte Form

$$\mathcal{T}_0(z) = \mathcal{T}_{0,1}(z) \circ B_2(z) + \mathcal{T}_{0,2}(z) \quad (8.9)$$

mit den Operatoren

$$(B_2(z)\varphi)(\tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} (B_1(z)\varphi)(\tau) \quad (8.10)$$

$$= \varphi'(\tau) - \sum_{l=0}^1 \varphi(2\pi l) \operatorname{grad} u_l((z + \hat{z})(\tau)) \cdot (z + \hat{z})'(\tau),$$

$$0 \leq \tau \leq 4\pi, \varphi \in C_{4\pi}^{1,\alpha},$$

$$(\mathcal{T}_{0,1}\varphi)(t) = \frac{1}{|(z + \hat{z})'(t)|} \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi}^{4\pi} \cot \frac{\tau - t}{2} \varphi(\tau) d\tau, \quad t_a \leq t \leq t_e, \varphi \in C_{4\pi}^{0,\alpha}, \quad (8.11)$$

$$\begin{aligned} (\mathcal{T}_{0,2}\varphi)(t) &= \frac{1}{|(z + \hat{z})'(t)|} \left[\int_0^{2\pi} N_0^{(1)}(t, \tau, z + \hat{z}) (B_1(z)\varphi)(\tau) d\tau + \right. \\ &\quad \left. + \int_{2\pi}^{4\pi} N_0^{(2)}(t, \tau, z + \hat{z}) (B_1(z)\varphi)(\tau) d\tau \right] \\ &\quad + \sum_{l=0}^1 \varphi(2\pi l) \left[\left(A_0^*(z) \frac{\partial u_l}{\partial \nu}(z) \right) (t) - \left(\frac{\partial u_l}{\partial \nu}(z) \right) (t) \right], \quad (8.12) \\ &\quad t_a \leq t \leq t_e, \varphi \in C_{4\pi}^{1,\alpha}. \end{aligned}$$

Hierbei sind $2\pi < t_a < t_e < 4\pi$ die eindeutig bestimmten Zahlen mit $\hat{z}([t_a, t_e]) = \tilde{\Gamma}$ und $A_0^*(z)$ im Wesentlichen der durch Vertauschen der Kernvariablen bei L_0 aus $A_0(z)$ entstehende Operator. Es sind aber die Definitions- und Wertebereiche von $A_0(z)$ und $A_0^*(z)$ verschieden. Insbesondere gilt für $t_a \leq t \leq t_e$

$$\left(A_0^*(z) \frac{\partial u_l}{\partial \nu}(z) \right) (t) = \int_0^{4\pi} L_0(\tau, t, z + \hat{z}) \frac{|(z + \hat{z})'(\tau)|}{|(z + \hat{z})'(t)|} \frac{(z + \hat{z})'(\tau)^\perp \cdot \operatorname{grad} u_l((z + \hat{z})(\tau))}{|(z + \hat{z})'(\tau)|} d\tau.$$

Satz 8.5 *Die Abbildungen*

$$\begin{aligned} U &\longrightarrow \mathcal{L}(C_{4\pi}^{1,\alpha}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), C_{4\pi}^{0,\alpha}(\mathbb{R}, \mathbb{R})), & z &\mapsto B_2(z), \\ U &\longrightarrow \mathcal{L}(C_{4\pi}^{0,\alpha}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), C([t_a, t_e], \mathbb{R})), & z &\mapsto \mathcal{T}_{0,1}, \\ U &\longrightarrow \mathcal{L}(C_{4\pi}^{1,\alpha}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), C([t_a, t_e], \mathbb{R})), & z &\mapsto \mathcal{T}_{0,2}(z), \mathcal{T}_0(z) \end{aligned}$$

sind Fréchet-differenzierbar. Insbesondere gilt

$$\mathcal{T}'_0(z, h) = \mathcal{T}'_{0,1}(z, h) \circ B_2(z) + \mathcal{T}_{0,1}(z) \circ B'_2(z, h) + \mathcal{T}'_{0,2}(z, h).$$

Beweis: Anwendung der Produktregel. ■

Im nächsten Satz wird für hinreichend glatte Dichten φ der Zusammenhang von $\mathcal{T}'_0(z, h)\varphi$ und $\frac{\partial}{\partial \nu} P'(z, h)\varphi$ geklärt.

