

Integralgleichungsmethode für das Dirichlet-Problem in einem Gebiet mit Schlitz

Diplomarbeit

vorgelegt von

Tanja Beier

aus

Kassel

angefertigt im

Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
der Georg-August-Universität zu Göttingen

2004

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
2	Grundlagen	7
2.1	Grundlagen aus der Funktionalanalysis	7
2.1.1	Lineare, beschränkte und kompakte Operatoren	7
2.1.2	Integraloperatoren	8
2.1.3	Riesz-Theorie	10
2.2	Grundlagen der Potentialtheorie	11
2.2.1	Harmonische Funktionen	11
2.2.2	Das innere und das äußere Dirichlet-Problem	12
2.2.3	Doppelschicht- und Einfachschichtpotentiale	13
2.2.4	Lösbarkeitsbedingung für Randwertprobleme	17
2.2.5	Sobolew-Räume	18
3	Das Dirichlet-Problem in einem Gebiet mit Schlitz	21
3.1	Problemstellung	21
3.2	Eindeutigkeit	22
3.3	Existenz	22
4	Numerische Lösung	37
4.1	Numerische Grundlagen	38
4.1.1	Trigonometrische Interpolation	38
4.1.2	Das Projektionsverfahren	40
4.2	Das Kollokationsverfahren	41
4.2.1	Die Grundidee des Kollokationsverfahrens	41
4.2.2	Das Kollokationsverfahren für Gebiete mit Schlitz	42
4.3	Konvergenz- und Fehleranalyse	48
4.4	Numerische Beispiele	55
	Literaturverzeichnis	67
A	Matlabprogramme	69

Kapitel 1

Einleitung

In dieser Arbeit wird im Rahmen der Potentialtheorie das Dirichlet-Problem zur Laplace-Gleichung in einem Gebiet betrachtet, welches im Inneren einen Schlitz enthält. Dazu muss das Dirichlet-Problem für ein Gebiet und das Dirichlet-Problem für einen Schlitz zu einem gemeinsamen Dirichlet-Problem verknüpft werden. Das zentrale Ergebnis ist der Nachweis der eindeutigen Lösbarkeit dieses kombinierten Problems und die anschließende Implementierung eines numerischen Lösungsverfahrens.

Die wesentliche Schwierigkeit besteht in der Behandlung der Endpunkte des Schlitzes, da dort die Lösung singulär wird, so dass der klassische Lösungsbegriff nicht mehr ausreicht. Diese Komplikation wird im Existenzbeweis durch Verwendung von Sobolew-Räumen beseitigt, die einen verallgemeinerten Ableitungsbegriff zur Verfügung stellen, indem statt klassischer, punktwiser Differenzierbarkeit lediglich Integrabilitätsbedingungen an die Ableitungen gestellt werden.

In Kapitel 2 stellen wir die analytischen Grundbegriffe zusammen, die zum Beweis der Existenz und der Eindeutigkeit der Lösung des gemeinsamen Problems erforderlich sind. Dazu zählen die Theorie kompakter Operatoren, die Riesz-Theorie und die Potentialtheorie. In Kapitel 3 wird der Beweis konstruktiv geführt, indem wir die Lösung als Kombination eines Doppelschichtpotentials auf dem Gebietsrand und eines Einfachschichtpotentials auf dem Schlitz ansetzen und anschließend zeigen, dass dieser Ansatz in der Tat die eindeutige Lösung ist. Zusätzlich stellt der Beweis die für die numerische Lösung notwendige Formulierung als System von zwei gekoppelten Integralgleichungen bereit. Dabei liefert der Gebietsrand eine Integralgleichung zweiter Art und der Schlitz eine erster Art.

Auch bei der numerischen Behandlung des Integralgleichungssystems müssen die vom Schlitz herrührenden Besonderheiten berücksichtigt werden. Dies geschieht durch Erweiterung eines für das Dirichlet-Problem mit Schlitz geeigneten Projektionsverfahrens auf das kombinierte Dirichlet-Problem. Als besonders geeignet erweist sich das zu dieser Verfahrensklasse gehörende Kollokationsverfahren, mit dem in Kapitel 4 das Integralgleichungssystem numerisch gelöst wird. Die Formulierung des Kollokationsverfahrens als Projektionsmethode ist darüber hinaus der geeignete Rahmen für die Konvergenz- und Fehleranalyse, die in Abschnitt 4.3 durchgeführt wird. In Abschnitt 4.4 verdeutlichen wir

anhand der numerischen Beispiele, dass das Kollokationsverfahren auch für das kombinierte Dirichlet-Problem exponentiell konvergiert.

Kapitel 2

Grundlagen

Zu Beginn wollen wir einige mathematische Grundlagen aus der Funktionalanalysis und der Potentialtheorie zusammenstellen, die wir in Kapitel 3 zum Nachweis der Existenz und Eindeutigkeit der Lösung des Dirichlet-Problems in einem Gebiet mit Schlitz benötigen.

In der Funktionalanalysis werden lineare, beschränkte und kompakte Operatoren auf Banach- oder Hilbert-Räumen betrachtet und damit verbunden die Lösbarkeit von Operatorgleichungen durch Integralgleichungen untersucht.

Die Potentialtheorie beschäftigt sich mit Randwertproblemen für die Laplacesche Differentialgleichung. Mit Hilfe der Integralgleichungsmethode werden die Randwertprobleme gelöst.

Das Dirichlet-Problem wird in dieser Arbeit ausschließlich im \mathbb{R}^2 behandelt, so dass wir uns bei den Grundlagen auf den zweidimensionalen Spezialfall beschränken können.

Desweiteren bezeichnet $|x|$ immer die euklidische Norm eines Vektors $x \in \mathbb{R}^2$.

2.1 Grundlagen aus der Funktionalanalysis

Die potentialtheoretische Formulierung eines Dirichlet-Problems führt zu der Frage nach der Lösbarkeit von Integralgleichungen. Die in dieser Arbeit auftretenden Integraloperatoren werden sich entweder als kompakt oder als beschränkt und invertierbar herausstellen. Deswegen stellen wir zunächst die wichtigsten funktionalanalytischen Aussagen über kompakte Operatoren zusammen.

2.1.1 Lineare, beschränkte und kompakte Operatoren

Der für unsere Zwecke zentrale Begriff aus der Funktionalanalysis ist die Kompaktheit von Operatoren.

Zu Beginn erinnern wir an die Definition von Kompaktheit und relativer Kompaktheit für Teilmengen in metrischen Räumen, da diese Begriffe für die Definition der Kompaktheit von Operatoren benötigt werden.

Definition 2.1. Eine Teilmenge U eines metrischen Raumes heißt kompakt, falls jede offene Überdeckung von U eine endliche Teilüberdeckung enthält, d.h. wenn für jede Familie V_j , $j \in J$, von offenen Mengen mit der Eigenschaft

$$U \subset \bigcup_{j \in J} V_j$$

eine endliche Teilfamilie $V_{j(k)}$, $j(k) \in J$, $k = 1, \dots, n$, existiert derart, dass

$$U \subset \bigcup_{k=1}^n V_{j(k)},$$

wobei J eine beliebige Indexmenge ist.

Definition 2.2. Eine Teilmenge eines metrischen Raums heißt relativ kompakt, wenn ihr Abschluß kompakt ist.

Definition 2.3. Ein linearer Operator $A : X \rightarrow Y$ eines normierten Raums X in einen normierten Raum Y heißt kompakt, wenn er jede beschränkte Menge aus X in eine relativ kompakte Menge in Y abbildet.

Die folgenden Sätze über kompakte Operatoren werden wir später in dieser Arbeit benötigen, um zu zeigen, dass unsere Integraloperatoren kompakt sind.

Satz 2.4. Kompakte lineare Operatoren sind beschränkt.

Beweis: Für den Beweis wird auf [8, Theorem 2.14, S. 21] verwiesen. □

Satz 2.5. Seien X, Y, Z normierte Räume und $A : X \rightarrow Y$ und $B : Y \rightarrow Z$ beschränkte lineare Operatoren. Dann ist das Produkt $BA : X \rightarrow Z$ kompakt, falls einer der beiden Operatoren A oder B kompakt ist.

Beweis: Für den Beweis wird auf [8, Theorem 2.16, S. 21] verwiesen. □

Satz 2.6. Die Identität $I : X \rightarrow X$ ist kompakt genau dann, wenn X endlich dimensional ist.

Beweis: Für den Beweis wird auf [8, Theorem 2.20, S. 23] verwiesen. □

2.1.2 Integraloperatoren

Das Dirichlet-Problem in einem Gebiet mit Schlitz wird mit Hilfe eines Systems aus Integraloperatoren gelöst werden. Wir erinnern hier an die grundlegenden Definitionen und deren Zusammenhang mit der Kompaktheit von Operatoren.

Satz 2.7. Sei $K : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Dann heißt der durch

$$(A\varphi)(x) := \int_a^b K(x, y)\varphi(y) dy, \quad x \in [a, b],$$

definierte lineare Operator $A : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$ Integraloperator mit stetigem Kern K . Er ist ein beschränkter Operator mit

$$\|A\|_\infty = \max_{x \in [a, b]} \int_a^b |K(x, y)| dy.$$

Beweis: Für den Beweis wird auf [8, Theorem 2.8, S. 17] verwiesen. \square

Bei der Aufstellung des Integralgleichungssystems haben wir unter anderem Integraloperatoren mit stetigem Kern.

Satz 2.8. Der Integraloperator

$$(A\varphi)(x) := \int_a^b K(x, y)\varphi(y) dy, \quad x \in [a, b],$$

mit stetigem Kern K ist ein kompakter Operator $A : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$.

Beweis: Für den Beweis wird auf [8, Theorem 2.21, S. 23] verwiesen. \square

Diese Kompaktheit gilt auch für Integraloperatoren

$$(A\varphi)(x) := \int_G K(x, y)\varphi(y) dy, \quad x \in G,$$

mit stetigem Kern $K \in C(G \times G)$ auf einer Jordan-meßbaren Teilmenge $G \subset \mathbb{R}^m$.

Die Kerne der Integraloperatoren, die sich nicht als stetig erweisen, werden sich als singulär herausstellen.

Definition 2.9. Ein Kern K heißt schwach singulär, wenn der Kern K für alle $x, y \in G$, $x \neq y$ definiert und stetig ist und es eine positive Konstante M und ein $\alpha \in (0, m]$ gibt, so dass für alle $x, y \in G$, $x \neq y$, gilt

$$|K(x, y)| \leq M|x - y|^{\alpha - m}.$$

Satz 2.10. Integraloperatoren mit schwach singulärem Kern sind kompakt in $C(G)$.

Beweis: Für den Beweis wird auf [8, Theorem 2.22, S. 24f.] verwiesen. \square

2.1.3 Riesz-Theorie

Die Riesz-Theorie liefert für die theoretische Behandlung von Operatorgleichungen zweiter Art Aussagen über die Lösbarkeit. Sie beruht auf der Theorie linearer, kompakter Operatoren, die zwischen normierten Räumen abbilden.

Das Kernstück der Riesz-Theorie ist folgender Satz:

Satz 2.11. *Sei $A : X \rightarrow X$ ein kompakter linearer Operator in einem normierten Raum X . Dann ist $I - A$ injektiv genau dann, wenn es surjektiv ist. Falls $I - A$ injektiv ist (und daher bijektiv), so ist der inverse Operator $(I - A)^{-1} : X \rightarrow X$ beschränkt.*

Beweis: Für den Beweis wird auf [8, Theorem 3.4, S. 32f.] verwiesen. □

Aus Satz 2.11 folgt eine Aussage über die Lösbarkeit von Operatorgleichungen zweiter Art.

Korollar 2.12. *Sei $A : X \rightarrow X$ ein kompakter linearer Operator in einem normierten Raum X . Falls die homogene Gleichung*

$$\varphi - A\varphi = 0$$

nur die triviale Lösung $\varphi = 0$ besitzt, so besitzt für jedes $f \in X$ die inhomogene Gleichung

$$\varphi - A\varphi = f$$

genau eine Lösung $\varphi \in X$, die stetig von f abhängt.

Zur Behandlung der Lösbarkeit des Dirichlet-Problems in einem Gebiet mit Schlitz betrachten wir ein System von Operatorgleichungen. Dieses ist in eine Operatorgleichung zweiter Art umformbar. Für die Eindeutigkeitsaussage der Lösbarkeit brauchen wir den folgenden Spezialfall von Satz 2.11 und Korollar 2.12:

Korollar 2.13. *Satz 2.11 und Korollar 2.12 bleiben gültig, wenn $I - A$ durch $S - A$ ersetzt wird, wobei $S : X \rightarrow Y$ ein beschränkter linearer Operator mit einer beschränkten Inversen $S^{-1} : Y \rightarrow X$ ist und $A : X \rightarrow Y$ ein kompakter linearer Operator ist, der von einem normierten Raum X in einen normierten Raum Y abbildet.*

Beweis: Die Behauptung folgt sofort aus der äquivalenten Umformung von

$$S\varphi - A\varphi = f$$

zu

$$\varphi - S^{-1}A\varphi = S^{-1}f,$$

wobei $S^{-1}A : X \rightarrow X$ nach Satz 2.5 kompakt ist.

2.2 Grundlagen der Potentialtheorie

In diesem Abschnitt befassen wir uns zuerst mit harmonischen Funktionen und deren Eigenschaften. Die Potentialtheorie beschäftigt sich unter anderem mit dem inneren und äußeren Dirichlet-Problem und der jeweiligen Lösung. Die Lösbarkeit dieser Randwertprobleme erhalten wir mittels Integralgleichungen. Wir verwenden hier für die Lösbarkeitsaussagen der Dirichlet-Probleme die Doppelschicht- und Einfachschichtpotentiale. Dazu betrachten wir auch die Eigenschaften der Potentiale.

2.2.1 Harmonische Funktionen

Für die Aufstellung des Dirichlet-Problems in einem Gebiet mit Schlitz benötigen wir harmonische Funktionen und deren Eigenschaften.

Definition 2.14. Eine zweimal stetig differenzierbare reellwertige Funktion u auf einem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^2$ heißt harmonisch, wenn sie die Laplacesche Differentialgleichung

$$\Delta u = 0 \text{ in } D$$

erfüllt, wobei

$$\Delta u := \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}.$$

Satz 2.15. Die Funktion

$$\Phi(x, y) := \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x - y|}, \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{y\},$$

heißt Grundlösung der Laplace-Gleichung.

Es gilt $\text{grad}_x \Phi(x, y) = -\text{grad}_y \Phi(x, y)$ und für festes $y \in \mathbb{R}^2$ ist $\Phi(x, y)$ harmonisch (bezüglich x) im $\mathbb{R}^2 \setminus \{y\}$.

Beweis: Sei $y \in \mathbb{R}^2$, $x \neq y$, fest. Dann gilt

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}(x, y) = \frac{1}{2\pi} |x - y| \frac{-1}{2|x - y|} \frac{2(x_1 - y_1)}{|x - y|^2} = -\frac{1}{2\pi} \frac{(x_1 - y_1)}{|x - y|^2}.$$

Aus Symmetriegründen gilt

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \frac{(x_2 - y_2)}{|x - y|^2}.$$

Daraus erhalten wir

$$\operatorname{grad}_x \Phi(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \frac{(x-y)}{|x-y|^2}$$

und analog dazu

$$\operatorname{grad}_y \Phi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \frac{(x-y)}{|x-y|^2}.$$

Somit folgt für die Laplace-Gleichung

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2}(x, y) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2}(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \frac{(x-y)}{|x-y|^2} + \frac{1}{2\pi} \frac{(x-y)}{|x-y|^2} = 0.$$

□

Für ein Gebiet D und $k \in \mathbb{N}$ bezeichnet $C^k(D)$ den linearen Raum aller Funktionen $v : D \rightarrow \mathbb{R}$, die k -mal stetig differenzierbar sind. Mit $C^k(\bar{D})$ wird der Unterraum aller Funktionen aus $C^k(D)$ bezeichnet, die sich zusammen mit allen Ableitungen bis zur Ordnung k von D nach \bar{D} stetig fortsetzen lassen.

Die Einheitsnormale ν ist ein auf der Tangente senkrecht stehender Vektor.

Satz 2.16 (Maximum-Minimum-Prinzip). *Eine in einem Gebiet harmonische und nicht konstante Funktion besitzt kein Maximum und kein Minimum.*

Beweis: Für den Beweis wird auf [8, Theorem 6.8, S. 71] verwiesen. □

Aus dem Maximum-Minimum-Prinzip können wir folgendes Korollar herleiten:

Korollar 2.17. *Sei D ein beschränktes Gebiet und u harmonisch in D und stetig in \bar{D} . Dann nimmt u das Maximum und das Minimum auf dem Rand an.*

2.2.2 Das innere und das äußere Dirichlet-Problem

Das Dirichlet-Problem in einem Gebiet mit Schlitz besteht aus der Verknüpfung des inneren Dirichlet-Problems bezüglich des Gebietsrandes und des äußeren Dirichlet-Problems bezüglich des Schlitzes.

Sei D ein beschränktes Gebiet der Klasse C^2 mit zusammenhängendem Rand ∂D , und sei ν die aus D herausweisende Einheitsnormale an ∂D .

Definition 2.18 (Inneres Dirichlet-Problem). *Gesucht ist eine in D harmonische und in \bar{D} stetige Funktion u , die die Randbedingung*

$$u = f \text{ auf } \partial D$$

erfüllt, wobei f eine vorgegebene stetige Funktion ist.

Definition 2.19 (Äußeres Dirichlet-Problem). *Gesucht ist eine in $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ harmonische und in $\mathbb{R}^2 \setminus D$ stetige Funktion u , die die Randbedingung*

$$u = f \text{ auf } \partial D$$

erfüllt, wobei f eine vorgegebene stetige Funktion ist.

Im Unendlichen wird für $|x| \rightarrow \infty$ gefordert, dass gleichmäßig für alle Richtungen gilt

$$u(x) = O(1).$$

2.2.3 Doppelschicht- und Einfachschichtpotentiale

Die Existenztheorie des Dirichlet-Problems in einem Gebiet mit Schlitz beruht auf einem Doppelschicht-Einfachschichtpotentialansatz. Dazu formulieren wir hier das Doppelschichtpotential und das Einfachschichtpotential. Die Sprungrelationen des kombinierten Doppelschicht-Einfachschichtpotentials ergeben sich aus einer Kombination der Sprungrelationen des Doppelschichtpotentials und des Einfachschichtpotentials. Der Beweis für die Sprungrelationen des gekoppelten Potentials wird durch Zurückführung auf die Beweise des Doppelschichtpotentials und des Einfachschichtpotentials geliefert.

Definition 2.20. *Für $\varphi \in C(\partial D)$ heißt*

$$u(x) := \int_{\partial D} \varphi(y) \Phi(x, y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D,$$

das Einfachschichtpotential und

$$v(x) := \int_{\partial D} \varphi(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D,$$

das Doppelschichtpotential mit Dichte φ , wobei

$$\Phi(x, y) := \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x - y|}, \quad x \neq y,$$

die Grundlösung der Laplace-Gleichung ist.

Für alle Punkte $x \notin \partial D$ darf die Differentiation nach x und die Integration über y vertauscht werden, weswegen das Einfach- und das Doppelschichtpotential jeweils eine harmonische Funktion in D und in $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ ist.

Satz 2.21. *Sei $\partial D \in C^2$ und $\varphi \in C(\partial D)$. Dann ist das Einfachschichtpotential u mit Dichte $\varphi \in C(\partial D)$ stetig in \mathbb{R}^2 mit*

$$u(x) = \int_{\partial D} \varphi(y) \Phi(x, y) ds(y), \quad x \in \partial D,$$

wobei das Integral als uneigentliches zu verstehen ist.

Beweis: Dazu sei $h : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, mit

$$h(s) := \begin{cases} 0 & , 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ 2s - 1 & , \frac{1}{2} \leq s \leq 1, \\ 1 & , 1 \leq s < \infty, \end{cases}$$

und $u_n, n \in \mathbb{N}$, sei gegeben durch die stetige Funktion

$$u_n(x) = \int_{\partial D} h(n|x-y|) \varphi(y) \Phi(x, y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Wir erhalten durch Projektion in die Tangentialebene für hinreichend großes n und für alle x aus einer passenden Umgebung von ∂D folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} |u(x) - u_n(x)| &\leq \int_{\{y \in \partial D : |x-y| \leq \frac{1}{n}\}} |\Phi(x, y)| |\varphi(x)| ds(y) \\ &\leq \|\varphi\|_\infty \int_{\{y \in \mathbb{R}^2 : |y| \leq \frac{1}{n}\}} |\Phi(0, y)| ds(y) \\ &= 4 \int_0^{\frac{1}{n}} \ln \frac{1}{r} dr \|\varphi\|_\infty, \quad x \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass in einer Umgebung von ∂D u_n gleichmäßig gegen u konvergiert. Daher ist u stetig im \mathbb{R}^2 . \square

Lemma 2.22. Sei $\partial D \in C^2$. Dann gibt es eine positive Konstante L derart, dass

$$|\nu(x) \cdot \{x - y\}| \leq L|x - y|^2, \quad (2.1)$$

$$|\nu(x) \cdot \nu(y)| \leq L|x - y| \quad (2.2)$$

für alle $x, y \in \partial D$.

Beweis: Für den Beweis wird auf [8, Lemma 6.15, S. 79] verwiesen. \square

Satz 2.23 (Sprungbeziehungen des Doppelschichtpotentials). Sei $\partial D \in C^2$ und $\varphi \in C(\partial D)$. Dann lässt sich das Doppelschichtpotential v mit Dichte $\varphi \in C(\partial D)$ stetig von D nach \bar{D} und von $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ nach $\mathbb{R}^2 \setminus D$ fortsetzen mit den Grenzwerten

$$v_\pm(x) = \int_{\partial D} \varphi(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} ds(y) \pm \frac{1}{2} \varphi(x), \quad x \in \partial D, \quad (2.3)$$

wobei

$$v_\pm(x) := \lim_{h \rightarrow +0} v(x \pm h\nu(x))$$

und das Integral als uneigentliches existiert.

