

Sigmoidale Transformationen und die Trapezregel

Hausarbeit im Rahmen der Ersten Staatsprüfung
für das Lehramt an Gymnasien

vorgelegt von **Karen Münstedt**

Prüfer: **Prof. Dr. Rainer Kreß**

Göttingen, den 8. November 2001

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Sigmoidale Transformationen	3
2.1	Definition und Eigenschaften	3
2.2	Erzeugung	4
2.3	Anwendung für die numerische Integration	5
2.4	Beispiele „algebraischer“ sigmoidaler Transformationen	6
2.5	Beispiele „integraler“ sigmoidaler Transformationen	9
3	Die Fehlerordnung für die Trapezregel	17
3.1	Die Fehlerordnung bei regulären Funktionen	22
3.2	Die Fehlerordnung bei Funktionen mit Singularitäten	23
3.3	Vergleich mit Elliott [2]	26
4	Einige numerische Ergebnisse	28
	Symbolverzeichnis	36
	Literaturverzeichnis	37

Kapitel 1

Einleitung

Eine wichtige Quadraturformel zur näherungsweise Berechnung des Integrals $I(f) := \int_0^1 f(x)dx$ ist die Trapezregel $Q_n(f) := \frac{1}{n} \sum_{j=0}^n {}'' f(j/n)$. Hierbei bezeichnet \sum'' eine Summe, deren erster und letzter Summand halbiert sind. Wie man zum Beispiel mit Hilfe der Euler-Maclaurinschen Summenformel oder unter Verwendung von Fourierreihen erhält, ist für periodische Funktionen f mit der Periode 1 der Quadraturfehler $E_n(f) := I(f) - Q_n(f)$ bei der Trapezregel von der Ordnung $O(1/n^m)$ mit $m \in \mathbb{N}$, falls der Integrand f entsprechend oft stetig differenzierbar ist.

Deshalb kann es von Interesse sein, bei nicht periodischen Funktionen eine Substitution so durchzuführen, dass der neue Integrand bis zu einem gewissen Grad periodisch und der Quadraturfehler damit von der Ordnung $O(1/n^m)$ ist. Mit solchen Substitutionen und den daraus resultierenden Fehlerordnungen bei der Trapezregel beschäftigt sich die vorliegende Arbeit.

In Kapitel 2 werden zunächst die so genannten sigmoidalen Transformationen eingeführt. Diese werden nach Elliott [1] definiert und einige der aus der Definition folgenden Eigenschaften werden dargestellt. Außerdem wird eine Methode zur Erzeugung von sigmoidalen Transformationen angegeben und es wird auf die Anwendung dieser Transformationen bei der numerischen Integration eingegangen. In den letzten beiden Abschnitten des Kapitels werden einige Beispiele sigmoidaler Transformationen vorgestellt.

Kapitel 3 beschäftigt sich mit der Fehlerordnung bei der Trapezregel mit sigmoidalen Transformationen. Mit Hilfe von Fourierreihen wird zunächst allgemein eine Fehlerabschätzung für periodische Funktionen hergeleitet. Anschließend wird untersucht, bis zu welchem Grad nicht periodische Funktionen durch Substitution mit sigmoidalen Transformationen periodisch werden, um hierauf die vorher ermittelte Fehlerabschätzung anwenden zu können. Dies geschieht sowohl für reguläre Funktionen als auch für Funktionen mit Endpunktsingularitäten. Außerdem werden die gewonnenen Fehlerordnungen mit den Ergebnissen von Elliott [2], der die Abschätzungen mit Hilfe der Euler-Maclaurinschen Summenformel durchführt, verglichen.

In Kapitel 4 werden abschließend die in Kapitel 3 ermittelten Fehlerordnungen anhand einiger numerischer Beispiele illustriert.

Für die Themenstellung bedanke ich mich bei Herrn Prof. Dr. Rainer Kreß. Ihm und Herrn Andreas Vogt danke ich außerdem für die gute Betreuung bei der Anfertigung dieser Arbeit.

Kapitel 2

Sigmoidale Transformationen

2.1 Definition und Eigenschaften

Zunächst soll eine Definition von sigmoidalen Transformationen in einem gegenüber Elliott [1] leicht abgeschwächten Sinn gegeben werden.

Definition 2.1 (a) Eine reellwertige Funktion γ heißt *sigmoidale Transformation*, wenn sie die folgenden Bedingungen erfüllt:

- (i) $\gamma \in \mathcal{C}^\infty[0, 1]$ mit $\gamma(0) = 0$;
- (ii) $\gamma(x) + \gamma(1 - x) = 1$, $0 \leq x \leq 1$;
- (iii) γ ist streng monoton wachsend auf $[0, 1]$;
- (iv) $\gamma'(0) = 0$.

(b) Gilt zusätzlich zu (a) entweder

(i) $\gamma^{(j)}(x) = O(x^{r-j})$ bei $x = 0$ für alle $j \in N_0$, so heißt γ *sigmoidale Transformation r -ter Ordnung*;

oder

(ii) $\gamma^{(j)}(0) = 0$ für alle $j \in N_0$, so heißt γ *sigmoidale Transformation unendlicher Ordnung*.

Elliott verlangt zusätzlich zu (a)(iv), dass γ' streng monoton wachsend auf $[0, 1/2]$ ist. Für die vorliegende Arbeit ist diese Eigenschaft jedoch nicht von Belang.

Aus der Definition 2.1 ergeben sich für γ unter anderem folgende Eigenschaften:

1. Aus (a)(i) und (a)(ii) folgt $\gamma(1) = 1$. Mit (a)(iii) folgt, dass γ eine Eins-zu-eins-Abbildung des kompakten Intervalls $[0, 1]$ auf sich selbst ist.

2. Aus (a)(i), (a)(ii) und (a)(iv) folgt $\gamma'(x) = \gamma'(1-x)$ und damit auch $\gamma'(1) = 0$. Die Funktion γ' ist damit symmetrisch zur Geraden $x = 1/2$. Aus (a)(i) und (a)(ii) ergibt sich außerdem, dass $\gamma''(x) + \gamma''(1-x) = 0$ auf $[0, 1]$ gilt und damit insbesondere $\gamma''(1/2) = 0$ ist.

Erfüllt γ die Definition 2.1 und ist γ' außerdem streng monoton wachsend auf $[0, 1/2]$, so besitzt der Graph von γ die Gestalt eines gestreckten S. Elliott [1] nennt derartige Transformationen deshalb *sigmoidale Transformationen*. Bekannt sind sie auch unter dem Namen *periodisierende Transformationen*.

3. Aus (a)(ii) und (b)(i) folgt, dass für sigmoidale Transformationen r -ter Ordnung

$$\gamma^{(j)}(x) = \delta_{0,j} + O\left((1-x)^{r-j}\right)$$

gilt bei $x = 1$ und für alle $j \in N_0$. Wieder aus (a)(ii) und (b)(ii) folgt, dass für sigmoidale Transformationen von unendlicher Ordnung $\gamma(1) = 1$ und

$$\gamma^{(j)}(1) = 0$$

für alle $j \in N$ gilt.

2.2 Erzeugung

Elliott [1] beschreibt die folgende Methode zur Erzeugung von sigmoidalen Transformationen.

Satz 2.2 Sei f eine reellwertige Funktion auf $[0, 1]$ mit folgenden Eigenschaften:

- (i) $f \in C^\infty[0, 1]$ mit $f(0) = f'(0) = 0$ und $f(x) > 0$ für $0 < x \leq 1$;
- (ii) $\frac{f'(x)}{f(x)} + \frac{f'(1-x)}{f(1-x)} > 0$ für $0 < x < 1$.

Dann ist die auf $[0, 1]$ durch

$$\gamma(x) = \frac{f(x)}{f(x) + f(1-x)} \tag{2.1}$$

definierte Funktion γ sigmoidal.

Beweis: Nach (i) gilt $f(x) > 0$ für $0 < x \leq 1$ und damit auch $f(x) + f(1-x) > 0$ für $0 \leq x \leq 1$. Also ist γ auf $[0, 1]$ definiert. Nach (i) gilt außerdem $\gamma \in C^\infty[0, 1]$. Nach (2.1) ist $\gamma(x) + \gamma(1-x) = 1$ für alle $x \in [0, 1]$ und damit insbesondere $\gamma(0) = 0$ und $\gamma(1) = 1$, da $f(0) = 0$. Mit den in (i) an f gestellten Bedingungen sind also die Bedingungen (a)(i) und (a)(ii) der Definition 2.1 erfüllt.

Aus (2.1) ergibt sich

$$\gamma'(x) = \frac{f'(x)f(1-x) + f'(1-x)f(x)}{(f(x) + f(1-x))^2}. \quad (2.2)$$

Nach (i) und (ii) ist der Zähler auf $(0, 1)$ positiv, und da dies auch für den Nenner der Fall ist, folgt $\gamma' > 0$ auf $(0, 1)$. Also ist γ streng monoton wachsend auf $[0, 1]$, so dass die Bedingung (a)(iii) der Definition 2.1 erfüllt ist.

Nach (2.2) gilt außerdem $\gamma'(0) = 0$ und damit ist auch (a)(iv) der Definition 2.1 gezeigt.

Die durch die Gleichung (2.1) definierte Funktion γ ist demnach sigmoidal. \square

Korollar 2.3 *f* erfülle die Bedingungen (i) und (ii) des Satzes 2.2 und γ sei durch die Gleichung (2.1) definiert.

(a) *Gilt $f^{(j)}(x) = O(x^{r-j})$ bei $x = 0$ für alle $j \in N_0$, so ist γ eine sigmoidale Transformation r -ter Ordnung.*

(b) *Verschwinden f und alle Ableitungen von f bei $x = 0$, so ist γ eine sigmoidale Transformation unendlicher Ordnung.*

Beweis: Die Beweise von (a) und (b) folgen sofort aus der durch die Gleichung (2.1) gegebenen Definition von γ . \square

2.3 Anwendung für die numerische Integration

Ziel bei der numerischen Integration ist es, Integrale der Form $\int_0^1 f(x)dx$ durch so genannte Quadraturformeln der Gestalt $\sum_{j=0}^n a_j f(x_j)$ näherungsweise zu berechnen. Die Koeffizienten a_j bezeichnet man dabei als Gewichte, die Stellen x_j als Stützstellen.

