

Die Faktorisierungsmethode für das inverse Dirichlet-Problem für eine lokal gestörte Halbebene

Diplomarbeit

vorgelegt von
Isabelle Schneider
aus
Prudnik (Neustadt/OS)

angefertigt im
Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
der Georg-August-Universität zu Göttingen
2003

Meinem Vater

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Problemstellung	3
2 Grundlagen	7
2.1 Aus der Funktionalanalysis	7
2.2 Über Integraloperatoren	12
2.3 Aus der Potentialtheorie	15
3 Äußeres Dirichlet-Problem	19
3.1 Eindeutigkeit	19
3.2 Potentiale und Sprungbeziehungen	20
3.3 Randwertproblem: Existenz	23
4 Numerik des direkten Problems	31
4.1 Quadraturformel	31
4.2 Anwendung und Testbeispiele	33
5 Inverses Problem: Gebietsrekonstruktion	39
5.1 Eindeutigkeit	39
5.2 Der Hilbertraum $L_0^2(\partial D)$	40
5.3 Faktorisierung des Operators W	47
5.4 Gebietsrekonstruktion	49

6	Numerik des inversen Problems	55
6.1	Eigenwertberechnung	55
6.2	Visualisierung	56
6.3	Fehlerquelle Eigenwerte	59
6.4	Abschneideparameter	60
6.5	Schlusswort	62
	Programm	65

Abbildungsverzeichnis

1.1	Gestörte Halbebene	4
3.1	Verhalten des Randes in den Ecken	27
4.1	Ellipse	35
4.2	Zitrone	35
4.3	Erdnuss	35
4.4	Tropfen	35
4.5	Punkteverteilung am Beispiel der Zitrone bei 10 Punkten	37
6.1	Zitrone: Rekonstruktion mit allen Eigenwerten	58
6.2	Tropfen: Rekonstruktion mit allen Eigenwerten	58
6.3	Zitrone: Rek. mit 11 von 64 Eigenwerten	58
6.4	Tropfen: Rek. mit 17 von 64 Eigenwerten	58
6.5	Eigenwerte von $W^{(m)}$: Zitrone	59
6.6	Eigenwerte von $W^{(m)}$: Tropfen	59
6.7	Tropfen: $\mu_1 = 3, \mu_2 = -1, \mu_3 = -3$	61
6.8	Erdnuss mit Fehler an Ecken	62

Einleitung

Die Faktorisierungsmethode geht ursprünglich auf eine Idee von Colton und Kirsch [2] zurück. Ihr Ziel war es, ein Verfahren zur Lösung inverser Streuprobleme in Resonanzgebieten zu entwickeln, das keine nichtlinearen Optimierungsmethoden nutzt und relativ unabhängig von geometrischen und physikalischen Eigenschaften des Streugebietes ist. In [7] stellte Kirsch eine Weiterentwicklung der Idee für inverse Probleme zeitharmonischer Wellen vor. Er leitet eine Faktorisierung des Fernfeldoperators F in der Form GS^*G her und zeigt, dass die Bildräume von $\sqrt{|F|}$ und G übereinstimmen. Damit ist es ihm möglich eine explizite Charakterisierung des Streugebietes, nur unter Ausnutzung der Spektraldaten des Fernfeldoperators F , zu geben. Hähner übertrug dieses Verfahren auf den Fall der Laplace-Gleichung im \mathbb{R}^3 (siehe [5]). Kurze Zeit später wandte Kress die Methode schließlich auf das inverse Dirichlet-Problem zur Laplace-Gleichung im \mathbb{R}^2 an. In all diesen Ausführungen wurde eine ausreichende Randglätte zur Vereinfachung des Problems angenommen.

In dieser Arbeit wird ebenfalls das inverse Dirichlet-Problem zur Laplace-Gleichung im \mathbb{R}^2 behandelt, jedoch mit abgeschwächter Randglätte. Gesucht ist die lokale Störung einer Halbebene, die Ecken aufweisen kann. Dazu betrachten wir den Integraloperator W , dessen Kern die Lösung des äußeren Dirichlet-Problems bezüglich des gesuchten Gebietes ist. Mit Hilfe der Spektraldaten von W gelingt uns eine Charakterisierung der lokalen Störung.

Die Arbeit beginnt mit der konkreten Formulierung des Problems. Wir stellen schnell fest, dass sich das Problem auf der gestörten Halbebene in ein äquivalentes Problem für ein beschränktes Gebiet mit Ecken überführen lässt. Diese Umformulierung erlaubt es uns, teilweise auf die klassische Theorie eines beschränkten und C^2 -glatt berandeten Gebietes zurückzugreifen. Dabei muss natürlich immer beachtet werden, dass der Rand des vorliegenden Gebietes nur noch stückweise C^2 -glatt ist und wir an den Ecken besondere Vorsicht walten lassen müssen. Bevor wir dann mit dem direkten Problem beginnen, stellen wir die benötigten Grundlagen bereit.

Da eine Untersuchung des inversen Problems immer gründliche Kenntnisse des di-

rekten Problems voraussetzt, werden wir uns zu Beginn damit beschäftigen und die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung eines äußeren Dirichlet-Problems für ein Gebiet mit Ecken zeigen. Der Eindeutigkeitsbeweis verläuft analog zum klassischen Fall mit C^2 -glattem Rand. Der Existenzbeweis kann für ein Gebiet mit Ecken nicht ohne weiteres adaptiert werden. Trotz eines ähnlichen Lösungsansatzes mit einem Doppelschichtpotential müssen wir mehr Aufwand betreiben, um ans Ziel zu gelangen. Durch die Abschwächung der Randglätte ist der Kern des Doppelschichtpotentials nicht mehr stetig, sondern singulär. Somit erhalten wir nur noch einen beschränkten und keinen kompakten Operator mehr. Im Falle eines kompakten Operators kann an dieser Stelle die Riesz-Theorie angewandt werden, um die Existenz einer Lösung der Integralgleichung 2. Art zu zeigen. Diese Möglichkeit scheint vorerst zu entfallen. Mit einer Idee von Radon (siehe Kress [10] Abschnitt 6.5) schaffen wir es jedoch, eine geeignete Zerlegung dieses Operators zu konstruieren. Sie setzt sich aus einem kompakten und einem mit Norm kleiner als eins beschränkten Operator zusammen. Auf Grund dieser Zerlegung kann die Riesz-Theorie schließlich doch angewandt werden.

Da wir Testdaten für das inverse Problem benötigen, stellen wir in Kapitel 4 eine geeignete Methode zur numerischen Lösung des Problems vor, und überprüfen das Konvergenzverhalten des Verfahrens für verschiedene Testgebiete.

Das Kapitel 5 behandelt das schlechtgestellte Problem der Gebietsrekonstruktion. Ausgangspunkt ist die Lösung des äußeren Dirichlet-Problems mit Randwerten $\Psi(\cdot, z)$ auf dem Rand des gesuchten Gebietes D und z aus dem Äusseren von \bar{D} . Wir definieren W als den Integraloperator über ∂B mit dieser Lösung als Kernfunktion. Mit B bezeichnen wir einen Kreis, der \bar{D} im Inneren enthält. Dementsprechend ist ∂B der Rand des Kreises. Unter Ausnutzung der Faktorisierung $W = ASA^*$, mit dem Einfachschichtpotentialoperator S und einem geeigneten Operator A , gelingt es uns den Bildraum von A mit den Spektraldaten von W zu beschreiben. Nun liegt $\Psi(\cdot, z)$ eingeschränkt auf den Kreisrand genau dann im Bildraum von A , wenn z in D enthalten ist. Das ermöglicht uns, ein Kriterium zur Charakterisierung des gesuchten Gebietes zu konstruieren.

Im Kapitel 6 erfolgt die Implementierung des inversen Problems. Unter Verwendung der im direkten Problem erzeugten „künstlichen“ Daten werden wir uns zum Schluss einige Testbeispiele ansehen. Das letzte Kapitel enthält schließlich den Quellcode des implementierten inversen Verfahrens, mit dem alle Bilder des vorhergehenden Kapitels erzeugt wurden.

Kapitel 1

Problemstellung

Im ersten Schritt definieren wir den Begriff der gestörten Halbebene und erklären den Zusammenhang zum bereits in der Einleitung erwähnten Gebiet mit Ecken. Aus der Formulierung des äußeren Dirichlet-Problems für dieses Gebiet erhalten wir eine Formulierung des äquivalenten Problems für die gestörte Halbebene. Auf dieser Grundlage basierend können wir das inverse Problem vorstellen.

In diesem Kapitel verwenden wir bereits Begriffe und Bezeichnungen, die erst im nächsten Kapitel, den Grundlagen, eingeführt werden. Das Vorziehen der Problemstellung soll zum besseren Verständnis der Zielsetzung führen.

Sei Γ eine glatte Kurve in der oberen Halbebene $\mathbb{R}_+^2 := \{(x_1, x_2) : x_2 \geq 0\}$, so dass nur die beiden Endpunkte $\xi_1 = (a, 0)$ und $\xi_2 = (b, 0)$ mit $a < b$ auf dem Rand $\partial\mathbb{R}_+^2$ liegen. In der Nähe der Endpunkte verhalte sich Γ wie eine gerade Linie, die nicht parallel ist zur x_1 -Achse. Damit schließen wir insbesondere Nullwinkel aus. Bezeichne $\Gamma_- := \{(x_1, 0) : -\infty < x_1 < a\}$, $\Gamma_+ := \{(x_1, 0) : b < x_1 < \infty\}$ und D_e das unbeschränkte Gebiet oberhalb von $\Gamma_e := \Gamma_- \cup \Gamma \cup \Gamma_+$. Für $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ sei $x^\rho = (x_1, -x_2)$ der an der x_1 -Achse reflektierte Punkt. Ebenso wie wir einen einzelnen Punkt spiegeln, spiegeln wir eine ganze Kurve und bezeichnen das von Γ und ihrer Spiegelung Γ^ρ eingeschlossene Gebiet mit D . Die Abbildung 1.1 liefert eine anschauliche Übersicht der Bezeichnungen.

In dieser Arbeit betrachten wir ein äußeres Dirichlet-Problem zur Laplace-Gleichung. Der Ausgangspunkt ist die Suche nach einer beschränkten, harmonischen Funktion $\tilde{u} = \tilde{u}(\cdot, z)$ in D_e , welche die Randbedingung

$$\tilde{u} = -\Phi(\cdot, z) + \Phi(\cdot, z^\rho), \quad z \in D_e \tag{1.1}$$

auf Γ_e erfüllt. Dabei bezeichne Φ die Grundlösung zur Laplace-Gleichung. Durch

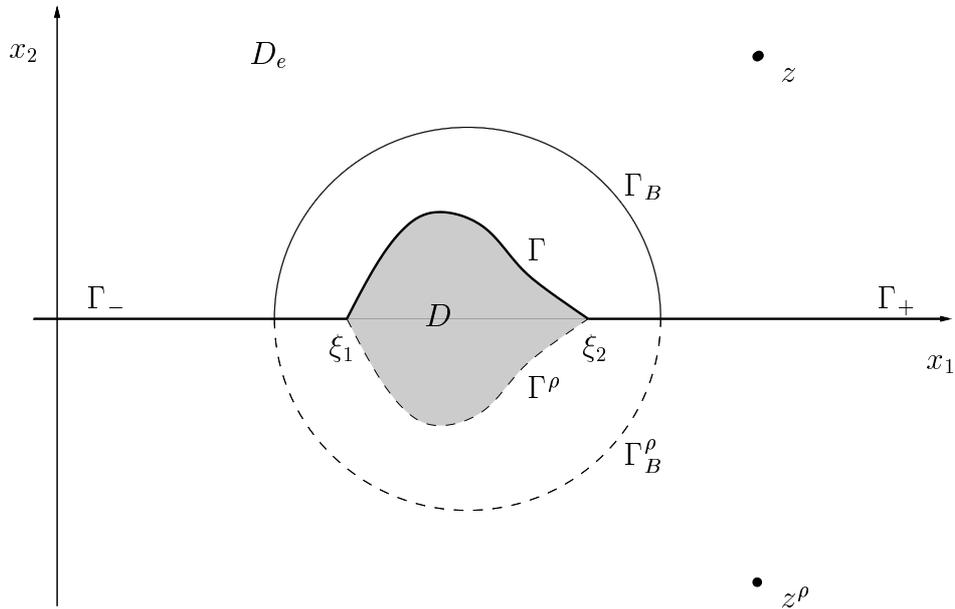


Abb. 1.1: Gestörte Halbebene

die Kombination der Grundlösungen für zwei spiegelsymmetrische Punkte z und z^ρ erreichen wir, dass die Randwerte auf der gesamten x_1 -Achse verschwinden. Auf der Kurve $\Gamma \cup \Gamma^\rho$ ergibt diese Kombination eine ungerade Funktion, die in den Eckpunkten verschwindet. Diese Funktion stammt aus dem Raum:

$$C_0(\partial D) := \{f \in C(\partial D) : f(x^\rho) = -f(x) \text{ für } x \in \Gamma\}.$$

Das obige Randwertproblem kann auf Grund von Symmetrieüberlegungen auf ein äußeres Dirichlet-Problem für das Gebiet D ausgeweitet werden. Denn löst die beschränkte harmonische Funktion u das äußere Dirichlet-Problem für das Gebiet $\mathbb{R}^2 \setminus D$, d.h.

$$\begin{aligned} u &\in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}) \cap C(\mathbb{R}^2 \setminus D), \\ \Delta u &= 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}, \\ u &= f \quad \text{auf } \partial D, \end{aligned} \tag{1.2}$$

mit $f \in C_0(\partial D)$, dann ist $\tilde{u} := u|_{D_e}$ ebenfalls eine beschränkte harmonische Funktion und die Lösung des Problems:

$$\tilde{u} \in C^2(D_e) \cap C(\bar{D}_e),$$

$$\begin{aligned}\Delta \tilde{u} &= 0 && \text{in } D_e, \\ \tilde{u} &= \tilde{f} && \text{auf } \Gamma_e,\end{aligned}\tag{1.3}$$

mit $\tilde{f} \in C_0(\Gamma_e) := \{f \in C(\Gamma) : f = 0 \text{ auf } \Gamma_- \text{ und } \Gamma_+\}$. Dass die Funktion \tilde{u} die gewünschte Regularität vorweisen kann, ist schnell einzusehen. Auf Grund der Symmetrien der Randkurve und der Randwerte gilt offenbar $u(x) = -u(x^\rho)$ für $x \in \partial D$. Wenn wir die eindeutige Lösbarkeit des Äußeren Dirichletproblems annehmen, folgt hieraus $u(x) = -u(x^\rho)$ für $x \in \mathbb{R}^2 \setminus D$. Deshalb ist $u(x) = -u(x^\rho) = 0$ für $x = (x_1, 0) \in \mathbb{R}^2 \setminus D$, was wir in den Randwerten $\tilde{f} \in C_0(\Gamma_e)$ wiederfinden. Somit ist \tilde{u} die eindeutig bestimmte Lösung des Problems (1.3).

Gehen wir von einer ungeraden Fortsetzung der Randwerte von Γ auf Γ^ρ aus, so genügt bereits eine Vorgabe der Randwerte auf Γ anstatt auf ∂D , um das Problem (1.2) eindeutig festzulegen. Wir können also annehmen, dass die Randwerte aus dem Raum

$$C_0(\Gamma) := \{f|_\Gamma : f \in C_0(\partial D)\}$$

sind. Der erste Teil dieser Arbeit behandelt den Eindeutigkeits- und Existenzbeweis für das Problem (1.2).

Beim inversen Randwertproblem ist die Störung der oberen Halbebene, die wir als Einschluss zwischen der Kurve Γ und der x_1 -Achse beschreiben können, zu rekonstruieren. Basierend auf der Lösung des äußeren Dirichlet Problems zu den Randwerten $-\Phi(\cdot, z) + \Phi(\cdot, z^\rho)$ auf Γ und $z \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$, wird die Faktorisierungsmethode nach Kirsch auf dieses Problem angewandt.

Kapitel 2

Grundlagen

Zum besseren Verständnis dieser Arbeit ist ein gewisses Grundwissen erforderlich, das wir hier meist ohne Beweise bereitstellen. Diese können vorwiegend in [10] nachgelesen werden. Wir führen zuerst einige wichtige Sätze aus der Funktionalanalysis ein, gehen dann zu Integraloperatoren über und widmen uns schließlich der Potentialtheorie.

2.1 Aus der Funktionalanalysis

Dieser Abschnitt beinhaltet Grundlagen aus der Funktionalanalysis, die sich zum Beispiel in [6] und [19] vertiefen lassen. Nach der Einführung kompakter Operatoren zitieren wir ein entscheidendes Resultat der Riesz-Theorie über die Lösbarkeit von Integralgleichungen zweiter Art. Hiernach werden als Vorbereitung des Spektralsatzes einige Grundlagen zu kompakten, adjungierten und selbstadjungierten Operatoren bereitgestellt. Zum Schluss stellen wir den Satz von Lax und einen Fortsetzungssatz vor, der eine eindeutige Fortsetzung eines Operators von einem dichten Unterraum eines normierten Raumes in dessen Abschluss gewährleistet.

An Stelle einer Basis benötigen wir in unendlich dimensionalen Hilbert- oder Prähilberträumen den Begriff des vollständigen Orthonormalsystems. In diesen Räumen kann jedes Element als eine konvergente Reihe dargestellt werden.

Satz 2.1 *Sei $\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ ein orthonormales System in einem Prähilbertraum X . Dann sind die folgenden Aussagen (i)-(iii) äquivalent:*

(i) $\text{span}\{u_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist dicht in X .

(ii) Jedes $\varphi \in X$ kann in eine Fourierreihe entwickelt werden

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi, u_n) u_n.$$

(iii) Für jedes $\varphi \in X$ gilt die Parsevalsche Gleichung

$$\|\varphi\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(\varphi, u_n)|^2.$$

(iv) Aus (i)-(iii) folgt: $\varphi = 0$ ist das einzige Element in X , für das $(\varphi, u_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Die Aussagen (i)-(iv) sind äquivalent, falls X ein Hilbertraum ist. Ein orthonormales System mit der Eigenschaft (i) wird vollständig genannt.

Es existieren mehrere Möglichkeiten zum Nachweis der Kompaktheit eines linearen Operators. Zwei davon stellen wir hier vor.

Satz 2.2 Sei X ein normierter Raum und Y ein Banachraum. Die Folge $A_n : X \rightarrow Y$ kompakter linearer Operatoren konvergiert in der Operatornorm gegen einen linearen Operator $A : X \rightarrow Y$, d.h. $\|A_n - A\| \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Dann ist A kompakt.

Satz 2.3 Sei $A : X \rightarrow Y$ ein beschränkter linearer Operator mit endlich dimensionalem Bild $A(X)$. Dann ist A kompakt.

Das folgende fundamentale Resultat der Riesz-Theorie erleichtert den Existenzbeweis der Lösung einer Integralgleichung zweiter Art $(I - A)$. Dabei wird vorausgesetzt, dass A ein kompakter Operator ist. Es genügt entweder die Injektivität oder die Surjektivität von $(I - A)$ zu zeigen, denn bereits daraus kann die Existenz einer beschränkten Inversen gefolgert werden.

Satz 2.4 Sei $A : X \rightarrow X$ ein kompakter, linearer Operator auf einem normierten Raum X . Dann ist $I - A$ injektiv genau dann, wenn es surjektiv ist. Ist $I - A$ injektiv (und damit bijektiv), so ist der inverse Operator $(I - A)^{-1} : X \rightarrow X$ beschränkt.

Eine Verallgemeinerung dieser Aussage ist das folgende Korollar, das eine entscheidende Rolle beim Existenzbeweis zum äußeren Dirichlet-Problem spielt.

Korollar 2.5 *Der Satz 2.4 bleibt gültig, auch wenn $I - A$ durch $S - A$ ersetzt wird, wobei $S : X \rightarrow Y$ ein beschränkter linearer Operator mit einer beschränkten Inversen $S^{-1} : Y \rightarrow X$ ist und $A : X \rightarrow Y$ ein kompakter linearer Operator von einem normierten Raum X in einen normierten Raum Y .*

Für das inverse Problem werden wir adjungierte Operatoren benötigen. Bevor wir diese einführen, stellen wir das Konzept der Dualsysteme vor.

Definition 2.6 *Zwei normierte Räume X und Y , ausgestattet mit einer nicht entarteten Bilinearform $(\cdot, \cdot) : X \times Y \rightarrow \mathbb{C}$, heißen ein Dualsystem und werden mit (X, Y) bezeichnet.*

Definition 2.7 *Seien $(X_1, Y_1)_1$ und $(X_2, Y_2)_2$ zwei Dualsysteme. Die Operatoren $A : X_1 \rightarrow X_2$ und $B : Y_2 \rightarrow Y_1$ nennt man adjungiert (bezüglich der Dualsysteme), wenn*

$$(A\varphi, \psi)_2 = (\varphi, B\psi)_1$$

für alle $\varphi \in X_1$ und $\psi \in Y_2$.