Satz 8.6 *Seien $z \in U$ eine zulässige Parametrisierung und $\varphi \in C_{4\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ eine Dichte mit den zusätzlichen Eigenschaften $\varphi|_{[0,2\pi]}, \varphi|_{[2\pi,4\pi]} \in C^{2,\alpha}$ sowie $\varphi \circ z|_{[0,2\pi]}, \varphi \circ z|_{[2\pi,4\pi]} \in S^{2,1+\delta}$, $0 < \delta < 1$. Dann gilt*

$$\left(\frac{\partial}{\partial \nu} P'(z, h)\varphi \right) ((z + \hat{z})(t)) = \frac{1}{2} (\mathcal{T}'_0(z, h)\varphi)(t) \quad \text{für } t_a \leq t \leq t_e.$$

Beweis: Ähnliche Resultate sind für geschlossene $C^{2,\alpha}$ -glatte Ränder (siehe Schormann [51, Satz 4.16]) und Bögen der Klasse C^3 (siehe Mönch [44, Satz 2.5]) bekannt.

Sei $t \in [t_a, t_e]$ fest vorgegeben und $x = \hat{z}(t)$. Weiterhin seien Γ_1, Γ_2 und $\rho \in C^3(\Gamma)$ wie im Beweis von Satz 7.7 gewählt. Insbesondere lässt sich Γ_1 zu einer geschlossenen $C^{2,\alpha}$ -glatten Kurve ∂G_z fortsetzen.

Die Dichte φ wird aufgespalten in

$$\varphi = \rho\varphi + (1 - \rho)\varphi.$$

Auf $\rho\varphi$ wird Satz 4.16 aus Schormann [51] angewendet. Demnach gilt für das Doppelschichtpotenzial v zur Helmholtzgleichung über dem Rand $\partial G_z \in C^{2,\alpha}$ und Dichte $\psi \in C_{2\pi}^{2,\alpha}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ die Sprungbeziehung

$$\begin{aligned} \frac{\partial v'_\pm}{\partial \nu}(z(t)) &= \frac{1}{2} (\mathcal{T}'_k(z, h)\psi)(t) - \text{grad } v_\pm(z(t)) \cdot \frac{\partial \nu}{\partial z}(z(t), h) \\ &\quad - \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 v_\pm(z(t))}{\partial x_i \partial x_j} h_i(t) \nu_j(z(t)), \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \end{aligned} \quad (8.13)$$

In dem hier vorliegenden Fall mit Dichte $\psi = \rho\varphi$ und $\hat{z}(t) \in \tilde{\Gamma}$ verschwinden wegen $z(t) = h(t) = (0, 0)$, $2\pi < t < 4\pi$ die letzten beiden Summanden in (8.13).

Desgleichen folgt aus [44, Satz 2.5], angewendet auf 3 Bogenstücke (und zwar den linken und rechten Rand von $\Gamma \setminus \Gamma_2$ sowie $(z + \hat{z})(t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$) das Resultat für die Dichte $(1 - \rho)\varphi \in C^{1,\alpha,*}$. ■

Da sich die parametrisierte Randintegralgleichung (7.3) in Operatorform durch

$$(I - A_0(z))\varphi = -2f$$

schreiben lässt, sind die Lösung u von (7.1) - (7.2) und deren Normalableitung auf $\tilde{\Gamma}$ gegeben durch die Funktionswerte der Abbildungen

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : \quad U \subset X &\longrightarrow C^2(D) \\ z &\longmapsto \mathcal{P}(z) = (P(z) \circ (I - A_0(z))^{-1} \circ R(z))f, \\ \mathcal{F} : \quad U \subset X &\longrightarrow C(\tilde{\Gamma}) \\ z &\longmapsto \mathcal{F}(z) = \frac{1}{2}(\mathcal{T}_0(z) \circ (I - A_0(z))^{-1} \circ R(z))f. \end{aligned}$$

Nach der Produktregel sind \mathcal{P} und \mathcal{F} in $z \in U$ Fréchet-differenzierbar mit Ableitungen

$$\begin{aligned} \mathcal{F}'(z, h) &= \frac{\partial}{\partial v} \mathcal{P}'(z, h) \quad \text{auf } \tilde{\Gamma}, \\ \mathcal{P}'(z, h) &= v_1 + v_2 + v_3 \quad \text{mit} \\ v_1 &= (P'(z, h)(I - A_0(z))^{-1}R(z))f, \\ v_2 &= P(z)(I - A_0(z))^{-1}A_0'(z, h)(I - A_0(z))^{-1}R(z)f, \\ v_3 &= P(z)(I - A_0(z))^{-1}R'(z, h)f. \end{aligned}$$

Die Funktion v_3 ist identisch Null. Die Funktionen v_1, v_2 sind harmonisch in $D_{z+\hat{z}}$. Es sind die Randwerte von v_j auf $\partial D_{z+\hat{z}}$ zu bestimmen.

