

Direkte und inverse Randwertprobleme aus der Modellierung elektrostatischer Materialprüfungsverfahren

Diplomarbeit

vorgelegt von
Eric Heinemeyer
aus
Peine



angefertigt im
Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
der Georg-August-Universität zu Göttingen
2003

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Vom Problem zum Modell	3
1.1 Vier mathematische Probleme	4
2 Grundlagen	7
2.1 Konvergenz von Fourierreihen	8
2.2 Funktionalanalytische Grundlagen	11
2.2.1 Kompakte Operatoren, Riesz-Theorie und Fredholm-Alternative	12
2.2.2 Einiges aus der nichtlinearen Funktionalanalysis	14
2.3 Grundlagen aus der Potentialtheorie	15
2.3.1 Die Green'schen Sätze	16
2.3.2 Potentiale und Sprungbeziehungen	17
3 Einiges zu Fourierreihenansätzen	23
3.1 Das Dirichlet-Problem in Ω_{\circ}	23
3.2 Das Dirichlet-Problem in Ω_{\square}	27
4 Vier Randwertprobleme aus der Elektrostatik	35
4.1 Dirichlet-Neumann-Probleme	36
4.1.1 Eindeutigkeit	36
4.1.2 Wichtige Operatoren	37
4.1.3 Existenz einer Lösung	41
4.2 Dirichlet-Dirichlet-Probleme	44

4.2.1	Eindeutigkeit	45
4.2.2	Wichtige Operatoren	46
4.2.3	Existenz einer Lösung	50
5	Das inverse Problem	55
5.1	Eindeutigkeit des inversen Problems	55
5.2	Das Newtonverfahren für das inverse Problem	58
5.3	Fréchet-Differenzierbarkeit verschiedener Operatoren	59
5.4	Eine effiziente Berechnung der Fréchet-Ableitung	66
6	Numerik	69
6.1	Numerik der direkten Probleme	69
6.2	Berechnung des Stromflusses	73
6.3	Numerische Beispiele für das direkte Problem	73
6.4	Numerik der inversen Probleme	79
6.5	Fazit und Ausblick	82

Einleitung

Eine in der Praxis häufig auftretende Aufgabe ist die Prüfung eines Werkstückes auf Fehlerfreiheit. Hier möchte man Fragen der Art klären:

- *Gibt es Risse oder Hohlräume im Inneren des Objektes?*
- *Wie sind die Form/Ausmaße und Lage der Fehler?*

Die Beantwortung soll dabei ohne die Beschädigung des Objektes möglich sein. Problemstellungen dieser Art werden in dem Gebiet der *zerstörungsfreien Materialprüfung* untersucht.

Für elektrische Leiter (z.B. metallene Werkstücke) haben Banks und Kojima in [1] ein Verfahren vorgeschlagen und anhand eines einfachen Modellproblems untersucht. Die fehlerhafte Region wurde dabei durch gemessene Daten des Magnetfeldes bestimmt, welches durch das Anlegen eines elektrischen Stroms am Werkstückrand induziert wurde.

In der vorliegenden Arbeit untersuchen wir ein Verfahren, in dem das fehlerhafte Gebiet aus der Messung des Stromflusses über den Rand rekonstruiert wird. Konkret stellen wir uns folgende Situation vor: Wir gehen von einem homogenen Stromleiter mit homogenem Einschluss aus. Homogen bedeutet dabei, dass die elektrische Leitfähigkeit in den jeweiligen Gebieten (Leiter bzw. Einschluss) konstant ist. Wir schauen uns die zwei Situationen an, in denen die Leitfähigkeit des Einschlusses entweder null oder unendlich ist. Dieses entspricht physikalisch interpretiert einem Nichtleiter oder einem perfekten Leiter. Legen wir eine Spannung an der Oberfläche des Werkstückes an, so wird ein Strom fließen, dessen Fluss durch den Einschluss gestört wird. Aus dem Wertepaar {Spannung, Stromfluss} können wir die Form und Lage berechnen.

Die Grundidee des hier vorgestellten Rekonstruktionsverfahrens besteht darin, dass wir in der Lage sind, bei Kenntnis der Form des Leiters *und* der Spannungsverteilung auf der Oberfläche, den Stromfluss auf dem Rand zu berechnen. Wir können diesen zuerst ohne einen Einschluss berechnen und anschließend mit einem uns in Form und Lage bekanntem. Den gewählten Einschluss verändern wir solange, bis der von uns berechnete Stromfluss mit dem gemessenen näherungsweise übereinstimmt.

Damit diese Idee erfolgreich sein kann, müssen wir uns erstens davon überzeugen, dass der Einschluss durch die Kenntnis von Spannung und Stromfluss eindeutig bestimmt wird und zweitens, dass eine *kleine* Änderung des Einschlusses auch nur eine *kleine* Änderung des Stromflusses bewirkt. Mathematisch formuliert interessiert uns die sogenannte *Wohlgestelltheit* des Problems, d.h., die Frage nach *Existenz*, *Eindeutigkeit* und *stetiger Abhängigkeit von den Daten*. Diesen Fragen gehen wir im Kapitel 4, bei der Untersuchung des *direkten Problems* nach. Eine Schlüsselrolle beim Beherrschen dieses Problems wird dabei das sogenannte *elektrostatische Potential* spielen. Dieses ergibt sich als Lösung eines gemischten Randwertproblems zur Laplace-Gleichung im Gebiet zwischen Leiterrand und Einschlussrand. Aus Kenntnis des Potentials bestimmt man den Stromfluss als Normalableitung des Potentials auf der Leiteroberfläche.

Das eingangs formulierte Problem der Rekonstruktion des Einschlusses wird im Kapitel 5 behandelt. Es wird als *inverses Problem* bezeichnet. Zwei Probleme heißen dabei invers zueinander, falls die Formulierung des einen Problems die Lösung des anderen erfordert. Einigen Besonderheiten, wie z.B. der sogenannten *Schlechtgestelltheit* des inversen Problems, muss dabei Rechnung getragen werden. Hierunter versteht man, dass wenigstens eine der drei Forderungen der Wohlgestelltheit verletzt wird. In dem uns vorliegenden Fall ist dieses die Forderung nach der stetigen Abhängigkeit von den Daten. Für praktische Anwendungen ist dieses sehr unangenehm, da ein unvermeidlicher Messfehler das Ergebnis stark verfälschen kann. Um dieses teilweise zu kompensieren, sind für die näherungsweise Berechnung einer Lösung sogenannte Regularisierungsverfahren notwendig; wir verwenden die Tikhonov-Regularisierung.

Neben einer theoretischen Behandlung sind wir auch an praktischen Berechnungen dieser Probleme interessiert. Hierzu nutzen wir die im ersten Teil der Arbeit vorgestellte Methode für das direkte Problem, um uns *synthetische* Daten zu verschaffen. Diese dienen dann als Ausgangsdaten für das inverse Problem.

Zusammengefasst interessieren wir uns für die folgenden zwei Probleme:

- **Das direkte Problem (Ein wohlgestelltes Problem)**

Bestimme den Stromfluss über den Rand des Leiters bei Kenntnis der angelegten Spannung, der Lage und Form des Einschlusses, sowie der auf dem Einschluss herrschenden Randbedingung.

- **Das inverse Problem (Ein schlechtgestelltes Problem)**

Bestimme die Form und Lage des Einschlusses bei Kenntnis der angelegten Spannung, des Stromflusses über den Rand des Leiters, sowie der auf dem Einschluss herrschenden Randbedingung.

Kapitel 1

Vom Problem zum Modell

Um das Problem einfacher zu gestalten, nehmen wir an, dass das Werkstück eine Zylindersymmetrie mit einem eben solchen Einschluss besitzt. Damit reduziert sich die Untersuchung auf ein zwei-dimensionales Problem in der Schnittebene des Leiters. Um ein mathematisches Modell abzuleiten, gehen wir wie folgt vor:

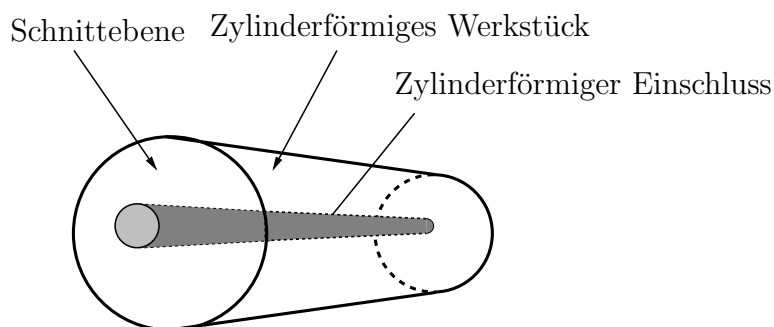


Abb. 1.1: Werkstück mit Einschluss

Das *elektrische Feld* E im Leiter wird durch die Maxwell Gleichungen in Materie

$$\operatorname{rot} E = 0 \quad (1.1)$$

und

$$\operatorname{div} \epsilon E = \rho \quad (1.2)$$

beschrieben. Dabei bezeichnet ϵ die *Dielektrizität* und ρ die *Ladungsdichte*. Rotationsfreie Vektorfelder lassen sich in einfach zusammenhängenden Gebieten als Gradient eines skalaren Potentials schreiben. Wir bezeichnen es mit u , es ist das *elektrostatische Potential*. Nehmen wir zur weiteren Vereinfachung an, dass ϵ jeweils im Leiter und im Einschluss konstant ist und setzen dieses in die Gleichung (1.2) ein, so erhalten wir für das elektrostatische Potential die Gleichung

$$\Delta u = 0 \quad \text{im Leiter ohne Einschluss} + \text{Randbedingungen.}$$

Wird auf einem Teil der Leiteroberfläche eine Spannung f angelegt, so bedeutet das, dass wir für diese Randstücke das Potential als $u = f$ vorgeben. Solch eine Randbedingung wird *Dirichlet-Randbedingung* genannt. Für den Rand eines als nichtleitend angenommenen Einschlusses (Isolator) erhalten wir die Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$, d.h., es gibt keinen Stromfluss durch diesen Rand. Die Vorgabe der Normalableitung auf einem Randstück wird als *Neumann-Randbedingung* bezeichnet. Für einen als ideal leitend angenommenen Einschluss erhalten wir die Dirichlet-Randbedingung $u = 0$ auf dem Rand des Einschlusses. Für die nicht von

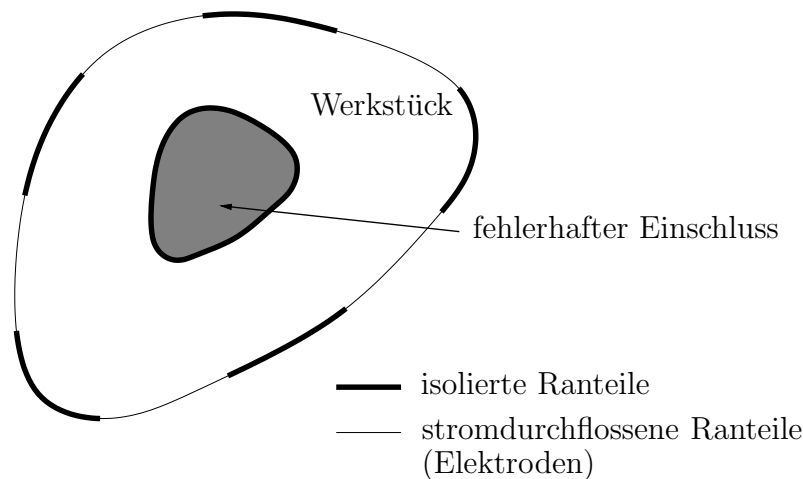


Abb. 1.2: Querschnitt durch Leiter mit Isolator

den Elektroden bedeckten Randteile des Leiters erhalten wir ebenfalls Neumann-Nullrandwerte. Mathematisch gesprochen handelt es sich damit um ein gemischtes Randwertproblem zur Laplace-Gleichung im Ringgebiet zwischen dem Rand des Leiters und dem des Einschlusses. Die für unser Vorhaben relevante Größe ist der Stromfluss über den Leiterrand in Richtung der Normalen. Kennen wir das elektrische Potential, so können wir den Stromfluss, als Normalableitung des Potentials berechnen.

1.1 Vier mathematische Probleme

In diesem Abschnitt lassen wir eine mögliche physikalische Interpretation vorerst beiseite und formulieren die uns interessierenden Probleme streng mathematisch.

Wir sind an zwei geometrisch besonders einfachen Formen für den Leiter interessiert, nämlich kreisförmigen und rechteckigen. Wir beschränken uns hier stellvertretend auf die zwei einfachsten Fälle. Mit

$$\Omega_{\square} := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_{\infty} < \frac{1}{2}\}$$

bezeichnen wir das Innere des Quadrates mit Kantenlänge 1 und Mittelpunkt in 0 und mit

$$\Omega_{\circ} := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\|_2 < 1\}$$

die offene Einheitskreisscheibe. Weiterhin sei $C \subset \mathbb{R}^2$ ein C^2 -glattberandetes Gebiet, dessen Abschluss echt in Ω_i für $i \in \{\square, \circ\}$ enthalten ist.

Um die weitgehend analoge Vorgehensweise für die Probleme am Kreis und Quadrat hervorzuheben, haben wir einen Index i mit Indexmenge $\{\square, \circ\}$ eingeführt. Mit seiner Hilfe können wir Objekte, wie z.B. Ränder, Operatoren, Dichten etc., welche von der Geometrie der untersuchten Probleme abhängen, unterscheiden und so die Sätze kürzer formulieren. Wir gestatten uns die Freiheit, diesen Index vereinzelt zu unterdrücken, falls die Argumentation für beide Fälle analog verläuft.

Mit G_i bezeichnen wir $\Omega_i \setminus \bar{C}$. Der Rand von G_i zerfällt in zwei jeweils geschlossenen Kurven: $\Sigma := \partial C$ und $\Gamma_i := \partial\Omega_i$. Für den Fall des Quadrates empfiehlt es sich, auch die einzelnen Kanten zu benennen. Gegen den Uhrzeigersinn seien diese Γ_1 bis Γ_4 . Aus dem Kontext heraus wird erkennbar sein, was mit Γ_i gemeint ist. Außerdem seien ξ_1 bis ξ_4 die Ecken des Quadrates gegen den Uhrzeigersinn in der linken unteren Ecke beginnend. Zu guter Letzt vereinbaren wir, dass der Einheitsnormalenvektor ν auf Σ und Γ jeweils in das Äussere der von der Kurve umschlossenen Gebiete gerichtet sei. Für die Benennung siehe auch Abbildung 1.3.

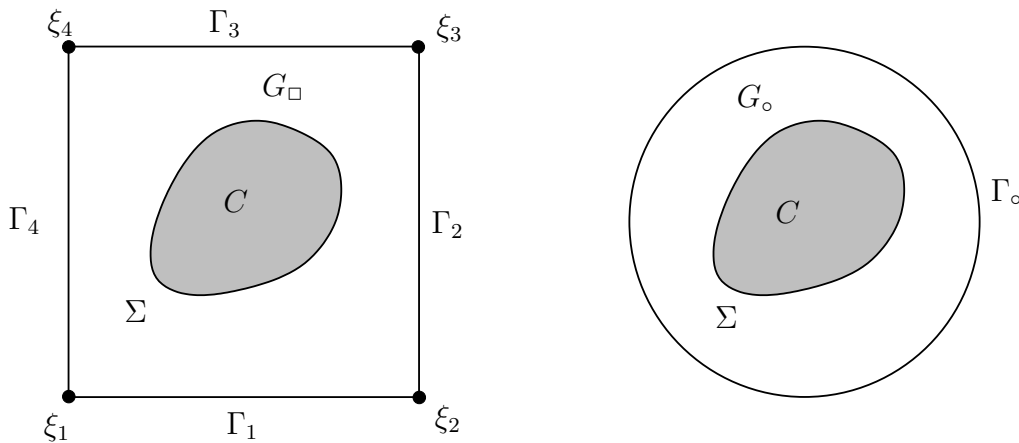


Abb. 1.3: Modellgeometrien

Wir sind an den folgenden vier Randwertproblemen interessiert:

Definition 1.1 (Vier Randwertprobleme) *Gesucht wird eine Funktion $u \in C^2(G_i)$, welche in G_i harmonisch ist und jeweils eines der folgenden vier Randwertproblem löst:*

i) Das Dirichlet-Neumann-Problem in G_\circ (DN- G_\circ) zu den Randbedingungen

$$u = f \quad \text{auf } \Gamma_\circ \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = g \quad \text{auf } \Sigma. \quad (1.3)$$

ii) Das Dirichlet-Neumann-Problem in G_\square (DN- G_\square) zu den Randbedingungen

$$u = f \quad \text{auf } \Gamma_\square \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} = g \quad \text{auf } \Sigma. \quad (1.4)$$

iii) Das Dirichlet-Dirichlet-Problem in G_\circ (DD- G_\circ) zu den Randbedingungen

$$u = f \quad \text{auf } \Gamma_\circ \quad \text{und} \quad u = g \quad \text{auf } \Sigma. \quad (1.5)$$

iv) Das Dirichlet-Dirichlet-Problem in G_\square (DD- G_\square) zu den Randbedingungen

$$u = f \quad \text{auf } \Gamma_\square \quad \text{und} \quad u = g \quad \text{auf } \Sigma. \quad (1.6)$$

Hierbei seien $f \in L^2(\Gamma_i)$ und $g \in C(\Sigma)$ gegeben. Die Randwerte $u|_{\Gamma_i} = f$ sind im L^2 -Sinne zu verstehen; siehe hierzu Bemerkung 1.2. Die Normalableitung auf dem inneren Rand existiere im Sinne gleichmäßiger Konvergenz, d.h., dass

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \langle \nu(x), \text{grad } u(x + h\nu(x)) \rangle = g(x), \quad x \in \Sigma$$

gleichmäßig auf Σ .

Bemerkung 1.2 (Zur Definition von L^2 -Randwerten) Für den Fall des Kreises bedeutet dieses, dass

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \int_{\Gamma_\circ} |u(x - h\nu(x)) - f(x)|^2 ds(x) = 0$$

gilt, d.h., wir schauen uns die Werte der Funktion v auf ihrer Parallelkurve $\Gamma_{\circ,h}$ an, bilden die Differenz zu den Randwerten und berechnen hiervon die L^2 -Norm. Für das Quadrat müssen wir auf Grund der vorhandenen Ecken diese Forderung etwas modifizieren. Alternativ verlangen wir, dass

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \int_{\Gamma_{\square,h}} |u(x) - f(x + h\nu(x))|^2 ds(x) = 0,$$

wobei mit einem „Missbrauch der Notation“ $\Gamma_{\square,h}$ nicht die Parallelkurve, sondern das konzentrische Quadrat mit Abstand h bedeutet. Man beachte, dass das Bogenelement auf der Kurve $\Gamma_{\square,h}$ mit dem auf Γ_\square übereinstimmt. Für $h \rightarrow 0$ reduziert sich der Anteil auf der Randkurve Γ_\square , über den nicht integriert wird, auf die vier Randpunkte ξ_i , eine Lebesgue-Nullmenge.

Obwohl wir vom Modell her nur am Fall $g = 0$ interessiert sind, lohnt es sich, den allgemeineren Fall zu behandeln. Beweise und Theorie gestalten sich hierfür nicht schwieriger, und wir bekommen so eine strenge Rechtfertigung unserer Vorgehensweise zum Testen der Programme im numerischen Teil.

Kapitel 2

Grundlagen

In diesem Kapitel stellen wir die für diese Arbeit benötigten Hilfsmittel aus der linearen und nichtlinearen Funktionalanalysis, der Potentialtheorie und einige Sätze über Fourierreihen zusammen. Die Beweise zu den Sätzen im Abschnitt 2.1 sind in [4] und [3] zu finden. Die Ausführungen zu den Sätzen in den Abschnitten 2.2 und 2.3 sind fast alle in [6] zu finden. Für dieses Kapitel vereinbaren wir, dass der Normalenvektor immer in das Außengebiet von G zeigt.

Bevor wir beginnen, wiederholen wir zunächst einige Grundlagen über Funktionen auf Untermannigfaltigkeiten, genauer gesagt Kurven im \mathbb{R}^2 . Unter der von uns gemachten Voraussetzung an das Gebiet C existiert eine reguläre, zweimal stetig differenzierbare und 2π -periodische Parameterdarstellung $\Sigma = \{\beta(t) \mid t \in [0, 2\pi)\}$ der Randkurve. *Regulär* bedeutet dabei, dass $|\beta'(t)| > 0$ für alle $t \in [0, 2\pi]$ gilt. Hiermit definieren wir den Raum $C(\Sigma)$, der auf Σ stetigen Funktionen als Menge aller Funktionen, für die $f \circ \beta \in C_{2\pi}(\mathbb{R})$. Bei dieser Vorgehensweise müssen wir die Möglichkeit verschiedener Parametrisierungen zulassen. Man kann sich davon überzeugen, dass die Definition von Funktionen auf Σ unabhängig von der Wahl der Parametrisierung in dem Sinne ist, dass wir *gleiche*, d.h. homöomorphe Räume von Funktionen erhalten. Wir merken an, dass die Glätte der Kurve im Allgemeinen die Glattheit der Funktionen auf der Kurve begrenzt. Für die Randkurve Γ_{\square} existiert nur eine stückweise glatte Parametrisierung, so dass eine Funktion, welche auf ganz Γ_{\square} differenzierbar sein soll, zusätzlich in einer Umgebung der Ecken verschwinden muss. Die Parametrisierungen, mit denen wir rechnen, sind durch

$$\alpha_{\circ} : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto (\cos t, \sin t)$$

und

$$\alpha_{\square} : [0, 4) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{cases} (t - \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), & 0 \leq t < 1, \\ (\frac{1}{2}, t - \frac{3}{2}), & 1 \leq t < 2, \\ (\frac{5}{2} - t, \frac{1}{2}), & 2 \leq t < 3, \\ (-\frac{1}{2}, \frac{7}{2} - t), & 3 \leq t < 4 \end{cases}$$

gegeben; es sind die natürlichen Parametrisierungen der Kurven. Entsprechend gilt:

$$\begin{aligned} \varphi \in C^k(\Gamma_{\circ}) &: \iff \varphi \circ \alpha_{\circ} \in C_{2\pi}^k(\mathbb{R}), \\ \varphi \in C^k(\Gamma_{\square}) &: \iff \varphi \circ \alpha_{\square} \in C_4^k(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Für alle in dieser Arbeit auftretenden Kurven sei die Parametrisierung so gewählt, dass die Kurven entgegen dem Uhrzeigersinn orientiert sind. Der in das Außengebiet von C orientierte Normalenvektor ist in der parametrisierten Form durch

$$\nu(\beta(t)) = \frac{[\beta'(t)]^{\perp}}{|\beta'(t)|}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

gegeben. Dabei vereinbaren wir, dass

$$[x]^{\perp} := (x_2, -x_1)^t, \quad x \in \mathbb{R}^2$$

die Drehung eines Vektors um 90 Grad im mathematisch negativen Umlaufsinn bedeutet.

2.1 Konvergenz von Fourierreihen

Wir verwenden eine Kombination von Fourierreihenansätzen und Potentialansätzen zur Lösung der direkten Probleme im Kapitel 4. Eigenschaften der Fourierreihenanteile, wie z.B. die Regularität am Rand, untersuchen wir in den Abschnitten 3.1 und 3.2. Hierfür benötigen wir eine genaue Kenntnis des Konvergenzverhaltens von Fourierreihen, weshalb wir hier die wichtigsten Sätze zusammentragen.

Für eine stetige 2π -periodische Funktion f ist durch

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n \cos nt + b_n \sin nt\}, \quad t \in [0, 2\pi] \quad (2.1)$$

die *formale Fourierreihe* definiert. Dabei sind

$$a_n := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt \, dt, \quad n \in \mathbb{N} \quad (2.2)$$

und

$$b_n := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt \, dt, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad (2.3)$$

die *Fourier Sinus-* und *Cosinuskoeffizienten* von f . Die Gleichungen (2.2) und (2.3) werden die *Euler-Fourier'schen Formeln* genannt. Gelegentlich werden wir auch $a_n(f)$ und $b_n(f)$ verwenden, um die Abhängigkeit von der Funktion stärker zu betonen. Für theoretische Überlegungen ist es oftmals zweckmäßig, die zu (2.1) äquivalente *komplexe Darstellung*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

mit

$$c_n := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} \, dt, \quad n \in \mathbb{Z} \quad (2.4)$$

zu verwenden. Es besteht dabei der folgende Zusammenhang zwischen den Koeffizienten:

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_k - ib_k), & k > 0, \\ \frac{1}{2}a_0, & k = 0, \\ \frac{1}{2}(a_{-k} + ib_{-k}), & k < 0. \end{cases}$$

Wir tragen jetzt einige Sätze zusammen, welche die folgenden Fragen klären:

- In welchem Sinne konvergiert die durch (2.1) definierte Reihe und wenn ja, wogegen?
- Wie spiegeln sich Differenzierbarkeitseigenschaften der Funktion f im Verhalten der Koeffizienten a_n und b_n wieder?

Bevor wir uns mit der Frage der Konvergenz beschäftigen, definieren wir die *Fourierpolynome*

$$s_n(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^n \{a_m \cos mt + b_m \sin mt\}, \quad t \in [0, 2\pi], n \in \mathbb{N}. \quad (2.5)$$

Jeder über $[0, 2\pi]$ integrierbaren Funktion f können wir so mit Hilfe der Euler-Fourier'schen Formeln ein eindeutig bestimmtes Fourierpolynom vom Grad kleiner oder gleich n zuordnen.

Wir geben jetzt einige Teilantworten auf die Frage, welche Funktionen sich als Fourierreihe, bei geeigneter Wahl eines Konvergenzbegriffes, darstellen lassen.

Satz 2.1 (Satz von Dirichlet) *Für eine periodische, stückweise stetig differenzierbare Funktion f gilt:*

- i) Die Folge der Fourierpolynome konvergiert punktweise gegen $\frac{1}{2}(f(t^-) - f(t^+))$ für alle $t \in \mathbb{R}$.
- ii) Die Folge der Fourierpolynome konvergiert gleichmäßig gegen f auf jedem kompakten Intervall ohne Sprungstelle der Ableitung.

Desweiteren gilt der

Satz 2.2 Für eine stetige periodische Funktion konvergiert die Folge der Fourierpolynome im quadratischen Mittel gegen die Funktion.

Ein letzter Satz, welcher das Konvergenzverhalten der Fourierpolynome beleuchtet, ist der

Satz 2.3 (Satz von Fejér) Für eine stetige periodische Funktion konvergiert die Folge der arithmetischen Mittel (Fejér-Mittel) der Fourierpolynome gleichmäßig gegen die Funktion.

Entwickelt man eine unstetige Funktion in eine Fourierreihe, so tritt an den Unstetigkeitsstellen das sogenannte *Gibbs-Phänomen* auf. Hierunter versteht man Oszillationen an den Unstetigkeitsstellen, welche zu einem Überschwingen der Näherungslösung führt. Die Verwendung des Fejér-Mittels mindert dieses Phänomen stark. Dieses beruht auf einer schwächeren Gewichtung der höherfrequenten Anteile in der Näherungssumme, was man an Hand der Gleichung

$$\frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^n s_i(t) = \sum_{m=-n}^n \left(1 - \frac{|m|}{n+1}\right) c_m e^{imt}$$

gut erkennen kann. Für eine Vertiefung dieser Aussagen verweisen wir auf [2]. Wir greifen dieses im numerischen Teil der Arbeit wieder auf, um den Stromfluss für den Fall des Quadrates näherungsweise zu berechnen.

Ein weiteres Hilfsmittel, welches mit dem Satz von Fejér in einem engen Zusammenhang steht, ist die sogenannte *Konvergenz im Sinne von Cesaro*, kurz *C-Konvergenz*. Darunter versteht man die folgende Beobachtung: Für eine konvergente Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert die Folge der arithmetischen Mittel $\{m_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$m_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k$$

gegen den gleichen Grenzwert. Man definiert daher:

Definition 2.4 Eine Folge konvergiert im Sinne von Cesaro, falls die Folge der arithmetischen Mittel im gewöhnlichen Sinne konvergiert.

