

**Stabilisierte  
Finite-Elemente-Methoden  
für die  
Oseen-Gleichungen**

Diplomarbeit

vorgelegt von  
**Tobias Gelhard**  
aus  
**Höhr-Grenzhausen**

angefertigt am  
**Institut für  
Numerische und Angewandte Mathematik**  
der  
**Georg-August-Universität zu Göttingen**  
**2003**



# Einleitung

Die instationären inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen modellieren eine laminare (d.h. gleichmäßig, schichtweise gleitende) Strömung eines inkompressiblen Fluids in einem beschränkten Strömungsgebiet  $\Omega$  während eines Zeitintervalls  $[0, T)$ . Das Geschwindigkeitsfeld  $u$  und der Druck  $p$  der Strömung werden durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p &= f \quad \text{in } (0, T) \times \Omega, \\ \operatorname{div} u &= 0 \quad \text{in } (0, T) \times \Omega\end{aligned}$$

bestimmt. Zusätzlich sind geeignete Anfangs- und Randbedingungen an das Geschwindigkeitsfeld  $u$  zu stellen. Die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen sind *nichtlineare* partielle Differentialgleichungen. Durch implizite Zeitdiskretisierung und Linearisierung führt man die Berechnung einer Näherungslösung auf das iterative Lösen (i. allg. vieler) *linearisierter* Navier-Stokes-Gleichungen

$$\begin{aligned}\alpha u - \nu \Delta u + (w \cdot \nabla)u + \nabla p &= f \quad \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div} u &= 0 \quad \text{in } \Omega\end{aligned}$$

zurück. Diese Gleichungen werden in der Literatur meistens Oseen-Gleichungen genannt. Der Linearisierungspunkt  $w$  ist ein divergenzfreies Geschwindigkeitsfeld. Derartige Lösungsstrategien für die instationären inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen spielen in der Praxis eine große Rolle und setzen gute numerische Verfahren für die Oseen-Gleichungen voraus.

Gegenstand dieser Arbeit ist die numerische Behandlung  
der Oseen-Gleichungen mit Finite-Elemente-Methoden.

Die Konstruktion von Finite-Elemente-Methoden für die Oseen-Gleichungen erweist sich in zwei Punkten als schwierig: Erstens erfordert eine stabile Approximation des Drucks  $p$  aufeinander abgestimmte Diskretisierungen des Drucks und des Geschwindigkeitsfelds  $u$ . Zweitens treten bei der Approximation des Geschwindigkeitsfelds Instabilitäten auf, wenn die Viskosität  $\nu$  des Fluids gegenüber der Konvektion  $w$  der modellierten Strömung sehr klein ist. Techniken diese Quellen von Instabilitäten zu beherrschen, werden ausführlich dargestellt.

Die numerischen Verfahren wurden mit der MATLAB-Toolbox FEMLAB implementiert. Der Nutzen dieses Software-Pakets für Aufgaben in Lehre und Forschung wird evaluiert.

Die Arbeit ist folgendermaßen aufgebaut:

**Kapitel 1 (Grundlagen):** Grundlagen aus der Analysis und Funktionalanalysis, die ohne Beweis zitiert werden.

**Kapitel 2 (Variations- und Randwertaufgaben):** Die klassische Form der Oseen-Gleichungen wird vorgestellt und in eine Variationsformulierung überführt. Der Begriff schwacher Lösungen der Oseen-Gleichungen wird definiert. Die Variationsformulierung der Oseen-Gleichungen wird in den abstrakten Rahmen gemischter Variationsaufgaben eingepasst. Auf diesem Wege wird ein Existenz- und Eindeutigkeitssatz für schwache Lösungen der Oseen-Gleichungen bewiesen.

**Kapitel 3 (Finite-Elemente-Methoden: Grundlagen):** Galerkin-Verfahren und der Spezialfall konformer Finite-Elemente-Methoden werden als „natürliche“ Diskretisierung von Variationsaufgaben vorgestellt. Die Theorie gemischter Finite-Elemente-Methoden wird dargestellt. Die wichtigsten Finite-Elemente-Räume und ihre Eigenschaften werden angegeben.

**Kapitel 4 (Finite-Elemente-Methoden für die Stokes-Gleichungen):** Die Schwierigkeiten bei der Approximation des Drucks werden mittels der Oseen-Gleichungen ohne Konvektion, den sog. Stokes-Gleichungen, untersucht. Stabilisierte Finite-Elemente-Methoden und gemischte Finite-Elemente-Methoden für die Stokes-Gleichungen werden dargestellt und anhand numerischer Experimente verglichen.

**Kapitel 5 (Finite-Elemente-Methoden für die Oseen-Gleichungen):** Es wird ein kurzer Überblick über stabilisierte Finite-Elemente-Methoden für die Oseen-Gleichungen, insbesondere SUPG-Verfahren, gegeben. Ein neues SUPG-Verfahren mit Babuška-Brezzi-stabilen Elementen wird dargestellt. Das Verfahren wird mittels numerischer Experimente getestet.

**Kapitel 6 (Finite-Elemente-Methoden für die Navier-Stokes-Gleichungen):** Die Bedeutung der Oseen-Gleichungen in der numerischen Strömungsmechanik wird im Rahmen eines häufig eingesetzten numerischen Verfahrens für die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen hervorgehoben. Das neue SUPG-Verfahren für die Oseen-Gleichungen aus dem vorangegangenen Kapitel wird in diesem Zusammenhang getestet. Es werden Ergebnisse von numerischen Experimenten mit dem Referenzbeispiel „driven-cavity“ angegeben und mit Resultaten aus der Literatur verglichen.

**Kapitel 7 (Zusammenfassung und Ausblick):** Die Ergebnisse der Arbeit werden zusammengefasst und kritisch bewertet. Ansatzpunkte für Verbesserungen und zukünftige Erweiterungen werden aufgezeigt.

**Anhang A (FEMLAB):** Dieser Anhang bietet eine Kurzeinführung in die MATLAB-Toolbox FEMLAB. Einige FEMLAB-Skripte, die Finite-Elemente-Methoden für wichtige Gleichungen der Strömungsmechanik implementieren, werden als Startpunkt für zukünftige Diplomanden angegeben.

# Inhaltsverzeichnis

|   |            |
|---|------------|
| <b>Einleitung</b>   | <b>i</b>   |
| <b>Inhaltsverzeichnis</b>   | <b>iii</b> |
| <b>1 Grundlagen</b>   | <b>1</b>   |
| 1.1 Funktionenräume . . . . .                                       | 1          |
| 1.2 Hilfssätze . . . . .  | 8          |
| 1.3 Funktionalanalysis . . . . .                                    | 10         |
| <b>2 Variations- und Randwertaufgaben</b>                           | <b>13</b>  |
| 2.1 Die Oseen-Gleichungen . . . . .                                 | 13         |
| 2.2 Gemischte Variationsaufgaben . . . . .                          | 15         |
| 2.3 Schwache Lösungen der Oseen-Gleichungen . . . . .               | 22         |
| <b>3 Finite-Elemente-Methoden: Grundlagen</b>                       | <b>27</b>  |
| 3.1 Galerkin-Verfahren . . . . .                                    | 27         |
| 3.2 Gemischte Finite-Elemente-Methoden . . . . .                    | 30         |
| 3.3 Finite-Elemente-Räume . . . . .                                 | 33         |
| <b>4 Finite-Elemente-Methoden für die Stokes-Gleichungen</b>        | <b>37</b>  |
| 4.1 Taylor-Hood-Elemente . . . . .                                  | 38         |
| 4.2 Ein Galerkin-Least-Squares-Verfahren für die Stokes-Gleichungen | 40         |
| 4.3 Numerische Experimente . . . . .                                | 47         |
| <b>5 Finite-Elemente-Methoden für die Oseen-Gleichungen</b>         | <b>59</b>  |
| 5.1 SUPG-Verfahren für die Oseen-Gleichungen . . . . .              | 59         |
| 5.2 Numerische Experimente . . . . .                                | 64         |

|          |   |            |
|----------|---|------------|
| <b>6</b> | <b>Finite-Elemente-Methoden für die Navier-Stokes-Gleichungen</b> | <b>77</b>  |
| 6.1      | Die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen . . . . .           | 77         |
| 6.2      | Numerische Verfahren . . . . .                                    | 79         |
| 6.3      | Numerische Experimente . . . . .                                  | 79         |
| <b>7</b> | <b>Zusammenfassung und Ausblick</b>                               | <b>87</b>  |
| <b>A</b> | <b>FEMLAB</b>   | <b>91</b>  |
| A.1      | Die Stokes-Gleichungen I . . . . .                                | 95         |
| A.2      | Die Stokes-Gleichungen II . . . . .                               | 98         |
| A.3      | Die Oseen-Gleichungen . . . . .                                   | 100        |
| A.4      | Die Navier-Stokes-Gleichungen . . . . .                           | 104        |
| A.5      | Die Boussineq-Gleichungen . . . . .                               | 107        |
|          | <b>Literaturverzeichnis</b>                                       | <b>110</b> |

# Kapitel 1

## Grundlagen

Die benötigten Grundlagen der Analysis und Funktionalanalysis werden in diesem Kapitel ohne Beweise zitiert. Ein gutes Lehrbuch der Funktionalanalysis ist [Alt92]. Der Autor berücksichtigt auch Sobolev-Räume auf Gebieten mit Lipschitz-Rändern und beweist die wichtigsten Sätze ausführlich. Eine Darstellung des wichtigen Satzes „vom abgeschlossen Bild“ findet man in [Wer00].

### 1.1 Funktionenräume

Zunächst werden in diesem Abschnitt Räume klassisch differenzierbarer Funktionen eingeführt. Es folgt eine kurze Erinnerung an die wichtigsten Eigenschaften von Räumen von Lebesgue-Funktionen. Ziel ist die Einführung von Räumen von Sobolev-Funktionen, die die geeigneten Funktionenräume zur Untersuchung von partiellen Differentialgleichungen sind.

#### Räume stetig differenzierbarer Funktionen

Die Teilmenge  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  sei in diesem Unterabschnitt ein beschränktes Gebiet. Wie üblich wird der Abschluß des Gebiets  $\Omega$  mit  $\overline{\Omega}$  bezeichnet und der Rand mit  $\partial\Omega := \overline{\Omega} \setminus \Omega$ . Die Notation der folgenden Definitionen und Sätze wird durch Multiindizes vereinfacht.

**Definition 1.1.1.** Ein **Multiindex** ist ein Vektor  $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ , dessen Einträge  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  nichtnegative ganze Zahlen sind.

$|\alpha| := \sum_{i=1}^n \alpha_i$  heißt die **Länge** des Multiindex  $\alpha$ .

Für hinreichend oft differenzierbare Funktionen  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  benutzt man für  $x \in \Omega$  die Schreibweise

$$D^\alpha u(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}(x), \quad D^{(0, \dots, 0)} u(x) := u(x).$$

**Definition 1.1.2.** Die folgenden Funktionenräume sind die für diese Arbeit relevanten Räume **stetiger** bzw. **klassisch differenzierbarer** Funktionen:

(i) Die Menge der stetigen Funktionen auf  $\Omega$

$$C^0(\Omega) := \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ ist stetig}\}.$$

(ii) Die Menge der  $m$ -fach stetig differenzierbaren Funktionen auf  $\Omega$

$$C^m(\Omega) := \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid D^\alpha u \in C^0(\Omega), \forall \alpha : |\alpha| \leq m\}.$$

für  $m \in \mathbb{N}$  und die Menge  $C^\infty(\Omega)$  der unendlich oft differenzierbaren Funktionen auf  $\Omega$ .

(iii) Die Menge  $C^m(\overline{\Omega})$  aller Funktionen  $u \in C^m(\Omega)$ , deren Ableitungen  $D^\alpha u$  sich für jeden Multiindex  $\alpha$  mit  $|\alpha| \leq m$  stetig auf den Rand von  $\Omega$  fortsetzen lassen.

(iv) Die Menge aller unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger

$$\mathcal{D}(\Omega) := \{u \in C^\infty(\Omega) \mid \overline{\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}} \subset \Omega \text{ ist kompakt}\}.$$

## Lebesgue-Räume

Der Raum  $\mathbb{R}^n$  wird mit dem Lebesgue-Maß  $\mu$  versehen. In diesem Unterabschnitt sei  $\Omega$  eine meßbare Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ .

**Satz 1.1.3.** Sei  $1 \leq p < \infty$ . Die Menge der **p-integrierbaren Funktionen**

$$\mathcal{L}^p(\Omega) := \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ ist meßbar und } \int_{\Omega} |u|^p dx < \infty. \right\}$$

und die Menge der **wesentlich beschränkten Funktionen**

$$\mathcal{L}^\infty(\Omega) := \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} u \text{ ist meßbar und } u|_{\Omega \setminus N} \text{ ist beschränkt} \\ \text{für eine Lebesgue-Nullmenge } N \subset \Omega. \end{array} \right\}$$

sind mit

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} := \int_{\Omega} |u|^p dx \tag{1.1}$$

bzw.

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} := \inf_{\substack{N \text{ meßbar} \\ \mu(N)=0}} \sup_{x \in \Omega \setminus N} |u(x)| \tag{1.2}$$

halbnormierte Räume.

**Beweis.** Vgl. [Wer00], Abschnitt I.1, die Beispiele (h) und (i).  $\square$

**Satz 1.1.4.** Für  $1 \leq p \leq \infty$  ist die Menge

$$\mathcal{N}_p := \{u \in \mathcal{L}^p(\Omega) \mid \|u\|_{L^p(\Omega)} = 0\}$$

ein Untervektorraum in  $\mathcal{L}^p(\Omega)$ .

**Beweis.**  $\mathcal{N}_p$  ist der Kern des linearen Funktional  $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)} : \mathcal{L}^p \rightarrow \mathbb{R}$ .  $\square$

**Satz 1.1.5.** Sei  $1 \leq p < \infty$ . Mit der (wohldefinierten) Abbildung (1.1) ist der Quotientenraum

$$L^p(\Omega) := \mathcal{L}^p(\Omega) / \mathcal{N}_p,$$

bzw. mit der (ebenfalls wohldefinierten) Abbildung (1.2) der Quotientenraum

$$L^\infty(\Omega) := \mathcal{L}^\infty(\Omega) / \mathcal{N}_\infty,$$

ein Banach-Raum.  $L^p(\Omega)$  und  $L^\infty(\Omega)$  heißen **Lebesgue-Räume**.

**Beweis.** Vgl. [Wer00], Abschnitt I.1, die Beispiele (h) und (i), insbesondere Lemma I.1.9.  $\square$

Durch Prüfung der Hilbert-Raum-Axiome erhält man:

**Satz 1.1.6.** Der Raum  $L^2(\Omega)$  ist mit dem Skalarprodukt

$$(u, v) := \int_{\Omega} uv \, dx$$

ein Hilbert-Raum.

Desweiteren wird der Raum  $L_0^2(\Omega)$  gebraucht:

**Definition 1.1.7.** Der Teilraum  $L_0^2(\Omega) \subset L^2(\Omega)$  ist definiert als

$$L_0^2(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega) \mid \int_{\Omega} u \, dx = 0\}.$$

**Bemerkung 1.1.8.** Der Raum  $L_0^2(\Omega)$  ist ein abgeschlossener Teilraum des Hilbert-Raums  $L^2(\Omega)$ , also selbst ein Hilbert-Raum.

**Satz 1.1.9.** Die Menge  $\mathcal{D}(\Omega)$  liegt dicht in  $L^2(\Omega)$ .

**Beweis.** Vgl. [Wer00], Lemma V.1.9.  $\square$

## Sobolev-Räume

Sobolev-Räume sind Unterräume von Lebesgue-Räumen. Einige weiterführende Aussagen über Sobolev-Räume gelten i. allg. nur, wenn zusätzliche Forderungen an die Randglätte des beschränkten Gebiets  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  gestellt werden. Zur Vorbereitung werden deshalb sogenannte Lipschitz-Gebiete definiert.

**Definition 1.1.10.** Sei  $U \subset \mathbb{R}^n$  eine Teilmenge. Eine Funktion  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  heißt **Lipschitz-stetig** auf  $U$ , wenn es eine positive Konstante  $C$  derart gibt, daß

$$\|f(x) - f(y)\| \leq C \|x - y\| \quad \forall x, y \in U.$$

Ein beschränktes Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  heißt **Lipschitz-Gebiet**, wenn es zu jedem  $x \in \partial\Omega$  eine Umgebung  $U$  und eine bijektive Abbildung  $f : U \rightarrow D \subset \mathbb{R}^n$  mit den folgenden Eigenschaften gibt:

- (i)  $f(U \cap \Omega) \subset \mathbb{R}_+^n$
- (ii)  $f(U \cap \partial\Omega) \subset \partial\mathbb{R}_+^n$
- (iii)  $f$  ist Lipschitz-stetig auf  $U$  und  $f^{-1}$  ist Lipschitz-stetig auf  $D$ .

Die Elemente eines Sobolev-Raums sind schwach differenzierbare Lebesgue-Funktionen. Zur Erklärung der Eigenschaft „schwach differenzierbar“ benötigt man den Raum der lokal integrierbaren Funktionen.  $\Omega$  sei zunächst eine meßbare Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$ .

**Definition 1.1.11.** Die Menge

$$L_{loc}^1(\Omega) := \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid \int_K |u(x)| dx < \infty \quad \forall K \subset\subset \Omega \right\}$$

heißt der Raum der **lokal integrierbaren** Funktionen. Man schreibt  $K \subset\subset \Omega$ , wenn  $K \subset \Omega$  gilt und  $K$  kompakt ist.

**Definition 1.1.12.** Sei  $\alpha$  ein Multiindex und  $u \in L_{loc}^1(\Omega)$ . Die Lebesgue-Funktion  $v \in L_{loc}^1(\Omega)$  heißt **schwache** oder **verallgemeinerte**  $\alpha$ -te Ableitung von  $u$ , falls

$$\int_{\Omega} v \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} u D^{\alpha} \varphi dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Man schreibt  $D^{\alpha}u := v$ . Üblich ist auch die Notation

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} := D^{(1,0,\dots,0)}u, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} := D^{(1,1,\dots,0)}u \text{ usw.}$$

**Bemerkung 1.1.13.** Die schwache Ableitung  $D^{\alpha}u$  ist eindeutig bestimmt. Falls die klassische  $\alpha$ -te Ableitung von  $u$  existiert, stimmen nach der klassischen Regel der partiellen Integration die klassische und die schwache Ableitung überein. Dies rechtfertigt die Bezeichnung *schwache* Ableitung.

**Definition 1.1.14.** Für  $k = 0, 1, 2, \dots$  und  $1 \leq p \leq \infty$  ist der **Sobolev-Raum**  $W^{k,p}(\Omega)$  durch

$$W^{k,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) \mid \exists D^{\alpha}u \in L^p(\Omega), \forall \alpha : |\alpha| \leq k\}.$$

definiert.

**Satz 1.1.15.** Für  $1 \leq p \leq \infty$  ist der Sobolev-Raum  $W^{k,p}(\Omega)$  versehen mit der Norm

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \begin{cases} \left( \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^{\alpha}u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \leq p < \infty \\ \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^{\alpha}u\|_{L^{\infty}(\Omega)}, & p = \infty \end{cases}$$

ein Banach-Raum.

**Beweis.** Vgl. [Alt92], Abschnitt I.15. □

**Definition 1.1.16.** Der Sobolev-Raum  $W_0^{k,p}(\Omega)$  ist für  $1 \leq p \leq \infty$  der Abschluß der Menge  $\mathcal{D}(\Omega)$  bezüglich der Norm  $\|\cdot\|_{W^{k,p}}$ .

**Satz 1.1.17.** Der Raum  $W_0^{k,p}(\Omega)$  ist für  $1 \leq p \leq \infty$  ein Banach-Raum.

**Beweis.** Mit [Wer00], Lemma I.1.3 □

In dieser Arbeit werden hauptsächlich Sobolev-Räume benötigt, die Teilräume des Hilbert-Raums  $L^2(\Omega)$  sind. Sie erhalten die Bezeichnungen

$$H_0^k(\Omega) := W_0^{k,2}(\Omega) \text{ und } H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega).$$

Nachrechnen der Hilbert-Raum-Axiome liefert:

**Satz 1.1.18.** Die Sobolev-Räume  $H_0^k(\Omega)$  und  $H^k(\Omega)$  sind Hilbert-Räume mit dem Skalarprodukt

$$(u, v)_{H^k(\Omega)} := \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D^\alpha u D^\alpha v \, dx.$$

Die Lösungen der Oseen-Gleichungen, die in den folgenden Kapiteln behandelt werden, sind vektorwertige Funktionen. Deshalb werden hier auch die Produkträume  $[L^2(\Omega)]^n$  und  $[H_0^1(\Omega)]^n$  eingeführt. Zunächst zur Erinnerung die folgende Definition:

**Definition 1.1.19.** Das Standard-Skalarprodukt des  $\mathbb{R}^n$  ist für  $x, y \in \mathbb{R}^n$  gegeben durch

$$x \cdot y := \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

**Satz 1.1.20.** Der Produktraum  $[L^2(\Omega)]^n$  ist ein Hilbert-Raum mit dem Skalarprodukt

$$(u, v)_{[L^2(\Omega)]^n} := \int_{\Omega} u(x) \cdot v(x) \, dx.$$

Der Raum  $[H_0^1(\Omega)]^n$  versehen mit dem Skalarprodukt

$$(u, v)_{[H_0^1(\Omega)]^n} := \sum_{0 \leq |\alpha| \leq 1} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{[L^2(\Omega)]^n}$$

ist ebenfalls ein Hilbert-Raum.

**Beweis.** Auch hier lassen sich die Hilbert-Raum-Axiome leicht nachrechnen. □

Für spätere Anwendungen wird der folgende Satz angegeben:

**Satz 1.1.21.** Die **Sobolev-Halbnorm** auf den Räumen  $[H^k(\Omega)]^n$  ist für  $k \in \mathbb{N}$  definiert durch

$$|u|_{[H^k(\Omega)]^n} := \left( \sum_{|\alpha|=k} \|D^\alpha u\|_{[L^2(\Omega)]^n}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Im folgenden Satz werden die in dieser Arbeit benötigten Dichteaussagen gesammelt:

**Satz 1.1.22 (Dichteaussagen).**

1. Für  $1 \leq p \leq \infty$  ist  $W^{k,p}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$  dicht in  $W^{k,p}(\Omega)$ .
2.  $\mathcal{D}(\Omega)$  liegt für  $1 \leq p \leq \infty$  dicht in  $W_0^{k,p}(\Omega)$ .
3. Die Menge  $\mathcal{D}(\Omega)$  liegt dicht in  $L^2(\Omega)$ .

**Beweis.** Zu 1) vgl. [Alt92], Satz 2.14. Zu 2) siehe Definition 1.1.16 und zu 3) siehe Satz 1.1.9.  $\square$

Später wird der folgende Einbettungssatz benötigt:

**Satz 1.1.23 (Sobolev).** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Lipschitz-Gebiet und seien  $k_1 > k_2 \geq 0$  sowie  $1 \leq p_1 < \infty$  und  $1 \leq p_2 < \infty$ . Ist

$$k_1 - \frac{n}{p_1} \geq k_2 - \frac{n}{p_2},$$

so existiert die Einbettung

$$W^{k_1,p_1}(\Omega) \hookrightarrow W^{k_2,p_2}(\Omega)$$

und ist stetig. Für

$$k_1 - \frac{n}{p_1} > k_2$$

existiert die Einbettung

$$W^{k_1,p_1}(\Omega) \hookrightarrow C^{k_2}(\Omega)$$

und ist stetig.

**Beweis.** Vgl. [Alt92], Satz 8.7 und [GiRa86], Theorem I.1.3.  $\square$

**Notation.** In Tabelle 1.1 sind einige Abkürzungen der verwendeten Normen und Skalarprodukte festgehalten.

## Schwache Randbedingungen an Sobolev-Funktionen

Sobolev-Funktionen sind Lebesgue-Funktionen. Der Rand eines Gebiets  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ist eine Lebesgue-Nullmenge. Man kann also eine Sobolev-Funktion auf dem Rand von  $\Omega$  beliebig abändern, ohne in der Äquivalenzklasse einer anderen Sobolev-Funktion zu landen. Es macht folglich keinen Sinn klassische Randbedingungen, d.h. das punktweise Übereinstimmen einer Sobolev-Funktion mit

| Norm/Skalarprodukt                 | Abkürzung          |
|------------------------------------|--------------------|
| $(\cdot, \cdot)_{L^2(\Omega)}$     | $(\cdot, \cdot)$   |
| $(\cdot, \cdot)_{[L^2(\Omega)]^n}$ | $(\cdot, \cdot)$   |
| $(\cdot, \cdot)_{[H^k(\Omega)]^n}$ | $(\cdot, \cdot)_k$ |
| $\ \cdot\ _{L^2(\Omega)}$          | $\ \cdot\ _0$      |
| $\ \cdot\ _{[L^2(\Omega)]^n}$      | $\ \cdot\ _0$      |
| $\ \cdot\ _{[H^k(\Omega)]^n}$      | $\ \cdot\ _k$      |
| $ \cdot _{[H^k(\Omega)]^n}$        | $ \cdot _k$        |
| $(\int_K (\cdot)^2 dx)^{1/2}$      | $\ \cdot\ _{0,K}$  |

Tabelle 1.1: Abkürzungen.

einer anderen auf dem Rand eines Gebiets, zu fordern. Der in diesem Unterabschnitt vorgestellte *Spursatz* zeigt einen Weg auf, sog. „schwache“ Randbedingungen an Sobolev-Funktionen zu stellen.

Eine Testfunktion  $u$  aus

$$\mathcal{D}(\overline{\Omega}) := \{u|_{\Omega} \mid u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\}$$

erfüllt die Dirichlet-Randbedingungen  $r \in C^\infty(\partial\Omega)$  punktweise, wenn gilt

$$u(x) = r(x) \quad \forall x \in \partial\Omega. \quad (1.3)$$

Mit dem **Spuroperator**

$$\gamma_0 : \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \rightarrow C^\infty(\partial\Omega) \subset L^2(\partial\Omega), \quad (\gamma_0(u))(x) := u(x) \quad \forall x \in \partial\Omega$$

lautet Gleichung (1.3) kurz  $\gamma_0(u) = r$ . Der folgende Satz liefert nun eine Fortsetzung des Spuroperators  $\gamma_0$  auf den Sobolev-Raum  $H^1(\Omega)$ .

**Satz 1.1.24 (Spursatz).** Der beschränkte lineare Operator  $\gamma_0$  hat genau eine beschränkte lineare Fortsetzung

$$\gamma : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega).$$

Es gilt

$$\text{Kern } \gamma = H_0^1(\Omega).$$

**Beweis.** Vgl. [GiRa86], Theorem 1.5. □

**Definition 1.1.25.** Der Bildraum des Spuroperators  $\gamma$  erhält die Bezeichnung

$$H^{1/2}(\partial\Omega) := \text{Bild}(\gamma).$$

**Notation.** Es wird die Schreibweise  $u|_{\partial\Omega} := \gamma(u)$  verwendet. Damit schreibt sich die Forderung  $\gamma(u) = r$  für  $r \in H^{1/2}(\partial\Omega)$  suggestiver

$$u|_{\partial\Omega} = r.$$

Man sagt, eine Sobolev-Funktion  $u \in H^1(\Omega)$  erfüllt *homogene* Dirichlet-Randbedingungen, wenn  $u|_{\partial\Omega} = 0$ , d.h.  $u$  aus  $H_0^1(\Omega)$  ist. Sonst spricht man von *inhomogenen* Dirichlet-Randbedingungen.

Die Divergenz eines Vektorfelds  $u \in [H^1(\Omega)]^n$  ist erklärt als

$$\operatorname{div} u := \sum_{k=1}^n \frac{\partial u_k}{\partial x_k}.$$

Der folgende Satz formuliert eine Bedingung für die Existenz eines divergenzfreien Vektorfelds  $u$  auf  $\Omega$  zu vorgegebenen „Randwerten“  $r$  auf  $\partial\Omega$ :

**Satz 1.1.26.** Für jedes  $r \in [H^{1/2}(\partial\Omega)]^n$  mit  $\int_{\partial\Omega} r \cdot \mathbf{n} \, ds = 0$  existiert eine Funktion  $u \in [H^1(\Omega)]^n$  derart, daß

$$\operatorname{div} u = 0 \text{ in } \Omega \quad \text{und} \quad u|_{\partial\Omega} = r.$$

Dabei ist  $\mathbf{n}$  der äußere Einheits-Normalenvektor an den Rand von  $\Omega$ . Die Funktion  $u$  ist bis auf Addition einer divergenzfreien Funktion aus  $[H_0^1(\Omega)]^n$  eindeutig.

**Beweis.** Vgl. [GiRa86], Lemma I.2.2. □

## 1.2 Hilfssätze

**Definition 1.2.1.** Der **Gradient** von  $u \in H^1(\Omega)$  ist das Vektorfeld  $\nabla u \in [L^2(\Omega)]^n$  mit

$$\nabla u := \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)^T.$$

Für  $u \in H^2(\Omega)$  ist  $\Delta u \in L^2(\Omega)$  definiert als

$$\Delta u := \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}.$$

$\Delta$  heißt der **Laplace-Operator**. Für vektorwertige Funktionen  $u \in [H^2(\Omega)]^n$  ist der Laplace-Operator komponentenweise erklärt. Die Divergenz eines Vektorfelds  $u \in [H^1(\Omega)]^n$  ist

$$\operatorname{div} u := \sum_{k=1}^n \frac{\partial u_k}{\partial x_k}.$$

## Partielle Integration

**Satz 1.2.2 (partielle Integration).** Die Teilmenge  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  sei ein Lipschitz-Gebiet und  $u, v \in H^1(\Omega)$ . Dann gilt für  $i = 1, 2, \dots, n$

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, dx = - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx + \int_{\partial\Omega} uv n_i \, ds.$$

Dabei ist  $n_i$  die  $i$ -te Komponente des äußeren Einheits-Normalenvektors  $\mathbf{n} \in [L^\infty(\partial\Omega)]^n$ .

**Beweis.** Vgl. [BrSc94], Proposition 5.1.5. □

Mit diesem Satz folgt sofort:

**Korollar 1.2.3.** Unter der Voraussetzung  $u \in H^1(\Omega)$  und  $v \in H_0^1(\Omega)$  gilt

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x_i}, v \right) = - \left( u, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right). \quad (1.4)$$

Für  $p \in H^1(\Omega)$  und  $v \in [H_0^1(\Omega)]^n$  folgt

$$(\nabla p, v) = - (p, \operatorname{div} v). \quad (1.5)$$

Sind  $u \in [H^2(\Omega)]^n$  und  $v \in [H_0^1(\Omega)]^n$ , so gilt

$$(\Delta u, v) = - (\nabla u, \nabla v). \quad (1.6)$$

## Die Ungleichung von Hölder

**Satz 1.2.4 (Hölder-Ungleichung).** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet und  $m \in \mathbb{N}$ . Für  $i = 1, 2, \dots, m$  seien  $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$  mit  $1 \leq p_i \leq \infty$  und

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i} = 1.$$

Dann sind  $f_1, \dots, f_m \in L^1(\Omega)$  und es gilt

$$\left\| \prod_{i=1}^m f_i \right\|_{L^1(\Omega)} \leq \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{L^{p_i}(\Omega)}. \quad (1.7)$$

**Beweis.** Vgl. [Alt92], Satz 1.12 und Übungsaufgabe 1.6. □

## Die Ungleichung von Poincaré

Nach Definition der Norm  $\|\cdot\|_1$  gilt

$$|u|_1 = \|\nabla u\|_0 \leq \|u\|_1 \quad \forall u \in [H^1(\Omega)]^n.$$

Auf dem Teilraum  $[H_0^1(\Omega)]^n \subset [H^1(\Omega)]^n$  gilt auch eine Abschätzung in umgekehrter Richtung:

**Satz 1.2.5 (Poincaré).** Die Teilmenge  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  sei ein beschränktes Gebiet. Dann gilt

$$\|u\|_1 \leq C_F |u|_1 \quad \forall u \in [H_0^1(\Omega)]^n \quad (1.8)$$

mit einer (nur von  $\Omega$  abhängenden) Konstanten  $C_F > 0$ .

**Beweis.** Der Beweis für den Raum  $H_0^1(\Omega)$  wird in [Alt92], Abschnitt 4.10 gegeben. Das Resultat für den Produktraum folgt durch Aufaddieren der Ungleichungen für die  $n$  Lösungskomponenten.  $\square$

**Korollar 1.2.6.** Die Sobolev-Halbnorm  $|\cdot|_1$  ist auf dem Raum  $[H_0^1(\Omega)]^n$  eine zu  $\|\cdot\|_1$  äquivalente Norm. Der Raum  $[H_0^1(\Omega)]^n$  versehen mit der Norm  $|\cdot|_1$  ist ein Banach-Raum. Mit dem Skalarprodukt  $(u, v)_{H_0^1(\Omega)} := (\nabla u, \nabla v)$  ist der Raum  $[H_0^1(\Omega)]^n$  ein Hilbert-Raum.

### 1.3 Funktionalanalysis

In diesem Abschnitt werden kurz die benötigten Definitionen und Sätze aus der linearen Funktionalanalysis aufgeschrieben.  $X$  und  $Y$  sind stets normierte  $\mathbb{K}$ -Vektorräume.

**Definition 1.3.1.** Eine lineare Abbildung  $A : X \rightarrow Y$  heißt **beschränkt**, wenn für eine positive Konstante  $C$  gilt:

$$\|Av\|_Y \leq C \|v\|_X \quad \forall v \in X.$$

**Satz 1.3.2.** Sei  $L(X, Y)$  der Vektorraum der beschränkten linearen Operatoren von  $X$  nach  $Y$ . Die durch

$$\|A\|_{L(X, Y)} := \sup_{v \in X \setminus \{0\}} \frac{\|Av\|_Y}{\|v\|_X}$$

definierte Abbildung von  $L(X, Y)$  nach  $\mathbb{R}$  ist eine Norm auf  $L(X, Y)$ . Ist  $Y$  ein Banach-Raum, so auch  $L(X, Y)$ . Insbesondere ist  $L(X, \mathbb{K})$  ein Banach-Raum.

**Beweis.** Vgl. [Alt92], Satz 3.3.  $\square$

**Definition 1.3.3.** Ein beschränkter linearer Operator  $A$  aus  $L(X, Y)$  heißt **isometrisch**, wenn

$$\|Av\|_Y = \|v\|_X \quad \forall v \in X$$

gilt.  $A$  heißt ein **Isomorphismus**, wenn  $A$  bijektiv und der inverse Operator  $A^{-1}$  aus  $L(X, Y)$  ist.

**Definition 1.3.4.** Der Banach-Raum  $X^* := L(X, \mathbb{K})$  heißt der **Dualraum** von  $X$ . Die Elemente aus  $X^*$  heißen beschränkte lineare **Funktionale**. Der Raum  $X^{**} := (X^*)^*$  heißt **Bidualraum** von  $X$ . Die Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_X : X^* \times X \rightarrow \mathbb{K}, \quad \langle F, v \rangle_X := F(v) \quad \forall F \in X^*, v \in X$$

heißt das **Dualitätsprodukt** von  $X$ .

**Definition 1.3.5.** Es sei  $A : X \rightarrow Y$  ein Operator aus  $L(X, Y)$ . Ein beschränkter linearer Operator  $A^* : Y^* \rightarrow X^*$  mit

$$\langle A^*G, v \rangle_X = \langle G, Av \rangle_Y \quad \forall v \in X, G \in Y^* \quad (1.9)$$

heißt der zu  $A$  **adjungierte Operator**.

**Satz 1.3.6.** Seien  $X$  und  $Y$  Banach-Räume. Zu jedem beschränkten linearen Operator  $A : X \rightarrow Y$  existiert genau ein adjungierter Operator  $A^* : Y^* \rightarrow X^*$  mit

$$\|A^*\| = \|A\|. \quad (1.10)$$

Der adjungierte Operator  $A^*$  ist ein Isomorphismus genau dann, wenn  $A$  ein Isomorphismus ist. Dann gilt

$$(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*. \quad (1.11)$$

**Beweis.** Vgl. [Alt92], Satz 10.1 und Satz 10.5. □

**Satz 1.3.7.** Sei  $A$  ein beschränkter linearer Operator von  $X$  nach  $Y$ . Die Menge

$$\text{Kern}(A) := \{v \in X \mid Av = 0\}$$

ist ein abgeschlossener linearer Teilraum von  $X$ , die Menge

$$\text{Bild}(A) := \{w \in Y \mid \exists v \in X : Av = w\}$$

ein (i. allg. nicht abgeschlossener) linearer Teilraum von  $Y$ .

**Beweis.** Vgl. [Alt92], S.103. □

**Satz 1.3.8 (vom abgeschlossenen Bild).**  $X$  und  $Y$  seien Banach-Räume, und es sei  $A \in L(X, Y)$ . Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

- (i)  $\text{Bild}(A)$  ist abgeschlossen.
- (ii)  $\text{Bild} A = \text{Kern}(A^*)^\perp = \{w \in Y \mid \langle G, w \rangle_Y = 0 \quad \forall G \in \text{Kern}(A^*)\}$
- (iii)  $\text{Bild}(A^*)$  ist abgeschlossen.
- (iv)  $\text{Bild}(A^*) = \text{Kern}(A)^\circ = \{F \in X^* \mid \langle F, v \rangle_X = 0 \quad \forall v \in \text{Kern}(A)\}$

**Beweis.** Vgl. [Wer00], Theorem IV.5.1. □

**Bemerkung 1.3.9.** Die Menge  $\text{Kern}(A)^\circ$  heißt **polare Menge** von  $\text{Kern}(A)$ .

**Satz 1.3.10.** Sei  $U \neq \{0\}$  ein abgeschlossener Teilraum des Hilbert-Raums  $H$ . Dann existiert eine lineare Projektion  $P_U$  (d.h.  $P_U \circ P_U = P_U$ ) von  $H$  auf  $U$  mit  $\|P_U\| = 1$  und  $\text{Kern}(P_U) = U^\perp$ . Ist  $U \neq H$ , so ist  $I - P_U$  lineare Projektion von  $H$  auf  $U^\perp$  mit  $\|I - P_U\| = 1$ , und es gilt  $H = U \oplus U^\perp$ . Der Operator  $P_U$  heißt **Orthogonalprojektion** auf  $U$ .

**Beweis.** Vgl. [Wer00], Theorem V.3.4. □



## Kapitel 2

# Variations- und Randwertaufgaben

In diesem Kapitel werden die Oseen-Gleichungen vorgestellt und der *klassische* Lösungsbegriff erklärt. Eine Variationsformulierung der Oseen-Gleichungen, die eine Abschwächung des klassischen Lösungsbegriffs erlaubt, wird hergeleitet. Die Variationsformulierung der Oseen-Gleichungen wird in den abstrakten Rahmen gemischter Variationsaufgaben eingepasst. Die grundlegenden Sätze zur Theorie gemischter Variationsaufgaben aus *dem* Standardwerk [GiRa86], Abschnitt I.4, werden ausgearbeitet und im Beweis eines Existenz- und Eindeigkeitssatzes für *schwache* Lösungen der Oseen-Gleichungen angewendet. Das Vorgehen ist übertragbar auf viele interessante Randwertaufgaben für partielle Differentialgleichungen.

### 2.1 Die Oseen-Gleichungen

In der Einleitung wurde das Interesse an den Oseen-Gleichungen bereits dadurch begründet, daß viele numerische Verfahren für die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen die Berechnung einer Näherungslösung auf das sukzessive Lösen mehrerer Oseen-Gleichungen reduzieren. Ein solches Verfahren wird in Abschnitt 6.2 vorgestellt. Die Darstellung der Lösbarkeitstheorie der Oseen-Gleichungen beginnt mit der klassischen Formulierung:

Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ( $n = 2$  oder  $n = 3$ ) ein beschränktes Gebiet. Gegeben sind

- die Viskositätskonstante  $\nu > 0$ ,
- die Konstante  $\alpha > 0$ , die als reziproke Zeitschrittweite interpretiert werden kann (vgl. dazu Abschnitt 6.2),
- der Quellterm  $f \in [C^0(\Omega)]^n$ ,
- das Konvektionsfeld  $w \in [C^0(\Omega)]^n$  und
- die Randwerte  $r \in [C^0(\partial\Omega)]^n$ .