Die Approximation des Integrals

$$I(f) := \int_0^1 f(x)dx \quad (2.3)$$

soll in dieser Arbeit erfolgen durch die Trapezregel

$$Q_n(f) := \frac{1}{n} \sum_{j=0}^n f(j/n) \quad (2.4)$$

mit den Gewichten $a_j = 1/n$ und den äquidistanten Stützstellen $x_j = j/n$. \sum'' ist hierbei eine Summe, deren erster und letzter Summand halbiert werden. Von Interesse ist nun die Bestimmung des durch

$$E_n(f) := I(f) - Q_n(f). \quad (2.5)$$

definierten Quadraturfehlers. An dieser Stelle finden die sigmoidalen Transformationen ihre Anwendung: Sei γ_r eine sigmoidale Transformation r -ter Ordnung. Substituiert man $x = \gamma_r(t)$, so ergibt sich für (2.3)

$$I(f) := \int_0^1 f(\gamma_r(t))\gamma_r'(t)dt. \quad (2.6)$$

Für die Trapezregel, nun bezeichnet mit $Q_n^{[r]}(f)$, erhält man

$$Q_n^{[r]}(f) := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \gamma_r'(j/n) f(\gamma_r(j/n)) \quad (2.7)$$

mit den Gewichten $a_j = \frac{1}{n}\gamma_r'(j/n)$ und den Stützstellen $x_j = \gamma_r(j/n)$. Der Quadraturfehler, jetzt $E_n^{[r]}(f)$ genannt, ist

$$E_n^{[r]}(f) := I(f) - Q_n^{[r]}(f). \quad (2.8)$$

Diesen Fehler abzuschätzen, wird die Aufgabe der Kapitel 3 und 4 dieser Arbeit sein.

Von besonderem Interesse im Zusammenhang mit der numerischen Integration ist das Verhalten von $\gamma_r'(1/2)$: Ist $\gamma_r'(1/2)$ groß, so konzentrieren sich die Stützstellen $\gamma_r(j/n)$ an den Intervallenden. Ist $\gamma_r'(1/2)$ hingegen etwa gleich 2, so bleibt ungefähr die Hälfte der Stützstellen auf $[0, 1]$ äquidistant verteilt, die andere Hälfte drängt sich gegen die Endpunkte.

In den folgenden beiden Abschnitten wird deshalb jeweils eine Transformation vorgestellt, für die $\gamma_r'(1/2)$ nicht mit r anwächst.

2.4 Beispiele „algebraischer“ sigmoidaler Transformationen

Es werden nun einige Beispiele sigmoidaler Transformationen betrachtet, die Elliott [1] „algebraisch“ nennt.

Transformation 2.4 Die algebraisch wohl einfachste sigmoide Transformation erhält man dadurch, dass man

$$f(x) = x^r, \quad N \ni r > 1, \quad (2.9)$$

wählt in Satz 2.2. Zu finden ist diese Transformation zum Beispiel bei Elliott und Pröbldorf [3].

Es ist sofort ersichtlich, dass f die Bedingungen (i) und (ii) von Satz 2.2 erfüllt, so dass die durch

$$\gamma_r(x) := \frac{x^r}{x^r + (1-x)^r} \quad (2.10)$$

definierte Funktion γ_r eine sigmoide Transformation ist. Diese besitzt nach Korollar 2.3 offensichtlich die Ordnung r . Die Ableitung von γ_r hat nach Gleichung (2.10) bei $x = 1/2$ den Wert

$$l := \gamma_r'(1/2) = r,$$

wächst also mit r an.

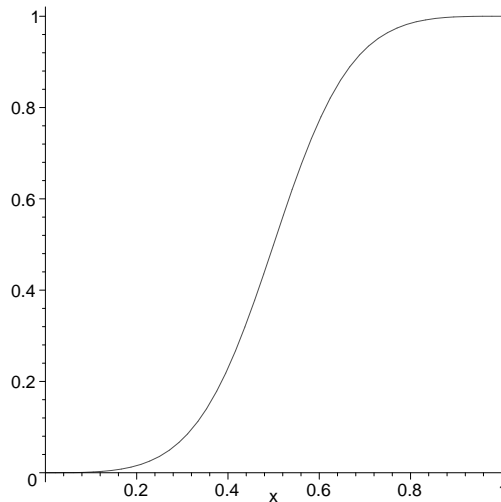


Abbildung 2.1: Der Graph von Transformation 2.4 für $r = 3$

Transformation 2.5 Elliott [1] betrachtet eine Variante von Transformation 2.4, die die Eigenschaft besitzt, dass $l = \gamma_r'(1/2)$ unabhängig von r ist. Diese Transformation wird erzeugt durch die Funktion f mit

$$f(x) = [x - c(x^2 - x)]^r, \quad N \ni r > 1. \quad (2.11)$$

Hierbei ist c eine noch zu bestimmende Konstante. Da

$$f(x) = (1 + c)^r x^r (1 - (c/(1 + c))x)^r,$$

ist die Bedingung (i) von Satz 2.2 offensichtlich erfüllt für $c > -1$. Die Bedingung (ii) von Satz 2.2 verlangt, dass

$$1 + \frac{c}{2} + 2c \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 > 0$$

auf $(0, 1)$ gilt, und auch dies ist erfüllt für $c > -1$. Mit γ_r gemäß Satz 2.2 und $l := \gamma_r'(1/2)$ erhält man

$$c = 2(r/l - 1). \quad (2.12)$$

$c > -1$ impliziert daher, dass $r > l/2$, und da schon $N \ni r > 1$ vorausgesetzt worden ist, soll von nun an

$$N \ni r > \max(1, l/2) \quad (2.13)$$

gelten.

Wenn l und r (2.13) erfüllen, ist mit dem in Gleichung (2.12) gegebenen c und der in Gleichung (2.11) definierten Funktion f die durch Gleichung (2.1) definierte Funktion γ_r also eine sigmoidale Transformation r -ter Ordnung.

Mit $l = 2$ und $N \ni r > 1$ liefert $c = r - 2$ insbesondere eine sigmoidale Transformation γ_r r -ter Ordnung mit $\gamma_r'(1/2) = 2$.

Elliott [1] untersucht nun, was mit dieser Transformation für $r \rightarrow \infty$ geschieht:

Transformation 2.6 Ausgehend von Transformation 2.5 ergibt sich für γ_r mit Gleichung (2.1) und durch Ausnutzung der Gleichungen (2.11) und (2.12)

$$\gamma_r(x) = 1/(1 + F_r(x)),$$

wobei

$$\begin{aligned} F_r &= f(1 - x)/f(x) \\ &= \frac{\left(1 + \frac{l}{r} \left(\frac{1}{2x} - 1\right)\right)^r}{\left(1 - \frac{l}{r} \left(1 - \frac{1}{2(1-x)}\right)\right)^r}. \end{aligned}$$

Für $r \rightarrow \infty$ erhält man eine Grenzfunktion F_∞ , für welche gilt

$$F_\infty(x) = \exp \left[\frac{l}{2} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} \right) \right].$$

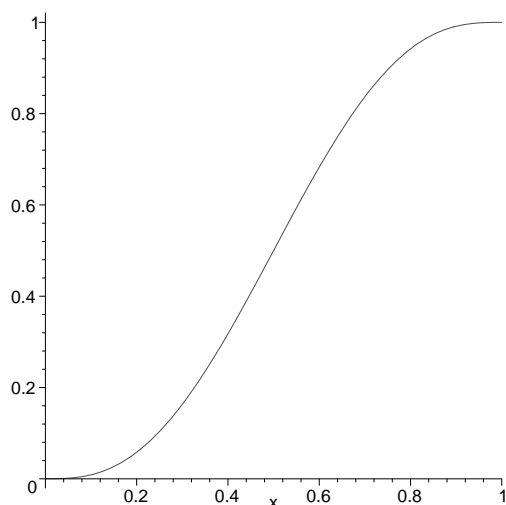


Abbildung 2.2: Der Graph von Transformation 2.5 für $c = 2$, $r = 4$

Dies führt zu einer sigmoidalen Transformation, die hier nach Sag und Szekeres [7] mit γ_{∞}^{SS} bezeichnet und durch

$$\gamma_{\infty}^{SS}(x) = \frac{1}{1 + F_{\infty}(x)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \tanh \left[\frac{l}{4} \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} \right) \right]$$

definiert wird. Nebenbei bemerkt kann γ_{∞}^{SS} dadurch erzeugt werden, dass man entweder

$$f(x) = \exp \left(-\frac{l}{2x} \right) \text{ oder } f(x) = \exp \left[\frac{l}{4} \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} \right) \right]$$

wählt. Verwendet man die erste Darstellung, so ist schnell nachgewiesen, dass f die Bedingungen (i) und (ii) von Satz 2.2 für alle $l > 0$ erfüllt.

Von solchen sigmoidalen Transformationen unendlicher Ordnung gibt es nur sehr wenige und es sollen in dieser Arbeit auch keine weiteren vorgestellt werden.

2.5 Beispiele „integraler“ sigmoidaler Transformationen

Die nun folgenden Transformationen bezeichnet Elliott [1] als „integral“, da die ihnen zugrunde liegende Funktion f als Integral über eine noch zu bestimmende Funktion h gegeben ist. Genauer gesagt gilt

$$f(x) = \int_0^x h(\xi) d\xi. \tag{2.14}$$

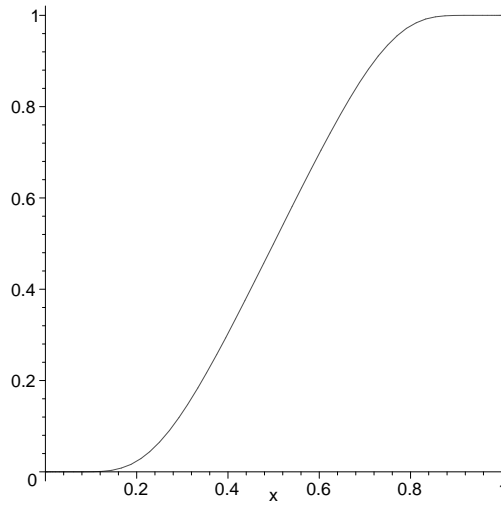


Abbildung 2.3: Der Graph von Transformation 2.6 für $l = 2$

Erfüllt die Funktion h die Bedingung

$$h(\xi) = h(1 - \xi), \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad (2.15)$$

so erhält man für die durch Gleichung (2.1) definierte Funktion γ , dass

$$\gamma(x) = (1/Q) \int_0^x h(\xi) d\xi, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2.16)$$

wobei

$$Q := \int_0^1 h(\xi) d\xi. \quad (2.17)$$

Anders ausgedrückt liefern die Gleichungen (2.14) und (2.15), dass

$$f(x) + f(1 - x) = Q$$

konstant ist. Benötigt werden nun Bedingungen für die Funktion h , mit welchen die Funktion γ sigmoidal ist.

Satz 2.7 *Sei h eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:*

- (i) $h \in \mathcal{C}^\infty[0, 1]$ mit $h(0) = 0$ und $h(x) > 0$ für $0 < x \leq 1$;
- (ii) $h(x) = h(1 - x)$, $0 \leq x \leq 1$;
- (iii) $h^{(j)}(x) = O(x^{r-1-j})$ bei $x = 0$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$.

Dann ist die durch die Gleichungen (2.16) und (2.17) definierte Funktion γ eine sigmoidale Transformation r -ter Ordnung.