Beweis: Nach Lemma 2.22 gilt die Abschätzung

$$\left| \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \right| = \frac{|\nu(y) \cdot \{x - y\}|}{2\pi|x - y|^2} \leq \frac{L}{2\pi}, \quad x \neq y, \quad (2.4)$$

das heißt, das Integral in (2.3) hat einen schwach singulären Kern. Daher existiert das Integral für alle $x \in \partial D$ als uneigentliches Integral und stellt eine stetige Funktion dar. In einer hinreichend kleinen Umgebung U von ∂D können wir jedes $x \in U$ eindeutig in der Form

$$x = z + h\nu(z), \quad z \in \partial D, \quad h \in [-h_0, h_0],$$

mit einem passenden $h_0 > 0$ darstellen.

Wir schreiben das Doppelschichtpotential v in der Form

$$v(x) = \varphi(z)w(x) + u(x), \quad x = z + h\nu(z),$$

wobei

$$w(x) := \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} ds(y)$$

und

$$u(x) := \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} [\varphi(y) - \varphi(z)] ds(y). \quad (2.5)$$

Für $x \in \partial D$, also für $h = 0$, existiert das Integral (2.5) als uneigentliches Integral und beschreibt eine auf ∂D stetige Funktion. Zur Vervollständigung des Beweises zeigen wir die gleichmäßige Konvergenz

$$\lim_{h \rightarrow 0} u(z + h\nu(x)) = u(z), \quad z \in \partial D.$$

Für hinreichend kleine h gilt nach Lemma 2.22

$$\begin{aligned} |x - y|^2 &= |z - y|^2 + 2h\nu(z) \cdot \{z - y\} + |x - z|^2 \\ &\geq \frac{1}{2} \{ |z - y|^2 + |x - z|^2 \}. \end{aligned}$$

Mit der Aufspaltung

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} = \frac{\nu(y) \cdot \{z - y\}}{|x - y|^2} + \frac{\nu(y) \cdot \{x - z\}}{|x - y|^2}$$

können wir

$$\left| \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \right| \leq C_1 \left\{ 1 + \frac{|x - z|}{|z - y|^2 + |x - z|^2} \right\}$$

mit einer positiven Konstanten C_1 abschätzen. Daraus folgt für hinreichend kleines r durch Projektion in die Tangentialebene an ∂D im Punkt z die Abschätzung

$$\begin{aligned} \int_{\{y \in \partial D: |y-z| \leq r\}} \left| \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \right| ds(y) &\leq C_2 \left\{ \int_0^r d\rho + \int_0^r \frac{|x-z| d\rho}{\rho^2 + |x-z|^2} \right\} \\ &\leq C_2 \left\{ r + \int_0^\infty \frac{d\lambda}{\lambda^2 + 1} \right\} \end{aligned} \quad (2.6)$$

mit einer Konstanten $C_2 > 0$. Aus dem Mittelwertsatz folgt

$$\left| \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \Phi(z, y)}{\partial \nu(y)} \right| \leq C_3 \frac{|x-z|}{|x-y|^2}$$

für $2|x-z| \leq |z-y|$ und mit einer positiven Konstanten C_3 . Hieraus folgt weiter

$$\int_{\{y \in \partial D: |y-z| \geq r\}} \left| \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial \Phi(z, y)}{\partial \nu(y)} \right| ds(y) \leq C_4 \frac{|x-z|}{r^2} \quad (2.7)$$

für alle $|x-z| < \frac{r}{2}$ und mit einer Konstanten $C_4 > 0$. Zusammenfassend erhalten wir aus (2.6) und (2.7)

$$|u(x) - u(z)| \leq C \left\{ \sup_{|y-z| \leq r} |\varphi(y) - \varphi(z)| + \frac{|x-z|^2}{r^2} \right\}$$

für alle hinreichend kleinen r , für alle $|x-z| < \frac{r}{2}$ und mit einer Konstanten $C > 0$. Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ wählen wir $r > 0$ aufgrund der Stetigkeit von φ so, dass

$$|\varphi(y) - \varphi(z)| < \frac{\varepsilon}{2C}$$

für alle $x, z \in \partial D$ mit $|y-z| < r$. Mit $\delta = \min\{\varepsilon r^2/2C, r/2\}$ gilt dann

$$|u(y) - u(z)| < \varepsilon$$

für alle $|x-z| < \delta$. □

Satz 2.24 (Sprungbeziehungen des Einfachschichtpotentials). Sei $\partial D \in C^2$. Dann besitzt das Einfachschichtpotential u mit Dichte $\varphi \in C(\partial D)$ die Normalableitungen

$$\frac{\partial u_\pm}{\partial \nu}(x) = \int_{\partial D} \varphi(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} ds(y) \mp \frac{1}{2} \varphi(x), \quad x \in \partial D,$$

wobei

$$\frac{\partial u_\pm}{\partial \nu}(x) := \lim_{h \rightarrow 0} \nu(x) \cdot \text{grad } u(x \pm h\nu(x))$$

im Sinne gleichmäßiger Konvergenz auf ∂D .

Beweis: Sei v bezeichnet durch das Doppelschichtpotential mit der Dichte φ und sei U wie in dem Beweis von Satz 2.23. Für $x = z + h\nu(z) \in U \setminus \partial D$ können wir schreiben

$$\nu(z) \cdot \text{grad } u(x) + v(x) = \int_{\partial D} \{\nu(y) - \nu(z)\} \cdot \text{grad}_y \Phi(x, y) \varphi(y) ds(y),$$

wobei wir die Gleichung $\text{grad}_x \Phi(x, y) = -\text{grad}_y \Phi(x, y)$ benutzt haben (siehe Satz 2.15). Analog wie bei dem Einfachschichtpotential in Satz 2.21 können wir mit Hilfe der Ungleichung (2.2) sehen, dass die rechte Seite der Gleichung stetig in U ist. Aus den Sprungbeziehungen des Doppelschichtpotentials (Satz 2.23) folgt die Behauptung. \square

2.2.4 Lösbarkeitsbedingung für Randwertprobleme

Für die Eindeutigkeit des Integralgleichungssystems zur Lösung des Dirichlet-Problems in einem Gebiet mit Schlitz benötigen wir Satz 2.25.

Für die Beschreibung der Randintegralgleichung zu dem potentialtheoretischen Randwertproblem des inneren Dirichlet-Problems führen wir den Integraloperator $K : C(\partial D) \rightarrow C(\partial D)$ ein durch

$$(K\varphi)(x) := 2 \int_{\partial D} \varphi(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} ds(y), \quad x \in \partial D.$$

Nach Lemma 2.22 gilt für $x, y \in \partial D$ die Abschätzung

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial \nu(y)} \right| = \frac{|\partial \nu(y) \cdot \{x - y\}|}{2\pi|x - y|^2} \leq \frac{L}{2\pi}, \quad x \neq y,$$

d.h. das obige Integral hat einen schwach singulären Kern. Daher existiert das Integral für alle $x \in \partial D$ als uneigentliches Integral und stellt eine stetige Funktion dar, und der Operator ist kompakt.

Satz 2.25. *Der Operator $I - K$ hat einen trivialen Nullraum*

$$N(I - K) = \{0\}.$$

Beweis: Für den Beweis wird auf [8, Theorem 6.20, S. 83f.] verwiesen. \square

Zur Aufstellung des Integralgleichungssystems zur Lösung des Dirichlet-Problems in einem Gebiet mit Schlitz ist es erforderlich, die Integralgleichung zur Lösung des inneren Dirichlet-Problems zu kennen.

Satz 2.26. *Das Doppelschichtpotential*

$$u(x) = \int_{\partial D} \varphi(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} ds(y), \quad x \in D,$$

mit stetiger Dichte φ löst das innere Dirichlet-Problem, falls φ die Integralgleichung

$$\varphi(x) - 2 \int_{\partial D} \varphi(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} ds(y) = -2f(x), \quad x \in \partial D,$$

erfüllt.

Beweis: Folgt aus Satz 2.23. □

Satz 2.27. *Das innere Dirichlet-Problem besitzt genau eine Lösung.*

Beweis: Die Integralgleichung $\varphi - K\varphi = -2f(x)$ zum inneren Dirichlet-Problem ist nach der Riesz-Theorie eindeutig lösbar, da nach Satz 2.25 $N(I - K) = \{0\}$ gilt. □

2.2.5 Sobolew-Räume

Die Existenzaussage des Dirichlet-Problems in einem Gebiet mit Schlitz wird in Sobolew-Räumen durchgeführt. Hierzu erinnern wir an die Definitionen, die Normen und einige Eigenschaften.

Für eine Funktion $\varphi \in L^2[0, 2\pi]$ heißt die Reihe

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{imt} \tag{2.8}$$

mit

$$a_m := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t) e^{-imt} dt$$

die *Fourierreihe* von φ . Die Norm auf $L^2[0, 2\pi]$ ist über das Skalarprodukt

$$(\varphi, \psi) := \int_0^{2\pi} \varphi(t) \overline{\psi(t)} dt$$

erklärt. Mit f_m werden die trigonometrischen Monome

$$f_m(t) := e^{imt}$$

für $t \in \mathbb{R}$ und $m \in \mathbb{Z}$ bezeichnet. Die Menge $\{f_m : m \in \mathbb{Z}\}$ ist ein Orthogonalsystem. Nach dem Approximationssatz von Weierstrass sind die trigonometrischen Polynome dicht bezüglich der Maximumnorm im Raum der 2π -periodischen stetigen Funktionen, und $C[0, 2\pi]$ ist dicht in $L^2[0, 2\pi]$ bezüglich der L^2 -Norm. Daher ist das Orthogonalsystem vollständig und die Fourierreihe (2.8) konvergiert in der L^2 -Norm.

Definition 2.28. Sei $0 \leq p < \infty$. Mit $H^p[0, 2\pi]$ bezeichnen wir den Raum aller Funktionen $\varphi \in L^2[0, 2\pi]$ mit der Eigenschaft

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} (1 + m^2)^p |a_m|^2 < \infty$$

für die Fourierkoeffizienten a_m von φ . Der Raum $H^p[0, 2\pi]$ heißt Sobolew-Raum. $H^0[0, 2\pi]$ stimmt mit $L^2[0, 2\pi]$ überein.

Satz 2.29. Der Sobolew-Raum $H^p[0, 2\pi]$ ist ein Hilbert-Raum mit dem Skalarprodukt

$$(\varphi, \psi)_p := \sum_{m=-\infty}^{\infty} (1 + m^2)^p a_m \bar{b}_m$$

für $\varphi, \psi \in H^p[0, 2\pi]$ mit den Fourierkoeffizienten a_m bzw. b_m . Die Norm auf $H^p[0, 2\pi]$ ist gegeben durch

$$\|\varphi\|_p = \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} (1 + m^2)^p |a_m|^2 \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Die trigonometrischen Polynome liegen dicht in $H^p[0, 2\pi]$.

Beweis: Für den Beweis wird auf [8, Theorem 8.2, S. 126ff.] verwiesen. \square

Der folgende Satz wird später bei der Untersuchung unserer Operatoren auf Kompaktheit benötigt.

Satz 2.30. Für $q > p$ ist $H^q[0, 2\pi]$ dicht in $H^p[0, 2\pi]$ mit kompakter Einbettung von $H^q[0, 2\pi]$ in $H^p[0, 2\pi]$.

Beweis: Aus der Ungleichung $(1 + m^2)^p \leq (1 + m^2)^q$ für $m \in \mathbb{Z}$ folgt $H^q \subset H^p$ mit beschränkter Einbettung

$$\|\varphi\|_p \leq \|\varphi\|_q$$

für alle $\varphi \in H^p$. Die Dichtheit von H^q in H^p ist eine Folge der Dichtheit der trigonometrischen Polynome in H^p . Für den Beweis der Kompaktheit wird auf [8, Theorem 8.3, S. 128f.] verwiesen. \square

Sei ∂D der Rand eines einfach zusammenhängenden Gebietes $D \subset \mathbb{R}^2$ der Klasse C^k , $k \in \mathbb{N}$. Mit Hilfe einer regulären k -mal stetig differenzierbaren 2π -periodischen Parameterdarstellung $\partial D = \{x(t) : t \in [0, 2\pi]\}$ kann der Sobolew-Raum $H^p(\partial D)$ als Raum aller Funktionen $\varphi \in L^2(\partial D)$ mit der Eigenschaft $\varphi \circ x \in H^p[0, 2\pi]$ definiert werden, wobei $0 \leq p \leq k$ ist. $\varphi \circ x$ bezeichnet die durch $(\varphi \circ x)(t) := \varphi(x(t))$, $t \in \mathbb{R}$, erklärte 2π -periodische Funktion. Das Skalarprodukt und die Norm auf $H^p(\partial D)$ sind über das Skalarprodukt auf $H^p[0, 2\pi]$ gemäß

$$(\varphi, \psi)_{H^p(\partial D)} := (\varphi \circ x, \psi \circ x)_{H^p[0, 2\pi]}$$

definiert. Der klassische Sobolew-Raum $H^1(D)$ für ein beschränktes Gebiet $D \subset \mathbb{R}^2$ mit C^1 -Rand ∂D ist definiert als die Vervollständigung des Raums $C^1(\bar{D})$ der stetig differenzierbaren Funktionen bezüglich der Norm

$$\|u\|_{H^1(D)} := \left(\int_D \{|u(x)|^2 + |\text{grad } u(x)|^2\} dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Da jede Cauchy-Folge bezüglich $\|\cdot\|_{H^1(D)}$ auch eine Cauchy-Folge bezüglich $\|\cdot\|_{L^2(D)}$ ist, kann $H^1(D)$ als Unterraum von $L^2(D)$ aufgefasst werden. Der Gradient kann von $C^1(\bar{D})$ als ein beschränkter linearer Operator von $H^1(D)$ nach $L^2(D)$ fortgesetzt werden (vgl. [8] Seite 137f.).

Kapitel 3

Das Dirichlet-Problem in einem Gebiet mit Schlitz

In diesem Kapitel werden wir das Dirichlet-Problem in einem Gebiet mit Schlitz theoretisch behandeln. Dazu werden wir die Hauptaussagen, die Eindeutigkeit und die Existenz einer Lösung dieses Problems beweisen.

Der Eindeutigkeitsbeweis basiert auf dem Maximum-Minimum-Prinzip (siehe Satz 2.16). Die Existenzaussage wird mittels der Integralgleichungsmethode und der Riesz-Theorie für kompakte Operatoren bewiesen (siehe Abschnitt 2.1.3).

3.1 Problemstellung

In diesem Abschnitt formulieren wir das Dirichlet-Problem in einem Gebiet mit Schlitz.

Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein einfach zusammenhängendes, beschränktes Gebiet mit C^2 -glattem Rand ∂D und sei $\Gamma := \{x_\Gamma(s) : s \in [-1, 1]\} \subset D$ ein abgeschlossener C^2 glatter Kurvenbogen, wobei $x_\Gamma : [-1, 1] \rightarrow D$ eine injektive, zweimal stetig differenzierbare Funktion ist, mit $x'_\Gamma(s) \neq 0$ für alle $s \in [-1, 1]$. Wir setzen zur Abkürzung $\tilde{x}_1 := x_\Gamma(1)$, $\tilde{x}_{-1} := x_\Gamma(-1)$.

Definition 3.1 (Das Dirichlet-Problem in einem Gebiet mit Schlitz). *Gesucht ist eine in \bar{D} stetige und in $D \setminus \Gamma$ harmonische Funktion u zu den Dirichletschen Randbedingungen*

$$u = f_{\partial D} \text{ auf } \partial D \tag{3.1}$$

und

$$u = f_\Gamma \text{ auf } \Gamma \tag{3.2}$$

bei vorgegebenen stetigen Funktionen $f_{\partial D}$ auf ∂D und f_Γ auf Γ .

Dieses Dirichlet-Problem ist eine Verknüpfung des inneren Dirichlet-Problems für die Randbedingung $u = f_{\partial D}$ auf ∂D und des äußeren Dirichlet-Problems einer Funktion u , welche in $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ harmonisch und im \mathbb{R}^2 stetig ist, mit der Randbedingung $u = f_\Gamma$ auf Γ . Das erste Ziel ist, die Eindeutigkeit und die Existenz einer Lösung für das Dirichlet-Problem in einem Gebiet mit Schlitz nachzuweisen.

3.2 Eindeutigkeit

In diesem Abschnitt werden wir zeigen, dass es zu dem Dirichlet-Problem (3.1)–(3.2) höchstens eine Lösung geben kann. Da wir auf dem Rand des Gebietes ∂D und auf dem Schlitz Γ Dirichletsche Randbedingungen gegeben haben, wird der Beweis mit Hilfe des Maximum-Minimum-Prinzips (Satz 2.16) erbracht.

Satz 3.2 (Eindeutigkeitssatz). *Das Dirichlet-Problem für ein Gebiet mit Schlitz hat höchstens eine Lösung.*

Beweis: Die Differenz $u := u_1 - u_2$ von zwei Lösungen des Dirichlet-Problems (3.1)–(3.2) ist eine harmonische Funktion in $D \setminus \Gamma$, die auf \bar{D} stetig ist und die die homogene Randbedingung $u = 0$ auf ∂D und Γ erfüllt.

Nach dem Maximum-Minimum-Prinzip (Korollar 2.17) wird das Supremum und das Infimum der beschränkten harmonischen Funktion u auf ∂D oder auf Γ angenommen, da $D \setminus \Gamma$ offen ist. Aus den homogenen Randbedingungen folgt unmittelbar $u = 0$ in $D \setminus \Gamma$. \square

3.3 Existenz

Für den Existenzbeweis einer Lösung des Dirichlet-Problems (3.1)–(3.2) konstruieren wir uns ein geeignetes Potential, welches sich aus dem Doppelschichtpotential und dem Einfachschichtpotential zusammensetzt. Die Randbedingungen werden auf ein System von Integralgleichungen zurückgeführt, die wir umformen und in Operatorform bringen. Mit Hilfe der Riesz-Theorie erbringen wir den Existenzbeweis.

Die Existenz einer Lösung des Dirichlet-Problems (3.1)–(3.2) beweisen wir durch Konstruktion. Für alle $x \in D \setminus \Gamma$ setzen wir die Lösung u als Kombination eines Doppelschichtpotentials auf ∂D mit der Dichte $\varphi \in C(\partial D)$ und eines Einfachschichtpotentials auf Γ mit der Dichte $\psi \in L^p(\Gamma)$, $1 < p < 2$, an als

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \varphi(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \ln \frac{1}{|y-x|} ds(y) + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \psi(y) \ln \frac{1}{|y-x|} ds(y). \quad (3.3)$$

Für Punkte $x \in D \setminus \Gamma$ ist die Differentiation nach x und die Integration über y vertauschbar. Deswegen ist der Doppelschichtpotentialanteil und der Einfachschichtpotentialanteil harmonisch in $D \setminus \Gamma$. Demzufolge ist u harmonisch in $D \setminus \Gamma$.

Bemerkung 3.3. Die Bedingung $\psi \in L^p(\Gamma)$ mit $p > 1$ ist notwendig für die Existenz des Einfachschichtpotentialanteils.

Beweis: Im Folgenden zeigen wir, dass zwingend $p > 1$ gelten muss, damit der Einfachschichtpotentialanteil existiert.

Sei $\psi \in L^p(\Gamma)$ für ein $p > 1$, dann gilt definitionsgemäß

$$\int_{\Gamma} |\psi(t)|^p dt < \infty.$$

Wir zeigen, dass das Integral

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \psi(y) \ln \frac{1}{|y-x|} ds(y) \quad (3.4)$$

für jedes $x \in \Gamma \setminus \{\tilde{x}_{-1}\} \cup \{\tilde{x}_1\}$ existiert. Dieses ist eine Konsequenz der Hölderschen Ungleichung

$$\int fg \leq \left(\int f^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int g^q \right)^{\frac{1}{q}} \quad (3.5)$$

für nichtnegative Funktionen f und g und reelle, positive Zahlen p und q mit der Eigenschaft $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. In unserem Fall ist $f(t) = |\psi(t)|$. Damit ist der erste Faktor auf der rechten Seite von (3.5) nach unserer Voraussetzung endlich. Die Existenz von

$$\int g^q(t) dt \quad \text{mit } g(t) := \ln \frac{1}{|y-x|}$$

folgt aus der Existenz von

$$\int_0^1 \left(\ln \frac{1}{t} \right)^q dt,$$

für jedes $q < \infty$, mit Hilfe der Regularität von Γ . Deshalb existiert für $\psi \in L^p(\Gamma)$ mit $p > 1$ das Einfachschichtpotential (3.4) für alle $x \in \mathbb{R}^2$ (vgl. [7] Seite 274f.). \square

Um den Einfachschichtpotentialanteil zur Lösung des Dirichlet-Problems (3.1) und (3.2) verwenden zu können, benötigen wir die stetige Fortsetzbarkeit des Einfachschichtpotentialanteils auf dem Schlitz Γ , wo das Integral in \tilde{x}_1 und \tilde{x}_{-1} Endpunktsingularitäten aufweist. Dazu benutzen wir das in [6] Seite 275f. bewiesene Resultat.

Lemma 3.4. Der Einfachschichtpotentialanteil in der Gleichung (3.3) mit einer Dichte $\psi \in L^p(\Gamma)$, $1 < p < 2$, ist stetig in ganz \mathbb{R}^2 mit

$$u_{ESP}(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \psi(y) \ln \frac{1}{|y-x|} ds(y),$$

für alle $x \in \Gamma$, wobei das Integral als uneigentliches zu verstehen ist.

Der Beweis lässt sich in ähnlicher Weise wie Satz 2.21 erbringen. □

Damit auf dem Rand des Gebiets ∂D der Lösungsansatz (3.3) sinnvoll definiert ist, muss die stetige Fortsetzbarkeit des Doppelschichtpotentialanteils auf ∂D gewährleistet sein.