Gesucht wird das Geschwindigkeitsfeld  $u = (u_1, \dots, u_n)^T \in [C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})]^n$  und der Druck  $p \in C^1(\Omega)$  derart, daß

$$\alpha u - \nu \Delta u + (w \cdot \nabla)u + \nabla p = f \quad \text{in } \Omega, \quad (2.1a)$$

$$\operatorname{div} u = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (2.1b)$$

$$u|_{\partial\Omega} = r. \quad (2.1c)$$

**Definition 2.1.1.** Ein Paar von Funktionen  $(u, p)$  mit  $u \in [C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})]^n$  und  $p \in C^1(\Omega)$ , das die Gleichungen (2.1) punktweise erfüllt, heißt **klassische Lösung** der Oseen-Gleichungen.

**Bemerkung 2.1.2.** Der Druck  $p$  ist durch (2.1) nur bis auf eine additive Konstante festgelegt. Er wird durch die Bedingung

$$\int_{\Omega} p \, dx = 0$$

endgültig festgelegt.

**Bemerkung 2.1.3.** Damit zu den Randwerten  $r$  auf  $\partial\Omega$  überhaupt eine divergenzfreie Strömung existieren kann, muß nach dem Gaußschen-Integralsatz

$$\int_{\partial\Omega} r \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_{\partial\Omega} u \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_{\Omega} \operatorname{div} u \, dx = 0$$

gelten, wobei  $\mathbf{n}$  der äußere Einheits-Normalenvektor an den Rand von  $\Omega$  ist.

**Bemerkung 2.1.4.** Setzt man in Gleichung (2.1)  $w \equiv 0$ ,  $\nu = 1$  und  $\alpha = 0$ , so erhält man als Spezialfall der Oseen-Gleichungen die **Stokes-Gleichungen**

$$\begin{aligned} -\Delta u + \nabla p &= f \quad \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div} u &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} &= r. \end{aligned} \quad (2.2)$$

## Schwache Lösungen der Oseen-Gleichungen

Es wird nun eine **Variationsformulierung** der Oseen-Gleichungen hergeleitet. Diese ermöglicht eine Verallgemeinerung des klassischen Lösungsbegriffs. Außerdem macht sie die Oseen-Gleichungen einer Diskretisierung durch Finite-Elemente-Methoden zugänglich. Zur Herleitung der Variationsformulierung geht man folgendermaßen vor:

1. Annahme:  $(u, p)$  mit  $u \in [C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})]^n$  und  $p \in C^1(\Omega)$  ist eine klassische Lösung der Oseen-Gleichungen.
2. Multiplikation der Gleichungen (2.1a) und (2.1b) mit *Testfunktionen*  $v \in [\mathcal{D}(\Omega)]^n$  bzw.  $q \in \mathcal{D}(\Omega)$  und Integration über  $\Omega$  liefert

$$\begin{aligned} \alpha (u, v) - \nu (\Delta u, v) + ((w \cdot \nabla)u, v) + (\nabla p, v) &= (f, v) \quad \forall v \in [\mathcal{D}(\Omega)]^n, \\ (\operatorname{div} u, q) &= 0 \quad \forall q \in \mathcal{D}(\Omega). \end{aligned}$$

3. Anwendung der Integrationsregeln (1.4) und (1.5) ergibt

$$\begin{aligned}\alpha(u, v) + \nu(\nabla u, \nabla v) + ((w \cdot \nabla)u, v) - (p, \operatorname{div} v) &= (f, v) \quad \forall v \in [\mathcal{D}(\Omega)]^n, \\ (\operatorname{div} u, q) &= 0 \quad \forall q \in \mathcal{D}(\Omega).\end{aligned}$$

4. Die Vervollständigung des Raums von Testfunktionen  $[\mathcal{D}(\Omega)]^n$  bzgl. der Norm  $\|\cdot\|_1$  und die Vervollständigung von  $\mathcal{D}(\Omega)$  bzgl. der Norm  $\|\cdot\|_0$  nach Satz 1.1.22 zeigt

$$\begin{aligned}\alpha(u, v) + \nu(\nabla u, \nabla v) + ((w \cdot \nabla)u, v) - (\operatorname{div} v, p) &= (f, v) \quad \forall v \in [H_0^1(\Omega)]^n, \\ (\operatorname{div} u, q) &= 0 \quad \forall q \in L_0^2(\Omega).\end{aligned}\tag{2.3}$$

Jede klassische Lösung  $(u, p)$  erfüllt also die *Variationsgleichungen* (2.3). Diese Tatsache motiviert die folgende Definition schwacher Lösungen der Oseen-Gleichungen:

**Definition 2.1.5.** Ein Paar von Funktionen  $(u, p)$  heißt **schwache Lösung** der Oseen-Gleichungen, wenn es Lösung der folgenden Variationsformulierung der Oseen-Gleichungen ist:

$$\begin{aligned}\text{„Finde } (u, p) \in [H^1(\Omega)]^n \times L_0^2(\Omega) \text{ derart, daß} \\ \alpha(u, v) + \nu(\nabla u, \nabla v) + ((w \cdot \nabla)u, v) - (\operatorname{div} v, p) &= (f, v) \quad \forall v \in [H_0^1(\Omega)]^n, \\ (\operatorname{div} u, q) &= 0 \quad \forall q \in L_0^2(\Omega), \\ u|_{\partial\Omega} &= r.\end{aligned}\tag{2.4}$$

**Bemerkung 2.1.6.** Jede klassische Lösung der Oseen-Gleichungen ist auch eine schwache Lösung.

**Bemerkung 2.1.7.** Die Variationsformulierung der Oseen-Gleichungen erlaubt es, die Regularitätsforderungen an die Daten stark abzuschwächen. Statt eines stetigen Quellterms genügt es  $f \in L^2(\Omega)$  zu fordern und das Konvektionsfeld  $w$  als divergenzfreies Vektorfeld aus  $[H^1(\Omega)]^n$  vorauszusetzen. Näheres dazu in Abschnitt 2.3.

## 2.2 Gemischte Variationsaufgaben

Variationsaufgaben sind der geeignete abstrakte Rahmen für die Untersuchung der *schwachen* Lösbarkeit von Randwertaufgaben für partielle Differentialgleichungen. Für die Variationsformulierung der Oseen-Gleichungen (2.4) im speziellen sind gemischte Variationsaufgaben der passende Rahmen.

**Notation.** Um unnötige Wiederholungen zu vermeiden, werden einige Bezeichnungen für die folgenden Kapitel vereinbart:  $X$  und  $Q$  stehen fortan für reelle Hilbert-Räume.  $a(\cdot, \cdot)$  und  $b(\cdot, \cdot)$  bezeichnen stets reelle Bilinearformen auf  $X \times X$  bzw.  $X \times Q$ . Mit  $F$  und  $G$  sind immer beschränkte lineare Funktionale auf  $X$  bzw.  $Q$  gemeint.

**Definition 2.2.1.** Die Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  auf  $X \times X$  heißt **stetig**, wenn es eine Konstante  $M_a > 0$  derart gibt, daß

$$|a(u, v)| \leq M_a \|u\|_X \|v\|_X \quad \forall u, v \in X.$$

Sei  $V \subset X$  ein abgeschlossener linearer Teilraum von  $X$ . Dann heißt  $a(\cdot, \cdot)$  **V-elliptisch**, falls für eine Konstante  $\alpha > 0$  gilt:

$$|a(v, v)| \geq \alpha \|v\|_X^2 \quad \forall v \in V.$$

Die Bilinearform  $b(\cdot, \cdot)$  auf  $X \times Q$  heißt **stetig**, wenn für eine Konstante  $M_b > 0$  die Ungleichung

$$|b(v, q)| \leq M_b \|u\|_X \|q\|_Q \quad \forall u \in X, q \in Q \quad (2.5)$$

erfüllt ist.  $b(\cdot, \cdot)$  genügt der (kontinuierlichen) **inf-sup-Bedingung**, wenn eine Konstante  $\beta > 0$  derart existiert, daß

$$\sup_{v \in X \setminus \{0\}} \frac{b(v, q)}{\|v\|_X} \geq \beta \|q\|_Q \quad \forall q \in Q. \quad (2.6)$$

**Bemerkung 2.2.2.** Man nennt die Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  kurz elliptisch, wenn sie  $X$ -elliptisch ist. Eine elliptische Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  erfüllt stets die inf-sup-Bedingung (2.6). Der Name „inf-sup-Bedingung“ rührt daher, daß Bedingung (2.6) äquivalent ist zu der Forderung

$$\inf_{q \in Q \setminus \{0\}} \sup_{v \in X \setminus \{0\}} \frac{b(v, q)}{\|v\|_X \|q\|_Q} \geq \beta.$$

Gegenstand dieses Abschnitts ist die **gemischte Variationsaufgabe**:

$$\begin{aligned} \text{„Finde } (u, p) \in X \times Q \text{ derart, daß} \\ a(u, v) + b(v, p) = \langle F, v \rangle_X \quad \forall v \in X, \\ b(u, q) = \langle G, q \rangle_Q \quad \forall q \in Q.“ \end{aligned} \quad (2.7)$$

Motiviert wird die Untersuchung von Variationsaufgaben diesen Typs durch die Variationsformulierung der Oseen-Gleichungen (2.4). Man setze

$$X := [H_0^1(\Omega)]^n \text{ und } Q := L_0^2(\Omega)$$

und definiere für ein festes  $w \in X$  mit  $\operatorname{div} w = 0$  die Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  auf  $X \times X$  und die Bilinearform  $b(\cdot, \cdot)$  auf  $X \times Q$  durch

$$\begin{aligned} a(u, v) &:= \alpha (u, v) + \nu (\nabla u, \nabla v) + ((w \cdot \nabla)u, v) \quad \forall u, v \in X, \\ b(v, q) &:= -(\operatorname{div} v, q) \quad \forall v \in X, \forall q \in Q \end{aligned}$$

sowie die beschränkten linearen Funktionale  $F$  und  $G$  durch  $G \equiv 0$  und

$$\langle F, v \rangle_X := (f, v) \quad \forall v \in X.$$

Mit diesen Definitionen entspricht die gemischte Variationsaufgabe (2.7) der Variationsformulierung der Oseen-Gleichungen (2.4) mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen.

### Hilfssätze über stetige Bilinearformen

Die Darstellung von stetigen Bilinearformen mit Hilfe von beschränkten linearen Operatoren ermöglicht die Überführung von Variationsaufgaben in Operatorgleichungen. Die lineare Funktionalanalysis stellt starke Sätze bereit, diese Operatorgleichungen zu untersuchen.

**Satz 2.2.3 (Darstellungssatz für stetige Bilinearformen).** Zu der stetigen Bilinearform  $b(\cdot, \cdot)$  auf  $X \times Q$  gibt es jeweils genau einen beschränkten, linearen Operator  $B$  aus  $L(X, Q^*)$  bzw.  $B'$  aus  $L(Q, X^*)$  derart, daß

$$\langle Bv, q \rangle_Q = \langle B'q, v \rangle_X = b(v, q) \quad \forall v \in X, \forall q \in Q \quad (2.8)$$

und

$$\|B\|_{L(X, Q^*)} \leq M_b \quad \text{bzw.} \quad \|B'\|_{L(Q, X^*)} \leq M_b.$$

**Beweis.** 1. Zum Beweis der Wohldefiniertheit von  $B$  ist  $Bv \in Q^*$  für alle  $v \in X$  zu zeigen: Die Linearität von  $Bv$  ist klar. Die Beschränktheit von  $Bv$  folgt aus der Stetigkeit von  $b(\cdot, \cdot)$ : Mit  $C := M_b \|v\|_X$  gilt

$$|\langle Bv, q \rangle_Q| = |b(v, q)| \leq M_b \|v\|_X \|q\|_Q = C \|q\|_Q \quad \forall q \in Q.$$

2. Zeige nun  $B \in L(X, Q^*)$  mit  $\|B\|_{L(X, Q^*)}$ . Die Linearität von  $B$  ist leicht einzusehen. Die Beschränktheit von  $B$  folgt wiederum mit der Stetigkeit der Bilinearform  $b(\cdot, \cdot)$ :

$$\|Bv\|_{Q^*} = \sup_{q \in Q \setminus \{0\}} \frac{|\langle Bv, q \rangle_Q|}{\|q\|_Q} = \sup_{q \in Q \setminus \{0\}} \frac{|b(v, q)|}{\|q\|_Q} \leq M_b \|v\|_X \quad \forall v \in X.$$

3. Zur Eindeutigkeit: Sei  $\tilde{B} : X \rightarrow Q^*$  ein weiterer beschränkter linearer Operator mit der Eigenschaft (2.8). Dann gilt

$$\langle Bv - \tilde{B}v, q \rangle_Q = 0 \quad \forall q \in Q.$$

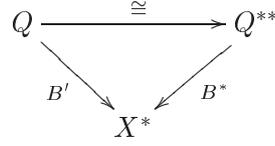
Daraus folgt  $Bv = \tilde{B}v$  für alle  $v \in X$  und schließlich  $B = \tilde{B}$ . Der Beweis der Aussage für den Operator  $B'$  verläuft analog.  $\square$

**Definition 2.2.4.** Der beschränkte lineare Operator  $B$  von  $X$  nach  $Q^*$  mit der Eigenschaft (2.8) heißt **darstellender Operator** der stetigen Bilinearform  $b(\cdot, \cdot)$ .

**Bemerkung 2.2.5.** Sei  $q$  ein Element aus  $Q$  und  $\tilde{q} \in Q^{**}$  dessen Bild unter der kanonischen Einbettung von  $Q$  in  $Q^{**}$ . Die kanonische Einbettung von  $Q$  in  $Q^{**}$  ist ein Isomorphismus, da  $Q$  ein Hilbert-Raum ist. Wegen

$$\langle B^* \tilde{q}, v \rangle_X = \langle \tilde{q}, Bv \rangle_{Q^*} = \langle Bv, q \rangle_Q = \langle B'q, v \rangle_X \quad \forall v \in X, \forall q \in Q$$

kommutiert das Diagramm in Abbildung 2.1. Im folgenden wird daher  $B' : Q \rightarrow X^*$  mit dem zu  $B$  adjungierten Operator  $B^* : Q^{**} \rightarrow X^*$  identifiziert.

Abbildung 2.1: Identifikation von  $B'$  und  $B^*$ .

Zur Formulierung des folgenden Lemmas, das den Kern der Theorie gemischter Variationsaufgaben bildet, benötigt man die beiden folgenden Teilmengen von  $X$ :

$$\begin{aligned}
 V(G) &:= \{v \in X \mid b(v, q) = \langle G, q \rangle_Q \quad \forall q \in Q\}, \\
 V &:= V(0) = \text{Kern}(B).
 \end{aligned}$$

$V$  ist als Kern des beschränkten linearen Operators  $B$  abgeschlossen und damit ein Hilbert-Raum.

**Lemma 2.2.6.** Die folgenden drei Aussagen sind äquivalent:

- (i) Die stetige Bilinearform  $b(\cdot, \cdot)$  erfüllt die inf-sup-Bedingung

$$\sup_{v \in X \setminus \{0\}} \frac{b(v, q)}{\|v\|_X} \geq \beta \|q\|_Q. \quad (2.9)$$

- (ii) Der Operator  $B^*$  ist ein Isomorphismus von  $Q$  auf  $V^\circ$  und es gilt

$$\|B^*q\|_{X^*} \geq \beta \|q\|_Q \quad \forall q \in Q. \quad (2.10)$$

- (iii) Der Operator  $B$  ist ein Isomorphismus von  $V^\perp$  auf  $Q^*$  und es gilt

$$\|Bv\|_{Q^*} \geq \beta \|v\|_X \quad \forall v \in X. \quad (2.11)$$

**Beweis.** (ii)  $\Rightarrow$  (i) Die Ungleichung (2.9) impliziert die inf-sup-Bedingung:

$$\sup_{v \in X \setminus \{0\}} \frac{b(v, q)}{\|v\|_X} = \sup_{v \in X \setminus \{0\}} \frac{\langle B^*q, v \rangle_X}{\|v\|_X} = \|B^*q\|_{X^*} \geq \beta \|q\|_Q.$$

- (i)  $\Rightarrow$  (ii) Andererseits folgt aus der inf-sup-Bedingung die Ungleichung (2.10):

$$\|B^*q\|_{X^*} = \sup_{v \in X \setminus \{0\}} \frac{\langle B^*q, v \rangle_X}{\|v\|_X} = \sup_{v \in X \setminus \{0\}} \frac{b(v, q)}{\|v\|_X} \geq \beta \|q\|_Q. \quad (2.12)$$

Es bleibt zu zeigen, daß  $B^*$  ein Isomorphismus von  $Q$  auf  $V^\circ$  ist. Die Existenz des inversen Operators  $(B^*)^{-1} \in L(V^\circ, Q)$  wird in drei Schritten nachgewiesen.

1. Zur Injektivität von  $B$ : Mit Ungleichung (2.9) folgt für  $p, q \in Q$  aus  $B^*p = B^*q$

$$0 = \|B^*(p - q)\|_{X^*} \geq \beta \|p - q\|_Q \geq 0$$

und schließlich  $p = q$ .

2. Nach 1. ist  $B^* : Q \rightarrow \text{Bild}(B^*)$  eine bijektive Abbildung. Man setze  $q := (B^*)^{-1}F$  in Ungleichung (2.12) ein und teile durch  $\beta$ . Man erhält

$$\|(B^*)^{-1}F\|_Q \leq \frac{1}{\beta} \|F\|_{X^*}.$$

Also ist  $B^*$  ein Isomorphismus von  $Q$  auf  $\text{Bild}(B^*)$ .

3. Es bleibt  $\text{Bild}(B^*) = V^\circ$  zu zeigen. Der Satz vom abgeschlossenen Bild 1.3.8 liefert sofort die Identität  $\text{Bild}(B^*) = \text{Kern}(B)^\circ = V^\circ$ . Denn  $B^*$  ist ein Isomorphismus und  $\text{Bild}(B^*)$  damit abgeschlossen in  $X^*$ .

(ii)  $\Leftrightarrow$  (iii)

Nach Satz 1.3.6 ist  $B : V^\perp \rightarrow Q^*$  ein Isomorphismus genau dann, wenn der zu  $B$  adjungierte Operator  $B^* : Q \rightarrow (V^\perp)^*$  ein Isomorphismus ist. Es gilt

$$\|B\|_{L(V^\perp, Q^*)} = \|B^*\|_{L(Q, (V^\perp)^*)}.$$

Zum Beweis genügt es folglich einen isometrischen Isomorphismus  $T$  von  $(V^\perp)^*$  auf  $V^\circ$  anzugeben. Dieser ist durch

$$\langle TF, w \rangle_X := \langle F, P_{V^\perp} w \rangle_X \quad \forall w \in X$$

gegeben. Dabei ist  $P_{V^\perp}$  die orthogonale Projektion von  $X$  auf  $V^\perp$ . Von den Eigenschaften dieses Operators (vgl. Satz 1.3.10) wird im folgenden reger Gebrauch gemacht. Der Nachweis, daß  $T$  ein isometrischer Isomorphismus ist, erfolgt in sechs Schritten.

1. Wohldefiniertheit: Zu zeigen ist  $TF \in V^\circ$  für alle  $F \in (V^\perp)^*$ . Die Linearität von  $TF$  ist klar. Die Beschränktheit folgt mit

$$|\langle TF, v \rangle_X| = |\langle F, P_{V^\perp} v \rangle_X| \leq \|F\|_{X^*} \|P_{V^\perp} v\|_X \leq \|F\|_{X^*} \|v\|_X.$$

Wegen  $P_{V^\perp} v = 0$  gilt  $\langle TF, v \rangle_X = \langle F, P_{V^\perp} v \rangle_X = 0$  für alle  $v \in V$ . Folglich ist  $TF$  in  $V^\circ$ .

2. Zeige  $T \in L((V^\perp)^*, V^\circ)$ . Die Linearität von  $T$  ist offensichtlich. Die Beschränktheit folgt aus

$$\begin{aligned} \|TF\|_{X^*} &= \sup_{v \in X \setminus \{0\}} \frac{\langle TF, v \rangle_X}{\|v\|_X} = \sup_{v \in X \setminus \{0\}} \frac{\langle F, P_{V^\perp} v \rangle_X}{\|v\|_X} \\ &\leq \sup_{v \in X \setminus \{0\}} \frac{\|F\|_{(V^\perp)^*} \|P_{V^\perp} v\|_X}{\|v\|_X} \leq \|F\|_{(V^\perp)^*} \quad \forall F \in (V^\perp)^*. \end{aligned}$$

3. Zur Injektivität von  $T$ : Für  $F, G \in (V^\perp)^*$  folgt aus  $TF = TG$

$$0 = \langle TF - TG, v \rangle_X = \langle F - G, P_{V^\perp} v \rangle_X \quad \forall v \in X$$

und endlich  $F = G$ .

4. Surjektivität: Sei  $G \in V^\circ$ . Gesucht ist ein  $F \in (V^\perp)^*$  derart, daß  $TF = G$ . Definiere  $F \in (V^\perp)^*$  durch

$$\langle F, v \rangle_X := \langle G, v \rangle \quad \forall v \in V^\perp. \quad (2.13)$$

Wegen

$$\begin{aligned} \langle TF, v \rangle_X &= \langle TF, (I - P_{V^\perp})v + P_{V^\perp}v \rangle_X = \langle TF, P_{V^\perp}v \rangle_X = \langle G, P_{V^\perp}v \rangle_X \\ &= \langle G, (I - P_{V^\perp})v + P_{V^\perp}v \rangle_X = \langle G, v \rangle_X \quad \forall v \in X. \end{aligned}$$

gilt  $TF = G$ .

5. Die Schritte 3. und 4. haben gezeigt, daß  $T$  ein bijektiver Operator ist. Der zu  $T$  inverse Operator  $T^{-1}$  von  $V^\circ$  auf  $(V^\perp)^*$  ist durch Gleichung (2.13) definiert. Die Beschränktheit von  $T^{-1}$  folgt aus

$$\|T^{-1}G\|_{(V^\perp)^*} = \sup_{v \in (V^\perp)^*} \frac{\langle T^{-1}G, v \rangle_X}{\|v\|_X} = \sup_{v \in (V^\perp)^*} \frac{\langle G, v \rangle_X}{\|v\|_X} \leq \|G\|_{X^*}. \quad (2.14)$$

Nach 1.-5. ist  $T$  ein Isomorphismus von  $(V^\perp)^*$  auf  $V^\circ$ .

6. Unter Punkt 2 wurde die Ungleichung

$$\|TF\|_{X^*} \leq \|F\|_{(V^\perp)^*} \quad \forall F \in (V^\perp)^*.$$

nachgewiesen. Setzt man in (2.14)  $G := TF$ , so folgt

$$\|F\|_{(V^\perp)^*} \leq \|TF\|_{X^*} \quad \forall F \in (V^\perp)^*.$$

Das bedeutet  $\|TF\|_{X^*} = \|F\|_{(V^\perp)^*}$ , also ist  $T$  isometrisch.  $\square$

Mit dieser Aussage folgt nun das klassische Lemma von Lax-Milgram.

**Lemma 2.2.7 (Lax-Milgram).** Die stetige Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  auf  $X \times X$  sei  $X$ -elliptisch. Dann hat die **Variationsaufgabe**

$$\text{„Finde } u \in X \text{ derart, daß } a(u, v) = \langle F, v \rangle_X \quad \forall v \in X.\text{“} \quad (2.15)$$

genau eine Lösung.

**Beweis.** Sei  $A : X \rightarrow X^*$  der darstellende Operator der Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$ . Die Variationsaufgabe (2.15) ist äquivalent zu der Operatorgleichung

$$\text{„Finde } u \in X \text{ derart, daß } Au = F \quad \text{in } X^*.\text{“}$$

Es gilt  $V^\perp = \text{Kern}(A)^\perp = X$ , weil aus

$$\langle Au, u \rangle_X \geq \alpha \|u\|_X^2 \quad \forall u \in X$$

$\text{Kern}(A) = 0$  folgt. Da die  $X$ -Elliptizität die inf-sup-Bedingung (2.6) impliziert, ist  $A$  nach Lemma 2.2.6 ein Isomorphismus von  $V^\perp = X$  auf  $X^*$ . Damit ist  $u = A^{-1}F$  eindeutige Lösung der Variationsaufgabe (2.15).  $\square$

### Lösbarkeit gemischter Variationsaufgaben

Die Untersuchung der Lösbarkeit der gemischten Variationsaufgabe (2.7) erfordert einen Umweg über die **restringierte Variationsaufgabe**

$$\text{„Finde } u \in V(G) \text{ derart, daß } a(u, v) = \langle F, v \rangle_X \quad \forall v \in V.\text{“} \quad (2.16)$$

**Satz 2.2.8.** Die Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  auf  $X \times X$  sei stetig und  $V$ -elliptisch und die Bilinearform  $b(\cdot, \cdot)$  auf  $X \times Q$  erfülle die inf-sup-Bedingung. Dann gilt:

1. Für jede Lösung  $(u, p) \in X \times Q$  der gemischten Variationsaufgabe (2.7) ist  $u \in V(G)$  und löst die restringierte Variationsaufgabe (2.16).
2. Umgekehrt gibt es zu jeder Lösung  $u \in V(G)$  der restringierten Variationsaufgabe (2.16) genau ein  $p \in Q$  derart, daß  $(u, p)$  die gemischte Variationsaufgabe (2.7) löst.

Man sagt, die Variationsaufgaben (2.7) und (2.16) sind äquivalent.

**Beweis.** Punkt 1 ist klar. Zu Punkt 2:

Mit den darstellenden Operatoren der Bilinearformen  $a(\cdot, \cdot)$  und  $b(\cdot, \cdot)$  erhält man die zur gemischten Variationsaufgabe (2.7) äquivalente Operatorgleichung

$$\begin{aligned} \text{„Finde } (u, p) \in X \times Q \text{ derart, daß} \\ Au + B^*p = F \quad \text{in } X^*, \\ Bu = G \quad \text{in } Q^*.\text{“} \end{aligned} \quad (2.17)$$

Sei  $u \in V(G)$  eine Lösung der restringierten Variationsaufgabe (2.16).  $u$  löst nach Definition der Menge  $V(G)$  die zweite Operatorgleichung in (2.17). Nun wird zu  $u$  ein  $p \in Q$  derart bestimmt, daß  $(u, p)$  die erste Operatorgleichung in (2.17) erfüllt ist.

Aus Lemma 2.2.6 folgt, daß  $B^*$  ein Isomorphismus von  $Q$  auf  $V^\circ$  ist. Es gilt

$$\langle F - Au, v \rangle_X = 0 \quad \forall v \in V$$

und damit  $F - Au \in V^\circ$ . Folglich löst  $(u, p) \in X \times Q$  mit  $p := (B^*)^{-1}(F - Au)$  die gemischte Variationsaufgabe (2.17).  $\square$

Mit Satz 2.2.8 folgt das Hauptresultat des Kapitels.

**Satz 2.2.9.** Gegeben seien die stetigen Bilinearformen  $a(\cdot, \cdot)$  auf  $X \times X$  und  $b(\cdot, \cdot)$  auf  $X \times Q$ . Die gemischte Variationsaufgabe (2.7) hat genau eine Lösung  $(u, p) \in X \times Q$ , wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- $a(\cdot, \cdot)$  ist  $V$ -elliptisch mit einer Konstanten  $\alpha > 0$ :

$$a(v, v) \geq \alpha \|v\|_X^2 \quad \forall v \in V. \quad (2.18a)$$

- $b(\cdot, \cdot)$  erfüllt mit einer Konstanten  $\beta > 0$  die inf-sup-Bedingung

$$\sup_{v \in X \setminus \{0\}} \frac{b(v, q)}{\|v\|_X} \geq \beta \|q\|_{Q^*} \quad \forall q \in Q. \quad (2.18b)$$

**Beweis.** Da die Bilinearform  $b(\cdot, \cdot)$  die inf-sup-Bedingung erfüllt, ist ihr darstellender Operator  $B$  nach Lemma 2.2.6 ein Isomorphismus von  $V^\perp$  auf  $Q^*$ . Damit ist die Menge  $V(G)$  nichtleer, denn sie enthält das Element  $B^{-1}G$ .

Sei  $u_0$  ein beliebiges Element aus  $V(G)$ . Die  $V$ -Elliptizität von  $a(\cdot, \cdot)$  sichert nach dem Lemma von Lax-Milgram 2.2.7 die Existenz einer eindeutigen Lösung der Variationsaufgabe

$$\text{„Finde } u_1 \in V \text{ derart, daß } a(u_1, v) = \langle F, v \rangle_X - a(u_0, v) \quad \forall v \in V.\text{“}$$

Wie man durch Einsetzen sieht, löst  $u := u_0 + u_1 \in V(G)$  die restringierte Variationsaufgabe (2.16). Angenommen  $\tilde{u} \in V(G)$  ist eine weitere Lösung von (2.16). Dann ist  $u - \tilde{u} \in V$  und wegen der  $V$ -Elliptizität von  $a(\cdot, \cdot)$  gilt

$$0 = a(u - \tilde{u}, u - \tilde{u}) \geq \alpha \|u - \tilde{u}\|_X^2.$$

Also ist  $u = \tilde{u}$  und die restringierte Variationsaufgabe (2.16) *eindeutig* lösbar. Nach Satz 2.2.8 gibt es dann genau ein  $p \in Q$  derart, daß  $(u, p)$  die gemischte Variationsaufgabe (2.7) eindeutig löst.  $\square$

### 2.3 Schwache Lösungen der Oseen-Gleichungen

In Abschnitt 2.2 wurde bereits erklärt, wie man die Oseen-Gleichungen mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen in den abstrakten Rahmen gemischter Variationsaufgaben einfügt: Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ( $n = 2$  oder  $n = 3$ ) ein beschränktes Lipschitz-Gebiet. Man wählt

$$X := [H_0^1(\Omega)]^n \text{ und } Q := L_0^2(\Omega)$$

mit den Normen  $\|\cdot\|_X := |\cdot|_1$  und  $\|\cdot\|_Q := \|\cdot\|_0$ . Die Bilinearform  $b(\cdot, \cdot)$  auf  $X \times Q$  und die beschränkten linearen Funktionale  $F$  und  $G$  auf  $X$  bzw.  $Q$  werden durch  $G \equiv 0$  sowie

$$\begin{aligned} b(v, q) &:= -(\operatorname{div} v, q) \quad \forall v \in X, \forall q \in Q, \\ \langle F, v \rangle_X &:= (f, v) \quad \forall v \in X \end{aligned}$$

definiert. Der Teilraum  $V \subset X$  ist dann der Raum aller divergenzfreien Vektorfelder aus  $[H_0^1(\Omega)]^n$ . Die Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  wird in zwei Komponenten aufgespalten. Es ist für ein festes  $w \in V$

$$a(u, v) = a_0(u, v) + a_1(w, u, v) \quad \forall u, v \in X,$$

wobei die Bilinearform  $a_0(\cdot, \cdot)$  auf  $X \times X$  und die Trilinearform  $a_1(\cdot, \cdot, \cdot)$  auf  $X^3$  gegeben sind durch

$$\begin{aligned} a_0(u, v) &:= \alpha (u, v) + \nu (\nabla u, \nabla v) \quad \forall u, v \in X, \\ a_1(w, u, v) &:= ((w \cdot \nabla)u, v) \quad \forall u, v, w \in X. \end{aligned}$$

Zum Beweis der Existenz und Eindeutigkeit schwacher Lösungen der Oseen-Gleichungen mit *homogenen* Dirichlet-Randbedingungen werden die Voraussetzungen von Satz 2.2.9, insbesondere die Bedingungen (2.18a) und (2.18b), geprüft:

### Eigenschaften der Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$

Zunächst wird die Trilinearform  $a_1(\cdot, \cdot, \cdot)$  genauer untersucht.

**Satz 2.3.1.** 1. Für alle  $w, u, v \in X$  gilt mit einer positiven Konstante  $M_{a_1}$  die Abschätzung

$$|a_1(w, u, v)| \leq M_{a_1} \|w\|_X \|u\|_X \|v\|_X.$$

D.h.  $a_1(\cdot, \cdot, \cdot)$  ist auf  $X^3$  wohldefiniert und stetig.

2. Für alle  $w, v \in X$  gilt

$$a_1(w, v, v) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div} w (v \cdot v) \, dx \quad \forall w, v \in X. \quad (2.19)$$

**Beweis.** 1. Die Dimension des Lipschitz-Gebiets  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ist  $n = 2$  oder  $n = 3$ . Daher ist der Raum  $H^1(\Omega)$  nach Satz 1.1.23 stetig in den Raum  $L^4(\Omega)$  eingebettet. Zusammen mit den Ungleichungen von Hölder (1.7) und Poincaré (1.8) folgt mit einer geeigneten positiven Konstanten  $M_{a_1}$

$$\begin{aligned} |a_1(w, u, v)| &= \left| \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} w_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} v_i \, dx \right| \leq \sum_{i,j=1}^n \left| \int_{\Omega} w_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} v_i \, dx \right| \\ &\leq \sum_{i,j=1}^n \|w_j\|_{L^4(\Omega)} \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)} \|v_i\|_{L^4(\Omega)} \\ &\leq M_{a_1} \sum_{i,j=1}^n \|w_j\|_1 \|u_i\|_1 \|v_i\|_1 \leq M_{a_1} \|w\|_X \|u\|_X \|v\|_X. \end{aligned}$$

2. Mit der Regel der partiellen Integration (1.4) gilt

$$\begin{aligned} a_1(w, v, v) &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} w_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_i \, dx = - \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} v_i \frac{\partial w_j v_i}{\partial x_j} \, dx \\ &= - \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} w_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_i \, dx - \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial w_j}{\partial x_j} v_i^2 \, dx \\ &= -a_1(w, v, v) - \int_{\Omega} \operatorname{div} w (v \cdot v) \, dx. \end{aligned}$$

Addition von  $a_1(\cdot, \cdot, \cdot)$  und Division durch 2 liefert die Gleichung (2.19).  $\square$

Sei nun  $w \in V$  fest gewählt. Mit der gerade bewiesenen Stetigkeit von  $a_1(\cdot, \cdot, \cdot)$  und der Ungleichung von Hölder (1.7) folgt die Stetigkeit der Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$ :

$$\begin{aligned} a(u, v) &= a_0(u, v) + a_1(w, u, v) \leq \nu \|u\|_X \|v\|_X + M_{a_1} \|w\|_X \|u\|_X \|v\|_X \\ &\leq \max(\nu, M_{a_1} \|w\|_X) \|u\|_X \|v\|_X \quad \forall u, v \in X. \end{aligned}$$

Die  $V$ -Elliptizität folgt mit der Aussage (2.19) und der Ungleichung von Poincaré (1.8):

$$\begin{aligned} a(v, v) &= a_0(v, v) + a_1(w, v, v) = \alpha \|v\|_0^2 + \nu \|v\|_X^2 + \int_{\Omega} \underbrace{\operatorname{div} w}_{=0} (v \cdot v) \, dx \\ &= \alpha \|v\|_0^2 + \nu \|v\|_X^2 \geq \min(\alpha C_F^2, \nu) \|v\|_X^2 \quad \forall v \in X. \end{aligned}$$

### Eigenschaften der Bilinearform $b(\cdot, \cdot)$

Die Stetigkeit der Bilinearform  $b(\cdot, \cdot)$  folgt wiederum mit Hilfe der Hölder-Ungleichung (1.7). Für alle  $v \in X$  und  $q \in Q$  gilt

$$\begin{aligned} |b(v, q)| &= |(\operatorname{div} v, q)| = \left| \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_i}, q \right) \right| \leq \sum_{i=1}^n \left( \left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right\|_0 \|q\|_0 \right) \\ &\leq \left( \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right\|_0^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{i=1}^n \|q\|_0^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{n} \|v\|_X \|q\|_Q. \end{aligned}$$

Der Nachweis der inf-sup-Bedingung (2.18b) für die Bilinearform  $b(\cdot, \cdot)$  gelingt mit dem nun folgenden Satz, den man in [GiRa86] als Korollar I.2.4 findet. Der Beweis dieser Aussage ist *sehr* aufwendig ist. Literaturhinweise für einen Beweis von J. Nečas findet man in [GiRa86] in den Vorbemerkungen zu Theorem I.2.2.

**Satz 2.3.2.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein Gebiet mit Lipschitz-Rand. Dann ist der Operator

$$\operatorname{div} : V^\perp \rightarrow Q$$

ein Isomorphismus.

Wähle  $q \in L_0^2(\Omega)$ . Nach Satz 2.3.2 existiert ein  $u \in V^\perp$  derart, daß

$$\operatorname{div} u = q \text{ und } \|q\|_Q = \|\operatorname{div} u\|_Q \leq \beta \|u\|_X.$$

Die Konstante  $\beta > 0$  ist unabhängig von  $q$ . Damit folgt die inf-sup-Bedingung

$$\sup_{v \in X \setminus \{0\}} \frac{b(v, q)}{\|v\|_X} \geq \frac{b(u, q)}{\|u\|_X} = \frac{(\operatorname{div} u, q)}{\|u\|_X} = \frac{\|q\|_Q^2}{\|u\|_X} \geq \beta \|q\|_Q. \quad (2.20)$$

### Ein Existenz- und Eindeutigkeitsatz

Die Bilinearformen  $a(\cdot, \cdot)$  und  $b(\cdot, \cdot)$  erfüllen die Voraussetzungen von Satz 2.2.9. Damit ist die Existenz und Eindeutigkeit einer schwachen Lösung der Oseen-Gleichungen mit *homogenen* Dirichlet-Randbedingungen bewiesen. Das Hauptresultat dieses Kapitels ist die Erweiterung dieser Aussage auf inhomogene Dirichlet-Randbedingungen:

**Satz 2.3.3.** Sei  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ein beschränktes Lipschitz-Gebiet. Zu den Daten  $r \in H^{1/2}(\partial\Omega)^n$  mit  $\int_{\partial\Omega} r \cdot \mathbf{n} \, ds = 0$ ,  $w \in V$  und  $f \in L^2(\Omega)$  existiert genau eine schwache Lösung  $(u, p) \in X \times Q$  der Oseen-Gleichungen.

**Beweis.** Zur Existenz: Nach Satz 1.1.26 gibt es ein  $u_1 \in X$  mit  $\operatorname{div} u_1 = 0$  und  $u_1|_{\partial\Omega} = r$ . Es existiert genau eine schwache Lösung  $(u_0, p) \in X \times Q$  der Oseen-Gleichungen mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen und der rechten Seite

$$\langle F, v \rangle_X := (f, v) - a(u_1, v) \quad \forall v \in X. \quad (2.21)$$

Es gilt also  $u_0|_{\partial\Omega} = 0$ . Das Paar  $(u, p) \in X \times Q$  mit  $u := u_0 + u_1$  ist eine schwache Lösung der Oseen-Gleichungen mit  $u|_{\partial\Omega} = r$ .

Zur Eindeutigkeit: Sei  $(\tilde{u}, \tilde{p}) \in X \times Q$  eine weitere Lösung. Dann ist  $(\tilde{u} - u_1, \tilde{p})$  eine schwache Lösung der Oseen-Gleichungen mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen und rechter Seite (2.21). D.h. es gilt  $(\tilde{u} - u_1, \tilde{p}) = (u_0, p)$  und folglich ist  $\tilde{p} = p$  und  $\tilde{u} = u_0 + u_1 = u$ .  $\square$



## Kapitel 3

# Finite-Elemente-Methoden: Grundlagen

Galerkin-Verfahren und der Spezialfall konformer Finite-Elemente-Methoden werden als „natürliche“ Diskretisierung von Variationsaufgaben vorgestellt. Gemischte Finite-Elemente-Methoden diskretisieren gemischte Variationsaufgaben und ermöglichen somit die Konstruktion numerischer Lösungsverfahren für die Oseen-Gleichungen. Die Theorie gemischter Finite-Elemente-Methoden wird weitgehend nach [GiRa86] dargestellt. Am Ende des Kapitels werden die für diese Arbeit relevanten Finite-Elemente-Räume und ihre wichtigsten Eigenschaften angegeben.