Wir werden die beiden Dualsysteme ab jetzt immer mit dem gleichen Symbol (\cdot, \cdot) bezeichnen.

Definition 2.8 *Sei X ein normierter Raum und $A : X \rightarrow X$ ein beschränkter linearer Operator.*

(i) *A heißt selbstadjungiert, falls $A = A^*$ gilt, d.h.*

$$(A\varphi, \psi) = (\varphi, A\psi)$$

für alle $\varphi, \psi \in X$.

(ii) *A heißt positiv definit, falls A selbstadjungiert ist und die Bedingung $(A\varphi, \varphi) > 0$ für alle $\varphi \in X$ erfüllt.*

Ab jetzt bezeichnen wir mit X und Y immer zwei Hilberträume, sofern keine andere Definition gegeben wird.

Der adjungierte Operator erbt einige Eigenschaften des ursprünglichen Operators. Eine davon ist die Kompaktheit.

Satz 2.9 Sei $A : X \rightarrow Y$ ein kompakter linearer Operator, dann ist der adjungierte Operator $A^* : X \rightarrow Y$ ebenfalls kompakt.

Ein wichtiger Zusammenhang zwischen dem Bildraum eines Operators und dem Nullraum des Adjungierten und umgekehrt, wird im nächsten Satz beschrieben.

Satz 2.10 Für einen beschränkten linearen Operator gilt

$$A(X)^\perp = N(A^*) \quad \text{und} \quad N(A^*)^\perp = \overline{A(X)}.$$

Die Faktorisierungsmethode basiert auf der Spektralzerlegung eines geeigneten Operators. Wann eine solche Zerlegung möglich ist und wie sie aussieht, sehen wir im folgenden Satz.

Satz 2.11 (Spektralsatz) Sei $A : X \rightarrow X$ ein selbstadjungierter kompakter Operator ($A \neq 0$). Dann sind alle Eigenwerte von A reell. A hat mindestens einen von Null verschiedenen Eigenwert und höchstens eine abzählbare Menge von Eigenwerten, die bei Null ihren Häufungspunkt besitzen. Alle Eigenräume $N(\lambda I - A)$ zu von Null verschiedenen Eigenwerten λ sind endlich dimensional, und Eigenräume zu verschiedenen Eigenwerten sind orthogonal. Nehmen wir an, die Folge $\{\lambda_n\}$ der von Null verschiedenen Eigenwerte sei wie folgt geordnet

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots$$

Mit $P_n : X \rightarrow N(\lambda_n I - A)$ bezeichnen wir den orthogonalen Projektionsoperator auf dem Raum der Eigenfunktionen zu den Eigenwerten λ_n . Dann gilt

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n \tag{2.1}$$

im Sinne der Normkonvergenz. Sei $Q : X \rightarrow N(A)$ der orthogonale Projektionsoperator auf den Nullraum $N(A)$. Dann gilt

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} P_n \varphi + Q \varphi \tag{2.2}$$

für alle $\varphi \in X$.

Sei U ein endlich dimensionaler Unterraum von X und seien $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ eine Orthonormalbasis, d.h. $(\varphi_i, \varphi_j) = 0, i, j = 1, \dots, m, i \neq j$, und $\|\varphi_i\| = 1$ für $i = 1, \dots, m$. Damit können wir den orthogonalen Projektionsoperator $P : X \rightarrow U$ darstellen als

$$P\varphi = \sum_{n=1}^m (\varphi, \varphi_n) \varphi_n.$$

Jetzt sind wir in der Lage, die Reihen (2.1) und (2.2) in einer expliziteren Form darzustellen. Man beachte, dass jeder Eigenwert der Folge $\{\lambda_n\}$ bezüglich seiner Vielfachheit vorkommt. Nehmen wir an, $\{\varphi_n\}$ ist eine Folge zugehöriger Eigenfunktionen, dann gilt für jedes $\varphi \in X$:

$$A\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (\varphi, \varphi_n) \varphi_n$$

und

$$\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi, \varphi_n) \varphi_n + Q\varphi.$$

Die orthonormalen Eigenfunktionen eines kompakten selbstadjungierten Operators, einschließlich derer zu möglichen Nulleigenwerten, sind vollständig.

Der folgende Satz von Lax ist ein nützliches Werkzeug zur Ausdehnung von Beschränktheit und Kompaktheit linearer Operatoren von einem gegebenen Raum auf Räume mit einer schwächeren, vom Skalarprodukt definierten Norm. Eine Eigenschaft, die wir im nächsten Abschnitt ausnutzen werden.

Satz 2.12 (Lax) *Seien X und Y zwei normierte Räume. Beide seien mit einem Skalarprodukt (\cdot, \cdot) ausgestattet. Angenommen, es existiert eine positive Konstante C , so dass*

$$|(\varphi, \psi)| \leq C \|\varphi\| \|\psi\|$$

für alle $\varphi, \psi \in X$ gilt und seien $A : X \rightarrow Y$ und $B : Y \rightarrow X$ beschränkte lineare Operatoren mit der Eigenschaft

$$(A\varphi, \psi) = (\varphi, B\psi)$$

für alle $\varphi \in X$ und $\psi \in Y$. Dann ist $A : X \rightarrow Y$ beschränkt bezüglich der von den beiden Skalarprodukten induzierten Normen $\|\cdot\|_s$ und

$$\|A\|_s^2 \leq \|A\| \|B\|.$$

Beweis: Siehe Beweis zu Theorem 4.11 in [10]. \square

Satz 2.13 *Ist V ein dichter Unterraum des normierten Raumes X , Y ein Banachraum und $A : V \rightarrow Y$ ein stetiger linearer Operator. Dann existiert genau eine stetige Fortsetzung $\tilde{A} : X \rightarrow Y$, wobei \tilde{A} einen stetigen linearen Operator mit $\tilde{A}|_V = A$ definiert. Zusätzlich gilt $\|\tilde{A}\| = \|A\|$.*

Beweis: Siehe Beweis zu Satz II.1.5 in [19]. \square

2.2 Über Integraloperatoren

Nach der Einführung eines Integraloperators mit stetigem oder schwach singulärem Kern weisen wir dessen Kompaktheit im Raum der stetigen Funktionen nach und geben eine Darstellung für den adjungierten Operator an. Im letzten Schritt führen wir den Kompaktheitsbeweis für Operatoren, die auf Funktionen aus $L_0^2(\partial D)$ wirken.

Mit ∂D bezeichnen wir den Rand des Gebietes D , das in der Problemstellung eingeführt wurde. Die Kurve ∂D ist somit stückweise C^2 -glatt und besteht in der Nähe der Ecken aus zwei geraden Linien.

Definition 2.14 *Sei $K : \partial D \times \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Der lineare Operator $A : C(\partial D) \rightarrow C(\partial D)$, definiert als*

$$(A\varphi)(x) := \int_{\partial D} K(x, y)\varphi(y) ds(y), \quad x \in \partial D,$$

wird Integraloperator mit stetigem Kern K genannt.

Definition 2.15 *Ein Integralkern $K : \partial D \times \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ wird schwach singulär genannt, falls er für alle $x, y \in \partial D$, $x \neq y$, definiert und stetig ist und positive Konstanten M und $\alpha \in (0, 1]$ existieren, so dass*

$$|K(x, y)| \leq M |x - y|^{\alpha-1}, \quad x, y \in \partial D, x \neq y. \quad (2.3)$$

Der in 2.14 definierte Integraloperator kann analog mit einem schwach singulären Kern definiert werden. Wir werden den Operator beide Male mit A bezeichnen, jedoch jeweils angeben, ob er einen stetigen oder schwach singulären Kern besitzt.

Satz 2.16 *Ein Integraloperator von $C_0(\partial D)$ in $C_0(\partial D)$ mit stetigem oder schwach singulärem Kern ist kompakt.*

Beweis: Der Beweis für einen Integraloperator mit stetigem Kern verläuft analog zum Beweis von Satz 2.23 in [10].

Liegt ein schwach singulärer Kern vor, so wird für den Beweis des Satzes 2.23 aus [10] mindestens ein C^1 -glatter Rand verlangt. Wir bedienen uns einer Eigenart von ∂D , und spalten den Rand in die beiden Kurven Γ und Γ^ρ auf. Wir setzen Γ bzw. Γ^ρ zu C^2 -glatten Kurven $\tilde{\Gamma}$ bzw. $\tilde{\Gamma}^\rho$ fort und erklären eine Fortsetzung der Funktionen aus $C_0(\Gamma)$ als

$$C_*(\tilde{\Gamma}) := \{\psi \in C(\tilde{\Gamma}) : \psi|_\Gamma \in C_0(\Gamma) \text{ und } \psi = 0 \text{ auf } \tilde{\Gamma} \setminus \Gamma\}. \quad (2.4)$$

Eine entsprechende Fortsetzung gelte für $C_0(\Gamma^\rho)$. Für $\varphi \in C_0(\partial D)$ existieren also zwei eindeutig bestimmte Funktionen $\psi_1 \in C_*(\tilde{\Gamma})$ und $\psi_2 \in C_*(\tilde{\Gamma}^\rho)$. Für $x \in \partial D$ gilt:

$$\begin{aligned} (A\varphi)(x) &= \int_{\partial D} K(x, y)\varphi(y) ds(y) \\ &= \int_{\tilde{\Gamma}} K_1(x, y)\psi_1(y) ds(y) + \int_{\tilde{\Gamma}^\rho} K_2(x, y)\psi_2(y) ds(y), \end{aligned}$$

dabei sind $K_1 : \partial D \times \tilde{\Gamma} \rightarrow \mathbb{R}$ und $K_2 : \partial D \times \tilde{\Gamma}^\rho \rightarrow \mathbb{R}$ zwei schwach singuläre Kerne, mit der Eigenschaft $K_1(x, \cdot) = K(x, \cdot)$ auf Γ und $K_2(x, \cdot) = K(x, \cdot)$ auf Γ^ρ für alle $x \in \partial D$.

Auf Grund dieser Zerlegung verweisen wir wieder auf den Satz 2.23 aus [10]. \square

Für Integraloperatoren mit stetigem oder schwach singulärem Kern können wir ohne weiteres den adjungierten Operator angeben.

Satz 2.17 *Sei K ein stetiger oder schwach singulärer Kern. Dann sind die (kompakten) Integraloperatoren*

$$\begin{aligned} (A\varphi)(x) &:= \int_{\partial D} K(x, y)\varphi(y) ds(y), \quad x \in \partial D, \\ (B\psi)(x) &:= \int_{\partial D} K(y, x)\psi(y) ds(y), \quad x \in \partial D \end{aligned}$$

bezüglich des Dualsystems $(C_0(\partial D), C_0(\partial D))$ basierend auf

$$(\varphi, \psi) := \int_{\partial D} \varphi\psi ds$$

für $\varphi, \psi \in C_0(\partial D)$ adjungiert.

Beweis: Im Fall des stetigen Kerns folgt die Aussage sofort aus

$$\begin{aligned}
 (A\varphi, \psi) &= \int_{\partial D} (A\varphi)(x)\psi(x) ds(x) \\
 &= \int_{\partial D} \left(\int_{\partial D} K(x, y)\varphi(y) ds(y) \right) \psi ds(x) \\
 &= \int_{\partial D} \varphi(y) \left(\int_{\partial D} K(x, y)\psi(x) ds(x) \right) ds(y) \\
 &= \int_{\partial D} \varphi(y)(B\psi)(y) ds(y) \\
 &= (\varphi, B\psi).
 \end{aligned}$$

Ist der Kern schwach singulär, so nutzen wir die im Beweis zu Satz 2.16 beschriebene Approximation des Operators A und können somit folgern

$$(A\varphi, \psi) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} A_n \varphi, \psi \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\varphi, B_n \psi) = (\varphi, B\psi),$$

d.h. der Grenzwert von $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = B$ ist der adjungierte Operator zu A . \square

Im Satz 2.16 konnten wir uns davon überzeugen, dass A von $C_0(\partial D)$ in $C_0(\partial D)$ kompakt ist. Jetzt verallgemeinern wir die Aussage noch weiter.

Satz 2.18 *Der Integraloperator mit stetigem oder schwach singulärem Kern ist kompakt von $L_0^2(\partial D)$ in $L_0^2(\partial D)$, dabei sei*

$$L_0^2(\partial D) := \overline{C_0(\partial D)}^{\|\cdot\|_2}. \quad (2.5)$$

Beweis: Der Beweis der Kompaktheit eines Integraloperators mit stetigem Kern verläuft analog zu dem Beweis von Satz 20.13 in [11].

Ist der Kern des Integraloperators A schwach singulär, so existiert eine Folge von Operatoren $\{A_n\}$ mit stetigen Kernen, definiert wie im Beweis zu Satz 2.16, so dass

$$\|A - A_n\|_\infty \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Da für alle $n \in \mathbb{N}$ die Kerne der Operatoren A_n stetig sind, sind alle A_n kompakt von $L_0^2(\partial D)$ in $L_0^2(\partial D)$. Nach dem Satz von Lax und unter Beachtung von Satz 2.17 gilt

$$\|A - A_n\|_{L^2} \leq \|A - A_n\|_\infty \|A^* - A_n^*\|_\infty \rightarrow 0$$

für $n \rightarrow \infty$, d.h. als Grenzwert einer Folge kompakter Operatoren ist A nach Satz 2.2 selbst kompakt von $L_0^2(\partial D)$ in $L_0^2(\partial D)$ und nach Satz 2.13 stimmt er auf $C_0(\partial D)$ mit dem Integraloperator mit schwach singulärem Kern auf $C_0(\partial D)$ überein. \square

2.3 Aus der Potentialtheorie

Dieser Abschnitt behandelt harmonische Funktionen und ihre Eigenschaften. Nach der Definition solcher Funktionen betrachten wir das Beispiel der Grundlösung zur Laplace-Gleichung, die eine wichtige Rolle in der Potentialtheorie spielt. Als nächstes werden die Greenschen Sätze unter Beachtung der Randglätte formuliert. Die Greensche Formel ermöglicht es schließlich, eine harmonische Funktion in einem beschränkten Gebiet allein aus ihrer Kenntnis auf dem Rand, im Inneren eindeutig zu charakterisieren. Nach dem Maximum-Minimum-Prinzip wissen wir sogar, dass eine harmonische Funktion ihre Extremwerte auf dem Rand ihres Definitionsbereiches annimmt. Um das Verhalten harmonischer Funktionen in unbeschränkten Gebieten untersuchen zu können, dehnen wir die Greensche Formel für entsprechende Gebiete aus. Zum Schluss geben wir den Satz von Giraud-Keldysch-Lawrentjew an.

Definition 2.19 *Eine zweimal stetig differenzierbare reellwertige Funktion u , definiert auf einem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^2$, nennt man harmonisch, wenn sie die Laplace-Gleichung*

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } D,$$

erfüllt, wobei

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}.$$

Ein wichtiges Hilfsmittel zur Behandlung von Problemen zur Laplace-Gleichung mit Integralgleichungsmethoden ist die sogenannte *Grund-* oder *Fundamentallösung* der Laplace-Gleichung.

Satz 2.20 *Die Funktion*

$$\Phi(x, y) := \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x - y|}$$

wird Fundamentallösung der Laplace-Gleichung in \mathbb{R}^2 genannt. Für ein festes $y \in \mathbb{R}^2$ ist sie harmonisch in $\mathbb{R}^2 \setminus \{y\}$.

Die Greenschen Sätze sind ein wichtiges Hilfsmittel der Potentialtheorie. Wir sind daran interessiert, sie in Gebieten mit Ecken anwenden zu können. Einen entsprechenden Beweis finden wir für den Fall des \mathbb{R}^3 in [14] oder [15] und für \mathbb{R}^2 in [8].

Satz 2.21 *Sei D ein beschränktes und einfach zusammenhängendes Gebiet, dessen Rand regulär und stückweise C^2 -glatt ist, und ν sei die nach außen weisende Einheitsnormale an den Rand ∂D . Für $u \in C^1(\bar{D})$ und $v \in C^2(\bar{D})$ gilt dann der erste Greensche Satz:*

$$\int_D (u\Delta v + \text{grad } u \cdot \text{grad } v) dx = \int_{\partial D} u \frac{\partial v}{\partial \nu} ds \quad (2.6)$$

und für $u, v \in C^2(\bar{D})$ gilt der zweite Greensche Satz:

$$\int_D (u\Delta v - v\Delta u) dx = \int_{\partial D} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) ds. \quad (2.7)$$

Korollar 2.22 *Sei $v \in C^2(\bar{D})$ harmonisch in D . Dann gilt*

$$\int_{\partial D} \frac{\partial v}{\partial \nu} ds = 0. \quad (2.8)$$

Es genügt die Randwerte und die Normalableitung einer harmonischen Funktion auf dem Rand ihres Definitionsbereichs zu kennen, um sie mit Hilfe der Grundlösung innerhalb des Definitionsbereiches eindeutig charakterisieren zu können.

Satz 2.23 *Sei D wie in Theorem 2.21 und sei $u \in C^2(\bar{D})$ harmonisch in D . Dann gilt*

$$u(x) = \int_{\partial D} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \Phi(x, y) - u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \right) ds(y), \quad x \in D. \quad (2.9)$$

Aus der Potentialtheorie ist bekannt, dass eine analytische Funktion, die auf einer offenen Menge ihres Definitionsbereiches verschwindet, identisch verschwindet. Auf Grund des folgenden Satzes können wir diese Eigenschaft in den kommenden Ausführungen verwenden.

Satz 2.24 *Harmonische Funktionen sind analytisch.*

Es ist möglich die Werte einer harmonischen Funktion durch ihre Werte auf dem Rand des Definitionsbereichs zu beschränken.

Satz 2.25 (Maximum-Minimum Prinzip) *Eine in einem Gebiet harmonische und nicht konstante Funktion besitzt kein Maximum und kein Minimum.*

Korollar 2.26 *Sei D ein beschränktes Gebiet und u harmonisch in D und stetig in \bar{D} . Dann nimmt u ihr Maximum und Minimum auf dem Rand an.*

Wir kennen den Greenschen Satz bereits für beschränkte Gebiete. Um das Verhalten harmonischer Funktionen im Außenraum solcher Gebiete untersuchen zu können, schauen wir uns die Greensche Formel auch für unbeschränkte Gebiete an.

Satz 2.27 *Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ definiert wie in Satz 2.21 mit der in das Äußere von D weisenden Einheitsnormale ν an den Rand ∂D und $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus D)$ eine beschränkte harmonische Funktion. Dann gilt*

$$u(x) = u_\infty + \int_{\partial D} \left\{ u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \Phi(x, y) \right\} ds(y),$$

für $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ mit einer Konstanten u_∞ . Es gelten außerdem

$$\int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds = 0$$

und die Mittelwerteigenschaft

$$u_\infty = \frac{1}{2\pi r} \int_{|y|=r} u(y) ds(y) \quad (2.10)$$

für genügend große r .

Wir nutzen den obigen Satz und das asymptotische Verhalten der Grundlösung in \mathbb{R}^2

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x|} + O\left(\frac{1}{|x|}\right) \quad (2.11)$$

und

$$\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x_j} = O\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x_j \partial x_k} = O\left(\frac{1}{|x|^2}\right) \quad (2.12)$$

für $|x| \rightarrow \infty$, welches gleichmäßig für alle Richtungen $x/|x|$ und alle $y \in \partial D$ gilt. Damit können wir das Verhalten für beschränkte harmonische Funktionen im Äußeren eines Gebietes herleiten:

$$u(x) = u_\infty + O\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad \text{grad } u(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right),$$

das gleichmäßig für alle Richtungen erfüllt ist.

Ein für die späteren Untersuchungen sehr nützliches Hilfsmittel ist der folgende Satz. Den Beweis für den Fall des \mathbb{R}^3 finden wir in [13]. Der Beweis im \mathbb{R}^2 verläuft analog.

