

Integralgleichungsmethode für ein
Randwertproblem aus der Theorie der
Supraleitung

Diplomarbeit

vorgelegt von

Harald Heese

aus Kassel

angefertigt im

Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
der Georg-August-Universität Göttingen

2003

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Einleitung | 5 |
| 2 | Grundlagen | 9 |
| 2.1 | Kompakte Operatoren | 9 |
| 2.2 | Integraloperatoren | 11 |
| 2.3 | Die Hölderräume $C^{0,\alpha}(G)$ und $C^{1,\alpha}(\mathbb{R})$ | 16 |
| 3 | Potentialtheorie | 19 |
| 3.1 | Harmonische Funktionen | 19 |
| 3.2 | Einfachschichtpotential über eine geschlossene Kurve | 22 |
| 3.3 | Einfachschichtpotential über einen offenen Bogen | 25 |
| 3.4 | Doppelschichtpotential über eine geschlossene Kurve | 32 |
| 4 | Ein Randwertproblem der Supraleitung | 35 |
| 4.1 | Problemstellung | 35 |
| 4.2 | Eindeutigkeit | 38 |
| 4.3 | Existenz | 42 |
| 5 | Numerische Behandlung | 61 |
| 5.1 | Trigonometrische Interpolation | 62 |
| 5.2 | Ein Kollokationsverfahren | 67 |
| 5.3 | Ein Quadraturformel-Verfahren | 69 |
| 5.4 | Das numerische Verfahren | 71 |
| 5.5 | Konvergenzanalyse | 73 |
| 5.6 | Numerische Beispiele | 81 |
| 6 | Ausblick | 89 |

Kapitel 1

Einleitung

Wir werden in dieser Arbeit die mathematische Behandlung eines Randwertproblems zur Laplace-Gleichung betrachten, das seinen Ursprung in der physikalischen Theorie der Supraleitung hat. Zum besseren Verständnis skizzieren wir daher zunächst die Geschichte der Supraleitung (vgl. [2]), bevor wir einen Einblick in die mathematische Modellbildung geben. Diese liefert dann eine Begründung für die Sinnhaftigkeit des im weiteren Verlauf der Arbeit betrachteten abstrakten mathematischen Problems.

Mit der Entdeckung der Supraleitung, des widerstandsfreien Stromflusses durch Heike Kamerlingh Onnes im Jahre 1913, beginnt ein neues Zeitalter in der Physik.

Onnes hatte das Phänomen bei Experimenten zum Verhalten von Metallen bei extrem niedrigen Temperaturen entdeckt. Erste Untersuchungen zeigten, dass der beobachtete Effekt in der Hauptsache von der Temperatur des Leiters abhing und im Bereich von 10^{-3} K bis 23 K (ca. -250°C) lag. Diese extremen Temperaturen, die nur mit Hilfe der sehr aufwändigen und kostspieligen Verflüssigung von Helium zu erreichen waren, ließen die Erforschung des Phänomens lange Zeit nur langsam vorankommen, für dessen Entdeckung Onnes mit dem Physik-Nobelpreis ausgezeichnet worden war.

Neue Bewegung in der Erforschung der Supraleitung entstand erst im Jahre 1986 durch die von Bednorz und Müller entdeckten Kupferoxide, die schon bei Temperaturen von ca. 125 K in den supraleitenden Zustand übergehen. In diesem Temperaturbereich (etwa -150°C) können die Metalle durch flüssigen Stickstoff, der in großtechnischen Anlagen relativ einfach hergestellt werden kann, mit geringem Aufwand abgekühlt werden, so dass heute Forschungen in größerem Rahmen möglich sind. Auch die technische Durchführbarkeit erster Anwendungen ist in diesem Temperaturbereich gegeben.

Das von Onnes entdeckte und in der Folgezeit untersuchte Phänomen wird durch zwei Eigenschaften charakterisiert. Unterhalb einer kritischen Temperatur H_{C_1} verschwindet auf der einen Seite der **elektrische Widerstand** R , zum anderen tritt

aber auch eine erstmals von Ochsenfeld und Meissner im Jahre 1933 beobachtete Verdrängung des **magnetischen Feldes** B im Leiterinneren auf. Dieser Zustand wird nach seinem Entdecker als **Meissner-Phase** bezeichnet.

Später wurde für verschiedene Materialien festgestellt, dass sie sich auch noch in einem Temperaturbereich unterhalb einer zweiten kritischen Temperatur H_{C_2} oberhalb von H_{C_1} im supraleitenden Zustand befinden, wenn das Material bereits flussdurchsetzt ist, die so genannten Flusswirbel aber durch Haftstellen an der Bewegung gehindert werden. Man bezeichnet diesen Zustand als **kritische** oder **Shubnikov-Phase**.

Entsprechend unterscheidet man heute zwei Typen von Supraleitern. Zum einen die so genannten **Typ-I-Supraleiter**, die ausschließlich in der flussfreien Meissner-Phase supraleitend sind, zum anderen die so genannten **Typ-II-Supraleiter**, die sowohl in der Meissner-Phase als auch in der flussdurchsetzten Shubnikov-Phase supraleitend sind.

Die Forschungen in den letzten Jahrzehnten haben sich vor allem auf Typ-II-Supraleiter in der Shubnikov-Phase konzentriert, da von ihnen auf Grund der höheren Temperaturen eine höhere Leitkapazität und damit bessere Möglichkeiten der technischen Nutzung erwartet wurden.

Neuere Ansätze (vgl. u.a. [3]) haben dagegen gezeigt, dass auch die Leitkapazität von Supraleitern in der Meissner-Phase entscheidend erhöht werden kann, wenn das den Supraleiter umgebende magnetische Feld durch magnetische Abschirmung beeinflusst wird. Weitere Forschungen in diesem Bereich hängen jedoch vor allem auch von der umfassenden Kenntnis des Einflusses magnetischer Abschirmungen auf den Supraleiter ab.

Wir werden in dieser Arbeit ein Problem im Zusammenhang mit der magnetischen Abschirmung von Supraleitern in der Meissner-Phase aufgreifen und in der mathematischen Modellierung untersuchen.

Wir betrachten dazu einen unendlich dünnen, in z -Richtung unendlich ausgedehnten supraleitenden Film Γ , der vollständig von einem in einem gewissen Abstand positionierten Magneten umschlossen sei. Dann gehorcht das den Leiter umgebende magnetische Feld \mathbf{B} den grundlegenden partiellen Differentialgleichungen der Magnetostatik (vgl. [9], Kapitel 5)

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0 \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \mu_0 \cdot \mathbf{J}, \end{aligned}$$

wobei die vektorwertige Größe \mathbf{J} die so genannte **Stromdichte**, ein magnetisches Analogon zur Ladungsdichte, bezeichnet.

Nimmt man nun an, \mathbf{B} sei die Rotation eines 2-mal stetig differenzierbaren Vektorfelds \mathbf{A} , so erfüllt das **Vektorpotential** \mathbf{A} die Gleichungen

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\operatorname{rot} \mathbf{A}) &= 0 \\ \Delta \mathbf{A} &= -\mu_0 \cdot \mathbf{J}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

ist also Lösung der vektorwertigen Poisson-Gleichung (vgl. [9], Abschnitt 5.4, S. 210f). (Die erste Gleichung ist immer erfüllt.)

In der oben beschriebenen Situation können wir auf Grund der unendlichen Ausdehnung in z -Richtung davon ausgehen, dass das magnetische Feld in z -Richtung homogen ist, dass also seine Werte - und damit auch die des Vektorpotentials \mathbf{A} - nicht von z abhängen. Wir setzen daher für die obige Situation mit einem **quasi-skalaren** Vektorpotential der Form

$$\mathbf{A}(x, y) = \left(0, 0, u(x, y) \right), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad (1.2)$$

mit einer 2-mal stetig differenzierbaren Funktion u an. Dann nimmt die zweite Gleichung in (1.1) die Form

$$\Delta \mathbf{A} = (0, 0, \Delta u) = -\mu_0 \cdot \mathbf{J} \quad (1.3)$$

an. Da die Stromdichte außerhalb des Leiters Γ identisch verschwindet, erhalten wir insbesondere, dass

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma \quad (1.4)$$

gilt, d.h. u ist eine Lösung der Laplace-Gleichung im Außengebiet des Leiters Γ .

Wir betrachten weiterhin die Übersetzung der Meissner-Phase in das Modell. Das für die Meissner-Phase charakteristische Verschwinden des magnetischen Felds im Inneren des Supraleiters bedeutet im Fall des betrachteten unendlich dünnen Films Γ insbesondere, dass an der Leiteroberfläche die Normalkomponente des magnetischen Felds \mathbf{B} verschwindet. Da das magnetische Feld als 2-dimensionale Rotation aus dem Potential u hervorgeht, erhalten wir an u die Bedingung, dass dessen Tangentialableitung auf der Leiteroberfläche verschwinden muss, was mit der Bedingung

$$u = \text{const} \quad \text{auf } \Gamma \quad (1.5)$$

gleichbedeutend ist.

Wir nehmen weiter an, dass der betrachtete supraleitende Film einen Strom $I \neq 0$ transportiere. Die Verdrängung des magnetischen Felds in der Meissner-Phase hat zur Folge, dass dieser Strom vollständig an der Leiteroberfläche fließen muss, und zwar tangential zu dieser (vgl. [4]). Da sich der Gesamtstrom aus

$$I = \int_{\Gamma} J ds$$

ergibt, erhalten wir auf Grund des Rotationszusammenhangs zwischen \mathbf{B} und u an u die weitere Bedingung

$$\int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u_-}{\partial \nu} - \frac{\partial u_+}{\partial \nu} \right) ds = I \neq 0. \quad (1.6)$$

Abschließend merken wir an, dass zur Modellierung des im Abstand positionierten Magneten für das magnetische Feld die Übergangsbedingungen

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n}_S &= \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n}_S \\ \frac{1}{\mu_1} \mathbf{B}_1 \times \mathbf{n}_S &= \frac{1}{\mu_2} \mathbf{B}_2 \times \mathbf{n}_S \end{aligned} \quad (1.7)$$

an der Trennfläche S zwischen Medien V_1, V_2 mit unterschiedlichen magnetischen Permeabilitäten μ_1, μ_2 gelten, wobei n_S die Einheitsnormale an S bezeichne (vgl. [9], Abschnitt 5.8, S. 226).

Wir werden das vorstehend physikalisch begründete Problem in Kapitel 4 als abstraktes, mathematisches Randwertproblem zur Laplace-Gleichung erneut vorstellen und eine Lösungstheorie für das formalisierte Problem des von einem Magneten umschlossenen supraleitenden Films entwickeln.

Zuvor werden in den beiden folgenden Kapiteln funktionalanalytische und potentialtheoretische Grundlagen erarbeitet werden, auf welche die in Kapitel 4 zu entwickelnde Lösungstheorie zurückgreift.

Im Anschluss an den theoretischen Teil werden wir eine Methode zur numerischen Berechnung von Näherungslösungen im allgemeinen Fall erarbeiten sowie deren Konvergenzverhalten untersuchen, bevor wir abschließend einige ausführliche numerische Beispiele angeben werden, die mit Hilfe der zuvor vorgestellten Methode berechnet worden sind.

Kapitel 2

Grundlagen

Dieses Kapitel dient der Einführung einzelner Begriffe und Theorien aus verschiedenen Bereichen der Funktionalanalysis, die in dem Randwertproblem zur Anwendung kommen, welches Gegenstand dieser Arbeit sein wird.

Das gesamte Kapitel ist an verschiedene Kapitel von [10] angelehnt. Wir verweisen an den entsprechenden Stellen auf detailliertere Beweise. Die Beweise in Abschnitt 2.2 sind dagegen genauer ausgeführt, da ihre Struktur in Beweisen späterer Kapitel wieder aufgegriffen wird.

2.1 Kompakte Operatoren

Die zentrale Aussage der in Kapitel 4 zu erarbeitenden Existenztheorie beruht auf dem in viel allgemeinerer Form gültigen Hauptresultat der so genannten *Riesz-Theorie* mit Aussagen über Operatorgleichungen 2. Art auf normierten Räumen. Die so genannten *kompakten Operatoren* bilden die in der Riesz-Theorie untersuchte Klasse von Operatoren. Wir werden sie und einige ihrer Eigenschaften zusammen mit der Riesz-Theorie in diesem Abschnitt vorstellen.

Definition 2.1 *Seien X, Y normierte Räume. Ein linearer Operator $A : X \rightarrow Y$ heißt kompakt, falls für alle beschränkten Teilmengen $U \subseteq X$ das Bild $A(U) \subseteq Y$ relativ kompakt ist.*

Satz 2.2 *Linearkombinationen kompakter Operatoren sind kompakt.*

Beweis: vgl. [10], Theorem 2.15, S. 21.

Satz 2.3 *Seien X, Y, Z normierte Räume. Seien $A : X \rightarrow Y$ und $B : Y \rightarrow Z$ beschränkte, lineare Operatoren. Dann ist das Kompositum $BA : X \rightarrow Z$ ein kompakter Operator, falls einer der Operatoren A oder B kompakt ist.*

Beweis: vgl. [10], Theorem 2.16, S. 21.

Satz 2.4 Seien X_1, X_2 normierte Räume. Für $i, k = 1, 2$ seien die Operatoren $A_{ik} : X_k \rightarrow X_i$ linear und beschränkt. Weiter sei der Produktraum $X := X_1 \times X_2$ mit der Maximumnorm ausgestattet, d.h. für $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in X$ sei

$$\|\varphi\|_\infty := \max \left\{ \|\varphi_1\|_{X_1}, \|\varphi_2\|_{X_2} \right\}.$$

Dann ist der Operator $A : X \rightarrow X$, definiert durch $(A\varphi)_i := A_{i1}\varphi_1 + A_{i2}\varphi_2$ für $i = 1, 2$, ein kompakter Operator, falls alle A_{ik} kompakt sind.

Beweis: Es seien die Operatoren A_{ik} für $i, k = 1, 2$ kompakt und es sei $(\varphi^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ eine beschränkte Folge, d.h. es gelte $\|\varphi^{(n)}\|_\infty \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit sind insbesondere auch die Folgen $(\varphi_i^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X_i$ beschränkt.

Da der Operator A_{11} kompakt ist, existieren ein $\psi_{11} \in X_1$ sowie eine Teilfolge $(\varphi^{(n_1(j))})_{j \in \mathbb{N}} \subseteq (\varphi^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, so dass

$$\left\| A_{11}\varphi_1^{(n_1(j))} - \psi_{11} \right\|_{X_1} \rightarrow 0 \quad \text{für } j \rightarrow \infty$$

gilt. (vgl. [10], Theorem 2.13, S. 21)

Auf Grund der Kompaktheit der Operatoren A_{12}, A_{21} und A_{22} existieren weiterhin Teilfolgen $(\varphi^{(n_4(j))})_{j \in \mathbb{N}} \subseteq (\varphi^{(n_3(j))})_{j \in \mathbb{N}} \subseteq (\varphi^{(n_2(j))})_{j \in \mathbb{N}} \subseteq (\varphi^{(n_1(j))})_{j \in \mathbb{N}}$ sowie Elemente $\psi_{12} \in X_1$ und $\psi_{21}, \psi_{22} \in X_2$ mit der Eigenschaft, dass

$$\begin{aligned} \left\| A_{12}\varphi_2^{(n_2(j))} - \psi_{12} \right\|_{X_1} &\rightarrow 0 \quad \text{für } j \rightarrow \infty, \\ \left\| A_{21}\varphi_1^{(n_3(j))} - \psi_{21} \right\|_{X_2} &\rightarrow 0 \quad \text{für } j \rightarrow \infty, \\ \left\| A_{22}\varphi_2^{(n_4(j))} - \psi_{22} \right\|_{X_2} &\rightarrow 0 \quad \text{für } j \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Wir erhalten also insgesamt für $\psi := (\psi_1, \psi_2)$ mit $\psi_i := \psi_{i1} + \psi_{i2}$ für $i = 1, 2$, dass

$$\begin{aligned} \|A\varphi^{(n_4(j))} - \psi\|_\infty &= \max \left\{ \left\| (A\varphi^{(n_4(j))})_1 - \psi_1 \right\|_{X_1}, \left\| (A\varphi^{(n_4(j))})_2 - \psi_2 \right\|_{X_2} \right\} \\ &\leq \max \left\{ \left\| A_{11}\varphi_1^{(n_4(j))} - \psi_{11} \right\|_{X_1} + \left\| A_{12}\varphi_2^{(n_4(j))} - \psi_{12} \right\|_{X_1}, \right. \\ &\quad \left. \left\| A_{21}\varphi_1^{(n_4(j))} - \psi_{21} \right\|_{X_2} + \left\| A_{22}\varphi_2^{(n_4(j))} - \psi_{22} \right\|_{X_2} \right\} \\ &\rightarrow 0 \quad \text{für } j \rightarrow \infty \end{aligned}$$

gilt, da die Teilfolge in den einzelnen Komponenten nach Konstruktion gegen die jeweiligen Grenzelemente konvergiert. Also konvergiert die Folge $(A\varphi^{(n_4(j))})_{j \in \mathbb{N}} \subseteq X$ gegen $\psi \in X$, und der Operator A ist nach [10], Theorem 2.13, S.21, kompakt. \square

Satz 2.5 Sei X ein normierter Raum und $A : X \rightarrow X$ ein kompakter Operator. Dann ist der Operator $Id - A$ genau dann injektiv, wenn er surjektiv ist. Falls $Id - A$ injektiv ist, so ist der inverse Operator $(Id - A)^{-1} : X \rightarrow X$ ein beschränkter Operator.

Beweis: vgl. [10], Theorem 3.4, S. 32.

Folgerung 2.6 Sei X ein normierter Raum und $A : X \rightarrow X$ ein kompakter Operator. Falls die homogene Gleichung

$$\varphi - A\varphi = 0$$

nur die triviale Lösung $\varphi = 0$ besitzt, so besitzt die inhomogene Gleichung

$$\varphi - A\varphi = f$$

für jedes $f \in X$ eine eindeutig bestimmte Lösung $\varphi \in X$, die stetig von f abhängt.

Beweis: vgl. [10], Corollary 3.5, S. 33.

2.2 Integraloperatoren

In diesem Abschnitt werden wir grundlegende Eigenschaften von Integraloperatoren rekapitulieren, wie sie in [10] vorgestellt werden.

Satz 2.7 Seien $G_1, G_2 \subset \mathbb{R}^2$ nichtleere, kompakte, Jordan-messbare Mengen mit der Eigenschaft, dass sie mit dem Abschluss ihres Inneren übereinstimmen. Sei $K : G_1 \times G_2 \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann heißt der lineare Operator $A : C(G_2) \rightarrow C(G_1)$, definiert durch

$$(A\varphi)(x) := \int_{G_2} K(x, y)\varphi(y) ds(y), \quad x \in G_1, \varphi \in C(G_2), \quad (2.1)$$

Integraloperator mit stetigem Kern K . Er ist ein beschränkter Operator mit

$$\|A\|_\infty = \max_{x \in G_1} \int_{G_2} |K(x, y)| ds(y).$$

Beweis: vgl. [10], Theorem 2.8, S.18.

Definition 2.8 Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ein beschränktes, einfach zusammenhängendes Gebiet. Dann heißt für $k \in \mathbb{N}$ der Rand ∂D des Gebiets D von Klasse C^k , falls ∂D das Bild einer 2π -periodischen, injektiven, regulären, k -mal stetig differenzierbaren Parametrisierungsfunktion x ist, d.h. falls eine injektive, 2π -periodische und auf ganz \mathbb{R} k -mal stetig differenzierbare Funktion $x : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit der Eigenschaft existiert, dass $\partial D = x([0, 2\pi))$ und $|x'(s)| \neq 0$ für alle $s \in [0, 2\pi)$ gilt.

Derartige Forderungen an die Regularität des Randes spielen vor allem eine Rolle bei der Anwendbarkeit des Gauß'schen Satzes und der Sätze von Green sowie bei Regularitätsaussagen für Potentiale. Wir werden in dieser Arbeit entsprechend benötigte Resultate jedoch nur zitieren, so dass wir an dieser Stelle auf eine genauere Darstellung der differentialgeometrischen Konsequenzen verzichten.

Satz 2.9 Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ein beschränktes, einfach zusammenhängendes Gebiet mit C^2 -Rand ∂D . Sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ kompakt. Dann ist der durch (2.1) definierte Integraloperator A mit stetigem Kern $K : G \times \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ ein kompakter Operator von $C(\partial D)$ nach $C(G)$.

Beweis: Sei $U \subseteq C(\partial D)$ beschränkt, d.h. $\|\varphi\|_\infty \leq C$ für alle $\varphi \in U$. Dann ist $A(U)$ beschränkt wegen

$$\begin{aligned} |(A\varphi)(x)| &= \left| \int_{\partial D} K(x, y) \varphi(y) ds(y) \right| \\ &\leq \int_{\partial D} |K(x, y) \varphi(y)| ds(y) \\ &\leq \int_{\partial D} \max_{(x, y) \in G \times \partial D} |K(x, y)| \|\varphi\|_\infty ds(y) \\ &\leq C \|K\|_{\infty, G \times \partial D} \cdot |\partial D| \end{aligned}$$

für alle $x \in G$ und für alle $\varphi \in C(\partial D)$.

Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von K auf dem Kompaktum $G \times \partial D$ existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so dass

$$\left| K(x, y) - K(x_0, y) \right| < \frac{\varepsilon}{C |\partial D|}$$

für alle $x, x_0 \in G$ mit $|x - x_0| < \delta$ und für alle $y \in \partial D$ gilt. Damit erhalten wir dass

$$\left| (A\varphi)(x) - (A\varphi)(x_0) \right| < \varepsilon$$

für alle $x, x_0 \in G$ mit $|x - x_0| < \delta$ und für alle $\varphi \in U$ gilt, da $\|\varphi\|_\infty \leq C$ für alle $\varphi \in U$ ist.

Demnach ist $A(U)$ gleichgradig stetig, und der Satz von Arzelà-Ascoli (vgl. [10], Theorem 1.18, S. 8) liefert dann, dass $A(U)$ relativ kompakt ist. Folglich ist A selbst kompakt. \square

Definition 2.10 Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ein beschränktes, einfach zusammenhängendes Gebiet mit C^2 -Rand ∂D . Sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ kompakt, so dass $G \cap \partial D \neq \emptyset$. Sei $K : G \times \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ definiert und stetig für alle $x \in G, y \in \partial D$ mit $x \neq y$. Dann heißt K schwach singulär, falls Konstanten $M > 0$ und $\alpha \in (0, 1]$ existieren, so dass

$$\left| K(x, y) \right| \leq M|x - y|^{\alpha-1} \quad \text{für alle } x \in G, y \in \partial D, x \neq y \quad (2.2)$$

gilt.

Satz 2.11 Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ein beschränktes, einfach zusammenhängendes Gebiet mit C^2 -Rand ∂D und in das Außengebiet von D orientierter Einheitsnormale ν . Sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ kompakt. Dann ist der durch (2.1) definierte Integraloperator A mit schwach singulärem Kern $K : G \times \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ ein kompakter Operator von $C(\partial D)$ nach $C(G)$.

Beweis: Im Unterschied zu dem oben behandelten Integraloperator mit stetigem Kern ist im Falle eines schwach singulären Kerns die Existenz des Integrals für Punkte $x_0 \in G \cap \partial D$ nicht offensichtlich.

Wir zeigen dementsprechend zuerst, dass der Ausdruck (2.1) im Fall eines schwach singulären Kerns K für Punkte $x_0 \in G \cap \partial D$ als uneigentliches Integral bezüglich x_0 existiert.

Da ∂D von Klasse C^2 ist, bedienen wir uns seiner Parametrisierung $x : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ (vgl. Definition 2.10) und betrachten $x_0 = x(s_0) \in G \cap \partial D$. Dann existiert $t \in [0, 1]$, so dass

$$\left\langle \nu(x(s)), \nu(x(s_0)) \right\rangle \geq \frac{1}{2} \quad \text{für alle } s \in [s_0 - t, s_0 + t] \quad (2.3)$$

gilt, da die Normalableitung stetig ist.

Wir definieren

$$\partial D_t^-(x_0) := \{x(s) : s \in [s_0 - t, s_0]\}$$

sowie

$$\partial D_t^+(x_0) := \{x(s) : s \in [s_0, s_0 + t]\}.$$

Dann wird durch (2.3) die Existenz einer Bijektion der Form

$$\begin{aligned} \tau^\pm : \partial D_t^\pm(x_0) &\rightarrow T_{x_0}^\pm(\partial D_t^\pm(x_0)) \cong [0, r_t^\pm] \\ x &\mapsto |x - x_0| \end{aligned}$$

sichergestellt, wobei $T_{x_0}^\pm(\partial D_t^\pm(x_0))$ den Tangentialraum an ∂D im Punkt x_0 bezeichnet, und r_t^\pm durch $r_t^\pm := |x(s_0 \pm t) - x_0|$ gegeben ist.

Die Integrationselemente über $\partial D_t^\pm(x_0)$ bzw. $T_{x_0}^\pm(\partial D_t^\pm(x_0))$ hängen mit Hilfe von (2.3) durch

$$ds = \frac{d\sigma}{\langle \nu(x(s)), \nu(x(s_0)) \rangle} \leq 2d\sigma, \quad s \in [s_0 - t, s_0 + t]$$

zusammen.

Wir teilen nun das Integrationsgebiet ∂D in $\partial D_t(x_0) := \partial D_t^+(x_0) \cup \partial D_t^-(x_0)$ sowie $\partial D \setminus \partial D_t(x_0)$ auf. Dann erhalten wir für $\partial D_t(x_0)$

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial D_t(x_0)} K(x_0, y) \varphi(y) ds(y) \right| &\leq \int_{\partial D_t(x_0)} |K(x_0, y)| |\varphi(y)| ds(y) \\ &\leq \|\varphi\|_{\infty, \partial D} \int_{\partial D_t(x_0)} |K(x_0, y)| ds(y) \\ &\leq \|\varphi\|_{\infty, \partial D} M \int_{\partial D_t(x_0)} |x_0 - y|^{\alpha-1} ds(y) \\ &\leq 2M \|\varphi\|_{\infty, \partial D} \left[\int_0^{r_t^+} \sigma^{\alpha-1} d\sigma + \int_0^{r_t^-} \sigma^{\alpha-1} d\sigma \right] \\ &= \frac{M \|\varphi\|_{\infty, \partial D}}{\alpha} \left[(r_t^+)^{\alpha} + (r_t^-)^{\alpha} \right] < \infty, \end{aligned}$$

wobei das Integral im Tangentialraum als uneigentliches Integral zu verstehen ist.

Für $y \in \partial D \setminus \partial D_t(x_0)$ ist $|x_0 - y| > C > 0$ und wir können demzufolge das Integral über $\partial D \setminus \partial D_t(x_0)$ abschätzen durch

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial D \setminus \partial D_t(x_0)} K(x_0, y) \varphi(y) ds(y) \right| &\leq \|\varphi\|_{\infty, \partial D} \int_{\partial D \setminus \partial D_t(x_0)} |K(x_0, y)| ds(y) \\ &\leq M \|\varphi\|_{\infty, \partial D} \int_{\partial D \setminus \partial D_t(x_0)} |x_0 - y|^{\alpha-1} ds(y) \\ &\leq M \|\varphi\|_{\infty, \partial D} \int_{\partial D \setminus \partial D_t(x_0)} C^{\alpha-1} ds(y) \\ &\leq M \|\varphi\|_{\infty, \partial D} C^{\alpha-1} |\partial D| < \infty. \end{aligned}$$

Dies zeigt die Existenz des Integrals für alle $x_0 \in G \cap \partial D$.

Für den Beweis der Abbildungseigenschaft und der Kompaktheit betrachten wir die stetige Abschneidefunktion $h : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, definiert durch

$$h(t) := \begin{cases} 0, & t \in [0, \frac{1}{2}], \\ 2t - 1, & t \in [\frac{1}{2}, 1], \\ 1, & t \in [1, \infty). \end{cases} \quad (2.4)$$

Mit Hilfe dieser Abschneidefunktion definieren wir für $n \in \mathbb{N}$ Kerne K_n durch

$$K_n(x, y) := h(n|x - y|)K(x, y), \quad x, y \in G \times \partial D, \quad x \neq y.$$

Die Kerne sind für alle $n \in \mathbb{N}$ und für $x \neq y \in G \times \partial D$ als Produkt stetiger Funktionen stetig. Da $h(n|x - y|) = 0$ ist für alle $|x - y| \leq \frac{1}{2n}$, verschwinden auch die Kerne K_n auf dieser Menge. Sie sind somit in $x = y$ durch 0 stetig ergänzbar und folglich stetig auf ganz $G \times \partial D$.

Dementsprechend sind die Operatoren A_n , definiert durch

$$(A_n\varphi)(x) := \int_{\partial D} K_n(x, y)\varphi(y) ds(y), \quad x \in G, \quad \varphi \in C(\partial D),$$

nach Satz 2.9 für alle $n \in \mathbb{N}$ kompakte Operatoren von $C(\partial D)$ nach $C(G)$.