### 3.1 Galerkin-Verfahren

An dieser Stelle sei an das Lemma von Lax-Milgram 2.2.7 erinnert. Es formuliert eine hinreichende Bedingung für die eindeutige Lösbarkeit der Variationsaufgabe

$$\text{„Finde } u \in X \text{ derart, daß } a(u, v) = \langle F, v \rangle_X \quad \forall v \in X.\text{“} \quad (3.1)$$

Für die numerische Lösung dieser Variationsaufgabe bietet sich ein natürliches Vorgehen an. Man sucht die Lösung nicht im Raum  $X$ , sondern in einem endlich dimensionalen Unterraum  $X_h \subset X$ :

$$\text{„Finde } u_h \in X_h \text{ derart, daß } a(u_h, v_h) = \langle F, v_h \rangle_X \quad \forall v_h \in X_h.\text{“} \quad (3.2)$$

Den Übergang vom Raum  $X$  zum endlich dimensionalen Unterraum  $X_h$  nennt man auch **Diskretisierung** der Variationsaufgabe (3.1). Numerische Verfahren, die auf der Diskretisierung (3.2) basieren, heißen **Galerkin-Verfahren**.

Man nennt das Galerkin-Verfahren (3.2) eine **(konforme) Finite-Elemente-Methode**, wenn der Unterraum  $X_h$  ein Finite-Elemente-Raum ist. Finite-Elemente-Räume werden erst in Abschnitt 3.3 eingeführt, da die Ergebnisse in den Abschnitten 3.1 und 3.2 unabhängig von der Wahl des Raums  $X_h$  sind.

Die *verallgemeinerten* Galerkin-Verfahren beruhen auf der Variationsaufgabe

$$\text{„Finde } u_h \in X_h \text{ derart, da\ss } a_h(u_h, v_h) = \langle F_h, v_h \rangle_X \quad \forall v_h \in X_h.\text{“} \quad (3.3)$$

mit einer Bilinearform  $a_h(\cdot, \cdot)$  auf  $X_h \times X_h$  und einem linearen Funktional  $F_h$  auf  $X_h$ .

**Definition 3.1.1.** Die Bilinearform  $a_h(\cdot, \cdot)$  und das lineare Funktional  $F_h$  seien auf den Räumen  $X \times X$  bzw.  $X$  erklärt. Ein verallgemeinertes Galerkin-Verfahren heißt **konsistent**, wenn für die Lösung  $u \in X$  der Variationsaufgabe (3.1) gilt

$$a_h(u, v_h) = \langle F_h, v_h \rangle_X \quad \forall v_h \in X_h.$$

Der folgende Satz ist ein Existenz- und Eindeutigkeitsatz für (verallgemeinerte) Galerkin-Verfahren. Es wird eine abstrakte Fehlerabschätzung angegeben.

**Satz 3.1.2.**

1. Die Bilinearform  $a_h(\cdot, \cdot)$  erfülle die **diskrete Babuska-Bedingung**

$$\sup_{v_h \in X_h \setminus \{0\}} \frac{a_h(u_h, v_h)}{\|v_h\|_X} \geq \alpha_h \|u_h\|_X \quad \forall u_h \in X_h \quad (3.4)$$

mit einer Konstanten  $\alpha_h > 0$ . Dann besitzt das verallgemeinerte Galerkin-Verfahren (3.3) genau eine Lösung  $u_h \in X_h$ .

2. Die Variationsaufgabe (3.1) besitze eine eindeutige Lösung und das verallgemeinerte Galerkin-Verfahren (3.3) sei konsistent. Außerdem seien die folgenden Voraussetzungen erfüllt:

- a) Die diskrete Babuska-Bedingung (3.4) für die Bilinearform  $a_h(\cdot, \cdot)$  sei mit einer von  $h$  unabhängigen Konstanten  $\alpha > 0$  erfüllt.
- b) Die Bilinearform  $a_h(\cdot, \cdot)$  sei stetig mit einer von  $h$  unabhängigen Stetigkeitskonstanten  $M_a > 0$ .

Dann gilt die Fehlerabschätzung

$$\|u - u_h\|_X \leq \left(1 + \frac{M_a}{\alpha}\right) \inf_{v_h \in X_h \setminus \{0\}} \|u - v_h\|_X. \quad (3.5)$$

**Beweis.** 1. Sei  $A_h \in L(X_h, X_h^*)$  der darstellende Operator der Bilinearformen  $a_h(\cdot, \cdot)$  auf  $X_h \times X_h$  mit

$$\langle A_h v_h, w_h \rangle_X = a_h(v_h, w_h) \quad \forall v_h, w_h \in X_h.$$

Das verallgemeinerte Galerkin-Verfahren (3.3) schreibt sich mit Hilfe des Operators  $A_h$  folgendermaßen:

$$\text{„Finde } u_h \in X_h \text{ derart, da\ss } A_h u_h = F.\text{“}$$

Sei  $u_h \in \text{Kern}(A_h)$ . Mit der diskreten Babuška-Bedingung folgert man

$$0 = \frac{\langle A_h u_h, v \rangle_X}{\|v_h\|_X} = \frac{a_h(u_h, v_h)}{\|v_h\|_X} \geq \alpha_h \|u_h\|_X \geq 0.$$

Also ist  $u_h = 0$  und folglich  $\text{Kern}(A_h) = \{0\}$ . Wegen  $\dim X_h = \dim X_h^* = n < \infty$  ist  $A_h$  ein Isomorphismus und  $u_h := A_h^{-1}F$  die gesuchte eindeutige Lösung von (3.3).

2. Aus der Konsistenz des verallgemeinerten Galerkin-Verfahrens folgt durch Subtraktion von (3.1) und (3.3)

$$a_h(u - u_h, w_h) = 0 \quad \forall w_h \in X_h. \quad (3.6)$$

Diese Beziehung heißt **Galerkin-Orthogonalität**. Sei  $v_h \in X_h$  beliebig. Wegen der Galerkin-Orthogonalität gilt

$$a_h(u_h - v_h, w_h) = a_h(u_h - u, w_h) + a_h(u - v_h, w_h) = a_h(u - v_h, w_h) \quad \forall w_h \in X_h.$$

Unter Ausnutzung der Stetigkeit und der diskreten Babuška-Bedingung folgt

$$\begin{aligned} \|u_h - v_h\|_X &\leq \frac{1}{\alpha} \sup_{w_h \in X_h \setminus \{0\}} \frac{|a_h(u_h - v_h, w_h)|}{\|w_h\|_X} \\ &= \frac{1}{\alpha} \sup_{w_h \in X_h \setminus \{0\}} \frac{|a_h(u - v_h, w_h)|}{\|w_h\|_X} \leq \frac{M_a}{\alpha} \|u - v_h\|_X. \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis und die Dreiecksungleichung ergeben

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_X &= \|(u - v_h) + (v_h - u_h)\|_X \\ &\leq \|u - v_h\|_X + \|u_h - v_h\|_X \leq \left(1 + \frac{M_a}{\alpha}\right) \inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|_X. \end{aligned}$$

□

**Bemerkung 3.1.3.** Die Fehlerabschätzung (3.5) ist ein Spezialfall des ersten Lemmas von Strang (vgl. [Bra97], Satz III.1.1). Dieses verallgemeinert die Fehlerabschätzung auf den Fall nicht konsistenter verallgemeinerter Galerkin-Verfahren.

### Praktische Lösung von Galerkin-Verfahren

Praktisch bestimmt man die Lösung  $u_h \in X_h$  eines Galerkin-Verfahrens (3.2) oder (3.3) durch Lösen eines linearen Gleichungssystems. Sei  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$  eine Basis des Raums  $X_h$ . Dann läßt sich die Lösung  $u_h$  bzgl. dieser Basis mit einem Koeffizientenvektor  $U \in \mathbb{R}^N$  darstellen:

$$u_h = \sum_{i=1}^N U_i \varphi_i.$$

Einsetzen in (3.3) liefert für  $j = 1, 2, \dots, N$

$$a_h(u_h, \varphi_j) = a_h\left(\sum_{i=1}^N U_i \varphi_i, \varphi_j\right) = \sum_{i=1}^N a_h(\varphi_i, \varphi_j) U_i = \langle F_h, \varphi_j \rangle_X.$$

Definiert man die Matrix  $A \in \mathbb{R}^{N \times N}$  und den Vektor  $L \in \mathbb{R}^N$  durch

$$A_{ji} := a_h(\varphi_i, \varphi_j) \quad \text{und} \quad L_j := \langle F_h, \varphi_j \rangle_X, \quad 1 \leq i, j \leq N,$$

so ist der Koeffizientenvektor  $U$  Lösung des linearen Gleichungssystems

$$AU = L. \tag{3.7}$$

**Bemerkung 3.1.4.** Die linearen Gleichungssysteme, die bei der Diskretisierung von partiellen Differentialgleichungen entstehen, sind in der Regel sehr groß. Die Frage, wie sich diese Gleichungssysteme effizient lösen lassen, wird in dieser Arbeit nicht behandelt.

## 3.2 Gemischte Finite-Elemente-Methoden

Die gemischte Variationsaufgabe (2.7) wird folgendermaßen diskretisiert: Man wählt Finite-Elemente-Räume  $X_h \subset X$  und  $Q_h \subset Q$  und bestimmt eine Lösung der **gemischten Finite-Elemente-Methode**

$$\begin{aligned} &\text{„Finde } (u_h, p_h) \in X_h \times Q_h \text{ derart, daß} \\ &a(u_h, v_h) + b(v_h, p_h) = \langle F, v_h \rangle_X \quad \forall v_h \in X_h, \\ &b(u_h, q_h) = \langle G, q_h \rangle_Q \quad \forall q_h \in Q_h.“ \end{aligned} \tag{3.8}$$

Zur Untersuchung der Lösbarkeit definiert man analog zum kontinuierlichen Fall

$$\begin{aligned} V_h(G) &:= \{v_h \in X_h \mid b(v_h, q_h) = \langle G, q_h \rangle_Q \quad \forall q_h \in Q_h\}, \\ V_h &:= V_h(0). \end{aligned}$$

**Bemerkung 3.2.1.** Im allgemeinen ist  $V_h \not\subseteq V$ . Im Beispiel der Oseen-Gleichungen ist  $V$  der Teilraum aller divergenzfreien Funktionen von  $[H_0^1(\Omega)]^n$ . Eine Funktion  $v_h \in V_h$  ist aber i. allg. nicht divergenzfrei, da

$$(\operatorname{div} v_h, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in Q_h$$

nicht  $\operatorname{div} v_h = 0$  impliziert.

Betrachte  $a(\cdot, \cdot)$  und  $b(\cdot, \cdot)$  als Bilinearformen auf  $X \times X_h$  bzw.  $X \times Q_h$  und die zugehörigen Operatoren  $A_h \in L(X, X_h^*)$ ,  $B_h \in L(X, Q_h^*)$  und  $B_h^* \in L(Q, X_h^*)$  mit

$$\begin{aligned} \langle A_h u, v_h \rangle_X &:= a(u, v_h) \quad \forall u \in X, \forall v_h \in X_h, \\ \langle B_h v, q_h \rangle_Q &:= b(v, q_h) \quad \forall v \in X, \forall q_h \in Q_h, \\ \langle B_h^* q, v_h \rangle_X &:= b(v_h, q) \quad \forall q \in Q, \forall v_h \in X_h. \end{aligned}$$

Zum Beweis der Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung der gemischten Finite-Elemente-Methode (3.8) geht man den Umweg über die folgende Variationsaufgabe:

$$\text{„Finde } u_h \in V_h(G) \text{ derart, daß } a(u_h, v) = \langle F, v \rangle_X \quad \forall v \in V_h.\text{“} \quad (3.9)$$

Wegen  $V_h \not\subseteq V$  kann man (3.9) als *nichtkonforme* Finite-Elemente-Methode zur Approximation der restringierten Variationsaufgabe (2.16) betrachten.

**Satz 3.2.2.** Die Menge  $V_h(G)$  sei nichtleer und die Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  sei  $V_h$ -elliptisch:

$$\exists \alpha_h > 0 : \quad a(v_h, v_h) \geq \alpha_h \|v_h\|_X^2 \quad \forall v_h \in V_h.$$

Dann hat die nichtkonforme Finite-Elemente-Methode (3.9) genau eine Lösung. Es gilt die Abschätzung

$$\|u - u_h\|_X \leq \left(1 + \frac{M_a}{\alpha_h}\right) \inf_{w_h \in V_h(G)} \|u - w_h\|_X + \frac{M_b}{\alpha_h} \inf_{q_h \in Q_h} \|p - q_h\|_Q. \quad (3.10)$$

**Beweis.** 1. Zur Lösbarkeit: Sei  $u_h^0 \in V_h(G)$ . Die Variationsgleichung

$$\begin{aligned} &\text{„Finde } u_h^1 \in V_h \text{ derart, daß} \\ &a(u_h^1, v) = \langle F, v \rangle_X - a(u_h^0, v) \quad \forall v \in V_h.\text{“} \end{aligned}$$

hat nach dem Lemma von Lax-Milgram 2.2.7 genau eine Lösung und  $u_h := u_h^0 + u_h^1 \in V_h(G)$  ist eine Lösung der Variationsgleichung (3.9), wie man durch Einsetzen sieht. Diese Lösung ist auch eindeutig. Denn ist  $\tilde{u}_h \in V_h(G)$  eine weitere Lösung von (2.16) so folgt aus der  $V_h$ -Elliptizität von  $a(\cdot, \cdot)$

$$0 = a(u_h - \tilde{u}_h, u_h - \tilde{u}_h) \geq \alpha \|u_h - \tilde{u}_h\|_X^2.$$

Damit gilt  $u_h = \tilde{u}_h$ .

2. Zur Fehlerabschätzung: Sei  $w_h \in V_h(G)$  beliebig. Definiere  $v_h := u_h - w_h \in V_h$ . Da  $(u, p) \in X \times Q$  die gemischte Variationsaufgabe (2.7) löst, gilt

$$a(v_h, v_h) = a(v_h, v_h) + \underbrace{a(u, v_h) + b(v_h, p) - \langle F, v_h \rangle_X}_{=0}.$$

$u_h \in V_h(G)$  ist Lösung der Variationsaufgabe (3.9). Es folgt für alle  $q_h \in Q_h$

$$\begin{aligned} a(v_h, v_h) &= a(v_h, v_h) + a(u, v_h) - a(u_h, v_h) + b(v_h, p) \\ &= a(u - (u_h - v_h), v_h) + b(v_h, p) - \underbrace{b(v_h, q_h)}_{=0} \\ &= a(u - w_h, v_h) + b(v_h, p - q_h). \end{aligned}$$

Aus der Stetigkeit der Bilinearformen  $a(\cdot, \cdot)$  und  $b(\cdot, \cdot)$  und der  $V_h$ -Elliptizität von  $a(\cdot, \cdot)$  folgt

$$\|w_h - u_h\|_X = \|v_h\|_X \leq \frac{M_a}{\alpha_h} \|u - w_h\|_X + \frac{M_b}{\alpha_h} \|p - q_h\|_Q.$$

Schließlich gilt für alle  $w_h \in V_h(G)$  und  $q_h \in Q_h$

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_X &= \|u - w_h\|_X + \|w_h - u_h\|_X \\ &\leq \left(1 + \frac{M_a}{\alpha_h}\right) \|u - w_h\|_X + \frac{M_b}{\alpha_h} \|p - q_h\|_Q. \end{aligned}$$

□

**Satz 3.2.3.** Die Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  sei  $V_h$ -elliptisch mit einer positiven Konstante  $\alpha_h$ , d.h.

$$a(v_h, v_h) \geq \alpha_h \|v_h\|_X^2 \quad \forall v_h \in V_h \quad (3.11a)$$

und die Bilinearform  $b(\cdot, \cdot)$  erfülle die **Babuška-Brezzi-Bedingung** (auch diskrete inf-sup-Bedingung genannt)

$$\sup_{v_h \in X_h \setminus \{0\}} \frac{b(v_h, q_h)}{\|v_h\|_X} \geq \beta_h \|q_h\|_Q \quad \forall q_h \in Q_h. \quad (3.11b)$$

Dann existiert genau eine Lösung  $(u_h, p_h) \in X_h \times Q_h$  der gemischten Finite-Elemente-Methode (3.8). Es gelten die Fehlerabschätzungen

$$\|u - u_h\|_X \leq \left(1 + \frac{M_a}{\alpha_h}\right) \left(1 + \frac{M_b}{\beta_h}\right) \inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|_X + \frac{M_b}{\alpha_h} \inf_{q_h \in Q_h} \|p - q_h\|_Q, \quad (3.12)$$

$$\|p - p_h\|_Q \leq \frac{M_a}{\beta_h} \inf_{v_h \in X_h \setminus \{0\}} \|u - v_h\|_X + \left(1 + \frac{M_b}{\beta_h}\right) \inf_{q_h \in Q_h \setminus \{0\}} \|p - q_h\|_Q. \quad (3.13)$$

**Beweis.** 1. Zur Lösbarkeit: Betrachte den Operator  $B_h$  eingeschränkt auf  $X_h$ . Mit Lemma 2.2.6 folgt, daß  $B_h$  ein Isomorphismus von  $V_h^\perp$  (das orthogonale Komplement von  $V_h$  in  $X_h$ ) auf  $Q_h^*$  ist. Damit ist  $V_h(G)$  nichtleer und nach Satz 3.2.2 hat die Finite-Elemente-Methode (3.9) genau eine Lösung  $u_h \in V_h(G)$ . In dieser Situation kann man nun Satz 2.2.8 anwenden. Mit diesem folgt die Existenz eines  $p_h \in Q_h$  derart, daß  $(u_h, p_h) \in X_h \times Q_h$  eindeutige Lösung der gemischten Finite-Elemente-Methode (3.8) ist.

2. Zu den Fehlerabschätzungen: Man geht von der Fehlerabschätzung (3.10) aus. Zunächst wird die diskrete inf-sup-Bedingung ausgenutzt, um den Term

$$\inf_{w_h \in V_h(G)} \|u - w_h\|_X$$

besser abzuschätzen. Sei  $v_h \in X_h$  beliebig. Es ist  $B_h(u - v_h) \in Q_h^*$ . Da  $B_h$  ein Isomorphismus von  $V_h^\perp$  auf  $Q_h^*$  ist, existiert genau ein  $z_h \in V_h^\perp$  mit

$$B_h z_h = B_h(u - v_h). \quad (3.14)$$

Ungleichung (2.11) liefert die Abschätzung

$$\|z_h\|_X \leq \frac{1}{\beta_h} \|B_h(u - v_h)\|_{Q_h^*} \leq \frac{M_b}{\beta_h} \|u - v_h\|_X. \quad (3.15)$$

Für  $w_h := z_h + v_h$  gilt dann mit Gleichung (3.14)

$$\begin{aligned} b(w_h, q_h) &= \langle Bz_h, q_h \rangle_Q + b(v_h, q_h) = \langle B(u - v_h), q_h \rangle_Q + b(v_h, q_h) \\ &= b(u - v_h, q_h) + b(v_h, q_h) = b(u, q_h) = \langle G, q_h \rangle_Q \quad \forall q_h \in Q_h. \end{aligned}$$

Also ist  $w_h \in V_h(G)$  und mit Abschätzung (3.15) folgt

$$\|u - w_h\|_X \leq \|u - v_h\|_X + \|z_h\|_X \leq \left(1 + \frac{M_b}{\beta_h}\right) \|u - v_h\|_X. \quad (3.16)$$

Einsetzen in (3.10) liefert die erste Fehlerabschätzung (3.12).

Nun zur Abschätzung für  $\|p - p_h\|_Q$ . Subtraktion von (2.7) und (3.8) ergibt

$$b(v_h, p_h - q_h) = a(u - u_h, v_h) + b(v_h, p - q_h) \quad \forall v_h \in X_h, \forall q_h \in Q_h.$$

Aus der diskreten inf-sup-Bedingung (3.11b) folgt

$$\begin{aligned} \|p_h - q_h\|_Q &\leq \frac{1}{\beta_h} \sup_{v_h \in X_h \setminus \{0\}} \frac{a(u - u_h, v_h) + b(v_h, p - q_h)}{\|v_h\|_X} \\ &\leq \frac{M_a}{\beta_h} \|u - u_h\|_X + \frac{M_b}{\beta_h} \|p - q_h\|_Q. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \|p - p_h\|_Q &\leq \|p - q_h\|_Q + \|p_h - q_h\|_Q \\ &\leq \frac{M_a}{\beta_h} \|u - u_h\|_X + \left(1 + \frac{M_b}{\beta_h}\right) \|p - q_h\|_Q. \end{aligned} \quad (3.17)$$

und folglich auch die Fehlerabschätzung (3.13).  $\square$

### 3.3 Finite-Elemente-Räume

Die Grundidee der Galerkin-Verfahren ist es, in der Variationsaufgabe

$$\text{„Finde } u \in X \text{ derart, daß } a(u, v) = \langle F, v \rangle_X \quad \forall v \in X.\text{“}$$

den Raum  $X$  durch einen endlich dimensionalen Unterraum  $X_h \subset X$  zu ersetzen. Anforderungen an  $X_h$  ergeben sich aus den Resultaten der vorangegangenen Abschnitte 3.1 und 3.2:

1. Fehlerabschätzungen der Form

$$\|u - u_h\|_X \leq C \inf_{v_h \in X_h \setminus \{0\}} \|u - v_h\|_X$$

besagen, daß der Fehler des Galerkin-Verfahrens nur davon abhängt, wie gut sich die exakte Lösung  $u \in X$  in  $X_h$  approximieren läßt.

2. Die praktische Lösung eines Galerkin-Verfahrens erfordert die Aufstellung und Lösung des linearen Gleichungssystems (3.7). Dazu braucht man eine einfache Basis von  $X_h$ , damit sich die Matrixeinträge  $A_{ji} = a(\varphi_i, \varphi_j)$  leicht berechnen lassen. Außerdem ist es wünschenswert, daß die Matrix  $A$  möglichst viele Nulleinträge hat. Das verringert bei geschickter Speicherung der Matrix den Bedarf an Speicherplatz.

Die große Beliebtheit, der sich Finite-Elemente-Methoden in der Praxis erfreuen, belegt, daß Finite-Elemente-Räume eine gute Wahl zur Diskretisierung von partiellen Differentialgleichungen sind. Es werden nun die in dieser Arbeit benötigten Finite-Elemente-Räume eingeführt und eine Sammlung ihrer wichtigsten Eigenschaften angegeben. Es werden nur Finite-Elemente-Räume auf polyedrischen Gebieten berücksichtigt.

### Triangulationen

**Definition 3.3.1.** Sei  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  ein beschränktes polyedrisches Gebiet. Die Menge  $\mathcal{T}_h = \{K_1, K_2, \dots, K_m\}$  abgeschlossener, polyedrischer Teilmengen heißt eine **zulässige Triangulation** von  $\Omega$ , wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- (i)  $\bigcup_{i=1}^m K_i = \overline{\Omega}$  und  $\overset{\circ}{K}_i \cap \overset{\circ}{K}_j = \emptyset$  für  $i \neq j$ .
- (ii) Besteht  $K_i \cap K_j$  aus genau einem Punkt, so ist dieser ein Eckpunkt von  $K_i$  als auch von  $K_j$ . (Es darf keine „hängenden Knoten“ geben.)
- (iii) Besteht  $K_i \cap K_j$  für  $i \neq j$  aus mehr als einem Punkt, so ist  $K_i \cap K_j$  eine  $(n-1)$ -dimensionale Seite, sowohl von  $K_i$  als auch von  $K_j$ .
- (iv) Für alle Elemente gilt  $\text{diam}(K_i) \leq h$ .

**Bemerkung 3.3.2.** In dieser Arbeit ist das Referenzelement immer das Einheits- $n$ -Simplex, d.h. die konvexe Hülle der  $n+1$  Vektoren  $0, e_1, e_2, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$ . Im Fall  $n = 2$  sind die Elemente einer Triangulation also Dreiecke, im Fall  $n = 3$  Tetraeder.

**Definition 3.3.3.** Sei  $\{\mathcal{T}_h\}$  eine durch  $h > 0$  parametrisierte Familie von zulässigen Triangulationen des Gebietes  $\Omega$ . Ist  $K$  ein Element einer dieser Triangulationen, so werden die Radien der maximalen  $K$  eingeschriebenen Kugel, bzw. der minimalen Kugel in der  $K$  enthalten ist, mit  $\rho_K$  bzw.  $h_K$  bezeichnet.

Die Familie  $\{\mathcal{T}_h\}$  heißt **quasiuniform**, falls es gleichmäßig für  $0 < h \leq h_0$  eine Konstante  $\kappa > 0$  mit

$$\frac{h_K}{\rho_K} \leq \kappa$$

für alle Elemente  $K$  der Zerlegung  $\mathcal{T}$  gibt. Die Familie  $\{\mathcal{T}_h\}$  heißt **uniform**, wenn es gleichmäßig für  $0 < h \leq h_0$  eine Konstanten  $0 < \kappa$  gibt, so daß

$$\frac{h}{\rho_K} \leq \kappa.$$

### Finite-Elemente-Räume

Sei  $\mathcal{T}_h$  eine Triangulation von  $\Omega$  und  $K$  ein Elemente aus  $\mathcal{T}_h$ . Mit  $\mathbb{P}_m(K)$  wird die Menge der Polynome vom Höchstgrad  $m \in \mathbb{N}$  auf  $K$  bezeichnet. Die in dieser Arbeit verwendeten Finite-Elemente-Räume sind für  $k \geq 1$

$$\mathcal{M}^k(\mathcal{T}_h) := \{v_h \in C^0(\overline{\Omega}) \mid v_h|_K \in \mathbb{P}_k(K) \ \forall K \in \mathcal{T}_h\}.$$

**Satz 3.3.4.** Es ist  $\mathcal{M}^k(\mathcal{T}_h) \subset H^1(\Omega)$ .

**Beweis.** Vgl. [QuVa97], Proposition 3.2.1. □

### Approximationssätze

**Satz 3.3.5.** Sei  $\mathcal{T}_h$  eine quasiuniforme Familie von Triangulationen des polyedrischen Gebiets  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  und seien  $k, s \in \mathbb{N}$  mit  $l := \min(k, s - 1) \geq 1$ . Dann gibt es einen linearen Operator  $I_{s,h}^k : H^s(\Omega) \rightarrow \mathcal{M}^k(\mathcal{T}_h)$  und eine Konstante  $C > 0$  derart, daß

$$|u - I_{s,h}^k u|_m \leq Ch^{l+1-m} |u|_{l+1}, \quad (0 \leq m \leq 1). \quad (3.18)$$

**Beweis.** Vgl. [QuVa97] Theorem 3.4.2. □

**Bemerkung 3.3.6.** Damit die Halbnorm  $|u - I_{s,h}^k u|_m$  Sinn macht, muß die Inklusion  $\mathcal{M}^k(\mathcal{T}_h) \subset H^m(\Omega)$  gelten. Diese wird durch die Einschränkung  $m \leq 1$  gesichert.

Der Operator  $I_{s,h}^k$  wird in [QuVa97] als Interpolationsoperator konstruiert. Daher sind laut Einbettungssatz 1.1.23 die Einschränkungen  $s \geq 2$  und  $n \leq 3$  nötig, um die Einbettung  $H^s(\Omega) \subset C^0(\Omega)$  zu gewährleisten. Der folgende Satz von Clément schafft Abhilfe, wenn man Funktionen approximieren möchte, die nur aus  $H^1(\Omega)$  sind.

**Satz 3.3.7 (Clément).** Sei  $\mathcal{T}_h$  eine quasiuniforme Familie von Triangulationen des polyedrischen Gebiets  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  und  $k \geq 1$ . Dann gibt es einen beschränkten linearen Operator  $P_{1,h}^k : H^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{M}^k(\mathcal{T}_h)$  und eine Konstante  $C_C > 0$  mit

$$\left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^{-2} \|v - P_{1,h}^k v\|_{1,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq C_{Cl} \|v\|_1. \quad (3.19)$$

**Beweis.** Vgl. [GiRa86], Theorem A.4. □

### Inverse Ungleichungen

Die inversen Ungleichungen (3.20) und (3.21) beschreiben die Beziehung verschiedener Normen *auf einem Finite-Elemente-Raum*.

**Satz 3.3.8 (Inverse Ungleichungen).** Sei  $\mathcal{T}_h$  eine quasiuniforme Familie von Triangulationen. Es existieren von  $h$  unabhängige positive Konstanten  $C_{I_1}$  und  $C_{I_2}$  derart, daß

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\Delta v_h\|_{0,K}^2 \leq C_{I_1} \|\nabla v_h\|_0^2 \quad \forall v_h \in \mathcal{M}^k(\mathcal{T}_h) \quad (3.20)$$

und

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\nabla q_h\|_{0,K}^2 \leq C_{I_2} \|q_h\|_0^2 \quad \forall q_h \in \mathcal{M}^k(\mathcal{T}_h). \quad (3.21)$$

**Beweis.** Vgl. Theorem 4.5.11 in [BrSc94]. □

**Bemerkung 3.3.9.** Die Approximationssätze und inversen Ungleichungen machen Aussagen über skalare Funktionen. Die Aussagen lassen sich durch Aufaddieren der einzelnen Komponenten der Ungleichungen unmittelbar auf vektorwertige Finite-Elemente-Räume  $[\mathcal{M}^k(\mathcal{T}_h)]^n \subset [H^1(\Omega)]^n$  übertragen. Die Bezeichnungen der Konstanten in den Abschätzungen ( $C_{I_1}, C_{CI}$  usw.) werden im vektorwertigen Fall beibehalten.

**Bemerkung 3.3.10.** In den Kapiteln 4 und 5 werden Finite-Elemente-Methoden vorgestellt, deren Lösbarkeit und Konvergenz mit Hilfe der Approximationssätze und inversen Ungleichungen aus diesem Abschnitt bewiesen werden. Daher ist im folgenden mit einer Familie von Finite-Elemente-Räumen stets eine Familie von Räumen gemeint, die auf einer quasiuniformen Familie von Triangulationen basiert.

**Notation.** Der Finite-Elemente-Raum  $\mathcal{M}^k(\mathcal{T}_h)$  wird auch als  $P_k$ -Element bezeichnet. Im Fall  $k = 1$  spricht man auch von linearen Elementen. Der Finite-Elemente-Raum  $[\mathcal{M}^k(\mathcal{T}_h) \cap H_0^1(\Omega)]^n$  wird im folgenden mit  $X_h^k$  bezeichnet. Falls im Zusammenhang die Ordnung der Elemente keine Rolle spielt, schreibt man auch kurz  $X_h$ . Der Finite-Elemente-Raum  $\mathcal{M}^l(\mathcal{T}_h) \cap L_0^2(\Omega)$  wird mit  $Q_h^l$  abgekürzt bzw. mit  $Q_h$ , wenn die Ordnung keine Rolle spielt.

## Kapitel 4

# Finite-Elemente-Methoden für die Stokes-Gleichungen

In diesem Kapitel werden Finite-Elemente-Methoden für die Stokes-Gleichungen

$$\begin{aligned} -\Delta u + \nabla p &= f && \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div} u &= 0 && \text{in } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} &= 0 \end{aligned}$$

vorgelegt. Zur Vereinfachung werden homogene Dirichlet-Randbedingungen angenommen. Die Stokes-Gleichungen sind ein Spezialfall der Oseen-Gleichungen (2.1). Aus der Variationsformulierung der Oseen-Gleichungen (2.4) ergibt sich mit  $X = [H_0^1(\Omega)]^n$  und  $Q = L_0^2(\Omega)$  eine Variationsformulierung der Stokes-Gleichungen:

$$\begin{aligned} \text{„Finde } (u, p) \in X \times Q \text{ derart, daß} \\ (\nabla u, \nabla v) - (\operatorname{div} v, p) &= \langle F, v \rangle_X \quad \forall v \in X, \\ (\operatorname{div} u, q) &= 0 \quad \forall q \in Q. \text{“} \end{aligned} \tag{4.1}$$

In Abschnitt 4.1 wird die „natürliche“ Diskretisierung der Stokes-Gleichungen durch die gemischte Finite-Elemente-Methode (3.8) dargestellt. Das Hauptproblem bei der numerischen Lösung der Stokes-Gleichungen mit Finite-Elemente-Methoden ist eine stabile Approximation des Drucks. Die Babuška-Brezzi-Bedingung ist eine Kompatibilitätsbedingung an das Paar von Finite-Elemente-Räumen zur Approximation des Geschwindigkeitsfelds und des Drucks. Die Bedeutung der Babuška-Brezzi-Bedingung für die Approximation des Drucks wird hervorgehoben und die Babuška-Brezzi-stabilen Taylor-Hood-Elemente werden vorgestellt.

Der Abschnitt 4.2 führt in die *stabilisierten* Finite-Elemente-Methoden ein. Durch einen Trick erlauben stabilisierte Verfahren eine Umgehung der Babuška-Brezzi-Bedingung. Als Anwendung wird eine stabilisierte Finite-Elemente-Methode für die Stokes-Gleichungen nach [FrHuSt93] vorgestellt. Diese Methode

funktioniert für eine große Zahl von Kombinationen von Finite-Elemente-Räumen. So auch für einige Paare, die nicht Babuška-Brezzi-stabil sind. Das Interesse an diesen Verfahren liegt darin begründet, daß einige besonders einfache Kombinationen von Finite-Elemente-Räumen nicht Babuška-Brezzi-stabil sind.

In der neueren Literatur werden Diskretisierungen mit Paaren von Babuška-Brezzi-stabilen Finite-Elemente-Räumen gegenüber den stabilisierten Finite-Elemente-Methoden favorisiert. Außerdem beschäftigt man sich verstärkt mit Verfahren hoher Ordnung. In Abschnitt 4.3 wird anhand numerischer Experimente geprüft, ob diese Präferenz gerechtfertigt ist.

## 4.1 Taylor-Hood-Elemente

Die natürliche Diskretisierung der Stokes-Gleichungen basiert auf der gemischte Finite-Elemente-Methode (3.8). Man wählt Finite-Elemente-Räume  $X_h^l \subset X$  und  $Q_h^k \subset Q$  und bestimmt eine Lösung der gemischten Finite-Elemente-Methode

$$\begin{aligned} \text{„Finde } (u_h, p_h) \in X_h^l \times Q_h^k \text{ derart, daß} \\ (\nabla u_h, \nabla v_h) - (\operatorname{div} v_h, p_h) = \langle F, v_h \rangle_X \quad \forall v_h \in X_h, \\ (\operatorname{div} u_h, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in Q_h. \text{“} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Sie hat eine eindeutige Lösung, wenn die beiden Voraussetzungen von Satz 3.2.3 erfüllt sind. Die erste Voraussetzung (3.11a) ist die Elliptizität der Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  auf dem Raum  $V_h \subset X$ . Diese ist offenbar erfüllt, da  $a(\cdot, \cdot)$  auf dem vollen Raum  $X$  elliptisch ist.

Entscheidend ist die Babuška-Brezzi-Bedingung (3.11b). Sie ist eine Kompatibilitätsbedingung an das Paar von Finite-Elemente-Räumen  $X_h^l$  und  $Q_h^k$ .

**Definition 4.1.1.** Ein Paar von Familien von Finite-Elemente-Räumen  $X_h^l$  und  $Q_h^k$  heißt **Babuška-Brezzi-stabil**, wenn die Babuška-Brezzi-Bedingung

$$\sup_{v_h \in X_h^l \setminus \{0\}} \frac{b(v_h, q_h)}{\|v_h\|_X} \geq \beta \|q_h\|_Q \quad \forall q_h \in Q_h^k.$$

mit einer von  $h$  unabhängigen Konstanten  $\beta > 0$  erfüllt ist.

Im Falle der Stokes- bzw. Oseen-Gleichungen hat die diskrete Babuška-Brezzi-Bedingung die Form

$$\sup_{v_h \in X_h^l \setminus \{0\}} \frac{(\operatorname{div} v_h, q_h)}{\|v_h\|_X} \geq \beta \|q_h\|_Q \quad \forall q_h \in Q_h^k.$$

Ein Paar  $X_h^l$  und  $Q_h^k$ , das diese spezielle Bedingung erfüllt, heißt daher auch **divergenzstabil**. Die gängigsten divergenzstabilen Elemente sind die Taylor-Hood-Elemente:

**Satz 4.1.2.** Sei  $k \in \mathbb{N}$ . Das Paar von Familien von Finite-Elemente-Räumen  $X_h^{k+1}$  und  $Q_h^k$  heißt **Taylor-Hood-Element**  $k$ -ter Ordnung und ist divergenzstabil.

**Beweis.** Vgl. [BrFo91], Abschnitt VI.6. □

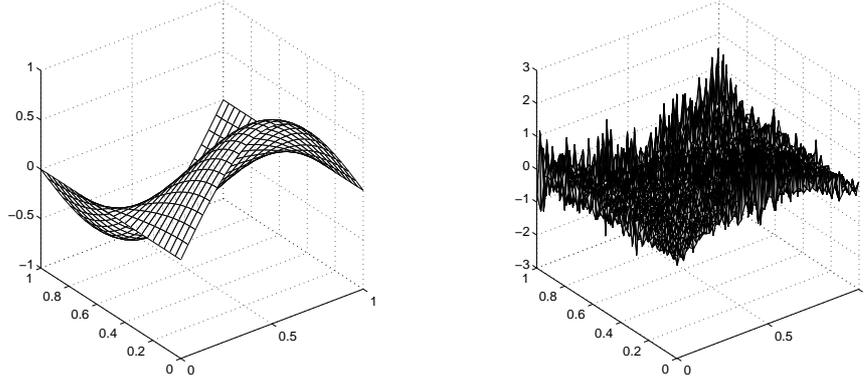


Abbildung 4.1: (a) exakte Lösung des Drucks, (b) der Druck bei einer instabilen Diskretisierung mit dem  $P_1$ - $P_1$ -Element

**Bemerkung 4.1.3.** Das Paar von Finite-Elemente-Räumen  $X_h^l$  und  $Q_h^k$  wird auch  $P_l$ - $P_k$ -Element genannt.  $P_{k+1}$ - $P_k$ -Elemente sind für  $k \geq 1$  also divergenzstabil. Einige besonders naheliegende Kombinationen, wie z.B. die  $P_k$ - $P_k$ -Elemente (sog. equal-order-Elemente), sind nicht divergenzstabil.