Die Randwerte von v_2 sind wegen der Abbildungseigenschaft von $A_0'(z, h)$ stetig und es gilt

$$v_2((z + \hat{z})(t)) = -\frac{1}{2}(A_0'(z, h)(I - A_0(z))^{-1}R(z)f)((z + \hat{z})(t)), \quad 0 \leq t \leq 4\pi.$$

Für die Randwerte von v_1 gilt nach Satz 5.12 außerhalb der Ecken,

$$v_1((z + \hat{z})(t)) = \frac{1}{2}(A_0'(z, h)\psi)(t) - \text{grad}(P(z)\psi)((z + \hat{z})(t)) \cdot h(t), \quad t \notin 2\pi\mathbb{Z},$$

wobei abkürzend $\psi = (I - A_0(z))^{-1}R(z)f$ gesetzt wurde.

Durch Addition der drei Randbedingungen ergibt sich der nachfolgende Satz.

Satz 8.7 *Die Fréchet-Ableitung $\mathcal{F}'(z, h)$ des Randwertoperators ist gegeben durch die Normalableitung $\frac{\partial}{\partial \nu}v$ auf $\tilde{\Gamma}$, wobei v das zum Gebiet $\partial D_{z+\hat{z}}$ gehörige innere Dirichletproblem*

$$\begin{aligned} \Delta v &= 0 \quad \text{in} \quad D_{z+\hat{z}} \\ v((z + \hat{z})(t)) &= -(\text{grad } P(z)(I - A_0(z))^{-1}R(z)f)_-((z + \hat{z})(t)) \cdot h(t), \quad t \notin 2\pi\mathbb{Z}, \end{aligned} \quad (8.14)$$

löst derart, dass $v - v_1$ stetig bis in den Rand ist.

Für die stetigen Randwerte von v_2 ist das innere Dirichletproblem zu lösen und mit dem Vorwärtslöser ist die Normalableitung auf dem Rand zu ermitteln. Hierfür ist das Implementieren von $A'_0(z, h)$ erforderlich. Aus Satz 8.2 wird deutlich, dass $A'_0(z, h)$ eine geeignete Linearkombination von Einfach- und Doppelschichtpotenzialen sowie deren Fréchet-Ableitungen ist.

Für die Berechnung der Normalableitung von v_1 ist der Operator $\mathcal{T}'_0(z, h)$ zu implementieren. Auch hierbei treten neben \mathcal{T}_0 nur stetige oder schwach singuläre Kerne auf.

8.3 Numerische Ergebnisse beim inversen Impedanzrandwertproblem

Seien $f \in C_0^{2,\alpha}(\Gamma)$ und $\frac{\partial u}{\partial \nu}^{meas}$ die zugehörigen Messwerte für die exakten Neumannrandwerte gemäß Definition 7.2. Die Gleichung

$$\mathcal{F}(z) = \frac{\partial u}{\partial \nu}^{meas}$$

ist zu lösen. (Zur Erinnerung: Bei der Abbildung $z \mapsto \mathcal{F}(z)$ wird das direkte Problem bezüglich des Randes $z + \hat{z}$ gerechnet.) Dabei liegen die Messwerte $\frac{\partial u}{\partial \nu}^{meas}$ nur an diskreten Stellen $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_M \in \tilde{\Gamma}$ vor.

Analog zu der im Kapitel 6 beschriebenen Linearisierung, Wahl eines endlichdimensionalen Teilraumes $Q_N = \text{span}\{q_1, \dots, q_N\} \subset U$ mit $N < M$ und einer Regularisierung (ohne Bestrafung höherer Ableitungen) führt dies zu einem Iterationsverfahren

$$z_{p+1} = z_p + h_p, \quad p = 0, 1, 2, \dots,$$

wobei h_p gegeben ist durch

$$h_p = \sum_{j=1}^N a_j^{(p)} q_j \in Q_N,$$

mit den reellen Koeffizienten $a_j^{(p)}$, die ein Gleichungssystem der Form

$$(\alpha_p I + C^{(p)t} C^{(p)}) a^{(p)} = C^{(p)t} g^{(p)}$$

erfüllen.

Die Komponenten der Matrix $C^{(p)} \in \mathbb{R}^{M \times N}$ und die der Vektoren $a^{(p)} \in \mathbb{R}^N$, $g^{(p)} \in \mathbb{R}^M$ sind gegeben durch

$$\begin{aligned} c_{ij}^{(p)} &= \mathcal{F}'(z_p, q_j)(\hat{x}_i), i = 1, \dots, M, j = 1, \dots, N, \\ g_i^{(p)} &= \frac{\partial u^{meas}}{\partial \nu}(\hat{x}_i) - \mathcal{F}(z_p)(\hat{x}_i), i = 1, \dots, M, \\ g^{(p)} &= (g_i^{(p)})_{1 \leq i \leq M}, \\ a^{(p)} &= (a_j^{(p)})_{1 \leq j \leq N}. \end{aligned}$$