Die Abbildungseigenschaft für A folgt nun, wenn wir zeigen können, dass $A_n\varphi \rightarrow A\varphi$ gleichmäßig in x konvergiert. Wir betrachten

$$\begin{aligned} \left| (A\varphi)(x) - (A_n\varphi)(x) \right| &= \left| \int_{\partial D} K(x, y)\{1 - h(n|x - y|)\}\varphi(y) ds(y) \right| \\ &\leq \int_{\{y \in \partial D : |x - y| \leq \frac{1}{n}\}} \left| K(x, y) \right| |\varphi(y)| ds(y) \\ &\leq M\|\varphi\|_{\infty, \partial D} \int_{\{y \in \partial D : |x - y| \leq \frac{1}{n}\}} |x - y|^{\alpha-1} ds(y). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Für hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$ ist zudem $\{y \in \partial D : |x - y| \leq \frac{1}{n}\} \subseteq \partial D_t(x)$ und wir können mit Hilfe der Abbildung in den Tangentialraum weiter abschätzen durch

$$\begin{aligned} M\|\varphi\|_{\infty, \partial D} \int_{\{y \in \partial D : |x - y| \leq \frac{1}{n}\}} |x - y|^{\alpha-1} ds(y) &\leq 4M\|\varphi\|_{\infty, \partial D} \int_{0^+}^{\frac{1}{n}} \sigma^{\alpha-1} d\sigma \\ &= \frac{4M}{\alpha} \|\varphi\|_{\infty, \partial D} n^{-\alpha}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Nun geht für $n \rightarrow \infty$ die rechte Seite in (2.6) gegen 0, und zwar unabhängig von x . Aus (2.5) und (2.6) zusammen erhalten wir schließlich, dass für $n \rightarrow \infty$ auch $A_n\varphi$ gleichmäßig gegen $A\varphi$ strebt, d.h. $\|A_n\varphi - A\varphi\|_{\infty} \rightarrow 0$.

Für die Kompaktheit von A nutzen wir nun noch, dass mit (2.5) und (2.6) auch

$$\|A_n - A\| = \sup_{\varphi \neq 0} \frac{\|A_n\varphi - A\varphi\|_{\infty}}{\|\varphi\|_{\infty}} \leq \frac{4M}{\alpha} n^{-\alpha}$$

gilt, und also für $n \rightarrow \infty$ die rechte Seite wie oben gegen 0 geht, d.h. die Operatorfolge A_n gleichmäßig gegen A konvergiert. Die Kompaktheit von A folgt nun letztlich aus [10], Theorem 2.17, S.21. \square

2.3 Die Hölderräume $C^{0,\alpha}(G)$ und $C^{1,\alpha}(\mathbb{R})$

Die in Kapitel 4 zu entwickelnde Lösungstheorie stützt sich wesentlich auf die Theorie der so genannten *gleichmäßig hölderstetigen* Funktionen, die in diesem Abschnitt eingeführt werden. Dies sind Funktionen, die zwischen den stetigen und beschränkten Funktionen auf der einen Seite und stetig differenzierbaren Funktionen auf der anderen Seite liegen. Wir definieren formal:

Definition 2.12 *Eine Funktion $\varphi : \mathbb{R}^m \supseteq G \rightarrow \mathbb{R}$ heißt gleichmäßig hölderstetig mit Hölderexponent $\alpha \in (0, 1]$, falls eine Konstante $C > 0$ existiert, so dass*

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq C|x - y|^\alpha$$

für alle $x, y \in G$ gilt.

Der durch $C^{0,\alpha}(G)$ bezeichnete lineare Raum aller beschränkten und gleichmäßig hölderstetigen Funktionen mit Hölderexponent α heißt Hölderraum.

Satz 2.13 *Der Hölderraum $C^{0,\alpha}(G)$ ist mittels der Norm*

$$\|\varphi\|_{0,\alpha} := \|\varphi\|_{G,\infty} + \sup_{\substack{x,y \in G \\ x \neq y}} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

ein Banachraum.

Beweis: vgl. [10], Theorem 7.2, S. 95.

Definition 2.14 *Sei $\alpha \in (0, 1]$. Eine Funktion $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ heißt gleichmäßig hölderstetig differenzierbar mit Hölderexponent α , falls eine Konstante $C > 0$ existiert, so dass*

$$|\varphi'(x) - \varphi'(y)| \leq C|x - y|^\alpha$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt.

Der lineare Raum der gleichmäßig hölderstetig differenzierbaren Funktionen mit beschränkter Ableitung wird mit $C^{1,\alpha}(\mathbb{R})$ bezeichnet.

Satz 2.15 *Der Hölderraum $C^{1,\alpha}(\mathbb{R})$ wird vermöge der Norm*

$$\|\varphi\|_{1,\alpha} := \|\varphi\|_\infty + \|\varphi'\|_{0,\alpha}$$

ein Banachraum.

Beweis: vgl. [1], Section 1.3B (ii), S. 27.

Folgerung 2.16 *Die Räume $C_{2\pi,e}^{0,\alpha}$ (bzw. $C_{2\pi,e}^{1,\alpha}$) der 2π -periodischen, geraden, gleichmäßig hölderstetigen (bzw. hölderstetig differenzierbaren) Funktionen sind Banachräume.*

Beweis: Die Menge der 2π -periodischen, geraden, gleichmäßig hölderstetigen (bzw. hölderstetig differenzierbaren) Funktionen bildet einen abgeschlossenen Unterraum in $C^{0,\alpha}(\mathbb{R})$ (bzw. $C^{1,\alpha}(\mathbb{R})$) und ist als solcher nach [10], Abschnitt 1.2, S. 5, vollständig, also ein Banachraum. \square

Satz 2.17 *Sei $0 < \alpha < 1$. Dann ist die Einbettungsabbildung*

$$Id^{1,\alpha} : C^2(\mathbb{R}) \rightarrow C^{1,\alpha}(\mathbb{R})$$

kompakt.

Beweis: vgl. [1], Section 1.3F (i), (1.3.34), S. 36.

Kapitel 3

Potentialtheorie

Die Potentialtheorie beschäftigt sich mit der Lösungstheorie von Randwertproblemen, die aus der so genannten *Laplace'schen Differentialgleichung* entstehen. Derartige Probleme treten unter anderem, wie schon in der Einleitung beschrieben, in der Magnetostatik auf (vgl. (1.4)). Ihre Lösungen, die so genannten *harmonischen Funktionen*, stellen in diesem Zusammenhang *Potentiale* für zeitunabhängige Magnetfeldverteilungen dar.

Dieses Kapitel dient der Einführung verschiedener Ansatzfunktionen, die die Modellierung unterschiedlicher Randwertprobleme zur Laplace-Gleichung ermöglichen, sowie der Darstellung einer Reihe von zentralen Eigenschaften dieser Ansatzfunktionen. Mit ihrer Hilfe werden wir in Kapitel 4 das in der Einleitung beschriebene Randwertproblem der Supraleitung lösen.

3.1 Harmonische Funktionen

Wir werden zuerst die grundlegendsten Beispiele der in der Potentialtheorie behandelten so genannten *harmonischen Funktionen* vorstellen. In der Folge werden dann noch einige allgemeine Resultate über harmonische Funktionen angegeben.

Definition 3.1 *Eine 2-mal stetig differenzierbare Funktion $u : \mathbb{R}^2 \supseteq D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt harmonisch in D , falls sie eine Lösung der Laplace-Gleichung ist, d.h. falls sie*

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } D$$

erfüllt, wobei

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$$

ist.

Definition 3.2 Die Funktion $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, für $x \neq y$, definiert durch

$$\Phi(x, y) := \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x - y|},$$

heißt Grundlösung der Laplace-Gleichung im \mathbb{R}^2 .

Satz 3.3 Die Funktion Φ ist für alle $x, y \in \mathbb{R}^2, x \neq y$, definiert und stetig. Sie ist für alle kompakten Mengen $G_1 \times G_2 \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ mit $G_1 \cap G_2 = \emptyset$ schwach singular, d.h. es existieren Konstanten $\alpha \in (0, 1]$ und $M > 0$, so dass

$$|\Phi(x, y)| \leq M|x - y|^{\alpha-1} \quad \text{für alle } x \in G_1, y \in G_2 \text{ mit } x \neq y$$

gilt. Weiterhin ist Φ für festes $y \in \mathbb{R}^2$ harmonisch bezüglich x in ganz $\mathbb{R}^2 \setminus \{y\}$.

Beweis: Für $x, y \in \mathbb{R}^2$ mit $x \neq y$ besitzt Φ keine Singularitäten, ist also definiert und als Komposition stetiger Funktionen selbst wieder stetig.

Aus der reellen Analysis (vgl. [6], Nr. 50, Bsp. 4, S. 289) ist weiterhin bekannt, dass für beliebiges $\alpha > 0$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\ln s}{s^\alpha} = 0 \quad (3.1)$$

gilt.

Sei $G_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ eine beliebige kompakte Menge. Wir beschränken uns für festes $x \in G_1$ und $R > 0$ auf die kompakte Menge $B[x; R] := \{y \in \mathbb{R}^2 : |x - y| \leq R\}$. Dann gilt für alle $y \in B[x; R] \setminus \{x\}$

$$\left| \frac{\ln \frac{1}{|x-y|}}{|x-y|^{-\alpha}} \right| = \frac{\left| \ln |x-y|^{-1} \right|}{(|x-y|^{-1})^\alpha} \leq C_R$$

mit einer nur von R abhängigen Konstante $C_R > 0$ und einer Konstante $\alpha \in (0, 1]$, da für $|x - y| \rightarrow 0$, also $|x - y|^{-1} \rightarrow \infty$, die Funktion wegen (3.1) in $B[x; R]$ beschränkt ist. Es gilt also $|\Phi(x, y)| \leq C_R|x - y|^{-\alpha}$ für alle $y \in B[x, R] \setminus \{x\}$ unabhängig von x , also ist Φ schwach singular für jedes $x \in G_1$ und für jedes Kompaktum $G_2 \subseteq \mathbb{R}^2$.

Für festes $y \in \mathbb{R}^2$ und $x \neq y$ berechnen wir

$$\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x_i} = -\frac{1}{2\pi} \frac{x_i - y_i}{|x - y|^2}, \quad i = 1, 2 \quad (3.2)$$

sowie

$$\frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x_i^2} = -\frac{1}{2\pi} \frac{|x - y|^2 - 2(x_i - y_i)^2}{|x - y|^4}, \quad i = 1, 2$$

woraus

$$\frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x_2^2} = -\frac{1}{2\pi} \frac{2|x-y|^2 - 2(x_1 - y_1)^2 - 2(x_2 - y_2)^2}{|x-y|^4} = 0,$$

also die Harmonizität von Φ bezüglich x folgt. \square

Bemerkung: Die Harmonizität der Grundlösung überträgt sich in Bereichen, in denen das Vertauschen der Differentiationsreihenfolge erlaubt ist, auch auf ihre partiellen Ableitungen.

Wir tragen nun ohne Beweise einige der zentralen Eigenschaften von harmonischen Funktionen zusammen, die in Abschnitt 4.2 Anwendung finden.

Satz 3.4 (Maximum-Minimum-Prinzip) *Eine in einem Gebiet harmonische, nicht konstante Funktion besitzt in dem Gebiet kein Maximum und kein Minimum.*

Beweis: vgl. [10], Theorem 6.8, S. 71.

Folgerung 3.5 *Sei D ein beschränktes Gebiet und u harmonisch in D sowie stetig in \overline{D} . Dann nimmt u sein Maximum und sein Minimum auf dem Rand von D an.*

Beweis: vgl. [10], Corollary 6.9, S. 71.

Satz 3.6 (Mittelwertsatz) *Sei u eine in der Kreisscheibe $B(x_0; r) \subseteq \mathbb{R}^2$ harmonische und in $B[x_0; r]$ stetige Funktion. Dann gilt*

$$u(x_0) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B(x_0; r)} u(y) ds(y).$$

Beweis: vgl. [10], Theorem 6.7, S. 70.

Satz 3.7 *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet mit Rand ∂D der Klasse C^1 und nach außen orientierter Einheitsnormale ν an ∂D . Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus D)$ eine beschränkte harmonische Funktion. Dann existiert eine Konstante $u_\infty \in \mathbb{R}$, so dass*

$$u(x) = u_\infty + \int_{\partial D} \left[u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \Phi(x, y) \right] ds(y) \quad (3.3)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^2 \setminus D$ gilt. Weiter sind

$$\int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds = 0 \quad (3.4)$$

sowie die Mittelwerteigenschaft im Unendlichen

$$u_\infty = \frac{1}{2\pi r} \int_{|y|=r} u(y) ds(y) \quad (3.5)$$

für hinreichend großes $r \in \mathbb{R}$ erfüllt.

Beweis: vgl. [10], Theorem 6.10, S. 71.

Satz 3.8 (Inneres Dirichletproblem) Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet mit zusammenhängendem Rand ∂D der Klasse C^2 , sei f eine auf ∂D stetige Funktion. Dann existiert höchstens eine in D harmonische und in \overline{D} stetige Funktion u mit $u = f$ auf ∂D .

Beweis: vgl. [10], Theorem 6.11, S. 76.

3.2 Einfachschichtpotential über eine geschlossene Kurve

In diesem Abschnitt werden wir das so genannte *Einfachschichtpotential* über eine geschlossene Kurve als eine der Ansatzfunktionen für potentialtheoretische Probleme vorstellen sowie verschiedene grundlegende Eigenschaften zusammentragen.

Definition 3.9 Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ein einfach zusammenhängendes, beschränktes Gebiet mit Rand ∂D von Klasse C^2 . Sei $\varphi \in C(\partial D)$. Dann heißt die Funktion

$$u(x) := \int_{\partial D} \Phi(x, y) \varphi(y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D, \quad (3.6)$$

(logarithmisches) Einfachschichtpotential mit Dichte φ .

Satz 3.10 Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ein einfach zusammenhängendes, beschränktes Gebiet mit Rand ∂D von Klasse C^2 . Dann ist das Einfachschichtpotential (3.6) mit stetiger Dichte φ eine stetige Funktion auf ganz \mathbb{R}^2 , wobei für $x \in \partial D$ das Integral (3.6) als uneigentliches Integral bezüglich x existiert.

Beweis: Der Rand ∂D eines C^2 -glatten, einfach zusammenhängenden und beschränkten Gebiets sowie die Menge $B[0; R] = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq R\}$ sind kompakt. Für hinreichend großes R ist außerdem $\partial D \subseteq B[0; R]$. Für solche R ist die Funktion Φ nach Satz 3.3 schwach singulär auf $B[0; R] \times \partial D$.

Wir definieren nun

$$(S_R\varphi)(x) := \int_{\partial D} \Phi(x, y) \varphi(y) ds(y), \quad x \in B[0; R] \setminus \partial D,$$

fassen also den Ausdruck (3.6) als Operator von $C(\partial D)$ in die Funktionen auf $B[0; R]$ auf, und erhalten so mit Satz 2.11, dass $S_R\varphi = u|_{B[0; R]}$ in $C(B[0; R])$ liegt, da der Kern Φ schwach singulär ist. Darüber hinaus impliziert Satz 2.11 ebenfalls, dass für $x \in \partial D$ der Ausdruck (3.6) als uneigentliches Integral bezüglich x existiert.

Wir erhalten damit die Aussage des Satzes, da für beliebiges $x \in \mathbb{R}^2$ ein $R > 0$ existiert, so dass $x \in B[0; R]$ gilt. \square

Satz 3.11 *Das Einfachschichtpotential mit stetiger Dichte φ ist genau dann beschränkt auf ganz \mathbb{R}^2 , wenn $\int_{\partial D} \varphi ds = 0$ ist.*

Ist die Bedingung $\int_{\partial D} \varphi ds = 0$ erfüllt, so gilt sogar $u(x) \rightarrow 0$ für $|x| \rightarrow \infty$ gleichmäßig für alle Richtungen.

Beweis: Auf Grund der Beschränktheit von D existiert ein $R > 0$, so dass $\overline{D} \subseteq B[0; R]$ ist, und es gilt somit $x \notin \partial D$ für alle $x \notin B[0; R]$. Für solche x schreiben wir (3.6) wie folgt um:

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \left[\ln \frac{1}{|x|} + \ln \frac{|x|}{|x-y|} \right] \varphi(y) ds(y) \\ &= \Phi(x, 0) \int_{\partial D} \varphi ds + \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \ln \frac{|x|}{|x-y|} \varphi(y) ds(y). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Damit gilt für $x \notin B[0; R]$

$$|x| - R \leq |x - y| \leq |x| + R \quad (3.8)$$

für alle $y \in \partial D$. Wir formen die erste Ungleichung äquivalent um zu

$$\frac{|x|}{|x-y|} \leq 1 + \frac{R}{|x| - R}$$

und folgern daraus, dass

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{|x|}{|x-y|} \leq 1$$

gilt. Eine analoge Umformung der zweiten Ungleichung in (3.8) liefert

$$\frac{|x|}{|x-y|} \geq 1 - \frac{R}{|x+R|}$$

sowie

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{|x|}{|x-y|} \geq 1,$$

so dass wir insgesamt

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{|x|}{|x-y|} = 1$$

erhalten.

Dies impliziert

$$\left| \ln \frac{|x|}{|x-y|} \right| \leq \max \left\{ \left| \ln \left[1 - \frac{R}{|x+R|} \right] \right|, \left| \ln \left[1 + \frac{R}{|x-R|} \right] \right| \right\} \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty,$$

gleichmäßig für alle $y \in \partial D$ und für alle Richtungen, und wir erhalten für den zweiten Term in (3.7) die Aussage

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \ln \frac{|x|}{|x-y|} \varphi(y) ds(y) \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty, \quad (3.9)$$

gleichmäßig für alle Richtungen, womit die zweite Aussage des Satzes folgt.

Aus (3.9) folgt insbesondere, dass der Integralausdruck beschränkt ist. Die erste Aussage des Satzes folgt dann aus der Tatsache, dass $\int_{\partial D} \varphi ds$ eine Konstante und $\ln \frac{1}{|x|}$ eine unbeschränkte Funktion ist. \square

Satz 3.12 *Das Einfeldschichtpotential (3.6) mit stetiger Dichte ist in $\mathbb{R}^2 \setminus \partial D$ 2-mal stetig differenzierbar und harmonisch.*

Beweis: vgl. [10], Abschnitt 6.3, S. 78.

Satz 3.13 *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ein einfach zusammenhängendes, beschränktes Gebiet mit Rand ∂D von Klasse C^2 und äußerer Einheitsnormale ν an ∂D . Dann lässt sich die Normalableitung des Einfeldschichtpotentials (3.6) mit stetiger Dichte φ stetig von D bzw. $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ nach ∂D durch*

$$\frac{\partial u_{\pm}}{\partial \nu}(x) = \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} \varphi(y) ds(y) \mp \frac{1}{2} \varphi(x), \quad x \in \partial D, \quad (3.10)$$

fortsetzen, wobei das Integral als uneigentliches Integral bezüglich x existiert und der Ausdruck

$$\frac{\partial u_{\pm}}{\partial \nu}(x) := \lim_{h \rightarrow +0} \left\langle \nu(x), \text{grad } u(x \pm h\nu(x)) \right\rangle$$

im Sinne gleichmäßiger Konvergenz auf ∂D zu verstehen ist.

Beweis: vgl. [10] Theorem 6.18, S. 81.

Bemerkung: Die Funktion $\frac{\partial u_{\pm}}{\partial \nu}$ stellt auf ∂D eine stetige Funktion dar, da sie im Sinne gleichmäßiger Konvergenz auf ∂D existiert.

Zum Abschluss dieses Abschnitts geben wir noch einen Satz an, der das Verhalten der 2. Ableitungen des Einfachschichtpotentials auf dem Rand ∂D beschreibt. Der Satz wird an der angegebenen Stelle unter schwächeren Voraussetzungen mit einem stärkeren Resultat bewiesen. Wir verzichten an dieser Stelle jedoch auf eine derart allgemeine Fassung, da sie für die weitere Arbeit nicht notwendig ist.

Satz 3.14 *Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ein einfach zusammenhängendes, beschränktes Gebiet mit Rand ∂D von Klasse C^3 . Dann lassen sich die zweiten Ableitungen des Einfachschichtpotentials (3.6) mit konstanter Dichte gleichmäßig stetig von D bzw. $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ nach ∂D fortsetzen.*

Beweis: vgl. [14], Korollar 2.28, S.31.

Bemerkung: Insbesondere stellt das Einfachschichtpotential unter den Regularitätsforderungen aus Satz 3.14 eine auf ∂D 2-mal stetig differenzierbare Funktion dar.

3.3 Einfachschichtpotential über einen offenen Bogen

Angelehnt an [10], Abschnitt 7.6, werden wir in diesem Abschnitt das Einfachschichtpotential über einen offenen Bogen betrachten und dabei ähnliche Regularitätsaussagen wie im vorigen Abschnitt erarbeiten.

Definition 3.15 (offener Bogen) *Eine Teilmenge $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ heißt Bogen der Klasse C^k , $k \in \mathbb{N}$, falls eine k -mal stetig differenzierbare, injektive, reguläre Abbildung $x : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ existiert, so dass $\Gamma = x([-1, 1])$ ist. Dabei bedeutet regulär, dass $x'(s) \neq 0$ ist für alle $s \in [-1, 1]$. Wir nennen x dann eine reguläre Parametrisierung von Γ .*

Weiterhin bezeichnen wir die Endpunkte $x(-1)$ und $x(1)$ von Γ mit z_{-1} bzw. z_1 sowie das Innere des Bogens Γ mit $\Gamma_0 := \Gamma \setminus \{z_1, z_{-1}\}$.

Die Einheitsnormale ν an den Bogen Γ definieren wir durch

$$\nu(x(t)) := \frac{1}{|x'(t)|} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x'(t), \quad t \in [-1, 1]. \quad (3.11)$$

Satz 3.16 Sei $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Bogen der Klasse C^3 . Für $\tilde{\psi} \in C(\Gamma)$ sei die Funktion ψ gegeben durch

$$\psi(y) := \frac{\tilde{\psi}(y)}{\sqrt{|y - z_1| \cdot |y - z_{-1}|}}, \quad y \in \Gamma_0. \quad (3.12)$$

Dann existiert der Ausdruck $\int_{\Gamma} \psi ds$ als uneigentliches Integral bezüglich der Endpunkte z_1 und z_{-1} .

Beweis: Wir zeigen die Existenz des Integrals nur bezüglich des Endpunkts z_1 und gehen dabei analog zu den Betrachtungen zur Existenz des Integrals für einen schwach singulären Integraloperator wie im Beweis zu Satz 2.11 vor.

Auf Grund der Stetigkeit der in (3.11) definierten Normalen auf $[-1, 1]$ existiert ein $t \in [0, 1)$, so dass

$$\langle \nu(x(s)), \nu(x(1)) \rangle \geq \frac{1}{2} \quad \text{für alle } s \in [t, 1] \quad (3.13)$$

gilt. Wie im Beweis zu Satz 2.11 definieren wir $\Gamma_t(1) := \{x(s) : s \in [t, 1]\} \subseteq \Gamma$ sowie $r_1 := |x(t) - z_1|$.

Dann wird durch (3.13) wiederum eine Bijektion zwischen $\Gamma_t(1)$ und dem Tangentialraum an Γ im Punkt z_1 sichergestellt, wobei die Integrationselemente durch

$$ds = \frac{d\sigma}{\langle \nu(x(s)), \nu(x(1)) \rangle} \leq 2 d\sigma, \quad s \in [t, 1],$$

zusammenhängen.

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_t(1)} \psi(y) ds(y) \right| &\leq \int_{\Gamma_t(1)} |\psi(y)| ds(y) \\ &\leq \|\tilde{\psi}\|_{\infty, \Gamma} \int_{\Gamma_t(1)} \left| |y - z_1| \cdot |y - z_{-1}| \right|^{-\frac{1}{2}} ds(y) \\ &\leq C \|\tilde{\psi}\|_{\infty, \Gamma} \int_{\Gamma_t(1)} |y - z_1|^{-\frac{1}{2}} ds(y) \\ &\leq 2C \|\tilde{\psi}\|_{\infty, \Gamma} \int_{0^+}^{r_1} \sigma^{-\frac{1}{2}} d\sigma \\ &= 4C \|\tilde{\psi}\|_{\infty, \Gamma} r_1^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

wobei das Integral im Tangentialraum als uneigentliches Integral bezüglich 0 existiert, und wir $C := \text{dist}(\Gamma_t(1), z_{-1})^{-\frac{1}{2}} > 0$ gesetzt haben.

Die Aussage des Satzes folgt nun durch analoge Argumentation für den Endpunkt z_{-1} sowie aus der Existenz des Integrals über $\Gamma \setminus (\Gamma_t(1) \cup \Gamma_s(-1))$, wo der Integrand stetig und beschränkt ist. \square

Satz 3.17 *Sei $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Bogen der Klasse C^3 . Für die Funktion ψ , gegeben durch (3.12), existiert der Ausdruck $\int_{\Gamma} \Phi(x, y) \psi(y) ds(y)$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$ als uneigentliches Integral bezüglich der Endpunkte z_1 und z_{-1} .*

Beweis: Die Dichte ψ ist in Γ_0 stetig, kann in den Endpunkten jedoch Singularitäten entwickeln. Daher ist die Existenz des Integrals bezüglich der Endpunkte nicht gesichert, zumal für $x = z_{\pm 1}$ diese möglichen Singularitäten durch den Logarithmus im Integrand noch verstärkt werden. Wir zeigen wiederum zuerst die Existenz des Integrals bezüglich des Endpunkts z_1 .

Sei zuerst $x \notin \Gamma$. Dann ist $C := \max_{y \in \Gamma} |\Phi(x, y)| < \infty$, und wir können für $\Gamma_t(1)$ wie in Satz 3.16 wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_t(1)} \Phi(x, y) \psi(y) ds(y) \right| &\leq \int_{\Gamma_t(1)} |\Phi(x, y)| \cdot |\psi(y)| ds(y) \\ &\leq C \int_{\Gamma_t(1)} |\psi(y)| ds(y) < \infty. \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung für $x \notin \Gamma$, da der letzte Integralausdruck wie im Beweis zu Satz 3.16 als uneigentliches Integral bezüglich z_1 existiert (vgl. (3.14)).

Sei jetzt $x \in \Gamma \setminus \{z_1\}$. Dann betrachten wir wieder wie oben $\Gamma_t(1)$ und verkleinern es gegebenenfalls soweit, dass $x \notin \Gamma_t(1)$ ist. Wir setzen dann wieder $C := \max_{y \in \Gamma_t(1)} |\Phi(x, y)| < \infty$. Die Existenz des Integrals bezüglich z_1 erfolgt nun wie im oben betrachteten Fall, bezüglich x dagegen ist sie auf Grund der Stetigkeit der Dichte in Γ_0 durch die Sätze 2.11 und 3.3 gesichert.

Abschließend betrachten wir den Fall $x = z_1$. Für $\Gamma_t(1)$ wie in Satz 3.16 betrachten wir wieder

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma_t(1)} \Phi(x, y) \psi(y) ds(y) \right| &\leq \int_{\Gamma_t(1)} |\Phi(x, y)| \cdot |\psi(y)| ds(y) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma_t(1)} \left| \ln \frac{1}{|z_1 - y|} \right| \cdot \left| \frac{\tilde{\psi}(y)}{\sqrt{|y - z_1| \cdot |y - z_{-1}|}} \right| ds(y) \\ &\leq \frac{C \|\tilde{\psi}\|_{\infty, \Gamma}}{2\pi} \int_{\Gamma_t(1)} \left| \frac{\ln \frac{1}{|z_1 - y|}}{|y - z_1|^{\frac{1}{2}}} \right| ds(y) \\ &\leq \frac{C \|\tilde{\psi}\|_{\infty, \Gamma}}{\pi} \int_{0^+}^{r_1} \frac{|\ln \frac{1}{\sigma}|}{\sigma^{\frac{1}{2}}} d\sigma. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Dabei haben wir erneut die für $\Gamma_t(1)$ bestehende Bijektion mit dem Tangentialraum an Γ im Punkt z_1 ausgenutzt und auch wie zuvor schon $C := \text{dist}(\Gamma_t(1), z_{-1})^{-\frac{1}{2}} > 0$ gesetzt. Die Existenz von (3.15) als uneigentliches Integral bezüglich 0 folgt nun mit [6], Nr. 89, Bsp. 5, S. 487.

Analoge Betrachtungen für den Endpunkt z_{-1} liefern schließlich die Aussage des Satzes. \square

Bemerkung:

Die in Satz 3.17 behandelten Betrachtungen des Ausdrucks $\int_{\Gamma} \Phi(x, y) \psi(y) ds(y)$ sind allein auf Grund der möglichen Endpunktsingularitäten der Dichte ψ notwendig. Für bis in die Endpunkte stetige Dichten oder Dichteanteile folgt die Existenz des Integrals direkt aus den Sätzen 2.11 und 3.3.

Vorbereitend für die Stetigkeitsaussage des Einfachschichtpotentials über einen offenen Bogen benötigen wir noch die folgende Hilfsaussage.