Aus Satz 4.1.2 folgt die Lösbarkeit und die Konvergenz der gemischten Finite-Elemente-Methode (4.2) für die Stokes-Gleichungen bei Verwendung von Taylor-Hood-Elementen:

**Satz 4.1.4.** Sei  $k \in \mathbb{N}$ . Die gemischte Finite-Elemente-Methode (4.2) hat für  $l = k + 1$  genau eine Lösung in  $(u_h, p_h) \in X_h^l \times Q_h^k$ . Sei  $(u, p) \in X \times Q$  die eindeutige schwache Lösung der Stokes-Gleichungen mit den zusätzlichen Regularitätsforderungen  $u \in [H^{k+1}(\Omega)]^n$  und  $p \in H^k(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$ . Dann gelten mit positiven Konstanten  $C_1, C_2$  die Fehlerabschätzungen

$$\|u - u_h\|_X \leq C_1 h^{k+1} (\|u\|_{k+1} + \|p\|_k), \quad (4.3)$$

$$\|p - p_h\|_Q \leq C_2 h^{k+1} (\|u\|_{k+1} + \|p\|_k). \quad (4.4)$$

**Beweis.** Die Lösbarkeit wurde durch Überprüfung der Voraussetzungen von Satz 3.2.3 bereits bewiesen.

Mit der Fehlerabschätzung (3.12) und dem Approximationssatz 3.3.5 folgt für

eine genügend große positive Konstante  $C_1$

$$\begin{aligned} |u - u_h|_1 &\leq C_1 \left( \inf_{v_h \in X_h \setminus \{0\}} |u - v_h|_1 + \inf_{q_h \in Q_h \setminus \{0\}} \|p - q_h\|_0 \right) \\ &\leq C_1 \left( |u - I_{k+1,h}^{k+1} u|_1 + \|p - I_{k,h}^k p\|_0 \right) \\ &\leq C_1 h^{k+1} (\|u\|_{k+1} + \|p\|_k) \end{aligned}$$

Analog folgt die Abschätzung für  $\|p - p_h\|_0$  aus der Fehlerabschätzung (3.13).  $\square$

**Bemerkung 4.1.5.** In den 60er Jahren haben Ingenieure versucht, die Stokes-Gleichungen mit dem  $P_1$ - $P_1$ -Element zu diskretisieren. Dabei stellte man fest, daß diese Verfahren die Geschwindigkeit gut approximieren, die Näherungslösung für den Druck aber stark oszilliert, was physikalisch keinen Sinn macht. In Abbildung 4.1 ist links die exakte Lösung des Drucks des Testbeispiels Nr. 1 aus Abschnitt 4.3 zu sehen, rechts die Approximation des Drucks der instabilen  $P_1$ - $P_1$ -Diskretisierung. Dieses Verhalten läßt sich nun erklären:

Das Geschwindigkeitsfeld wird mit der  $P_1$ - $P_1$ -Diskretisierung nach Satz 3.2.2 stabil bestimmt. Das  $P_1$ - $P_1$ -Element ist aber nicht divergenzstabil. D.h. die Voraussetzungen von Satz 3.2.3, die die stabile Bestimmung einer Näherungslösung des Drucks zu diesem Geschwindigkeitsfeld garantieren, sind nicht erfüllt.

**Bemerkung 4.1.6.** Aus der Fehlerabschätzung (4.3) folgt

$$\|u - u_h\|_0 \leq C_F |u - u_h|_1 \leq Ch^{k+1} (\|u\|_{k+1} + \|p\|_k).$$

Mit dem sog. Dualitätstrick von Aubin und Nitsche kann man diese Abschätzung verschärfen zu

$$\|u - u_h\|_0 \leq Ch^{k+2} (\|u\|_{k+1} + \|p\|_k). \quad (4.5)$$

Vgl. hierzu [GiRa86], Theorem II.1.9.

## 4.2 Ein Galerkin - Least - Squares-Verfahren für die Stokes-Gleichungen

In diesem Abschnitt wird eine *stabilisierte* Finite-Elemente-Methode für die Stokes-Gleichungen nach [FrHuSt93] dargestellt. Dieses Verfahren umgeht die Babuška-Brezzi-Bedingung und approximiert auch bei Verwendung beliebiger  $P_l$ - $P_k$ -Elemente den Druck stabil. Insbesondere ermöglicht das Verfahren eine stabile Diskretisierung der Stokes-Gleichungen mit dem wichtigen  $P_1$ - $P_1$ -Element. Anhand dieses stabilisierten Verfahrens wird ein allgemeines Prinzip zur Konstruktion *konsistenter* stabilisierter Finite-Elemente-Methoden erläutert. Die Konsistenz ist der Schlüssel zum Beweis optimaler Fehlerabschätzungen. Die Darstellung stabilisierter Finite-Elemente-Methoden dieser Bauart (in diesem Abschnitt und in Kapitel 5) bedient sich der vereinheitlichenden Notation aus [Lub91].

Nun wird der Trick zur Umgehung der Babuška-Brezzi-Bedingung vorgeführt: Man definiert auf dem Produktraum  $(X \times Q) \times (X \times Q)$  die Bilinearform  $B_G(\cdot, \cdot)$  und das lineare Funktional  $F_G(\cdot)$  auf  $X \times Q$  durch

$$\begin{aligned} B_G(u, p; v, q) &:= (\nabla u, \nabla v) - (\operatorname{div} v, p) + (\operatorname{div} u, q), \\ F_G(v, q) &:= (f, q). \end{aligned}$$

Die Variationsformulierung der Stokes-Gleichungen (4.1) ist äquivalent zu der Variationsaufgabe

$$\begin{aligned} \text{„Finde } (u, p) \in X \times Q \text{ derart, daß} \\ B_G(u, p; v, q) = F_G(v, q) \quad \forall (v, q) \in X \times Q. \text{“} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Denn ist  $(u, p) \in X \times Q$  eine Lösung der Variationsformulierung (4.1), so folgt durch Addition der zwei Gleichungen, daß  $(u, p)$  auch Lösung von (4.6) ist.

Ist umgekehrt  $(u, p)$  Lösung von (4.6), so sieht man durch Einsetzen von Testfunktionen der Form  $(v, 0)$  bzw.  $(0, q)$  aus  $X \times Q$ , daß für  $(u, p)$  beide Gleichungen (4.1) erfüllt sind.

## Galerkin-Verfahren

Die Finite-Elemente-Methode

$$\begin{aligned} \text{„Finde } (u_h, p_h) \in X_h \times Q_h \text{ derart, daß} \\ B_G(u_h, p_h; v_h, q_h) = F(v_h, q_h) \quad \forall (v_h, q_h) \in X_h \times Q_h. \text{“} \end{aligned}$$

ist ein Galerkin-Verfahren (3.2) für die Variationsformulierung der Stokes-Gleichungen (4.6). Dieses Verfahren approximiert den Druck nicht verlässlich, wenn das Paar von Finite-Elemente-Räumen  $X_h$  und  $Q_h$  nicht divergenstabil ist (vgl. Bemerkung 4.1.3).

Der Differentialoperator  $\mathcal{L}$  auf  $X \times Q$  sei durch

$$\mathcal{L}(u, p) := -\Delta u + \nabla p$$

definiert und die Testfunktionen  $\psi(v, q)$  seien aus  $L^2(\Omega)$ . Ist  $(u, p) \in X \times Q$  die schwache Lösung der Stokes-Gleichungen, so gilt  $\mathcal{L}(u, p) = f$  in  $L^2(\Omega)$ , falls  $u$  und  $p$  hinreichend glatt sind. Dann gilt die Identität

$$B_G(u, p; v, q) + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\mathcal{L}(u, p) - f, \psi(v, q))_K = F_G(v, q) \quad \forall (v, q) \in X \times Q. \quad (4.7)$$

### Stabilisierte Finite-Elemente-Methoden

Motiviert durch die Identität (4.7) modifiziert man die Bilinearform  $B_G(\cdot, \cdot)$  und das Funktional  $F_G(\cdot)$  folgendermaßen:

$$B_{SG}(u, p; v, q) := B_G(u, p; v, q) + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\mathcal{L}(u, p), \psi(v, q))_K,$$

$$F_{SG}(v, q) := F_G(v, q) + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (f, \psi(v, q))_K.$$

Es gilt nun, die Testfunktionen  $\psi(\cdot, \cdot)$  geschickt zu wählen, um Lösbarkeit und Konvergenz der **stabilisierten Finite-Elemente-Methode**

$$\text{„Finde } (u_h, p_h) \in X_h \times Q_h \text{ derart, daß} \tag{4.8}$$

$$B_{SG}(u_h, p_h; v_h, q_h) = F_{SG}(v_h, q_h) \quad \forall (v_h, q_h) \in X_h \times Q_h.\text{“}$$

zu erreichen. Im Falle der Stokes-Gleichungen müssen die zusätzlichen Terme den Druck stabilisieren. Das Verfahren (4.8) fügt sich in den Rahmen der verallgemeinerten Galerkin-Verfahren (3.3) ein. Aufgrund der Identität (4.7) ist es unter zusätzlichen Regularitätsvoraussetzungen an die exakte Lösung konsistent.

**Bemerkung 4.2.1.** Das Konstruktionsprinzip des Verfahrens (4.8) läßt sich auf Verfahren für andere partielle Differentialgleichungen übertragen, denn es werden keine Annahmen über den Differentialoperator  $\mathcal{L}$  gemacht. Stabilisierte Verfahren für die Oseen-Gleichungen, die diesem Muster folgen, werden in Kapitel 5 vorgestellt.

### Galerkin-Least-Squares-Verfahren

Das Verfahren (4.8) mit Testfunktionen

$$\psi(v_h, q_h)|_K := \vartheta h_K^2 \mathcal{L}(v_h, q_h) = \vartheta h_K^2 (-\Delta v_h + \nabla q_h) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \tag{4.9}$$

heißt **Galerkin-Least-Squares-Verfahren** (kurz GLS-Verfahren). Dabei ist  $\vartheta$  ein positiver Stabilisierungsparameter. Das Galerkin-Least-Squares-Verfahren

$$\text{„Finde } (u_h, p_h) \in X_h \times Q_h \text{ derart, daß} \tag{4.10}$$

$$B_{GLS}(u_h, p_h; v_h, q_h) = F_{GLS}(v_h, q_h) \quad \forall (v_h, q_h) \in X_h \times Q_h.\text{“}$$

mit

$$B_{GLS}(u, p; v, q) := B_G(u, p; v, q) + \vartheta \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 (-\Delta u + \nabla p, -\Delta v + \nabla q)_K,$$

$$F_{GLS}(v, q) := F_G(v, q) + \vartheta \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 (f, -\Delta v + \nabla q)_K$$

wird nun ausführlich dargestellt. Das weitere Vorgehen wird durch Satz 3.1.2 über verallgemeinerte Galerkin-Verfahren geleitet:

Zuerst wird bewiesen, daß die Bilinearform  $B_{GLS}(\cdot, \cdot)$  auf dem Finite-Elemente-Raum  $X_h \times Q_h$  die diskrete Babuška-Bedingung (3.4) erfüllt. Mit Satz 3.1.2 folgt sofort, daß das Verfahren eine eindeutige Lösung besitzt. Dann wird die Stetigkeit der Bilinearform  $B_{GLS}(\cdot, \cdot)$  bewiesen. Wegen der Konsistenz folgt mit Satz 3.1.2 eine Fehlerabschätzung des Verfahrens.

**Bemerkung 4.2.2.** Der Nachweis der diskreten Babuška-Bedingung und der Stetigkeit der Bilinearform  $B_{GLS}(\cdot, \cdot)$  auf  $X_h \times Q_h$  erfolgt bzgl. einer **gitter-abhängigen Norm**:

Mit der inversen Ungleichung (3.21) und der Ungleichung von Poincaré folgt, daß durch

$$\|(u_h, p_h)\|_{GLS}^2 := |u_h|_1^2 + \|p_h\|_0^2 + \vartheta \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\nabla p_h\|_0^2 \quad (4.11)$$

eine Norm auf dem Finite-Elemente-Raum(!)  $X_h \times Q_h$  gegeben ist, die zu der Norm

$$\|u_h\|_X + \|p_h\|_Q$$

äquivalent ist.

### Lösbarkeit des GLS-Verfahrens

**Satz 4.2.3.** Es existiert eine von  $h$  unabhängige positive Konstante  $\beta$  derart, daß die Bilinearform  $B_{GLS}(\cdot, \cdot)$  auf dem Produktraum  $X_h \times Q_h$  die diskrete Babuska-Bedingung

$$\sup_{0 \neq (v_h, q_h) \in X_h \times Q_h} \frac{B_{GLS}(u_h, p_h; v_h, q_h)}{\|(v_h, q_h)\|_{GLS}} \geq \beta \|(u_h, p_h)\|_{GLS} \quad \forall (u_h, p_h) \in X_h \times Q_h$$

erfüllt. Es existiert eine eindeutige Lösung der Finite-Elemente-Methode (4.10).

Zum Beweis dieses Satzes wird das folgende Lemma benötigt. Es besagt, welche „Strafe“ bei der Divergenzstabilität gezahlt werden muß, wenn man zur Approximation von Geschwindigkeit und Druck Kombinationen von Finite-Elemente-Räumen heranzieht, die die Babuška-Brezzi-Bedingung (3.11b) verletzen.

**Lemma 4.2.4 (Verfürth).** Es existieren positive Konstanten  $C_{V_1}$  und  $C_{V_2}$  derart, daß für alle  $p_h \in Q_h^l$  gilt

$$\sup_{X_h^k \setminus \{0\}} \frac{(\operatorname{div} v_h, p_h)}{|v_h|_1} \geq C_{V_1} \|p_h\|_0 - C_{V_2} \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\nabla p_h\|_{0,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.12)$$

**Beweis.** Sei  $p_h \in Q_h^l$  beliebig. Es wird zu  $p_h$  ein  $v_h \in X_h^k$  derart konstruiert, daß  $(\operatorname{div} v_h, p_h) |v_h|_1^{-1}$  größer oder gleich der rechten Seite von Ungleichung (4.12) ist. Dann bleibt die Ungleichung sicher erhalten, wenn man das Supremum über

alle Elemente aus  $X_h^k \setminus \{0\}$  bildet. Wegen der kontinuierlichen inf-sup-Bedingung (2.20) existiert ein  $w \in X$  derart, daß

$$(\operatorname{div} w, p_h) \geq \beta \|p_h\|_0 |w|_1. \quad (4.13)$$

Sei  $P_{1,h}^k$  der Clément-Operator aus Satz 3.3.7. Es gilt

$$\left( \operatorname{div} P_{1,h}^k w, p_h \right) = \left( \operatorname{div} (P_{1,h}^k w - w), p_h \right) + (\operatorname{div} w, p_h)$$

(Mit partieller Integration, vgl. Satz 1.2.3.)

$$\begin{aligned} &= \left( w - P_{1,h}^k w, \nabla p_h \right) + (\operatorname{div} w, p_h) \\ &\geq - \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^{-2} \|w - P_{1,h}^k w\|_{0,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\nabla p_h\|_{0,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \beta \|p_h\|_0 |w|_1 \\ &\geq -C_{Cl} \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\nabla p_h\|_{0,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}} |w|_1 + \beta \|p_h\|_0 |w|_1. \end{aligned}$$

Division durch  $|w|_1$  und die Beschränktheit des Operators  $P_{1,h}^k$  liefern mit geeigneten positiven Konstanten  $C_{V_1}$  und  $C_{V_2}$

$$\frac{(\operatorname{div} P_{1,h}^k w, p_h)}{\|P_{1,h}^k w\|_1} \geq C_{V_1} \|p_h\|_0 - C_{V_2} \left( \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\nabla p_h\|_{0,K}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

D.h. mit  $v_h := P_{1,h}^k w \in X_h^k$  wird das Supremum in (4.12) erreicht.  $\square$

Nun zum Beweis von Satz 4.2.3:

**Beweis.** Definiere zur Abkürzung

$$\sum (\cdot) := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\cdot\|_{0,K}^2 \quad \text{und} \quad \sum (\cdot, \cdot) := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 (\cdot, \cdot)_{0,K}^2.$$

In dieser Kurzschreibweise gilt

$$\left| \sum (x, y) \right| \leq \left( \sum (x) \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum (y) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Sei  $(u_h, p_h) \in X_h \times Q_h$  beliebig. Zu  $(u_h, p_h)$  wird ein  $(v_h, q_h) \in X_h \times Q_h$  derart konstruiert, daß

$$B_{GLS}(u_h, p_h; v_h, q_h) \geq \beta \| (u_h, p_h) \|_{GLS} \| (v_h, q_h) \|_{GLS}.$$

Dann ist auch Bedingung (4.12) erfüllt. Die Konstruktion erfolgt in drei Schritten.

1. Teste die Elliptizität von  $B_{GLS}(\cdot, \cdot)$ .

$$\begin{aligned} &B_{GLS}(u_h, p_h; u_h, p_h) \\ &= |u_h|_1^2 + \vartheta \sum (\Delta u_h) + \vartheta \sum (\nabla p_h) - 2\vartheta \sum (\Delta u_h, \nabla p_h) \\ &\geq |u_h|_1^2 + \vartheta \sum (\Delta u_h) + \vartheta \sum (\nabla p_h) - 2\vartheta \left( \sum (\Delta u_h) \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum (\nabla p_h) \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

(Youngsche Ungleichung.)

$$\begin{aligned} &\geq |u_h|_1^2 + \vartheta \sum (\Delta u_h) + \vartheta \sum (\nabla p_h) - \vartheta \varepsilon_1 \sum (\Delta u_h) - \frac{\vartheta}{\varepsilon_1} \sum (\nabla p_h) \\ &= |u_h|_1^2 + \vartheta(1 - \varepsilon_1) \sum (\Delta u_h) + \vartheta \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_1}\right) \sum (\nabla p_h) \end{aligned}$$

(Inverse Ungleichung (3.20))

$$\geq \left(1 + \frac{\vartheta(1 - \varepsilon_1)}{C_{I_1}}\right) |u_h|_1^2 + \vartheta \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_1}\right) \sum (\nabla p_h)$$

(Wähle  $1 < \varepsilon_1 < 1 + \frac{C_{I_1}}{\vartheta}$  und geeignete positive Konstanten  $C_1, C_2$ .)

$$\geq C_1 |u_h|_1^2 + C_2 \sum (\nabla p_h).$$

2. Schritt: Wähle ein  $w_h \in X_h$  derart, daß das Supremum in Ungleichung (4.12) erreicht wird und skaliere es auf  $|w_h|_1 = \|p_h\|_0$ . Dann gilt

$$\begin{aligned} &B_{GLS}(u_h, p_h; -w_h, 0) \\ &= -(\nabla u_h, \nabla w_h) + (\operatorname{div} w_h, p_h) - \vartheta \sum (\Delta u_h, \Delta w_h) + \vartheta \sum (\Delta w_h, \nabla p_h) \end{aligned}$$

(Lemma 4.2.4)

$$\begin{aligned} &\geq -\|\nabla u_h\|_0 \|\nabla w_h\|_0 + \left(C_{V_1} \|p_h\|_0 - C_{V_2} \left(\sum (\nabla p_h)\right)^{\frac{1}{2}}\right) |w_h|_1 \\ &\quad - \vartheta \left(\sum (\Delta u_h)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum (\Delta w_h)\right)^{\frac{1}{2}} - \vartheta \left(\sum (\Delta w_h)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum (\nabla p_h)\right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

(Inverse Ungleichung (3.20))

$$\begin{aligned} &\geq -|u_h|_1 |w_h|_1 + C_{V_1} \|p_h\|_0 |w_h|_1 - C_{V_2} \left(\sum (\nabla p_h)\right)^{\frac{1}{2}} |w_h|_1 \\ &\quad - \frac{\vartheta}{C_{I_1}} |u_h|_1 |w_h|_1 - \frac{\vartheta}{\sqrt{C_{I_1}}} \left(\sum (\nabla p_h)\right)^{\frac{1}{2}} |w_h|_1 \end{aligned}$$

(Mit  $\|p_h\|_0 = |w_h|_1$  zusammenfassen.)

$$\begin{aligned} &\geq -\left(1 + \frac{\vartheta}{C_{I_1}}\right) |u_h|_1 \|p_h\|_0 + C_{V_1} \|p_h\|_0^2 \\ &\quad - \left(C_{V_2} + \frac{\vartheta}{\sqrt{C_{I_1}}}\right) \left(\sum (\nabla p_h)\right)^{\frac{1}{2}} \|p_h\|_0 \end{aligned}$$

(Zweimal Youngsche Ungleichung anwenden.)

$$\begin{aligned} &\geq -\left(1 + \frac{\vartheta}{C_{I_1}}\right) \frac{1}{2\varepsilon_2} |u_h|_1^2 - \left(1 + \frac{\vartheta}{C_{I_1}}\right) \frac{\varepsilon_2}{2} \|p_h\|_0^2 + C_{V_1} \|p_h\|_0^2 \\ &\quad - \left(C_{V_2} + \frac{\vartheta}{\sqrt{C_{I_1}}}\right) \frac{1}{2\varepsilon_2} \sum (\nabla p_h) - \left(C_{V_2} + \frac{\vartheta}{\sqrt{C_{I_1}}}\right) \frac{\varepsilon_2}{2} \|p_h\|_0^2 \end{aligned}$$

(Wähle  $0 < \varepsilon_2 < \frac{2C_{V_1}C_{T_1}}{C_{T_1}(1+C_{V_2})+\vartheta(1+\sqrt{C_{T_1}})}$  und geeignete positive Konstanten  $C_3, C_4, C_5$ .)

$$\geq -C_3 |u_h|_1^2 + C_4 \|p_h\|_0^2 - C_5 \sum (\nabla p_h).$$

3. Schritt: Man definiere  $(v_h, q_h) := (u_h - \delta w_h, p_h)$  für ein  $\delta > 0$ . Es gilt

$$\begin{aligned} \|(v_h, q_h)\|_{GLS} &\leq \|(u_h, p_h)\|_{GLS} + \delta \|(w_h, 0)\|_{GLS} = \|(u_h, p_h)\|_{GLS} + \delta |w_h|_1 \\ &= \|(u_h, p_h)\|_{GLS} + \delta \|p_h\|_0 \leq (1 + \delta) \|(u_h, p_h)\|_{GLS}. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Unter Verwendung der Ergebnisse aus Schritt 1 und 2 folgt

$$\begin{aligned} B_{GLS}(u_h, p_h; v_h, q_h) &= B_{GLS}(u_h, p_h; u_h, p_h) + \delta B_{GLS}(u_h, p_h; -w_h, 0) \\ &\geq (C_1 - \delta C_3) |u_h|_1^2 + \delta C_4 \|p_h\|_0^2 + (C_2 - \delta C_5) \sum (\nabla p_h) \end{aligned}$$

(Wähle  $0 < \delta < \min(\frac{C_1}{C_3}, \frac{C_2}{C_5})$  und ein geeignetes  $C_6 > 0$ . Wende (4.14) an.)

$$\geq C_6 \|(u_h, p_h)\|_{GLS}^2 \geq C_6 (1 + \delta) \|(u_h, p_h)\|_{GLS} \|(v_h, q_h)\|_{GLS}$$

□

## Konvergenz des GLS-Verfahrens

In Satz 4.2.6 wird die Stetigkeit der Bilinearform  $B_{GLS}(\cdot, \cdot)$  bewiesen. Aus Satz 3.1.2 folgt dann für das GLS-Verfahren (4.10) die abstrakte Fehlerabschätzung

$$\|(u - u_h, p - p_h)\|_{GLS} \leq C \inf_{(v_h, q_h) \in X_h \times Q_h} \|(u - v_h, p - q_h)\|_{GLS}$$

mit einer positiven Konstanten  $C$ . Aus der Äquivalenz der gitterabhängigen Norm  $\|\cdot\|_{GLS}$  mit der Standardnorm des Produktraums  $X_h \times Q_h$  folgt in Verbindung mit dem Approximationssatz 3.3.5 für Finite-Elemente-Räume:

**Satz 4.2.5.** Sei  $(u_h, p_h) \in X_h^{k+1} \times Q_h^l$  eine Lösung der stabilisierten Finite-Elemente-Methode (4.10). Dann gilt unter den zusätzlichen Regularitätsforderungen  $u \in [H_0^{k+1}(\Omega)]^n$  und  $p \in H^l(\Omega) \cap L_0^2(\Omega)$  an die exakte Lösung  $(u, p) \in X \times Q$  die Fehlerabschätzung

$$\|u - u_h\|_X + \|p - p_h\|_Q \leq C(h^{k+1} |u|_{k+1} + h^l |p|_{l+1}) \quad (4.15)$$

Abschließend wird der Beweis der Stetigkeit der Bilinearform  $B_{GLS}(\cdot, \cdot)$  nachgeliefert:

**Satz 4.2.6.** Die Bilinearform  $B_{GLS}(\cdot, \cdot)$  ist auf dem Produktraum  $(X_h \times Q_h) \times (X_h \times Q_h)$  stetig.

**Beweis.** Seien  $(u_h, p_h), (v_h, q_h) \in X_h \times Q_h$ . Es gilt

$$|B_{GLS}(u_h, p_h; v_h, q_h)|$$

(Definition und Dreiecksungleichung.)

$$\begin{aligned} &\leq |(\nabla u_h, \nabla v_h)| + |(\operatorname{div} u_h, q_h)| + |(\operatorname{div} v_h, p_h)| \\ &\quad + \vartheta \left| \sum (\Delta u_h, \Delta v_h) \right| + \vartheta \left| \sum (\nabla p_h, \Delta v_h) \right| \\ &\quad + \vartheta \left| \sum (\Delta u_h, \nabla q_h) \right| + \vartheta \left| \sum (\nabla p_h, \nabla q_h) \right| \\ &\leq \|\nabla u_h\|_0 \|\nabla v_h\|_0 + M_b \|u_h\|_1 \|q_h\|_0 + M_b \|v_h\|_1 \|p_h\|_0 \\ &\quad + \vartheta \left( \sum (\Delta u_h) \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum (\Delta v_h) \right)^{\frac{1}{2}} + \vartheta \left( \sum (\nabla p_h) \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum (\Delta v_h) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \vartheta \left( \sum (\Delta u_h) \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum (\nabla q_h) \right)^{\frac{1}{2}} + \vartheta \left( \sum (\nabla p_h) \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum (\nabla q_h) \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

(Inverse Ungleichung (3.20) und Cauchy-Schwarz im  $\mathbb{R}^7$ .)

$$\begin{aligned} &\leq \left[ \left( 1 + \frac{2\vartheta}{C_{I_1}} \right) \|\nabla u_h\|_0^2 + M_b \|u_h\|_1^2 + M_b \|p_h\|_0^2 + 2\vartheta \sum (\nabla p_h) \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \left[ \left( 1 + \frac{2\vartheta}{C_{I_1}} \right) \|\nabla u_h\|_0^2 + M_b \|u_h\|_1^2 + M_b \|p_h\|_0^2 + 2\vartheta \sum (\nabla p_h) \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq M_B \|(u_h, p_h)\|_{GLS} \|(v_h, q_h)\|_{GLS}. \end{aligned}$$

□

### 4.3 Numerische Experimente

In diesem Abschnitt erfolgt der Praxistest der bisher eingeführten numerischen Verfahren für die Stokes-Gleichungen. Insbesondere wird untersucht, ob Diskretisierungen mit Taylor-Hood-Elementen oder stabilisierte Finite-Elemente-Methoden bessere Ergebnisse liefern. Die Verfahren wurden mit Hilfe von FEM-LAB implementiert (vgl. Anhang A).

Für den Test numerischer Verfahren ist es wünschenswert, für einige Beispielaufgaben die exakte Lösung zu kennen. Dann kann man die exakte Lösung mit der Näherungslösung des Verfahrens vergleichen. Bei Randwertproblemen verschafft man sich diese Beispiele folgendermaßen: Man setzt eine Funktion in die partielle Differentialgleichung ein und rechnet die rechte Seite und die Randwerte aus. Zu diesen Daten kennt man dann die exakte Lösung. Auf diese Weise wurde bei den folgenden beiden Testbeispielen für die Stokes- bzw. Oseen-Gleichungen vorgegangen.

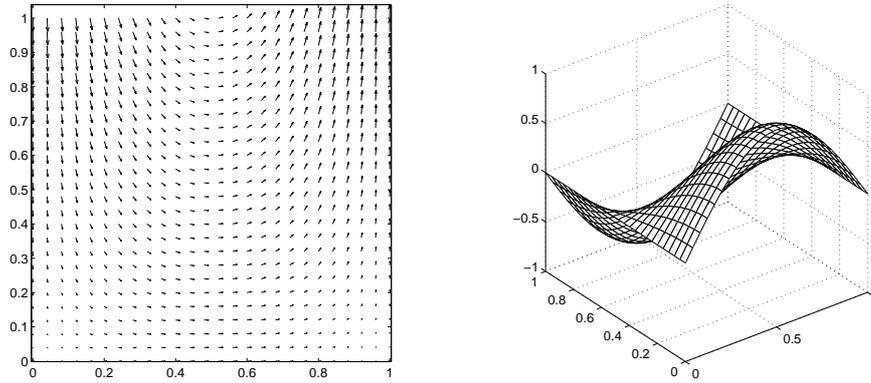
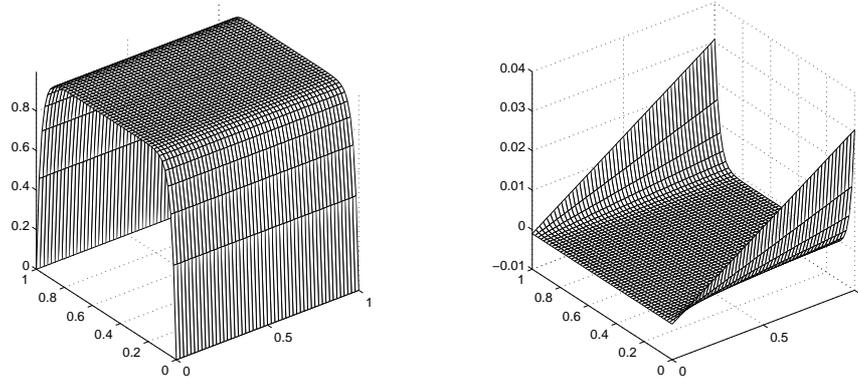


Abbildung 4.2: Testbeispiel Nr. 1: (a) das Geschwindigkeitsfeld, (b) der Druck

Abbildung 4.3: Testbeispiel Nr. 2 mit  $\nu = 10^{-3}$ : (a) die  $x$ -Komponente des Geschwindigkeitsfelds, (b) der Druck

Das **Testbeispiel Nr. 1** (vgl. Abbildung 4.2) hat eine glatte Lösung. Es wird wegen seines trigonometrischen Charakters durch stückweise polynomiale Funktionen nicht exakt approximiert. Es ist  $\Omega = (0, 1)^2$  und

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2) &= \sin(\pi x_1), \\ u_2(x_1, x_2) &= -\pi x_2 \cos(\pi x_1), \\ p(x_1, x_2) &= \sin(\pi x_1) \cos(\pi x_2). \end{aligned}$$

**Testbeispiel Nr. 2** simuliert auf  $\Omega = (0, 1)^2$  eine Kanalströmung mit exponentiellen Grenzschichten:

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2) &= 1 - e^{-x_2/\sqrt{\nu}} - e^{-(1-x_2)/\sqrt{\nu}}, \\ u_2(x_1, x_2) &= 0, \\ p(x_1, x_2) &= \sqrt{\nu} x_1 \left( e^{-x_2/\sqrt{\nu}} + e^{-(1-x_2)/\sqrt{\nu}} \right). \end{aligned}$$

Die Lösung hängt von der positiven Viskositätskonstanten  $\nu$  ab. Je kleiner  $\nu$  ist, desto steiler sind die Grenzschichten. Im Falle der Stokes-Gleichungen ist  $\nu = 1$ . Vgl. Abbildung 4.3 für den Fall  $\nu = 10^{-3}$ . Alle numerischen Experimente wurden mit unstrukturierten Triangulationen des Gebiets  $\Omega$  durchgeführt und alle linearen Gleichungssysteme mit direkten Verfahren gelöst. Die Behandlung der inhomogenen Dirichlet-Randbedingungen der Testbeispiele wurde FEM-LAB überlassen.

### Experiment I: Parameterdesign

Die Abbildung 4.4 verdeutlicht den Effekt der GLS-Stabilisierung (4.10): Die beiden Testbeispiele wurden für verschiedene Werte des Stabilisierungsparameters  $\vartheta$  mit dem  $P_1$ - $P_1$ -Element gerechnet. Querschnitte durch den Druck bei  $x = 0.5$  zeigen starke Oszillationen für kleine Werte von  $\vartheta$ . Für größere Werte wird der Druck geglättet. Das Verfahren verfälscht durch den stärkeren Einfluß der Stabilisierungsterme den Druck aber zunehmend. Man muß einen guten Kompromiß bei der Wahl von  $\vartheta$  finden.

Dazu wurden die Testbeispiele Nr. 1/2 mit  $P_k$ - $P_k$ -Elemente ( $k = 1, 2, \dots, 6$ ) gerechnet. Die Triangulationen sind so gewählt, daß alle entstehenden Gleichungssysteme etwa 4000 Unbekannte haben. Der Parameter  $\vartheta$  wird über den Bereich  $10^{-5}, \dots, 1$  variiert. Die Approximation der Geschwindigkeit hat sich in den Experimenten als sehr stabil gegenüber der Wahl von  $\vartheta$  erwiesen. Die Abbildung 4.6 zeigt daher nur den  $L_2$ -Fehler der Druckapproximation für die  $P_k$ - $P_k$ -Elemente verschiedener Ordnung. Der Stabilisierungsparameter  $\vartheta$  hängt offenbar von der Ordnung der verwendeten Elemente ab.  $\vartheta$  muß für Verfahren hoher Ordnung kleiner gewählt werden. Dieses Verhalten ist aus der Theorie in Abschnitt 4.2 aus folgendem Grund nicht ersichtlich: Die Konstanten in den verwendeten inversen Ungleichungen und Approximationsaussagen sind ordnungsabhängig, was in der Formulierung dieser Abschätzungen aber nicht berücksichtigt wird. Aufgrund der Fehlerkurven in Abbildung 4.6 werden in den folgenden numerischen Experimenten die Werte für  $\vartheta$  gemäß Tabelle 4.3 gewählt.

| Ordnung $k$ | 1    | 2    | 3     | 4     | 5     | 6     |
|-------------|------|------|-------|-------|-------|-------|
| $\vartheta$ | 0.05 | 0.01 | 0.005 | 0.001 | 0.001 | 0.001 |

Tabelle 4.1: Der Stabilisierungsparameter  $\vartheta$  für equal-order-Elemente.

### Experiment II: Konvergenz

In den folgenden Unterabschnitten werden das GLS-Verfahren für equal-order-Elemente (vgl. Abschnitt 4.2) und die gemischte Finite-Elemente-Methode mit Taylor-Hood-Elementen (vgl. Abschnitt 4.1) gegenübergestellt.

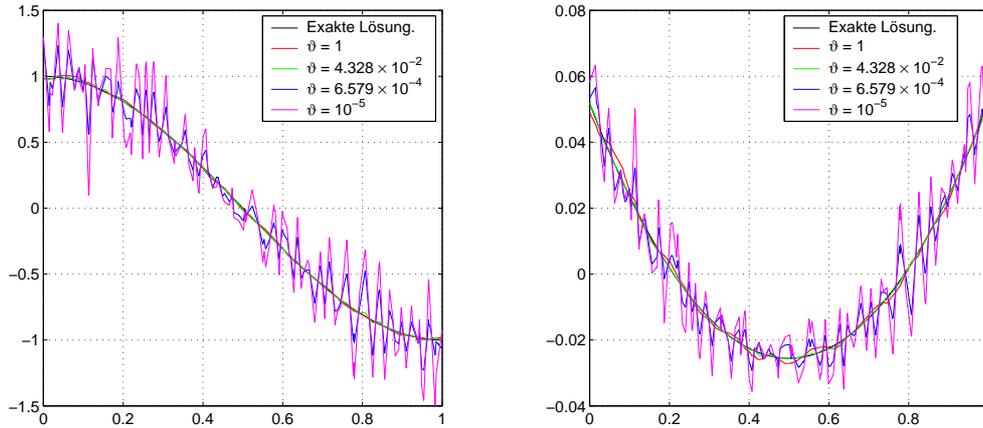


Abbildung 4.4: Querschnitt des Drucks der GLS-stabilisierten  $P_1$ - $P_1$ -Diskretisierung in  $x = 0.5$  für (links) Testbeispiel Nr. 1 und (rechts) Testbeispiel Nr. 2

In den Sätzen 4.1.4 und 4.2.5 wurden Konvergenzaussagen für die beiden Verfahren gemacht. Um diese Konvergenzaussagen experimentell zu überprüfen, wurden die Testbeispiele Nr. 1/2 mit den beiden Verfahren auf Triangulationen mit  $h_{max} = 1/4, \dots, 1/64$  gerechnet. In Abbildung 4.7 werden das  $P_1$ - $P_1$ -Element und das  $P_2$ - $P_1$ -Element verglichen, in Abbildung 4.8 das  $P_3$ - $P_3$ -Element und das  $P_4$ - $P_3$ -Element. Beide Verfahren erreichen die theoretische Konvergenzordnung. Allein bei der Erfüllung der Divergenzbedingung muß man bei Taylor-Hood-Elementen hoher Ordnung Abstriche machen. Dieses Verhalten ist aus der Theorie schwer zu erklären, stellt aber bei einem absoluten Fehler der Divergenzapproximation in einer Größenordnung von  $\mathcal{O}(10^{-7})$  keinen wirklichen Nachteil dar. Da die Ordnung der Geschwindigkeitsapproximation bei Taylor-Hood-Elementen höher ist als bei equal-order-Elementen, erzielt man auch höhere Konvergenzraten. Die entstehenden linearen Gleichungssysteme sind für Taylor-Hood-Elemente allerdings etwas größer. Die Auswirkungen auf die Rechenzeit werden in einem eigenen Unterabschnitt besprochen.

Insgesamt ist sowohl der absolute Fehler als auch die Konvergenzordnung bei Taylor-Hood-Elementen wesentlich besser als bei equal-order-Elementen.

### Experiment III: Variation der Elementordnung

Im folgenden numerischen Experiment werden die Testbeispiele mit  $P_k$ - $P_k$ -Elementen und  $P_{k+1}$ - $P_k$ -Elementen ( $k = 1, 2, \dots, 6$ ) gerechnet. Die Triangulationen sind so gewählt, daß alle entstehenden Gleichungssysteme etwa 16000 Unbekannte haben. Die Triangulationen für  $P_{k+1}$ - $P_k$ -Elemente sind in Abbildung 4.5 zu sehen. In Abbildung 4.9 sind die Resultate des Experiments dargestellt. Elemente höherer Ordnung liefern bei gleichem Rechenaufwand wesentlich bessere Ergebnisse. Die Taylor-Hood-Elemente sehr hoher Ordnung büßen ihren Vorsprung gegenüber equal-order-Elementen vergleichbarer Ordnung ein. Wie-

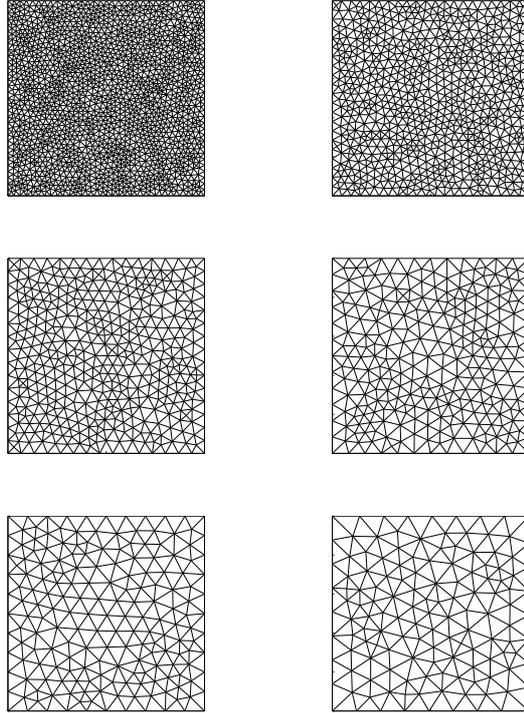


Abbildung 4.5: Sechs Triangulationen von  $\Omega = (0, 1)^2$ . Rechnungen mit dem  $P_{k+1}$ - $P_k$ -Element auf dem  $k$ -ten Gitter führen zu einem Gleichungssystem mit etwa 16000 Unbekannten.

derum erkennt man die Probleme mit der Divergenzbedingung bei Verfahren hoher Ordnung.

### Zeit- und Speicherbedarf

Abbildung 4.10 zeigt (oben) die Rechenzeit für Diskretisierungen verschiedener Ordnungen und (mitte) den Speicherbedarf dieser Diskretisierungen. Die Triangulationen sind wieder so gewählt, daß alle entstehenden linearen Gleichungssysteme etwa 16000 Unbekannte haben.