Die Basiselemente für den Approximationsraum Q_N , $N \geq 3$, seien durch

$$q_j(t) = -r_j(t) \begin{pmatrix} \cos(t/2) \\ \sin(t/2) \end{pmatrix}, j = 1, \dots, N, 0 \leq t \leq 2\pi$$

mit den Radialanteilen

$$r_1(t) = t(2\pi - t)^2, \quad r_2(t) = t^2(2\pi - t)$$

und

$$r_j(t) = \sin\left(\frac{(j-2)t}{2}\right), j = 3, \dots, N$$

gegeben. Die Startkurven $z_0 \in U$ und \hat{z} sind so zu wählen, dass sie den Anforderungen aus Abschnitt 8.2 genügen. Insbesondere sind $\hat{z}(0) = x^{(0)}$, $\hat{z}(2\pi) = x^{(1)}$ und die Negativität der zweiten Komponente von $\hat{z}(t)$ auf $0 < t < 2\pi$ zu erfüllen.

Für $p \geq 1$ hat die Parametrisierung des unteren Randes die Form

$$z_p(t) = z_0(t) + \sum_{j=1}^N \tilde{a}_j^{(p)} r_j(t) \begin{pmatrix} \cos(t/2) \\ \sin(t/2) \end{pmatrix}, 0 \leq t \leq 2\pi, \tilde{a}_j^{(p)} = -\sum_{l=0}^{p-1} a_j^{(l)}.$$

Differenzieren führt zu

$$z_p'(t) = z_0'(t) + \sum_{j=1}^N \tilde{a}_j^{(p)} r_j'(t) \begin{pmatrix} \cos(t/2) \\ \sin(t/2) \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^N \tilde{a}_j^{(p)} r_j(t) \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\sin(t/2) \\ \cos(t/2) \end{pmatrix}.$$

Aus der letzten Zeile sind die Werte $z_p'(0)$ und $z_p'(2\pi)$ ablesbar. Insbesondere wird deutlich, dass neben $z_0 + \hat{z}$ ausschließlich q_1 den Innenwinkel bei $x^{(0)}$ und q_2 den Innenwinkel bei $x^{(1)}$ kontrollieren.

In den numerischen Beispielen sind die Ecken stets durch $x^{(0)} = (-1, 0)$ und $x^{(1)} = (1, 0)$ gegeben und als Startkurven werden

$$z_0(t) = (0, 0), \quad \hat{z}(t) = - \begin{pmatrix} \cos(t/2) \\ \sin(t/2) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi,$$

gewählt.

Es wird versucht, nachfolgende aus Abschnitt 7.4 bekannte Kurven zu rekonstruieren:

$$z_2^{(\gamma)}(t) = \frac{0.5(t - 2\pi) - 1}{1 + \frac{\pi}{2}} (\cos(t/2), 3 \sin(t/2)) + \left(\frac{\frac{\pi}{2}}{1 + \frac{\pi}{2}}, 0 \right), \quad (8.15)$$

$$z_4^{(\gamma)}(t) = - \left(1 - \frac{1}{3} \sin(t/2) + \frac{1}{6} \sin(1.5t) \right) (\cos(t/2), 4 \sin(t/2)), \quad (8.16)$$

$$z_6^{(\gamma)}(t) = \left(\frac{1}{\pi}(t - \pi), -3 \sin(t/2) \right), \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \quad (8.17)$$

Durch die Wahl von unterschiedlichen Skalierungsfaktoren vor $\cos(t/2)$ und $\sin(t/2)$ ist sichergestellt, dass die zu rekonstruierenden Kurven nicht im Ansatzraum vorkommen.

Beispiel 8.8 Der obere Rand Γ wird gegeben durch die halbe Erdnuss

$$z_4^{(\Gamma)}(t) = - \left(1 + \frac{1}{3} \sin(t/2) - \frac{1}{6} \sin(1.5t) \right) (\cos(t/2), 4 \sin(t/2)), \quad 2\pi \leq t \leq 4\pi.$$

Die Randwerte f auf Γ lauten $f(z(t)) = |z(t)|^2 - 1$, $2\pi \leq t \leq 4\pi$.

