

Integralgleichungsmethode für das Neumann
Problem in einem Gebiet mit Schlitz

Diplomarbeit

vorgelegt von

Stefan Langer

aus

Kassel

am 3. Juni 2003

angefertigt im
Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
Georg-August-Universität Göttingen

Für meine Mutter,

*für all Deine Liebe,
für all Dein Verständnis,
für Dein Lächeln, wenn ich traurig war,
für Deine Hand, wenn ich Hilfe benötigte,
für die Zeit, die Du für mich geopfert hast,
für jeden Moment, den Du an mich gedacht hast.*

Vielen Dank für alles, ich vermisse Dich.

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Einleitung | 7 |
| 2 | Grundlagen | 11 |
| 2.1 | Allgemeine Voraussetzungen | 11 |
| 2.2 | Die Grundlösung der Laplace-Gleichung | 12 |
| 2.3 | Funktionalanalytische Grundlagen | 14 |
| 2.4 | Ergebnisse aus der Integrationstheorie | 19 |
| 2.5 | Der Green'sche Satz | 22 |
| 2.6 | Die Hölderräume $C^{0,\alpha}$ und $C^{k,\alpha}$ | 23 |
| 3 | Die Formulierung des Problems | 27 |
| 4 | Der Eindeutigkeitsbeweis | 29 |
| 4.1 | Eindeutigkeit | 29 |
| 5 | Existenz | 37 |
| 5.1 | Einfachschicht- und Doppelschichtpotential | 37 |
| 5.2 | Der Lösungsansatz | 42 |
| 5.3 | Die Integralgleichung erster Art | 44 |
| 5.4 | Die Integralgleichung zweiter Art | 56 |
| 5.5 | Existenz | 58 |
| 6 | Die numerische Methode | 59 |
| 6.1 | Die parametrisierten Integraloperatoren | 59 |
| 6.2 | Trigonometrische Interpolation | 60 |
| 6.3 | Quadraturformeln für die Anteile über Γ | 63 |
| 6.4 | Quadraturformeln für die Anteile über ∂D | 66 |
| 6.5 | Die Näherungsgleichungen | 68 |
| 6.6 | Hilfsaussagen | 69 |
| 6.7 | Konvergenzuntersuchungen | 74 |
| 6.8 | Fehlerabschätzungen | 81 |
| 6.9 | Ergebnisse numerischer Experimente | 83 |
| 6.10 | Ausblick | 89 |

Kapitel 1

Einleitung

Um einen Körper der Masse m und der spezifischen Wärme c von der Temperatur T auf die Temperatur $T + \Delta T$ zu erwärmen bzw. abzukühlen, muß man ihm die Wärmemenge

$$\Delta Q = cm\Delta T \quad (1.1)$$

zuführen bzw. entziehen.

Zu einem Zeitpunkt t herrsche in einem Punkt (x, y) einer Fläche die Temperatur $T(x, y, t)$. Wir heften an diesen Punkt (x, y) ein kleines Rechteck R der Kantenlängen Δx und Δy an. Der Wärmefluß durch diese Fläche werde mit F bezeichnet, d.h. es ist

$$F = F(x, y) = (F_1(x, y), F_2(x, y)).$$

Dann ist die Wärme, die pro Sekunde in Richtung der positiven x -Achse von R fließt näherungsweise gegeben durch

$$F_1(x, y)\Delta y \quad \text{bzw.} \quad F_1(x + \Delta x, y)\Delta y.$$

Die pro Sekunde aus dem Rechteck R in der positiven x -Richtung austretende Wärme wird daher gegeben durch

$$(F_1(x + \Delta x, y) - F_1(x, y)) \Delta y \approx \frac{\partial F_1}{\partial x}(x, y) \Delta x \Delta y.$$

Mit einer analogen Betrachtung erhalten wir für die in positiver y -Richtung austretende Wärme

$$(F_2(x, y + \Delta y) - F_2(x, y)) \Delta x \approx \frac{\partial F_2}{\partial y}(x, y) \Delta y \Delta x,$$

so daß folglich die pro Sekunde durch R insgesamt austretende Wärme durch

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial F_2}{\partial y}(x, y) \right) \Delta x \Delta y = \operatorname{div} F \Delta x \Delta y$$

approximiert wird.

Mit fortschreitender Zeit findet innerhalb der Fläche ein Wärmeaustausch statt, der sich wie folgt quantifizieren läßt: ν bezeichne Vektor der Länge eins und G ein Geradenstück der Länge l , das senkrecht zu ν ist und ganz in der Fläche enthalten sei. Dann wird die in der Zeitspanne Δt durch G hindurchgehende Wärme näherungsweise gegeben durch

$$\Delta Q = \lambda \frac{\partial T}{\partial \nu} l \Delta t = \lambda \langle \text{grad } T, \nu \rangle l \Delta t, \quad (1.2)$$

wobei λ eine positive Konstante, die sogenannte Wärmeleitfähigkeit des Körpers bezeichnet. $\lambda \langle \text{grad } T, \nu \rangle$ heißt der Wärmefluß in Richtung ν . Ersetzen wir nun in der oben durchgeführten Betrachtung F durch $\lambda \text{ grad } T$, so sehen wir, daß dem Rechteck R während der Zeitspanne Δt durch den Prozeß des Wärmeaustauschs die Wärmemenge

$$\Delta Q \approx \text{div}(\lambda \text{ grad } T) \Delta x \Delta y \Delta t$$

zugeführt bzw. entzogen werden muß. Nach (1.1) muß aber

$$\Delta Q = cm \Delta T = c\rho \Delta x \Delta y \Delta T$$

sein, wobei ρ die Massendichte der Fläche bezeichne. Infolgedessen ist

$$\text{div}(\lambda \text{ grad } T) \approx c\rho \frac{\Delta T}{\Delta t}$$

woraus man durch Grenzübergang die Gleichung

$$\text{div}(\lambda \text{ grad } T) = c\rho \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.3)$$

erhält. Wegen

$$\text{div}(\lambda \text{ grad } T) = \lambda (\text{div grad } T) = \lambda \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

können wir sie ebensogut in der Form

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = \frac{c\rho}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.4)$$

schreiben. Diese Gleichung wird als Differentialgleichung der Wärmeleitung bezeichnet.

Ist die Wärme hinreichend lange geflossen, so stellt sich ein Zustand ein, der durch $\partial T / \partial t = 0$ gekennzeichnet ist. Die Temperaturverteilung ist dann zeitlich konstant.

Diese stationäre Temperaturverteilung, die wir durch $u(x, y)$ beschreiben wollen, genügt dann der sogenannten Laplace'schen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (1.5)$$

Diese Differentialgleichung ist eine der wichtigsten der mathematischen Physik. Funktionen, die dieser Differentialgleichung genügen, werden als harmonisch bezeichnet.

Wir wollen aber noch einmal auf das Rechteck R zurückkommen und annehmen, der Wärmefluß sei durch einen Riß Γ in in der betrachteten Fläche R unterbrochen, d.h. die Wärmeleitung hört entlang Γ auf. Mathematisch bedeutet dies, daß die Normalableitung entlang des Risses verschwindet. Den Riß selbst können wir mathematisch durch einen Bogen modellieren.

Dies bedeutet aber, daß die Funktion u nicht nur die Laplace'sche Differentialgleichung erfüllen, sondern darüberhinaus auch noch ihre Normalableitung entlang des Bogens verschwinden muß.

Ziel dieser Arbeit ist es, ein auf diese Weise motiviertes Problem für ein einfach zusammenhängendes Gebiet in der Ebene mit hinreichend glattem Rand, in dessen Inneren sich ein hinreichend glatter Bogen befindet, zu lösen, wobei auf dem Rand des Gebietes Dirichletdaten und auf dem Bogen Neumanndaten vorgeschrieben sind.

Für eine Lösung eines solchen Problems werden wir verlangen, daß sie in den Endpunkten des Bogens stetig ist. Der Eindeutigkeitsbeweis wird mit Hilfe des Green'schen Satzes erbracht. Der nachfolgende Existenzbeweis wird auf konstruktive Art und Weise erbracht, indem wir eine Lösung als Summe eines Doppelschichtpotentials über den Rand des Gebiets und eines Doppelschichtpotentials über den Bogen suchen. Motiviert wird eine solche Vorgehensweise durch [9], Kapitel 6, und [13]. Dies führt auf eine leicht zu behandelnde Integralgleichung zweiter Art und auf eine stark singuläre Integralgleichung erster Art. Durch die Wahl einer Dichte aus einem geeigneten Funktionenraum und Anwenden der Cosinus-Substitution können wir die Integralgleichung erster Art äquivalent in eine ebenfalls stark singuläre Integralgleichung der Form

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\cot \frac{\sigma - s}{2} \xi'(\sigma) + K(s, \sigma) \xi(\sigma) \right) d\sigma - \frac{1}{\pi} \int_{\partial D} M(s, y) ds(y) = h(s)$$

überführen. Integralgleichungen solcher Form wurden bereits in [13] oder [15] untersucht. Wir zeigen, daß wir diese Integralgleichung erster Art in eine Integralgleichung zweiter Art äquivalent umformen können. Die Riesz-Theorie liefert schließlich die Existenz einer Lösung. Eine Übertragung unserer Lösungstheorie auf Systeme von paarweise disjunkten offenen Bögen ist ohne Schwierigkeit möglich.

Die numerische Lösung erfolgt mit einem Quadraturformelverfahren. Dieses wird im sechsten Kapitel dieser Arbeit vorgestellt. Für analytische Bögen, analytische Ränder und analytische rechte Seiten wird ein exponentielles Abklingen des Fehlers bewiesen. Numerische Experimente bestätigen die erzielten theoretischen Resultate. Das Programm dafür wurde in *Matlab* implementiert und die numerischen Experimente an den Computern des Instituts für Numerische und Angewandte Mathematik der Universität Göttingen durchgeführt.

Kapitel 2

Grundlagen

In diesem Kapitel werden wir die mathematischen Grundlagen aus der Funktionalanalysis, der Potentialtheorie, der Theorie der Integralgleichungen sowie einige Tatsachen aus der Integrationstheorie zusammenstellen, die zur Lösung der in Kapitel 3 gestellten Aufgabe benötigt werden. Dabei sind die Ergebnisse aus der Integrationstheorie, hierbei handelt es sich zum Beispiel um den Green'schen Satz, für den Nachweis der Eindeutigkeit des in Kapitel 3 formulierten Problems nötig, wohingegen die anderen Themen ihre Anwendung im Existenzbeweis finden werden.

Da wir uns Randwerte aus Hölderräumen vorgeben und die gesuchten Dichten ebenfalls in diesen Räumen liegen werden, führen wir auch die für dieses Thema benötigten Resultate hier auf.

Beginnen wollen wir jedoch mit allgemeinen Voraussetzungen, die für den Rest der Arbeit Bestand haben.

2.1 Allgemeine Voraussetzungen

Wir setzen im folgenden stets voraus, daß $D \subset \mathbb{R}^2$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit C^2 -glattem Rand ist. Der Rand, wir bezeichnen ihn mit ∂D , läßt sich daher durch eine zweimal stetig differenzierbare Funktion z darstellen. Wir dürfen annehmen, daß sie 2π -periodisch ist, d.h.

$$\partial D = \{z(s) : s \in [0, 2\pi)\}.$$

Der Einheitsnormalenvektor ν an ∂D sei stets nach außen orientiert.

Ferner bezeichne $\Gamma \subset D$ einen abgeschlossenen Bogen der Klasse C^3 , d.h. es gilt

$$\Gamma := \{\gamma(s) : s \in [-1, 1]\},$$

wobei die Parametrisierungsfunktion γ injektiv und dreimal stetig differenzierbar ist, und zusätzlich $\dot{\gamma}(s) \neq 0$ für alle $s \in [-1, 1]$ erfüllt. Die Endpunkte des Bogens

bezeichnen wir mit $x_{-1}^* := \gamma(-1)$ und $x_1^* := \gamma(1)$. Zur Abkürzung bezeichnen wir mit

$$\Gamma_0 := \Gamma \setminus \{x_{-1}^*, x_1^*\}.$$

das Innere des Bogens. Die Orientierung des Bogens ergibt sich aufgrund der Durchlaufrichtung von x_{-1}^* nach x_1^* . Unter $t(\gamma(s))$ verstehen wir den durch diese Orientierung vorgegebenen Einheitstangentialvektor an Γ an der Stelle $\gamma(s)$, also

$$t(\gamma(s)) = \frac{1}{|\dot{\gamma}(s)|} \dot{\gamma}(s),$$

und mit $\nu(s) = Pt(\gamma(s))$ bezeichnen wir den Einheitsnormalenvektor an Γ , wobei P durch die orthogonale Matrix

$$P := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben ist. Wir bemerken, daß es stets möglich ist, ein Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ und eine Parametrisierungsfunktion

$$\tilde{\gamma} : [a, b] \rightarrow \Gamma$$

von Γ anzugeben, für die $|\dot{\tilde{\gamma}}(t)| = 1$ für alle $t \in [a, b]$ gilt. Γ heißt dann bzgl. seiner Bogenlänge parametrisiert. Mit $|\Gamma|$ bezeichnen wir die Länge des Bogens Γ , d.h.

$$|\Gamma| := \int_{-1}^1 |\dot{\gamma}(t)| dt$$

2.2 Die Grundlösung der Laplace-Gleichung

In diesem Abschnitt führen wir die Grundlösung der Laplace-Gleichung ein und fassen ihre wichtigsten Eigenschaften zusammen. Es sei dafür $x = (x_1, x_2) \in D$ und $u \in C^2(D)$. Dann definieren wir den Laplace-Operator durch

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}.$$

Um spezielle Lösungen der Laplace-Gleichung zu finden, nutzt man die Rotationsinvarianz des Laplace-Operator Δ aus. Genauer bedeutet dieses, daß für orthogonale Matrizen $Q \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ gilt:

$$\Delta(u(Qx)) = (\Delta u)(Qx).$$

Daher versuchen wir Lösungen zu finden, welche die Form

$$u(x) = v\left(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\right) = v(|x|)$$

haben. Es ist dann

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}(x) = \frac{1}{|x|}v'(|x|) - \frac{x_j^2}{|x|^3}v'(|x|) + \frac{x_j^2}{|x|^2}v''(|x|), \quad j = 1, 2,$$

woraus

$$\Delta u(x) = v''(|x|) + \frac{1}{|x|}v'(|x|) = 0$$

folgt. Durch setzen von $r = |x|$ ergibt sich daraus

$$v''(r) + \frac{1}{r}v'(r) = \frac{1}{r}(rv'(r))' = 0,$$

weswegen aber $rv'(r)$ gleich einer Konstanten C_1 sein muß. Mit einer geeigneten Konstante C_2 ergibt sich

$$v(r) = C_1 \ln(r) + C_2.$$

Aufgrund dieser Vorüberlegung macht es nun Sinn, die folgende Definition vorzunehmen.

Definition 2.1 *Die Funktion*

$$\Phi(x, y) := \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x - y|} \quad (2.1)$$

wird als Grundlösung der Laplace-Gleichung im \mathbb{R}^2 bezeichnet.

Wir werden kurz einige wichtige Eigenschaften der Funktion Φ festhalten.

Satz 2.2 *Für $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, x \neq y$, gilt*

$$\text{grad}_x \Phi(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \frac{(x - y)}{|x - y|^2}, \quad (2.2)$$

$$\text{grad}_y \Phi(x, y) = -\text{grad}_x \Phi(x, y). \quad (2.3)$$

Für festes $y \in \mathbb{R}^2$ ist Φ harmonisch im $\mathbb{R}^2 \setminus \{y\}$ bezüglich x .

Beweis: Es ist $\Phi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln [(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2]^{-\frac{1}{2}}$, also

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}(x, y) = \frac{1}{2\pi} |x - y|^{-\frac{1}{2}} \frac{2(x_1 - y_1)}{|x - y|^2} = -\frac{1}{2\pi} \frac{x_1 - y_1}{|x - y|^2},$$

und aus Symmetriegründen folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}(x, y) &= -\frac{1}{2\pi} \frac{x_2 - y_2}{|x - y|^2}, \text{ also} \\ \text{grad}_x \Phi(x, y) &= -\frac{1}{2\pi} \frac{(x - y)}{|x - y|^2}. \end{aligned}$$

Analog berechnet sich

$$\operatorname{grad}_y \Phi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \frac{(x - y)}{|x - y|^2}.$$

Ferner folgt

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2}(x, y) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2}(x, y) &= -\frac{1}{2\pi} \frac{|x - y|^2 - 2(x_1 - y_1)^2}{|x - y|^4} - \frac{1}{2\pi} \frac{|x - y|^2 - 2(x_2 - y_2)^2}{|x - y|^4} \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

2.3 Funktionalanalytische Grundlagen

Im Existenzbeweis wird die sogenannte Riesz-Theorie eine wesentliche Rolle spielen. Sie beruht auf der Theorie linearer, kompakter Operatoren, die zwischen Banachräumen abbilden und gibt Auskunft über die Lösbarkeit von Operatorgleichungen zweiter Art.

An dieser Stelle wollen wir die dafür notwendigen Begriffe einführen. Wir lehnen uns dabei an die Kapitel zwei und drei von [9] an, wo auch die Beweise der Aussagen zu finden sind.

Definition 2.3 *Ein linearer Operator $A : X \rightarrow Y$ von einem normierten Raum X in einen normierten Raum Y heißt kompakt, falls er jede beschränkte Teilmenge von X in eine relativ kompakte Menge in Y abbildet.*

Satz 2.4 *Linearkombinationen kompakter Operatoren sind kompakt.*

Beweis: [9], Satz 2.15.

□

Satz 2.5 *Es seien X, Y, Z normierte Räume und $A : X \rightarrow Y$, $B : Y \rightarrow Z$ beschränkte, lineare Operatoren. Dann ist das Produkt $BA : X \rightarrow Z$ ein kompakter Operator, falls einer der Operatoren A oder B kompakt ist.*

Beweis: [9], Satz 2.16

□

Wir wollen nun den Begriff des *Integraloperators* einführen.

Satz 2.6 *Es seien G_1, G_2 nichtleere, kompakte, Jordan-meßbare Mengen, die mit dem Abschluß ihres Inneren übereinstimmen. Sei $K : G_1 \times G_2 \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann heißt der lineare Operator $A : C(G_2) \rightarrow C(G_1)$ gegeben durch*

$$(A\varphi)(x) := \int_{G_2} K(x, y)\varphi(y)ds(y), \quad \varphi \in C(G_2), x \in G_1 \quad (2.4)$$

Integraloperator mit stetigem Kern K . Er ist ein beschränkter Operator mit

$$\|A\|_\infty = \max_{x \in G_1} \int_{G_2} |K(x, y)|ds(y).$$

Beweis: [9], Satz 2.8. □

Satz 2.7 *Seien $X_i, i = 1, \dots, n$, normierte Räume und $A_{ik} : X_k \rightarrow X_i$ lineare Operatoren. Auf dem karthesischen Produkt $X = X_1 \times \dots \times X_n$ definieren wir die Norm*

$$\|\varphi\|_\infty := \max_{i=1, \dots, n} \|\varphi_i\|_{X_i}, \quad \varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in X$$

und erklären einen Operator $A : X \rightarrow X$ durch

$$(A\varphi)_i := \sum_{k=1}^n A_{ik}\varphi_k, \quad i = 1, \dots, n.$$

Sind alle A_{ik} kompakt, so ist auch A kompakt.

Beweis: Es seien also alle A_{ik} kompakt und es sei $(\varphi^{(m)})_{m \in \mathbb{N}} \subset X$ eine beschränkte Folge, d.h. $\|\varphi^{(m)}\|_\infty \leq C$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und einem $C > 0$. Dann sind insbesondere auch alle Teilfolgen $(\varphi_i^{(m)})_{m \in \mathbb{N}} \subset X_i, i = 1, \dots, n$ beschränkt. Aufgrund der Kompaktheit des Operators A_{11} existiert ein $\psi_1^1 \in X_1$ sowie eine Teilfolge $(\varphi^{(m_1(j))})_{j \in \mathbb{N}} \subset (\varphi^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ mit der Eigenschaft

$$\|A_{11}\varphi_1^{(m_1(j))} - \psi_1^1\|_{X_1} \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty.$$

Wiederum wegen der Kompaktheit des Operators A_{12} existiert ein $\psi_1^2 \in X_1$ sowie eine Teilfolge $(\varphi^{(m_2(j))})_{j \in \mathbb{N}} \subset (\varphi^{(m_1(j))})_{j \in \mathbb{N}}$, so daß

$$\|A_{12}\varphi_2^{(m_2(j))} - \psi_1^2\|_{X_1} \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty.$$

So fortfahrend erhält man schließlich eine Teilfolge $(\varphi^{(m_{n^2}(j))})_{j \in \mathbb{N}} \subset (\varphi^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$, die die folgenden Eigenschaften erfüllt: Es existiert ein $\psi_l^k \in X_l$, so daß

$$\|A_{lk}\varphi_k^{(m_{n^2}(j))} - \psi_l^k\|_{X_l} \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty, \quad l, k = 1, \dots, n.$$

Dann definieren wir

$$\psi := \left(\sum_{k=1}^n \psi_1^k, \dots, \sum_{k=1}^n \psi_n^k \right)$$

und berechnen mit der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} \|A\varphi^{(m_{n^2}(j))} - \psi\|_X &= \max_{i=1, \dots, n} \|(A\varphi^{(m_{n^2}(j))} - \psi)_i\|_{X_i} \\ &= \max_{i=1, \dots, n} \left\| \sum_{k=1}^n \left(A_{ik} \varphi_k^{(m_{n^2}(j))} - \psi_i^k \right) \right\|_{X_i} \\ &\leq \max_{i=1, \dots, n} \sum_{k=1}^n \left\| \left(A_{ik} \varphi_k^{(m_{n^2}(j))} - \psi_i^k \right) \right\|_{X_i} \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt dann mit Hilfe von Satz 2.13 aus [9]. □

Bemerkung 2.8 Aus dem vorangegangenen Satz folgt, daß Ausdrücke der Form

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

kompakte Operatoren sind, falls $A_{11} : X_1 \rightarrow X_1$, $A_{12} : X_2 \rightarrow X_1$, $A_{21} : X_1 \rightarrow X_2$ und $A_{22} : X_2 \rightarrow X_2$ kompakte Operatoren sind. Diese Eigenschaft wird später von zentraler Bedeutung sein.

Im Existenzbeweis werden die auftretenden Integraloperatoren Integrale über den Rand ∂D und über den Bogen Γ sein. Daher sind die beiden folgenden Resultate für uns nützliche.

Satz 2.9 *Der Integraloperator $A : C(\Gamma) \rightarrow C(\partial D)$ gegeben durch*

$$(A\psi)(x) := \int_{\Gamma} K(x, y)\psi(y)ds(y), \quad x \in \partial D, \psi \in C(\Gamma),$$

mit stetigem Kern K ist ein kompakter Operator.

Beweis: Sei $U \subset C(\Gamma)$ beschränkt, d.h. $\|\psi\|_{\infty} \leq C$ für alle $\psi \in U$ und einem $C > 0$. Dann gilt für alle $x \in \partial D$ die Abschätzung

$$|(A\psi)(x)| \leq C|\Gamma| \max_{x \in \partial D, y \in \Gamma} |K(x, y)|.$$

Da K auf der kompakten Menge $\partial D \times \Gamma$ sogar gleichmäßig stetig ist, existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß

$$|K(x, z) - K(y, z)| < \frac{\varepsilon}{C|\Gamma|}$$

für alle $x, y \in \partial D$ und $z \in \Gamma$ mit $|x - y| < \delta$ ist. Dann folgt

$$|(A\psi)(x) - (A\psi)(y)| < \varepsilon$$

für alle $x, y \in \partial D$ und alle $\psi \in U$, d.h. $A(U)$ ist beschränkt und gleichgradig stetig und somit nach dem Satz von Arzela-Ascoli relativ kompakt, wodurch wir auf die Kompaktheit des Operators A schließen können. Die zweite Aussage ist dann ein Spezialfall der ersten Aussage. □

Folgerung 2.10 *Der Integraloperator $A : C(\partial D) \rightarrow C(\partial D)$ gegeben durch*

$$(A\varphi)(x) := \int_{\partial D} K(x, y)\varphi(y)ds(y), \quad x \in \partial D, \varphi \in C(\partial D),$$

mit stetigem Kern K ist ein kompakter Operator.

Beweis: Das ergibt sich als Spezialfall aus Satz 2.9. □

Wir erinnern noch an den Satz von Banach.

Satz 2.11 (Banach) *Es seien X, Y Banachräume und $A : X \rightarrow Y$ beschränkt und bijektiv. Dann ist der inverse Operator A^{-1} ein linearer beschränkter Operator von Y nach X .*

Beweis: [10], Satz 12.3 □

Wir wollen nun das Hauptresultat der Riesz-Theorie für kompakte Operatoren festhalten. X sei dafür ein normierter Raum. Für $\varphi, f \in X$ bezeichnet man die Gleichung

$$\varphi - A\varphi = f$$

als eine Operatorgleichung zweiter Art, wobei $A : X \rightarrow X$ ein linearer, kompakter Operator sei. In unserem Existenzbeweis werden hierbei meist Hölderräume oder der Raum der stetigen Funktionen die Rolle von X übernehmen, der Operator A wird ein Integraloperator mit stetigem Kern sein. Von zentraler Bedeutung ist nun der

Satz 2.12 *Sei $A : X \rightarrow X$ ein kompakter linearer Operator auf einem normierten Raum X . Dann ist der Operator $Id - A$ genau dann injektiv, wenn er surjektiv ist. Falls er injektiv und somit auch bijektiv ist, dann ist der inverse Operator $(Id - A)^{-1}$ beschränkt*

Beweis: [9], Satz 3.4. □

Daraus ergibt sich dann unmittelbar eine Lösbarkeitsbedingung für eine Integralgleichung zweiter Art.

Folgerung 2.13 *Sei $A : X \rightarrow X$ ein kompakter, linearer Operator auf einem normierten Raum X . Falls die homogene Gleichung*

$$\varphi - A\varphi = 0$$

nur die triviale Lösung $\varphi = 0$ besitzt, dann hat für jedes $f \in X$ die inhomogene Gleichung

$$\varphi - A\varphi = f$$

genau eine Lösung $\varphi \in X$, und diese Lösung hängt stetig von der rechten Seite ab.

Beweis: [9], Folgerung 3.5. □

Das Problem, die Existenz einer Lösung einer Operatorgleichung zweiter Art zu beweisen, läßt sich also darauf reduzieren, von der homogenen Gleichung zu beweisen, daß sie nur die triviale Lösung $\varphi = 0$ besitzt.

Wir erwähnen noch das folgende Ergebnis, weil durch dieses eine wesentliche Idee für den Existenznachweis der Aufgabe aus Kapitel 3 präsentiert wird.

Folgerung 2.14 *Seien X, Y normierte Räume und $S : X \rightarrow Y$ ein beschränkter, linearer Operator, der eine beschränkte Inverse $S^{-1} : Y \rightarrow X$ besitzt. Weiterhin sei $A : X \rightarrow Y$ ein kompakter, linearer Operator. Dann besitzt die Operatorgleichung*

$$S\varphi - A\varphi = f \tag{2.5}$$

für jede rechte Seite $f \in Y$ genau eine Lösung $\varphi \in X$, falls die Operatorgleichung

$$S\varphi - A\varphi = 0$$

nur die triviale Lösung $\varphi = 0$ besitzt. Die Lösung der Gleichung (2.5) hängt stetig von der rechten Seite ab.

Beweis: Da S invertierbar ist, können wir die Operatorgleichung

$$S\varphi - A\varphi = f$$

äquivalent umformen in

$$\varphi - S^{-1}A\varphi = S^{-1}f,$$

wobei nun $S^{-1}A : X \rightarrow X$ ein kompakter Operator ist. Nun erhalten wir durch Folgerung 2.13 bereits die Aussage. □

2.4 Ergebnisse aus der Integrationstheorie

Die erste hier aufgeführte Tatsache ist in einer verallgemeinerten Version unter dem Namen *Plateausatz* bekannt. Wir werden dieses Ergebnis hier lediglich für Kugeln beweisen, was für unsere Zwecke ausreichend ist.