Beweis: Überprüft wird dies auf die Forderungen von Definition 2.1. Mit (i) und (ii) gilt

$$f(x) + f(1-x) = \int_0^1 h(\xi) d\xi = Q > 0.$$

Also ist γ auf $[0, 1]$ definiert mit $\gamma(0) = 0$ und $\gamma(1) = 1$. Nach (i) gilt außerdem $\gamma \in \mathcal{C}^\infty[0, 1]$. Wieder mit (ii) gilt $\gamma(x) + \gamma(1-x) = 1$ für $0 \leq x \leq 1$. Für die Ableitung von γ erhält man $\gamma'(x) = h(x)/Q$, was positiv auf $(0, 1)$ ist, so dass γ monoton wachsend auf $[0, 1]$ ist. Außerdem gilt $\gamma'(0) = 0$. Also sind die Bedingungen (a)(i) bis (a)(iv) von Definition 2.1 erfüllt. Schließlich gilt als Folge aus (iii) dieses Satzes und mit der Definition von γ , dass $\gamma^{(j)}(x) = O(x^{r-j})$ bei $x = 0$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$, so dass γ eine sigmoidale Transformation r -ter Ordnung ist. \square

Es werden nun einige Beispiele betrachtet.

Transformation 2.8 Korobev (zitiert in Elliott [1]) wählt

$$h(x) = (x(1-x))^{r-1} \text{ mit } N \ni r > 1. \quad (2.18)$$

Es ist schnell nachgewiesen, dass diese Funktion h die Bedingungen (i) bis (iii) des Satzes 2.7 erfüllt. Mit Gradshteyn und Ryzhik [5, §3.191(3)] erhält man

$$Q = \int_0^1 (x(1-x))^{r-1} dx = (\Gamma(r))^2 / \Gamma(2r).$$

Für $r \gg 1$ gilt $Q \sim \pi^{1/2} / (2^{2r-1} r^{1/2})$. Folglich ist

$$\gamma'(1/2) \sim (2/\pi^{1/2}) r^{1/2} \text{ für } r \gg 1,$$

was mit r anwächst.

Transformation 2.9 Eine wichtige Transformation ist von Sidi [8] gegeben worden, der

$$h(x) = (\sin(\pi x))^{r-1}, \quad N \ni r > 1, \quad (2.19)$$

wählt. Man sieht wieder, dass die Funktion h die Bedingungen (i) bis (iii) des Satzes 2.7 erfüllt, so dass die entsprechende Transformation γ_r sigmoidal von r -ter Ordnung ist. Nach Gradshteyn und Ryzhik [5, §3.621] gilt

$$Q = \int_0^1 (\sin(\pi x))^{r-1} dx = \Gamma(r/2) / (\pi^{1/2} \Gamma(r/2 + 1/2)),$$

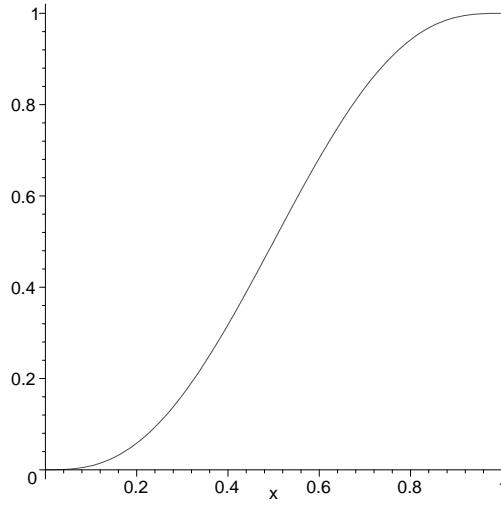


Abbildung 2.4: Der Graph von Transformation 2.8 für $r = 3$

so dass insbesondere

$$\gamma'_r(1/2) \sim (\pi r/2)^{1/2} \text{ für } r \gg 1,$$

was bei wachsendem r anwächst.

Durch partielle Integration findet man nach einiger Rechnung heraus, dass γ_r für $r \geq 1$ die Rekursionsformel

$$\gamma_{r+1}(x) = \gamma_{r-1}(x) - \frac{\Gamma(r/2)}{2\pi^{1/2}\Gamma(r/2 + 1/2)} (\sin(\pi x))^{r-1} \cos(\pi x)$$

erfüllt, wenn man $\gamma_0(x) := 1/2$ und $\gamma_1(x) := x$ definiert. Insbesondere gilt

$$\gamma_2(x) = (1 - \cos(\pi x))/2 \quad \text{und} \quad \gamma_3(x) = x - \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi x). \quad (2.20)$$

Allgemeiner ausgedrückt erhält man, wenn man den bei Gradshteyn und Ryzhik [5, §1.320(1)] gegebenen Ausdruck für $(\sin(\pi\xi))^{2m}$ verwendet¹ und Term für Term integriert,

$$\gamma_{2m+1}(x) = x + 2 \sum_{s=1}^m \frac{(-1)^s (m!)^2}{(m-s)!(m+s)!} \left(\frac{1}{2\pi s} \right) \sin(2\pi s x)$$

für alle $m \in \mathbb{N}$.

¹ $(\sin(\pi\xi))^{2m} = \frac{1}{2^{2m}} \left\{ \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{m-k} 2 \binom{2m}{k} \cos(2(m-k)\pi\xi) + \binom{2m}{m} \right\}$

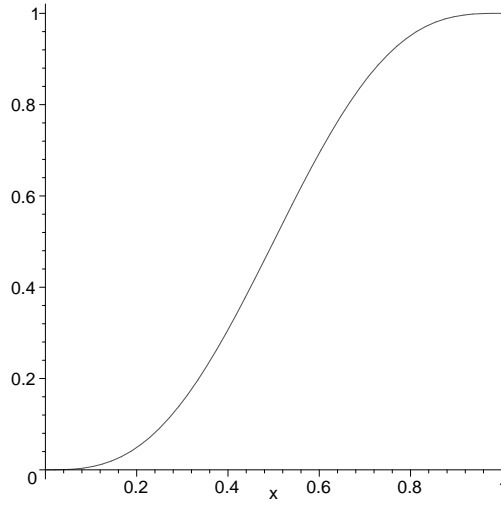


Abbildung 2.5: Der Graph von Transformation 2.9 für $r = 3$

Sidis Transformation 2.9 besitzt die Eigenschaft, dass $\gamma'_r(1/2)$ für $r \rightarrow \infty$ divergiert. Elliott [1] betrachtet nun eine Transformation, die Sidis Transformation ungerader Ordnung ähnelt, für die aber $\gamma'_{2m+1}(1/2)$ beschränkt ist für alle $m \in \mathbb{N}$.

Anstelle von Gleichung (2.14) wird

$$f(x) = \int_0^x (x - \xi)h(\xi)d\xi \quad (2.21)$$

geschrieben. Dabei wird für die Funktion h vorausgesetzt, dass sie die Bedingung

$$h(\xi) + h(1 - \xi) = 0, \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad (2.22)$$

erfüllt. Dann ist mit Gleichung (2.1)

$$\gamma(x) = \int_0^x (x - \xi)h(\xi)d\xi / \int_0^1 (x - \xi)h(\xi)d\xi. \quad (2.23)$$

Der Nenner in Gleichung (2.23) scheint auf den ersten Blick von x abzuhängen, doch mit Gleichung (2.22) sieht man, dass $\int_0^1 h(\xi)d\xi = 0$. Also kann die Gleichung (2.23) umgeschrieben werden zu

$$\gamma(x) = \int_0^x (x - \xi)h(\xi)d\xi / \int_0^1 (1 - \xi)h(\xi)d\xi. \quad (2.24)$$

Mit diesen Vorbemerkungen werden weitere Bedingungen für h benötigt, damit γ eine Transformation r -ter Ordnung ist.

Satz 2.10 Sei h eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:

- (i) $h \in C^\infty[0, 1]$ mit $h(x) > 0$ für $x \in (0, 1/2)$;
- (ii) $h(x) + h(1 - x) = 0$ für $0 \leq x \leq 1$;
- (iii) $h^{(j)}(x) = O(x^{r-2-j})$ bei $x = 0$ für alle $j \in N_0$ und $r > 1$.

Dann ist γ so, wie in Gleichung (2.24) definiert, eine sigmoidale Transformation r -ter Ordnung.

Beweis: Zunächst bemerkt man durch Ausnutzung von (i) und (ii), dass

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1 - \xi)h(\xi)d\xi &= \int_0^{1/2} (1 - \xi)h(\xi)d\xi + \int_0^{1/2} \xi h(1 - \xi)d\xi \\ &= \int_0^{1/2} (1 - 2\xi)h(\xi)d\xi > 0, \end{aligned}$$

da $1 - 2\xi > 0$ auf $(0, 1/2)$ und, mit (i), $h > 0$ auf $(0, 1/2)$. Also ist γ in (2.24) definiert mit $\gamma(0) = 0$ und $\gamma(1) = 1$. Nach (i) gilt außerdem $\gamma \in C^\infty[0, 1]$. Durch Ausnutzung von (ii) ist wieder $\gamma(x) + \gamma(1 - x) = 1$ für $0 \leq x \leq 1$. Mit (2.24) gilt

$$\gamma'(x) = \int_0^x h(\xi)d\xi / \int_0^1 (1 - \xi)h(\xi)d\xi. \quad (2.25)$$

Es wird nun gezeigt, dass $\int_0^x h(\xi)d\xi > 0$ für $0 < x < 1$. Da $h > 0$ auf $(0, 1/2)$, ist dies für $0 < x \leq 1/2$ wahr. Für $1/2 \leq x < 1$ erhält man durch Ausnutzung von (ii)

$$\begin{aligned} \int_0^x h(\xi)d\xi &= \left(\int_0^1 - \int_x^1 \right) h(\xi)d\xi \\ &= \int_x^1 h(1 - \xi)d\xi = \int_0^{1-x} h(\xi)d\xi > 0, \end{aligned}$$

da $0 < 1 - x \leq 1/2$ bzw. $1/2 \leq x < 1$. Also ist $\gamma' > 0$ auf $(0, 1)$ und γ ist streng monoton wachsend auf $[0, 1]$.

Nach Gleichung (2.25) gilt außerdem $\gamma'(0) = 0$. Also sind die Bedingungen (i) bis (iv) von Definition 2.1 erfüllt.

Schließlich sieht man mit (iii), dass $\gamma^{(j)}(x) = O(x^{r-j})$ bei $x = 0$ für alle $j \in N_0$ und $r > 1$, so dass γ eine sigmoidale Transformation r -ter Ordnung ist. \square

Transformation 2.11 Elliott [1] wählt

$$h(\xi) = \sin^{2m-1}(2\pi\xi), \quad m \in N. \quad (2.26)$$

Diese Funktion erfüllt die Bedingungen von Satz 2.10, um eine sigmoidale Transformation

$$\gamma_{2m+1}(x) = \int_0^x (x - \xi) \sin^{2m-1}(2\pi\xi) d\xi / \int_0^1 (1 - \xi) \sin^{2m-1}(2\pi\xi) d\xi \quad (2.27)$$

$(2m + 1)$ -ter Ordnung zu ergeben. Es bietet sich an,

$$\gamma_1(x) = x$$

zu definieren, und dann liefert die Gleichung (2.27) für $m = 1$

$$\gamma_3(x) = x - \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi x),$$

was der Sidi-Transformation dritten Grades entspricht (siehe (2.20) auf Seite 12). Tatsächlich erhält man durch geschickte partielle Integration von Gleichung (2.27) die Rekursionsformel

$$\gamma_{2m+1}(x) = \gamma_{2m-1}(x) - \frac{\Gamma(m - 1/2)}{2\pi^{3/2}(2m - 1)\Gamma(m)} \sin^{2m-1}(2\pi x) \quad \text{für } m \in N.$$

Nach Gradshteyn und Ryzhik [5, §3.821(2)] gilt

$$\int_0^1 (1 - \xi) \sin^{2m-1}(2\pi\xi) d\xi = \frac{\Gamma(m)}{4\pi^{1/2}\Gamma(m + 1/2)}. \quad (2.28)$$

Dann ergibt sich mit den Gleichungen (2.27) und (2.28)

$$\gamma'_{2m+1}(1/2) = \frac{4\pi^{1/2}\Gamma(m + 1/2)}{\Gamma(m)} \int_0^{1/2} \sin^{2m-1}(2\pi\xi) d\xi.$$

Wieder nach Gradshteyn und Ryzhik [5, §3.621(1)] erhält man

$$\gamma'_{2m+1}(1/2) = 2 \quad \text{für alle } m \in N,$$

was natürlich nicht von m abhängt.