Satz 3.5. *Sei $\partial D \in C^2$ und $\varphi \in C(\partial D)$. Dann lässt sich das Potential u mit den Dichten $\varphi \in C(\partial D)$ und $\psi \in L^p(\Gamma)$, $1 < p < 2$, stetig fortsetzen von D nach \bar{D} und von $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ nach $\mathbb{R}^2 \setminus D$ mit den Grenzwerten*

$$u_{\pm}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \varphi(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \ln \frac{1}{|y-x|} ds(y) \pm \frac{1}{2} \varphi(x) + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \psi(y) \ln \frac{1}{|y-x|} ds(y),$$

für alle $x \in \partial D$, wobei

$$u_{\pm}(x) := \lim_{h \rightarrow +0} u(x \pm h\nu(x))$$

und das Integral über ∂D als uneigentliches Integral existiert.

Beweis: Der Beweis folgt aus den Sprungbeziehungen des Doppelschichtpotentials (Satz 2.23) mit der Dichte $\varphi \in C(\partial D)$, da das Einfachschichtpotential außerhalb von Γ stetig ist. □

Zur Vorbereitung des Beweises der Eindeutigkeitsaussagen über die Dichten φ und ψ werden die folgenden Aussagen über das Potential u auf dem Schlitz Γ gebraucht.

Satz 3.6. *Sei $\Gamma \in C^2$. Dann gilt für das Potential u mit den Dichten $\varphi \in C(\partial D)$ und $\psi \in L^p(\Gamma)$, $1 < p < 2$,*

$$\psi = \frac{\partial u_-}{\partial \nu} - \frac{\partial u_+}{\partial \nu}, \text{ auf } \Gamma \setminus \{\tilde{x}_{-1}\} \cup \{\tilde{x}_1\},$$

in dem Sinne

$$\int_{\Gamma} \left| \psi(y) - \nu(y) \cdot [\text{grad } u(y - h\nu(y)) - \text{grad } u(y + h\nu(y))] \right|^p dy \rightarrow 0, h \rightarrow 0.$$

Beweis: Der Beweis folgt aus den Sprungbeziehungen des Einfachschichtpotentials (Satz 2.24) mit der Dichte $\psi \in C(\partial D)$. □

Folgerung 3.7. *Aus Lemma 3.4 folgt, dass auf Γ gilt*

$$u_+ = u_-.$$

Beweis: Es gilt

$$u_{\pm}(x) = \lim_{n \rightarrow +0} u(x \pm h\nu(x))$$

für alle $x \in \Gamma$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} u_{ESP+}(x) &= \lim_{n \rightarrow +0} \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \psi(y) \ln \frac{1}{|y - (x + h\nu(x))|} ds(y) \\ &= \lim_{n \rightarrow +0} \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \psi(y) \ln \frac{1}{|y - (x - h\nu(x))|} ds(y) = u_{ESP-}(x). \end{aligned}$$

□

Der Lösungsansatz (3.3) verschiebt das Problem, das Dirichlet-Problem (3.1)–(3.2) zu lösen, auf die Bestimmung geeigneter Dichten φ und ψ . Zu ihrer endgültigen Berechnung wird der Lösungsansatz in ein System von zwei gekoppelten Integralgleichungen transformiert. Anhand dieser gekoppelten Integralgleichungen wird der endgültige Existenzbeweis geführt. Die Formulierung der Integralgleichungen als Operatorgleichungen ermöglicht die Anwendung der Riesz-Theorie.

Wir führen die vier Integraloperatoren $K_{\partial D} : C(\partial D) \rightarrow C(\partial D)$, $M : L^p(\Gamma) \rightarrow C(\partial D)$, $N : C(\partial D) \rightarrow C(\Gamma)$ und $S_{\Gamma} : L^p(\Gamma) \rightarrow C(\Gamma)$ ein, durch

$$\begin{aligned} (K_{\partial D}\varphi)(x) &:= \frac{1}{\pi} \int_{\partial D} \varphi(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \ln \frac{1}{|y - x|} ds(y), \quad x \in \partial D, \\ (M\psi)(x) &:= \frac{1}{\pi} \int_{\Gamma} \psi(y) \ln \frac{1}{|y - x|} ds(y), \quad x \in \partial D, \\ (N\varphi)(x) &:= \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \varphi(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \ln \frac{1}{|y - x|} ds(y), \quad x \in \Gamma \setminus \{\tilde{x}_{-1}\} \cup \{\tilde{x}_1\}, \\ (S_{\Gamma}\psi)(x) &:= \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \psi(y) \ln \frac{1}{|y - x|} ds(y), \quad x \in \Gamma \setminus \{\tilde{x}_{-1}\} \cup \{\tilde{x}_1\}. \end{aligned}$$

Die Operatoren $K_{\partial D}$ und S_{Γ} sind kompakt, da ihre Kerne schwach singular sind (vgl. Abschnitt 2.2.4). Die Operatoren M und N sind kompakt, da ihre Kerne stetig sind.

Satz 3.8. *Das Doppelschicht-Einfachschicht-Potential (3.3) mit den Dichten φ und ψ löst das Dirichlet-Problem (3.1)–(3.2), wenn $\varphi \in C(\partial D)$ und $\psi \in L^p(\Gamma)$, $1 < p < 2$, das System der zwei Integralgleichungen*

$$\varphi - K_{\partial D}\varphi - M\psi = -2f_{\partial D}, \quad (3.6)$$

$$N\varphi + S_{\Gamma}\psi = f_{\Gamma} \quad (3.7)$$

erfüllen, wobei (3.6) eine Fredholmsche Integralgleichung zweiter Art ist bezüglich der Dichte φ auf ∂D und (3.7) eine Fredholmsche Integralgleichung erster Art bezüglich der Dichte ψ auf Γ .

Beweis: Der Beweis von Satz 3.2 zeigt, dass u die Laplacegleichung in $D \setminus \Gamma$ löst.

Aus der Integralgleichung (3.6) erhalten wir mit den Sprungbeziehungen aus Satz 3.5

$$\begin{aligned} u_- &= \frac{1}{2}K_{\partial D}\varphi - \frac{1}{2}\varphi + \frac{1}{2}M\psi \\ &= \frac{1}{2}K_{\partial D}\varphi - \frac{1}{2}\left(K_{\partial D}\varphi + M\psi - 2f_{\partial D}\right) + \frac{1}{2}M\psi \\ &= f_{\partial D}. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $u = f_{\partial D}$ auf ∂D gilt.

Aus der Integralgleichung (3.7) erhalten wir mit der Folgerung 3.7

$$u_{\pm} = N\varphi + S_{\Gamma}\psi = f_{\Gamma},$$

also ist $u = f_{\Gamma}$ auf Γ . □

Satz 3.9. *Das Integralgleichungssystem (3.6)–(3.7) hat höchstens eine Lösung.*

Beweis: Seien φ, ψ Lösungen des Integralgleichungssystems (3.6)–(3.7) für $f_{\partial D} = 0$ und $f_{\Gamma} = 0$. Wir definieren u mit den Dichten φ, ψ wie oben nach der Formel (3.3). Nach Satz 3.8 ist dann $u_- = 0$ auf ∂D und $u = 0$ auf Γ . Daraus erhalten wir mit dem Eindeutigkeitssatz 3.2, dass $u = 0$ in $D \setminus \Gamma$ gilt. Mit Satz 3.6 folgt

$$\psi = \underbrace{\frac{\partial u_-}{\partial \nu}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial u_+}{\partial \nu}}_{=0} \text{ auf } \Gamma \setminus \{\tilde{x}_{-1}\} \cup \{\tilde{x}_1\}.$$

Demzufolge ist $\psi = 0$, und daher löst φ die Integralgleichung

$$\varphi - K_{\partial D}\varphi = 0.$$

Nach Satz 2.25 ist $(I - K_{\partial D})$ injektiv, also $\varphi = 0$. □

Wir parametrisieren die Randkurve ∂D durch $x_{\partial D} : [0, 2\pi] \rightarrow \partial D$ und formen die Integralgleichung über ∂D in eine äquivalente Integralgleichung über $[0, 2\pi]$ um. Dazu sei

$$x_{\partial D} \in C_{2\pi}^2[0, 2\pi], \quad x_{\partial D}(t) = (x_{\partial D,1}(t), x_{\partial D,2}(t)), \quad |\dot{x}_{\partial D}(t)| > 0 \text{ für alle } t \in [0, 2\pi].$$

Im Weiteren setzen wir voraus, dass $x_{\partial D}$ auf $[0, 2\pi)$ injektiv und gegen den Uhrzeigersinn orientiert ist, denn nur dann ist $\partial D = \{x_{\partial D}(t) : t \in [0, 2\pi)\}$.

Den Bogen Γ parametrisieren wir durch $x_\Gamma : [-1, 1] \rightarrow \Gamma$. Die Integralgleichung über Γ wird in eine Integralgleichung über $[-1, 1]$ umgeformt. Dazu sei

$$x_\Gamma \in C^2[-1, 1], \quad x_\Gamma = (x_{\Gamma,1}(s), x_{\Gamma,2}(s)), \quad |\dot{x}_\Gamma(s)| > 0 \quad \text{für alle } s \in [-1, 1]$$

und x_Γ auf $[-1, 1]$ injektiv. In der Parameterdarstellung des Schlitzes

$\Gamma = \{x_\Gamma(s) : s \in [-1, 1]\}$ benutzen wir die Cosinus-Substitution $s := \cos t$, $t \in [0, \pi]$.

Im Folgenden bezeichnet $y = x_{\partial D}(\tau)$ die Integrationsvariable auf dem Gebietsrand und $y = x_\Gamma(\tau)$ die Integrationsvariable auf dem Schlitz. Der freie Parameter auf dem Gebietsrand wird durch $x_{\partial D}(t)$, mit $t \in [0, 2\pi]$, bezeichnet. Für die Einheitsnormale auf dem äußeren Rand ∂D gilt

$$\nu(x_{\partial D}(\tau)) = \frac{1}{x'_{\partial D}(\tau)} [x'_{\partial D}(\tau)]^\perp.$$

Daraus erhalten wir für (3.6) die Parametrisierung

$$\begin{aligned} \varphi(x_{\partial D}(t)) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{[x'_{\partial D}(\tau)]^\perp \cdot \{x_{\partial D}(t) - x_{\partial D}(\tau)\}}{|x_{\partial D}(t) - x_{\partial D}(\tau)|^2} \varphi(x_{\partial D}(\tau)) d\tau \\ &= \frac{1}{\pi} \int_1^{-1} \psi(x_\Gamma(\tau)) \ln \frac{1}{|x_{\partial D}(t) - x_\Gamma(\tau)|} |x'_\Gamma(\tau)| d\tau = -2 f_{\partial D}(x_{\partial D}(t)). \end{aligned}$$

Bei der Parametrisierung des Integrals über Γ wird zusätzlich $s = \cos t$, mit $t \in [0, 2\pi]$, in $\Gamma = \{x_\Gamma(s) : s \in [-1, 1]\}$ substituiert:

$$\begin{aligned} \varphi(x_{\partial D}(t)) &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{[x'_{\partial D}(\tau)]^\perp \cdot \{x_{\partial D}(t) - x_{\partial D}(\tau)\}}{|x_{\partial D}(t) - x_{\partial D}(\tau)|^2} \varphi(x_{\partial D}(\tau)) d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \ln \frac{1}{|x_{\partial D}(t) - x_\Gamma(\cos \tau)|^2} \psi(x_\Gamma(\cos \tau)) |\sin \tau| |x'_\Gamma(\cos \tau)| d\tau = -2 f_{\partial D}(x_{\partial D}(t)). \end{aligned}$$

Der freie Parameter auf dem Schlitz wird durch $x_\Gamma(s)$, mit $s \in [-1, 1]$, bezeichnet. Das Argument des Parameters $x_\Gamma(s)$ wird anschließend in beiden Integralen mittels $s = \cos t$, mit $t \in [0, \pi]$, in $\Gamma = \{x_\Gamma(s) : s \in [-1, 1]\}$ substituiert. Wir erhalten daraus für die Gleichung (3.7) für $t \in [0, 2\pi]$ die parametrisierte Form

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{[x'_{\partial D}(\tau)]^\perp \cdot \{x_\Gamma(\cos t) - x_{\partial D}(\tau)\}}{|x_\Gamma(\cos t) - x_{\partial D}(\tau)|^2} \varphi(x_{\partial D}(\tau)) d\tau \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \psi(x_\Gamma(\cos \tau)) \ln \frac{1}{|x_\Gamma(\cos t) - x_\Gamma(\cos \tau)|} |\sin \tau| |x'_\Gamma(\cos \tau)| d\tau = f_\Gamma(x_\Gamma(\cos t)). \end{aligned}$$

Durch weitere Äquivalenzumformungen erhalten wir

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{[x'_{\partial D}(\tau)]^\perp \cdot \{x_\Gamma(\cos t) - x_{\partial D}(\tau)\}}{|x_\Gamma(\cos t) - x_{\partial D}(\tau)|^2} \varphi(x_{\partial D}(\tau)) d\tau \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \psi(x_\Gamma(\cos \tau)) \ln \frac{1}{|x_\Gamma(\cos t) - x_\Gamma(\cos \tau)|^2} |\sin \tau| |x'_\Gamma(\cos \tau)| d\tau = f_\Gamma(x_\Gamma(\cos t)). \end{aligned}$$

Wegen der Identität

$$\ln \frac{1}{|x_\Gamma(\cos t) - x_\Gamma(\cos \tau)|^2} = -\ln(4[\cos t - \cos \tau]^2) + \ln \frac{4[\cos t - \cos \tau]^2}{|x_\Gamma(\cos t) - x_\Gamma(\cos \tau)|^2}$$

erhalten wir für die Parametrisierung von (3.7)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{[x'_{\partial D}(\tau)]^\perp \cdot \{x_\Gamma(\cos t) - x_{\partial D}(\tau)\}}{|x_\Gamma(\cos t) - x_{\partial D}(\tau)|^2} \varphi(x_{\partial D}(\tau)) d\tau \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \left\{ -\ln(4[\cos t - \cos \tau]^2) + \ln \frac{4[\cos t - \cos \tau]^2}{|x_\Gamma(\cos t) - x_\Gamma(\cos \tau)|^2} \right\} \tilde{\psi}(\tau) d\tau = f_\Gamma(x_\Gamma(\cos t)), \end{aligned}$$

mit $t \in [0, \pi]$ und der Dichte

$$\tilde{\psi}(t) := |\sin t| |x'_\Gamma(\cos t)| \psi(x_\Gamma(\cos t)).$$

Wir erhalten somit das System der Integralgleichungen

$$\tilde{\varphi}(t) - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} K_{11}(t, \tau) \tilde{\varphi}(\tau) d\tau - \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi K_{12}(t, \tau) \tilde{\psi}(\tau) d\tau = g_1(t), \quad (3.8)$$

mit $t \in [0, 2\pi]$, und

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_{21}(t, \tau) \tilde{\varphi}(\tau) d\tau + \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi -\ln(4[\cos t - \cos \tau]^2) \tilde{\psi}(\tau) d\tau \\ & + \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi K_{22}(t, \tau) \tilde{\psi}(\tau) d\tau = g_2(t), \quad (3.9) \end{aligned}$$

mit $t \in [0, \pi]$. Die Kerne der ersten Integralgleichung lauten

$$K_{11}(t, s) := \frac{[x'_{\partial D}(s)]^\perp \cdot \{x_{\partial D}(t) - x_{\partial D}(s)\}}{|x_{\partial D}(t) - x_{\partial D}(s)|^2}, \quad \text{für } t \neq s,$$

mit $[x'_{\partial D}]^\perp = (x'_{\partial D,2}, -x'_{\partial D,1})$ als Normalenvektor, und

$$K_{12}(t, s) := \ln \frac{1}{|x_{\partial D}(t) - x_\Gamma(\cos s)|^2}.$$

Die Kerne der zweiten Integralgleichung lauten

$$K_{21}(t, s) := \frac{[x'_{\partial D}(s)]^\perp \cdot \{x_\Gamma(\cos t) - x_{\partial D}(s)\}}{|x_\Gamma(\cos t) - x_{\partial D}(s)|^2},$$

und

$$K_{22}(t, s) := \ln \frac{4[\cos t - \cos s]^2}{|x_\Gamma(\cos t) - x_\Gamma(\cos s)|^2}, \quad \text{für } \cos t \neq \cos s.$$

Die parametrisierten Dichten sind definiert durch

$$\tilde{\varphi}(t) := \varphi(x_{\partial D}(t)) \quad \text{für } t \in [0, 2\pi],$$

$$\tilde{\psi}(t) := |\sin t| |x'_\Gamma(\cos t)| \psi(x_\Gamma(\cos t)), \quad \text{für } t \in [0, \pi]. \quad (3.10)$$

Die rechten Seiten haben nach der Parametrisierung die Form

$$g_1(t) := -2 f_{\partial D}(x_{\partial D}(t)),$$

$$g_2(t) := f_\Gamma(x_\Gamma(\cos t)).$$

Bemerkung 3.10. K_{11} ist stetig in $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$.

Beweis: Zur Vereinfachung sei hier in dem Beweis $z := x_{\partial D}$.

$$K_{11}(t, s) = \frac{[z'(s)]^\perp \cdot \{z(t) - z(s)\}}{|z(t) - z(s)|^2},$$

für $t, s \in [0, 2\pi]$, $t \neq s$. Mit der Taylorformel erhalten wir

$$z(t) = z(s) + \underbrace{\begin{pmatrix} z'_1(\xi_1) \\ z'_2(\xi_2) \end{pmatrix}}_{=: z'(\xi)}(t - s)$$

und

$$z(t) = z(s) + z'(s)(t - s) + \frac{1}{2} z''(\tilde{\xi})(t - s)^2,$$

wobei ξ und $\tilde{\xi}$ zwischen s und t liegen. Daraus folgt

$$\begin{aligned} K_{11}(t, s) &= \frac{[z'(s)]^\perp \cdot \{z'(s) + \frac{1}{2} z''(\tilde{\xi})(t - s)^2\}}{|z'(\xi)(t - s)|^2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{[z'(s)]^\perp \cdot \{z''(\tilde{\xi})\}}{|z'(\xi)|^2} \rightarrow \frac{1}{2} \frac{[z'(s)]^\perp \cdot \{z''(s)\}}{|z'(s)|^2}, \quad t \rightarrow s, \end{aligned}$$

wobei $z'(s) \neq 0$. □

Bemerkung 3.11. $\tilde{\varphi} \in C[0, 2\pi]$ ist 2π -periodisch.

Die Parametrisierung für die Integrale über Γ sind so gewählt, dass sich die Singularitäten vom Typ $\sqrt{1-s^2}$ aufheben. Die Funktionen $\tilde{\psi} \in L^2[0, \pi]$ und $g_2(t)$ können 2π -periodisch auf $[-\pi, \pi]$ fortgesetzt werden.

Lemma 3.12. Aus $\tilde{\psi} \in L^2[0, \pi]$ folgt $\psi \in L^p(\Gamma)$, $1 < p < 2$.

Beweis: Es gilt

$$\tilde{\psi} \in L^2[0, \pi] \Leftrightarrow \int_0^\pi |\tilde{\psi}(\tau)|^2 d\tau < \infty.$$

Wegen (3.10) erhalten wir mit Hilfe der Parametrisierung

$$\int_\Gamma |\psi(y)|^p ds(y) = \int_0^\pi \frac{|\tilde{\psi}(\tau)|^p}{|\sin \tau|^{p-1} |x'_\Gamma(\cos \tau)|^{p-1}} d\tau.$$

Mit der Hölderungleichung können wir abschätzen

$$\begin{aligned} & \int_\Gamma |\psi(y)|^p ds(y) \\ & \leq \frac{1}{\inf_{s \in [-1, 1]} |x'_\Gamma(s)|^{p-1}} \left[\int_0^\pi |\sin \tau|^{\frac{1-p}{1-\frac{p}{2}}} d\tau \right]^{1-\frac{p}{2}} \left[\int_0^\pi |\tilde{\psi}(\tau)|^2 d\tau \right]^{\frac{p}{2}} < \infty. \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $\psi \in L^p(\Gamma)$, $1 < p < \frac{4}{3}$ gilt, denn das Integral auf der rechten Seite ist endlich, wenn $1 < p < \frac{4}{3}$ gilt, da

$$\int_0^\pi \sin^{-\gamma}(\tau) d\tau \quad \text{für } \gamma > 0$$

existiert, wenn $\gamma < 1$ ist. □

Aus dem letzten Lemma erhalten wir den folgenden Satz.

Satz 3.13. Wenn $\tilde{\varphi} \in C_{2\pi}[0, 2\pi]$ und $\tilde{\psi} \in L^2[0, \pi]$ die parametrisierten Integralgleichungen (3.8) und (3.9) erfüllen, dann sind $\varphi \in C(\partial D)$ und $\psi \in L^p(\Gamma)$ für $1 < p < \frac{4}{3}$, und erfüllen die Integralgleichungen (3.6) und (3.7).

Aus Satz 3.13 und Satz 3.9 erhalten wir:

Folgerung 3.14. Die Integralgleichungen (3.8) und (3.9) haben höchstens eine Lösung.