Satz 2.15 *Es seien $0 < \delta < \varepsilon$ und $B[x, \delta] \subset B(x, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^n$. Dann existiert eine Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap C_0(\mathbb{R}^n)$ mit folgenden Eigenschaften:*

- $0 \leq f \leq 1$
- $f|_{B[x, \delta]} = 1$
- $\text{supp}(f) \subset B(x, \varepsilon)$

Beweis: Sei $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(t) := \begin{cases} e^{-1/t}, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

Dann ist $g \in C^\infty(\mathbb{R})$ und $g(t) \geq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Wir definieren eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \frac{g(\varepsilon^2 - |x|^2)}{g(|x|^2 - \delta^2) + g(\varepsilon^2 - |x|^2)}.$$

Da der Nenner von f für alle $x \in \mathbb{R}^n$ ungleich 0 ist, liegt auch $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Ferner erfüllt f die Eigenschaften $f|_{B[x, \delta]} = 1$ und $\text{supp}(f) \subset B(x, \varepsilon)$. □

Im folgenden tragen wir noch einige Ergebnisse über Nullmengen zusammen.

Satz 2.16 *Es seien $Q \subset \mathbb{R}^{p-1}$ ein kompakter, achsenparalleler Quader im \mathbb{R}^{p-1} und $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist der Graph von f , also $G(f) := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^p \mid x \in Q\}$, eine Nullmenge, d.h. $\text{Vol}(G(f)) = 0$.*

Beweis: Sei $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_{p-1}, b_{p-1}]$. Wir unterteilen die Intervalle $[a_i, b_i]$ in Teilintervalle der Länge $(b_i - a_i)/n$, $i = 1, \dots, p-1$. Es sei

$$Q_{k_1 \dots k_{p-1}} := \left[a_1 + k_1 \frac{b_1 - a_1}{n}, a_1 + (k_1 + 1) \frac{b_1 - a_1}{n} \right] \\ \times \dots \times \left[a_{p-1} + k_{p-1} \frac{b_{p-1} - a_{p-1}}{n}, a_{p-1} + (k_{p-1} + 1) \frac{b_{p-1} - a_{p-1}}{n} \right],$$

$0 \leq k_1 \leq n-1, \dots, 0 \leq k_{p-1} \leq n-1$. Es folgt, daß

$$Q \subset \bigcup_{k_1=0}^{n-1} \dots \bigcup_{k_{p-1}=0}^{n-1} Q_{k_1 \dots k_{p-1}}.$$

Es bezeichne

$$\begin{aligned} M_{k_1 \dots k_{p-1}} &:= \sup\{f(t) : t \in Q_{k_1 \dots k_{p-1}}\} \text{ und} \\ m_{k_1 \dots k_{p-1}} &:= \inf\{f(t) : t \in Q_{k_1 \dots k_{p-1}}\}. \end{aligned}$$

Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von f auf Q , können wir nun n so groß wählen, daß $|M_{k_1 \dots k_{p-1}} - m_{k_1 \dots k_{p-1}}| < \varepsilon / \text{Vol}(Q)$ für jeden Quader $Q_{k_1 \dots k_{p-1}}$.

Dann berechnen wir

$$\begin{aligned} \text{Vol}(G(f)) &\leq \sum_{0 \leq k_1 \leq n-1} \dots \sum_{0 \leq k_{p-1} \leq n-1} Q_{k_1 \dots k_{p-1}} |M_{k_1 \dots k_{p-1}} - m_{k_1 \dots k_{p-1}}| \\ &< n^{p-1} \frac{(b_1 - a_1) \dots (b_{p-1} - a_{p-1})}{n^{p-1}} \frac{\varepsilon}{\text{Vol}(Q)} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt. □

Das eben erhaltene Resultat ist für unsere Zwecke zu speziell. Aber wir können die Aussage auf beliebige offene Mengen verallgemeinern. Dabei hilft uns das vorbereitende

Lemma 2.17 *Jede offene Menge $H \subset \mathbb{R}^n$ ist die Vereinigung abzählbar vieler kompakter Quader, deren Inneres punktfremd ist.*

Beweis: [3], Seite 68, Hilfssatz 1. □

Nun können wir Satz 2.16 verallgemeinern.

Folgerung 2.18 *Seien $H \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen, $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist der Graph von f , $G(f) = \{(x, f(x)) : x \in H\}$ eine Nullmenge in \mathbb{R}^n .*

Beweis: Aus Lemma 2.17 folgt, daß sich die offene Menge D als Vereinigung abzählbar vieler Quader darstellen läßt. Satz 2.16 sagt uns dann, daß auf jedem dieser Quader $G(f)$ eine Nullmenge ist. Da die abzählbare Vereinigung von Nullmengen wiederum eine Nullmenge ist, folgt die Behauptung. □

Lemma 2.19 *Sei $H \subset \mathbb{R}^n$. Ist $\{G_i, i \in I\}$ eine beliebige offene Überdeckung von H , so existiert eine abzählbare Teilmenge $I_0 \subset I$ derart, daß auch $\{G_i, i \in I_0\}$ eine Überdeckung von H ist.*

Beweis: Da H eine Teilmenge des \mathbb{R}^n ist, enthält H eine abzählbar dichte Teilmenge A . Es bezeichne \mathbb{Q}_+ die Menge der positiven rationalen Zahlen und P die Menge der Paare $(a, r) \in A \times \mathbb{Q}_+$ für die $B(a, r)$ in mindestens einer Menge G_i enthalten ist. P ist abzählbar, da $A \times \mathbb{Q}_+$ abzählbar ist. Zu jedem $(a, r) \in P$ können wir ein $j(a, r) \in I$ mit $B(a, r) \subset G_{j(a, r)}$ wählen. Sei I_0 die Menge aller Elemente $j(a, r)$.

Ist $x \in H$, so gibt es ein $i \in I$ mit $x \in G_i$. Da G_i offen ist, existiert ein $\varepsilon > 0$ mit $B(x, \varepsilon) \subset G_i$. Wegen der Dichtheit von A enthält $B(x, \varepsilon/3)$ ein $a \in A$. $B(a, 2\varepsilon/3)$ ist in $B(x, \varepsilon)$ und folglich auch in G_i enthalten. Daher gibt es ein $r \in \mathbb{Q}_+$ mit $x \in B(a, r)$. Somit ist $x \in G_{j(a, r)}$, und die G_i mit $i \in I_0$ bilden daher eine abzählbare, offene Überdeckung. □

Die im nächsten Satz definierte Menge M wird uns im Eindeutigkeitsbeweis wiederbegegnen. Da wir dort das Lemma von Fatou oder den Satz von Lebesgue anwenden möchten, ist folgende Kenntnis von Bedeutung:

Satz 2.20 *Es seien $H \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Dann ist die Menge $M := \{x \in H : f(x) = 0, \text{grad } f(x) \neq 0\} \subset H$ eine Nullmenge.*

Beweis: Seien $a \in M$, $U_a \subset H$ eine offene Umgebung von a . Dann ist $M \cap U_a = \{x \in U_a : f(x) = 0\}$, und wegen $\text{grad } f(a) \neq 0$ existiert ein Index $i \in \{1, \dots, n\}$, für den $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \neq 0$ gilt. Nach eventueller Ummumerierung der Koordinaten können wir annehmen, daß $\frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \neq 0$ und wegen der stetigen Differenzierbarkeit von f , können wir sogar voraussetzen, daß $\frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \neq 0$ für alle $x \in U_a$ ist. Ansonsten verkleinere man die Menge U_a . Es bezeichnen nun $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$, $x'' = x_n$, $a' = (a_1, \dots, a_{n-1})$ und $a'' = a_n$. Dann gilt

$$f(a', a'') = 0 \text{ und } \frac{\partial f}{\partial x''}(a', a'') \neq 0.$$

Nun können wir den Satz über implizite Funktionen anwenden und erhalten offene Umgebungen $U'_a \subset \mathbb{R}^{n-1}$ von a' und $U''_a \subset \mathbb{R}$ von a'' , $U'_a \times U''_a \subset U_a$ und eine stetig differenzierbare Funktion $g : U'_a \rightarrow U''_a$ mit $g(a') = a''$, so daß

$$M \cap (U'_a \times U''_a) = \{(x', x'') \in U'_a \times U''_a : x'' = g(x')\}.$$

In einer Umgebung des Punktes a läßt sich also M als Graph einer Funktion g schreiben. Wir überdecken nun M mit solchen offenen Umgebungen $U'_a \times U''_a$, d.h.

$$M \subset \bigcup_{a \in M} U'_a \times U''_a.$$

Nach Lemma 2.19 reichen bereits abzählbar viele solcher offenen Mengen aus, um M zu überdecken, d.h.

$$M \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} U'_{a_k} \times U''_{a_k},$$

wobei die a_k passend gewählt sind. In jeder dieser Mengen läßt sich nun M als Graph einer Funktion $g_{a_k} : U'_{a_k} \rightarrow U''_{a_k}$ schreiben. Auf die U'_{a_k} und die Funktionen g_{a_k} , $k = 1, 2, \dots$ können wir nun Folgerung 2.18 anwenden und benutzen, daß die abzählbare Vereinigung von Nullmengen wiederum eine Nullmenge ist, um schließlich die Aussage des Satzes zu erhalten.

□

Mit dem nächsten Satz werden wir unseren Exkurs in die Integrationstheorie beenden.

Satz 2.21 *Der Bogen B eines rektifizierbaren Weges $b : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^p$, $p \geq 2$ ist eine Nullmenge in \mathbb{R}^p .*

Beweis: [7], Satz 202.7.

□

2.5 Der Green'sche Satz

Im Eindeutigkeitsbeweis werden wir den Green'schen Satz verwenden. Daher geben wir ihn an dieser Stelle an. Unser Gebiet, auf das wir ihn anwenden wollen, wird Ecken haben. Folglich werden wir hier eine hinreichend allgemeine Formulierung des Gauß'schen Integralsatzes erwähnen, da mit diesem bekanntlich der Green'sche Satz bewiesen wird.

Satz 2.22 (Gauß'scher Integralsatz) *Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ eine beschränkte offene Menge, die folgende Eigenschaften erfüllt:*

- zu jedem Randpunkt $x \in \partial G$ gibt es eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset (\mathbb{R}^n \setminus \overline{G})$ mit

$$x_n \rightarrow x, \quad n \rightarrow \infty$$

- $\partial G = \overline{F_1} \cup \dots \cup \overline{F_N}$, wobei die F_i , $i = 1, \dots, N$, reguläre Hyperflächenstücke der Klasse C^1 sind, für die gilt:

$$\overline{F_i} \cap \overline{F_j} = \partial F_i \cap \partial F_j \quad i \neq j.$$

Dabei gilt für ein reguläres Hyperflächenstück F mit Parameterbereich T und Parametrisierung $x = x(t)$, $t \in T$:

$$\partial F := \overline{F} \setminus F = x(\partial T)$$

- $\partial F_1 \cup \dots \cup \partial F_N$ ist eine Jordan'sche Nullmenge.

Ferner sei $f \in C(\overline{G}) \cap C^1(G)$, $f : \overline{G} \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit

$$\int_G |\operatorname{div} f(x)| dx < \infty.$$

Dann gilt

$$\int_G \operatorname{div} f(x) dx = \int_{\partial G} \langle f(y), \nu(y) \rangle ds(y). \quad (2.6)$$

Beweis: [5], Kapitel VII, Paragraph 2. □

Damit können wir nun den Green'schen Satz formulieren.

Satz 2.23 *Es sei G wie in Satz 2.22. Dann gilt für reellwertige Funktionen $f \in C(\overline{G}) \cap C^1(G)$ und $g \in C^1(\overline{G}) \cap C^2(G)$ mit*

$$\int_G |\operatorname{div}(f(x) \operatorname{grad} g(x))| dx < \infty$$

der Green'sche Satz

$$\int_G (f(x) \Delta g(x) + \langle \operatorname{grad} f(x), \operatorname{grad} g(x) \rangle) dx = \int_{\partial G} f(y) \frac{\partial g(y)}{\partial \nu} ds(y)$$

Beweis: Wir betrachten die vektorwertige Funktion $h := f \operatorname{grad} g \in C(\overline{G}) \cap C^1(G)$ und benutzen für $x \in G$

$$\operatorname{div} h(x) = \langle \operatorname{grad} f(x), \operatorname{grad} g(x) \rangle + f(x) \operatorname{div} \operatorname{grad} g(x).$$

Dann folgt die Behauptung aus Satz 2.22. □

2.6 Die Hölderräume $C^{0,\alpha}$ und $C^{k,\alpha}$

Um die Abbildungseigenschaften der Integraloperatoren, die für den Existenznachweis einer Lösung des gestellten Problems verwendet werden, in befriedigender Weise angeben zu können, werden wir im nun folgenden die dafür benötigten Hölderräume kurz einführen.

Definition 2.24 *Eine reellwertige Funktion f , die auf einer Menge $G \subset \mathbb{R}^m$ definiert ist, heißt gleichmäßig hölderstetig mit Hölderexponent $0 < \alpha \leq 1$, falls eine Konstante $C > 0$ existiert, so daß*

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha$$

für alle $x, y \in G$ gilt. Mit $C^{0,\alpha}(G)$ bezeichnen wir den linearen Raum aller Funktionen, die auf G definiert, dort beschränkt und gleichmäßig hölderstetig mit Hölderexponent α sind. Der Raum $C^{0,\alpha}(G)$ heißt Hölderraum.

Für Funktionen $f \in C^{0,\alpha}(G)$ können wir eine Halbnorm vermöge

$$|f|_\alpha := \sup_{\substack{x, y \in G \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

einführen. Es gilt der folgende

Satz 2.25 *Der Hölderraum $C^{0,\alpha}(G)$ ist ein Banachraum mit der Norm*

$$\|f\|_\alpha := \sup_{x \in G} |f(x)| + |f|_\alpha$$

Beweis: [9], Satz 7.2. □

Für $0 < \alpha < \beta \leq 1$ gilt die Inklusion $C^{0,\beta}(G) \subset C^{0,\alpha}(G)$. Darüberhinaus ist es sogar möglich, den Raum $C^{0,\beta}(G)$ in den Raum $C^{0,\alpha}(G)$ kompakt einzubetten, falls die Menge G selbst kompakt ist.

Satz 2.26 *Sei $0 < \alpha < \beta \leq 1$ und G kompakt. Dann sind die Einbettungsoperatoren*

$$I^\beta : C^{0,\beta}(G) \rightarrow C(G)$$

und

$$I^{\alpha,\beta} : C^{0,\beta}(G) \rightarrow C^{0,\alpha}(G)$$

kompakt.

Beweis: [9], Satz 7.4. □

Später werden wir die speziellen Räume der 2π -periodischen, k -mal gleichmäßig hölderstetig differenzierbaren Funktionen benötigen, die wir mit $C^{k,\alpha}[0, 2\pi]$ bezeichnen. Dabei definieren wir die Funktionenräume $C^{k,\alpha}[0, 2\pi]$ induktiv, indem wir $f \in C^{k,\alpha}[0, 2\pi]$ schreiben, falls für die erste Ableitung von f gilt: $f' \in C^{k-1,\alpha}[0, 2\pi]$. Der Funktionenraum $C^{k,\alpha}[0, 2\pi]$ wird durch Einführen der Norm

$$\|f\|_{k,\alpha} := \sum_{j=0}^{k-1} \|f^{(j)}\|_\infty + \|f^{(k)}\|_\alpha$$

zu einem Banachraum.

Als weiterer benötigter Funktionenraum wird der Unterraum der 2π -periodischen, k -mal gleichmäßig hölderstetig differenzierbaren Funktionen, die ungerade sind, auftreten. Wir definieren diesen Raum durch

$$C_{ung}^{k,\alpha}[0, 2\pi] := \{ \xi : \xi \text{ ungerade, } \xi \in C^{k,\alpha}[0, 2\pi] \}, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (2.7)$$

Als abgeschlossene Teilmenge eines vollständigen Raums ist dieser Raum selbst wieder vollständig. Aufgrund der Ungeradheit und der 2π -Periodizität von $\xi \in C_{ung}^{k,\alpha}[0, 2\pi]$ gilt $\xi(0) = \xi(\pi) = \xi(2\pi) = 0$.

Darüberhinaus werden wir den Raum $C^{1,\alpha}(\Gamma)$ benötigen. Für diese Definition geben wir zunächst einmal eine von der Parametrisierung des Bogens unabhängige Definition des Gradienten auf dem Bogen an. Dafür sei

$$\text{Grad } f(\gamma(s)) := \frac{1}{|\dot{\gamma}(s)|^2} \frac{d(f \circ \gamma)(s)}{ds} \dot{\gamma}(s).$$

Diese Darstellung vereinfacht sich zu

$$\text{Grad } f(\gamma(s)) = \frac{d(f \circ \gamma)(s)}{ds} \dot{\gamma}(s),$$

falls Γ bzgl. seiner Bogenlänge parametrisiert ist. Auf vollkommen analoge Weise läßt sich so der Randgradient eines Gebietes mit hinreichend glattem Rand erklären. Für $f \in C^1(\Gamma)$ wird noch die Differentiation nach der Bogenlänge eingeführt:

$$f'(x) := \frac{\partial f}{\partial t}(x) := \langle \text{Grad } f(x), t(x) \rangle.$$

Definition 2.27 Eine reellwertige Funktion f , die auf $\Gamma \subset D$ definiert ist, heißt gleichmäßig hölderstetig differenzierbar mit Hölderexponent $0 < \alpha \leq 1$, falls eine Konstante $C > 0$ existiert, so daß

$$|f'(x) - f'(y)| \leq C|x - y|^\alpha$$

für alle $x, y \in \Gamma$ gilt. Mit $C^{1,\alpha}(\Gamma)$ bezeichnen wir den linearen Raum aller Funktionen, die auf Γ definiert, dort beschränkt und gleichmäßig hölderstetig differenzierbar mit Hölderexponent α sind.

Mit der Norm

$$\|f\|_{1,\alpha} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\alpha$$

wird $C^{1,\alpha}(\Gamma)$ zu einem Banachraum.

Für geschlossene Randkurven eines Gebietes und Funktionen φ_1 und $\varphi_2 \in C^1(\partial D)$ kann man mit Hilfe partieller Integration die Formel

$$\int_{\partial D} \frac{\partial \varphi_1(y)}{\partial t} \varphi_2(y) ds(y) = - \int_{\partial D} \varphi_1(y) \frac{\partial \varphi_2(y)}{\partial t} ds(y)$$

beweisen. Im Falle unseres Bogens Γ und einer Dichte ψ , die an den Endpunkten des Bogens verschwindet, können wir dieses Ergebnis übertragen.

Lemma 2.28 *Es seien ψ und $\varphi \in C^1(\Gamma)$ mit $\psi(x_1^*) = \psi(x_{-1}^*) = 0$. Dann gilt*

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial \varphi(y)}{\partial t} \psi(y) ds(y) = - \int_{\Gamma} \varphi(y) \frac{\partial \psi(y)}{\partial t} ds(y). \quad (2.8)$$

Beweis: Ohne Einschränkung dürfen wir annehmen, daß $\Gamma = \{\gamma(s) : s \in [a, b]\}$ bzgl. seiner Bogenlänge parametrisiert ist, d.h. $|\dot{\gamma}(s)| = 1$ für alle $s \in [a, b]$. Wir berechnen mit Hilfe partieller Integration

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \frac{\partial \varphi(y)}{\partial t} \psi(y) ds(y) &= \int_a^b \left\langle \frac{d(\varphi \circ \gamma)(s)}{ds} \dot{\gamma}(s), t(\gamma(s)) \right\rangle (\psi \circ \gamma)(s) ds \\ &= \int_a^b \frac{d(\varphi \circ \gamma)(s)}{ds} (\psi \circ \gamma)(s) ds \\ &= - \int_a^b (\varphi \circ \gamma)(s) \frac{d(\psi \circ \gamma)(s)}{ds} ds \\ &= - \int_{\Gamma} \varphi(y) \frac{\partial \psi(y)}{\partial t} ds(y). \end{aligned}$$

□

Kapitel 3

Die Formulierung des Problems

In diesem kurzen Kapitel werden wir unsere Aufgabenstellung formulieren. Die dafür notwendigen Voraussetzungen sind in den vorangegangenen Kapiteln erbracht worden.

Die Aufgabe ist eine Koppelung eines Dirichletproblems in einem Gebiet mit glattem Rand mit einem Problem, wie es in [14] behandelt wird, allerdings für die Laplace-Gleichung. Wir werden uns also in unserem Gebiet D noch einen Schlitz, repräsentiert durch den Bogen Γ , vorgeben, auf dem die gesuchte Funktion Neumann-Randwerte annimmt.

Definition 3.1 (Gekoppeltes Dirichlet-Neumann-Problem) *Gesucht ist eine Funktion $u \in C^2(D \setminus \Gamma) \cap (C(\overline{D} \setminus \Gamma))$ mit existierenden Normalableitungen*

$$\frac{\partial u_{\pm}(x)}{\partial \nu} := \lim_{h \rightarrow +0} \langle \nu(x), \text{grad } u(x \pm h\nu(x)) \rangle, \quad x \in \Gamma_0, \quad (3.1)$$

im Sinne lokal gleichmäßiger Konvergenz und existierenden Grenzwerten

$$u_+(x) = \lim_{h \rightarrow +0} u(x + h\nu(x)), \quad x \in \Gamma, \quad (3.2)$$

$$u_-(x) = \lim_{h \rightarrow +0} u(x - h\nu(x)), \quad x \in \Gamma, \quad (3.3)$$

im Sinne gleichmäßiger Konvergenz, $u_{\pm} \in C(\Gamma)$, die in den Endpunkten x_i^ , $i = -1, 1$, des Bogens stetig ist, die in $D \setminus \Gamma$ die Laplace-Gleichung*

$$\Delta u = 0, \quad (3.4)$$

die Dirichletsche Randbedingung

$$u = f \quad \text{auf} \quad \partial D \quad (3.5)$$

und die Neumannsche Randbedingung

$$\frac{\partial u_{\pm}}{\partial \nu} = g \quad \text{auf} \quad \Gamma \quad (3.6)$$

erfüllt. Dabei sind $f \in C(\partial D)$ und $g \in C^{0,\alpha}(\Gamma)$ vorgegebene Funktionen.

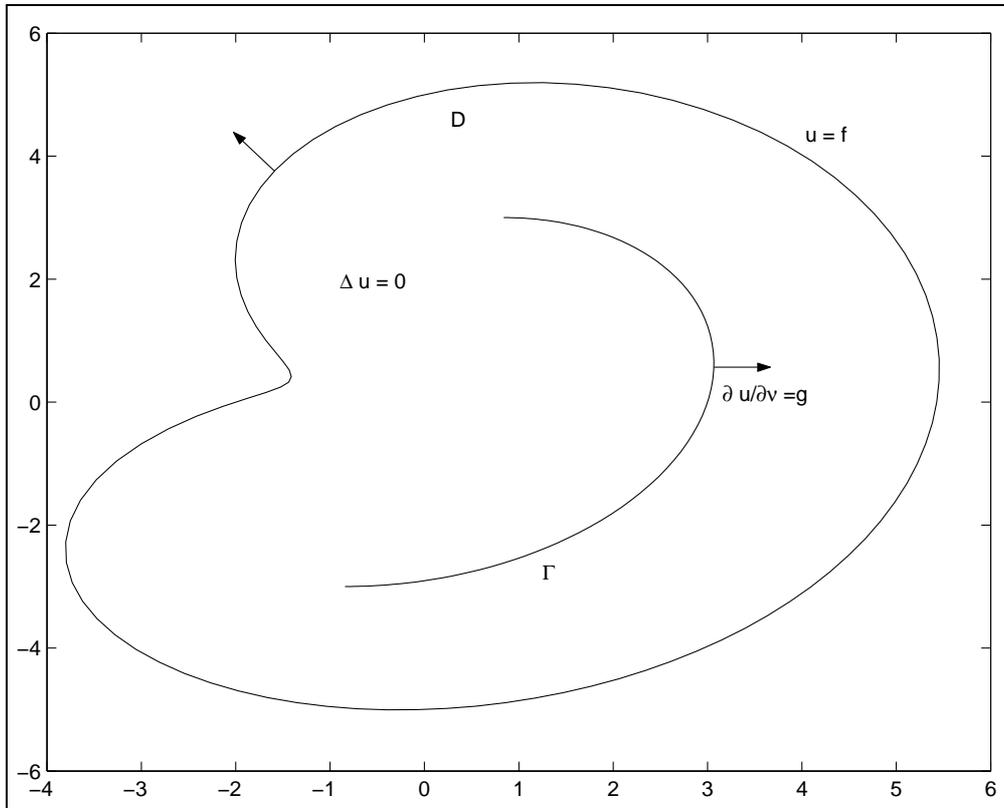


Abbildung 3.1: Problemstellung

Die Abbildung 3 veranschaulicht die Problemstellung.

Kapitel 4

Der Eindeutigkeitsbeweis

In diesem Kapitel werden wir den Nachweis erbringen, daß die gestellte Aufgabe aus Kapitel 3 höchstens eine Lösung besitzt. Die dafür notwendigen Vorbereitungen sind im Abschnitt 2.4 erbracht worden.

Da wir auf dem Rand unseres Gebietes ∂D Dirichletdaten gegeben haben, könnte man die Idee haben, zunächst einen Beweisversuch über das Minimum-Maximum Prinzip zu starten. Leider kann dieses jedoch nicht so einfach zum Erfolg führen, da wir auf dem Schlitz, der ja nun ebenfalls Rand des Gebietes ist, Neumann-Daten gegeben haben. Die übliche Art und Weise der Folgerung greift hier also nicht, da die Werte einer Lösung auf dem Schlitz nicht bekannt sind.

Stattdessen werden wir den Beweis mit Hilfe des Green'schen Satzes erbringen. Dafür müssen wir dessen Gültigkeit unter unseren Voraussetzungen beweisen. Würde man den Green'schen Satz naiv in unserem Gebiet mit Schlitz auf eine Lösung u unseres Problems anwenden, die homogene Randbedingungen, also $\frac{\partial u_{\pm}}{\partial \nu}|_{\Gamma} = 0$ und $u|_{\partial D} = 0$ erfüllt, so sollte folgende Version des Green'schen Satzes gültig sein:

$$\int_D |\text{grad } u(y)|^2 dy = 0. \quad (4.1)$$

Genau dieses erwartete Ergebnis werden wir auch beweisen können. Der hier dargestellte Beweis dieser Tatsache ist sehr elementar, da er außer Lebesgue'scher Integrationstheorie keine weiteren Hilfsmittel benötigt.

4.1 Eindeutigkeit

Wir zeigen zunächst die Gültigkeit von (4.1):

Lemma 4.1 *Sei u eine Lösung des homogenen Problems aus Kapitel 3, d.h. $u|_{\partial D} = 0$ und $\frac{\partial u_{\pm}}{\partial \nu}|_{\Gamma} = 0$. Dann gilt*

$$\text{grad } u \in L^2(D), \quad (4.2)$$

und die folgende Version des Greenschen Satzes ist gültig:

$$\int_D |\operatorname{grad} u(y)|^2 dy = 0. \quad (4.3)$$

Beweis: Aufgrund der Voraussetzungen an den Bogen Γ und ∂D existieren ein $\varepsilon_1 > 0$ und ein $\varepsilon_{-1} > 0$, wobei wir ohne Einschränkung annehmen dürfen, daß $\varepsilon := \varepsilon_1 = \varepsilon_{-1}$ gilt, sowie Umgebungen $B(x_1^*, \varepsilon)$ und $B(x_{-1}^*, \varepsilon)$ mit den Eigenschaften:

$$B(x_i^*, \varepsilon) \subset D, \quad i = -1, 1 \quad \text{und} \quad B(x_1^*, \varepsilon) \cap B(x_{-1}^*, \varepsilon) = \emptyset.$$

Durch Anwendung von Satz 2.15 erhalten wir Funktionen $v_1 \in C^\infty(\overline{D})$ mit $\operatorname{supp}(v_1) \subset B(x_1^*, \varepsilon)$ und $v_{-1} \in C^\infty(\overline{D})$ mit $\operatorname{supp}(v_{-1}) \subset B(x_{-1}^*, \varepsilon)$, und $v_1|_{B(x_1^*, \delta_1)} = 1$ sowie $v_{-1}|_{B(x_{-1}^*, \delta_{-1})} = 1$ für passende $0 < \delta_1, \delta_{-1} < \varepsilon$. Wir definieren

$$v := u(x_1^*)v_1 + u(x_{-1}^*)v_{-1},$$

Dann ist offensichtlich $v \in C^\infty(\overline{D})$ und $v(x_i^*) = u(x_i^*)$, $i = -1, 1$. Im folgenden werden wir nun die Funktion $w := u - v$ betrachten, die in den Endpunkten des Bogens und auf ∂D verschwindet.