Satz 2.28 (Giraud-Keldysch-Lawrentjew) *Es sei D ein offenes Gebiet, dessen Rand ∂D ein stetig gekrümmtes Kurvenstück ∂D_0 enthalte, jedoch in der Weise, dass eine gewisse einseitige, offene Umgebung von ∂D_0 zu D gehört. Ferner sei u eine in $D \cup \partial D_0$ stetige und in D harmonische Funktion, die in einem inneren Punkt p_0 aus ∂D_0 ein lokales Extremum besitzt. Konvergiert dann die Normalableitung $\frac{\partial u}{\partial \nu}$, betrachtet auf der Normalen durch p_0 , bei Annäherung an p_0 , gegen null, so ist u in $D \cup \partial D_0$ konstant.*

Kapitel 3

Äußeres Dirichlet-Problem

In diesem Teil der Arbeit widmen wir uns dem äußeren Dirichlet-Problem für ein Gebiet mit Ecken. Bevor wir den Existenzbeweis behandeln, untersuchen wir die Eigenschaften des Doppelschichtpotentials unter Berücksichtigung der Besonderheiten des vorliegenden Gebietes. Im Speziellen interessiert uns sein Verhalten am Rand, was uns zur Sprungrelation führt. Mit einem Doppelschichtpotentialansatz und der daraus resultierenden Integralgleichung zweiter Art zeigen wir die Existenz einer Lösung. Der hier vorliegende Integraloperator ist nicht kompakt, wie das bei einem C^2 -glatt berandeten Gebiet der Fall ist. Es wird uns aber möglich sein, diesen Operator so zu zerlegen, dass wir mit ähnlicher Argumentation die eindeutige Lösbarkeit des Ansatzes zeigen werden.

3.1 Eindeutigkeit

Wir werden uns davon überzeugen, dass eine harmonische Funktion bereits durch die Vorgabe ihrer Werte auf dem Rand eines Gebietes, im äußeren davon eindeutig festgelegt ist. Dabei gehen wir von dem in der Problemstellung definierten Gebiet D aus und übernehmen alle dort eingeführten Bezeichnungen.

Definition 3.1 (Äußeres Dirichlet-Problem) *Gesucht ist eine Funktion u , die harmonisch in $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ und stetig in $\mathbb{R}^2 \setminus D$ ist und die Randbedingung*

$$u = f \quad \text{auf } \partial D$$

erfüllt, wobei $f \in C_0(\partial D)$ vorgegeben sei. Außerdem gelte

$$u(x) = O(1) \quad \text{für } |x| \rightarrow \infty$$

gleichmäßig für alle Richtungen.

Satz 3.2 *Das äußere Dirichlet-Problem besitzt höchstens eine Lösung.*

Beweis: Die Differenz zweier Lösungen des äußeren Dirichlet-Problems $u := u_1 - u_2$ ist eine harmonische Funktion in $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ und stetig bis auf den Rand. Sie erfüllt die homogene Randbedingung $u = 0$. Nach dem Maximum-Minimum-Prinzip nimmt u ihr Supremum bzw. Infimum auf dem Rand an oder dieses stimmt mit u_∞ überein. Wird beides auf dem Rand angenommen, so gilt $u = 0$ in $\mathbb{R}^2 \setminus D$. Stimmt das Supremum mit u_∞ überein, so gilt $u(x) \leq u_\infty$ für alle $x \in \mathbb{R}^2 \setminus D$ und aus der Mittelwertegenschaft (2.10) folgt $u = u_\infty$ außerhalb eines genügend großen Kreises. Da harmonische Funktionen analytisch sind, ist $u = u_\infty$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ und auf Grund der homogenen Randbedingung $u = 0$ in $\mathbb{R}^2 \setminus D$. Die Argumentation verläuft analog, falls u_∞ mit dem Infimum übereinstimmt. \square

Die Symmetrie in den Randwerten führt zu einer symmetrischen Lösung, die entlang der x_1 -Achse verschwindet. Das führt wiederum zu $u_\infty = 0$.

3.2 Potentiale und Sprungbeziehungen

Als Lösung für das äußere Dirichlet-Problem werden wir einen Doppelschichtpotentialansatz wählen. In diesem Abschnitt untersuchen wir deshalb die Eigenschaften des Doppelschichtpotentials und seine Fortsetzbarkeit bis auf den Rand. Durch einen kleinen Trick werden wir die Eigenschaften aus dem Fall des C^2 -glatten Randes folgern. Parallel dazu werden wir auch das Einfachschichtpotential betrachten, da es uns im zweiten Teil der Arbeit, dem inversen Problem, eine Hilfe sein wird.

Definition 3.3 *Sei $\varphi \in C_0(\partial D)$ gegeben, dann heißt*

$$v(x) := \int_{\partial D} \Phi(x, y) \varphi(y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D \quad (3.1)$$

das Einfachschichtpotential und

$$u(x) := \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \varphi(y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D \quad (3.2)$$

das Doppelschichtpotential mit Dichte φ .

Für Punkte $x \notin \partial D$ können wir Integration und Differentiation vertauschen. Somit repräsentiert sowohl das Einfachschicht- als auch das Doppelschichtpotential eine harmonische Funktion in D und in $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$.

Nutzen wir die Randsymmetrie aus und die Eigenschaft, dass φ ungerade ist, so formen wir sowohl das Einfach- als auch das Doppelschichtpotential äquivalent um, indem wir sie in jeweils zwei Integrale über den Kurven Γ und Γ^ρ aufspalten. Dabei wird das zweite Integral wiederum zu einem Integral über Γ umgeformt und beide dann zusammengefasst. Für $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D$ erhalten wir schließlich:

$$\begin{aligned} v(x) &= \int_{\Gamma} [\Phi(x, y) - \Phi(x, y^\rho)] \varphi(y) ds(y), \\ u(x) &= \int_{\Gamma} G(x, y) \varphi(y) ds(y), \end{aligned} \quad (3.3)$$

wobei wir zur Verkürzung der Schreibweise die Funktion

$$G(x, y) := \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \Phi(x, y^\rho)}{\partial \nu(y^\rho)}, \quad y \in \Gamma \quad (3.4)$$

einführen. Die obige Darstellung verdeutlicht die Auswirkung der Randsymmetrie, die sich auch auf den Kern auswirkt, so dass für $\tilde{x} := (x_1, 0)$, $x_1 \in \mathbb{R}$, unter Ausnutzung von $\nu(y^\rho) = (\nu_1(y), -\nu_2(y))^t$ gilt, dass

$$G(\tilde{x}, y) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\nu(y) \cdot (x_1 - y_1, -y_2)}{(x_1 - y_1)^2 + y_2^2} - \frac{\nu(y^\rho) \cdot (x_1 - y_1, y_2)}{(x_1 - y_1)^2 + y_2^2} \right\} = 0, \quad (3.5)$$

für alle $y \in \Gamma$. Warum es sinnvoll ist, diese äquivalente Darstellung zu betrachten, wird spätestens in der numerischen Umsetzung deutlich, da wir dann unnötigen Rechenaufwand vermeiden.

Das Doppelschichtpotential u weist am Rand von D einen Sprung auf. Es ist jedoch möglich, es stetig von beiden Seiten bis auf den Rand fortzusetzen. In welchem Sinne existiert aber das Doppelschichtpotential auf dem Rand? Bei genauer Betrachtung wird deutlich, dass G eine Singularität aufweist für den Fall, dass sich x auf Γ und y auf Γ^ρ einer Ecke nähern. Durch die Fortsetzung von Γ und Γ^ρ zu glatten Kurven ist es möglich, die Sprungrelation für ein Gebiet mit Ecken auf die Sprungrelation für glatte Gebiete zurückzuführen.

Satz 3.4 (i) *Das Doppelschichtpotential u mit Dichte $\varphi \in C_0(\Gamma)$ lässt sich stetig von D nach \bar{D} und von $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ nach $\mathbb{R}^2 \setminus D$ fortsetzen mit den Randwerten*

$$u_{\pm}(x) = \int_{\Gamma} G(x, y) \varphi(y) ds(y) \pm \frac{1}{2} \varphi(x), \quad x \in \partial D, \quad (3.6)$$

wobei

$$u_{\pm} := \lim_{h \rightarrow +0} u(x \pm h\nu(x)).$$

Die Integrale existieren als uneigentliche Integrale.

(ii) Für die Normalableitung des Doppelschichtpotentials mit Dichte $\varphi \in C_0(\Gamma)$ gilt

$$\lim_{h \rightarrow +0} \nu(x) \cdot \{\text{grad } u(x + h\nu(x)) - \text{grad } u(x - h\nu(x))\} = 0 \quad (3.7)$$

für $x \in \partial D \setminus \{\xi_1, \xi_2\}$ im Sinne lokal gleichmäßiger Konvergenz.

Beweis: (i) Für $\varphi \in C_0(\Gamma)$ und $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D$ gilt

$$u(x) = \int_{\Gamma} G(x, y) \varphi(y) ds(y) = \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \varphi(y) ds(y) + \int_{\Gamma^{\rho}} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \varphi^{\rho}(y) ds(y),$$

wobei $\varphi^{\rho} \in C_0(\Gamma^{\rho})$ und $\varphi(x) = -\varphi^{\rho}(x^{\rho})$ für $x \in \Gamma$.

Betrachten wir zuerst das Integral über Γ . Die Argumentation für das Integral über Γ^{ρ} verläuft analog.

Wir setzen Γ zu einer C^2 -glatten Kurve $\tilde{\Gamma}$ fort und erklären eine Fortsetzung der Funktionen von Γ auf $\tilde{\Gamma}$, wie in (2.4) bereits definiert. Für $\psi \in C_*(\tilde{\Gamma})$ sei

$$\tilde{u}(x) := \int_{\tilde{\Gamma}} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \psi(y) ds(y).$$

Aus [10], Satz 6.17, ist bekannt, dass für $x \in \tilde{\Gamma}$ das Integral als uneigentliches Integral existiert und sich das Doppelschichtpotential mit Dichte $\psi \in C_*(\tilde{\Gamma})$ stetig bis auf den Rand $\tilde{\Gamma}$ fortsetzen lässt, so dass für $x \in \tilde{\Gamma}$ gilt

$$\tilde{u}_{\pm}(x) = \int_{\tilde{\Gamma}} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \psi(y) ds(y) \pm \frac{1}{2} \psi(x).$$

Da $\tilde{\varphi} \in C_*(\tilde{\Gamma})$ auf $\tilde{\Gamma} \setminus \Gamma$ verschwindet, ist \tilde{u} dort insbesondere stetig.

Aus der Überlagerung zweier Doppelschichtpotentiale über $\tilde{\Gamma}$ und $\tilde{\Gamma}^{\rho}$, der C^2 -glatten Fortsetzung von Γ^{ρ} , folgt der Beweis von (i).

(ii) Da es sich hier um eine lokale Eigenschaft handelt, verläuft der Beweis analog zum Fall des C^2 -glatten Randes (siehe [3]). \square

Das Einfachschichtpotential ist im Gegensatz zum Doppelschichtpotential in ganz \mathbb{R}^2 stetig, aber wie man vermuten könnte, weist es einen Sprung in der Normalableitung am Rand auf.

Satz 3.5 (i) Das Einfachschichtpotential v mit stetiger Dichte φ , definiert wie in (3.1), ist stetig in ganz \mathbb{R}^2 .

(ii) Das Einfachschichtpotential mit Dichte $\varphi \in C(\partial D)$ besitzt die Normalableitung

$$\frac{\partial v_{\pm}}{\partial \nu}(x) = \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} \varphi(y) ds(y) \mp \frac{1}{2} \varphi(x), \quad x \in \partial D \setminus \{\xi_1, \xi_2\}, \quad (3.8)$$

wobei

$$\frac{\partial v_{\pm}}{\partial \nu}(x) := \lim_{h \rightarrow +0} \nu(x) \cdot \text{grad } v(x \pm h\nu(x))$$

im Sinne lokal gleichmäßiger Konvergenz gilt.

Beweis: (i) Für Dichten aus $C_0(\partial D)$ lässt sich das Einfachschichtpotential mit dem gleichen Trick, den wir im Beweis der Sprungrelation beim Doppelschichtpotential angewandt haben, behandeln und auf das Problem C^2 -glatter Ränder zurückführen. Einen Beweis dafür finden wir in [10], Satz 6.14. Ein allgemeinerer Beweis für stetige Dichten ist in [4] nachzulesen.

(ii) Es sei nochmals angemerkt, dass Sprungbeziehungen lokale Eigenschaften sind. Damit hat der Fall des C^2 -glatten Randes auch hier Gültigkeit. Dieser Beweis ist zum Beispiel in [10], Satz 6.18, nachzulesen. \square

3.3 Randwertproblem: Existenz

Die Eindeutigkeit einer Lösung des äußeren Dirichlet-Problems haben wir bereits gezeigt. Jetzt überzeugen wir uns davon, dass eine Lösung überhaupt existiert. Obwohl der Kern des Doppelschichtpotentials direkt in den Ecken verschwindet, ist er in einer Umgebung davon unstetig. Er weist sogar eine Singularität auf, derart dass der Integraloperator mit diesem Kern nicht mehr kompakt ist.

Wir definieren eine Operatorfolge, deren Glieder bis auf eine glättende Funktion im Kern mit dem Doppelschichtpotentialoperator übereinstimmen. Diese glättende Funktion lindert die Singularität des Kerns, so dass dieser sogar stetig wird und die Operatoren damit kompakt. Die Folge konvergiert zwar nicht gegen den Doppelschichtpotentialoperator. Das ist auch gar nicht möglich, da dieser dann kompakt sein müsste. Aber die Differenz der Folgenglieder und des Doppelschichtpotentialoperators lässt sich in der Norm gegen einen Wert abschätzen, der kleiner als eins ist. Alles zusammen ermöglicht die Anwendung des Satzes von Riesz und damit die eindeutige Lösbarkeit der aus der Sprungrelation resultierenden Integralgleichung.

Zur Vereinfachung der Schreibweise führen wir den Operator $K : C_0(\partial D) \rightarrow C_0(\partial D)$ ein, so dass

$$(K\varphi)(x) := 2 \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \varphi(y) ds(y), \quad x \in \partial D, \quad (3.9)$$

mit $\varphi \in C_0(\partial D)$ gilt. Der Operator K ist wohldefiniert, denn wie wir aus Satz 3.4 wissen, ist $K\varphi$ stetig für $\varphi \in C_0(\partial D)$. Es gilt außerdem

$$\begin{aligned} (K\varphi)(x) &= \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y^\rho)}{\partial \nu(y^\rho)} \varphi(y^\rho) ds(y) \\ &= - \int_{\partial D} \frac{\nu_1(y^\rho)(x_1 - y_1) + \nu_2(y^\rho)(x_2 + y_2)}{2\pi |x - y^\rho|^2} \varphi(y) ds(y) \\ &= - \int_{\partial D} \frac{\nu_1(y)(x_1 - y_1) + \nu_2(y)(-x_2 - y_2)}{2\pi |x^\rho - y|^2} \varphi(y) ds(y) \\ &= - \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x^\rho, y)}{\partial \nu(y)} \varphi(y) ds(y) \\ &= -(K\varphi)(x^\rho), \end{aligned}$$

also folgt insbesondere $K\varphi \in C_0(\partial D)$.

Analog zu (3.3) können wir auch für K eine äquivalente Darstellung als Operator von $C_0(\Gamma)$ nach $C_0(\Gamma)$ angeben:

$$(K\varphi)(x) = 2 \int_{\Gamma} G(x, y) \varphi(y) ds(y), \quad x \in \Gamma, \quad (3.10)$$

wobei G definiert ist wie in (3.4).

Satz 3.6 *Es gilt $N(I + K) = \{0\}$, d.h. der Operator $I + K$ ist injektiv.*

Beweis: Sei φ eine Lösung von $\varphi + K\varphi = 0$ und u definiert wie in (3.2). Dann gilt:

$$2u_+ = \varphi + K\varphi = 0 \quad \text{auf } \partial D.$$

Da $u(x) = O(1)$ für $|x| \rightarrow \infty$, folgt aus der Eindeutigkeit des äußeren Dirichlet-Problems, dass $u = 0$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$. Nach (3.7) gilt $\frac{\partial u_-}{\partial \nu} - \frac{\partial u_+}{\partial \nu} = 0$ auf $\partial D \setminus \{\xi_1, \xi_2\}$, d.h.

$$\frac{\partial u_-}{\partial \nu} = 0 \quad \text{auf } \partial D \setminus \{\xi_1, \xi_2\}. \quad (3.11)$$

Aus dem Minimum-Maximum-Prinzip folgern wir, dass sowohl das Minimum als auch das Maximum einer harmonischen Funktion auf dem Rand angenommen wird.

Werden die Extremalwerte in den Ecken angenommen, so gilt $u_{\min} = u_{\max} = 0$ und somit $u = 0$. Wird der Extremalwert auf $\partial D \setminus \{\xi_1, \xi_2\}$ angenommen, so folgt aus (3.11) und dem Satz von Giraud-Keldysch-Lawrentjew, dass u konstant in \bar{D} ist. Da jedoch $u(\xi_i) = 0$ gilt, ist $u = 0$ in \bar{D} . Aus der Sprungrelation folgt schließlich $\varphi = 0$ auf ∂D , also $N(I + K) = \{0\}$. \square

Mit der geleisteten Vorarbeit sind wir in der Lage, ein Kriterium zur Lösung des äußeren Dirichlet-Problems anzugeben. Wir nutzen die Sprungrelation des Doppelschichtpotentials aus, um eine geeignete Dichte $\varphi \in C_0(\Gamma)$ zu bestimmen. Das mit dieser Dichte versehene Doppelschichtpotential lässt sich stetig bis auf den Rand ∂D fortsetzen und nimmt dort die geforderten Randwerte $f \in C_0(\Gamma)$ an. Wir halten das Ergebnis im folgenden Satz fest.

Satz 3.7 *Das Doppelschichtpotential*

$$u(x) = \int_{\Gamma} G(x, y) \varphi(y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D} \quad (3.12)$$

mit der Dichte $\varphi \in C_0(\Gamma)$ löst das äußere Dirichlet-Problem, falls die Dichte φ die Integralgleichung

$$\varphi(x) + 2 \int_{\Gamma} G(x, y) \varphi(y) ds(y) = 2f(x) \quad (3.13)$$

für $x \in \Gamma$ und $f \in C_0(\Gamma)$ erfüllt.

Beweis: Dies folgt unmittelbar aus (3.6). Insbesondere hat u das verlangte Verhalten für $|x| \rightarrow \infty$, nämlich $u(x) = O(1)$, wie man es aus dem asymptotischen Verhalten der Grundlösung in \mathbb{R}^2 (siehe (2.12)) ersehen kann. \square

Wir wissen bereits, dass der Operator $(I + K)$ injektiv ist. Unser Ziel ist es, mit dem Satz von Riesz die Existenz einer beschränkten Inversen zu sichern. Wir schaffen es nicht zu zeigen, dass K kompakt ist. Also müssen wir versuchen, die Voraussetzungen von Korollar 2.5 zu erfüllen. An dieser Stelle greifen wir zur Vereinfachung auf die Definition von K aus (3.9) zurück. Wir erinnern uns, dass der Kern des Operators die folgende Gestalt hat:

$$\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \quad \text{mit } x, y \in \partial D.$$

Der Kern ist stetig, solange x und y aus dem gleichen C^2 -glatten Kurvenstück stammen. Nähern sich jedoch x auf Γ und y auf Γ^p gleichzeitig einer Ecke ξ , so wird der

Kern unstetig und es gilt:

$$\lim_{x,y \rightarrow \xi} \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(y)} = \infty, \quad x \in \Gamma, y \in \Gamma^\rho.$$

Um das Problem zu umgehen, definieren wir eine stetige Funktion $h : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$h(t) := \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ 2t - 1, & \frac{1}{2} \leq t \leq 1, \\ 1, & 1 \leq t < \infty. \end{cases} \quad (3.14)$$

Wir benutzen die Abschneidefunktion h , um die Operatoren $K_n : C_0(\partial D) \rightarrow C_0(\partial D)$ wie folgt zu definieren:

$$(K_n \varphi)(x) := 2 \int_{\partial D} h(n|x-y|) \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(y)} \varphi(y) ds(y), \quad x \in \partial D, n \in \mathbb{N}.$$

Die Kerne der Operatoren K_n sind stetig für alle $n \in \mathbb{N}$, also sind alle Glieder der Folge $\{K_n\}$ kompakt. Jetzt sind wir in der Lage, die Differenz zwischen K und den oben definierten Folgengliedern K_n zu bilden. Wir stellen fest, dass die Folge zwar nicht gegen K konvergiert, aber es möglich ist, die Norm von $K - K_n$ gegen einen Wert, der kleiner als eins ist, abzuschätzen.

Satz 3.8 Für die Operatoren $\tilde{K}_n := K - K_n$ gilt für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$:

$$\|\tilde{K}_n\|_\infty < 1.$$

Beweis: Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ hinreichend groß, so dass für alle $x \in \partial D$ eine Scheibe $B[x; \frac{1}{n}] = \{y \in \mathbb{R}^2 : |x-y| \leq \frac{1}{n}\}$ existiert, die entweder (i) nur einen Kurvenbogen Γ oder Γ^ρ schneidet oder (ii) beide Bögen. Der zweite Fall tritt dementsprechend nur in der Nähe der Ecken auf.