Lemma 3.18 *Sei $\tilde{\Gamma} \subseteq \mathbb{R}^2$ eine geschlossene Kurve von Klasse C^2 . Dann ist die Funktion*

$$f(x) := \left(\int_{\tilde{\Gamma}} \left| \ln \frac{1}{|x-y|} \right|^3 ds(y) \right)^{\frac{1}{3}}, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \tilde{\Gamma}, \quad (3.16)$$

stetig auf ganz \mathbb{R}^2 .

Beweis: Nach [6], Nr. 50, Bsp. 7, S. 289 gilt

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \sigma^\alpha |\ln \sigma|^3 = 0, \quad \forall \alpha > 0,$$

d.h. es existiert $\alpha \in (0, 1)$ sowie zu $R > 0$ eine Konstante $M > 0$, so dass

$$M \geq \sigma^\alpha |\ln \sigma|^3 = \sigma^\alpha \left| \ln \frac{1}{\sigma} \right|^3 \quad \text{für alle } \sigma \in (0, R]$$

gilt. Damit gilt aber auch für beliebiges $y \in \tilde{\Gamma}$

$$\left| \ln \frac{1}{|x-y|} \right|^3 \leq M |x-y|^{-\alpha}$$

für alle $x \in \mathbb{R}^2$ mit $|x-y| \leq R$. Also ist der Integrand in (3.16) auf Grund der Kompaktheit von $\tilde{\Gamma}$ für beliebige kompakte Mengen $G \subset \mathbb{R}^2$ schwach singulär auf $G \times \tilde{\Gamma}$. Damit ist f^3 mit Satz 2.11 auf beliebigen kompakten Mengen in \mathbb{R}^2 - also in ganz \mathbb{R}^2 - stetig, was mit der Stetigkeit der dritten Wurzel auf ganz \mathbb{R}^2 auch die Stetigkeit von f auf ganz \mathbb{R}^2 nach sich zieht. \square

Satz 3.19 Sei $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Bogen der Klasse C^3 . Für die Funktion ψ , gegeben durch (3.12), ist die Funktion

$$u(x) := \int_{\Gamma} \Phi(x, y) \psi(y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (3.17)$$

stetig auf ganz \mathbb{R}^2 .

Beweis: Wir verwenden wieder die Abschneidefunktion h aus (2.4) und definieren für $n \in \mathbb{N}$

$$\chi_n(y) := h(n|y - z_1|) \cdot h(n|y - z_{-1}|), \quad y \in \Gamma.$$

Dann ist $\chi_n \in C(\Gamma)$ mit $\chi_n \equiv 0$ auf $\Gamma \cap \left(B[z_1; \frac{1}{2n}] \cup B[z_{-1}; \frac{1}{2n}] \right)$ und $\chi_n \equiv 1$ auf $\Gamma \setminus \left(B[z_1; \frac{1}{n}] \cup B[z_{-1}; \frac{1}{n}] \right)$.

Weiter sei $\tilde{\Gamma} \subseteq \mathbb{R}^2$ eine geschlossene, C^2 -glatte Kurve, die Γ enthalte. Dann definieren wir

$$\varphi_n(y) := \begin{cases} \chi_n(y) \cdot \psi(y), & y \in \Gamma_0, \\ 0, & y \in \tilde{\Gamma} \setminus \Gamma_0, \end{cases} \quad (3.18)$$

und sehen, dass auf Grund der Stetigkeit von χ_n und ψ auf Γ_0 und der Tatsache, dass χ_n in einer Umgebung der Endpunkte z_1 und z_{-1} verschwindet, die Funktionen φ_n für alle $n \in \mathbb{N}$ in $C(\tilde{\Gamma})$ liegen.

Wir definieren nun

$$u_n(x) := \int_{\tilde{\Gamma}} \Phi(x, y) \varphi_n(y) ds(y) = \int_{\Gamma} \Phi(x, y) \chi_n(y) \psi(y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \tilde{\Gamma}, \quad (3.19)$$

und bemerken mit Hilfe von Satz 3.10, dass die Funktionen u_n für alle $n \in \mathbb{N}$ in $C(\mathbb{R}^2)$ liegen, da die Dichten φ_n für alle $n \in \mathbb{N}$ stetig sind und $\tilde{\Gamma}$ eine geschlossene Kurve von Klasse C^2 ist.

Die Aussage des Satzes folgt nun, wenn wir zeigen können, dass die Funktionen u_n gleichmäßig gegen u konvergieren.

Der Beweis wird an dieser Stelle wiederum nur für den Endpunkt z_1 geführt; mit gleicher Argumentation kann auch der Endpunkt z_{-1} behandelt werden.

Wir definieren $\Gamma(z_1, \frac{1}{n}) := \Gamma \cap B[z_1; \frac{1}{n}]$ und erhalten

$$u(x) - u_n(x) = \int_{\Gamma(z_1, \frac{1}{n}) \cup \Gamma(z_{-1}, \frac{1}{n})} \Phi(x, y) [1 - \chi_n(y)] \psi(y) ds(y) \quad (3.20)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^2$. Wir greifen die schon im Beweis zu Satz 3.16 verwendete Bijektion zwischen $\Gamma_t(1)$ und dem Tangentialraum an Γ im Punkt z_1 auf. Dann ist wiederum

$\Gamma(z_1, \frac{1}{n}) \subseteq \Gamma_t(1)$ für hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$, und wir können für solche $n \in \mathbb{N}$ in folgender Weise abschätzen

$$\int_{\Gamma(z_1, \frac{1}{n})} \frac{1}{|y - z_1|^{\frac{3}{4}}} ds(y) \leq 2 \int_0^{\frac{1}{n}} \sigma^{-\frac{3}{4}} d\sigma = 8 n^{-\frac{1}{4}}. \quad (3.21)$$

Mit Hilfe der Abschätzung (3.21) und der Hölder'schen Ungleichung für Integrale mit $p = 3$ und $q = \frac{3}{2}$ können wir insgesamt abschätzen:

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Gamma(z_1, \frac{1}{n})} \Phi(x, y) [1 - \chi_n(y)] \psi(y) ds(y) \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma(z_1, \frac{1}{n})} \left| \ln \frac{1}{|x - y|} \right| \cdot |\psi(y)| ds(y) \\ & \leq \frac{C \|\tilde{\psi}\|_{\infty, \Gamma}}{2\pi} \int_{\Gamma(z_1, \frac{1}{n})} \left| \ln \frac{1}{|x - y|} \right| \cdot \frac{1}{|y - z_1|^{\frac{1}{2}}} ds(y) \\ & \leq \frac{C \|\tilde{\psi}\|_{\infty, \Gamma}}{2\pi} \left(\int_{\Gamma(z_1, \frac{1}{n})} \left| \ln \frac{1}{|x - y|} \right|^3 ds(y) \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\int_{\Gamma(z_1, \frac{1}{n})} \left| \frac{1}{|y - z_1|^{\frac{1}{2}}} \right|^{\frac{3}{2}} ds(y) \right)^{\frac{2}{3}} \\ & \leq \frac{4C \|\tilde{\psi}\|_{\infty, \Gamma}}{\pi} n^{-\frac{1}{6}} \cdot \left(\int_{\tilde{\Gamma}} \left| \ln \frac{1}{|x - y|} \right|^3 ds(y) \right)^{\frac{1}{3}}, \end{aligned}$$

wobei wir wieder $C := \text{dist}(\Gamma_t(1), z_{-1})^{-\frac{1}{2}} > 0$ gesetzt haben.

Da der letzte Integralausdruck nach Lemma 3.18 auf ganz \mathbb{R}^2 eine stetige Funktion darstellt, ist er für beliebige kompakte Mengen $K \subseteq \mathbb{R}^2$ beschränkt. Es folgt also

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Gamma(z_1, \frac{1}{n})} \Phi(x, y) [1 - \chi_n(y)] \psi(y) ds(y) \right| \\ & \leq \frac{4C \|\tilde{\psi}\|_{\infty, \Gamma}}{\pi} n^{-\frac{1}{6}} \left(\int_{\tilde{\Gamma}} \left| \ln \frac{1}{|x - y|} \right|^3 ds(y) \right)^{\frac{1}{3}} \\ & \leq \frac{4C \|\tilde{\psi}\|_{\infty, \Gamma}}{\pi} n^{-\frac{1}{6}} \cdot C_1 \end{aligned}$$

für alle $x \in K \subset \mathbb{R}^2$ kompakt.

Für $n \rightarrow \infty$ geht die rechte Seite gegen 0, und da für das Integral über $\Gamma(z_{-1}, \frac{1}{n})$ eine analoge Aussage gilt, folgt die kompakte Konvergenz $u_n \rightarrow u$ für $n \rightarrow \infty$ und damit die (lokal) gleichmäßige Konvergenz auf ganz \mathbb{R}^2 . \square

Satz 3.20 Die in (3.17) definierte Funktion u ist genau dann beschränkt auf ganz \mathbb{R}^2 , wenn $\int_{\Gamma} \psi ds = 0$ ist.

Ist die Bedingung $\int_{\Gamma} \psi ds = 0$ erfüllt, so gilt sogar $u(x) \rightarrow 0$ für $|x| \rightarrow \infty$ gleichmäßig für alle Richtungen.

Beweis: Analog zu Satz 3.11. □

Satz 3.21 Die in (3.17) definierte Funktion u ist in $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ 2-mal stetig differenzierbar und harmonisch.

Beweis: vgl. [10], Abschnitt 6.3, S. 78.

Satz 3.22 Sei $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Bogen der Klasse C^3 und sei ν die in (3.11) definierte Einheitsnormale an Γ . Dann lässt sich die Normalableitung der in (3.17) definierten Funktion u einseitig stetig von $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ nach Γ_0 durch

$$\frac{\partial u_{\pm}}{\partial \nu}(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} \psi(y) ds(y) \mp \frac{1}{2} \psi(x), \quad x \in \Gamma_0, \quad (3.22)$$

fortsetzen, wobei das Integral als uneigentliches Integral bezüglich x existiert und der Ausdruck

$$\frac{\partial u_{\pm}}{\partial \nu}(x) := \lim_{h \rightarrow +0} \left\langle \nu(x), \operatorname{grad} u(x \pm h\nu(x)) \right\rangle$$

im Sinne lokal gleichmäßiger Konvergenz auf Γ_0 zu verstehen ist.

Beweis: Wir ergänzen den Bogen Γ zu einer geschlossenen C^3 -glatten Kurve $\tilde{\Gamma}$. Die Dichte ψ ergänzen wir analog zu (3.18) zu einer auf $\tilde{\Gamma}$ stetigen Dichte χ mit $\chi(y) = 0$ auf $\tilde{\Gamma} \setminus \Gamma_0$. Dann erhalten wir aus Satz 3.13, dass die Aussage für die modifizierten Dichten gleichmäßig auf ganz $\tilde{\Gamma}$ gilt. Der Grenzübergang $n \rightarrow \infty$ in den modifizierten Dichten liefert schließlich die Aussage. □

Wie für das Einfachschichtpotential über eine geschlossene Kurve werden wir auch für das Einfachschichtpotential über einen offenen Bogen noch eine Aussage über das Verhalten der 2. Ableitungen auf Γ vorstellen.

Satz 3.23 Sei $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Bogen der Klasse C^3 . Dann lassen sich die zweiten Ableitungen der in (3.17) definierten Funktion für konstante Dichten u einseitig lokal gleichmäßig stetig von $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ nach Γ_0 fortsetzen.

Beweis: Analog zu Satz 3.14. □

Bemerkung: Aus Satz 3.23 folgt insbesondere, dass das Einfachschichtpotential mit konstanter Dichte eine auf Γ 2-mal lokal gleichmäßig stetig differenzierbare Funktion darstellt.

3.4 Doppelschichtpotential über eine geschlossene Kurve

Das so genannte *Doppelschichtpotential* bildet die zweite grundlegende Ansatzfunktion zur Lösung potentialtheoretischer Probleme. Im Folgenden wird es zusammen mit seinen wichtigsten Eigenschaften betrachtet.

Definition 3.24 Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ein einfach zusammenhängendes, beschränktes Gebiet mit Rand ∂D der Klasse C^2 . Sei $\psi \in C(\partial D)$. Dann heißt die Funktion

$$v(x) := \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \psi(y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D, \quad (3.23)$$

(logarithmisches) Doppelschichtpotential mit Dichte ψ .

Satz 3.25 Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ein einfach zusammenhängendes, beschränktes Gebiet mit Rand ∂D der Klasse C^2 und äußerer Einheitsnormale ν an ∂D . Dann lässt sich das Doppelschichtpotential (3.23) mit stetiger Dichte ψ stetig von D bzw. $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ nach ∂D durch

$$v_{\pm}(x) = \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \psi(y) ds(y) \pm \frac{1}{2} \psi(x), \quad x \in \partial D, \quad (3.24)$$

fortsetzen, wobei das Integral als uneigentliches Integral bezüglich x existiert und der Ausdruck

$$v_{\pm}(x) := \lim_{h \rightarrow +0} v(x \pm h\nu(x))$$

im Sinne gleichmäßiger Konvergenz auf ∂D zu verstehen ist.

Beweis: vgl. [10], Theorem 6.17, S. 80.

Satz 3.26 Das Doppelschichtpotential (3.23) mit stetiger Dichte ψ ist beschränkt auf ganz \mathbb{R}^2 .

Beweis: vgl. [10], Abschnitt 6.1, S. 73.

Satz 3.27 Das Doppelschichtpotential (3.23) mit stetiger Dichte ψ ist in $\mathbb{R}^2 \setminus \partial D$ 2-mal stetig differenzierbar und harmonisch.

Beweis: vgl. [10], Abschnitt 6.3, S. 78.

Satz 3.28 Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ein einfach zusammenhängendes, beschränktes Gebiet mit Rand ∂D der Klasse C^2 mit äußerer Einheitsnormale ν an ∂D . Dann erfüllt das Doppelschichtpotential (3.23) mit stetiger Dichte ψ

$$\lim_{h \rightarrow +0} \left\langle \nu(x), \operatorname{grad} v(x + h\nu(x)) - \operatorname{grad} v(x - h\nu(x)) \right\rangle \quad (3.25)$$

gleichmäßig für alle $x \in \partial D$.

Beweis: vgl. [10], Theorem 6.19, S. 82.

Kapitel 4

Ein Randwertproblem der Supraleitung

Wir wenden uns in diesem Kapitel dem schon in der Einleitung physikalisch motivierten Randwertproblem aus der Theorie der Supraleitung zu. Nachdem das Problem mathematisch abstrakt formuliert worden ist, werden wir in der Folge die beiden Hauptaussagen - Eindeutigkeit und Existenz - erarbeiten. Dabei basiert der Eindeutigkeitsbeweis auf dem Maximum-Minimum-Prinzip (vgl. Satz 3.4), die Existenzaussage wird mittels einer Integralgleichungsmethode und der Riesz-Theorie für kompakte Operatoren (vgl. Abschnitt 2.1) bewiesen werden.

4.1 Problemstellung

Dieser Abschnitt dient der formalen Formulierung des in der Einleitung vorgestellten Randwertproblems. Neben der abstrakten Darstellung als eine Kopplung eines Dirichletproblems mit einem Transmissionsproblem werden in diesem Abschnitt auch die Verbindungen zu dem physikalisch motivierten Problem aus der Einleitung hergestellt.

Wir betrachten in dieser Arbeit das folgende Problem:

Problem 4.1 Es sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ein beschränktes, einfach zusammenhängendes Gebiet mit Rand ∂D der Klasse C^2 und in das Außengebiet von D gerichteter Einheitsnormalen ν an den Rand ∂D . Weiter sei $\Gamma \subseteq D$ ein offener, C^3 -glatter Bogen.

Wir definieren $D_e := \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$, und es seien weiter $\mu > 0$ bzw. $\mu_e > 0$ die magnetischen Permeabilitäten in D bzw. D_e .

Gesucht sind harmonische Funktionen

$$u \in C^2(D \setminus \Gamma) \cap C(\overline{D}) \tag{4.1}$$

sowie

$$u_e \in C^2(D_e) \cap C(\overline{D_e}) \quad (4.2)$$

von der Form

$$u_e(x) = \mu_e A \cdot \Phi(x, 0) + \tilde{u}_e(x) \quad \text{für alle } x \in D_e, \quad (4.3)$$

so dass die Randbedingungen

$$u = u_e, \quad \frac{1}{\mu} \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{1}{\mu_e} \frac{\partial u_e}{\partial \nu} \quad \text{auf } \partial D \quad (4.4)$$

sowie

$$\int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds \neq 0 \quad (4.5)$$

$$u = 0 \quad \text{auf } \Gamma \quad (4.6)$$

erfüllt sind, wobei $A \in \mathbb{R}$ mit $A \neq 0$ und $\tilde{u}_e \in C^2(D_e) \cap C(\overline{D_e})$ als beschränkt vorausgesetzt werden.

Bevor wir uns der eindeutigen Lösbarkeit von Problem 4.1 zuwenden, werden wir erst noch seine Verbindung zu dem in der Einleitung vorgestellten, physikalisch begründeten Randwertproblem der Supraleitung herstellen.

Eine visuelle Veranschaulichung der geometrischen Situation von Problem 4.1 liefert Abbildung 4.1.

Der in der Einleitung erwähnte, unendlich dünne Supraleiter wird im gegebenen Problem durch den offenen Bogen Γ repräsentiert; der im Abstand positionierte Magnet füllt in dem Problem 4.1 zu Grunde liegenden Modell das gesamte Außengebiet D_e aus.

Dann repräsentiert das Potential (4.1) das quasi-skalare Vektorpotential der magnetischen Feldverteilung (vgl. (1.2)) im den Supraleiter umgebenden Raum D . In analoger Weise wird (1.2) im Magneten D_e durch das Potential (4.2) modelliert. Beide Potentiale erfüllen als harmonische Funktionen die Laplace-Gleichung abseits von Γ (vgl. (1.4)), wobei der Rand ∂D des Magneten im Modell ausgenommen ist.

Die Übergangsbedingungen (1.7) gehen unter Ausnutzung des Rotationszusammenhangs zwischen dem magnetischen Feld und seinem Potential in die Transmissionsbedingungen (4.4) über, während der Meissner-Zustand (1.5) in das Modell entsprechend mit Bedingung (4.6) und der Stromtransport (1.6) mit den Bedingungen (4.3) bzw. (4.5) eingeht.

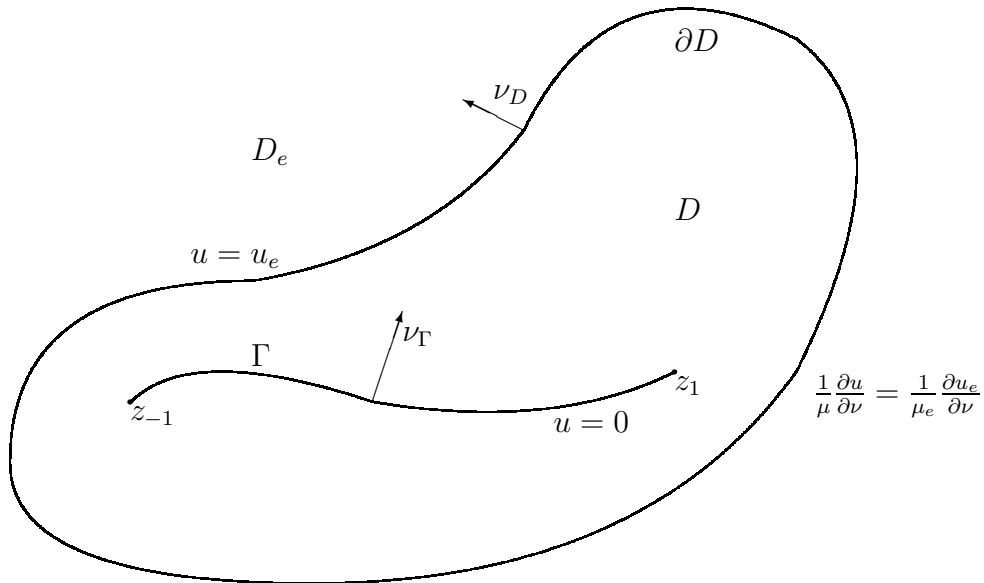


Abbildung 4.1: Problemstellung

Dabei sind die Entsprechungen in den meisten Fällen offensichtlich; allein der Zusammenhang zwischen (1.6) und (4.3) bzw. (4.5) bedarf zusätzlicher Erklärung.

Wir weisen zunächst darauf hin, dass die Bedingungen (4.3) und (4.5) eng miteinander verknüpft sind. So erfüllt nach Satz 3.7 jede im Außengebiet eines beschränkten C^2 -glatten Gebiets beschränkte, harmonische Funktion die Bedingung (4.5) nicht, so dass die Bedingung (4.3) auf Grund der Unbeschränktheit der Grundlösung Φ ein hinreichendes Kriterium für die Erfüllung von (4.5) ist. Da andererseits die Grundlösung nicht die einzige unbeschränkte harmonische Funktion darstellt, erkennen wir, dass die Bedingung (4.3) kein notwendiges Kriterium für (4.5) ist; sie dient lediglich der Festlegung des unbeschränkten Anteils auf einen eindimensionalen Unterraum.

Die Beziehung zwischen (4.5) und (1.6) sehen wir, wenn wir den ersten Green'schen Satz (vgl. [10], Theorem 6.3, S. 69) für die Konstante 1 und eine Lösung u von Problem 4.1 formal auf das Gebiet $D \setminus \Gamma$ anwenden. Wir erhalten

$$\int_{D \setminus \Gamma} \{1 \cdot \Delta u + \langle \text{grad } 1, \text{grad } u \rangle\} dx = \int_{\partial D} 1 \cdot \frac{\partial u}{\partial \nu} ds - \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u_-}{\partial \nu} - \frac{\partial u_+}{\partial \nu} \right) ds.$$

Dann liefert die Harmonizität der Lösung u , dass die linke Seite in der obigen Gleichung verschwindet, woraus wir schließlich die Entsprechung von (4.5) und (1.6) erkennen.

4.2 Eindeutigkeit

Wir werden in diesem Abschnitt die Frage erörtern, ob das Problem 4.1 mehr als eine Lösung zulässt, und sie negativ beantworten.

Zum Beweis der Eindeutigkeitsaussage werden wir uns des in Satz 3.4 vorgestellten Maximum-Minimum-Prinzips bedienen, da es eine wesentlich weniger aufwändige Behandlung der Dirichlet-Randbedingung auf dem Bogen ermöglicht. Diesem Vorteil steht der Nachteil gegenüber, dass wir zur Anwendung des Maximum-Minimum-Prinzips auf ein Transmissionsproblem noch genauere Informationen über das Verhalten der Normalableitung einer harmonischen Funktion u in ihrem Maximum und Minimum benötigen.

Eine entsprechende Aussage liefern die beiden folgenden vorbereitenden Sätze, die ein zweidimensionales Analogon zu den in [12], S. 164ff, für den \mathbb{R}^3 behandelten Aussagen bilden.

Satz 4.2 (Poisson'sche Integralformel) *Sei $B(x_0; r) \subseteq \mathbb{R}^2$ die offene Kreisscheibe um x_0 mit Radius $r > 0$. Sei u harmonisch in $B(x_0; r)$ und stetig in $B[x_0; r]$. Dann gilt*

$$u(x) = \frac{r^2 - |x - x_0|^2}{2\pi r} \int_{\partial B(x_0; r)} \frac{u(y)}{|x - y|^2} ds(y) \quad \text{für alle } x \in B[x_0; r]. \quad (4.7)$$

Beweis: Wir betrachten für $x \in B[x_0; r]$ und $y \in \partial B(x_0; r)$ das von x, y und x_0 aufgespannte ebene Dreieck. Für den Winkel β bei y gilt dann

$$|x_0 - y| \cdot |x - y| \cdot \cos \beta = \langle x_0 - y, x - y \rangle$$

sowie der Cosinus-Satz

$$|x - x_0|^2 = |x_0 - y|^2 + |x - y|^2 - 2|x_0 - y| \cdot |x - y| \cos \beta.$$

Für $y \in \partial B(x_0; r)$ ist $|x_0 - y| = r$, und wir erhalten so aus den geometrischen Identitäten die Beziehung

$$r^2 - |x - x_0|^2 = -2\langle y - x_0, x - y \rangle - |x - y|^2. \quad (4.8)$$

Wir definieren nun eine Funktion v auf $B[x_0; r]$ durch die rechte Seite in (4.7) und erhalten nach dem Einsetzen von (4.8), dass für alle $x \in B(x_0; r)$

$$\begin{aligned} v(x) &= - \int_{\partial B(x_0; r)} u(y) \left(2 \frac{1}{2\pi} \left\langle \frac{y - x_0}{|y - x_0|}, \frac{x - y}{|x - y|^2} \right\rangle + \frac{1}{2\pi r} \right) ds(y) \\ &= - \int_{\partial B(x_0; r)} u(y) \left(2 \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} + \frac{1}{2\pi r} \right) ds(y) \end{aligned}$$

gilt, da $r = |y - x_0|$, $\nu(y) = \frac{y-x_0}{|y-x_0|}$ und $\text{grad}_y \Phi(x, y) = \frac{x-y}{|x-y|^2}$ ist.

Da der erste Summand ein Doppelschichtpotential über $\partial B(x_0; r)$ und der zweite Summand eine Konstante ist, stellt v eine in $B(x_0; r)$ harmonische und in $B[x_0; r]$ stetige Funktion dar (vgl. Sätze 3.25 und 3.27).

Die Sprungbeziehungen für das Doppelschichtpotential (vgl. Satz 3.25) und Einsetzen der Darstellung von v aus (4.7) liefern dann für $x \in \partial B(x_0; r)$

$$\begin{aligned} v(x) &= - \int_{\partial B(x_0; r)} u(y) \left(2 \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} + \frac{1}{2\pi r} \right) ds(y) + u(x) \\ &= \frac{r^2 - |x - x_0|^2}{2\pi r} \int_{\partial B(x_0; r)} \frac{u(y)}{|x - y|^2} ds(y) + u(x). \end{aligned}$$

Da für $x \in \partial B(x_0; r)$ jedoch $|x - x_0| = r$ gilt, verschwindet der Integralterm über $\partial B(x_0; r)$. Also gilt $v(x) = u(x)$ auf $\partial B(x_0; r)$. Nun liefert Satz 3.8, dass $u = v$ in $B[x_0; r]$ gilt. \square

Satz 4.3 Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet mit C^2 -Rand ∂D und äußerer Einheitsnormale ν an ∂D . Sei $u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ harmonisch in D . Sei $x^+ \in \partial D$ bzw. $x^- \in \partial D$, so dass gilt:

$$u(x^+) = \sup_{x \in D} u(x) \quad \text{bzw.} \quad u(x^-) = \inf_{x \in D} u(x).$$

Dann gilt

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x^+) \geq 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}(x^-) \leq 0.$$

Ist eine der obigen Ungleichungen mit Gleichheit erfüllt, so ist u konstant in D .

Beweis: Wir führen den Beweis an dieser Stelle nur ausführlich für x^+ . Für x^- kann analog vorgegangen werden.

Für die erste Aussage betrachten wir

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x^+) := \lim_{h \rightarrow +0} \frac{u(x^+ - h\nu(x^+)) - u(x^+)}{-h} \geq 0,$$

da der Zähler wegen der Extremaleigenschaft von u in x^+ stets nichtpositiv ist.

Zum Beweis der zweiten Aussage stellen wir fest, dass auf Grund der Glätte des Randes ∂D ein $r > 0$ existiert, so dass für $x_0 := x^+ - r\nu(x^+)$ die Kreisscheibe $B(x_0; r)$ in D enthalten ist und zudem $B[x_0; r] \cap \partial D = \{x^+\}$ gilt.

Für $0 < h < r$ liegt $x_h := x^+ - h\nu(x^+)$ in $B(x_0; r)$. Wir betrachten für solche x_h die in $B(x_0; r)$ harmonische und in $B[x_0; r]$ stetige Funktion $v^+ := u - u(x^+)$. Mit Hilfe der Darstellungsformel (4.7) erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{u(x_h) - u(x^+)}{h} &= \frac{v^+(x_h)}{r - |x_h - x_0|} \\ &= \frac{1}{r - |x_h - x_0|} \cdot \frac{r^2 - |x_h - x_0|^2}{2\pi r} \int_{\partial B(x_0; r)} \frac{v^+(y)}{|x_h - y|^2} ds(y) \\ &= \frac{r + |x_h - x_0|}{2\pi r} \int_{\partial B(x_0; r)} \frac{v^+(y)}{|x_h - y|^2} ds(y). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Da v^+ auf Grund der Extremaleigenschaft von u in x^+ in $B[x_0; r]$ nichtpositiv ist, führt die Abschätzung $|x_h - y|^2 \leq (2r)^2$ an keiner Stelle des Integrationsbereichs zu einer Änderung des Vorzeichens im Integranden und damit zu einer Abschätzung des Integrals nach oben. Auch die Abschätzung $r + |x_h - x_0| \geq r$ führt zu einer Abschätzung des Gesamtausdrucks nach oben. Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{r + |x_h - x_0|}{2\pi r} \int_{\partial B(x_0; r)} \frac{v^+(y)}{|x_h - y|^2} ds(y) &\leq \frac{r}{2\pi r} \int_{\partial B(x_0; r)} \frac{v^+(y)}{(2r)^2} ds(y) \\ &= \frac{1}{8\pi r^2} \int_{\partial B(x_0; r)} v^+(y) ds(y). \end{aligned} \quad (4.10)$$

Mit Hilfe des Mittelwertsatzes 3.6 und der Definition von v^+ erhalten wir schließlich

$$\frac{1}{8\pi r^2} \int_{\partial B(x_0; r)} v^+(y) ds(y) = \frac{v^+(x_0)}{4r} = \frac{u(x_0) - u(x^+)}{4r} \leq 0.$$

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung im \mathbb{R}^n (vgl. [7], Satz 167.1, S.276) existiert für jedes $x_h \in B(x_0; r)$ eine Zwischenstelle ξ zwischen x^+ und x_h , so dass mit Hilfe von (4.9) und (4.10)

$$0 \geq \frac{u(x_0) - u(x^+)}{4r} \geq \frac{u(x_h) - u(x^+)}{h} = \frac{\langle -h\nu(x^+), \text{grad } u(\xi) \rangle}{h} = -\frac{\partial u}{\partial \nu}(\xi)$$

gilt.