Je höher die Elementordnung der Diskretisierung ist, desto dichter ist die Matrix des entstehenden linearen Gleichungssystems besetzt. Auch die Rechenzeit steigt an. Hier zeigt sich ein weiterer Vorteil der Taylor-Hood-Elemente: Im Gegensatz zu stabilisierten Verfahren müssen keine zusätzlichen Stabilisierungsterme assembliert werden. Je feiner die Triangulation und je höher die Elementordnung, desto größer ist beim GLS-Verfahren der Anteil der Assemblierungszeit an der Gesamtrechenzeit. Dieser Eindruck bleibt auch in Abbildung 4.10 (unten) erhalten, wo die Rechenzeiten der  $P_2$ - $P_1$ -Diskretisierung mit der  $P_1$ - $P_1$ -Diskretisierung auf verschiedenen Gitterweiten verglichen werden. Vorsicht: Die absolute Rechenzeit ist für das  $P_2$ - $P_1$ -Element auf einer Triangulation mit  $h_{max} = 1/64$  deutlich größer als für das  $P_1$ - $P_1$ -Element auf dem gleichen

Gitter. Das kommt daher, daß das Gleichungssystem der  $P_2$ - $P_1$ -Diskretisierung größer ist als das der  $P_1$ - $P_1$ -Diskretisierung. Der direkte Löser mit einer Komplexität von  $\mathcal{O}(N^3)$  braucht deshalb deutlich länger.

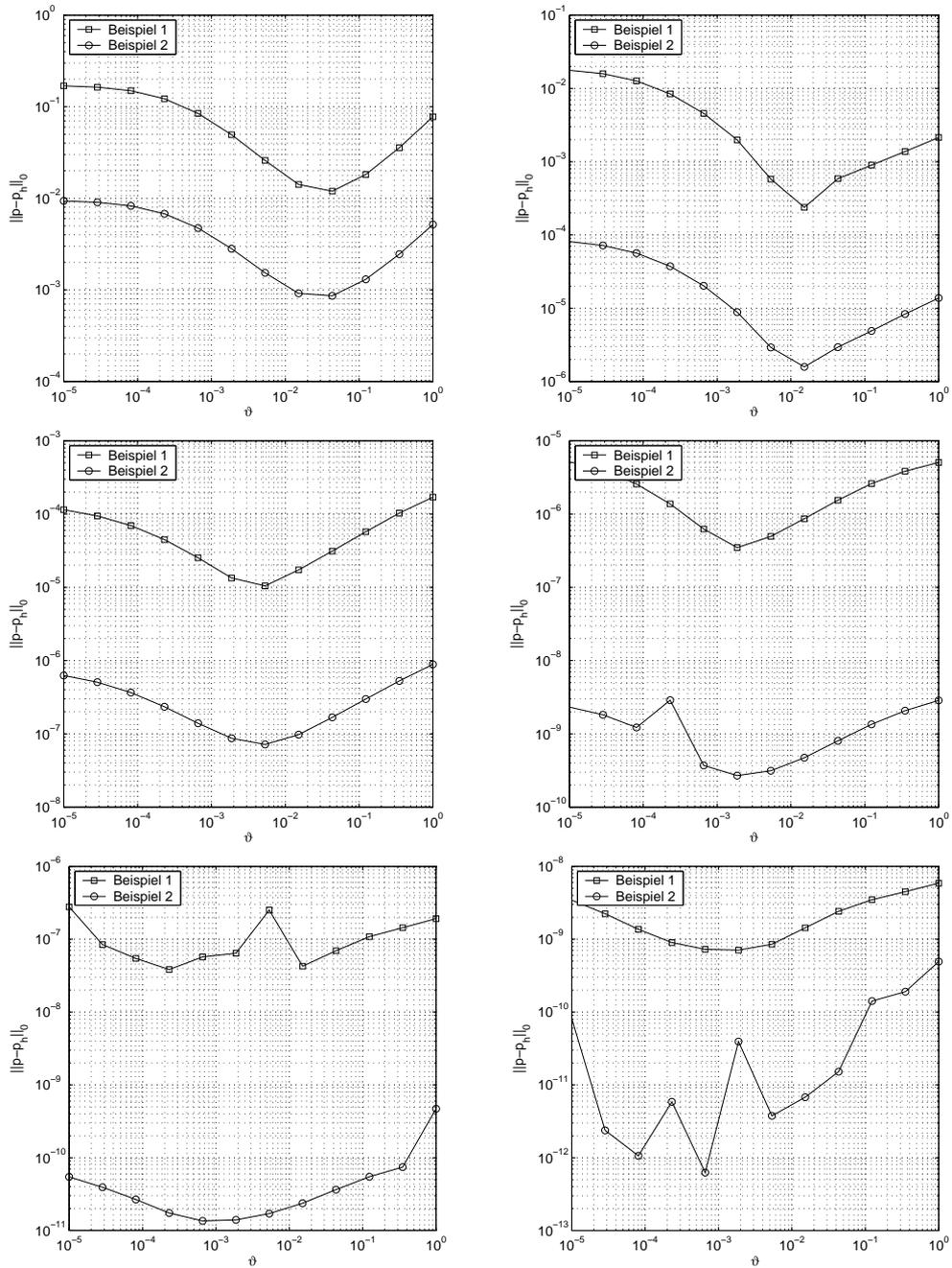


Abbildung 4.6: der  $L_2$ -Fehler des Drucks in Abhängigkeit von  $\vartheta$  für das  $P_1$ - $P_1$ - bis  $P_6$ - $P_6$ -Element

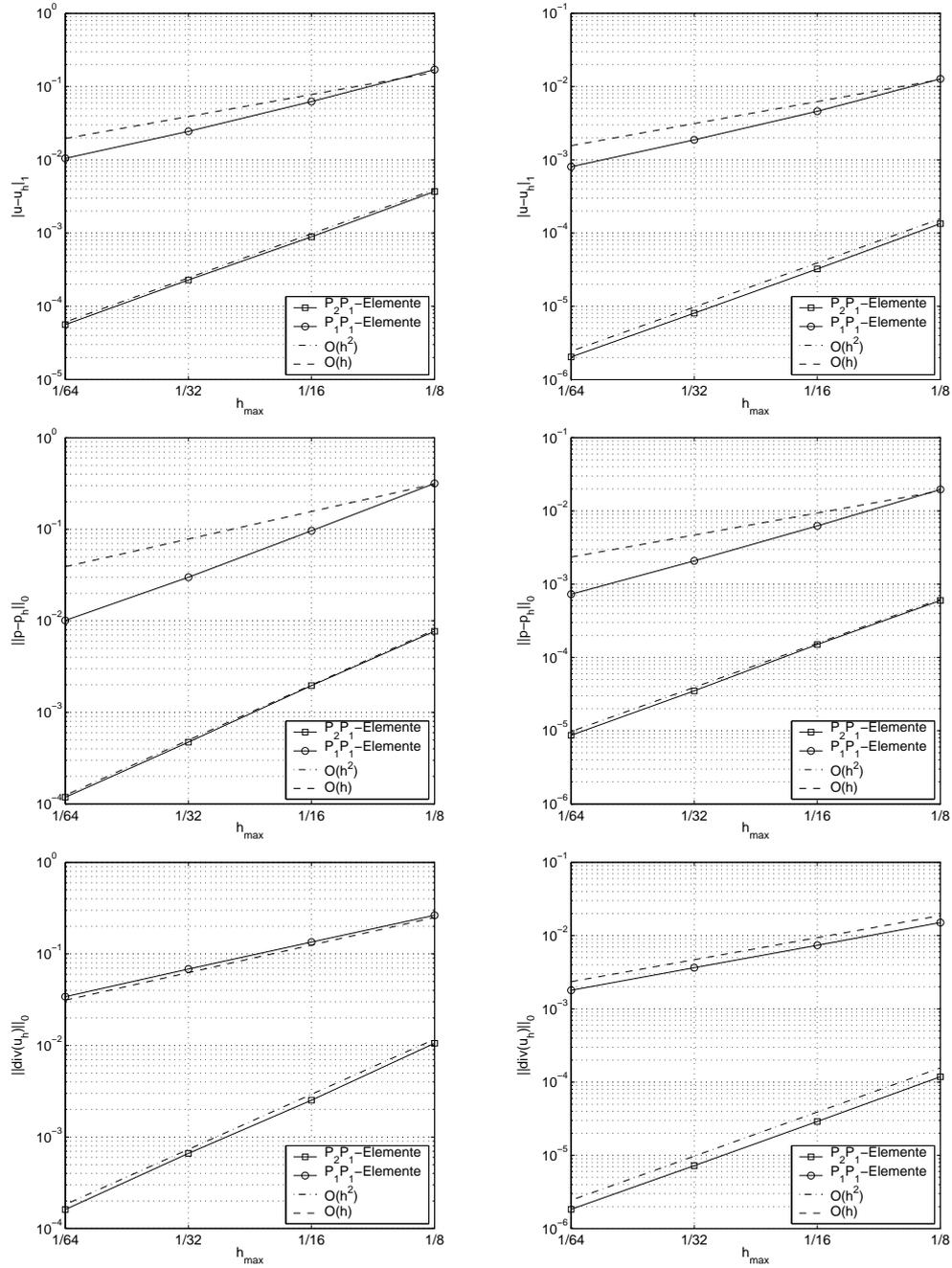


Abbildung 4.7:  $P_2$ - $P_1$ -Element vs.  $P_1$ - $P_1$ -Element mit (links) Testbeispiel Nr.1, (rechts) Testbeispiel Nr. 2

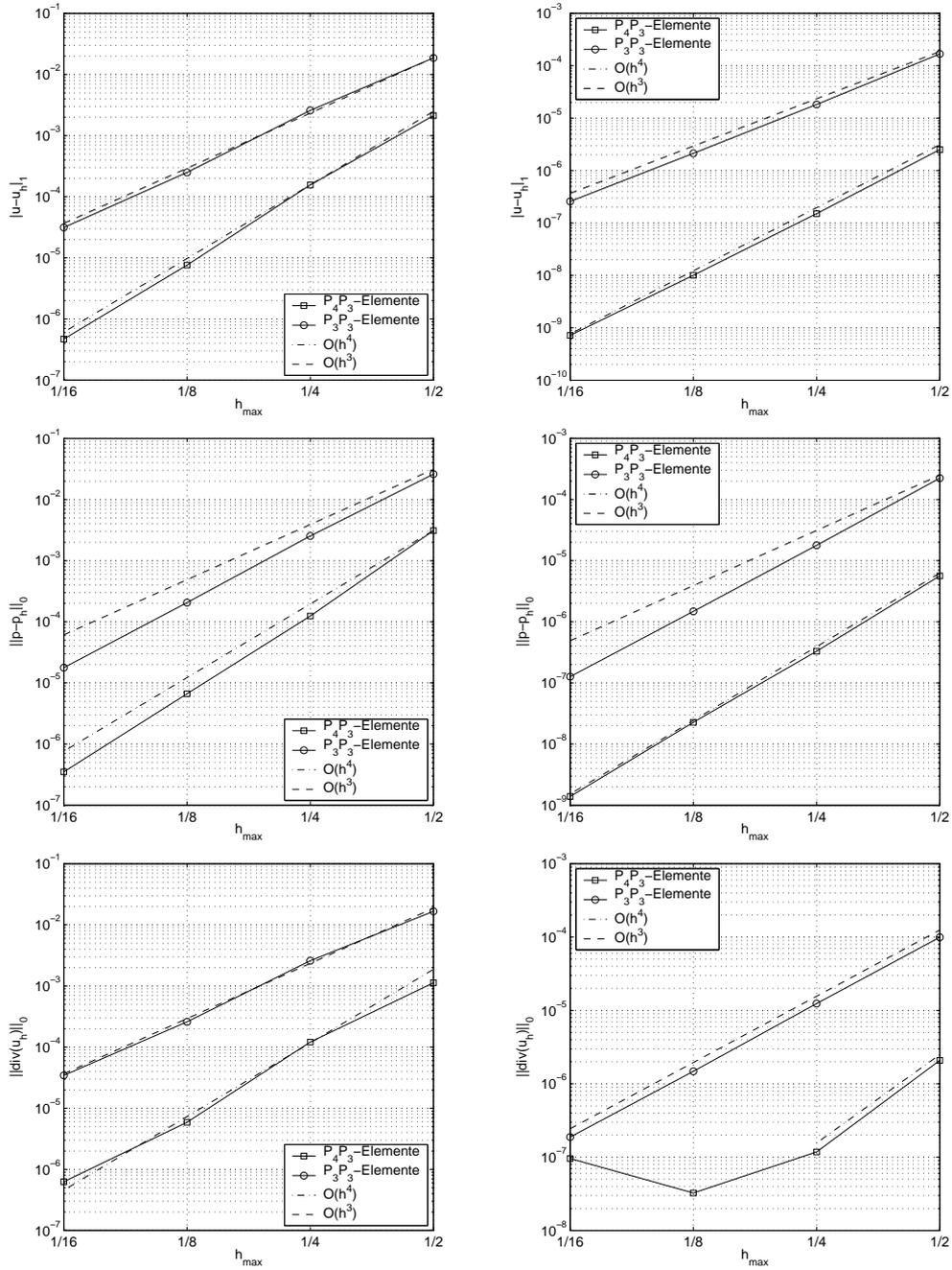


Abbildung 4.8:  $P_4$ - $P_3$ -Element vs.  $P_3$ - $P_3$ -Element mit (links) Testbeispiel Nr.1, (rechts) Testbeispiel Nr. 2

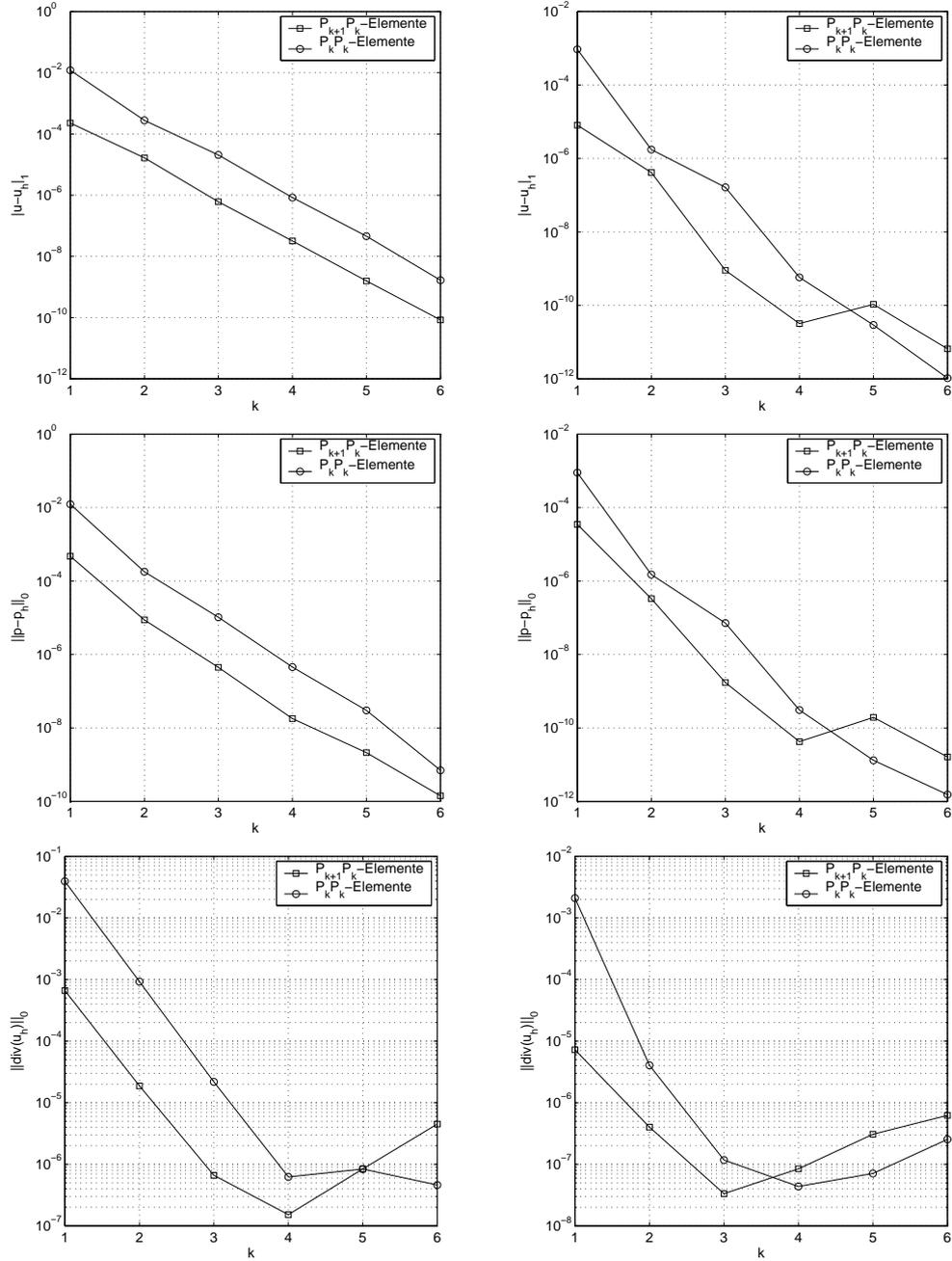


Abbildung 4.9: Variation der Elementordnung: Links Testbeispiel Nr. 1, rechts Testbeispiel Nr. 2

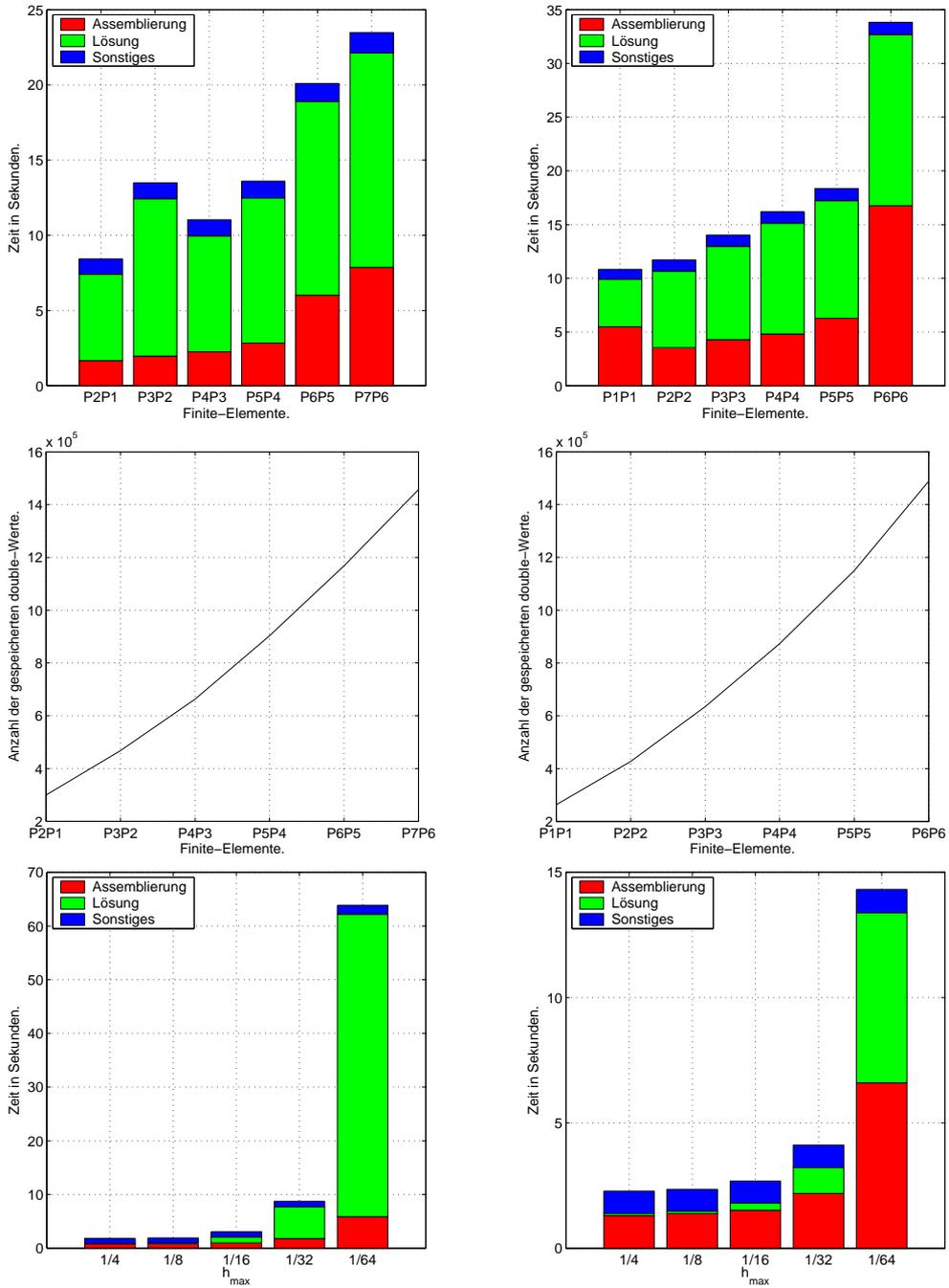


Abbildung 4.10: (oben) Rechenzeit für Diskretisierungen verschiedener Ordnung bei gleicher Anzahl von Unbekannten, (mitte) Speicherbedarf dieser Diskretisierungen, Rechenzeit mit (unten links)  $P_2$ - $P_1$ -Element und (unten rechts)  $P_1$ - $P_1$ -Elementen auf verschiedenen Triangulationen



## Kapitel 5

# Finite-Elemente-Methoden für die Oseen-Gleichungen

Finite-Elemente-Methoden für die Oseen-Gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha u - \nu \Delta u + (w \cdot \nabla)u + \nabla p &= f & \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div} u &= 0 & \text{in } \Omega \end{aligned}$$

haben zwei potentielle Quellen von Instabilitäten: Erstens treten bei der Approximation des Geschwindigkeitsfelds  $u$  Probleme auf, wenn die Viskosität  $\nu$  der modellierten Strömung gegenüber der Konvektion  $w$  sehr klein ist. Die Ursachen für Instabilitäten bei diesen **konvektionsdominanten** Problemen werden in [QuVa97], Kapitel 8, anhand von Diffusions-Konvektions-Gleichungen gut beschrieben. Übertragen auf die Oseen-Gleichungen folgt, daß lokal Instabilitäten auftreten können, wenn die lokale Reynoldszahl

$$\operatorname{Re}_K := \frac{h_K \|w\|_{\infty, K}}{\nu}$$

groß ist. Die Notwendigkeit die Oseen-Gleichungen im konvektionsdominanten Fall zu stabilisieren wird in Abbildung 5.1 deutlich. Links ist die exakte Lösung der  $x$ -Komponente des Geschwindigkeitsfelds des Testbeispiels Nr. 2 zu sehen. Die Viskositätskonstante ist hier  $\nu = 10^{-8}$ . Rechts ist die (unstabilisierte) Galerkin-Approximation mit dem  $P_2$ - $P_1$ -Element abgebildet.

Zweitens treten Instabilitäten bei der Druckapproximation auf, wenn das Paar von Finite-Elemente-Räumen zur Approximation des Geschwindigkeitsfelds  $u$  und des Drucks  $p$  nicht Babuška-Brezzi-stabil ist. Diese Stabilitätsprobleme wurden in Kapitel 4 über Finite-Elemente-Methoden für die Stokes-Gleichungen gesondert betrachtet.

### 5.1 SUPG-Verfahren für die Oseen-Gleichungen

Die Stabilitätsprobleme bei Finite-Elemente-Methoden für die Oseen-Gleichungen lassen sich mit einem Verfahren nach Muster der stabilisierten Finite-Elemente-

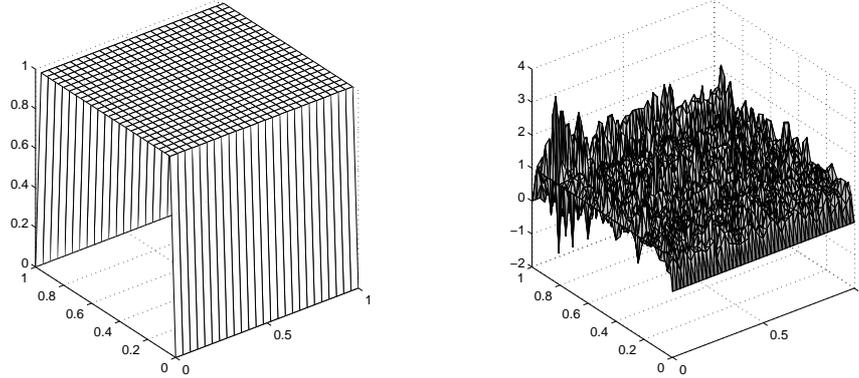


Abbildung 5.1: Testbeispiel Nr. 2 aus Abschnitt 4.3 mit  $\nu = 10^{-8}$ : (a) exakte Lösung der  $x$ -Komponente des Geschwindigkeitsfelds, (b) Galerkin-Approximation mit dem  $P_2$ - $P_1$ -Element

te-Methode (4.8) für die Stokes-Gleichungen beherrschen.

Stabilisierte Verfahren für konvektionsdominante Probleme basieren auf der Idee, künstliche Diffusion zu addieren. Das **Anisotropic-Diffusion-Verfahren** beruht darauf, mit Stabilisierungstermen der Form

$$\delta_K ((w \cdot \nabla)u_h, (w \cdot \nabla)v_h)_K \quad (5.1)$$

auf jedem Element  $K \in \mathcal{T}_h$  Diffusion in Richtung des Konvektionsfelds  $w$  zu addieren. Dabei ist  $\delta_K$  ein lokaler Stabilisierungsparameter. Diese Methode wird in der Praxis häufig verwendet. Auch FEMLAB bietet seit Version 2.3 diese Stabilisierungsvariante für die Navier-Stokes-Gleichungen an. Aus mathematischer Sicht ist dieses Verfahren aber unbefriedigend. Da der Stabilisierungsterm (5.1) nicht konsistent ist, verdirbt er insbesondere bei Verfahren hoher Ordnung die Konvergenzrate (vgl. wiederum [QuVa97], Kapitel 8). Diese Schwäche wird durch die konsistenten SUPG-Verfahren (auch **Streamline-Diffusion-Verfahren** genannt) behoben.

## Galerkin-Verfahren

Bei der Konstruktion von SUPG-Verfahren für die Oseen-Gleichungen geht man so vor, wie in Abschnitt 4.2:

Man definiert auf dem Produktraum  $(X \times Q) \times (X \times Q)$  die Bilinearform  $B_G(\cdot, \cdot)$  und das lineare Funktional  $F_G(\cdot)$  auf  $X \times Q$  durch

$$\begin{aligned} B_G(u, p; v, q) &:= \alpha(u, v) + \nu(\nabla u, \nabla v) + ((w \cdot \nabla)u, v) - (\operatorname{div} v, p) + (\operatorname{div} u, q) \\ F_G(v, q) &:= (f, q). \end{aligned}$$

Die Variationsaufgabe

$$\begin{aligned} &\text{„Finde } (u, p) \in X \times Q \text{ derart, daß} \\ &B_G(u, p; v, q) = F_G(v, q) \quad \forall (v, q) \in X \times Q. \text{“} \end{aligned} \quad (5.2)$$

ist äquivalent zur Variationsformulierung der Oseen-Gleichungen (2.4). Der Differentialoperator  $\mathcal{L}$  sei auf  $X \times Q$  durch

$$\mathcal{L}(u, p) := \alpha u - \nu \Delta u + (w \cdot \nabla)u + \nabla p$$

definiert. Dabei sei  $\alpha$  eine positive Konstante und die Testfunktionen  $\psi(v, q)$  seien aus  $L^2(\Omega)$ . Ist  $(u, p) \in X \times Q$  die Lösung von (5.2), so gilt  $\mathcal{L}(u, p) = f$  in  $L^2(\Omega)$ , falls  $(u, p)$  genügend glatt ist. Daher gilt auch für die Oseen-Gleichungen eine Identität der Form (4.7).

### Stabilisierte Finite-Elemente-Methoden

Man modifiziert die Bilinearform  $B_G(\cdot, \cdot)$  und das Funktional  $F_G(\cdot)$  folgendermaßen:

$$\begin{aligned} B_{SD}(u, p; v, q) &:= B_G(u, p; v, q) \\ &+ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K (\mathcal{L}(u, p), \psi(v, q))_K + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \gamma_K (\operatorname{div} u, \operatorname{div} v)_K, \\ F_{SD}(v, q) &:= F_G(v, q) + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K (f, \psi(v, q))_K. \end{aligned}$$

Dann löst man die stabilisierte Finite-Elemente-Methode

$$\begin{aligned} &\text{„Finde } (u_h, p_h) \in X_h^l \times Q_h^k \text{ derart, daß} \\ &B_{SD}(u_h, p_h; v_h, q_h) = F_{SD}(v_h, q_h) \quad \forall (v_h, q_h) \in X_h^l \times Q_h^k. \text{“} \end{aligned} \quad (5.3)$$

Die in der Literatur untersuchten Varianten dieses Verfahrens unterscheiden sich in der Wahl der Testfunktionen  $\psi(\cdot, \cdot)$  und in der Wahl der Stabilisierungsparameter  $\gamma_K$  und  $\delta_K$ .

**Bemerkung 5.1.1.** Die Wahl

$$\delta_K = 0 \quad \text{und} \quad \gamma_K > 0 \quad \forall K \in \mathcal{T}_h,$$

bei der die Testfunktionen  $\psi(\cdot, \cdot)$  nicht benötigt werden, ist als **Grad-Div-Stabilisierung** bekannt. Es sind auch Galerkin-Least-Squares-Verfahren für die Oseen-Gleichungen untersucht worden (vgl. [Lub91]).

Die Analyse der Lösbarkeit und der Konvergenz der Verfahren (5.3) wird bzgl. einer der gitterabhängigen Normen

$$\begin{aligned} |||(u, p)|||_a^2 &:= \nu \|u\|_1^2 + \alpha \|u\|_0^2 + \sigma \|p\|_0^2 \\ &+ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left( \gamma_K \|\operatorname{div} u\|_{0,K}^2 + \delta_K \|\psi(u, p)\|_{0,K}^2 \right) \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} |||(u, p)|||_b^2 &:= \nu |u|_1^2 + \alpha \|u\|_0^2 + \sigma \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\nabla p\|_{0,K}^2 \\ &\quad + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left( \gamma_K \|\operatorname{div} u\|_{0,K}^2 + \delta_K \|\psi(u, p)\|_{0,K}^2 \right) \end{aligned}$$

durchgeführt. Der Term, der den Druck kontrolliert, ist mit einer Konstante  $\sigma > 0$  gewichtet.

### SUPG-Verfahren für Equal-Order-Elemente

In der Diplomarbeit [Mül97] wird ein SUPG-Verfahren für die Oseen-Gleichungen untersucht, das für beliebige Kombinationen von  $P_l$ - $P_k$ -Elementen lösbar und konvergent ist. Mit Testfunktionen der Form

$$\psi(v_h, q_h)|_K = \delta_K ((w \cdot \nabla)v_h + \nabla q_h) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \quad (5.4)$$

kuriert dieses Verfahren zwei Probleme auf einmal. Der Term  $\nabla q_h$  stabilisiert den Druck, der Anteil  $(w \cdot \nabla)v_h$  stabilisiert die Geschwindigkeit im konvektionsdominanten Fall. Für  $\operatorname{Re}_K \geq 1$  und Stabilisierungsparameter

$$\delta_K \sim \frac{h_K}{\|w\|_{\infty,K}} \quad \text{und} \quad \gamma_K \sim h_K \|w\|_{\infty,K} \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \quad (5.5)$$

beinhaltet Satz 5.5 in [Mül97] die Fehlerabschätzung

$$\begin{aligned} |||(u - u_h, p - p_h)|||_a \leq C \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^l \sqrt{\nu} (1 + \operatorname{Re}_K^{\frac{1}{2}}) \|u\|_{l+1,K} \right. \\ \left. + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^{k+\frac{1}{2}} \left( \sqrt{\nu} h_K^{\frac{1}{2}} + \|w\|_{\infty,K}^{-\frac{1}{2}} \min(\operatorname{Re}_K^{\frac{1}{2}}, 1) \right) \|p\|_{k+1,K} \right\}. \end{aligned}$$

Im folgenden wird diese SUPG-Variante mit  $\operatorname{SUPG}_{full, eo}$  bezeichnet. Der Index *full* bezieht sich dabei auf die Form der Testfunktionen, die das Verfahren zweifach stabilisieren. Der Index *eo* bezieht sich auf die für equal-order-Elemente optimierte Parameterwahl.

Das Verfahren ist auch bei Verwendung von Taylor-Hood-Elementen lösbar und konvergent. Es stellt sich die Frage, ob das Verfahren für diese Elemente nicht überstabilisiert ist und der Term  $\nabla q_h$  weggelassen werden kann? Das SUPG-Verfahren mit vereinfachten Testfunktionen

$$\psi(v_h, q_h)|_K = \delta_K ((w \cdot \nabla)v_h) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \quad (5.6)$$

und der Parameterwahl (5.5) erhält die Bezeichnung  $\operatorname{SUPG}_{simple, eo}$ .

**Bemerkung 5.1.2.** Der Hersteller von FEMLAB hat in Version 2.3, vermutlich aufgrund heuristischer Überlegungen, eine SUPG-Variante mit den vereinfachten Testfunktionen (5.6) und der Parameterwahl

$$\delta_K \sim \frac{h_K}{\sqrt{\nu + \|w\|_{\infty, K}^2}} \quad \text{und} \quad \gamma_K = 0$$

eingeführt. Dadurch wird ein SUPG-Verfahren ohne Grad-Div-Stabilisierung realisiert.

Die bisher vorgestellten SUPG-Varianten verwenden alle Parameter, wie sie bei SUPG-Verfahren für Diffusions-Konvektions-Gleichungen üblich sind. Diese Parameterwahl ist für equal-order-Elemente optimiert.

### SUPG-Verfahren für Taylor-Hood-Elemente

In [GeLuOl03] wird nachgewiesen, daß für SUPG-Verfahren mit Babuška-Brezzi-stabilen Elementen eine neue Parameterwahl erforderlich ist. Dadurch wird die Konvergenz der Verfahren deutlich verbessert.

Zunächst wird ein vollstabilisiertes Verfahren mit Testfunktionen

$$\psi(v_h, q_h)|_K = \delta_K ((w \cdot \nabla)v_h + \nabla q_h) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h$$

und der Parameterwahl

$$\gamma_K = \gamma_0 \sim 1, \quad \delta_K = \frac{h_K^2}{\gamma_0} \quad (5.7)$$

betrachtet. Wegen der neuen Parameterwahl wird es mit  $\text{SUPG}_{full,bb}$  abgekürzt. Der Index *bb* bezieht sich auf die Verwendung von Babuška-Brezzi-stabilen Elementen.

**Satz 5.1.3.** Das Verfahren  $\text{SUPG}_{full,bb}$  ist unter Verwendung von Babuška-Brezzi-stabilen Elementen eindeutig lösbar und es gilt mit einer von  $\alpha$ ,  $\nu$  und  $h$  unabhängigen positiven Konstanten  $C$  die Fehlerabschätzung

$$\| \| (u - u_h, p - p_h) \| \|_a^2 \leq C \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left( h_K^{2(k+1)} |p|_{k+1, K}^2 + h_K^{2l} |u|_{l+1, K}^2 \right).$$

**Beweis.** Vgl. [GeLuOl03], Lemma 3.1 und Theorem 3.1. □

Das größte Interesse gilt der SUPG-Variante mit der neuen Parameterwahl (5.7) und den vereinfachten Testfunktionen

$$\psi(v_h, q_h)|_K = \delta_K ((w \cdot \nabla)v_h) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h.$$

Dieses Verfahren hat gute Konvergenzeigenschaften und spart Zeit bei der Assemblierung des linearen Gleichungssystems. Zur Lösbarkeit gilt der folgende Satz:

**Satz 5.1.4.** Die Oseen-Gleichungen (2.1) sei derart skaliert, daß  $\|w\|_\infty \sim 1$  gilt. Erfüllen die Parameter  $\delta_K$  und  $\gamma_K$  die Bedingungen

$$\delta_K \|w\|_{\infty,K}^2 \leq \gamma_K \leq \gamma, \quad 0 \leq \delta_K = \delta_0 h_K^2 \leq \min \left( \frac{\nu + \alpha h_K^2 \mu_u^{-2}}{8 \|w\|_{\infty,K}}, \frac{h_K^2}{3 \mu_u^2 \nu}, \frac{1}{3\alpha}, \delta \right) \quad (5.8)$$

mit  $\gamma = \mathcal{O}(1)$ , so existiert eine von  $h$  und  $\nu$  unabhängige Konstante  $\beta > 0$  derart, daß für  $\sigma = 2\lambda$  die diskrete Babuška-Bedingung

$$\sup_{0 \neq (v_h, q_h) \in X_h \times Q_h} \frac{B_{SD}(u_h, p_h; v_h, q_h)}{\|(v_h, q_h)\|_b} \geq \beta \|(u_h, p_h)\|_b \quad \forall (u_h, p_h) \in X_h \times Q_h$$

erfüllt ist. Das Verfahren  $\text{SUPG}_{simple,bb}$  hat eine eindeutige Lösung.

**Beweis.** Vgl. [GeLuOl03], Lemma 4.2. □

Der folgende Satz liefert eine Fehlerabschätzung des Verfahrens.

**Satz 5.1.5.** Die Voraussetzungen von Satz 5.1.4 seien erfüllt und die Lösung der Oseen-Gleichungen erfülle die zusätzliche Regularitätsvoraussetzung

$$-\nu \Delta u + \nabla p \in [L^2(K)]^n \quad \forall K \in \mathcal{T}_h.$$

Unter den Voraussetzungen

$$\gamma_K = \gamma_0 \sim 1, \quad \delta_K = \frac{h_K^2}{\gamma_0} \quad \text{und} \quad \sigma \sim h^2$$

gilt für das Verfahren  $\text{SUPG}_{simple,bb}$  mit einer von  $\nu$ ,  $h$  und  $\alpha$  unabhängigen positiven Konstante  $C$  die Fehlerabschätzung

$$\|(u - u_h, p - p_h)\|_b^2 \leq C \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (h_K^{2(k+1)} |p|_{k+1,K}^2 + h_K^{2l} |u|_{l+1,K}^2).$$

**Beweis.** Vgl. [GeLuOl03], Theorem 4.1. □

## 5.2 Numerische Experimente

In diesem Abschnitt werden die Eigenschaften des Verfahrens  $\text{SUPG}_{simple,bb}$  für Taylor-Hood-Elemente mit den vereinfachten Testfunktionen

$$\psi(v_h, q_h)|_K = \delta_K ((w \cdot \nabla)v_h + \nabla q_h) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h$$

und der Parameterwahl

$$\gamma_K = \gamma_0 \sim 1, \quad \delta_K = \frac{h_K^2}{\gamma_0} \quad (5.9)$$

getestet. Es werden wieder die Testbeispiele Nr. 1/2 aus Abschnitt 4.3 herangezogen.

### Experiment I: Parameterdesign

Das Verfahren  $\text{SUPG}_{simple,bb}$  mit der Parameterwahl (5.9) hat nur einen Stabilisierungsfaktor  $\gamma_0$ . Das ist ein Vorteil gegenüber dem Verfahren  $\text{SUPG}_{full,eo}$  mit dem  $P_1$ - $P_1$ -Element, das eine genaue Regulierung von Stabilisierungsparametern für die Druck-, SUPG- und Grad-Div-Stabilisierung erfordert.

Zur Bestimmung von  $\gamma_0$  wurden die beiden Testbeispiele mit verschiedenen Werten des Parameters gerechnet. Abbildung 5.4 zeigt die Resultate für Rechnungen mit dem  $P_2$ - $P_1$ -Element, Abbildung 5.5 für Rechnungen mit dem  $P_4$ - $P_3$ -Element. Die Wahl von  $\gamma_0$  ist ein Kompromiß. Für die Divergenzbedingung gilt: Je stärker die Grad-Div-Stabilisierung, d.h. je größer  $\gamma_0$ , desto besser. Allerdings wird für große Werte von  $\gamma_0$  der Parameter  $\delta_K = h_K^2/\gamma_0$  sehr klein, was zu einem Ansteigen des  $|\cdot|_1$ -Fehlers der Geschwindigkeit führt. In den folgenden Experimenten wird bei Verwendung von  $P_{k+1}$ - $P_k$ -Elementen  $\gamma_0 = k$  gewählt.