(i) Wird nur ein Kurvenbogen geschnitten, so sind wir weit genug von den Ecken entfernt, und $\frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(y)}$ ist stetig. Es existiert also eine Konstante

$$M := \max_{x,y \in \Gamma} \left| \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(y)} \right|.$$

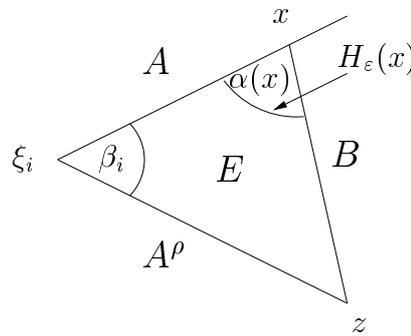
Durch Projektion auf die Tangente im Punkt x erhalten wir

$$|(\tilde{K}_n \varphi)(x)| \leq 2 \int_{\partial D \cap B[x; \frac{1}{n}]} \left| [1 - h(n|x-y|)] \frac{\partial \Phi(x,y)}{\partial \nu(x)} \varphi(y) \right| ds(y)$$

$$\begin{aligned} &\leq 2M \|\varphi\|_\infty \int_{\partial D \cap B[x; \frac{1}{n}]} ds(y) \\ &\leq 2M \|\varphi\|_\infty \frac{4}{n}. \end{aligned}$$

(ii) Unseren Annahmen über das Gebiet zufolge und der Tatsache, dass n groß genug gewählt wurde, können wir im zweiten Fall annehmen, dass die Überschneidung aus zwei geraden Linien A und A^ρ besteht.

Abb. 3.1: Verhalten des Randes in den Ecken



Wir betrachten das Dreieck mit Eckpunkten z, ξ_i, x , wobei z und ξ_i die Endpunkte von A^ρ sind und $x \in A \setminus \{\xi_i\}$ ist. Die Strecke zwischen z und x nennen wir B . Zuletzt sei $H_\varepsilon(x)$ der Schnitt zwischen dem oben beschriebenen Dreieck und einer Sphäre mit Mittelpunkt in x und Radius ε . Zur Verdeutlichung siehe Abbildung 3.1.

Da $\Phi(x, \cdot)$ eine harmonische Funktion in $\mathbb{R}^2 \setminus \{x\}$ ist, können wir das Korollar 2.22 in dem von A, A^ρ, B und $H_\varepsilon(x)$ aufgespannten Gebiet E anwenden. Berücksichtigen wir, dass der Normalenvektor für $y \in A$ oder B senkrecht auf $\{x - y\}$ steht, so gilt:

$$\int_{A^\rho} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} ds(y) + \int_{H_\varepsilon(x)} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} ds(y) = 0.$$

Gehen wir davon aus, dass die Normale immer ins Äußere des eingeschlossenen Gebietes zeigt, dann wissen wir, dass $\nu(y) = \{x - y\}/\varepsilon$ für $y \in H_\varepsilon(x)$ gilt und somit:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{H_\varepsilon(x)} \frac{\nu(y) \cdot \{x - y\}}{|x - y|} ds(y) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2\pi\varepsilon} \int_{H_\varepsilon(x)} ds(y) \right) = \frac{\alpha(x)}{2\pi}.$$

Mit $\alpha(x)$ bezeichnen wir den Winkel im Dreieck an der Ecke x . Die Orientierung der Einheitsnormalen legt das Vorzeichen obiger Integrale fest, und wir können sogar

schreiben:

$$\int_{A^\rho} \left| \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \right| ds(y) = \left| \int_{A^\rho} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} ds(y) \right| = \frac{\alpha(x)}{2\pi}.$$

Elementarischen geometrischen Überlegungen zufolge ist $\alpha(x) + \beta_i \leq \pi$, also kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit $\beta_i < \pi$ angenommen werden. Ist der Winkel $\beta_i > \pi$, so arbeiten wir mit dem Komplementärwinkel $\beta' := 2\pi - \beta$, der wieder kleiner als π ist. Und schließlich können wir abschätzen

$$\begin{aligned} |(\tilde{K}_n \varphi)(x)| &\leq 2 \int_{A \cup A^\rho} \left| [1 - h(n|x - y|)] \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} \varphi(y) \right| ds(y) \\ &\leq 2 \|\varphi\|_\infty \int_{A^\rho} \left| \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \right| ds(y) \\ &= 2 \|\varphi\|_\infty \frac{\alpha(x)}{2\pi} \\ &\leq \|\varphi\|_\infty \left(1 - \frac{\beta_i}{\pi} \right). \end{aligned}$$

Am Eckpunkt ξ_i erhalten wir wegen $\frac{\partial \Phi(\xi_i, y)}{\partial \nu(y)} = 0$ für $y \in (A \cup A^\rho) \setminus \{\xi\}$:

$$|(\tilde{K}_n \varphi)(\xi_i)| \leq 2 \int_{A \cup A^\rho} \left| [1 - h(n|\xi_i - y|)] \frac{\partial \Phi(\xi_i, y)}{\partial \nu(y)} \varphi(y) \right| ds(y) = 0.$$

Werden alle Resultate kombiniert, so sehen wir, dass $\|\tilde{K}_n\|_\infty \leq q$ für ein genügend großes $n \in \mathbb{N}$ gilt, mit

$$q := \max_{i=1,2} \left| 1 - \frac{\beta_i}{\pi} \right| < 1.$$

□

Nun können wir schreiben

$$I + K = I + \tilde{K}_n + K_n. \quad (3.15)$$

Dabei besitzt $I + \tilde{K}_n$ nach dem Satz über die Neumannsche Reihe ein beschränktes Inverses und K_n ist kompakt. Zusätzlich wissen wir nach Satz 3.6, dass der Operator $I + K$ injektiv ist. Das Korollar 2.5 besagt schließlich, dass $I + K$ ein beschränktes Inverses besitzt, was uns zum folgenden Satz führt:

Satz 3.9 *Das äußere Dirichlet-Problem besitzt eine eindeutige Lösung.*

Eine wichtige Eigenschaft, über die wir noch kurz nachdenken sollten, ist die stetige Abhängigkeit der Lösung von den Randdaten, d.h. eine geringe Änderung in den Randdaten darf auch nur eine geringe Änderung in der Lösung nach sich ziehen.

Satz 3.10 *Die Lösung des äußeren Dirichlet-Problems u in $\mathbb{R}^2 \setminus D$ hängt stetig in der Maximumnorm von den gegebenen Randdaten ab.*

Beweis: Nach dem Minimum-Maximum-Prinzip nimmt die Lösung des äußeren Dirichletproblems ihr Extremum auf dem Rand an:

$$\|u\|_{\infty, D} = \|u\|_{\infty, \partial D} = \|f\|_{\infty}.$$

□

Kapitel 4

Numerik des direkten Problems

Wie berechnet man numerisch ein Integral mit periodischem Integranden? Normalerweise ist die zusammengesetzte Trapezregel zu empfehlen. Was passiert jedoch, wenn der Integrand Singularitäten in den Ableitungen besitzt?

Die direkte Anwendung der Trapezregel verspricht hier nur eine geringe Konvergenzrate. Eine Quadraturformel höherer Ordnung ist wiederum mit einem zu hohen Rechenaufwand verbunden. Eine Idee ist die Durchführung einer geeigneten Substitution, welche die Ableitungen des Integranden bis zu einer gewissen Ordnung an den Endpunkten des Integrationsintervalls verschwinden lässt. Auf das transformierte Integral kann schließlich die Trapezregel angewandt werden. Diese Methode wird in [9] erläutert. Eine ausführlichere Beschreibung finden wir in [18].

4.1 Quadraturformel

Im Folgenden beschreiben wir eine numerische Quadraturformel für Integrale der Form

$$\int_0^{2\pi} g(t) dt,$$

wobei der Integrand g glatt auf $(0, 2\pi)$ ist. In $t = 0$ und $t = 2\pi$ kann g in den Ableitungen Singularitäten bis zu einer gewissen Ordnung aufweisen.

Sei $w : [0, 2\pi] \rightarrow [0, 2\pi]$ bijektiv, streng monoton wachsend und hinreichend oft differenzierbar. Des Weiteren fordern wir, dass w in 0 und $(2\pi - w)$ in 2π Nullstellen

höherer Ordnung habe. Nun können wir t durch $w(s)$ substituieren und erhalten:

$$\int_0^{2\pi} g(t) dt = \int_0^{2\pi} h(s) ds,$$

wobei

$$h(s) := w'(s)g(w(s)), \quad 0 < s < 2\pi.$$

Wird die Trapezregel auf das transformierte Integral angewandt, so ergibt sich die Quadraturformel

$$\int_0^{2\pi} g(t) dt \approx \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^{2n-1} a_j^{(n)} g(s_j^{(n)}) \quad (4.1)$$

mit den Gewichten

$$a_j^{(n)} = w' \left(\frac{j\pi}{n} \right)$$

und Stützstellen

$$s_j^{(n)} = w \left(\frac{j\pi}{n} \right),$$

für $j = 1, \dots, 2n - 1$. Zur Vereinfachung der Schreibweise lassen wir den Index $(\cdot)^{(n)}$ fortan weg. Auf Grund der Wahl von w verschwindet h an den Intervallenden, so dass die Summanden für $j = 0$ und $j = 2n$ nicht auftreten. Wir haben es also geschafft, die Singularitäten zu glätten.

Im Folgenden werden wir eine Fehlerabschätzung der oben vorgestellten Quadraturformel (4.1) geben.

Definition 4.1 Für $q \in \mathbb{N}$ und $0 < \alpha < 1$ wird der Raum

$$S^{q,\alpha} := \{g \in C[0, 2\pi] \cap C^q(0, 2\pi) : \int_0^{2\pi} [t(2\pi - t)]^{j-\alpha} |g^{(j)}(t)| dt \\ \text{existiert für } j = 0, \dots, q\}$$

erklärt. $S^{q,\alpha}$ wird mit der Norm

$$\|g\|_{q,\alpha} := \max_{j=0,\dots,q} \int_0^{2\pi} [t(2\pi - t)]^{j-\alpha} |g^{(j)}(t)| dt$$

zu einem normierten Raum.

Die Elemente von $S^{q,\alpha}$ haben sowohl in 0 als auch in 2π Nullstellen höherer Ordnung.

Satz 4.2 *Angenommen w hat in $s = 0$ und $(2\pi - w)$ in $s = 2\pi$ Nullstellen von Ordnung p , d.h.:*

$$w^{(m)}(0) = w^{(m)}(2\pi) = 0, \quad m = 1, \dots, p$$

aber $w^{(m+1)}(0) \neq 0$ und $w^{(m+1)}(2\pi) \neq 0$.

Dann gilt für $g \in S^{2q+1, \alpha}$ mit $0 < \alpha < 1$ und

$$\alpha p \geq 2q + 1,$$

dass sich der Fehler in der Quadraturformel (4.1)

$$E^{(n)}(g) := \int_0^{2\pi} g(t) dt - \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^{2n-1} a_j g(s_j)$$

wie folgt abschätzen lässt:

$$|E^{(n)}(g)| \leq \frac{C}{n^{2q+1}} \|g\|_{2q+1, \alpha}$$

mit einer Konstanten $C = C(w, \alpha, q)$.

Beweis: Der Beweis wird mit Hilfe der Euler-Maclaurinschen Summenformel für die Trapezregel und der daraus resultierenden Fehlerabschätzung geführt. Er ist ebenfalls in [9] nachzulesen. \square

4.2 Anwendung und Testbeispiele

Im letzten Kapitel haben wir uns davon überzeugt, dass bei hinreichenden Voraussetzungen an den Rand ∂D für alle Randwerte $f \in C_0(\Gamma)$ eine eindeutig bestimmte Lösung existiert. Der Satz 3.7 liefert uns sogar einen Lösungsansatz. Demzufolge müssen wir als erstes die Dichte φ aus der Gleichung (3.13) bestimmen.

Wir beschreiben Γ mit Hilfe einer regulären und gegen den Uhrzeigersinn orientierten Parametrisierung $x : [0, 2\pi] \rightarrow \Gamma$. Wird die Gleichung (3.13) parametrisiert, so erhalten wir

$$\tilde{\varphi}(t) + \int_0^{2\pi} G(t, \tau) \tilde{\varphi}(\tau) d\tau = 2\tilde{f}(t). \quad (4.2)$$

Dabei sind $\tilde{\varphi}(t) := \varphi(x(t))$ und $\tilde{f}(t) := f(x(t))$. Bei der Darstellung des Kerns nutzen wir aus, dass der erste Teil in $t = \tau$ stetig fortgesetzt werden kann, also

$$G(t, \tau) = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{x'(\tau)^\perp \cdot \{x(t) - x(\tau)\}}{|x(t) - x(\tau)|^2} - \frac{x'(\tau)^\perp \cdot \{x(t) - [x(\tau)]^\rho\}}{|x(t) - [x(\tau)]^\rho|^2} \right\}, \quad t \neq \tau$$

und

$$G(t, t) = \frac{1}{\pi} \left\{ \frac{x'(t)^\perp \cdot x''(t)}{|x'(t)|^2} - \frac{x'(t)^\perp \cdot \{x(t) - [x(t)]^\rho\}}{|x(t) - [x(t)]^\rho|^2} \right\}, \quad t = \tau.$$

Dabei gilt wie üblich $[x(\tau)]^\rho = (x_1(\tau), -x_2(\tau))$.

Weiterhin übernehmen wir die in Abschnitt (4.1) vorgestellte Quadraturformel. Wie eine geeignete Substitution zu wählen ist, kann zum Beispiel [17] entnommen werden. Die numerischen Ergebnisse in dieser Arbeit basieren auf einer rationalen Substitutionsfunktion:

$$w(s) = 2\pi \frac{[v(s)]^p}{[v(s)]^p + [v(2\pi - s)]^p}, \quad 0 \leq s \leq 2\pi, \quad (4.3)$$

wobei

$$v(s) = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right) \left(\frac{\pi - s}{\pi} \right)^3 + \frac{s - \pi}{p\pi} + \frac{1}{2}.$$

Das näherungsweise Lösen der Gleichung (4.2) erfolgt mit dem Nyströmverfahren. Wir approximieren das Integral mit Hilfe der Quadraturformel (4.1) und erhalten mit der Lösung $\tilde{\varphi}_n$ von

$$\tilde{\varphi}_n(t) + \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^{2n-1} a_j G(t, s_j) \tilde{\varphi}_n(s_j) = 2\tilde{f}(t) \quad (4.4)$$

für $0 \leq t \leq 2\pi$ und $n \in \mathbb{N}$ eine Approximation an die Lösung φ der Gleichung (4.2). Für jede Lösung von (4.4) erfüllen die Werte $\tilde{\varphi}_{n,i} := \tilde{\varphi}_n(s_i)$ mit $i = 1, \dots, 2n-1$ das lineare Gleichungssystem

$$\tilde{\varphi}_{n,i} + \frac{\pi}{n} \sum_{j=1}^{2n-1} a_j G(s_i, s_j) \tilde{\varphi}_{n,j} = 2\tilde{f}_i, \quad (4.5)$$

wobei $\tilde{f}_i := \tilde{f}(s_i)$ ist. Ist $\tilde{\varphi}_{n,i}$ mit $i = 1, \dots, 2n-1$ eine Lösung von (4.5), dann löst $\tilde{\varphi}_n$, definiert als

$$\tilde{\varphi}_n(t) := \tilde{f}(t) + \sum_{j=1}^{2n-1} a_j G(t, s_j) \tilde{\varphi}_{n,j},$$

die Gleichung (4.4). Sind die Werte von $\tilde{\varphi}_n$ an den Punkten t_1, \dots, t_{2n-1} bekannt, so kann das Integral (3.12) ebenfalls mit Hilfe der Quadraturformel (4.1) an jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ näherungsweise berechnet werden.

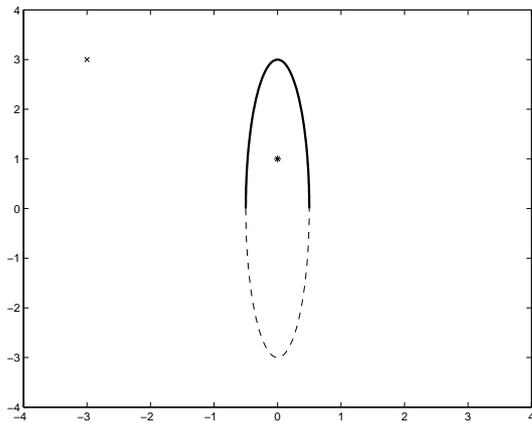


Abb. 4.1: Ellipse

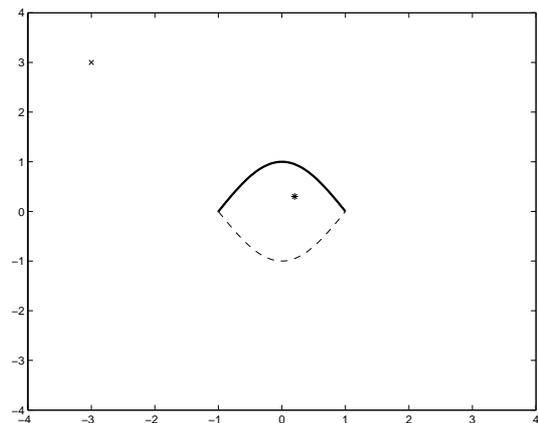


Abb. 4.2: Zitrone

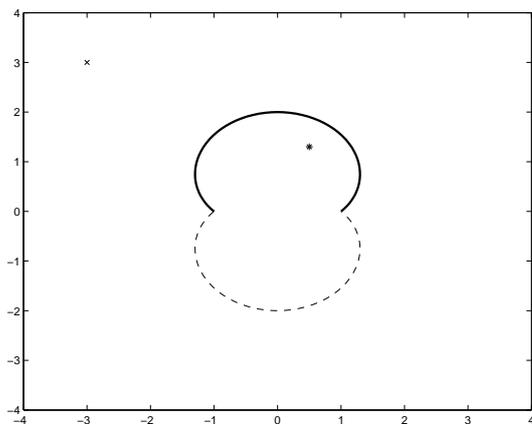


Abb. 4.3: Erdnuss

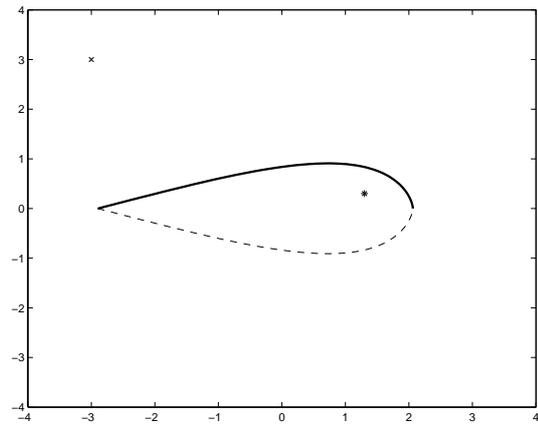


Abb. 4.4: Tropfen

Wir testen das Verfahren an vier Gebieten. Da wir nicht über die gesamte Randkurve ∂D , sondern nur über Γ integrieren, genügt es auch, nur diese Teilkurve zu parametrisieren. Wir betrachten somit die folgenden Parametrisierungen:

Ellipse:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= \frac{1}{2} \cos \frac{t}{2} \\x_2(t) &= 3 \sin \frac{t}{2}\end{aligned}$$

Zitrone:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= -\frac{1}{\pi}(t - \pi) \\x_2(t) &= \sin \frac{t}{2}\end{aligned}$$

Erdnuss:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= \cos \frac{t}{2} + \cos \frac{t}{2} \sin \frac{t}{2} \\x_2(t) &= \sin \frac{t}{2} + \sin^2 \frac{t}{2}\end{aligned}$$

Tropfen:

$$\begin{aligned}x_1(t) &= -\frac{1}{50}(t^3 - \pi) \\x_2(t) &= \frac{t}{4} \sin \frac{t}{2}\end{aligned}$$

Um jedoch einen Gesamteindruck der Gebiete zu erhalten, wurden in den Abbildungen 4.1-4.4 die parametrisierten Kurven mit einer durchgehenden Linie und die Spiegelungen an der x -Achse mit einer gestrichelten Linie gezeichnet.