Beispiel 8.9 Der obere Rand Γ wird gegeben durch

$$z_5^{(\Gamma)}(t) = -(1 - \sin(t/2)) (\cos(t/2), 2 \sin(t/2)), \quad 2\pi \leq t \leq 4\pi.$$

Die vorgegebenen Randwerte f lauten in Polarkoordinaten $(r, \vartheta) \in \mathbb{R}^+ \times [-\pi, \pi)$ (mit dem Koordinatenursprung in $x^{(0)}$)

$$f(r, \vartheta) = r^{3.5} \sin(3.5\vartheta), \quad (r, \vartheta) \in \Gamma.$$

Die synthetischen Daten wurden mit der Substitution nach Korobov mit Grad $m = 4$ und der Stützstellenzahl $4n = 4 \cdot 32$ erzeugt. Die Messpunkte $\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_M$ stammen aus dem Beobachtungsbereich $z^{(\Gamma)}(t)$, $\frac{5\pi}{2} \leq t \leq \frac{7\pi}{2}$, das heißt

$$\hat{x}_i = z^{(\Gamma)}\left(\frac{5\pi}{2} + \frac{(i-1)\pi}{M-1}\right), \quad i = 1, \dots, M.$$

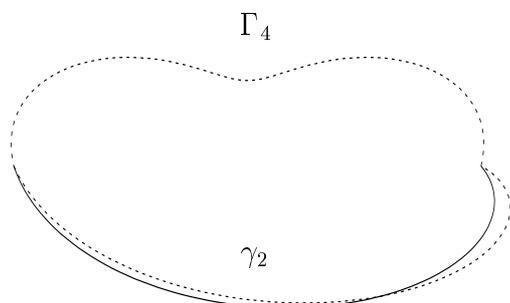
Beim inversen Löser wurden zur Vermeidung von Inverse Crimes mit anderer Stützstellenzahl und einer anderen Substitution (nach Kreß mit $m = 5$) gerechnet. Die jeweiligen Parameter wie Anzahl der Iterationsschritte p , Anzahl der Stützstellen $4n$, die Dimension des Ansatzraums N , Anzahl der Messpunkte M , der Regularisierungsparameter α_p im p -ten Newton-Schritt und das Residuum sind den Legenden zu entnehmen.

Für die Beschreibung eines Iterationsschrittes zum Newtonverfahren (einschließlich des Abbruchkriteriums) wird auf Abschnitt 6.1 verwiesen. Es sind wiederum in jedem Schritt $N + 1$ direkte Probleme zu lösen.

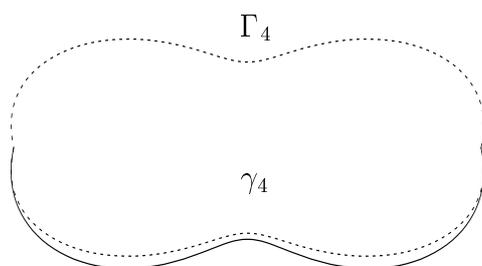
Der rekonstruierte Teil ist mit einer durchgehenden, das Originalgebiet mit einer gestrichelten Linie dargestellt.

Der Algorithmus liefert gute Ergebnisse, obwohl in der Regel die Größen der Innenwinkel nicht rekonstruiert werden.

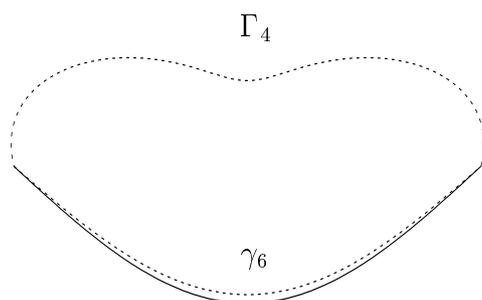
Es ist denkbar, dass sich bei Modifizierung des Strafterms im Tikhonov-Funktional durch Berücksichtigung höherer Ableitungen oder Verwendung von mehr Messreihen (mehrere direkte Probleme) die Rekonstruktionen weiter verbessern lassen.



$$\begin{aligned} p_{end} &= 42, \\ n &= 36, \\ N &= 15, \\ M &= 32, \\ \alpha_p &= 1.0 \cdot 0.8^p, \\ Res &= 3.6 \cdot 10^{-4}, \end{aligned}$$

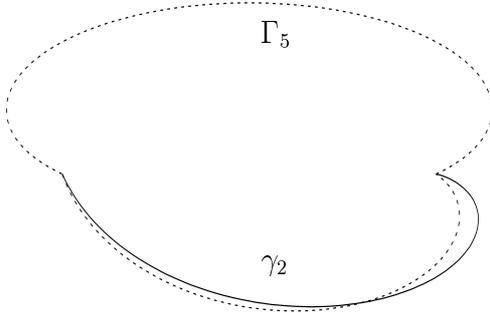


$$\begin{aligned} p_{end} &= 46, \\ n &= 36, \\ N &= 15, \\ M &= 32, \\ \alpha_p &= 1.0 \cdot 0.8^p, \\ Res &= 2.1 \cdot 10^{-6}, \end{aligned}$$