Die Integralgleichungen (3.8) und (3.9) überführen wir in das System von Operatorgleichungen

$$\tilde{\varphi} - A_{11}\tilde{\varphi} - A_{12}\tilde{\psi} = g_1, \quad (3.11)$$

$$A_{21}\tilde{\varphi} + S_0\tilde{\psi} + A_{22}\tilde{\psi} = g_2 \quad (3.12)$$

mit den Operatoren

$$(A_{11}\tilde{\varphi})(t) := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} K_{11}(t, \tau) \tilde{\varphi}(\tau) d\tau, \quad t \in [0, 2\pi],$$

$$(A_{12}\tilde{\psi})(t) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} K_{12}(t, \tau) \tilde{\psi}(\tau) d\tau, \quad t \in [0, 2\pi],$$

$$(A_{21}\tilde{\varphi})(t) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_{21}(t, \tau) \tilde{\varphi}(\tau) d\tau, \quad t \in [0, \pi],$$

$$(A_{22}\tilde{\psi})(t) := \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \{K_{22}(t, \tau) - 4\} \tilde{\psi}(\tau) d\tau, \quad t \in [0, \pi] \quad \text{und}$$

$$(S_0\tilde{\psi})(t) := \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \{-\ln(4[\cos t - \cos \tau]^2) + 4\} \tilde{\psi}(\tau) d\tau, \quad t \in [0, \pi].$$

Für die Untersuchung der Operatoren S_0 und A_{22} benötigen wir die folgenden beiden Lemmata.

Lemma 3.15. *Für die trigonometrischen Monome gelten die Integrale*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln\left(4 \sin^2 \frac{s}{2}\right) e^{ims} ds = \begin{cases} 0 & \text{für } m = 0 \\ -\frac{1}{|m|} & \text{für } m = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

Beweis: Für den Beweis wird auf [8, Lemma 8.21, S. 126ff.] verwiesen. □

Lemma 3.16. *Es gilt die Identität*

$$\ln(4[\cos t - \cos \tau]^2) = \ln\left(4 \sin^2 \frac{t-\tau}{2}\right) + \ln\left(4 \sin^2 \frac{t+\tau}{2}\right).$$

Beweis: Es gilt das Additionstheorem

$$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2 \sin \alpha \sin \beta.$$

Wir setzen $t = \alpha - \beta$ und $\tau = \alpha + \beta$ und erhalten

$$\cos(t) - \cos(\tau) = 2 \sin \frac{t - \tau}{2} \sin \frac{\tau - t}{2}.$$

Daraus folgt mit Quadrieren unsere Behauptung. \square

Mit $H_e^1[0, \pi]$ werde der Unterraum der geraden Funktionen von $H^1[-\pi, \pi]$ bezeichnet.

Satz 3.17. a) Der Operator $S_0 : L^2[0, \pi] \rightarrow H_e^1[0, \pi]$ ist beschränkt und hat eine beschränkte Inverse $S_0^{-1} : H_e^1[0, \pi] \rightarrow L^2[0, \pi]$.

b) Der Operator $A_{22} : L^2[0, \pi] \rightarrow H_e^1[0, \pi]$ ist kompakt.

Beweis: a) Aus Lemma 3.16 folgt

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \left\{ -\ln(4[\cos t - \cos \tau]^2) + 4 \right\} \cos m\tau \, d\tau \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ -\ln\left(4 \sin^2 \frac{t - \tau}{2}\right) + 2 \right\} \cos m\tau \, d\tau, \end{aligned}$$

für $t \in [0, \pi]$ und $m \in \mathbb{N}_0$. Folglich erhalten wir für $g_m(t) = \cos mt$ die Eigenwertbeziehung

$$\begin{aligned} S_0 g_m(t) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \left\{ -\ln(4[\cos t - \cos \tau]^2) + 4 \right\} \cos m\tau \, d\tau \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \ln\left(4 \sin^2 \frac{t - \tau}{2}\right) - 2 \right\} \cos m\tau \, d\tau \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \ln\left(4 \sin^2 \frac{t - \tau}{2}\right) - 2 \right\} \cos m\tau \, d\tau \right) \\ &= -\frac{1}{2} \beta_m g_m(t), \end{aligned}$$

für $t \in [0, \pi]$ und $m \in \mathbb{N}_0$, mit

$$\beta_m := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ -\ln\left(4 \sin^2 \frac{s}{2}\right) - 2 \right\} \cos ms \, ds.$$

Aus Lemma 3.15 erhalten wir $\beta_m = -\frac{1}{|m|}$ für $m \neq 0$ und $\beta_0 = -2$. Daher bildet S_0 die Funktion $\tilde{\psi} \in L^2[0, \pi]$ mit Fourierentwicklung

$$\tilde{\psi} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m g_m$$

nach

$$S_0 \tilde{\psi} = -\frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \beta_m a_m g_m$$

ab. Die Folge $(g_m)_{m \in \mathbb{N}_0}$ bildet ein vollständiges Orthogonalsystem in $L^2[0, \pi]$ und in $H_e^1[0, \pi]$ (vgl. [9] Seite 302). Dies impliziert die Beschränktheit von $S_0 : L^2[0, \pi] \rightarrow H_e^1[0, \pi]$ und die Invertierbarkeit mit dem durch

$$S_0^{-1} g_m = -\frac{2}{\beta_m} g_m, \quad m \in \mathbb{N}_0,$$

beschriebenen inversen Operator $S_0^{-1} : H_e^1[0, \pi] \rightarrow L^2[0, \pi]$, der wiederum beschränkt ist.

b) Wir betrachten zuerst

$$K_{22}(t, s) = \ln \frac{4 [\cos t - \cos s]^2}{|x_{\Gamma}(\cos t) - x_{\Gamma}(\cos s)|^2},$$

für $t, s \in [0, \pi]$ und $\cos t \neq \cos s$. Sei $\sigma := \cos s$ und $\vartheta := \cos t$, und sei

$$h(\vartheta, \sigma) := \frac{x_{\Gamma}(\vartheta) - x_{\Gamma}(\sigma)}{\vartheta - \sigma},$$

für $\vartheta \neq \sigma$, mit $\vartheta, \sigma \in [-1, 1]$.

Nach der Taylor-Formel gilt

$$\frac{x_{\Gamma}(\vartheta) - x_{\Gamma}(\sigma)}{\vartheta - \sigma} = \int_0^1 x'_{\Gamma}(\vartheta + \lambda(\sigma - \vartheta)) d\lambda.$$

Folglich existiert

$$\lim_{\sigma \rightarrow \vartheta} h(\vartheta, \sigma) = \int_0^1 x'_{\Gamma}(\vartheta) d\lambda = x'_{\Gamma}(\vartheta) \neq 0,$$

da $x_{\Gamma} \in C^2[-1, 1]$, mit $x'_{\Gamma} \neq 0$. Daraus können wir entnehmen, dass der Kern K_{22} zu einer stetigen Funktion für $t = s$ fortgesetzt werden kann.

Ferner ist

$$\frac{\partial h}{\partial \vartheta}(\vartheta, \sigma) = \int_0^1 x''_{\Gamma}(\vartheta + \lambda(\sigma - \vartheta))(1 - \lambda) d\lambda,$$

und folglich existiert

$$\lim_{\sigma \rightarrow \vartheta} \frac{\partial h}{\partial \vartheta}(\vartheta, \sigma) = \frac{1}{2} x''_{\Gamma}(\vartheta).$$

Analog gilt für $\frac{\partial h}{\partial \sigma}(\sigma, \sigma) = \frac{1}{2} x''_{\Gamma}(\sigma)$. Damit haben wir gezeigt, dass sich h und seine ersten partiellen Ableitungen in $\vartheta = \sigma$ stetig fortsetzen lassen. Für die zweiten partiellen Ableitungen geht der Beweis analog, so dass wir die stetige Fortsetzung in $\vartheta = \sigma$ der zweiten partiellen Ableitungen von h erhalten. Durch die Kettenregel überträgt sich diese Eigenschaft der stetigen Fortsetzbarkeit auf die ersten und zweiten partiellen Ableitungen von K_{22} , d.h. $K_{22} \in C^2([0, \pi] \times [0, \pi])$. Der Kern K_{22} ist in beiden Variablen 2π -periodisch fortsetzbar und gerade bezüglich π . Daraus erhalten wir, dass $A_{22}\tilde{\psi}$ gerade bezüglich π und 2π -periodisch fortsetzbar ist.

Wir zeigen, dass A_{22} den Raum $L^2[0, \pi]$ beschränkt nach $H^2[0, 2\pi]$ abbildet. Sei der Einfachheit halber $k(t, \tau) := K_{22}(t, \tau) - 4$. Da mit K_{22} auch k in $C^2([0, \pi] \times [0, \pi])$ liegt, d.h. die partiellen Ableitungen existieren und stetig sind und ihr Maximum kleiner als Unendlich ist, erhalten wir mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung die Abschätzung

$$\|A_{22}\tilde{\psi}\|_2 \leq C \max \left\{ \|k\|_{\infty}, \left\| \frac{\partial k}{\partial t} \right\|_{\infty}, \left\| \frac{\partial k}{\partial \tau} \right\|_{\infty}, \left\| \frac{\partial^2 k}{\partial t^2} \right\|_{\infty}, \left\| \frac{\partial^2 k}{\partial \tau^2} \right\|_{\infty} \right\} \|\tilde{\psi}\|_{L^2[0, 2\pi]}$$

für alle $\tilde{\psi} \in L^2[0, \pi]$ mit einer von k unabhängigen Konstanten C , d.h.

$A_{22} : L^2[0, \pi] \rightarrow H^2[0, 2\pi]$ ist beschränkt. Mit Satz 2.30 wissen wir, dass $H^2[0, 2\pi]$ dicht in $H^1[0, 2\pi]$ liegt, mit kompakter Einbettung von $H^2[0, 2\pi]$ nach $H^1[0, 2\pi]$. Da wie oben gezeigt $A_{22}\tilde{\psi}$ gerade bezüglich π und 2π -periodisch ist, erhalten wir, dass A_{22} kompakt von $L^2[0, \pi]$ nach $H_e^1[0, \pi]$ abbildet.

□

Um das System der Integralgleichungen (3.8) und (3.9) zusammenzufassen, bringt man (3.11) und (3.12) in Matrizenform.

Sei

$$A := \begin{pmatrix} -A_{11} & -A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \quad \eta := \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \tilde{\psi} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g := \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix},$$

mit $\eta \in C_{2\pi}[0, 2\pi] \times L^2[0, \pi]$ und $g \in C[0, 2\pi] \times H_e^1[0, \pi]$. Der Operator

$$A : C[0, 2\pi] \times L^2[0, \pi] \rightarrow C[0, 2\pi] \times H_e^1[0, \pi]$$

ist kompakt, denn der Operator

$$A_{11} : C[0, 2\pi] \rightarrow C[0, 2\pi]$$

ist kompakt, da der Kern K_{11} von A_{11} nach Bemerkung 3.10 stetig ist, und der Operator

$$A_{12} : L^2[0, \pi] \rightarrow C[0, 2\pi]$$

ist kompakt, da der Kern K_{12} von A_{12} stetig ist. Ebenso ist der Operator

$$A_{21} : C[0, 2\pi] \rightarrow H_e^1[0, \pi]$$

kompakt, da der Kern K_{21} von A_{21} stetig ist. Der Operator

$$A_{22} : L^2[0, \pi] \rightarrow H_e^1[0, \pi]$$

ist nach Satz 3.17 ebenfalls kompakt.

Das Gleichungssystem (3.11)–(3.12) lässt sich schreiben durch

$$E\eta + A\eta = g, \quad (3.13)$$

wobei

$$E := \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & S_0 \end{pmatrix}.$$

$E : C[0, 2\pi] \times L^2[0, \pi] \rightarrow C[0, 2\pi] \times H_e^1[0, \pi]$ ist beschränkt und hat eine beschränkte Inverse $E^{-1} : C[0, 2\pi] \times H_e^1[0, \pi] \rightarrow C[0, 2\pi] \times L^2[0, \pi]$, da S_0 beschränkt ist und eine beschränkte Inverse S_0^{-1} besitzt.

Die Inverse von E lässt sich schreiben als

$$E^{-1} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & S_0^{-1} \end{pmatrix}.$$

Lemma 3.18. *Die Gleichung (3.13) hat höchstens eine Lösung η .*

Beweis: Die Behauptung folgt aus der Folgerung 3.14. □

Durch äquivalente Umformungen erhalten wir aus (3.13)

$$\begin{aligned} E\eta + A\eta = g &\Leftrightarrow (E + A)\eta = g \\ &\Leftrightarrow E^{-1}(E + A)\eta = E^{-1}g \\ &\Leftrightarrow (I + E^{-1}A)\eta = E^{-1}g. \end{aligned} \quad (3.14)$$

$E^{-1}A : C[0, 2\pi] \times L^2[0, \pi] \rightarrow C[0, 2\pi] \times L^2[0, \pi]$ ist kompakt, da A kompakt und E^{-1} beschränkt ist.

Die Injektivität von $E + A$ in der Gleichung (3.13) impliziert die Injektivität von $I + E^{-1}A$ in der Gleichung (3.14). Aus der Riesz-Theorie (Korollar 2.13) erhalten wir, dass für die Gleichung (3.14) eine eindeutige Lösung η existiert. Wir erhalten den Existenzsatz.

Satz 3.19 (Existenzsatz). *Das Dirichlet-Problem in einem Gebiet mit Schlitz ist eindeutig lösbar.* □

Für die Konvergenzanalyse benötigen wir die Existenz der Lösung in $H^p[0, 2\pi] \times H^p[0, 2\pi] \rightarrow H^p[0, 2\pi] \times H^{p+1}[0, 2\pi]$ für $p > \frac{1}{2}$. Diese kann analog zum Vorhergehenden gezeigt werden, wenn die Regularität der Ränder entsprechend erhöht wird.

Kapitel 4

Numerische Lösung

In diesem Kapitel wollen wir das numerische Verfahren zur Lösung des Dirichlet-Problems in einem Gebiet mit Schlitz betrachten. Da (3.6) eine Fredholmsche Integralgleichung zweiter Art und (3.7) eine Fredholmsche Integralgleichung erster Art ist, wenden wir das Kollokationsverfahren an. Gewöhnlich verwendet man für Integralgleichungen zweiter Art das Nyström-Verfahren, da es mit weniger Rechenaufwand auskommt. Das Nyström-Verfahren ist ein Quadraturformelverfahren zur näherungsweise Lösung von Integralgleichungen zweiter Art mit stetigen Kernen. Das Problem liegt aber darin, dass das Nyström-Verfahren für Integralgleichungen erster Art nicht konzipiert ist. Das Kollokationsverfahren ist hingegen für beide Arten von Integralgleichungen geeignet, da es ein Spezialfall der Projektionsmethode ist, welche ein generelles Verfahren zur näherungsweise Lösung von Operatorgleichungen beschreibt. Unser Ziel ist es, die Lösung unseres Integralgleichungssystems durch die Lösung eines linearen Gleichungssystems zu approximieren. Um ein voll-diskretes Verfahren zu erhalten, werden die in den Integralgleichungen auftretenden Integrale durch Quadraturformeln ersetzt.

Desweiteren führen wir eine Konvergenz- und Fehleranalyse durch. Dazu werden wir H^p -Räume benutzen, da wir mit den Räumen $C[0, 2\pi] \times L^2[0, \pi] \rightarrow C[0, 2\pi] \times H_e^1[0, \pi]$ aus dem vorhergehenden Abschnitt keine Normkonvergenz erhalten. Dieses liegt an den niedrigen Regularitätsanforderungen an den Gebietsrand und an den Schlitz.

Zum Schluss dieses Kapitels wenden wir uns numerischen Beispielen und deren Ergebnissen zu. Als grundlegendes Beispiel nehmen wir eine Ellipse mit einer Geraden. Für die Beispiele mit einer Geraden im Gebietsinneren haben wir eine explizite Lösung gegeben. Um die Abweichung zur wahren Lösung zu bekommen, haben wir mit Hilfe von *Matlab* das Gleichungssystem (4.20)–(4.21) gelöst, und somit eine Näherungslösung für u bekommen. Im allgemeinen erwarten wir exponentielle Konvergenz des Fehlers der approximierten Lösung u_n zur wahren Lösung u .

Zuerst führen wir aber noch einige Grundlagen für das numerische Verfahren ein.

4.1 Numerische Grundlagen

4.1.1 Trigonometrische Interpolation

Für das Kollokationsverfahren benutzen wir den Raum der trigonometrischen Polynome. Daher wollen wir uns mit dem Aufbau, der Basis und einigen Eigenschaften des Raumes der trigonometrischen Polynome befassen.

Sei $t_j = \frac{\pi}{n}j$, $j = 0, \dots, 2n - 1$, eine äquidistante Unterteilung des Intervalls $[0, 2\pi]$ mit einer geraden Anzahl von Stützstellen. Dann gibt es zu vorgegebenen Werten g_0, \dots, g_{2n-1} ein eindeutig bestimmtes trigonometrisches Polynom der Form

$$u(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} [\alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt] + \frac{\alpha_n}{2} \cos nt, \quad (4.1)$$

welches die Interpolationseigenschaft $u(t_j) = g_j$, $j = 0, \dots, 2n - 1$, besitzt. Seine Koeffizienten sind gegeben durch

$$\alpha_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{2n-1} g_j \cos kt_j, \quad k = 0, \dots, n, \quad (4.2)$$

$$\beta_k = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{2n-1} g_j \sin kt_j, \quad k = 1, \dots, n - 1, \quad (4.3)$$

(vgl. [8] Seite 182ff.).

Den hierdurch beschriebenen Interpolationsoperator $g \mapsto u$ bezeichnen wir mit P_n . Mit Hilfe der Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen

$$\cos x \cos y = \cos(x - y) - \sin x \sin y,$$

$$\sin x \sin y = \cos(x + y) - \cos x \cos y$$

erhalten wir aus (4.1) durch Einsetzen der Koeffizienten (4.2) und (4.3) die Form der Lagrange-Basis für die trigonometrische Interpolation

$$L_j(t) = \frac{1}{2n} \left\{ 1 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \cos k(t - t_j) + \cos n(t - t_j) \right\}, \quad (4.4)$$

für $t \in [0, 2\pi]$ und $j = 0, \dots, 2n - 1$. Mit dem Realteil einer geometrischen Summe

$$1 + 2 \sum_{k=1}^{m-1} e^{ikt} + e^{imt} = i(1 - e^{imt}) \cot \frac{t}{2}, \quad 0 < t < 2\pi,$$

also

$$1 + 2 \sum_{k=1}^{m-1} \cos kt + \cos mt = \sin mt \cot \frac{t}{2}, \quad 0 < t < 2\pi,$$

erhalten wir

$$L_j(t) = \frac{1}{2n} \sin n(t - t_j) \cot \frac{t - t_j}{2}, \quad t \neq t_j.$$

Bemerkung 4.1. Für die Lagrange-Basis (4.4) gelten folgende Eigenschaften:

$$a) \int_0^{2\pi} L_j(t) dt = \frac{\pi}{n}, \quad \text{für } j = 0, \dots, 2n - 1.$$

$$b) L_j(t_j) = 1, \quad \text{für } j = 0, \dots, 2n - 1.$$

Beweis: a) Mit (4.4) erhalten wir

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} L_j(\tau) d\tau &= \frac{1}{2n} \int_0^{2\pi} \left\{ 1 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \cos k(\tau - t_j) + \cos n(\tau - t_j) \right\} d\tau \\ &= \frac{1}{2n} \{2\pi + 2 \cdot 0 + 0\} = \frac{\pi}{n}. \end{aligned}$$

Aufgrund der 2π -Periodizität des Sinus verschwinden bei der Integration alle Terme mit $k \neq 0$, da

$$\int_0^{2\pi} \cos k(\tau - t_j) d\tau = \frac{1}{k} \sin(k(\tau - t_j)) \Big|_0^{2\pi}.$$

b) Aus (4.4) erhalten wir

$$L_j(t_j) = \frac{1}{2n} \{1 + 2(n - 1) + 1\} = 1.$$

□

Satz 4.2. Für die trigonometrische Interpolation gilt

$$\|P_n g - g\|_q \leq \frac{C}{n^{p-q}} \|g\|_p, \quad 0 \leq q \leq p, \quad \frac{1}{2} < p,$$

für alle $g \in H^p[0, 2\pi]$ mit einer von p und q abhängigen Konstanten C .

Beweis: Für den Beweis wird auf [8, Theorem 11.8, S. 186f.] verwiesen.

□

4.1.2 Das Projektionsverfahren

Bevor wir uns dem Kollokationsverfahren zuwenden, sehen wir uns das Projektionsverfahren an, da das Kollokationsverfahren als ein Spezialfall des Projektionsverfahrens aufgefaßt werden kann.

Das Projektionsverfahren ist für Integralgleichungen erster und zweiter Art geeignet, da es ein generelles Verfahren zur näherungsweise Lösung von Operatorgleichungen beschreibt. Die Grundidee von Projektionsverfahren besteht darin, die Operatorgleichung auf endlich-dimensionale Unterräume zu projizieren.

Definition 4.3. Sei X ein normierter Raum und $U \subset X$ ein nichttrivialer Unterraum. Ein beschränkter linearer Operator $P : X \rightarrow U$ mit der Eigenschaft $P\varphi = \varphi$ für alle $\varphi \in U$ heißt ein Projektionsoperator oder Projektor von X auf U .

Definition 4.4. Seien X und Y Banach Räume und sei $A : X \rightarrow Y$ ein injektiver, beschränkter, linearer Operator. Ferner seien $X_n \subset X$ und $Y_n \subset Y$ zwei Folgen von Unterräumen mit $\dim X_n = \dim Y_n = n$ und $P_n : Y \rightarrow Y_n$ Projektionsoperatoren. Die durch X_n und P_n erzeugte Projektionsmethode approximiert (bei vorgegebenem $f \in Y$) die Gleichung

$$A\varphi = f$$

für $\varphi \in X$ durch die projizierte Gleichung

$$P_n A \varphi_n = P_n f \quad (4.5)$$

für $\varphi_n \in X_n$. Die Projektionsmethode heißt konvergent für den Operator A , falls es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt so, dass für jedes $f \in A(X)$ die Näherungsgleichung (4.5) für alle $n \geq n_0$ eine eindeutige Lösung $\varphi_n \in X_n$ besitzt und wenn diese Lösungen $\varphi_n \rightarrow \varphi$, $n \rightarrow \infty$, gegen die eindeutige Lösung φ von $A\varphi = f$ konvergieren.