Wenden wir dieses Resultat auf Reihen an, so erhalten wir die Aussage, dass eine konvergente Reihe Cesaro-summierbar ist, mit gleichem Grenzwert. Eine Reihe heißt dabei *Cesaro-summierbar*, falls die Folge der Partialsummen im Sinne von Cesaro konvergiert. Wir halten dieses fest als

Satz 2.5 (Permanenzsatz der Cesaro Summation) *Ist eine Reihe konvergent im gewöhnlichen Sinne, so ist sie auch Cesaro-summierbar und die Grenzwerte stimmen überein.*

Das eigentlich Interessante ist aber, dass gewisse, im gewöhnlichen Sinne divergente Reihen, Cesaro-summierbar sind. So liefert uns der Begriff der C-Summierbarkeit eine Erweiterung unseres alten Konvergenzbegriffes. Beispielsweise besitzt die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ keinen Grenzwert im gewöhnlichen Sinne, ist aber Cesaro-summierbar mit Grenzwert $\frac{1}{2}$. Das gerade eingeführte Summationsverfahren wird auch gelegentlich mit $(C, 1)$ -Summation bezeichnet. Man kann dieses zu sogenannten (C, p) -Summationsverfahren verallgemeinern. Hierbei wendet man rekursiv p -mal das $(C, 1)$ -Summationsverfahren an.

Kommen wir zu der zweiten eingangs gestellten Frage. Als Faustregel gilt, dass die Fourierkoeffizienten um so schneller abfallen, je glatter die Funktion selbst ist. Wir konkretisieren diese Aussage im

Satz 2.6 *Ist $f \in C_{2\pi}^k$, $k \geq 1$, so gilt für die Fourierkoeffizienten c_n , dass*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |n^{k-1} c_n| < \infty. \quad (2.6)$$

Hieraus folgt sofort das

Korollar 2.7 *Ist $f \in C_{2\pi}^2$, so konvergieren die Reihen*

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{int} \quad \text{und} \quad f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} i n c_n e^{int}$$

gleichmäßig gegen f und f' .

2.2 Funktionalanalytische Grundlagen

Als wichtiges Hilfsmittel für die Existenzbeweise wird sich die Riesz-Theorie zum Lösen von Operatorgleichungen zweiter Art mit kompaktem Operatoren erweisen. Wir stellen daher zuerst die wichtigsten Eigenschaften kompakter Operatoren zusammen.

2.2.1 Kompakte Operatoren, Riesz-Theorie und Fredholm-Alternative

Definition 2.8 Ein linearer Operator $A : X \rightarrow Y$ eines normierten Raumes X in einen normierten Raum Y heißt kompakt, wenn für jede beschränkte Folge (φ_n) aus X die Bildfolge $(A\varphi_n)$ eine in Y konvergente Teilfolge besitzt.

Wir möchten möglichst einfache Kriterien finden, um feststellen zu können, ob ein Operator kompakt ist. Solch ein Kriterium liefert der

Satz 2.9 Sei X ein normierter Raum und Y ein Banachraum. Konvergiert die Folge $A_n : X \rightarrow Y$ kompakter, linearer Operatoren in der Operatornorm gegen einen linearen Operator $A : X \rightarrow Y$, d.h. $\|A_n - A\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, dann ist A kompakt.

Desweiteren gelten die Sätze:

Satz 2.10 Linearkombinationen kompakter, linearer Operatoren sind kompakt.

Satz 2.11 Die Verknüpfung kompakter, linearer Operatoren mit beschränkten, linearen Operatoren ist, unabhängig von ihrer Reihenfolge, kompakt.

Beispiele für kompakte Operatoren sind die linearen, beschränkten Operatoren mit endlich dimensionalem Bild.

Satz 2.12 Ist $A : X \rightarrow Y$ ein beschränkter, linearer Operator mit endlich dimensionalen Bild, so ist A kompakt.

Der nächste Satz zeigt den wichtigen Unterschied zwischen Operatorgleichungen erster, d.h. $A\varphi = f$ und zweiter Art, d.h. $(I - A)\varphi = f$.

Satz 2.13 Die Identität $I : X \rightarrow X$ ist kompakt genau dann, wenn X endlich dimensional ist.

Hieraus folgern wir, dass ein kompakter Operator keine beschränkte Inverse haben kann, falls der Bildraum nicht endlich dimensional ist. Eine weitere, wichtige Klasse von kompakten Operatoren sind die Integraloperatoren. Der folgenden Satz charakterisiert sie unter geeigneten Voraussetzungen an den Kern, als kompakte Operatoren und liefert uns die benötigte Kompaktheit, aller in dieser Arbeit benutzten Integraloperatoren.

Satz 2.14 Seien $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \mathbb{R}^2$ einfach geschlossene Jordankurven. Dann ist der Integraloperator $A : L^2(\Gamma_1) \rightarrow L^2(\Gamma_2)$ bzw. $A : C(\Gamma_1) \rightarrow C(\Gamma_2)$, mit

$$(A\varphi)(x) := \int_{\Gamma_1} k(x, y)\varphi(y) ds(y), \quad x \in \Gamma_2$$

für $k \in C(\Gamma_1 \times \Gamma_2)$ kompakt und linear. Insbesondere ist $A\varphi \in C(\Gamma_2)$ für alle $\varphi \in L^2(\Gamma_1)$.

Der Kernsatz, aus dem wir ein Kriterium für die Lösbarkeit der zu Beginn dieses Abschnittes erwähnten Operatorgleichungen zweiter Art beziehen, ist der

Satz 2.15 *Sei $A : X \rightarrow X$ ein kompakter linearer Operator in einem normierten Raum X . Dann ist der Operator $I - A$ genau dann injektiv, wenn er surjektiv ist. Falls $I - A$ injektiv ist (und daher auch bijektiv), so ist der inverse Operator $(I - A)^{-1} : X \rightarrow X$ beschränkt.*

Als Korollar halten wir fest:

Korollar 2.16 *Sei $A : X \rightarrow X$ ein kompakter linearer Operator in einem normierten Raum X . Falls die homogene Gleichung*

$$\varphi - A\varphi = 0$$

nur die triviale Lösung $\varphi = 0$ besitzt, so besitzt für jedes $f \in X$ die inhomogene Gleichung

$$\varphi - A\varphi = f$$

genau eine Lösung $\varphi \in X$ und diese Lösung hängt stetig von f ab.

Neben der Riesz-Theorie benötigen wir noch die sogenannte Fredholm-Alternative. Hierzu definieren wir den Begriff des Dualsystems und des adjungierten Operators.

Definition 2.17 *Zwei normierte Räume X und Y versehen mit einer nicht entarteten Bilinearform heißen ein Dualsystem und werden mit $\langle X, Y \rangle$ bezeichnet.*

Definition 2.18 *Seien $\langle X_1, Y_1 \rangle_1$ und $\langle X_2, Y_2 \rangle_2$ zwei Dualsysteme. Zwei Operatoren $A : X_1 \rightarrow X_2$ und $B : Y_2 \rightarrow Y_1$ heißen adjungiert bezüglich der beiden Dualsysteme, falls*

$$\langle A\varphi, \psi \rangle_2 = \langle \varphi, B\psi \rangle_1$$

für alle $\varphi \in X_1, \psi \in Y_2$.

Für unsere Vorhaben ist die folgende Fassung des Fredholm'schen Alternativsatzes ausreichend.

Satz 2.19 *Seien $A : X \rightarrow X, B : Y \rightarrow Y$ kompakte, adjungierte Operatoren in einem Dualsystem $\langle X, Y \rangle$. Dann sind entweder $I - A$ und $I - B$ beide bijektiv oder $I - A$ und $I - B$ haben beide nichttriviale Nullräume mit endlicher, gleicher Dimension.*

Für das Kapitel über das inverse Probleme benötigen wir den Begriff der Hölder-stetig differenzierbaren Funktionen. Dabei versteht man unter Hölder-stetigen Funktionen eine Zwischenstufe zwischen stetigen und differenzierbaren Funktionen. Der Vollständigkeit halber definieren wir daher:

Definition 2.20 i) Für $0 < \alpha \leq 1$ bezeichne $C_{2\pi}^{0,\alpha} \subset C_{2\pi}$ den Unterraum der gleichmäßig Hölder-stetigen Funktionen φ mit der Eigenschaft

$$|\varphi(t) - \varphi(s)| \leq C|t - s|^\alpha$$

für alle $t, s \in \mathbb{R}$ und einer von φ abhängenden Konstanten $C > 0$.

ii) Für $0 < \alpha \leq 1$ bezeichne $C_{2\pi}^{1,\alpha} \subset C_{2\pi}^1$ den Unterraum der gleichmäßig Hölder-stetig differenzierbaren Funktionen φ mit der Eigenschaft

$$|\varphi'(t) - \varphi'(s)| \leq C|t - s|^\alpha$$

für alle $t, s \in \mathbb{R}$ und einer von φ abhängenden Konstanten $C > 0$.

2.2.2 Einiges aus der nichtlinearen Funktionalanalysis

Im Kapitel 5 benötigen wir die Verallgemeinerung der Differentialrechnung auf normierte Räume. Die moderne Auffassung der Ableitung kann im Begriff der *Linearisierung* zusammengefasst werden. Die Ableitung einer nichtlinearen Abbildung ist diejenige lineare Abbildung, welche sie in diesem Punkt am besten approximiert. Mathematisch genau gefasst definieren wir:

Definition 2.21 Es seien X, Y normierte Räume und $U \subset X$ eine offene Teilmenge. Ein Operator $A : U \rightarrow Y$ heißt Fréchet-differenzierbar an der Stelle $\varphi \in U$, falls es einen beschränkten, linearen Operator $A'[\varphi] : X \rightarrow Y$ gibt, derart dass

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\|h\|} \|A(\varphi + h) - A(\varphi) - A'[\varphi](h)\| = 0.$$

Der Operator $A'[\varphi]$ heißt Fréchet-Ableitung von A an der Stelle φ .

Die aus der Analysis bekannten Sätze über die Differenzierbarkeit von Produkten und Verkettungen von Abbildungen übertragen sich entsprechend. Für weitere Ausführungen verweisen wir auf [4].

Im numerischen Teil für das inverse Problem lösen wir eine nichtlineare und schlecht gestellte Operatorgleichung näherungsweise durch das Newtonverfahren. Eine schlechte Nachricht für dieses Vorhaben ist der nachfolgende Satz, welcher uns mitteilt, dass sich die Schlechtgestellttheit des Problems auch auf die linearisierte Gleichung überträgt.

Satz 2.22 Sei $A : U \subset X \rightarrow Y$ ein stetiger und kompakter (nicht notwendig linearer) Operator, der eine offene Teilmenge U eines normierten Raums X in einen Banachraum Y abbildet, und sei A Fréchet-differenzierbar in $\varphi \in U$. Dann ist die Fréchet-Ableitung $A'[\varphi]$ ein kompakter Operator.

2.3 Grundlagen aus der Potentialtheorie

Gegenstand der Potentialtheorie ist die Untersuchung von Randwertproblemen harmonischer Funktionen, welche z.B. bei der Modellierung von elektrostatischen Phänomenen auftreten. Unter einer *harmonischen* Funktion versteht man eine Funktion u , welche die *Laplace'sche* Differentialgleichung

$$\Delta u = 0$$

erfüllt. Im \mathbb{R}^2 ist der *Laplace-Operator* in kartesischen Koordinaten durch

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

gegeben. Für ein Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$ mit Rand ∂G ist man an Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen für die folgenden klassischen Randwertproblemen interessiert.

- **Dirichlet-Probleme**

Gegeben sei $f \in C(\partial G)$. Im Falle des sogenannten *inneren* Dirichlet-Problems wird eine in G harmonische, bis auf den Rand des Gebietes stetig fortsetzbare Funktion u gesucht, welche auf dem Rand mit f übereinstimmt. Im Falle des sogenannten *äußeren* Dirichlet-Problems sucht man entsprechend eine im Außengebiet von G beschränkte harmonische Funktion, welche stetig bis auf ∂G fortgesetzt werden kann und dort mit f übereinstimmt.

- **Neumann-Probleme**

Für gegebenes $g \in C(\partial G)$ wird im Falle des *inneren* Neumann-Problems eine in G (bzw. im Falle des *äußeren* Neumann-Problems in $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{G}$) harmonische Funktion u gesucht, welche bis auf den Rand des Gebietes stetig fortsetzbar ist und deren Normalableitung auf ∂G mit g im folgenden Sinne übereinstimmen:

$$\frac{\partial u_{\pm}}{\partial \nu} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \langle \nu(x), u(x \pm h\nu(x)) \rangle = g(x), \quad x \in \partial G,$$

wobei $\nu(x)$ der ins Äußere von G zeigende Einheitsnormalenvektor im Punkt x an ∂G ist und die Konvergenz gleichmäßig in x erfolgt. Zusätzlich verschwinde beim äußeren Problem u gleichmäßig im Unendlichen.

Bis auf das innere Neumann-Problem besitzen unter den oben gemachten Voraussetzungen alle Probleme höchstens eine Lösung. Zwei Lösungen des inneren Neumann-Problems unterscheiden sich hingegen, im Falle ihrer Existenz, nur um eine Konstante.

Die Außenraumprobleme spielen in dieser Arbeit keine weitere Bedeutung. Man benötigt jedoch Aussagen über ihre eindeutige Lösbarkeit für die Existenzbeweise der klassischen Probleme, sofern man diese mit der Integralgleichungsmethode führen will. Für Gebiete mit C^2 -glattem Rand kann die Existenz von Lösungen mit dieser Methode sehr elegant gezeigt werden.

Eines der wichtigsten Beispiele für eine harmonische Funktion ist die sogenannte *Grundlösung* zur Laplace-Gleichung. Für $x, y \in \mathbb{R}^2$ mit $x \neq y$ ist diese durch

$$\Phi(x, y) := \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x - y|} \quad (2.7)$$

gegeben. Für festes y ist $\Phi(\cdot, y)$ eine harmonische Funktion in $\mathbb{R}^n \setminus \{y\}$. Weitere wichtige Beispiele sind die Normalableitungen der Grundlösung nach x und y . Diese sind durch

$$\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} := -\frac{\nu(x) \cdot \{x - y\}}{2\pi|x - y|^2} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} := \frac{\nu(y) \cdot \{x - y\}}{2\pi|x - y|^2}$$

gegeben.

Im Rahmen der Elektrostatik interpretiert man die Grundlösung als das Potential einer Linienladung mit Quellpunkt y , gemessen im Punkt x . Die Normalableitung nach y erlaubt die Interpretation als eine Dipolladung.

2.3.1 Die Green'schen Sätze

Eine wichtige Grundlagen der Potentialtheorie bilden die sogenannten Green'schen Sätze. Für unser Vorhaben sind die folgenden Varianten ausreichend:

Satz 2.23 (1. Green'scher Satz) Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes, C^2 -glatt berandetes Gebiet und $u \in C^1(\bar{G})$, $v \in C^2(G) \cap C^1(\bar{G})$. Dann ist

$$\int_G u \Delta v + \text{grad } u \cdot \text{grad } v \, dx = \int_{\partial G} u \frac{\partial v}{\partial \nu} \, ds. \quad (2.8)$$

Satz 2.24 (2. Green'scher Satz) Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes, C^2 -glatt berandetes Gebiet und $u, v \in C^2(G) \cap C^1(\bar{G})$. Dann ist

$$\int_G u \Delta v - v \Delta u \, dx = \int_{\partial G} u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \, ds. \quad (2.9)$$

Der nächste Satz ist der Ausgangspunkt, um Randwertprobleme mit Hilfe sogenannter *Green Ansätze* zu lösen. Er gestattet die Möglichkeit, eine harmonische Funktion durch die Kenntnis ihrer Werte *und* Normalableitung auf dem Rand (die sogenannten *Cauchy-Daten*) im Inneren des Gebietes zu berechnen. Wir benötigen dieses im Kapitel 5.

Satz 2.25 (Green'scher Darstellungssatz) *Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes, C^2 -glatt berandetes Gebiet und $u \in C^2(G) \cap C^1(\bar{G})$ eine harmonische Funktion in G . Dann ist*

$$u(x) = \int_{\partial G} \left\{ \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \Phi(x, y) - \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} u(y) \right\} ds(y), \quad x \in G. \quad (2.10)$$

Bemerkung 2.26 *Der Green'scher Darstellungssatz bleibt auch unter schwächeren Voraussetzungen an die Randglätte gültig. Insbesondere gilt er für lipschitzstetig berandete Gebiete.*

Aus dem Green'schen Darstellungssatz kann man schlussfolgern, dass harmonische Funktionen analytisch sind.

Korollar 2.27 *Harmonische Funktionen sind analytisch.*

Dieses Korollar erlaubt es uns zu schlussfolgern, dass eine harmonische Funktion auf ihrem Definitionsgebiet bereits eindeutig durch die Kenntnis ihrer Werte auf einer offenen Teilmenge bestimmt ist. Insbesondere bedeutet dieses, dass eine harmonische Funktion, welche auf einer offenen Teilmenge verschwindet, in ihrem gesamten Definitionsgebiet verschwindet.

Eine weitere wichtige Eigenschaft harmonischer Funktionen ist das sogenannte Maximum-Minimum-Prinzip.

Satz 2.28 *Eine in einem Gebiet harmonische und nicht konstante Funktion besitzt kein Maximum und kein Minimum.*

Aus diesem Prinzip erwächst ein sehr wichtiges Korollar, welches die Eindeutigkeit des inneren Dirichlet-Problems liefert, als auch die stetige Abhängigkeit der Lösung von den Randwerten.

Korollar 2.29 *Sei G ein beschränktes Gebiet und u harmonisch in G und stetig auf \bar{G} , dann nimmt u Maximum und Minimum auf dem Rand an.*

2.3.2 Potentiale und Sprungbeziehungen

Mit Hilfe der Grundleistung können wir für $\varphi \in C(\partial G)$ das *Einfachschichtpotential*

$$U_\varphi(x) := \int_{\partial G} \Phi(x, y) \varphi(y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial G \quad (2.11)$$

und das *Doppelschichtpotential*

$$V_\varphi(x) := \int_{\partial G} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \varphi(y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial G \quad (2.12)$$

definieren. Für $x \notin \partial G$ kann man die Integration und Differentiation vertauschen. Hiermit sieht man, dass das Einfach- und Doppelschichtpotential harmonische Funktionen in G und $\mathbb{R}^n \setminus \bar{G}$ darstellt.

Um die Potentiale zur Lösung der Randwertaufgaben zu verwenden, benötigen wir die Kenntnis ihrer Eigenschaften auf dem Rand ∂G , wo die Kernfunktionen singular sind. Es gelten die vier folgenden Sätze, welche unter der Bezeichnung *Sprungrelationen* bekannt sind:

Satz 2.30 Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes, C^2 -glatt berandetes Gebiet und $\varphi \in C(\partial G)$, so ist das Einfachschichtpotential U_φ mit Dichte φ stetig in ganz \mathbb{R}^2 und besitzt auf dem Rand die Darstellung

$$U_\varphi(x) = \int_{\partial G} \Phi(x, y) \varphi(y) ds(y), \quad x \in \partial G, \quad (2.13)$$

wobei das Integral als uneigentliches Integral existiert.

Satz 2.31 Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes, C^2 -glatt berandetes Gebiet und $\varphi \in C(\partial G)$, so läßt sich Doppelschichtpotential V_φ mit Dichte φ stetig fortsetzen von G nach \bar{G} und von $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{G}$ nach $\mathbb{R}^2 \setminus G$ mit den Grenzwerten

$$[V_\varphi]_\pm(x) = \int_{\partial G} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \varphi(y) ds(y) \pm \frac{1}{2} \varphi(x), \quad x \in \partial G. \quad (2.14)$$

Satz 2.32 Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes, C^2 -glatt berandetes Gebiet und $\varphi \in C(\partial G)$, so besitzt das Einfachschichtpotential U_φ mit Dichte φ die Normalableitung

$$\left[\frac{\partial U_\varphi}{\partial \nu} \right]_\pm(x) = \int_{\partial G} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} \varphi(y) ds(y) \mp \frac{1}{2} \varphi(x), \quad x \in \partial G, \quad (2.15)$$

wobei

$$\left[\frac{\partial U_\varphi}{\partial \nu} \right]_\pm(x) := \lim_{h \rightarrow 0^+} \langle \nu(x), \text{grad } U_\varphi(x \pm h\nu(x)) \rangle$$

im Sinne gleichmäßiger Konvergenz auf ∂G zu verstehen ist.

Satz 2.33 Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes, C^2 -glatt berandetes Gebiet und $\varphi \in C(\partial G)$, so gilt für das Doppelschichtpotential V_φ mit Dichte φ die Stetigkeit der Normalableitung in dem Sinne, dass

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \langle \nu(x), \text{grad } V_\varphi(x + h\nu(x)) - \text{grad } V_\varphi(x - h\nu(x)) \rangle = 0 \quad (2.16)$$

gleichmäßig für alle $x \in \partial G$ gilt.

Um potentialtheoretische Randwertprobleme mit Hilfe von Randintegralgleichungen beschreiben zu können, führen wir zwei Integraloperatoren $K, K^* : C(\partial G) \rightarrow C(\partial G)$ ein durch

$$(K\varphi)(x) := 2 \int_{\partial G} \frac{\partial\Phi(x, y)}{\partial\nu(y)} \varphi(y) ds(y), \quad x \in \partial G \quad (2.17)$$

und

$$(K^*\varphi)(x) := 2 \int_{\partial G} \frac{\partial\Phi(x, y)}{\partial\nu(x)} \varphi(y) ds(y), \quad x \in \partial G. \quad (2.18)$$

Unter den von uns gemachten Voraussetzungen über die Randglätte des Gebietes G kann man zeigen, dass die Kernfunktionen sogar stetig auf $\partial G \times \partial G$ sind.

Lemma 2.34 *Ist $\partial G \in C^2$, so sind die Funktionen*

$$\frac{\partial\Phi(\cdot, \cdot)}{\partial\nu(y)} \quad \text{und} \quad \frac{\partial\Phi(\cdot, \cdot)}{\partial\nu(x)}$$

stetig auf $\partial G \times \partial G$.

Beweis: Man kann sich von der Stetigkeit der Kernfunktionen überzeugen, indem man sich die parametrisierte Form der Operatoren anschaut. Bezeichnet β eine 2π -periodische Parametrisierung der Kurve ∂G , welche gegen den Uhrzeigersinn orientiert ist, so kann man den Operator K^* in der parametrisierten Form als

$$(K^*\varphi)(\beta(t)) = \int_0^{2\pi} k_*(t, \tau) \varphi(\beta(\tau)) d\tau, \quad t \in [0, 2\pi]$$

schreiben. Die Stetigkeit der Kernfunktion für $t \neq \tau$ ist sofort ersichtlich. Es verbleibt somit nur die Untersuchung des Falls $t = \tau$. Durch eine Taylorentwicklung kann man zeigen, dass der Grenzwert $\lim_{t \rightarrow \tau} k_*(t, \tau)$ existiert. Genauer gesagt gilt:

$$k_*(t, \tau) = \begin{cases} -\frac{1}{\pi} \frac{[\beta'(t)]^\perp \cdot \{\beta(t) - \beta(\tau)\} |\beta'(\tau)|}{|\beta(t) - \beta(\tau)|^2 |\beta'(t)|}, & t \neq \tau, \\ \frac{1}{2\pi} \frac{[\beta'(t)]^\perp \cdot \beta''(t)}{|\beta'(t)|^2}, & t = \tau. \end{cases} \quad (2.19)$$

Ein analoges Vorgehen führt auch im Falle des Operators K zum Erfolg. \square

Aus der Stetigkeit der Integralkerne folgt mit Hilfe des Satzes 2.14 die Kompaktheit der Operatoren.

Satz 2.35 Die Integraloperatoren K, K^* sind kompakt.

Darüber hinaus sind die Operatoren adjungiert zueinander, bezüglich des kanonischen Dualsystems

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_{\partial G} \varphi(y) \psi(y) ds(y).$$

Satz 2.36 Die Operatoren K und K^* sind adjungiert zueinander, d.h. $\langle K\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, K^*\psi \rangle$ für alle $\varphi, \psi \in C(\partial G)$.

Für die Behandlung der Dirichlet-Neumann-Probleme im Kapitel 4 benötigen wir das sogenannte *modifizierte Doppelschichtpotential*

$$\tilde{V}_\varphi(x) := \int_{\partial G} \left\{ \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} + 1 \right\} \varphi(y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial G. \quad (2.20)$$

Hierdurch erhalten wir einen Integraloperatoren $\tilde{K} : C(\partial G) \rightarrow C(\partial G)$ durch

$$(\tilde{K}\varphi)(x) := 2 \int_{\partial G} \left\{ \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} + 1 \right\} \varphi(y) ds(y), \quad x \in \partial G. \quad (2.21)$$

Die Kernfunktion ist nach obigen Überlegungen stetig auf $\partial G \times \partial G$, so dass der folgende Satz gilt:

Satz 2.37 Der Integraloperator \tilde{K} ist kompakt.

Aus der Darstellung

$$\tilde{K}\psi = K\psi + 2 \int_{\partial G} \psi ds \quad (2.22)$$

ist ersichtlich, dass die Sprungrelationen des Operators K sich entsprechend übertragen. Desweiteren gilt der

Satz 2.38 Der Operator $I + \tilde{K} : C(\partial G) \rightarrow C(\partial G)$ ist injektiv.

Dieser Satz beinhaltet die Existenz einer Lösung für das äußere Dirichlet-Problem, falls die Lösung in Form eines modifizierten Doppelschichtpotentials gesucht wird. Für uns jedoch ist das hieraus gewonnene Korollar wichtiger.

Korollar 2.39 Der Operator $(I + \tilde{K})^* : C(\partial G) \rightarrow C(\partial G)$ ist injektiv.

Beweis: Die Aussage folgt sofort aus dem Fredholm'schen Alternativsatz 2.19. \square

Ebefalls nützlich für spätere Argumentationen ist der

Satz 2.40 Für das Doppelschichtpotential mit konstanter Dichte gilt

$$2 \int_{\partial G} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} ds(y) = \begin{cases} -2, & x \in G, \\ -1, & x \in \partial G, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{G}. \end{cases}$$

Gelegentlich tritt das Problem auf, dass Funktionen auf einem Gebiet D nicht genügend Regularität bis hin zum Rand ∂D besitzen, um die Green'schen Sätze anzuwenden. Um die Anwendung dennoch zu rechtfertigen, zieht man sich auf „geeignete“ Weise ins Innere des Gebietes zurück, wo die Regularität höher ist und die Umformung daher erlaubt ist. Hierfür hat sich das folgende Konzept eingebürgert: Zu einem beschränktem Gebiet D mit C^k -glattem Rand und $k \geq 1$ ist die *Parallelkurve* ∂D_h durch

$$\partial D_h = \{z = x - h\nu(x) : x \in \partial D\} \quad (2.23)$$

definiert, wobei $\nu(x)$ der ins Äußere von D weisende Normaleneinheitsvektor im Punkt $x \in \partial D$ ist. An Hand der Darstellung des Normalenvektors erkennt man, dass die Parallelkurve im allgemeinen eine Regularitätsstufe verliert. Außerdem gilt für das Bogenelement $ds_h(z)$ auf der Parallelkurve und der Kurve der Zusammenhang $ds_h(z) = (1 - h\kappa)ds(x)$, wobei κ die Krümmung der Kurve ∂D bezeichnet. Wird ∂D durch die Bogenlänge parametrisiert, so gilt $\kappa = \nu \cdot x''$.

Kapitel 3

Einiges zu Fourierreihenansätzen

Bevor wir mit der Untersuchung der uns eigentlich interessierenden Randwertprobleme beginnen, werfen wir einen kurzen Blick auf die Lösungen des Dirichlet-Problems mittels Fourierreihen im Kreis und Quadrat. Wir stellen hier kurz einige ihrer wichtigsten Eigenschaften zusammen. Eine ausführliche Darstellung dieser Resultate findet man in [10] oder [3]. Die Beweise bringen wir in dem Umfang, die die Argumentationen im weiteren Verlauf der Analysis rechtfertigt. Anschließend zeigen wir die Verallgemeinerung für L^2 -Randwerte und beweisen zwei Regularitätssätze, welche die Existenz von Normalableitungen im klassischen und L^2 -Sinne sicherstellen.

3.1 Das Dirichlet-Problem in Ω_\circ

Für Gebiete mit „guten“ Symmetrieeigenschaften gelingt es, Lösungen aus sogenannten Separationsansätzen zu gewinnen. In diesem Fall nutzen wir die Kreis-symmetrie aus und versuchen als Ansatz ein Produkt einer nur vom Radius bzw. nur vom Winkel abhängenden Funktion. Benutzen wir die Darstellung des Laplace-Operators in Polarkoordinaten, d.h.

$$\Delta_{r,\theta} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \quad (3.1)$$

so erhalten wir ein entkoppeltes System zweier gewöhnlicher Differentialgleichungen 2. Ordnung. Durch Superposition dieser Lösungen versucht man, die Randwerte zu erfüllen. Für die so konstruierte Lösung müssen wir überprüfen, dass sie allen Voraussetzungen gerecht wird. Dass dem so ist, beweist der folgende Satz.