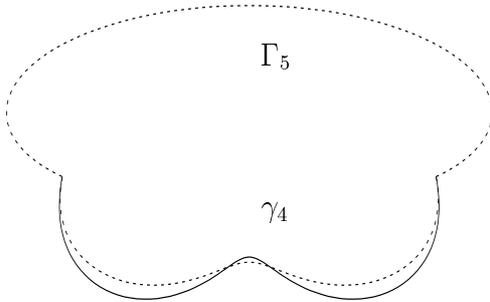


$$\begin{aligned} p_{end} &= 51, \\ n &= 36, \\ N &= 15, \\ M &= 32, \\ \alpha_p &= 1.0 \cdot 0.85^p, \\ Res &= 3.8 \cdot 10^{-6}, \end{aligned}$$

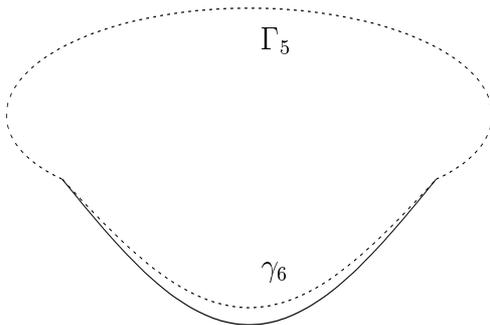
Rekonstruktionen aus Beispiel 8.8



$$\begin{aligned} p_{end} &= 51, \\ n &= 48, \\ N &= 18, \\ M &= 32, \\ \alpha_p &= 1.0 \cdot 0.75^p, \\ Res &= 4.1 \cdot 10^{-3}, \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} p_{end} &= 46, \\ n &= 48, \\ N &= 18, \\ M &= 32, \\ \alpha_p &= 1.0 \cdot 0.8^p, \\ Res &= 1.1 \cdot 10^{-5}, \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} p_{end} &= 61, \\ n &= 48, \\ N &= 18, \\ M &= 32, \\ \alpha_p &= 1.0 \cdot 0.85^p, \\ Res &= 7.2 \cdot 10^{-5}, \end{aligned}$$

Rekonstruktionen aus Beispiel 8.9

Literaturverzeichnis

- [1] **R.Adams**, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, San Francisco, London, 1975.
- [2] **F.Boeckh**, *Die numerische Behandlung eines Randwertproblems mit einer Integralgleichungsmethode bei einem unendlich ausgedehnten Rand mit Ecken*, Diplomarbeit, Institut für Numerische und Angewandte Mathematik Universität Göttingen, Göttingen, 1988.
- [3] **A.L.Bukhgeim, J.Cheng and M.Yamamoto**, *Stability for an inverse boundary problem of determining a part of boundary*, UTMS 98-32, University of Tokyo, Graduate school of mathematical sciences, Komaba, Tokyo, 1998.
- [4] **A.L.Bukhgeim, J.Cheng and M.Yamamoto**, *Conditional stability in an inverse problem of determining non-smooth boundary*, UTMS 98-36, University of Tokyo, Graduate school of mathematical sciences, Komaba, Tokyo, 1998.
- [5] **R.Chapko and R.Kress**, *On a quadrature method for a logarithmic integral equation of the first kind*, Contributions in Numerical Mathematics, World Scientific Series in Applicable Analysis **2**, World Scientific, Singapore, 1993.
- [6] **D.Colton and R.Kress**, *Integral Equation Methods in Scattering Theory*, Wiley-Interscience Publication, New York, 1983.
- [7] **D.Colton and R.Kress**, *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1992.
- [8] **M.Costabel, M.Dauge, S.Nicaise**, *Boundary value problems and integral equations in nonsmooth domains*, Lecture notes in pure and applied mathematics **167**, Marcel Dekker inc., New York, Basel, Hong Kong, 1995.
- [9] **R.Courant and D.Hilbert**, *Methods of Mathematical Physics, Volume 1*, Interscience Publishers, New York, 1966.