In dieser Situation geht mit $h \rightarrow 0$ auch $\xi \rightarrow x^+$, und damit nach Voraussetzung auch $\frac{\partial u}{\partial \nu}(\xi) \rightarrow 0$. Somit ist aber

$$\frac{u(x_0) - u(x^+)}{4r} = 0,$$

was $u(x_0) = \sup_{x \in D} u(x)$ mit $x_0 \in D \setminus \partial D$ und schließlich mit Satz 3.4 die Konstanz von u in D nach sich zieht.

Für x^- bemerken wir, dass die erste Aussage in gleicher Weise aus der Extremaleigenschaft von u in x^- folgt. Für den Beweis der zweiten Aussage für x^- betrachten wir analog die Funktion $v^- := u - u(x^-)$. Diese ist wie v^+ harmonisch in $B(x_0; r)$ und stetig in $B[x_0; r]$, jedoch im Gegensatz zu v^+ nichtnegativ. Damit erfolgen die Abschätzungen in (4.9) und (4.10) in die andere Richtung, jedoch mit gleichem Effekt. Mit gleicher Argumentation wie für x^+ erhalten wir auch für x^- , dass

$$\frac{u(x_0) - u(x^-)}{4r} = 0$$

und somit $u(x_0) = \inf_{x \in D} u(x)$ mit $x_0 \in D \setminus \partial D$ gilt, woraus wir wiederum mit Satz 3.4 folgern, dass u in D konstant ist. \square

Nach diesen Vorbereitungen sind wir nun in der Lage, den Beweis der Eindeutigkeit für das Problem 4.1 zu führen.

Satz 4.4 *Seien $u \in C^2(D \setminus \Gamma) \cap C(\overline{D})$ und $u_e \in C^2(D_e) \cap C(\overline{D}_e)$ Lösungen des Problems 4.1 mit $A = 0$.*

Dann gilt $u \equiv 0$ in D und $u_e \equiv 0$ in D_e .

Beweis: Als auf dem Abschluss eines beschränkten Gebiets stetige Funktion ist u selbst beschränkt. Also nimmt u nach Folgerung 3.5 sein Maximum und Minimum entweder auf ∂D oder auf Γ an. Auf Grund der Homogenitätsbedingung $A = 0$ ist auch u_e wegen (4.3) beschränkt. Dann nimmt u_e nach Satz 3.4 sein Supremum und Infimum entweder auf dem Rand ∂D oder im Unendlichen an.

Falls u_e sein Supremum im Unendlichen annimmt, ist $u_{e_\infty} \geq u_e(x)$ für alle $x \in D_e$. Wegen der Mittelwerteigenschaft im Unendlichen (3.5) folgt jedoch auch, dass außerhalb eines hinreichend großen Kreises $u = u_{e_\infty}$ gilt. Damit ist aber u_e nach Satz 3.4 konstant.

Wir argumentieren auf gleiche Weise, falls u_e sein Infimum im Unendlichen annimmt.

In beiden Fällen ist insbesondere $\frac{\partial u_e}{\partial \nu} = 0$ auf ∂D . Wegen der Kopplungsbedingung (4.4) ist dann auch $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ auf ∂D .

Falls u nun sein Maximum oder sein Minimum auf ∂D annimmt, so ist u wegen der zweiten Aussage von Satz 4.3 konstant in D . Die Homogenitätsbedingung (4.6) liefert dann $u = 0$ in D , mit der Kopplungsbedingung (4.4) erhalten wir schließlich auch $u_e = 0$ in D_e .

Andernfalls nimmt u sein Maximum und sein Minimum auf Γ an. In diesem Fall liefert wiederum die Homogenitätsbedingung (4.6), dass auch $u = 0$ in D gilt. Aus der Kopplungsbedingung (4.4) folgt dann auch $u_e = 0$ in D_e .

Abschließend ist der Fall zu betrachten, dass u_e sein Maximum in $x^+ \in \partial D$ und Minimum in $x^- \in \partial D$ annimmt. Mit der ersten Aussage von Satz 4.3 folgt dann

$$\frac{\partial u_e}{\partial \nu}(x^+) \leq 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial u_e}{\partial \nu}(x^-) \geq 0.$$

Dabei beruht die Umkehrung der Ungleichungen auf der Tatsache, dass ν in das Innere von D_e orientiert ist.

Nimmt nun u sein Maximum oder sein Minimum ebenfalls auf ∂D an, so tut u dies wegen (4.4) ebenfalls in x^+ bzw. x^- . Dann gilt jedoch wieder auf Grund der ersten Aussage von Satz 4.3

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x^+) \geq 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}(x^-) \leq 0.$$

Wegen (4.4) folgt dann aber

$$\frac{\partial u_e}{\partial \nu}(x^+) = \frac{\partial u_e}{\partial \nu}(x^-) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(x^+) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(x^-) = 0,$$

da nach Voraussetzung $\mu, \mu_e > 0$ gilt. Damit sind aber nach der zweiten Aussage von Satz 4.3 die Funktionen u und u_e konstant in D bzw. D_e . Die Homogenitätsbedingung (4.6) sowie die Bedingung (4.4) liefern dann, dass $u = 0$ in D und $u_e = 0$ in D_e gilt.

Nimmt u andererseits sein Maximum und Minimum auf Γ an, so erhalten wir erneut aus der Homogenitätsbedingung (4.6), dass $u = 0$ in D gilt. Damit ist aber auch $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ auf ∂D , und wegen (4.4) folgt dann in Verbindung mit der zweiten Aussage von Satz 4.3, dass auch $u_e = 0$ in D_e gilt. \square

4.3 Existenz

Wir werden in diesem Abschnitt unter Verwendung der in Kapitel 3 eingeführten Potentiale einen konstruktiven Beweis der Lösbarkeit von Problem 4.1 führen. Wir werden dies erreichen, indem wir die Randbedingungen auf ein System von Integralgleichungen zurückführen, dessen Lösbarkeit wir nach einer Reihe von Umformungen mit Hilfe der in Abschnitt 2.1 vorgestellten Riesz-Theorie beweisen werden.

Wir wählen dazu den folgenden Ansatz:

$$u(x) := \mu \left[(T_D \psi)(x) + (S_\Gamma^A \varphi)(x) \right], \quad x \in D, \quad (4.11)$$

$$u_e(x) := \mu_e \left[(T_D \psi)(x) + (S_\Gamma^A \varphi)(x) \right], \quad x \in D_e. \quad (4.12)$$

Dabei sind $\mu, \mu_e, A \in \mathbb{R}$ die in Problem 4.1 vorgegebenen Konstanten mit $\mu, \mu_e > 0$. Die Operatoren T_D und S_Γ^A sind Doppel- bzw. Einfachschichtpotentiale, definiert durch

$$(T_D\psi)(x) := \int_{\partial D} \frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial\nu(y)} \psi(y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D, \quad (4.13)$$

sowie für $x \in \mathbb{R}^2$

$$(S_\Gamma^A\varphi)(x) := \int_\Gamma \Phi(x,y) \left[(M\varphi)(y) + \frac{A}{|\Gamma|} \right] ds(y) + \frac{1}{|\Gamma|} \int_\Gamma \varphi ds. \quad (4.14)$$

Der Mittelungsoperator M ist definiert durch

$$(M\varphi)(x) := \varphi(x) - \frac{1}{|\Gamma|} \int_\Gamma \varphi ds, \quad x \in \Gamma_0, \quad (4.15)$$

und für die Dichten gilt $\psi \in C(\partial D)$ bzw.

$$\varphi(y) := \frac{\widehat{\varphi}(y)}{\sqrt{|y-z_1| \cdot |y-z_{-1}|}}, \quad y \in \Gamma_0, \quad (4.16)$$

mit $\widehat{\varphi} \in C^{0,\alpha,*}(\Gamma)$, wobei der Funktionenraum $C^{0,\alpha,*}(\Gamma)$ definiert ist durch

$$C^{0,\alpha,*}(\Gamma) := \left\{ \widehat{\varphi} \in C(\Gamma) : \widehat{\varphi}(x(t)) = \varphi_1(t) \cdot \varphi_2(\arccos t), \varphi_1 \in C^1[-1,1], \varphi_2 \in C_{2\pi,e}^{0,\alpha} \right\}.$$

Die Notwendigkeit des oben analog zu [13] eingeführten Funktionenraums $C^{0,\alpha,*}(\Gamma)$ erscheint auf den ersten Blick ungewöhnlich. Wir werden jedoch im Folgenden sehen, dass das Einfachschichtpotential (4.14) in einen kompakten sowie einen beschränkt invertierbaren Operator von $C_{2\pi,e}^{0,\alpha}$ nach $C_{2\pi,e}^{1,\alpha}$ zerfällt, was einen Lösungsansatz mit Funktionen $\varphi_2 \in C_{2\pi,e}^{0,\alpha}$ rechtfertigt. Das Auftreten des Arcus-Cosinus wird mit der Notwendigkeit einer Arcus-Cosinus-Substitution bei der Rückübersetzung des invertierbaren Operators in einen Integraloperator über den offenen Bogen Γ begründet. Diese zieht auch ein wurzelsinguläres Verhalten der Dichte in den Endpunkten des Bogens nach sich, dem durch (4.16) und die Funktion $\varphi_1 \in C^1[-1,1]$ parametrisierungsunabhängig Rechnung getragen wird.

Als erste Resultate erhalten wir die beiden folgenden Sätze.

Satz 4.5 *Die durch (4.11) und (4.12) definierten Funktionen u und u_e lösen das Problem 4.1, falls die zugehörigen Dichten ψ und φ das Integralgleichungssystem*

$$\begin{aligned} \psi + 2qK_D\psi + 2qK_{\Gamma,D}\varphi &= -2q\frac{A}{|\Gamma|} \int_\Gamma \Phi(\cdot, y) ds(y) \quad \text{auf } \partial D, \\ K_{D,\Gamma}\psi + K_\Gamma\varphi &= -\frac{A}{|\Gamma|} \int_\Gamma \Phi(\cdot, y) ds(y) \quad \text{auf } \Gamma \end{aligned} \quad (4.17)$$

lösen. Dabei ist $q := \frac{\mu_e - \mu}{\mu_e + \mu}$ und die auftretenden Integraloperatoren haben die Form

$$(K_D \psi)(x) := \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \psi(y) ds(y), \quad x \in \partial D, \quad (4.18)$$

$$(K_{D, \Gamma} \psi)(x) := \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \psi(y) ds(y), \quad x \in \Gamma, \quad (4.19)$$

$$(K_{\Gamma} \varphi)(x) := \int_{\Gamma} \Phi(x, y) (M\varphi)(y) ds(y) + \frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} \varphi ds, \quad x \in \Gamma, \quad (4.20)$$

$$(K_{\Gamma, D} \varphi)(x) := \int_{\Gamma} \Phi(x, y) (M\varphi)(y) ds(y) + \frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} \varphi ds, \quad x \in \partial D. \quad (4.21)$$

Beweis: Sei (φ, ψ) eine Lösung von (4.17), und seien u und u_e durch φ und ψ definiert wie in (4.11) - (4.16).

Dann folgen die Regularitätsbedingungen (4.1) und (4.2) aus den Abschnitten 3.2 bis 3.4.

Für die Asymptotik (4.3) von u_e bemerken wir, dass für die Dichte $M\varphi$ die Bedingung $\int_{\Gamma} M\varphi ds = 0$ erfüllt ist. Damit folgt aus den Abschnitten 3.3 und 3.4, dass für $x \in D_e$ der Ausdruck

$$\tilde{u}_{e,1}(x) := \mu_e \left[\int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \psi(y) ds(y) + \int_{\Gamma} \Phi(x, y) (M\varphi)(y) ds(y) + \frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} \varphi ds \right]$$

beschränkt ist. Für den verbleibenden Term von u_e erhalten wir

$$\begin{aligned} \mu_e \left[\int_{\Gamma} \Phi(x, y) \frac{A}{|\Gamma|} ds(y) \right] &= \frac{\mu_e A}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} \Phi(x, y) ds(y) \\ &= \mu_e A \cdot \Phi(x, 0) + \frac{\mu_e A}{2\pi|\Gamma|} \int_{\Gamma} \ln \frac{|x|}{|x-y|} ds(y) \\ &= \mu_e A \cdot \Phi(x, 0) + \tilde{u}_{e,2}(x) \end{aligned}$$

Da der letzte Term wie im Beweis zu Satz 3.20 für $|x| \rightarrow \infty$ verschwindet, erhalten wir insgesamt

$$u_e(x) = \mu_e A \Phi(x, 0) + \tilde{u}_{e,1}(x) + \tilde{u}_{e,2}(x)$$

mit $\tilde{u}_{e,1}(x) + \tilde{u}_{e,2}(x) \in C^2(D_e) \cap C(\overline{D_e})$ beschränkt.

Um die Bedingung (4.6) einzusehen, multiplizieren wir die zweite Gleichung in (4.17) mit der Konstanten $\mu > 0$ und stellen die Gleichung so um, dass die rechte Seite

identisch verschwindet. Wir erhalten somit für alle $x \in \Gamma$

$$\begin{aligned}
0 &= \mu \left[(K_{D,\Gamma}\psi)(x) + (K_\Gamma\varphi)(x) + \frac{A}{|\Gamma|} \int_\Gamma \Phi(x,y) ds(y) \right] \\
&= \mu \left[(T_D\psi)(x) + \int_\Gamma \Phi(x,y) \left[(M\varphi)(y) + \frac{A}{|\Gamma|} \right] ds(y) + \frac{1}{|\Gamma|} \int_\Gamma \varphi ds \right] \\
&= \mu \left[(T_D\psi)(x) + (S_\Gamma^A\varphi)(x) \right] \\
&= u(x).
\end{aligned}$$

Für die Bedingungen (4.4) betrachten wir das Verhalten von u und u_e auf ∂D . Dazu multiplizieren wir die erste Gleichung von (4.17) mit $\frac{\mu_e + \mu}{2} > 0$. Es ergibt sich für alle $x \in \partial D$

$$\frac{\mu_e + \mu}{2} \psi(x) + (\mu_e - \mu) \left[(K_D\psi)(x) + (K_{\Gamma,D}\varphi)(x) \right] = (\mu - \mu_e) \frac{A}{|\Gamma|} \int_\Gamma \Phi(x,y) ds(y).$$

Wir stellen die Gleichung weiter um, so dass alle Terme mit μ_e auf der linken und alle Terme mit μ auf der rechten Seite der Gleichung erscheinen, und erhalten

$$\begin{aligned}
\mu_e \left[\frac{1}{2} \psi(x) + (K_D\psi)(x) + (K_{\Gamma,D}\varphi)(x) + \frac{A}{|\Gamma|} \int_\Gamma \Phi(x,y) ds(y) \right] \\
= \mu \left[-\frac{1}{2} \psi(x) + (K_D\psi)(x) + (K_{\Gamma,D}\varphi)(x) + \frac{A}{|\Gamma|} \int_\Gamma \Phi(x,y) ds(y) \right]. \quad (4.22)
\end{aligned}$$

Für $x \in \partial D$ ist nach Satz 3.25

$$(T_D\psi)_\pm(x) = \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(y)} \psi(y) ds(y) \pm \frac{1}{2} \psi(x) = (K_D\psi)(x) \pm \frac{1}{2} \psi(x).$$

Da weiterhin $(S_\Gamma^A\varphi)_+(x) = (S_\Gamma^A\varphi)_-(x)$ auf ∂D gilt, und darüber hinaus für $x \in \partial D$

$$(S_\Gamma^A\varphi)(x) = (K_{\Gamma,D}\varphi)(x) + \frac{A}{|\Gamma|} \int_\Gamma \Phi(x,y) ds(y)$$

ist, erhalten wir aus (4.22), dass

$$\begin{aligned}
u_{e+}(x) &= \mu_e \left[(T_D\psi)_+(x) + (S_\Gamma^A\varphi)_+(x) \right] \\
&= \mu \left[(T_D\psi)_-(x) + (S_\Gamma^A\varphi)_-(x) \right] \\
&= u_-(x)
\end{aligned}$$

auf ∂D gilt.

Für die zweite Bedingung von (4.4) betrachten wir auf ∂D die Ausdrücke

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu} \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) &= \frac{\partial (T_D \psi)_-(x)}{\partial \nu} + \frac{\partial (S_\Gamma^A \varphi)_-(x)}{\partial \nu}, \\ \frac{1}{\mu_e} \frac{\partial u_e}{\partial \nu}(x) &= \frac{\partial (T_D \psi)_+(x)}{\partial \nu} + \frac{\partial (S_\Gamma^A \varphi)_+(x)}{\partial \nu}\end{aligned}$$

und sehen aus den Sätzen 3.21 und 3.28, dass auch die zweite Bedingung von (4.4) erfüllt ist. \square

Der folgende Satz ist ein zentraler Schritt auf dem Weg zur Existenzaussage, da ein injektiver Operator Grundvoraussetzung für eine erfolgreiche Anwendung der Riesz-Theorie ist. Die im Beweis zum folgenden Satz angewandten Methoden zur Behandlung eines Transmissionsproblems sind dabei dem Sinne nach aus [8] entnommen.

Satz 4.6 *Das Integralgleichungssystem (4.17) besitzt höchstens eine Lösung.*

Beweis: Auf Grund der Linearität der Integraloperatoren reicht es zu zeigen, dass das homogene Integralgleichungssystem nur die triviale Lösung besitzt.

Sei also (φ, ψ) eine Lösung der homogenen Form von (4.17)

$$\begin{aligned}\psi + 2qK_D\psi + 2qK_{\Gamma,D}\varphi &= 0 \\ K_{D,\Gamma}\psi + K_\Gamma\varphi &= 0\end{aligned}$$

Dann lösen die durch (4.11) - (4.12) definierten Funktionen u und u_e nach Satz 4.5 das Problem 4.1 mit $A = 0$. Aus der Eindeutigkeitsaussage (vgl. Satz 4.4) folgt dann aber, dass $u \equiv 0$ und $u_e \equiv 0$ sind. Nach (4.11) und (4.12) ist dann sogar $T_D\psi + S_\Gamma^A\varphi \equiv 0$.

Aus dem Verhalten der Potentiale auf ∂D erhalten wir nun

$$0 = [T_D\psi + S_\Gamma^A\varphi]_-(x) = [T_D\psi + S_\Gamma^A\varphi]_+(x), \quad x \in \partial D.$$

Da das Einfachschichtpotential über ∂D stetig ist, reduziert sich die obige Gleichung zu

$$0 = (T_D\psi)_-(x) = (T_D\psi)_+(x), \quad x \in \partial D.$$

Die Sprungbeziehungen für das Doppelschichtpotential (vgl. Satz 3.25) liefern dann, dass

$$\psi(x) = (T_D\psi)_+(x) - (T_D\psi)_-(x)$$

auf ∂D ist, womit schließlich $\psi \equiv 0$ folgt.

Aus $u \equiv 0$ in D erhalten wir insbesondere auch, dass $\frac{\partial u_{\pm}}{\partial \nu} = 0$ auf Γ_0 gilt.

Aus dem Verhalten der Potentiale auf Γ_0 erhalten wir ähnlich zu oben, dass

$$0 = \frac{\partial}{\partial \nu} [T_D \psi + S_{\Gamma}^A \varphi]_{-}(x) = \frac{\partial}{\partial \nu} [T_D \psi + S_{\Gamma}^A \varphi]_{+}(x), \quad x \in \Gamma_0$$

gilt.

Da die Normalableitung des Doppelschichtpotentials über Γ stetig ist, reduziert sich die obige Gleichung zu

$$0 = \frac{\partial(S_{\Gamma}^A \varphi)_{-}}{\partial \nu}(x) = \frac{\partial(S_{\Gamma}^A \varphi)_{+}}{\partial \nu}(x), \quad x \in \Gamma_0.$$

Die Sprungbeziehungen für das Einfachschichtpotential (vgl. Satz 3.22) liefern dann, dass

$$(M\varphi)(x) = \left[(M\varphi)(x) + \frac{A}{|\Gamma|} \right] = \frac{\partial(S_{\Gamma}^A \varphi)_{-}}{\partial \nu}(x) - \frac{\partial(S_{\Gamma}^A \varphi)_{+}}{\partial \nu}(x) = 0$$

auf Γ_0 gilt, wobei wir die Voraussetzung $A = 0$ ausgenutzt haben.

Wir erhalten damit für $x \in D$

$$\begin{aligned} 0 &= [T_D \psi + S_{\Gamma}^A \varphi](x) \\ &= \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \psi(y) ds(y) + \int_{\Gamma} \Phi(x, y) \left[(M\varphi)(y) + \frac{A}{|\Gamma|} \right] ds(y) + \frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} \varphi ds \\ &= \frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} \varphi ds, \end{aligned}$$

da die Dichten ψ und $\left[M\varphi + \frac{A}{|\Gamma|} \right]$ identisch verschwinden.

Aus der Definition von $M\varphi$ (vgl. (4.15)) und den obigen Gleichungen folgt dann letztlich

$$0 = (M\varphi)(x) = \varphi(x) - \frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} \varphi ds = \varphi(x)$$

auf Γ_0 , also verschwindet auch die Dichte φ identisch. \square

Die abschließende Existenzaussage wird mit Hilfe der Riesz-Theorie für kompakte Operatoren erfolgen. Diese macht jedoch nur Aussagen über Operatoren 2. Art. Da die zweite Gleichung in (4.17) von erster Art ist, muss sie noch weiter modifiziert werden.

Wir folgen dabei der in [10], Abschnitt 7.6, vorgeschlagenen Methode, die dort für das Dirichletproblem auf einem offenen Bogen angewendet wird.

Es sei $x : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine reguläre Parametrisierung des offenen C^3 -glatten Bogens $\Gamma \subseteq D$. Wir führen nach dem Einsetzen der Parametrisierung über Γ eine Cosinus-Substitution für die Bereiche über den Bogen Γ durch, so dass das Integralgleichungssystem (4.17) in Operatorschreibweise die Form

$$\begin{aligned} \psi + 2qK_D\psi + 2q\tilde{K}_{\Gamma,D}\tilde{\varphi} &= -2q\frac{A}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} \Phi(\cdot, y) ds(y) && \text{auf } \partial D, \\ \tilde{K}_{D,\Gamma}\psi + (L + L_0)\tilde{\varphi} &= -\frac{A}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} \Phi(x(\cos \cdot), y) ds(y) && \text{auf } [0, \pi] \end{aligned} \quad (4.23)$$

annimmt. Dabei haben die Operatoren $\tilde{K}_{\Gamma,D}$, $\tilde{K}_{D,\Gamma}$, L und L_0 die Gestalt

$$\left(\tilde{K}_{\Gamma,D}\tilde{\varphi}\right)(x) := \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \tilde{k}_{\Gamma,D}(x, \tau) \tilde{\varphi}(\tau) d\tau, \quad x \in \partial D, \quad (4.24)$$

$$\left(\tilde{K}_{D,\Gamma}\psi\right)(t) := \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x(\cos t), y)}{\partial \nu(y)} \psi(y) ds(y), \quad t \in [0, \pi], \quad (4.25)$$

sowie

$$(L\tilde{\varphi})(t) := \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \left\{ -\ln [4(\cos t - \cos \tau)^2] + 4 \right\} \tilde{\varphi}(\tau) d\tau, \quad t \in [0, \pi], \quad (4.26)$$

$$(L_0\tilde{\varphi})(t) := \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \left\{ K_0(t, \tau) - 4 \right\} \tilde{\varphi}(\tau) d\tau, \quad t \in [0, \pi], \quad (4.27)$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{k}_{\Gamma,D}(x, \tau) &:= \ln \frac{1}{|x - x(\cos \tau)|} + \frac{2\pi}{|\Gamma|} \\ &\quad - \frac{1}{|\Gamma|} \int_0^\pi \ln \frac{1}{|x - x(\cos \sigma)|} |x'(\cos \sigma)| \sin \sigma d\sigma, \quad x \in \partial D, \tau \in \mathbb{R}, \\ K_0(t, \tau) &:= \ln \frac{4(\cos t - \cos \tau)^2}{|x(\cos t) - x(\cos \tau)|^2} + \frac{4\pi}{|\Gamma|} \\ &\quad - \frac{1}{|\Gamma|} \int_0^\pi \ln \frac{1}{|x(\cos t) - x(\cos \sigma)|^2} |x'(\cos \sigma)| \sin \sigma d\sigma, \quad t, \tau \in \mathbb{R}, t \neq \tau. \end{aligned}$$

Wir halten den Zusammenhang zwischen (4.17) und (4.23) in den beiden folgenden Sätzen fest.

Satz 4.7 Falls $\psi \in C(\partial D)$ und $\tilde{\varphi} \in C_{2\pi, e}^{0, \alpha}$ das Integralgleichungssystem (4.23) lösen, so ist das Paar (ψ, φ) eine Lösung von (4.17), wobei φ durch (4.16) mit

$$\hat{\varphi}(x(t)) := \frac{\sqrt{|x(t) - z_1| \cdot |x(t) - z_{-1}|}}{|x'(t)|\sqrt{1-t^2}} \cdot \tilde{\varphi}(\arccos t), \quad t \in [-1, 1], \quad (4.28)$$

definiert ist.

Beweis: Sei $(\psi, \tilde{\varphi}) \in C(\partial D) \times C_{2\pi, e}^{0, \alpha}$ eine Lösung von (4.23) und sei φ wie in der Aussage des Satzes definiert.

Wir setzen (ψ, φ) in die linke Seite von (4.17) ein, und führen dann wie oben angesprochen die Parametrisierung x ein und die Cosinus-Substitution durch. Dabei geht der Operator $K_{D, \Gamma}$ in der angegebenen Weise in den Operator $\tilde{K}_{D, \Gamma}$ über. Gleiches gilt für die rechte Seite in der zweiten Gleichung von (4.17).