Nun wählen wir eine ungerade, monoton wachsende Funktion $p \in C^1(\mathbb{R})$, definiert durch

$$p(s) := \begin{cases} 0 & : 0 \leq s \leq 1 \\ -3s^3 + 14s^2 - 19s + 8 & : 1 \leq s \leq 2 \\ s & : s \geq 2 \end{cases}, \quad (4.4)$$

und betrachten eine Folge von Approximationsfunktionen definiert durch

$$w_n := \frac{p(nw)}{n}.$$

Wegen der Wahl von p , verschwinden die Funktionen w_n in der Nähe der Endpunkte des Bogens und in einer Umgebung von ∂D .

Außerdem konvergiert (w_n) gleichmäßig gegen w , denn es ist

$$\begin{aligned} \|w_n - w\|_\infty &= \sup_{x \in D \setminus \Gamma_0} |w_n(x) - w(x)| \\ &= \sup_{x \in D \setminus \Gamma_0} \left| \frac{p(nw(x))}{n} - w(x) \right|. \end{aligned}$$

Es bezeichne

$$\begin{aligned} M_{1,n} &:= \sup_{x \in D \setminus \Gamma_0} \left\{ |w(x)| : 0 \leq |w(x)| \leq \frac{1}{n} \right\} \\ M_{2,n} &:= \sup_{x \in D \setminus \Gamma_0} \left\{ \left| \frac{p(nw(x))}{n} - w(x) \right| : \frac{1}{n} \leq |w(x)| \leq \frac{2}{n} \right\}. \end{aligned}$$

Dann gilt $M_{1,n} \leq 1/n$ und $M_{2,n} \leq 2/n + 2/n = 4/n$, also

$$\|w_n - w\|_\infty \leq \max\{M_{1,n}, M_{2,n}\} \leq \frac{4}{n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Da wir den Green'schen Satz anwenden wollen, konstruieren wir für hinreichend kleines $h > 0$ eine um den Bogen Γ liegende, stetige Parallelkurve. Dafür sei

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &:= \gamma(t) - h\nu(t), & t \in [-1, 1], \\ \varphi_2(t) &:= \gamma(1) + t\nu(1), & t \in [-h, h], \\ \varphi_3(t) &:= \gamma(t) + h\nu(t), & t \in [-1, 1], \\ \varphi_4(t) &:= \gamma(-1) + t\nu(-1), & t \in [-h, h]. \end{aligned}$$

Es bezeichne S den durch diese Parallelkurve definierten Schlauch um Γ . Die Normale an ∂S orientieren wir in das Gebiet $D \setminus S$.

Da die Funktionen w_n in der Nähe von ∂D verschwinden, sind diese Funktionen hier konstant, also verschwindet $\text{grad } w_n$ ebenfalls in einer Umgebung von ∂D . Wir können daher auf $D \setminus S$ den Green'schen Satz anwenden:

$$\begin{aligned} \int_{D \setminus S} \langle \text{grad } w_n(y), \text{grad } w(y) \rangle dy &= \int_{\partial D} w_n(y) \frac{\partial w(y)}{\partial \nu} ds(y) - \int_{\partial S} w_n(y) \frac{\partial w(y)}{\partial \nu} ds(y) \\ &\quad - \int_{D \setminus S} w_n(y) \Delta w(y) dy. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Es ist nun

$$\int_{\partial S} w_n(y) \frac{\partial w(y)}{\partial \nu} ds(y) = \sum_{i=1}^4 \int_{\varphi_i} w_n(y) \frac{\partial w(y)}{\partial \nu} ds(y).$$

Da die Funktionen w_n in einer Umgebung der Endpunkte des Bogens verschwinden, existieren diese vier Integrale und es gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{\varphi_i} w_n(y) \frac{\partial w(y)}{\partial \nu} ds(y) = 0, \quad i = 2, 4.$$

Aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz der Lösung u in Richtung der Normalen bzw. der lokal gleichmäßigen Konvergenz der Normalableitungen gegen stetige Funktionen auf dem Bogen Γ , konvergieren die Integrale über die Wege φ_1 und φ_3 gegen die Integrale über den Bogen mit jeweils umgekehrter Orientierung, also

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow +0} \int_{\varphi_1} w_n(y) \frac{\partial w(y)}{\partial \nu} ds(y) &= - \int_{\Gamma} w_{n,-}(y) \frac{\partial w(y)}{\partial \nu} ds(y), \\ \lim_{h \rightarrow +0} \int_{\varphi_3} w_n(y) \frac{\partial w(y)}{\partial \nu} ds(y) &= \int_{\Gamma} w_{n,+}(y) \frac{\partial w(y)}{\partial \nu} ds(y). \end{aligned}$$

Dabei bezeichnen $w_{n,+}$ und $w_{n,-}$ Funktionen wie in der Definition des Problems aus Kapitel 3. Da außerdem die Funktionen w_n in der Nähe der Endpunkte des Bogens verschwinden, müssen auch hier Umgebungen existieren, so daß $\text{grad } w_n(y) = 0$ für alle y aus diesen Umgebungen gilt. Weil der Bogen Γ eine Nullmenge im \mathbb{R}^2 ist und weil die Funktionen w_n auch in einer Umgebung von ∂D verschwinden, erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} \int_D \langle \text{grad } w_n(y), \text{grad } w(y) \rangle dy &= - \int_{\Gamma} (w_{n,+}(y) - w_{n,-}(y)) \frac{\partial w(y)}{\partial \nu} ds(y) \\ &\quad - \int_D w_n(y) \Delta w(y) dy. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Sei

$$M := \{y \in D \setminus \Gamma : w(y) = 0, \text{grad } w(y) \neq 0\}.$$

Dann betrachten wir den Ausdruck

$$\langle \text{grad } w_n(y), \text{grad } w(y) \rangle = p'(nw(y)) |\text{grad } w(y)|^2 \quad (4.7)$$

für $y \notin M$. Falls $w(y) = 0$ und $\text{grad } w(y) = 0$ oder $w(y) \neq 0$ und $\text{grad } w(y) = 0$ gilt, so verschwindet (4.7) für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gelte nun $w(y) \neq 0$ und $\text{grad } w(y) \neq 0$. Dann existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so daß $|nw(y)| \geq 2$, also $p'(nw(y)) = 1$. Faßt man diese Aussagen zusammen und benutzt ferner, daß p eine monoton wachsende Funktion ist, weswegen $p'(s) \geq 0$ für alle $s \in \mathbb{R}$ gilt, erhalten wir insgesamt

$$0 \leq \langle \text{grad } w_n(y), \text{grad } w(y) \rangle = p'(nw(y)) |\text{grad } w(y)|^2 \rightarrow |\text{grad } w(y)|^2, \quad n \rightarrow \infty.$$

Mit Hilfe der Sätze 2.20 und 2.21 folgt, daß $M \cup \Gamma$ eine Nullmenge ist. Unter Benutzung von $|p(nw(y))| \leq n|w(y)|$ für alle $n \in \mathbb{N}$ schätzen wir noch

$$\begin{aligned} \int_D \langle \text{grad } w_n(y), \text{grad } w(y) \rangle dy &\leq \left| \int_D \langle \text{grad } w_n(y), \text{grad } w(y) \rangle dy \right| \\ &\leq \int_{\Gamma} (|w_{n,+}(y)| + |w_{n,-}(y)|) \left| \frac{\partial w(y)}{\partial \nu} \right| ds(y) \\ &\quad + \int_D |w_n(y)| |\Delta w(y)| dy \\ &\leq \int_{\Gamma} (|w_+(y)| + |w_-(y)|) \left| \frac{\partial w(y)}{\partial \nu} \right| ds(y) \\ &\quad + \int_D |w(y)| |\Delta w(y)| dy =: C. \end{aligned}$$

ab. Dabei ist $C > 0$ eine feste Konstante, da beide Integrale auf der rechten Seite existieren und völlig unabhängig von der Wahl von n sind. Folglich ist

$\langle \text{grad } w_n, \text{grad } w \rangle \in L(D)$ eine Folge nichtnegativer Funktionen, die fast überall gegen $|\text{grad } w|^2$ strebt und deren Integral für alle $n \in \mathbb{N}$ durch C beschränkt ist. Das Lemma von Fatou sagt uns jetzt, daß auch $\langle \text{grad } w, \text{grad } w \rangle = |\text{grad } w|^2 \in L(D)$ ist, und infolgedessen $\text{grad } w \in L^2(D)$ sein muß. Da $\text{grad } w = \text{grad } u - \text{grad } v$, also $\text{grad } u = \text{grad } w + \text{grad } v$ und $\text{grad } v$ offensichtlich in $L^2(D)$ liegt, muß auch $\text{grad } u \in L^2(D)$ sein, womit die erste Aussage des Satzes bewiesen ist.

Wir definieren nun mit Hilfe von (4.4)

$$u_n := \frac{p(nu)}{n}.$$

Wie oben folgt, daß $u_n \rightarrow u$, $n \rightarrow \infty$, gleichmäßig konvergiert.

Für den Beweis der zweiten Aussage des Lemmas untersuchen wir nun die Integrale

$$V_i(h) := \int_{\partial B(x_i^*, h)} u_n(y) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} ds(y), \quad i = -1, 1, \quad (4.8)$$

und werden

$$V_i(h) \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0, \quad (4.9)$$

zeigen. Wir schätzen dafür zunächst ab

$$\begin{aligned} |V_i(h)| &\leq \|u_n\|_{\infty, \partial B(x_i^*, h)} \int_{\partial B(x_i^*, h)} 1 \cdot \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right| ds \\ &\leq \|u_n\|_{\infty, \partial B(x_i^*, h)} \left(\int_{\partial B(x_i^*, h)} 1 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\partial B(x_i^*, h)} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|u_n\|_{\infty, \partial B(x_i^*, h)} \sqrt{2\pi} \sqrt{h} \left(\int_{\partial B(x_i^*, h)} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

und erhalten, indem wir $C := \|u_n\|_{\infty, \partial B(x_i^*, h)} \sqrt{2\pi}$ setzen,

$$\begin{aligned} \int_0^r \frac{|V_i(h)|^2}{h} dh &\leq \int_0^r \frac{1}{h} C^2 h \int_{\partial B(x_i^*, h)} \left| \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} \right|^2 ds(y) dh \\ &\leq C^2 \int_D \left| \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} \right|^2 dx \\ &\leq C^2 \int_D |\text{grad } u(x)|^2 dx \\ &= C^2 \|\text{grad } u\|_{L^2(D)}^2 < \infty. \end{aligned}$$

Damit jedoch $\int_0^r \frac{|V_i(h)|^2}{h} dh$ existiert, muß notwendigerweise Aussage (4.9) gelten.

Weil u_n in einer Umgebung von ∂D verschwindet, muß auch $\text{grad } u_n$ in einer Umgebung von ∂D verschwinden. Wie oben im Beweis können wir wieder eine Parallelkurve um den Bogen Γ legen und dann den Green'schen Satz erneut auf das Gebiet $D \setminus (B(x_1^*, r) \cup B(x_{-1}^*, r) \cup S)$ anwenden. Wegen der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Gamma} = 0$ verschwinden dann die Integrale, die wie oben gegen die Integrale über Γ konvergieren, ebenso verschwindet auch das Integral über ∂D . Wir erhalten

$$\begin{aligned} \int_{D \setminus (B(x_1^*, r) \cup B(x_{-1}^*, r))} \langle \text{grad } u_n(y), \text{grad } u(y) \rangle dy &= - \int_{\partial B(x_1^*, r)} u_n(y) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} ds(y) \\ &\quad - \int_{\partial B(x_{-1}^*, r)} u_n(y) \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} ds(y). \end{aligned}$$

Für $r \rightarrow 0$ konvergieren die beiden Integrale auf der rechten Seite wegen (4.9) gegen 0, insgesamt erhalten wir also

$$\int_D \langle \text{grad } u_n(y), \text{grad } u(y) \rangle dy = 0.$$

Wie oben definieren wir nun wieder

$$\tilde{M} := \{y \in D \setminus \Gamma : u(y) = 0, \text{grad } u(y) \neq 0\}$$

und erhalten für $y \notin \tilde{M}$

$$0 \leq \langle \text{grad } u_n(y), \text{grad } u(y) \rangle = p'(n(u(y))) |\text{grad } u(y)|^2, \rightarrow |\text{grad } u(y)|^2, \quad n \rightarrow \infty,$$

also gilt diese Konvergenz, wie oben bereits gezeigt, fast überall. Da außerdem

$$|\langle \text{grad } u_n(y), \text{grad } u(y) \rangle| \leq \|p'\|_{\infty} |\text{grad } u|^2 \in L(D)$$

gilt, da $\|p'\|_{\infty}$ beschränkt bleibt, können wir den Satz von Lebesgue von der majorierten Konvergenz anwenden und erhalten schließlich, daß

$$\int_D |\text{grad } u(y)|^2 ds(y) = 0$$

ist, womit auch die zweite Aussage bewiesen ist. □

Damit ergibt sich nun mühelos der

Satz 4.2 *Das Problem aus Kapitel 3 hat höchstens eine Lösung.*

Beweis: Seien u_1 und u_2 zwei Lösungen des Problems und u definiert durch $u := u_1 - u_2$. Dann ist u eine Lösung des Problems aus Kapitel 3 mit homogenen Randwerten. Es folgt

$$0 = \int_D |\text{grad } u|^2 dy,$$

und daher ist $\text{grad } u = 0$ in $D \setminus \Gamma$. Also muß u konstant sein in $D \setminus \Gamma$. Da $u = 0$ auf ∂D und u stetig auf $\overline{D} \setminus \Gamma$ ist, folgt $u = 0$ auf $D \setminus \Gamma$. Aus der homogenen Randbedingung $\frac{\partial u_{\pm}}{\partial \nu}|_{\Gamma} = 0$ erhalten wir schließlich $u = 0$ in D und somit $u_1 = u_2$. \square

Kapitel 5

Existenz

Wir beschäftigen uns im weiteren mit der Existenzaussage des Randwertproblems aus Kapitel 3.

Zunächst werden wir einige Ergebnisse aus der Potentialtheorie referieren, d.h. wir werden Doppelschichtpotentiale über den Rand ∂D und über den Bogen Γ mit passenden Dichten einführen und die benötigten Eigenschaften von diesen aufführen. Anschließend werden wir einen Lösungsansatz machen, mit dessen Hilfe wir das Randwertproblem in Integralgleichungen überführen. Schließlich weisen wir mit der Riesz Theorie die Existenz einer Lösung nach.

5.1 Einfachschicht- und Doppelschichtpotential

In diesem Abschnitt werden die Potentiale, die zum Nachweis der Existenz einer Lösung benötigt werden, eingeführt und die nötigen Eigenschaften nachgewiesen. Für die Beweise werden wir dafür zum Teil auf [9] verweisen. Die notwendigen Aussagen des Doppelschichtpotentials über den Bogen Γ werden wir beweisen.

An dieser Stelle führen wir zunächst einmal einen Funktionenraum ein, den wir für die Definition des Doppelschichtpotentials über den Bogen Γ benötigen.

Definition 5.1 *Es sei*

$$C^{1,\alpha,*}(\Gamma) := \left\{ \psi : \psi(x_1^*) = \psi(x_{-1}^*) = 0, \frac{d(\psi \circ \gamma)(s)}{ds} = \frac{\tilde{\psi}(\arccos s)}{\sqrt{1-s^2}}, \tilde{\psi} \in C^{0,\alpha}[0, \pi] \right\}.$$

An dieser Stelle erscheint es reichlich unklar, warum wir gerade Dichten aus diesem Funktionenraum betrachten. Wir werden später eine heuristische Erklärung dafür geben, und im Laufe des Existenzbeweises wird sich herauskristallisieren, warum dieser Funktionenraum von Bedeutung ist. Damit ist es uns nun möglich die Potentiale einzuführen.

Definition 5.2 Es sei $\varphi \in C(\partial D)$ und es sei $\psi \in C^{1,\alpha,*}(\Gamma)$. Dann bezeichnen wir mit

$$u(x) := \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \varphi(y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D \quad (5.1)$$

das Doppelschichtpotential mit Dichte φ über ∂D und mit

$$v(x) := \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \psi(y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma \quad (5.2)$$

das Doppelschichtpotential mit Dichte ψ über Γ .

Satz 5.3 Das Doppelschichtpotential u mit Dichte $\varphi \in C(\partial D)$ läßt sich stetig von $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ nach $\mathbb{R}^2 \setminus D$ und von D nach \overline{D} mit den Grenzwerten

$$u_{\pm}(x) = \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \varphi(y) ds(y) \pm \frac{1}{2} \varphi(x), \quad x \in \partial D \quad (5.3)$$

fortsetzen, wobei

$$u_{\pm}(x) := \lim_{h \rightarrow +0} u(x \pm h\nu(x))$$

und das Integral als uneigentliches Integral existiert.

Beweis: [9], Satz 6.17 □

Satz 5.4 Es seien $\varphi \in C^{0,\alpha}(\partial D)$ und $0 < \alpha < 1$. Dann läßt sich der Gradient eines Einfachschichtpotentials

$$w(x) := \int_{\partial D} \Phi(x, y) \varphi(y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D \quad (5.4)$$

gleichmäßig hölderstetig von $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ nach $\mathbb{R}^2 \setminus D$ und von D nach \overline{D} mit den Grenzwerten

$$\text{grad } w_{\pm}(x) = \int_{\partial D} \text{grad}_x \Phi(x, y) \varphi(y) ds(y) \mp \frac{1}{2} \nu(x) \varphi(x), \quad x \in \partial D \quad (5.5)$$

fortsetzen, wobei das Integral als Cauchy-Hauptwert zu verstehen ist. Ferner gelten die Abschätzungen

$$|\text{grad } w|_{\alpha, \mathbb{R}^2 \setminus D} \leq C_{\alpha, \partial D} \|\varphi\|_{\alpha, \partial D}, \quad |\text{grad } w|_{\alpha, \overline{D}} \leq C_{\alpha, \partial D} \|\varphi\|_{\alpha, \partial D},$$

wobei $C_{\alpha, \partial D}$ eine von ∂D und α abhängige Konstante ist.

Beweis: [19] Satz 2.27. □

Um die für uns notwendigen Eigenschaften des Doppelschichtpotentials über Γ nachzuweisen, benötigen wir noch das vorbereitende

Lemma 5.5 Für $x \neq y$, $x, y \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$\operatorname{grad}_x \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} = \left(-\frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial t(y)}, \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial t(y)} \right)^T \quad (5.6)$$

Beweis: Im Beweis sei

$$\nu(y) = (\nu_1(y), \nu_2(y))^T \quad \text{und} \quad t(y) = (t_1(y), t_2(y))^T = (-\nu_2(y), \nu_1(y))^T.$$

Wir berechnen

$$\operatorname{grad}_x \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} = \operatorname{grad}_x \langle \operatorname{grad}_y \Phi(x, y), \nu(y) \rangle = -\operatorname{grad}_x \langle \operatorname{grad}_x \Phi(x, y), \nu(y) \rangle$$

und erhalten unter Ausnutzung, daß Φ die Laplace-Gleichung erfüllt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} \langle \operatorname{grad}_x \Phi(x, y), \nu(y) \rangle &= \left\langle \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \Phi(x, y), \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \Phi(x, y) \right)^T, \nu(y) \right\rangle \\ &\quad + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \Phi(x, y) \nu_1(y) - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \Phi(x, y) \nu_1(y) \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \Phi(x, y) + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \Phi(x, y) \right) \nu_1(y) \\ &\quad + \left\langle \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \Phi(x, y), \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \Phi(x, y) \right)^T, \begin{pmatrix} \nu_2(y) \\ -\nu_1(y) \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= - \left\langle \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \Phi(x, y), \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \Phi(x, y) \right)^T, t(y) \right\rangle \\ &= -\frac{\partial}{\partial x_2} \langle \operatorname{grad}_x \Phi(x, y), t(y) \rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial x_2} \langle \operatorname{grad}_y \Phi(x, y), t(y) \rangle = \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial t(y)}. \end{aligned}$$

Vollkommen analog berechnet man

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \langle \operatorname{grad}_x \Phi(x, y), \nu(y) \rangle = \frac{\partial}{\partial x_1} \langle \operatorname{grad}_x \Phi(x, y), t(y) \rangle = -\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial t(y)}.$$

□

Satz 5.6 Das Doppelschichtpotential v mit Dichte $\psi \in C^{1,\alpha,*}(\Gamma)$ läßt sich stetig von $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ nach Γ mit den Grenzwerten

$$v_{\pm}(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \psi(y) ds(y) \pm \frac{1}{2} \psi(x), \quad x \in \Gamma \quad (5.7)$$

fortsetzen, wobei

$$v_{\pm}(x) := \lim_{h \rightarrow +0} v(x \pm h\nu(x))$$

und das Integral als uneigentliches Integral existiert.

Der Gradient des Doppelschichtpotentials kann stetig von $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ nach Γ_0 fortgesetzt werden und die Normalableitung von v ist gegeben durch

$$\frac{\partial v_{\pm}(x)}{\partial \nu} = \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \psi(y) ds(y), \quad x \in \Gamma_0. \quad (5.8)$$

Sie erfüllt darüberhinaus die Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial \nu(x)} \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \psi(y) ds(y) = \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial t(x)} \frac{\partial \psi(y)}{\partial t} ds(y), \quad x \in \Gamma_0. \quad (5.9)$$

Beweis: Im Beweis bezeichnen wir mit 1_{Γ} die charakteristische Funktion auf dem Bogen Γ , d.h.

$$1_{\Gamma}(x) := \begin{cases} 1, & x \in \Gamma \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Wir ergänzen den C^3 -Bogen Γ zu einer geschlossenen C^3 -glatten Kurve $\tilde{\Gamma}$ und setzen die Dichte ψ durch eine Dichte $\tilde{\psi}$ durch

$$\tilde{\psi}(x) := \begin{cases} \psi(x), & x \in \Gamma \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

auf $\tilde{\Gamma}$ fort, die wegen $\psi(x_1^*) = \psi(x_{-1}^*) = 0$ stetig ist. Dann können wir auf

$$\tilde{v}(x) := \int_{\tilde{\Gamma}} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \tilde{\psi}(y) ds(y)$$

die bekannten Sprungbeziehungen für das Doppelschichtpotential mit Dichte $\tilde{\psi} \in C(\tilde{\Gamma})$ anwenden und erhalten für $x \in \Gamma$

$$\begin{aligned} v_{\pm}(x) = \tilde{v}_{\pm}(x) &= \int_{\tilde{\Gamma}} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \tilde{\psi}(y) ds(y) \pm \frac{1}{2} \tilde{\psi}(x) \\ &= \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \psi(y) ds(y) \pm \frac{1}{2} \psi(x). \end{aligned}$$

Zum Beweis der weiteren Aussagen definieren wir eine Funktion

$$h(x) := - \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial t(y)} \psi(y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma,$$

die wegen Lemma 2.28 und 5.5 die Beziehungen

$$h(x) = \int_{\Gamma} \Phi(x, y) \frac{\partial \psi(y)}{\partial t} ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma,$$

und

$$\operatorname{grad} v(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x_2} h(x), -\frac{\partial}{\partial x_1} h(x) \right)^T = [\operatorname{grad} h(x)]^\perp, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma,$$

erfüllt. Dabei bezeichnen wir für $a = (a_1, a_2)^T \in \mathbb{R}^2$ mit a^\perp den Vektor

$$a^\perp := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} a.$$

Dann betrachten wir eine feste Stelle $x \in \Gamma_0$ und bezeichnen mit Γ_1 und Γ_2 Teilbögen von Γ mit der Eigenschaft $x \in \Gamma_2 \subset \Gamma_1 \subset \Gamma_0$. Γ_1 ergänzen wir zu einer geschlossenen Kurve $\tilde{\Gamma}$ der Klasse C^3 und wählen eine Funktion $\zeta \in C^1(\Gamma)$ mit $\zeta|_{\Gamma_2} \equiv 1$ und $\zeta|_{\Gamma \setminus \Gamma_1} \equiv 0$. Es seien nun

$$\begin{aligned} h_1(x) &:= \int_{\Gamma} \Phi(x, y) \zeta(y) \frac{\partial \psi(y)}{\partial t} ds(y) = \int_{\tilde{\Gamma}} \Phi(x, y) \zeta(y) 1_{\Gamma_1}(y) \frac{\partial \psi(y)}{\partial t} ds(y), \\ h_2(x) &:= \int_{\Gamma} \Phi(x, y) (1 - \zeta(y)) \frac{\partial \psi(y)}{\partial t} ds(y) = \int_{\Gamma \setminus \Gamma_2} \Phi(x, y) (1 - \zeta(y)) \frac{\partial \psi(y)}{\partial t} ds(y), \end{aligned}$$

so daß also $h = h_1 + h_2$ gilt. Es ist dann $\zeta 1_{\Gamma_1} \frac{\partial \psi}{\partial t} \in C^{0,\alpha}(\tilde{\Gamma})$ und wir können auf h_1 Satz 5.4 anwenden.

Für unser oben gewähltes x ist h_2 stetig differenzierbar und wir berechnen wegen $\langle \nu(x)^\perp, \nu(x) \rangle = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_\pm}{\partial \nu}(x) &= \left\langle \left[\operatorname{grad} h_1(x) \mp \frac{1}{2} \nu(x) 1_{\Gamma_1}(x) \zeta(x) + \operatorname{grad} h_2(x) \right]^\perp, \nu(x) \right\rangle \\ &= \left\langle \left[\int_{\Gamma} \operatorname{grad}_x \Phi(x, y) \frac{\partial \psi(y)}{\partial t} ds(y) \right]^\perp, \nu(x) \right\rangle \\ &= \left\langle [\operatorname{grad} h(x)]^\perp, \nu(x) \right\rangle \\ &= \langle \operatorname{grad} v(x), \nu(x) \rangle. \end{aligned}$$

Andererseits gilt aber auch

$$\begin{aligned} \left\langle [\operatorname{grad} h(x)]^\perp, \nu(x) \right\rangle &= \langle \operatorname{grad} h(x), t(x) \rangle \\ &= \left\langle \int_{\Gamma} \operatorname{grad}_x \Phi(x, y) \frac{\partial \psi(y)}{\partial t} ds(y), t(x) \right\rangle \\ &= \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial t(x)} \frac{\partial \psi(y)}{\partial t} ds(y). \end{aligned}$$

□

Für Dichten $\varphi \in C(\partial D)$ und $\psi \in C^{1,\alpha,*}(\Gamma)$ rechtfertigen die vorangegangenen Ausführungen die Einführung folgender Integraloperatoren:

$$(K_{\partial D}\varphi)(x) := 2 \int_{\partial D} \frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial\nu(y)} \varphi(y) ds(y), \quad x \in \partial D, \quad (5.10)$$

$$(K_{\Gamma}\psi)(x) := 2 \int_{\Gamma} \frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial\nu(y)} \psi(y) ds(y), \quad x \in \partial D, \quad (5.11)$$

$$(S_{\Gamma}\psi)(x) := \int_{\Gamma} \Phi(x,y) \psi(y) ds(y), \quad x \in \Gamma, \quad (5.12)$$

$$(T_{\partial D}\varphi)(x) := \frac{\partial}{\partial\nu(x)} \int_{\partial D} \frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial\nu(y)} \varphi(y) ds(y), \quad x \in \Gamma_0, \quad (5.13)$$

$$(T_{\Gamma}\psi)(x) := \frac{\partial}{\partial\nu(x)} \int_{\Gamma} \frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial\nu(y)} \psi(y) ds(y), \quad x \in \Gamma_0. \quad (5.14)$$

Den Operator S_{Γ} haben wir eingeführt, um darauf hinzuweisen, daß sich wegen (5.9) T_{Γ} durch S_{Γ} ausdrücken läßt durch die Darstellung

$$T_{\Gamma}\psi = \frac{\partial}{\partial t} S_{\Gamma} \frac{\partial\psi}{\partial t}.$$

Wir werden später auf die Abbildungseigenschaften einiger dieser Operatoren zurückkommen.

5.2 Der Lösungsansatz

Da das klassische Dirichletproblem durch einen Doppelschichtpotentialansatz über ∂D gelöst werden kann und wir auf ∂D Dirichletdaten vorgegeben haben, werden wir in unserer Ansatzfunktion ebenfalls mit einem Doppelschichtpotential über ∂D ansetzen.