Durch Operatoren ausgedrückt beinhaltet die Konvergenz einer Projektionsmethode, dass für alle $n \geq n_0$ die endlich-dimensionalen Operatoren $P_n A : X_n \rightarrow Y_n$ invertierbar sind und dass für alle $\varphi \in X$ punktweise Konvergenz

$$(P_n A)^{-1} P_n A \varphi \rightarrow \varphi, \quad n \rightarrow \infty,$$

vorliegt. Im allgemeinen können wir Konvergenz nur erwarten, wenn die Unterräume X_n den Raum X ausschöpfen, d.h. wenn für alle $\varphi_n \in X_n$ gilt

$$\inf_{\psi \in X_n} \|\psi - \varphi\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Da $P_n A : X_n \rightarrow Y_n$ ein linearer Operator zwischen zwei endlich-dimensionalen Räumen ist, reduziert sich das Lösen von (4.5) auf ein endliches lineares Gleichungssystem.

4.2 Das Kollokationsverfahren

4.2.1 Die Grundidee des Kollokationsverfahrens

Die Grundidee des Kollokationsverfahrens zur approximativen Lösung einer Operatorgleichung

$$A\varphi = f \quad (4.6)$$

ist die Bestimmung eine Näherungslösung in einem endlich-dimensionalen Unterraum so, dass (4.6) an endlich vielen Punkten, den sogenannten *Kollokationspunkten* erfüllt ist. Zur genaueren Beschreibung sei $Y = C[a, b]$ und $A : X \rightarrow Y$ ein beschränkter linearer Operator. Seien $X_n \subset X$ und $Y_n \subset Y$ Folgen von Unterräumen mit $\dim X_n = \dim Y_n = n$. Wir wählen n Punkte x_1, \dots, x_n in $[a, b]$ derart, dass der Unterraum Y_n bezüglich der Kollokationspunkte unisolvent ist, d.h. die Interpolationsaufgabe mit dem Unterraum Y_n und den Interpolationspunkten x_1, \dots, x_n ist eindeutig lösbar. Dann approximiert das Kollokationsverfahren die Lösung von (4.6) durch ein Element $\varphi \in X_n$ mit

$$(A\varphi_n)(x_j) = f(x_j), \quad j = 1, \dots, n. \quad (4.7)$$

Sei $X_n = \text{span}\{u_1, \dots, u_n\}$. Wir können φ_n darstellen als Linearkombination

$$\varphi_n = \sum_{k=1}^n \gamma_k u_k$$

und sehen, dass (4.7) äquivalent ist zu dem linearen Gleichungssystem

$$\sum_{k=1}^n \gamma_k (Au_k)(x_j) = f(x_j), \quad j = 1, \dots, n,$$

für die Koeffizienten $\gamma_1, \dots, \gamma_n$.

Das Kollokationsverfahren läßt sich auffassen als Projektionsverfahren mit dem Interpolationsoperator $P_n : Y \rightarrow Y_n$ als Projektionsoperator. Die Werte an den Interpolationspunkten legen die zu interpolierende Funktion auf eindeutige Art und Weise fest, weshalb (4.7) äquivalent ist zu

$$P_n A \varphi_n = P_n f.$$

Das Kollokationsverfahren kann aber auch in anderen Funktionenräumen anstelle von $C[a, b]$ betrachtet werden, wie zum Beispiel in unserem Fall in Sobolew-Räumen.

4.2.2 Das Kollokationsverfahren für Gebiete mit Schlitz

In diesem Abschnitt wenden wir uns der numerischen Lösung des Dirichlet-Problems in einem Gebiet mit Schlitz zu. Dazu greifen wir das Integralgleichungssystem (3.8)–(3.9) auf und bringen es durch Äquivalenzumformungen in ein System von Operatorgleichungen. Mit Hilfe von Quadraturformeln erhalten wir ein Gleichungssystem, aus dem wir durch Umformungen die approximierten Dichten zu den wahren Dichten φ und ψ erhalten und somit die Näherungslösung u_n an die wahre Lösung u . Die numerischen Ergebnisse dieses Verfahrens werden später in den Beispielen aufgeführt.

Wir betrachten unser Integralgleichungssystem (3.8)–(3.9)

$$\tilde{\varphi}(t) - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} K_{11}(t, \tau) \tilde{\varphi}(\tau) d\tau - \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} K_{12}(t, \tau) \tilde{\psi}(\tau) d\tau = g_1(t),$$

mit $t \in [0, 2\pi]$, und

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_{21}(t, \tau) \tilde{\varphi}(\tau) d\tau + \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} -\ln(4[\cos t - \cos \tau]^2) \tilde{\psi}(\tau) ds(\tau) \\ + \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} K_{22}(t, \tau) \tilde{\psi}(\tau) d\tau = g_2(t), \end{aligned}$$

mit $t \in [0, \pi]$. Für die numerische Behandlung wird der Integralteil über den invertierbaren Operator über das Intervall $[0, 2\pi]$ integriert. Dieser Operator lässt sich dann konkret ausrechnen. Durch eine Äquivalenzumformung wie in Satz 3.17 erhalten wir eine zu (3.9) äquivalente Integralgleichung

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_{21}(t, \tau) \tilde{\varphi}(\tau) d\tau + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ -\ln \left(4 \sin^2 \frac{t-\tau}{2} \right) + 2 \right\} \tilde{\psi}(\tau) d\tau \\ + \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \{K_{22}(t, \tau) - 4\} \tilde{\psi}(\tau) d\tau = g_2(t), \end{aligned}$$

mit $t \in [0, \pi]$, da $\tilde{\psi}$ eine gerade Funktion bezüglich der Integrationsvariablen ist und 2π -periodisch fortgesetzt werden kann.

Für $t \in [0, \pi]$ sei

$$(\tilde{S}_0 \tilde{\psi})(t) := \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ -\ln \left(4 \sin^2 \frac{t-\tau}{2} \right) + 2 \right\} \tilde{\psi}(\tau) d\tau.$$

Somit erhalten wir das umgeformte Operatorgleichungssystem

$$\tilde{\varphi} - A_{11}\tilde{\varphi} - A_{12}\tilde{\psi} = g_1, \quad (4.8)$$

$$A_{21}\tilde{\varphi} + \tilde{S}_0\tilde{\psi} + A_{22}\tilde{\psi} = g_2. \quad (4.9)$$

Um das Kollokationsverfahren auf (4.8)–(4.9) anwenden zu können, benötigen wir Folgen von Unterräumen $X_{n,1} = Y_{n,1} \subset C[0, 2\pi]$ und $X_{n,2} \subset L^2[0, \pi]$ und $Y_{n,2} \subset H_e^1[0, \pi]$. Sei $n \in \mathbb{N}$ vorgegeben. Für $X_{n,1}$ wählen wir den Raum der trigonometrischen Polynome

$$T_{n,1} := \left\{ \sum_{k=0}^n \alpha_k \cos kt + \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k \sin kt \mid t \in [0, 2\pi], \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R} \right\},$$

mit den äquidistanten Stützstellen $t_j = \frac{\pi}{n}j$ für $j = 0, \dots, 2n - 1$. Das Interpolationsproblem bezüglich dieser $2n$ Stützstellen und des $2n$ -dimensionalen Unterraums $T_{n,1}$ ist eindeutig lösbar. Für $X_{n,2} = Y_{n,2}$ wählen wir den Raum der geraden trigonometrischen Polynome

$$T_{n,2} := \left\{ \sum_{k=0}^n a_k \cos ks \mid s \in [0, 2\pi], a_k \in \mathbb{R} \right\},$$

mit den äquidistanten Stützstellen $t_l = \frac{\pi}{n}l$ für $l = 0, \dots, n$. Das Interpolationsproblem bezüglich der $(n + 1)$ Stützstellen t_l für $l = 0, \dots, n$, und des $(n + 1)$ -dimensionalen Unterraums $T_{n,2} \subset T_{n,1}$ ist eindeutig lösbar (siehe [7] Seite 278).

Wir wenden folgende Interpolations-Quadraturformeln an:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} K_{11}(t, \tau) \tilde{\varphi}(\tau) d\tau &\approx \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{2n-1} K_{11}(t, t_k) \tilde{\varphi}(t_k), \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} K_{12}(t, \tau) \tilde{\psi}(\tau) d\tau &\approx \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^n \alpha_k K_{12}(t, t_k) \tilde{\psi}(t_k), \end{aligned}$$

für $t \in [0, 2\pi]$, und

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} K_{21}(t, \tau) \tilde{\varphi}(\tau) d\tau &\approx \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} K_{21}(t, t_k) \tilde{\varphi}(t_k), \\ \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ -\ln \left(4 \sin^2 \frac{t-\tau}{2} \right) + 2 \right\} \tilde{\psi}(\tau) ds(\tau) &\approx \sum_{k=0}^{2n-1} R_k(t) \tilde{\psi}(t_k), \\ \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} (K_{22}(t, \tau) - 4) \tilde{\psi}(\tau) d\tau &\approx \frac{1}{4n} \sum_{k=0}^n \alpha_k (K_{22}(t, t_k) - 4) \tilde{\psi}(t_k), \end{aligned}$$

für $t \in [0, \pi]$, wobei

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{für } k = 0, n, \\ 1, & \text{sonst,} \end{cases}$$

und

$$R_k(t) := \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ -\ln \left(4 \sin^2 \frac{t-\tau}{2} \right) + 2 \right\} L_k(\tau) d\tau, \quad t \in [0, 2\pi],$$

für $k = 0, \dots, 2n-1$.

Mit Hilfe von Lemma 3.15, der Lagrange-Basis der Form (4.4) und der Bemerkung 4.1 a) erhalten wir

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left(4 \sin^2 \frac{t-\tau}{2} \right) L_k(\tau) d\tau = \frac{1}{2n} \left\{ 2 \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m} \cos m(t-t_k) + \frac{1}{n} \cos n(t-t_k) \right\},$$

für $t \in [0, 2\pi]$ und $k = 0, \dots, 2n-1$, (vgl. [8] Seite 208). Daraus folgt

$$R_k(t) = \frac{1}{4n} \left\{ 2 + 2 \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m} \cos m(t-t_k) + \frac{1}{n} \cos n(t-t_k) \right\},$$

für $t \in [0, 2\pi]$ und $k = 0, \dots, 2n-1$.

Wir suchen eine Lösung $\tilde{\varphi}_n$ aus dem Raum $T_{n,1}$ der trigonometrischen Polynome bis zum Grad $2n$ und eine Lösung $\tilde{\psi}_n$ aus dem Raum $T_{n,2}$ der geraden trigonometrischen Polynome bis zum Grad $(n+1)$. Da sich das Kollokationsverfahren als Projektionsverfahren auffassen lässt, definieren wir den Interpolationsoperator durch

$$P_n : C[0, 2\pi] \times H_e^1[0, \pi] \rightarrow T_{n,1} \times T_{n,2}, \quad P_n := \begin{pmatrix} P_{n,1} & 0 \\ 0 & P_{n,2} \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

mit den Projektionsoperatoren $P_{n,1} : C[0, 2\pi] \rightarrow T_{n,1}$ mit

$$h_1 \mapsto \sum_{k=0}^{2n-1} h_1(t_k) L_k,$$

mit der Lagrange-Basis wie in (4.4), und $P_{n,2} : H_e^1 \rightarrow T_{n,2}$,

$$h_2 \mapsto \sum_{l=0}^n h_2(t_l) \tilde{L}_l,$$

wobei die Lagrange-Basis für die geraden trigonometrischen Polynome die folgende Gestalt hat

$$\tilde{L}_l = a_l \{ L_l(t) + L_{2n-l}(t) \},$$

für $t \in [0, 2\pi]$ und $l = 0, \dots, n$, wobei

$$a_l = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{für } l = 0, n, \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \tilde{L}_0(-t) &= \tilde{L}_0(t), \\ \tilde{L}_n(-t) &= \tilde{L}_n(t), \\ \tilde{L}_j(-t) &= \tilde{L}_j(t), \end{aligned}$$

da $L_j(-t) + L_{2n-j}(-t) = L_j(t) + L_{2n-j}(t)$, für $t \in [0, 2\pi]$ und $l = 0, \dots, n$.

Wir approximieren die Gleichung (3.13) durch die Gleichung

$$P_n \tilde{E} \eta_n + P_n A \eta_n = P_n g, \quad (4.11)$$

wobei

$$\tilde{E} := \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \tilde{S}_0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \eta_n := \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}_n \\ \tilde{\psi}_n \end{pmatrix},$$

mit $\tilde{\varphi}_n \in T_{n,1}$ und $\tilde{\psi}_n \in T_{n,2}$. Sei

$$P_n \tilde{E} := \begin{pmatrix} P_{n,1} I & 0 \\ 0 & P_{n,2} \tilde{S}_0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $P_{n,1} v = v$ für alle $v \in T_{n,1}$, und da $\tilde{S}_0 v \in T_{n,2}$ für alle $v \in T_{n,2}$, gilt $P_{n,2} \tilde{S}_0 v = \tilde{S}_0 v$ für alle $v \in T_{n,2}$. Daraus erhalten wir die zu (4.11) äquivalente Operatorgleichung

$$\tilde{E} \eta_n + P_n A \eta_n = P_n g,$$

beziehungsweise das System

$$-(A_{12} \tilde{\psi}_n)(t_j) + \tilde{\varphi}_n(t_j) - (A_{11} \tilde{\varphi}_n)(t_j) = g_1(t_j), \quad j = 0, \dots, 2n-1, \quad (4.12)$$

$$(A_{21} \tilde{\varphi}_n)(t_l) + (\tilde{S}_0 \tilde{\psi}_n)(t_l) + (A_{22} \tilde{\psi}_n)(t_l) = g_2(t_l), \quad l = 0, \dots, n. \quad (4.13)$$

Mit der Lagrange-Basis für $T_{n,1}$ und $T_{n,2}$, können wir $\tilde{\varphi}_n$ und $\tilde{\psi}_n$ als Linearkombinationen darstellen

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_n &= \sum_{k=0}^{2n-1} \gamma_k L_k, \\ \tilde{\psi}_n &= \sum_{k=0}^n \sigma_k \tilde{L}_k, \end{aligned}$$

dann gilt $\gamma_j = \tilde{\varphi}_n(t_j)$ für $j = 0, \dots, 2n-1$, und $\sigma_l = \tilde{\psi}_n(t_l)$ für $l = 0, \dots, n$. Für die Gleichungen (4.12)–(4.13) erhalten wir damit die Gestalt

$$-\frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^n \sigma_k \int_0^\pi K_{12}(t_j, \tau) \tilde{L}_k(\tau) d\tau + \gamma_j - \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^{2n-1} \gamma_k \int_0^{2\pi} K_{11}(t_j, \tau) L_k(\tau) d\tau = g_1(t_j) \quad (4.14)$$

für $j = 0, \dots, 2n-1$, und

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{2n-1} \gamma_k \int_0^{2\pi} K_{21}(t_l, \tau) L_k(\tau) d\tau \\ & + \sum_{k=0}^n \sigma_k \left\{ \alpha_k [R_k(t_l) + R_{2n-k}(t_l)] + \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi [K_{22}(t_l, \tau) - 4] \tilde{L}_k(\tau) d\tau \right\} = g_2(t_l), \end{aligned} \quad (4.15)$$

für $l = 0, \dots, n$. Dabei ist die Matrix $\sum_{k=0}^{2n-1} R_k$ zirkulant, d.h. es gilt $R_k(t_l) = R_{|l-k|}$, mit

$$R_k := R_k(0) = \frac{1}{4n} \left\{ 2 + 2 \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m} \cos \frac{mk\pi}{n} + \frac{1}{n} (-1)^k \right\}.$$

Das System (4.14)–(4.15) ist aber nur semi-diskret. Um ein voll-diskretes Verfahren zu erhalten, benötigen wir zur Approximation die folgenden numerischen Quadraturoperatoren. Die Quadraturoperatoren folgen aus den Interpolations-Quadraturformeln unter Verwendung der Bemerkung 4.1.

$$(A_{11,n}\tilde{\varphi})(t) := \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{2n-1} K_{11}(t, t_k) \tilde{\varphi}(t_k), \quad \text{für } 0 \leq t \leq 2\pi,$$

und

$$(A_{12,n}\tilde{\psi})(t) := \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^n \alpha_k K_{12}(t, t_k) \tilde{\psi}(t_k), \quad \text{für } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$(A_{22,n}\tilde{\psi})(t) := \frac{1}{4n} \sum_{k=0}^n \alpha_k (K_{22}(t, t_k) - 4) \tilde{\psi}(t_k), \quad \text{für } 0 \leq t \leq \pi,$$

und

$$(A_{21,n}\tilde{\varphi})(t) := \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} K_{21}(t, t_k) \tilde{\varphi}(t_k), \quad \text{für } 0 \leq t \leq \pi.$$

Um eine voll-diskrete Gleichung zu erhalten, ersetzen wir in (4.11) A durch

$$A_n := \begin{pmatrix} -A_{11,n} & -A_{12,n} \\ A_{21,n} & A_{22,n} \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir das voll-diskrete Operatorgleichungssystem

$$-P_{n,1}A_{12,n}\tilde{\psi}_n + \tilde{\varphi}_n - P_{n,1}A_{11,n}\tilde{\varphi}_n = P_{n,1}g_1 \quad (4.16)$$

und

$$P_{n,2}A_{21,n}\tilde{\varphi}_n + \tilde{S}_0\tilde{\psi}_n + P_{n,2}A_{22,n}\tilde{\psi}_n = P_{n,2}g_2. \quad (4.17)$$

Dabei nutzen wir die Eigenschaften $P_{n,1}\tilde{\varphi}_n = \tilde{\varphi}_n$, für $\tilde{\varphi}_n \in T_{n,1}$ und $P_{n,2}\tilde{S}_0\tilde{\psi} = \tilde{S}_0\tilde{\psi}$, für $\tilde{\psi} \in T_{n,2}$, denn die verwendete Quadraturformel für \tilde{S}_0 integriert die geraden trigonometrischen Polynome exakt. Für $\tilde{\varphi}_n \in T_{n,1}$ und $\tilde{\psi}_n \in T_{n,2}$ erhalten wir das zu (4.16)–(4.17) äquivalente System

$$-(A_{12,n}\tilde{\psi}_n)(t_j) + \tilde{\varphi}_n(t_j) - (A_{11,n}\tilde{\varphi}_n)(t_j) = g_1(t_j), \quad j = 0, \dots, 2n-1, \quad (4.18)$$

und

$$(A_{21,n}\tilde{\varphi}_n)(t_l) + (\tilde{S}_0\tilde{\psi}_n)(t_l) + (A_{22,n}\tilde{\psi}_n)(t_l) = g_2(t_l), \quad l = 0, \dots, n. \quad (4.19)$$

Wir erhalten das zu (4.18)–(4.19) äquivalente lineare Gleichungssystem

$$-\frac{1}{2n} \sum_{k=0}^n \alpha_k \tilde{\psi}_n(t_k) K_{12}(t_j, t_k) + \tilde{\varphi}_n(t_j) - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{2n-1} \tilde{\varphi}_n(t_k) K_{11}(t_j, t_k) = g_1(t_j), \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} \tilde{\varphi}_n(t_k) K_{21}(t_l, t_k) \\ & + \sum_{k=0}^n \alpha_k \tilde{\psi}_n(t_k) \left\{ \{R_{|l-k|} + R_{|l-2n-k|}\} + \frac{1}{4n} \{K_{22}(t_l, t_k) - 4\} \right\} = g_2(t_l), \quad (4.21) \end{aligned}$$

für $j = 0, \dots, 2n-1$ und für $l = 0, \dots, n$. Die Matrix $\sum_{k=0}^{2n-1} R_k$ ist zirkulant, deshalb gilt $R_k(t_l) = R_{|l-k|}$, mit

$$R_k := R_k(0) = \frac{1}{4n} \left\{ 2 + 2 \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m} \cos \frac{mk\pi}{n} + \frac{1}{n} (-1)^k \right\}.$$

Wir bemerken, dass wir die Symmetrieeigenschaft $\tilde{\psi}_n(t_k) = \tilde{\psi}_n(t_{2n-k})$, $k = 0, \dots, n$, für $\tilde{\psi}_n \in T_{n,2}$ haben.

4.3 Konvergenz- und Fehleranalyse

Bei der Konvergenz- und Fehleranalyse erhalten wir bezüglich der von uns benutzten Räume keine Normkonvergenz. Um dieses Problem zu beheben, führen wir die Analyse in H^p -Räumen durch.

Bevor wir uns der eigentlichen Konvergenz- und Fehleranalyse widmen, erinnern wir kurz an die für uns wichtigen Eigenschaften von Sobolew-Räumen.

Satz 4.5. Für $q > \frac{1}{2}$ konvergiert die Fourier-Reihe von $\varphi \in H^p[0, 2\pi]$ absolut und gleichmäßig. Ihr Grenzwert ist stetig und 2π -periodisch und stimmt fast überall mit φ überein. Diese Einbettung des Sobolew-Raums $H^p[0, 2\pi]$ in den Raum $C_{2\pi}$ der 2π -periodischen, stetigen Funktionen ist kompakt.

Beweis: Für den Beweis wird auf [8, Theorem 8.4, S. 128f.] verwiesen. □

Satz 4.6. Für $k \in \mathbb{N}$ ist $C_{2\pi}^k \subset H^k[0, 2\pi]$ und auf $C_{2\pi}^k$ ist die Norm $\|\cdot\|_k$ äquivalent zu

$$\|\varphi\|_{k,k} := \left(\int_0^{2\pi} \{|\varphi(t)|^2 + |\varphi^{(k)}(t)|^2\} dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Beweis: Für den Beweis wird auf [8, Theorem 8.5, S. 129] verwiesen. □

Korollar 4.7. Für eine nichtnegative ganze Zahl k sei $f \in C_{2\pi}^k$ und $0 \leq p \leq k$. Dann gehört für alle $\varphi \in H^p[0, 2\pi]$ das Produkt $f\varphi$ zu $H^p[0, 2\pi]$ und es gilt

$$\|f\varphi\|_p \leq C \{ \|f\|_\infty + \|f^{(k)}\|_\infty \} \|\varphi\|_p$$

mit einer von p abhängigen Konstanten C .