Satz 3.1 *Die Funktion*

$$v_{\circ,f}(x) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta} r^{|n|}, \quad x = (r \cos \theta, r \sin \theta) \in \Omega_\circ \quad (3.2)$$

ist eine in Ω_\circ harmonische Funktion, welche stetig bis auf den Rand fortsetzbar ist und dort mit den Randwerten $f \in C(\Gamma_\circ)$ übereinstimmt. Hierbei bezeichnen c_n die Fourierkoeffizienten von f . Des Weiteren ist die Reihe in Ω_\circ absolut und lokal gleichmäßig konvergent.

Beweis: Wir zeigen zuerst die absolute und lokal gleichmäßige Konvergenz der Reihe in Ω_\circ .

Für eine stetige Funktion ist die Folge der Fourierkoeffizienten beschränkt. Wir können daher abschätzen, dass

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n e^{in\theta} r^{|n|}| \leq C \sum_{n=1}^{\infty} r_0^n < \infty$$

für alle $r \leq r_0 < 1$. Die Reihe ist daher in Ω_\circ nach dem Majorantenkriterium absolut und lokal gleichmäßig konvergent. Für die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung erhält man so auf analoge Weise die Majoranten $\sum_{n=1}^{\infty} C n^2 r_0^n < \infty$. Alle partiellen Ableitungen konvergieren demnach ebenfalls absolut und lokal gleichmäßig im Inneren von Ω_\circ , d.h., die partiellen Ableitungen sind stetig und hieraus folgt die Differenzierbarkeit von $v_{\circ,f}$. Einfaches Nachrechnen mit (3.1) zeigt die Harmonizität.

Kommen wir zur stetigen Fortsetzbarkeit bis auf den Rand von Ω_\circ . Setzen wir ganz naiv $r = 1$, so erhalten wir die formale Fourierreihe der Funktion f . Für lediglich stetige Funktionen können wir über deren Konvergenz aber keine Aussage treffen. Ein Ausweg aus diesem Dilemma besteht darin, die Voraussetzungen über die Regularität der Randwerte zu erhöhen. Für stetig differenzierbare Funktionen erhält man so die gleichmäßige Konvergenz der Fourierreihe, welche die Randwerte beschreibt. Eine andere Möglichkeit besteht darin, die Reihe in die äquivalente Darstellung des Poisson-Integrals umzuschreiben. Mit etwas Geschick bei den Abschätzungen, kann so die Stetigkeit bis auf den Rand gezeigt werden, siehe [3]. Ist dieses für die Situation am Kreis noch verhältnismäßig einfach durchführbar, so bekommt man bei gleicher Vorgehensweise für den Fall des Quadrates einige Probleme. Wir modifizieren daher die erste Idee derart, dass die gleichmäßige Konvergenz der Fourierreihe der Randwerte aus dem Satz von Fejér folgt. Diese Idee läßt sich auch auf die Situation des Quadrates übertragen.

Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die Folge harmonischer Funktionen $\{v_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ durch

$$v_n(r, \theta) := \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^n \{a_m \cos m\theta + b_m \sin m\theta\} r^m, \quad r \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi],$$

sowie die Folge stetiger Funktionen $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ durch

$$f_n(\theta) := \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^n \{a_m \cos m\theta + b_m \sin m\theta\}, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Die Funktionen v_n sind stetig auf $\bar{\Omega}_\circ$ und nehmen die Randwerte f_n auf Γ_\circ an. Weiterhin definieren wir

$$\tilde{v}_n(r, \theta) = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n v_m(r, \theta), \quad r \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi]$$

und

$$\tilde{f}_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{m=1}^n f_m(\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Auch für diese gilt offensichtlich, dass \tilde{v}_n in Ω_\circ harmonisch und stetig auf $\bar{\Omega}_\circ$ ist, mit den Randwerten \tilde{f}_n . Aus dem Permanenzsatz 2.5 folgt, dass

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{v}_n(r, \theta) = v_{\circ, f}(r, \theta)$$

für alle $r \in [0, 1), \theta \in [0, 2\pi]$. Aus dem Satz von Fejér erhalten wir die gleichmäßige Konvergenz von $\tilde{v}_n(1, \cdot)$ gegen $\tilde{f}_n(\cdot)$, d.h.: für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein von θ unabhängiges $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, so dass

$$|\tilde{v}_n(1, \theta) - \tilde{v}_m(1, \theta)| < \varepsilon, \quad \forall n, m \geq N_\varepsilon.$$

Mit Hilfe des Maximum-Prinzips erhalten wir

$$|\tilde{v}_n(r, \theta) - \tilde{v}_m(r, \theta)| < \varepsilon, \quad \forall n, m \geq N_\varepsilon$$

für beliebige $r \in [0, 1], \theta \in [0, 2\pi]$. Wir haben also eine Folge harmonischer Funktionen konstruiert, welche auf $\bar{\Omega}_\square$ gleichmäßig konvergent ist, deren Grenzfunktion im Inneren mit $v_{\circ, f}$ und auf dem Rand mit f übereinstimmt. \square

Schauen wir uns eine Verallgemeinerung des Satzes 3.1 für den Fall von L^2 -Randwerten an.

Satz 3.2 *Die Funktion $v_{\circ, f}$ ist eine in Ω_\circ harmonische Funktion, welche die Randwerte $f \in L^2(\Gamma_\circ)$ im L^2 -Sinne auf Γ_\circ annimmt.*

Beweis: Zum Nachweis der Harmonizität der Funktion $v_{\circ, f}$ in Ω_\circ haben wir nur die Beschränktheit der Fourierkoeffizienten benutzt. Da auch für $f \in L^2(\Gamma_\circ)$ die Folge der Fourierkoeffizienten beschränkt ist, greift der Beweis von Satz 3.1. Wir müssen uns also nur noch Gedanken um die Randwerte machen. Durch Einsetzen der Parametrisierung α_\circ rechnet man nach, dass

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_\circ} |v_{\circ, f}(x - h\nu(x)) - f(x)|^2 ds(x) \\ &= \int_0^{2\pi} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta} (1-h)^{|n|} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta} \right|^2 d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\theta} ((1-h)^{|n|} - 1) \right|^2 d\theta \\
&= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \{(1-h)^{|n|} - 1\}^2 \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0^+.
\end{aligned}$$

□

Wir benötigen für spätere Argumentationen die Existenz einer Normalableitung auf dem Rand Γ_\circ . Dazu müssen wir zunächst definieren, was wir unter der Existenz einer Normalableitung im L^2 -Sinne verstehen. Die naheliegende Definition ist Folgende: Man betrachtet die Normalableitung der Funktion auf der Parallelkurve Γ_h , bildet die Differenz zu der gegebenen Funktion g und fordert die Konvergenz in der L^2 -Norm für $h \rightarrow 0$. In Formeln ausgedrückt bedeutet dieses, dass

$$\int_{\Gamma} \left| \frac{\partial u_h(x)}{\partial \nu} - g(x) \right|^2 ds(x) \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0,$$

wobei $\frac{\partial u_h}{\partial \nu} := \langle \nu^h(x - h\nu(x)), \text{grad } u(x - h\nu(x)) \rangle$, $\nu^h(y)$ den Normalenvektor an die Parallelkurve im Punkt $y \in \Gamma_h$ und $\nu(x)$ den Normalenvektor an die Kurve Γ im Punkt $x \in \Gamma$ bezeichne. Im Falle des Kreises Ω_\circ oder des Quadrates Ω_\square , stimmen die Normalenvektoren ν^h und ν überein, da sich die Krümmung beim Übergang von der Kurve zur Parallelkurve nicht ändert. Für das Quadrat ersetzen wir die Parallelkurve wie gewohnt durch das konzentrische Quadrat mit Abstand h .

Der nächste Satz zeigt die Existenz einer Normalableitung im L^2 -Sinne, falls wir die Regularität der Randwerte auf H^1 erhöhen.

Satz 3.3 *Ist $f \in H^1(\Gamma_\circ)$, so besitzt $v_{\circ,f}$ die Normalableitung g_\circ auf Γ_\circ im L^2 -Sinne, welche durch*

$$g_\circ(x) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n| c_n e^{in\theta}, \quad x = (\cos \theta, \sin \theta) \in \Gamma_\circ. \quad (3.3)$$

gegeben ist.

Beweis: Für $f \in H^1(\Gamma_\circ)$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} (1+n^2)|c_n|^2$. Daher können wir wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned}
&\int_{\Gamma_\circ} \left| \frac{\partial}{\partial \nu(x)} v_{\circ,f}(x - h\nu(x)) - g_\circ(x) \right|^2 ds(x) \\
&= \int_0^{2\pi} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n| c_n e^{in\theta} (1-h)^{|n|-1} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n| c_n e^{in\theta} \right|^2 d\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{2\pi} \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|c_n e^{in\theta} \{(1-h)^{|n|-1} - 1\} \right|^2 d\theta \\
&= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 |c_n|^2 \{(1-h)^{|n|-1} - 1\}^2 \rightarrow 0, h \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

□

Wir halten noch das folgende klassische Regularitätsresultat fest, welches wir für den Eindeutigkeitsbeweis des inversen Problems benötigen.

Satz 3.4 *Ist $f \in C^2(\Gamma_{\circ})$, so ist $v_{\circ,f} \in C^2(\Omega_{\circ}) \cap C^1(\bar{\Omega}_{\circ})$.*

Beweis: Es verbleibt zu zeigen, dass die ersten partiellen Ableitungen der Funktion stetig bis auf den Rand von Ω_{\circ} fortsetzbar sind. Es gilt

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial v_{\circ,f}}{\partial \theta}(r, \theta) \right| &= \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} inc_n e^{in\theta} r^{|n|} \right| \\
&\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |nc_n| r^{|n|} \\
&\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |nc_n| < \infty, \quad 0 < r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi,
\end{aligned}$$

d.h., die Reihe konvergiert absolut und gleichmäßig in $\bar{\Omega}_{\circ}$. Die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |nc_n|$ folgt aus dem Satz 2.6. Analog erhält man für die partielle Ableitung nach r

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial v_{\circ,f}}{\partial r}(r, \theta) \right| &= \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n|c_n r^{|n|-1} \right| \\
&\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |nc_n| r^{|n|-1} \\
&\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |nc_n| < \infty, \quad 0 < r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi.
\end{aligned}$$

Dieses zeigt die Behauptung. □

3.2 Das Dirichlet-Problem in Ω_{\square}

Wenden wir uns der Situation im Quadrat zu. Für die Randwerte $f \in C(\Gamma_{\square})$ nehmen wir zusätzlich an, dass f in allen vier Ecken verschwindet. Dieses ist

keine große Einschränkung, da wir zu einer beliebigen, stetigen Funktion f immer eine in Ω_\square harmonische Funktion \tilde{w} finden können, welche mit den vorgegebenen Randwerten in den Ecken übereinstimmt. Diese Aufgabe erfüllt z.B. die Funktion

$$\tilde{w}(x) := a + bx_1 + cx_2 + dx_1x_2, \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

mit Koeffizienten

$$\begin{aligned} a &:= \frac{1}{4}(f(\xi_1) + f(\xi_2) + f(\xi_3) + f(\xi_4)), \\ b &:= \frac{1}{2}(-f(\xi_1) + f(\xi_2) + f(\xi_3) - f(\xi_4)), \\ c &:= \frac{1}{2}(-f(\xi_1) - f(\xi_2) + f(\xi_3) + f(\xi_4)), \\ d &:= f(\xi_1) - f(\xi_2) + f(\xi_3) - f(\xi_4). \end{aligned}$$

Definiert man $g := f - \tilde{w}|_{\Gamma_\square}$ und bezeichnet $v_{\square,g}$, die zu diesem g gehörige Lösung des Dirichlet-Problems in Ω_\square , so erhält man die allgemeine Lösung zu den Randwerten f als $v_{\square,g} + \tilde{w}$. Wir vereinbaren daher die folgende Notation: Mit $C_0(\Gamma_\square)$ bezeichnen wir die auf Γ_\square stetigen Funktionen, welche in den Ecken verschwinden. Des Weiteren sei

$$V_j(\Gamma_\square) := \{f \in C(\Gamma_\square) : f = 0 \text{ auf } \Gamma_\square \setminus \bar{\Gamma}_j\},$$

für $j = 1, 2, 3, 4$. Für eine Funktion $f \in C_0(\Gamma_\square)$ erhält man eine eindeutige Zerlegung der Art $f = f_1 + \dots + f_4$ mit $f_j \in V_j(\Gamma_\square)$, indem man

$$f_j(x) := \begin{cases} f|_{\Gamma_j}, & x \in \Gamma_j, \\ 0, & x \in \Gamma \setminus \bar{\Gamma}_j, \end{cases}$$

für $j = 1, 2, 3, 4$ setzt.

Das uns interessierende Dirichlet-Problem in Ω_\square besteht im Wesentlichen aus vier Problemen der folgenden Bauart:

Definition 3.5 (Das Problem (P_j)) *Gesucht wird eine Funktion $w \in C^2(\Omega_\square)$, welche in Ω_\square harmonisch ist und stetig auf den Rand fortgesetzt werden kann, so dass $w = f_j$ auf Γ_\square gilt. f_j sei dabei aus $V_j(\Gamma_\square)$ gegeben.*

D.h., dass wir im Wesentlichen nur ein Randwertproblem mit „drei verschwindenden Seiten“ beherrschen müssen. Haben wir eine Darstellung für dieses Problem, so erhalten wir alle weiteren Lösungen durch Drehung um jeweils 90 Grad. Da der Laplace-Operator invariant unter orthogonalen Transformationen ist, bleibt die Harmonizität der Funktionen erhalten. Damit die im weiteren Verlauf der Arbeit auftretenden Formeln handhabbar bleiben, führen wir folgende Funktionen ein. Für $\zeta_1, \zeta_2 \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ seien

$$ss_n(\zeta_1, \zeta_2) := \sinh(n\pi\zeta_1) \sin(n\pi\zeta_2) / \sinh(n\pi),$$

$$\begin{aligned} \text{cs}_n(\zeta_1, \zeta_2) &:= \cosh(n\pi\zeta_1) \sin(n\pi\zeta_2) / \sinh(n\pi), \\ \text{sc}_n(\zeta_1, \zeta_2) &:= \sinh(n\pi\zeta_1) \cos(n\pi\zeta_2) / \sinh(n\pi), \\ \text{cc}_n(\zeta_1, \zeta_2) &:= \cosh(n\pi\zeta_1) \cos(n\pi\zeta_2) / \sinh(n\pi). \end{aligned}$$

Durch ein analoges Vorgehen wie im Falle des Kreises, erhalten wir die Lösungen v_{\square, f_j} zu (P_j) durch einen Separationsansatz. Für die Beweise der nächsten Sätze definieren wir die Halbebene oberhalb der Geraden $x_2 = a$ für $a > -\frac{1}{2}$ durch

$$H^+ := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \geq a\}.$$

Satz 3.6 Die Funktionen v_{\square, f_j} lösen das Problem (P_j) für $j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Dabei gilt:

$$\begin{aligned} v_{\square, f_1}(x) &:= \sum_{n=1}^{\infty} a_{1,n} \text{ss}_n\left(\frac{1}{2} - x_2, \frac{1}{2} + x_1\right), \\ v_{\square, f_2}(x) &:= \sum_{n=1}^{\infty} a_{2,n} \text{ss}_n\left(\frac{1}{2} + x_1, \frac{1}{2} + x_2\right), \\ v_{\square, f_3}(x) &:= \sum_{n=1}^{\infty} a_{3,n} \text{ss}_n\left(\frac{1}{2} + x_2, \frac{1}{2} + x_1\right), \\ v_{\square, f_4}(x) &:= \sum_{n=1}^{\infty} a_{4,n} \text{ss}_n\left(\frac{1}{2} - x_1, \frac{1}{2} + x_2\right), \end{aligned}$$

mit $x = (x_1, x_2) \in \Omega_\square$. $a_{j,n}$ bezeichne die Fourier-Sinuskoeffizienten von $f_j \in V_j(\Gamma_\square)$.

Beweis: Exemplarisch beweisen wir den Fall $j = 1$; dabei gehen wir analog zum Beweis des Satzes 3.1 vor.

Wir zeigen zuerst, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{1,n} \text{ss}_n\left(\frac{1}{2} - x_2, \frac{1}{2} + x_1\right)$ in Ω_\square lokal gleichmäßig konvergent ist. Hierfür schätzen wir wie folgt ab: Für $t \geq t_0 > -\frac{1}{2}$ gilt

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sinh n\pi\left(\frac{1}{2} - t\right)}{\sinh n\pi} \right| &= \left| \frac{e^{n\pi\left(\frac{1}{2}-t\right)} - e^{-n\pi\left(\frac{1}{2}-t\right)}}{e^{n\pi} - e^{-n\pi}} \right| \\ &= \left| \frac{e^{-n\pi\left(\frac{1}{2}+t\right)} - e^{-n\pi\left(\frac{3}{2}-t\right)}}{1 - e^{-2n\pi}} \right| \\ &= \left| e^{-n\pi\left(\frac{1}{2}+t\right)} \frac{1 - e^{-n\pi(1-2t)}}{1 - e^{-2n\pi}} \right| \\ &\leq C(t_0) e^{-n\pi\left(\frac{1}{2}+t_0\right)}. \end{aligned}$$

Da die Folge der Fourierkoeffizienten einer stetigen Funktion beschränkt ist, erhalten wir

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| a_{1,n} \frac{\sinh n\pi\left(\frac{1}{2} - x_2\right)}{\sinh n\pi} \sin n\pi\left(\frac{1}{2} + x_1\right) \right| \leq C \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\pi\left(\frac{1}{2}+\tilde{x}_2\right)}$$

für alle $x_1 \in \mathbb{R}$ und $x_2 \geq \tilde{x}_2 > -\frac{1}{2}$. Damit haben wir eine Majorante für die Reihe gefunden und erhalten hiermit die lokal gleichmäßige Konvergenz in H^+ . Insbesondere ist v_{\square, f_1} eine stetige Funktion im Inneren von Ω , stetig fortsetzbar auf die Ränder Γ_2 bis Γ_4 und nimmt dort die Randwerte null an. Die partiellen ersten und zweiten Ableitungen der Reihe werden durch einen Ausdruck der Form $C \sum n^2 e^{-n\pi(\frac{1}{2}+x_2)}$ majorisiert und konvergieren daher ebenfalls lokal gleichmäßig in Ω . Die partiellen Ableitungen sind somit stetig und können durch gliedweise Differentiation der Reihe erhalten werden. Ein direktes Nachrechnen zeigt die Harmonizität.

Wir zeigen jetzt, dass die Funktion eine stetige Fortsetzung \tilde{v}_{f_1} auf $\bar{\Omega}_{\square}$ besitzt und das $\tilde{v}_{f_1}(x) = f_1(x)$ für $x \in \Gamma_1$ gilt. Aus der lokal gleichmäßigen Konvergenz der Reihe in Ω folgt insbesondere die punktweise Konvergenz der Reihe. Nach Satz 2.5 konvergiert daher auch die Reihe der arithmetischen Mittel und besitzt den gleichen Grenzwert. Wir definieren

$$s_n(x_1, x_2) := \sum_{m=1}^n a_{1,m} \operatorname{ss}_m\left(\frac{1}{2} - x_2, \frac{1}{2} + x_1\right), \quad x \in \bar{\Omega}_{\square}$$

und

$$\tilde{s}_n(x_1, x_2) := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n s_k(x_1, x_2), \quad x \in \bar{\Omega}_{\square}.$$

Nach Konstruktion ist \tilde{s}_n in Ω_{\square} harmonisch und stetig auf $\bar{\Omega}_{\square}$. Des Weiteren ist $\tilde{s}_n(x) = 0$ für $x \in \Gamma_{\square} \setminus \Gamma_1$. Aus dem Satz von Fejér erhalten wir die gleichmäßige Konvergenz von $\tilde{s}_n(\cdot, -\frac{1}{2})$ gegen $f_1(\cdot, -\frac{1}{2})$. Das bedeutet, dass wir für alle $\varepsilon > 0$ ein $N_{\varepsilon} \in \mathbb{N}$ finden können, so dass

$$|\tilde{s}_n(x_1, -\frac{1}{2}) - \tilde{s}_m(x_1, -\frac{1}{2})| < \varepsilon, \quad \text{für alle } n, m \geq N_{\varepsilon}.$$

Aus dem Maximum-Prinzip folgt:

$$|\tilde{s}_n(x_1, x_2) - \tilde{s}_m(x_1, x_2)| < \varepsilon, \quad \text{für alle } n, m \geq N_{\varepsilon}$$

und beliebiges $x \in \bar{\Omega}_{\square}$. Definieren wir $\tilde{v}_{f_1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{s}_n$, so erfüllt diese Funktion das Behauptete. \square

Durch Addition der Einzellösungen erhält man die Lösung des allgemeinen Falles. Wir fassen diese Überlegungen zusammen im

Satz 3.7 *Die Funktion*

$$v_{\square, f}(x) := \sum_{i=1}^4 v_{\square, f_i}(x), \quad x = (x_1, x_2) \in \Omega_{\square}, \quad (3.4)$$

ist eine in Ω_{\square} harmonische Funktion, welche stetig bis auf den Rand fortsetzbar ist und dort mit den Randwerten $f \in C_0(\Gamma_{\square})$ übereinstimmt. Die auftretenden Reihen konvergieren absolut und gleichmäßig in Ω_{\square} .

Wir schauen uns jetzt den semiklassischen Fall an, in welchem die Randwerte nur noch im L^2 -Sinne existieren. Für eine beliebige Funktion $f \in L^2(\Gamma_\square)$ können wir in Analogie zu den stetigen Randwerten eine eindeutige Zerlegung der Form $f = f_1 + \dots + f_4$ finden, wobei

$$f_j \in W_j(\Gamma_\square) := \overline{V_j(\Gamma_\square)}^{\|\cdot\|_{L^2(\Gamma)}},$$

für $j = 1, 2, 3, 4$. Die Funktionen f_j sind auf den Randstücken Γ_j im Wesentlichen Funktionen einer Veränderlichen. Da die Funktionen $\{\sin n\pi(1/2+\cdot) : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ in $L^2[-1/2, 1/2]$ ein vollständiges Orthogonalsystem bilden, ist für jedes $f_j \in W_j(\Gamma_\square)$ die Funktion w_{f_j} durch Angabe der Koeffizienten $a_{j,n}$ eindeutig bestimmt. In Analogie zu Satz 3.2 gilt:

Satz 3.8 *Die Funktion $v_{\square, f}$ ist eine in Ω_\square harmonische Funktion, welche die Randwerte $f \in L^2(\Gamma_\square)$ im L^2 -Sinne auf Γ_\square annimmt.*

Beweis: Es genügt, den Fall für Randwerte $f_j \in W_j(\Gamma_\square)$ zu betrachten. O.B.d.A. sei $j = 1$. Durch Einsetzen der Parametrisierung und Aufspaltung in Teilintegrale über die einzelnen Randstücke berechnet man

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma_{\square, h}} |v_{\square, f_1}(x) - f_1(x + h\nu(x))|^2 ds(x) \\ &= \int_{\Gamma_{1, h}} |v_{\square, f_1}(x) - f_1(x + h\nu(x))|^2 ds(x) + \sum_{i=2}^4 \int_{\Gamma_{i, h}} |v_{\square, f_1}(x)|^2 ds(x) \\ &=: I_1 + I. \end{aligned}$$

Setzen wir die Parametrisierung des Teilstückes $\Gamma_{1, h}$ ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_h^{1-h} \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_{1,n} \operatorname{ss}_n(1-h, t) - \sum_{n=1}^{\infty} a_{1,n} \operatorname{ss}_n(1, t) \right|^2 dt \\ &\leq \int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_{1,n} \left\{ \frac{\sinh n\pi(1-h)}{\sinh n\pi} - 1 \right\} \sin n\pi t \right|^2 dt \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_{1,n}^2 \left\{ \frac{\sinh n\pi(1-h)}{\sinh n\pi} - 1 \right\}^2 \rightarrow 0, \quad h \rightarrow 0^+. \end{aligned}$$

Für den verbleibenden Term I kann man wie folgt argumentieren: Schaut man sich den Beweis des Satzes 3.6 an, so erkennt man, dass sogar für L^2 -Randwerte die Reihe absolut und lokal gleichmäßig in H^+ konvergiert. Das bedeutet insbesondere, dass die Randwerte null auf den Teilstücken Γ_2 bis Γ_4 im klassischen Sinne angenommen werden und daher auch im L^2 -Sinne. \square

Bevor wir für spätere Argumentationen den nächsten Satz zeigen, definieren wir noch einige im weiteren Verlauf der Analysis wiederholt auftauchende Terme zur besseren Handhabung der Notation. Diese sind die Gradienten der Funktionen ss_n, sc_n, cs_n und cc_n , welche wir mit $d_{1,n}, \dots, d_{4,n}$ bezeichnen. Man berechnet leicht, dass

$$\begin{aligned} d_{1,n}(x) &:= \text{grad } ss_n\left(\frac{1}{2} - x_2, \frac{1}{2} + x_1\right) = n\pi \begin{pmatrix} sc_n\left(\frac{1}{2} - x_2, \frac{1}{2} + x_1\right) \\ -cs_n\left(\frac{1}{2} - x_2, \frac{1}{2} + x_1\right) \end{pmatrix}, \\ d_{2,n}(x) &:= \text{grad } ss_n\left(\frac{1}{2} + x_1, \frac{1}{2} + x_2\right) = n\pi \begin{pmatrix} cs_n\left(\frac{1}{2} + x_1, \frac{1}{2} + x_2\right) \\ sc_n\left(\frac{1}{2} + x_1, \frac{1}{2} + x_2\right) \end{pmatrix}, \\ d_{3,n}(x) &:= \text{grad } ss_n\left(\frac{1}{2} + x_2, \frac{1}{2} + x_1\right) = n\pi \begin{pmatrix} sc_n\left(\frac{1}{2} + x_2, \frac{1}{2} + x_1\right) \\ cs_n\left(\frac{1}{2} + x_2, \frac{1}{2} + x_1\right) \end{pmatrix}, \\ d_{4,n}(x) &:= \text{grad } ss_n\left(\frac{1}{2} - x_1, \frac{1}{2} + x_2\right) = n\pi \begin{pmatrix} -cs_n\left(\frac{1}{2} - x_1, \frac{1}{2} + x_2\right) \\ sc_n\left(\frac{1}{2} - x_1, \frac{1}{2} + x_2\right) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

So gewappnet, können wir die Existenz einer Normalableitung beweisen. Auch in diesem Falle müssen wir wieder eine stärkere Glattheit der Randwerte voraussetzen.

Satz 3.9 *Ist $f \in H^1(\Gamma_\square)$, so besitzt die Funktion $v_{\square,f}$ eine Normalableitung g_\square auf Γ_\square im L^2 -Sinne. Diese ist gegeben durch*

$$g_\square(x) := \sum_{i=1}^4 \sum_{n=1}^{\infty} \langle \nu(x), d_{i,n}(x) \rangle a_{i,n}, \quad x \in \Gamma. \quad (3.5)$$

Beweis: O.B.d.A. führen wir den Beweis für Randwerte $f_1 \in W_1 \cap H^1(\Gamma_\square)$. Um die Existenz der Normalableitung im L^2 -Sinne zu beweisen, genügt es zu zeigen, dass

$$I := \int_h^{1-h} \left| \sum_{n=1}^{\infty} n\pi a_{1,n} [cs_n(1-h, t) - cs_n(1, t)] \right|^2 dt \rightarrow 0, h \rightarrow 0^+.$$

Aus den Abschätzungen im Beweis 3.6 ist ersichtlich, dass die ersten partiellen Ableitungen in H^+ lokal gleichmäßig konvergent sind. Daher existieren die Normalableitung auf den Randstücken Γ_2 bis Γ_4 im klassischen und insbesondere auch im L^2 -Sinne. I können wir wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} I &\leq \int_0^1 \left| \sum_{n=1}^{\infty} n\pi a_{1,n} [cs_n(1-h, t) - cs_n(1, t)] \right|^2 dt \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \pi^2 a_{1,n}^2 \left\{ \frac{\cosh n\pi(1-h) - \cosh n\pi}{\sinh n\pi} \right\}^2 \rightarrow 0, h \rightarrow 0. \end{aligned}$$

□

Wie benötigen auch hier wieder ein Regularitätsresultat für den klassischen Fall. Es gilt der

Satz 3.10 *Ist $f \in C^2(\Gamma_\square)$, so ist $v_{\square,f} \in C^2(\Omega_\square) \cap C^1(\bar{\Omega}_\square)$.*

Beweis: O.B.d.A führen wir den Beweis für Randwerte $f \in C^2(\Gamma_\square) \cap V_1(\Gamma_\square)$. Dem Beweis des Satzes 3.4 folgend beweisen wir, dass die partiellen ersten Ableitungen stetig bis auf den Rand fortsetzbar sind.