Da das Problem für den offenen Bogen im \mathbb{R}^2 in [14] durch einen Doppelschichtpotentialansatz über den Bogen gelöst wurde, werden auch wir diesen Weg einschlagen. Auch die Gleichung (5.8) rechtfertigt diese Vorgehensweise. Wir suchen also eine Lösung u von der Form

$$u(x) := \int_{\partial D} \frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial\nu(y)} \varphi(y) ds(y) + \int_{\Gamma} \frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial\nu(y)} \psi(y) ds(y), \quad x \in D \setminus \Gamma, \quad (5.15)$$

mit den unbekanntenen Dichten $\varphi \in C(\partial D)$ und $\psi \in C^{1,\alpha,*}(\Gamma)$. Wir wollen hier eine kurze Erklärung geben, warum wir Dichten aus dem Raum $C^{1,\alpha,*}(\Gamma)$ betrachten.

In Analogie zu den Arbeiten [13] und [15] erwarten wir einen stark singulären Kern bei der zugehörigen Integralgleichung für den Bogen. Als Dichte beim Hauptbestandteil tritt die erste Ableitung der Ausgangsdichte auf. Da das entsprechende

Dirichletproblem für den offenen Bogen mittels der Cosinus-Substitution gelöst wurde (siehe [9], Kapitel 7.6), ist es sinnvoll, für die Ableitung von Dichten aus $C^{1,\alpha,*}(\Gamma)$ ein wurzelsinguläres Verhalten vorzuschreiben.

Wir beweisen nun einen Satz, der den Zusammenhang zwischen unserer Ansatzfunktion und unserem Randwertproblem herstellt. Wir stellen dabei fest, daß wir aufgrund des offenen Bogens eine "unangenehme" Integralgleichung erster Art erhalten mit einem stark singulären Kern. Die zweite sich ergebende Integralgleichung hingegen ist von zweiter Art. Prinzipiell ist es die vom klassischen Dirichletproblem bekannte Integralgleichung, die nun einen Störungsterm mit Anteil über den Bogen Γ mit der unbekanntenen Dichte ψ enthält.

Satz 5.7 *Die Funktion u löst das gekoppelte Dirichlet-Neumann-Problem, falls φ und ψ dem folgenden System von Integralgleichungen genügen*

$$\varphi(x) - (K_{\partial D}\varphi)(x) - (K_{\Gamma}\psi)(x) = -2f(x), \quad x \in \partial D, \quad (5.16)$$

$$(T_{\partial D}\varphi)(x) + (T_{\Gamma}\psi)(x) = g(x), \quad x \in \Gamma_0. \quad (5.17)$$

Beweis: Seien $\varphi \in C(\partial D)$ und $\psi \in C^{1,\alpha,*}(\Gamma)$ Lösungen der Gleichungen (5.16) und (5.17) und u definiert wie in (5.15). Dann erfüllt u wegen 2.2 in $D \setminus \Gamma$ die Laplace-Gleichung. Mit Hilfe der Sprungbeziehungen aus Satz 5.6 erhalten wir

$$u_{\pm}(x) = \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(y)} \varphi(y) ds(y) + \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(y)} \psi(y) ds(y) \pm \frac{1}{2} \psi(x), \quad x \in \Gamma,$$

und wegen $\psi(x_i^*) = 0$, $i = -1, 1$, folgt daraus die Stetigkeit von u in den Endpunkten des Bogens. Schließlich ergeben eine weitere Anwendung des Satzes 5.6 und des Satzes 5.3, daß die Normalableitung von u die Randwerte auf Γ und u die Randwerte auf ∂D annimmt. □

Wir beschäftigen uns noch mit der eindeutigen Lösbarkeit des Systems von Integralgleichungen.

Satz 5.8 *Für jede rechte Seite $(f, g) \in C(\partial D) \times C^{1,\alpha}(\Gamma)$ gibt es höchstens ein paar von Funktionen (φ, ψ) , welches das System von Integralgleichungen aus Satz 5.7 löst.*

Beweis: Wegen der Linearität der Gleichungen (5.16) und (5.17) reicht es zu zeigen, daß das homogene System nur die triviale Lösung besitzt. Sei dafür (φ, ψ) ein Paar von Funktionen, das das homogene System von Integralgleichungen löst, d.h.

$$\varphi(x) - (K_{\partial D}\varphi)(x) - (K_{\Gamma}\psi)(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in \partial D, \quad (5.18)$$

$$(T_{\partial D}\varphi)(x) + (T_{\Gamma}\psi)(x) = 0 \quad \text{für alle } x \in \Gamma_0. \quad (5.19)$$

Infolgedessen löst unsere Ansatzfunktion u mit den Dichten φ und ψ unser Randwertproblem mit homogenen Randbedingungen, welches jedoch durch die eindeutig bestimmte Lösung $u \equiv 0$ gelöst wird. Es folgt mit den Sprungbeziehungen für den Bogen Γ

$$0 = u_+ - u_- = \frac{1}{2}\psi + \frac{1}{2}\psi = \psi \quad \text{auf } \Gamma.$$

Es verbleibt also

$$u(x) = \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \varphi(y) ds(y), \quad x \in D \setminus \Gamma.$$

Aus der Gestalt unserer Ansatzfunktion u aus (5.15) und wegen Definition 5.2 erkennen wir jedoch, daß u auch für $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ erklärt ist. Da $u \equiv 0$ in D gilt und durch Anwenden von Satz 6.19 aus [9] erhalten wir die Beziehung

$$0 = \frac{\partial u_-}{\partial \nu} = \frac{\partial u_+}{\partial \nu} \quad \text{auf } \partial D.$$

Da $u(x) = o(1)$, $|x| \rightarrow \infty$ (vgl. [9], Seite 73) folgt mit der Eindeutigkeit des äußeren Neumannproblems (vgl. [9], Satz 6.12) $u \equiv 0$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$. Damit erhalten wir dann

$$0 = u_+ - u_- = \varphi \quad \text{auf } \partial D.$$

Also verschwindet auch die Dichte φ identisch. □

5.3 Die Integralgleichung erster Art

Um die weitere Vorgehensweise zu rechtfertigen, schreiben wir unser System von Integralgleichungen einmal in einer kompakten Matrixschreibweise auf:

$$\begin{pmatrix} \text{Id}_{C(\partial D)} - K_{\partial D} & -K_{\Gamma} \\ T_{\partial D} & T_{\Gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2f \\ g \end{pmatrix}. \quad (5.20)$$

Da wir die Riesz-Theorie anwenden wollen, wird es unser Ziel sein, dieses System auf die Form $Id - A$, A kompakt, umzuformen. Die erste der beiden Integralgleichungen ist im Prinzip die vom klassischen Dirichlet-Problem bekannte Integralgleichung und liegt bereits in der gewünschten Form vor. In der zweiten Integralgleichung ist T_{Γ} der "unangenehme" Operator mit einem stark singulären Kern. Wir werden diesen durch geeignete Umformungen in einen invertierbaren und einen kompakten Operator aufspalten und dann die gesamte zweite Integralgleichung mit der Inversen durchmultiplizieren, so daß unser Integralgleichungssystem schließlich die gewünschte Form annimmt.

Wir beschäftigen uns also zunächst mit der Integralgleichung (5.17), die wir wegen (5.9) auch in der Form

$$\frac{\partial}{\partial \nu(x)} \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \varphi(y) ds(y) + \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial t(x)} \frac{\partial \psi(y)}{\partial t} ds(y) = g(x), \quad x \in \Gamma_0. \quad (5.21)$$

aufschreiben können. Wir werden die Parametrisierung des Bogens Γ benutzen und danach die sogenannte Cosinus-Substitution ausführen, um eine eindimensionale Integralgleichung mit einem Hauptbestandteil zu erhalten, der einem Integraloperator mit Hilbertkern ähnlich ist.

Dazu beschäftigen wir uns zunächst mit dem zweiten Term auf der linken Seite in (5.21). Wir erinnern daran, daß $\dot{\gamma}(s) \neq 0$ für alle $s \in [-1, 1]$ gilt, setzen

$$x = \gamma(t), \quad y = \gamma(\tau)$$

und berechnen damit

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial t(x)} \frac{\partial \psi(y)}{\partial t} ds(y) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\langle \gamma(t) - \gamma(\tau), \dot{\gamma}(t) \rangle}{|\dot{\gamma}(t)| |\gamma(t) - \gamma(\tau)|^2} \frac{1}{|\dot{\gamma}(\tau)|} \frac{d(\psi \circ \gamma)(\tau)}{d\tau} |\dot{\gamma}(\tau)| d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi |\dot{\gamma}(t)|} \int_{-1}^1 \frac{\langle \gamma(t) - \gamma(\tau), \dot{\gamma}(t) \rangle}{|\gamma(t) - \gamma(\tau)|^2} \frac{d(\psi \circ \gamma)(\tau)}{d\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi |\dot{\gamma}(t)|} \int_{-1}^1 (K_1(t, \tau) + K_2(t, \tau)) \frac{d(\psi \circ \gamma)(\tau)}{d\tau} d\tau, \end{aligned}$$

indem wir

$$\begin{aligned} K_1(t, \tau) &:= \frac{1}{t - \tau}, \\ K_2(t, \tau) &:= \frac{\langle \gamma(t) - \gamma(\tau), \dot{\gamma}(t) \rangle}{|\gamma(t) - \gamma(\tau)|^2} - K_1(t, \tau) \end{aligned}$$

definieren. K_1 und K_2 sind für $t \neq \tau$ stetig differenzierbar. Der Kern K_2 kann jedoch für $t = \tau$ stetig differenzierbar ergänzt werden.

Satz 5.9 K_2 ist für $t = \tau$ stetig differenzierbar.

Beweis: Im Beweis werden wir Taylorentwicklungen

$$\gamma(t) - \gamma(\tau) = (t - \tau) \int_0^1 \dot{\gamma}(\tau + s(t - \tau)) ds \quad (5.22)$$

und

$$\dot{\gamma}(t) - \dot{\gamma}(\tau) = (t - \tau) \int_0^1 \ddot{\gamma}(\tau + s(t - \tau)) ds \quad (5.23)$$

benutzen. Wir berechnen für $t \neq \tau$

$$\begin{aligned}
K_2(t, \tau) &= \frac{\langle \gamma(t) - \gamma(\tau), \dot{\gamma}(t) \rangle}{|\gamma(t) - \gamma(\tau)|^2} - \frac{1}{t - \tau} \\
&= \frac{(t - \tau) \langle \gamma(t) - \gamma(\tau), \dot{\gamma}(t) \rangle - |\gamma(t) - \gamma(\tau)|^2}{(t - \tau) |\gamma(t) - \gamma(\tau)|^2} \\
&= \frac{(t - \tau)^2 \left\langle \int_0^1 \dot{\gamma}(\tau + s(t - \tau)) ds, \dot{\gamma}(t) \right\rangle - (t - \tau)^2 \left| \int_0^1 \dot{\gamma}(\tau + s(t - \tau)) ds \right|^2}{(t - \tau)^3 \left| \int_0^1 \dot{\gamma}(\tau + s(t - \tau)) ds \right|^2} \\
&= \frac{\left\langle \int_0^1 \dot{\gamma}(\tau + s(t - \tau)) ds, \dot{\gamma}(t) - \int_0^1 \dot{\gamma}(\tau + s(t - \tau)) ds \right\rangle}{(t - \tau) \left| \int_0^1 \dot{\gamma}(\tau + s(t - \tau)) ds \right|^2} \\
&= \frac{\left\langle \int_0^1 \dot{\gamma}(\tau + s(t - \tau)) ds, \int_0^1 (\dot{\gamma}(t) - \dot{\gamma}(\tau + s(t - \tau))) ds \right\rangle}{(t - \tau) \left| \int_0^1 \dot{\gamma}(\tau + s(t - \tau)) ds \right|^2} \\
&= \frac{\left\langle \int_0^1 \dot{\gamma}(\tau + s(t - \tau)) ds, \int_0^1 (1 - s) \int_0^1 \ddot{\gamma}(\tau + (\sigma + s + \sigma s)(t - \tau)) d\sigma ds \right\rangle}{\left| \int_0^1 \dot{\gamma}(\tau + s(t - \tau)) ds \right|^2}.
\end{aligned}$$

Als Grenzwert ergibt sich

$$K(t, t) = \frac{\langle \dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t) \rangle}{2|\dot{\gamma}(t)|^2}.$$

Mit Hilfe der Taylorentwicklung läßt sich außerdem nachrechnen, daß für den Diagonalwert der Ableitung von K_2 nach τ

$$\frac{\partial}{\partial \tau} K_2(\tau, \tau) = \frac{\langle \dot{\gamma}(\tau), \ddot{\gamma}(\tau) \rangle}{6|\dot{\gamma}(\tau)|^2} + \frac{|\ddot{\gamma}(\tau)|^2}{4|\dot{\gamma}(\tau)|^2} - \frac{\langle \dot{\gamma}(\tau), \ddot{\gamma}(\tau) \rangle^2}{2|\dot{\gamma}(\tau)|^4} \quad (5.24)$$

gilt. Ebenso weist man nach, daß auch $\frac{\partial}{\partial t} K_2(t, t)$ eine stetige Funktion ist. \square

Für $x \notin \partial D$, also insbesondere für $x \in \Gamma_0$ dürfen wir im Ausdruck

$$\frac{\partial}{\partial \nu(x)} \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \varphi(y) ds(y)$$

Differentiation und Integration vertauschen. Wir berechnen für den Kern dieses Integrals

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \nu(x)} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} &= \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \left\langle \frac{x - y}{|x - y|^2}, \nu(y) \right\rangle \\
&= \frac{1}{2\pi} \left\langle \text{grad}_x \frac{1}{|x - y|^2} ((x_1 - y_1)\nu_1(y) + (x_2 - y_2)\nu_2(y)), \nu(x) \right\rangle \\
&= \frac{|x - y|^{-4}}{2\pi} \left\langle \left(\begin{array}{l} |x - y|^2 \nu_1(y) - 2 \langle x - y, \nu(y) \rangle (x_1 - y_1) \\ |x - y|^2 \nu_2(y) - 2 \langle x - y, \nu(y) \rangle (x_2 - y_2) \end{array} \right), \nu(x) \right\rangle,
\end{aligned}$$

und definieren mit Hilfe der Parametrisierung von Γ und nach Multiplikation mit $2\pi|\dot{\gamma}(t)|$

$$M(t, y) := 2\pi|\dot{\gamma}(t)| \frac{\partial}{\partial \nu(\gamma(t))} \frac{\partial \Phi(\gamma(t), y)}{\partial \nu(y)}. \quad (5.25)$$

Nun können wir zu unserer Integralgleichung (5.21) zurückkehren, die wir durch Multiplikation mit $|\dot{\gamma}(t)|$ und unter Benutzung der oben durchgeführten Umformungen für $t \in (-1, 1)$ in der äquivalenten Form

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} M(t, y) \varphi(y) ds(y) + \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 (K_1(t, \tau) + K_2(t, \tau)) \frac{d(\psi \circ \gamma)(\tau)}{d\tau} d\tau = g(\gamma(t)) |\dot{\gamma}(t)|$$

darstellen können. Durch Substitution von $t = \cos s$, $s \in (0, \pi)$, $\tau = \cos \sigma$ und durch Setzen von $h(t) := |\dot{\gamma}(t)|g(\gamma(t))$ erhalten wir die Integralgleichung

$$\begin{aligned} h(\cos s) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} M(\cos s, y) \varphi(y) ds(y) + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (K_1(\cos s, \cos \sigma) \\ &\quad + K_2(\cos s, \cos \sigma)) \frac{d(\psi \circ \gamma)(\cos \sigma)}{d \cos \sigma} \sin \sigma d\sigma. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Da $\psi(x_1^*) = \psi(x_{-1}^*) = 0$ gilt, können wir die Abbildung $\sigma \mapsto \psi \circ \gamma(\cos \sigma)$ zu einer ungeraden Funktion auf $[0, 2\pi]$ vermöge

$$\xi(\sigma) := \psi \circ \gamma(\cos \sigma) \cdot \text{sign}(\pi - \sigma), \quad \sigma \in [0, 2\pi] \quad (5.27)$$

fortsetzen. Die so erhaltene Funktion ist sogar gleichmäßig hölderstetig differenzierbar.

Lemma 5.10 *Die in (5.27) definierte Funktion ξ erfüllt die Eigenschaften $\xi \in C_{\text{ung}}^{1,\alpha}[0, 2\pi]$ und es ist*

$$\xi'(\sigma) = \frac{d\xi(\sigma)}{d\sigma} = -|\sin \sigma| \frac{d(\psi \circ \gamma)(\cos \sigma)}{d \cos \sigma} \quad (5.28)$$

Beweis: Es ist

$$\xi(\sigma) = \begin{cases} \psi(\gamma(\cos \sigma)), & \sigma \in [0, \pi] \\ -\psi(\gamma(\cos \sigma)), & \sigma \in [\pi, 2\pi] \end{cases}.$$

Zunächst einmal können wir für $\sigma \in (0, 2\pi) \setminus \{\pi\}$ folgendes berechnen

$$\begin{aligned} \frac{d\xi(\sigma)}{d\sigma} &= \begin{cases} \frac{d(\psi \circ \gamma)(\cos \sigma)}{d \cos \sigma} (-\sin \sigma), & \sigma \in (0, \pi) \\ -\frac{d(\psi \circ \gamma)(\cos \sigma)}{d \cos \sigma} (-\sin \sigma), & \sigma \in (\pi, 2\pi) \end{cases} \\ &= -|\sin \sigma| \frac{d(\psi \circ \gamma)(\cos \sigma)}{d \cos \sigma}, \quad \sigma \in (0, 2\pi) \setminus \{\pi\} \end{aligned}$$

Da $\psi \in C^{1,\alpha,*}(\Gamma)$ ist, existiert ein $\tilde{\psi} \in C^{0,\alpha}[0, \pi]$ mit

$$\frac{d(\psi \circ \gamma)(s)}{ds} = \frac{\tilde{\psi}(\arccos s)}{\sqrt{1-s^2}}.$$

Daraus erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{d\xi(\sigma)}{d\sigma} &= -|\sin \sigma| \frac{\tilde{\psi}(\arccos \cos \sigma)}{\sqrt{1-\cos^2 \sigma}} \\ &= -\tilde{\psi}(\arccos \cos \sigma) \in C_{ger}^{0,\alpha}[0, 2\pi]. \end{aligned}$$

□

Folglich können wir die Gleichung (5.26) für $s \in (0, \pi)$ durch

$$\begin{aligned} h(\cos s) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} M(\cos s, y) \varphi(y) ds(y) \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi (K_1(\cos s, \cos \sigma) + K_2(\cos s, \cos \sigma)) \xi'(\sigma) d\sigma \end{aligned} \quad (5.29)$$

ausdrücken. Als nächstes bemerken wir, daß $K_1(\cos s, \cos \sigma)$ eine in σ bzgl. π auf $[0, 2\pi]$ gerade Funktion ist. Ebenso ist ξ bzgl. π auf $[0, 2\pi]$ eine ungerade Funktion, also ξ' eine gerade Funktion, woraus folgt, daß

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{\cos s - \cos \sigma} \xi'(\sigma) d\sigma = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos s - \cos \sigma} \xi'(\sigma) d\sigma \quad (5.30)$$

gilt. Mit einer analogen Argumentation für $K_2(\cos s, \cos \sigma) \xi'(\sigma)$ erhalten wir

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi K_2(\cos s, \cos \sigma) \xi'(\sigma) d\sigma = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} K_2(\cos s, \cos \sigma) \xi'(\sigma) d\sigma. \quad (5.31)$$

Wir definieren nun

- $\tilde{h}(s) := -2h(\cos s) = -2|\dot{\gamma}(\cos s)|g(\gamma(\cos s)),$
- $\tilde{M}(s, y) := M(\cos s, y),$
- $\tilde{K}_1(s, \sigma) := K_1(\cos s, \cos \sigma)$
- $\tilde{K}_2(s, \sigma) := K_2(\cos s, \cos \sigma)$

und erhalten aus Gleichung (5.29) und den Beziehungen (5.30) und (5.31)

$$\tilde{h}(s) = -\frac{1}{\pi} \int_{\partial D} \tilde{M}(s, y) \varphi(y) ds(y) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\tilde{K}_1(s, \sigma) + \tilde{K}_2(s, \sigma)) \xi'(\sigma) d\sigma. \quad (5.32)$$

Da $\cos(t + \pi) = \cos(\pi - t)$ gilt, macht es Sinn, diese Integralgleichung auf alle $s \in (0, 2\pi) \setminus \pi$ auszudehnen. Wir beschäftigen uns nun mit der Äquivalenz der Integralgleichung (5.17) und (5.32), wozu wir folgendes Resultat formulieren können:

Satz 5.11 Falls das Paar (φ, ψ) , $\varphi \in C(\partial D)$ und $\psi \in C^{1,\alpha,*}(\Gamma)$ eine Lösung der Integralgleichung (5.17) ist, so erhalten wir durch

$$\xi(\sigma) := (\psi \circ \gamma)(\cos \sigma) \operatorname{sign}(\pi - \sigma), \quad \sigma \in [0, 2\pi], \quad (5.33)$$

$\xi \in C^{1,\alpha}[0, 2\pi]$ und φ ein Paar von Funktionen, das eine Lösung der Integralgleichung (5.32) ist und umgekehrt. Dabei ist ξ eine ungerade Funktion.

Beweis: Da $\psi \in C^{1,\alpha,*}(\Gamma)$ und γ eine reguläre Parametrisierung von Γ ist, folgt aus Lemma 5.10, daß $\xi \in C^{1,\alpha}[0, 2\pi]$ ist. Überdies ist ξ eine ungerade Funktion. Daß φ und ξ Lösungen von (5.32) sind, falls φ und ψ (5.17) lösen, folgt dann aus den Umformungen der Ausgangsintegralgleichung.

Es seien nun umgekehrt φ und ξ Lösungen der Integralgleichung (5.32). Wir wollen beweisen, daß

$$\psi(\gamma(t)) := \xi(\arccos t), \quad t \in [-1, 1]$$

aus dem Funktionenraum $C^{1,\alpha,*}(\Gamma)$ ist. Wegen der Ungeradheit und 2π -Periodizität von ξ gilt $\xi(0) = \xi(\pi) = 0$, also gilt auch $\psi(x_{-1}^*) = \psi(x_1^*) = 0$. Durch Differentiation von ξ berechnen wir

$$\psi'(\gamma(t)) = -\frac{\xi'(\arccos t)}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Da $\xi \in C^{1,\alpha}[0, 2\pi]$ ist, erhalten wir $\psi \in C^{1,\alpha,*}(\Gamma)$. Damit können wir dann die Normalableitung des Doppelschichtpotentials über den Bogen Γ mit den Methoden aus Satz 5.6 behandeln. Das so gewonnene Paar von Funktionen (φ, ψ) muß folglich die Ausgangsintegralgleichung (5.21) lösen. \square

Wir multiplizieren die Integralgleichung (5.32) mit $\sin s$ und erhalten folgenden

Satz 5.12 Die Integralgleichung (5.32) und die Integralgleichung

$$\begin{aligned} \bar{h}(s) = & -\frac{1}{\pi} \int_{\partial D} \sin s \tilde{M}(s, y) \varphi(y) ds(y) \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin s (\tilde{K}_1(s, \sigma) + \tilde{K}_2(s, \sigma)) \xi'(\sigma) d\sigma \end{aligned} \quad (5.34)$$

mit $\bar{h}(s) = \tilde{h}(s) \sin s$, $s \in [0, 2\pi]$, sind äquivalent.

Beweis: Falls das Paar (φ, ξ) die Integralgleichung (5.34) löst, so ist es offensichtlich auch Lösung der Integralgleichung (5.32) für $s \in (0, 2\pi) \setminus \pi$.

Sei nun umgekehrt (φ, ξ) eine Lösung der Integralgleichung (5.32). Dann ist für $s \in (0, 2\pi) \setminus \pi$ die Aussage des Satzes offensichtlich. Da $\tilde{h} \in C[0, 2\pi]$ ist, existiert der Grenzwert

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{\pi} \int_{\partial D} \tilde{M}(s, y) \varphi(y) ds(y) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\tilde{K}_1(s, \sigma) + \tilde{K}_2(s, \sigma)) \xi'(\sigma) d\sigma \right),$$

weswegen für die mit $\sin s$ multiplizierte Gleichung folgt, daß

$$\lim_{s \rightarrow m\pi} \sin s \left(\frac{1}{\pi} \int_{\partial D} \tilde{M}(s, y) \varphi(y) ds(y) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\tilde{K}_1(s, \sigma) + \tilde{K}_2(x, \sigma)) \xi'(\sigma) d\sigma \right) = 0$$

für $m = 0, 1, 2$ gilt. Da aber

$$\lim_{s \rightarrow m\pi} \bar{h}(s) = 0, \quad m = 0, 1, 2,$$

ist, lösen φ und ξ die Integralgleichung (5.34). □

Wegen der Sätze 5.11 und 5.12 ist es ausreichend, die Dichte ξ im Funktionenraum $C_{\text{un}g}^{1,\alpha}[0, 2\pi]$ zu suchen, um eine Lösung für das Randwertproblem zu erhalten.

Um für die Integralgleichung (5.34) passende Integraloperatoren zu bekommen, nutzen wir die Identität

$$\frac{1}{2} \left(\cot \frac{\sigma - s}{2} - \cot \frac{s + \sigma}{2} \right) = \frac{\sin s}{\cos s - \cos \sigma},$$

die Ungeradheit von ξ bzw. die Geradheit von ξ' und die 2π -Periodizität des Cotangens und ξ aus. Dann gilt

$$\int_0^{2\pi} \cot \frac{s + \sigma}{2} \xi'(\sigma) d\sigma = - \int_{-2\pi}^0 \cot \frac{u - s}{2} \xi'(-u) du = - \int_0^{2\pi} \cot \frac{u - s}{2} \xi'(u) du,$$

indem wir $\sigma = -u$ substituieren, so daß wir für das Integral über den Kern K_1

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin s}{\cos s - \cos \sigma} \xi'(\sigma) d\sigma &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \left(\cot \frac{\sigma - s}{2} - \cot \frac{s + \sigma}{2} \right) \xi'(\sigma) d\sigma \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cot \frac{\sigma - s}{2} \xi'(\sigma) d\sigma. \end{aligned}$$

erhalten. Diese Betrachtungen ermöglichen uns nun folgende Integraloperatoren einzuführen:

Definition 5.13 Für $s \in [0, 2\pi]$ sei

$$\begin{aligned} (T_0\xi)(s) &:= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cot \frac{\sigma - s}{2} \xi'(\sigma) d\sigma \\ (A\xi)(s) &:= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \widehat{K}_2(s, \sigma) \xi'(\sigma) d\sigma \\ (B\varphi)(s) &:= -\frac{1}{\pi} \int_{\partial D} \widehat{M}(s, y) \varphi(y) ds(y), \end{aligned}$$

wobei \widehat{K}_2 und \widehat{M} durch

$$\widehat{K}_2(s, \sigma) := \sin s \tilde{K}_2(s, \sigma) \quad \text{und} \quad \widehat{M}(s, y) := \sin s \tilde{M}(s, y).$$

definiert sind.

Ziel ist es nun, zu beweisen, daß der lineare Operator T_0 als Abbildung von $C_{ung}^{1,\alpha}[0, 2\pi]$ nach $C_{ung}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$ beschränkt invertierbar ist. Wir stellen dafür zunächst eine enge Verbindung dieses Operators zum Cauchy Integraloperator über den Einheitskreis in der komplexen Ebene her.