Der Faktor p aus der Substitutionsfunktion (4.3) beeinflusst die Verteilung der Stützstellen auf der Kurve Γ . Je größer p gewählt wird, um so stärker werden die Stützstellen an den Ecken akkumuliert. Man sollte jedoch beachten, dass zu große Werte für p den Einfluss der Singularitäten wieder zu stark werden lassen. In der Abbildung 4.5 sehen wir die Verteilung der Stützstellen für drei verschiedene Werte von p . Man beachte, dass es sich immer um die gleiche Anzahl von Punkten handelt. Für $p = 2$ können wir noch alle zehn Punkte erkennen, bei $p = 5$ und $p = 8$ liegen je

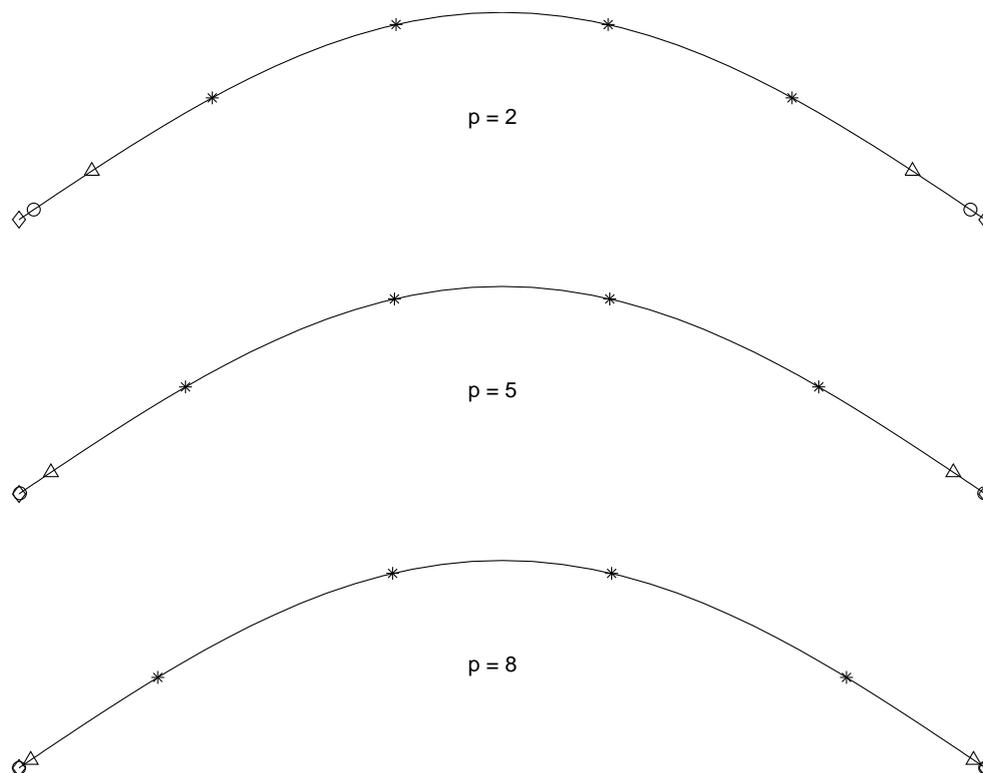


Abb. 4.5: Punkteverteilung am Beispiel der Zitrone bei 10 Punkten

zwei Punkte an den Enden der Kurve so dicht zusammen, dass man sie nicht mehr unterscheiden kann.

Als Testfunktion betrachten wir

$$u = -\Phi(\cdot, z) + \Phi(\cdot, z^\rho), \quad z \in D.$$

Die Funktion ist bis auf die beiden Punkte z und z^ρ harmonisch und fällt im Unendlichen gegen null ab. Sie dient uns als wahre Lösung. Für ein festes Gebiet D , mit $z \in D$, liefert uns $u|_{\partial D}$ Randwerte, für die wir das äußere Dirichlet-Problem explizit lösen können. In den nachfolgenden Tabellen sehen wir den Fehler zwischen wahrer und berechneter Lösung, ausgewertet an einem Punkt außerhalb des Gebietes. In den Abbildungen 4.1-4.4 ist jeweils der Punkt, an dem der Fehler ausgewertet wird, mit 'x' bezeichnet. Innerhalb der Gebiete bezeichnet '*' die Singularität der wahren Lösung, also den Punkt z .

Tabelle 4.1: Konvergenzrate des Verfahrens

Ellipse

	p=2	p=5	p=8
n = 04	0.026268907654923	0.029140012270266	0.034734382991774
n = 08	0.000757962220938	0.000828304311502	0.001100849329815
n = 16	0.000002565082558	0.000003547370392	0.000002977795918
n = 32	0.000000000038547	0.000000000070573	0.000000000136688
n = 64	0.000000000000043	0.000000000000000	0.000000000000000

Zitrone

	p=2	p=5	p=8
n = 04	0.000025346483971	0.000047750695953	0.000101871484206
n = 08	0.000000033235264	0.000000082942278	0.000000180810151
n = 16	0.000000000013053	0.000000000000508	0.000000000007604
n = 32	0.000000000000178	0.000000000000003	0.000000000000000
n = 64	0.000000000000003	0.000000000000000	0.000000000000000

Erdnuss

	p=2	p=5	p=8
n = 04	0.001421141374785	0.001428283843448	0.001421737552593
n = 08	0.000016417523387	0.000017010135579	0.000017467960641
n = 16	0.000000022840828	0.000000025350176	0.000000029171198
n = 32	0.000000000000045	0.000000000000094	0.000000000000202
n = 64	0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000

Tropfen

	p=2	p=5	p=8
n = 04	0.000004146779122	0.000005124259253	0.000006202983083
n = 08	0.000000639956552	0.000000651929976	0.000000714684732
n = 16	0.000000000288494	0.000000000347015	0.000000000610154
n = 32	0.000000000000003	0.000000000000016	0.000000000000084
n = 64	0.000000000000000	0.000000000000000	0.000000000000000

Kapitel 5

Inverses Problem: Gebietsrekonstruktion

Wenden wir uns jetzt dem inversen Problem der Gebietsrekonstruktion zu. Sei $u = u(\cdot, z)$ die Lösung des äußeren Dirichlet-Problems, welche die Laplace-Gleichung

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D} \quad (5.1)$$

und die Dirichlet-Randbedingung

$$u(\cdot, z) = -\Phi(\cdot, z) + \Phi(\cdot, z^\rho) \quad \text{auf } \partial D \quad (5.2)$$

erfüllt, wobei $z \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$. Damit ist u aus $C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}) \cap C(\mathbb{R}^2 \setminus D)$ und nach Kapitel 3 eindeutig bestimmt. Wie wir uns in der Problemstellung überlegt haben, gilt $u(x) = -u(x^\rho)$ für $x \in \mathbb{R}^2 \setminus D$, weshalb Randwerte auf Γ bereits die Lösung u eindeutig festlegen.

Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ eine durch zwei bezüglich der x -Achse spiegelsymmetrische Kurven Γ_B und Γ_B^ρ begrenzte Kreisscheibe, so dass \bar{D} darin enthalten ist. Angenommen die Werte von u sind nur auf Γ_B bekannt. Aus dieser Kenntnis werden wir unter Anlehnung an die Faktorisierungsmethode nach Kirsch ein Kriterium zur Rekonstruktion des Gebietes D herleiten und beweisen. Dabei dürfen die Eigenschaften des Gebietes nicht außer Acht gelassen werden.

5.1 Eindeutigkeit

Reichen die gegebenen Daten aus, um den Rand von D eindeutig zu charakterisieren? Der folgende Satz beantwortet diese Frage.

Satz 5.1 *Seien D_1 und D_2 zwei Gebiete, definiert wie in Kapitel 3, wobei $\bar{D}_1 \subset B$ und $\bar{D}_2 \subset B$. Ferner seien u_1 und u_2 die Lösungen des äußeren Dirichlet-Problems (5.1) - (5.2) für die Gebiete D_1 und D_2 und es gelte $u_1 = u_2$ auf ∂B für einen Punkt $z \in \mathbb{R}^2 \setminus B$. Dann gilt $D_1 = D_2$.*

Beweis: Wir nehmen $D_1 \neq D_2$ an und definieren G als die Zusammenhangskomponente des Komplements von $\bar{D}_1 \cup \bar{D}_2$, welche ∂B enthält. Damit ist G unbeschränkt. Da $u_1 = u_2$ auf ∂B , folgt aus der Eindeutigkeit des äußeren Dirichlet-Problems und weil harmonische Funktionen analytisch sind, dass $u_1 = u_2$ in G gilt. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $G^* := (\mathbb{R}^2 \setminus \bar{G}) \setminus \bar{D}_2$ nicht leer ist. Die Funktion $v := \Phi(\cdot, z) - \Phi(\cdot, z^\rho) + u_2$ ist harmonisch in G^* , stetig in \bar{G}^* und erfüllt die homogene Randbedingung $v = 0$ auf ∂G^* . Dies ist leicht einzusehen, da jeder Randpunkt von G^* entweder zu ∂D_2 oder zu $\partial G \cap \partial D_1$ gehört. Für $x \in \partial D_2$ gilt $\Phi(x, z) - \Phi(x, z^\rho) + u_2(x) = 0$ als Folge der Randbedingung für u_2 . Für $x \in \partial G \cap \partial D_1$ gilt $u_2(x) = u_1(x)$, wie wir oben gesehen haben und daher $\Phi(x, z) - \Phi(x, z^\rho) + u_2(x) = \Phi(x, z) - \Phi(x, z^\rho) + u_1(x) = 0$ als Folge der Randbedingung für u_1 . Aus dem Maximum-Minimum-Prinzip für harmonische Funktionen erhalten wir nun $v = 0$ in G^* und daraus wegen der Analytizität harmonischer Funktionen $\Phi(x, z) - \Phi(x, z^\rho) + u_2(x) = 0$ in $\mathbb{R}^2 \setminus (D_2 \cup \{z\} \cup \{z^\rho\})$. Da u_2 harmonisch in $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}_2$ ist, ist dies ein Widerspruch zur Singularität der Grundlösung $\Phi(\cdot, z)$ an der Stelle z . \square

5.2 Der Hilbertraum $L^2_0(\partial D)$

Im Abschnitt 3.3 haben wir den Operator $K : C_0(\partial D) \rightarrow C_0(\partial D)$ definiert. Analog dazu sei nun

$$(K^*\psi)(x) := 2 \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} \psi(y) ds(y), \quad x \in \partial D.$$

Die beiden Operatoren sind bezüglich des Dualsystems $(C_0(\partial D), C_0(\partial D))$ zueinander adjungiert, was man durch die Vertauschung der Integrationsreihenfolge sieht. Dass eine solche Vertauschung erlaubt ist, obwohl der Kern singularär ist, folgt aus dem Fortsetzungsargument des Beweises zu Satz 3.4.

Im ersten Teil dieser Arbeit bewegten wir uns ausschließlich in Räumen stetiger Funktionen. Nun müssen wir die Theorie eine Stufe verallgemeinern und betrachten deshalb K und K^* als Abbildungen des Hilbertraums $L^2(\partial D)$. Nach [16] bilden

beide Operatoren beschränkt in $L^2(\partial D)$ ab und sind bezüglich des Dualsystems $(L^2(\partial D), L^2(\partial D))$, basierend auf

$$(\varphi, \psi) := \int_{\partial D} \varphi \psi \, ds$$

für $\varphi, \psi \in L^2(\partial D)$, adjungiert.

Wir sind insbesondere an der Invertierbarkeit von $(I + K)$ und $(I + K^*)$ interessiert. In [16] wird nachgewiesen, dass $(I + K)$ auf $L^2(\partial D)/\langle 1 \rangle$ und $(I + K^*)$ im Raum der Funktionen aus $L^2(\partial D)$, deren Mittelwert über ∂D verschwindet, invertierbar sind. Mit $L^2(\partial D)\langle 1 \rangle$ bezeichnen wir den Raum der Äquivalenzklassen von Funktionen aus $L^2(\partial D)$, wobei zwei Funktionen zu der gleichen Äquivalenzklasse gehören, wenn sie bis auf eine Konstante übereinstimmen. Wir fassen das Ergebnis im folgenden Satz zusammen.

Satz 5.2 *Sei L ein beschränktes lipschitzstetiges Gebiet in \mathbb{R}^2 . Dann sind*

$$(i) \quad I + K : L^2(\partial L)/\langle 1 \rangle \rightarrow L^2(\partial L)/\langle 1 \rangle,$$

$$(ii) \quad I + K^* : [L^2(\partial L)]_0 \rightarrow [L^2(\partial L)]_0$$

invertierbare Operatoren, wobei $[L^2(\partial L)]_0 := \{f \in L^2(\partial L) \mid \int_{\partial L} f \, ds = 0\}$.

Beweis: (i) Siehe [16], Korollar 4.4 (ii).

(ii) Siehe [16], Korollar 4.2 (ii).

Man beachte, dass die Operatoren in [16] mit einem anderen Vorzeichen als in dieser Arbeit versehen sind. \square

Trotz der benötigten Hilberträume sollten wir die vereinfachenden Eigenschaften unseres Problems nicht außer Acht lassen. Wir betrachten deshalb den in (2.5) definierten Raum und den Raum

$$L_0^2(\Gamma) := \{g|_{\Gamma} : g \in L_0^2(\partial D)\},$$

die mit dem L^2 -Skalarprodukt auf ∂D bzw. Γ einen Hilbertraum bilden. Eine äquivalente Definition gelte für $L_0^2(\partial B)$ und $L_0^2(\Gamma_B)$. Für eine Funktion $\varphi \in L_0^2(\partial D)$ gilt insbesondere

$$\int_{\partial D} \varphi \, ds = 0.$$

Das lässt sich leicht nachrechnen. Funktionen aus $L_0^2(\partial B)$ besitzen die gleiche Eigenschaft auf ∂B .

Die Operatoren K und K^* bilden $L_0^2(\partial D)$ beschränkt in sich ab. Die Beschränktheit folgt automatisch aus dem Satz 5.2. Eine einfache Rechnung zeigt schließlich, dass für alle $\varphi \in L_0^2(\partial D)$ auch $K\varphi$ bzw. $K^*\varphi \in L_0^2(\partial D)$ sind. Es ist jetzt naheliegend zu vermuten, dass $(I + K)$ und $(I + K^*)$ bijektiv auf $L_0^2(\partial D)$ sind.

Korollar 5.3 *Die Operatoren*

$$(i) \quad I + K : L_0^2(\partial D) \rightarrow L_0^2(\partial D),$$

$$(ii) \quad I + K^* : L_0^2(\partial D) \rightarrow L_0^2(\partial D)$$

sind invertierbar.

Beweis: Die Injektivität dieser Operatoren erhalten wir direkt aus dem Satz 5.2. Es genügt also, die Surjektivität von $(I + K)$ und $(I + K^*)$ auf $L_0^2(\partial D)$ nachzuweisen. Für alle $\varphi \in L_0^2(\partial D)$ existiert nach Satz 5.2 ein $\psi \in [L^2(\partial D)]_0$, so dass $(I + K)\psi = \varphi$. Da das Bild in $L_0^2(\partial D)$ liegt, gilt:

$$\begin{aligned} [(I + K)\psi](x) &= -[(I + K)\psi](x^\rho) \\ &= -\psi(x^\rho) - \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x^\rho, y)}{\partial \nu(y)} \psi(y) ds(y) \\ &= -\psi(x^\rho) - \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y^\rho)}{\partial \nu(y^\rho)} \psi(y) ds(y) \\ &= -\psi(x^\rho) - \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \psi(y^\rho) ds(y) \\ &= -(I + K)\psi^\rho(x), \end{aligned}$$

wobei $\psi^\rho(x) := \psi(x^\rho)$ ist. Dies ist äquivalent zu $(I + K)[\psi + \psi^\rho](x) = 0$ fast überall. Aus der Injektivität von $(I + K)$ schließen wir $\psi(x) = -\psi^\rho(x) = -\psi(x^\rho)$ für fast alle $x \in \partial D$, also ist $\psi \in L_0^2(\partial D)$. Die Argumentation für $(I + K^*)$ ist analog. \square

Ein weiterer Operator, der in diesem Kapitel eine wichtige Rolle spielt, ist der Einfachschichtpotentialoperator S , der als Abbildung von $L^2(\partial D)$ in $L^2(\partial D)$ definiert ist durch

$$(S\varphi)(x) := \int_{\partial D} \Phi(x, y)\varphi(y) ds(y), \quad x \in \partial D.$$

Und auch hier sind wir wieder an der Invertierbarkeit des Operators interessiert. Für die Abbildung von $L^2(\partial D)$ in $L^2(\partial D)$ werden wir es nicht schaffen die Bijektivität nachzuweisen. Der Bildraum von S besitzt mehr Regularität. Deshalb führen wir jetzt den Raum der Funktionen ein, die eine schwache Ableitung im L^2 -Sinne besitzen.

Definition 5.4 Eine Funktion $\varphi \in L^2[a, b]$ besitzt eine schwache Ableitung $\varphi' \in L^2[a, b]$, falls

$$\int_a^b \varphi \psi' dx = - \int_a^b \varphi' \psi dx \quad (5.3)$$

für alle $\psi \in C^1[a, b]$ mit $\psi(a) = \psi(b) = 0$.

Schwache Ableitungen verallgemeinern den Begriff der klassischen Ableitung. Es sei angemerkt, dass die schwache Ableitung, wenn sie existiert, eindeutig bestimmt ist. Mit der entsprechenden Norm wird der Raum der Funktionen mit einer schwachen Ableitung sogar zum Hilbertraum.

Satz 5.5 Der lineare Raum

$$H^1(\partial D) := \{\varphi \in L^2(\partial D) \mid \varphi' \in L^2(\partial D)\},$$

versehen mit dem Skalarprodukt

$$(\varphi, \psi)_{H^1} := \int_{\partial D} (\varphi \psi + \varphi' \psi') ds, \quad (5.4)$$

ist ein Hilbertraum.

Beweis: Siehe [10], Theorem 16.17. □

Die Einschränkung des Wertebereichs auf $H^1(\partial D)$ ermöglicht den Nachweis der Surjektivität. Um die Injektivität zu zeigen, nehmen wir eine Modifikation an S vor und definieren

$$\tilde{S} := S(I - M) + M.$$

Dabei ist M der Mittelwertoperator

$$M\varphi := \frac{1}{|\partial D|} \int_{\partial D} \varphi ds.$$

Satz 5.6 \tilde{S} ist ein invertierbarer Operator von $L^2(\partial D)$ nach $H^1(\partial D)$.

Beweis: Siehe [16], Theorem 4.11. □

Schränken wir \tilde{S} auf den Raum $L_0^2(\partial D)$ ein, mit dem wir auch weiterhin arbeiten werden, so gilt:

$$\tilde{S}|_{L_0^2(\partial D)} = S,$$

denn $M\varphi = 0$ für alle $\varphi \in L_0^2(\partial D)$. Nun werden wir uns davon überzeugen, dass S als Operator von $L_0^2(\partial D)$ nach $H_0^1(\partial D)$ bijektiv ist, wobei

$$H_0^1(\partial D) := H^1(\partial D) \cap L_0^2(\partial D).$$

Korollar 5.7 S ist ein invertierbarer Operator von $L_0^2(\partial D)$ nach $H_0^1(\partial D)$.

Beweis: Es lässt sich schnell nachrechnen, dass S als Abbildung von $L_0^2(\partial D)$ nach $L_0^2(\partial D)$ wohldefiniert ist. Aus dem Satz 5.6 folgt, dass S als Abbildung von $L_0^2(\partial D)$ nach $H_0^1(\partial D)$ wohldefiniert und sogar injektiv ist. Es bleibt also noch die Surjektivität zu zeigen. Sei $\psi \in H_0^1(\partial D)$. Nach Satz 5.6 existiert ein eindeutig bestimmtes $\varphi \in L^2(\partial D)/\langle 1 \rangle$, so dass $S\varphi = \psi$ ist. Es genügt sich davon zu überzeugen, dass $\varphi \in L_0^2(\partial D)$. Da $S\varphi \in L_0^2(\partial D)$ ist, gilt $(S\varphi)(x) = -(S\varphi)(x^\rho)$ für fast alle $x \in \partial D$, also:

$$\begin{aligned} (S\varphi)(x) &= - \int_{\partial D} \Phi(x^\rho, y) \varphi(y) ds(y) \\ &= - \int_{\partial D} \Phi(x, y^\rho) \varphi(y) ds(y) \\ &= - \int_{\partial D} \Phi(x, y) \varphi(y^\rho) ds(y) \\ &= -(S\varphi^\rho)(x), \end{aligned}$$

wobei $\varphi^\rho(x) := \varphi(x^\rho)$ ist für $x \in \partial D$. Dies ist äquivalent zu $(S[\varphi + \varphi^\rho])(x) = 0$. Aus der Injektivität von S folgt schließlich $\varphi(x) = -\varphi^\rho(x)$ für fast alle $x \in \partial D$, also $\varphi \in L_0^2(\partial D)$. □

Wir können uns schnell davon überzeugen, dass S ein kompakter und selbstadjungierter Operator ist. Denn der Kern von S weist nur eine logarithmische Singularität auf und ist deshalb schwach singulär. Nach Satz 2.18 ist S also kompakt. Aus der Symmetrie des Kerns folgt nach Satz 2.17 die Selbstadjungiertheit. Eine weitere Eigenschaft wird im folgenden Satz formuliert und bewiesen.