-
- [10] **M.Dauge**, *Elliptic Boundary Value Problems on Corner Domains*, Lecture Notes in Mathematics **1341**, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1988.
- [11] **P.Deuffhard, H.P.Engl and O.Scherzer**, *A convergence analysis of iterative methods for the solution of nonlinear ill-posed problems under affinity invariant conditions*, Inverse Problems **14**, 1081-1106, (1998).
- [12] **J.Elschner and E.P.Stephan**, *A discrete collocation method for Symm's integral equation on curves with corners*, Journal of Computational and Applied Mathematics **75**, 131-146, (1996).
- [13] **J.Elschner, Y.Jeon, I.H.Sloan and E.P.Stephan**, *Discrete quadrature methods for logarithmic-kernel integral equations on a piecewise smooth boundary*, Advances in Computational Mathematics **7**, 547-571, (1997).
- [14] **T.Gerlach**, *Die Streuung zeitharmonischer elektromagnetischer Wellen an chiralen Medien*, Dissertation, Institut für Numerische und Angewandte Mathematik Universität Göttingen, Göttingen, 1999.
- [15] **P.Grisvard**, *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*, Pitman Advanced Publishing Program, Boston-London-Melbourne, 1985.
- [16] **P.Grisvard**, *Singularities in Boundary Value Problems*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1992.
- [17] **C.W.Groetsch**, *Inverse Problems in the Mathematical Sciences*, Vieweg, Braunschweig, 1993.
- [18] **W.Hackbusch**, *Integralgleichungen: Theorie und Numerik*, Teubner, Stuttgart, 1989.
- [19] **R.Hartke**, *Direktes und Inverses Dirichletsches Randwertproblem zur Helmholtzgleichung in einer lokal gestörten Halbebene*, Diplomarbeit, Institut für Numerische und Angewandte Mathematik Universität Göttingen, Göttingen, 1993.
- [20] **E.Heinz**, *Vorlesung zu Differential- und Integralrechnung III*, Wintersemester 1986/87 Mathematisches Institut Universität Göttingen, Göttingen, 1987.
- [21] **T.Hohage**, *Newton-Verfahren beim inversen Neumann-Problem zur Helmholtzgleichung*, Diplomarbeit, Institut für Numerische und Angewandte Mathematik Universität Göttingen, Göttingen, 1996.

-
- [22] **T.Hohage and C.Schormann**, *A Newton-type method for a transmission problem in inverse scattering*, Inverse Problems **14**, 1207-1227, (1998).
- [23] **O.D.Kellogg**, *Foundations of Potential Theory*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1929.
- [24] **J.K.Knowles and T.A.Pucik**, *Uniqueness for plane crack problems in linear elastostatics*, Journal of Elasticity **3**, 155-160, (1973).
- [25] **H.König**, *Jahresbericht der DMV* **66**, Teubner, Stuttgart, 1964, 119-138.
- [26] **R.Kress**, *Über die numerische Berechnung konjugierter Funktionen*, Computing **10**, 177-187, (1972).
- [27] **R.Kress**, *A boundary integral equation method for a Neumann boundary problem for force - free fields*, Journal of Engineering Mathematics **15**, 29-48, (1981).
- [28] **R.Kress**, *A Nyström method for boundary integral equations in domains with corners*, Numerische Mathematik **58**, 145-161, (1990).
- [29] **R.Kress and I.H.Sloan**, *On the numerical solution of a logarithmic integral equation of the first kind for the Helmholtz equation*, Numerische Mathematik **66**, 199-214, (1993).
- [30] **R.Kress**, *A Newton method in inverse obstacle scattering*, In: *Inverse Problems in Engineering Mechanics*, (Bui et al, eds) 425-432, Balkema, Rotterdam, 1994.
- [31] **R.Kress**, *Inverse scattering from an open arc*, Mathematical Methods in the Applied Science **18**, 267-293, (1995).
- [32] **R.Kress**, *Fréchet differentiability of the far field operator for scattering from a crack*, Journal on Inverse and Ill-Posed Problems **3**, 305-313, (1995).
- [33] **R.Kress**, *On the numerical solution of a hypersingular integral equation in scattering theory*, Journal of Computational and Applied Mathematics **61**, 345-360, (1995).
- [34] **R.Kress, I.H.Sloan and F.Stenger**, *A sinc quadrature method for the double-layer integral equation in planar domains with corners*, Journal of Integral Equations and Applications **10**, 291-317, (1998).
- [35] **R.Kress**, *Linear Integral Equations*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Second Edition, 1999.