Satz 5.14 *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit C^2 -Rand ∂G . Dann ist der Cauchy Integraloperator $A_{Cauchy} : C^{0,\alpha}(\partial G) \rightarrow C^{0,\alpha}(\partial G)$ definiert durch*

$$(A_{Cauchy}f)(z) := \frac{1}{\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \partial G, f \in C^{0,\alpha}(\partial G)$$

beschränkt. Er erfüllt

$$A_{Cauchy}^2 = Id.$$

Beweis: [9] Korollar 7.7, Satz 7.10. □

Es sei nun $t(s) = e^{is}$, $s \in [0, 2\pi]$ eine Parametrisierung des Einheitskreises in \mathbb{C} . Durch setzen von $z = e^{is}$ und $\zeta = e^{i\sigma}$ berechnen wir

$$\begin{aligned} \frac{d\zeta}{\zeta - z} &= i \frac{e^{i\sigma} d\sigma}{e^{i\sigma} - e^{is}} = \frac{1}{2} \frac{2ie^{i(\sigma-s)}}{e^{i(\sigma-s)} - 1} d\sigma \\ &= \frac{1}{2} \left(i \frac{(e^{i(\sigma-s)} + 1) + (e^{i(\sigma-s)} - 1)}{e^{i(\sigma-s)} - 1} \right) d\sigma = \frac{1}{2} \left(i \frac{e^{i(\sigma-s)} + 1}{e^{i(\sigma-s)} - 1} + i \right) d\sigma \\ &= \frac{1}{2} \left(i e^{i(\sigma-s)/2} \frac{e^{i(\sigma-s)/2} + e^{-i(\sigma-s)/2}}{e^{i(\sigma-s)} - 1} + i \right) d\sigma \\ &= \frac{1}{2} \left(i \frac{e^{i(\sigma-s)/2} + e^{-i(\sigma-s)/2}}{e^{i(\sigma-s)/2} - e^{-i(\sigma-s)/2}} + i \right) d\sigma \\ &= \frac{1}{2} \left(\cot \frac{\sigma - s}{2} + i \right) d\sigma. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir für eine Funktion $\psi \in C^{0,\alpha}(\partial B(0, 1))$

$$(A_{Cauchy}\psi)(e^{is}) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \left(\cot \frac{\sigma - s}{2} + i \right) \psi(e^{i\sigma}) d\sigma, \quad s \in [0, 2\pi]. \quad (5.35)$$

Aus dieser Beziehung entnehmen wir, daß der Cauchy Integraloperator eine ähnliche Form hat wie unser Operator T_0 . Die Idee besteht nun darin, diesen Operator gerade auf solche Funktionen anzuwenden, für die

$$\int_0^{2\pi} \psi(e^{i\sigma}) d\sigma = 0$$

gilt. Außerdem wollen wir natürlich einen Zusammenhang zwischen Funktionen $\psi \in C^{0,\alpha}(\partial B(0, 1))$ und Funktionen $\xi \in C^{0,\alpha}[0, 2\pi]$ herstellen. Wir beschäftigen uns zunächst mit dem zweiten Aspekt.

Sei dafür $\xi \in C^{0,\alpha}[0, 2\pi]$. Durch Setzen von

$$\tilde{\xi}(e^{is}) := \xi(s), \quad s \in [0, 2\pi],$$

bekommen wir eine Funktion $\tilde{\xi} \in C^{0,\alpha}(\partial B(0, 1))$. Damit gilt dann

$$(A_{Cauchy}\tilde{\xi})(e^{is}) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \left(\cot \frac{\sigma - s}{2} + i \right) \xi(\sigma) d\sigma \in C^{0,\alpha}[0, 2\pi],$$

d.h. wir können den Operator A_{Cauchy} auch als Operator von $C^{0,\alpha}[0, 2\pi]$ nach $C^{0,\alpha}[0, 2\pi]$ auffassen durch

$$(A_{Cauchy}\xi)(s) := \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \left(\cot \frac{\sigma - s}{2} + i \right) \xi(\sigma) d\sigma, \quad s \in [0, 2\pi].$$

Wir bezeichnen mit $C_{0,ger}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$ den Raum der Funktionen

$$C_{0,ger}^{0,\alpha}[0, 2\pi] := \left\{ \xi \in C^{0,\alpha}[0, 2\pi] : \int_0^{2\pi} \xi(s) ds = 0, \quad \xi \text{ gerade} \right\}$$

und definieren einen Operator

$$L := iA_{Cauchy}|_{C_{0,ger}^{0,\alpha}[0, 2\pi]},$$

der für $\xi \in C_{0,ger}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$ die Gestalt

$$(L\xi)(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cot \frac{\sigma - s}{2} \xi(\sigma) d\sigma, \quad s \in [0, 2\pi]$$

annimmt.

Satz 5.15 *Der Operator*

$$L : C_{0,ger}^{0,\alpha}[0, 2\pi] \rightarrow C_{ung}^{0,\alpha}[0, 2\pi],$$

ist beschränkt, bijektiv und besitzt eine beschränkte Inverse.

Beweis: Die Beschränktheit des Operators folgt aus den Eigenschaften des Cauchy Integraloperators. Sei $\xi \in C_{0,ger}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$. Durch Substitution von $\sigma = -u$, wegen der Geradheit von ξ und der Periodizität von ξ und des Cotangens folgt

$$\begin{aligned} (L\xi)(-s) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cot \frac{\sigma + s}{2} \xi(\sigma) d\sigma = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{-2\pi} \cot \frac{s - u}{2} \xi(u) du \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cot \frac{u - s}{2} \xi(u) du = -(L\xi)(s), \end{aligned}$$

woraus wir die Ungeradheit von $L\xi$ erkennen.

Die Injektivität des Operators L folgt aus der Injektivität des Cauchy Integraloperators. Nun nehmen wir an, L sei nicht surjektiv. Dann existiert eine Funktion $g \in C_{ung}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$ mit der Eigenschaft

$$g \notin L(C_{0,ger}^{0,\alpha}[0, 2\pi]).$$

Auf g können wir A_{Cau} anwenden und berechnen

$$\begin{aligned} (A_{Cau}g)(-s) &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \cot \frac{\sigma + s}{2} g(\sigma) d\sigma = -\frac{1}{2\pi i} \int_0^{-2\pi} \cot \frac{s - u}{2} g(-u) du \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \cot \frac{s - u}{2} g(u) du = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \cot \frac{u - s}{2} g(u) du \\ &= (A_{Cau}g)(s), \end{aligned}$$

woraus wir die Geradheit der Funktion $A_{Cau}g$ ablesen. Ferner folgt wegen

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (A_{Cau}g)(s) ds &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\cot \frac{\sigma - s}{2} + i \right) g(\sigma) d\sigma ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} g(\sigma) \int_0^{2\pi} \cot \frac{\sigma - s}{2} ds d\sigma \\ &= 0, \end{aligned}$$

da

$$\int_0^{2\pi} \cot \frac{t}{2} = 0$$

und das Vertauschen der Integrationsreihenfolge erlaubt ist (siehe [9], Seite 104), daß $A_{Cau}g \in C_{0,ger}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$ ist. Andererseits gilt aber

$$g = A_{Cau}^2 g = -iLA_{Cau}g = L(-iA_{Cau}g),$$

also $g \in L(C_{0,ger}^{0,\alpha}[0, 2\pi])$, was offensichtlich ein Widerspruch ist. Folglich ist L surjektiv. Da die Funktionenräume $C_{0,ger}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$ und $C_{ung}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$ als abgeschlossene Unterräume eines vollständigen Raumes selbst Banachräume sind, besitzt daher L , da dieser lediglich die Einschränkung des Cauchy Integraloperators auf $C_{0,ger}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$ ist, eine Inverse L^{-1} . Die Beschränktheit der inversen Abbildung folgt dann aus Satz 2.11. □

Desweiteren definieren wir für Funktionen $\xi \in C_{ung}^{1,\alpha}[0, 2\pi]$ und $\psi \in C_{0,ger}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$ Operatoren

$$\begin{aligned} (J\psi)(t) &:= \int_0^t \psi(\sigma) d\sigma, \quad t \in [0, 2\pi], \\ (D\xi)(t) &:= \xi'(t), \quad t \in [0, 2\pi], \end{aligned}$$

über die wir folgendes festhalten:

Satz 5.16 *Der Operator*

$$J : C_{0,ger}^{0,\alpha}[0, 2\pi] \rightarrow C_{ung}^{1,\alpha}[0, 2\pi]$$

ist beschränkt und bijektiv. Ebenso ist der Operator

$$D : C_{ung}^{1,\alpha}[0, 2\pi] \rightarrow C_{0,ger}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$$

beschränkt und bijektiv.

Beweis: Sei $\psi \in C_{0,ger}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$. Die Beschränktheit von J folgt aus

$$|(J\psi)(t)| \leq C\|\psi\|_{0,\alpha}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

und

$$\|(J\psi)'\|_{0,\alpha} = \|\psi\|_{0,\alpha}.$$

Aus

$$(J\psi)(t + 2\pi) = \int_0^{2\pi} \psi(\sigma) d\sigma + \int_{2\pi}^{2\pi+t} \psi(\sigma) d\sigma = \int_0^t \psi(\sigma) d\sigma = (J\psi)(t)$$

und

$$(J\psi)(-t) = \int_0^{-t} \psi(\sigma) d\sigma = - \int_0^t \psi(u) du = -(J\psi)(t)$$

folgt die 2π -Periodizität und die Ungeradheit. Sei $J\psi = 0$, d.h. $(J\psi)(t) = 0$ für alle $t \in [0, 2\pi]$. Durch Ableiten erhalten wir

$$(J\psi)'(t) = \psi(t) = 0 \quad \text{für alle } t \in [0, 2\pi].$$

Folglich ist $\psi = 0$ und somit J injektiv. Für die Surjektivität müssen wir zeigen, daß zu $f \in C_{ung}^{1,\alpha}[0, 2\pi]$ ein $\psi \in C_{0,ger}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$ existiert mit $J\psi = f$. Die Behauptung folgt mit $\psi = f^I$.

Wir zeigen nun die Eigenschaften von D . Seien dafür jetzt $\xi, \psi \in C_{ung}^{1,\alpha}[0, 2\pi]$. Aus $\|D\xi\|_{0,\alpha} = \|\xi'\|_{0,\alpha} \leq \|\xi\|_{1,\alpha}$ folgt die Beschränktheit. Die Ableitung 2π -periodischer, ungerader Funktionen sind 2π -periodisch und gerade. Aus $D\xi = D\psi$ folgt

$$\xi = \psi + \text{const.}$$

Aufgrund der Ungeradheit muß aber $\text{const} = 0$ sein, folglich ist D injektiv. Falls $f \in C_{0,ger}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$ ist, so wird durch

$$F(t) := \int_0^t f(s) ds \in C_{ung}^{1,\alpha}[0, 2\pi]$$

eine Funktion gegeben mit $DF = f$, weswegen D auch surjektiv ist. □

Mit diesen Vorbereitungen erhalten wir die Invertierbarkeit des Operators T_0 .

Satz 5.17 *Der Operator $T_0 : C_{ung}^{1,\alpha}[0, 2\pi] \rightarrow C_{ung}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$ ist beschränkt invertierbar.*

Beweis: Es sei $\xi \in C_{ung}^{1,\alpha}[0, 2\pi]$. Dann haben wir zwischen den Operatoren T_0 und L die Beziehung

$$T_0\xi = (LD)(\xi) = L\xi'.$$

Daraus erhalten wir mit der Beschränktheit von L und D sofort die Beschränktheit von T_0 durch

$$\|T_0\xi\|_{0,\alpha} = \|(LD)(\xi)\|_{0,\alpha} \leq C\|\xi\|_{1,\alpha}.$$

Da sich T_0 durch L und D darstellen läßt, und diese beiden Operatoren bijektiv sind, muß auch T_0 bijektiv sein. Indem wir

$$JL^{-1}T_0\xi = JL^{-1}LD\xi = J\xi' = \xi$$

bilden, sehen wir sogar, daß die Inverse von T durch JL^{-1} gegeben wird, wodurch auch unmittelbar die Beschränktheit von T_0^{-1} gegeben ist. Damit ist bereits alles bewiesen. □

Es verbleibt, die Abbildungseigenschaften der Operatoren A und B zu klären.

Satz 5.18 *Die Operatoren A und B verfügen über folgende Abbildungseigenschaften:*

$$A : C_{ung}^{1,\alpha}[0, 2\pi] \rightarrow C_{ung}^{0,\alpha}[0, 2\pi], \quad (5.36)$$

$$B : C(\partial D) \rightarrow C_{ung}^{0,\alpha}[0, 2\pi]. \quad (5.37)$$

Die Operatoren A und B sind in diesen Räumen auch kompakt.

Beweis: Sei $\xi \in C_{ung}^{1,\alpha}[0, 2\pi]$ und $\varphi \in C(\partial D)$. Dann sind offenbar sowohl $A\xi$ als auch $B\varphi$ ungerade Funktionen. Da der Kern des Operators A stetig differenzierbar ist, gelten die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|A\xi\|_\infty &\leq \max_{s \in [0, 2\pi]} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\widehat{K}_2(s, \sigma)| |\xi'(\sigma)| d\sigma \leq C_1 \|\xi\|_{1,\alpha}, \\ \|(A\xi)'\|_\infty &\leq \max_{s \in [0, 2\pi]} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial}{\partial s} \widehat{K}_2(s, \sigma) \right| |\xi'(\sigma)| d\sigma \leq C_2 \|\xi\|_{1,\alpha}. \end{aligned}$$

Daraus folgt die Beschränktheit des Operators A als Abbildung von $C_{ung}^{1,\alpha}[0, 2\pi]$ nach $C_{ung}^1[0, 2\pi]$. Mit Hilfe der kompakten Einbettungsabbildung

$$I^{\alpha,1} : C^{0,1}[0, 2\pi] \rightarrow C^{0,\alpha}[0, 2\pi] \quad (5.38)$$

aus Satz 2.26 ergibt sich dann unter Verwendung von Satz 2.5 die Kompaktheit von A in den behaupteten Funktionenräumen.

Aufgrund der stetigen Differenzierbarkeit des Kerns \widehat{M} folgt die Aussage für den Operator B analog. □

Damit können wir nun unsere Ausgangsintegralgleichung (5.17) äquivalent durch

$$T_0\xi + A\xi + B\varphi = \bar{h} \quad (5.39)$$

ausdrücken. Da $A\xi, B\varphi, \bar{h} \in C_{ung}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$ sind und $T_0 : C_{ung}^{1,\alpha}[0, 2\pi] \rightarrow C_{ung}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$ beschränkt invertierbar ist, erhalten wir die Integralgleichung

$$\xi + T_0^{-1}A\xi + T_0^{-1}B\varphi = T_0^{-1}\bar{h} \quad (5.40)$$

mit den kompakten Operatoren $T_0^{-1}A$ und $T_0^{-1}B$.

5.4 Die Integralgleichung zweiter Art

Wir beschäftigen uns noch mit der wesentlich einfacher zu behandelnden Integralgleichung (5.16). Für $x \in \partial D$ berechnen wir dafür

$$\begin{aligned} -2f(x) &= \varphi(x) - 2 \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \varphi(y) ds(y) - 2 \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \psi(y) ds(y) \\ &= \varphi(x) - \frac{1}{\pi} \int_{\partial D} \frac{\langle x - y, \nu(y) \rangle}{|x - y|^2} \varphi(y) ds(y) - \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \frac{\langle x - y, \nu(y) \rangle}{|x - y|^2} \psi(y) ds(y) \\ &= \varphi(x) - \frac{1}{\pi} \int_{\partial D} H(x, y) \varphi(y) ds(y) - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 H(x, \gamma(\tau)) \psi(\gamma(\tau)) |\dot{\gamma}(\tau)| d\tau \\ &= \varphi(x) - \frac{1}{\pi} \int_{\partial D} H(x, y) \varphi(y) ds(y) \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi H(x, \gamma(\cos \sigma)) \psi(\gamma(\cos \sigma)) \sin \sigma |\dot{\gamma}(\cos \sigma)| d\sigma \\ &= \varphi(x) - \frac{1}{\pi} \int_{\partial D} H(x, y) \varphi(y) ds(y) \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi H(x, \gamma(\cos \sigma)) \xi(\sigma) \sin \sigma |\dot{\gamma}(\cos \sigma)| d\sigma \\ &= \varphi(x) - \frac{1}{\pi} \int_{\partial D} H(x, y) \varphi(y) ds(y) \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(x, \gamma(\cos \sigma)) \xi(\sigma) \sin \sigma |\dot{\gamma}(\cos \sigma)| d\sigma, \end{aligned}$$

wobei wir $H(x, y) := \frac{\langle x - y, \nu(y) \rangle}{|x - y|^2}$ definiert, die Parametrisierung des Bogens Γ eingesetzt und die Cosinus-Substitution durchgeführt haben. Ferner haben wir benutzt, daß der Ausdruck $H(x, \gamma(\cos \sigma)) \xi(\sigma) \sin \sigma |\dot{\gamma}(\cos \sigma)|$ eine auf $[0, 2\pi]$ gerade Funktion darstellt.

Definition 5.19 Für $x \in \partial D$ sei

$$(\tilde{A}\varphi)(x) := -\frac{1}{\pi} \int_{\partial D} H(x, y)\varphi(y)ds(y), \quad (5.41)$$

$$(\tilde{B}\xi)(x) := -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{H}(x, \sigma)\xi(\sigma)d\sigma, \quad (5.42)$$

$$(5.43)$$

wobei \tilde{H} durch $\tilde{H}(x, \sigma) := H(x, \gamma(\cos \sigma)) \sin \sigma |\dot{\gamma}(\cos \sigma)|$ definiert ist.

Satz 5.20 Die Operatoren \tilde{A} und \tilde{B} verfügen über die folgenden Abbildungseigenschaften:

$$\begin{aligned} \tilde{A} : C(\partial D) &\rightarrow C(\partial D) \\ \tilde{B} : C_{\text{ung}}^{1,\alpha}[0, 2\pi] &\rightarrow C(\partial D) \end{aligned}$$

Die Operatoren \tilde{A} und \tilde{B} sind in diesen Räumen auch kompakt.

Beweis: Für den Operator \tilde{A} zeigen wir, daß sich der Kern auf der Diagonalen stetig fortsetzen läßt. Da $\partial D \in C^2$ ist, erhalten wir mit der Taylor'schen Formel

$$z(t) - z(\tau) = (t - \tau) \int_0^1 \dot{z}(\tau + \lambda(t - \tau))d\lambda$$

und

$$z(t) - z(\tau) = (t - \tau)\dot{z}(\tau) + (t - \tau)^2 \int_0^1 (1 - \lambda)\ddot{z}(\tau + \lambda(t - \tau))d\lambda.$$

Hieraus folgt mit $x = z(t)$, $y = z(\tau)$, $t \neq \tau$, und wegen $\langle \dot{z}(t), \nu(z(t)) \rangle = 0$

$$\begin{aligned} 2\pi \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} &= \frac{\langle x - y, \nu(y) \rangle}{|x - y|^2} \\ &= \frac{\left\langle (t - \tau)\dot{z}(\tau) + (t - \tau)^2 \int_0^1 (1 - \lambda)\ddot{z}(\tau + \lambda(t - \tau))d\lambda, \nu(z(\tau)) \right\rangle}{|(t - \tau)|^2 \left| \int_0^1 \dot{z}(\tau + \lambda(t - \tau))d\lambda \right|^2} \\ &= \frac{\left\langle \int_0^1 (1 - \lambda)\ddot{z}(\tau + \lambda(t - \tau))d\lambda, \nu(z(t)) \right\rangle}{\left| \int_0^1 \dot{z}(\tau + \lambda(t - \tau))d\lambda \right|^2}. \end{aligned}$$

Als Grenzwert ergibt sich daraus

$$2\pi \frac{\partial \Phi(z(t), z(t))}{\partial \nu(z(t))} = \frac{\langle \ddot{z}(t), \nu(z(t)) \rangle}{2|\dot{z}(t)|^2}.$$

Die Kompaktheit von \tilde{A} erhalten wir durch Anwendung von Folgerung 2.10.

Aufgrund der Stetigkeit des Kerns \tilde{H} gilt die Abschätzung

$$\|\tilde{B}\xi\|_\infty \leq \max_{x \in \partial D} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\tilde{H}(x, \sigma)| |\xi(\sigma)| d\sigma \leq C \|\xi\|_{1,\alpha},$$

aus der die Beschränktheit des Operators \tilde{B} folgt. Da er ein Integraloperator mit stetigem Kern ist, ist er kompakt. □

5.5 Existenz

Nach diesen Vorbereitungen folgt nun mühelos der Existenznachweis einer Lösung des in Kapitel 3 formulierten Problems.

Durch Setzen von $-2f = \bar{f}$ und $\bar{h}_0 := T_0^{-1}\bar{h}$ geht mit diesen Vorbereitungen unser System von Integralgleichungen, gegeben durch (5.17) und (5.16), in das System

$$\left[\begin{pmatrix} Id_{C(\partial D)} & 0 \\ 0 & Id_{C_{ung}^{1,\alpha}[0,2\pi]} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ T_0^{-1}A & T_0^{-1}B \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \varphi \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{f} \\ \bar{h}_0 \end{pmatrix}, \quad (5.44)$$

über, welches nach Satz 5.12 äquivalent zum Ausgangssystem ist. Wir können den folgenden Satz beweisen.

Satz 5.21 *Die Operatorgleichung (5.44) hat für alle rechten Seiten (\bar{f}, \bar{h}_0) , $\bar{f} \in C(\partial D)$ und $\bar{h}_0 \in C_{ung}^{1,\alpha}[0, 2\pi]$ genau ein Paar von Funktionen (φ, ξ) , $\varphi \in C(\partial D)$ und $\xi \in C_{ung}^{1,\alpha}[0, 2\pi]$, als Lösung. Diese Lösung hängt stetig von der rechten Seite ab. Daraus folgt die Existenz einer Lösung des Problems aus Kapitel 3 für Randwerte $f \in C(\partial D)$ und $g \in C^{0,\alpha}(\Gamma)$.*

Beweis: Da T_0^{-1} ein beschränkter Operator ist und A und B kompakt sind, sind nach Satz 2.5 $T_0^{-1}A$ und $T_0^{-1}B$ kompakt. Somit ist auch der Operator $Q : C(\partial D) \times C_{ung}^{1,\alpha}[0, 2\pi] \rightarrow C(\partial D) \times C_{ung}^{1,\alpha}[0, 2\pi]$ definiert durch

$$Q := \begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ T_0^{-1}A & T_0^{-1}B \end{pmatrix} \quad (5.45)$$

aufgrund von Satz 2.7 bzw. Bemerkung 2.8 kompakt. Ferner definieren wir den Operator $Id_{C(\partial D) \times C_{ung}^{1,\alpha}[0,2\pi]} : C(\partial D) \times C^{1,\alpha}[0, 2\pi] \rightarrow C(\partial D) \times C_{ung}^{1,\alpha}[0, 2\pi]$ durch

$$Id_{C(\partial D) \times C^{1,\alpha}[0,2\pi]} := \begin{pmatrix} Id_{C(\partial D)} & 0 \\ 0 & Id_{C_{ung}^{1,\alpha}[0,2\pi]} \end{pmatrix}. \quad (5.46)$$

Satz 5.8 sagt uns, daß $N(Id_{C(\partial D) \times C^{1,\alpha}[0,2\pi]} + Q) = \{0\}$. Aus der Riesz-Theorie für kompakte Operatoren (vgl. Abschnitt 2.2) folgt, daß unser Integralgleichungssystem eine Lösung besitzt und somit unsere Ansatzfunktion u aufgrund von Satz 5.7 eine Lösung des Problems aus Kapitel 3 ist. □

Kapitel 6

Die numerische Methode

In diesem Abschnitt leiten wir das numerische Verfahren zur Lösung der Integralgleichungen her. Dabei werden wir die auftretenden Integrale mit Hilfe von Quadraturformeln approximieren. Die Quadraturformel für den stark singulären Anteil gewinnen wir, indem wir die glatten Anteile des Integranden durch ein trigonometrisches Interpolationspolynom ersetzen und danach exakt integrieren. Die anderen auftretenden Integrale werden wir im wesentlichen durch die zusammengesetzte Trapezregel approximieren.

Anschließend werden wir auf beide Gleichungen ein Kollokationsverfahren anwenden. Unser Ziel ist es, das Lösen der Integralgleichungen auf das Lösen eines linearen Gleichungssystems zu reduzieren, also ein vollständig diskretes Verfahren zu erhalten.

Zum Abschluß werden wir die Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems beweisen und eine Fehlerabschätzung für analytische rechte Seiten und analytische Parametrisierungen von ∂D und Γ angeben.

6.1 Die parametrisierten Integraloperatoren

Für die numerische Behandlung ist es notwendig, in die Operatoren

$$\begin{aligned}\tilde{A} : C(\partial D) &\rightarrow C(\partial D), \\ \tilde{B} : C_{ung}^{1,\alpha}[0, 2\pi] &\rightarrow C(\partial D) \\ B : C(\partial D) &\rightarrow C_{ung}^{0,\alpha}[0, 2\pi]\end{aligned}$$

die Parametrisierung von ∂D aus Abschnitt 2.1 einzusetzen. Wir ersetzen dafür

$x = z(s)$, $y = z(\sigma)$ und berechnen für die Integraloperatoren die Darstellungen

$$\begin{aligned} (\tilde{A}\varphi)(x) &= -\frac{1}{\pi} \int_{\partial D} H(x, y)\varphi(y)ds(y) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} H_1(s, \sigma)\bar{\varphi}(\sigma)d\sigma, \\ (\tilde{B}\xi)(s) &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{H}(x, \sigma)\xi(\sigma)d\sigma = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_2(s, \sigma)\xi(\sigma)d\sigma \\ (B\varphi)(s) &= -\frac{1}{\pi} \int_{\partial D} \widehat{M}(s, y)\varphi(y)ds(y) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \overline{M}(s, \sigma)\bar{\varphi}(\sigma)d\sigma, \end{aligned}$$

wobei wir

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(\sigma) &:= \varphi(z(\sigma)), \\ H_1(s, \sigma) &:= H(z(s), z(\sigma))|\dot{z}(\sigma)|, \\ H_2(s, \sigma) &:= H(z(s), \gamma(\cos \sigma)) \sin \sigma |\dot{\gamma}(\cos \sigma)|, \\ \overline{M}(s, \sigma) &:= \widehat{M}(s, z(\sigma))|\dot{z}(\sigma)| \end{aligned}$$

definiert haben. Dadurch erhalten wir die Operatoren

$$\tilde{A}' : C[0, 2\pi] \rightarrow C[0, 2\pi], \quad (6.1)$$

$$\tilde{B}' : C_{ung}^{1, \alpha}[0, 2\pi] \rightarrow C[0, 2\pi], \quad (6.2)$$

$$B' : C[0, 2\pi] \rightarrow C_{ung}^{0, \alpha}[0, 2\pi], \quad (6.3)$$

die durch

$$(\tilde{A}'\varphi)(s) := -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} H_1(s, \sigma)\varphi(\sigma)d\sigma, \quad \varphi \in C[0, 2\pi], s \in [0, 2\pi], \quad (6.4)$$

$$(\tilde{B}'\xi)(s) := -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_2(s, \sigma)\xi(\sigma)d\sigma, \quad \xi \in C_{ung}^{1, \alpha}[0, 2\pi], s \in [0, 2\pi], \quad (6.5)$$

$$(B'\varphi)(s) := -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \overline{M}(s, \sigma)\varphi(\sigma)d\sigma, \quad \varphi \in C[0, 2\pi], s \in [0, 2\pi], \quad (6.6)$$

gegeben sind. Wegen der Regularität des Randes ∂D übertragen sich die Beschränktheit und die Kompaktheit der Operatoren \tilde{A} , \tilde{B} und B auf die Operatoren \tilde{A}' , \tilde{B}' und B' . Deswegen wollen wir auch weiterhin die Operatoren \tilde{A}' , \tilde{B}' und B' mit den Symbolen \tilde{A} , \tilde{B} und B bezeichnen, weisen aber ausdrücklich noch einmal daraufhin, daß von nun an damit die Operatoren definiert durch (6.1)–(6.6) gemeint sind.

6.2 Trigonometrische Interpolation

Wir verwenden trigonometrische Interpolation mit einer geraden Knotenanzahl. Dazu sei $n \in \mathbb{N}$ vorgegeben. Dann wählen wir die $2n$ äquidistanten Stützstellen

$$t_j^{(n)} := \frac{j\pi}{n}, \quad j = 0, \dots, 2n - 1,$$

definieren

$$T_n := \left\{ q \in C[0, 2\pi] : q(t) = \sum_{k=0}^n a_k \cos kt + \sum_{k=1}^{n-1} b_k \sin kt \right\}$$

und können als Ergebnis den folgenden Satz festhalten.