Man berechnet

$$\frac{\partial v_{\square,f_1}}{\partial x_1}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{1,n} n\pi \frac{\sinh n\pi(\frac{1}{2} - x_2)}{\sinh n\pi} \cos(\frac{1}{2} + x_1).$$

Schätzt man den Cosinus-Term betragsmäßig mit eins ab und nutzt die Abschätzung aus dem Beweis des Satzes 3.6, so erhalten wir die lokal gleichmäßige und absolute Konvergenz in H^+ . Auf Grund der von uns gemachten Regularitätsvoraussetzungen über die Randwerte f_1 folgt, dass die Reihen

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{1,n} \sin(\frac{1}{2} + x_1), \quad x \in \Gamma_1$$

und

$$f_1'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi a_{1,n} \cos(\frac{1}{2} + x_1), \quad x \in \Gamma_1$$

gleichmäßig konvergent sind. Also konvergieren die Randwerte auf ganz Γ_\square gleichmäßig, so dass aus dem Maximum-Prinzip die gleichmäßige Konvergenz der partiellen Ableitung in $\bar{\Omega}_\square$ folgt. Analog hierzu behandelt man die verbleibende partielle Ableitung. □

Bemerkung 3.11 *Die Forderung, die Randwerte aus $C_0(\Gamma_\square)$ zu wählen, kann fallengelassen werden. Ein Beweis hierzu ist in [10] zu finden. Des Weiteren ist der Autor dieser Arbeit davon überzeugt, die Regularität der Randwerte, zumindest für die Existenz einer einseitigen Normalableitung auf Γ , durch den Einsatz der Beweistechniken aus den Sätzen 3.1 und 3.6, auf C^1 reduzieren zu können.*

Kapitel 4

Vier Randwertprobleme aus der Elektrostatik

Das Ziel dieses Kapitels ist es, die Wohlgestelltheit der in Kapitel 1 formulierten Randwertprobleme zu zeigen.

Für das Randwertproblem (DN- G_\circ) kann man die Existenz einer Lösung, durch einen Ansatz der Form

$$u = DSP_{\Gamma,\varphi} + ESP_{\Sigma,\psi},$$

zeigen. Im Falle des Randwertproblems (DD- G_\circ), durch einen Ansatz der Form

$$u = DSP_{\Gamma,\varphi} + (DSP + ESP)_{\Sigma,\psi}.$$

In den dabei zur Erfüllung der Randbedingungen aufgestellten Integralgleichungen zweiter Art stehen kompakte Operatoren. Mit Hilfe der Riesz-Theorie folgert man die eindeutige Lösbarkeit des Gleichungssystems. Auf analoge Art und Weise läßt sich mit diesem Ansatz auch der Fall abhandeln, in dem die Rolle des Kreises durch ein beliebiges C^2 -glattes Gebiet ersetzt wird. Für numerische Zwecke ist die Berechnung einer Lösung mit diesem Ansatz ebenfalls geschickt, da das Integralgleichungssystem mittels eines Nyströmverfahrens effizient gelöst werden kann. Dabei ist vor allem die einfache Implementierung des Verfahrens von Vorteil.

Diese Situation ändert sich jedoch drastisch, wenn die Forderung nach der C^2 -Glattheit des äußeren Randes verletzt wird. In diesem Fall sind die in dem Integralgleichungssystem auftretenden Operatoren nicht mehr kompakt. Die hohen Regularitätsforderungen an die auftretenden Ränder sind ein prinzipielles Problem und einer der Nachteile der Integralgleichungsmethode. Sie können jedoch unter erhöhtem theoretischen und numerischen Aufwand behoben werden. Die dabei verwendete Vorgehensweise ist unter dem Stichwort *Abspaltung der Singularität* bekannt, siehe hierzu z.B. [5]. In dieser Arbeit werden wir zeigen, dass, zumindest für den Fall rechteckiger Gebiete, eine Alternative existiert, welche keinen nennenswerten Mehraufwand in Theorie und Numerik benötigt. Der Preis,

der allerdings gezahlt werden muss, ist die recht unübersichtliche Notation, welche von den Fourierreihen herührt.

Als Grundgedanke für einen alternativen Zugang bemerken wir, dass der Anteil des Doppelschichtpotentials im oben beschriebenen Ansatz im Wesentlichen nur zur Lösung eines inneren Dirichlet-Problems gebraucht wird. Deshalb versuchen wir in einer neuen Formulierung einen Ansatz, welcher das Dirichlet-Problem löst, aber die Ecken bereits vollständig mit erfasst. Dieses soll ein Fourierreihenansatz leisten, d.h., wir suchen die Lösung in der Form

$$u_{\square} = v_{\square, \varphi} + U_{\psi}.$$

Dabei ist $v_{\square, \varphi}$, die durch (3.4) definierte Lösung des inneren Dirichlet-Problems in Ω_{\square} zu den L^2 -Randwerten φ ; U_{ψ} beschreibt die Lösung des äußeren Neumann-Problems, mittels eines Einfachschichtpotentialansatzes, im Außengebiet von C zu den Randwerten ψ . Ein weiteres Gebiet für das ein solcher Ansatz möglich ist, ist der Kreis. Wir entwickeln die Probleme daher parallel. Da die Beweise nahezu analog verlaufen, wird an einigen Stellen die von der Notation her einfachere Situation des Kreises stellvertretend gebracht.

4.1 Dirichlet-Neumann-Probleme

4.1.1 Eindeutigkeit

Für den Eindeutigkeitsnachweis folgen wir einer Darstellung von Miranda [8], welche den Besonderheiten der L^2 -Randwerte Rechnung trägt. Eine etwas ausführlichere Version kann in [6] gefunden werden.

Für klassische Probleme versucht man, die Eindeutigkeit aus dem Maximum-Prinzip oder aus der Verwendung des Green'schen Satzes herzuleiten. Beide Wege sind uns versperrt. Das Maximum-Prinzip ist für L^2 -Randwerte nicht anwendbar, und die fehlende Regularität am äusseren Rand erlaubt uns nicht, den Green'schen Satz anzuwenden. Ein Ausweg aus diesem Dilemma besteht darin, sich mit Hilfe einer Parallelkurve ins Innere des Gebietes zurückzuziehen. Hier sind die Funktionen regulär genug, um die Anwendung des Green'schen Satzes zu rechtfertigen. So kann man versuchen, die L^2 -Konvergenz zu benutzen und sich von innen her dem Rand zu nähern.

Satz 4.1 *Die Randwertprobleme $(DN-G_{\circ})$ und $(DN-G_{\square})$ besitzen höchstens eine Lösung.*

Beweis: Wir beweisen hier die Aussage für das Problem $(DN-G_{\circ})$. Um diesen Beweis erfolgreich auf das Problem $(DN-G_{\square})$ zu übertragen, ersetzt man die Parallelkurve durch den Rand eines konzentrischen Quadrates mit Abstand h .

Seien u_1, u_2 Lösungen von (1.3) und sei $\Gamma_{\circ, h} := \{x - h\nu(x) \mid x \in \Gamma_{\circ}\}$ mit $h > 0$ hinreichend klein eine Parallelkurve zu Γ_{\circ} ; d.h., ein Kreis um null mit Radius $1 - h$. Für $u := u_1 - u_2$ definieren wir

$$J(h) := \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{\circ, h}} u^2 \frac{1}{1-h} ds.$$

Dieses können wir als

$$J(h) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{\circ}} u(x - h\nu(x))^2 ds(x)$$

schreiben, wobei wir ausgenutzt haben, dass das Bogenelement für Kreise gleich dem Radius ist. Differenzieren liefert

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dh} &= - \int_{\Gamma_{\circ}} u(x - h\nu(x)) \frac{\partial u}{\partial \nu}(x - h\nu(x)) ds(x) \\ &= - \int_{\Gamma_{\circ, h}} u \frac{\partial u}{\partial \nu} \frac{1}{1-h} ds. \end{aligned}$$

Mit Hilfe des Green'schen Satzes und der Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Sigma} = 0$ erhalten wir

$$\frac{dJ}{dh} = - \int_{G_h} |\text{grad } u(x)|^2 \frac{1}{1-h} dx. \quad (4.1)$$

Dabei bezeichnet G_h das Innere des von der Parallelfläche $\Gamma_{\circ, h}$ umschlossenen Gebietes, geschnitten mit G_{\circ} . Nach den Voraussetzungen über die Existenz der Normalableitung auf Σ ist der Green'sche Satz anwendbar. Nehmen wir an, dass $\text{grad } u \neq 0$ in G_h , dann existiert eine abgeschlossene Kugel B , welche ganz in G_h enthalten ist, so dass $I := \int_B |\text{grad } u|^2 (1-h)^{-1} dx > 0$. Aus (4.1) erhalten wir $dJ/dh \leq -I$ für alle $0 < h \leq h_0$ und hinreichend kleines $h_0 > 0$. Nach Konstruktion von $J(h)$ wissen wir, dass J stetig auf $[0, h_0]$ und stetig differenzierbar auf $(0, h_0)$ ist. Aus dem Hauptsatz der Differential und Integralrechnung erhalten wir $J(h) \leq -Ih$ für alle $0 < h \leq h_0$. Dieses liefert aber einen Widerspruch zu $J(h) \geq 0$ für alle $h > 0$. Also ist u konstant in G_h . Aus $J(0) = 0$ erhalten wir $u = 0$ in G_{\circ} . \square

4.1.2 Wichtige Operatoren

Wir definieren die für die Existenzanalyse benötigten Operatoren. Hierbei werden wieder die beiden Fälle für Kreis und Quadrat zusammen abgehandelt und durch den Index i mit $i \in \{\circ, \square\}$ unterschieden.

Schränken wir das Einfachschichtpotential U_{ψ} mit Dichte $\psi \in C(\Sigma)$ auf die Randkurven Γ_i ein, so werden hierdurch kompakte Integraloperatoren

$$S_{\circ} : \psi \mapsto U_{\psi}|_{\Gamma_{\circ}}$$

und

$$S_{\square} : \psi \mapsto U_{\psi}|_{\Gamma_{\square}}$$

definiert. Eine Darstellung ist im folgenden Satz gegeben:

Satz 4.2 Die durch $S_i : C(\Sigma) \rightarrow L^2(\Gamma_i)$ mit

$$(S_i\psi)(x) := \int_{\Sigma} \Phi(x, y)\psi(y) ds(y), \quad x \in \Gamma_i \quad (4.2)$$

definierten Operatoren sind kompakt.

Beweis: Da sich die beiden Kurven Σ und Γ_i nicht schneiden, ist der Integrand eine auf $\Gamma_i \times \Sigma$ stetige Funktion. Die Aussage folgt dann mit Hilfe von Satz 2.14. \square

Des Weiteren definiert die Einschränkung der Normalableitung des Einfachschichtpotentials auf Σ einen kompakten Operator

$$K^* : \psi \mapsto 2 \langle \nu, \text{grad}(U_{\psi})|_{\Sigma_+} \rangle + \psi,$$

wobei $\langle \nu, \text{grad}(U_{\psi})|_{\Sigma_+} \rangle$ die Einschränkung der aus dem Inneren von G_i nach Σ fortgesetzten Normalableitung bedeutet. Dieser Operator ist uns bereits in dem einleitenden Kapitel über die Grundlagen der Potentialtheorie begegnet. Eine Darstellung ist durch (2.18) gegeben.

Wir benötigen noch Operatoren, welche die Einschränkung der Funktionen $v_{\circ, \varphi}$ und $v_{\square, \varphi}$ (siehe Kapitel 3) auf die Kurve Γ_i beschreiben, d.h.,

$$I_{\circ} : \varphi \mapsto v_{\circ, \varphi}|_{\Gamma_{\circ}}$$

und

$$I_{\square} : \varphi \mapsto v_{\square, \varphi}|_{\Gamma_{\square}}.$$

Wir erhalten dadurch beschränkte, lineare Operatoren, welche einer Funktion $\varphi \in L^2(\Gamma_i)$ ihre Fourierreihe zuordnet, d.h., die Operatoren sind die Identitätsabbildungen auf $L^2(\Gamma_i)$. Eine Darstellung dieser Operatoren zeigt der

Satz 4.3 Die Identitätsoperatoren $I_{\circ} : L^2(\Gamma_{\circ}) \rightarrow L^2(\Gamma_{\circ})$ mit

$$(I_{\circ}\varphi)(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

für $x = (\cos \theta, \sin \theta) \in \Gamma_{\circ}$ und $I_{\square} : L^2(\Gamma_{\square}) \rightarrow L^2(\Gamma_{\square})$,

$$(I_{\square}\varphi)(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \text{ss}_n\left(\frac{1}{2} - x_2, \frac{1}{2} + x_1\right) a_{1,n} + \text{ss}_n\left(\frac{1}{2} + x_1, \frac{1}{2} + x_2\right) a_{2,n} \right. \\ \left. + \text{ss}_n\left(\frac{1}{2} + x_2, \frac{1}{2} + x_1\right) a_{3,n} + \text{ss}_n\left(\frac{1}{2} - x_1, \frac{1}{2} + x_2\right) a_{4,n} \right\}$$

für $x = (x_1, x_2) \in \Gamma_{\square}$, sind beschränkt.

Beweis: Die Beschränktheit ist eine Folgerung aus der Parseval'schen Gleichung. Die Darstellung ergibt sich aus der Reihendarstellung (2.1) von $v_{\circ,\varphi}$ und $v_{\square,\varphi}$. \square

Als letzte Operatoren benötigen wir Einschränkungen der Normalableitung der Funktionen $v_{\circ,\varphi}$ und $v_{\square,\varphi}$ auf Σ . Wir zeigen, dass die Abbildungen

$$L_{\circ} : \varphi \mapsto 2 \langle \nu, \text{grad}_{r,\theta} v_{\circ,\varphi} |_{\Sigma} \rangle$$

und

$$L_{\square} : \varphi \mapsto 2 \langle \nu, \text{grad} v_{\square,\varphi} |_{\Sigma} \rangle$$

lineare, kompakte Operatoren von $L^2(\Gamma_i)$ nach $C(\Sigma)$ definieren. Die Linearität folgt sofort aus der Definition der Fourierkoeffizienten, da $c_n(\varphi_1 + \varphi_2) = c_n(\varphi_1) + c_n(\varphi_2)$. Wir berechnen zuerst eine Darstellung dieser Operatoren und beweisen daran anschließend die Kompaktheit. Hierzu müssen wir die Reihendarstellung der Funktionen $v_{\circ,\varphi}$ und $v_{\square,\varphi}$ differenzieren. Wenden wir uns zunächst dem Operator L_{\circ} zu. Man beachte, dass zur Berechnung des Gradienten von $v_{\circ,\varphi}$ die Darstellung in Polarkoordinaten benutzt werden muss; d.h.,

$$\text{grad}_{r,\theta} = \frac{\partial}{\partial r} e_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} e_{\theta}$$

mit $e_r = (\cos \theta, \sin \theta)^t$ und $e_{\theta} = (-\sin \theta, \cos \theta)^t$. Nutzen wir noch die Darstellung des Normalenvektors

$$\nu = \langle \nu, e_r \rangle e_r + \langle \nu, e_{\theta} \rangle e_{\theta}$$

in der Basis $\{e_r, e_{\theta}\}$, so erhalten wir

$$2 \langle \nu(x), \text{grad}_{r,\theta} v_{\circ,\varphi}(x) \rangle = 2 \langle \nu, e_r \rangle \frac{\partial v_{\circ,\varphi}}{\partial r} + 2 \langle \nu, e_{\theta} \rangle \frac{1}{r} \frac{\partial v_{\circ,\varphi}}{\partial \theta}.$$

Da die Reihe absolut und lokal gleichmäßig in Ω konvergiert, darf sie gliedweise differenziert werden und die so erhaltene Reihe stimmt mit der Ableitung der Funktion überein. Man berechnet, dass

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_{\circ,\varphi}}{\partial r} &= \sum_{n=1}^{\infty} n \{a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta\} r^{n-1}, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial v_{\circ,\varphi}}{\partial \theta} &= \sum_{n=1}^{\infty} n \{b_n \cos n\theta - a_n \sin n\theta\} r^{n-1} \end{aligned}$$

und erhält dann unter Ausnutzung der Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen nach passender Umsortierung der Terme die Darstellung (4.3).

Die Berechnungen für den Operator L_{\square} sind weniger kompliziert und können mit den Funktionen $d_{1,n}, \dots, d_{4,n}$ aus Abschnitt 3.2 handlich geschrieben werden. Nutzt man nun die Linearität des Gradienten und die Darstellungen für die

Funktionen v_{\square, φ_j} , so erhalten wir mit

$$\begin{aligned} 2 \langle \nu(x), \text{grad } v_{\square, \varphi}(x) \rangle &= 2 \sum_{i=1}^4 \langle \nu(x), \text{grad } v_{\square, \varphi_i}(x) \rangle \\ &= 2 \sum_{i=1}^4 \sum_{n=1}^{\infty} \langle \nu(x), d_{i,n}(x) \rangle a_{i,n} \end{aligned}$$

die Darstellung (4.4) für den Operator L_{\square} .

Satz 4.4 Die Operatoren $L_{\circ} : L^2(\Gamma_{\circ}) \mapsto C(\Sigma)$ mit

$$(L_{\circ} \varphi)(x) := 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\langle a_n \nu(x) + b_n [\nu(x)]^{\perp}, \begin{pmatrix} \cos(n-1)\theta \\ \sin(n-1)\theta \end{pmatrix} \right\rangle \quad (4.3)$$

für $x = (r \cos \theta, r \sin \theta) \in \Sigma$ und $L_{\square} : L^2(\Gamma_{\square}) \mapsto C(\Sigma)$ mit

$$(L_{\square} \varphi)(x) := 2 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^4 \langle \nu(x), d_{i,n}(x) \rangle a_{i,n} \quad (4.4)$$

für $x \in \Sigma$, sind kompakt.

Beweis: Die Wohldefiniertheit der Operatoren folgt aus der lokal gleichmäßigen Konvergenz der Reihen in Ω_i . Des Weiteren ist die Einschränkung einer analytischen Funktion auf die Randkurve Σ wenigstens stetig, so dass auch die Abbildungseigenschaften folgen. Um die Kompaktheit der Operatoren einzusehen, geht man wie folgt vor: Man definiert eine Folge von Operatoren als Partialsumme der Reihe. Diese sind kompakt, da es sich um lineare, beschränkte Operatoren mit endlich dimensionalem Bild handelt. Mit Hilfe der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung kann man eine Abschätzung der Operatornorm angeben, welche durch die Partialsumme der Funktionen $\langle \nu(\cdot), d_{i,n}(\cdot) \rangle$ im Falle des Quadrates und durch die geometrische Reihe im Falle des Kreises beschränkt werden. Da diese Reihen in der Supremumsnorm konvergieren, erhält man die Konvergenz der Operatorfolge gegen den Operator L_i in der Operatornorm. Dieses zeigt die Kompaktheit. Eine ausführliche Darstellung dieser Vorgehensweise ist im Beweis zu Satz 4.14 zu finden. \square

Um eine bessere Übersicht zu bekommen, fassen wir die Operatoren noch einmal zusammen.

$$\begin{aligned} K^* : C(\Sigma) &\rightarrow C(\Sigma), & \psi &\mapsto 2 \langle \nu, \text{grad}(U_{\psi})|_{\Sigma_+} \rangle + \psi, \\ S_i : C(\Sigma) &\rightarrow L^2(\Gamma_i), & \psi &\mapsto U_{\psi}|_{\Gamma_i}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_i &: L^2(\Gamma_i) \rightarrow C(\Sigma), & \varphi_i &\mapsto 2 \langle \nu, \text{grad}(v_{i,\varphi_i})|_{\Sigma} \rangle, \\ I_i &: L^2(\Gamma_i) \rightarrow L^2(\Gamma_i), & \varphi_i &\mapsto v_{i,\varphi_i}|_{\Gamma_i}, \\ I &: C(\Sigma) \rightarrow C(\Sigma), & \psi &\mapsto \psi. \end{aligned}$$

4.1.3 Existenz einer Lösung

Wie bereits in der Einleitung dieses Kapitels gesagt, versuchen wir die Lösung der Probleme (DN- G_i) in der Form

$$u_i = v_{i,\varphi_i} + U_\psi \quad \text{in } G_i,$$

mit Dichten $\varphi_i \in L^2(\Gamma_i)$ und $\psi \in C(\Sigma)$ darzustellen. Es ist klar, dass dieser Ansatz eine harmonische Funktion in G_i liefert. Damit dieser Ansatz auch die Randbedingungen (1.3) bzw. (1.4) erfüllt, müssen wir Bedingungen an die Dichten stellen. Dieses führt auf ein System von Operatorgleichungen zweiter Art, in denen die im vorherigen Abschnitt eingeführten Operatoren auftreten.

Aus der Dirichlet-Randbedingung auf Γ_i erhalten wir die Gleichung

$$I_i \varphi_i + S_i \psi = f_i. \quad (4.5)$$

Mit Hilfe der potentialtheoretischen Sprungbeziehungen für die Normalableitung des Einfachschichtpotentials erhalten wir die Gleichung

$$L_i \varphi_i + K^* \psi - I \psi = 2g, \quad (4.6)$$

welche dafür sorgt, dass die Neumann-Randbedingung auf Σ erfüllt wird. Zur Vereinfachung der Notation führen wir die Produkträume

$$X_\circ := L^2(\Gamma_\circ) \times C(\Sigma) \quad \text{und} \quad X_\square := L^2(\Gamma_\square) \times C(\Sigma)$$

ein. Weiterhin bezeichne $A_i : X_i \rightarrow X_i$ die Operatoren mit

$$A_\circ = \begin{pmatrix} 0 & S_\circ \\ -L_\circ & -K^* \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A_\square = \begin{pmatrix} 0 & S_\square \\ -L_\square & -K^* \end{pmatrix},$$

sowie die Identitätsoperatoren $E_i : X_i \rightarrow X_i$ mit

$$E_\circ = \begin{pmatrix} I_\circ & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad E_\square = \begin{pmatrix} I_\square & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}.$$

Setzen wir noch

$$\Psi_\circ := (\varphi_\circ, \psi)^t \in X_\circ \quad \text{und} \quad \Psi_\square := (\varphi_\square, \psi)^t \in X_\square,$$

sowie

$$F_\circ := (f_\circ, -2g)^t \in X_\circ \quad \text{und} \quad F_\square := (f_\square, -2g)^t \in X_\square,$$

so lassen sich die Systeme (4.5) und (4.6) in der handlichen Form

$$(E_{\circ} + A_{\circ})\Psi_{\circ} = F_{\circ} \quad \text{und} \quad (E_{\square} + A_{\square})\Psi_{\square} = F_{\square}$$

schreiben. Dieses sind Gleichungssysteme der Form „Identität + kompakter Operator“. Das bisher Gezeigte fassen wir im folgenden Satz zusammen:

Satz 4.5 (i) *Die Funktion*

$$u_{\circ}(x) = v_{\circ, \varphi_{\circ}}(x) + U_{\psi}(x), \quad x \in G_{\circ}$$

mit Dichten $\varphi_{\circ} \in L^2(\Gamma_{\circ})$ und $\psi \in C(\Sigma)$, löst das Randwertproblem (DN- G_{\circ}) zu den Randwerten $f_{\circ} \in L^2(\Gamma_{\circ})$ und $g \in C(\Sigma)$, falls die Dichten das Gleichungssystem

$$(E_{\circ} + A_{\circ})\Psi_{\circ} = F_{\circ}$$

lösen.

(ii) *Die Funktion*

$$u_{\square}(x) = v_{\square, \varphi_{\square}}(x) + U_{\psi}(x), \quad x \in G_{\square}$$

mit Dichten $\varphi_{\square} \in L^2(\Gamma_{\square})$ und $\psi \in C(\Sigma)$, löst das Randwertproblem (DN- G_{\square}) zu den Randwerten $f_{\square} \in L^2(\Gamma_{\square})$ und $g \in C(\Sigma)$, falls die Dichten das Gleichungssystem

$$(E_{\square} + A_{\square})\Psi_{\square} = F_{\square}$$

lösen.

Satz 4.6 *Die Probleme (DN- G_{\circ}) und (DN- G_{\square}) besitzen genau eine Lösung.*

Beweis: Der Index i wird für diesen Beweis unterdrückt.

Da alle Einträge der Matrix kompakt sind, ist auch A kompakt. Wir können daher die eindeutige Lösbarkeit des Systems mit Hilfe der Riesz-Theorie zeigen, d.h., wir müssen uns davon überzeugen, dass die homogene Gleichung nur die triviale Null-Lösung besitzt.

Sei $\Psi = (\varphi, \psi)$ eine Lösung von $(E + A)\Psi = 0$. Das mit diesen Dichten definierte u löst das homogene Randwertproblem und aus der eindeutigen Lösbarkeit erhalten wir $u = 0$ in G . Da das Einfachschichtpotential stetig auf Σ ist, folgt $0 = u_- - u_+ = u_-$ auf Σ . Also löst u das homogene innere Dirichlet-Problem in C , d.h., $u = 0$ in C . Aus der Sprungrelation für das Einfachschichtpotential erhalten wir $0 = \partial u_- / \partial \nu - \partial u_+ / \partial \nu = \psi$ auf Σ . Setzen wir dieses in die Gleichung (4.5) ein, so erhalten wir $\varphi = 0$. Damit haben wir gezeigt, dass nur $\Psi = 0$ Lösung von $(E + A)\Psi = 0$ ist. \square

Als letzter Punkt verbleibt, die stetige Abhängigkeit von den Randwerten zu zeigen, wobei wir den Gebietsindex wieder unterdrücken. Wir bemerken, dass die Lösung des Randwertproblems (DN- G) einen Operator

$$\mathcal{F} : F \mapsto u$$

definiert, welcher die Randwerte auf die Lösung des Randwertproblems abbildet; d.h., \mathcal{F} ist ein Operator von $X \rightarrow R(\mathcal{F}) \subset C^2(G)$. Das Bild des Operators ist ein linearer Unterraum von $C^2(G)$, welcher mit Hilfe von $\|u\|_{R(\mathcal{F})} := \|f\|_{L^2(\Gamma)} + \|g\|_{\infty, \Sigma}$ zu einem normierten Raum wird. Da

$$\|\mathcal{F}F\|_{R(\mathcal{F})} = \|f\|_{L^2(\Gamma)} + \|g\|_{\infty, \Sigma} = \|F\|_X, \quad \forall F \in X$$

gilt, ist \mathcal{F} beschränkt und somit stetig. Zusammengefasst:

Satz 4.7 *Die Probleme (DN- G_\circ) und (DN- G_\square) sind wohlgestellt.*

Eine physikalische Interpretation halten wir in folgender Form fest:

Korollar 4.8 *Für den Fall eines als nichtleitend angenommenen Einschlusses, ist das elektrostatische Potential durch Kenntnis der Spannung auf dem Leiter- rand und Form und Lage des Einschlusses eindeutig bestimmt und hängt stetig von der Spannung ab.*

Nach diesen Vorarbeiten, können wir das in der Einleitung formulierte Problem, die Berechnung des Stromflusses, beantworten. Wie bereits erwähnt, ergibt sich der Stromfluss als Normalableitung des elektrostatischen Potentials auf dem Leiterraum. Ebenso wie das Potential besitzt dieser Anteil, welche aus dem Fourierreihenanteil und dem Potentialanteil stammen. Die Normalableitung des Potentialanteils existiert ohne weitere Regularitätsforderungen an die Randwerte f . Im Falle des Kreises definiert das Potential auf dem Leiterraum eine analytische Funktion und wir erhalten die Normalableitung durch Differentiation unter dem Integral. Für den Fall des Quadrates ist die Normalableitung des Potentialanteils stückweise analytisch auf offenen Teilmengen der Randteile. Für den Fourierreihenanteil sieht die Situation anders aus. Die Existenz einer Normalableitung im L^2 -Sinne setzt die Regularität $f \in H^1(\Gamma_i)$ voraus. Wir halten dies fest im

Satz 4.9 *Ist u_i die Lösung des Randwertproblems (DN- G_i) zu den Randwerten $f_i \in H^1(\Gamma_i)$ und $g \in C(\Sigma)$, so existiert die Normalableitung $j_i := \frac{\partial u_i}{\partial \nu}$ auf Γ_i im L^2 -Sinne. Sie entspricht dem Stromfluss und besteht aus zwei Anteilen, einem Reihen- und einem Potentialanteil.*

$$j_\circ(x) = j_{F,\circ}(x) + j_{P,\circ}(x), \quad x \in \Gamma_\circ$$

und

$$j_\square(x) = j_{F,\square}(x) + j_{P,\square}(x), \quad x \in \Gamma_\square.$$

Dabei sind

$$\begin{aligned}
 j_{F,\circ}(x) &:= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n| c_n(\varphi_\circ) e^{in\theta}, \quad x = (\cos \theta, \sin \theta) \in \Gamma_\circ, \\
 j_{F,\square}(x) &:= \sum_{i=1}^4 \sum_{n=1}^{\infty} \langle \nu(x), d_i(x) \rangle a_{i,n}(\varphi_{i,\square}), \quad x \in \Gamma_\square, \\
 j_{P,\circ}(x) &:= \int_{\Sigma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} \psi(y) ds(y), \quad x \in \Gamma_\circ, \\
 j_{P,\square}(x) &:= \int_{\Sigma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} \psi(y) ds(y), \quad x \in \Gamma_\square.
 \end{aligned}$$

Desweiteren hängt die Normalableitung stetig in der $\|\cdot\|_X$ Norm von den Randwerten ab.