-
- [36] **R.Kress**, *On the low wave number behavior of two-dimensional scattering problems for an open arc*, Journal for Analysis and its Applications **18**, 297-305, (1999).
- [37] **R.Kress and T.Tran** *Inverse scattering for a locally perturbed half-plane*, Inverse Problems **16**, 1541-1559, (2000).
- [38] **R.Kussmaul**, *Ein numerisches Verfahren zur Lösung des Neumannschen Außenraumproblems für die Helmholtzsche Schwingungsgleichung*, Computing **4**, 246-273, (1969).
- [39] **P.Kümpel**, *Das Nyström Verfahren für das Dirichlet Problem zur Helmholtzgleichung in zweidimensionalen Gebieten mit Ecken*, Diplomarbeit, Institut für Numerische und Angewandte Mathematik Universität Göttingen, Göttingen, 1997.
- [40] **R.Leis**, *Zur Dirichletschen Randwertaufgabe des Außenraums der Schwingungsgleichung*, Mathematische Zeitschrift **90**, 205-211, (1965).
- [41] **P.A.Lewis and G.R.Wickham**, *The diffraction of SH waves by an arbitrary shaped crack in two dimensions*, Proceedings of the Royal Society of London **340**, 503-529, (1992).
- [42] **E.Martensen**, *Über eine Methode zum räumlichen Neumannschen Problem mit einer Anwendung für torusartige Berandungen.*, Acta Math. **109**, 75-135, (1963).
- [43] **L.Mönch** *Ein Quadraturformelverfahren für eine hypersinguläre Integralgleichung bei der Helmholtzgleichung im \mathbb{R}^2* , Diplomarbeit, Institut für Numerische und Angewandte Mathematik Universität Göttingen, Göttingen, 1994.
- [44] **L.Mönch** *Die numerische Lösung des inversen akustischen Streuproblems am schallharten Kurvenbogen*, Dissertation, Institut für Numerische und Angewandte Mathematik Universität Göttingen, Göttingen, 1994.
- [45] **R.Potthast**, *Fréchet differentiability of boundary integral operators in inverse acoustic scattering*, Inverse Problems **10**, 431-447, (1994).
- [46] **R.Potthast**, *Fréchet Differenzierbarkeit von Randintegraloperatoren und Randwertproblemen zur Helmholtzgleichung und den zeitharmonischen Maxwellgleichungen*, Dissertation, Institut für Numerische und Angewandte Mathematik Universität Göttingen, Göttingen, 1994.
- [47] **R.Potthast**, *Domain Derivatives in Electromagnetic Scattering*, Mathematical Methods in the Applied Sciences **19**, 1157-1175, (1996).

-
- [48] **A.G.Ramm**, *New method for proving uniqueness theorems for obstacle inverse scattering problems*, Applied Mathematics Letters **6**, 19-21, (1993).
- [49] **J.Rauch**, *Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [50] **C.Ruland**, *Ein Verfahren zur Lösung von $(\Delta + k^2)u = 0$ in Außengebieten mit Ecken*, Applicable Analysis **7**, 69-79, (1978).
- [51] **C.Schormann**, *Newton-Verfahren für ein inverses Transmissionsproblem bei elektromagnetischen Wellen*, Diplomarbeit, Institut für Numerische und Angewandte Mathematik Universität Göttingen, Göttingen, 1996.
- [52] **C.Schormann**, *Analytische und numerische Untersuchungen bei inversen Transmissionsproblemen zur zeitharmonischen Wellengleichung*, Dissertation, Institut für Numerische und Angewandte Mathematik Universität Göttingen, Göttingen, 2000.
- [53] **A.Sidi**, *A new variable transformation for numerical integration*, In: Numerical Integration IV, International Series of Numerical Mathematics, Birkhäuser Verlag Basel **112**, (1993), 359-373.
- [54] **I.H.Sloan**, *Analysis of general quadrature methods for integral equations of the second kind*, Numerische Mathematik **38**, 263-278, (1981).
- [55] **A.Vogt**, *Substitutionsmethoden beim Nyström - Verfahren für Integralgleichungen zweiter Art*, Diplomarbeit, Institut für Numerische und Angewandte Mathematik Universität Göttingen, Göttingen, 1997.
- [56] **G.R.Wickham**, *The diffraction of stress waves by a plane finite crack in two dimensions: uniqueness and existence*, Proceedings of the Royal Society of London **378**, 241-261, (1981).
- [57] **A.Willers**, *Integralgleichungsmethoden bei der Reflexion an lokal gestörten Ebenen*, Dissertation, Institut für Numerische und Angewandte Mathematik Universität Göttingen, Göttingen, 1985.

Lebenslauf

persönliche Daten

Name	Andreas Vogt
Geburtsdatum	28.06.1972
Geburtsort	Leinefelde
Staatsangehörigkeit	deutsch
Eltern	Erich Vogt, Bäckermeister Ingeburg Vogt, geb. Liepert, Bürokauffrau
E-Mail	avogt@math.uni-goettingen.de

Ausbildung

09.1979 - 08.1989	Polytechnische Oberschule Worbis
09.1989 - 06.1991	Spezialklassen für Mathematik und Physik an der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
Juni 1991	Abschluss mit dem Abitur
WS 91/92 - SS 1997	Studium der Mathematik mit Nebenfach Physik an der Georg-August-Universität in Göttingen
Mai 1997	Abschluss mit dem Diplom
09.1997 - 06.1998	Wehrdienst
seit WS 98/99	Promotionsstudium in Mathematik

Tätigkeiten

WS 93/94, SS 94, SS 95, WS 95/96	wissenschaftliche Hilfskraft am Institut für Numerische und Angewandte Mathematik der Universität Göttingen
06.1997 - 08.1997 und seit 07.1998	wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Numerische und Angewandte Mathematik der Universität Göttingen