Mit Gleichung (2.27) kann man γ_{2m+1} auch wieder als endliche Summe darstellen. Man erhält mit Hilfe von Gradshteyn und Ryzhik [5, §1.320(3)]² nach einiger Rechnung, dass

$$\gamma_{2m+1}(x) = x + \frac{2(\Gamma(m + 1/2))^2}{\pi^2} \sum_{s=1}^m \frac{(-1)^s \sin(2\pi(2s - 1)x)}{\Gamma(m - s + 1)\Gamma(m + s)(2s - 1)^2}$$

für alle $m \in N$.

² $\sin^{2m-1}(2\pi\xi) = \frac{1}{2^{2m-2}} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{m+k-1} \binom{2m-1}{k} \sin((2m - 2k - 1)2\pi\xi)$

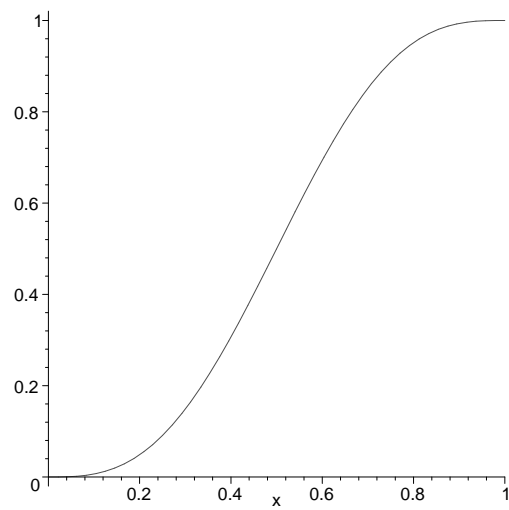


Abbildung 2.6: Der Graph von Transformation 2.11 für $m = 1$

Kapitel 3

Die Fehlerordnung für die Trapezregel mit sigmoidaler Transformation unter Verwendung von Fourierreihen

Wie bereits in Abschnitt 2.3 erklärt, sollen die in Kapitel 2 eingeführten sigmoidalen Transformationen bei der näherungsweise Berechnung des Integrals $I(f) := \int_0^1 f(x)dx$ angewendet werden.

Es ist bekannt und wird im Folgenden unter Verwendung von Fourierreihen noch einmal gezeigt werden, dass bei periodischen Funktionen f mit der Periode 1 der Quadraturfehler $E_n(f) := I(f) - Q_n(f)$ bei der Trapezregel $Q_n(f) := \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(j/n)$ von der Ordnung $O(1/n^m)$ mit $m \in \mathbb{N}$ ist, falls f entsprechend oft stetig differenzierbar ist.

Deshalb stellt sich die Frage, wie man bei nicht periodischen Funktionen f eine geeignete Substitution durchführen kann, so dass der neue Integrand periodisch ist.

Wie man sehen wird, ist dies der Fall, wenn man die Substitution $x = \gamma_r(t)$ mit einer sigmoidalen (oder periodisierenden) Funktion γ_r wählt: Die Funktion $\gamma_r'(t)f(\gamma_r(t))$ ist bis zu einem gewissen Grad periodisch, und damit erhält man für den Quadraturfehler $E_n^{[r]}(f) := I(f) - Q_n^{[r]}(f)$ bei der Trapezregel

$$Q_n^{[r]}(f) := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \gamma_r'(j/n) f(\gamma_r(j/n))$$

die Ordnung $O(1/n^m)$ mit einem von r und f abhängigen m .

Zunächst soll jedoch unter Verwendung von Fourierreihen die Fehlerordnung bei der Trapezregel für periodische Funktionen allgemein hergeleitet werden.

Definition 3.1 Für $m \in \mathbb{N}_0$ wird der Raum

$$\mathcal{C}_{per,1}^m := \{g \in \mathcal{C}^m(\mathbb{R}) \mid g(t+1) = g(t) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}\}$$

erklärt.

Definition 3.2 Für Funktionen $g \in \mathcal{C}^{m-1}[0,1] \cap \mathcal{C}^m(0,1)$ mit $\int_0^1 |g^{(m)}(t)| dt < \infty$ wird eine Norm definiert und bezeichnet durch

$$\|g\|_m := \max_{j=0,\dots,m} \int_0^1 |g^{(j)}(t)| dt. \quad (3.1)$$

Lemma 3.3 Seien $g \in \mathcal{C}_{per,1}^m[0,1]$ und $m \geq 2$. Dann gilt:

(i) Für die Fourierkoeffizienten $a_k(g)$ von g und $a_k(g^{(m)})$ von $g^{(m)}$ gilt die Beziehung

$$a_k(g) = \frac{1}{(2\pi ik)^m} a_k(g^{(m)}), \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (3.2)$$

(ii) Die Fourierreihe

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(g) u_k \quad \text{mit } u_k(t) := e^{2\pi ikt}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

konvergiert gleichmäßig gegen g .

Beweis: Für die Fourierkoeffizienten $a_k(g)$ von g mit

$$a_k(g) = \int_0^1 g(t) e^{-2\pi ikt} dt$$

erhält man für $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ wegen $g^{(j)}(0) = g^{(j)}(1)$, $j = 0, \dots, m$, durch sukzessive partielle Integration

$$\begin{aligned} a_k(g) &= \frac{1}{2\pi ik} \int_0^1 g'(t) e^{-2\pi ikt} dt \\ &= \dots \\ &= \frac{1}{(2\pi ik)^m} \int_0^1 g^{(m)}(t) e^{-2\pi ikt} dt \\ &= \frac{1}{(2\pi ik)^m} a_k(g^{(m)}) \end{aligned} \quad (3.3)$$

mit den Fourierkoeffizienten $a_k(g^{(m)})$ der m -ten Ableitung von g . (i) ist also gezeigt.

Mit der in (3.1) erklärten Norm gilt für die Fourierkoeffizienten $a_k(g^{(m)})$ der m -ten Ableitung von g außerdem

$$\begin{aligned} |a_k(g^{(m)})| &\leq \int_0^1 |g^{(m)}(t)| |e^{-2\pi ikt}| dt \\ &= \int_0^1 |g^{(m)}(t)| dt \\ &\leq \|g\|_m. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Mit (3.3) ist deshalb für $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$$|a_k(g)| = \frac{1}{(2\pi|k|)^m} |a_k(g^{(m)})| \leq \frac{1}{(2\pi|k|)^m} \|g\|_m. \tag{3.5}$$

Und daraus ergibt sich für die Fourierreihe

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k(g)u_k(t)| &= \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} |a_k(g)| |e^{2\pi ikt}| + |a_0(g)| \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^m} \|g\|_m \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{|k|^m} + |a_0(g)| \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^m} \|g\|_m C(m) + |a_0(g)|. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Nach dem Majorantenkriterium folgt also, dass die Fourierreihe von g gleichmäßig konvergiert. Dies kann auch gezeigt werden, indem man für die Abschätzung von $|a_k(g^{(m)})|$ in (3.4) mit

$$\int_0^1 |g^{(m)}(t)| dt \leq \int_0^1 \|g^{(m)}\|_{\infty} dt = \|g^{(m)}\|_{\infty}$$

die Maximumnorm verwendet und dann analog zu (3.5) und (3.6) verfährt. Da die Fourierreihe in der L^2 -Norm gegen g konvergiert und da die L^2 -Norm schwächer ist als die Maximumnorm, konvergiert die Fourierreihe auch gleichmäßig gegen g . (ii) ist damit ebenfalls gezeigt. \square

Satz 3.4 Sei $g \in C_{per,1}^m[0, 1]$, $m \geq 2$. Dann gilt für den Quadraturfehler $E_n(g)$ bei der Trapezregel

$$I(g) := \int_0^1 g(t) dt \approx \frac{1}{n} \sum_{j=0}^n g(j/n) =: Q_n(g)$$

die Darstellungsformel

$$E_n(g) = -\frac{1}{(2\pi in)^m} \sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{l^m} a_{ln}(g^{(m)}).$$

Beweis: Betrachte zunächst die bereits in Lemma 3.3 definierten trigonometrischen Monome u_k mit

$$u_k(t) := e^{2\pi ikt}, k \in Z.$$

Es ist

$$I(u_k) = \int_0^1 e^{2\pi ikt} dt = \begin{cases} 1, & \text{falls } k = 0, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Außerdem gilt wegen $u_k(0) = u_k(1) = 1$ und mit der Summenformel für die geometrische Summe

$$nQ_n(u_k) = \sum_{j=0}^{n-1} e^{2\pi ijk/n} = \begin{cases} n, & \text{falls } k = ln, l \in Z, \\ \frac{1-e^{i\frac{2\pi k}{m}m}}{1-e^{i\frac{2\pi k}{m}}} = 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Daher folgt für den Quadraturfehler bei der Trapezregel

$$E_n(u_k) = I(u_k) - Q_n(u_k) = \begin{cases} -1, & \text{falls } k = ln, l \in Z \setminus \{0\}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \quad (3.7)$$

Da die Fourierreihe von g nach Lemma 3.3(ii) gleichmäßig konvergiert, gelten $I(g) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(g)I(u_k)$ und $Q_n(g) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(g)Q_n(u_k)$. Damit und mit (3.7) folgt für den Quadraturfehler $E_n(g)$

$$\begin{aligned} E_n(g) &= I(g) - Q_n(g) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k((I(u_k) - Q_n(u_k))) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(g)E_n(u_k) \\ &= -\sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq 0}}^{\infty} a_{ln}(g). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Einsetzen von (3.2) in (3.8) schließlich ergibt die Fehlerdarstellung

$$E_n(g) = -\frac{1}{(2\pi in)^m} \sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{l^m} a_{ln}(g^{(m)}).$$

□

Korollar 3.5 Sei $g \in \mathcal{C}_{per,1}^m[0,1]$, $m \geq 2$. Dann existiert eine von g und n unabhängige Konstante $C > 0$ so, dass

$$|E_n(g)| \leq \frac{C}{n^m} \|g\|_m.$$

Beweis: Nach Satz 3.4 und der Abschätzung (3.4) gilt

$$\begin{aligned} |E_n(g)| &\leq \frac{1}{(2\pi n)^m} \sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{|l|^m} |a_{ln}(g^{(m)})| \\ &\leq \frac{1}{(2\pi n)^m} \sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{|l|^m} \|g\|_m \\ &\leq \frac{1}{(2\pi n)^m} \|g\|_m C(m). \end{aligned}$$

Hieraus folgt das Korollar. □

Nun wird noch ein schärferes Resultat bewiesen.