Beweis: Der Anteil des Einfachschichtpotentials definiert eine im Außengebiet von C harmonische und im Unendlichen gleichmäßig in alle Richtungen beschränkte Funktion. D.h., die Normalableitung für diesen Anteil existiert und wir erhalten sie durch Differentiation unter dem Integral. Die Einschränkung auf Γ_\circ ist analytisch, die auf Γ_\square stückweise analytisch, wobei die Ableitungen beschränkt auf ganz Γ_\square sind. Insbesondere existieren in beiden Fällen die Normalableitungen j_P im L^2 -Sinne. Wir müssen uns daher nur Gedanken über die Fourierreihenanteile j_F machen. Für diese geben uns die Sätze 3.3 und 3.9 eine positive Antwort, falls $\varphi \in H^1(\Gamma)$ ist. Da aber $f \in H^1(\Gamma)$ vorausgesetzt wurde, erhält man aus einem Regularitätsvergleich in der Gleichung $\varphi + S_\circ \psi = f$, dass auch $\varphi \in H^1(\Gamma)$ ist. Die Ableitungen hängen stetig von den Dichten ab und diese stetig von den Randwerten. \square

Als Korollar formulieren wir dieses noch einmal in einer physikalischen Interpretation.

Korollar 4.10 *Bei Kenntnis der auf dem Leiterrand angelegten Spannung und der Form und Lage des Isolatorrandes, ist der Stromfluss in Normalenrichtung über den Leiterrand eindeutig bestimmt und hängt stetig von der Spannung ab.*

4.2 Dirichlet-Dirichlet-Probleme

Wir untersuchen jetzt die verbleibenden Probleme (1.5) und (1.6). Dabei wird unsere Vorgehensweise weitgehend analog zu den bisher behandelten Problemen verlaufen.

Versucht man einen Ansatz in der Form „Fourierreihe + modifiziertes Doppelschichtpotential über Σ “, so ist das erhaltene Gleichungssystem nicht eindeutig lösbar. Um diese Problemen zu umgehen, modifizieren wir diesen Ansatz, indem wir einen Term mit logarithmischer Singularität addieren. Hierzu definieren wir für $\varphi \in L^2(\Gamma_\circ)$ die in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ harmonische Funktion

$$s_{\circ,\varphi}(x) := \int_{\Gamma_\circ} \varphi ds \ln \frac{1}{|x|}, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \quad (4.7)$$

sowie für $\varphi \in L^2(\Gamma_\square)$ die Funktion

$$s_{\square,\varphi}(x) := \int_{\Gamma_\square} \varphi ds \ln \frac{1}{|x|}, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}. \quad (4.8)$$

Damit diese Funktionen in G harmonisch sind, muss der Nullpunkt im Inneren von C liegen. Wir setzen dieses von jetzt an immer voraus.

4.2.1 Eindeutigkeit

Wir zeigen jetzt einen Eindeutigkeitsbeweis für das Problem (DD- G_\circ), welcher ohne weiteres auf das Problem (DD- G_\square) zu übertragen ist. Der Beweis ist weitgehend analog zum Beweis von Satz 4.1. Ein Unterschied ist jedoch, dass hier ein weiterer Randterm auftritt, da wir auf Grund der fehlenden Regularität am inneren Rand auch um diesen eine Parallelkurve legen müssen. Man kann diesen Beweis als einen Eindeutigkeitsbeweis für das Dirichlet-Problem mit L^2 -Randdaten auf einem bogenweise zusammenhängenden Gebiet verstehen, dessen Rand nicht notwendigerweise zusammenhängend ist.

Satz 4.11 *Die Randwertprobleme (1.5) und (1.6) besitzen höchstens eine Lösung.*

Beweis: Für diesen Beweis nehmen wir an, dass der Normalenvektor auf der Randkurve Σ ins Äußere von G_\circ zeigt. Seien u_1, u_2 Lösungen von (1.5) und $\partial G_{\circ,h} := \{x - h\nu(x) \mid x \in \partial G_\circ\}$, mit $h > 0$ hinreichend klein, eine Parallelkurve zu $\partial G_\circ = \Gamma_\circ \cup \Sigma$. Für $u := u_1 - u_2$ definieren wir

$$J(h) := \frac{1}{2} \int_{\partial G_{\circ,h}} u^2 ds.$$

Dieses können wir als

$$J(h) = \frac{1}{2} \int_{\partial G_\circ} \{1 - h\kappa(x)\} [u(x - h\nu(x))]^2 ds(x)$$

schreiben, wobei wir die Beziehung $ds_h(z) = (1 - h\kappa(x))ds(x)$ zwischen dem Bogenelement auf der Kurve und der Parallelkurve genutzt haben. $\kappa(x)$ bezeichnet

die Krümmung der Kurve im Punkt x . Differenzieren liefert

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dh} &= - \int_{\partial G_o} \{1 - h\kappa(x)\} u(x - h\nu(x)) \frac{\partial u}{\partial \nu}(x - h\nu(x)) ds(x) \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_{\partial G_o} \kappa(x) [u(x - h\nu(x))]^2 ds(x) \\ &= - \int_{\partial \Gamma_{o,h}} u \frac{\partial u}{\partial \nu} ds - \frac{1}{2} \int_{\partial G_o} \kappa(x) [u(x - h\nu(x))]^2 ds(x). \end{aligned}$$

Mit Hilfe des Green'schen Satzes erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dh} &= - \int_{G_{o,h}} |\text{grad } u(x)|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\partial G_o} \kappa [u(\cdot - h\nu)]^2 ds \\ &=: I_1 + I_2. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Dabei bezeichnet $G_{o,h}$ die Fläche zwischen den Randteilen der Parallelkurve, geschnitten mit G_o . Nehmen wir an, dass $\text{grad } u \neq 0$ in $G_{o,h}$ ist, so existiert eine abgeschlossene Kugel B , welche ganz in $G_{o,h}$ enthalten ist, so dass $I := \int_B |\text{grad } u|^2 dx > 0$. Nach Konstruktion von u verschwindet I_2 für $h \rightarrow 0^+$. D.h., für alle $\varepsilon > 0$ können wir ein $h_0 > 0$ finden, so dass $|I_2| < \varepsilon I$ für alle $0 < h \leq h_0$. Für $\varepsilon < \frac{1}{2}$ erhalten wir aus (4.9) die Abschätzung $dJ/dh \leq (-1 + \varepsilon)I \leq -\frac{1}{2}I$ für alle $0 < h \leq h_0$. Nach Konstruktion von $J(h)$ wissen wir, dass J stetig auf $[0, h_0]$ und stetig differenzierbar auf $(0, h_0)$ ist. Aus dem Hauptsatz der Differential und Integralrechnung erhalten wir $J(h) \leq -\frac{1}{2}Ih$ für alle $0 < h \leq h_0$. Dieses liefert aber einen Widerspruch zu $J(h) \geq 0$ für alle $h > 0$. Also ist u konstant in G_h . Aus $J(0) = 0$ erhalten wir $u = 0$ in G_o . \square

4.2.2 Wichtige Operatoren

In Analogie zu unserer Vorgehensweise im Abschnitt 4.1.2 definieren wir Operatoren, welche durch die Einschränkung der Funktionen $v_{i,\varphi}$ und $s_{i,\varphi}$, sowie des modifizierten Doppelschichtpotentials \tilde{V}_ψ , auf die Randkurven Σ und Γ_i entstehen.

Die Einschränkung des modifizierten Doppelschichtpotentials \tilde{V}_ψ auf Γ_i definiert kompakte Integraloperatoren

$$P_o : \psi \mapsto \tilde{V}_\psi|_{\Gamma_o}$$

und

$$P_\square : \psi \mapsto \tilde{V}_\psi|_{\Gamma_\square}.$$

Eine Darstellung gibt der

Satz 4.12 Die durch $P_i : C(\Sigma) \rightarrow L^2(\Gamma_i)$ mit

$$(P_i\psi)(x) := \int_{\Sigma} \left\{ \frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial\nu(y)} + 1 \right\} \psi(y) ds(y), \quad x \in \Gamma_i$$

definierten Operatoren sind kompakt.

Beweis: Da sich die Kurven Γ_i und Σ nicht schneiden, ist der Kern

$$\frac{\nu(y) \cdot \{x - y\}}{2\pi|x - y|^2} + 1$$

eine auf $\Sigma \times \Gamma_i$ stetige Funktion. Damit folgt die Aussage nach Satz 2.14 . \square

Die Einschränkung der Funktionen $s_{\circ,\varphi}$ und $s_{\square,\varphi}$ auf Σ definiert zwei kompakte, lineare Operatoren

$$Q_{\circ} : \varphi \mapsto 2s_{\circ,\varphi}|_{\Sigma}$$

und

$$Q_{\square} : \varphi \mapsto 2s_{\square,\varphi}|_{\Sigma}.$$

Es gilt der

Satz 4.13 Die Operatoren $Q_{\circ} : L^2(\Gamma_{\circ}) \mapsto C(\Sigma)$ mit

$$(Q_{\circ}\varphi)(x) := 2 \int_{\Gamma_{\circ}} \varphi ds \ln \frac{1}{|x|}, \quad x \in \Sigma$$

und $Q_{\square} : L^2(\Gamma_{\square}) \mapsto C(\Sigma)$ mit

$$(Q_{\square}\varphi)(x) := 2 \int_{\Gamma_{\square}} \varphi ds \ln \frac{1}{|x|}, \quad x \in \Sigma$$

sind kompakt und linear.

Beweis: Die Abbildungseigenschaften sind sofort ersichtlich, da wir vorausgesetzt hatten, dass der Nullpunkt im Inneren von C und somit nicht auf Σ liegt. Ferner ist Q_i ein beschränkter Operator von $L^2(\Gamma_i) \mapsto C(\Sigma)$, da

$$\begin{aligned} \|Q_i\varphi\|_{C(\Sigma),\infty} &= \left(\sup_{x \in \Sigma} \left| \ln \frac{1}{\|x\|} \right| \right) \left| \int_{\Gamma_i} \varphi ds \right| \\ &\leq C \|\varphi\|_{L^1(\Gamma_i)} \\ &\leq C \|\varphi\|_{L^2(\Gamma_i)}, \end{aligned}$$

für alle $\varphi \in L^2(\Gamma_i)$, mit einer universellen nur von Σ und Γ_i abhängigen Konstanten C . Die Linearität der Operatoren folgt aus der des Integrals. Offensichtlich

haben die Operatoren ein ein-dimensionales Bild, so dass die Kompaktheit aus dem Satz 2.12 folgt. \square

Zudem benötigen wir Operatoren, welche von der Einschränkung der Funktionen $v_{\circ,\varphi}$ und $v_{\square,\varphi}$ auf Σ herühren. Dieses definiert die kompakten Operatoren

$$H_{\circ} : \varphi \mapsto 2v_{\circ,\varphi}|_{\Sigma}$$

und

$$H_{\square} : \varphi \mapsto 2v_{\square,\varphi}|_{\Sigma}.$$

Wie gewohnt geben wir im folgenden Satz eine Darstellung an, welche auch später für die Numerik verwandt werden kann.

Satz 4.14 Die Operatoren $H_{\circ} : L^2(\Gamma_{\circ}) \mapsto C(\Sigma)$ mit

$$(H_{\circ}\varphi)(x) := a_0(\varphi) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n(\varphi) \cos n\theta + b_n(\varphi) \sin n\theta\} r^n$$

mit $x = (r \cos \theta, r \sin \theta) \in \Sigma$ und $H_{\square} : L^2(\Gamma_{\square}) \mapsto C(\Sigma)$ mit

$$(H_{\square}\varphi)(x) := 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \begin{aligned} & \text{ss}_n(\tfrac{1}{2} - x_2, \tfrac{1}{2} + x_1) a_{1,n} + \text{ss}_n(\tfrac{1}{2} + x_1, \tfrac{1}{2} + x_2) a_{2,n} \\ & + \text{ss}_n(\tfrac{1}{2} + x_2, \tfrac{1}{2} + x_1) a_{3,n} + \text{ss}_n(\tfrac{1}{2} - x_1, \tfrac{1}{2} + x_2) a_{4,n} \end{aligned} \right\}$$

mit $x = (x_1, x_2) \in \Sigma$ sind kompakt.

Beweis: Wir zeigen den Beweis für den von der Notation her einfacheren Fall H_{\circ} . Die Einschränkung der Funktion $v_{\circ,\varphi}$ auf Σ ist offensichtlich stetig, dieses zeigt sogleich die Wohldefiniertheit. Es bleibt, die Kompaktheit des Operators zu zeigen. Sei $\varphi \in L^2(\Gamma)$ beliebig und bezeichnen wie gewohnt $a_n = a_n(\varphi)$ und $b_n = b_n(\varphi)$ die Fourierkoeffizienten von φ . Wir definieren die auf Σ stetigen Funktionen

$$g_0(x) := \frac{a_0}{2} \quad \text{und} \quad g_m(x) := \{a_m \cos(m\theta(x)) + b_m \sin(m\theta(x))\} [r(x)]^m$$

für $x \in \Sigma$ und $m \in \mathbb{N}$. Die Schreibweise $\theta(x)$ und $r(x)$ soll die Abhängigkeit der Polarkoordinaten als stetige Funktion vom Randpunkt $x \in \Sigma$ unterstreichen. Man berechnet, dass

$$\|g_0\|_{C(\Sigma),\infty} = \frac{|a_0|}{2} \quad \text{und} \quad \|g_m\|_{C(\Sigma),\infty} = \{|a_m| + |b_m|\} \|r\|_{C(\Sigma),\infty}^m,$$

für $m \in \mathbb{N}$. Wir definieren die Operatoren

$$(H_\circ^{(n)}\varphi)(x) := a_0 + 2 \sum_{m=1}^n \{a_m \cos m\theta(x) + b_m \sin(x)n\theta\} [r(x)]^n, \quad x \in \Sigma$$

für $n \in \mathbb{N}$. Für die weiteren Rechnungen erlauben wir uns, die verwandten Normen nur bei ihrem ersten Auftreten vollständig auszuschreiben. Aus

$$\begin{aligned} \|\tfrac{1}{2}H_\circ^{(n)}\varphi\|_{C(\Sigma),\infty} &= \|g_0 + \sum_{m=1}^n g_m\|_{C(\Sigma),\infty} \\ &\leq \|g_0\| + \sum_{m=1}^n \|g_m\| \\ &\leq \frac{|a_0|}{2} + \sum_{m=1}^n \{|a_m| + |b_m|\} \|r\|_{C(\Sigma),\infty}^m \\ &\leq \frac{|a_0|}{2} + \left(\sum_{m=1}^n \{|a_m| + |b_m|\}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{m=1}^n \|r\|^{2m} \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{|a_0|}{2} + 2 \left(\sum_{m=1}^n \{|a_m|^2 + |b_m|^2\} \right)^{1/2} \left(\sum_{m=1}^n \|r\|^{2m} \right)^{1/2} \\ &\leq (1 + \sqrt{2}) \|\varphi\|_{L^2(\Gamma)} \left(\sum_{m=1}^n \|r\|^{2m} \right)^{1/2} \end{aligned}$$

erhalten wir eine Abschätzung der Operatornorm

$$\|H_\circ^{(n)}\| \leq 2(1 + \sqrt{2}) \left(\sum_{m=1}^n \|r\|^{2m} \right)^{1/2}.$$

Hieraus folgern wir, dass die Operatoren $H_\circ^{(n)}$ beschränkt sind. Da sie zudem ein endlich dimensionales Bild besitzen, sind sie nach Satz 2.12 kompakt. Wir folgern, dass

$$\|H_\circ^{(n)} - H_\circ\| \leq 2(1 + \sqrt{2}) \left(\sum_{m=n+1}^{\infty} \|r\|^{2m} \right)^{1/2} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Aus Satz 2.9 erhält man somit die Kompaktheit für den Operator H_\circ . \square

Die Einschränkung des modifizierten Doppelschichtpotentials auf die Randkurve Σ liefert den Operator

$$\tilde{K} : \psi \mapsto 2 \left[\tilde{V}_\psi|_\Sigma \right]_+ - \psi,$$

welcher nach Satz 2.37 kompakt ist.

Auch für die Behandlung der Probleme (DD- G_\circ) und (DD- G_\square) benötigen wir Operatoren, welche durch die Einschränkung der Funktionen $v_{\circ,\varphi}$ und $v_{\square,\varphi}$ auf die Randkurve Γ_\circ und Γ_\square entstehen. Dieses liefert die Identitätsoperatoren I_\circ und I_\square aus dem vorherigen Abschnitt. Darüber hinaus erhalten wir noch einen weiteren Operator R_\square durch die Einschränkung von $s_{\square,\varphi}$ auf Σ . Es gilt der

Satz 4.15 *Der Operator $R_\square : L^2(\Gamma_\square) \rightarrow L^2(\Gamma_\square)$, definiert durch*

$$(R_\square\varphi)(x) := \int_{\Gamma_\square} \varphi ds \ln \frac{1}{|x|}, \quad x \in \Sigma,$$

ist kompakt. Weiterhin ist $R_\square\varphi \in C(\Gamma_\square)$ für alle $\varphi \in L^2(\Gamma_\square)$.

Beweis: Die Einschränkung der Funktion $\ln \frac{1}{|x|}$ auf Γ_\square ist stetig. Dieses zeigt die Abbildungseigenschaft. Die Beschränktheit zeigt man wie im Beweis von Satz 4.13. Da der Operator ein ein-dimensionales Bild besitzt, ist er nach Satz 2.12 kompakt, als Operator von $L^2(\Gamma_\square) \rightarrow C(\Gamma_\square)$. Die Einbettung $C(\Gamma_\square) \hookrightarrow L^2(\Gamma_\square)$ ist stetig, so dass R_\square aufgefaßt als Operator von $L^2(\Gamma_\square) \rightarrow C(\Gamma_\square) \hookrightarrow L^2(\Gamma_\square)$ ebenfalls kompakt ist. \square

Da die Einschränkung der Funktion $s_{\circ,\varphi}$ auf Γ_\circ verschwindet, gibt es keinen Operator R_\circ . Um nicht zwischen den Problemen für den Kreis und das Quadrat unterscheiden zu müssen, erlauben wir uns, den Nulloperator in Form von $R_\circ : \varphi \mapsto 0$ einzuführen.

Wir fassen die Operatoren noch einmal zusammen:

$$\begin{aligned} \tilde{K} : C(\Sigma) &\rightarrow C(\Sigma), & \psi &\mapsto 2 \left[\tilde{V}_\psi|_\Sigma \right]_+ - \psi, \\ P_i : C(\Sigma) &\rightarrow L^2(\Gamma_i), & \psi &\mapsto \tilde{V}_\psi|_{\Gamma_i}, \\ Q_i : L^2(\Gamma_i) &\rightarrow C(\Sigma), & \varphi_i &\mapsto 2s_{i,\varphi_i}|_\Sigma, \\ H_i : L^2(\Gamma_i) &\rightarrow C(\Sigma), & \varphi_i &\mapsto 2v_{i,\varphi_i}|_\Sigma, \\ I_i : L^2(\Gamma_i) &\rightarrow L^2(\Gamma_i), & \varphi_i &\mapsto v_{i,\varphi_i}|_{\Gamma_i}, \\ R_\square : L^2(\Gamma_\square) &\rightarrow L^2(\Gamma_\square), & \varphi_i &\mapsto s_{\square,\varphi_i}|_{\Gamma_\square}, \\ R_\circ : L^2(\Gamma_\circ) &\rightarrow L^2(\Gamma_\circ), & \varphi_i &\mapsto 0. \end{aligned}$$

4.2.3 Existenz einer Lösung

Für die Dirichlet-Dirichlet-Probleme versuchen wir, die Lösung in der Form

$$u_i = s_{i,\varphi_i} + v_{i,\varphi_i} + \tilde{V}_\psi \quad \text{in } G_i,$$

mit $\varphi_i \in L^2(\Gamma_i)$, $\psi \in C(\Sigma)$, zu schreiben. Die Harmonizität der Ansatzfunktion ist gesichert, so dass wir uns nur noch um die Randwerte kümmern müssen. Die Dirichlet-Randbedingung auf Γ_i wird erfüllt, falls

$$I_i\varphi_i + R_i\varphi_i + P_i\psi = f_i. \quad (4.10)$$

Aus den potentialtheoretischen Sprungbeziehungen für das Doppelschichtpotential erhalten wir die Gleichung

$$H_i\varphi_i + Q_i\varphi_i + \tilde{K}\psi + I\psi = 2g. \quad (4.11)$$

Diese Gleichung sorgt dafür, dass die Dirichlet-Randbedingung auf Σ erfüllt wird, wobei man das im Vergleich mit den Dirichlet-Neumann-Problemen geänderte Vorzeichen für den Sprung der Dichte beachtet. Wie auch für das Dirichlet-Neumann-Problem schreiben wir dieses verkürzt als eine Gleichung auf den Produktträumen X_i . Hierzu definieren wir die Operatoren $B_i : X_i \rightarrow X_i$ mit

$$B_\circ = \begin{pmatrix} R_\circ & P_\circ \\ H_\circ + Q_\circ & \tilde{K} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B_\square = \begin{pmatrix} R_\square & P_\square \\ H_\square + Q_\square & \tilde{K} \end{pmatrix}.$$

Hiermit lassen sich die Systeme (4.10), (4.11) in der Form

$$(E_i + B_i)\Psi_i = F_i \quad (4.12)$$

schreiben, wobei $F_i := (f_i, 2g)$. Wir fassen das bisher Gezeigte zusammen:

Satz 4.16 (i) *Die Funktion*

$$u_\circ(x) = s_{\circ,\varphi_\circ}(x) + v_{\circ,\varphi_\circ}(x) + \int_\Sigma \left\{ \frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial\nu(y)} + 1 \right\} \psi(y) ds(y), \quad x \in G_\circ,$$

mit Dichten $\varphi_\circ \in L^2(\Gamma_\circ)$ und $\psi \in C(\Sigma)$, löst das Randwertproblem $(DD-G_\circ)$ zu den Randwerten $f_\circ \in L^2(\Gamma_\circ)$ und $g \in C(\Sigma)$, falls die Dichten die Gleichung

$$(E_\circ + B_\circ)\Psi_\circ = F_\circ$$

lösen.

(ii) *Die Funktion*

$$u_\square(x) = s_{\square,\varphi_\square}(x) + v_{\square,\varphi_\square}(x) + \int_\Sigma \left\{ \frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial\nu(y)} + 1 \right\} \psi(y) ds(y), \quad x \in G_\square,$$

mit Dichten $\varphi_\square \in L^2(\Gamma_\square)$ und $\psi \in C(\Sigma)$, löst das Randwertproblem $(DD-G_\square)$ zu den Randwerten $f_\square \in L^2(\Gamma_\square)$ und $g \in C(\Sigma)$, falls die Dichten die Gleichung

$$(E_\square + B_\square)\Psi_\square = F_\square$$

lösen.

Satz 4.17 *Die Probleme (1.5) und (1.6) besitzen genau eine Lösung.*

Beweis: Sei $\Psi = (\varphi, \psi)$ eine Lösung von $(E + B)\Psi = 0$. Die mit diesen Dichten definierte Funktion u löst das homogene innere Dirichlet-Problem und aus der eindeutigen Lösbarkeit erhalten wir $u = 0$ in G . Die Funktion $\tilde{u} := u - s_i$ ist harmonisch in C , so dass $\int_{\Sigma} \partial \tilde{u}_- / \partial \nu ds = 0$. Da u in G verschwindet, kann die Normalableitung von u mit Null stetig auf den Rand Σ fortgesetzt werden. Aus der Stetigkeit der Normalableitung des Doppelschichtpotentials erhalten wir $\partial u_- / \partial \nu = 0$ auf Σ und damit

$$\frac{\partial \tilde{u}_-}{\partial \nu} = \frac{\partial u_-}{\partial \nu} - \frac{\partial s_i}{\partial \nu} = -\frac{\partial s_i}{\partial \nu}.$$

Hieraus folgern wir, dass $\int_{\Sigma} \partial s_i / \partial \nu ds = 0$. Da aber $\int_{\Sigma} \partial / \partial \nu (\ln |x|) ds \neq 0$, muss

$$\int_{\Gamma} \varphi ds = 0 \tag{4.13}$$

sein. Das bedeutet, dass $s_i = 0$ ist. Ohne den logarithmischen Anteil s_i , ist u in C harmonisch und mit Hilfe von $\partial u_- / \partial \nu = 0$ auf Σ folgt, dass u das innere Neumann-Problem in C löst und somit konstant ist. Aus der Sprungrelation für das Doppelschichtpotential erhalten wir so $\psi = u_+ - u_- = \text{const}$ auf Σ . Setzen wir dieses in (4.10) ein, so erhalten wir mit Hilfe von Satz 2.40 $\varphi = -P\psi = -\psi|\Sigma|$, d.h., φ ist konstant. Aus (4.13) folgt: $\varphi = \psi = 0$. \square

Wie schon im Falle der Dirichlet-Neumann-Probleme, zeigt man die stetige Abhängigkeit der Lösung von den Randwerten in der Norm $\|\cdot\|_{X_i}$.

Satz 4.18 *Die Probleme (1.5) und (1.6) sind wohlgestellt.*

Eine physikalische Interpretation halten wir in folgender Form fest:

Korollar 4.19 *Im Falle eines als ideal leitend angenommenen Einschlusses ist das elektrostatische Potential durch Angabe der Spannung auf dem Leiterrand und Kenntnis der Form und Lage des Einschlusses eindeutig bestimmt und hängt stetig von der Spannung ab.*

Auch in dieser Situation können wir das Problem der Berechnung des Stromflusses positiv beantworten mit dem

Satz 4.20 *Ist u_i die Lösung des Randwertproblems $(DD-G_i)$ zu den Randwerten $f_i \in H^1(\Gamma_i)$ und $g \in C(\Sigma)$, so existiert die Normalableitung $J_i := \frac{\partial u_i}{\partial \nu}$ auf Γ_i im L^2 -Sinne. Sie entspricht dem Stromfluss und besteht aus zwei Anteilen, einem Reihen- und einem Potentialanteil.*

$$J_{\circ} = J_{F,\circ} + J_{P,\circ}, \quad \text{auf } \Gamma_{\circ} \tag{4.14}$$

und

$$J_{\square} = J_{F,\square} + J_{P,\square}, \quad \text{auf } \Gamma_{\square}. \quad (4.15)$$

Die Stromanteile aus der Modifikation s_{i,φ_i} haben wir dabei zum Fourieranteil geschlagen, so dass

$$J_{F,\circ}(x) := - \int_{\Gamma_{\circ}} \varphi_{\circ} ds + \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n| c_n(\varphi_{\circ}) e^{in\theta}, \quad x = (\cos \theta, \sin \theta) \in \Gamma_{\circ},$$

$$J_{P,\circ}(x) := \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \int_{\Sigma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \psi(y) ds(y), \quad x \in \Gamma_{\circ},$$

$$J_{F,\square}(x) := - \int_{\Gamma_{\square}} \varphi_{\square} ds \cdot \frac{\langle \nu(x), x \rangle}{|x|} + \sum_{i=1}^4 \sum_{n=1}^{\infty} \langle \nu(x), d_{i,n}(x) \rangle a_{i,n}, \quad x \in \Gamma_{\square},$$

$$J_{P,\square}(x) := \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \int_{\Sigma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \psi(y) ds(y), \quad x \in \Gamma_{\square},$$

mit $x = (x_1, x_2) \in \Gamma_{\square}$. Des Weiteren hängt die Normalableitung stetig in der $\|\cdot\|_X$ Norm von den Randwerten ab.

Beweis: Der Beweis verläuft analog zu dem des Satzes 4.9. \square

Auch dieses formulieren wir noch einmal als Korollar in einer physikalischen Interpretation.

Korollar 4.21 *Bei Kenntnis der auf dem Leiterrand angelegten Spannung und der Form und Lage des als ideal leitend angenommenen Einschlusses, ist der Stromfluss in Normalenrichtung über den Leiterrand eindeutig bestimmt und hängt stetig von der Spannung ab.*

Kapitel 5

Das inverse Problem

In diesem Kapitel beschreiben wir eine Möglichkeit, das Gebiet C aus Kenntnis der überbestimmten Daten $u|_{\Sigma}$, $u|_{\Gamma}$ und $\frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Gamma}$ zu bestimmen. Wir beschränken uns dabei auf die Untersuchung der Randwertprobleme (DD- G_{\circ}) und (DD- G_{\square}).