Beweis: Für den Beweis wird auf [8, Corollary 8.8, S. 131] verwiesen. □

Wir betrachten die Gleichung

$$(S - A)\varphi = f,$$

wobei wir annehmen, dass $S : X \rightarrow Y$ ein beschränkter linearer Operator ist, der von einem Banachraum X in einen Banachraum Y abbildet, mit einer beschränkten Inversen $S^{-1} : Y \rightarrow X$ und dass $A : X \rightarrow Y$ ein kompakter Operator ist so, dass $S - A$ injektiv ist. Seien $X_n \subset X$ und $Y_n \subset Y$ mit $\dim X_n = \dim Y_n = n$ zwei Folgen von Unterräumen und $P_n : Y \rightarrow Y_n$ Projektionsoperatoren. Für das Projektionsverfahren

$$P_n(S - A)\varphi_n = P_n f, \tag{4.22}$$

mit $\varphi_n \in X_n$, gilt der folgende Satz.

Satz 4.8. *Seien $Y_n = S(X_n)$ und $\|P_n A - A\|_{X \rightarrow Y} \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Dann ist für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$ die Näherungsgleichung (4.22) eindeutig lösbar, und es gilt die Fehlerabschätzung*

$$\|\varphi_n - \varphi\| \leq M \|P_n S\varphi - S\varphi\|$$

mit einer von S und A abhängigen positiven Konstanten M .

Beweis: Für den Beweis wird auf [8, Theorem 13.12, S. 225] verwiesen. \square

Wir wollen Satz 4.8 auf die Gleichung

$$P_n \left(\tilde{E} + A_n \right) \eta_n = P_n g$$

anwenden. Dabei sind drei Punkte zu beachten. Erstens haben wir A durch A_n approximiert. Zweitens haben wir wegen der schwachen Regularitätsvoraussetzungen in der Existenztheorie vorerst keine Konvergenz.

Außerdem gilt nach dem Satz von Faber (vgl. [11], Satz 11.16, Seite 128), dass die Folge $(P_n g)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht gleichmäßig gegen $g \in C[0, 2\pi]$ konvergiert.

Um die Normkonvergenz zu zeigen, müssen wir höhere Regularitätsanforderungen an das Gebiet und den Schlitz stellen, da die Normen von A sonst zu schwach sind.

Das letzte Problem ist, dass wir für die gewählten Räume $C[0, 2\pi] \times L^2[0, \pi]$ und $C[0, 2\pi] \times H_e^1[0, \pi]$ für die Konvergenzanalyse keine Normkonvergenz erhalten, selbst dann nicht, wenn wir die Regularität der Ränder erhöhen. Dieses Problem beheben wir durch die Wahl von H^p -Räumen für die Dichten auf dem Gebietsrand. Die Integrale der Integralgleichung (3.9) lassen sich alle auf das Intervall $[0, 2\pi]$ erweitern, da die Dichte ψ und die Kerne K_{21} und K_{22} gerade und 2π -periodisch fortsetzbar sind. Für $p > \frac{1}{2}$ beobachten wir im Folgenden den Operator A in den Räumen

$$A : H^p[0, 2\pi] \times H^p[0, 2\pi] \rightarrow H^p[0, 2\pi] \times H^{p+1}[0, 2\pi].$$

Die Kerne sind durch die Forderung einer C^∞ -Regularität der Ränder beliebig oft differenzierbar. Diese Regularität überträgt sich auf die Dichten $\varphi \in H^p[0, 2\pi]$ und $\psi \in H^p[0, 2\pi]$. Bevor wir uns der Konvergenzanalyse des semi-diskreten Verfahrens zuwenden, führen wir noch zwei Lemmata ein, die wir zum Beweis benötigen.

Lemma 4.9. *Sei K ein beliebig oft differenzierbarer Kern und*

$$(A\varphi)(t) := \int_0^{2\pi} K(x, \tau) \varphi(\tau) d\tau.$$

Dann ist der Operator A für beliebige $p, q \geq 0$ von H^p nach H^q beschränkt.

Beweis: Der Kern ist nach Voraussetzung beliebig oft differenzierbar. Folglich erhalten wir für $m \in \mathbb{N}$ mit $m \geq q$, mit der äquivalenten Norm aus Satz 4.6 nach der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgende Abschätzung

$$\begin{aligned}
\|A\varphi\|_{H^q}^2 &\leq \|A\varphi\|_{H^m}^2 \\
&\leq C_1 \left(\int_0^{2\pi} \left\{ |A\varphi(t)|^2 + \left| \frac{d^m}{dt^m} A\varphi(t) \right|^2 \right\} dt \right) \\
&\leq C_2 \max \left\{ \|A\varphi\|_{L^2}^2, \left\| \frac{d^m}{dt^m} A\varphi \right\|_{L^2}^2 \right\} \\
&\leq C_3 \|\varphi\|_{L^2}^2 \\
&\leq C_3 \|\varphi\|_{H^p}^2,
\end{aligned}$$

für alle $p, q \geq 0$ und für alle $\varphi \in H^p[0, 2\pi]$ mit den positiven Konstanten C_1, C_2 und C_3 . Daher ist A von $H^p[0, 2\pi]$ nach $H^q[0, 2\pi]$ beschränkt für beliebige $p, q \geq 0$. \square

Lemma 4.10. Für alle $0 \leq q \leq p$, $p > \frac{1}{2}$, $r \geq 0$ gilt

$$\|(P_n A - A)\varphi\|_q \leq \frac{c}{n^{p-q}} \|\varphi\|_r$$

mit einer positiven Konstanten c .

Beweis: Aus Satz 4.2 und Lemma 4.9 erhalten wir

$$\|(P_n A - A)\varphi\|_q \leq \frac{\tilde{c}}{n^{p-q}} \|A\varphi\|_p \leq \frac{c}{n^{p-q}} \|\varphi\|_r,$$

für alle $0 \leq q \leq p$, $p > \frac{1}{2}$, $r \geq 0$ und für alle $\varphi \in H^r[0, 2\pi]$ mit einer von p und q abhängigen positiven Konstanten \tilde{c} und einer positiven Konstanten c . \square

Die Abschätzung in Lemma 4.10 bedeutet insbesondere, dass Normkonvergenz $\|P_n A - A\| \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, für den Operator $P_n A - A : H^r[0, 2\pi] \rightarrow H^q[0, 2\pi]$ vorliegt, für alle $0 \leq q \leq p$, $p > \frac{1}{2}$ und $r \geq 0$. Wir erhalten für die semi-diskrete Näherungsgleichung (4.11) folgende Aussage.

Folgerung 4.11. Sei $X_n = Y_n = T_{n,1} \times T_{n,2}$ und P_n wie in (4.10). Dann ist die approximierete Gleichung (4.11) für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$ eindeutig lösbar, und es gilt die Fehlerabschätzung

$$\|\eta_n - \eta\| \leq M \left\| P_n \tilde{E}\eta - \tilde{E}\eta \right\|$$

mit einer positiven Konstanten M .

Beweis: Nach Satz 3.17 ist \tilde{S}_0 invertierbar mit der beschränkten Inversen \tilde{S}_0^{-1} . Der Operator A ist nach der Existenztheorie kompakt und $\tilde{E} + A$ ist nach Lemma 3.18 injektiv.

Es gilt $\tilde{E}(X_n) = Y_n$, da \tilde{S}_0 nach Satz 3.17 den Raum $T_{n,2}$ der geraden trigonometrischen Polynome bijektiv auf sich selbst abbildet.

Wir erhalten folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}
& \|P_n A \eta - A \eta\|_{H^p[0,2\pi] \times H^{p+1}[0,2\pi]} \\
& \leq \max \left\{ \left\| P_{n,1} \left(-A_{11} \tilde{\varphi} - A_{12} \tilde{\psi} \right) - \left(-A_{11} \tilde{\varphi} - A_{12} \tilde{\psi} \right) \right\|_{H^p}, \right. \\
& \quad \left. \left\| P_{n,2} \left(A_{21} \tilde{\varphi} - A_{22} \tilde{\psi} \right) - \left(A_{21} \tilde{\varphi} - A_{22} \tilde{\psi} \right) \right\|_{H^{p+1}} \right\} \\
& \leq \max \left\{ \left\| P_{n,1} A_{11} \tilde{\varphi} - A_{11} \tilde{\varphi} \right\|_{H^p} + \left\| P_{n,1} A_{12} \tilde{\psi} - A_{12} \tilde{\psi} \right\|_{H^p}, \right. \\
& \quad \left. \left\| P_{n,2} A_{21} \tilde{\varphi} - A_{21} \tilde{\varphi} \right\|_{H^{p+1}} + \left\| P_{n,2} A_{22} \tilde{\psi} - A_{22} \tilde{\psi} \right\|_{H^{p+1}} \right\}, \quad (4.23)
\end{aligned}$$

mit $\eta \in H^p[0, 2\pi] \times H^{p+1}[0, 2\pi]$, wobei $p > \frac{1}{2}$ ist. Um die Normkonvergenz von $P_n A - A$ zu zeigen, müssen wir uns die einzelnen Teile vornehmen. Wegen der hinreichenden Glätte der Parametrisierung von ∂D liegt $A_{11} \tilde{\varphi}$ in $H^p[0, 2\pi]$. Mit Lemma 4.9 und Lemma 4.10 erhalten wir

$$\|P_{n,1} A_{11} \tilde{\varphi} - A_{11} \tilde{\varphi}\|_p \leq \frac{\gamma_1}{n^{q-p}} \|\tilde{\varphi}\|_p,$$

für alle $\frac{1}{2} < p \leq q$, mit von p und q abhängigen positiven Konstanten γ_1 . Daraus folgt

$$\|P_{n,1} A_{11} - A_{11}\|_p \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Die Abschätzungen zu den Operatoren A_{12} , A_{21} und A_{22} ist analog zu führen. Insbesondere erhalten wir

$$\|P_{n,2} A_{21} \tilde{\varphi} - A_{21} \tilde{\varphi}\|_{p+1} \leq \frac{\gamma_2}{n} \|\tilde{\varphi}\|_p,$$

für alle $p > \frac{1}{2}$, mit einer von p abhängigen positiven Konstanten γ_2 . Mit (4.23) und den Abschätzungen der einzelnen Teile erhalten wir insgesamt

$$\|P_n A - A\|_{H^p[0,2\pi] \times H^{p+1}[0,2\pi]} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Mit Satz 4.8 erhalten wir, dass die Näherungsgleichung (4.11) für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$ eindeutig lösbar ist, und es gilt die Fehlerabschätzung

$$\|\eta_n - \eta\| \leq M \max \left\{ \left\| P_{n,1} \tilde{\varphi} - \tilde{\varphi} \right\|_{H^p}, \left\| P_{n,2} \tilde{S}_0 \psi - \tilde{S}_0 \tilde{\psi} \right\|_{H^{p+1}} \right\},$$

wobei $p > \frac{1}{2}$ und mit einer positiven Konstanten M . □

Der Satz 4.8 ist auf das voll diskrete Verfahren

$$P_n(S - A_n)\varphi_n = P_nf_n,$$

der Gleichung (4.22) nicht direkt anwendbar, da dieses Verfahren von der Konvergenz des numerisch approximierten Operators abhängt. Abhilfe schafft das folgende Korollar.

Korollar 4.12. *Unter den Annahmen von Satz 4.8 an die Operatoren S und A gelte ferner $(P_nA_n - P_nA)\varphi \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, für alle $\varphi \in X$ und $\|P_nA_n - P_nA\|_{X_n \rightarrow Y_n} \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Dann ist für hinreichend große n die Näherungsgleichung*

$$P_n(S + A_n)\tilde{\varphi}_n = P_nf_n$$

eindeutig lösbar, und es gilt die Fehlerabschätzung

$$\|\tilde{\varphi}_n - \varphi\| \leq M \{ \|P_nS\varphi - S\varphi\| + \|P_n(A_n - A)\varphi\| + \|P_n(f_n - f)\| \}$$

mit einer positiven Konstanten M .

Beweis: Für den Beweis wird auf [8, Corollary 13.13, S. 225] verwiesen. \square

Die Konvergenz des voll diskreten Verfahrens

$$P_n(\tilde{E} - A_n)\eta_n = P_nf,$$

ist von der Konvergenz der Approximationsoperatoren abhängig. Dazu stellen wir einige Vorüberlegungen an, um dann zu einer Aussage über unser voll diskretes Verfahren zu kommen. Auf Seite 49 ist festgehalten, dass die Kerne beliebig oft differenzierbar vorausgesetzt sind.

Lemma 4.13. *Es gilt die folgende Abschätzung:*

$$\|P_n(A_n - A)\| \leq \|A_n - A\|.$$

Beweis: Mit Satz 4.2 erhalten wir

$$\begin{aligned} \|P_n(A_n - A)\varphi\|_q &= \|P_n(A_n\varphi - A\varphi)\|_q \\ &\leq \|A_n\varphi - A\varphi\|_q, \end{aligned}$$

für alle $q > \frac{1}{2}$. \square

Wir haben folgende Konstruktion des Quadraturoperators von A :

$$(A_n\varphi)(t) = \int_0^{2\pi} [P_nK(t, \cdot)\varphi](\tau) d\tau, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Demzufolge erhalten wir

$$(A_n\varphi)(t) - (A\varphi)(t) = \int_0^{2\pi} [P_n K(t, \cdot)\varphi](\tau) - K(t, \tau)\varphi(\tau) d\tau, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Daraus folgt mit Satz 4.2 und Korollar 4.7 die Abschätzung

$$\begin{aligned} |(A_n\varphi)(t) - (A\varphi)(t)| &\leq \int_0^{2\pi} \|[P_n K(t, \cdot)\varphi](\tau) - K(t, \tau)\varphi(\tau)\|_\infty d\tau \\ &\leq C_1 \int_0^{2\pi} \|[P_n K(t, \cdot)\varphi](\tau) - K(t, \tau)\varphi(\tau)\|_{H^p} d\tau \\ &\leq \frac{C_2}{n^{r-p}} \|K(t, \cdot)\varphi\|_r \\ &\leq \frac{C}{n^{r-p}} \|\varphi\|_r, \end{aligned}$$

für alle $0 \leq t \leq 2\pi$, für $r \geq p > \frac{1}{2}$ und den positiven Konstanten C_1 , C_2 und C . Wir erhalten somit

$$\|A_n\varphi - A\varphi\|_{L^2} \leq \frac{C}{n^{r-p}} \|\varphi\|_r$$

für alle $r \geq p > \frac{1}{2}$ und einer von r und p abhängigen positiven Konstanten C .

Sei $m \in \mathbb{N}$ so, dass $m \geq q$ gilt. Mit Hilfe der Sätze 4.5, 4.2 und Korollar 4.7 schätzen wir ab

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^m}{\partial t^m} P_n[K(t, \cdot)\varphi] - \frac{\partial^m}{\partial t^m} K(t, \cdot)\varphi \right\|_\infty &\leq c_1 \left\| \frac{\partial^m}{\partial t^m} P_n[K(t, \cdot)\varphi] - \frac{\partial^m}{\partial t^m} K(t, \cdot)\varphi \right\|_q \\ &\leq \frac{c_2}{n^{r-q}} \left\| \frac{\partial^m}{\partial t^m} K(t, \cdot)\varphi \right\|_r \\ &\leq \frac{c_2}{n^{r-q}} \|\varphi\|_r \end{aligned}$$

für alle $t \in [0, 2\pi]$, alle ganzen Zahlen $m \geq q$ und alle $\frac{1}{2} < q \leq r$ und mit den positiven Konstanten c_1 und c_2 . Somit haben wir

$$\left\| \frac{\partial^m}{\partial t^m} (A_n\varphi - A\varphi) \right\|_{L^2} \leq \frac{\tilde{C}}{n^{r-q}} \|\varphi\|_r$$

für alle $r \geq q > \frac{1}{2}$ und einer von r und q abhängigen positiven Konstanten \tilde{C} .

Daraus gewinnen wir mit der äquivalenten Norm aus Satz 4.6 und dem Interpolationssatz (Theorem 8.12 aus [8]) die Beschränktheit

$$\|(A_n - A)\varphi\|_q \leq \|(A_n - A)\varphi\|_m \leq \frac{\tilde{c}}{n^{r-m}} \|\varphi\|_r \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

für alle $\frac{1}{2} < q \leq m \leq r$ mit der positiven Konstanten \tilde{c} .
Aus den Resultaten erhalten wir folgende Aussage.

Folgerung 4.14. *Unter den Voraussetzungen von Folgerung 4.11 ist das lineare Gleichungssystem (4.16)–(4.17) für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$ eindeutig lösbar, und es gilt die Fehlerabschätzung*

$$\|\tilde{\eta}_n - \eta\| \leq M \left\{ \left\| P_n \tilde{E}\eta - \tilde{E}\eta \right\| + \left\| P_n (A_n - A)\eta \right\| \right\} \quad (4.24)$$

mit einer positiven Konstanten M .

Beweis: Für die Norm des Operators $P_n(A_n - A)$ erhalten wir die Abschätzung:

$$\begin{aligned} & \|P_n(A_n - A)\eta\| \\ & \leq \max \left\{ \left\| P_{n,1} \left(-A_{11,n}\tilde{\varphi} - A_{12,n}\tilde{\psi} \right) - P_{n,1} \left(-A_{11}\tilde{\varphi} - A_{12}\tilde{\psi} \right) \right\|_p, \right. \\ & \quad \left. \left\| P_{n,2} \left(A_{21,n}\tilde{\varphi} - A_{22,n}\tilde{\psi} \right) - P_{n,2} \left(A_{21}\tilde{\varphi} - A_{22}\tilde{\psi} \right) \right\|_{p+1} \right\} \\ & \leq \max \left\{ \left\| P_{n,1}(A_{11,n} - A_{11})\tilde{\varphi} \right\|_p + \left\| P_{n,1}(A_{12,n} - A_{12})\tilde{\psi} \right\|_p, \right. \\ & \quad \left. \left\| P_{n,2}(A_{21,n} - A_{21})\tilde{\varphi} \right\|_{p+1} + \left\| P_{n,2}(A_{22,n} - A_{22})\tilde{\psi} \right\|_{p+1} \right\}. \end{aligned}$$

Wir betrachten wieder die einzelnen Normen. Mit Lemma 4.13 und den vorherigen Überlegungen bekommen wir

$$\|P_{n,1}(A_{11,n} - A_{11})\tilde{\varphi}\|_p \leq \|(A_{11,n} - A_{11})\tilde{\varphi}\|_p \leq \frac{\gamma_3}{n^{p-r}} \|\tilde{\varphi}\|_p,$$

für alle $0 \leq r \leq p$, $p > \frac{1}{2}$ und einer positiven Konstanten γ_3 . Nach dem Satz 4.2 wissen wir, dass die Interpolationsoperatoren $P_{n,1} : H^p[0, 2\pi] \rightarrow H^p[0, 2\pi]$ gleichmäßig beschränkt sind. Somit erhalten wir

$$\|P_{n,1}(A_{11,n} - A_{11})\|_p \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Analog erhalten wir die anderen Abschätzungen, da auch die Interpolationsoperatoren $P_{n,2} : H^p[0, 2\pi] \rightarrow H^{p+1}[0, 2\pi]$ gleichmäßig beschränkt sind.

Wir erhalten somit die Normkonvergenz $\|P_n(A_n - A)\| \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Damit sind alle Voraussetzungen von Korollar 4.12 überprüft und wir erhalten die eindeutige Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems (4.16)–(4.17) und die Fehlerabschätzung (4.24), wobei wir keine Approximation an g wie in Korollar 4.12 haben, die Behauptung. \square

4.4 Numerische Beispiele

In diesem Abschnitt befassen wir uns mit Beispielen für das Dirichlet-Problem in einem Gebiet mit Schlitz. Als Gebiete betrachten wir eine Ellipse, ein drachenförmiges Gebiet und ein Rechteck mit abgerundeten Ecken. Für den Schlitz in unserem Gebiet nehmen wir eine Gerade, eine Sinusschwingung und einen Halbkreis. Mit Hilfe von *Matlab* haben wir das numerische Gleichungssystem (4.20)–(4.21) programmiert. Wir werden den Fehler der approximierten Lösung u_n an die wahre Lösung u betrachten und erhalten in allen Beispielen die erwartete exponentielle Konvergenz. In den Beispielen, in denen keine wahre Lösung gegeben ist, sehen wir uns nur die approximierte Lösung u_n an.

Für die numerischen Beispiele für ein Gebiet mit einer Geraden im Inneren wählen wir als gesuchte Funktion, die das Dirichlet Problem (3.1)–(3.2) löst,

$$u(z) = \operatorname{Re}\sqrt{z^2 - 1},$$

mit $z \in \mathbb{C}$. Die Funktion u ist holomorph in $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ und stetig in den Punkten ± 1 .

Beispiel 4.15. Gegeben sei ein ellipsenförmiges Gebiet D_E , wobei die Parametrisierung des Randes durch

$$\partial D_E = \{(a \cdot \cos t, b \cdot \sin t) \mid t \in [0, 2\pi], a \leq b < 0\},$$

gegeben wird, und eine Gerade Γ_G mit der Parametrisierung

$$\Gamma_G = \{(t, 0) \mid t \in [-1, 1]\}.$$

Wir betrachten den Fehler in den Punkten

- $(1.5, 2) \in D_E \setminus \Gamma_G$, mit großem Abstand zu ∂D_E und großem Abstand zu Γ_G .
- $(-1.1, 0), (0.9, 0.1) \in D_E \setminus \Gamma_G$, mit großem Abstand zu ∂D_E und geringem Abstand zu Γ_G .
- $(-3, 2.5) \in D_E \setminus \Gamma_G$, mit geringem Abstand zu ∂D_E und großem Abstand zu Γ_G .