Definition 3.6 Für $m \in N_0$ wird der Raum

$$U_m := \left\{ g \in \mathcal{C}^{m+1}[0,1] \cap \mathcal{C}^{m+2}(0,1) \mid \right. \\ \left. g^{(j)}(0) = g^{(j)}(1) \text{ für } j = 0, \dots, m \text{ und } \int_0^1 |g^{(m+2)}(t)| dt < \infty \right\}$$

erklärt.

Satz 3.7 Sei $g \in U_m$, $m \geq 2$. Dann existiert eine von g und n unabhängige Konstante $C > 0$ so, dass

$$|E_n(g)| \leq \frac{C}{n^{m+2}} \|g\|_{m+2}.$$

Beweis: Nach Satz 3.4 gilt für $m \geq 2$

$$E_n(g) = -\frac{1}{(2\pi in)^m} \sum_{\substack{l=-\infty \\ l \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{l^m} a_{ln}(g^{(m)}). \quad (3.9)$$

Wie im Beweis von Lemma 3.3 liefert partielle Integration

$$\begin{aligned}
a_{ln}(g^{(m)}) &= \int_0^1 g^{(m)}(t) e^{-2\pi i l n t} \\
&= -\frac{1}{(2\pi i l n)^2} (g^{(m+1)}(1) - g^{(m+1)}(0)) + \frac{1}{(2\pi i l n)^2} \int_0^1 g^{(m+2)}(t) e^{-2\pi i l n t} dt \\
&= -\frac{1}{(2\pi i l n)^2} \int_0^1 g^{(m+2)}(t) dt + \frac{1}{(2\pi i l n)^2} \int_0^1 g^{(m+2)}(t) e^{-2\pi i l n t} dt.
\end{aligned}$$

Die Integrale in der letzten Zeile existieren, da $\int_0^1 |g^{(m+2)}(t)| dt < \infty$ nach Voraussetzung. Durch Einsetzen in (3.9) ist der Satz deshalb bewiesen. \square

3.1 Die Fehlerordnung für sigmoidale Transformationen bei regulären Funktionen

Die in Satz 3.7 gewonnene Fehlerordnung soll nun angewendet werden auf nicht periodische reguläre Funktionen mit sigmoidaler Transformation.

Satz 3.8 *Seien γ_r eine sigmoidale Transformation r -ter Ordnung mit $r \geq 4$ und $f \in C^r[0, 1]$. Für den Fehler $E_n^{[r]}(f)$ bei der Trapezregel mit sigmoidaler Transformation*

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \gamma_r'(j/n) f(\gamma_r(j/n))$$

gilt dann

$$|E_n^{[r]}(f)| \leq \frac{C}{n^r} \|f\|_r$$

mit einer von f und n unabhängigen Konstante $C > 0$.

Beweis: Es ist Satz 3.7 anzuwenden mit $m := r - 2$. Sei

$$g_r(t) := \gamma_r'(t) f(\gamma_r(t)).$$

Für die sigmoidale Transformation γ_r gilt nach Definition 2.1 und mit den daraus folgenden Eigenschaften

- $\gamma_r \in C^\infty[0, 1]$;
- $\gamma_r^{(j+1)}(0) = \gamma_r^{(j+1)}(1) = 0$, $j = 0, \dots, m$.

Daraus folgt, dass $g_r \in \mathcal{C}^{m+2}[0, 1]$. Für die p -ten Ableitungen von g_r gilt nach der Leibnizschen Regel

$$g_r^{(p)}(t) = \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} \gamma_r^{(p-j+1)}(t) (f \circ \gamma_r)^{(j)}(t) \quad (3.10)$$

mit $0 \leq t \leq 1$, $0 \leq p \leq m+2$. Aufgrund der Definition von γ_r folgt, dass

$$g_r^{(p)}(0) = g_r^{(p)}(1) = 0 \text{ für } p = 0, \dots, m.$$

Es ist also $g \in U_m$. Sortiert man in (3.10) nach Termen $f^{(j)}(\gamma_r(t))$ und bezeichnet man die Koeffizienten mit $v_{j,p}$, so erhält man für $0 \leq p \leq m+2$

$$\begin{aligned} \int_0^1 |g_r^{(p)}(t)| dt &\leq \int_0^1 \sum_{j=0}^p |v_{j,p}(t)| |f^{(j)}(\gamma_r(t))| dt \\ &= \sum_{j=0}^p \int_0^1 |v_{j,p}(t)| |f^{(j)}(\gamma_r(t))| dt \\ &\leq \sum_{j=0}^p \|v_{j,p}\|_\infty \int_0^1 |f^{(j)}(\gamma_r(t))| dt \\ &\leq (p+1) C_p \|f\|_p, \end{aligned}$$

wobei $C_p := \max_{j=0, \dots, p} \|v_{j,p}\|_\infty$. Damit gilt auch

$$\|g_r\|_{m+2} \leq (m+3) C_{m+2} \|f\|_{m+2}.$$

Da die Koeffizienten $v_{j,p}$ nur von γ_r abhängen, folgt mit Satz 3.7, dass es eine von f und n unabhängige Konstante $C > 0$ so gibt, dass

$$|E_n^{[r]}(f)| = |E_n(g_r)| \leq \frac{C}{n^r} \|f\|_r.$$

□

3.2 Die Fehlerordnung für sigmoidale Transformationen bei Funktionen mit Endpunktsingularitäten

Die in Satz 3.7 gewonnene Fehlerordnung soll nun auch angewendet werden auf Funktionen mit Singularitäten in den Endpunkten des Intervalls $[0, 1]$.

Definition 3.9 Für Funktionen $h \in \mathcal{C}^m[0, 1]$ wird eine Norm definiert und bezeichnet durch

$$\|h\|_{\infty, m} := \max_{j=0, \dots, m} \|h^{(j)}\|_\infty.$$

Satz 3.10 Seien γ_r eine sigmoidale Transformation r -ter Ordnung und $f(x) = x^\alpha(1-x)^\beta h(x)$, wobei $0 < x < 1$, $\alpha > -1$, $\beta > -1$, $h \in \mathcal{C}^{m+2}[0, 1]$, $h(0) \neq 0$, $h(1) \neq 0$, und es gelte

$$2 \leq m < r(1 + \min(\alpha, \beta)) - 2.$$

Für den Fehler $E_n^{[r]}(f)$ bei der Trapezregel mit sigmoidaler Transformation

$$\int_0^1 f(x) dx \approx \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-1} \gamma_r'(j/n) f(\gamma_r(j/n))$$

gilt dann

$$|E_n^{[r]}(f)| \leq \frac{C}{n^{m+2}} \|h\|_{\infty, m+2}$$

mit einer von h und n unabhängigen Konstante $C > 0$.

Beweis: Anzuwenden ist wieder Satz 3.7. Es wird zunächst der Fall betrachtet, dass f nur in $x = 0$ eine Singularität hat. Für

$$g_r(t) := \gamma_r'(t) f(\gamma_r(t))$$

gilt dann

$$g_r(t) = \gamma_r'(t) [\gamma_r(t)]^\alpha (h \circ \gamma_r)(t).$$

Da $\gamma_r \in \mathcal{C}^\infty[0, 1]$, ist $g_r \in \mathcal{C}^{m+2}(0, 1]$. Von Interesse ist nun das Verhalten von g_r bei $t = 0$. Dies wird bestimmt durch das Verhalten von

$$\sigma_r(t) := \gamma_r'(t) [\gamma_r(t)]^\alpha$$

bei $t = 0$. Für die j -ten Ableitungen von σ_r erhält man mit der Leibnizschen Regel und durch Sortieren nach Termen $[\gamma_r(t)]^{\alpha-s}$ die Darstellung

$$\sigma_r^{(j)}(t) = \sum_{s=0}^j w_{s,j}(t) [\gamma_r(t)]^{\alpha-s}. \quad (3.11)$$

Daraus ergibt sich mit

$$\sigma_r^{(j+1)}(t) = \sum_{s=0}^j \left[w_{s,j}(t) \gamma_r'(t) (\alpha - s) [\gamma_r(t)]^{\alpha-(s+1)} + w'_{s,j}(t) [\gamma_r(t)]^{\alpha-s} \right]$$

die Rekursionsformel

$$w_{s,j+1}(t) = \begin{cases} w'_{0,j}(t), & s = 0, \\ w_{s-1,j}(t) \gamma_r'(t) (\alpha - (s-1)) + w'_{s,j}(t), & s = 1, \dots, j, \\ w_{j,j}(t) \gamma_r'(t) (\alpha - j), & s = j+1, \end{cases} \quad (3.12)$$

für die Koeffizienten $w_{s,j}$. Insbesondere gilt

$$w_{0,j}(t) = \gamma_r^{(j+1)}(t) \text{ und } w_{j,j}(t) = \alpha(\alpha - 1) \cdot \dots \cdot (\alpha - (j - 1)) [\gamma_r'(t)]^{j+1}. \quad (3.13)$$

Nach Definition 2.1 ist

$$\gamma_r^{(j)}(t) = O\left(t^{r-j}\right) \text{ bei } t = 0 \text{ für } j = 0, \dots, r. \quad (3.14)$$

Die Funktionen $w_{s,j}$ erfüllen

$$w_{s,j}(t) = O\left(t^{r-1+rs-j}\right) \text{ bei } t = 0 \text{ für } s = 0, \dots, j.$$

Dies gilt für $s = 0$ und $s = j$ nach (3.13) und (3.14) und folgt für $s = 1, \dots, j - 1$ durch Induktion mit Hilfe der Rekursionsformel (3.12). Da außerdem

$$[\gamma_r(t)]^{\alpha-s} = O\left(t^{r(\alpha-s)}\right) \text{ bei } t = 0,$$

folgt mit (3.11) für die j -ten Ableitungen von σ_r

$$\sigma_r^{(j)}(t) = O\left(t^{r(1+\alpha)-1-j}\right) \text{ bei } t = 0 \text{ für } j = 0, \dots, m + 1. \quad (3.15)$$

Für die p -ten Ableitungen von g_r erhält man wieder nach der Leibnizschen Regel

$$g_r^{(p)}(t) = \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} \sigma_r^{(p-j)}(t) (h \circ \gamma_r)^{(j)}(t). \quad (3.16)$$

Und daraus folgt mit (3.15), dass $g_r \in \mathcal{C}^{m+1}[0, 1]$ mit $g^{(p)}(0) = g^{(p)}(1) = 0$ für $p = 0, \dots, m + 1$.

Um Satz 3.7 anwenden zu können, bleibt also zu zeigen, dass $\int_0^1 |g_r^{(m+2)}(t)| dt < \infty$.