Satz 5.8 *Der Einfachschichtpotentialoperator $S : L_0^2(\partial D) \rightarrow L_0^2(\partial D)$ ist positiv definit.*

Beweis: Wir werden uns zuerst davon überzeugen, dass S auf $C_0(\partial D)$ positiv definit ist und diese Eigenschaft dann auf $L_0^2(\partial D)$ ausdehnen.

Für alle $\varphi \in C_0(\partial D)$ existiert eine Folge ungerader stetiger Funktionen $\{\varphi_n\}$, so dass $\|\varphi - \varphi_n\|_\infty \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Sei

$$\varphi_n(x) := \prod_{i=1}^2 h(n|x - \xi_i|)\varphi(x), \quad x \in \partial D$$

und h definiert wie in (3.14).

Nach Definition gilt $\{\varphi_n\} \subset C_0(\partial D)$ und jedes Folgenglied verschwindet in einer Umgebung der Ecken. Die gleichmäßige Konvergenz folgt unmittelbar aus

$$\begin{aligned} \|\varphi - \varphi_n\|_\infty &= \max_{x \in \partial D} \left| 1 - \prod_{i=1}^2 h(n|x - \xi_i|)\varphi(x) \right| \\ &\leq 2 \max_{\substack{x \in \partial D \\ 0 \leq |x - \xi_i| \leq \frac{1}{n}}} |\varphi(x)|, \end{aligned}$$

da für $n \rightarrow \infty$ der obige Ausdruck gegen $\varphi(\xi) = 0$ konvergiert.

Mit $\{v_n\}$ bezeichnen wir die Folge von Einfachschichtpotentialen, die jeweils mit der Dichte φ_n definiert sind. Auf Grund der Definition von φ_n ist v_n für alle $n \in \mathbb{N}$ in einer Umgebung der Ecke analytisch und dort gilt $\frac{\partial v_{n-}}{\partial \nu} - \frac{\partial v_{n+}}{\partial \nu} = 0$. Unter Ausnutzung der Sprungrelation und des Greenschen Satzes können wir schreiben:

$$\begin{aligned} (S\varphi_n, \varphi_n) &= \int_{\partial D} \varphi_n S\varphi_n \, ds \\ &= \int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial v_{n-}}{\partial \nu} - \frac{\partial v_{n+}}{\partial \nu} \right\} v_n \, ds \\ &= \int_D |\text{grad } v_n|^2 \, dx + \int_{\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}} |\text{grad } v_n|^2 \, dx \\ &\geq \int_{G_1} |\text{grad } v_n|^2 \, dx + \int_{G_2} |\text{grad } v_n|^2 \, dx. \end{aligned}$$

Dabei definiere G_1 ein C^2 -glatt berandetes Gebiet in D und G_2 ein solches in $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ mit der Eigenschaft $G_i \cap \partial D = \emptyset$ für $i = 1, 2$. Führen wir den Grenzübergang $n \rightarrow \infty$

durch, so folgt:

$$(S\varphi, \varphi) \geq \int_{G_1} |\text{grad } v|^2 dx + \int_{G_2} |\text{grad } v|^2 dx \geq 0.$$

Aus $(S\varphi, \varphi) = 0$ folgt $\text{grad } v = 0$ in G_i und deshalb $v = \text{const}$ in G_i für $i = 1, 2$. Da harmonische Funktionen analytisch sind und das Einfachschichtpotential in ganz \mathbb{R}^2 stetig ist, folgt $v = \text{const}$ in ganz \mathbb{R}^2 . Die Sprungrelation liefert jetzt $0 = \frac{\partial v_-}{\partial \nu} - \frac{\partial v_+}{\partial \nu} = \varphi$, d.h. S ist positiv definit auf $C_0(\partial D)$.

Für alle $\psi \in L_0^2(\partial D)$ finden wir eine Folge von Funktionen $\{\psi_n\} \subset C_0(\partial D)$, die in der L^2 -Norm gegen ψ konvergiert. Mit v_n bezeichnen wir die Einfachschichtpotentiale mit den Dichten ψ_n . Nun gilt $(S\psi_n, \psi_n) \geq \int_{G_1} |\text{grad } v_n|^2 dx + \int_{G_2} |\text{grad } v_n|^2 dx \geq 0$. Die Relation ist für jedes Folgenglied erfüllt, also auch für den Grenzwert. Ist $(S\psi, \psi) = 0$, so folgt wieder $\text{grad } v = 0$ in G_i für $i = 1, 2$. Also ist v konstant in G_i und damit in \mathbb{R}^2 . An dieser Stelle nutzen wir die Sprungrelation für v aus. Da wir hier mit L^2 -Dichten arbeiten und eine punktweise Auswertung solcher Funktionen wenig Sinn macht, werden wir die potentialtheoretische Sprungbeziehung für das Einfachschichtpotential mit L^2 -Dichten heranziehen, die lautet:

$$\lim_{h \rightarrow +0} \int_{\partial D} [2\nu(x) \cdot \text{grad } u(x \pm h\nu(x)) - (K^*\psi)(x) \pm \psi(x)]^2 ds(x) = 0.$$

Aus der Sprungrelation folgt schließlich $\psi = 0$, was die Definitheit von S in $L_0^2(\partial D)$ gewährleistet. \square

Auf Grund der Symmetrien werden wir uns wieder nur auf die Kurve Γ bzw. Γ_B beschränken. Im Zuge dessen werden wir auch eine äquivalente Darstellung der Operatoren K , K^* und S verwenden, die wir bereits in (3.10) für K gesehen haben. Demzufolge können wir schreiben:

$$(S\varphi)(x) = \int_{\Gamma} [\Phi(x, y) - \Phi(x, y^\rho)] \varphi(y) ds(y) \quad (5.5)$$

und

$$(K^*\varphi)(x) = \int_{\Gamma} G^*(x, y) \varphi(y) ds(y),$$

wobei

$$G^*(x, y) := \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} - \frac{\partial \Phi(x, y^\rho)}{\partial \nu(x)}. \quad (5.6)$$

5.3 Faktorisierung des Operators W

Es sei $W : L_0^2(\Gamma_B) \rightarrow L_0^2(\Gamma_B)$ definiert als

$$(Wg)(x) := - \int_{\Gamma_B} u(x, y)g(y) ds(y), \quad x \in \Gamma_B. \quad (5.7)$$

Als Folge der Korrektgestelltheit des äußeren Dirichlet-Problems ist der Kern von W stetig und W wohldefiniert. Unser erstes Ziel ist es, diesen Operator geeignet zu faktorisieren, um dann die Informationen über die Kurve Γ leichter herausfiltern zu können.

Als erstes benötigen wir eine geeignete Abbildung von $L_0^2(\Gamma)$ nach $L_0^2(\Gamma_B)$. Um diese zu motivieren, ziehen wir uns zuerst auf den Raum der stetigen Funktionen zurück und führen den linearen Operator $A : C_0(\Gamma) \rightarrow C_0(\Gamma_B)$ ein, wobei $A(f) = u|_{\Gamma_B}$ ist. Er bildet die zur Lösung $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}) \cap C(\mathbb{R}^2 \setminus D)$ des äußeren Dirichlet-Problems gehörenden Randwerte $f \in C_0(\Gamma)$ auf die Spur von u auf Γ_B ab. Nach Abschnitt 3.3 lässt er sich darstellen als $A = 2U(I + K)^{-1}$, wobei K wie in (3.10) definiert ist und

$$(U\varphi)(x) := \int_{\Gamma} G(x, y)\varphi(y) ds(y), \quad x \in \Gamma_B,$$

als ein Integraloperator von $C_0(\Gamma)$ in $C_0(\Gamma_B)$ mit stetigem Kern kompakt ist. Der Operator $(I + K)^{-1}$ ist beschränkt. Das heißt unter anderem, dass A von $C_0(\Gamma)$ in $C_0(\Gamma_B)$ abbildet und als Verknüpfung eines beschränkten und eines kompakten Operators kompakt ist. Setzen wir A als Abbildung von $L_0^2(\Gamma)$ nach $L_0^2(\Gamma_B)$ fort, so gilt:

Satz 5.9 *Der Operator $A : L_0^2(\Gamma) \rightarrow L_0^2(\Gamma_B)$ ist wohldefiniert und kompakt. Und es gilt $N(A) = \{0\}$. Ist $A^* : L_0^2(\Gamma_B) \rightarrow L_0^2(\Gamma)$ der zu A adjungierte Operator, so gilt $N(A^*) = \{0\}$.*

Beweis: Wir wissen, dass der Kern G von U als Abbildung von $\Gamma_B \times \Gamma$ nach \mathbb{R} stetig ist, was U zu einem kompakten Operator zwischen Hilberträumen macht. Da auch $(I + K) : L_0^2(\Gamma) \rightarrow L_0^2(\Gamma)$ nach Korollar 5.3 beschränkt und invertierbar ist, folgt die Wohldefiniertheit und speziell die Kompaktheit von A . Sei φ aus dem Nullraum von U . Das mit dieser Dichte definierte Doppelschichtpotential u verschwindet auf Γ_B und fällt im Unendlichen gegen null ab. Aus der Eindeutigkeit des äußeren Dirichlet-Problems für ein C^2 -glatt berandetes Gebiet wissen wir, dass u in $\mathbb{R}^2 \setminus B$

verschwindet. Da harmonische Funktionen analytisch sind, und u in $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ harmonisch ist, gilt sogar $u = 0$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$. Aus der potentialtheoretischen Sprungbeziehung für ein Doppelschichtpotential mit L^2 -Dichte, gegeben durch

$$\lim_{h \rightarrow +0} \int_{\partial D} [2u(x \pm h\nu(x)) - (K\varphi)(x) \mp \varphi(x)]^2 ds(x) = 0,$$

folgt, dass φ konstant sein muss. Aber es gilt $\varphi \in L_0^2(\Gamma)$ und deshalb ist $\varphi = 0$. Aus $A = 2U(I + K)^{-1}$ und unter Beachtung der Injektivität von $(I + K)^{-1}$ folgt sofort $N(A) = N(U) = \{0\}$.

Durch Nachrechnen stellen wir sicher, dass der zu A adjungierte Operator die Gestalt $A^* = 2(I + K^*)^{-1}U^*$ hat, wobei U^* den eindeutig bestimmten und zu U adjungierten Operator bezeichne. Er ist gegeben durch

$$(U^*g)(x) := \int_{\Gamma_B} G^*(x, y)g(y) ds(y), \quad x \in \Gamma,$$

wobei G^* definiert ist wie in (5.6). Aus der Kompaktheit von U folgt nach Satz 2.9 auch die Kompaktheit von U^* . Da $(I + K^*)^{-1}$ wieder injektiv ist, bleibt $N(A^*) = N(U^*)$. Sei $g \in N(U^*)$. Definiert v das Einfachschichtpotential mit der Dichte g , so verschwindet seine Normalableitung auf dem Rand von B , und v ist konstant auf ∂B . Nach der Eindeutigkeit des inneren Neumann-Problems für L_0^2 -Randwerte in C^2 -glatten Gebieten können wir sogar folgern, dass v in ganz B konstant ist. Aus der potentialtheoretischen Sprungbeziehung im L^2 -Sinne erhalten wir für v die Normalableitung:

$$0 = \frac{\partial v}{\partial \nu} = \frac{1}{2}g + \int_{\Gamma_B} G^*(\cdot, y)g(y) ds(y) = \frac{1}{2}(I + K_B^*)g.$$

Unter K_B^* verstehen wir den Operator K^* für Γ_B an Stelle von Γ . Aber $(I + K^*)$ ist injektiv und damit $g = 0$ und $N(A^*) = \{0\}$. \square

Nun sind wir in der Lage das Bild von A zu charakterisieren, denn nach Satz 2.10 gilt:

$$\overline{A(L_0^2(\Gamma))} = [N(A^*)]^\perp = L_0^2(\Gamma_B). \quad (5.8)$$

Mit Hilfe des in (5.5) eingeführten Einfachschichtpotentialoperators S und des Operators A können wir W geeignet zerlegen.

Satz 5.10 *Für die Operatoren W , A und S gilt die Faktorisierung*

$$W = ASA^*. \quad (5.9)$$

Beweis: Die durch

$$\begin{aligned}(P\varphi)(x) &:= \int_{\Gamma} [\Phi(x, y) - \Phi(x, y^\rho)] \varphi(y) ds(y), \quad x \in \Gamma_B, \\ (P^*g)(x) &:= \int_{\Gamma_B} [\Phi(x, y) - \Phi(x, y^\rho)] g(y) ds(y), \quad x \in \Gamma,\end{aligned}$$

wohldefinierten Operatoren $P : L_0^2(\Gamma) \rightarrow L_0^2(\Gamma_B)$ und $P^* : L_0^2(\Gamma_B) \rightarrow L_0^2(\Gamma)$ sind adjungiert.

Die Gleichung

$$-u(\cdot, y)|_{\Gamma_B} = A([\Phi(\cdot, y) - \Phi(\cdot, y^\rho)]|_{\Gamma}), \quad y \in \Gamma_B.$$

wird mit $g \in L_0^2(\Gamma_B)$ multipliziert und über Γ_B integriert:

$$-\int_{\Gamma_B} u(\cdot, y)|_{\Gamma_B} g(y) ds(y) = \int_{\Gamma_B} A([\Phi(\cdot, y) - \Phi(\cdot, y^\rho)]|_{\Gamma}) g(y) ds(y).$$

Unter Berücksichtigung der korrekten Gestelltheit des äußeren Dirichlet-Problems und der Beschränktheit von A erhalten wir

$$Wg = AP^*g. \tag{5.10}$$

Da φ den Mittelwert null hat, verschwindet das Einfachschichtpotential v , definiert mit der Dichte φ im Unendlichen. Es beschreibt eine harmonische Funktion in $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ und ist nach Satz 3.5 sogar stetig in ganz \mathbb{R}^2 . Damit ist v die eindeutige Lösung des äußeren Dirichlet-Problems mit den Randwerten $v|_{\Gamma}$ und es gilt:

$$P\varphi = v|_{\Gamma_B} = Av|_{\Gamma} = AS\varphi.$$

Daher können wir schreiben $P = AS$. Das bedeutet wiederum $P^* = SA^*$. Einsetzen in (5.10) liefert das Ergebnis. \square

Die Faktorisierung ist ein wichtiger Schritt zur Lösung unseres Problems. Während W Informationen über den Rand nur implizit enthält, liegen sie bei S in expliziter Form vor.

5.4 Gebietsrekonstruktion

Unser Ziel ist es, das Gebiet D mit Hilfe der Spektraldaten von W zu charakterisieren. Dabei wird die bereits bewiesene Faktorisierung des Operators ausgenutzt.

Satz 5.11 *Der Operator $W : L_0^2(\Gamma_B) \rightarrow L_0^2(\Gamma_B)$ ist kompakt und positiv semidefinit. Der Nullraum von W ist $N(W) = \{0\}$, und es gibt ein vollständiges Orthonormalsystem $g_n \in L_0^2(\Gamma_B)$ aus Eigenfunktionen von W mit positiven Eigenwerten λ_n , d.h.*

$$Wg_n = \lambda_n g_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.11)$$

Beweis: Die Kompaktheit von W folgt sofort aus der Stetigkeit des Kerns. Es ist mit (5.9) leicht einzusehen, dass W ein selbstadjungierter Operator ist und $L_0^2(\Gamma_B)$ abbildet in $A(L_0^2(\Gamma)) \subset [N(A^*)]^\perp = L_0^2(\Gamma_B)$. Da S nach Satz 5.8 positiv definit ist, gilt für $g \in L_0^2(\Gamma_B)$

$$(Wg, g) = (SA^*g, A^*g) \geq 0.$$

Damit ist W zumindest positiv semidefinit. Außerdem gilt $N(W) = N(A^*) = \{0\}$. Die Funktionalanalysis liefert uns mit dem Spektralsatz für selbstadjungierte kompakte Operatoren (Satz 2.11) schließlich die Behauptung. \square

Der folgende Satz ermöglicht eine weitere Aufspaltung von S und damit von W .

Satz 5.12 *Zu dem kompakten und positiv definiten Operator $S : L_0^2(\Gamma) \rightarrow L_0^2(\Gamma)$ existiert ein eindeutig bestimmter, kompakter und positiv definiten Operator $S^{1/2} : L_0^2(\Gamma) \rightarrow L_0^2(\Gamma)$ mit der Eigenschaft*

$$S^{1/2}S^{1/2} = S.$$

Beweis: Als Folge des Spektralsatzes für kompakte selbstadjungierte Operatoren können wir S darstellen als

$$S\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (\varphi, \varphi_n) \varphi_n.$$

Dabei sind λ_n die Eigenwerte von S und φ_n die zugehörigen Eigenfunktionen, die ein Orthonormalsystem in $L_0^2(\Gamma)$ bilden. Da S positiv definit ist, sind alle Eigenwerte $\lambda_n > 0$. Für $\varphi \in L_0^2(\Gamma)$ sei

$$S^{1/2}\varphi := \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} (\varphi, \varphi_n) \varphi_n.$$

Die Selbstadjungiertheit von $S^{1/2}$ folgt sofort aus der Definition. Außerdem gilt

$$(S^{1/2}\varphi, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} |(\varphi, \varphi_n)|^2 > 0$$

für alle $\varphi \in L_0^2(\partial D)$ mit $\varphi \neq 0$, also ist $S^{1/2}$ ebenfalls positiv definit. Für den Nachweis der Kompaktheit benutzen wir eine Folge von Operatoren, definiert als $T_N := \sum_{n=1}^N \sqrt{\lambda_n}(\cdot, \varphi_n)\varphi_n$, für $N \in \mathbb{N}$, die gegen $S^{1/2}$ konvergiert. Die so definierten Operatoren sind auf Grund ihres endlich dimensionalen Bildes nach Satz 2.3 aber kompakt. Wir erhalten

$$\|S^{1/2} - T_N\| \leq \sup_{n>N} \sqrt{\lambda_n} \rightarrow 0, \quad \text{für } N \rightarrow \infty.$$

Nach Satz 2.2 ist der Grenzwert einer normkonvergenten Folge kompakter Operatoren wieder kompakt.

Es bleibt noch die Eindeutigkeit des Wurzeloperators zu zeigen. Sei also R ein kompakter, positiv definitiver Operator mit der Eigenschaft $R^2 = S$. Unter erneuter Zuhilfenahme des Spektralsatzes können wir R ebenfalls darstellen als

$$R\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(\varphi, \varphi_n)\varphi_n,$$

dabei gilt $\mu_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus der Definition von R können wir schließen, dass $\{\mu_n^2\}_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge der Eigenwerte von S ist. Es muss also $S^{1/2} = R$ gelten, da die entsprechenden Reihen punktweise gegen den gleichen Wert konvergieren. \square

Beachten wir (5.9) und (5.11), so wird klar, dass mit den Funktionen

$$\varphi_n := \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} S^{1/2} A^* g_n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.12)$$

ein Orthonormalsystem in $L_0^2(\Gamma)$ gegeben ist. Des weiteren sei

$$\Psi(x, y) := -\Phi(x, y) + \Phi(x, y^\rho), \quad y \in B, x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{y\}. \quad (5.13)$$

Wie wir wissen, ist Ψ für ein festes y harmonisch in $\mathbb{R}^2 \setminus \{y\}$ und nach (2.11) verschwindet es für $|x| \rightarrow \infty$ gleichmäßig für alle Richtungen. Für ein Gebiet $\tilde{D} \subset B$, dessen Rand sich wie bisher als eine Vereinigung zweier bzgl. der x -Achse symmetrischer Kurven γ und γ^ρ beschreiben lässt und den Punkt $z \in B$ im Inneren enthält, gilt

$$\Psi(\cdot, z)|_{\Gamma_B} \in A_\gamma(L_0^2(\gamma)).$$

Dabei ist A_γ definiert wie A , jedoch auf γ an Stelle von Γ . Also ist $\Psi(\cdot, z)|_{\Gamma_B} \in L_0^2(\Gamma_B)$ wegen (5.8). Wir nutzen aus, dass $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ein vollständiges Orthonormalsystem in $L_0^2(\Gamma_B)$ bilden, weshalb die Fourierreihe

$$\Psi(\cdot, z) = \sum_{n=1}^{\infty} (\Psi(\cdot, z), g_n) g_n, \quad z \in B \quad (5.14)$$

konvergiert.