Im Abschnitt 5.1 zeigen wir zunächst die Eindeutigkeit des inversen Problems, d.h., dass das Gebiet C durch die obigen Daten eindeutig bestimmt wird.

Im Abschnitt 5.2 entwickeln wir eine Möglichkeit, den Rand näherungsweise durch Lösung einer nichtlinearen und schlecht gestellten Operatorgleichung, mittels des Newtonverfahrens, iterativ zu bestimmen. Hierzu müssen wir nachweisen, dass die Lösung des Randwertproblems, d.h. das elektrostatische Potential, differenzierbar von der Randkurve Σ abhängt. Schliesslich können wir damit einsehen, dass auch die Normalableitung, d.h. der Stromfluss, differenzierbar von Σ abhängt. Um dieses Vorhaben ausführen zu können, müssen wir die Abhängigkeit der Operatoren als Funktion des Randes studieren. Ergebnisse, welche wir für den Potentialoperator \tilde{K} benötigen, gehen dabei auf Potthast [9] zurück. Es genügt daher in dem uns vorliegendem Fall, die einfacheren Operatoren P , H und Q zu untersuchen. Dieses erledigen wir im Abschnitt 5.3.

In einem letzten Abschnitt machen wir uns Gedanken über eine effiziente Berechnung der Fréchet-Ableitung.

Wir gestatten uns die Freiheit, die in diesem Kapitel benötigten parametrisierten Fassungen der Operatoren mit den gleichen Symbolen zu bezeichnen und verwenden die Notation $A'[r](q)$ und $A'_{r,q}$ für die Fréchet-Ableitung eines Operators synonym.

5.1 Eindeutigkeit des inversen Problems

Das Ziel dieses Abschnittes ist der Beweis des folgenden Eindeutigkeitssatzes.

Satz 5.1 Seien $C_1, C_2 \subset \Omega_i$ einfach zusammenhängende Gebiete mit C^2 -glatten Rändern Σ_1 und Σ_2 und $G_{1,i} := \Omega_i \setminus \bar{C}_1, G_{2,i} := \Omega_i \setminus \bar{C}_2$. Sind $u_1 \in C^2(G_{1,i})$ und $u_2 \in C^2(G_{2,i})$ Lösungen der Randwertprobleme

$$\begin{cases} \Delta u_1 = 0 & \text{in } G_{1,i}, \\ u_1 = 0 & \text{auf } \Sigma_1, \\ u_1 = f & \text{auf } \Gamma_i \text{ im } L^2\text{-Sinne,} \end{cases}$$

und

$$\begin{cases} \Delta u_2 = 0 & \text{in } G_{2,i}, \\ u_2 = 0 & \text{auf } \Sigma_2, \\ u_2 = f & \text{auf } \Gamma_i \text{ im } L^2\text{-Sinne,} \end{cases}$$

zu den Randwerten $f \neq 0 \in C^2(\Gamma_i)$, so folgt aus $\frac{\partial u_1}{\partial \nu}|_{\Gamma_i} = \frac{\partial u_2}{\partial \nu}|_{\Gamma_i}$, dass $C_1 = C_2$.

Der Beweis, den wir vorstellen, benötigt das sogenannte *Lemma von Holmgren*.

Lemma 5.2 (Holmgren) Ist $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ eine in Ω harmonische Funktion, für welche auf einem glatten einfach zusammenhängenden Teilstück Γ_0 des Randes $\partial\Omega$ die Randwerte und die Normalableitung verschwinden, so ist u konstant Null in Ω .

Um dieses Lemma anwenden zu können, müssen wir uns davon überzeugen, dass die Lösungen der Probleme (DD- G_\circ) und (DD- G_\square) genügend regulär am Rand sind. Es wird sich zeigen, dass der die Regularität begrenzende Faktor, der Fourierreihenanteil der Lösung ist. Für diesen hatten wir schon die Existenz von Normalableitungen im L^2 -Sinne gezeigt, falls die Randwerte aus $H^1(\Gamma)$ vorausgesetzt wurden. Genügte uns diese Regularitätsvoraussetzung, um den Stromfluss sinnvoll definieren zu können, so müssen wir für die Eindeutigkeit des inversen Problems diese Voraussetzungen verschärfen. In den Sätzen 3.4 und 3.10 hatten wir gezeigt, dass die Lösungen stetig differenzierbar bis auf den Abschluss des Gebietes fortgesetzt werden können, falls die Randwerte in $C^2(\Gamma_\circ)$ sind.

Lemma 5.3 i) Ist u die Lösung des Randwertproblems (DD- G_\circ) zu den Randwerten $f \in C^2(\Gamma_\circ)$, so ist $u \in C^1(\bar{\Omega}_\circ)$.

ii) Ist u die Lösung des Randwertproblems (DD- G_\square) zu den Randwerten $f \in C^2(\Gamma_\square)$, so existiert ein glattes, einfach zusammenhängendes Teilstück Γ_* , so dass die ersten partiellen Ableitungen von u stetig bis auf Γ_* fortgesetzt werden können.

Beweis:

- i) Die Lösung läßt sich in der Form $u = s_{o,\varphi} + v_{o,\varphi} + \tilde{V}_\psi$ schreiben. Der Anteil \tilde{V}_ψ ist eine in $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{C}$ analytische Funktion; der Anteil $s_{o,\varphi}$ ist analytisch in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Es verbleibt somit, das Randverhalten der in Ω_o harmonischen Funktion $v_{o,\varphi}$ zu untersuchen. Durch einen Vergleich der Regularität der rechten und linken Seite in der Gleichung (4.10) erhalten wir $\varphi \in C^2(\Gamma)$. Nach Satz 3.4 ist somit auch $v_{o,\varphi}$ bis auf den Rand hin stetig differenzierbar.
- ii) Wir können die Lösung in der Form $u = s_{\square,\varphi} + v_{\square,\varphi} + \tilde{V}_\psi$ schreiben. Es bleibt, das Randverhalten der in Ω_o harmonischen Funktion $v_{\square,\varphi}$ zu untersuchen. Durch einen Vergleich der Regularitätsvergleich in der Gleichung (4.10) erhalten wir, dass φ zweimal stetig differenzierbar ist auf allen kompakten Teilmengen von Γ_\square , welche keine Ecken enthalten. Da die stetige Fortsetzbarkeit der Ableitung eine lokale Eigenschaft ist, finden wir eine glattes Teilstück des Randes, so dass die ersten partiellen Ableitungen von $v_{\square,\varphi}$ stetig bis auf den Rand fortgesetzt werden können.

□

Nachdem wir uns davon überzeugt haben, dass der schwache Lösungsbegriff für glatte Randwerte starke Lösungen liefert, können wir den Eindeutigkeitsatz beweisen.

Beweis von Satz 5.1: Wir führen einen Beweis durch Widerspruch. Sei $C_1 \neq C_2$ und bezeichne G diejenige Zusammenhangskomponente von $\Omega \setminus (\bar{C}_1 \cup \bar{C}_2)$ für welche Γ ein Teil des Randes ∂G ist. Weiterhin bezeichne Σ den Rand von G abzüglich des Teilstückes Γ . Dann ist die Funktion $v := u_1 - u_2$ in G harmonisch und erfüllt die Randbedingungen

$$\begin{aligned} v &= 0 \quad \text{auf } \Gamma \quad \text{im } L^2\text{-Sinne} \\ \frac{\partial v}{\partial \nu} &= 0 \quad \text{auf } \Gamma \quad \text{im } L^2\text{-Sinne} \\ v(x) &= \begin{cases} u_1(x) & , x \in \Sigma \cap \Sigma_2, \\ u_2(x) & , x \in \Sigma \cap \Sigma_1, \end{cases} \end{aligned}$$

Wir merken an, dass $u_1, u_2 \neq 0$ in G , da $f \neq 0$ vorausgesetzt wurde. Aus dem Lemma 5.3 folgt, dass v die Randwerte zumindest auf einem glatten Teilstück $\Gamma_0 \subset \Gamma$ auch im klassischen Sinne annimmt. Wir können daher das Lemma von Holmgren anwenden und erhalten hiermit $v = 0$ in G , d.h. $u_1 = u_2$ in G . Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass $G^* := (\Omega \setminus \bar{G}) \setminus \bar{C}_2$ nicht leer ist. Die Funktion u_2 ist harmonisch in G^* und stetig auf dem Randstück $\Sigma \cap \Sigma_1$. Da $u_1 = 0$ auf $\Sigma \cap \Sigma_1$ und $u_1 = u_2$ in G , folgt aus der Stetigkeit von u_2 , dass $u_2 = 0$ auf $\Sigma \cap \Sigma_1$. Weiterhin ist $u_2 = 0$ auf Σ_2 , so dass wir $u_2 = 0$ auf ∂G^* erhalten. Aus dem Maximum-Prinzip folgern wir, dass $u_2 = 0$ in G^* ist und

aus der Analytizität von u_2 folgt $u_2 = 0$ in G_2 . Dieses ist ein Widerspruch zur Annahme $f \neq 0$. \square

5.2 Das Newtonverfahren für das inverse Problem

Für die Behandlung des inversen Problems setzen wir $f \in C^2(\Gamma)$ voraus.

Aus der Analysis der direkten Probleme wissen wir, dass die Lösung der Randwertprobleme (DD-G) einen Operator

$$\mathcal{A} : \Sigma \mapsto \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma}$$

definiert, der den Rand Σ des Gebietes C auf die Restriktion der Normalableitung der Lösung des Randwertproblems (DD-G) auf Γ abbildet. Diese Abbildung wird auch als *domain-to-Neumann* Operator bezeichnet. Das inverse Problem besteht darin, bei vorgegebener Normalableitung $\frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma}$ die nichtlineare und inkorrekt gestellte Operatorgleichung

$$\mathcal{A}(\Sigma) = \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma} \tag{5.1}$$

nach dem unbekanntem Rand Σ aufzulösen. Es ist naheliegend, diese Gleichung iterativ mit Hilfe des Newtonverfahrens zu lösen. Wir zeigen daher, dass die Lösung des Randwertproblems differenzierbar vom Rand Σ abhängt und geben eine Charakterisierung der Ableitung des Operators \mathcal{A} in Form eines Randwertproblems an.

Wir müssen uns zuerst Gedanken über den Definitionsbereich des Operators \mathcal{A} machen, d.h. wir müssen uns fragen, „womit“ wir Randkurven identifizieren können. Beschränken wir uns der Einfachheit halber auf den Fall sternförmiger Gebiete bezüglich des Ursprunges, d.h. nehmen wir an, dass wir die Randkurve Σ in der Form

$$x(t) = r(t)(\cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi] \tag{5.2}$$

parametrisieren können, so wird durch die Angabe der Radiusfunktion r die Randkurve eindeutig bestimmt. Damit die Kurve die geforderte Regularität besitzt, wird die Funktion r aus einer geeigneten Untermenge positiver Funktionen von $C_{2\pi}^2$ gewählt. Die Wahl von

$$D(\mathcal{A}) := \{r \in C_{2\pi}^2 : 0 < r < r_i\}$$

erscheint sinnvoll, wobei $\mathbb{R} \ni r_o < 1$ und $\mathbb{R} \ni r_i < \frac{1}{2}$. Wir können \mathcal{A} als eine Abbildung von $D(\mathcal{A})$ nach $L^2(\Gamma)$ interpretieren, weshalb wir auch $\mathcal{A}(r)$ anstelle von $\mathcal{A}(\Sigma)$ schreiben werden. Das Hauptresultat dieses Kapitels ist der folgende Satz, welcher uns eine Charakterisierung der Fréchet-Ableitung, als Einschränkung der Normalableitung eines direkten Problems, liefert.

Satz 5.4 Die Abbildung $\mathcal{A} : r \rightarrow \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Gamma}$ ist Fréchet-differenzierbar von $D(\mathcal{A})$ nach $L^2(\Gamma)$. Die Fréchet-Ableitung ist gegeben durch $\mathcal{A}'[r](q) = \frac{\partial w}{\partial \nu}|_{\Gamma}$, wobei $w \in C^2(G)$ die eindeutig bestimmte harmonische Funktion ist, welche das Randwertproblem (DD-G) zu den Randbedingungen

$$w = 0 \quad \text{auf } \Gamma, \tag{5.3}$$

$$w = -\langle \text{grad } u, h \rangle \quad \text{auf } \Sigma, \tag{5.4}$$

mit $h(t) = q(t)(\cos t, \sin t)$, löst.

Dieser Satz bildet die Grundlage des Newtonverfahrens. Dabei wird die Gleichung (5.1) durch die linearisierte Gleichung (5.5) ersetzt. Beginnend mit einer Startnäherung r_0 , berechnet man eine Folge $\{r_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ von Radiusfunktionen durch die Iterationsvorschrift

$$\begin{aligned} \mathcal{A}'[r_n](q_n) &= \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\Gamma} - \mathcal{A}(r_n), \\ r_{n+1} &:= r_n + q_n, \quad n \geq 0. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Für diese wiederholen wir den Prozess iterativ, bis ein geeignetes Abbruchkriterium erfüllt ist. Die für die Lösung der Gleichung (5.5) notwendige Berechnung der Fréchet-Ableitung erhalten wir als Lösung eines Vorwärtsproblems. Für die Numerik ist dieses ein erfreuliches Resultat. Die meiste Rechenzeit wird nämlich nicht für das Lösen der Gleichungssysteme benötigt, sondern für das Aufstellen der Matrizen für das Vorwärtsproblem, d.h., das Berechnen der Fréchet-Ableitung ist verhältnismäßig günstig.

Bevor wir diesen Satz beweisen können, müssen wir die Differenzierbarkeit der einzelnen Operatoren nach dem Rand Σ nachweisen.

5.3 Fréchet-Differenzierbarkeit verschiedener Operatoren

Die Abhängigkeit der Integraloperatoren von der Randkurve Σ sieht man am besten in der parametrisierten Form. Für den modifizierten Doppelschichtpotentialoperator $\tilde{K} : C(\Sigma) \rightarrow C(\Sigma)$ führen wir mit Hilfe von (5.2) die parametrisierte Form

$$(\tilde{K}_r \psi)(t) := \int_0^{2\pi} k(t, \tau; r) \psi(\tau) d\tau, \quad t \in [0, 2\pi)$$

ein, mit dem Kern

$$k(t, \tau; r) = \left\langle 2[x'(\tau)]^\perp, \text{grad}_y \Phi(x(t), x(\tau)) \right\rangle + 2|x'(\tau)|, \quad t \neq \tau,$$

in Abhängigkeit von r . Die Hauptaussage und zugleich einer der schwierigsten Sätze dieses Abschnittes ist der folgende Differentiationssatz, welcher zuerst von Potthast [9] bewiesen wurde. Er erkannte, dass die für den Existenzbeweis benötigten schwach singulären Integraloperatoren nach dem Rand differenzierbar sind, und wiederum schwach singuläre Integraloperatoren als Fréchet-Ableitungen besitzen. Formal erhält man diese durch Differenzieren der Kernfunktion nach r .

Satz 5.5 *Der nichtlineare Operator*

$$\begin{aligned} A : D(\mathcal{A}) \subset C_{2\pi} &\rightarrow L(C_{2\pi}, C_{2\pi}), \\ r &\mapsto \tilde{K}_r \end{aligned}$$

ist Fréchet-differenzierbar. Die Fréchet-Ableitung ist durch den linearen und beschränkten Operator

$$\begin{aligned} A'[r] : D(\mathcal{A}) \subset C_{2\pi} &\rightarrow L(C_{2\pi}, C_{2\pi}), \\ q &\mapsto \tilde{K}'[r](q) \end{aligned}$$

gegeben. Dabei ist $\tilde{K}'[r](q) : C_{2\pi} \rightarrow C_{2\pi}$ der lineare Integraloperator, welcher durch

$$(\tilde{K}'[r](q)\psi)(t) := \int_0^{2\pi} k'(t, \tau; r, q)\psi(\tau) d\tau, \quad t \in [0, 2\pi)$$

gegeben ist. Der Integralkern $k'(t, \tau; r, q)$ ist für $t \neq \tau$ die Fréchet Ableitung der Abbildung $r \mapsto k(\cdot, \cdot; r)$.

Beweis: siehe [6] Theorem 18.17. □

Als nächstes schauen wir uns an, wie sich die Randwerte des modifizierten Doppelschichtpotentials für eine Störung der Randkurve Σ ändern. Hierzu definieren wir die parametrisierte Form des modifizierten Doppelschichtpotentials als

$$(\tilde{V}_r\psi)(z) := \int_0^{2\pi} \tilde{v}(z, \tau; r)\psi(\tau) d\tau, \quad z \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{C},$$

mit dem Kern

$$\tilde{v}(t, \tau; r) = \left\langle 2[x'(\tau)]^\perp, \text{grad}_y \Phi(x(t), x(\tau)) \right\rangle + 2|x'(\tau)|, \quad z \in G, \tau \in [0, 2\pi].$$

Darüber hinaus führen wir noch den Integraloperator $\tilde{V}'[r](q)$ ein, mit dem Kern

$$\tilde{v}'(z, \tau; r, q) = \tilde{v}(z, \tau; r, q) + \left\langle [h'(\tau)]^\perp, \text{grad}_y \Phi(z, x(\tau)) \right\rangle + \frac{\langle x'(\tau), h'(\tau) \rangle}{|x'(\tau)|},$$

wobei

$$\tilde{v}'(z, \tau; r, q) = \left\langle [x'(\tau)]^\perp, \Phi_y''(z, x(\tau)) \right\rangle h(\tau)$$

mit der Hesse Matrix $\Phi_y''(x, y)$ von $\Phi(x, y)$ nach y . Für abgeschlossene Teilmengen $W \subset \mathbb{R}^2 \setminus \bar{C}$ hat der Kern von \tilde{V}_r keine Singularitäten. Daher ist die Fréchet-Ableitung der Abbildung

$$\begin{aligned} B : D(\mathcal{A}) \subset C_{2\pi} &\rightarrow L(C_{2\pi}, C(W)), \\ r &\mapsto \tilde{V}_r \end{aligned}$$

durch den linearen und beschränkten Operator

$$\begin{aligned} B'[r] : D(\mathcal{A}) \subset C_{2\pi} &\rightarrow L(C_{2\pi}, C(W)), \\ q &\mapsto \tilde{V}'[r](q) \end{aligned}$$

gegeben. Diese Überlegungen geben uns eine einfache Möglichkeit, die Fréchet-Ableitung für den Operator P_r anzugeben, dieser entspricht dem Fall $W = \Gamma$. Benutzen wir noch, dass die stetigen Funktionen beschränkt in die L^2 -Funktionen eingebettet sind, so können wir dieses Ergebniss wie folgt festhalten:

Satz 5.6 *Der nichtlineare Operator*

$$\begin{aligned} B : D(\mathcal{A}) \subset C_{2\pi} &\rightarrow L(C_{2\pi}, L^2(\Gamma)), \\ r &\mapsto P_r \end{aligned}$$

ist Fréchet-differenzierbar. Die Fréchet-Ableitung ist durch den linearen und beschränkten Operator

$$\begin{aligned} B'[r] : D(\mathcal{A}) \subset C_{2\pi} &\rightarrow L(C_{2\pi}, L^2(\Gamma)), \\ q &\mapsto P'[r](q) \end{aligned}$$

gegeben. Dabei ist $P'[r] = \tilde{V}'[r]$ für $W = \Gamma$.

Hiermit können wir die Änderung der Sprungrelation für den Operator \tilde{K} auf der gestörten Randkurve angeben.

Satz 5.7 *Für $\psi \in C_{2\pi}^{1,\alpha}$ ist $\tilde{V}'_{r,q}\psi$ eine beschränkte harmonische Funktion in $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{C}$ und stetig in $\mathbb{R}^2 \setminus C$ mit den Randwerten*

$$\tilde{V}'_{r,q}\psi + \left\langle h, \text{grad } \tilde{V}_r\psi \right\rangle = \frac{1}{2} \tilde{K}'_{r,q}\psi \quad \text{auf } \Sigma, \quad (5.6)$$

wobei $h(t) = q(t)(\cos t, \sin t)$.

Beweis: siehe [6] Theorem 18.8. □

Bislang spielte die konkrete Form der Randkurve Γ keine Rolle, so dass eine Unterscheidung für die Operatoren P_\circ und P_\square nicht notwendig war. Für die Untersuchung der Operatoren H_i und Q_i müssen wir diese jedoch berücksichtigen. Es gilt der folgende Satz:

Satz 5.8

i) *Der nichtlineare Operator*

$$\begin{aligned} C_{\circ} : D(\mathcal{A}) \subset C_{2\pi} &\rightarrow L(L_{2\pi}^2, C_{2\pi}), \\ r &\mapsto H_{\circ, r} \end{aligned}$$

ist Fréchet-differenzierbar. Die Fréchet-Ableitung ist durch den linearen und beschränkten Operator

$$\begin{aligned} C'_{\circ}[r] : D(\mathcal{A}) \subset C_{2\pi} &\rightarrow L(L_{2\pi}^2, C_{2\pi}), \\ q &\mapsto H'_{\circ}[r](q) \end{aligned}$$

gegeben. Dabei bezeichnet $H'_{\circ}[r](q) : L_{2\pi}^2 \rightarrow C_{2\pi}$ den linearen Operator, welcher durch

$$(H'_{\circ}[r](q)\varphi)(t) := 2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} n \{a_n(\varphi) \cos nt + b_n(\varphi) \sin nt\} [r(t)]^{n-1} \right) q(t)$$

für $t \in [0, 2\pi]$.

ii) *Der nichtlineare Operator*

$$\begin{aligned} C_{\square} : D(\mathcal{A}) \subset C_{2\pi} &\rightarrow L(L_4^2, C_{2\pi}), \\ r &\mapsto H_{\square, r} \end{aligned}$$

ist Fréchet-differenzierbar. Die Fréchet-Ableitung ist durch den linearen und beschränkten Operator

$$\begin{aligned} C'_{\square}[r] : D(\mathcal{A}) \subset C_{2\pi} &\rightarrow L(L_4^2, C_{2\pi}), \\ q &\mapsto H'_{\square}[r](q) \end{aligned}$$

gegeben. Dabei bezeichnet $H'_{\square}[r](q) : L_4^2 \rightarrow C_{2\pi}$ den linearen Operator, welcher durch

$$(H'_{\square}[r](q)\varphi)(t) := 2 \left(\sum_{i=1}^4 \sum_{n=1}^{\infty} n\pi a_{i,n}(\varphi) \langle d_{i,n}(x(t)), K(t) \rangle \right) q(t)$$

gegeben, wobei $K(t) := (\cos t, \sin t)$ mit $t \in [0, 2\pi]$.

iii) *Es gilt die Beziehung*

$$(H'_i[r](q)\varphi)(t) = 2 \langle \text{grad } v_{i,\varphi}(x(t)), h(t) \rangle, \quad i \in \{\square, \circ\}.$$

Beweis:

Die Wohldefiniertheit der Operatoren ist sofort ersichtlich und wieder einmal eine Konsequenz aus der gleichmäßigen Konvergenz der Fourierreihen in Ω_\square und Ω_\circ . Die Behauptung *iii)* bekommen wir durch formale Differentiation der parametrisierten Operatoren nach r . Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} 2v_{i,\varphi}(rK) &= \langle 2 \operatorname{grad} v_{i,\varphi}(rK), K \rangle q \\ &= \langle 2 \operatorname{grad} v_{i,\varphi}(rK), qK \rangle \\ &= \langle 2 \operatorname{grad} v_{i,\varphi}(x, h) \rangle. \end{aligned}$$

Die Fréchet-Ableitung der Abbildungen $r \mapsto ss_n(rK)$ und $r \mapsto r^n$ wird durch $q \mapsto \langle d_n(rK), K \rangle q$ und $q \mapsto nr^{n-1}q$ beschrieben. Hiermit erhalten wir zunächst formal die oben angegebenen Darstellungen. Es verbleibt der Nachweis, dass die formal differenzierte Reihe die Fréchet-Ableitung des Operators ist. Dieses erhält man durch Nachrechnen der Definition 2.21. \square

Satz 5.9

i) Der nichtlineare Operator

$$\begin{aligned} D_\circ : D(\mathcal{A}) \subset C_{2\pi} &\rightarrow L(L_{2\pi}^2, C_{2\pi}), \\ r &\mapsto Q_{\circ,r} \end{aligned}$$

ist Fréchet-differenzierbar. Die Fréchet-Ableitung ist durch den linearen und beschränkten Operator

$$\begin{aligned} D'_\circ[r] : D(\mathcal{A}) \subset C_{2\pi} &\rightarrow L(L_{2\pi}^2, C_{2\pi}), \\ q &\mapsto Q'_\circ[r](q) \end{aligned}$$

gegeben. Dabei bezeichnet $Q'_\circ[r](q) : L_{2\pi}^2 \rightarrow C_{2\pi}$ den linearen Operator, welcher durch

$$(Q'_\circ[r](q)\varphi)(t) := -2 \int_{\Gamma_\circ} \varphi ds \frac{q(t)}{r(t)}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

ii) Der nichtlineare Operator

$$\begin{aligned} D_\square : D(\mathcal{A}) \subset C_{2\pi} &\rightarrow L(L_4^2, C_{2\pi}), \\ r &\mapsto Q_{\square,r} \end{aligned}$$

ist. Die Fréchet-Ableitung ist durch den linearen und beschränkten Operator

$$D'_\square[r] : D(\mathcal{A}) \subset C_{2\pi} \rightarrow L(L_4^2, C_{2\pi}),$$

$$q \mapsto Q'_\square[r](q)$$

gegeben. Dabei bezeichnet $Q'_\square[r](q) : L_4^2 \rightarrow C_{2\pi}$ den linearen Operator, welcher durch

$$(Q'_\square[r](q)\varphi)(t) := -2 \int_{\Gamma_\square} \varphi ds \frac{q(t)}{r(t)}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

iii) Es gilt die Beziehung

$$(Q'_i[r](q)\varphi)(t) = 2 \langle \text{grad } s_{i,\varphi}(x(t), h(t)), h(t) \rangle, \quad i \in \{\square, \circ\}.$$

Beweis:

Die Behauptung iii) folgt aus der formalen Differentiation der parametrisierten Operatoren nach r . Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr} 2s_{i,\varphi}(rK) &= \langle 2 \text{grad } s_{i,\varphi}(rK), K \rangle q \\ &= \langle 2 \text{grad } s_{i,\varphi}(rK), qK \rangle \\ &= \langle 2 \text{grad } s_{i,\varphi}(x, h) \rangle. \end{aligned}$$

Aus der Kettenregel erhalten wir für die Fréchet-Ableitung der Abbildung $r \mapsto \ln \frac{1}{r}$ die lineare Abbildung $q \mapsto -\frac{q}{r}$. \square

Nach diesen Vorarbeiten, können wir den Satz 5.4 beweisen.