Von entscheidenderem Interesse sind jedoch die Veränderungen der Operatoren $K_{\Gamma, D}$ und K_{Γ} , da hier auch im Urbildraum substituiert wird. Wir beginnen mit der Darstellung aus (4.20) bzw. (4.21) und ordnen die Terme zuerst um. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma} \Phi(x, y) (M\varphi)(y) ds(y) + \frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} \varphi ds \\
&= \int_{\Gamma} \Phi(x, y) \varphi(y) ds(y) - \int_{\Gamma} \Phi(x, y) \left(\frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} \varphi ds \right) ds(y) + \frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} \varphi ds \\
&= \int_{\Gamma} \Phi(x, y) \varphi(y) ds(y) - \frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} \left(\int_{\Gamma} \Phi(x, y) ds(y) \right) \varphi ds + \frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} \varphi ds \\
&= \int_{\Gamma} \left\{ \Phi(x, y) + \frac{1}{|\Gamma|} - \frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} \Phi(x, y) ds(y) \right\} \varphi(y) ds(y).
\end{aligned}$$

Einsetzen der Parametrisierung und Ausführen der Cosinus-Substitution liefert

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma} \Phi(x, y) (M\varphi)(y) ds(y) + \frac{1}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} \varphi ds \\
&= \int_0^{\pi} \left\{ \Phi(x, x(\cos \tau)) + \frac{1}{|\Gamma|} - \frac{1}{|\Gamma|} \int_0^{\pi} \Phi(x, x(\cos \sigma)) |x'(\cos \sigma)| \sin \sigma d\sigma \right\} \\
&\quad \cdot \varphi(x(\cos \tau)) |x'(\cos \tau)| \sin \tau d\tau \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \left\{ \ln \frac{1}{|x - x(\cos \tau)|} + \frac{2\pi}{|\Gamma|} - \frac{1}{|\Gamma|} \int_0^{\pi} \ln \frac{1}{|x - x(\cos \sigma)|} |x'(\cos \sigma)| \sin \sigma d\sigma \right\} \\
&\quad \cdot \varphi(x(\cos \tau)) |x'(\cos \tau)| \sin \tau d\tau.
\end{aligned}$$

Ein Vergleich mit (4.24) zeigt, dass für $x \in \partial D$ der Operator $K_{\Gamma, D}$ in den Operator $\tilde{K}_{\Gamma, D}$ übergeht, falls für $\tau \in [0, \pi]$ die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\tilde{\varphi}(\tau) = \varphi(x(\cos \tau)) |x'(\cos \tau)| \sin \tau. \quad (4.29)$$

Wir erweitern die soweit umgeformte Darstellung des Operators K_Γ und setzen auch in der Variablen t die Parametrisierung und Cosinus-Substitution ein und erhalten

$$\begin{aligned}
& \int_\Gamma \Phi(x(\cos t), y) (M\varphi)(y) ds(y) + \frac{1}{|\Gamma|} \int_\Gamma \varphi ds \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \left\{ \ln \frac{1}{|x(\cos t) - x(\cos \tau)|^2} + \frac{4\pi}{|\Gamma|} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{|\Gamma|} \int_0^\pi \ln \frac{1}{|x(\cos t) - x(\cos \sigma)|^2} |x'(\cos \sigma)| \sin \sigma d\sigma \right\} \\
&\quad \cdot \varphi(x(\cos \tau)) |x'(\cos \tau)| \sin \tau d\tau \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \left\{ -\ln [4(\cos t - \cos \tau)^2] + \ln \frac{4(\cos t - \cos \tau)^2}{|x(\cos t) - x(\cos \tau)|^2} + \frac{4\pi}{|\Gamma|} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{|\Gamma|} \int_0^\pi \ln \frac{1}{|x(\cos t) - x(\cos \sigma)|^2} |x'(\cos \sigma)| \sin \sigma d\sigma \right\} \\
&\quad \cdot \varphi(x(\cos \tau)) |x'(\cos \tau)| \sin \tau d\tau \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \left\{ -\ln [4(\cos t - \cos \tau)^2] + K_0(t, \tau) \right\} \varphi(x(\cos \tau)) |x'(\cos \tau)| \sin \tau d\tau.
\end{aligned}$$

Ein Vergleich mit (4.26) und (4.27) zeigt, dass für $x \in \Gamma$ der Operator K_Γ in den Operator $L + L_0$ übergeht, falls wie oben die Bedingung (4.29) erfüllt ist.

Es bleibt also noch zu zeigen, dass die in der Aussage des Satzes definierte Dichte φ die Bedingungen (4.29) erfüllt, und dass die in (4.28) definierte, zu φ gehörende Funktion $\widehat{\varphi}$ in $C^{0,\alpha,*}(\Gamma)$ liegt. Dazu setzen wir zum einen die Definition von φ in die rechte Seite von (4.29) ein und erhalten

$$\begin{aligned}
\varphi(x(\cos \tau)) |x'(\cos \tau)| \sin \tau &= \frac{\widetilde{\varphi}(\arccos(\cos \tau))}{|x'(\cos \tau)| \sqrt{1 - (\cos \tau)^2}} |x'(\cos \tau)| \sin \tau \\
&= \widetilde{\varphi}(\tau)
\end{aligned}$$

für alle $\tau \in [0, \pi]$. Zum anderen sehen wir aus der Definition von $C^{0,\alpha,*}(\Gamma)$ und (4.28), dass die dort definierte Funktion $\widehat{\varphi}$ in $C^{0,\alpha,*}(\Gamma)$ liegt, falls der Ausdruck

$$\frac{\sqrt{|x(t) - z_1| \cdot |x(t) - z_{-1}|}}{|x'(t)| \sqrt{1 - t^2}}$$

auf $[-1, 1]$ einmal stetig differenzierbar ist.

Um dies zu zeigen, benutzen wir die Taylorentwicklung der Parametrisierungsfunktion x um die Endpunkte z_1 bzw. z_{-1} bis zur ersten Ordnung mit Integralrestglied

$$x(t) - x(1) = (t - 1) \int_0^1 x'(1 + \lambda(t - 1)) d\lambda$$

sowie

$$x(t) - x(-1) = (t + 1) \int_0^1 x'(-1 + \lambda(t + 1)) d\lambda$$

und erhalten auf diese Weise, dass

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{|x(t) - z_1| \cdot |x(t) - z_{-1}|}}{|x'(t)|\sqrt{1 - t^2}} \\ &= \frac{\left(\left| \int_0^1 x'(1 + \lambda(t - 1)) d\lambda \right| \cdot \left| \int_0^1 x'(-1 + \lambda(t + 1)) d\lambda \right| \right)^{\frac{1}{2}}}{|x'(t)|} \end{aligned}$$

gilt, woraus wir mit Hilfe der Regularität der Parametrisierung auf ganz $[-1, 1]$ die stetige Differenzierbarkeit des Ausdrucks ablesen können. \square

Satz 4.8 *Das Integralgleichungssystem (4.23) besitzt höchstens eine Lösung.*

Beweis: Auf Grund der Linearität der Integraloperatoren reicht es wie in Satz 4.6 zu zeigen, dass das homogene Integralgleichungssystem nur die triviale Lösung besitzt.

Sei also $(\psi, \tilde{\varphi})$ eine Lösung des Integralgleichungssystems (4.23) mit homogenem Datum. Dann lösen die wie in Satz 4.7 definierten Dichten (ψ, φ) nach Satz 4.7 das Integralgleichungssystem (4.17) mit homogenem Datum.

Nach Satz 4.6 gilt dann $\psi \equiv 0$ und $\varphi \equiv 0$. Aus der Definition von φ folgt schließlich auch $\tilde{\varphi} \equiv 0$. \square

Für das weitere Vorgehen benötigen wir folgendes technisches Lemma.

Lemma 4.9 *Für $t, \tau \in \mathbb{R}$ mit $t \neq \tau$ gilt*

$$\ln [4(\cos t - \cos \tau)^2] = \ln \left(4 \sin^2 \frac{t - \tau}{2} \right) + \ln \left(4 \sin^2 \frac{t + \tau}{2} \right). \quad (4.30)$$

Beweis: Wir betrachten die trigonometrische Identität

$$\cos t - \cos \tau = -2 \sin \frac{t - \tau}{2} \sin \frac{t + \tau}{2}$$

und erhalten beim Einsetzen in die linke Seite von (4.30)

$$\begin{aligned} \ln [4(\cos t - \cos \tau)^2] &= \ln \left(4 \cdot \left(-2 \sin \frac{t - \tau}{2} \sin \frac{t + \tau}{2} \right)^2 \right) \\ &= \ln \left(4 \sin^2 \frac{t - \tau}{2} \cdot 4 \sin^2 \frac{t + \tau}{2} \right) \\ &= \ln \left(4 \sin^2 \frac{t - \tau}{2} \right) + \ln \left(4 \sin^2 \frac{t + \tau}{2} \right). \end{aligned}$$

□

Mit Hilfe der Identität (4.30) formen wir (4.23) ein weiteres Mal um, und erhalten

$$\begin{aligned} \psi + 2qK_D\psi + 2q\tilde{K}_{\Gamma,D}\tilde{\varphi} &= -2q\frac{A}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} \Phi(\cdot, y) ds(y) \quad \text{auf } \partial D, \\ \tilde{K}_{D,\Gamma}\psi + (\tilde{L} + L_0)\tilde{\varphi} &= -\frac{A}{|\Gamma|} \int_{\Gamma} \Phi(x(\cos \cdot), y) ds(y) \quad \text{auf } [0, 2\pi], \end{aligned} \quad (4.31)$$

wobei der Operator \tilde{L} durch

$$(\tilde{L}\tilde{\varphi})(t) := \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ -\ln \left(4 \sin^2 \frac{t - \tau}{2} \right) + 2 \right\} \tilde{\varphi}(\tau) d\tau, \quad t \in [0, 2\pi], \quad (4.32)$$

gegeben ist und die zweite Gleichung von (4.31) durch (intuitive) gerade Fortsetzung der Operatoren $\tilde{K}_{D,\Gamma}$, L_0 und der rechten Seite als Gleichung auf $[0, 2\pi]$ zu interpretieren ist. Wir halten den Zusammenhang zwischen den Gleichungssystemen (4.23) und (4.31) wie folgt fest.

Satz 4.10 *Jede Lösung von (4.31) aus $C(\partial D) \times C_{2\pi,e}^{0,\alpha}$ löst auch (4.23). Falls eine solche Lösung existiert, ist sie eindeutig bestimmt.*

Beweis: Sei $(\psi, \tilde{\varphi})$ eine Lösung von (4.31) aus $C(\partial D) \times C_{2\pi,e}^{0,\alpha}$. Für die Funktion $\tilde{\varphi} \in C_{2\pi,e}^{0,\alpha}$ betrachten wir den in (4.26) definierten Operator L und formen $L\tilde{\varphi}$ für

$t \in [0, \pi]$ mit Hilfe der Identität (4.30) um. Wir erhalten

$$\begin{aligned} (L\tilde{\varphi})(t) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \left\{ -\ln [4(\cos t - \cos \tau)^2] + 4 \right\} \tilde{\varphi}(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \left\{ -\ln \left(4 \sin^2 \frac{t-\tau}{2} \right) + 2 \right\} \tilde{\varphi}(\tau) d\tau \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \left\{ -\ln \left(4 \sin^2 \frac{t+\tau}{2} \right) + 2 \right\} \tilde{\varphi}(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Wir substituieren in den zweiten Summanden nun $\tau = -\tau^*$ und erhalten, da $\tilde{\varphi}$ gerade ist,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \left\{ -\ln \left(4 \sin^2 \frac{t+\tau}{2} \right) + 2 \right\} \tilde{\varphi}(\tau) d\tau \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_0^{-\pi} \left\{ -\ln \left(4 \sin^2 \frac{t-\tau^*}{2} \right) + 2 \right\} \tilde{\varphi}(-\tau^*) d\tau^* \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^0 \left\{ -\ln \left(4 \sin^2 \frac{t-\tau^*}{2} \right) + 2 \right\} \tilde{\varphi}(\tau^*) d\tau^* \end{aligned}$$

und damit nach Umbenennung von τ^* in τ

$$(L\tilde{\varphi})(t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^\pi \left\{ -\ln \left(4 \sin^2 \frac{t-\tau}{2} \right) + 2 \right\} \tilde{\varphi}(\tau) d\tau.$$

Da der Integrand in (4.3) in der Integrationsvariablen 2π -periodisch ist, erhalten wir schließlich für alle $t \in [0, \pi]$

$$(L\tilde{\varphi})(t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ -\ln \left(4 \sin^2 \frac{t-\tau}{2} \right) + 2 \right\} \tilde{\varphi}(\tau) d\tau = (\tilde{L}\tilde{\varphi})(t),$$

d.h. die Operatoren L und \tilde{L} stimmen für Dichten $\tilde{\varphi} \in C_{2\pi, e}^{0, \alpha}$ auf $[0, \pi]$ überein.

Wir können also, wenn wir die zweite Gleichung in (4.31) auf $[0, \pi]$ einschränken, den Operator \tilde{L} durch L ersetzen und erhalten auf diese Weise, dass die Lösung $(\psi, \tilde{\varphi})$ auch (4.23) löst. Da aber (4.23) höchstens eine Lösung besitzt, ist $(\psi, \tilde{\varphi})$ dadurch eindeutig bestimmt. \square

Wir führen nun für die rechten Seiten die folgenden vereinfachenden Schreibweisen ein

$$f_D(x) := \frac{A}{|\Gamma|} \int_\Gamma \Phi(x, y) ds(y), \quad x \in \partial D, \quad (4.33)$$

$$f_\Gamma(t) := \frac{A}{|\Gamma|} \int_\Gamma \Phi(x(\cos t), y) ds(y), \quad t \in [0, 2\pi] \quad (4.34)$$

und bringen zur besseren Übersicht noch einmal (4.31) in leicht veränderter Schreibweise

$$\left(\left(\begin{pmatrix} Id & 0 \\ 0 & \tilde{L} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2qK_D & 2q\tilde{K}_{\Gamma,D} \\ \tilde{K}_{D,\Gamma} & L_0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \psi \\ \tilde{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2qf_D \\ -f_\Gamma \end{pmatrix} \right). \quad (4.35)$$

In Vorbereitung des abschließenden Ergebnisses werden wir im Folgenden die entscheidenden Eigenschaften der in dem Integralgleichungssystem (4.35) auftretenden Operatoren zusammenstellen.

Satz 4.11 *Der in (4.32) definierte Operator \tilde{L} ist ein bijektiver Operator von $C_{2\pi,e}^{0,\alpha}$ nach $C_{2\pi,e}^{1,\alpha}$ mit einer beschränkten Inversen $\tilde{L}^{-1} : C_{2\pi,e}^{1,\alpha} \rightarrow C_{2\pi,e}^{0,\alpha}$.*

Beweis: Für die reguläre, 2π -periodische Parametrisierung x des Einheitskreises gegeben durch $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ betrachten wir den in [10], Theorem 7.30, S. 118, behandelten Operator $S_0 : C^{0,\alpha}(\tilde{\Gamma}) \rightarrow C^{1,\alpha}(\tilde{\Gamma})$ sowie seine parametrisierte Form, die in [10], Problem 7.2, S. 124, angegeben ist. Der dort in allgemeiner Form angegebene Kern

$$p(t, \tau) := \ln \frac{4 \sin^2 \frac{t-\tau}{2}}{|x(t) - x(\tau)|^2} + \frac{4\pi}{|\Gamma|} - \frac{1}{|\Gamma|} \int_0^{2\pi} \ln \frac{1}{|x(t) - x(\sigma)|^2} |x'(\sigma)| d\sigma, \quad t \neq \tau,$$

wobei $|\Gamma| = 2\pi$ die Länge des Einheitskreises bezeichne, vereinfacht sich mit Hilfe trigonometrischer Identitäten zu

$$\begin{aligned} p(t, \tau) &= \ln \frac{4 \sin^2 \frac{t-\tau}{2}}{(\cos t - \cos \tau)^2 + (\sin t - \sin \tau)^2} + \frac{4\pi}{|\Gamma|} \\ &\quad - \frac{1}{|\Gamma|} \int_0^{2\pi} \ln \frac{1}{(\cos t - \cos \sigma)^2 + (\sin t - \sin \sigma)^2} \sqrt{\sin^2 \sigma + \cos^2 \sigma} d\sigma \\ &= \ln \frac{4 \sin^2 \frac{t-\tau}{2}}{4 \sin^2 \frac{t-\tau}{2}} + \frac{4\pi}{2\pi} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \frac{1}{4 \sin^2 \frac{t-\sigma}{2}} d\sigma \\ &= 2 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left(4 \sin^2 \frac{t-\sigma}{2} \right) d\sigma. \end{aligned}$$

Nun liefert [10], Lemma 8.21, S. 146, dass

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left(4 \sin^2 \frac{t-\sigma}{2} \right) d\sigma = 0$$

gilt.

Damit hat der Operator S_0 im Fall des Einheitskreises nach [10], Problem 7.2, S. 124, für eine Dichte $\tilde{\psi} \in C_{2\pi}^{0,\alpha}$ die parametrisierte Form

$$\begin{aligned} (S_0\tilde{\psi})(t) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ -\ln \left(4 \sin^2 \frac{t-\tau}{2} \right) + p(t, \tau) \right\} \tilde{\psi}(\tau) d\tau, \quad t \in [0, 2\pi], \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ -\ln \left(4 \sin^2 \frac{t-\tau}{2} \right) + 2 \right\} \tilde{\psi}(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Ein Vergleich mit dem Operator \tilde{L} aus (4.32) zeigt, dass dieser mit S_0 für Dichten $\tilde{\psi} \in C_{2\pi,e}^{0,\alpha}$ übereinstimmt.

Der Operator S_0 ist jedoch nach [10], Theorem 7.30, S. 130, bijektiv mit einer beschränkten Inversen. Damit ist der Operator \tilde{L} als Einschränkung von S_0 auf die 2π -periodischen und geraden Funktionen ebenfalls injektiv.

Um die Surjektivität von \tilde{L} auf $C_{2\pi,e}^{1,\alpha}$ einzusehen, betrachten wir $f \in C_{2\pi,e}^{1,\alpha} \subseteq C_{2\pi}^{1,\alpha}$. Dann existiert ein $\psi \in C_{2\pi}^{0,\alpha}$, so dass $S_0\psi = f$ gilt. Wir berechnen für $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f(-t) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ -\ln \left(4 \sin^2 \frac{-t-\tau}{2} \right) + 2 \right\} \psi(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{-2\pi} \left\{ -\ln \left(4 \sin^2 \frac{-t+\tau}{2} \right) + 2 \right\} \psi(-\tau) \cdot (-1) d\tau \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-2\pi}^0 \left\{ -\ln \left(4 \left[-\sin \frac{t-\tau}{2} \right]^2 \right) + 2 \right\} \psi(-\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ -\ln \left(4 \sin^2 \frac{t-\tau}{2} \right) + 2 \right\} \psi(-\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Auf Grund der Geradheit von f ist jedoch für $t \in \mathbb{R}$

$$0 = f(t) - f(-t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ -\ln \left(4 \sin^2 \frac{t-\tau}{2} \right) + 2 \right\} (\psi(\tau) - \psi(-\tau)) d\tau,$$

woraus mit der Injektivität von S_0

$$\psi(\tau) - \psi(-\tau) = 0 \quad \text{für alle } \tau \in \mathbb{R}$$

und damit $\psi \in C_{2\pi,e}^{0,\alpha}$ folgt. Es ist dann sogar $\tilde{L}\psi = f$.

Insgesamt erhalten wir, dass auch der Operator \tilde{L} bijektiv mit einer beschränkten Inversen $\tilde{L}^{-1} : C_{2\pi,e}^{1,\alpha} \rightarrow C_{2\pi,e}^{0,\alpha}$ ist, wobei die Beschränktheit der Inversen aus Satz 2.16 sowie aus dem Satz von Banach (vgl. [11], Satz 12.3, S.75) folgt. \square

Satz 4.12 *Der in (4.25) definierte Operator $\tilde{K}_{D,\Gamma}$ ist ein kompakter Operator von $C(\partial D)$ nach $C_{2\pi,e}^{1,\alpha}$.*

Beweis: Der durch (4.19) definierte Operator $K_{D,\Gamma}$ ist ein Doppelschichtpotentialoperator über den äußeren Rand ∂D und als solcher nach Satz 3.27 in $\mathbb{R}^2 \setminus \partial D$ 2-mal stetig differenzierbar, d.h. er ist insbesondere ein beschränkter Operator von $C(\partial D)$ nach $C^2(\Gamma)$, da $\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \partial D$ kompakt ist. Auf Grund der regulären, 3-mal stetig differenzierbaren Parametrisierung von Γ und der beliebig oft differenzierbaren Cosinus-Substitution ist auch der durch (4.25) definierte Operator $\tilde{K}_{D,\Gamma}$ ein beschränkter Operator nach $C^2(\mathbb{R})$. Da der Cosinus eine 2π -periodische und gerade Funktion ist, bildet $\tilde{K}_{D,\Gamma}$ sogar beschränkt nach $C_{2\pi,e}^2$ ab.

Durch Ausführen der Einbettungsabbildung aus Satz 2.17 erhalten wir schließlich, dass der Operator $\tilde{K}_{D,\Gamma}$ nach $C_{2\pi,e}^{1,\alpha}$ abbildet. Die Kompaktheit der Einbettungsabbildung liefert dann zusammen mit der Beschränktheit von $\tilde{K}_{D,\Gamma}$ als Operator nach $C_{2\pi,e}^2$ die Kompaktheit von $\tilde{K}_{D,\Gamma}$ als Operator von $C(\partial D)$ nach $C_{2\pi,e}^{1,\alpha}$. \square

Satz 4.13 *Der in (4.27) definierte Operator L_0 ist ein kompakter Operator von $C_{2\pi,e}^{0,\alpha}$ nach $C_{2\pi,e}^{1,\alpha}$.*

Beweis: Der Kern des Operators L_0 ist auf Grund der Cosinus-Substitution in der ersten Variablen 2π -periodisch und gerade, d.h. L_0 bildet in den Raum der 2π -periodischen und geraden Funktionen ab.

Wir zeigen weiterhin, dass der Kern K_0 2-mal stetig differenzierbar auf ganz \mathbb{R}^2 ist. Dazu betrachten wir für $s_1, s_2 \in [-1, 1]$, $s_1 \neq s_2$,

$$\begin{aligned} \tilde{K}_0(s_1, s_2) &:= \ln \frac{4(s_1 - s_2)^2}{|x(s_1) - x(s_2)|^2} + \frac{4\pi}{|\Gamma|} \\ &\quad - \frac{1}{|\Gamma|} \int_0^\pi \ln \frac{1}{|x(s_1) - x(\cos \sigma)|^2} |x'(\cos \sigma)| \sin \sigma \, d\sigma \end{aligned} \quad (4.36)$$

und zeigen, dass \tilde{K}_0 zusammen mit allen partiellen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung auf $[-1, 1]^2$ stetig ergänzbar ist. (Wir beschränken uns an dieser Stelle exemplarisch auf den Beweis der stetigen Ergänzbarkeit von \tilde{K}_0 und $\frac{\partial}{\partial s_1} \tilde{K}_0$. Die Beweise in den anderen Fällen verlaufen analog.)

Wir betrachten dazu die Funktion

$$k_0(s_1, s_2) := \ln \frac{4(s_1 - s_2)^2}{|x(s_1) - x(s_2)|^2}, \quad s_1, s_2 \in [-1, 1],$$

sowie die Taylorentwicklung der Parametrisierungsfunktion x als Funktion in s_1 um den Punkt s_2 . Wir erhalten

$$x(s_1) - x(s_2) = (s_1 - s_2) \cdot x'(\xi^1(s_1, s_2)) \quad (4.37)$$

und damit

$$\lim_{s_1 \rightarrow s_2} k_0(s_1, s_2) = \lim_{s_1 \rightarrow s_2} \ln \frac{4}{|x'(\xi^1(s_1, s_2))|^2} = \ln \frac{4}{|x'(s_2)|^2}. \quad (4.38)$$

Auf Grund der Regularität der Parametrisierungsfunktion existiert der Grenzwert für alle $s_2 \in [-1, 1]$.

Man beachte hierbei, dass die Notation ungenau ist. Da die Taylorentwicklung für die vektorwertige Funktion x komponentenweise zu verstehen ist, existieren auch die Zwischenstellen $\xi^1(t, s)$ komponentenweise. Es ist also

$$\xi^1(s_1, s_2) := \begin{pmatrix} \xi_1^1(s_1, s_2) \\ \xi_2^1(s_1, s_2) \end{pmatrix}.$$

Für die erste partielle Ableitung von \tilde{K}_0 nach s_1 betrachten wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial k_0(s_1, s_2)}{\partial s_1} &= \frac{|x(s_1) - x(s_2)|^2}{4(s_1 - s_2)^2} \\ &\quad \cdot \frac{8(s_1 - s_2)|x(s_1) - x(s_2)|^2 - 8(s_1 - s_2)^2 \langle x(s_1) - x(s_2), x'(s_1) \rangle}{|x(s_1) - x(s_2)|^4} \\ &= \frac{2|x(s_1) - x(s_2)|^2 - 2(s_1 - s_2) \langle x(s_1) - x(s_2), x'(s_1) \rangle}{(s_1 - s_2)|x(s_1) - x(s_2)|^2} \\ &= 2 \frac{\langle x(s_1) - x(s_2), x(s_1) - x(s_2) - (s_1 - s_2) \cdot x'(s_1) \rangle}{(s_1 - s_2)|x(s_1) - x(s_2)|^2} \end{aligned}$$

sowie die Taylorentwicklung (4.37) und die Taylorentwicklung

$$x(s_1) - x(s_2) - (s_1 - s_2) \cdot x'(s_1) = \frac{(s_2 - s_1)^2}{2} \cdot x''(\xi^2(s_1, s_2)), \quad (4.39)$$

wobei auch hier die Zwischenstelle ξ^2 komponentenweise aufzufassen ist.

Einsetzen der Taylorentwicklungen führt im Grenzübergang zu

$$\begin{aligned} \lim_{s_1 \rightarrow s_2} \frac{\partial k_0(s_1, s_2)}{\partial s_1} &= \lim_{s_1 \rightarrow s_2} 2 \frac{\langle x(s_1) - x(s_2), x(s_1) - x(s_2) - (s_1 - s_2) \cdot x'(s_1) \rangle}{(s_1 - s_2)|x(s_1) - x(s_2)|^2} \\ &= \lim_{s_1 \rightarrow s_2} - \frac{(s_2 - s_1)^3 \langle x'(\xi^1(s_1, s_2)), x''(\xi^2(s_1, s_2)) \rangle}{(s_1 - s_2)^3 |x'(\xi^1(s_1, s_2))|^2} \\ &= - \frac{\langle x'(s_2), x''(s_1) \rangle}{|x'(s_2)|^2}, \end{aligned} \quad (4.40)$$

und die Regularität der Parametrisierungsfunktion liefert wiederum die Existenz des Grenzwerts für alle $s_2 \in [-1, 1]$.

Aus (4.38) und (4.40) (sowie analogen Ergebnissen für die übrigen partiellen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung) ersehen wir, dass k_0 in $C^2([-1, 1]^2)$ liegt. Die entsprechenden Eigenschaften der übrigen Terme von \tilde{K}_0 sind offensichtlich oder folgen aus Satz 3.23, da der dritte Term in (4.36) ein Einfachschichtpotential über Γ mit konstanter Dichte ist. Wir erhalten somit, dass auch \tilde{K}_0 in $C^2([-1, 1]^2)$ liegt.

Die entsprechende Eigenschaft des Kerns K_0 folgt nun mit Hilfe der Analytizität des Cosinus und der Kettenregel aus der Identität

$$K_0(t, \tau) = \tilde{K}_0(\cos t, \cos \tau).$$

Die Kompaktheit des Integrationsgebiets liefert zusammen mit der 2-mal stetigen Differenzierbarkeit des Kerns, dass der Operator L_0 ein beschränkter Operator von $C_{2\pi, e}^{0, \alpha}$ nach $C_{2\pi, e}^2$ ist.

Durch Anwenden der Einbettungsabbildung aus Satz 2.17 erhalten wir schließlich, dass der Operator L_0 ein kompakter Operator von $C_{2\pi, e}^{0, \alpha}$ nach $C_{2\pi, e}^{1, \alpha}$ ist. \square

Folgerung 4.14 Die in (4.34) definierte rechte Seite von (4.35) liegt in $C_{2\pi, e}^{1, \alpha}$.

Beweis: Die rechte Seite der zweiten Gleichung von (4.35) ist auf Grund der Cosinus-Substitution 2π -periodisch und gerade. Die hölderstetige Differenzierbarkeit der rechten Seite folgt wiederum aus Satz 3.23, da die rechte Seite als Einfachschichtpotential über den C^3 -glatten Bogen Γ mit konstanter Dichte in $C_{2\pi, e}^2 \subseteq C_{2\pi, e}^{1, \alpha}$ liegt. \square

Satz 4.15 Der in (4.18) definierte Operator K_D ist ein kompakter Operator von $C(\partial D)$ nach $C(\partial D)$.

Beweis: Es sei $y : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine 2-mal stetig differenzierbare, 2π -periodische, reguläre Parametrisierung von ∂D mit positiver Orientierung. Für $t, s \in [0, 2\pi)$ mit $t \neq s$ ist der Kern von K_D in parametrisierter Form gegeben durch

$$k(t, s) := \frac{\partial \Phi(y(t), y(s))}{\partial \nu(y(s))} = \frac{1}{2\pi} \left\langle \frac{[y'(s)]^\perp}{|y'(s)|}, \frac{y(t) - y(s)}{|y(t) - y(s)|^2} \right\rangle.$$

Seine Stetigkeit für $t \neq s$ ist offensichtlich.

Um die stetige Ergänzbarkeit für $t = s$ einzusehen, entwickeln wir die Parametrisierungsfunktion y nach Taylor um s bis zur ersten und bis zur zweiten Ordnung. Wir erhalten

$$y(t) - y(s) = (t - s) \cdot y'(\xi^1(t, s)) \quad (4.41)$$

$$y(t) - y(s) = (t - s) \cdot y'(s) + \frac{1}{2}(t - s)^2 \cdot y''(\xi^2(t, s)). \quad (4.42)$$

Man beachte, dass auch hier die Notation ungenau ist, da die Zwischenstellen in den Taylorentwicklungen komponentenweise zu verstehen sind.