### Experiment II: Konvergenz

In diesem Unterabschnitt wird die Konvergenz der vier SUPG-Verfahren aus Abschnitt 5.1 anhand des Testbeispiels Nr. 1 verglichen. Dazu wurden die Verfahren auf Triangulationen mit  $h_{max} = 1/4, \dots, 1/64$  gerechnet.

In Abbildung 5.6 sind für das Verfahren  $\text{SUPG}_{full,eo}$  mit (a) dem  $P_1$ - $P_1$ -Element und (b) dem  $P_2$ - $P_1$ -Element Konvergenzdiagramme angegeben. Das Verfahren mit dem  $P_1$ - $P_1$ -Element erreicht die theoretische Konvergenzordnung, der Druck wird sogar besser approximiert. Bei einer Diskretisierung mit dem  $P_2$ - $P_1$ -Element konvergiert der  $|\cdot|_1$ -Fehler der Geschwindigkeit mit einer Ordnung von  $3/2$ , was bei einer Approximation mit quadratischen Elementen suboptimal erscheint. Der Fehler der Divergenzbedingung konvergiert sogar nur linear.

Das Verfahren  $\text{SUPG}_{full,eo}$  mit dem  $P_2$ - $P_1$ -Element wird in Abbildung 5.7 (a) nocheinmal angegeben und dem Verfahren  $\text{SUPG}_{full,bb}$  mit dem  $P_2$ - $P_1$ -Element gegenübergestellt. Durch die neue Parameterwahl (5.9) erreicht das Verfahren  $\text{SUPG}_{full,bb}$  für moderate  $\nu$  die Konvergenzordnung 2 im  $|\cdot|_1$ -Fehler der Geschwindigkeit. Für kleinere  $\nu$  bleibt die Konvergenzordnung auf groben Triangulationen etwas zurück. Aufgrund des hohen Rechenaufwands konnte leider nicht überprüft werden, ob das Verfahren auf sehr feinen Gittern die theoretische Konvergenzordnung 2 noch erreicht. Die Konvergenzordnung der Divergenzbedingung ist mit der neuen Parameterwahl um eine Ordnung besser.

Wie verhalten sich die Verfahren  $\text{SUPG}_{simple,eo}$  und  $\text{SUPG}_{simple,bb}$  mit den vereinfachten Testfunktionen für das  $P_2$ - $P_1$ -Element? Die Resultate werden nicht in einer eigenen Abbildung angegeben, da sich mit dem bloßen Auge kein Unterschied zu den vollstabilisierten Verfahren in Abbildung 5.7 erkennen läßt. Man kann also bei Verfahren mit Taylor-Hood-Elementen Rechenzeit sparen, indem man vereinfachte Testfunktionen verwendet.

In Abbildung 5.8 sind Konvergenzdiagramme für das Verfahren  $\text{SUPG}_{simple,bb}$  mit dem  $P_4$ - $P_3$ -Element angegeben. Das Verfahren erreicht die Konvergenz-

ordnung 4. Nur bei der Divergenzbedingung wird die Konvergenzordnung auf feinen Triangulationen nicht mehr erreicht. Angesichts eines absoluten Fehlers der Größenordnung  $\mathcal{O}(10^{-6})$  ist das kein großer Nachteil. Die Probleme mit der Divergenzbedingung bei Verfahren höherer Ordnung traten schon bei den Stokes-Gleichungen auf (vgl. Abschnitt 4.3).

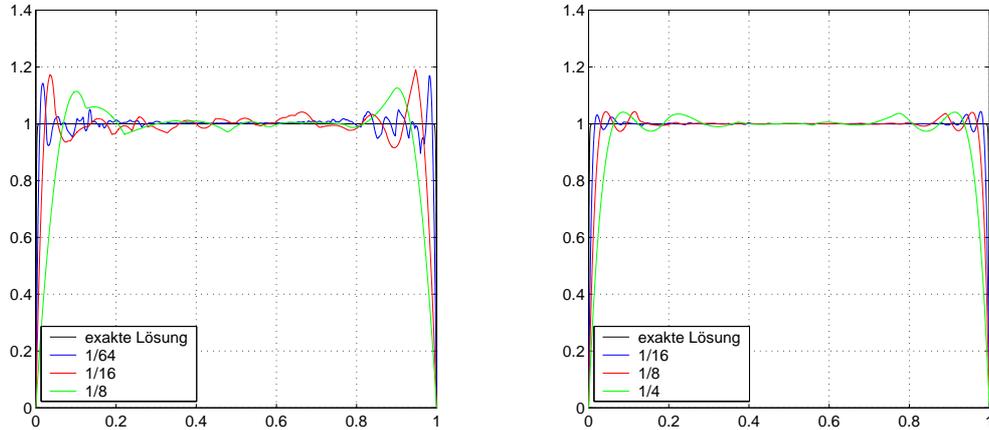


Abbildung 5.2: Querschnitt bei  $x = 0.5$ : (a)  $P_2$ - $P_1$ -Element, (b)  $P_4$ - $P_3$ -Element

Abbildung 5.2 zeigt Querschnitte durch Näherungslösungen der  $x$ -Komponente des Geschwindigkeitsfelds von Testbeispiel Nr. 2 bei  $x = 0.5$ . In diesem Fall ist  $\nu = 10^{-8}$ . D.h. die exakte Lösung weist steile exponentielle Grenzschichten auf. Die Lösungen in Abbildung 5.2 wurden mit dem Verfahren  $\text{SUPG}_{\text{simple},bb}$  unter Verwendung (a) des  $P_2$ - $P_1$ -Elements, (b) des  $P_4$ - $P_3$ -Elements auf verschiedenen Gittern berechnet. Da sich die exponentielle Lösung durch Polynome schlecht approximieren läßt, entstehen an den Grenzschichten „Überschwinger“, wie sie auch bei Finite-Elemente-Methoden für Konvektions-Diffusions-Gleichungen auftreten (vgl. [QuVa97]).

### Experiment III: Variation der Elementordnung

Im nächsten Experiment werden die beiden Testbeispiele mit dem Verfahren  $\text{SUPG}_{\text{simple},bb}$  und Taylor-Hood-Elementen  $k$ -ter Ordnung ( $k = 1, 2, \dots, 6$ ) gerechnet. Die Triangulationen sind so gewählt, daß alle entstehenden Gleichungssysteme etwa 16000 Unbekannte haben. In Abbildung 5.9 sind die Resultate dargestellt.

Das Bild ist nicht so klar, wie bei den Experimenten für die Stokes-Gleichungen in Abschnitt 4.3. Bei Taylor-Hood-Elementen sehr hoher Ordnung nimmt der Verfahrensfehler wieder um Größenordnungen zu. Vermutlich muß für diese Elemente der Stabilisierungsfaktor  $\gamma_0$  sehr klein gewählt werden. Die „Zacke“ in den Fehlerkurven für Testbeispiel Nr. 1 bei Verwendung des  $P_5$ - $P_4$ -Elements läßt sich aus der Theorie nicht erklären. Abbildung 5.3 (b) zeigt wiederum Querschnitte durch Näherungslösungen von Testbeispiel Nr. 2. Es wurde auf

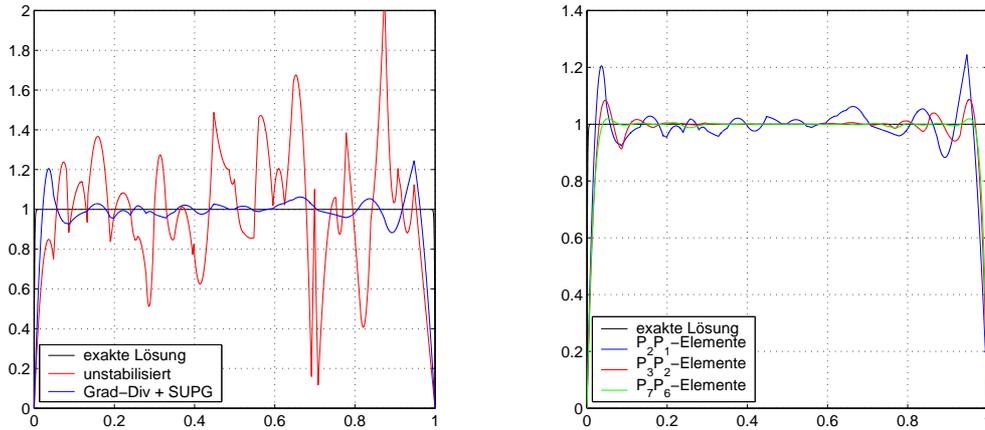


Abbildung 5.3: Querschnitt bei  $x = 0.5$  auf einem Gitter mit  $h_{max} = 1/16$ : (a)  $P_2$ - $P_1$ -Element, (b) Taylor-Hood-Elemente verschiedener Ordnung

einem Gitter mit  $h_{max} = 1/16$  gerechnet und die Ordnung der verwendeten Taylor-Hood-Elemente variiert.

#### Experiment IV: Stabilität in $\alpha$

Bisher wurden nur Rechnungen mit  $\alpha = 0$  durchgeführt. Auf einem Gitter mit  $h_{max} = 1/16$  wurden numerische Experimente mit  $\alpha$  im Intervall  $[10^{-3}, 10^3]$  durchgeführt. Die Experimente sollen die Eignung des Verfahrens  $\text{SUPG}_{simple,bb}$  im Rahmen eines „pseudo-time-stepping-Verfahrens“ für die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen belegen (vgl. Abschnitt 6.2). Das Verfahren ist Robust für  $\alpha \rightarrow 0$  (vgl. Abbildung 5.10). Für große Werte von  $\alpha$  bleibt die Robustheit nicht erhalten. Im Kontext impliziter Zeitdiskretisierungen bedeutet das eine typische Einschränkung der Zeitschrittweite des Verfahrens auf  $\frac{1}{\alpha} \sim \Delta t \geq ch^2$ .

#### Zeit- und Speicherbedarf

In Abbildung 5.11 wird die Rechenzeit des Verfahrens  $\text{SUPG}_{simple,bb}$  in Abhängigkeit von (links oben) der Elementordnung und (rechts oben) der Gitterweite dargestellt. Die Rechnungen wurden auf Triangulationen durchgeführt, die für die jeweilige Diskretisierung zu Gleichungssystemen mit etwa 16000 Unbekannten führen. Bei den SUPG-Verfahren übersteigt die Zeit zur Assemblierung der Gleichungssysteme die Zeit, die zu ihrer Lösung gebraucht wird. In Abbildung 5.11 (rechts oben) wurde mit dem  $P_2$ - $P_1$ -Element auf verschiedenen Gittern gerechnet.

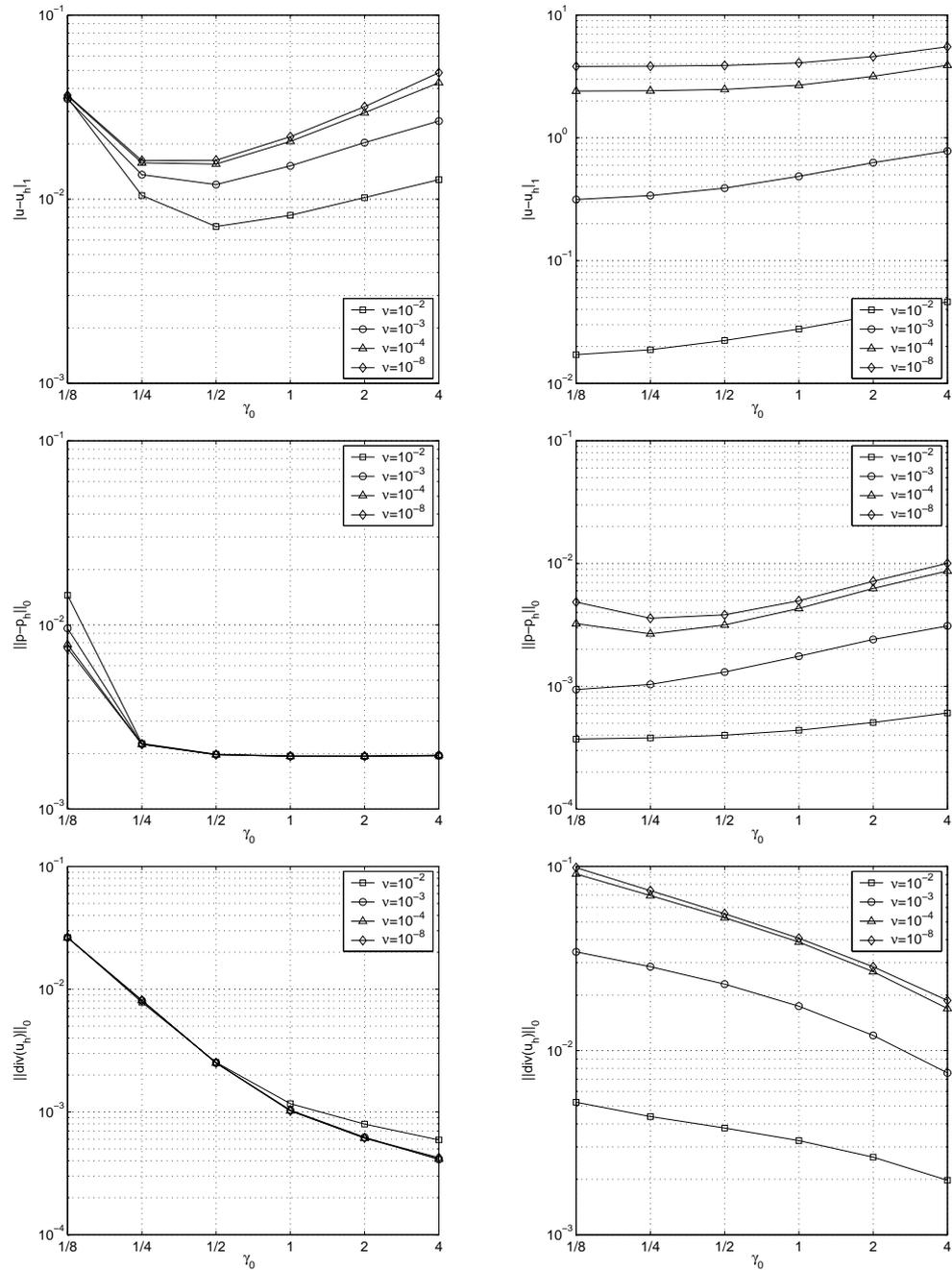


Abbildung 5.4: Variation des Stabilisierungsfaktors  $\gamma_0$  für (links) Testbeispiel Nr. 1, (rechts) Testbeispiel Nr. 2 beim Verfahren  $\text{SUPG}_{simple,bb}$  mit dem  $P_2$ - $P_1$ -Element

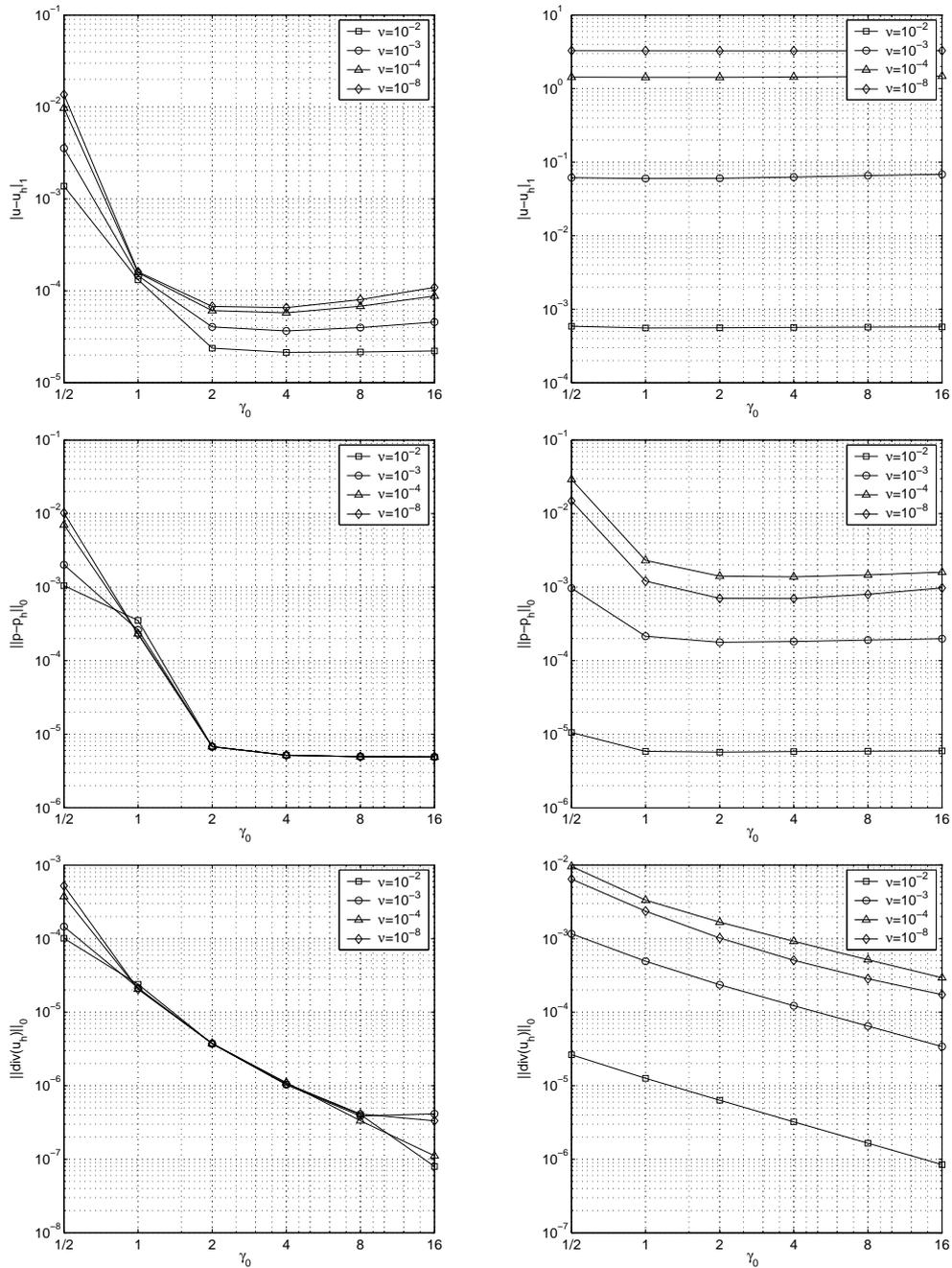


Abbildung 5.5: Variation des Stabilisierungsfaktors  $\gamma_0$  für (links) Testbeispiel Nr. 1, (rechts) Testbeispiel Nr. 2 beim Verfahren  $\text{SUPG}_{\text{simple},bb}$  mit dem  $P_4$ - $P_3$ -Element

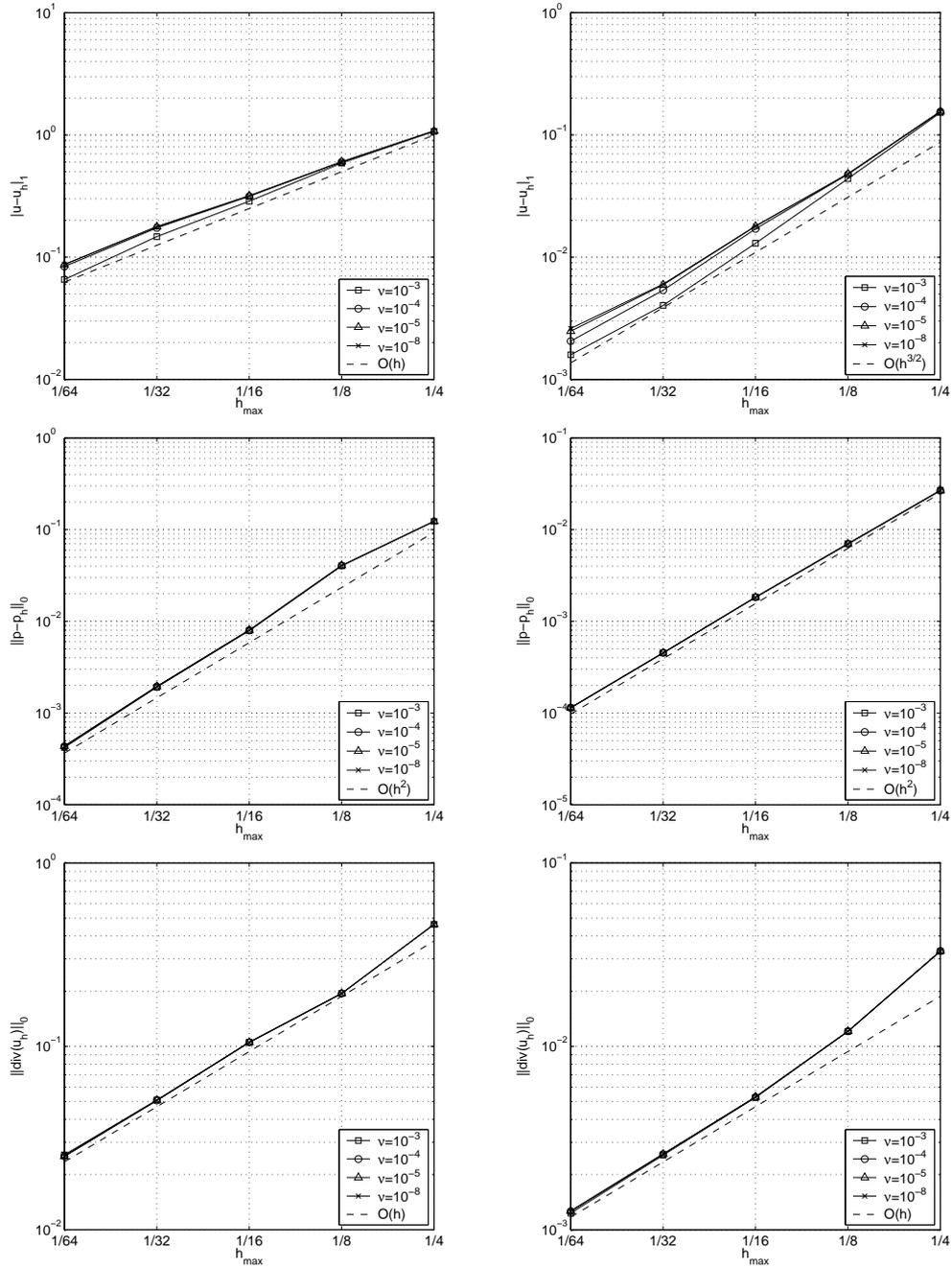


Abbildung 5.6:  $\text{SUPG}_{full, eo}$  (links) mit dem  $P_1$ - $P_1$ -Element, (rechts) mit dem  $P_2$ - $P_1$ -Element

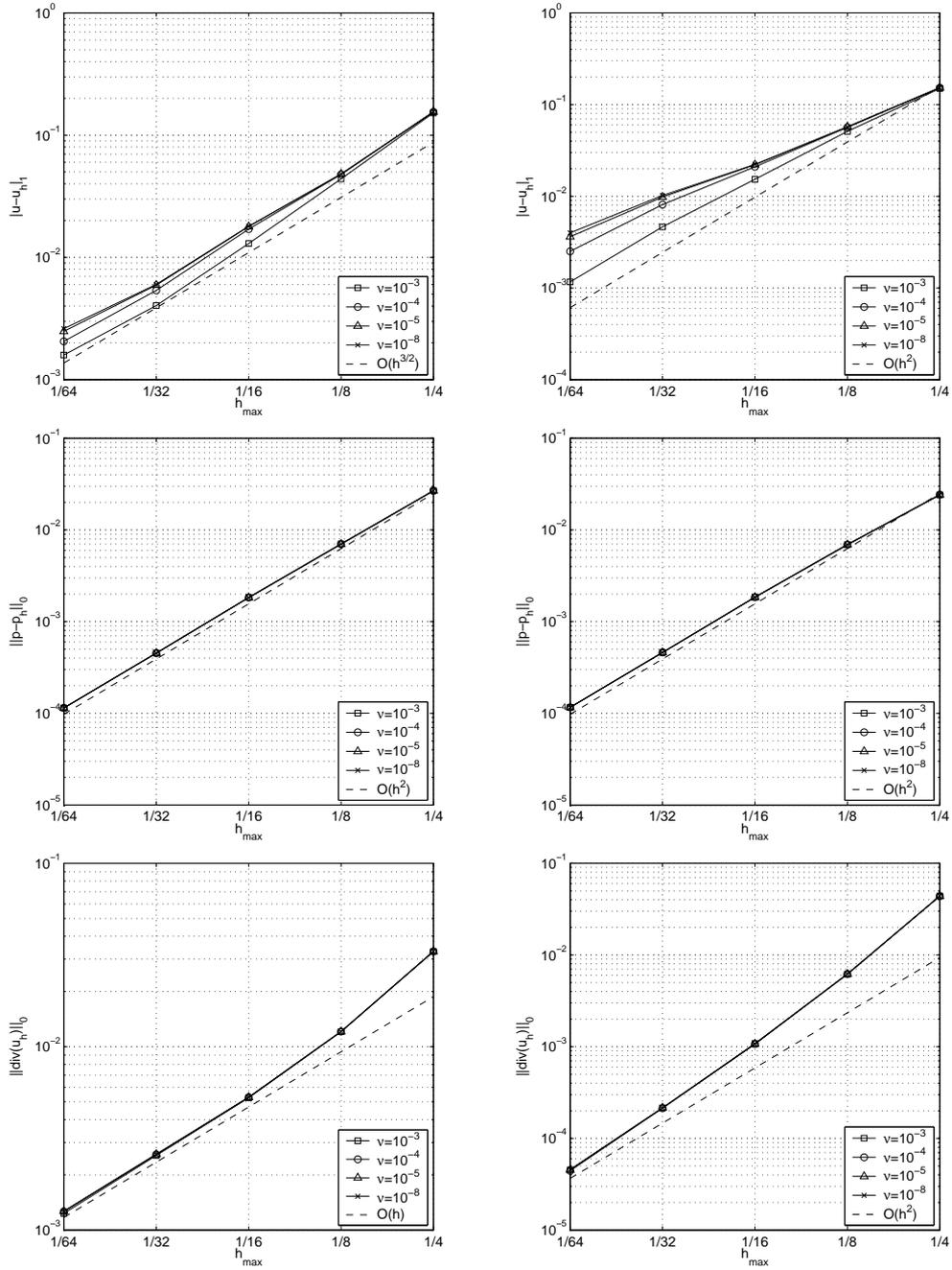


Abbildung 5.7: (links)  $SUPG_{full, eo}$ , (rechts)  $SUPG_{full, bb}$  mit dem  $P_2$ - $P_1$ -Element

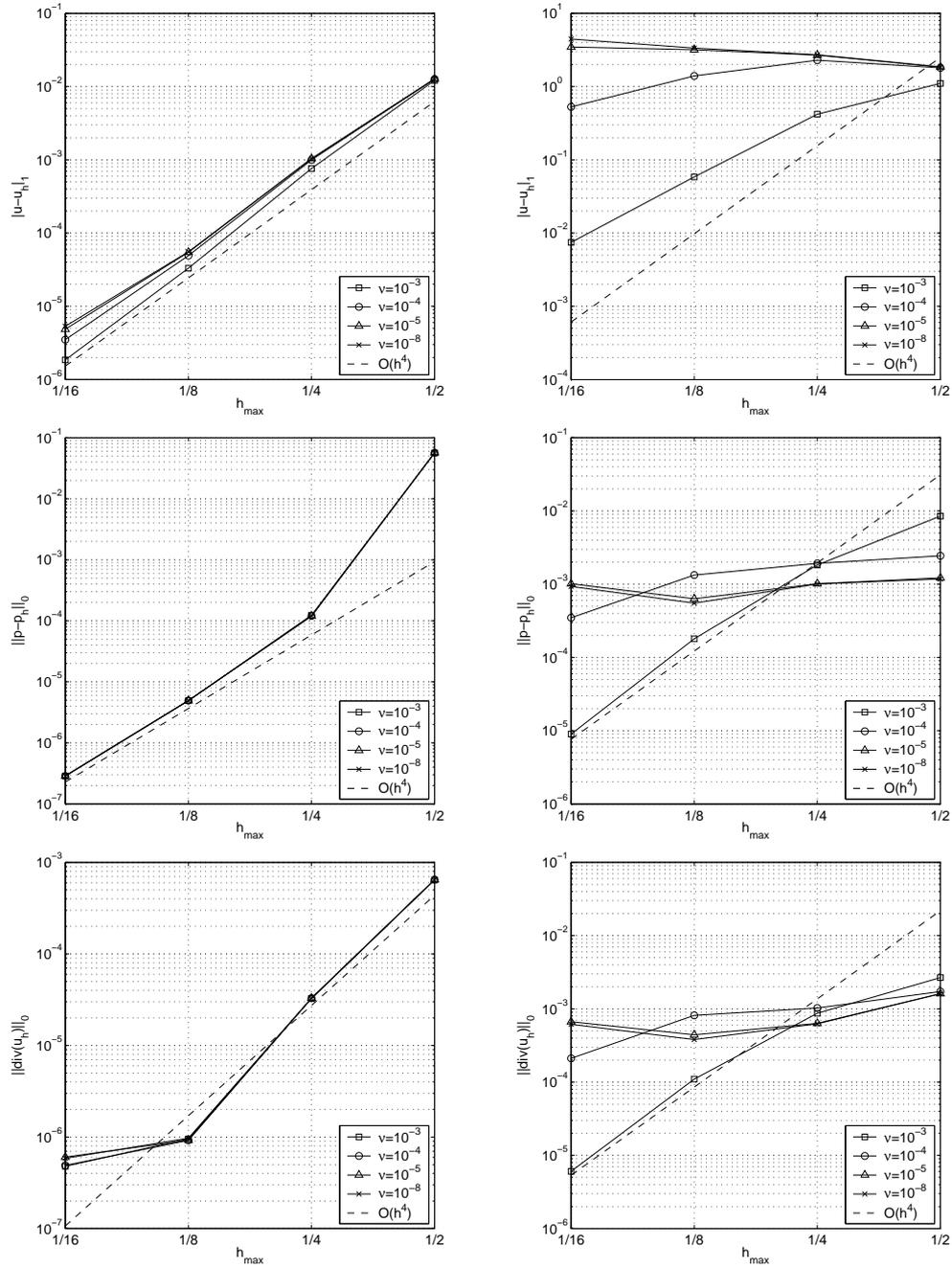


Abbildung 5.8: Konvergenz des Verfahrens  $\text{SUPG}_{\text{simple},bb}$  mit dem  $P_4$ - $P_3$ -Element für (links) Testbeispiel Nr. 1, (rechts) Testbeispiel Nr. 2

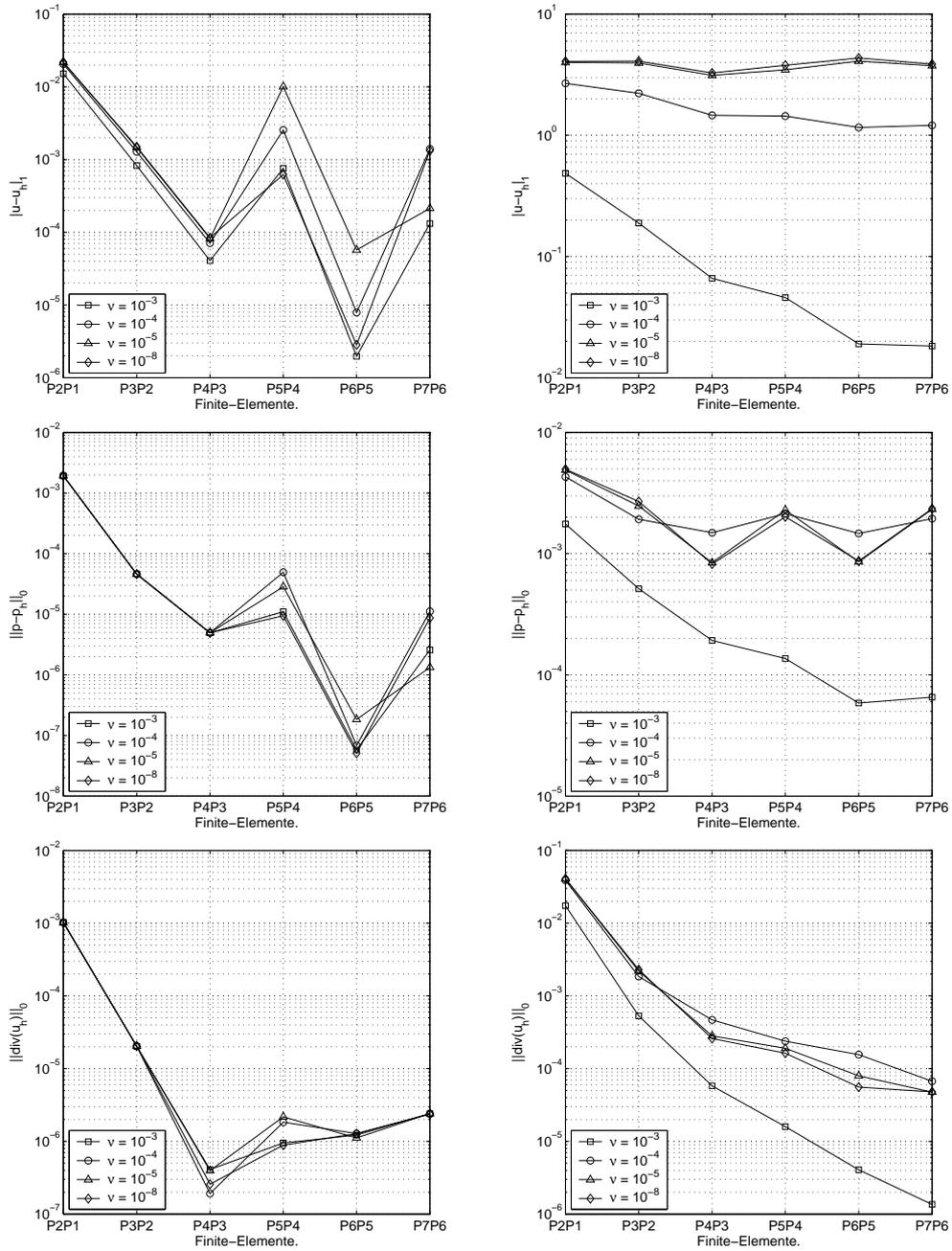


Abbildung 5.9: Variation der Elementordnung: (links) Testbeispiel Nr. 1, (rechts) Testbeispiel Nr. 2

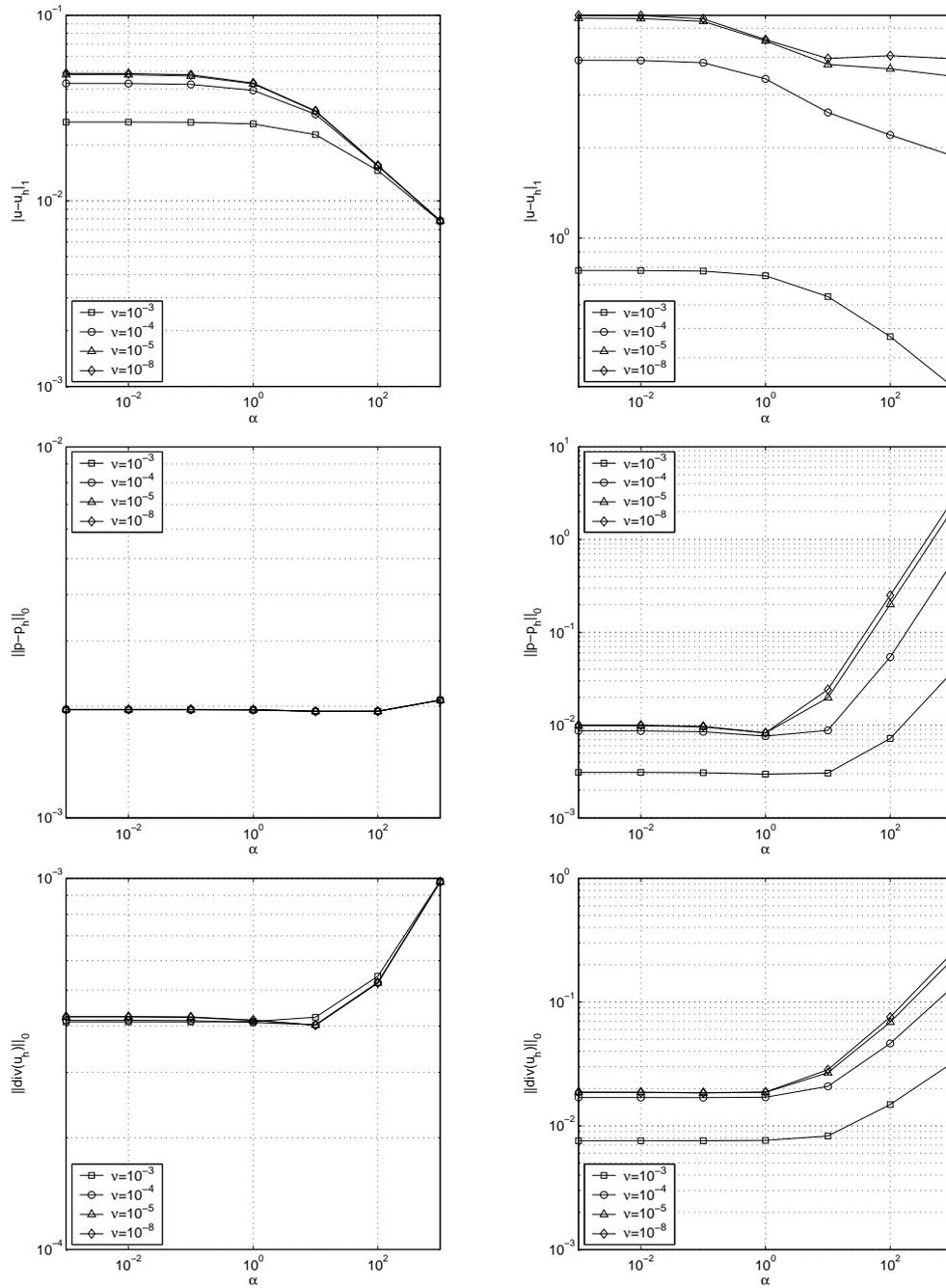
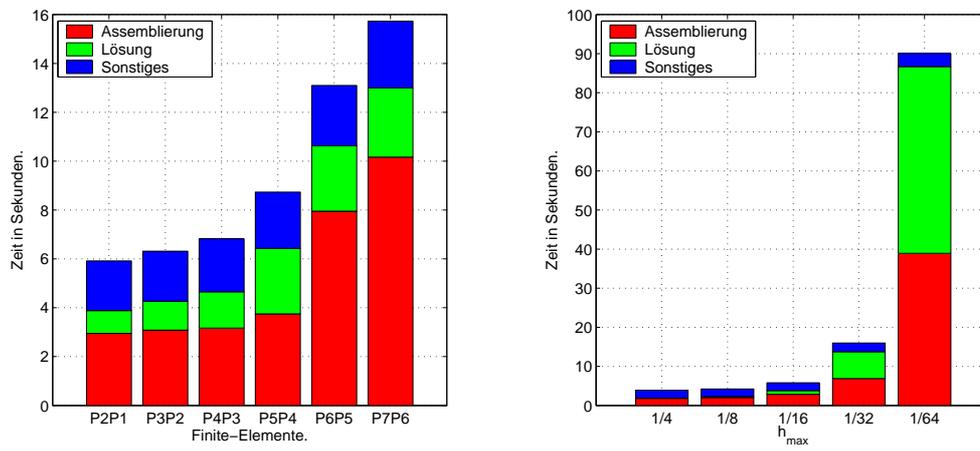


Abbildung 5.10: Variation der Konstanten  $\alpha$ : (links) Testbeispiel Nr. 1, (rechts) Testbeispiel Nr. 2

Abbildung 5.11: Zeitaufwand des Verfahrens  $\text{SUPG}_{\text{simple},bb}$ .