Wir sehen, dass wir, wie erwartet, exponentielle Konvergenz erhalten. Die sehr schnelle Konvergenz im Punkt $(-1.1, 0)$ begründet sich damit, dass dieser Punkt auf der Symmetrieachse liegt, trotz der Nähe zu einem Endpunkt von Γ_G . Nahe des Gebietsrandes sehen wir am Beispiel vom Punkt $(-3, 2.5)$, dass die Konvergenz erst später einsetzt. Die Abweichung der Näherungslösung u_n an die wahre Lösung u ist in Tabelle 4.1 aufgeführt.

$2N$	$x = (1.5, 2)$	$x = (-1.1, 0)$	$x = (0.9, 0.1)$	$x = (-3, 2.5)$
16	0.0027729000	0.0001171800	0.0003230700	0.4985600000
32	0.0000006575	0.0000000477	0.0000699420	0.0057003000
64	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000426	0.0009672100
128	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000	0.000001266
256	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000

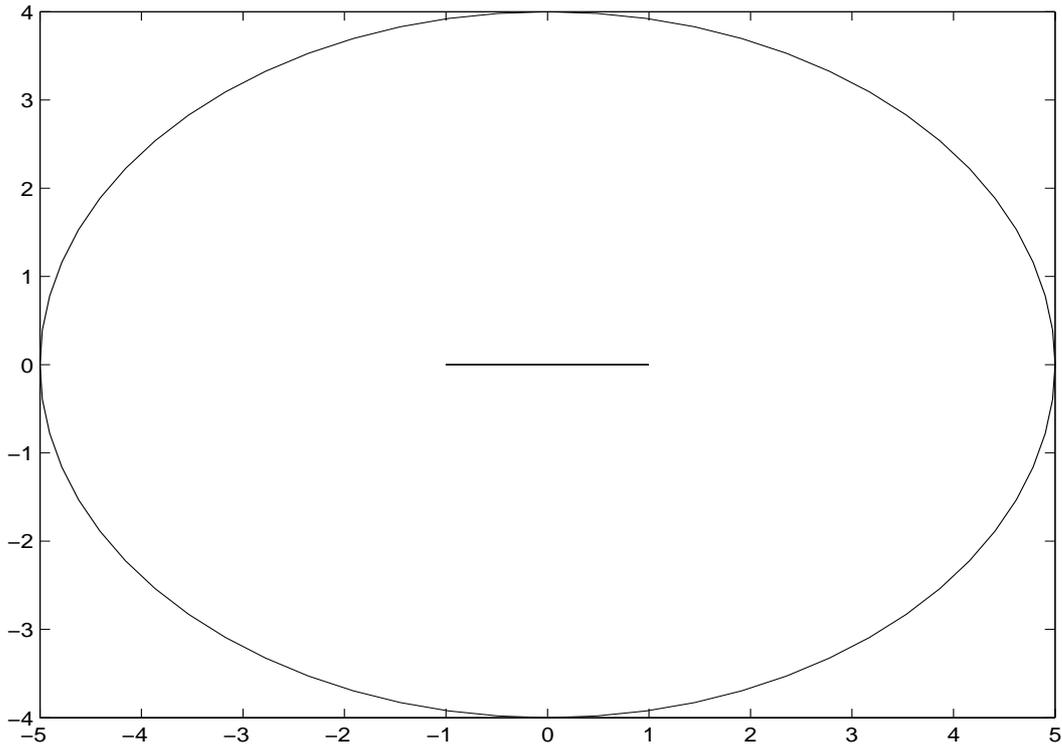
Tabelle 4.1: Ellipse mit Gerade, wobei $a = 5$ und $b = 4$.

Abbildung 4.1: Ellipse mit Gerade

Beispiel 4.16. Gegeben sei ein drachenförmiges Gebiet D_D , wobei die Parametrisierung des Randes durch

$$\partial D_D = \{(a \cdot (\cos t + b \cdot (\cos(2t) - 1)), c \sin t) \mid t \in [0, 2\pi], a = 2, b = 0,65, c = 1,5\},$$

gegeben wird, und eine Gerade Γ_G mit der Parametrisierung

$$\Gamma_G = \{(t, 0) \mid t \in [-1, 1]\}.$$

Wir betrachten den Fehler in den Punkten

- $(0.9, 0.1) \in D_D \setminus \Gamma_G$, mit großem Abstand zu ∂D_D und geringem Abstand zu Γ_G .
- $(-2.5, 1.3) \in D_D \setminus \Gamma_G$, mit geringem Abstand zu ∂D_D und großem Abstand zu Γ_G .
- $(-0.7, 0.6), (-1.5, -0.7) \in D_D \setminus \Gamma_G$, mit großem Abstand zu ∂D_D und großem Abstand zu Γ_G .

Auch in diesem Beispiel erhalten wir exponentielle Konvergenz. Nur im Punkt $(-2.5, 1.3)$ stellt sich die exponentielle Konvergenz erst bei relativ großer Stützstellenzahl ein. Das liegt daran, dass sich dieser Punkt in einem der Drachenflügel befindet und somit von mehreren Seiten nahe dem Rand ∂D_D ist. Den Fehler der Näherungslösung u_n zur wahren Lösung u entnehmen wir der Tabelle 4.2.

$2N$	$x = (0.9, 0.1)$	$x = (-2.5, 1.3)$	$x = (-0.7, 0.6)$	$x = (-1.5, -0.7)$
16	0.0050509000	0.5620000000	0.0285630000	0.0789900000
32	0.0020068000	0.0353570000	0.0053650000	0.0043714000
64	0.0000020460	0.0089512000	0.0000403210	0.0000054788
128	0.0000000000	0.0000144440	0.0000000018	0.0000000001
256	0.0000000000	0.0000000003	0.0000000000	0.0000000000

Tabelle 4.2: Drache mit Gerade, wobei $a = 2$, $b = 0.65$ und $c = 1.5$ ist.

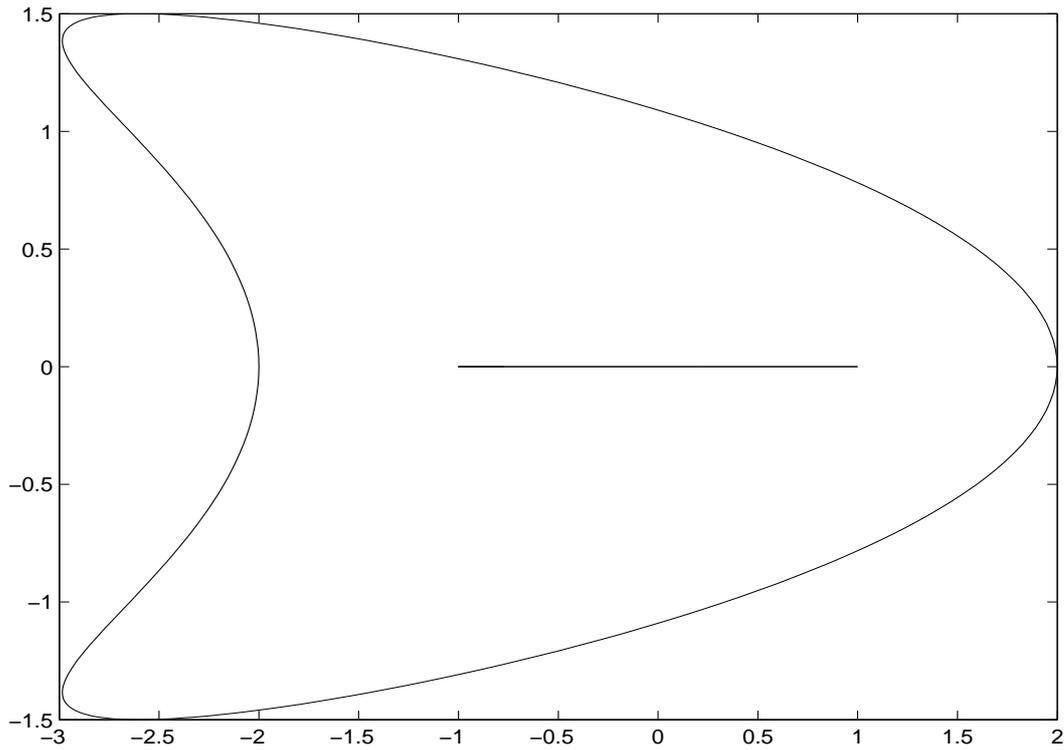


Abbildung 4.2: Drache mit Gerade

Beispiel 4.17. Gegeben sei ein rechteckiges Gebiet D_R mit abgerundeten Ecken, wobei die Parametrisierung des Randes durch

$$\partial D_R = \{(a \cdot r(t) \cos t, b \cdot r(t) \sin t) \mid t \in [0, 2\pi], a = 2, b = 4\},$$

mit

$$r(t) = (\cos^{10} t + \sin^{10} t)^{-\frac{1}{10}}, t \in [0, 2\pi],$$

gegeben wird, und eine Gerade Γ_G mit der Parametrisierung

$$\Gamma_G = \{(t, 0) \mid t \in [-1, 1]\}.$$

Wir betrachten den Fehler in den Punkten

- $(-0.5, -1), (0.3, 2) \in D_R \setminus \Gamma_G$, mit großem Abstand zu ∂D_R und großem Abstand zu Γ_G .
- $(0.5, 3.7) \in D_R \setminus \Gamma_G$, mit geringem Abstand zu ∂D_R und großem Abstand zu Γ_G .
- $(0.9, 0.1) \in D_R \setminus \Gamma_G$, mit großem Abstand zu ∂D_R und geringem Abstand zu Γ_G .

Wie erwartet erhalten wir exponentielle Konvergenz. Nahe des Gebietsrandes D_R setzt die starke Konvergenz erst etwas später ein, wie wir im Punkt $(0.5, 3.7)$ beobachten können. Den Fehler der Näherungslösung u_n zur wahren Lösung u entnehmen wir der Tabelle 4.3.

$2N$	$x = (-0.5, -1)$	$x = (0.3, 2)$	$x = (0.5, 3.7)$	$x = (0.9, 0.1)$
16	0.0165090000	0.0224710000	0.0677730000	0.0116340000
32	0.0003895300	0.0008837200	0.0154720000	0.0000746520
64	0.0000009745	0.0000027459	0.0001133800	0.0000003042
128	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000073	0.0000000000

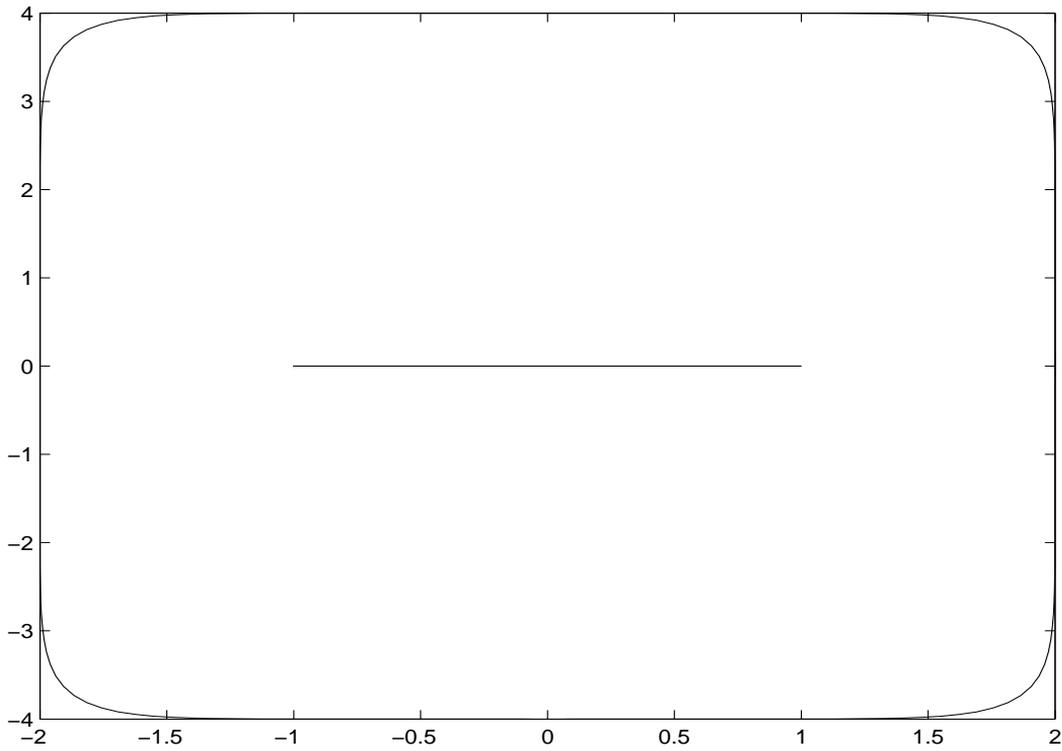
Tabelle 4.3: Rechteck mit Gerade, wobei $a = 2$ und $b = 4$ ist.

Abbildung 4.3: Rechteck mit Gerade

In den folgenden Beispielen wählen wir für den Schlitz Γ andere Geometrien. Hierbei haben wir aber keine explizite Lösung u gegeben. Die rechten Seiten seien durch $f_{\partial D}(x) = x_1^2 - x_2^2$ und $g_2(t) = \cos(t)$ gegeben.

Beispiel 4.18. *Gegeben sei ein drachenförmiges Gebiet D_D , wobei die Parametrisierung des Randes durch*

$$\partial D_D = \{(a \cdot (\cos t + b \cdot (\cos(2t) - 1)), c \sin t) \mid t \in [0, 2\pi], a = 2, b = 0,65, c = 1,5\},$$

gegeben wird, und eine Sinusschwingung Γ_S mit der Parametrisierung

$$\Gamma_S = \left\{ \left(t, \frac{1}{3} \sin(\pi(t+1)) \right) \mid t \in [-1, 1] \right\}.$$

Wir betrachten folgende Punkte

- $(0.9, 0.1) \in D_D \setminus \Gamma_S$, mit großem Abstand zu ∂D_D und geringem Abstand zu Γ_S .
- $(-2.5, 1.3) \in D_D \setminus \Gamma_S$, mit geringem Abstand zu ∂D_D und großem Abstand zu Γ_S , wobei der Punkt im Drachenflügel liegt.
- $(-1.5, -0.7) \in D_D \setminus \Gamma_S$, mit großem Abstand zu ∂D_D und großem Abstand zu Γ_S .

Auch in diesem Beispiel erhalten wir exponentielle Konvergenz. Im Testpunkt $(-2.5, 1.3)$ der sehr nahe am Drachenrand ∂D_D liegt, setzt die gewünschte exponentielle Konvergenz erst bei hoher Stützstellenzahl ein. In der Tabelle 4.4 wird die Näherungslösung u_n aufgeführt.

$2N$	$x = (0.9, 0.1)$	$x = (-2.5, 1.3)$	$x = (-1.5, -0.7)$
16	0.9771563821	5.8949701069	1.2472610020
32	0.8562265761	4.6468703160	1.5309150576
64	0.8590102860	4.5455233852	1.5364734632
128	0.8589995052	4.5558505115	1.5364386201
256	0.8589995053	4.5558181690	1.5364386197

Tabelle 4.4: Drache mit Sinusschwingung, wobei $a = 2$, $b = 0.65$ und $c = 1.5$ ist.

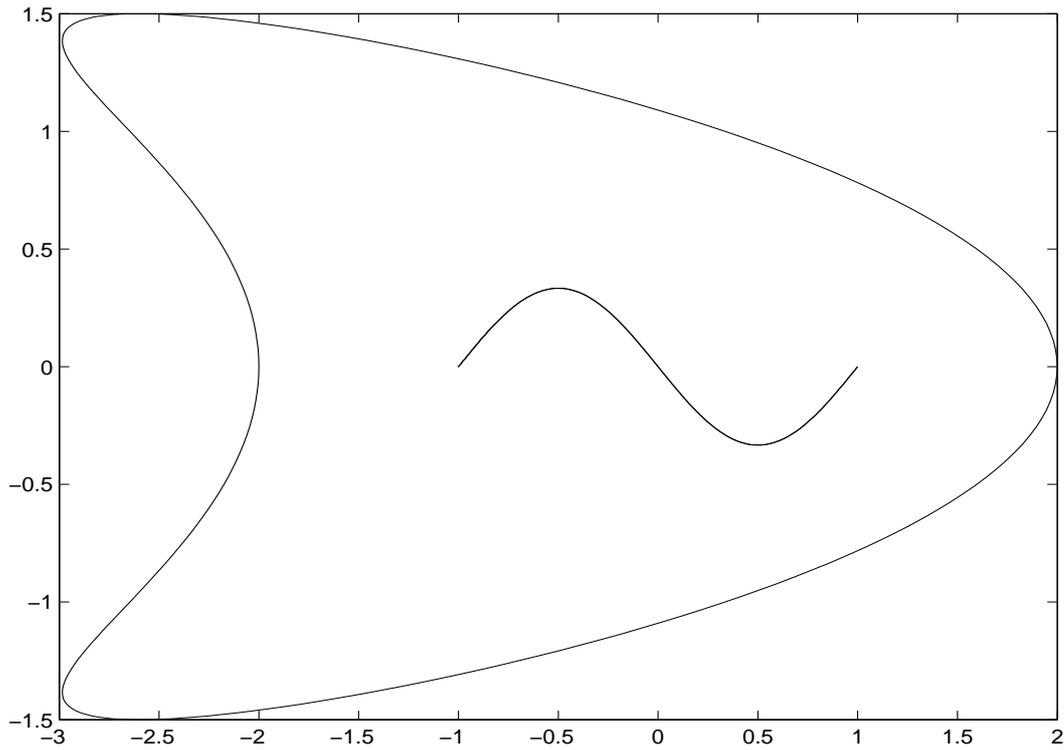


Abbildung 4.4: Drache mit Sinusschwingung

Beispiel 4.19. Gegeben sei ein ellipsenförmiges Gebiet D_E , wobei die Parametrisierung des Randes durch

$$\partial D_E = \{(a \cdot \cos t, b \cdot \sin t) \mid t \in [0, 2\pi], a \leq b < 0\},$$

gegeben wird, und ein Halbkreis Γ_{HK} mit der Parametrisierung

$$\Gamma_{HK} = \left\{ \left(\cos \frac{\pi}{2}(t+1), \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2}(t+1) \right) \mid t \in [-1, 1] \right\}.$$

Wir betrachten die approximierte Lösung in den Punkten

- $(1.5, 2) \in D_E \setminus \Gamma_{HK}$, mit großem Abstand zu ∂D_E und großem Abstand zu Γ_{HK} .
- $(0.9, 0.1) \in D_E \setminus \Gamma_{HK}$, mit großem Abstand zu ∂D_E und geringem Abstand zu Γ_{HK} .
- $(-3, 2.5) \in D_E \setminus \Gamma_{HK}$, mit geringem Abstand zu ∂D_E und großem Abstand zu Γ_{HK} .

Wir erhalten auch hier die erwartete exponentielle Konvergenz. Der Punkt $(-3, 2.5)$, der nahe an dem Rand des Gebiets ∂D_E liegt, weist erst später exponentielle Konvergenz auf. Die numerischen Ergebnisse sind in der Tabelle 4.5 aufgeführt.

$2N$	$x = (1.5, 2)$	$x = (0.9, 0.1)$	$x = (-3, 2.5)$
16	1.9837122703	0.6849278173	3.8204104090
32	1.9356868835	0.7022247876	2.8875807137
64	1.9356279788	0.7019091892	2.7469258901
128	1.9356279787	0.7019109417	2.7475631613
256	1.9356279787	0.7019109417	2.7475629517

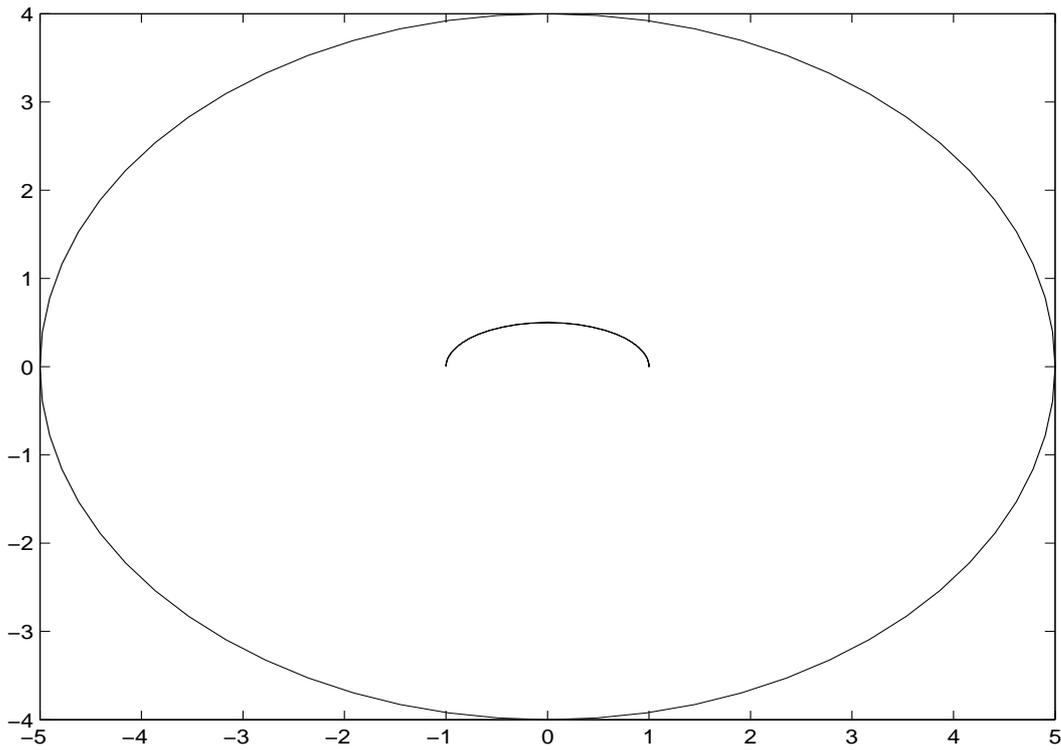
Tabelle 4.5: Ellipse mit Halbkreis, wobei $a = 5$ und $b = 4$.