Wir setzen nun (4.42) in den Zähler und (4.41) in den Nenner von k ein und erhalten

$$\begin{aligned} k(t, s) &= \frac{1}{2\pi} \left\langle \frac{[y'(s)]^\perp}{|y'(s)|}, \frac{(t - s) \cdot y'(s) + \frac{1}{2}(t - s)^2 \cdot y''(\xi^2(t, s))}{|(t - s) \cdot y'(\xi^1(t, s))|^2} \right\rangle \\ &= \frac{1}{2\pi(t - s)} \left\langle \frac{[y'(s)]^\perp}{|y'(s)|}, \frac{y'(s)}{|y'(\xi^1(t, s))|^2} \right\rangle + \frac{1}{4\pi} \left\langle \frac{[y'(s)]^\perp}{|y'(s)|}, \frac{y''(\xi^2(t, s))}{|y'(\xi^1(t, s))|^2} \right\rangle \\ &= \frac{1}{4\pi} \left\langle \frac{[y'(s)]^\perp}{|y'(s)|}, \frac{y''(\xi^2(t, s))}{|y'(\xi^1(t, s))|^2} \right\rangle. \end{aligned}$$

Aus $t \rightarrow s$ folgt aber auch $\xi^1, \xi^2 \rightarrow s$, und wir erhalten

$$\lim_{t \rightarrow s} k(t, s) = \frac{1}{4\pi} \left\langle \frac{[y'(s)]^\perp}{|y'(s)|}, \frac{y''(s)}{|y'(s)|^2} \right\rangle = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\langle [y'(s)]^\perp, y''(s) \rangle}{|y'(s)|^3}.$$

Auf Grund der Regularität der Parametrisierung existiert der obige Grenzwert für alle $s \in [0, 2\pi)$, was die stetige Ergänzbarkeit von k für $t = s$ impliziert.

Damit ist der Operator K_D nach Abschnitt 2.2 ein Integraloperator von $C(\partial D)$ nach $C(\partial D)$ mit stetigem Kern und als solcher nach Satz 2.9 kompakt. \square

Satz 4.16 *Der in (4.24) definierte Operator $\tilde{K}_{\Gamma, D}$ ist ein kompakter Operator von $C_{2\pi, e}^{0, \alpha}$ nach $C(\partial D)$.*

Beweis: Der Kern von $\tilde{K}_{\Gamma, D}$ hat die Gestalt

$$\tilde{k}_{\Gamma, D}(y, \tau) := \ln \frac{1}{|y - x(\cos \tau)|} + \frac{2\pi}{|\Gamma|} - \frac{1}{|\Gamma|} \int_0^\pi \ln \frac{1}{|y - x(\cos \sigma)|} |x'(\cos \sigma)| \sin \sigma \, d\sigma$$

mit $y \in \partial D$ und $\tau \in \mathbb{R}$. Da $\Gamma \cap \partial D = \emptyset$ ist, ist der Kern $\tilde{k}_{\Gamma, D}$ stetig auf $\partial D \times \mathbb{R}$.

Damit ist der Operator $\tilde{K}_{\Gamma, D}$ nach Abschnitt 2.2 ein Integraloperator von $C_{2\pi, e}^{0, \alpha}$ nach $C(\partial D)$ mit stetigem Kern und als solcher nach Satz 2.9 kompakt. \square

Folgerung 4.17 Die in (4.33) definierte rechte Seite von (4.35) liegt in $C(\partial D)$.

Beweis: Folgt direkt aus Satz 3.13. \square

Nach diesen Vorbereitungen sind wir nun in der Lage, das abschließende Resultat dieses Abschnitts, die Existenzaussage, zu formulieren.

Satz 4.18 Das Problem 4.1 ist eindeutig lösbar.

Beweis: Wir greifen das gegebene Integralgleichungssystem in der Form von (4.35) auf und formen es durch Linksmultiplikation mit dem nach Satz 4.11 invertierbaren Operator

$$\begin{pmatrix} Id & 0 \\ 0 & \tilde{L}^{-1} \end{pmatrix}$$

äquivalent um.

Dann hat (4.35) die Form

$$(Id - A) \begin{pmatrix} \psi \\ \tilde{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2qf_D \\ -\tilde{L}^{-1} f_\Gamma \end{pmatrix},$$

wobei der Operator $A : C(\partial D) \times C_{2\pi, e}^{0, \alpha} \rightarrow C(\partial D) \times C_{2\pi, e}^{0, \alpha}$, gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} -2qK_D & -2q\tilde{K}_{\Gamma, D} \\ -\tilde{L}^{-1} \tilde{K}_{D, \Gamma} & -\tilde{L}^{-1} L_0 \end{pmatrix},$$

nach den Sätzen 4.12, 4.13, 4.15 und 4.16 sowie nach den Sätzen 2.3 und 2.4 kompakt ist.

Das Hauptergebnis der Riesz-Theorie (vgl. Folgerung 2.6) impliziert nun, dass die Gleichung (4.35) eine eindeutig bestimmte Lösung $(\psi, \tilde{\varphi})$ besitzt, da das zugehörige homogene Gleichungssystem nach Satz 4.10 nur trivial lösbar ist. Mit den Sätzen 4.5 bis 4.10 folgt schließlich, dass auch das Problem 4.1 eine Lösung besitzt. Diese ist nach Satz 4.4 eindeutig bestimmt. \square

Kapitel 5

Numerische Behandlung

Wir werden in diesem Kapitel eine Methode zur numerischen Berechnung von Näherungslösungen für das Problem 4.1 entwickeln, die auf der in Abschnitt 4.3 vorgestellten Existenztheorie basiert.

Insbesondere sind wir dabei an Näherungslösungen für die Dichten ψ und $\tilde{\varphi}$ interessiert. Wir werden solche Näherungen durch Reduktion des zu Grunde liegenden Integralgleichungssystems auf ein lineares Gleichungssystem mit reellen Variablen erreichen, in dem wir die reellen Variablen als Koeffizienten in einem endlich dimensionalen Unterraum interpretieren, in dem die Lösungen ψ und $\tilde{\varphi}$ angenähert werden. Wir wenden dabei eine in [10], Chapter 13, beschriebene Kollokationsmethode in einer Weise an, wie sie in [13] vorgeschlagen wird.

Wir greifen das Integralgleichungssystem in der Form von (4.35) auf. Dann ist der Operator

$$(S + A) := \left(\left(\begin{array}{cc} Id & 0 \\ 0 & \tilde{L} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{cc} 2qK_D & 2q\tilde{K}_{\Gamma,D} \\ \tilde{K}_{D,\Gamma} & L_0 \end{array} \right) \right)$$

ein Operator von $C(\partial D) \times C_{2\pi,e}^{0,\alpha}$ nach $C(\partial D) \times C_{2\pi,e}^{1,\alpha}$.

Wir wählen eine 2π -periodische, 2-mal stetig differenzierbare Parametrisierung y von ∂D mit positiver Orientierung, um (4.35) erneut umzuformen und erhalten

$$\left(\left(\begin{array}{cc} Id & 0 \\ 0 & \tilde{L} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{cc} 2q\hat{K}_D & 2q\hat{K}_{\Gamma,D} \\ \hat{K}_{D,\Gamma} & L_0 \end{array} \right) \right) \begin{pmatrix} \hat{\psi} \\ \tilde{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2q\hat{f}_D \\ -f_\Gamma \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

mit $\widehat{\psi}(t) := \psi(y(t))$ für $t \in [0, 2\pi]$ sowie

$$\left(\widehat{K}_D \widehat{\psi}\right)(t) := \int_0^{2\pi} \widehat{k}_D(t, \tau) \widehat{\psi}(\tau) d\tau, \quad t \in [0, 2\pi], \quad (5.2)$$

$$\left(\widehat{K}_{D,\Gamma} \widehat{\psi}\right)(t) := \int_0^{2\pi} \widehat{k}_{D,\Gamma}(t, \tau) \widehat{\psi}(\tau) d\tau, \quad t \in [0, 2\pi], \quad (5.3)$$

$$\left(\widehat{K}_{\Gamma,D} \widehat{\varphi}\right)(t) := \left(\widetilde{K}_{\Gamma,D} \widetilde{\varphi}\right)(y(t)), \quad t \in [0, 2\pi], \quad (5.4)$$

$$\widehat{f}_D(t) := f_D(y(t)), \quad t \in [0, 2\pi]. \quad (5.5)$$

Dabei haben wir

$$\widehat{k}_D(t, \tau) := \frac{\partial \Phi(y(t), y(\tau))}{\partial \nu(y(\tau))} |y'(\tau)|, \quad t, \tau \in [0, 2\pi],$$

$$\widehat{k}_{D,\Gamma}(t, \tau) := \frac{\partial \Phi(x(\cos t), y(\tau))}{\partial \nu(y(\tau))} |y'(\tau)|, \quad t, \tau \in [0, 2\pi],$$

gesetzt.

Der auf diese Weise definierte Operator

$$(S + \widehat{A}) := \left(\begin{pmatrix} Id & 0 \\ 0 & \widetilde{L} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2q\widehat{K}_D & 2q\widehat{K}_{\Gamma,D} \\ \widehat{K}_{D,\Gamma} & L_0 \end{pmatrix} \right) \quad (5.6)$$

ist ein Operator von $C_{2\pi} \times C_{2\pi,e}^{0,\alpha}$ nach $C_{2\pi} \times C_{2\pi,e}^{0,\alpha}$, und ermöglicht uns so eine Diskretisierung mittels trigonometrischer Interpolation.

5.1 Trigonometrische Interpolation

Dieser Abschnitt dient der Einführung geeigneter endlich dimensionaler Unterräume *trigonometrischer Polynome* sowie zugehöriger *Interpolations- und Projektionsoperatoren*. In diesen Räumen wird dann in Abschnitt 5.4 die numerische Approximation erfolgen.

Definition 5.1 Für $n \in \mathbb{N}$ heißt die Menge

$$T_n := \left\{ \sum_{k=0}^n \alpha_k \cos(kt) + \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k \sin(kt) : \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \right\} \quad (5.7)$$

Raum der trigonometrischen Polynome. Er ist ein $2n$ -dimensionaler reeller Vektorraum und enthalten in $C_{2\pi}$.

Weiter heißt die Menge

$$T_{n,e} := \left\{ \sum_{k=0}^n \alpha_k \cos(kt) : \alpha_k \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \right\} \quad (5.8)$$

Raum der geraden trigonometrischen Polynome. *Er ist ein $(n+1)$ -dimensionaler reeller Vektorraum und enthalten in $C_{2\pi,e}^{1,\alpha} \subseteq C_{2\pi,e}^{0,\alpha}$.*

Satz 5.2 Für $n \in \mathbb{N}$ sei eine äquidistante Unterteilung von $[0, 2\pi]$ gegeben durch $t_i := \frac{i\pi}{n}$ für $i = 0, \dots, 2n-1$. Dann existiert für beliebiges $f \in C_{2\pi}$ genau ein $u_f \in T_n$ mit der Eigenschaft $u_f(t_i) = f(t_i)$ für $i = 0, \dots, 2n-1$.

Dabei sind die Koeffizienten von u_f gegeben durch

$$\begin{aligned} \alpha_k &:= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{2n-1} f(t_j) \cos(kt_j), & k = 0, \dots, n, \\ \beta_k &:= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{2n-1} f(t_j) \sin(kt_j), & k = 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Beweis: vgl. [15], Abschnitt 3.2, S. 145ff.

Lemma 5.3 Für eine äquidistante Unterteilung von $[0, 2\pi]$ wie in Satz 5.2 hat die so genannte Lagrange-Basis von T_n die Form

$$L_j^n(t) := \frac{1}{2n} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \cos(k(t-t_j)) + \cos(n(t-t_j)) \right) \quad (5.9)$$

für $j = 0, \dots, 2n-1$ und $t \in [0, 2\pi]$. Ihre Elemente bilden eine Basis von T_n und erfüllen darüber hinaus die Bedingung

$$L_j^n(t_k) = \delta_{jk} \quad \text{für alle } j, k \in 0, \dots, 2n-1. \quad (5.10)$$

Beweis: vgl. [15], Lemma 2.3, S. 147.

Lemma 5.4 Für $n \in \mathbb{N}$ und $j = 0, \dots, 2n-1$ seien L_j^n die Elemente der Lagrange-Basis von T_n . Dann bildet die Menge

$$\left\{ L_0^n, L_n^n, L_j^n + L_{2n-j}^n : j = 1, \dots, n-1 \right\} \quad (5.11)$$

eine Basis von $T_{n,e}$.

Beweis: Um einzusehen, dass die Elemente von (5.11) tatsächlich in $T_{n,e}$ enthalten sind, reicht es zu zeigen, dass sie gerade sind. Wir rechnen folglich für alle $t \in \mathbb{R}$ nach, dass

$$\begin{aligned}
L_0^n(-t) &= \frac{1}{2n} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \cos(k(-t)) + \cos(n(-t)) \right) \\
&= \frac{1}{2n} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \cos(kt) + \cos(nt) \right) \\
&= L_0^n(t), \\
L_n^n(-t) &= \frac{1}{2n} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \cos(k(-t - \pi)) + \cos(n(-t - \pi)) \right) \\
&= \frac{1}{2n} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \cos(k(t - \pi)) + \cos(n(t - \pi)) \right) \\
&= L_n^n(t), \\
L_j^n(-t) + L_{2n-j}^n(-t) &= \frac{1}{2n} \left(2 + 4 \sum_{k=1}^{n-1} \cos \frac{k(-2t - 2\pi)}{2} \cos \frac{k(-t_j + t_{2n-j})}{2} \right. \\
&\quad \left. + 2 \cos \frac{n(-2t - 2\pi)}{2} \cos \frac{n(-t_j + t_{2n-j})}{2} \right) \\
&= \frac{1}{2n} \left(2 + 4 \sum_{k=1}^{n-1} \cos \frac{k(2t - 2\pi)}{2} \cos \frac{k(-t_j + t_{2n-j})}{2} \right. \\
&\quad \left. + 2 \cos \frac{n(2t - 2\pi)}{2} \cos \frac{n(-t_j + t_{2n-j})}{2} \right) \\
&= L_j^n(t) + L_{2n-j}^n(t)
\end{aligned}$$

gilt. Die Basiseigenschaften von (5.11) folgen nun aus der linearen Unabhängigkeit der Lagrange-Basis von T_n und der Dimension von $T_{n,e}$. \square

Satz 5.5 Für $n \in \mathbb{N}$ seien die Räume T_n und $T_{n,e}$ mit einer äquidistanten Unterteilung von $[0, 2\pi]$ versehen (vgl. Satz 5.2). Dann werden durch die Abbildungen

$$C_{2\pi} \ni g \mapsto \sum_{j=0}^{2n-1} g(t_j) L_j^n \in T_n$$

sowie

$$C_{2\pi,e}^{k,\alpha} \ni f \mapsto \sum_{j=0}^{2n-1} f(t_j) L_j^n \in T_{n,e}, \quad k = 0, 1,$$

beschränkte, lineare Operatoren $P_n : C_{2\pi} \rightarrow T_n$ sowie $P_{n,e}^{k,\alpha} : C_{2\pi,e}^{k,\alpha} \rightarrow T_{n,e}$ für $k = 0, 1$ gegeben.

Die Operatoren heißen trigonometrische Interpolationsoperatoren auf T_n bzw. $T_{n,e}$. Sie sind Projektionsoperatoren mit

$$P_n \Big|_{C_{2\pi,e}^{k,\alpha}} = P_{n,e}^{k,\alpha}, \quad k = 0, 1,$$

und erfüllen für alle $g \in C_{2\pi}^{k,\alpha}$

$$\|P_n g - g\|_\infty \leq C \frac{\ln n}{n^{k+\alpha}} \|g\|_{k,\alpha} \quad \text{für alle } \alpha \in (0, 1], k = 0, 1. \quad (5.12)$$

Beweis: vgl. [10], Theorem 11.2, S. 180; [10], Theorem 11.6, S. 184 sowie [10], Theorem 13.4, S. 219.

Lemma 5.6 Es sei $t_k := \frac{k\pi}{n}$ für $k = 0, \dots, 2n - 1$. Dann gilt für den in (4.32) definierten Operator \tilde{L}

$$\left(\tilde{L} \cos(m(\cdot - t_k)) \right) (t) = \begin{cases} 1, & m = 0, t \in [0, 2\pi], \\ \frac{1}{2m} \cos(m(t - t_k)), & m \in \mathbb{N}, t \in [0, 2\pi]. \end{cases} \quad (5.13)$$

Beweis: Für $t \in [0, 2\pi]$, $k = 0, \dots, 2n - 1$ und $m \in \mathbb{N}_0$ ist

$$\begin{aligned} \left(\tilde{L} \cos(m(\cdot - t_k)) \right) (t) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ -\ln \left(4 \sin^2 \frac{t - \tau}{2} \right) + 2 \right\} \cos(m(\tau - t_k)) d\tau \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_{t-2\pi}^t \ln \left(4 \sin^2 \frac{s}{2} \right) \cos(m(t - s - t_k)) ds \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(m(\tau - t_k)) d\tau \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left(4 \sin^2 \frac{s}{2} \right) \cos(ms) ds \cos(m(t - t_k)) \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left(4 \sin^2 \frac{s}{2} \right) \sin(ms) ds \sin(m(t - t_k)) \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(m(\tau - t_k)) d\tau, \end{aligned}$$

wobei wir $s = t - \tau$ substituiert, die 2π -Periodizität des Integranden sowie ein Additionstheorem für den Cosinus ausgenutzt haben.

Zum einen ist

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(m(\tau - t_k)) d\tau = \begin{cases} 1, & m = 0, \\ 0, & m \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

zum anderen gilt nach [10], Lemma 8.21, S. 146,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left(4 \sin^2 \frac{t}{2} \right) e^{imt} dt = \begin{cases} 0, & m = 0, \\ -\frac{1}{m}, & m \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

was insbesondere bedeutet, dass die Integrale über die Sinus-Terme identisch verschwinden.

Aus den Werten der Integrale über die Cosinus-Terme erhalten wir für alle $t \in [0, 2\pi]$ und für $k = 0, \dots, 2n - 1$

$$\begin{aligned} \left(\tilde{L} \cos(m(\cdot - t_k)) \right) (t) &= -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left(4 \sin^2 \frac{s}{2} \right) \cos(ms) ds \cos(m(t - t_k)) \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(m(\tau - t_k)) d\tau \\ &= \begin{cases} 1, & m = 0, \\ \frac{1}{2m} \cos(m(t - t_k)), & m \in \mathbb{N}. \end{cases} \end{aligned}$$

□

Folgerung 5.7 *Der in (4.32) definierte Operator \tilde{L} bildet $T_{n,e}$ bijektiv nach $T_{n,e}$ ab. Die Elemente aus $T_{n,e}$ sind dabei exakt integrierbar und \tilde{L} hat auf der Lagrange-Basis von T_n die Werte*

$$\left(\tilde{L} L_j^n \right) (t) = \frac{1}{2n} \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \cos(k(t - t_j)) + \frac{1}{2n} \cos(n(t - t_j)) \right). \quad (5.14)$$

Beweis: Wir wenden Lemma 5.6 für $m \in \mathbb{N}$ und $t_0 = 0$ an und sehen, dass \tilde{L} auf Grund seiner Linearität Ausdrücke in der Form von (5.8) wieder auf Ausdrücke in der Form von (5.8) abbildet. Dabei werden die Ausdrücke exakt integriert, was ebenfalls aus Lemma 5.6 deutlich wird.

Die Bijektivität auf $T_{n,e}$ erhalten wir dann aus der Injektivität von \tilde{L} auf $C_{2\pi,e}^{0,\alpha}$ und aus der Tatsache, dass $T_{n,e}$ endliche Dimension hat.

Für die Werte von \tilde{L} auf der Lagrange-Basis von T_n wenden wir erneut Lemma 5.6 auf die Darstellung (5.9) der Lagrange-Basis von T_n an. □

5.2 Ein Kollokationsverfahren

Der auf Seite 62 eingeführte Operator $S + \widehat{A}$ macht deutlich, dass die numerisch zu approximierende Integralgleichung von erster Art ist. Ein in einem solchen Fall auf Grund seiner guten Konvergenzeigenschaften und seiner Vielseitigkeit geeignetes Verfahren ist das so genannte *Kollokationsverfahren*, dessen Idee darin besteht, die Lösung einer Gleichung der Form

$$A\varphi = f$$

in endlich dimensionalen Unterräumen in Bild- und Urbildraum anzunähern, wobei es ausreicht, dass die obige Gleichung nur auf einer unisolventen Menge von Punkten im Bildraum erfüllt ist. Wir definieren formal:

Definition 5.8 (Kollokationsverfahren) *Es seien X und Y Banachräume mit $Y \subseteq C(G)$; es sei $A : X \rightarrow Y$ ein beschränkter, linearer Operator. Für $n \in \mathbb{N}$ seien weiter Unterräume $X_n \subseteq X$ und $Y_n \subseteq Y$ mit $\dim X_n = \dim Y_n = n$ sowie so genannte Kollokationspunkte $x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)} \in G$ gegeben, so dass Y_n bezüglich dieser Punkte unisolvent ist.*

Dann besteht das Kollokationsverfahren zur näherungsweise Lösung der Integralgleichung

$$A\varphi = f, \quad f \in Y, \varphi \in X, \quad (5.15)$$

in der Bestimmung einer Lösung $\varphi_n \in X_n$, so dass die Gleichung (5.15) in den Kollokationspunkten erfüllt ist, d.h. dass

$$(A\varphi_n)(x_j^{(n)}) = f(x_j^{(n)}), \quad j = 1, \dots, n, \quad (5.16)$$

gilt.

Wir interpretieren im folgenden die oben beschriebene Kollokationsmethode als *Projektionsverfahren* (vgl. [10], Section 13.3, S. 225ff.), indem wir (5.16) in der folgenden Weise auffassen.

Lemma 5.9 *Unter den Bedingungen von Definition 5.8 löst $\varphi \in X$ die Gleichung*

$$P_n^Y A(P_n^X \varphi) = P_n^Y f \quad (5.17)$$

genau dann, wenn $P_n^X \varphi \in X_n$ die Gleichung (5.16) löst, wobei der Operator P_n^X ein Projektionsoperator auf den Unterraum X_n und P_n^Y der Projektions- und Interpolationsoperatoren auf den mit der Lagrange-Basis an den Kollokationspunkten versehene Unterraum Y_n sei.

Dabei entsprechen die Gleichungen (5.16) bzw. (5.17) einem reellen $n \times n$ Gleichungssystem.

Beweis: Es seien also $\{u_1^{(n)}, \dots, u_n^{(n)}\}$ eine Basis von X_n und $\{v_1^{(n)}, \dots, v_n^{(n)}\}$ die Lagrange-Basis zu den Kollokationspunkten von Y_n .

Sei zunächst $\varphi \in X$ eine Lösung von (5.17). Wir definieren $\varphi_n := P_n^X \varphi$ und sehen, dass $\varphi_n \in X_n$ liegt.

Weiter besitzen $P_n^Y f$ und $P_n^Y A\psi_n$ für alle $\psi_n \in X_n$ auf Grund der Eigenschaften der Lagrange-Basis eine Darstellung der Form

$$P_n^Y A\psi_n = \sum_{j=1}^n (A\psi_n)(x_j^{(n)})v_j^{(n)}$$

bzw.

$$P_n^Y f = \sum_{j=1}^n f(x_j^{(n)})v_j^{(n)}$$

woraus wir erhalten, dass φ_n die Gleichungen (5.16) für $j = 1, \dots, n$ erfüllt.

Sei andererseits $\varphi_n \in X_n$ eine Lösung von (5.16). Dann definieren wir $\varphi := \varphi_n \in X$ und sehen, dass auf Grund der Projektionseigenschaft von P_n^X auch $P_n^X \varphi = \varphi_n \in X_n$ eine Lösung von (5.16) ist.

Wir setzen nun

$$f_n := \sum_{j=1}^n f(x_j^{(n)})v_j^{(n)} \in Y_n$$

sowie

$$\psi_n := \sum_{j=1}^n (AP_n^X \varphi)(x_j^{(n)})v_j^{(n)} \in Y_n$$

und erkennen aus (5.16) und auf Grund der Eigenschaften der Lagrange-Basis, dass $\psi_n = f_n$ gilt. Mit Hilfe der Projektionseigenschaft von P_n^Y gilt zudem sowohl $f_n = P_n^Y f_n$ als auch $\psi_n = P_n^Y \psi_n$, womit $\varphi \in X$ eine Lösung von (5.17) ist.

Nutzen wir weiterhin aus, dass auch $\varphi_n \in X_n$ eine Basisdarstellung der Form

$$\varphi_n = \sum_{k=1}^n \gamma_k u_k^{(n)}$$

mit reellen Koeffizienten $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ besitzt, so können wir (5.17) bzw. (5.16) auch in der Form

$$\sum_{k=1}^n \gamma_k (Au_k^{(n)})(x_j^{(n)}) = f(x_j^{(n)}), \quad j = 1, \dots, n, \quad (5.18)$$

also als $n \times n$ -Gleichungssystem mit reellen Koeffizienten auffassen. \square

Wir merken an dieser Stelle an, dass das in Definition 5.8 beschriebene Verfahren auch in der Umformulierung von Lemma 5.9 nur ein semi-diskretes Verfahren

ist, da der auftretende Operator A in der Regel auch auf den Basisfunktionen u_k , $k = 1, \dots, n$, des Urbildraums X_n nicht exakt ausgewertet werden kann.

Für eine vollständig diskretes Verfahren muss daher auch der Operator geeignet approximiert werden.

5.3 Ein Quadraturformel-Verfahren

Dieser Abschnitt dient der Einführung eines Approximationsverfahrens für Integraloperatoren durch so genannte *Quadraturformeln*. Diese werden benötigt, um, wie in Abschnitt 5.2 angesprochen, das dort beschriebene semi-diskrete Kollokationsverfahren in ein vollständig diskretes Verfahren zu überführen.

Definition 5.10 Für $n \in \mathbb{N}$ und $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ sei eine Unterteilung von $[a, b]$ gegeben durch $a \leq x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \dots < x_n^{(n)} \leq b$. Weiter sei $f \in C[a, b]$. Eine Folge von Quadraturformeln

$$Q_n(f) := \sum_{j=0}^n \alpha_j^{(n)} f(x_j^{(n)}), \quad n \in \mathbb{N}, \alpha_j^{(n)} \in \mathbb{R}, j = 0, \dots, n,$$

zur Approximation des Integrals

$$Q(f) := \int_a^b f(x) dx$$

heißt konvergent, falls für jedes $f \in C[a, b]$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(f) = Q(f)$$

gilt.

Satz 5.11 (Steklov) Eine Folge (Q_n) von Quadraturformeln ist konvergent, falls sie die folgenden Bedingungen erfüllt:

- Für alle Polynome p gilt $Q_n(p) \rightarrow \int_a^b p(s) ds$, $n \rightarrow \infty$.
- Es gilt $\alpha_j^{(n)} \geq 0$ für $j = 0, \dots, n$ und für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis: vgl. [15], Satz 5.3, S.259.

Satz 5.12 *Es sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f \in C[a, b]$. Dann ist die Quadraturformel-Folge der so genannten zusammengesetzten Trapezregeln der Form*

$$Q_n^T(f) := \frac{b-a}{n} \left[\frac{1}{2}f(a) + \sum_{j=1}^{n-1} f\left(a + j \cdot \frac{b-a}{n}\right) + \frac{1}{2}f(b) \right]$$

konvergent.

Beweis: vgl. [15], Abschnitt 4.5.1, S. 259.

Folgerung 5.13 *Es seien $X, Y = C[a, b]$ Banachräume und $x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}$ für $i = 0, \dots, n$ eine äquidistante Unterteilung von $[a, b]$ wie in Satz 5.12. Weiter sei $A : X \rightarrow Y$ ein Integraloperator mit stetigem (differenzierbarem) Kern, d.h. es gelte*

$$(A\varphi)(t) := \int_a^b K(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau, \quad t \in [a, b], \varphi \in C[a, b].$$

Dann sind für $n \in \mathbb{N}$ die Operatoren $A_n : X \rightarrow Y$ mit

$$(A_n\varphi)(t) := Q_n^T(K(t, \cdot)\varphi), \quad t \in [a, b], \varphi \in C[a, b]$$

numerische Approximationsoperatoren mit der Eigenschaft $\|A_n\varphi - A\varphi\|_\infty \rightarrow 0$ (bzw. $\|A_n\varphi - A\varphi\|_{1,\infty} \rightarrow 0$) für $n \rightarrow \infty$.

Beweis: Für festes $\varphi \in C[a, b]$ ist die Folge $(A_n\varphi)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise konvergent gegen $A\varphi \in C[a, b]$, da auf Grund der Konvergenz der Quadraturformel-Folge $(Q_n^T)_{n \in \mathbb{N}}$

$$(A_n\varphi)(t) = Q_n^T(K(t, \cdot)\varphi) \rightarrow Q(K(t, \cdot)\varphi) = (A\varphi)(t) \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

und für alle $t \in [a, b]$ gilt.

Darüber hinaus ist die Folge $(A_n\varphi)_{n \in \mathbb{N}}$ gleichgradig stetig, da wir wegen der Konvergenz der Quadraturformel-Folge und der gleichmäßigen Stetigkeit von K auf $[a, b] \times [a, b]$ zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} |(A_n\varphi)(t) - (A_n\varphi)(s)| &= \left| Q_n^T([K(t, \cdot) - K(s, \cdot)]\varphi) \right| \\ &\leq C \max_{\tau \in [a, b]} |K(t, \tau) - K(s, \tau)| \|\varphi\|_\infty \\ &< C \|\varphi\|_\infty \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

für alle $|t - s| < \delta$ und alle $n \in \mathbb{N}$ abschätzen können.