Satz 6.1 *Zu $f \in C[0, 2\pi]$ existiert genau ein trigonometrisches Polynom $q_n \in T_n$,*

$$q_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} [a_k \cos kt + b_k \sin kt] + \frac{a_n}{2} \cos nt,$$

welches der Interpolationsbedingung

$$q_n(t_j^{(n)}) = f(t_j^{(n)}), \quad j = 0, \dots, 2n-1$$

genügt. Die Koeffizienten sind dabei gegeben durch

$$a_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{2n-1} f(t_j^{(n)}) \cos kt_j^{(n)}, \quad k = 0, \dots, n,$$

$$b_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{2n-1} f(t_j^{(n)}) \sin kt_j^{(n)}, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

Beweis: [11], Satz 8.25. □

Da wir insbesondere ungerade, 2π -periodische Funktionen interpolieren werden, definieren wir den zugehörigen Raum

$$T_{n,ung} := \left\{ q \in C[0, 2\pi] : q(t) = \sum_{k=1}^{n-1} b_k \sin kt, \quad b_k \in \mathbb{R} \right\}.$$

und formulieren die

Folgerung 6.2 *Sei $f \in C[0, 2\pi]$ eine ungerade, 2π -periodische Funktion. Dann gibt es genau ein $q \in T_{n,ung}$ mit $f(t_j^{(n)}) = q(t_j^{(n)})$, $j = 1, \dots, n-1$.*

Beweis: Wegen der Ungeradheit der Funktion f erfüllt sie $f(0) = f(\pi) = 0$ und $f(t_j^{(n)}) = -f(t_{2n-j}^{(n)})$, $j = 1, \dots, n-1$. Damit sind wir wieder in der Situation von Satz 6.1. Wiederum wegen der Ungeradheit von f verschwinden die Koeffizienten a_k , $k = 0, \dots, n$. Das trigonometrische Interpolationspolynom q_n hat daher die Gestalt $q_n(t) = \sum_{k=1}^{n-1} b_k \sin kt \in T_{n,ung}$. □

Indem wir die Koeffizienten $a_k, k = 0, \dots, n$, und $b_k, k = 1, \dots, n-1$, in q eintragen und Additionstheoreme verwenden, erhalten wir

$$\begin{aligned}
q_n(t) &= \frac{1}{2n} \sum_{j=0}^{2n-1} f(t_j^{(n)}) + \sum_{k=1}^{n-1} \left[\left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{2n-1} f(t_j^{(n)}) \cos kt_j^{(n)} \right) \cos kt \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{2n-1} f(t_j^{(n)}) \sin kt_j^{(n)} \right) \sin kt \right] + \left(\frac{1}{2n} \sum_{j=0}^{2n-1} f(t_j^{(n)}) \cos nt_j^{(n)} \right) \cos nt \\
&= \sum_{j=0}^{2n-1} f(t_j^{(n)}) \left[\frac{1}{2n} + \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \left(\cos kt_j^{(n)} \cos kt + \sin kt_j^{(n)} \sin kt \right) \right) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2n} \left(\cos nt_j^{(n)} \cos nt + \sin nt_j^{(n)} \sin nt \right) \right] \\
&= \sum_{j=0}^{2n-1} f(t_j^{(n)}) \left[\frac{1}{2n} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \cos k(t - t_j^{(n)}) + \cos n(t - t_j^{(n)}) \right) \right],
\end{aligned}$$

woraus wir erkennen, daß

$$\left\{ L_j^{(n)}(t) := \frac{1}{2n} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \cos k(t - t_j^{(n)}) + \cos n(t - t_j^{(n)}) \right), j = 0, \dots, 2n-1 \right\}$$

eine Lagrange-Basis von T_n bildet, d.h. die Funktionen $L_j^{(n)}$ erfüllen die Beziehung

$$L_j^{(n)}(t_k^{(n)}) = \delta_{jk}.$$

Wir führen noch den zur trigonometrischen Interpolation zugehörigen Interpolationsoperator

$$\begin{aligned}
P_n : C[0, 2\pi] &\rightarrow T_n \\
f &\mapsto \sum_{j=0}^{2n-1} f(t_j^{(n)}) L_j^{(n)}
\end{aligned}$$

ein. Zusätzlich definieren wir noch den zur trigonometrischen Interpolation ungerader Funktionen zugehörigen Interpolationsoperator durch

$$P_{n,ung} := P_n|_{C_{ung}[0,2\pi]}.$$

Sei n gerade. Dann betrachten wir die Zerlegung des Intervalls $[0, 2\pi]$ mit den äquidistanten Stützstellen

$$u_i^{(n)} := \frac{2i\pi}{n}, \quad i = 0, \dots, n-1.$$

Wegen der Beziehung

$$(P_{n/2}\varphi)(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \varphi\left(\frac{2j\pi}{n}\right) L_j^{(n/2)}(t).$$

entspricht Interpolation bezüglich dieser Stützstellen gerade dem Interpolationsoperator

$$P_{n/2} : C[0, 2\pi] \rightarrow T_{n/2}.$$

Wenn wir noch ausnutzen, daß die Funktion φ 2π -periodisch ist und wir noch die Stützstelle $u_n^{(n)}$ zulassen, nimmt der Interpolationsoperator die Form

$$(P_{n/2}\varphi)(t) = \sum_{j=1}^n \varphi\left(\frac{2j\pi}{n}\right) L_j^{(n/2)}(t). \quad (6.7)$$

an. Mit diesen Vorbereitungen können wir unsere Quadraturformeln entwickeln.

6.3 Quadraturformeln für die Anteile über Γ

Wir beschäftigen uns zuerst mit der Entwicklung einer Quadraturformel für

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cot \frac{\sigma - s}{2} \xi'(\sigma) d\sigma.$$

Dazu interpolieren wir die Dichte ξ durch ein trigonometrisches Interpolationspolynom und integrieren dann exakt. Wir berechnen

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cot \frac{\sigma - s}{2} \xi'(\sigma) d\sigma &\approx \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cot \frac{\sigma - s}{2} ((P_n \xi)(\sigma))' d\sigma \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cot \frac{\sigma - s}{2} \left(\sum_{j=0}^{2n-1} \xi(t_j^{(n)}) L_j^{(n)}(\sigma) \right)' d\sigma \\ &= \sum_{j=0}^{2n-1} \xi(t_j^{(n)}) R_j^{(n)}(s), \quad 0 \leq s \leq 2\pi \end{aligned}$$

mit

$$R_j^{(n)}(s) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cot \frac{\sigma - s}{2} (L_j^{(n)})'(\sigma) d\sigma.$$

Wir sind daran interessiert die Gewichte $R_j^{(n)}$ exakt zu berechnen. Dabei hilft uns das folgende

Lemma 6.3 *Im Sinne des Cauchyschen Hauptwertes gilt für alle $m \in \mathbb{Z}$*

$$\int_0^{2\pi} \cot \frac{\sigma - s}{2} \cos m\sigma d\sigma = -2\pi \sin ms, \quad (6.8)$$

$$\int_0^{2\pi} \cot \frac{\sigma - s}{2} \sin m\sigma d\sigma = 2\pi \cos ms. \quad (6.9)$$

Beweis: Durch Substitution von $\sigma - s = t$, $d\sigma = dt$, durch Hilfe der Additionstheoreme und unter Berücksichtigung des Integrierens über eine volle Periode berechnen wir

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cot \left(\frac{\sigma - s}{2} \right) \cos(m\sigma) d\sigma &= \int_{-s}^{2\pi-s} \cot \left(\frac{t}{2} \right) \cos(mt + ms) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \cot \left(\frac{t}{2} \right) \cos(mt + ms) dt \\ &= \cos(ms) \int_0^{2\pi} \cot \left(\frac{t}{2} \right) \cos(mt) dt \\ &\quad - \sin(ms) \int_0^{2\pi} \cot \left(\frac{t}{2} \right) \sin(mt) dt. \end{aligned}$$

Es ist $\cot \left(\frac{t}{2} \right) \cos(mt)$ eine ungerade Funktion, weswegen das Integral über diesen Ausdruck verschwindet. Wir brauchen also nur noch zu zeigen, daß für alle $m \in \mathbb{Z}$

$$\int_0^{2\pi} \cot \left(\frac{t}{2} \right) \sin(mt) dt = 2\pi$$

gilt. Wir berechnen

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cot \left(\frac{t}{2} \right) \sin(mt) dt &= \int_0^{2\pi} \frac{\cos(t/2)}{\sin(t/2)} \sin(mt) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{(e^{i(t/2)} + e^{-i(t/2)}) (e^{imt} - e^{-imt})}{(e^{i(t/2)} - e^{-i(t/2)})} dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-imt} (e^{2imt} - 1)}{e^{-i(t/2)} (e^{it} - 1)} e^{-i(t/2)} (1 + e^{it}) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[e^{-imt} (1 + e^{it}) \sum_{k=0}^{2m-1} e^{ikt} \right] dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[e^{-imt} \sum_{k=0}^{2m-1} e^{ikt} \right] dt + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[e^{-i(m-1)t} \sum_{k=0}^{2m-1} e^{ikt} \right] dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{k=0}^{2m-1} e^{i(k-m)t} \right] dt + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[\sum_{k=0}^{2m-1} e^{i(k-m+1)t} \right] dt \\ &= \pi + \pi = 2\pi. \end{aligned}$$

Daraus gewinnen wir zudem

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cot \frac{\sigma - s}{2} \sin m\sigma d\sigma &= \int_0^{2\pi} \cot \frac{t}{2} \sin m(t + s) dt \\ &= \cos ms \int_0^{2\pi} \cot \frac{t}{2} \sin mtdt + \sin ms \int_0^{2\pi} \cot \frac{t}{2} \cos mtdt \\ &= 2\pi \cos ms. \end{aligned}$$

□

Dieses ermöglicht es uns die Ausdrücke $R_j^{(n)}$ exakt zu integrieren:

$$\begin{aligned} R_j^{(n)}(s) &= \frac{1}{4\pi n} \int_0^{2\pi} \cot \frac{\sigma - s}{2} \left(-2 \sum_{m=1}^{n-1} m \sin m(\sigma - t_j^{(n)}) - n \sin n(\sigma - t_j^{(n)}) \right) d\sigma \\ &= \frac{-1}{2\pi n} \int_0^{2\pi} \cot \frac{\sigma - s}{2} \left(\sum_{m=1}^{n-1} m \left(\sin m\sigma \cos mt_j^{(n)} - \sin mt_j^{(n)} \cos m\sigma \right) \right) d\sigma \\ &\quad - \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \cot \frac{\sigma - s}{2} \left(\sin n\sigma \cos nt_j^{(n)} - \sin nt_j^{(n)} \cos n\sigma \right) d\sigma \\ &= -\frac{1}{n} \left(\sum_{m=1}^{n-1} m \left(\cos mt_j^{(n)} \cos ms + \sin mt_j^{(n)} \sin ms \right) \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\cos nt_j^{(n)} \cos ns + \sin nt_j^{(n)} \sin ns \right) \\ &= -\frac{1}{n} \left(\sum_{m=1}^{n-1} m \cos m(s - t_j^{(n)}) + \frac{n}{2} \cos n(s - t_j^{(n)}) \right), \quad j = 0, \dots, 2n - 1. \end{aligned}$$

Insgesamt haben wir somit eine Quadraturformel mit den Gewichten $R_j^{(n)}(s)$ erhalten, die trigonometrische Polynome $q \in T_n$ exakt integriert. Ausgedrückt durch unsere Operatoren bedeutet dieses

$$P_n T_0 q = T_0 q. \quad (6.10)$$

Wir werden von dieser Eigenschaft der Quadraturformel später Gebrauch machen.

Als nächstes wollen wir mit einer ähnlichen Idee eine Quadraturformel für

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \widehat{K}_2(s, \sigma) \xi'(\sigma) d\sigma$$

herleiten. Da $\xi(2\pi) = \xi(0) = 0$ und $\widehat{K}_2(s, \sigma)$ in σ stetig differenzierbar ist können wir zunächst einmal partiell integrieren und erhalten

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \widehat{K}_2(s, \sigma) \xi'(\sigma) d\sigma = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{K}_2(s, \sigma) \xi(\sigma) d\sigma, \quad (6.11)$$

wobei $\overline{K}_2(s, \sigma) := \frac{\partial}{\partial \sigma} \widehat{K}_2(s, \sigma)$ ist. Nun können wir für festes s den Ausdruck $\overline{K}_2(s, \sigma)\xi(\sigma)$ bezüglich σ durch

$$(P_n(\overline{K}_2(s, \cdot)\xi(\cdot)))(\sigma) = \sum_{j=0}^{2n-1} \overline{K}_2(s, t_j^{(n)})\xi(t_j^{(n)})L_j^{(n)}(\sigma)$$

interpolieren. Wegen $\int_0^{2\pi} L_j^{(n)}(\sigma)d\sigma = \frac{\pi}{n}$ approximieren wir

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{K}_2(s, \sigma)\xi(\sigma)d\sigma &\approx -\frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{2n-1} \overline{K}_2(s, t_j^{(n)})\xi(t_j^{(n)}) \int_0^{2\pi} L_j^{(n)}(\sigma)d\sigma \\ &= -\frac{1}{2n} \sum_{j=0}^{2n-1} \overline{K}_2(s, t_j^{(n)})\xi(t_j^{(n)}). \end{aligned}$$

Diese Quadraturformel stimmt aufgrund der Periodizität des Kerns und der Wahl der Stützstellen mit der zusammengesetzten Trapezregel überein. Für die numerische Umsetzung nehmen wir noch wahr, daß wir durch (5.24) eine Formel gegeben haben, um den Kern \overline{K}_2 auf der Diagonalen auszuwerten.

Als letztes Integral verbleibt

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_2(s, \sigma)\xi(\sigma)d\sigma.$$

Mit derselben Idee wie oben approximieren wir

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_2(s, \sigma)\xi(\sigma)d\sigma &\approx -\frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{2n-1} H_2(s, t_j^{(n)})\xi(t_j^{(n)}) \int_0^{2\pi} L_j^{(n)}(\sigma)d\sigma \\ &= -\frac{1}{2n} \sum_{j=0}^{2n-1} H_2(s, t_j^{(n)})\xi(t_j^{(n)}), \end{aligned}$$

was erneut mit der zusammengesetzten Trapezregel übereinstimmt. Damit haben wir für alle Anteile über Γ Quadraturformeln entwickelt und wenden uns nun den Anteilen über ∂D zu.

6.4 Quadraturformeln für die Anteile über ∂D

Da wir auf beide Integralgleichungen eine Kollokationsmethode anwenden wollen, werden wir bei den Integralanteilen über ∂D die gleiche Strategie wie bei den Anteilen über Γ verfolgen. Wir interpolieren also den Kern mit der Dichte durch ein Interpolationspolynom und integrieren dann. Damit jedoch die Dimension des linearen Gleichungssystems nicht zu groß wird, interpolieren wir nur mit der Hälfte der Stützstellen und nehmen dafür an, daß n gerade ist.

Wir beschäftigen uns zuerst mit

$$-\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \overline{M}(s, \sigma) \varphi(\sigma) d\sigma.$$

Den Ausdruck $\overline{M}(s, \sigma) \varphi(\sigma)$ können wir für festes s bezüglich σ unter Ausnutzung von (6.7) durch

$$P_{n/2}(\overline{M}(s, \cdot) \varphi(\cdot))(\sigma) = \sum_{k=1}^n \overline{M}(s, u_k^{(n)}) \varphi(u_k^{(n)}) L_k^{(n/2)}(\sigma)$$

interpolieren. Wegen $\int_0^{2\pi} L_k^{(n/2)}(\sigma) d\sigma = \frac{2\pi}{n}$ folgt

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \overline{M}(s, \sigma) \varphi(\sigma) d\sigma &\approx -\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \overline{M}(s, u_k^{(n)}) \varphi(u_k^{(n)}) \int_0^{2\pi} L_k^{(n/2)}(\sigma) d\sigma \\ &= -\frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \overline{M}(s, u_k^{(n)}) \varphi(u_k^{(n)}). \end{aligned} \tag{6.12}$$

Um eine Quadraturformel für

$$-\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} H_1(s, \sigma) \varphi(\sigma) d\sigma$$

zu bekommen, gehen wir vollkommen analog vor und erhalten wir wie in (6.12)

$$-\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} H_1(s, \sigma) \varphi(\sigma) d\sigma \approx -\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n H_1(s, u_i^{(n)}) \varphi(u_i^{(n)}).$$

Hierbei merken wir noch an, daß sich der Kern des Doppelschichtpotentials, wie im Beweis von Satz 5.20 gezeigt, durch

$$\frac{\langle \nu(z(t)), \ddot{z}(t) \rangle}{2|\dot{z}(t)|^2}$$

stetig auf der Diagonalen fortsetzen läßt, was wir natürlich bei der numerischen Behandlung ausnutzen werden.

Wir hätten diese beiden Quadraturformeln auch durch direkte Anwendung der zusammengesetzten Trapezregel erhalten können. Allerdings bietet eine solche Vorgehensweise Vorteile bei der Fehlerabschätzung.

6.5 Die Näherungsgleichungen

Zu den eben entwickelten Quadraturformeln wollen wir jetzt die zugehörigen Operatoren einführen. Dafür definieren wir

$$(A_n \xi)(s) := -\frac{1}{2n} \sum_{j=0}^{2n-1} \bar{K}_2(s, t_j^{(n)}) \xi(t_j^{(n)}), \quad 0 \leq s \leq 2\pi \quad (6.13)$$

$$(B_n \varphi)(s) := -\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \bar{M}(s, u_i^{(n)}) \varphi(u_i^{(n)}), \quad 0 \leq s \leq 2\pi \quad (6.14)$$

$$(\tilde{A}_n \varphi)(s) := -\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n H_1(s, u_i^{(n)}) \varphi(u_i^{(n)}), \quad 0 \leq s \leq 2\pi \quad (6.15)$$

$$(\tilde{B}_n \xi)(s) := -\frac{1}{2n} \sum_{j=0}^{2n-1} H_2(s, t_j^{(n)}) \xi(t_j^{(n)}), \quad 0 \leq s \leq 2\pi. \quad (6.16)$$

Damit können wir die diskretisierten Gleichungen in der Form

$$\varphi_n + \tilde{A}_n \varphi_n + \tilde{B}_n \xi_n = f, \quad (6.17)$$

$$B_n \varphi_n + T_0 \xi_n + A_n \xi_n = g \quad (6.18)$$

schreiben, $(\varphi_n, \xi_n) \in T_{n/2} \times T_{n,ung}$, wobei wir berücksichtigen, daß T_0 auf trigonometrischen Polynomen exakt ist. Die Anwendung einer Kollokationsmethode auf (6.17) und (6.18) liefert

$$P_{n/2} \varphi_n + P_{n/2} \tilde{A}_n \varphi_n + P_{n/2} \tilde{B}_n \xi_n = P_{n/2} f \quad (6.19)$$

$$P_{n,ung} B_n \varphi_n + P_{n,ung} T_0 \xi_n + P_{n,ung} A_n \xi_n = P_{n,ung} g. \quad (6.20)$$

Aus Gleichung (6.20) bekommen wir aber unter Ausnutzung von $T_0 \xi \in T_{n,ung}$ für $\xi \in T_{n,ung}$ (vgl. Lemma 6.3) die Näherungsgleichung

$$P_{n,ung} B_n \varphi_n + T_0 \xi_n + P_{n,ung} A_n \xi_n = P_{n,ung} g, \quad (6.21)$$

die mit dem folgenden linearen Gleichungssystem äquivalent ist:

$$B_n \varphi_n(t_k^{(n)}) + T_0 \xi_n(t_k^{(n)}) + A_n \xi_n(t_k^{(n)}) = g(t_k^{(n)}), \quad k = 0, \dots, 2n-1 \quad (6.22)$$

bzw.

$$\sum_{j=0}^{2n-1} \xi_n(t_j^{(n)}) \left(R_j^{(n)}(t_k^{(n)}) - \frac{1}{2n} \bar{K}_2(t_k^{(n)}, t_j^{(n)}) \right) - \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n \bar{M}(t_k^{(n)}, u_j^{(n)}) \varphi_n(u_j^{(n)}) = g(t_k^{(n)}),$$

$k = 0, \dots, 2n - 1$. Die Gewichte $R_j^{(n)}$ haben dabei die explizite Form

$$R_j^{(n)}(t_k^{(n)}) = -\frac{1}{n} \left(\sum_{m=1}^{n-1} m \cos m(k-j) \frac{\pi}{n} + \frac{n}{2} (-1)^{k-j} \right),$$

was bei der konkreten, numerischen Implementierung nützlich ist.

Gleichung (6.19) ist äquivalent zu dem linearen Gleichungssystem

$$\varphi_n(u_k^{(n)}) + (\tilde{A}_n \varphi_n)(u_k^{(n)}) + (\tilde{B}_n \xi_n)(u_k^{(n)}) = f(u_k^{(n)}), \quad k = 1, \dots, n, \quad (6.23)$$

bzw.

$$\varphi_n(u_k^{(n)}) - \frac{2}{n} \sum_{j=1}^n H_1(u_k^{(n)}, u_j^{(n)}) \varphi_n(u_j^{(n)}) - \frac{1}{2n} \sum_{j=0}^{2n-1} H_2(u_k^{(n)}, t_j^{(n)}) \xi_n(t_j^{(n)}) = f(u_k^{(n)}),$$

$k = 1, \dots, n$.

Da ξ wegen der Ungeradheit die Eigenschaften $\xi(t_j^{(n)}) = \xi(t_{2n-j}^{(n)})$, $j = 1, \dots, n-1$, sowie $\xi(0) = \xi(\pi) = 0$ erfüllt, bemerken wir, daß wir im insgesamten nur ein $(n+n-1) \times (n+n-1) = (2n-1) \times (2n-1)$ Gleichungssystem lösen müssen.

Die Gleichungen (6.22) und (6.23) geben uns nun eine vollständig diskrete Methode zur numerischen Lösung unseres Ausgangssystems von Integralgleichungen.

6.6 Hilfsaussagen

Sei \tilde{T}_n der folgende Unterraum von $C[0, 2\pi]$:

$$\tilde{T}_n := \left\{ v \in C[0, 2\pi] : v(t) = \sum_{m=0}^n a_m \cos mt + \sum_{m=1}^n b_m \sin mt \right\}.$$

Dann gilt offensichtlich

$$\tilde{T}_{n-1} \subset T_n \subset \tilde{T}_n.$$

Weiterhin bezeichnen wir mit S_n den linearen Operator

$$\begin{aligned} S_n : L^2[0, 2\pi] &\rightarrow \tilde{T}_n \\ (S_n f)(t) &= \sum_{m=-n}^n \hat{f}_m e^{imt}, \end{aligned}$$

wobei

$$\hat{f}_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s) e^{-ims} ds$$

ist. $S_n f$ bezeichnet also gerade die n -te Partialsumme der Fourierreihe von f . Wir definieren

$$E_n(f) := \inf_{s_n \in \tilde{T}_n} \|f - s_n\|_\infty.$$

Da der Raum \tilde{T}_n endlich dimensional ist, existiert ein trigonometrisches Polynom $\tilde{s}_n \in \tilde{T}_n$ mit

$$E_n(f) = \|f - \tilde{s}_n\|.$$

Für unsere Abschätzungen wird ein Ergebnis aus der Approximationstheorie benötigt. Wir zitieren den ersten Approximationssatz von *Jackson* :

Satz 6.4 (Jackson) Sei $f \in C^k[0, 2\pi]$, $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt die folgende Abschätzung:

$$E_n(f) \leq \frac{3}{(n+1)^k} \sup_{0 < \delta \leq \frac{1}{n+1}} \|f^{(k)}(x+\delta) - f^{(k)}(x)\|_\infty.$$

Beweis: [16], Kapitel IV oder [18], Kapitel 2. □

Folgerung 6.5 Für $f \in C^{k,\alpha}[0, 2\pi]$ erhalten wir die Abschätzung

$$E_n(f) \leq 3 \frac{|f^{(k)}|_\alpha}{(n+1)^{k+\alpha}} \leq C \frac{|f|_\alpha}{n^{k+\alpha}} \quad (6.24)$$

Beweis: Falls $f \in C^{0,\alpha}[0, 2\pi]$ können wir abschätzen:

$$\sup_{0 < \delta \leq \frac{1}{n}} \|f(x+\delta) - f(x)\|_\infty \leq C \frac{|f|_\alpha}{n^\alpha}.$$

Ist nun $f \in C^{k,\alpha}[0, 2\pi]$, so ist $f^{(k)} \in C^{0,\alpha}[0, 2\pi]$, wodurch bereits alles bewiesen ist. □

Satz 6.6 Der Operator S_n besitzt die Darstellung

$$(S_n f)(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} D_n(s-t) f(s) ds = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (f(t+s) + f(t-s)) D_n(s) ds \quad (6.25)$$

mit dem Dirichletkern

$$D_n(t) := \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^n \cos mt = \frac{1}{2} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{t}{2}}.$$

Beweis: [7], Kapitel 135. □

Indem wir in (6.25) $s = 2u$ substituieren erhalten wir

$$(S_n f)(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(t+2u) + f(t-2u)) D_n(2u) du. \quad (6.26)$$

Wir können folgende Abschätzung angeben.

Lemma 6.7 Für $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, gilt

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |D_n(2t)| dt \leq 1 + \frac{\ln n}{2}$$

Beweis: Wir zerlegen unser Intervall in die Segmente

$$\left[0, \frac{\pi}{2(2n+1)}\right] \quad \text{und} \quad \left[\frac{\pi}{2(2n+1)}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Dann wenden wir auf das erste Segment die Abschätzung $|\sin nt| \leq n|\sin t|$ und auf das zweite die Abschätzung $\sin t \geq \frac{2}{\pi}t$ sowie die Abschätzung $|\sin(2n+1)t| \leq 1$ an und bekommen

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |D_n(2t)| dt &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left| \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} \right| dt \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2(2n+1)}} (2n+1) dt + \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2(2n+1)}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{t} dt \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln(2n+1). \end{aligned}$$

Nun ist aber $2n+1 < ne$, also $\ln(2n+1) < 1 + \ln n$, womit alles gezeigt ist. □

Folgerung 6.8 Ist $f \in C[0, 2\pi]$, $n > 1$, so existiert ein $C > 0$ mit

$$\|S_n\|_{\infty} \leq C \ln n.$$

Beweis: Da f stetig ist, ist f auf $[0, 2\pi]$ beschränkt. Wir können unter Benutzung von (6.26) und Lemma 6.7 abschätzen:

$$|(S_n f)(t)| \leq 2\|f\|_{\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} |D_n(2t)| dt \leq 2\|f\|_{\infty} + \ln n \|f\|_{\infty},$$

woraus wir die Aussage erhalten. □

Satz 6.9 Für $n > 1$ existiert ein $C > 0$ mit

$$\|P_n\|_\infty \leq C \ln n.$$

Beweis: [9], Satz 11.4 □

Satz 6.10 Sei $0 < \alpha < \beta < 1$ und $f \in C^{0,\beta}[0, 2\pi]$. Dann gilt

$$\|P_n f - f\|_{0,\alpha} \leq C \frac{\ln n}{n^{\beta-\alpha}} |f|_\beta, \quad (6.27)$$

wobei die Konstante C von f unabhängig ist.