Sortiert man in (3.16) nach Termen $h^{(j)}(\gamma_r(t))$ und bezeichnet man die Koeffizienten mit $v_{j,p}$, so erhält man für $0 \leq p \leq m + 2$ und $0 < t \leq 1$ die Darstellung

$$g_r^{(p)}(t) = \sum_{j=0}^p v_{j,p}(t) h^{(j)}(\gamma_r(t)). \quad (3.17)$$

Nach (3.15) und (3.16) gilt

$$v_{0,p}(t) = O\left(t^{r(1+\alpha)-1-p}\right) \text{ bei } t = 0.$$

Nach Voraussetzung ist $m < r(1 + \alpha) - 2$ und damit $-1 < r(1 + \alpha) - 1 - (m + 2)$. Für $0 \leq p \leq m + 2$ ist also $-1 < r(1 + \alpha) - 1 - p$ und folglich gilt $\int_0^1 |v_{0,p}(t)| dt < \infty$.

Nach (3.16) und (3.17) gilt damit auch $\int_0^1 |v_{j,p}(t)| dt < \infty$ für $0 \leq j \leq p$ und $0 \leq p \leq m+2$. Also ist $\int_0^1 |g_r^{(m+2)}(t)| dt < \infty$.

Außerdem erhält man für $0 \leq p \leq m+2$

$$\begin{aligned} \int_0^1 |g_r^{(p)}(t)| dt &\leq \sum_{j=0}^p \int_0^1 |v_{j,p}(t)| |h^{(j)}(\gamma_r(t))| dt \\ &\leq \sum_{j=0}^p \|h\|_{\infty,p} \int_0^1 |v_{j,p}(t)| dt \\ &\leq \|h\|_{\infty,p} \sum_{j=0}^p C_{j,p} \\ &\leq \|h\|_{\infty,p} (p+1) C_p, \end{aligned}$$

wobei $C_p := \max_{j=0,\dots,p} C_{j,p}$. Damit gilt auch

$$\|g\|_{m+2} \leq (m+3) C_{m+2} \|h\|_{\infty,m+2}.$$

Mit Satz 3.7 folgt, dass es eine von h und n unabhängige Konstante $C > 0$ so gibt, dass

$$|E_n^{[r]}(f)| = |E_n(g_r)| \leq \frac{C}{n^{m+2}} \|h\|_{\infty,m+2}.$$

Der Beweis für den Fall, dass f eine Singularität in $x = 1$ hat, erfolgt analog. Hat f sowohl in $x = 0$ als auch in $x = 1$ Singularitäten, so ergibt sich der Beweis durch Kombination beider Fälle. \square

3.3 Vergleich der ermittelten Fehlerordnungen mit denen bei Elliott [2]

Die bisher mit Hilfe von Fourierreihen gewonnenen Fehlerordnungen für die Trapezregel sollen nun mit den Fehlerordnungen bei Elliott [2] verglichen werden.

Elliott verwendet für seine Fehlerabschätzung die Euler-Maclaurinsche Summenformel. Für Funktionen $g \in \mathcal{C}^m[0, 1] \cap \mathcal{C}^{m+1}(0, 1)$ mit $\int_0^1 |g^{(m+1)}(t)| dt < \infty$, wobei $m \in \mathbb{N}_0$, liefert diese Formel für den Fehler bei der Trapezregel

$$I(g) := \int_0^1 g(t) dt \approx \frac{1}{n} \sum_{j=0}^n g(j/n) =: Q_n(g)$$

die Darstellung

$$E_n(g) = \sum_{j=1}^{m+1} \frac{\bar{B}_j(1)}{j!} \cdot \frac{g^{(j-1)}(1) - g^{(j-1)}(0)}{n^j} - \frac{1}{n^{m+1}} \int_0^1 \frac{g^{(m+1)}(t) \bar{B}_{m+1}(1-nt)}{(m+1)!} dt.$$

Die \bar{B}_j bezeichnen hierbei die periodischen Bernoullifunktionen, auf die in dieser Arbeit jedoch nicht näher eingegangen werden soll.

Aus obiger Darstellung ist ersichtlich, dass der Fehler $E_n(g)$ bei periodischen Funktionen g mit der Periode 1 von der Ordnung $O(1/n^{m+1})$ ist. Dieses Resultat ist etwas schwächer als das von Satz 3.5, der für Funktionen $g \in U_m$ unter Verwendung von Fourierreihen die Fehlerordnung $O(1/n^{m+2})$ liefert.

Das anschließende Vorgehen bei Elliott [2] entspricht dem der Abschnitte 3.1 und 3.2 dieser Arbeit: Elliott verwendet sigmoidale Transformationen γ_r r -ter Ordnung, um Funktionen f , die höchstens in den Endpunkten des Intervalls $[0, 1]$ Singularitäten besitzen, durch Substitution so zu transformieren, dass die Ableitungen an den Endpunkten bis zu einem gewissen Grad verschwinden. Auf diese periodischen Funktionen wendet er dann die durch die Euler-Maclaurinsche Summenformel gewonnene Fehlerdarstellung an und erhält so für den Fehler $E_n^{[r]}(f)$ die Fehlerordnung $O(1/n^{m+1})$ mit von r und f abhängigem m .

Kapitel 4

Einige numerische Ergebnisse

Die in Kapitel 3 gewonnenen Fehlerordnungen sollen nun anhand einiger numerischer Beispiele illustriert werden. Verwendet werden hierzu die „algebraische“ Transformation 2.4 mit

$$\gamma_r(t) = \frac{t^r}{t^r + (1-t)^r}$$

und die „integrale“ Transformation 2.8 mit

$$\gamma_r(t) = \frac{\int_0^t (\xi(1-\xi))^{r-1} d\xi}{\int_0^1 (\xi(1-\xi))^{r-1} d\xi}.$$

In den folgenden Tabellen 4.1 bis 4.6 sind zunächst der Quadraturfehler und die Fehlerordnung bei Anwendung obiger Transformationen γ_r auf reguläre Funktionen f dargestellt. Für alle gewählten Funktionen f gilt dabei $f \in \mathcal{C}^\infty[0, 1]$, so dass nach Satz 3.8 für $r \geq 4$ die Fehlerordnung $O(1/n^r)$ zu erwarten ist.

Für gerade r liefern die numerischen Ergebnisse tatsächlich die Fehlerordnung $O(1/n^r)$, die Fehlerordnung für ungerade r ist offensichtlich sogar $O(1/n^{r+1})$. Diese Resultate gelten außerdem bereits für $r \geq 2$. Auf die Gründe dieser Verbesserung im Vergleich zur theoretisch ermittelten Ordnung soll hier jedoch nicht näher eingegangen werden.

Die Fehlerberechnungen und Fehlerordnungen in den Tabellen 4.7 bis 4.12 beziehen sich auf Funktionen f mit Singularitäten in $x = 0$. Genauer gesagt haben alle diese Funktionen die Gestalt $f(x) = x^\alpha h(x)$, wobei $\alpha > -1$ und $h \in \mathcal{C}^\infty[0, 1]$ mit $h(0) \neq 0$, $h(1) \neq 0$. Für den Quadraturfehler $E_n^{[r]}(f)$ bei der Anwendung obiger sigmoidaler Transformationen ist nach Satz 3.10 für $4 \leq m+2 < r(1+\alpha)$ also die Fehlerordnung $O(1/n^{m+2})$ zu erwarten.

Die numerischen Ergebnisse liefern sogar die Ordnung $O(1/n^{r(1+\alpha)})$, und dies auch schon für $r \geq 2$. Dieses im Vergleich zur theoretisch ermittelten Fehlerordnung bessere Ergebnis soll in der vorliegenden Arbeit jedoch auch nicht mehr begründet werden.

Tabelle 4.1: $f(x) = x^2$; Transformation 2.4

	$r = 2$	$r = 3$	$r = 4$	$r = 5$	$r = 6$
n	$ E_n $	$ E_n $	$ E_n $	$ E_n $	$ E_n $
4	$1.15 \cdot 10^{-2}$	$1.76 \cdot 10^{-2}$	$2.06 \cdot 10^{-2}$	$6.15 \cdot 10^{-3}$	$5.26 \cdot 10^{-2}$
8	$2.60 \cdot 10^{-3}$	$1.29 \cdot 10^{-4}$	$2.42 \cdot 10^{-3}$	$8.63 \cdot 10^{-3}$	$1.56 \cdot 10^{-2}$
16	$6.51 \cdot 10^{-4}$	$1.51 \cdot 10^{-6}$	$2.04 \cdot 10^{-7}$	$2.61 \cdot 10^{-5}$	$2.34 \cdot 10^{-4}$
32	$1.63 \cdot 10^{-3}$	$9.52 \cdot 10^{-8}$	$3.16 \cdot 10^{-8}$	$1.28 \cdot 10^{-10}$	$2.94 \cdot 10^{-9}$
64	$4.07 \cdot 10^{-5}$	$5.96 \cdot 10^{-9}$	$1.98 \cdot 10^{-9}$	$1.73 \cdot 10^{-12}$	$3.44 \cdot 10^{-13}$
n	$ E_n / E_{2n} $	$ E_n / E_{2n} $	$ E_n / E_{2n} $	$ E_n / E_{2n} $	$ E_n / E_{2n} $
4	4.42	136.43	8.51	0.71	3.37
8	3.99	85.43	11862.75	330.65	66.67
16	3.99	15.86	6.46	203906.25	79591.84
32	4.00	15.97	15.96	73.99	8546.51
Fehlerordnung	$O(1/n^2)$	$O(1/n^4)$	$O(1/n^4)$	$O(1/n^6)$	—

Tabelle 4.2: $f(x) = x^2$; Transformation 2.8

	$r = 2$	$r = 3$	$r = 4$	$r = 5$	$r = 6$
n	$ E_n $	$ E_n $	$ E_n $	$ E_n $	$ E_n $
4	$3.25 \cdot 10^{-2}$	$1.41 \cdot 10^{-3}$	$3.84 \cdot 10^{-3}$	$2.98 \cdot 10^{-3}$	$1.42 \cdot 10^{-2}$
8	$7.89 \cdot 10^{-3}$	$1.13 \cdot 10^{-4}$	$2.77 \cdot 10^{-4}$	$3.77 \cdot 10^{-5}$	$3.47 \cdot 10^{-5}$
16	$1.96 \cdot 10^{-3}$	$7.49 \cdot 10^{-6}$	$1.77 \cdot 10^{-5}$	$5.95 \cdot 10^{-7}$	$6.29 \cdot 10^{-7}$
32	$4.89 \cdot 10^{-4}$	$4.75 \cdot 10^{-7}$	$1.11 \cdot 10^{-6}$	$9.40 \cdot 10^{-9}$	$1.03 \cdot 10^{-8}$
64	$1.22 \cdot 10^{-4}$	$2.96 \cdot 10^{-8}$	$6.93 \cdot 10^{-8}$	$4.00 \cdot 10^{-10}$	$3.00 \cdot 10^{-10}$
n	$ E_n / E_{2n} $	$ E_n / E_{2n} $	$ E_n / E_{2n} $	$ E_n / E_{2n} $	$ E_n / E_{2n} $
4	4.12	12.48	13.86	79.05	409.22
8	4.03	15.09	15.65	63.36	55.17
16	4.01	15.77	15.95	63.30	61.07
32	4.01	16.05	16.02	23.50	34.33
Fehlerordnung	$O(1/n^2)$	$O(1/n^4)$	$O(1/n^4)$	$O(1/n^6)$	$O(1/n^6)$