Dann konvergiert nach [10], Problem 12.1, S. 216, die Folge (A_n) punktweise gegen A , d.h. es gilt $\|A_n\varphi - A\varphi\|_\infty \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ und für alle $\varphi \in C[a, b]$.

Falls der Kern K differenzierbar ist, so lassen sich die obigen Abschätzungen auch für die Ableitungen von $A_n\varphi$ und $A\varphi$ beweisen, so dass wir zusammen die Aussage erhalten, dass $\|A_n\varphi - A\varphi\|_{1,\infty} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ und für alle $\varphi \in C[a, b]$ gilt. \square

5.4 Das numerische Verfahren

Nach den Vorbereitungen aus den letzten Abschnitten werden wir nun das numerische Verfahren für die Approximation der in Abschnitt 4.3 entwickelten theoretischen Lösung vorstellen.

Gegeben seien die Banachräume $X^D = Y^D := C_{2\pi}$, $X^\Gamma := C_{2\pi,e}^{0,\alpha}$ und $Y^\Gamma := C_{2\pi,e}^{1,\alpha}$.

Weiter seien für $n \in \mathbb{N}$ gerade die endlich dimensionalen Unterräume gegeben durch $X_n^D = Y_n^D := T_{\frac{n}{2}}$ sowie $X_n^\Gamma = Y_n^\Gamma := T_n$. Auf $T_{\frac{n}{2}}$ und T_n seien weiter äquidistante Unterteilung von $[0, 2\pi]$ gegeben. (vgl. Satz 5.2).

Dann entspricht das Kollokationsverfahren aus Definition 5.8 zur näherungsweise Lösung der Integralgleichung (5.1) mit Hilfe der Umformulierung aus Lemma 5.9 sowie der in Satz 5.5 eingeführten Projektionsoperatoren P_n , $P_{n,e}^{0,\alpha}$ und $P_{n,e}^{1,\alpha}$ dem Lösen des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} P_{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & P_{n,e}^{1,\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Id + 2q\widehat{K}_D & 2q\widehat{K}_{\Gamma,D} \\ \widehat{K}_{D,\Gamma} & \widetilde{L} + L_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_{\frac{n}{2}}\widehat{\psi} \\ P_{n,e}^{0,\alpha}\widetilde{\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2qP_{\frac{n}{2}}\widehat{f}_D \\ -P_{n,e}^{1,\alpha}f_\Gamma \end{pmatrix}. \quad (5.19)$$

Während der Operator \widetilde{L} Elemente aus $T_{n,e}$ exakt integriert (vgl. Folgerung 5.7), trifft dies auf die übrigen Operatoren nicht zu. Wir definieren daher die numerischen Approximationsoperatoren mit Hilfe der zusammengesetzten Trapezregeln (vgl. Folgerung 5.13) für die in (5.2) bzw. (5.3) definierten Integraloperatoren \widehat{K}_D und $\widehat{K}_{D,\Gamma}$ durch

$$\begin{aligned} \left(K_D^{\frac{n}{2}}\psi_{\frac{n}{2}}\right)(t) &:= \frac{2\pi}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \widehat{k}_D(t, t_{2j})\psi_{\frac{n}{2}}(t_{2j}), \\ \left(K_{D,\Gamma}^{\frac{n}{2}}\psi_{\frac{n}{2}}\right)(t) &:= \frac{2\pi}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \widehat{k}_{D,\Gamma}(t, t_{2j})\psi_{\frac{n}{2}}(t_{2j}). \end{aligned}$$

Wir haben an dieser Stelle ausgenutzt, dass die Parametrisierung der Integralanteile über ∂D 2π -periodisch ist, dass also die Werte der Integranden in den Endpunkten der Integrale übereinstimmen.

Die in (5.4) bzw. (4.27) definierten Integraloperatoren $\widehat{K}_{\Gamma,D}$ und L_0 beinhalten nicht periodische Integrale über $[0, \pi]$, so dass wir in diesen Fällen als numerische

Approximationsoperatoren

$$\begin{aligned} (K_{\Gamma,D}^n \varphi_n)(t) &:= \frac{\pi}{n} \left[\frac{1}{2} \tilde{k}_{\Gamma,D}(y(t), t_0) \varphi_n(t_0) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^{n-1} \tilde{k}_{\Gamma,D}(y(t), t_j) \varphi_n(t_j) + \frac{1}{2} \tilde{k}_{\Gamma,D}(y(t), t_n) \varphi_n(t_n) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\widehat{L}_0^n \varphi_n)(t) &:= \frac{\pi}{n} \left[\frac{1}{2} (K_0(t, t_0) - 4) \varphi_n(t_0) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^{n-1} (K_0(t, t_j) - 4) \varphi_n(t_j) + \frac{1}{2} (K_0(t, t_n) - 4) \varphi_n(t_n) \right] \end{aligned}$$

erhalten.

Für eine Darstellung als lineares Gleichungssystem in \mathbb{R}^n in der Form von (5.18) ist das Verhalten der Approximationsoperatoren auf den Basisfunktionen von X_n^D und X_n^Γ zu betrachten. Es gilt

$$\begin{aligned} \left(K_D^{\frac{n}{2}} L_{2k}^n \right)(t) &= \frac{2\pi}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \widehat{k}_D(t, t_{2j}) L_{2k}^n(t_{2j}) \\ &= \frac{2\pi}{n} \widehat{k}_D(t, t_{2k}), \quad k = 0, \dots, n-1, \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned} \left(K_{D,\Gamma}^{\frac{n}{2}} L_{2k}^n \right)(t) &= \frac{2\pi}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \widehat{k}_{D,\Gamma}(t, t_{2j}) L_{2k}^n(t_{2j}) \\ &= \frac{2\pi}{n} \widehat{k}_{D,\Gamma}(t, t_{2k}), \quad k = 0, \dots, n-1, \end{aligned} \quad (5.21)$$

wobei wir die Eigenschaft (5.10) der Lagrange-Basis auf $T_{\frac{n}{2}}$ ausgenutzt haben.

Auf gleiche Weise errechnet sich

$$\left(K_{\Gamma,D}^n L_k^n \right)(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{2n} \tilde{k}_{\Gamma,D}(y(t), t_k), & k = 0, n, \\ \frac{\pi}{n} \tilde{k}_{\Gamma,D}(y(t), t_k), & k = 1, \dots, n-1, \\ 0, & k = n+1, \dots, 2n-1, \end{cases} \quad (5.22)$$

$$\left(\widehat{L}_0^n L_k^n \right)(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{2n} (K_0(t, t_k) - 4), & k = 0, n, \\ \frac{\pi}{n} (K_0(t, t_k) - 4), & k = 1, \dots, n-1, \\ 0, & k = n+1, \dots, 2n-1. \end{cases} \quad (5.23)$$

Da wir das Verhalten des Operators \tilde{L} auf $T_{n,e}$ bereits aus Folgerung 5.7 kennen, sind wir nun in der Lage, das die Integralgleichung (5.1) approximierende lineare Gleichungssystem mit reellen Variablen in der Form von (5.18) anzugeben. Dabei entstehen für $t = t_j$ und $j = 0, \dots, n$ aus (5.14) und (5.20) bis (5.23) die Einträge der Matrix

$$\left((Au_k)(x_j) \right)_{j,k=1,\dots,3n}$$

aus (5.18).

Wir merken abschließend noch an, dass auf Grund der Struktur der Basis von $T_{n,e}$ für eine Funktion $\varphi_n \in T_{n,e}$

$$\varphi_n = \gamma_0 L_0^n + \sum_{j=1}^{n-1} \gamma_j (L_j^n + L_{2n-j}^n) + \gamma_n L_n^n = \sum_{j=0}^{2n-1} \gamma_j L_j^n$$

mit $\gamma_j = \gamma_{2n-j}$ für $j = 1, \dots, n-1$ gilt, bzw. dass für eine Funktion $\varphi \in C_{2\pi,e}^{1,\alpha}$

$$P_n^{1,\alpha} \varphi = \sum_{j=0}^{2n-1} \varphi(t_j) L_j^n = \varphi(t_0) L_0^n + \sum_{j=1}^{n-1} \varphi(t_j) (L_j^n + L_{2n-j}^n) + \varphi(t_n) L_n^n$$

gilt. Dies bedeutet, dass wir (5.19) und damit auch (5.18) mittels der beiden oben angegebenen Beziehungen von einem a priori $3n \times 3n$ -Gleichungssystem auf ein $(2n+1) \times (2n+1)$ -Gleichungssystem reduzieren können.

5.5 Konvergenzanalyse

Wir werden nun das im letzten Abschnitt entwickelte Verfahren für die Bestimmung einer Näherungslösung zu Gleichung (5.1) auf Konvergenz untersuchen.

Wir bedienen uns dazu des folgenden allgemeinen Resultats.

Satz 5.14 *Gegeben sei die Gleichung*

$$S\varphi - A\varphi = f,$$

wobei $S : X \rightarrow Y$ ein linearer, beschränkter Operator mit beschränkter Inverser $S^{-1} : Y \rightarrow X$ und $A : X \rightarrow Y$ ein kompakter Operator sei, so dass der Operator $S - A$ injektiv ist. Weiter seien für $n \in \mathbb{N}$ Unterräume $X_n \subseteq X$ bzw. $Y_n \subseteq Y$ mit $\dim X_n = \dim Y_n = n$ sowie Projektionsoperatoren $P_n : Y \rightarrow Y_n$ gegeben.

Falls zusätzlich $Y_n = S(X_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ sowie $\|P_n A - A\|_{X \rightarrow Y} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ gilt, so ist die approximierende Gleichung

$$P_n(S - A)\varphi_n = P_n f \tag{5.24}$$

für hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$ eindeutig lösbar, und es existiert eine Konstante $M = M(S, A) > 0$, so dass

$$\|\varphi_n - \varphi\|_X \leq M \|P_n S \varphi - S \varphi\|_Y \quad (5.25)$$

gilt.

Beweis: Vgl. [10], Theorem 13.12, S.225.

Eine direkte Anwendung von Satz 5.14 auf die Näherungsgleichung (5.18) ist aus zwei Gründen nicht möglich. Zum einen haben wir in Abschnitt 5.4 den Operator A durch Approximationsoperatoren A_n angenähert, über die Satz 5.14 keine Aussage trifft, zum anderen können wir unter den schwachen Regularitätsforderungen der Existenztheorie keine Konvergenz erwarten.

Die Begründung hierfür liegt in der Gestalt des Operators

$$S = \begin{pmatrix} Id & 0 \\ 0 & \tilde{L} \end{pmatrix}$$

sowie in der Tatsache, dass die Folge $(P_n g)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht für alle $g \in C_{2\pi}$ gleichmäßig gegen g konvergiert (vgl. [5], Satz 15.17), d.h. es existiert ein $g \in C_{2\pi}$ mit $\|P_n g - g\|_\infty \not\rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.

Wir sehen jedoch aus Satz 3.21, dass sowohl die rechte Seite als auch der Operator $\widehat{K}_{\Gamma, D}$ in der ersten Gleichung von (5.1) 2-mal stetig differenzierbar sind. Fordern wir nun auch von der Parametrisierung von ∂D eine höhere Regularität, so dass der Operator \widehat{K}_D in $C_{2\pi}^{0, \alpha}$ liegt, so überträgt sich diese zusätzliche Regularität auch auf die Dichte $\widehat{\psi}$.

Unter diesen Voraussetzungen erhalten wir für die semi-diskrete Näherungsgleichung (5.24) zu (5.1) das folgende Resultat.

Folgerung 5.15 Für die Gleichung (5.1) mit einer hinreichend glatten Parametrisierung von ∂D seien für $n \in \mathbb{N}$ gerade die Unterräume $X_{2n+1} = Y_{2n+1} = T_{\frac{n}{2}} \times T_{n, e}$ sowie die Projektionsoperatoren

$$\tilde{P}_{2n+1} = \begin{pmatrix} P_{\frac{n}{2}} & 0 \\ 0 & P_{n, e}^{1, \alpha} \end{pmatrix}$$

aus Satz 5.5 gegeben.

Dann ist die approximierende Gleichung (5.19) für hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$ eindeutig lösbar und es gilt die Fehlerabschätzung (5.25) im Produktraum.

Beweis: Nach Kapitel 4, Satz 4.18, ist der in (5.1) auftretende Operator von der Form $S - A$ mit einem invertierbaren Operator S mit beschränkter Inverse S^{-1} und einem kompakten Operator A . Weiterhin ist der Operator $S - A$ nach Satz 4.10 injektiv.

Der Operator S bildet die Unterräume X_{2n+1} für alle $n \in \mathbb{N}$ bijektiv nach Y_{2n+1} ab, da der Operator \tilde{L} nach Folgerung 5.7 den Raum $T_{n,e}$ bijektiv auf sich abbildet.

Wir staten weiterhin für den Produktraum mit der Maximumnorm aus und berechnen

$$\begin{aligned} & \left\| \tilde{P}_{2n+1}A(\psi, \varphi) - A(\psi, \varphi) \right\|_{C_{2\pi} \times C_{2\pi,e}^{1,\alpha}} \\ &= \max \left\{ 2q \left\| P_{\frac{n}{2}}(\widehat{K}_D\psi + \widehat{K}_{\Gamma,D}\varphi) - (\widehat{K}_D\psi + \widehat{K}_{\Gamma,D}\varphi) \right\|_{\infty}, \right. \\ & \quad \left. \left\| P_n^{1,\alpha}(\widehat{K}_{D,\Gamma}\psi + \widehat{L}_0\varphi) - (\widehat{K}_{D,\Gamma}\psi + \widehat{L}_0\varphi) \right\|_{1,\alpha} \right\} \\ &\leq \max \left\{ 2q \left\| P_{\frac{n}{2}}\widehat{K}_D\psi - \widehat{K}_D\psi \right\|_{\infty} + 2q \left\| P_{\frac{n}{2}}\widehat{K}_{\Gamma,D}\varphi - \widehat{K}_{\Gamma,D}\varphi \right\|_{\infty}, \right. \\ & \quad \left. \left\| P_n^{1,\alpha}\widehat{K}_{D,\Gamma}\psi - \widehat{K}_{D,\Gamma}\psi \right\|_{1,\alpha} + \left\| P_n^{1,\alpha}\widehat{L}_0\varphi - \widehat{L}_0\varphi \right\|_{1,\alpha} \right\}. \end{aligned}$$

Nun liefern die Beweise zu den Sätzen 4.13 und 4.12, dass $\widehat{K}_{D,\Gamma}\psi$ und $\widehat{L}_0\varphi$ in $C_{2\pi,e}^2$ liegen, woraus wir nach [10], Theorem 11.6, S. 184f, erhalten, dass für alle $\alpha < \beta \leq 1$

$$\begin{aligned} & \left\| P_n^{1,\alpha}\widehat{K}_{D,\Gamma}\psi - \widehat{K}_{D,\Gamma}\psi \right\|_{1,\alpha} + \left\| P_n^{1,\alpha}\widehat{L}_0\varphi - \widehat{L}_0\varphi \right\|_{1,\alpha} \\ & \leq C \frac{\ln n}{n^{\beta-\alpha}} \left(\left\| \widehat{K}_{D,\Gamma}\psi \right\|_{1,\beta} + \left\| \widehat{L}_0\varphi \right\|_{1,\beta} \right) \\ & \leq C_1 \frac{\ln n}{n^{\beta-\alpha}} \left(\|\psi\|_{1,\alpha} + \|\varphi\|_{1,\alpha} \right) \end{aligned}$$

gilt, was

$$\left\| P_n^{1,\alpha}\widehat{K}_{D,\Gamma}\psi - \widehat{K}_{D,\Gamma}\psi \right\|_{1,\alpha} + \left\| P_n^{1,\alpha}\widehat{L}_0\varphi - \widehat{L}_0\varphi \right\|_{1,\alpha} \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

impliziert.

Weiterhin folgt aus Satz 3.21, dass $\widehat{K}_{\Gamma,D}\varphi$ in $C_{2\pi}^2$ und damit insbesondere in $C_{2\pi}^{0,\alpha}$ liegt, was für $\widehat{K}_D\psi$ auf Grund der hinreichenden Glätte der Parametrisierung von ∂D ebenso gilt.

Damit können wir auch hier mit Hilfe von (5.12)

$$\begin{aligned} & \left\| P_{\frac{n}{2}} \widehat{K}_D \psi - \widehat{K}_D \psi \right\|_{\infty} + \left\| P_{\frac{n}{2}} \widehat{K}_{\Gamma, D} \varphi - \widehat{K}_{\Gamma, D} \varphi \right\|_{\infty} \\ & \leq C \frac{\ln n}{n^{\alpha}} \left(\left\| \widehat{K}_D \psi \right\|_{0, \alpha} + \left\| \widehat{K}_{\Gamma, D} \varphi \right\|_{0, \alpha} \right) \\ & \leq C_1 \frac{\ln n}{n^{\alpha}} \left(\|\psi\|_{0, \alpha} + \|\varphi\|_{0, \alpha} \right) \end{aligned}$$

abschätzen, woraus wie oben

$$\left\| P_{\frac{n}{2}} \widehat{K}_D \psi - \widehat{K}_D \psi \right\|_{\infty} + \left\| P_{\frac{n}{2}} \widehat{K}_{\Gamma, D} \varphi - \widehat{K}_{\Gamma, D} \varphi \right\|_{\infty} \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

folgt.

Wir erhalten also insgesamt, dass

$$\left\| \widetilde{P}_{2n+1} A - A \right\| = \sup_{\|(\psi, \varphi)\|_{C_{2\pi}^{0, \alpha} \times C_{2\pi, e}^{0, \alpha}} \neq 0} \left\| \widetilde{P}_{2n+1} A(\psi, \varphi) - A(\psi, \varphi) \right\| \rightarrow 0$$

für $n \rightarrow \infty$ gilt.

Damit können wir Satz 5.14 auf die Näherungsgleichung (5.19) zu (5.1) anwenden, und erhalten die eindeutige Lösbarkeit von (5.19) für hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$ gerade sowie für $0 < \alpha < \beta \leq 1$ die Fehlerabschätzung

$$\begin{aligned} \left\| (\psi_{2n+1}, \varphi_{2n+1}) - (\widehat{\psi}, \widetilde{\varphi}) \right\|_{\infty} & \leq M \max \left\{ \left\| P_{\frac{n}{2}} \widehat{\psi} - \widehat{\psi} \right\|_{\infty}, \left\| P_n^{1, \alpha} \widetilde{L} \widetilde{\varphi} - \widetilde{L} \widetilde{\varphi} \right\|_{1, \alpha} \right\} \\ & \leq M \max \left\{ C_1 \frac{\ln n}{n^{\alpha}} \|\widehat{\psi}\|_{0, \alpha}, C_2 \frac{\ln n}{n^{\beta - \alpha}} \|\widetilde{L} \widetilde{\varphi}\|_{1, \beta} \right\} \\ & \leq \widetilde{C} \frac{\ln n}{n^{\gamma}} \left\| (\widehat{\psi}, \widetilde{L} \widetilde{\varphi}) \right\| \end{aligned} \quad (5.26)$$

mit $\gamma := \min\{\alpha, \beta - \alpha\}$, woraus wir die Konvergenz der Näherungslösungen $(\psi_{2n+1}, \varphi_{2n+1})$ gegen die wahre Lösung $(\widehat{\psi}, \widetilde{\varphi})$ ablesen können. \square

Das grundsätzlich positive Resultat von Folgerung 5.15 wird jedoch durch die Konvergenzrate (5.26) getrübt, aus der folgt, dass die Konvergenz unter diesen schwachen Voraussetzungen noch immer beliebig langsam ist.

Der folgende Satz liefert allerdings ein Resultat, mit dem die Konvergenzrate (5.26) entscheidend verbessert werden kann.

Satz 5.16 Sei $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ analytisch und 2π -periodisch. Dann existiert ein $s > 0$ sowie ein Streifen $D = \mathbb{R} \times (-s, s) \subseteq \mathbb{C}$, so dass g zu einer holomorphen und beschränkten, 2π -periodischen Funktion $g : D \rightarrow \mathbb{C}$ fortgesetzt werden kann. Dann wird der Fehler der trigonometrischen Interpolation gegeben durch

$$\left\| P_n g - g \right\|_{\infty} \leq M \frac{\coth \frac{s}{2}}{\sinh ns},$$

wobei $M > 0$ eine von g und D abhängige Konstante ist.

Beweis: vgl. [10], Theorem 11.7, S. 185.

Das Ergebnis von Satz 5.16 lässt sich durch die Abschätzung

$$\left\| P_n g - g \right\|_{\infty} \leq C e^{-ns} \quad (5.27)$$

mit von g abhängigen Konstanten C und s zusammenfassen.

Mit der gleichen Argumentation wie vor Folgerung 5.15 können wir die Regularität der wahren Lösung von (5.1) durch höhere Regularitätsforderungen an die Parametrisierungen von ∂D und Γ beliebig erhöhen. Wir erhalten dann für analytische Parametrisierungen das folgende Resultat.

Folgerung 5.17 Unter den Voraussetzungen von Folgerung 5.15 mit analytischen Parametrisierungen von ∂D und Γ erhalten wir für die Lösung der Näherungsgleichung (5.19) zu (5.1) die verbesserte Fehlerabschätzung

$$\left\| (\psi_{2n+1}, \varphi_{2n+1}) - (\widehat{\psi}, \widetilde{\varphi}) \right\|_{\infty} \leq C e^{-ns}$$

mit von $\widehat{\psi}$ und $\widetilde{\varphi}$ abhängigen Konstanten C und s

Beweis: Die Analytizität der Parametrisierungen von ∂D und Γ impliziert die Analytizität aller in (5.1) auftretenden Operatoren und damit auch die Analytizität der wahren Lösung. Die Aussage von Folgerung 5.15 bleibt natürlich auch unter diesen stärkeren Voraussetzungen erhalten, allein die Fehlerabschätzung verbessert sich auf Grund von (5.27) in folgender Weise

$$\begin{aligned} \left\| (\psi_{2n+1}, \varphi_{2n+1}) - (\widehat{\psi}, \widetilde{\varphi}) \right\|_{\infty} &\leq M \max \left\{ \left\| P_{\frac{n}{2}} \widehat{\psi} - \widehat{\psi} \right\|_{\infty}, \left\| P_n^{1,\alpha} \widetilde{L} \widetilde{\varphi} - \widetilde{L} \widetilde{\varphi} \right\|_{1,\alpha} \right\} \\ &\leq M \max \left\{ C_1 e^{-\frac{ns_1}{2}}, C_2 e^{-ns_2} \right\} \\ &\leq \widetilde{C} e^{-ns}, \end{aligned}$$

wobei $s = \min \left\{ \frac{s_1}{2}, s_2 \right\}$ ist. □

Wir haben oben bereits erwähnt, dass wir Satz 5.14 nicht direkt auf das vollständig diskrete Verfahren anwenden können, da die numerischen Approximationsoperatoren nicht berücksichtigt werden. Für die Betrachtung dieser Situation schafft der folgende Satz Abhilfe.

Satz 5.18 *Unter den Voraussetzungen von Satz 5.14 an die Operatoren S und A nehmen wir weiterhin an, dass für $n \rightarrow \infty$ sowohl*

$$(P_n A_n - P_n A)\psi \rightarrow 0 \quad \text{für alle } \psi \in X$$

als auch

$$\left\| P_n A_n - P_n A \right\|_{X_n \rightarrow Y_n} \rightarrow 0 \quad (5.28)$$

gelte.

Dann ist die approximierende Gleichung

$$P_n(S - A_n)\tilde{\varphi}_n = P_n f_n$$

für hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$ eindeutig lösbar, und es existiert eine Konstante $M > 0$, so dass

$$\left\| \tilde{\varphi}_n - \varphi \right\|_X \leq M \left\{ \left\| P_n S \varphi - S \varphi \right\|_Y + \left\| P_n (A_n - A) \varphi \right\| + \left\| P_n (f_n - f) \right\| \right\} \quad (5.29)$$

gilt.

Beweis: vgl. [10], Corollary 13.13, S. 225.

Wir haben oben die Regularitätsforderungen an die Parametrisierungen erhöhen müssen, um die Konvergenz des semi-diskreten Verfahrens zu erreichen. Dabei war es ausreichend, die Regularität nur soweit zu erhöhen, dass die Lösung in $C_{2\pi}^{0,\alpha} \times C_{2\pi,e}^{0,\alpha}$ liegt.

Die Konvergenz des vollständig diskreten Verfahrens hängt dagegen wesentlich von der Konvergenz der numerischen Approximationsoperatoren ab. Für die zusammengesetzten Trapezregeln werden Konvergenzraten jedoch nur für mindestens 2-mal stetig differenzierbare Funktionen angegeben (vgl. [10], Theorem 12.1, S.198), so dass wir uns an dieser Stelle gezwungen sehen, von der Parametrisierung des Randes ∂D eine hinreichende Glätte zu fordern, dass Kern des Operators \hat{K}_D 2-mal stetig differenzierbar wird.

Folgerung 5.19 *Unter den Voraussetzungen von Folgerung 5.15 und den obigen zusätzlichen Regularitätsforderungen ist das lineare Gleichungssystem (5.18) des vollständig diskreten Verfahrens zur Integralgleichung (5.1) für hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$ eindeutig lösbar und es gilt die Fehlerabschätzung (5.29) im Produktraum.*

Beweis: Die numerischen Approximationsoperatoren zu den kompakten Operatoren

$$\begin{pmatrix} 2q\widehat{K}_D & 2q\widehat{K}_{\Gamma,D} \\ \widehat{K}_{D,\Gamma} & L_0 \end{pmatrix}$$

sind nach Abschnitt 5.4 sämtlich mit Hilfe der zusammengesetzten Trapezregeln entstanden. Darüber hinaus liegen

$$\left(\begin{pmatrix} 2q\widehat{K}_D & 2q\widehat{K}_{\Gamma,D} \\ \widehat{K}_{D,\Gamma} & L_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2q\widehat{K}_D^{\frac{n}{2}} & 2q\widehat{K}_{\Gamma,D}^{\frac{n}{2}} \\ \widehat{K}_{D,\Gamma}^n & \widehat{L}_0^n \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \widehat{\psi} \\ \widehat{\varphi} \end{pmatrix} \quad (5.30)$$

für alle $(\widehat{\psi}, \widehat{\varphi}) \in C_{2\pi}^{0,\alpha} \times C_{2\pi,e}^{0,\alpha}$ auf Grund der stärkeren Voraussetzungen in $C_{2\pi}^{0,\alpha} \times C_{2\pi,e}^{1,\beta}$ mit $0 < \alpha < \beta \leq 1$, so dass auch der Operator \widetilde{P}_{2n+1} beschränkt ist als Operator von $C_{2\pi}^{0,\alpha} \times C_{2\pi,e}^{1,\beta}$ nach $C_{2\pi} \times C_{2\pi,e}^{1,\alpha}$. Zusammen ergibt sich die punktweise Konvergenz von (5.30) für alle $(\widehat{\psi}, \widehat{\varphi}) \in C_{2\pi}^{0,\alpha} \times C_{2\pi,e}^{0,\alpha}$.

Für den Beweis von (5.28) bemerken wir, dass der Ausdruck (5.28) eine Matrixnorm auf $T_{\frac{n}{2}} \times T_{n,e}$ ist. Wir statten die Komponenten des Produktraums $T_{\frac{n}{2}} \times T_{n,e}$ im Bildraum mit der $\|\cdot\|_\infty$ -Norm und im Urbildraum mit der $\|\cdot\|_1$ -Norm aus. Dann berechnen wir für ein beliebiges Element aus $T_{\frac{n}{2}} \times T_{n,e}$ mit $\max\{\|\psi\|_1, \|\varphi\|_1\} = 1$ die einzelnen Komponenten des Ausdrucks

$$\left\| (P_{2n+1}A_{2n+1} - P_{2n+1}A)(\psi, \varphi) \right\|_\infty$$

aus dem Produktraum.

Es ist auf Grund der stärkeren Voraussetzungen

$$\begin{aligned} \|P_{\frac{n}{2}}(K_D^{\frac{n}{2}} - \widehat{K}_D)\psi\|_\infty &= \max_{i=0,\dots,n-1} \left\{ \sum_{j=0}^{n-1} |\xi_j| \cdot \left| (K_D^{\frac{n}{2}}L_{2j}^n)(t_{2i}) - (\widehat{K}_DL_{2j}^n)(t_{2i}) \right| \right\} \\ &\leq \max_{j=0,\dots,n-1} \left\{ \left\| (K_D^{\frac{n}{2}} - \widehat{K}_D)L_{2j}^n \right\|_\infty \right\} \\ &\leq Cn^{-2}, \end{aligned}$$

da die Quadraturformel-Folge der zusammengesetzten Trapezregeln für 2-mal stetig differenzierbare Funktionen quadratisch konvergiert und die Elemente der Lagrange-Basis für $j = 0, \dots, 2n - 1$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ gleichmäßig beschränkt bleiben.