## Kapitel 6

# Finite-Elemente-Methoden für die Navier-Stokes-Gleichungen

In diesem Kapitel wird ein Verfahren vorgestellt, das die Berechnung einer Näherungslösung der *instationären* inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen auf die iterative Lösung (i. allg. vieler) Oseen-Gleichungen zurückführt. Das Verfahren wird verwendet, um für die Zeit  $t \rightarrow \infty$  Lösungen der *stationären* inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen zu berechnen, denen hier das eigentliche Interesse gilt. Diese Vorgehensweise bezeichnet man als *pseudo time stepping*. Die SUPG-Finite-Elemente-Methode für die Oseen-Gleichungen aus Abschnitt 5.1 wird in diesem Rahmen getestet. Das Referenzbeispiel „driven-cavity“ wird gerechnet und mit Ergebnissen aus der Literatur verglichen.

### 6.1 Die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen

Die Navier-Stokes-Gleichungen modellieren laminare (d.h. gleichmäßig, schichtweise gleitende) Strömungen in einem inkompressiblen Fluid (Flüssigkeit oder Gas). In das Modell einbezogen sind die Viskositätskonstante  $\nu$  und die Dichte  $\rho$  des Fluids, welche als konstant angenommen wird.

Das Strömungsgebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ( $n = 2$  oder  $n = 3$ ) sei ein beschränktes Lipschitz-Gebiet. Bei gegebenem Quellterm  $f(t, x) = (f_1(t, x), \dots, f_n(t, x))^T$  und Anfangsbedingung  $u_0(x)$  sind auf dem Raumzeitzyylinder  $Q_T := (0, T) \times \Omega$  das Geschwindigkeitsfeld  $u(t, x) = (u_1(t, x), \dots, u_n(t, x))^T$  und der Druck  $p(t, x)$  derart gesucht, daß

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + (u \cdot \nabla) u + \frac{1}{\rho} \nabla p &= f && \text{in } Q_T, \\ \operatorname{div} u &= 0 && \text{in } Q_T, \\ u &= 0 && \text{auf } (0, T) \times \partial\Omega, \\ u|_{t=0} &= u_0 && \text{auf } \Omega. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Vereinfachend werden nur homogene Dirichlet-Randbedingungen betrachtet, die in diesem Zusammenhang auch *Haftbedingungen an festen Wänden* heißen.

**Bemerkung 6.1.1.** Allein die Formulierung der wichtigsten Sätze zur Lösbarkeit der instationären inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen erfordert erhebliche Vorarbeiten. Daher wird auf [QuVa97], Kapitel 13 verwiesen.

Die Navier-Stokes-Gleichungen sind *dimensionsbehaftet*. Die Gleichungen (6.1) sind Gleichungen der Dimension

$$\frac{\text{Länge}}{\text{Zeit}^2},$$

d.h. Gleichungen von Beschleunigungen. Die Gleichungen werden durch eine geeignete Skalierung entdimensionalisiert. Dazu wählt man eine charakteristische Länge  $L$  und eine charakteristische Geschwindigkeit  $U$  der Strömung. Sinnvoll ist die Wahl  $L = \text{diam}(\Omega)$  und  $U := \|u\|_\infty$ , wobei die Größe  $\|u\|_\infty$  a priori geschätzt werden muß.

Man führt dimensionslose Größen ein:

$$\tilde{x} = \frac{x}{L}, \quad \tilde{y} = \frac{y}{L}, \quad \tilde{u} = \frac{u}{U} \quad \text{und} \quad \tilde{t} = \frac{t}{\tau} \quad \text{mit} \quad \tau = \frac{L}{U}.$$

Setzt man diese in (6.1) ein, so erhält man durch Anwendung der Kettenregel und Skalierung des Drucks  $\tilde{p} = \frac{1}{\rho U^2} p$  die dimensionslosen Gleichungen

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} - \frac{1}{\text{Re}} \Delta \tilde{u} + (\tilde{u} \cdot \nabla \tilde{u}) + \nabla \tilde{p} = f,$$

$$\text{div } \tilde{u} = 0.$$

Die Tilde wird im folgenden weggelassen. Die dimensionslose Kennzahl

$$\text{Re} := \frac{LU}{\nu}$$

heißt **Reynoldszahl** und charakterisiert das Strömungsfeld.

**Bemerkung 6.1.2.** Die Konstante  $\nu$  alleine sagt nichts darüber aus, welchen Einfluß die Viskosität auf eine Strömung hat. Das Strömungsfeld um ein großes Verkehrsflugzeug hat mit

$$U = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad L = 100\text{m} \quad \text{und} \quad \nu_{\text{Luft}} = 10^{-5}.$$

etwa die Reynoldszahl  $10^9$ . Will man diese Strömung mit einem Modell im Maßstab 1 : 100 in einem Windkanal simulieren, so muß man die Strömungsgeschwindigkeit  $U$  ver Hundertfachen, um eine Strömung der charakteristischen Größe  $\text{Re} = 10^9$  zu erhalten. Mathematisch werden diese Strömungen durch dieselben Gleichungen beschrieben. In der Realität sind sich die Strömungen laut Theorie zumindest *ähnlich*.

## 6.2 Numerische Verfahren

In [QuVa97] wird in Abschnitt 13.4 zur numerischen Lösung der instationären inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen das folgende semiimplizite  $\theta$ -Schema vorgeschlagen:

Ausgehend von einer Diskretisierung des Zeitintervalls  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_i < t_{i+1} < \dots$  mit der Schrittweite  $\Delta t_i := t_{i+1} - t_i$  wählt man mit  $\theta \in [0, 1]$  die Bezeichnungen

$$u_{k+\theta} := \theta u_{k+1} + (1 - \theta)u_k, \quad p_{k+\theta} := \theta p_{k+1} + (1 - \theta)p_k$$

und

$$F_{k+\theta} := \theta F_{k+1} + (1 - \theta)F_k.$$

Dann löst man mit einer geeigneten divergenzfreien Anfangsbedingung  $u_0$  für  $k = 0, 1, \dots, n$  numerisch das Schema

$$\begin{aligned} \frac{u_{k+1} - u_k}{\Delta t_i} - \frac{1}{\text{Re}} \Delta u_{k+\theta} + (u_{k+\theta} \cdot \nabla) u_{k+\theta} + \nabla p_{k+\theta} &= F_{k+\theta}, \\ \text{div } u_{k+\theta} &= 0, \\ u_{k+\theta}|_{\partial\Omega} &= 0. \end{aligned} \tag{6.2}$$

Für die Experimente im folgenden Abschnitt wurde das Verfahren  $\text{SUPG}_{\text{simple},bb}$  zur Ortsdiskretisierung verwendet.

**Bemerkung 6.2.1.** Praktisch löst man das System für  $u_{k+\theta}$  sowie  $p_{k+\theta}$  und setzt dann

$$u_{k+1} = \frac{1}{\theta} (u_{k+\theta} - (1 - \theta)u_k), \quad p_{k+1} = \frac{1}{\theta} (p_{k+\theta} - (1 - \theta)p_k).$$

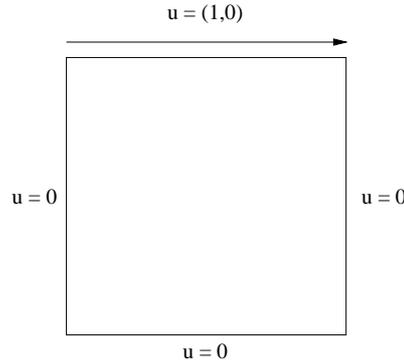
Für  $\theta \neq 0$  ist ein Anfangswert  $p_0$  erforderlich. Man kann  $p_0 = 0$  wählen.

## 6.3 Numerische Experimente

Das Referenzbeispiel für die Navier-Stokes-Gleichungen ist die driven-cavity. Auf dem Einheitsquadrat  $\Omega = (0, 1)^2$  werden an drei Seiten Haftbedingungen an festen Wänden vorgeschrieben. Eine Strömung entlang der vierten Seite induziert eine Strömung im inneren des Gebiets (vgl. Abbildung 6.1).

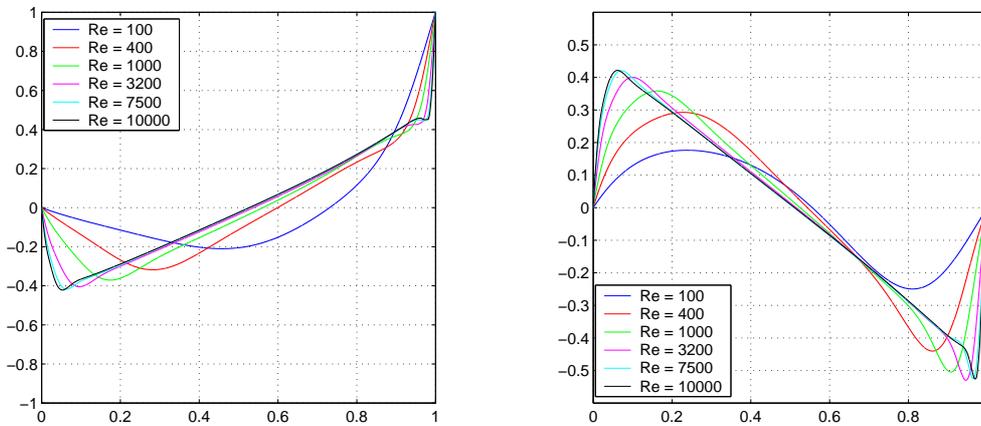
Die exakte Lösung der driven-cavity läßt sich nicht analytisch angeben, was eine Beurteilung von Näherungslösungen erschwert. Es ist daher übliche, einige charakteristische Größen der Näherungslösung zu berechnen und diese mit Lösungen aus der Literatur zu vergleichen, die mit sehr hohem Rechenaufwand erzielt wurden. Hier werden die Ergebnisse von [GhGhSh82] und [Zha90] herangezogen.

Die driven-cavity wurde mit dem  $\theta$ -Schema (6.2) für die Reynoldszahlen 100, 400, 1000, 3200, 7500 und 10000 gerechnet. Dabei wurde  $\theta = 2/3$  und die

Abbildung 6.1: Geometrie  $\Omega$  und Randbedingungen der driven-cavity.

Zeitschrittweite  $\tau = 0.1$  gesetzt. Das Schema wurde im Ort (a) mit  $P_2$ - $P_1$ -Element auf einem Gitter mit  $h_{max} = 1/48$  und (b) mit  $P_4$ - $P_3$ -Element auf einem Gitter mit  $h_{max} = 1/16$  gerechnet.

Abbildung 6.2 zeigt (a) Querschnitte durch die  $x$ -Komponente des Geschwindigkeitsfelds bei  $x = 0.5$  und (b) Querschnitte durch die  $y$ -Komponente des Geschwindigkeitsfelds bei  $y = 0.5$ . In Tabelle 6.3 sind das Minimum der Querschnitte a) bzw. die Extrama der Querschnitte b) für die verschiedenen Verfahren angegeben.

Abbildung 6.2: (a) Querschnitte durch die  $x$ -Komponente des Geschwindigkeitsfelds bei  $x = 0.5$ , (b) Querschnitte durch die  $y$ -Komponente des Geschwindigkeitsfelds bei  $y = 0.5$ 

Weitere Kennzahlen der driven-cavity beziehen sich auf die **Stromfunktion**  $\Psi$  des Geschwindigkeitsfelds  $u$ . Die Stromfunktion ist bis auf Addition einer Konstanten durch die Gleichungen

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_2} = u_1, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} = -u_2$$

| Re    |    | $u_{min}$ | $y_{min}$ | $v_{max}$ | $x_{max}$ | $v_{min}$ | $x_{min}$ |
|-------|----|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| 100   | a) | -0.20995  | 0.45794   | 0.17640   | 0.23785   | -0.24985  | 0.81103   |
|       | b) | -0.20838  | 0.45782   | 0.17525   | 0.23810   | -0.24835  | 0.81123   |
|       | c) | -0.21090  | 0.4531    | 0.17527   | 0.2344    | -0.24533  | 0.8047    |
|       | d) | -0.21411  | 0.45898   | 0.17964   | 0.23633   | -0.25391  | 0.81055   |
| 400   | a) | -0.31805  | 0.28271   | 0.29299   | 0.22835   | -0.44061  | 0.86139   |
|       | b) | -0.31369  | 0.28381   | 0.28864   | 0.22955   | -0.43515  | 0.86114   |
|       | c) | -0.32726  | 0.2813    | 0.30203   | 0.2266    | -0.44993  | 0.8594    |
|       | d) | -0.32926  | 0.27930   | 0.30433   | 0.22461   | -0.45455  | 0.86133   |
| 1000  | a) | -0.37101  | 0.17476   | 0.35850   | 0.16122   | -0.50488  | 0.90817   |
|       | b) | -0.36374  | 0.17584   | 0.35081   | 0.16278   | -0.49580  | 0.90753   |
|       | c) | -0.38289  | 0.1719    | 0.37095   | 0.1563    | -0.51550  | 0.9063    |
|       | d) | -0.39009  | 0.16992   | 0.37847   | 0.15820   | -0.52839  | 0.90820   |
| 3200  | a) | -0.40521  | 0.09583   | 0.40053   | 0.10035   | -0.53080  | 0.94612   |
|       | b) | -0.39495  | 0.09692   | 0.38936   | 0.10171   | -0.51787  | 0.94582   |
|       | c) | -0.41933  | 0.1016    | 0.42768   | 0.0938    | -0.54053  | 0.9453    |
|       | d) | -0.44006  | 0.09180   | 0.43814   | 0.09570   | -0.57228  | 0.94727   |
| 7500  | a) | -0.41759  | 0.06349   | 0.42084   | 0.07164   | -0.52524  | 0.96511   |
|       | b) | -0.41752  | 0.06360   | 0.41676   | 0.06775   | -0.53654  | 0.96184   |
|       | c) | -0.43590  | 0.0625    | 0.44030   | 0.0703    | -0.55216  | 0.9609    |
|       | d) | -0.46413  | 0.06445   | 0.47129   | 0.06836   | -0.58878  | 0.96289   |
| 10000 | a) | -0.42203  | 0.05357   | 0.42196   | 0.06192   | -0.52636  | 0.96973   |
|       | b) | -0.44660  | 0.05472   | 0.44718   | 0.06129   | -0.56585  | 0.96556   |
|       | c) | -0.42735  | 0.0547    | 0.43983   | 0.0625    | -0.54302  | 0.9688    |
|       | d) | -0.47512  | 0.05664   | 0.48774   | 0.06055   | -0.59495  | 0.96680   |

Tabelle 6.1: a)  $\theta$ -Schema mit  $P_2$ - $P_1$ -Element und  $h_{max} = 1/48$ , b) mit  $P_4$ - $P_3$ -Element und  $h_{max} = 1/16$ , c) Ghia et al. [GhGhSh82], d) Zhang [Zha90]

festgelegt. Die Stromfunktion muß im Post-Prozeß aus dem Geschwindigkeitsfeld berechnet werden. Es gilt

$$-\Delta\Psi = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}. \quad (6.3)$$

Wegen der Randbedingungen der driven-cavity ist die Stromfunktion Lösung der Poisson-Gleichung (6.3) mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen. Das Maximum der Stromfunktion für verschiedene Reynoldszahlen ist in Tabelle 6.3 angegeben. Isolinien der Stromfunktion sind den Abbildungen 6.3 - 6.6 gegeben.

Die erzielten Ergebnisse sind in Betracht des geringen Rechenaufwands sehr befriedigend und belegen die Eignung des Verfahrens  $\text{SUPG}_{simple,bb}$  als Ortsdiskretisierung des  $\theta$ -Schemas (6.2).

| Re    |    | $\Psi$ | x      | y      |
|-------|----|--------|--------|--------|
| 100   | a) | 0.1026 | 0.6161 | 0.7384 |
|       | b) | 0.1023 | 0.6209 | 0.7439 |
|       | c) | 0.1034 | 0.6172 | 0.7344 |
|       | d) | 0.1035 | 0.6172 | 0.7383 |
| 400   | a) | 0.1112 | 0.5539 | 0.6072 |
|       | b) | 0.1101 | 0.5554 | 0.6010 |
|       | c) | 0.1139 | 0.5547 | 0.6055 |
|       | d) | 0.1141 | 0.5547 | 0.6055 |
| 1000  | a) | 0.1144 | 0.5319 | 0.5669 |
|       | b) | 0.1124 | 0.5324 | 0.5682 |
|       | c) | 0.1179 | 0.5313 | 0.5625 |
|       | d) | 0.1193 | 0.5313 | 0.5664 |
| 3200  | a) | 0.1144 | 0.5228 | 0.5422 |
|       | b) | 0.1117 | 0.5208 | 0.5411 |
|       | c) | 0.1204 | 0.5165 | 0.5469 |
|       | d) | 0.1230 | 0.5156 | 0.5391 |
| 7500  | a) | 0.1152 | 0.5132 | 0.5313 |
|       | b) | 0.1125 | 0.5145 | 0.5330 |
|       | c) | 0.1200 | 0.5117 | 0.5322 |
|       | d) | 0.1253 | 0.5117 | 0.5313 |
| 10000 | a) | 0.1152 | 0.5149 | 0.5278 |
|       | b) | 0.1151 | 0.5113 | 0.5288 |
|       | c) | 0.1197 | 0.5117 | 0.5333 |
|       | d) | 0.1265 | 0.5117 | 0.5313 |

Tabelle 6.2: a)  $\theta$ -Schema mit  $P_2$ - $P_1$ -Element und  $h_{max} = 1/48$ , b) mit  $P_4$ - $P_3$ -Element und  $h_{max} = 1/16$ , c) Ghia et al. [GhGhSh82], d) Zhang [Zha90]

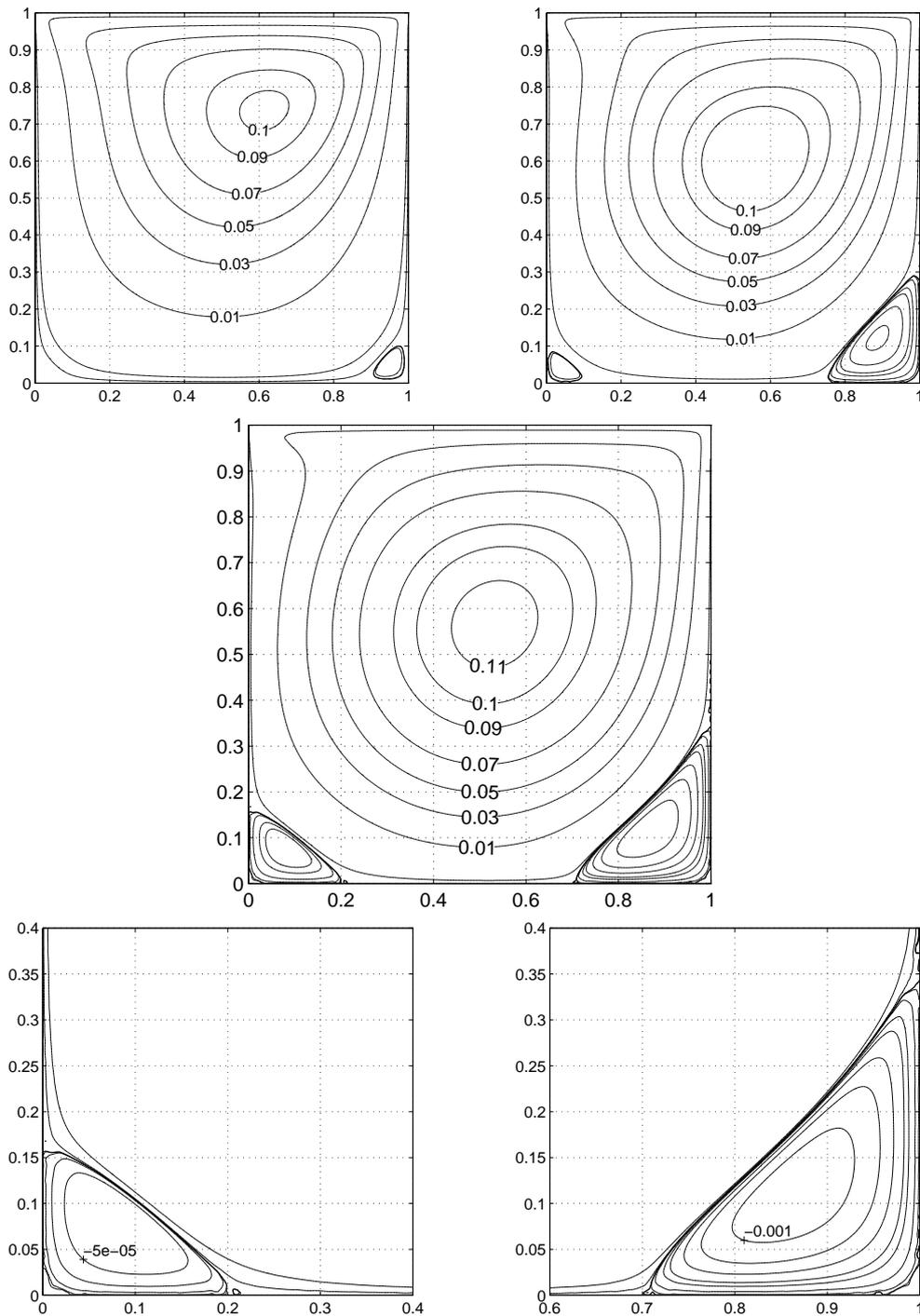
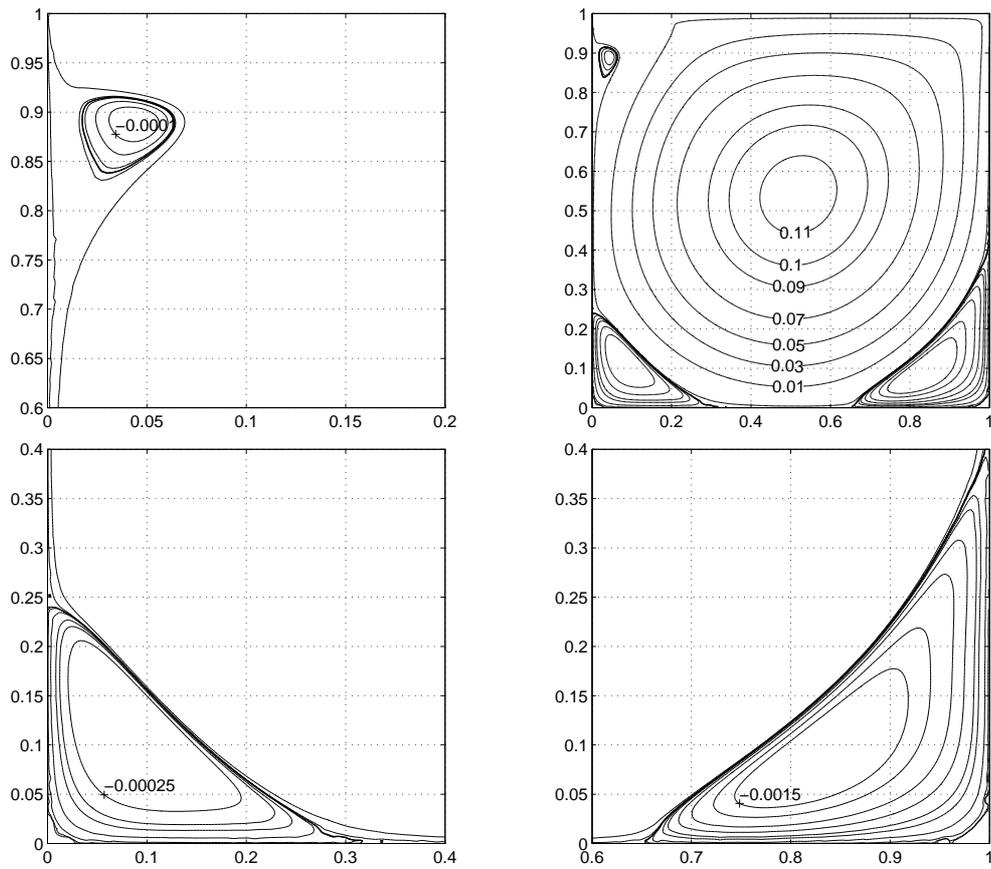
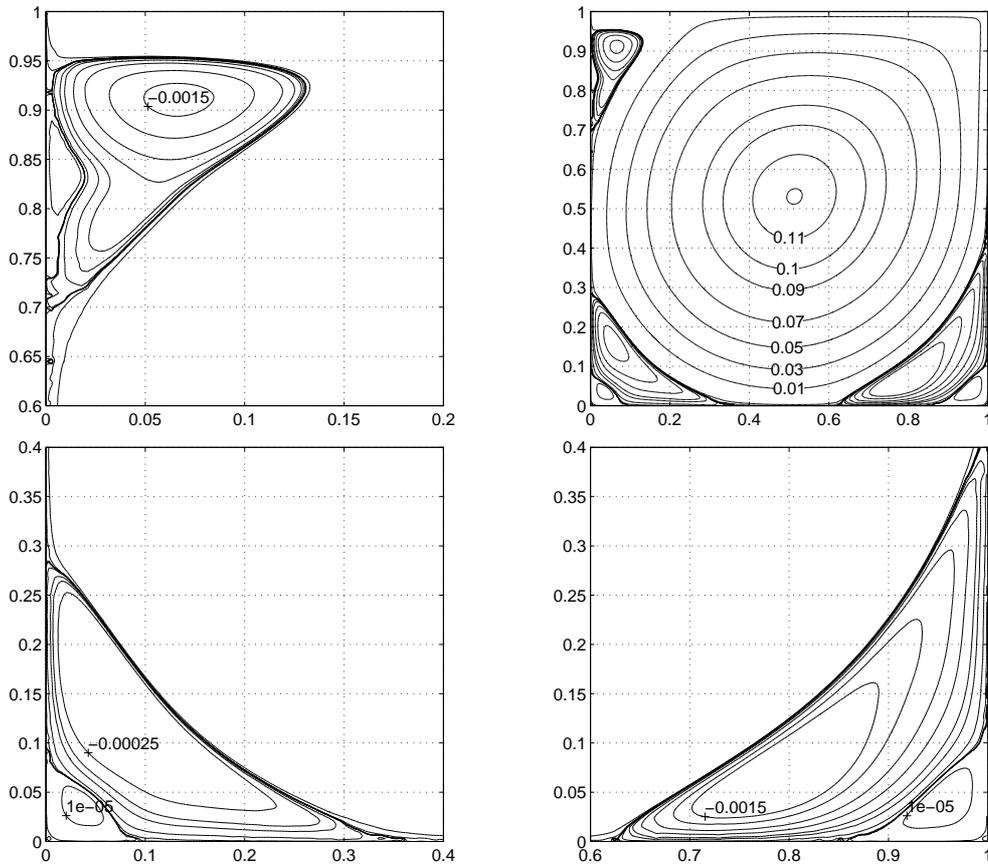
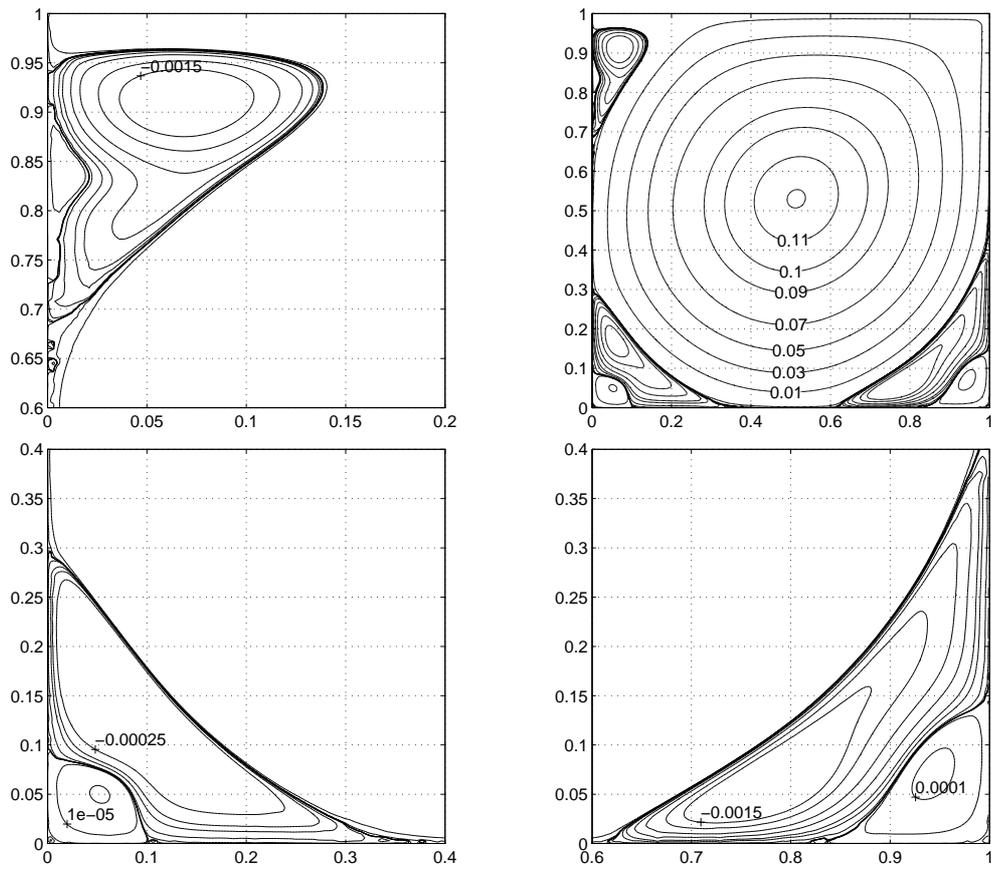


Abbildung 6.3: (oben links)  $Re = 100$ , (oben rechts)  $Re = 400$ , (mitte und unten)  $Re = 1000$

Abbildung 6.4:  $Re = 3200$

Abbildung 6.5:  $Re = 7500$

Abbildung 6.6:  $Re = 10000$

## Kapitel 7

# Zusammenfassung und Ausblick

Aufbauend auf einer Darstellung von Grundlagen der Analysis und Funktionalanalysis wurde ein Existenz- und Eindeutigkeitssatz für schwache Lösungen der Oseen-Gleichungen mit Dirichlet-Randbedingungen bewiesen. Nach einer kurzen Einführung in Finite-Elemente-Methoden, insbesondere gemischte Methoden, wurden numerische Verfahren für die Oseen-Gleichungen dargestellt und numerisch getestet. Das Ziel war ein Vergleich zwischen stabilisierten Finite-Elemente-Methoden für die Oseen-Gleichungen mit equal-order-Elementen einerseits und Finite-Elemente-Methoden mit den Babuška-Brezzi-stabilen Taylor-Hood-Elementen andererseits. Für SUPG-Verfahren mit Taylor-Hood-Elementen wurde eine häufig verwendete equal-order-optimierte Parameterwahl mit einer neuen Parameterwahl aus [GeLuOl03] verglichen, die besser auf Taylor-Hood-Elemente abgestimmt ist.

Die numerischen Experimente in den Abschnitten 4.3 und 5.2 bestätigen die theoretischen Konvergenzordnungen der Verfahren im Fall glatter Lösungen. Für die Stokes-Gleichungen fällt der Vergleich zwischen dem  $P_2$ - $P_1$ -Element und dem stabilisierten  $P_1$ - $P_1$ -Element klar zugunsten des  $P_2$ - $P_1$ -Elements aus. Rechnungen mit dem stabilisierten  $P_1$ - $P_1$ -Element erreichen die Genauigkeit einer Rechnung mit dem  $P_2$ - $P_1$ -Element auch dann nicht, wenn sie auf wesentlich feineren Gitter durchgeführt werden.

Das SUPG-Verfahren für die Oseen-Gleichungen mit Taylor-Hood-Elementen und der neuen Parameterwahl hat verbesserte Konvergenzeigenschaften. Zumindest bei der Erfüllung der Divergenzbedingung ist die Konvergenzrate signifikant besser (eine ganze Ordnung) als mit der equal-order-optimierten Parameterwahl. Der Hauptvorteil der neuen Parameterwahl ist aber die Robustheit gegenüber Variation der Viskosität  $\nu$  und des Stabilisierungsfaktors  $\gamma_0$ .

Es wurden auch Finite-Elemente-Methoden hoher Ordnung (mit dem  $P_k$ - $P_k$ - bzw.  $P_{k+1}$ - $P_k$ -Element,  $k = 1, 2, \dots, 6$ ) erprobt. Die Stabilisierungsparameter des GLS-Verfahrens für die Stokes-Gleichungen und des SUPG-Verfahrens für die Oseen-Gleichungen sind von der Ordnung des Verfahrens abhängig. Dieser

Zusammenhang wird durch die Theorie nicht wiedergegeben. So können Effekte, die bei Verfahren sehr hoher Ordnung auftreten (reduzierte Konvergenzraten beim  $L_2$ -Fehler der Divergenz), nicht erklärt werden. Insgesamt wird aufgrund der Erfahrungen bei den numerischen Experimenten empfohlen, Verfahren maximal vierten Ordnung zu verwenden.

Interessante Erkenntnisse über die Wirkung von SUPG-Verfahren für die Oseen-Gleichungen liefern die Querschnitte durch die  $x$ -Komponente der Geschwindigkeit der „Kanalströmung“ aus Abschnitt 5.2. Man kann an den exponentiellen Grenzschichten, die für kleine  $\nu$  stark ausgeprägt sind, die von Diffusions-Konvektions-Gleichungen bekannten „Überschwinger“ beobachten. Bei Verfahren hoher Ordnung nimmt die Amplitude dieser Überschwinger gegenüber Verfahren niedriger Ordnung deutlich ab. Dies hat die Hoffnung geweckt, daß Verfahren hoher Ordnung auch im nichtlinearen Kontext bessere Ergebnisse liefern. Die Experimente mit der driven-cavity, die für große Reynoldszahlen steile Grenzschichten aufweist (vgl. Abbildung 6.2), haben diese Hoffnung leider enttäuscht. Die Ergebnisse der Rechnungen mit dem  $P_4$ - $P_3$ -Element sind nicht besser als die der Versuche mit dem  $P_2$ - $P_1$ -Element.

Insgesamt wird für die numerische Behandlung der Oseen-Gleichungen das SUPG-Verfahren nach [GeLuOl03] mit dem  $P_2$ - $P_1$ -Element und vereinfachten Testfunktionen empfohlen. Insbesondere bei der Divergenzbedingung übertrifft es Verfahren mit equal-order-Parameterdesign. Die Hauptargumente für den Einsatz des Verfahrens in der Praxis sind der reduzierte Assemblierungsaufwand und die bereits erwähnte Robustheit des Verfahrens.

Die numerischen Resultate dieser Arbeit liefern zahlreiche Ideen für Verbesserungen und Erweiterungen: Die zusätzlichen Stabilisierungsterme der GLS- bzw. SUPG-Verfahren verändern die algebraischen Eigenschaften der entstehenden linearen Gleichungssysteme. Das hatte auf die Experimente in dieser Arbeit geringe Auswirkungen, da die linearen Gleichungssysteme nur mit direkten Lösern behandelt wurden. Bei der Konstruktion von Verfahren zur iterativen bzw. entkoppelten Lösung der linearen Gleichungssysteme (z.B. Uzawa-Verfahren) spielen deren algebraischen Eigenschaften eine maßgebliche Rolle.

Die Navier-Stokes-Gleichungen wurden mit einem  $\theta$ -Schema instationär gerechnet, um mit der Zeit  $t \rightarrow \infty$  die stationäre Lösung des Problems zu bestimmen. Dazu waren bei großen Reynoldszahlen einige hundert Iterationsschritte nötig. Es wäre daher interessant, verbesserte Linearisierungsstrategien für die Navier-Stokes-Gleichungen (z.B. Newton-Verfahren) zu testen. Der Rechenaufwand könnte außerdem durch die Verwendung adaptiver Verfahren reduziert werden. Zur Auflösung der Grenzschichten wäre der Test isoparametrischer Elemente interessant.

Alle Verfahren wurden mit der MATLAB-Toolbox FEMLAB implementiert. Der große Vorteil von FEMLAB ist, daß man neue Verfahren sehr schnell ausprobieren kann. Es ist motivierend, wenn man im Rahmen von Lehrveranstaltungen schnell Ergebnisse und Erfolgserlebnisse produzieren kann. Die hervorragenden Visualisierungsmöglichkeiten von FEMLAB/MATLAB sind ein weiterer Pluspunkt. Bei größeren Rechnungen und umfangreichen numerischen Experi-

menten zeigen sich aber auch Nachteile: Der enorme Speicherverbrauch bei der Assemblierung der Gleichungssysteme ist ein Flaschenhals, der Rechnungen in drei Dimensionen kaum zuläßt. Selbst im zweidimensionalen lassen sich Probleme nicht auf Gitterweiten rechnen, die in der Literatur allgemein üblich sind. Für größere Projekte ist die Skriptsprache MATLAB nicht besonders geeignet. Sie bietet dem Programmierer im Vergleich zu „richtigen“ Programmiersprachen, wie z.B. C/C++, zu wenig Möglichkeiten den Code zu strukturieren. Für Graduierungsarbeiten ist daher die Verwendung eines C/C++ basierten FEM-Codes wünschenswert.



# Anhang A

## FEMLAB

FEMLAB ist eine MATLAB-Toolbox, die Routinen zum Lösen von Randwertproblemen (RWP) mit Finite-Elemente-Methoden bereitstellt. Es wird gezeigt, wie man die FEMLAB-Routinen in einem `m`-File <sup>1</sup> verwendet, um ein RWP zu bearbeiten. Für Mathematiker muß transparent sein, was während des Lösungsvorgangs im Programm abläuft. Daher wird die graphische Benutzeroberfläche, über die FEMLAB als „Black-Box-Löser“ benutzbar ist, hier nicht besprochen. Dazu siehe [Femlab22]. Die Beispiele von `m`-Files, die in diesem Abschnitt gesammelt sind, implementieren jeweils ein konkretes RWP mit fest vorgegebenen Randbedingungen und Daten. Jedes dieser `m`-Files ist bewußt einfach gemacht. Die Beispiele dieser Sammlung sind Vorlagen, die sich schnell an eigene Bedürfnisse anpassen lassen sollten.

Zur Lösung eines RWP mit FEMLAB geht man in fünf Schritten vor:

1. Geometrie des Gebiets festlegen und Gitter erzeugen.
2. Die partielle Differentialgleichung (PDGL) spezifizieren.
3. Die Randbedingungen angeben.
4. Aus den Informationen in 1.-3. ein lineares Gleichungssystem assemblieren und lösen.
5. Die Lösung aufbereiten und visualisieren (Post-Prozeß).

### Geometrie und Gitter

Hier nur ein kurzes Beispiel wie man auf dem Einheitsquadrat ein Gitter erzeugt und global verfeinert:

---

<sup>1</sup>Das ist ein MATLAB-Skript, das man in der MATLAB-Shell aufrufen kann.

```
fem.geom = square2(0,0,1);
fem.mesh = meshinit(fem.geom,'hmax',1/16);
fem.mesh = meshrefine(fem,'out',{'mesh'});
```

Mit den folgenden Befehlen kann man die Geometrie und das Gitter in einem Bildschirmfenster anzeigen:

```
subplot(1,2,1),
geomplot(fem,'edgelabels','on');
subplot(1,2,2),
meshplot(fem);
```

Die Option ['edgelabels','on'] für `geomplot` schaltet die Numerierung der Kanten im Plot ein. Diese Informationen benötigt man später zur Spezifikation der Randbedingungen. Wie man kompliziertere Geometrien erzeugt, wird in [Femlab22] S. 3-10 ff. erklärt.

## Partielle Differentialgleichung und Randbedingungen

Angenommen man möchte ein RWP auf einem beschränkten Gebiet  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  mit  $n$  Raumkoordinaten lösen. Die zugehörige PDGL habe  $N$  Gleichungen.

**Beispiel.** Bei den Stokes-Gleichungen auf einem Gebiet  $\Omega \in \mathbb{R}^2$  ist  $n = 2$  und die Anzahl der Unbekannten  $N = 3$ :  $x$ -Richtung der Geschwindigkeit,  $y$ -Richtung der Geschwindigkeit und Druck.