Mit der geleisteten Vorarbeit sind wir jetzt in der Lage, das Gebiet D zu charakterisieren, indem wir zum einen die Spektralwerte von W und zum anderen das singuläre Verhalten von $\Psi(\cdot, z)$ in z ausnutzen.

Satz 5.13 *Für einen Punkt $z \in B$ gilt*

$$(i) \quad z \in D \implies \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} |(\Psi(\cdot, z), g_n)|^2 < \infty,$$

$$(ii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} |(\Psi(\cdot, z), g_n)|^2 < \infty \implies z \in \bar{D}.$$

Beweis: (i) Mit $\Psi(\cdot, z)$ für $z \in D$ liegt eine harmonische Funktion in $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ vor, welche die entsprechenden Randwerte $f = \Psi(\cdot, z)|_{\Gamma} \in C_0^2(\Gamma)$ auf Γ annimmt und im Unendlichen verschwindet. Daher gilt $Af = g$ mit $g = \Psi(\cdot, z)|_{\Gamma_B}$. Zu $f \in H_0^1(\partial D)$ finden wir auf Grund der Surjektivität von S , die aus Satz 5.7 folgt, ein $\psi \in L_0^2(\Gamma)$, so dass $S\psi = f$ gilt. Daraus folgt $g = Af = AS\psi$ und deshalb $g = AS^{1/2}\varphi$ mit $\varphi = S^{1/2}\psi \in L_0^2(\Gamma)$. Die Besselsche Ungleichung angewandt auf das Orthonormalsystem (5.12), liefert

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(\varphi, \varphi_n)|^2 \leq \|\varphi\|^2. \quad (5.15)$$

Nach (5.9) und (5.12) gilt:

$$\sqrt{\lambda_n}(\varphi, \varphi_n) = (\varphi, S^{1/2}A^*g_n) = (AS^{1/2}\varphi, g_n) = (g, g_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

Wir setzen dies in (5.15) ein und erhalten die Konvergenz der Reihe in (i).

(ii) Aus der Konvergenz der Reihe in (ii) sehen wir, dass

$$\varphi := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} (\Psi(\cdot, z), g_n) \varphi_n$$

in $L_0^2(\Gamma)$ liegt. Weiterhin gilt, dass

$$AS^{1/2}\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}} (\Psi(\cdot, z), g_n) AS^{1/2}\varphi_n.$$

Unter Ausnutzung von

$$AS^{1/2}\varphi_n = \sqrt{\lambda_n}g_n \quad (5.16)$$

und (5.14) erhalten wir

$$AS^{1/2}\varphi = g,$$

wobei $g = \Psi(\cdot, z)|_{\Gamma_B}$ erfüllt. Da wir $z \in B$ vorausgesetzt haben, ist $\Psi(\cdot, z)$ harmonisch in $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{B}$ und erfüllt damit das äußeren Dirichlet-Problem in $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{B}$ zu den Randwerten $\Psi(\cdot, z)|_{\Gamma_B}$. Rufen wir uns kurz die Abbildungseigenschaft von A ins Gedächtnis. Der Operator bildet die zum äußeren Dirichlet-Problem in $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ gehörenden Randwerte, hier $S^{1/2}\varphi \in L_0^2(\Gamma)$, auf die Spur $u|_{\Gamma_B}$ der zugehörigen Lösung ab. Für diesen Fall bedeutet das: $u|_{\Gamma_B} = \Psi(\cdot, z)|_{\Gamma_B}$. Aus der Eindeutigkeit des äußeren Dirichlet-Problems in $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{B}$ sehen wir, dass $u = \Psi(\cdot, z)$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{B}$. Die Analytizität harmonischer Funktionen liefert uns schließlich $u = \Psi(\cdot, z)$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$. Hieraus folgt aber, dass der Punkt z nicht in $B \setminus \bar{D}$ liegen kann, weil das singuläre Verhalten von $\Psi(\cdot, z)$ in z dem harmonischen Verhalten von u in $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ widerspricht. Also muss z in $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ liegen, womit die Aussage (ii) ebenfalls bewiesen ist. \square

Es ist möglich, den Teil (ii) der Aussage im obigen Satz zu verschärfen und $z \in D$ zu folgern. Damit erhält man die Äquivalenz beider Aussagen. Der Beweis würde jedoch die Eindeutigkeit des äußeren Dirichlet-Problems mit L^2 -Randwerten für ein Gebiet mit Ecken erfordern. Der Beweis dieser Aussage ist wiederum zu aufwändig, als dass es sich lohnt ihn hier zu führen. Es kommt hinzu, dass eine Verschärfung der Aussage kaum eine Rolle in der praktischen Umsetzung spielt.

Kapitel 6

Numerik des inversen Problems

In diesem letzten Kapitel widmen wir uns der praktischen Umsetzung der Lösung des inversen Problems. Wo normalerweise Messdaten verwendet werden, nutzen wir künstlich erzeugte „exakte“ Daten, die wir aus der Lösung des direkten Problems erhalten.

6.1 Eigenwertberechnung

Der erste Schritt zur Rekonstruktion der gesuchten Störung ist die Berechnung der Spektraldaten eines Integraloperators. Wir approximieren das Problem durch ein endlich dimensionales Problem und lösen dieses.

Sei $\gamma : [0, \pi] \rightarrow \Gamma_B$ eine reguläre und gegen den Uhrzeigersinn orientierte Parametrisierung des Kreisbogens Γ_B , beschrieben durch

$$\gamma(t) = R(\cos(t), \sin(t)), \quad t \in [0, \pi],$$

wobei $R \in \mathbb{R}_+$ den Radius angibt. Man beachte, dass die Kreisscheibe B das gesuchte Gebiet D ganz enthalten muss. Das Intervall $[0, \pi]$ wird äquidistant mit $m + 1$ Punkten $t_i = \pi i/m$ für $i = 0, \dots, m$ unterteilt. Das Einsetzen in die Parametrisierung liefert die Verteilung der Punkte auf der Kurve, die wir mit $\gamma_i := \gamma(t_i)$ abkürzen werden, und gegebenenfalls schreiben wir $\gamma_i = (\gamma_i^1, \gamma_i^2)$.

Unser erstes Ziel ist es, die Eigenwerte und zugehörigen Eigenfunktionen des in (5.7) definierten Operators W zu bestimmen. Parametrisiert hat er die folgende Gestalt:

$$(Wg)(\gamma(t)) = - \int_0^\pi u(\gamma(t), \gamma(\tau))g(\gamma(\tau)) |\gamma'(\tau)| d\tau, \quad t \in [0, \pi].$$

Dabei ist $|\gamma'(\tau)| = R$, da wir über einen Kreisbogen integrieren.

Wir gehen davon aus, dass für $i = 0, \dots, m$ die $m + 1$ Lösungen $u(\cdot, \gamma_i)$ des äußeren Dirichlet-Problems (5.1)-(5.2) zu den Randwerten

$$u(\cdot, \gamma_i) = -\Phi(\cdot, \gamma_i) + \Phi(\cdot, \gamma_i^p) \text{ auf } \Gamma$$

bekannt sind. Es genügt sogar, $u(\cdot, \gamma_i)|_{\Gamma_B}$ für $i = 0, \dots, m$ zu kennen. Wir schreiben insbesondere $u_{i,j} := u(\gamma_i, \gamma_j)$ für $i, j \in \{0, \dots, m\}$. Man beachte, dass die Punkte γ_i , welche die Randbedingungen festlegen, mit den Messpunkten zusammenfallen.

Unter Ausnutzung der Messdaten auf $\gamma_0, \dots, \gamma_m$ approximieren wir die Eigenwertgleichung $Wg = \lambda g$ mit der Bedingung

$$-\frac{\pi R}{m} \sum_{j=0}^m u_{i,j} g_j^{(m)} = \lambda^{(m)} g_i^{(m)} \quad i = 1, \dots, m-1.$$

Da $u(\cdot, \gamma_0) = u(\cdot, \gamma_m) = 0$ gilt ebenso wie $u(\gamma_0, \gamma_j) = u(\gamma_m, \gamma_j) = 0$ für $j = 0, \dots, m$ genügt es sogar, nur $i, j = \{1, \dots, m-1\}$ zu betrachten. Wir erhalten also das endlich dimensionale Problem $W^{(m)} g^{(m)} = \lambda^{(m)} g^{(m)}$, mit

$$W_{i,j}^{(m)} := -\frac{\pi R}{m} u_{i,j}, \quad i, j \in \{1, \dots, m-1\},$$

d.h. wir suchen jetzt Eigenwerte $\lambda^{(m)} \in \mathbb{R}$ und Eigenvektoren $g^{(m)} \in \mathbb{R}^{(m-1)}$ von $W^{(m)} \in \mathbb{R}^{(m-1) \times (m-1)}$.

Satz 6.1 Die Eigenwerte von $W^{(m)}$ konvergieren für $m \rightarrow \infty$ gegen die Eigenwerte von W .

Beweis: Siehe [1], Kapitel 4, Satz 4.8. □

6.2 Visualisierung

Durch den Satz 5.13 erhielten wir ein Kriterium zur Charakterisierung des gesuchten Gebietes D . Danach liegt ein Punkt $z \in B$ in D , wenn gilt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} |(\Psi(\cdot, z), g_n)|^2 < \infty.$$

Wir approximieren die Reihe mit einer endlichen Summe. Es gilt $z \in D$ falls

$$\Sigma_m(z) := \sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{\lambda_n^{(m)}} \left| \frac{\pi R}{m} \sum_{i=1}^{m-1} \Psi_i(z) g_{n,i}^{(m)} \right|^2$$

„relativ klein“ ist, wobei gilt:

$$\Psi_i(z) = -\frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{(\gamma_i^1 - z_1)^2 + (\gamma_i^2 - z_2)^2}} + \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{\sqrt{(\gamma_i^1 - z_1)^2 + (\gamma_i^2 + z_2)^2}}$$

für $i = 1, \dots, m-1$.

Das ursprüngliche Problem dieser Arbeit war die Rekonstruktion einer Störung der oberen Halbebene. Die Erweiterung zu einem Gebiet mit Ecken war nur eine Hilfskonstruktion, um die Theorie einfacher behandeln zu können. Deshalb legen wir ein feines Gitter von Punkten über ein Gebiet in der oberen Halbebene, das sowohl Γ als auch die Messkurve Γ_B enthält und berechnen $\Sigma_m(z_{i,j})$ für alle Gitterpunkte $z_{i,j}$ für $i, j \in 1, \dots, N$. Es stellt sich jetzt die Frage: „Was bedeutet relativ klein?“. Tragen wir die erhaltenen Werte in einem Farbcode auf dem Punktgitter auf, so stellen wir fest, dass sie entlang der Messkurve extrem groß werden und wir keine weiteren Höhendifferenzen erkennen können. Das Phänomen lässt sich leicht erklären. Treffen nämlich Messpunkte aus Γ_B mit Gitterpunkten zusammen, so kommt das singuläre Verhalten der Grundlösung in Ψ zum Vorschein. Man könnte also meinen, mit dem Kehrwert von $\Sigma_m(z_{i,j})$ eine bessere Darstellung zu erzielen. Wir erhalten einen schmalen Streifen innerhalb des Gebietes, der entlang der x -Achse verläuft. Dieses Phänomen können wir darauf zurückführen, dass Ψ direkt auf der x -Achse verschwindet und in einer Umgebung davon, innerhalb des Gebietes, besonders klein bleibt. Bei dieser Auftragung lässt es sich zwar erahnen, wo das gesuchte Gebiet liegt, es ist aber nicht zufriedenstellend. Eine logarithmische Auftragung ist vorerst am sinnvollsten.

In allen nachfolgenden Darstellungen wurde, wenn nichts anderes angegeben ist, das direkte Problem mit jeweils 128 Punkten auf Γ gelöst. Eine geringere Anzahl von Stützstellen reicht zwar auch aus, die Rekonstruktionen sind dann jedoch ungenauer. Die Visualisierung der Rekonstruktion erfolgt auf einem achsenparallelen Gitter, das von jeweils 200×200 Punkten erzeugt wird. Auch hier kann man die Anzahl der Punkte verringern. Wir verzichten vorerst darauf, um eine gute Auflösung der Bilder zu gewährleisten.

Das Programm, mit dem alle Bilder erzeugt wurden, ist in Matlab geschrieben. Beim Testen des Programms stellte sich sehr schnell heraus, dass es einen Unterschied von wenigen Sekunden macht, ob man mit hoher oder geringer Auflösung arbeitet.

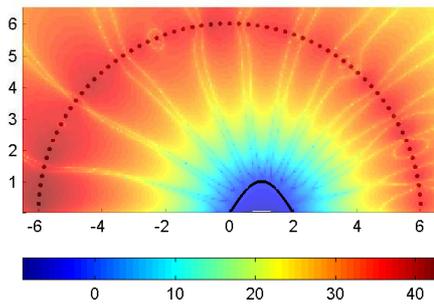


Abb. 6.1: Zitrone: Rekonstruktion mit allen Eigenwerten

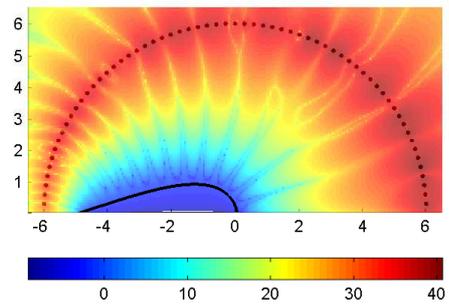


Abb. 6.2: Tropfen: Rekonstruktion mit allen Eigenwerten

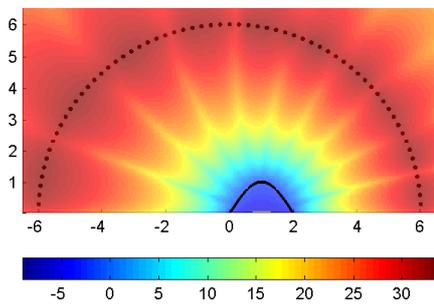


Abb. 6.3: Zitrone: Rek. mit 11 von 64 Eigenwerten

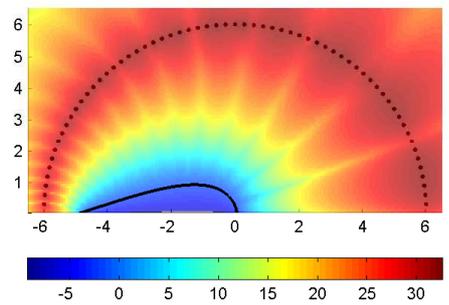


Abb. 6.4: Tropfen: Rek. mit 17 von 64 Eigenwerten

Die Abbildungen 6.1 und 6.2 stellen eine Rekonstruktion des Tropfens und der Zitrone dar. Die Messdaten wurden durch das Lösen des direkten Problems mit 64 Punkten auf Γ_B simuliert. Die Werte von Σ_m in $z_{i,j}$ wurden logarithmisch aufgetragen ($\log \Sigma_m(z_{i,j})$). Zu erkennen ist die Lage und eine ungefähre Größe des gesuchten Gebietes, das mit einer durchgezogenen Linie gekennzeichnet ist. Die Form lässt sich nur grob erahnen.

6.3 Fehlerquelle Eigenwerte

Eine perfekte Rekonstruktion erfordert perfekte Ausgangsdaten und exakte Rechnungen. Beides ist natürlich nicht gegeben. Werden die Ausgangsdaten durch tatsächliche Messungen gewonnen, so schleichen sich auch bei den besten Apparaturen Messfehler ein. Werden die Daten, so wie in dieser Arbeit künstlich erzeugt, so sind sie bereits viel genauer, aber auch hier treten Fehler auf, da man nie genauer rechnen kann, als es die Rechnergenauigkeit erlaubt. Da diese z.B. bei Matlab $2.2204e - 16$ beträgt, ist sie vernachlässigbar. Ein größeres Problem stellt die Genauigkeit des verwendeten Verfahrens dar. Da wir bei der Faktorisierungsmethode gezwungen sind, den eigentlichen Operator durch eine Folge von Operatoren anzunähern, so muss theoretisch ein Grenzübergang durchgeführt werden, der in der praktischen Rechnung nicht möglich ist.

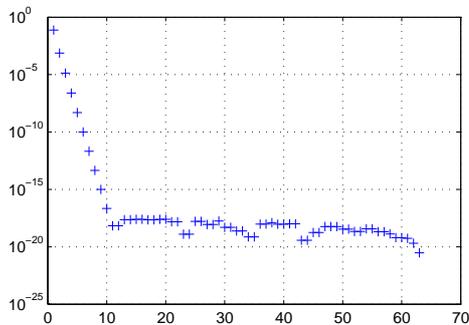


Abb. 6.5: Eigenwerte von $W^{(m)}$: Zitrone

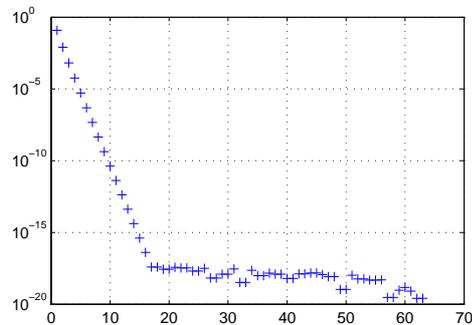


Abb. 6.6: Eigenwerte von $W^{(m)}$: Tropfen

Welche Fehlerquellen lassen sich ausschalten bzw. wo kann man ihren Einfluss zumindest mindern? Die Vergrößerung der Stützstellenanzahl ist nur bis zu einem gewissen Grad möglich und sinnvoll, also sollten wir uns einen anderen Weg suchen. Betrachten wir zum Beispiel die Eigenwerte $\lambda_i^{(m)}$ für $i = 1, \dots, m - 1$ von

$W^{(m)}$, so stellen wir ein exponentielles Abfallverhalten in den ersten Werten fest. Eine logarithmische Darstellung der Eigenwerte, wie in den Abbildungen 6.5 und 6.6, verdeutlicht das sehr gut. Es ist besonders auffällig, dass diese Tendenz erst bei Werten, die kleiner als 10^{-16} sind, sich also in der Rechnergenauigkeit befinden, unterbrochen wird. Das lässt darauf schließen, dass die Werte zu klein sind, als dass Matlab sie korrekt berechnen könnte. Bevor wir jetzt fehlerhafte Daten verwenden, ist es sinnvoller, ganz darauf zu verzichten und nur die Eigenwerte zu verwenden, die tatsächlich ein exponentielles Abfallverhalten aufweisen. Im Fall der 'Zitrone' sind das 11 Eigenwerte und im Fall des 'Tropfens' 17, wie wir anhand der Abbildung 6.5 und 6.6 ablesen können. Welche Auswirkung das Eliminieren der fehlerhaften Eigenwerte hat, sehen wir im Vergleich der Abbildungen 6.1 und 6.2, die mit allen Eigenwerten erzeugt wurden, und 6.3 sowie 6.4, bei deren Berechnung nur Eigenwerte mit exponentiellem Abfallverhalten verwendet wurden.

6.4 Abschneideparameter

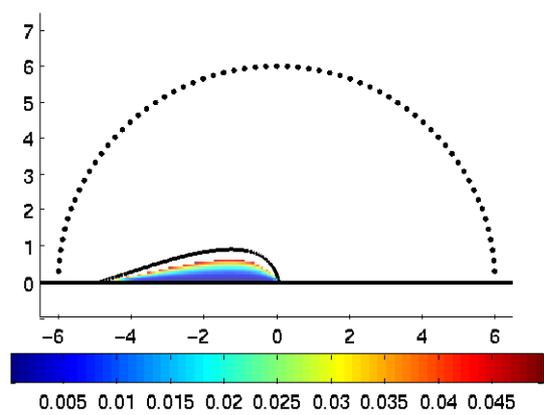
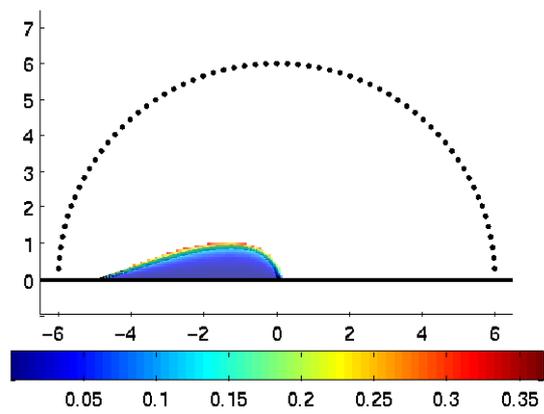
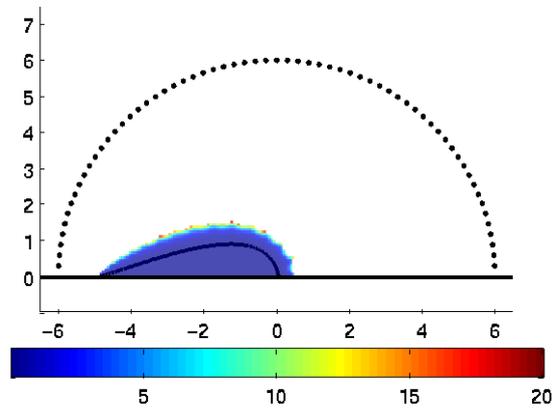
Sind wir nicht nur an der Position und der Größe, sondern auch an der Form des eingeschlossenen Gebietes interessiert, so müssen wir noch etwas mehr Aufwand betreiben. Eine Möglichkeit ist die Verwendung eines Abschneideparameters $\mu \in \mathbb{R}$. Haben wir Σ_m für alle $z_{i,j}$ mit $i, j \in \{1, \dots, m-1\}$ berechnet, so gehen wir davon aus, dass alle Punkte $z_{i,j}$ in D liegen, für die gilt:

$$\ln(\Sigma_m(z_{i,j})) \leq \mu.$$

Dementsprechend werden auch nur diese Werte aufgetragen. Wir verzichten dieses Mal darauf, sie logarithmisch aufzutragen, da die Bilder so klarer werden.