Beweis von Satz 5.4: Wir untersuchen zunächst, wie sich die Funktion u , d.h. das elektrostatische Potential in Abhängigkeit von der Randkurve ändert. Dabei charakterisieren wir die Funktion $u'_{r,q}$ als eine in G harmonische Funktion. Die Änderung des Stromflusses von der Randkurve erhalten wir dann als Normalableitung von $u'_{r,q}$ auf Γ . Für den Beweis unterschlagen wir den Gebietsindex. Wir können die Lösung des Randwertproblems (DD- G) in der Form

$$u_r = \begin{pmatrix} v + s & \tilde{V}_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I + R & P_r \\ H_r + Q_r & \tilde{K}_r - I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{in } G$$

schreiben. Da alle Einträge der Matrix differenzierbar sind, folgt auch die Differenzierbarkeit von

$$r \mapsto \begin{pmatrix} I + R & P_r \\ H_r + Q_r & \tilde{K}_r - I \end{pmatrix}^{-1}$$

mit der Ableitung

$$- \begin{pmatrix} I + R & P_r \\ H_r + Q_r & \tilde{K}_r - I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & P'_{r,q} \\ H'_{r,q} + Q'_{r,q} & \tilde{K}'_{r,q} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} I + R & P_r \\ H_r + Q_r & \tilde{K}_r - I \end{pmatrix}^{-1}.$$

Aus der Kettenregel für die Fréchet-Ableitung erhalten wir

$$u'_{r,q} = \begin{pmatrix} 0 & \tilde{V}'_{r,q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

$$- \begin{pmatrix} v + s & \tilde{V}_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I + R & P_r \\ H_r + Q_r & \tilde{K}_r - I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & P'_{r,q} \\ H'_{r,q} + Q'_{r,q} & \tilde{K}'_{r,q} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix}, \quad (5.8)$$

wobei wir zur Abkürzung

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} I + R & P_r \\ H_r + Q_r & \tilde{K}_r - I \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}$$

definiert haben. Der Anteil (5.8) beschreibt eine in G harmonische Funktion u_1 , welche die Randwerte

$$\begin{aligned} u_1 &= -P'_{r,q}\psi \quad \text{auf } \Gamma, \\ u_1 &= -\frac{1}{2}H'_{r,q}\varphi - \frac{1}{2}Q'_{r,q}\varphi - \frac{1}{2}\tilde{K}'_{r,q}\psi \quad \text{auf } \Sigma \end{aligned}$$

annimmt. Damit erhalten wir

$$u'_{r,q} = \tilde{V}'_{r,q}\psi + u_1 \quad \text{in } G.$$

Aus unseren vorherigen Untersuchungen wissen wir, dass $\tilde{V}'_{r,q}\psi$ eine in G harmonische Funktion definiert. Mit Hilfe des Satzes 5.7 erhalten wir für die Randwerte

$$u'_{r,q} = \tilde{V}'_{r,q}\psi - P'_{r,q}\psi = 0 \quad \text{auf } \Gamma$$

und

$$\begin{aligned} u'_{r,q} &= \frac{1}{2}\tilde{K}'_{r,q}\psi - \langle h, \text{grad}(\tilde{V}_r\psi) \rangle - \frac{1}{2}H'_{r,q}\varphi - \frac{1}{2}Q'_{r,q}\varphi - \frac{1}{2}\tilde{K}'_{r,q}\psi \\ &= -\langle h, \text{grad}(\tilde{V}_r\psi) \rangle - \frac{1}{2}H'_{r,q}\varphi - \frac{1}{2}Q'_{r,q}\varphi \\ &= -\langle h, \text{grad}(\tilde{V}_r\psi) \rangle - \langle \text{grad } v_\varphi, h \rangle - \langle \text{grad } s_\varphi, h \rangle \\ &= -\langle \text{grad}(\tilde{V}_r\psi + v_\varphi + s_\varphi), h \rangle \\ &= -\langle \text{grad } u, h \rangle \quad \text{auf } \Sigma. \end{aligned}$$

Es läßt sich zeigen, dass der Doppelschichtpotentialoperator K stetige Funktionen auf Hölder-stetige Funktionen abbildet und hölderstetige auf Hölder-stetig differenzierbare. Gleiches gilt demnach auch für den Operator \tilde{K} , so dass wir aus einem Regularitätsvergleich in der Gleichung $H_r\varphi + Q_r\varphi + \tilde{K}_r\psi - \psi = 0$ die gewünschte Regularität $\psi \in C^{1,\alpha}(\Sigma)$ erhalten. Dieses rechtfertigt die Anwendung von (5.6). Die Randwerte auf Γ sind aus H^1 , so dass die Normalableitung existiert. Dieses zeigt insgesamt die Behauptung. \square

5.4 Eine effiziente Berechnung der Fréchet-Ableitung

Wie wir gesehen haben, können wir die Fréchet-Ableitung durch Lösen eines Vorwärtsproblems gewinnen, mit den Randwerten $-\langle \text{grad } u, h \rangle$ auf Σ und 0 auf Γ . Zerlegen wir den Gradienten von u in einen Tangential- und Normalanteil, so erkennt man, dass die Tangentialkomponente entfällt, da u auf Σ konstant ist. Wir erhalten somit

$$\langle \text{grad } u, h \rangle = \frac{\partial u}{\partial \nu} \langle h, \nu \rangle \quad \text{auf } \Sigma.$$

Es genügt deshalb, nur die Normalableitung auf Σ zu berechnen. Die nächste Frage, die sich stellt ist: Wie können wir dieses mit einem möglichst geringem numerischem Aufwand bewerkstelligen. Eine Möglichkeit ist, die Normalableitung aus der Darstellung von u direkt zu bestimmen, d.h., man berechnet die Normalableitung des Potential- und Fourieranteils und wertet diese auf Σ aus. Dieses bedeutet für den Potentialanteil die Auswertung eines starksingulären Integrals, was einen erhöhten numerischen Aufwand erfordert. Als Alternative wählen wir daher einen Zugang über den Green'schen Darstellungssatz. Es ist hierbei zu beachten, dass sich die Kurve Σ in jedem Newtonschritt ändert. Um dieses genau zu fassen, definieren wir die Randkurven

$$\Sigma_n := \{r_n(t)(\cos t, \sin t) : t \in [0, 2\pi]\}, \quad n \geq 0.$$

Durch diese werden Gebiete C_n berandet. Mit G_n bezeichnen wir $\Omega \setminus \bar{C}_n$ und mit u_n die Lösung des Randwertproblems (DD- G_n) zu den Randwerten $f \in C^2(\Gamma)$ und $g = 0$. Der Stromfluss für die Lösung u_n wird durch $J_n := \frac{\partial u_n}{\partial \nu}|_{\Sigma_n}$ gegeben. Mit Hilfe des Green'schen Darstellungssatzes erhalten wir für die Lösung im n -ten Newtonschritt die Darstellung

$$u_n(x) = \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial u_n}{\partial \nu}(y) \Phi(x, y) - u_n(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \right\} ds - \int_{\Sigma_n} \frac{\partial u_n}{\partial \nu}(y) \Phi(x, y) ds, \quad x \in G_n,$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass u_n auf Σ_n verschwindet. Führen wir den Grenzübergang $x \rightarrow \Sigma_n$ aus und berechnen die Normalableitung, so erhalten wir die Gleichung

$$(I + K_n^*) \frac{\partial u_n}{\partial \nu}(x) = 2 \int_{\Gamma} \left\{ \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} J_n(y) - \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} f(y) \right\} ds, \quad x \in \Sigma_n.$$

Dabei haben wir die uns bekannten Größen, nämlich die Spannung $f = u|_{\Gamma}$ und den Stromfluss $J_n = \frac{\partial u_n}{\partial \nu}|_{\Gamma}$ eingesetzt. K_n^* bezeichnet den Operator K^* , definiert auf der Kurve Σ_n . Aus der Potentialtheorie ist bekannt, dass der Operator $(I + K_n^*)$ auf $C(\Sigma_n)$ nicht injektiv ist. Um eine eindeutig lösbare Gleichung zu erhalten, nutzen wir die Harmonizität von u_n und addieren die Gleichung

$$0 = 2 \int_{\Gamma} \frac{\partial u_n}{\partial \nu} ds - 2 \int_{\Sigma_n} \frac{\partial u_n}{\partial \nu} ds.$$

Damit erhalten wir die Gleichung

$$(I + \tilde{K}_n^*) \frac{\partial u_n}{\partial \nu} |_{\Sigma_n} = g_n, \quad (5.9)$$

wobei wir zur Abkürzung den Operator

$$(\tilde{K}_n^* \psi)(x) := 2 \int_{\Sigma_n} \left\{ \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} + 1 \right\} \psi(y) ds(y), \quad x \in \Sigma_n \quad (5.10)$$

und die Randwerte

$$g_n(x) := 2 \int_{\Gamma} \left\{ \left(\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} + 1 \right) J_n(y) - \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} f(y) \right\} ds(y), \quad x \in \Sigma_n$$

eingeführt haben. Das Korollar 2.39 liefert die eindeutige Lösbarkeit der Gleichung (5.9).

Kapitel 6

Numerik

In diesem Kapitel stellen wir die numerische Behandlung des direkten und inversen Problems vor. Im Abschnitt 6.1 behandeln wir eine Möglichkeit, das Gleichungssystem (4.12) näherungsweise zu lösen. Wir beschränken uns dabei auf die Behandlung des Randwertproblems (DD- G_\circ). Auf analoge Art und Weise kann auch das Problem (DD- G_\square) behandelt werden. Im Abschnitt 6.2 zeigen wir, wie aus den Näherungen für die Dichten, der Stromfluss berechnet werden kann. Im darauf folgenden Abschnitt 6.3 geben wir einige Beispiele für Randwertprobleme im Kreis und Quadrat und versuchen, die beim Quadrat auftretenden numerischen Schwierigkeiten zu erklären. Der letzte Abschnitt dieses Kapitels beschreibt die numerische Behandlung des inversen Problems für den kreisrunden Leiter. Wie gewohnt bezeichnet in diesem Kapitel α die natürliche Parametrisierung der Kurve Γ und β eine 2π -periodische Parametrisierung der Kurve Σ .

6.1 Numerik der direkten Probleme

Wir möchten das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} I_\circ & P_\circ \\ H_\circ + Q_\circ & \tilde{K} + I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_\circ \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ 2g \end{pmatrix} \quad (6.1)$$

näherungsweise lösen, d.h., wir bestimmen eine Näherung an die Dichten φ_\circ und ψ . Hierzu müssen wir das System parametrisieren und die Operatoren durch endlich dimensionale Approximationen ersetzen. Man beachtet, dass der Operator R_\circ der Nulloperator ist und deswegen nicht aufgeführt wird. Zur Abkürzung der Notation definieren wir die Funktionen

$$\tilde{\psi} := \psi \circ \beta, \quad \tilde{f} := f \circ \alpha \quad \text{und} \quad \tilde{g} := g \circ \beta.$$

Für die Funktion φ_\circ ist es nicht notwendig, zwischen der Funktion auf Γ_\circ und der periodischen Funktion auf \mathbb{R} zu unterscheiden. Wir benötigen von dieser Funkti-

on nämlich nur die Fourierkoeffizienten und nicht Funktionswerte an bestimmten Punkten auf der Randkurve.

Für die Näherung der in dem Gleichungssystem auftretenden Integraloperatoren verwenden wir eine Idee, welche auf Nyström zurückgeht. Die Integraloperatoren werden dabei durch eine Quadraturformel ersetzt. Als Quadraturformel verwenden wir die zusammengesetzte Trapezregel, da diese bei periodischen Funktionen die beste Konvergenzordnung besitzt. Konkret bedeutet es das Folgende: Die Integraloperatoren P_\circ und \tilde{K} lassen sich in parametrisierter Form als

$$\tilde{\psi} \mapsto \int_0^{2\pi} k(\cdot; \cdot, \tau) \tilde{\psi}(\tau) d\tau$$

schreiben. Dabei ist der Integralkern für den Operator P_\circ durch

$$k(P_\circ; t, \tau) = \left\{ \frac{\nu(\beta(\tau)) \cdot \{\alpha(t) - \beta(\tau)\}}{2\pi|\alpha(t) - \beta(\tau)|^2} + 1 \right\} |\beta'(\tau)|, \quad t, \tau \in [0, 2\pi]$$

und für den Operator \tilde{K} durch

$$k(\tilde{K}; t, \tau) = \begin{cases} -\frac{1}{\pi} \frac{[\beta'(t)]^\perp \cdot \{\beta(t) - \beta(\tau)\} |\beta'(\tau)|}{|\beta(t) - \beta(\tau)|^2 |\beta'(t)|}, & t \neq \tau \\ \frac{1}{2\pi} \frac{[\beta'(t)]^\perp \cdot \beta''(t)}{|\beta'(t)|^2}, & t = \tau \end{cases}$$

gegeben. Wir unterteilen das Intervall $[0, 2\pi]$ äquidistant mit Schrittweite $h = \pi/N$ und den Knotenpunkten $t_i = i \cdot h$ mit $i = 0, \dots, 2N - 1$. Ersetzen wir das Integral durch die zusammengesetzte Trapezregel, so erhalten wir als Näherung die Operatoren $P_\circ^{(N)}$ und $\tilde{K}^{(N)}$. Diese sind durch die Abbildungsvorschrift

$$\tilde{\psi} \mapsto \frac{\pi}{N} \sum_{n=0}^{2N-1} k(\cdot; \cdot, t_n) \tilde{\psi}(t_n)$$

gegeben, mit den jeweils zum Operator gehörenden Integralkernen.

Behandeln wir jetzt die durch Reihen definierten Operatoren. Der Operator $I_\circ : L^2(\Gamma_\circ) \rightarrow L^2(\Gamma_\circ)$ war durch

$$(I_\circ \varphi_\circ)(x) = \frac{a_0(\varphi_\circ)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n(\varphi_\circ) \cos n\theta + b_n(\varphi_\circ) \sin n\theta\},$$

mit $x = (\cos \theta, \sin \theta) \in \Gamma_\square$ gegeben. Da α als die natürliche Parametrisierung von Γ_\circ gewählt wurde, entspricht der Winkel θ der Bogenlänge t . Als Näherung des Operators definieren wir daher

$$(I_\circ^{(N)} \varphi_\circ)(t) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N-1} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) + a_N \cos Nt, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Wenden wir uns dem Operator H_\circ zu. Dieser ist durch

$$(H_\circ \varphi_\circ)(x) = a_0(\varphi_\circ) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n(\varphi_\circ) \cos n\theta + b_n(\varphi_\circ) \sin n\theta\} r^n$$

gegeben, mit $x = (r \cos \theta, r \sin \theta) \in \Sigma$. Auch hier gewinnen wir eine sinnvolle Näherung durch Abschneiden der Reihe, d.h. wir definieren den Operator $H_\circ^{(N)}$ durch die Vorschrift

$$(H_\circ^{(N)} \varphi_\circ)(x) = a_0 + 2 \sum_{n=1}^{N-1} \{a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta\} r^n + a_N \cos N\theta r^N,$$

mit $x = (r \cos \theta, r \sin \theta) \in \Sigma$. Als Näherung des Operators Q_\circ definieren wir den Operator $Q_\circ^{(N)}$, durch

$$(Q_\circ^{(N)} \varphi_\circ)(t) = -2\pi a_0 \ln |\beta(t)|, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Wir haben dabei ausgenutzt, dass $\int_{\Gamma_\circ} \varphi ds = \pi a_0$ ist. Um ein volldiskretes Gleichungssystem zu erhalten, ersetzen wir in dem Gleichungssystem (6.1) die Operatoren durch ihre endlich dimensionalen Approximationen und fordern, dass die Gleichungen in den Punkten t_i für $i = 0, \dots, 2N - 1$ erfüllt sein, d.h. wir bekommen die $4N$ Gleichungen

$$\begin{aligned} (I_\circ^{(N)} \varphi_\circ)(t_i) &+ (P_\circ^{(N)} \tilde{\psi})(t_i) &= \tilde{f}(t_i), \\ (H_\circ^{(N)} \varphi_\circ)(t_i) + (Q_\circ^{(N)} \varphi_\circ)(t_i) &+ (\tilde{K}^{(N)} \tilde{\psi})(t_i) + \tilde{\psi}(t_i) &= 2\tilde{g}(t_i). \end{aligned}$$

Die $4N$ Unbekannten sind die $N + 1$ Fouriercosinuskoeffizienten a_0, \dots, a_N und $N - 1$ Fouriersinuskoeffizienten b_1, \dots, b_{N-1} , sowie die $2N$ Funktionswerte $\tilde{\psi}_i := \tilde{\psi}(t_i)$. Wir möchten dieses auch in einer Matrixschreibweise angeben. Hierzu definieren wir die Vektoren

$$\begin{aligned} \Phi^{(N)} &:= (a_0, a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_{N-1})^t, \\ \Psi^{(N)} &:= (\tilde{\psi}_0, \dots, \tilde{\psi}_{2N-1})^t, \\ F^{(N)} &:= (\tilde{f}_0, \dots, \tilde{f}_{2N-1})^t, \\ G^{(N)} &:= (\tilde{g}_0, \dots, \tilde{g}_{2N-1})^t, \end{aligned}$$

wobei zur weiteren Abkürzung $\tilde{f}_i := \tilde{f}(t_i)$ und $\tilde{g}_i := \tilde{g}(t_i)$ gesetzt wurde. Der Operator I_\circ wird durch die $2N \times 2N$ Matrix

$$A_{1,1}^{(N)} := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \cos t_0 & \cdots & \cos Nt_0 & \sin t_0 & \cdots & \sin(N-1)t_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2} & \cos t_{2N-1} & \cdots & \cos Nt_{2N-1} & \sin t_{2N-1} & \cdots & \sin(N-1)t_{2N-1} \end{pmatrix}$$

dargestellt. Die Matrix für den Operator $H_{\circ}^{(N)} + Q_{\circ}^{(N)}$ wird durch die $2N \times 2N$ Matrix

$$A_{2,1}^{(N)} := \begin{pmatrix} C^{(N)} & S^{(N)} \end{pmatrix}$$

beschrieben, wobei $C^{(N)}$ die $2N \times (N+1)$ Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 - 2\pi \ln r_0 & 2 \cos(\theta_0) r_0 & \cdots & 2 \cos(N\theta_0) r_0^N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 - 2\pi \ln r_{2N-1} & 2 \cos(\theta_{2N-1}) r_{2N-1} & \cdots & 2 \cos(N\theta_{2N-1}) r_{2N-1}^N \end{pmatrix}$$

und $S^{(N)}$ die $2N \times (N-1)$ Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 \sin(\theta_0) r_0 & \cdots & 2 \sin(N-1)\theta_0 r_0^{N-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 \sin(\theta_{2N-1}) r_{2N-1} & \cdots & 2 \sin(N-1)\theta_{2N-1} r_{2N-1}^{N-1} \end{pmatrix}$$

ist. Hierbei sind $\theta_0, \dots, \theta_{2N-1}$ und r_0, \dots, r_{2N-1} Winkel und Betrag der Punkte $\beta(t_0), \dots, \beta(t_{2N-1})$ in Polarkoordinaten. Für den Operator $P_{\circ}^{(N)}$ erhalten wir die $2N \times 2N$ Matrix

$$A_{1,2}^{(N)} := \frac{\pi}{N} \begin{pmatrix} k(P_{\circ}; t_1, t_1) & \cdots & k(P_{\circ}; t_1, t_{2N-1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k(P_{\circ}; t_{2N-1}, t_1) & \cdots & k(P_{\circ}; t_{2N-1}, t_{2N-1}) \end{pmatrix}$$

und für $\tilde{K}^{(N)} + I^{(N)}$ die $2N \times 2N$ Matrix

$$A_{2,2}^{(N)} := \frac{\pi}{N} \begin{pmatrix} k(\tilde{K}; t_1, t_1) + \frac{\pi}{N} & \cdots & k(\tilde{K}; t_1, t_{2N-1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k(\tilde{K}; t_{2N-1}, t_1) & \cdots & k(\tilde{K}; t_{2N-1}, t_{2N-1}) + \frac{\pi}{N} \end{pmatrix}.$$

Bei der Matrix $A_{2,2}^{(N)}$ ist zu beachten, dass für die Diagonalelemente die Definition der Kernfunktion für den Fall $t = \tau$ auszuwerten ist. Zusammen ergibt sich das Schema

$$\begin{pmatrix} A_{1,1}^{(N)} & A_{1,2}^{(N)} \\ A_{2,1}^{(N)} & A_{2,2}^{(N)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi^{(N)} \\ \Psi^{(N)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F^{(N)} \\ 2G^{(N)} \end{pmatrix}. \quad (6.2)$$

Für die Berechnung des Problems (DD- G_{\square}) sind eine Reihe von Änderungen notwendig. So ist es für den Fall des Quadrates vorteilhafter, ein Vielfaches von vier als Anzahl der Kollokationspunkte zu benutzen. Wir bekommen so jeweils N Fourierkoeffizienten zur Beschreibung der Dichte für die vier Seiten des Quadrates. Des Weiteren müssen wir aufpassen, dass keine Punkte in den Ecken liegen. Auf Grund der Wahl unseres Ansatzes erhalten wir sonst vier Nullspalten und bekommen somit Probleme mit der Invertierbarkeit der Matrix.

Auf eine Konvergenz- und Fehleranalyse wurde in dieser Arbeit verzichtet. Für analytische Randwerte und Randdaten erwarten wir jedoch eine exponentielle Konvergenzrate für die Probleme am Kreis. Dieses spiegelt sich in den numerischen Ergebnissen wieder. Die Konvergenzrate für das Quadrat ist, auf Grund des von uns gewählten Ansatzes, wesentlich schlechter.

6.2 Berechnung des Stromflusses

Haben wir das Randwertproblem (DD- G_\circ) gelöst, so erhalten wir mit Hilfe von $\Phi^{(N)}$ und $\Psi^{(N)}$ eine Näherung des Stromflusses J_\circ im Punkt $\alpha(t) \in \Gamma_\circ$ durch

$$J_\circ^{(N)}(\alpha(t)) = J_F^{(N)}(\alpha(t)) + J_P^{(N)}(\alpha(t)), \quad (6.3)$$

wobei

$$J_F^{(N)}(\alpha(t)) = -\pi a_0 + \sum_{n=1}^{N-1} \{na_n \cos nt + nb_n \sin nt\}$$

und

$$J_P^{(N)}(\alpha(t)) = -\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{2N-1} \left\{ \frac{\nu(\alpha(t)) \cdot \{\alpha(t) - \beta(t_n)\}}{|\alpha(t) - \beta(t_n)|^2} \frac{\nu(\beta(t_n)) \cdot \{\alpha(t) - \beta(t_n)\}}{|\alpha(t) - \beta(t_n)|^2} - \frac{\nu(\alpha(t)) \cdot \nu(\beta(t_n))}{2|\alpha(t) - \beta(t_n)|^2} \right\} \tilde{\psi}(t_n) |\beta'(t_n)|$$

für $t \in [0, 2\pi]$. Hierbei haben wir ausgenutzt, dass

$$\frac{\partial}{\partial \nu(x)} \frac{\partial \Phi}{\partial \nu(y)} = \frac{1}{2\pi} \frac{\nu(x) \cdot \nu(y)}{|x - y|^2} - \frac{1}{\pi} \frac{\nu(x) \cdot \{x - y\}}{|x - y|^2} \frac{\nu(y) \cdot \{x - y\}}{|x - y|^2}.$$

6.3 Numerische Beispiele für das direkte Problem

Um die Korrektheit der Programme zu überprüfen, haben wir für verschiedene Einschlüsse, uns bekannte harmonische Funktionen rekonstruiert und das Konvergenzverhalten überprüft. Für das Randwertproblem (DD- G_\circ) erhielten wir wie erwartet, eine exponentielle Konvergenzrate. Für die Konvergenzrate im Falle des Randwertproblems (DD- G_\square) konnten wir nur lineare Konvergenz nachweisen. Ursache hierfür ist der von uns gewählte Ansatz mit einem Fourierreihenanteil, welcher eine in den Eckpunkten nicht verschwindende Funktion nicht genau approximieren kann. Es treten daher zwangsläufig Oszillationen auf (Gibbs Phänomen),

welche ausschlaggebend für die Konvergenzrate sind. Für die Berechnung des Stromflusses stellt dieses ein schwerwiegendes Problem dar. Da die Oszillationen zum Rand hin verstärkt auftreten, übertragen sie sich auf die Normalableitung. Es war uns daher nicht möglich, den Stromfluss genau genug zu bestimmen, um das inverse Problem mit diesen Daten zu rechnen. Der Versuch, die Oszillationen durch ein- oder mehrmalige Mittelungen zu mindern, war nur bedingt erfolgreich, wie in den Abbildungen 6.3(a) und 6.3(b) zu erkennen ist. Aber auch mit diesen so geglätteten Daten gelang keine Rekonstruktion.

Wir beschreiben jetzt unsere Vorgehensweise zur Überprüfung unserer Programme für die direkten Probleme und bringen anschließend einige Daten, welche die Konvergenzraten belegen. Damit die Fehlerfreiheit der Programme gewährleistet werden kann, sind einige Punkte bei der Wahl der Testfunktionen zu berücksichtigen.

Für die zu rekonstruierende Funktion, haben wir eine Funktion mit Singularität in $C \setminus \{0\}$ gewählt. Besitzt die Funktion keine Singularität in C , so wird sie bereits vollständig durch den Fourierreihenanteil beschrieben, d.h. der Potentialanteil verschwindet. Wählt man für U die Grundlösung mit Quellpunkt im Ursprung, so rekonstruiert die Modifikation s_i diese bereits ausreichend. In beiden Fällen können mögliche Fehler in den Programmteilen, welche die Potentialanteile behandeln, übersehen werden. Für die Testbeispiele in denen wir mit der Grundlösung gearbeitet haben, wurde daher der Quellpunkt vom Ursprung verschieden gewählt.

Die Randwerte bekommen wir durch Einschränkung von U auf die entsprechenden Randkurven. Für das Quadrat ist es ratsam, zuerst die im Abschnitt 3.2 definierte Funktion \tilde{w} zu berechnen und die Randwerte durch $f := (U - \tilde{w})|_{\Gamma}$ und $g := (U - \tilde{w})|_{\Sigma}$ zu definieren. Die Oszillationen werden hierdurch etwas gemindert. Man beachte, dass mit diesen Randwerten die Funktion $U - \tilde{w}$ rekonstruiert wird. Abgesehen von den Randwerten f im Falle des Quadrates, sind alle Randwerte analytisch.

Zwei Gebiete, an denen wir unsere Untersuchungen durchgeführt haben, sind die Ellipse sowie eine Drachenfigur. Die Parametrisierungen der Randkurven sind durch

$$\gamma_E(t) := (0.33 \cos t + 0.12, 0.2 \sin t + 0.03)$$

und

$$\gamma_D(t) := (0.25 \cos t + 0.1625 \cos 2t - 0.1, 0.375 \sin t)$$

gegeben. Als harmonische Funktionen, haben wir die Funktionen

$$U_1(x) := \Phi(x, z^*) + \operatorname{Re} \left\{ \frac{1}{z - 2} \right\}$$

und

$$U_2(x) := \Phi(x, z^*) + \operatorname{Re}\{(z + i)^2 - \sin(z)\}$$

gewählt, mit z^* als Quellpunkt der Grundlösung. Es wurden die Randwertprobleme (DD- G) berechnet und der Fehler in den Punkten P_1, P_2 und P_3 bestimmt. Im Falle des Kreises haben wir $P_1 = (-0.5, 0)$, $P_2 = (-0.65, 0.65)$ und $P_3 = (0.25, -0.25)$ gewählt. Für den Fall des Quadrates wurden die Punkte als $P_1 = (-0.48, 0)$, $P_2 = (-0.25, 0.3)$ und $P_3 = (0.25, -0.25)$ gesetzt. Die Punkte wurden so gewählt, dass zwei in der Nähe der Randkurven, sowie einer mitten im Gebiet G zum Liegen kam. Die Lagebeziehungen der Messpunkte und Kurven ist in den Abbildungen 6.1(a) und 6.1(b) zu erkennen, die Fehler sind in den Abbildungen 6.1(c) und 6.1(d) aufgetragen. Es ist zu erkennen, dass für die Konvergenzrate die Lage der Punkte nicht entscheidend ist. Die Lage des Quellpunktes z^* ist mit * markiert. In beiden Fällen haben wir $z^* = (0.2, 0.05)$ gewählt. Für den Kreis haben wir die Funktion U_1 und für das Quadrat die Funktion U_2 verwendet.

Als nächstes haben wir den Stromfluss berechnet. Für den Kreis haben wir hierzu die Normalableitung der Funktion U auf Γ_\circ bestimmt und mit dem von uns berechneten Stromfluss an 400 Punkten verglichen. Anschließend haben wir das Betragsmaximum als Näherung für die Maximumsnorm gewählt. Die Ergebnisse für die Funktion U_2 und das Gebiet Ω_\circ mit ellipsenförmigen Einschluss, sind in der Abbildung 6.2(a) zu sehen. Es lag in diesem Fall sogar exponentielle Konvergenz vor. In den Abbildungen 6.2(b) und 6.2(c) sind die Stromanteile $J_{\circ,F}$ und $J_{\circ,P}$ dargestellt, welche mit 64 Randpunkten für das direkte Problem berechnet wurden. Auffallend ist die Dominanz des Fourieranteils, welcher um etwa zwei Zehnerpotenzen größer ist als der Potentialanteil.

Schauen wir uns den Fall für das Quadrat an. Die Theorie besagt, dass der genäherte Stromfluss gegen den wahren Stromfluss in der L^2 -Norm konvergieren muss. Dieser Nachweis gelang nicht. Schuld hieran sind die aufgetretenen Oszillationen im Fourieranteil $J_{\square,F}^{(N)}$. Diese können zwar durch die Anwendung des Fejér-Mittels gemindert werden, aber auch für den so geglätteten Stromfluss konnte keine Konvergenz nachgewiesen werden. Allenfalls qualitativ war eine Konvergenz der so gemittelten Werte zu beobachten. Ein Nachteil, den die Mittelung mit sich bringt, ist ein „Unterschwingen“ der Lösung in der Nähe der Unstetigkeitsstellen. Das bedeutet, dass sich die gemittelte Lösung stärker von der wahren Lösung an den Unstetigkeitsstellen entfernt. In den Abbildungen 6.3(a) und 6.3(b) ist dieses gut zu erkennen. Die Abbildung 6.3(c) zeigt den Stromanteil $J_{\square,P}$. Wie schon im Falle des Kreises ist dieser wesentlich kleiner im Vergleich zum Fourieranteil. Für das inverse Problem ist im Wesentlichen nur der Potentialanteil ausschlaggebend, welcher aber für das Quadrat in den Oszillationen des Fourieranteils regelrecht verloren geht. In der Abbildung 6.3(d) sehen wir den von uns berechneten Stromfluss mit zweifacher Mittelung und den wahren Stromfluss.