Für die übrigen Komponenten von (5.30) ergeben sich analoge Abschätzungen mit ebenfalls quadratischen Konvergenzraten, da auch hier die Approximationsoperatoren durch die zusammengesetzte Trapezregeln entstanden sind, und da die Kerne der Integraloperatoren nach den Sätzen 4.12, 4.13 und 4.16 sowie die Elemente der Lagrange-Basis von T_n sämtlich 2-mal stetig differenzierbar sind.

Wir erhalten insgesamt

$$\left\| (P_{2n+1}A_{2n+1} - P_{2n+1}A)(\psi, \varphi) \right\|_{\infty} \leq C_1 n^{-2}, \quad (5.31)$$

woraus wir die Gültigkeit von (5.28) ablesen.

Damit können wir Satz 5.18 auf die vollständig diskrete Näherungsgleichung zu (5.1) anwenden und erhalten so die eindeutige Lösbarkeit der vollständig diskreten Näherungsgleichung für hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$ gerade. Für die Fehlerabschätzung (5.29) berechnen wir

$$\begin{aligned} \left\| \tilde{P}_{2n+1}(f_{2n+1} - f) \right\| &= \max \left\{ \left\| P_{\frac{n}{2}}(f_{D,2n+1} - \hat{f}_D) \right\|, \left\| P_n^{1,\alpha}(f_{\Gamma,2n+1} - f_{\Gamma}) \right\| \right\} \\ &\leq \left(C \frac{\ln n}{n^{\gamma}} + 1 \right) \max \left\{ \left\| f_{D,2n+1} - \hat{f}_D \right\|, \left\| f_{\Gamma,2n+1} - f_{\Gamma} \right\| \right\} \\ &\leq C_2 \frac{\ln n}{n^{\tilde{\gamma}}} \end{aligned}$$

mit geeigneten Konstanten C_2 und $\tilde{\gamma} > 0$, da die zusammengesetzten Trapezregeln auf Grund der 2-mal stetigen Differenzierbarkeit der rechten Seiten f_D und f_{Γ} (vgl. Satz 3.23) quadratisch konvergieren.

Wir übernehmen die Konvergenzraten der beiden ersten Summanden in (5.29) aus (5.31) bzw. aus Folgerung 5.15 und erhalten für $0 < \alpha < \beta \leq 1$ aus (5.29) die Fehlerabschätzung

$$\left\| (\psi_{2n+1}, \varphi_{2n+1}) - (\hat{\psi}, \tilde{\varphi}) \right\|_{\infty} \leq C \frac{\ln n}{n^{\gamma'}} \quad (5.32)$$

mit geeigneten Konstanten C und $\gamma' > 0$, woraus wir die Konvergenz der vollständig diskreten Näherungslösungen gegen die wahre Lösung $(\hat{\psi}, \tilde{\varphi})$ folgern können. \square

Wie schon in Folgerung 5.15 ist das Ergebnis von Folgerung 5.19 nicht befriedigend, da aus (5.32) wiederum ersichtlich wird, dass die Konvergenz beliebig langsam ist. Jedoch können wir mit der gleichen Argumentation wie für den semi-diskreten Fall die Konvergenzraten durch stärkere Regularitätsforderungen an die Parametrisierungen von ∂D und Γ erhöhen. Wir erhalten das folgende abschließende Ergebnis.

Folgerung 5.20 *Unter den Voraussetzungen von Folgerung 5.19 mit analytischen Parametrisierungen von ∂D und Γ erhalten wir für die Lösung der vollständig diskreten Näherungsgleichung zu (5.1) die verbesserte Fehlerabschätzung*

$$\left\| (\psi_{2n+1}, \varphi_{2n+1}) - (\hat{\psi}, \tilde{\varphi}) \right\|_{\infty} \leq C e^{-ns}$$

mit von $\hat{\psi}$ und $\tilde{\varphi}$ abhängigen Konstanten C und s

Beweis: Wir gehen analog zum Beweis zu Folgerung 5.17 vor, und erhalten das Ergebnis durch geschicktes Setzen der Konstanten und aus der Tatsache, dass die Folge der zusammengesetzten Trapezregeln für analytische Funktionen ebenfalls exponentielle Konvergenzraten erfüllt (vgl. [10], Theorem 12.6, S. 200). \square

5.6 Numerische Beispiele

Wir werden abschließend in diesem Abschnitt die theoretisch erhaltenen Konvergenzraten für die vorgestellte numerische Methode an verschiedenen Beispielen untermauern.

Wir beginnen mit dem folgenden Setting:

Beispiel 5.21 Gegeben sei ein ellipsenförmiges Gebiet D_1 , dessen Rand ∂D_1 parametrisiert ist durch

$$\partial D_1 = \left\{ \left(a \cos t, b \sin t \right) : t \in [0, 2\pi], a = 1.5, b = 1 \right\},$$

sowie ein Schlitz Γ_3 in Form einer gedämpften Sinus-Schwingung parametrisiert durch

$$\Gamma_3 = \left\{ \left(t, \frac{1}{3} \sin(\pi(t+1)) \right) : t \in [-1, 1] \right\}.$$

Für eine graphische Veranschaulichung verweisen wir auf Abbildung 5.1.

Die Parametrisierungen von ∂D_1 und Γ_3 sind analytisch, so dass wir nach den Ergebnissen des letzten Abschnitts Konvergenzraten der Form

$$\frac{\|u_{n-1} - u_n\|_\infty}{\|u_n\|_\infty} \approx C e^{-ns} \quad (5.33)$$

mit von $A, q, \partial D$ und Γ abhängigen Konstanten C und s erwarten.

Wir erhalten die in Tabelle 5.1 aufgeführten numerischen Resultate, wobei wir zur Veranschaulichung die Punkte

$$\begin{aligned} (1, 1.5) &\in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D_1} && \text{mit großem Abstand zu } \partial D_1 \\ (-0.5, 0.3) &\in D_1 \setminus \Gamma_3 && \text{mit großem Abstand zu } \partial D_1 \text{ und } \Gamma_3 \\ (0.7, -0.7) &\in D_1 \setminus \Gamma_3 && \text{mit geringem Abstand zu } \partial D_1 \\ (0.1, 0.1) &\in D_1 \setminus \Gamma_3 && \text{mit geringem Abstand zu } \Gamma_3 \end{aligned}$$

als Auswertungspunkte gewählt haben.

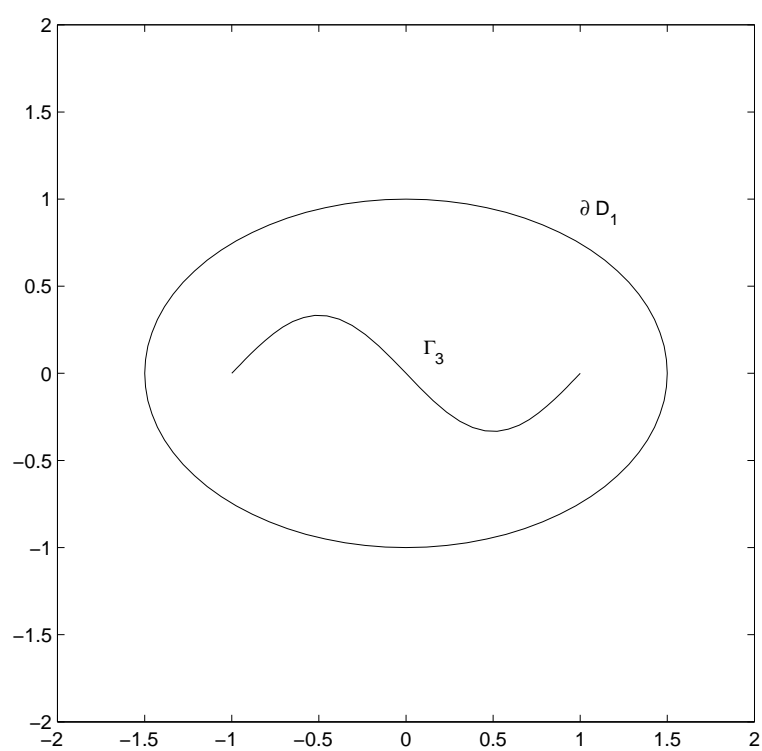


Abbildung 5.1: Ellipse mit Sinusschwingung

Tabelle 5.1: Numerische Ergebnisse für Beispiel 5.21

| | n | $x = (1, \frac{3}{2})$ | $x = (-\frac{1}{2}, \frac{3}{10})$ | $x = (\frac{7}{10}, -\frac{7}{10})$ | $x = (\frac{1}{10}, \frac{1}{10})$ |
|-------------------------|-----|------------------------|------------------------------------|-------------------------------------|------------------------------------|
| $A = 1$ $q = 0.5$ | 16 | 0.0169804436 | 0.0235310087 | 0.1038015531 | 0.2983352454 |
| | 32 | 0.0004329103 | 0.0002651128 | 0.0627442480 | 0.0296329205 |
| | 64 | 0.0000013042 | 0.0000000173 | 0.0034659260 | 0.0006583430 |
| | 128 | 0.0000000000 | 0.0000000000 | 0.0001688420 | 0.0000006411 |
| | 256 | 0.0000000000 | 0.0000000000 | 0.0000000205 | 0.0000000000 |
| $A = 5$ $q = 0.9$ | 16 | 0.0356655763 | 0.0328993520 | 0.1505792235 | 0.3015528312 |
| | 32 | 0.0009864599 | 0.0003716901 | 0.0887533991 | 0.0297210264 |
| | 64 | 0.0000028150 | 0.0000000285 | 0.0048341677 | 0.0006595792 |
| | 128 | 0.0000000000 | 0.0000000000 | 0.0002380453 | 0.0000006420 |
| | 256 | 0.0000000000 | 0.0000000000 | 0.0000000291 | 0.0000000000 |
| $A = 100$ $q = -0.1$ | 16 | 0.0029488185 | 0.0058145141 | 0.0336437813 | 0.2915881830 |
| | 32 | 0.0000631544 | 0.0000927499 | 0.0209908456 | 0.0294881388 |
| | 64 | 0.0000002098 | 0.0000000042 | 0.0011859597 | 0.0006563712 |
| | 128 | 0.0000000000 | 0.0000000000 | 0.0000569227 | 0.0000006395 |
| | 256 | 0.0000000000 | 0.0000000000 | 0.0000000069 | 0.0000000000 |

Als zweites Beispiel geben wir

Beispiel 5.22 Gegeben sei ein rechteckiges Gebiet D_3 mit abgerundeten Ecken, dessen Rand ∂D_3 durch

$$\partial D_3 = \left\{ \left(a \cdot r(t) \cos t, b \cdot r(t) \sin t \right) : t \in [0, 2\pi], a = 2, b = 4 \right\}$$

parametrisiert wird, wobei die Radiusfunktion durch

$$r(t) := \left(\cos^{10} t + \sin^{10} t \right)^{-\frac{1}{10}} \quad t \in [0, 2\pi]$$

gegeben ist. Weiter betrachten wir einen geraden Schlitz Γ_1 parametrisiert durch

$$\Gamma_1 = \left\{ (t, 0) : t \in [-1, 1] \right\}.$$

Eine graphische Veranschaulichung liefert Abbildung 5.2.

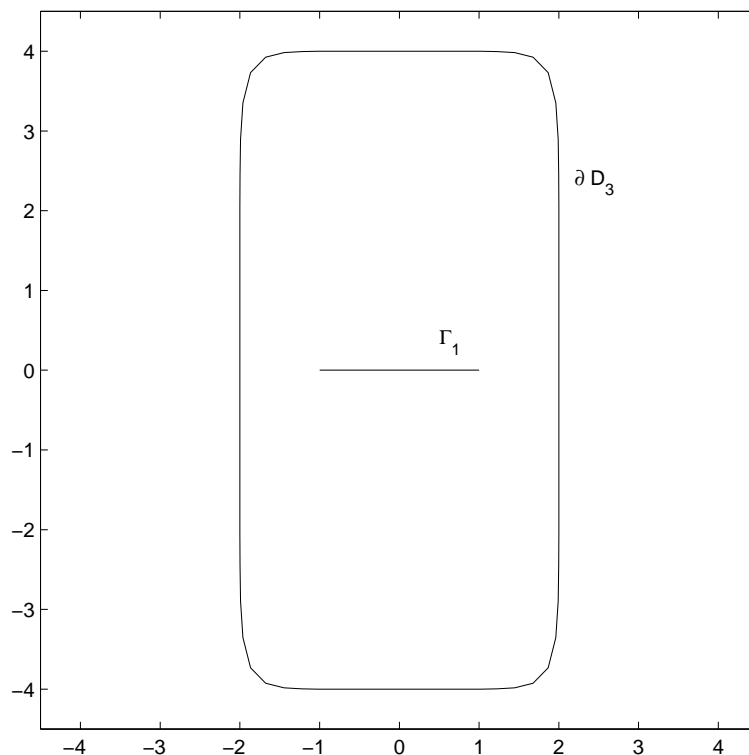


Abbildung 5.2: Rechteck mit Geradenstück

Wie oben sind Parametrisierungen von ∂D_3 und Γ_1 analytisch, so dass wir wieder exponentielle Konvergenzraten in der Form von (5.33) erwarten.

Wir erhalten die in Tabelle 5.2 aufgeführten numerischen Resultate, wobei wir zur Veranschaulichung diesmal die Punkte

$$(3, 2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D_3} \quad \text{mit großem Abstand zu } \partial D_3$$

$$(-1, -1.5) \in D_3 \setminus \Gamma_1 \quad \text{mit großem Abstand zu } \partial D_3 \text{ und } \Gamma_1$$

$$(1.6, -1) \in D_3 \setminus \Gamma_1 \quad \text{mit geringem Abstand zu } \partial D_3$$

$$(0.1, 0.1) \in D_3 \setminus \Gamma_1 \quad \text{mit geringem Abstand zu } \Gamma_1$$

als Auswertungspunkte gewählt haben.

Tabelle 5.2: Numerische Ergebnisse für Beispiel 5.22

| | n | $x = (3, 2)$ | $x = (-1, -\frac{3}{2})$ | $x = (\frac{8}{5}, -1)$ | $x = (\frac{1}{10}, \frac{1}{10})$ |
|-------------------------|-----|--------------|--------------------------|-------------------------|------------------------------------|
| $A = 1$ $q = 0.5$ | 16 | 0.1068926005 | 0.1364132743 | 0.1410696431 | 0.0525251030 |
| | 32 | 0.0076896015 | 0.0229137625 | 0.0929038077 | 0.0209066329 |
| | 64 | 0.0028723314 | 0.0006612720 | 0.0059731832 | 0.0005457480 |
| | 128 | 0.0000020433 | 0.0000005356 | 0.0017049594 | 0.0000004969 |
| | 256 | 0.0000000000 | 0.0000000000 | 0.0000039373 | 0.0000000000 |
| $A = 5$ $q = 0.9$ | 16 | 0.5063788036 | 0.0922311288 | 0.2214699510 | 0.0005395090 |
| | 32 | 0.0167644086 | 0.0382648292 | 0.1236082267 | 0.0255143422 |
| | 64 | 0.0087980413 | 0.0011771487 | 0.0103092789 | 0.0003800984 |
| | 128 | 0.0000283283 | 0.0000023710 | 0.0023540133 | 0.0000004532 |
| | 256 | 0.0000000003 | 0.0000000000 | 0.0000054091 | 0.0000000000 |
| $A = 100$ $q = -0.1$ | 16 | 0.0258774672 | 0.0638723395 | 0.0401588361 | 0.0363870919 |
| | 32 | 0.0022261377 | 0.0062750533 | 0.0336140143 | 0.0281568841 |
| | 64 | 0.0004281845 | 0.0001660055 | 0.0014165241 | 0.0004473479 |
| | 128 | 0.0000003401 | 0.0000000820 | 0.0005901152 | 0.0000002250 |
| | 256 | 0.0000000000 | 0.0000000000 | 0.0000013712 | 0.0000000000 |

Als drittes und abschließendes Beispiel betrachten wir

Beispiel 5.23 Gegeben sei ein drachenförmiges Gebiet D_2 , dessen Rand ∂D_2 wird parametrisiert durch

$$\partial D_2 = \left\{ \left(2 \cos t + 1.3(\cos 2t - 1), 1.5 \sin t \right) : t \in [0, 2\pi] \right\}$$

sowie ein Schlitz Γ_2 in Form eines Ellipsensegments parametrisiert durch

$$\Gamma_2 = \left\{ \left(\cos \left(\frac{\pi}{2}(t+1) \right), \frac{1}{2} \sin \left(\frac{\pi}{2}(t+1) \right) \right) : t \in [-1, 1] \right\}.$$

Eine graphische Veranschaulichung ist durch Abbildung 5.3 gegeben.

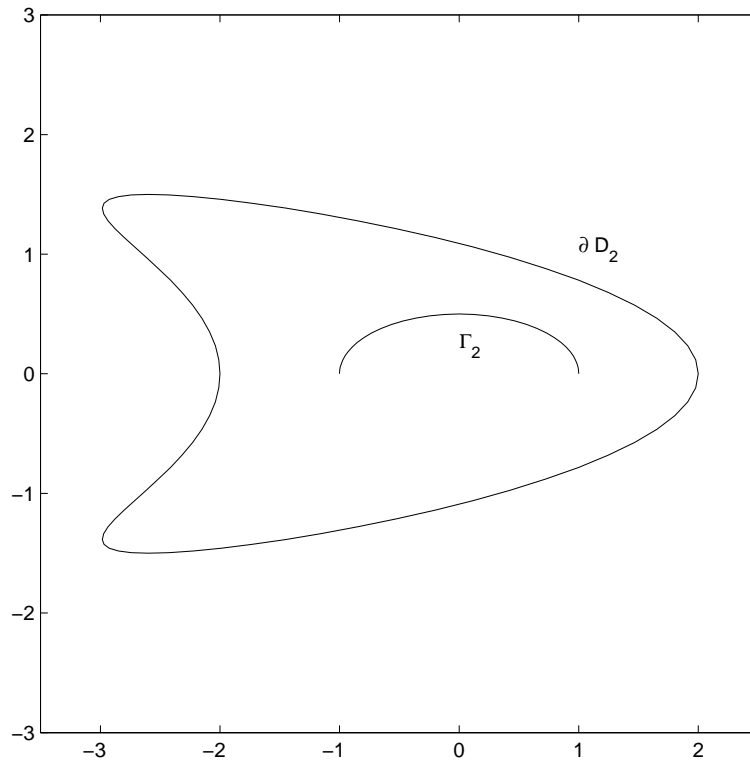


Abbildung 5.3: Drachen mit Ellipsensegment

Wie zuvor sind Parametrisierungen von ∂D_2 und Γ_2 analytisch, so dass wir wieder exponentielle Konvergenzraten in der Form von (5.33) erwarten.

Wir erhalten die in Tabelle 5.3 aufgeführten numerischen Resultate, wobei wir zur Veranschaulichung diesmal die Punkte

$$\begin{aligned} (2, 2) &\in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D_2} \quad \text{mit großem Abstand zu } \partial D_2 \\ (-1.5, -0.8) &\in D_2 \setminus \Gamma_2 \quad \text{mit großem Abstand zu } \partial D_2 \text{ und } \Gamma_2 \\ (1, -0.5) &\in D_2 \setminus \Gamma_2 \quad \text{mit geringem Abstand zu } \partial D_2 \\ (0.7, 0.2) &\in D_2 \setminus \Gamma_2 \quad \text{mit geringem Abstand zu } \Gamma_2 \end{aligned}$$

als Auswertungspunkte gewählt haben.

Tabelle 5.3: Numerische Ergebnisse für Beispiel 5.23

| | n | $x = (2, 2)$ | $x = (-\frac{3}{2}, -\frac{4}{5})$ | $x = (1, -\frac{1}{2})$ | $x = (\frac{7}{10}, \frac{1}{5})$ |
|-------------------------|-----|--------------|------------------------------------|-------------------------|-----------------------------------|
| $A = 1$ $q = 0.5$ | 16 | 0.0532767486 | 0.2440350633 | 0.1109976957 | 0.1840252881 |
| | 32 | 0.0032567593 | 0.0715227491 | 0.0850990484 | 0.0325872925 |
| | 64 | 0.0000706229 | 0.0047882872 | 0.0392388404 | 0.0008939808 |
| | 128 | 0.0000000152 | 0.0000139272 | 0.0021491421 | 0.0000002474 |
| | 256 | 0.0000000000 | 0.0000000014 | 0.0000299479 | 0.0000000000 |
| $A = 5$ $q = 0.9$ | 16 | 0.0294466858 | 0.2294743007 | 0.2085144246 | 0.1787778091 |
| | 32 | 0.0132898153 | 0.1063790516 | 0.1210757006 | 0.0431767703 |
| | 64 | 0.0001455759 | 0.0069078395 | 0.0556916930 | 0.0012430359 |
| | 128 | 0.0000000178 | 0.0000231659 | 0.0028297640 | 0.0000004073 |
| | 256 | 0.0000000000 | 0.0000000020 | 0.0000422730 | 0.0000000000 |
| $A = 100$ $q = -0.1$ | 16 | 0.0063320159 | 0.1037687903 | 0.0364401207 | 0.1169673422 |
| | 32 | 0.0004778428 | 0.0231122237 | 0.0280076633 | 0.0046568927 |
| | 64 | 0.0000152579 | 0.0015194737 | 0.0130053749 | 0.0003270986 |
| | 128 | 0.0000000041 | 0.0000035708 | 0.0007831144 | 0.0000000637 |
| | 256 | 0.0000000000 | 0.0000000005 | 0.0000100282 | 0.0000000000 |

Kapitel 6

Ausblick

Wir beenden diese Arbeit mit der Vorstellung von Problemen und Fragestellungen, die als Erweiterungen oder Abwandlungen des in dieser Arbeit behandelten Problems entstehen.

Mehrere Bögen

Eine erste Möglichkeit der Erweiterung von Problem 4.1 besteht in der Formulierung des Problems für eine beliebige endliche Zahl von disjunkten Bögen $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$. Dabei erhöht sich erwartungsgemäß die Anzahl der Integralgleichungen. Jede einzelne ist dabei jedoch von gleicher Gestalt, so dass keine wesentlichen zusätzlichen Schwierigkeiten in der Existenztheorie entstehen.

Bei einer solchen Erweiterung erwarten wir jedoch in der praktischen Umsetzung Verschlechterungen in der numerischen Behandlung. Die Konvergenzraten werden zwar immer noch exponentiell sein, allerdings ist ein Anwachsen der vorstehenden Konstanten wahrscheinlich, so dass sich die exponentiellen Konvergenzraten erst bei einer höheren Anzahl von Stützstellen bemerkbar machen werden.

Viel wesentlicher in diesem Zusammenhang ist jedoch, dass mit der Anzahl der Integralgleichungen auch die Größe des approximierenden linearen Gleichungssystems anwächst und schnell Größenordnungen erreicht, in denen das Lösen des linearen Gleichungssystems aufwändig wird und unter Umständen sogar iterative Methoden angewandt werden müssen.

Veränderte Dirichlet-Randbedingungen

Die Bedingung (4.6) in Problem 4.1 ermöglicht darüber hinaus weitere Möglichkeiten der Abwandlung. So kann das Problem auch für von Null verschiedene Dirichlet-Randwerte auf dem Bogen Γ gelöst werden. Wir erkennen aus dem Integralgleichungssystem (4.35), dass derartige Randwerte nach Einsetzen der Parametrisierung und Cosinus-Substitution in dem Raum $C_{2\pi,e}^{1,\alpha}$ liegen müssen, damit die Umformung des Integralgleichungssystems auf die Form (*Id* – *kompakt*) durchführbar bleibt.

Während wir in dieser Abwandlung keine Komplikationen in der numerischen Behandlung erwarten, ist es jedoch fraglich, ob mit dieser Veränderung immer noch ein magnetostatisches Problem verlässlich modelliert wird. Diese Frage ist jedoch an anderer Stelle zu erörtern.

Andere Typen von Randbedingungen

Neben der Vorgabe von Dirichlet-Randwerten auf dem Bogen Γ ist auch die Vorgabe von Neumann- oder Impedanz-Randwerten denkbar. Dies führt jedoch zu stark veränderten Lösungsansätzen, so dass wir an dieser Stelle auf Vermutungen über die Lösbarkeit solcher Randwertprobleme verzichten.

Veränderte äußere Geometrie

Eine weitere Möglichkeit der Abwandlung erwächst aus der unter Umständen unangebrachten Modellierung des Magneten in Problem 4.1. Dort wird von dem Magneten angenommen, dass dieser das gesamte Aussengebiet D_e ausfülle, also unendlich ausgedehnt sei.

Ein vorstellbarer Ansatzpunkt zu einer endlichen Ausdehnung des Magneten ist die Platzierung eines weiteren Gebietes $D_2 \supseteq D$ mit dem Ziel, dass der Magnet nun nur das Ringgebiet $D_e \cap D_2$ ausfüllt. Allerdings werden hier die Auswirkungen auf die Eindeutigkeit einer Lösung des Problems sowie auf die Injektivität des entstehenden Integralgleichungssystems nicht erörtert.

Zudem erscheint es auch möglich, die Glätte des Randes ∂D zu reduzieren und angelehnt an [10], Section 6.5, das Problem auf ein Gebiet mit Ecken zu verallgemeinern.

Inverses Problem

Zuletzt weisen wir noch darauf hin, dass das vorliegende Problem ebenfalls als Ausgangspunkt für ein zugehöriges Inverses Problem geeignet ist.

Als mögliche Fragestellungen in diesem Zusammenhang sind die Rekonstruktion der Funktionswerte auf dem Bogen bei bekannter Geometrie oder aber die Rekonstruktion des Bogens selbst bei vorgegebenen Funktionswerten denkbar. Derartige Ansätze erscheinen auch vom Blickwinkel der Modellbildung aus sinnvoll.

Danksagungen

An dieser Stelle möchte ich denjenigen danken, die auf verschiedenste Weise zu der Entstehung dieser Arbeit beigetragen haben bzw. mich auf meinem Weg begleitet, geleitet und geprägt haben.

Mein Dank gilt in erster Linie Herrn Professor Dr. Rainer Kreß für die interessante Themenstellung, für die hervorragende Betreuung während der Entstehung dieser Arbeit sowie für die zahlreichen guten Vorlesungen der vergangenen Jahre.

Weiterhin möchte ich Stefan Langer für die unzähligen Diskussionen mathematischer Probleme und Fragestellungen, oftmals bis weit in die Nacht hinein, danken.

Darüber hinaus bin ich auch Herrn Dr. Peter Hähner besonders zu Dank verpflichtet, der mit seinen Vorlesungen in den Jahren 1999 bis 2001 mein Interesse an der Numerischen Mathematik geweckt hat.

Ebenso danke ich meiner Familie und meinen Freunden, die mich über das gesamte Studium hinweg unterstützt haben.

Zuletzt möchte ich auch der Studienstiftung des deutschen Volkes für die finanzielle Unterstützung meines Studiums meinen Dank aussprechen.

Literaturverzeichnis

- [1] Berger, M.: *Nonlinearity and Functional Analysis*, Academic Press, New York 1977
- [2] Buckel, W.: *Supraleitung: Grundlagen und Anwendungen*, 5. Aufl., VCH, 1994
- [3] Genenko, Yu., Usoskin, A., Freyhardt, H. C.: *Large predicted self-field critical current enhancements in superconducting strips using magnetic screens*, Phys. Rev. Lett. **83**, 3045 - 3048 (1999)
- [4] Genenko, Yu., Snezhko, A., Freyhardt, H. C.: *Overcritical states of a superconductor strip in a magnetic environment*, Pys. Rev. B **62**, 3453 - 3472 (2000)
- [5] Hähner, P.: *Numerische Mathematik 1*, Vorlesungsskript WS 1999/2000, Göttingen 1999
- [6] Heuser, H.: *Lehrbuch der Analysis, Teil 1*, 12. Auflage, B.G. Teubner, Stuttgart 1998
- [7] Heuser, H.: *Lehrbuch der Analysis, Teils 2*, 10. Auflage, B.G. Teubner, Stuttgart 1998
- [8] Hofmann, B.: *Approximation of the inverse electrical impedance tomography problem by an inverse transmission problem*, Inverse Problems **14**, 1171 - 1187 (1998)
- [9] Jackson, J. D.: *Klassische Elektrodynamik*, 3. Aufl., De Gruyter, Berlin 2002
- [10] Kress, R.: *Linear Integral Equations*, 2nd ed. Springer-Verlag, New York 1999
- [11] Kress, R.: *Lineare Funktionalanalysis*, Vorlesungsskript WS 2000/2001, Göttingen 2000
- [12] Martensen, E.: *Potentialtheorie*, B.G. Teubner, Stuttgart 1968
- [13] Mönch, L.: *On the numerical solution of the direct scattering problem for an open sound-hard arc*, Journal of Computational and Applied Mathematics **71**, 343 - 356 (1996)

- [14] Schormann, C.: *Newton-Verfahren für ein inverses Transmissionsproblem bei elektromagnetischen Wellen*, Diplomarbeit, Göttingen 1996
- [15] Werner, J.: *Numerische Mathematik 1*, Vieweg, Braunschweig 1992