Tabelle 4.3: $f(x) = x^3$; Transformation 2.4

	$r = 2$	$r = 3$	$r = 4$	$r = 5$	$r = 6$
n	$ E_n $	$ E_n $	$ E_n $	$ E_n $	$ E_n $
4	$1.23 \cdot 10^{-2}$	$3.27 \cdot 10^{-2}$	$6.31 \cdot 10^{-2}$	$6.69 \cdot 10^{-2}$	$5.16 \cdot 10^{-2}$
8	$2.60 \cdot 10^{-3}$	$2.13 \cdot 10^{-4}$	$3.98 \cdot 10^{-3}$	$1.54 \cdot 10^{-2}$	$3.19 \cdot 10^{-2}$
16	$6.51 \cdot 10^{-4}$	$1.51 \cdot 10^{-6}$	$5.74 \cdot 10^{-7}$	$4.06 \cdot 10^{-5}$	$3.71 \cdot 10^{-4}$
32	$1.63 \cdot 10^{-4}$	$9.52 \cdot 10^{-8}$	$3.16 \cdot 10^{-8}$	$1.37 \cdot 10^{-10}$	$4.45 \cdot 10^{-9}$
64	$4.07 \cdot 10^{-5}$	$5.96 \cdot 10^{-9}$	$1.98 \cdot 10^{-9}$	$1.73 \cdot 10^{-12}$	$3.44 \cdot 10^{-13}$
n	$ E_n / E_{2n} $	$ E_n / E_{2n} $	$ E_n / E_{2n} $	$ E_n / E_{2n} $	$ E_n / E_{2n} $
4	4.73	153.52	15.85	4.34	1.62
8	3.99	141.06	6933.80	379.31	85.98
16	3.99	15.86	18.16	296350.37	83370.79
32	4.00	15.97	15.96	79.19	12936.05
Fehlerordnung	$O(1/n^2)$	$O(1/n^4)$	$O(1/n^4)$	$O(1/n^6)$	–

Tabelle 4.4: $f(x) = x^3$; Transformation 2.8

	$r = 2$	$r = 3$	$r = 4$	$r = 5$	$r = 6$
n	$ E_n $	$ E_n $	$ E_n $	$ E_n $	$ E_n $
4	$3.31 \cdot 10^{-2}$	$1.14 \cdot 10^{-3}$	$3.68 \cdot 10^{-3}$	$5.61 \cdot 10^{-3}$	$2.08 \cdot 10^{-2}$
8	$7.92 \cdot 10^{-3}$	$1.09 \cdot 10^{-4}$	$2.76 \cdot 10^{-4}$	$3.77 \cdot 10^{-5}$	$3.45 \cdot 10^{-5}$
16	$1.96 \cdot 10^{-3}$	$7.42 \cdot 10^{-6}$	$1.77 \cdot 10^{-5}$	$5.95 \cdot 10^{-7}$	$6.29 \cdot 10^{-7}$
32	$4.89 \cdot 10^{-4}$	$4.73 \cdot 10^{-7}$	$1.11 \cdot 10^{-6}$	$9.30 \cdot 10^{-9}$	$1.03 \cdot 10^{-8}$
64	$1.22 \cdot 10^{-4}$	$2.97 \cdot 10^{-8}$	$6.92 \cdot 10^{-8}$	$6.00 \cdot 10^{-10}$	$2.00 \cdot 10^{-10}$
n	$ E_n / E_{2n} $	$ E_n / E_{2n} $	$ E_n / E_{2n} $	$ E_n / E_{2n} $	$ E_n / E_{2n} $
4	4.17	10.46	13.33	148.81	602.90
8	4.04	14.69	15.59	63.36	54.85
16	4.01	15.69	15.95	63.98	61.07
32	4.01	15.93	16.04	15.50	51.50
Fehlerordnung	$O(1/n^2)$	$O(1/n^4)$	$O(1/n^4)$	$O(1/n^6)$	$O(1/n^6)$

Tabelle 4.5: $f(x) = (1 - x)^4$; Transformation 2.4

	$r = 2$	$r = 3$	$r = 4$	$r = 5$	$r = 6$
n	$ E_n $	$ E_n $	$ E_n $	$ E_n $	$ E_n $
4	$1.13 \cdot 10^{-2}$	$3.40 \cdot 10^{-2}$	$7.63 \cdot 10^{-2}$	$9.51 \cdot 10^{-2}$	$9.54 \cdot 10^{-2}$
8	$2.60 \cdot 10^{-3}$	$5.57 \cdot 10^{-5}$	$3.15 \cdot 10^{-3}$	$1.49 \cdot 10^{-2}$	$3.41 \cdot 10^{-2}$
16	$6.51 \cdot 10^{-4}$	$1.52 \cdot 10^{-6}$	$1.03 \cdot 10^{-6}$	$7.89 \cdot 10^{-6}$	$1.94 \cdot 10^{-4}$
32	$1.63 \cdot 10^{-4}$	$9.52 \cdot 10^{-8}$	$3.16 \cdot 10^{-8}$	$3.26 \cdot 10^{-11}$	$6.45 \cdot 10^{-9}$
64	$4.07 \cdot 10^{-5}$	$5.96 \cdot 10^{-9}$	$1.98 \cdot 10^{-9}$	$1.73 \cdot 10^{-12}$	$3.44 \cdot 10^{-13}$
n	$ E_n / E_{2n} $	$ E_n / E_{2n} $	$ E_n / E_{2n} $	$ E_n / E_{2n} $	$ E_n / E_{2n} $
4	4.35	610.41	24.22	6.38	2.80
8	3.99	36.64	3058.25	1888.47	175.77
16	3.99	15.97	32.59	242024.54	30077.52
32	4.00	15.97	15.96	18.84	1875.00
Fehlerordnung	$O(1/n^2)$	$O(1/n^4)$	$O(1/n^4)$	—	—

Tabelle 4.6: $f(x) = (1 - x)^4$; Transformation 2.8

	$r = 2$	$r = 3$	$r = 4$	$r = 5$	$r = 6$
n	$ E_n $	$ E_n $	$ E_n $	$ E_n $	$ E_n $
4	$3.39 \cdot 10^{-2}$	$3.65 \cdot 10^{-4}$	$6.36 \cdot 10^{-3}$	$2.27 \cdot 10^{-3}$	$1.80 \cdot 10^{-2}$
8	$8.00 \cdot 10^{-3}$	$1.05 \cdot 10^{-4}$	$2.75 \cdot 10^{-4}$	$3.77 \cdot 10^{-5}$	$2.76 \cdot 10^{-5}$
16	$1.96 \cdot 10^{-3}$	$7.35 \cdot 10^{-6}$	$1.77 \cdot 10^{-5}$	$5.95 \cdot 10^{-7}$	$6.29 \cdot 10^{-7}$
32	$4.89 \cdot 10^{-4}$	$4.73 \cdot 10^{-7}$	$1.11 \cdot 10^{-6}$	$9.30 \cdot 10^{-9}$	$1.02 \cdot 10^{-8}$
64	$1.22 \cdot 10^{-4}$	$2.98 \cdot 10^{-8}$	$6.94 \cdot 10^{-8}$	$2.00 \cdot 10^{-10}$	$1.00 \cdot 10^{-10}$
n	$ E_n / E_{2n} $	$ E_n / E_{2n} $	$ E_n / E_{2n} $	$ E_n / E_{2n} $	$ E_n / E_{2n} $
4	4.24	3.48	23.13	60.21	652.17
8	4.08	14.29	15.54	63.36	43.88
16	4.01	15.54	15.95	63.98	61.67
32	4.01	15.87	15.99	46.50	102.00
Fehlerordnung	$O(1/n^2)$	$O(1/n^4)$	$O(1/n^4)$	$O(1/n^6)$	$O(1/n^6)$

Tabelle 4.7: $f(x) = x^{-1/3}$; Transformation 2.4

	$r = 2$	$r = 3$	$r = 4$	$r = 5$	$r = 6$
n	$ E_n $	$ E_n $	$ E_n $	$ E_n $	$ E_n $
4	$1.04 \cdot 10^0$	$2.68 \cdot 10^{-3}$	$1.04 \cdot 10^{-1}$	$2.72 \cdot 10^{-1}$	$4.99 \cdot 10^{-1}$
8	$3.87 \cdot 10^{-2}$	$3.83 \cdot 10^{-3}$	$7.35 \cdot 10^{-4}$	$6.99 \cdot 10^{-3}$	$2.53 \cdot 10^{-2}$
16	$1.47 \cdot 10^{-2}$	$9.73 \cdot 10^{-4}$	$2.95 \cdot 10^{-5}$	$7.17 \cdot 10^{-6}$	$4.78 \cdot 10^{-5}$
32	$5.68 \cdot 10^{-3}$	$2.44 \cdot 10^{-4}$	$5.12 \cdot 10^{-6}$	$3.72 \cdot 10^{-7}$	$4.74 \cdot 10^{-8}$
64	$2.22 \cdot 10^{-3}$	$6.10 \cdot 10^{-5}$	$8.43 \cdot 10^{-7}$	$3.51 \cdot 10^{-8}$	$4.79 \cdot 10^{-9}$
n	$ E_n / E_{2n} $	$ E_n / E_{2n} $	$ E_n / E_{2n} $	$ E_n / E_{2n} $	$ E_n / E_{2n} $
4	26.87	0.70	141.50	38.91	19.72
8	2.63	3.94	24.92	974.90	529.29
16	2.58	3.99	5.76	19.27	1008.44
32	2.56	4.00	6.07	10.60	9.90
Fehlerordnung	$O(1/n^{4/3})$	$O(1/n^2)$	$O(1/n^{8/3})$	$O(1/n^{10/3})$	–

Tabelle 4.8: $f(x) = x^{-1/3}$; Transformation 2.8

	$r = 2$	$r = 3$	$r = 4$	$r = 5$	$r = 6$
n	$ E_n $	$ E_n $	$ E_n $	$ E_n $	$ E_n $
4	$2.08 \cdot 10^{-1}$	$7.44 \cdot 10^{-2}$	$1.62 \cdot 10^{-2}$	$5.33 \cdot 10^{-3}$	$9.29 \cdot 10^{-3}$
8	$7.89 \cdot 10^{-2}$	$1.82 \cdot 10^{-2}$	$2.53 \cdot 10^{-3}$	$6.19 \cdot 10^{-4}$	$6.70 \cdot 10^{-4}$
16	$3.04 \cdot 10^{-2}$	$4.54 \cdot 10^{-3}$	$3.93 \cdot 10^{-4}$	$7.21 \cdot 10^{-5}$	$4.46 \cdot 10^{-5}$
32	$1.18 \cdot 10^{-2}$	$1.13 \cdot 10^{-3}$	$6.11 \cdot 10^{-5}$	$7.77 \cdot 10^{-6}$	$2.84 \cdot 10^{-6}$
64	$4.62 \cdot 10^{-3}$	$2.83 \cdot 10^{-4}$	$9.52 \cdot 10^{-6}$	$8.03 \cdot 10^{-7}$	$1.76 \cdot 10^{-7}$
n	$ E_n / E_{2n} $	$ E_n / E_{2n} $	$ E_n / E_{2n} $	$ E_n / E_{2n} $	$ E_n / E_{2n} $
4	2.64	4.09	6.40	8.61	13.87
8	2.60	4.01	6.44	8.59	15.02
16	2.58	4.02	6.43	9.28	15.70
32	2.55	3.99	6.42	9.68	16.14
Fehlerordnung	$O(1/n^{4/3})$	$O(1/n^2)$	$O(1/n^{8/3})$	$O(1/n^{10/3})$	$O(1/n^4)$