Bei dieser Methode besteht natürlich immer das Risiko, völlig falsche Parameter zu wählen und ein zu großes oder zu kleines Gebiet zu erhalten. In der Abbildung 6.7 sehen wir drei Rekonstruktionen des Tropfens im Vergleich, die mit 17 von 64 Eigenwerten und jeweils verschiedenen Abschneideparametern produziert wurden. Die schwarze Linie beschreibt das exakte Gebiet. Mit $\mu = -1$ haben wir also einen nahezu perfekten Parameter gefunden. Wird der Parameter zu groß gewählt, z.B. $\mu = 3$, ist die Rekonstruktion zwar nicht genau, wir erhalten aber bereits eine gute Näherung. Ebenso verhält es sich mit zu kleinen Werten für μ .

Die enorm kleinen Werte von Ψ entlang der x -Achse bereiten leider Schwierigkeiten bei der Rekonstruktion von Gebieten mit konkaven Ecken. Bei einem optimalen Abschneideparameter lassen sie sich zwar noch erahnen, werden jedoch nicht ausreichend rekonstruiert, wie wir am Beispiel der Erdnuss in der Abbildung 6.8 sehen

Abb. 6.7: Tropfen: $\mu_1 = 3, \mu_2 = -1, \mu_3 = -3$ 

können. Für die Darstellung konnten 15 von 64 Eigenwerten verwendet werden und der Abschneideparameter betrug -1.5 .

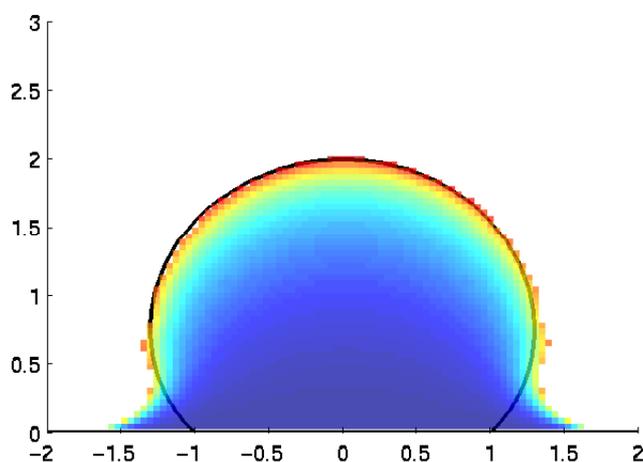


Abb. 6.8: Erdnuss mit Fehler an Ecken

Um den Zufall bei der Wahl des Abschneideparameters einzuschränken, empfiehlt es sich, zuerst eine logarithmische Darstellung, wie in Abschnitt 6.2 beschrieben, zu erstellen und den Abschneideparameter unter Berücksichtigung der Höhenskala auszuwählen. Mit Werten um $\mu = -1$ konnte ich bisher für jedes Testgebiet eine zufriedenstellende Rekonstruktion erzeugen.

6.5 Schlusswort

Die Faktorisierungsmethode eignet sich hervorragend, um die Lage und ungefähre Größe eines Gebietes zu bestimmen. Die Rekonstruktion der Form ist zum einen mit einem gewissen Zufallsfaktor (Raten des Abschneideparameters) verbunden und zum anderen müssen fehlerhafte Rekonstruktionen an den Ecken in Kauf genommen werden.

Eine Möglichkeit den Zufallsfaktor auszuschalten, wird in [12] vorgestellt. In seiner Diplomarbeit untersucht Kühn die Rekonstruktion von Gebieten aus Spektraldaten beim Neumannschen Randwertproblem. Er nimmt ein exponentielles Abklingverhalten der Eigenwerte an, d.h. $\lambda_n = ab^n$. Den Wert $\ln b$ versteht er als Anstieg der Ausgleichsgeraden für alle 'korrekten' Eigenwerte. Ebenso wird für jeden Punkt z

aus dem gegebenen Gitter die Steigung s der Ausgleichsgeraden von $\ln |(\Psi(\cdot, z), g_n)|^2$ berechnet. Jetzt können wir annehmen, dass

$$\sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{\lambda_n} |(\Psi(\cdot, z), g_n)|^2 < c \sum_{n=1}^{m-1} \left(\frac{s}{\ln b}\right)^n$$

mit einer Konstanten c erfüllt ist. Auf der rechten Seite haben wir aber eine geometrische Reihe vorliegen. Ist s kleiner als $\ln b$, so konvergiert die Reihe, falls $s \geq \ln b$, so liegt Divergenz vor. Eine Charakterisierung über die Steigung der Ausgleichsgeraden ist also möglich, eine genaue Rekonstruktion der Form des Gebietes ist jedoch nicht zu erwarten. In dieser Arbeit wurde auf die Methode verzichtet, da bereits mit Hilfe eines Abschneideparameters bessere Rekonstruktionen erzeugt werden können.

Die fehlerhafte Rekonstruktion konkaver Ecken lässt sich leider auch mit Vergrößerung des Rechenaufwands, wie z.B. mit der Erhöhung der Anzahl an Punkten auf der Messkurve bzw. der Erhöhung der Stützstellen für das direkte Problem, nur geringfügig verbessern.

Programm

Wer die in dieser Arbeit beschriebene Methode gern selbst ausprobieren möchte, kann sich hier inspirieren lassen. Das ist der vollständige Matlab-Quellcode zur Rekonstruktion von Störungen in der oberen Halbebene mit Hilfe der Faktorisierungsmethode.

Soweit es möglich war habe ich versucht, die Bezeichnungen aus der Arbeit zu übernehmen, um eine bessere Lesbarkeit des Quellcodes zu erreichen. Ansonsten verzichte ich auf weitere Erklärungen des Programms, da die Vorgehensweise in dieser Arbeit bereits ausführlich beschrieben wurde.


```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function Reihe = Rekonstruktion(n,p,Kurve,R,N,m,I,mu)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%----- Innerer Rand -----
h      = pi/n;                % Schrittweite
t      = h:h:2*pi-h;         % Stuetzstellen
%----- Aeusserer Rand (Kreisparametrisierung) -----
h_B    = pi/N;                % Schrittweite
s      = [h_B:h_B:pi-h_B];   % Stuetzstellen auf Kreisrand
Kreis.x = R * cos(s);        % Kreisparam. x-Koordinaten
Kreis.y = R * sin(s);        % Kreisparam. y-Koordinaten
dimK    = length(Kreis.x);
%----- Quadrat zur Auswertung -----
x      = linspace(I(1),I(2),m); % x-Koordinaten
dimx    = length(x);
y      = fliplr(x(dimx/2+1:end)); % y-Koord. (nur obere Halbebene!)
[X,Y]   = meshgrid(x,y);     % Gitter

%=====
% Direktes Problem: 1. Parametrisierung des gewuenschten Randes
%                   2. Berechnung der Loesung des AeDP auf Kreisrand
%=====
[Rand,Sub] = Randparam(t,p,Kurve);
U          = Loesung_direkt(h,m,Rand,Sub,Kreis);

%=====
% Inverses Problem: 1. Aufstellen des Operators W + Berechnung der
%                   Eigenwerte
%                   2. Abschneiden der Fehlerhaften Daten
%                   3. Aufstellen der 'Reihe'
%=====
%----- Operator W und seine Eigenwertzerlegung -----
W          = -h_B * R * U;
[Efkt,EW] = eig(W);
EW         = diag(EW);

%----- Abschneiden der fehlerhaften Eigenwerte und Eigenvektoren ---

```

```

semilogy(1:dimK,abs(real(EW)')),'+'); grid on;
cutnumber = input('\n Anzahl zu verwendender Eigenwerte?
                  \n\n Anzahl = ');
Efkt      = Efkt(:,1:cutnumber);
EW        = EW(1:cutnumber);

%----- Aufstellen der 'Reihe' -----
DiffX     = (Kreis.x' * ones(1,dimx)      - ones(dimK,1) * x);
DiffY     = (Kreis.y' * ones(1,length(y)) - ones(dimK,1) * y);
SummY     = (Kreis.y' * ones(1,length(y)) + ones(dimK,1) * y);
Reihe     = zeros(dimx,length(y)); % Reservierung des Speichers
Psi       = zeros(dimK,length(y)); % Reservierung des Speichers

for i = 1:dimx
    for j = 1:length(y)
        Psi(:,j)=-1/(2*pi)*log(1./sqrt(DiffX(:,i).^2+DiffY(:,j).^2))...
                + 1/(2*pi)*log(1./sqrt(DiffX(:,i).^2+SummY(:,j).^2));
    end;
    Reihe(i,:)=(1./EW)'*(abs(h_B * R * conj(Efkt)' * Psi)).^2 ;
end;
Reihe = abs(Reihe)';

%=====
% Plot
%=====

%----- Bild 1: Naiver Plot -----
figure;
surf(X,Y,log(Reihe),'linestyle','none');
hold on;
colorbar('horiz'); view(2); alpha(.7);
grid off; axis equal; axis tight;
plot(Rand.x,Rand.y,'k','LineWidth',2);
plot3(Kreis.x,Kreis.y,5*ones(size(Kreis.x)),'k.','Markersize',10);
hold off;

%----- Bild 2: Ploten der Daten nach Abschneiden -----
figure;
Reihe( find(log(Reihe) > mu) ) = NaN;

```

```
surf(X,Y,(Reihe),'linestyle','none');  
colorbar('horiz'); view(2); grid off;  
alpha(.7); axis equal;  
hold on;  
plot([I(1),Rand.x,I(2)], [0,Rand.y,0], 'k', 'LineWidth', 2);  
plot(Kreis.x,Kreis.y, 'k.', 'Markersize', 10);  
hold off;
```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function U = Loesung_direkt(h,m,Rand,Sub,Kreis)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%=====
% Bestimmung der Dichte phi.
%=====

dim = length(Rand.x);          % Anzahl Randpunkte auf dD
dim2 = length(Kreis.x);       % Anzahl Randpunkte auf dB

%----- Aufstellung des Doppelschichtpotentials -----
XTTau = (ones(dim,1) * Rand.x)' - ones(dim,1) * Rand.x;
YTTau = (ones(dim,1) * Rand.y)' - ones(dim,1) * Rand.y;
YTTaurho = (ones(dim,1) * Rand.y)' + ones(dim,1) * Rand.y;
DX = ones(dim,1) * Rand.dx;
DY = ones(dim,1) * Rand.dy;
SubDT = ones(dim,1) * Sub.dt; % Ableitung der Substitution

diagonale = (1/2*pi)*(Rand.dy.*Rand.ddx-Rand.dx.*Rand.ddy)...
            ./ (Rand.dx.^2 + Rand.dy.^2);
L = 1/pi*((DY.*XTTau-DX.*YTTau)./(XTTau.^2+YTTau.^2+eye(dim))...
         - (DY.*XTTau+DX.*YTTaurho)./(XTTau.^2+YTTaurho.^2));

M = eye(dim)+h*(L+diag(diagonale)).*SubDT;

clear XTTau YTTau YTTaurho DX DY; % Speicherfreigabe

%----- Berechnung der Randwerte -----
Xp = ones(dim2,1) * Rand.x;      % x-Koordinate auf dD
Yp = ones(dim2,1) * Rand.y;      % y-Koordinate auf dD
Px = (Kreis.x)' * ones(1,dim);   % x-Koordinate auf dB
Py = (Kreis.y)' * ones(1,dim);   % y-Koordinate auf dB

F = -1/(2*pi)*log(1./sqrt((Xp-Px).^2+(Yp-Py).^2))...
     + 1/(2*pi)*log(1./sqrt((Xp-Px).^2+(Yp+Py).^2));

%----- Berechnung der Dichte -----

```

```

Phi = M\ (2*F');

clear Xp Yp Px Py;                                % Speicherfreigabe

%=====
% Berechnung der Loesung des direkten Problems
% eingeschaenkt auf einen Kreis im Aussengebiet.
%=====

DX      = ones(dim2,1) * Rand.dx;
DY      = ones(dim2,1) * Rand.dy;
XTTau   = (Kreis.x)' * ones(1,dim) - ones(dim2,1) * Rand.x;
YTTau   = (Kreis.y)' * ones(1,dim) - ones(dim2,1) * Rand.y;
YTTaurho = (Kreis.y)' * ones(1,dim) + ones(dim2,1) * Rand.y;

%----- Quadratur fuer DSP -----
V = h * 1/(2*pi) * ones(dim2,1) * Sub.dt .* (...
    (DY.* XTTau - DX.* YTTau)./(XTTau.^2 + YTTau.^2)...
    - (DY.* XTTau + DX.* YTTaurho)./(XTTau.^2 + YTTaurho.^2));

clear XTTau YTTau DX DY Abs SubDT;                % Speicherfreigabe

%----- Loesung auf Kreisrand -----
U = zeros(dim2);
for k=1:dim2
    U(:,k) = V * Phi(:,k);
end;

```

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function [R,W] = Randparam(s,p,Kurve)
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

%=====
% Substitutionsfkt.: Neuverteilung der aequidistanten Punkte
%=====
% Aufruf einer internen Funktion
[vs, dvs] = v(s,p);
[vt, dvt] = v(2*pi-s,p);

W.t      = 2*pi*vs.^p./(vs.^p + vt.^p); % Substitutionsfkt.
zaehler  = vs.^(p-1).*dvs.*vt.^p + vs.^p.*vt.^(p-1).*dvt;
nenner    = (vs.^p + vt.^p);
W.dt     = 2*pi*p*(zaehler)./nenner.^2; % Ableitung der Sub.fkt.

t        = W.t;
n        = length(t);

%=====
% Randparametrisierungen
%=====
switch Kurve

    case {'Ellipse'}
        a = .5; % Streckung auf x-Achse
        b = 3; % Streckung auf y-Achse
        R.x = a*cos(t/2);
        R.y = b*sin(t/2);
        R.dx = -1/2*a*sin(t/2);
        R.dy = 1/2*b*cos(t/2);
        R.ddx = -1/4*a*cos(t/2);
        Rddy = -1/4*b*sin(t/2);

    case {'Zitrone'}
        R.x = -1/pi*(t-pi)+1;
        R.y = sin(t/2);
        R.dx = -1/pi*ones(1,n);

```

```

    R.dy = 1/2*cos(t/2);
    R.ddx = zeros(1,n);
    R.ddy = -1/4*sin(t/2);

case {'Tropfen'}
    R.x = -1/50*(t.^3-pi) ;
    R.y = 1/4*t.*sin(t/2);
    R.dx = -3/50*t.^2;
    R.dy = 1/4*sin(t/2) + 1/8*t.*cos(t/2);
    R.ddx = -6/50*t;
    R.ddy = 1/8*cos(t/2) + 1/8*cos(t/2) - 1/16*t.*sin(t/2);

case {'Erdnuss'}
    R.x = (1+sin(t/2)).*cos(t/2);
    R.y = (1+sin(t/2)).*sin(t/2);
    R.dx = (1/2*cos(t/2).^2 - (-1-sin(t/2)).*(-1/2*sin(t/2)));
    R.dy = -(2*(-1/4*cos(t/2).*sin(t/2)...
        +1/2*(-1-sin(t/2))*1/2.*cos(t/2)));
    R.ddx = -(cos(t/2).*sin(t/2)*1/2...
        +(-1/2*cos(t/2)).*(-1/2*sin(t/2))...
        +(-1-sin(t/2)).*(-1/4*cos(t/2)));
    R.ddy = -(2*(1/8*sin(t/2).^2 - 1/8*cos(t/2).^2 - ...
        1/8*cos(t/2).^2 - 1/8*(-1-sin(t/2)).*sin(t/2)));

otherwise
    disp('Es wurde kein Gebiet gewaehlt.');
```

end;

```

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% Interne (Substitutions-)Funktion
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
function [v,dv] = v(s,p)

v = (1/p-1/2)*((pi-s)/pi).^3 + (s-pi)/(p*pi) + 1/2;
dv = -3/pi*(1/p-1/2) * ((pi-s)/pi).^2 + 1/(p*pi);

```


Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen bedanken, die mich beim Schreiben dieser Arbeit unterstützt haben. Mein besonderer Dank gilt Prof. Kress für seine konstruktive Kritik, sowie meiner Familie und meinen Freunden, die mir in der schweren Zeit zur Seite gestanden haben. Ich danke außerdem Jan-Hendrik Starcke und Anja Panse für die Korrektur dieser Arbeit. Sie haben sie erst lesbar gemacht.

Literaturverzeichnis

- [1] ANSELONE, PHILIP M.: *Collectively Compact Operator Approximation Theory And Applications to Integral Equations*. Prentice-Hall, 1971.
- [2] COLTON, DAVID und ANDREAS KIRSCH: *A simple method for solving inverse scattering problems in the resonance region*. *Inverse Problems*, 12:383–393, 1996.
- [3] COLTON, DAVID und RAINER KRESS: *Integral Equation Methods in Scattering Theory*. Wiley-Interscience Publication, 1983.
- [4] HACKBUSCH, WOLFGANG: *Integralgleichungen: Theorie und Numerik*. Teubner, 1989.
- [5] HÄHNER, PETER: *An inverse problem in electrostatics*. *Inverse Problems*, 15:961–975, 1999.
- [6] HEUSER, HARRO: *Funktionalanalysis*. Teubner, 1992.
- [7] KIRSCH, ANDREAS: *Characterization of the shape of a scattering obstacle using the spectral data of the far field operator*. *Inverse Problems*, 14:1489–1512, 1998.
- [8] KÖNIGSBERGER, KONRAD: *Analysis 2*. Springer, 2. Auflage, 1997.
- [9] KRESS, RAINER: *A Nyström method for boundary integral equations in domains with corners*. *Numerische Mathematik*, 58:145–161, 1990.
- [10] KRESS, RAINER: *Linear Integral Equations*. Springer, 2. Auflage, 1999.
- [11] KRESS, RAINER: *Vorlesungsskript zu Funktionalanalysis*. Institut für Numerische und Angewandte Mathematik, Georg-August-Universität zu Göttingen, WS 2000/2001.

- [12] KÜHN, LARS: *Rekonstruktion von Gebieten aus Spektraldaten beim Neumannschen Randwertproblem*. Diplomarbeit, Institut für Numerische und Angewandte Mathematik, Georg-August-Universität zu Göttingen, 2001.
- [13] MARTENSEN, ERICH: *Potentialtheorie*. Teubner, 1968.
- [14] MICHLIN, S.G.: *Lehrgang der mathematischen Physik*. Akademie-Verlag, 1972.
- [15] MÜLLER, CLAUS: *Foundations of the Mathematical Theory of Electromagnetic Waves*. Springer, 1969.
- [16] VERCHOTA, GREGORY: *Layer Potentials and Regularity for the Dirichlet Problem for Laplace's Equation in Lipschitz Domains*. *Journal of Functional Analysis*, 59:572–611, 1984.
- [17] VOGT, ANDREAS: *Substitutionsmethoden beim Nyström-Verfahren für Integralgleichungen zweiter Art*. Diplomarbeit, Institut für Numerische und Angewandte Mathematik, Georg-August-Universität zu Göttingen, 1997.
- [18] VOGT, ANDREAS: *Analytische und numerische Untersuchung von direkten und inversen Randwertproblemen in Gebieten mit Ecken mittels Integralgleichungsmethoden*. Doktorarbeit, Institut für Numerische und Angewandte Mathematik, Georg-August-Universität zu Göttingen, 2001.
- [19] WERNER, DIRK: *Funktionalanalysis*. Springer, 3. Auflage, 2000.