Man kann  $n$  und  $N$  im `m`-File folgendermaßen angeben:

```
fem.sdim = 2; % Anzahl der Raumkoordinaten.
fem.dim = 3; % Anzahl der zu bestimmenden Funktionen.
```

Die Raumkoordinaten können mit `x1,x2,...,xn` angesprochen werden, die gesuchten Funktionen mit `u1,u2,...,uN`. Alternativ kann man andere Bezeichnungen angeben, die im Rahmen eines bestimmten Problems suggestiver sind:

```
fem.sdim = {'x','y'};
fem.dim = {'u','v','p'};
```

Man kann ein Randwertproblem in **coefficient**-, **general**- oder **weak**-Form angeben. Welche Form verwendet wird, bestimmt man durch eine Zuweisung an `fem.form` z.B.:

```
fem.form = 'general';
```

In der **coefficient**-Form (vgl. [Femlab22], S. 3-25 ff.) kann das folgende allgemeine RWP numerisch behandelt werden:

$$-\nabla(c\nabla u + \alpha u - \gamma) + \beta\nabla u + au = f \quad \text{in } \Omega, \quad (\text{A.1})$$

$$\nu(c\nabla u + \alpha u - \gamma) + qu = g - h^*\lambda \quad \text{auf } \partial\Omega, \quad (\text{A.2})$$

$$hu = r \quad \text{auf } \partial\Omega. \quad (\text{A.3})$$

Die PDGL spezifiziert man durch Angabe der Koeffizienten der Gleichung (A.1), die Randbedingungen durch Angabe der Koeffizienten der Gleichungen (A.2) und (A.3). Dabei ist  $\lambda$  ein Lagrange-Multiplikator, der bei der schwachen Einarbeitung der Randbedingungen entsteht (vgl. [Femlab22], S. 3-104 ff.). Wählt man beispielsweise  $h = 1$ ,  $q = 0$  und  $g = 0$ , so werden die Dirichlet-Randbedingungen  $u = r$  schwach eingearbeitet. Wie man die Koeffizienten spezifiziert, wird in Skript A.1 am Beispiel der Stokes-Gleichungen verdeutlicht.

In der **general**-Form (vgl. [Femlab22], S. 3-29 ff.) wird das RWP in der Form

$$\nabla \cdot \Gamma = F \quad \text{in } \Omega, \quad (\text{A.4})$$

$$-\nu \cdot \Gamma = G + \left(\frac{\partial R}{\partial u}\right)^* \lambda \quad \text{auf } \partial\Omega, \quad (\text{A.5})$$

$$0 = R \quad \text{auf } \partial\Omega \quad (\text{A.6})$$

angegeben. Dabei sind der Vektor  $\Gamma$  und die Skalare  $F$ ,  $R$  und  $G$   $n$ -wertige Funktionen der Raumkoordinaten, der Unbekannten  $u_1, u_2, \dots$  und ihrer Ableitungen. Ein Beispiel zur Erläuterung der **general**-Form findet man in Skript A.2.

FEMLAB konvertiert die Gleichungen intern in eine schwache Formulierung. Dabei wird in der **coefficient**-Form der Term  $-\nabla(c\nabla u + \alpha u - \gamma)$  partiell integriert, in der **general**-Form der Vektor  $\Gamma$ . Prinzipiell sind **coefficient**-Form und **general**-Form äquivalent. Der Unterschied besteht in der Behandlung nichtlinearer Gleichungen (vgl. [Femlab22], S. 3-108). Da die Anwendung des nichtlinearen Löser `femlin` problematisch ist (man muß *sehr* gute Startlösungen angeben), wurden die Navier-Stokes-Gleichungen „von Hand“ linearisiert (vgl. Skript A.4).

Die flexibelste Möglichkeit das RWP zu spezifizieren ist die **weak**-Form (vgl. [Femlab22], S. 3-35 ff.). Eine detaillierte Darstellung würde den Rahmen dieser Kurzeinführung in FEMLAB sprengen. Man kann die **weak**-Form aber auch dazu benutzen, einem RWP in **coefficient**- oder **general**-Form zusätzliche Terme in schwacher Form hinzuzufügen. Dieses Vorgehen ist sehr praktisch,

wenn Stabilisierungsterme in schwacher Form zu einer Gleichung addiert werden sollen. Die Skripte A.2 und A.3 zeigen, wie man den Stokes- bzw. Oseen-Gleichungen eine GLS- bzw. SUPG-Stabilisierung hinzufügt.

### Gleichungssystem assemblieren und lösen

Als nächstes muß noch die Ordnung der verwendeten Lagrange-Elemente festgelegt und Datenstrukturen für die Verwendung von Elementen höherer Ordnung erzeugt werden:

```
fem.shape = [2 2 1];
fem.xmesh = meshextend(fem);
```

Das lineare Gleichungssystem wird mit `assemble` erzeugt. In dieser Arbeit wurde nur der direkte Löser `femlin` verwendet.

```
[K, L, M, N] = assemble(fem);
fem.sol = femlin(fem, 'in', {'K' K 'L' L 'M' M 'N' N });
```

### Post-Prozeß

Zur Auswertung der Näherungslösung müssen die „Rohdaten“ aufbereitet werden. Bei den Oseen-Gleichungen und verwandten Modellen entstehen dabei besondere Probleme: Die diskrete Lösung des Drucks  $p_h$  erfüllt i. allg. nicht die Bedingung  $\int_{\Omega} p_h \, dx = 0$ , da für die von FEMLAB verwendete Lagrange-Basis  $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_M)$  nicht  $\int_{\Omega} \varphi_i \, dx = 0$  für  $i = 1, 2, \dots, M$  gilt. In Skript A.1 (Zeile 46/47) sieht man, wie der Druck *nachträglich* normiert werden kann.

FEMLAB bietet sehr vielfältige Visualisierungsmöglichkeiten. Einige davon werden in den folgenden Beispielskripten vorgeführt. Zur Visualisierung eines Geschwindigkeitsfelds  $(u_1, u_2)$  ist die zugehörige Stromfunktion  $\Psi$  nützlich (vgl. Abschnitt 6.3). Wie man diese durch Lösen der Poisson-Gleichung (6.3) bestimmen kann, wird in Skript A.4 gezeigt.

In Skript A.1 wird die  $L_2$ -Norm der Divergenz des Geschwindigkeitsfelds berechnet. Analog kann man auch andere Fehlernormen ausrechnen.

## A.1 Die Stokes-Gleichungen I

```

1  clear fem;
2  %-----
3  % 1) Geometrie und Gitter
4  fem.geom = square2(0,0,1);
5  fem.mesh = meshinit(fem.geom,'hmax',1/16);
6
7  %-----
8  % 2) Stokes-Gleichungen
9  fem.sdim = {'x','y'};
10 fem.dim = {'u','v','p'};
11
12 fem.form = 'coefficient';
13
14 fem.equ.c = {{1 1 0}};
15 fem.equ.be = {{0 0} {0 0} {0 0};...
16             {0 0} {0 0} {0 0};...
17             {1 0} {0 1} {0 0}}};
18 fem.equ.al = {{0 0} {0 0} {-1 0};...
19             {0 0} {0 0} {0 -1};...
20             {0 0} {0 0} {0 0}}};
21 fem.equ.f = {'+pi^2*sin(pi*x)+pi*cos(pi*x)*cos(pi*y)'...
22             '-pi^3*y*cos(pi*x)-pi*sin(pi*x)*sin(pi*y)'...
23             '0'};
24
25 %-----
26 % 3) Randbedingungen
27 fem.bnd.r = {'sin(pi*x)' '0'};...
28             {'0' 'pi*y'};...
29             {'sin(pi*x)' '-pi*cos(pi*x)'};...
30             {'0' '-pi * y'};
31 fem.bnd.h = {{1 0 0; 0 1 0}; {1 0 0; 0 1 0};...
32             {1 0 0; 0 1 0}; {1 0 0; 0 1 0}}};
33 fem.bnd.ind = [1 2 3 4];
34
35 %-----
36 % 4) Assemblieren und Lösen des LGS
37 fem.shape = [2 2 1];
38 fem.xmesh = meshextend(fem);
39
40 [K, L, M, N] = assemble(fem);
41 fem.sol = femlin(fem,'in',{'K' K 'L' L 'M' M 'N' N });
42
43

```

```

44  %-----
45  % 5) Post-Prozess
46  [node_idx_p, dummy, sol_idx_p] = find(fem.xmesh.gdof{1}(:,3));
47  fem.sol.u(sol_idx_p) = fem.sol.u(sol_idx_p)-postint(fem,'p');
48
49  subplot(1,2,1),
50  postplot(fem,'arrowdata',{ 'u', 'v'}, 'axis', [0 1 0 1]);
51  subplot(1,2,2),
52  postcont(fem,'p');
53
54  L2_Norm_Div(fem)

```

```

1  function err = L2_Norm_Div(fem)
2
3  fem = rmfield(fem,'equ');
4  fem.equ.weak={ '-(ux+vy)*ux_test'; '-(ux+vy)*vy_test'; '0' };
5  fem.xmesh = meshextend(fem);
6  K = assemble(fem,'out',{ 'K' });
7  err = sqrt(fem.sol.u' * K * fem.sol.u);

```

Das Skript A.1 rechnet das Testbeispiel Nr.1 aus Abschnitt 4.3 für die Stokes-Gleichungen mit dem  $P_2$ - $P_1$ -Element. Die Gleichungen sind in `coefficient`-Form angegeben. In Zeile 37 werden die Ordnungen der Lagrange-Elemente für die einzelnen Lösungskomponenten angegeben. Der Druck  $p_h$  wird in den Zeilen 46/47 nachträglich auf  $\int_{\Omega} p_h \, dx = 0$  normiert. In den Zeilen 49-52 wird das Geschwindigkeitsfeld als Vektorfeld und der Druck durch Isobaren visualisiert.

Mit der Funktion `L2_Norm_Div` wird die  $L^2$ -Norm der Divergenz des Geschwindigkeitsfelds berechnet: Sei  $(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_M)$  eine Basis des Finite-Elemente-Raums in dem FEMLAB das Geschwindigkeitsfeld  $u$  approximiert. Dann läßt sich die Näherungslösung  $u_h$  mit einem Koeffizientenvektor  $U \in \mathbb{R}^M$  bezüglich dieser Basis darstellen:

$$u_h = \sum_{i=1}^M U_i \varphi_i$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \|\operatorname{div} u_h\|_0^2 &= \left( \operatorname{div} \left( \sum_{i=1}^M U_i \varphi_i \right), \operatorname{div} \left( \sum_{j=1}^M U_j \varphi_j \right) \right) \\ &= \sum_{i=1}^M U_i \sum_{j=1}^M U_j \underbrace{(\operatorname{div} \varphi_i, \operatorname{div} \varphi_j)}_{=: K_{ji}} = U^T K U. \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvektor  $U$  steht in `fem.sol.u` und die Matrix  $K$  läßt sich leicht mit FEMLAB assemblieren.

## A.2 Die Stokes-Gleichungen II

```

1  clear fem;
2  %-----
3  % 1) Geometrie und Gitter
4  fem.geom = square2(0,0,1);
5  fem.mesh = meshinit(fem.geom,'hmax',1/16);
6
7  %-----
8  % 2) Stokes-Gleichungen
9  fem.sdim = {'x','y'};
10 fem.dim = {'u','v','p'};
11
12 fem.form = 'general';
13
14 F1 = '+pi^2*sin(pi*x)+pi*cos(pi*x)*cos(pi*y)';
15 F2 = '-pi^3*y*cos(pi*x)-pi*sin(pi*x)*sin(pi*y)';
16
17 fem.equ.ga = {{...
18     {'-ux+p' '-uy'} ...
19     {'-vx' '-vy+p'} ...
20     {'0' '0'}}};
21 fem.equ.f = {{F1 F2 '-(ux+vy)'};
22
23 % GLS-Stabilisierung in schwacher Form
24 fem.variables = {'theta' 0.1};
25 GLS1 = ['-theta*h^2*(-(uxx+uyy)+px-',F1,')' ...
26         '*(-(uxx_test+uyy_test)+px_test)'];
27 GLS2 = ['-theta*h^2*(-(vxx+vyy)+py-',F2,')' ...
28         '*(-(vxx_test+vyy_test)+py_test)'];
29 fem.equ.weak = {{GLS1 GLS2 '0'}};
30
31 %-----
32 % 3) Randbedingungen
33 fem.bnd.r = {{{'sin(pi*x)-u' '0-v'};...
34              {'0-u' '(pi*y)-v'};...
35              {'sin(pi*x)-u' '(-pi*cos(pi*x))-v'};...
36              {'0-u' '(-pi*y)-v'}}};
37 fem.bnd.g = 0;
38 fem.bnd.ind = [1 2 3 4];
39
40 %-----
41 % 4) Assemblieren und Lösen des LGS
42 fem = femdiff(fem);          % vor mesnextend!
43 fem.shape = [1 1 1];

```

```

44 fem.xmesh = meshextend(fem);
45
46 [K, L, M, N] = assemble(fem);
47 fem.sol = femlin(fem,'in',{'K' K 'L' L 'M' M 'N' N });
48
49 %-----
50 % 5) Post-Prozess
51 [node_idx_p, dummy, sol_idx_p] = find(fem.xmesh.gdof{1}(:,3));
52 fem.sol.u(sol_idx_p) = fem.sol.u(sol_idx_p)-postint(fem,'p');
53
54 subplot(1,2,1),
55 postplot(fem,'arrowdata',{'u','v'},'axis',[0 1 0 1]);
56 subplot(1,2,2),
57 postsurf(fem,'p','triz','p');

```

Das Skript A.2 rechnet auch das Testbeispiel Nr. 1 für die Stokes-Gleichungen. An dieser Stelle wird die Gleichung aber in **general**-Form angegeben und mit dem GLS-stabilisierten  $P_1$ - $P_1$ -Element diskretisiert (vgl. Abschnitt 4.3). In den Zeilen 24-28 werden die Stabilisierungsterme als Zeichenketten definiert und in Zeile 29 dem Feld `fem.equ.weak` zugewiesen. Der Stabilisierungsparameter `theta` hat ein negatives Vorzeichen, da in `fem.equ.weak` alle Terme auf der rechten Seite der Gleichung stehen.

Der Druck wird in diesem Skript als Fläche dargestellt.

### A.3 Die Oseen-Gleichungen

```

1  clear fem;
2  %-----
3  % 1) Geometrie und Gitter
4  fem.geom = square2(0,0,1);
5  fem.mesh = meshinit(fem.geom,'hmax',1/16);
6
7  %-----
8  % 2) Oseen-Gleichungen
9  fem.sdim = {'x','y'};
10 fem.dim = {'u','v','p'};
11
12 fem.form = 'coefficient';
13
14 F1 = '(1+sqrt(nu))*(exp(-y/sqrt(nu))+exp(-(1-y)/sqrt(nu)))';
15 F2 = '-x * (exp(-y/sqrt(nu))-exp(-(1-y)/sqrt(nu)))';
16
17 fem.equ.c = {'nu' 'nu' 0};
18 fem.equ.be = { ...
19     {'b1' 'b2'} {0 0}      {0 0}; ...
20     {0 0}      {'b1' 'b2'} {0 0}; ...
21     {1 0}      {0 1}      {0 0} ...
22     };
23 fem.equ.al = { ...
24     {0 0} {0 0} {-1 0}; ...
25     {0 0} {0 0} {0 -1}; ...
26     {0 0} {0 0} {0 0} ...
27     };
28 fem.equ.f = {'F1 F2 '0'};
29
30 % SUPG- und Grad-Div-Stabilisierung in schwacher Form
31 fem.variables = {'nu' 10^-4 'gamma' 1/2 'delta' 2};
32 DIV1 = '+gamma*(ux+vy)*ux_test';
33 DIV2 = '+gamma*(ux+vy)*vy_test';
34 SUPG1 = ['+(h^2/gamma)', ...
35          '*(-nu*(uxx+uyy)+(b1*ux+b2*uy)+px-',F1,')', ...
36          '* (b1*ux_test+b2*uy_test)'];
37 SUPG2 = ['+(h^2/gamma)', ...
38          '*(-nu*(vxx+vyy)+(b1*vx+b2*vy)+py-',F2,')', ...
39          '* (b1*vx_test+b2*vy_test)'];
40 fem.equ.weak = ...
41     {'-(',SUPG1,DIV1,')';['-(',SUPG2,DIV2,')'];''};
42
43

```

```

44  %-----
45  % 3) Randbedingungen
46  fem.bnd.r = ...
47      {'-exp(-1/(sqrt(nu)))' '0'};...
48      {'(1-exp(-y/sqrt(nu))-exp(-(1-y)/sqrt(nu)))' '0'};...
49      {'-exp(-1/(sqrt(nu)))' '0'};...
50      {'(1-exp(-y/sqrt(nu))-exp(-(1-y)/sqrt(nu)))' '0'}};
51  fem.bnd.h = {[1 0 0; 0 1 0]; [1 0 0; 0 1 0];...
52              [1 0 0; 0 1 0]; [1 0 0; 0 1 0]};
53  fem.bnd.ind = [1 2 3 4];
54
55  %-----
56  % 4) Assemblieren und Lösen des LGS
57  fem.shape = [2 2 1];
58  fem.xmesh = meshextend(fem);
59  fem.sol = eval_on_mesh(fem,...
60      '1 - exp(-y/sqrt(nu)) - exp(-(1-y)/sqrt(nu))', '0', '0');
61  fem.sol = femlin(fem);
62
63  %-----
64  % 5) Post-Prozess
65  [node_idx_p, dummy, sol_idx_p] = find(fem.xmesh.gdof{1}(:,3));
66  fem.sol.u(sol_idx_p) = fem.sol.u(sol_idx_p)-postint(fem,'p');
67
68  subplot(1,2,1),
69  postsurf(fem,'1','Grid','on','triz','u',...
70          'trifacestyle','bg','triedgestyle','bginv',...
71          'tribar','off','trirefine',3),
72  subplot(1,2,2),
73  postcrossplot(fem,1,[0.5 0.5;0 1],'lindata','u',...
74              'axisequal','on','grid','on');

```

Mit Skript A.3 können die Oseen-Gleichungen numerisch gelöst werden. Hier wird das Testbeispiel Nr.2 verwendet. Im Vergleich zu den Stokes-Gleichungen muß zusätzlich der Konvektionsterm  $(b \cdot \nabla)u$  angegeben werden. Dabei ist folgendes zu bedenken: Wird die Oseen-Gleichungen innerhalb eines iterativen Verfahrens zur Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen verwendet (z.B. Verfahren (6.2)), so läßt sich das Konvektionsfeld  $b$  nicht analytisch angeben, sondern ist diskret auf den Knotenpunkten der Elemente gegeben. Wird das Geschwindigkeitsfeld mit dem  $P_2$ -Element approximiert, so sind die Punkte wie in Abbildung A.1 links verteilt. Bei der Assemblierung muß FEMLAB Integrale ausrechnen, die den nichtkonstanten Koeffizienten  $b$  enthalten. Da FEMLAB dazu Gauß-Quadraturformeln verwendet, braucht man dazu Werte von  $b$  auf Punkten im inneren der Elemente (vgl. Abbildung A.1 rechts). Dazu muß  $b$  genügend genau interpoliert werden. Diese Aufgabe läßt sich mit `coefficient-m-Files`

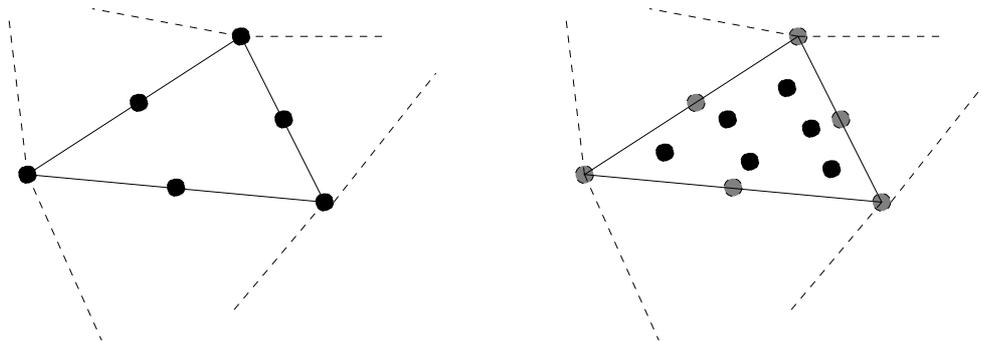


Abbildung A.1: Links die Lage der Knotenpunkte, rechts die Lage der Gauß-Integrationspunkte beim  $P_2$ -Element.

erledigen. Das hier angegebene Skript ist [Femlab22] S. 3-85 entnommen. Der Funktionsname des `coefficient-m`-Files, in diesem Fall `b1`, kann bei der Spezifizierung des RWP als Koeffizient angegeben werden. Es verwendet die Daten die *vor* der Lösung der Finite-Elemente-Methode in `fem.sol.u` stehen, um Werte von  $b$  zu interpolieren. *Nach* Lösung der Finite-Elemente-Methode sind die Daten in `fem.sol.u` mit dem Lösungsvektor der Finite-Elemente-Methode überschrieben. Da in Skript A.3 die Oseen-Gleichungen nicht im Rahmen eines Verfahrens zur Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen gerechnet wird, wird in den Zeilen 59/60 der Vektor `fem.sol.u` vor Lösung der Finite-Elemente-Methode mit Hilfe der Funktion `eval_on_mesh` mit Werten gemäß Testbeispiel Nr. 2 initialisiert.

In den Zeilen 30-41 wird eine Grad-Div- und eine SUPG-Stabilisierung in schwacher Form hinzugefügt.

Der Visualisierungsteil des Skripts zeigt, wie man die  $x$ -Komponente des Geschwindigkeitsfelds  $u$  und einen Querschnitt bei  $x = 0.5$  ausgeben kann.

```

1  function value = b1(flag,fem,edim,imdomgrp,me,ep,u,unstr)
2
3  order = 2*fem.shape(1)+1;
4
5  switch flag
6
7  case 'eval'
8      x = flelemeval(fem,edim,imdomgrp,me,ep,u,'x',unstr);
9      y = flelemeval(fem,edim,imdomgrp,me,ep,u,'y',unstr);
10
11     value = postinterp(fem,'u',[x(:)';y(:)'],...
12                        'cont','on','contorder',order,'ext',1);
13     value = reshape(value, size(x));
14
15 case {'jac', 'jaci'}

```

```
16     value = cell(1,0);
17 end;
```

```
1 function sol = eval_on_mesh(fem,expr1,expr2,expr3)
2
3 if isfield(fem,'variables')
4     for i = 1:2:length(fem.variables)
5         if strcmp(fem.variables{i}, 'nu') & ...
6             isnumeric(fem.variables{i+1})
7             nu = fem.variables{i+1};
8         end;
9     end;
10 end;
11
12 [node_idx_u, dummy, sol_idx_u] = find(fem.xmesh.gdof{1}(:,1));
13 [node_idx_v, dummy, sol_idx_v] = find(fem.xmesh.gdof{1}(:,2));
14 [node_idx_p, dummy, sol_idx_p] = find(fem.xmesh.gdof{1}(:,3));
15
16 dof = length(node_idx_u)...
17       + length(node_idx_v) + length(node_idx_p);
18 sol.u = zeros(dof,1);
19
20 x = fem.xmesh.p{1}(1,node_idx_u);
21 y = fem.xmesh.p{1}(2,node_idx_u);
22 sol.u(sol_idx_u) = eval(expr1)';
23
24 x = fem.xmesh.p{1}(1,node_idx_v);
25 y = fem.xmesh.p{1}(2,node_idx_v);
26 sol.u(sol_idx_v) = eval(expr2)';
27
28 x = fem.xmesh.p{1}(1,node_idx_p);
29 y = fem.xmesh.p{1}(2,node_idx_p);
30 sol.u(sol_idx_p) = eval(expr3)';
```

## A.4 Die Navier-Stokes-Gleichungen

Skript A.4 implementiert das semiimplizite  $\theta$ -Schema (6.2) für die Navier-Stokes-Gleichungen. Randbedingungen und rechte Seite sind so gewählt, daß die „driven-cavity“ gerechnet wird (vgl. Abschnitt 6.3). In der Zeitschleife in den Zeilen 69-81 werden in jedem Schritt jeweils einmal die Oseen-Gleichungen gelöst. Da in `fem.sol.u` die Lösung des letzten Zeitschritts steht, werden die Koeffizienten `b1` und `b2` durch die `coefficient-m`-Files richtig berechnet. In Zeile 64 vor der Zeitschleife wird `fem.sol.u` mit 0 initialisiert. Zusätzlich zu den drei Gleichungen für die Lösungskomponenten  $u$ ,  $v$  und  $p$  wird in den Zeilen 18-37 die Poisson-Gleichung (6.3), die die Stromfunktion  $\Psi$  des Geschwindigkeits ( $u, v$ ) festlegt, gleich mitangegeben. Mit der Option `solcomp` kann man dem Löser `femlin` mitteilen, welche Lösungskomponenten er berechnen soll. Da in der Zeitschleife nur nach  $\{u, v, p\}$  gelöst wird, entsteht dort durch die Gleichung für  $\Psi$  kein zusätzlicher Zeit- oder Speicherbedarf. Die Stromfunktion  $\Psi$  wird in Zeile 88 nur auf dem letzten Zeitschritt berechnet. In Zeile 91 werden die Isolinien der Stromfunktion  $\Psi$  visualisiert.

```

1  clear fem;
2  %-----
3  % 1) Geometrie und Gitter und Konstanten
4  fem.geom = square2(0,0,1);
5  fem.mesh = meshinit(fem.geom, 'hmax', 1/16);
6
7  Re = 1000;
8  tau = 0.5;
9  theta = 2/3;
10 max_timesteps = 20;
11 tolerance = 10^-1;
12
13 %-----
14 % 2) Oseen-Gleichungen
15 fem.dim = {'u' 'v' 'psi' 'p'};
16 fem.sdim = {'x' 'y'};
17
18 fem.variables = {'nu' 1/Re 'tau' tau 'theta' theta 'gamma' 1};
19 fem.form = 'coefficient';
20
21 fem.equ.c = {'nu' 'nu' '1' 0};
22 fem.equ.be = {{{'b1' 'b2'} {0 0} {0 0} {0 0};...
23               {0 0} {'b1' 'b2'} {0 0} {0 0};...
24               {0 0} {0 0} {0 0} {0 0};...
25               {1 0} {0 1} {0 0} {0 0}}};
26 fem.equ.al = {{{0 0} {0 0} {0 0} {'-1' 0};...
27               {0 0} {0 0} {0 0} {0 '-1'}};...
28               {0 0} {0 0} {0 0} {0 0}}};

```

```

29         {0 0} {0 0} {0 0} {0 0}}};
30 fem.equ.a = {{'1/(tau*theta)' 0 0 0;...
31             0 '1/(tau*theta)' 0 0;...
32             0 0 0 0;...
33             0 0 0 0 }}};
34 fem.equ.f = {{'1/(tau*theta) * b1';...
35             '1/(tau*theta) * b2';...
36             'uy-vx';...
37             '0'}}};
38
39 SUPG1 = ['+(h^2/gamma)*((1/(tau*theta))*u-nu*(uxx+uyy)',...
40         '(b1*ux+b2*uy)+px-(1/(tau*theta))*b1)',...
41         '(b1*ux_test+b2*uy_test)'];
42 SUPG2 = ['+(h^2/gamma)*((1/(tau*theta))*v-nu*(vxx+vyy)',...
43         '(b1*vx+b2*vy)+py-(1/(tau*theta))*b2)',...
44         '(b1*vx_test+b2*vy_test)'];
45 DIV1 = '+gamma*(ux+vy)*ux_test';
46 DIV2 = '+gamma*(ux+vy)*vy_test';
47
48 fem.equ.weak={{['-(',SUPG1,DIV1,')'];...
49               ['-(',SUPG2,DIV2,')'];'';''}}};
50
51 %-----
52 % 3) Randbedingungen
53 fem.bnd.r = {{'1' '0' '0'}};{'0' '0' '0'}}};
54 fem.bnd.h = {{1 0 0 0; 0 1 0 0; 0 0 1 0};...
55             {1 0 0 0; 0 1 0 0; 0 0 1 0}}};
56 fem.bnd.ind = [2 2 1 2];
57
58 %-----
59 % 4) Assemblieren und Lösen des LGS
60 fem.shape = [2 2 2 1];
61 fem.xmesh = meshextend(fem);
62
63 [node_idx_p, dummy, sol_idx_p] = find(fem.xmesh.gdof{1}(:,4));
64 fem.sol.u = zeros(length(find(fem.xmesh.gdof{1})),1);
65
66 t = 0;
67 distance = tolerance + 1;
68
69 while ((t <= max_timesteps) & (distance > tolerance))
70
71     t = t+1;
72
73     fem.init = fem.sol.u;
74     fem.sol = femlin(fem,'solcomp',{'u','v','p'});
75     fem.sol.u(sol_idx_p) = fem.sol.u(sol_idx_p)-postint(fem,'p');

```

```
76     fem.sol.u = (1/theta)*(fem.sol.u+(theta-1)*fem.init);
77
78     distance = norm(fem.init-fem.sol.u,inf);
79
80     display(['iterstep: ', num2str(t) ]);
81     display(['distance: ',num2str(distance)]);
82
83 end;
84
85 %-----
86 % 5) Post-Prozess
87
88 fem.psi = femlin(fem,'solcomp',{'psi'});
89 fem.sol.u = fem.psi.u;
90
91 postcont(fem,'psi','axisequal','on','axis',[0 1 0 1]);
```

## A.5 Die Boussineq-Gleichungen

Die Boussineq-Gleichungen (vgl. [Gun89]) wurden in dieser Arbeit nicht behandelt. Ein FEMLAB-Skript für diese Gleichungen könnte aber als Startpunkt für zukünftige Arbeiten nützlich sein. Die Boussineq-Gleichungen beziehen im Gegensatz zu den Navier-Stokes-Gleichungen die Änderung der Dichte  $\rho$  des Fluids mit der Temperatur infolge von Wärmeausdehnung ein. In Konvektionsströmungen ist dies die Ursache für eine Auftriebskraft in zur Erdbeschleunigung entgegengesetzter Richtung. Die Boussineq-Gleichungen werden hier in dimensionsloser Form angegeben:

Gesucht wird das Geschwindigkeitsfeld  $u$ , der Druck  $p$  und die Temperatur  $T$  derart, daß

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \text{Pr} \Delta u + (u \cdot \nabla)u + \nabla p &= \text{RaPr} T e_z \quad \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial T}{\partial t} - \Delta T + (u \cdot \nabla)T &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ \text{div } u &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Die dimensionslose **Prandtl-Zahl**  $\text{Pr}$  bezieht die Eigenschaften des modellierten Fluids ein. Die **Rayleighzahl**  $\text{Ra}$  ist eine dimensionslose Kennzahlen der Konvektionsströmung.

In Skript A.5 werden die Boussineq-Gleichungen auf dem Kreisring  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : 1.2 < |x| < 2\}$  gerechnet. Dies ist ein Beispiel für die sog. Rayleigh-Bernard-Konvektion. Numerisch werden die Gleichungen mit einem angepassten semiimpliziten  $\theta$ -Schema nach Muster des Verfahrens (6.2) behandelt.

```

1  clear fem;
2  %-----
3  % 1) Geometrie, Gitter und Konstanten
4  fem.geom = circ2(0,0,2,0) - circ2(0,0,1.2,0);
5  fem.mesh = meshinit(fem,'hmax',1/6);
6
7  teta = 2/3;
8  max_timesteps = 36;
9  tolerance = 10^-3;
10
11 %-----
12 % 2) Boussineq-Gleichungen
13 fem.dim = {'u' 'v' 'T' 'p'};
14 fem.sdim = {'x' 'y'};
15 fem.shape = [2 2 2 1];
16
17 fem.variables = {'Prandtl' 0.71, 'Rayleigh' 10^4, ...
18                 'tau' 0.1, 'teta' teta};

```

```

19 fem.form = 'coefficient';
20
21 fem.equ.c = {'Prandtl' 'Prandtl' '1' 0};
22 fem.equ.be = {'b1' 'b2'} {0 0} {0 0} {0 0};...
23             {0 0} {'b1' 'b2'} {0 0} {0 0};...
24             {0 0} {0 0} {'b1' 'b2'} {0 0};...
25             {1 0} {0 1} {0 0} {0 0}}};
26 fem.equ.al = {{0 0} {0 0} {0 0} {'-1' 0};...
27             {0 0} {0 0} {0 0} {0 '-1'};...
28             {0 0} {0 0} {0 0} {0 0};...
29             {0 0} {0 0} {0 0} {0 0}}};
30 fem.equ.a = {'1/(tau*teta)' 0 ...
31             '-Prandtl*Rayleigh*(x/(x^2+y^2))' 0;...
32             0 '1/(tau*teta)'...
33             '-Prandtl*Rayleigh*(y/(x^2+y^2))' 0;...
34             0 0 '1/(tau*teta)' 0;...
35             0 0 0 0 }];
36 fem.equ.f = {'1/(tau*teta) * b1';...
37             '1/(tau*teta) * b2';...
38             '1/(tau*teta) * T';...
39             '0'}];
40
41 %-----
42 % 3) Randbedingungen
43 fem.bnd.r = {'0' '0' '0'};{'0' '0' '1'};
44 fem.bnd.h = {1 0 0 0; 0 1 0 0; 0 0 1 0};...
45             {1 0 0 0; 0 1 0 0; 0 0 1 0}};
46 fem.bnd.ind = [1 1 2 2 1 2 2 1];
47
48 %-----
49 % 4) Mit semiimpliziten Theta-Schema lösen
50 fem.xmesh = meshextend(fem);
51 fem.sol.u = zeros(length(find(fem.xmesh.gdof{1})),1);
52 [node_idx_p, dummy, sol_idx_p] = find(fem.xmesh.gdof{1}(:,4));
53
54 t = 1;
55 distance = tolerance + 1;
56
57 while ((t <= max_timesteps) & (distance > tolerance))
58
59     fem.old = fem.sol.u;
60     fem.sol = femlin(fem,'sd','off');
61     fem.sol.u = (1/teta)*(fem.sol.u+(teta-1)*fem.old);
62     fem.sol.u(sol_idx_p) = ...
63         fem.sol.u(sol_idx_p)-(1/(2.56*pi))*postint(fem,'p');
64
65     distance = max(max(fem.old-fem.sol.u));

```

```
66     display(['iterstep: ', num2str(t) ]);
67     display(['distance: ', num2str(distance)]);
68
69     t = t+1;
70 end;
71
72 postplot(fem,'tridata','T','arrowdata',{'u','v'},...
73         'arrowxspacing',50,'arrowyspacing',50,...
74         'arrowcolor','k','geom','on','axisvisible','off',...
75         'axis',[-2 2 -2 2],'axisequal','on');
```

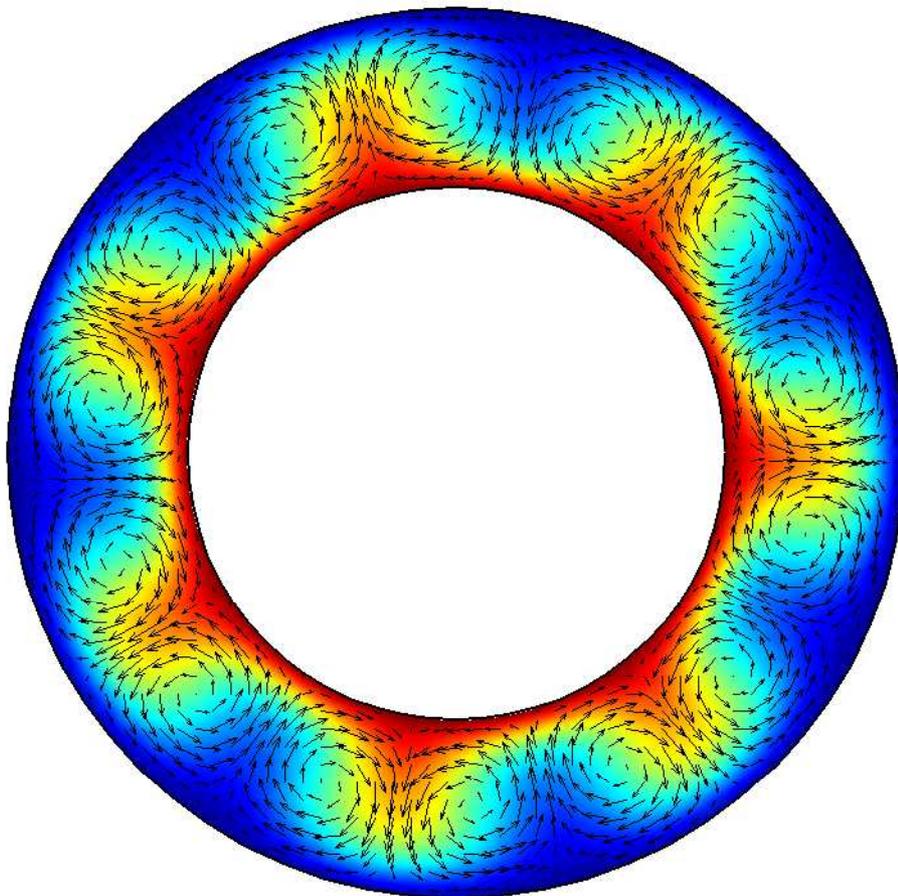


Abbildung A.2: Rayleigh-Bernard-Konvektion auf Kreisring mit  $Pr = 0.71$  und  $Ra = 10000$ .



# Literaturverzeichnis

- [Alt92] Hans Wilhelm Alt (1992): *Lineare Funktionalanalysis. Eine anwendungsorientierte Einführung*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.
- [Bra97] Dietrich Braess (1997): *Finite Elemente. Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.
- [BrSc94] Susanne C. Brenner und L. Ridgway Scott (1994): *The mathematical theory of finite element methods*. Springer-Verlag, New York.
- [BrFo91] Franco Brezzi und Michel Fortin (1991): *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. Springer-Verlag, New York.
- [Femlab22] *FEMLAB Reference Manual Version 2.2*. COMSOL AB, Stockholm.
- [FrHuSt93] Leopoldo Franca, Thomas J. R. Hughes und Rolf Stenberg (1993): „Stabilized finite element methods.“ In D. Gunzenburger und R.A. Nicolaides, Herausgeber, *Incompressible computational fluid dynamics*. Cambridge University Press.
- [GeLuOl03] Tobias Gelhard, Gert Lube und Maxim Olshanskii (2003): *Stabilized finite element schemes with LBB-stable elements for incompressible flows*. NAM-Preprint, Göttingen.
- [GhGhSh82] U, Ghia, K. N. Ghia und C.T. Shin (1982): *High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method*. Journal of Computational Physics, Volume 48, S. 387-411.
- [GiRa86] Vivette Girault und Pierre-Arnaud Raviart (1986): *Finite element methods for Navier-Stokes equations. Theory and algorithms*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo.
- [Gun89] Max D. Gunzburger(1989): *Finite element methods for Viscous Incompressible Flows. Navier-Stokes equations. A Guide to Theory, Practice, and Algorithms*. Academic Press, Boston.
- [Lub91] Gert Lube (1991): *Stabilized Galerkin Finite Element Methods for convection dominated and incompressible flow problems*. Numerical Analysis and Mathematical Modelling, Banach Center Publications, Volume 29, S. 85-104.

- [Mül97] Lars Müller (1997): *Untersuchung einer stabilisierten Finite-Elemente-Methode für die Oseen-Gleichung*. Diplomarbeit, Göttingen.
- [QuVa97] A. Quarteroni und A. Valli (1997): *Numerical approximation of partial differential equations*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokyo.
- [Wer00] Dirk Werner (2000): *Funktionalanalysis*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.
- [Zha90] Lin Bo Zhang (1990): *A second-order upwinding difference scheme for the steady Navier-Stokes equations in primitive variables in a driven cavity with a multigrid solver*. Mathematical Modelling and Numerical Analysis, Volume 24, S. 133-150.

## **Danksagung**

An dieser Stelle möchte ich mich herzlich bei Herrn Prof. Lube für die Unterstützung bei der Erstellung dieser Arbeit bedanken. Er hat sich sehr viel Zeit für mich genommen.