Tabelle 4.9: $f(x) = x^{-1/2}$; Transformation 2.4

	$r = 2$	$r = 3$	$r = 4$	$r = 5$	$r = 6$
n	$ E_n $	$ E_n $	$ E_n $	$ E_n $	$ E_n $
4	$2.81 \cdot 10^{-1}$	$7.01 \cdot 10^{-2}$	$6.06 \cdot 10^{-2}$	$2.20 \cdot 10^{-1}$	$4.28 \cdot 10^{-1}$
8	$1.33 \cdot 10^{-1}$	$2.85 \cdot 10^{-2}$	$4.55 \cdot 10^{-3}$	$4.38 \cdot 10^{-3}$	$1.90 \cdot 10^{-2}$
16	$6.45 \cdot 10^{-2}$	$9.92 \cdot 10^{-3}$	$1.30 \cdot 10^{-3}$	$1.13 \cdot 10^{-4}$	$3.39 \cdot 10^{-5}$
32	$3.17 \cdot 10^{-2}$	$3.48 \cdot 10^{-3}$	$3.25 \cdot 10^{-4}$	$2.12 \cdot 10^{-5}$	$1.91 \cdot 10^{-7}$
64	$1.57 \cdot 10^{-2}$	$1.22 \cdot 10^{-3}$	$8.14 \cdot 10^{-5}$	$3.81 \cdot 10^{-6}$	$1.02 \cdot 10^{-8}$
n	$ E_n / E_{2n} $	$ E_n / E_{2n} $	$ E_n / E_{2n} $	$ E_n / E_{2n} $	$ E_n / E_{2n} $
4	2.11	2.46	13.32	50.23	22.53
8	2.46	2.87	3.50	38.76	560.47
16	2.03	2.85	4.00	5.33	177.49
32	2.02	2.85	3.99	5.56	18.73
Fehlerordnung	$O(1/n^1)$	$O(1/n^{3/2})$	$O(1/n^2)$	$O(1/n^{5/2})$	–

Tabelle 4.10: $f(x) = x^{-1/2}$; Transformation 2.8

	$r = 2$	$r = 3$	$r = 4$	$r = 5$	$r = 6$
n	$ E_n $	$ E_n $	$ E_n $	$ E_n $	$ E_n $
4	$4.52 \cdot 10^{-1}$	$2.39 \cdot 10^{-1}$	$1.19 \cdot 10^{-1}$	$5.03 \cdot 10^{-2}$	$1.27 \cdot 10^{-2}$
8	$2.21 \cdot 10^{-1}$	$8.56 \cdot 10^{-2}$	$3.05 \cdot 10^{-2}$	$8.61 \cdot 10^{-3}$	$7.84 \cdot 10^{-4}$
16	$1.09 \cdot 10^{-1}$	$3.05 \cdot 10^{-2}$	$7.68 \cdot 10^{-3}$	$1.46 \cdot 10^{-3}$	$4.75 \cdot 10^{-5}$
32	$5.44 \cdot 10^{-2}$	$1.08 \cdot 10^{-2}$	$1.92 \cdot 10^{-3}$	$2.53 \cdot 10^{-4}$	$2.94 \cdot 10^{-6}$
64	$2.71 \cdot 10^{-2}$	$3.84 \cdot 10^{-3}$	$4.81 \cdot 10^{-4}$	$4.42 \cdot 10^{-5}$	$1.82 \cdot 10^{-7}$
n	$ E_n / E_{2n} $	$ E_n / E_{2n} $	$ E_n / E_{2n} $	$ E_n / E_{2n} $	$ E_n / E_{2n} $
4	2.05	2.79	3.90	5.84	16.20
8	2.03	2.81	3.97	5.90	16.51
16	2.00	2.82	4.00	5.77	16.16
32	2.00	2.81	3.99	5.72	16.15
Fehlerordnung	$O(1/n^1)$	$O(1/n^{3/2})$	$O(1/n^2)$	$O(1/n^{5/2})$	$O(1/n^4)$

Tabelle 4.11: $f(x) = x^{-2/3}$; Transformation 2.4

	$r = 2$	$r = 3$	$r = 4$	$r = 5$	$r = 6$
n	$ E_n $	$ E_n $	$ E_n $	$ E_n $	$ E_n $
4	$8.35 \cdot 10^{-1}$	$3.98 \cdot 10^{-1}$	$1.35 \cdot 10^{-1}$	$7.40 \cdot 10^{-2}$	$2.79 \cdot 10^{-1}$
8	$5.06 \cdot 10^{-1}$	$1.95 \cdot 10^{-1}$	$7.18 \cdot 10^{-2}$	$2.19 \cdot 10^{-2}$	$4.20 \cdot 10^{-3}$
16	$3.12 \cdot 10^{-1}$	$9.57 \cdot 10^{-2}$	$2.81 \cdot 10^{-2}$	$7.75 \cdot 10^{-3}$	$1.93 \cdot 10^{-3}$
32	$1.95 \cdot 10^{-1}$	$4.74 \cdot 10^{-2}$	$1.10 \cdot 10^{-2}$	$2.42 \cdot 10^{-3}$	$4.88 \cdot 10^{-4}$
64	$1.22 \cdot 10^{-1}$	$2.36 \cdot 10^{-2}$	$4.36 \cdot 10^{-3}$	$7.61 \cdot 10^{-4}$	$1.22 \cdot 10^{-4}$
n	$ E_n / E_{2n} $	$ E_n / E_{2n} $	$ E_n / E_{2n} $	$ E_n / E_{2n} $	$ E_n / E_{2n} $
4	1.65	2.04	1.88	3.38	66.43
8	1.62	2.04	2.56	2.83	2.18
16	1.60	2.02	2.55	3.20	3.95
32	1.60	2.01	2.52	3.18	4.00
Fehlerordnung	$O(1/n^{2/3})$	$O(1/n^1)$	$O(1/n^{4/3})$	$O(1/n^{5/3})$	$O(1/n^2)$

Tabelle 4.12: $f(x) = x^{-2/3}$; Transformation 2.8

	$r = 2$	$r = 3$	$r = 4$	$r = 5$	$r = 6$
n	$ E_n $	$ E_n $	$ E_n $	$ E_n $	$ E_n $
4	$1.12 \cdot 10^0$	$7.76 \cdot 10^{-1}$	$5.38 \cdot 10^{-1}$	$3.67 \cdot 10^{-1}$	$2.41 \cdot 10^{-1}$
8	$7.02 \cdot 10^{-1}$	$3.96 \cdot 10^{-1}$	$2.21 \cdot 10^{-1}$	$1.19 \cdot 10^{-1}$	$6.03 \cdot 10^{-2}$
16	$4.42 \cdot 10^{-1}$	$2.00 \cdot 10^{-1}$	$8.89 \cdot 10^{-2}$	$3.79 \cdot 10^{-2}$	$1.51 \cdot 10^{-2}$
32	$2.78 \cdot 10^{-1}$	$1.00 \cdot 10^{-1}$	$3.55 \cdot 10^{-2}$	$1.20 \cdot 10^{-2}$	$3.77 \cdot 10^{-3}$
64	$1.75 \cdot 10^{-1}$	$5.04 \cdot 10^{-2}$	$1.41 \cdot 10^{-2}$	$3.79 \cdot 10^{-3}$	$9.44 \cdot 10^{-4}$
n	$ E_n / E_{2n} $	$ E_n / E_{2n} $	$ E_n / E_{2n} $	$ E_n / E_{2n} $	$ E_n / E_{2n} $
4	1.60	1.96	2.43	3.08	4.00
8	1.59	1.98	2.49	3.14	3.99
16	1.59	2.00	2.50	3.16	4.01
32	1.59	1.98	2.52	3.17	3.99
Fehlerordnung	$O(1/n^{2/3})$	$O(1/n^1)$	$O(1/n^{4/3})$	$O(1/n^{5/3})$	$O(1/n^2)$

Symbolverzeichnis

$N = \{1, 2, 3, \dots\}$	Menge der natürlichen Zahlen
$N_0 = \{0, 1, 2, \dots\}$	Menge der natürlichen Zahlen mit Null
$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$	Menge der ganzen Zahlen
R	Menge der reellen Zahlen
$\mathcal{C}^m[a, b]$ bzw. $\mathcal{C}^m(a, b)$	Raum der auf dem Intervall $[a, b]$ bzw. (a, b) m -mal stetig differenzierbaren Funktionen
$\delta_{i,j}$	Kronecker-Symbol
Γ	Gammafunktion
$\ g\ _\infty := \max_{t \in [a,b]} g(t) $	Maximumnorm für Funktionen $g \in \mathcal{C}[a, b]$
$\ g\ _{L^2} := \left(\int_a^b g(t) ^2 dt \right)^{1/2}$	L^2 -Norm für Funktionen g mit $\int_a^b g(t) dt < \infty$

Literaturverzeichnis

- [1] Elliott, D., Sigmoidal Transformations and the trapezoidal rule, J. Austral. Maths. Soc. Ser. B **40**, (1998), E77-E137.
- [2] Elliott, D., The Euler-Maclaurin formula revisited, J. Austral. Maths. Soc. Ser. B **40**, (1998), E27-E76.
- [3] Elliott, D., Pröβdorf, S., An algorithm for the approximate solution of integral equations of Mellin type, Numer. Math. **70**, (1995), 427-452.
- [4] Freitag, E., Busam, R., *Funktionentheorie 1*, 3. Aufl., Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2000.
- [5] Gradshteyn, J.S., Ryzhik, I.M., *Table of Integrals, Series, and Products*, aus dem Russischen ins Englische von A. Jeffrey, 4. Aufl., Academic Press, New York, 1965.
- [6] Kreß, R., *Numerical Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1998.
- [7] Sag, T.W., Szekeres, G., Numerical evaluation of high-dimensional integrals, Math. Comp. **18**, (1964), 245-253.
- [8] Sidi, A., A new variable transformation for numerical integration. In: Numerical Integration IV, Hg. H. Brass und G. Hämmerlin, ISNM Bd. 112, Birkhäuser-Verlag, Basel, 1993, 359-373.
- [9] Vogt, A., *Substitutionsmethoden beim Nyström-Verfahren für Integralgleichungen zweiter Art*, Diplomarbeit, Institut für Numerische und Angewandte Mathematik Universität Göttingen, Göttingen, 1997.

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt habe.

Göttingen, den 8. November 2001