Abbildung 4.5: Ellipse mit Halbkreis

Beispiel 4.20. Gegeben sei ein rechteckiges Gebiet D_R mit abgerundeten Ecken, wobei die Parametrisierung des Randes durch

$$\partial D_R = \{(a \cdot r(t) \cos t, b \cdot r(t) \sin t) \mid t \in [0, 2\pi], a = 2, b = 4\},$$

mit

$$r(t) = (\cos^{10} t + \sin^{10} t)^{-\frac{1}{10}}, t \in [0, 2\pi],$$

gegeben wird, und eine Sinusschwingung Γ_S mit der Parametrisierung

$$\Gamma_S = \left\{ \left(t, \frac{1}{3} \sin(\pi(t+1)) \right) \mid t \in [-1, 1] \right\}.$$

Wir betrachten die approximierete Lösung in den Punkten

- $(-0.5, -1), (0.3, 2) \in D_R \setminus \Gamma_S$, mit großem Abstand zu ∂D_R und großem Abstand zu Γ_S .
- $(0.5, 3.7) \in D_R \setminus \Gamma_S$, mit geringem Abstand zu ∂D_R und großem Abstand zu Γ_S .
- $(0.9, 0.1) \in D_R \setminus \Gamma_S$, mit großem Abstand zu ∂D_R und geringem Abstand zu Γ_S .

Wie erwartet erhalten wir exponentielle Konvergenz.

Die Ergebnisse der Approximation sehen wir in der Tabelle 4.6.

$2N$	$x = (-0.5, -1)$	$x = (0.3, 2)$	$x = (0.5, 3.7)$	$x = (0.9, 0.1)$
16	0.3899872794	1.9683429487	6.7012986587	0.4854482909
32	0.3928707686	1.9761878438	6.7198890119	0.4857951961
64	0.3928979540	1.9762612743	6.7217014317	0.4857990675
128	0.3928979555	1.9762612781	6.7217012694	0.4857990678
256	0.3928979555	1.9762612781	6.7217012694	0.4857990678

Tabelle 4.6: Rechteck mit Sinusschwingung, wobei $a = 2$ und $b = 4$ ist.

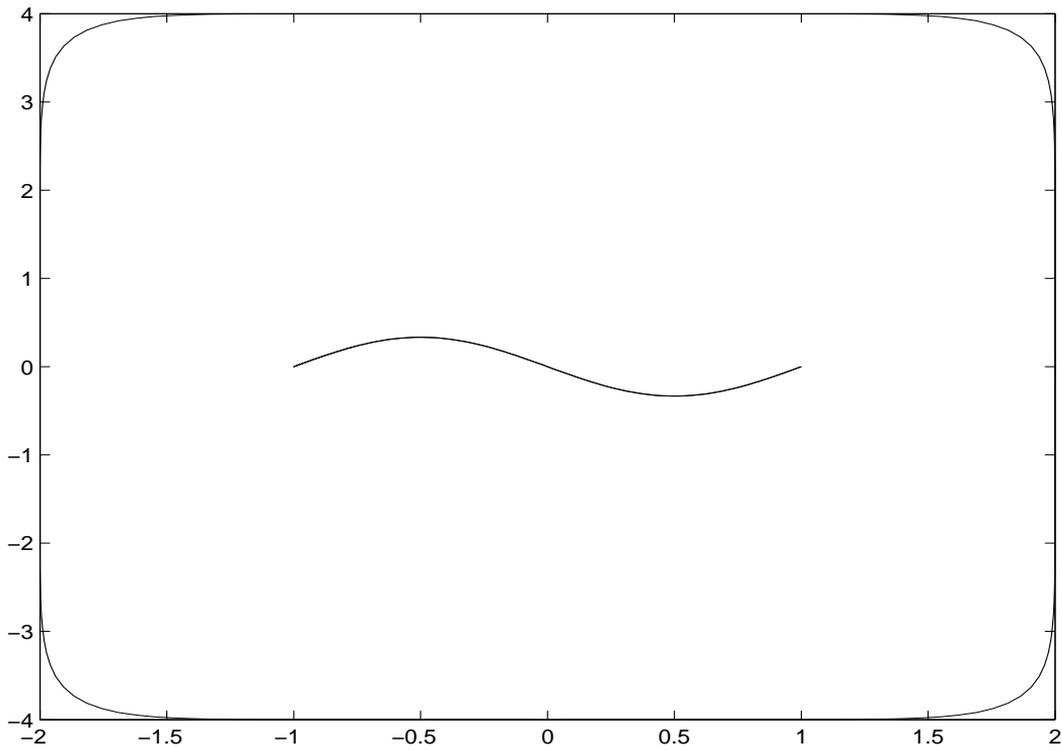


Abbildung 4.6: Rechteck mit Sinusschwingung

Literaturverzeichnis

- [1] Atkinson, K.E.: *The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind*. Cambridge Univ. Press, Cambridge 1997.
- [2] Bronstein, I.N.; Semendjajew, K.A.; Musiol, G.; Mühlig, H.: *Taschenbuch der Mathematik*, 3. Auflage, Harri Deutsch Verlag, 1997.
- [3] Colton, D. und Kress, R.: *Integral Equation Methods in Scattering Theory*. Wiley-Interscience Publication, New York 1983.
- [4] Hackbusch, W.: *Integralgleichungen – Theorie und Numerik*. B.G. Teubner, Stuttgart 1983.
- [5] Hähner, P.: *Numerische Behandlung partieller Differentialgleichungen*, Vorlesung SS 2001.
- [6] Henrici, P.: *Applied and Computational Complex Analysis*. Vol 3. Wiley-Interscience Publication, New York 1986.
- [7] Kress, R.: *Inverse scattering from an open arc*. Math. Meth. in the Appl. Sci. **18**, 267-293 (1995).
- [8] Kress, R.: *Linear Integral Equations*. 2nd ed. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York 1999.
- [9] Kress, R.: *On the low wave number behavior of two-dimensional scattering problems for an open Arc*. Zeitschrift für Analysis und Anwendungen, **18**, 297-305 (1999).
- [10] Kress, R.: *Funktionalanalysis*, Skript WS 2000/2001.
- [11] Kress, R.: *Numerik 1*, Skript WS 2002/2003.
- [12] Kress, R.: *Numerik 2*, Skript SS 2003.
- [13] Kress, R.: *Potentialtheorie: Direkte- und inverse Probleme*, Skript WS 2001/2002.
- [14] Mönch, L.: *Die numerische Lösung des inversen akustischen Streuproblems am schallharten Kurvenbogen*. Dissertation, Göttingen 1996.

Anhang A

Matlabprogramme

In diesem Abschnitt werden die Matlab-Codes aufgeführt.

Zu Beginn wird das Skript-File für das Dirichlet-Problem in einem Gebiet mit Schlitz anhand des Beispiels der Ellipse mit einer Geraden aufgeführt.

```
%===== matlab_diplom.m =====  
%  
% Skript-File: Kollokationsverfahren fuer das Dirichlet Problem fuer  
%           Gebiete mit Schlitz  
%  
% Ruft die Parametrisierungs-Funktionen  
% param_gebiet(N,a,b,c,Form) und param_bogen(N,Form) auf.  
% Ruft die Funktion wahres_u.m auf.  
%  
%===== Gebiet & Bogen =====  
%  
% Angaben fuer das Gebiet  
a = 5;  
b = 4;  
c = 0;  
%  
% Fehler im Punkt  
x_0 = 0.9;  
y_0 = 0.1;  
%  
%===== Festlegung der Stuetzstellen =====  
%  
N = 8; % N wird fuer den ersten Durchlauf auf 8 gesetzt  
for n = 1:4 % die Schleife wird 4 mal durchlaufen.  
    %
```

```

% Schrittweite
h = (2*pi)/(2*N);
%
% Vektor t
t = 0:h:(2*pi-h);
%
%***** Matrix E *****
%
% Aufstellen der Matrix E
%
% Setze E als ((3*N)+1)x((3*N)+1)-Nullmatrix
%
E = zeros((3*N)+1,(3*N)+1);
%
%-----
%
% Die Matrix R_k(l)
%
R = zeros((N+1),(N+1));
%
for l = 1:(N+1)
    for k = 1:(N+1)
        aux = 0;
        for m = 1:(N-1)
            aux = (1/m) * ( cos( m * ( abs(l - k) )*(pi/N) ) ...
                + cos( m * ( abs((l-1) - (2*N -(k-1))) )*(pi/N) ) ) ...
                + aux;
        end;
        R(l,k) = (1/(4*N)) * (...
            4 + 2 * aux ...
            + (1/N) * ( (-1)^( abs(l - k) ) ...
            + (-1)^(abs((l-1) - (2*N -(k-1)))) ) ...
            );
        end;
        R(l,1) = R(l,1) /2;
        R(l,N+1) = R(l,N+1) /2;
    end;
%
%-----
%
E = [eye((2*N),(2*N)), zeros((2*N),(N+1)); zeros((N+1),(2*N)) , R];
%
%***** Plott *****

```



```

        / ( Alpha.dx(k)^(2) + Alpha.dy(k)^(2))...
    );
else
    A_11(k,1) = - (1/N)...
        * (...
        ( (Alpha.dy(1) *( Alpha.x(k)-Alpha.x(1) )) ...
        - ( Alpha.dx(1) *( Alpha.y(k)-Alpha.y(1) )) )...
        / ( ( Alpha.x(k) - Alpha.x(1) )^(2) ...
        + ( Alpha.y(k) - Alpha.y(1) )^(2) )...
        );
    end;
end;
end;
end;
%
%.....
%
% Aufstellen der Matrix A_12
%
A_12 = zeros((2*N),(N+1));
%
for j = 1:(2*N)
    for k = 1:(N+1)
        A_12(j,k) = -(1/N) ...
            * log(...
            1/(sqrt( (Alpha.x(j)-Beta.x(k))^2 ...
            + (Alpha.y(j)-Beta.y(k))^2 ))...
            );
    end;
    A_12(j,1) = A_12(j,1) /2;
    A_12(j,N+1) = A_12(j,N+1) /2;
end;
%
%.....
%
% Aufstellen der Matrix A_21
%
A_21 = zeros((N+1),(2*N));
%
for l = 1:(N+1)
    for k = 1:(2*N)
        A_21(l,k) = (1/(2*N)) ...
            *(...
            ( ( Alpha.dy(k)*(Beta.x(1) - Alpha.x(k) )...

```

```

- Alpha.dx(k)*(Beta.y(1) - Alpha.y(k)) ) ) ...
/ ...
( (Beta.x(1) - Alpha.x(k))^2) ...
+ (Beta.y(1) - Alpha.y(k))^2 )...
);
end;
end;
%
%.....
%
% Aufstellen der Matrix A_22
%
A_22 = zeros((N+1),(N+1));
%
for l = 1:(N+1)
  for k = 1:(N+1)
    if Beta.x(l) == Beta.x(k) & Beta.y(l) == Beta.y(k)
      A_22(l,k) = (1/(4*N))...
        * ( log( 4/( Beta.dx(k)^2 + Beta.dy(k)^2 ) ) - 4);
    else
      A_22(l,k) = (1/(4*N))...
        * (...
          log( 4* (cos(t(l))-cos(t(k)))^2)...
          /...
          ( (Beta.x(1)-Beta.x(k))^2 + (Beta.y(1)-Beta.y(k))^2 )...
          )...
          -4);
    end;
  end;
end;
A_22(1,1) = A_22(1,1) /2;
A_22(1,N+1) = A_22(1,N+1) /2;
end;
%
%.....
%
% Die Matrix A:
%
A = [A_11, A_12 ; A_21 , A_22];
%
%***** Randwertfunktion *****
%
% Aufstellen der Randwerte, wobei die wahre Funktion u gegeben ist.
%
```

```

randwerte_g_1 = zeros((2*N),1);
%
for k = 1:(2*N)
    randwerte_g_1(k) = -2 ...
        * wahres_u(Alpha.x(k),Alpha.y(k),x_fest,y_fest);
end;
%
%-----
%
randwerte_g_2 = zeros((N+1),1);
%
for k = 1:(N+1)
    randwerte_g_2(k) = wahres_u(Beta.x(k),Beta.y(k),x_fest,y_fest);
end;
%
%-----
%
% Der Vektor g_n der Projeztierten Randwetrte
%
g = [randwerte_g_1; randwerte_g_2];
%
%***** Naeherdungsdichte *****
%
eta_n = zeros((3*N)+1,1);
eta_n = (E + A) \ g;
%
phi_n = eta_n(1:(2*N));
psi_n = eta_n((2*N)+1:end);
%
%***** Naeherdungsloesung *****
%
% Ausrechnen von u mit der naeherdung der Loesung phi_n
% Nehme dazu ein Punkt x_0 aus dem Inneren des Gebietes D
%
%----- u_D -----
%
u_D = 0;
%
for m = 1:(2*N)
    u_D = (...
        (1/(2*N)) * (...
        ( Alpha.dy(m) ...
        * ( x_0 - Alpha.x(m) ) - Alpha.dx(m) * ( y_0 - Alpha.y(m) ) )...

```

```

    / ( ( x_0 - Alpha.x(m) ) ^ (2) + ( y_0 - Alpha.y(m) ) ^ (2) ) ...
    ) * phi_n(m) ) ...
    + u_D;
end;
%
%----- u_Gamma -----
%
u_Gamma = 0;
u_Gamma = (1/2)* ((1/(4*N))...
    * log( 1 /...
    ( ( x_0 -Beta.x(1) ) ^2 + ( y_0 - Beta.y(1)) ^2 ) ...
    ) * psi_n(1));
%
for k = 2:N
    u_Gamma = ((1/(4*N))...
        * log( 1 /...
        ( ( x_0 -Beta.x(k) ) ^2 + ( y_0 - Beta.y(k)) ^2 ) ...
        ) * psi_n(k))...
        + u_Gamma;
end;
%
u_Gamma = (1/2)* ((1/(4*N))...
    * log( 1 /...
    ( ( x_0 -Beta.x(N+1) ) ^2 + ( y_0 - Beta.y(N+1)) ^2 ) ...
    ) * psi_n(N+1))...
    + u_Gamma;
%
%----- u_n -----
%
u_n = u_D + u_Gamma;
%
%***** Fehler zur wahren Loesung *****
%
error = abs( wahres_u_3(x_0 ,y_0,x_fest,y_fest) - u_n )
%
% N wird hochgesetzt auf das Doppelte
% fuer den naechsten Schleifendurchlauf
%
N=N*2;
%
end;
%=====

```

Zur Berechnung des Fehlers der approximierten Lösung zur wahren Lösung, brauchen wir die Funktion für die wahre Lösung.

```
%===== matlab_wahre_loesung.m =====
%
% Function-File: Wahre Loesung u
%
%=====
%
function v = wahres_u(x,y,x_fest,y_fest)
%
z = complex(x,y);
v = real(sqrt((z^2)-1))*sign(x);
%
%=====
```

Die Parametrisierung des Gebietsrandes von D enthält die drei von uns benutzten Gebietsformen Ellipse, Drache und das an den Ecken abgerundete Rechteck.

```
%===== param_bogen.m =====
%
% Function-File: Programm fuer die Parametrisierung
%                des Gebietsrandes von D
%
%=====
%
function[alpha] = param_gebiet(N,a,b,c,Form)
%
% "ubergibt den Wert alpha
%
% Schrittweite
h = (2*pi)/(2*N);
% Aufspannen eines Vektors t
t = 0:h:((2*pi)-h);
%
switch Form
%
% Fall : Ellipse
case 'ellipse'
    alpha.x = a*cos(t);
    alpha.y = b*sin(t);
    alpha.dx = -a*sin(t);
    alpha.dy = b*cos(t);
    alpha.ddx = -a*cos(t);
```

```

    alpha.ddy = -b*sin(t);
    %
% Fall : Drache
case 'drache'
    alpha.x = a*(cos(t) + b*(cos(2*t) -1));
    alpha.y = c*sin(t);
    alpha.dx = -a*sin(t) - 2*a*b*(sin(2*t));
    alpha.dy = c*cos(t);
    alpha.ddx = -a*cos(t) - 4*a*b*(cos(2*t));
    alpha.ddy = -c*sin(t);
    %
% Fall : rechteckiges Gebiet
case 'rechteck'
    alpha.x = a * cos(t) .* (cos(t).^(10) + sin(t).^(10)).^(-(1/10));
    alpha.y = b * sin(t) .* (cos(t).^(10) + sin(t).^(10)).^(-(1/10));
    %
    alpha.dx = - a * sin(t) ...
        .* (cos(t).^(10) + sin(t).^(10)).^(-(1/10))...
        -(1/10) * a * cos(t)...
        .* ( -10 * cos(t).^(9) .* sin(t) ...
        + 10 * sin(t).^(9) .* cos(t) )...
        .* (cos(t).^(10) + sin(t).^(10)).^(-(11/10));
    %
    alpha.dy = b * cos(t) ...
        .* ((cos(t).^(10)) + (sin(t).^(10))).^(-(1/10))...
        - (1/10) * b * sin(t) ...
        .* ( -10 * cos(t).^(9) .* sin(t) ...
        + 10 * sin(t).^(9) .* cos(t) )...
        .* (cos(t).^(10) + sin(t).^(10)).^(-(11/10));
    %
    alpha.ddx = - a * cos(t)...
        .* (cos(t).^(10) + sin(t).^(10)).^(-(1/10))...
        + (1/5) * a * sin(t)...
        .* ( -10 * cos(t).^(9) .* sin(t) ...
        + 10 * sin(t).^(9) .* cos(t) )...
        .* (cos(t).^(10) + sin(t).^(10)).^(-(11/10)) ...
        + (11/100) * a * cos(t)...
        .* ( - 10 * cos(t).^(9) .* sin(t) ...
        + 10 * sin(t).^(9) .* cos(t) ).^(2)...
        .* (cos(t).^(10) + sin(t).^(10)).^(-(21/10))...
        -(1/10) * a * cos(t)...
        .* ( 90 * cos(t).^(8) .* sin(t).^(2) - 10 * cos(t).^(10)...
        + 90 * sin(t).^(8) .* cos(t).^(2) - 10 * sin(t).^(10) )...

```

```

.* (cos(t).^(10) + sin(t).^(10)).^(-(11/10));
%
alpha.ddy = - b * sin(t) ...
.* ((cos(t).^(10)) + (sin(t).^(10))).^(-(1/10))...
- (1/5) * b * cos(t)...
.*( -10 * cos(t).^(9) .* sin(t) + 10 * sin(t).^(9) .* cos(t) )...
.* (cos(t).^(10) + sin(t).^(10)).^(-(11/10)) ...
+ (11/100) * b * sin(t)...
.* (- 10 * cos(t).^(9) .* sin(t) ...
+ 10 * sin(t).^(9) .* cos(t) ).^(2)...
.* (cos(t).^(10) + sin(t).^(10)).^(-(21/10))...
-(1/10) * b * sin(t)...
.* ( 90 * cos(t).^(8) .* sin(t).^(2) - 10 * cos(t).^(10)...
+ 90 * sin(t).^(8) .* cos(t).^(2) - 10 * sin(t).^(10) )...
.* (cos(t).^(10) + sin(t).^(10)).^(-(11/10));
%
end;
%=====

```

Für die Parametrisierung des Schlitzes haben wir ein Funktions-File, in dem die von uns benutzten Geometrien enthalten sind, die Gerade, den Halbkreis und die Sinusschwingung.

```

%===== param_bogen.m =====
%
% Function-File: Programm fuer die Parametrisierung des Bogens Gamma
%
%=====
%
function[beta] = param_bogen(N,Form)
%
% uebergibt den Wert beta
%
% Schrittweite
h = (2*pi)/(2*N);
% Aufspannen eines Vektors t
t = 0:h:((2*pi)-h);
%
switch Form
% Fall : einfache Gerade
case 'gerade'
    beta.x = cos(t);
    beta.y = t*0;
    beta.dx = t*0 + 1;
    beta.dy = t*0;

```

```
%  
% Fall: Halbkreis  
case 'halbkreis'  
    beta.x = cos((pi/2)*(cos(t)+1));  
    beta.y = (1/2)*sin((pi/2)*(cos(t)+1));  
    beta.dx = -(pi/2)*sin((pi/2)*(cos(t)+1));  
    beta.dy = (pi/4)*cos((pi/2)*(cos(t)+1));  
    %  
% Fall: Sinusschwingung  
case 'sinusschwing'  
    beta.x = cos(t);  
    beta.y = (1/3) * (sin( pi * (cos(t) + 1) ) );  
    beta.dx = 1 + t*0;  
    beta.dy =(pi/3) * ( cos( pi * (cos(t) + 1) ) ) ;  
    %  
end;  
%=====
```


Danksagungen

An dieser Stelle möchte ich denjenigen danken, die zum Entstehen dieser Arbeit beigetragen haben.

Mein erster Dank gilt Herrn Professor Dr. Rainer Kreß für die Themenstellung und die Betreuung während der Entstehung dieser Arbeit.

Ein weiterer Dank geht an meine Eltern, die mich während meines Studiums unterstützt haben.

Ferner möchte ich Herrn Dr. Peter Hähner danken, der durch seine Vorlesungen mein Interesse und die Faszination für die numerische Mathematik geweckt hat.

Desweiteren möchte ich Stephan Kramer für die kritischen Kommentare und die Diskussion an dieser Arbeit danken.

Jens Hartlep, Nikola Isabella Poske und Corinna Rehwald danke ich für die Korrektur dieser Arbeit.

Zum Schluß möchte ich Annika Lohstroh für die aufmunternden Worte danken, dem EC Göttingen und allen anderen, die mich während meines Studiums und vor allem während des Schreibens dieser Arbeit begleitet und unterstützt haben.

Erklärung

Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet habe.

Göttingen, den 24.03.2004