Beweis: Unter Verwendung der Dreiecksungleichung erhalten wir

$$\|P_n f - f\|_{0,\alpha} \leq \|P_n f - S_n f\|_{0,\alpha} + \|S_n f - f\|_{0,\alpha}. \quad (6.28)$$

$p(f) := P_n f - S_n f$ ist ein trigonometrisches Polynom aus \tilde{T}_n . Um den ersten Summanden auf der rechten Seite von (6.28) abzuschätzen, betrachten wir zunächst den Fall $|t_1 - t_2| \geq 1/n$ mit $t_1, t_2 \in [0, 2\pi]$. Dann gilt

$$\frac{|p(f)(t_1) - p(f)(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\alpha} \leq n^\alpha (\|p(f)\|_\infty + \|p(f)\|_\infty) = 2n^\alpha \|p(f)\|_\infty.$$

Falls $|t_1 - t_2| < 1/n$ ist, erhalten wir nach Anwendung des Mittelwertsatzes und der Ungleichung von Bernstein $\|\varphi'\|_\infty \leq n \|\varphi\|_\infty$, $\varphi \in \tilde{T}_n$, (vgl. [16], Seite 83)

$$\frac{|p(f)(t_1) - p(f)(t_2)|}{|t_1 - t_2|^\alpha} \leq |t_1 - t_2|^{1-\alpha} \|p'(f)\|_\infty \leq n^{\alpha-1} \|p'(f)\|_\infty \leq n^\alpha \|p(f)\|_\infty.$$

Insgesamt folgt also

$$\|p(f)\|_{0,\alpha} \leq C n^\alpha \|p(f)\|_\infty. \quad (6.29)$$

Es bezeichne nun \tilde{s}_{n-1} die beste Approximierende an f bezüglich $(\tilde{T}_{n-1}, \|\cdot\|_\infty)$. Dann bekommen wir unter Verwendung von Folgerung 6.8, Satz 6.9, der Dreiecksungleichung sowie den Identitäten $\tilde{s}_{n-1} = P_n \tilde{s}_{n-1}$ und $\tilde{s}_{n-1} = S_n \tilde{s}_{n-1}$

$$\begin{aligned} \|p(f)\|_\infty &\leq \|P_n f - f\|_\infty + \|S_n f - f\|_\infty \\ &\leq \|P_n f - \tilde{s}_{n-1}\|_\infty + \|\tilde{s}_{n-1} - f\|_\infty + \|S_n f - \tilde{s}_{n-1}\|_\infty + \|\tilde{s}_{n-1} - f\|_\infty \\ &= \|P_n f - P_n \tilde{s}_{n-1}\|_\infty + E_{n-1}(f) + \|S_n f - S_n \tilde{s}_{n-1}\|_\infty + E_{n-1}(f) \\ &\leq (\|P_n\|_\infty + 1)E_{n-1}(f) + (\|S_n\|_\infty + 1)E_{n-1}(f) \\ &\leq C \ln n E_{n-1}(f). \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir somit für den ersten Summanden in (6.28) unter Verwendung von Folgerung 6.5

$$\|p(f)\|_{0,\alpha} \leq Cn^\alpha \ln n E_{n-1}(f) \leq \tilde{C} \frac{\ln n}{n^{\beta-\alpha}} |f|_\beta. \quad (6.30)$$

Es verbleibt den zweiten Summanden auf der rechten Seite in (6.28) abzuschätzen. Wiederum mit Folgerung 6.5 berechnen wir

$$\begin{aligned} \|S_n f - f\|_\infty &\leq \|S_n f - \tilde{s}_{n-1}\|_\infty + \|f - \tilde{s}_{n-1}\|_\infty \leq (\|S_n\|_\infty + 1)E_{n-1}(f) \\ &\leq C \frac{\ln n}{n^\beta} |f|_\beta. \end{aligned} \quad (6.31)$$

Nun müssen wir noch die Hölderhalbnorm von $S_n f - f$ abschätzen. Dafür definieren wir bei festem δ den Differenzoperator

$$f_\delta(x) := f(x + \delta) - f(x)$$

und die Mengen

$$A := \left\{ \delta : |\delta| > \frac{1}{n} \right\} \quad \text{und} \quad B := \left\{ \delta : 0 < |\delta| \leq \frac{1}{n} \right\}.$$

Damit erhalten wir mit Folgerung 6.5 und der Periodizität von $S_n f$ und f

$$\begin{aligned} \sup_{\delta \in A} \frac{\|S_n(f_\delta) - f_\delta\|_\infty}{|\delta^\alpha|} &\leq n^\alpha \left\{ \sup_{\delta \in A} \left(\max_{t \in [0, 2\pi]} |(S_n f)(t) - f(t)| \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \max_{t \in [0, 2\pi]} |(S_n f)(t + \delta) - f(t + \delta)| \right) \right\} \\ &\leq 2n^\alpha \|S_n f - f\|_\infty \\ &\leq Cn^\alpha (1 + \|S_n\|_\infty) E_{n-1}(f) \\ &\leq \tilde{C} \frac{\ln n}{n^{\beta-\alpha}} |f|_\beta \end{aligned}$$

Ferner gilt

$$\sup_{\delta \in B} \frac{\|S_n(f_\delta) - f_\delta\|_\infty}{|\delta^\alpha|} \leq \sup_{\delta \in B} \left\{ \frac{C}{|\delta|^\alpha} \ln n E_n(f_\delta) \right\}$$

und wegen $\alpha < \beta$ sowie $E_n(f) \leq \|f\|_\infty$, $f \in C[0, 2\pi]$, bekommen wir

$$\begin{aligned} \sup_{\delta \in B} \left\{ \frac{C}{|\delta|^\alpha} \ln n E_n(f_\delta) \right\} &\leq \sup_{\delta \in B} \left\{ C \frac{\ln n}{|\delta|^\alpha} \|f_\delta\|_\infty \right\} \leq C \ln n \sup_{\delta \in B} \left\{ \frac{\|f_\delta\|_\infty}{|\delta|^\beta} |\delta|^{\beta-\alpha} \right\} \\ &\leq \tilde{C} \frac{\ln n}{n^{\beta-\alpha}} |f|_\beta, \end{aligned}$$

woraus wir nun mit (6.31)

$$\|S_n f - f\|_{0,\alpha} \leq C \frac{\ln n}{n^{\beta-\alpha}} |f|_\beta \quad (6.32)$$

folgern können. Die Abschätzungen (6.30) und (6.32) liefern dann die Behauptung. \square

Folgerung 6.11 *Es sei $f \in C^1[0, 2\pi]$. Dann gilt*

$$\|P_n f - f\|_\infty \leq c_n \|f'\|_\infty, \quad c_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Beweis: Wir wenden den Mittelwertsatz an und erhalten

$$|f|_\beta \leq \|f'\|_\infty \sup_{\substack{x, y \in [0, 2\pi] \\ x \neq y}} |x - y|^{1-\beta} \leq C \|f'\|_\infty,$$

woraus dann mit Satz 6.10 die Behauptung folgt. \square

6.7 Konvergenzuntersuchungen

In diesem Abschnitt werden wir die Konvergenz der Näherungsoperatoren gegen die Integraloperatoren untersuchen und anschließend eine Aussage über die Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems aus Abschnitt 6.5 für große n machen. Wir wollen uns dabei die bekannten Fehlerabschätzungen bei Projektionsmethoden zu nutze machen.

Dazu betrachten wir eine Operatorgleichung erster Art der Form

$$S\varphi - L\varphi = f,$$

wobei wir annehmen, daß $S : X \rightarrow Y$ ein beschränkter, linearer Operator von einem Banachraum X in einen Banachraum Y ist und eine beschränkte Inverse S^{-1} besitzt, $L : X \rightarrow Y$ ein kompakter Operator ist, und $S - L$ injektiv ist. Für das Projektionsverfahren

$$P_n(S - L)\varphi_n = P_n f \quad (6.33)$$

gilt dann der folgende Satz

Satz 6.12 *Seien X und Y Banachräume, $X_n \subset X$ und $Y_n \subset Y$ zwei Folgen von Unterräumen mit $\dim X_n = \dim Y_n = n$ und $P_n^Y : Y \rightarrow Y_n$, $P_n^X : X \rightarrow X_n$ Projektionsoperatoren. Ferner gelte $Y_n = S(X_n)$ und $\|P_n L - L\| \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Dann ist für hinreichend große n die Näherungsgleichung (6.33) eindeutig lösbar.*

Beweis: [9], Satz 13.12. □

In praktischen Rechnungen wird anstelle von (6.33) eine angenäherte Gleichung der Gestalt

$$P_n(S - L_n)\tilde{\varphi}_n = P_n f_n \quad (6.34)$$

gelöst, wobei L_n eine Approximation an L ist und f_n die rechte Seite f approximiert. Wir erhalten die

Folgerung 6.13 *Unter den Annahmen von Satz 6.12 an die Operatoren S und L gelte ferner $(P_n L_n - P_n L)\psi \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, für alle $\psi \in X$ und $\|P_n L_n - P_n L\|_{X_n \rightarrow Y_n} \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Dann ist für hinreichend große n die Näherungsgleichung (6.34) eindeutig lösbar und es gilt die Fehlerabschätzung*

$$\|\tilde{\varphi}_n - \varphi\| \leq C (\|P_n S \varphi - S \varphi\| + \|P_n(L_n - L)\varphi\| + \|P_n(f_n - f)\|) \quad (6.35)$$

mit einer positiven Konstanten C .

Beweis: [9], Korollar 13.13. □

Um die Anwendbarkeit dieser Sätze nachzuweisen, müssen wir stärkere Voraussetzungen an ∂D und an die rechte Seite machen. Wir setzen wir von nun an voraus, daß der Rand ∂D so glatt ist, daß der Kern H_1 des Operators \tilde{A} einmal stetig differenzierbar ist. Dann sind auch die Funktionen $\tilde{A}\varphi$ und $\tilde{A}_n\varphi$, $\varphi \in C[0, 2\pi]$, einmal stetig differenzierbar. Wenn wir dann noch annehmen, daß die rechte Seite in der Gleichung

$$\varphi + \tilde{A}\varphi + \tilde{B}\xi = f$$

eine Funktion aus $C^{0,\beta}[0, 2\pi]$ ist, folgt für die Lösung φ , da $B\xi \in C^1[0, 2\pi]$ liegt, daß sie ebenfalls aus $C^{0,\beta}[0, 2\pi]$ ist. Das bedeutet aber, daß wir die Operatoren \tilde{A} und B als kompakte Operatoren auf $C^{0,\beta}[0, 2\pi]$ auffassen können. Unter diesen stärkeren Voraussetzungen werden wir die Konvergenzanalyse durchführen. Wir formulieren noch einmal ein zusammenfassendes

Lemma 6.14 *Für $0 < \alpha, \beta, \gamma, \delta < 1$ und $n \in \mathbb{N}$ sind die Operatoren*

$$A, A_n : C_{ung}^{1,\alpha}[0, 2\pi] \rightarrow C_{ung}^{0,\gamma}[0, 2\pi], \quad (6.36)$$

$$B, B_n : C^{0,\beta}[0, 2\pi] \rightarrow C_{ung}^{0,\gamma}[0, 2\pi] \quad (6.37)$$

$$\tilde{A}, \tilde{A}_n : C^{0,\beta}[0, 2\pi] \rightarrow C^{0,\delta}[0, 2\pi], \quad (6.38)$$

$$\tilde{B}, \tilde{B}_n : C_{ung}^{1,\alpha}[0, 2\pi] \rightarrow C^{0,\delta}[0, 2\pi], \quad (6.39)$$

beschränkt und kompakt.

Beweis: Wegen der stetigen Differenzierbarkeit der Kerne der Operatoren A , B , \tilde{A} und \tilde{B} bilden diese Operatoren beschränkt nach $C^1[0, 2\pi]$ ab (vgl. Beweis zu Satz 5.18). Daher erhält man unter Verwendung von Satz 2.26, daß sie kompakt nach $C_{ung}^{0,\gamma}[0, 2\pi]$ bzw. $C^{0,\delta}[0, 2\pi]$ abbilden.

Durch analoge Argumentation erhält man auch die Aussagen für die Näherungsoperatoren A_n , B_n , \tilde{A}_n und \tilde{B}_n . □

Satz 6.15 Für $0 < \alpha, \beta < 1$ und $\varepsilon, \delta > 0$ mit $0 < \alpha + \varepsilon < 1$, $0 < \delta < \beta/2$ sowie $\xi \in C_{ung}^{1,\alpha}[0, 2\pi]$ und $\varphi \in C^{0,\beta}[0, 2\pi]$ gelten die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|(A - A_n)\xi\|_{0,\alpha} &\leq C_1 \frac{\ln n}{n^\varepsilon} \|\xi\|_{1,\alpha}, \\ \|(B - B_n)\varphi\|_{0,\alpha} &\leq C_2 \frac{\ln n}{n^\delta} \|\varphi\|_{0,\beta} \\ \|(\tilde{A} - \tilde{A}_n)\varphi\|_{0,\beta} &\leq C_3 \frac{\ln n}{n^\delta} \|\varphi\|_{0,\beta} \\ \|(\tilde{B} - \tilde{B}_n)\xi\|_{0,\beta} &\leq C_4 \frac{\ln n}{n^\varepsilon} \|\xi\|_{1,\alpha}. \end{aligned}$$

Die Folgen

$$\begin{aligned} A_n &: C_{ung}^{1,\alpha}[0, 2\pi] \rightarrow C_{ung}^{0,\alpha}[0, 2\pi], \\ B_n &: C^{0,\beta}[0, 2\pi] \rightarrow C_{ung}^{0,\alpha}[0, 2\pi], \\ \tilde{A}_n &: C^{0,\beta}[0, 2\pi] \rightarrow C^{0,\beta}[0, 2\pi], \\ \tilde{B}_n &: C_{ung}^{1,\alpha}[0, 2\pi] \rightarrow C^{0,\beta}[0, 2\pi], \end{aligned}$$

konvergieren daher in der Norm gegen die Operatoren A , B , \tilde{A} bzw. \tilde{B} .

Beweis: Wir zeigen nur die Abschätzungen für die Operatoren A_n und \tilde{A}_n . Die anderen Abschätzungen erhält man analog. Es sei

$$d(\xi)(s) := (A_n \xi)(s) - (A\xi)(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{\overline{K}_2(s, \sigma)\xi(\sigma) - P_n(\overline{K}_2(s, \cdot)\xi(\cdot))(\sigma)\} d\sigma.$$

Mit Satz 6.10 können wir für $s \in [0, 2\pi]$

$$\begin{aligned} |d(\xi)(s)| &\leq \|P_n(\overline{K}_2(s, \cdot)\xi(\cdot)) - \overline{K}_2(s, \cdot)\xi(\cdot)\|_\infty \\ &\leq \|P_n(\overline{K}_2(s, \cdot)\xi(\cdot)) - \overline{K}_2(s, \cdot)\xi(\cdot)\|_{0,\alpha} \\ &\leq C \frac{\ln n}{n^{\alpha+\varepsilon-\alpha}} \|\overline{K}_2(s, \cdot)\xi(\cdot)\|_{0,\alpha+\varepsilon} \\ &\leq C' \frac{\ln n}{n^\varepsilon} \|\overline{K}_2(s, \cdot)\|_{0,\alpha+\varepsilon} \|\xi\|_{1,\alpha} \\ &\leq C'' \frac{\ln n}{n^\varepsilon} \|\xi\|_{1,\alpha}. \end{aligned}$$

abschätzen. Hierbei haben wir noch ausgenutzt, daß die $\|\cdot\|_{1,\alpha}$ stärker als $\|\cdot\|_{0,\gamma}$ ist, $0 < \gamma \leq 1$. Für die Hölderhalbnorm betrachten wir $s_1, s_2 \in [0, 2\pi]$, $s_1 \neq s_2$ und berechnen

$$\begin{aligned}
|d(\xi)(s_1) - d(\xi)(s_2)| &\leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} ((P_n(\overline{K}_2(s_1, \cdot)\xi(\cdot)))(\sigma) - \overline{K}_2(s_1, \sigma)\xi(\sigma) \right. \\
&\quad \left. - ((P_n(\overline{K}_2(s_2, \cdot)\xi(\cdot)))(\sigma) - \overline{K}_2(s_2, \sigma)\xi(\sigma)) d\sigma \right| \\
&\leq \|P_n(\overline{K}_2(s_1, \cdot)\xi(\cdot) - \overline{K}_2(s_2, \cdot)\xi(\cdot))\|_{0,\alpha+\varepsilon} \\
&\quad - (\overline{K}_2(s_1, \cdot)\xi(\cdot) - \overline{K}_2(s_2, \cdot)\xi(\cdot))\|_{\infty} \\
&\leq C \frac{\ln n}{n^\varepsilon} \|(\overline{K}_2(s_1, \cdot)\xi(\cdot) - \overline{K}_2(s_2, \cdot)\xi(\cdot))\|_{0,\alpha+\varepsilon} \\
&\leq C' \frac{\ln n}{n^\varepsilon} \|(\overline{K}_2(s_1, \cdot) - \overline{K}_2(s_2, \cdot))\|_{0,\alpha+\varepsilon} \|\xi\|_{1,\alpha}. \tag{6.41}
\end{aligned}$$

Eine Anwendung des Mittelwertsatzes liefert noch

$$\|\overline{K}_2(s_1, \cdot) - \overline{K}_2(s_2, \cdot)\|_{0,\alpha+\varepsilon} \leq C|s_1 - s_2|^\alpha \left(\left\| \frac{\partial}{\partial t} \overline{K}_2(\cdot, \cdot) \right\|_{\infty} + \left\| \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial t} \overline{K}_2(\cdot, \cdot) \right\|_{\infty} \right),$$

wodurch wir schließlich die Abschätzung

$$\|d\xi\|_{0,\alpha} \leq C'' \frac{\ln n}{n^\varepsilon} \|\xi\|_{1,\alpha}$$

und insgesamt

$$\|(A - A_n)\xi\|_{0,\alpha} \leq C_1 \frac{\ln n}{n^\varepsilon} \|\xi\|_{1,\alpha}$$

erhalten. Damit folgt

$$\begin{aligned}
\|A - A_n\|_{0,\alpha} &= \sup_{\|\xi\|_{1,\alpha}=1} \|(A - A_n)\xi\|_{0,\alpha} \leq \sup_{\|\xi\|_{1,\alpha}=1} C \frac{\ln n}{n^\varepsilon} \|\xi\|_{1,\alpha} \\
&= C \frac{\ln n}{n^\varepsilon} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.
\end{aligned}$$

Ebenso berechnen wir für $s \in [0, 2\pi]$ und Satz 6.10

$$\begin{aligned}
|(\tilde{A}\varphi)(s) - (\tilde{A}_n\varphi)(s)| &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |H_1(s, \sigma)\varphi(\sigma) - P_n(H_1(s, \cdot)\varphi(\cdot))(\sigma)| d\sigma \\
&\leq C \|H_1(s, \cdot)\varphi(\cdot) - P_n(H_1(s, \cdot)\varphi(\cdot))\|_{0,\beta/2} \\
&\leq C' \frac{\ln n}{n^{\beta/2}} \|H_1(s, \cdot)\varphi(\cdot)\|_{0,\beta} \\
&\leq C_3 \frac{\ln n}{n^\delta} \|\varphi\|_{0,\beta}. \tag{6.42}
\end{aligned}$$

Die Abschätzung der Halbnorm folgt wegen der stetigen Differenzierbarkeit des Kerns H_1 analog zu der Abschätzung (6.41) in Verbindung mit (6.42). Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\|\tilde{A} - \tilde{A}_n\|_{0,\beta} &= \sup_{\|\varphi\|_{0,\beta}=1} \|(\tilde{A} - \tilde{A}_n)\varphi\|_{0,\beta} \leq \sup_{\|\varphi\|_{0,\beta}=1} C_3 \frac{\ln n}{n^\delta} \|\varphi\|_{0,\beta} \\ &= C_3 \frac{\ln n}{n^\delta} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.\end{aligned}$$

□

Satz 6.16 *Unter den Annahmen von Satz 6.15 sind die Folgen*

$$\begin{aligned}P_{n,ung}A_n &: C_{ung}^{1,\alpha}[0, 2\pi] \rightarrow T_{n,ung} \\ P_{n,ung}B_n &: C^{0,\beta}[0, 2\pi] \rightarrow T_{n,ung} \\ P_{n/2}\tilde{A}_n &: C^{0,\beta}[0, 2\pi] \rightarrow T_{n/2} \\ P_{n/2}\tilde{B}_n &: C_{ung}^{1,\alpha}[0, 2\pi] \rightarrow T_{n/2}\end{aligned}$$

normkonvergent mit den Grenzoperatoren A , B , \tilde{A} bzw. \tilde{B} .

Beweis: Seien $\varphi \in C^{0,\beta}[0, 2\pi]$ und $\xi \in C_{ung}^{1,\alpha}[0, 2\pi]$. Die Dreiecksungleichung liefert

$$\|P_{n,ung}A_n\xi - A\xi\|_{0,\alpha} \leq \|P_{n,ung}A_n\xi - A_n\xi\|_{0,\alpha} + \|A_n\xi - A\xi\|_{0,\alpha}. \quad (6.43)$$

Für den ersten Summanden in Abschätzung (6.43) gilt nach Satz 6.10 und (6.36)

$$\|P_{n,ung}A_n\xi - A_n\xi\|_{0,\alpha} \leq C \frac{\ln n}{n^\varepsilon} \|A_n\xi\|_{0,\alpha+\varepsilon} \leq C' \frac{\ln n}{n^\varepsilon} \|\xi\|_{1,\alpha}, \quad (6.44)$$

Satz 6.15 sagt außerdem

$$\|(A_n - A)\xi\|_{0,\alpha} \leq C \frac{\ln n}{n^\varepsilon} \|\xi\|_{1,\alpha}. \quad (6.45)$$

Für den Operator \tilde{A} gehen wir analog vor. Es ist

$$\|P_{n/2}\tilde{A}_n\varphi - A\varphi\|_{0,\beta} \leq \|P_{n/2}\tilde{A}_n\varphi - \tilde{A}_n\varphi\|_{0,\beta} + \|\tilde{A}_n\varphi - \tilde{A}\varphi\|_{0,\beta}.$$

Den ersten Summanden auf der rechten Seite schätzen wir mit Satz 6.10 und (6.38) durch

$$\|P_{n/2}\tilde{A}_n\varphi - \tilde{A}_n\varphi\|_{0,\beta} \leq C \frac{\ln n}{n^\varepsilon} \|\tilde{A}_n\varphi\|_{0,\beta+\delta} \leq C' \frac{\ln n}{n^\delta} \|\varphi\|_{0,\beta} \quad (6.46)$$

ab. Für den zweiten Summand gilt wegen Satz 6.15

$$\|(\tilde{A}_n - \tilde{A})\varphi\|_{0,\beta} \leq C \frac{\ln n}{n^\delta} \|\varphi\|_{0,\beta}. \quad (6.47)$$

Die Behauptung des Satzes folgt für $P_{n,ung}A_n$ dann aus den Abschätzungen (6.44) und (6.45), die für $P_{n/2}\tilde{A}_n$ aus den Abschätzungen (6.46) und (6.47). Die Normkonvergenz zeigt man dabei wie im Beweis zu Satz 6.15. Die Aussagen für $P_{n/2}\tilde{B}_n$ und $P_{n,ung}B_n$ ergeben sich analog. \square

Folgerung 6.17 *Die Folgen der Operatoren $P_{n,ung}A$, $P_{n,ung}B$, $P_{n/2}\tilde{A}$ und $P_{n/2}\tilde{B}$ konvergieren in der Norm gegen die Operatoren A , B , \tilde{A} bzw. \tilde{B} .*

Beweis: Mit Hilfe der Dreiecksungleichung gilt

$$\|P_{n,ung}A - A\| \leq \|P_{n,ung}(A_n - A)\| + \|P_{n,ung}A_n - A\|.$$

Für den zweiten Term auf der rechten Seite gilt wegen Satz 6.16 $\|P_{n,ung}A_n - A\| \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Für den ersten Term folgt aufgrund von Satz 6.15 und Satz 6.9

$$\|P_{n,ung}(A_n - A)\| \leq C \ln n \|A - A_n\| \leq C' \frac{(\ln n)^2}{n^\varepsilon} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Die Aussagen für die anderen Operatoren folgen analog. \square

Folgerung 6.18 *Die Folgen der Operatoren $P_{n,ung}A_n$, $P_{n,ung}B_n$, $P_{n/2}\tilde{A}_n$ und $P_{n/2}\tilde{B}_n$ konvergieren in der Norm gegen die Operatoren $P_{n,ung}A$, $P_{n,ung}B$, $P_{n/2}\tilde{A}$, $P_{n/2}\tilde{B}$. Insbesondere konvergieren sie somit auch auf den Unterräumen $T_{n,ung} \subset C_{ung}^{1,\alpha}[0, 2\pi]$ und $T_{n/2} \subset C^{0,\beta}[0, 2\pi]$ in der Norm.*

Beweis: Dies folgt wiederum aus Satz 6.15 und Satz 6.9 sowie der Abschätzung

$$\|P_{n,ung}(A_n - A)\| \leq C \ln n \|A - A_n\| \leq C' \frac{(\ln n)^2}{n^\varepsilon} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Die Aussagen für die anderen Operatoren folgen analog. \square

Wie in Satz 2.7 führen wir auf dem Produktraum $C^{0,\beta}[0, 2\pi] \times C_{ung}^{1,\alpha}[0, 2\pi]$ durch

$$\|(\varphi, \psi)\|_\infty := \|(\varphi, \psi)\|_{C^{0,\beta}[0,2\pi] \times C_{ung}^{1,\alpha}[0,2\pi]} := \max\{\|\varphi\|_{0,\beta}, \|\psi\|_{1,\alpha}\}$$

eine Norm ein. Wir sind nun in der Lage Folgerung 6.13 anzuwenden.

Satz 6.19 Für hinreichend große n hat das lineare Gleichungssystem bestehend aus (6.22) und (6.23) für rechte Seiten $f \in C^{0,\beta}[0, 2\pi]$ und $g \in C_{ung}^{1,\alpha}[0, 2\pi]$ eine eindeutige Lösung. Wir bekommen die Fehlerabschätzung

$$\begin{aligned} \|(\varphi, \xi) - (\tilde{\varphi}_n, \tilde{\xi}_n)\|_\infty &\leq C \left(\|(P_{n/2}f_n, P_{n,ung}g_n) - (P_{n/2}f, P_{n,ung}g)\|_\infty \right. \\ &\quad \left. + \|(P_{n/2}\varphi, P_{n,ung}T_0\xi) - (\varphi, T_0\xi)\|_\infty \right) \end{aligned} \quad (6.48)$$

$$\begin{aligned} &+ \|(P_{n/2}(\tilde{A}_n\varphi + \tilde{B}_n\xi), P_{n,ung}(A_n\xi + B_n\varphi)) \\ &\quad - (\tilde{A}\varphi + \tilde{B}\xi, A\xi + B\varphi)\|_\infty, \end{aligned} \quad (6.49)$$

wobei wir mit (φ, ξ) die wahre Lösung des Systems von Integralgleichungen bezeichnen und f_n und g_n die rechten Seiten f und g approximieren.

Beweis: Wir erinnern zunächst daran, daß unsere Ausgangsoperatorgleichung die Form

$$(S + L) \begin{pmatrix} \varphi \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \quad (6.50)$$

hat, wobei $\varphi \in C^{0,\beta}[0, 2\pi]$, $\xi \in C_{ung}^{1,\alpha}[0, 2\pi]$, $f \in C^{0,\beta}[0, 2\pi]$ und $g \in C_{ung}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$ sind, und die Operatoren durch

$$S = \begin{pmatrix} Id_{C^{0,\beta}[0,2\pi]} & 0 \\ 0 & T_0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad L = \begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ A & B \end{pmatrix}$$

gegeben sind. Dabei erfüllt S die Eigenschaft $S(T_{n/2} \times T_{n,ung}) = T_{n/2} \times T_{n,ung}$ (vgl. Lemma 6.3) und S ist beschränkt invertierbar. Der Operator L ist kompakt und $S - L$ ist injektiv, da der Operator

$$(Id_{C[0,2\pi] \times C_{ung}^{1,\alpha}[0,2\pi]} + Q) : C[0, 2\pi] \times C_{ung}^{1,\alpha}[0, 2\pi] \rightarrow C[0, 2\pi] \times C_{ung}^{1,\alpha}[0, 2\pi]$$

injektiv ist nach Satz 5.21 und $C^{0,\beta}[0, 2\pi] \subset C[0, 2\pi]$ ist. Wir definieren nun die Operatoren L_n und L_n^n durch

$$L_n := \begin{pmatrix} P_{n/2}\tilde{A} & P_{n/2}\tilde{B} \\ P_{n,ung}A & P_{n,ung}B \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad L_n^n := \begin{pmatrix} P_{n/2}\tilde{A}_n & P_{n/2}\tilde{B}_n \\ P_{n,ung}A_n & P_{n,ung}B_n \end{pmatrix}.$$

die wegen Folgerung 6.17 bzw. 6.18 die Beziehungen

$$\|L_n - L\|_{C^{0,\beta}[0,2\pi] \times C_{ung}^{1,\alpha}[0,2\pi]} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

$$\|L_n^n - L_n\|_{C^{0,\beta}[0,2\pi] \times C_{ung}^{1,\alpha}[0,2\pi]} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

erfüllen. Durch Anwendung von Folgerung 6.13 erhalten wir nun, daß das lineare Gleichungssystem bestehend aus (6.22) und (6.23) für rechte Seiten $f \in C^{0,\beta}[0, 2\pi]$

und $g \in C_{ung}^{1,\alpha}[0, 2\pi]$ für hinreichend große n lösbar ist. Darüberhinaus bekommen wir die Fehlerabschätzung

$$\begin{aligned} \|(\varphi, \xi) - (\tilde{\varphi}_n, \tilde{\xi}_n)\|_\infty \leq & C \left(\|(P_{n/2}f_n, P_{n,ung}g_n) - (P_{n/2}f, P_{n,ung}g)\|_\infty \right. \\ & + \|(P_{n/2}\varphi, P_{n,ung}T_0\xi) - (\varphi, T_0\xi)\|_\infty \end{aligned} \quad (6.51)$$

$$\begin{aligned} & + \|(P_{n/2}(\tilde{A}_n\varphi + \tilde{B}_n\xi), P_{n,ung}(A_n\xi + B_n\varphi)) \\ & - (\tilde{A}\varphi + \tilde{B}\xi, A\xi + B\varphi)\|_\infty \Big). \end{aligned} \quad (6.52)$$

Dabei bezeichnen f_n und g_n Näherungen für die rechten Seiten f und g . □

6.8 Fehlerabschätzungen

Wir werden in diesem Abschnitt den Fehler $\|(\varphi, \xi) - (\varphi_n, \xi_n)\|_\infty$ untersuchen. Dabei werden wir uns auf den Fall analytischer rechter Seiten und analytischer Parametrisierungen für ∂D und für Γ und beschränken.

Unter diesen Voraussetzungen folgt für die Kerne der auftretenden Integrale, daß auch diese analytisch sind, und mit Hilfe der Riesz-Theorie erhalten wir, daß auch die Lösung (φ, ξ) des Systems von Integralgleichungen analytisch ist, d.h. die Funktionen φ und ξ sind analytisch. Dann benutzen wir die aus Satz 6.19 bekannte Fehlerabschätzung und die folgenden beiden Sätze für die Analyse des Fehlerverhaltens.

Satz 6.20 *Sei $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine analytische und 2π -periodische Funktion. Dann existiert ein Streifen $G := \mathbb{R} \times (-s, s) \subset \mathbb{C}$, $s > 0$, so daß g zu einer holomorphen und 2π -periodischen Funktion $g : G \rightarrow \mathbb{C}$ fortgesetzt werden kann. Der Fehler für die trigonometrische Interpolation kann durch*

$$\|P_n g - g\|_\infty \leq M \frac{\coth \frac{s}{2}}{\sinh ns}$$

abgeschätzt werden, wobei M eine Schranke für die Funktion g auf G angibt.

Beweis: [9], Satz 11.7. □

Satz 6.21 *Sei g wie in Satz 6.20. Dann kann der Fehler*

$$R_T(g) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t) dt - \frac{1}{2n} \sum_{j=0}^{2n-1} g\left(\frac{j\pi}{n}\right)$$

der zusammengesetzten Trapezregel durch

$$|R_T(g)| \leq M(\coth ns - 1)$$

abgeschätzt werden.

Beweis: [9], Satz 12.6. □

Wir können die Abschätzung aus Satz 6.20 auch durch

$$\|P_n g - g\|_\infty \leq C e^{-ns}$$

ausdrücken, wobei C und s positive Konstanten sind, die von g abhängen. Ebenso lassen sich auch entsprechende Fehlerabschätzungen für die Differenz $(P_n f - f)'$ herleiten (siehe [15]). Da die $C^1[0, 2\pi]$ -Norm stärker als die $C^{0,\alpha}[0, 2\pi]$ ist, erhalten wir daraus

$$\|P_n g - g\|_{0,\alpha} \leq C n e^{-ns} \leq \tilde{C} e^{-n\tilde{s}}.$$

Entsprechend können wir auch den Fehler aus Satz 6.21 durch die Abschätzung

$$|R_T(g)| \leq C e^{-2ns}$$

zusammenfassen.

Für den ersten Ausdruck auf der rechten Seite in (6.49) bekommen wir unter der Annahme, daß die Näherungen f_n und g_n exponentiell gegen f bzw. g konvergieren die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|P_{n/2} f - f\|_{0,\beta} &\leq C_1 e^{-\frac{n}{2}s_1} \\ \|P_{n,ung} g - g\|_{0,\alpha} &\leq C_2 e^{-ns_2} \end{aligned}$$

und folglich

$$\|(P_{n/2} f, P_{n,ung} g) - (f, g)\|_\infty \leq \max\{C_1 e^{-\frac{n}{2}s_1}, C_2 e^{-ns_2}\}. \quad (6.53)$$

Dann schätzen wir die Ausdrücke

$$\|P_{n/2} \tilde{A}_n \varphi - \tilde{A} \varphi\|_{0,\beta} \leq \|P_{n/2} \tilde{A}_n \varphi - \tilde{A}_n \varphi\|_{0,\beta} + \|\tilde{A}_n \varphi - \tilde{A} \varphi\|_{0,\beta} \leq C_3 e^{-ns_3}, \quad (6.54)$$

$$\|P_{n/2} \tilde{B}_n \xi - \tilde{B} \xi\|_{0,\beta} \leq \|P_{n/2} \tilde{B}_n \xi - \tilde{B}_n \xi\|_{0,\beta} + \|\tilde{B}_n \xi - \tilde{B} \xi\|_{0,\beta} \leq C_4 e^{-ns_4} \quad (6.55)$$

sowie

$$\|P_{n,ung} A_n \xi - A \xi\|_{0,\alpha} \leq \|P_{n,ung} A_n \xi - P_{n,ung} A \xi\|_{0,\alpha} + \|P_{n,ung} A \xi - A \xi\|_{0,\alpha}, \quad (6.56)$$

$$\|P_{n,ung} B_n \varphi - B \varphi\|_{0,\alpha} \leq \|P_{n,ung} B_n \varphi - P_{n,ung} B \varphi\|_{0,\alpha} + \|P_{n,ung} B \varphi - B \varphi\|_{0,\alpha}. \quad (6.57)$$

ab. Für die zweiten Summanden auf der rechten Seite in (6.56) und (6.57) gilt

$$\begin{aligned}\|P_{n,ung}A\xi - A\xi\|_{0,\alpha} &\leq C_5 e^{-ns_5} \\ \|P_{n,ung}B\varphi - B\varphi\|_{0,\alpha} &\leq C_6 e^{-ns_6}.\end{aligned}$$

Auf die ersten Summanden wenden wir erneut Dreiecksungleichung an und erhalten

$$\begin{aligned}\|P_{n,ung}(A - A_n)\xi\|_{0,\alpha} &\leq \|P_{n,ung}(A - A_n)\xi - (A - A_n)\xi\|_{0,\alpha} + \|(A - A_n)\xi\|_{0,\alpha} \\ &\leq C \frac{\ln n}{n^{\beta-\alpha}} \|(A - A_n)\xi\|_{0,\beta} + \|(A - A_n)\xi\|_{0,\alpha}.\end{aligned}$$

Wenn wir aber die Abschätzungen aus dem Beweis zu Satz 6.15 sehen, erkennen wir, daß auch

$$\|(A_n - A)\xi\|_{0,\alpha} \leq C_7 e^{-ns_7} \quad (6.58)$$

gilt. Ebenso folgt dann

$$\|P_{n,ung}B_n\varphi - P_{n,ung}B\varphi\|_{0,\alpha} \leq C_8 e^{-ns_8}. \quad (6.59)$$

Es verbleibt die Abschätzung

$$\|(P_{n/2}\varphi, P_{n,ung}T_0\xi) - (\varphi, T_0\xi)\| \leq C_9 e^{-ns_9}. \quad (6.60)$$

Damit können wir das folgende Ergebnis festhalten:

Satz 6.22 *Falls die Parametrisierung von ∂D , die Parametrisierung Γ und die rechte Seite (φ, ξ) des Systems von Integralgleichungen analytisch sind, so gilt für die Näherungslösung (φ_n, ξ_n) und die wahre Lösung (φ, ξ) die Fehlerabschätzung*

$$\|(\varphi_n, \xi_n) - (\varphi, \xi)\|_\infty \leq C e^{-ns}.$$

Dabei hängen die Konstanten s und C nur von der rechten Seite (f, g) und den Parametrisierungen z von ∂D und γ von Γ ab.

Beweis: Die Aussage folgt aus den Abschätzungen (6.53)–(6.60) in Verbindung mit der Fehlerabschätzung aus Satz 6.19. □

6.9 Ergebnisse numerischer Experimente

In diesem Abschnitt wollen wir einige numerische Testergebnisse vorstellen. Als Testfunktion verwenden wir dabei

$$f(z) = \Im \left(\sqrt{z^2 - 1} \right), \quad z \in \mathbb{C}. \quad (6.61)$$

Die Funktion f ist holomorph in $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ und stetig in ± 1 . Infolgedessen stellt f eine harmonische Funktion in $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ dar. Wir legen daher um den Schlitz $[-1, 1]$ geeignete Geometrien, um unsere numerischen Experimente durchzuführen. In den Tabellen tragen wir den numerisch errechneten Wert und den Fehler $|u(x, y) - f(x, y)|$ ein. Wir werden deutlich die exponentielle Konvergenz erkennen.

Beispiel 6.23 Wir parametrisieren das Geradenstück durch

$$\Gamma := \{(t, 0) : t \in [-1, 1]\}$$

und die Ellipse durch

$$\partial D := \{(3 \cos t, 2 \sin t) : t \in [0, 2\pi)\}.$$

Offensichtlich sind sowohl Γ als auch ∂D analytisch.

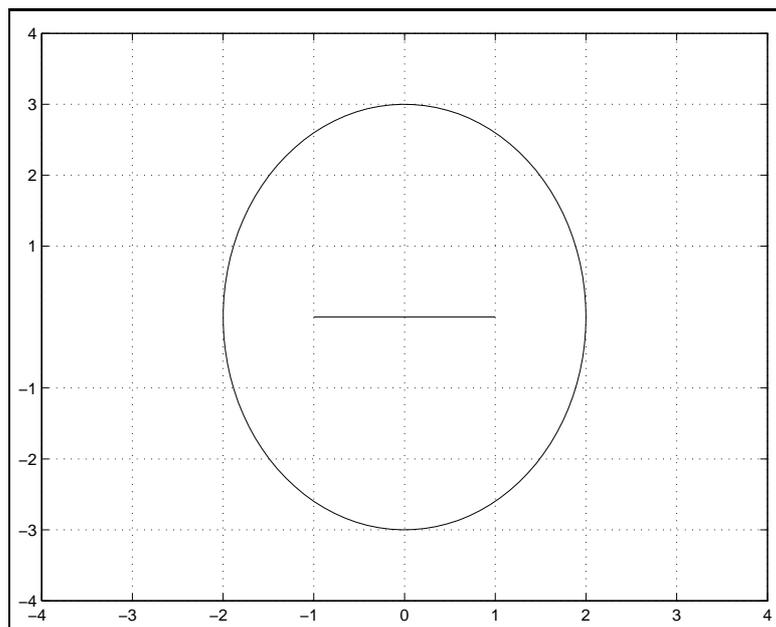


Abbildung 6.1: Ellipse mit Geradenstück

Die Betrachtung der Punkte $(1, 1)$ und $(-1, 1)$ zeigt, daß sich auch das Konvergenzverhalten symmetrisch verhält. Auch für den Punkt $(1, 0.1)$, der nahe an einem Endpunkt des Schlitzes liegt, stellen wir fest, daß die exponentielle früh einsetzt.

| n | Punkt: $(-1, 1)$ | | Punkt: $(0.25, -1)$ | |
|-----|------------------|----------------|---------------------|----------------|
| | u | Fehler | u | Fehler |
| 8 | 1.134760134612 | 0.137259514901 | -1.374101356223 | 0.029194108780 |
| 16 | 1.278636654330 | 0.006617004816 | -1.402402784403 | 0.000892680599 |
| 32 | 1.272034717317 | 0.000015067803 | -1.403293936743 | 0.000001528260 |
| 64 | 1.272019648977 | 0.000000000536 | -1.403295464996 | 0.000000000007 |
| 128 | 1.272019649514 | 0.000000000000 | -1.403295465003 | 0.000000000000 |

Tabelle 6.1: Numerische Beispiele für das Geradenstück mit Ellipse

| n | Punkt: $(1, 0.1)$ | | Punkt: $(1, 1)$ | |
|-----|-------------------|----------------|-----------------|----------------|
| | u | Fehler | u | Fehler |
| 8 | 0.282161475107 | 0.042068261302 | 1.134760134612 | 0.137259514901 |
| 16 | 0.320459696991 | 0.003770039418 | 1.278636654330 | 0.006617004816 |
| 32 | 0.324214354117 | 0.000015382292 | 1.272034717317 | 0.000015067803 |
| 64 | 0.324229736335 | 0.000000000074 | 1.272019648977 | 0.000000000536 |
| 128 | 0.324229736409 | 0.000000000000 | 1.272019649514 | 0.000000000000 |

Tabelle 6.2: Numerische Beispiele für das Geradenstück mit Ellipse

Beispiel 6.24 Wir parametrisieren das Geradenstück durch

$$\Gamma := \{(t, 0) : t \in [-1, 1]\}$$

und den Drachen durch

$$\partial D := \{(2(\cos t + 0.65(\cos 2t - 1)), 1.5 \sin t) : t \in [0, 2\pi)\}.$$

Auch der Rand des Drachen ist offensichtlich analytisch parametrisiert.

| n | Punkt: $(-0.5, 0.5)$ | | Punkt: $(-2.5, 1)$ | |
|-----|----------------------|----------------|--------------------|----------------|
| | u | Fehler | u | Fehler |
| 16 | 0.943312227424 | 0.085773286210 | 0.896404173048 | 0.178817286513 |
| 32 | 1.012321556673 | 0.016763956962 | 0.975275762537 | 0.099945697024 |
| 64 | 1.029137266145 | 0.000051752509 | 1.081761112609 | 0.006539653047 |
| 128 | 1.029085512787 | 0.000000000848 | 1.074734864739 | 0.000486594822 |
| 256 | 1.029085513635 | 0.000000000000 | 1.075221723395 | 0.000000263834 |
| 512 | 1.029085513635 | 0.000000000000 | 1.075221459561 | 0.000000000000 |

Tabelle 6.3: Numerische Beispiele für das Geradenstück und den Drachen

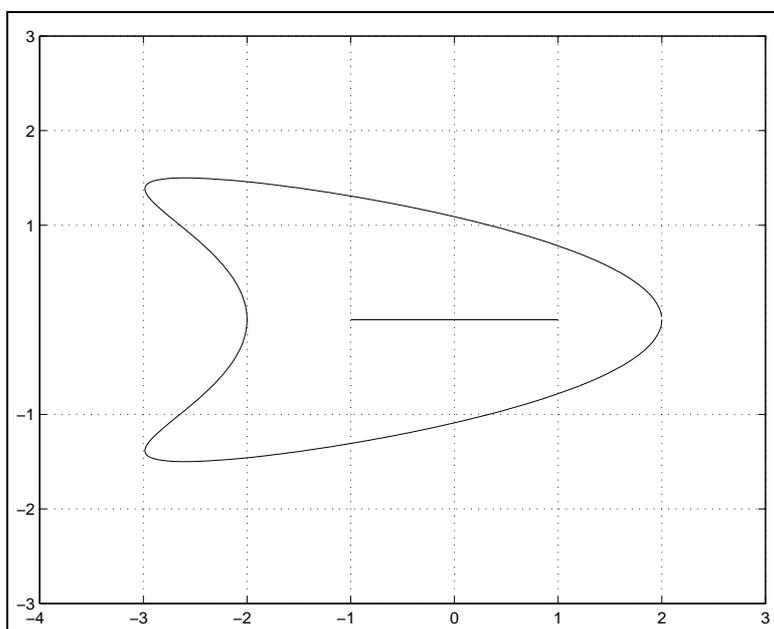


Abbildung 6.2: Drache mit Geradenstück

| n | Punkt: (1, 0.3) | | Punkt: (-1, -0.5) | |
|-----|-----------------|----------------|-------------------|----------------|
| | u | Fehler | u | Fehler |
| 16 | 0.399685083626 | 0.190532017313 | -0.655613902332 | 0.144628687887 |
| 32 | 0.562861082992 | 0.027356017947 | -0.803989757793 | 0.003747167573 |
| 64 | 0.590387280122 | 0.000170179182 | -0.800233883314 | 0.000008706905 |
| 128 | 0.590217050865 | 0.000000050074 | -0.800242590193 | 0.000000000026 |
| 256 | 0.590217100940 | 0.000000000000 | -0.800242590219 | 0.000000000000 |

Tabelle 6.4: Numerische Beispiele für das Geradenstück und den Drachen

Aus den Tabellen 6.3 und 6.4 lesen wir wiederum die exponentielle Konvergenz ab. Am Punkt $(-2.5, 1)$, der nah an der äußeren Peripherie des Drachens liegt, sehen wir, daß die rasche Konvergenz erst bei einer relativ großen Anzahl von Stützstellen einsetzt.

Die folgenden beiden Beispiele dienen noch einmal zur Verifikation der exponentiellen Konvergenz bei anderen Geometrien des Bogens. Für diese Geometrien können wir jedoch keine geschlossene Lösung angeben. Wir wählen hierbei als rechte Seiten in den Gleichungen (6.23) bzw. (6.22) $f(x) = -2(x_1^2 - x_2^2)$ bzw. $g(t) = \sin t$.

Beispiel 6.25 Wir wählen dieses Mal als Geometrie für den Schlitz einen Halbkreis und als Rand des Gebietes wiederum eine Ellipse. Die Parametrisierung des

Halbkreis ist gegeben durch

$$\Gamma := \left\{ \left(\cos \frac{\pi}{2} t, \sin \frac{\pi}{2} t \right) : t \in [-1, 1] \right\}$$

und die der Ellipse durch

$$\partial D := \{(2 \cos t, 5 \sin t) : t \in [0, 2\pi)\}.$$

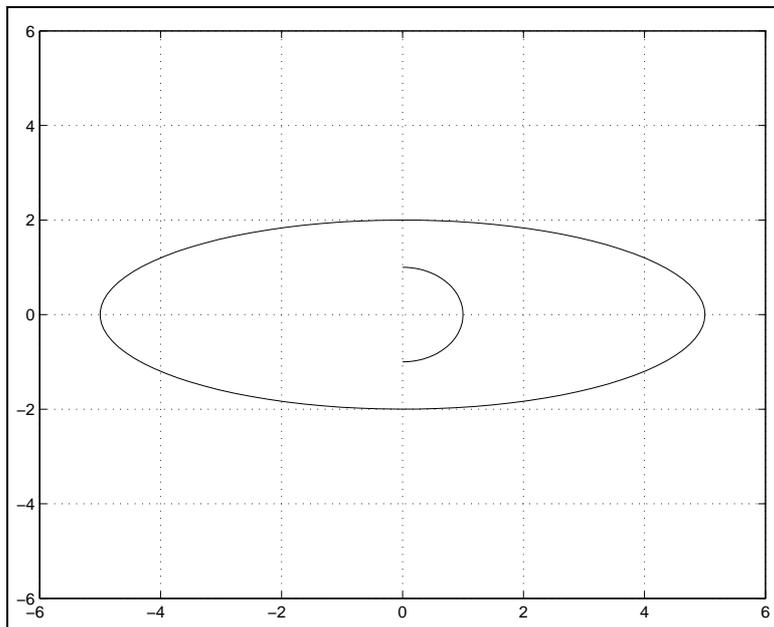


Abbildung 6.3: Ellipse mit Halbkreis

| n | Punkt: (0, 0) | Punkt: (4, 0) | Punkt: (-3, 1) |
|-----|---------------|---------------|----------------|
| 8 | -3.2382999394 | 13.8604614199 | 10.3507002814 |
| 16 | -1.2513069654 | 16.0501179196 | 7.5153748279 |
| 32 | -1.0564115803 | 16.0198349720 | 6.8869567453 |
| 64 | -1.0522849802 | 16.0199060964 | 6.9469353675 |
| 128 | -1.0522256160 | 16.0199068585 | 6.9462957016 |
| 256 | -1.0522256163 | 16.0199068585 | 6.9462957012 |

Tabelle 6.5: Numerische Beispiele für die Ellipse und den Halbkreis

Tabelle 6.5 zeigt auch bei einer anderen Geometrie des Schlitzes deutlich die exponentielle Konvergenz.

Beispiel 6.26 Als letztes Beispiel betrachten wir noch einmal eine Ellipse, dieses Mal wählen wir allerdings als Schlitz einen nach rechts geöffneten Zweig einer Parabel. Wir parametrisieren die Parabel durch

$$\Gamma := \{(t^4, t) : t \in [-1, 1]\}$$

und die Ellipse wiederum durch

$$\partial D := \{(2 \cos t, 5 \sin t) : t \in [0, 2\pi)\}$$

Wie bei den Ergebnissen zuvor werden wir auch hier wieder die erwartete exponentielle Konvergenz des Verfahrens feststellen. Tabelle 6.6 zeigt die Ergebnisse.

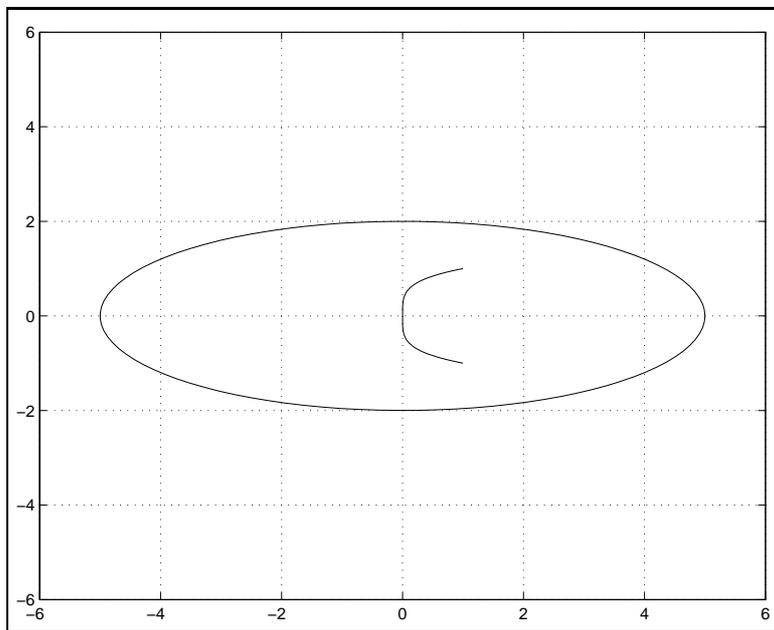


Abbildung 6.4: Ellipse mit Parabel

| n | Punkt: (1, 0) | Punkt: (4, 0) | Punkt:(-3, 1) |
|-----|---------------|---------------|---------------|
| 8 | 2.4339909254 | 13.8617162114 | 11.4158321767 |
| 16 | 1.6560478170 | 16.0491858098 | 8.5723384511 |
| 32 | 1.5239958539 | 16.0224469626 | 7.9418076767 |
| 64 | 1.5252088058 | 16.0225621636 | 8.0016808825 |
| 128 | 1.5251969390 | 16.0225626715 | 8.0010428959 |
| 256 | 1.5251969301 | 16.0225626715 | 8.0010428957 |

Tabelle 6.6: Numerische Beispiele für die Ellipse und die Parabel

6.10 Ausblick

Wir weisen zunächst daraufhin, daß es möglich ist, die Invertierbarkeit des Operators $T_0 : C_{ung}^{k+1,\alpha}[0, 2\pi] \rightarrow C_{ung}^{k,\alpha}[0, 2\pi]$, $k \in \mathbb{N}$, nachzuweisen (vgl. [13]). Darauf aufbauend kann man eine exaktere Fehleranalyse aufbauen als wir es in dieser Arbeit getan haben. In [15] wird zum Beispiel ein solcher Weg eingeschlagen.

Außerdem läßt sich die Lösungstheorie aus Kapitel 5 auf Systeme von offenen, paarweise disjunkten Bögen zu übertragen. Seien Γ_k , $k = 1, \dots, n$ die entsprechenden Bögen. Mit $\{x_{-k}^*, x_k^*\}$ bezeichnen wir die Endpunkte des k -ten Bogens. Dann setzen wir mit einem Doppelschichtpotential über ∂D und einem Doppelschichtpotential über $\Gamma := \cup_{k=1}^n \Gamma_k$ mit einer Dichte der Form

$$\psi(x_{\pm k}^*) = 0, \quad \frac{d(\psi \circ \gamma_k)(s)}{ds} = \frac{\tilde{\psi}_k(\arccos(s))}{\sqrt{1-s^2}}, \quad s \in (-1, 1), \quad \tilde{\psi}_k \in C^{0,\alpha}[0, \pi]$$

für $k = 1, \dots, n$ an. Die Sprungbeziehungen führen dann zu einem entsprechenden Integralgleichungssystem, dessen Hauptbestandteil der Operator T_0 ist. Mit Hilfe der Riesz-Theorie können wir dann auf die eindeutige Lösbarkeit des Systems schließen. Mit einer ähnlichen Idee ist es auch möglich, m einfach zusammenhängende Gebiete, die paarweise disjunkt sind und jeweils n_m paarweise disjunkte Bögen enthalten, zu betrachten.

Darüberhinaus kann als Erweiterung dieses Themas auch an das inverse Problem gedacht werden. Eine denkbare Möglichkeit dafür ist die Bestimmung der Randwerte auf dem bekannten Bogen, eine weitere Möglichkeit die Bestimmung des unbekanntes Randes.

Danksagung

Vor allem möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Rainer Kreß für die Aufgabenstellung und die hervorragende Betreuung der Arbeit bedanken. Seine Anregungen und Ideen waren eine sehr gute Unterstützung und Hilfe.

Mein weiterer Dank gilt meinem Freund Harald Heese. In langen Nachtsitzungen und Diskussionsionen konnte ich mit ihm Fragen klären und mir Anregungen holen, was wesentlich zur Entstehung dieser Arbeit beitrug.

Ferner möchte ich mich auch bei Herrn Dr. Hähner bedanken, der mir den Weg zur numerischen Mathematik öffnete und dessen Begeisterung dafür mein Interesse daran wachsen ließ.

Darüberhinaus möchte ich auch allen danken, die ebenfalls zur Entstehung dieser Arbeit beigetragen haben und die ich hier nicht mit Namen erwähnt habe.

Literaturverzeichnis

- [1] Colton, D. und Kress, R. (1992) *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York
- [2] Colton, D. und Kress, R. (1983) *Integral equation methods in scattering theory*, Wiley Interscience Publication, New York
- [3] Forster, O. (1992) *Analysis 3*, Vieweg Verlag, Braunschweig
- [4] Hackbusch, W. (1997) *Integralgleichungen: Theorie und Numerik*, Teubner Verlag, Stuttgart
- [5] Heinz, E. (1987) *Differential- und Integralrechnung III*, Skript zur Vorlesung im Wintersemester 1986/87, Göttingen
- [6] Heuser, H. (1994) *Lehrbuch der Analysis Teil 1*, Teubner Verlag, Stuttgart
- [7] Heuser, H. (1995) *Lehrbuch der Analysis Teil 2*, Teubner Verlag, Stuttgart
- [8] Heuser, H. (1992) *Funktionalanalysis*, Teubner Verlag, Stuttgart
- [9] Kress, R. (1999) *Linear integral equations*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York
- [10] Kress, R. (2001) *Funktionalanalysis*, Vorlesungsskript Wintersemester 2000/2001, Göttingen
- [11] Kress, R. (1998) *Numerical Analysis*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York
- [12] Martensen, E. (1968) *Potentialtheorie*, Teubner Verlag, Stuttgart
- [13] Mönch, L. (1996) *Die numerische Lösung des inversen akustischen Streuproblems am schallharten Kurvenbogen* Dissertation, Göttingen

- [14] Mönch, L. (1996) *On the numerical solution of the direct scattering problem for an open sound-hard arc*, Journal of Computational and Applied Mathematics, 343-356
- [15] Mönch, L. (1994) *Ein Quadraturformelverfahren für eine hypersinguläre Integralgleichung bei der Helmholtzgleichung im \mathbb{R}^2* , Diplomarbeit, Göttingen
- [16] Natanson, I.P. (1955) *Konstruktive Funktionentheorie*, Akademie-Verlag, Berlin
- [17] Prössdorf, S. und Mikhlin, S. (1986) *Singular integral operators*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York
- [18] Prössdorf, S. und Silbermann, B. (1991) *Numerical Analysis for integral and related operator equations*, Birkhäuser Verlag, Basel Boston Berlin
- [19] Schormann, Ch. (1996) *Newton-Verfahren für ein inverses Transmissionsproblem bei elektromagnetischen Wellen*, Diplomarbeit, Göttingen
- [20] Werner, J. (1992) *Numerische Mathematik 1*, Vieweg, Braunschweig
- [21] Zygmund, A. (1977) *Trigonometric Series*, Vol I,II, Cambridge University Press