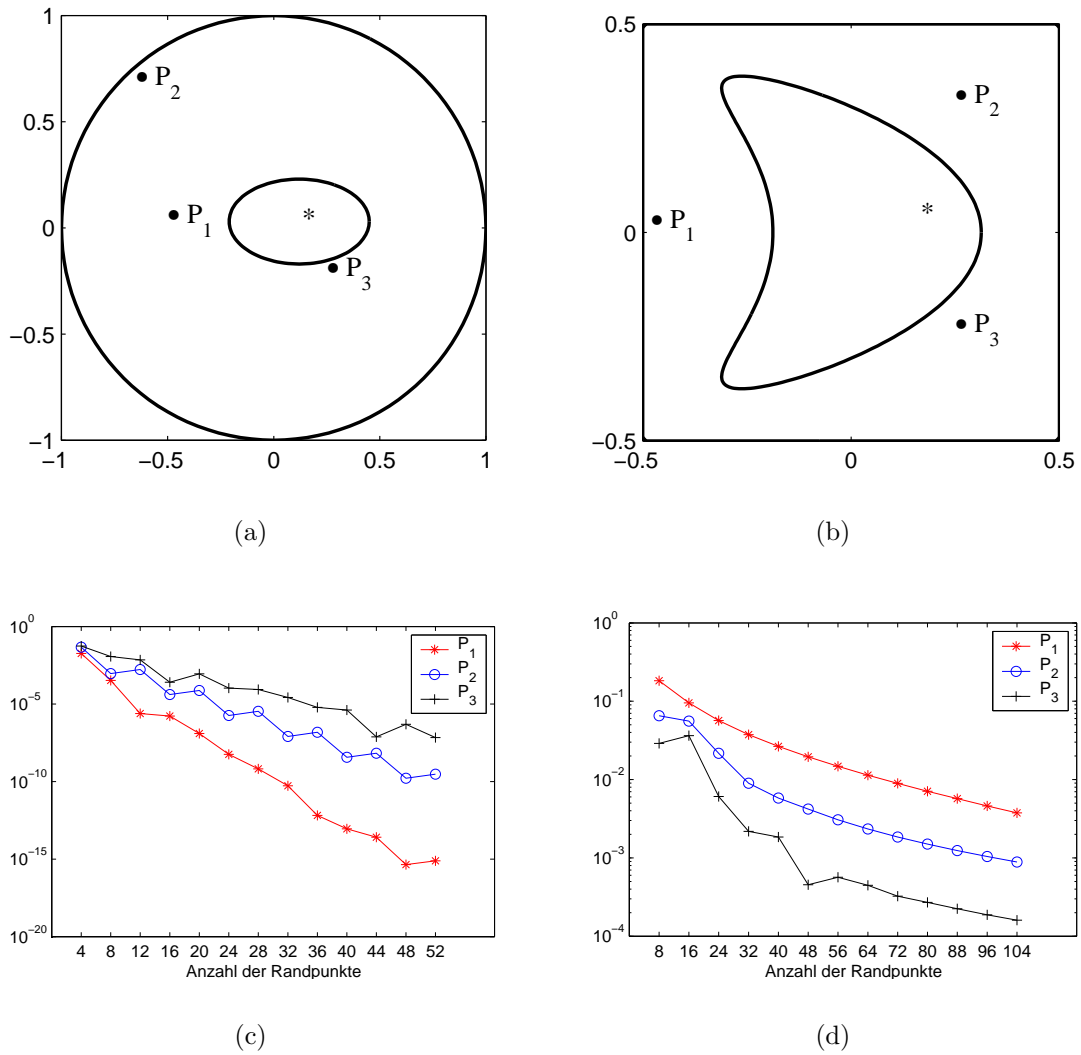


Abb. 6.1: Die Gebiete G_\circ und G_\square mit den Messpunkten P_1, P_2 und P_3 , sowie die dazu gehörigen Fehler. (a) Ω_\circ mit ellipsenförmigem Einschluss. (b) Ω_\square mit drachenförmigem Einschluss. (c) Absoluter Fehler des Potentials in den Messpunkten für das Gebiet G_\circ und die Funktion U_1 . (d) Absoluter Fehler des Potentials in den Messpunkten für das Gebiet G_\square und die Funktion U_2 .

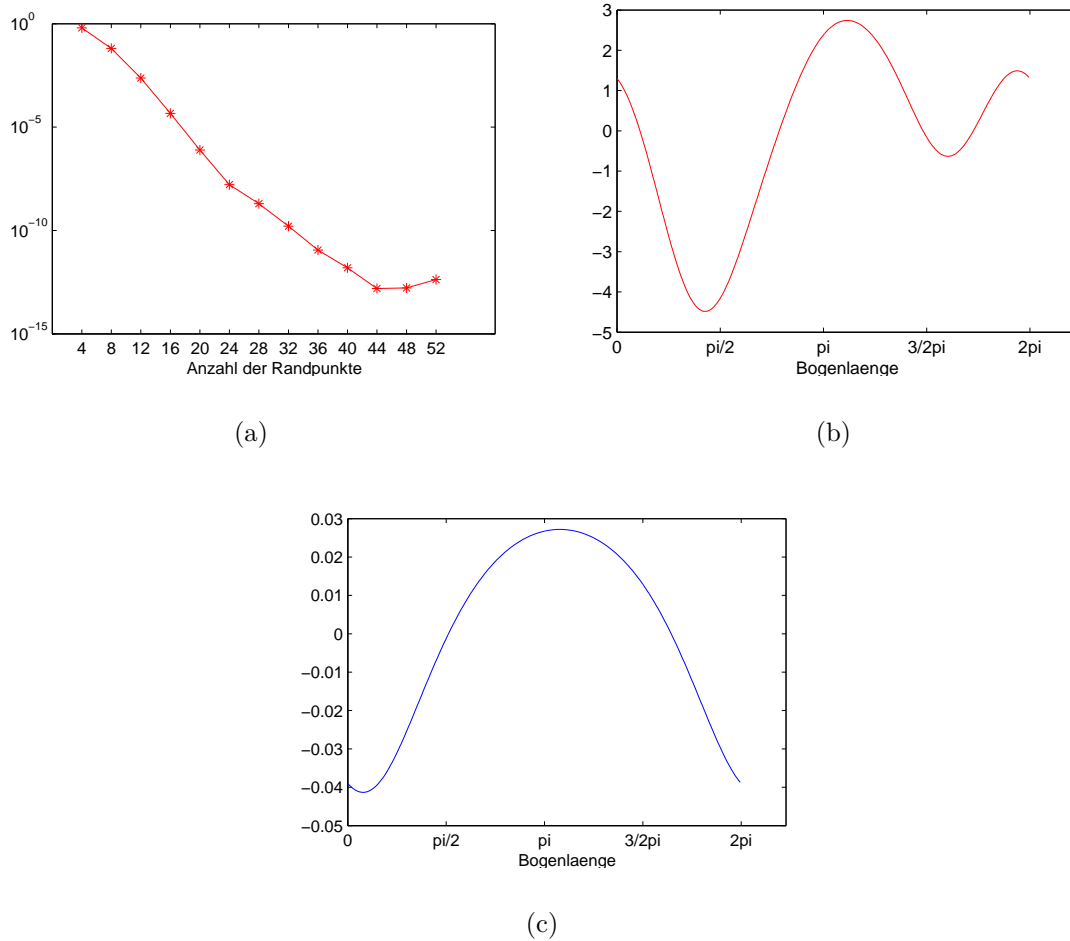


Abb. 6.2: Die Stromanteile und Fehler für das Gebiet Ω_o mit ellipsenförmigem Einschluss. (a) Eine Näherung für den Fehler des Stromflusses $\|J_o - J_o^{(N)}\|_\infty$. (b) Der Fourieranteil des Stromflusses $J_{o,F}$. (c) Der Potentialanteil des Stromflusses $J_{o,P}$.

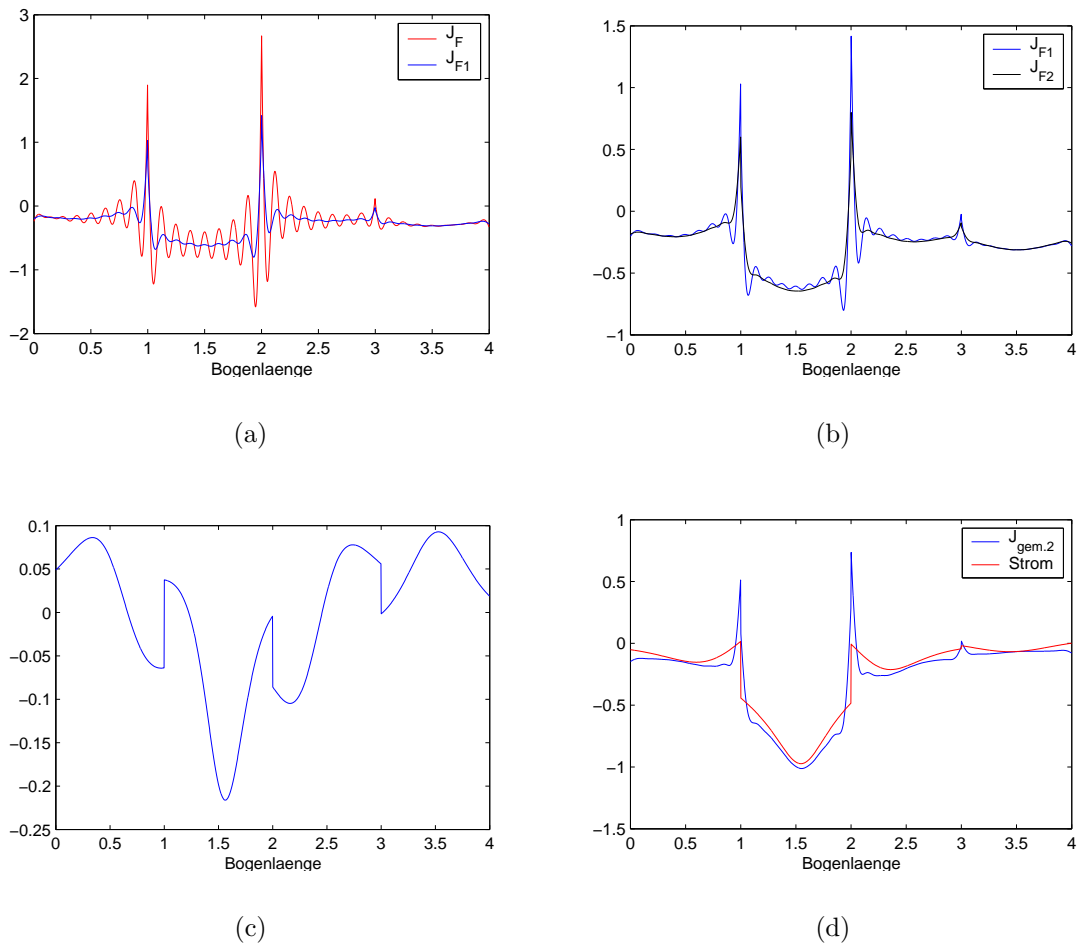


Abb. 6.3: Die Stromanteile J_F und J_P , sowie die ersten und zweiten Fejér-Mittel J_{F1} und J_{F2} von J_F für das Gebiet Ω_\square mit drachenförmigem Einschluss. (a) Der Fourieranteil J_F und das erste Fejér-Mittel. (b) Das erste und zweite Fejér-Mittel des Fourieranteils J_F . (c) Der Potentialanteil J_P des Stromflusses. (d) Das zweite Fejér-Mittel des Stromflusses J und der wahre Stromfluss.

6.4 Numerik der inversen Probleme

Für die numerische Behandlung des inversen Problems folgen wir den Ausführungen in [7].

Um das inverse Problem numerisch zu berechnen, wählen wir einen endlich dimensionalen Unterraum W_M der Dimension $2M+1$. Wir können somit die Gleichung (5.5) approximativ lösen, durch Kollokation an N_I Punkten $x_1, \dots, x_{N_I} \in \Gamma_\circ$. Schreiben wir q bezüglich einer Basis q_1, \dots, q_{2M+1} als

$$q = \sum_{j=1}^{2M+1} d_j q_j,$$

so erhalten wir anstelle der Gleichung (5.5) das lineare Gleichungssystem

$$\sum_{j=1}^{2M+1} d_j \mathcal{A}'[r](q_j)(x_i) = J_{mess}(x_i) - \mathcal{A}(r)(x_i), \quad i = 1, \dots, N_I, \quad (6.4)$$

mit den reellen Koeffizienten d_1, \dots, d_{2M+1} . Im Allgemeinen haben wir mehr Kollokationspunkte als Freiheitsgrade für die Radiusfunktion. In diesem Fall ist das Gleichungssystem (6.4) überbestimmt und muss durch die Methode der kleinsten Quadrate gelöst werden. Da die Gleichung darüber hinaus auch noch schlechtgestellt ist, muss sie stabilisiert werden. Wir benutzen hierzu die *Tikhonov-Regularisierung*, welche wir in Form des quadratischen Optimierungsproblems

$$\|Ad - b\|_{L^2}^2 + \alpha \|d\|_{L^2}^2 \quad (6.5)$$

mit Strafterm und Regularisierungsparameter $\alpha > 0$, schreiben können. Dabei ist die Matrix $A \in \mathbb{R}^{N_I \times (2M+1)}$ durch $A_{i,j} := \mathcal{A}'[r](q_j)(x_i)$ gegeben, der Vektor $b \in \mathbb{R}^{N_I}$ durch $b_i := \mathcal{A}(r)(x_i) - J_{mess}(x_i)$ und $d = (d_1, \dots, d_{2M+1}) \in \mathbb{R}^{2M+1}$. Es läßt sich zeigen, dass dies äquivalent zum Lösen des Gleichungssystems

$$(A^T A + \alpha I)d = A^T b \quad (6.6)$$

ist. Gelegentlich trat das Problem auf, dass die Radiusfunktion zu oszillieren anfang. In diesem Fall wurden hochfrequente Anteile stärker „bestraft“, indem anstelle der L^2 -Norm die H^p -Norm mit $p = 1, 2$ für den Strafterm verwendet wurde.

Für konkrete Rechnungen haben wir W_M als den Raum der trigonometrischen Polynome vom Grad kleiner oder gleich M gewählt. Für den Stromfluss J_{mess} haben wir $J_\circ^{(N_D)}$ mit $2N_D = 128$ Punkten verwendet, wobei das ellipsenförmige Gebiet durch die Parametrisierung

$$\gamma_E(t) := (0.4 \cos t + 0.23, 0.25 \sin t)$$

und das drachenförmige Gebiet durch

$$\gamma_D(t) := (0.35 \cos t + 0.2275 \cos 2t - 0.2, 0.525 \sin t)$$

gegeben war. Um kein „invers crime“ zu begehen, wurde das inverse Problem mit $2N_I = 80$ Punkten berechnet. Für die Dimension des Ansatzraumes wurde $2M + 1 = 31$ gewählt. Des Weiteren wurde überprüft, dass die zu rekonstruierenden Randkurven nicht im Ansatzraum lagen, indem wir die Bestapproximationen der Radiusfunktion an W_M bestimmt haben. Sie ist in den nachfolgenden Abbildungen als blau gestrichelte Linie zu erkennen. Anhand dieser Kurve ist auch die Güte der Rekonstruktion besser zu beurteilen, da diese Aufschluss darüber gibt, wie gut die Form/Geometrie der Kurve in dem Ansatzraum aufgelöst werden kann. Als Randwerte haben wir $f_1(t) := \cos(2t) + 2$ und $f_2(t) := \cos(2t)$ mit $t \in [0, 2\pi]$ gewählt. Wir fassen das Vorgehen noch einmal zusammen; dabei bezeichnet der Index n die jeweilige Größe im n -ten Newtonschritt.

Der n -te Newtonschritt

1. Berechne Φ_n und Ψ_n durch Lösen des Gleichungssystems (6.2).
2. Berechne $J_{o,n}$ durch Auswertung der Gleichung (6.3).
3. Berechne q_n durch Lösen der Gleichung (6.5), d.h. :
 - i) Berechne $\frac{\partial u_n}{\partial \nu}$ auf Σ_n durch Lösen der Gleichung (5.9).
 - ii) Berechne $\frac{\partial w_j}{\partial \nu}|_{\Gamma}$, wobei w_j die Funktion aus Theorem 5.4 ist, zu den Randwerten $w_j = 0$ auf Γ und $w_j = -\frac{\partial u_n}{\partial \nu} \langle q_{n,j} K, \nu \rangle$ auf Σ_n , für $j = 1, \dots, N_I$.
4. Berechne das Update $r_{n+1} = r_n + q_n$, .
5. Wiederhole die Schritte 1 bis 4, bis ein geeignetes Abbruchkriterium erfüllt ist.

Kommen wir jetzt zur Beschreibung eines Abbruchkriteriums. Wir haben eine maximale Iterationsanzahl $I_{max} = 150$ gewählt. Des Weiteren haben wir den relativen Fehler

$$E_n := \frac{\|r_n - r_{n-1}\|_{L^2}}{\|r_n\|_{L^2}} \quad (6.7)$$

der aktuellen Radiusfunktion r_n und den relativen Fehler des Stromflusses

$$F_n := \frac{\|J_{o,n} - J_{mess}\|_{L^2}}{\|J_{mess}\|_{L^2}} \quad (6.8)$$

berechnet und gespeichert. Der Fehler E_n ermöglicht zu erkennen, wann die Newtoniteration zum Erliegen kommt. War daher E_n kleiner als ein Toleranzwert T , so

wurde die Iteration abgebrochen. Für die Rekonstruktionen haben wir $T = 10^{-8}$ gewählt. In jedem Iterationsschritt wurde zudem überprüft, ob die neue Radiusfunktion r_n noch im Definitionsbereich $D(\mathcal{A})$ lag. War dieses nicht der Fall, so wurde die Iteration als nicht erfolgreich beendet. Der Fehler F_n kann als Fehlermaß für die Rekonstruktion angesehen werden. Wir haben uns daher für diejenige Radiusfunktion mit minimalem Fehler F_n entschieden. Die Wahl des Regularisierungsparameters haben wir folgendermaßen gehandhabt: Zu Beginn der Iteration haben wir den Regularisierungsparameter $\alpha = 10$ gewählt und ihn durch den Faktor 1.25 in jedem erfolgreichen Schritt geteilt. Ein Schritt wurde als erfolgreich angesehen, falls die Bedingung $F_n/F_{n-1} < \gamma$ erfüllt wurde. Für γ haben wir 0.85 gewählt. Die Idee hinter dieser Vorgehensweise ist, dass je näher wir einer Lösung kommen, umso weniger stark regularisiert werden muss.

Es folgen einige Beispiele für Rekonstruktionen ohne künstlichen Fehler. Der Nullpunkt ist in den Abbildungen mit \bullet gekennzeichnet. Die Rekonstruktion ist durch die schwarze Kurve gegeben, wobei die Randpunkte für das inverse Problem ebenfalls mit \bullet gekennzeichnet sind. Die rote Kurve zeigt die gesuchte Kurve.

Die Abbildungen 6.4(a)-(f) zeigen Rekonstruktionen einer verschobenen Ellipse. Für die Bilder 6.4(a)-(c) wurden die Randwerte f_1 und für die Bilder 6.4(d)-(f) die Randwerte f_2 gewählt. Der Fehler war bei all diesen Beispielen im 150. Newtonschritt minimal. Da zudem alle Fehler kleiner als 10^{-4} waren erschien eine Fortführung der Iteration nicht sinnvoll. Die in der Abbildung 6.4(a) auftretenden Oszillationen konnten durch die Verwendung der H^p -Norm für den Strafterm gedämpft werden; für $p = 1, 2$ siehe Abbildung 6.4(b) und 6.4(c). Insgesamt sind alle drei Rekonstruktionen als sehr gut zu bewerten. Die Fehler betragen der Reihe nach $9.08 \cdot 10^{-6}$, $3.27 \cdot 10^{-5}$ und $4.60 \cdot 10^{-5}$.

Die Dämpfung der Oszillationen ist noch besser bei Verwendung der Randwerte f_2 zu erkennen. Für diesen Fall ist nur die Rekonstruktion (f) zufriedenstellend. Die Fehler betragen der Reihe nach $5.04 \cdot 10^{-5}$, $6.89 \cdot 10^{-5}$ und $5.78 \cdot 10^{-5}$. Als Startnäherung wurde in allen Fällen der Kreis mit Radius 1/2 gewählt. Auffällig an diesen Rekonstruktionen ist die qualitativ grosse Abweichung zwischen den einzelnen Rekonstruktionen trotz einer quantitativ sehr geringen Abweichung.

Ähnlich schaut dieses beim zweiten Beispiel, einer drachenförmigen Figur, aus. Die Rekonstruktionen in den Abbildungen 6.5(a)-(c) wurden für die Randwerte f_1 unter Verwendung der L^2 , H^1 und H^2 -Norm gemacht, die in den Abbildungen 6.5(d)-(f) für die Randwerte f_2 . Als Startnäherung wurde der Kreis mit Radius 3/4 gewählt. Die Fehler für die Rekonstruktionen (a)-(c) betragen der Reihe nach $1.63 \cdot 10^{-4}$, $2.50 \cdot 10^{-4}$ und $6.48 \cdot 10^{-4}$. Dieser minimale Unterschied überrascht, schaut man sich die qualitativ stark verschiedenen Rekonstruktionen an. Analog hierzu sind die Ergebnisse für die Randwerte f_2 . Hierbei betragen die Fehler $6.74 \cdot 10^{-4}$, $5.74 \cdot 10^{-4}$ und $1.80 \cdot 10^{-3}$. Vergleicht man die Rekonstruktionen (a) und (f), so ist zu vermuten, dass Oszillationen weniger stark den Stromfluss ändern als die nicht korrekte Wiedergabe der Einbuchtung.

Zum Abschluss zeigen wir Rekonstruktionen mit fehlerbehafteten Daten. Hierzu haben wir den Stromfluss J_{mess} durch den gestörten Stromfluss

$$J^\delta := (2\delta\epsilon + 1 - \delta)J_{mess}$$

ersetzt, für $\delta = 0.05$. ϵ ist ein Vektor, mit gleichverteilten Zufallswerten in dem Intervall $[0, 1]$, von der Länge N_I . Wir haben insgesamt 150 Durchläufe mit verschiedenen Fehlern gemacht und aus diesen die beste und die schlechteste Rekonstruktion herausgesucht. Sie sind in den Abbildungen 6.6(a)-(f) zu sehen, wobei wieder verschiedene Normen für den Strafterm verwandt wurden.

6.5 Fazit und Ausblick

Die Behandlung der Randwertprobleme, mittels eines kombinierten Ansatzes aus Fourier- und Potentialanteilen, ist für die Kreisgeometrie als erfolgreich zu bewerten. Die Berechnung des elektrostatischen Potentials und des Stromflusses konnten mit sehr guten Konvergenzraten (in den von uns getesteten Fällen lag exponentielle Konvergenz vor) bewerkstelligt werden. Auch das inverse Problem konnte mit fehlerfreien und fehlerbehafteten Daten zufriedenstellend behandelt werden. Anders sieht die Situation derzeit für das Quadrat aus. Die Berechnung des elektrostatischen Potentials im Inneren von G_\square war zufriedenstellend. Die Berechnung des Stromflusses muss jedoch als gescheitert angesehen werden. Erfolgversprechender erscheint ein Ansatz, welcher die Funktion \tilde{w} mit integriert. Die Koeffizienten von \tilde{w} müssen dabei, als Bestandteile der Dichte φ_\square interpretiert werden. Derzeit ist dem Autor noch kein solcher Ansatz gelungen, welcher auf ein eindeutig lösbares Gleichungssystem führt.

Ein Vorteil dieses Ansatzes, gegenüber einem reinem Potentialansatz, ist, dass sich die Theorie für die direkten Probleme wesentlich einfacher gestaltet. Den Rahmen hierfür bildet die Lösbarkeitstheorie für Operatorgleichungen 2. Art mit kompakten Operatoren. Im Falle eines reinen Potentialansatzes treten singuläre Operatoren auf und die Riesz-Theorie ist nicht direkt anwendbar. Neben einer komplizierten Notation ist ein wesentlicher Nachteil dieses Ansatzes in der Beschränkung auf kreisförmige und rechteckige Gebiete zu sehen.

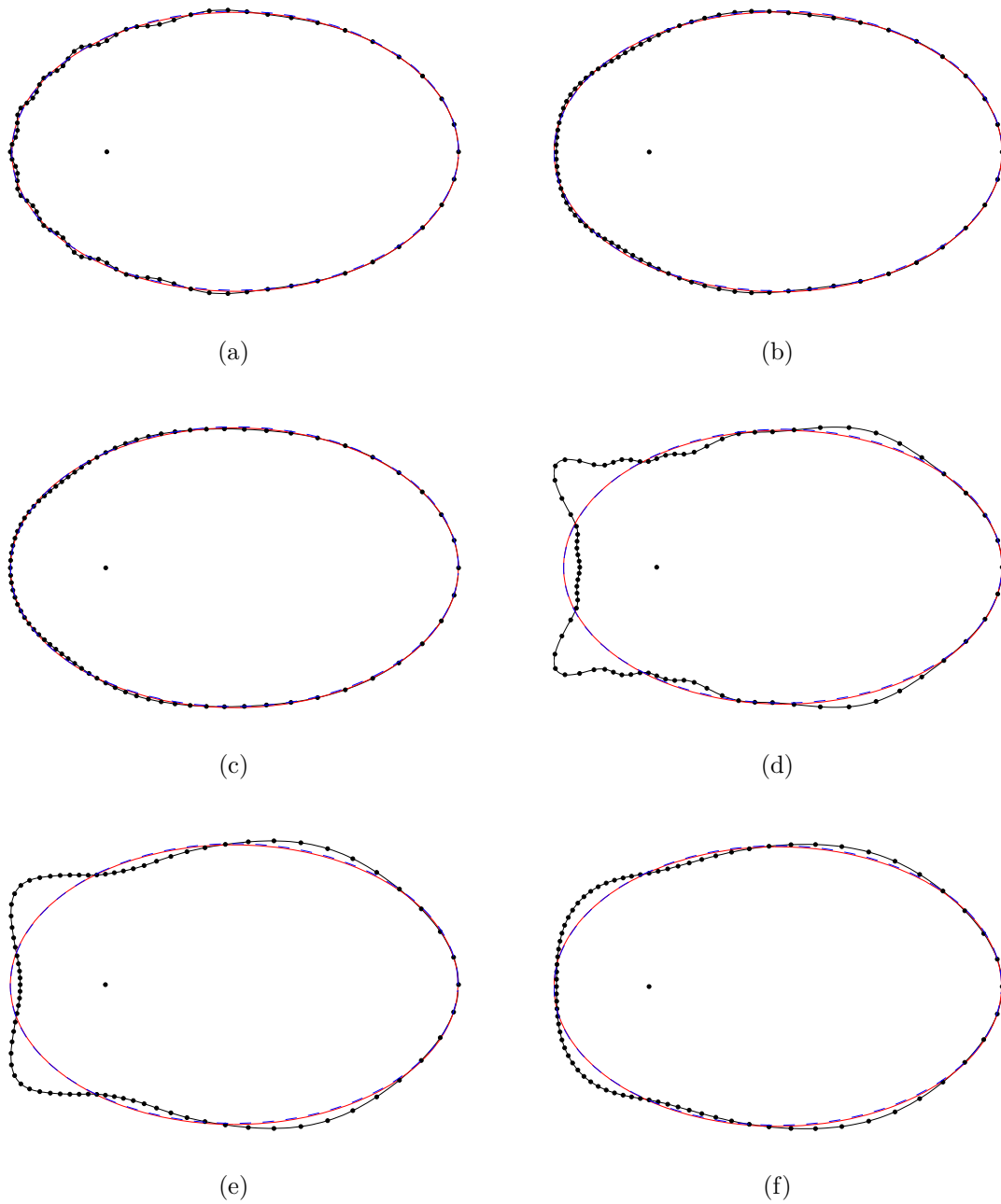


Abb. 6.4: Rekonstruktionen einer Ellipse unter Verwendung der L^2 , H^1 und H^2 -Norm für den Strafterm; (a)-(c) für die Randwerte f_1 , (d)-(f) für die Randwerte f_2 .

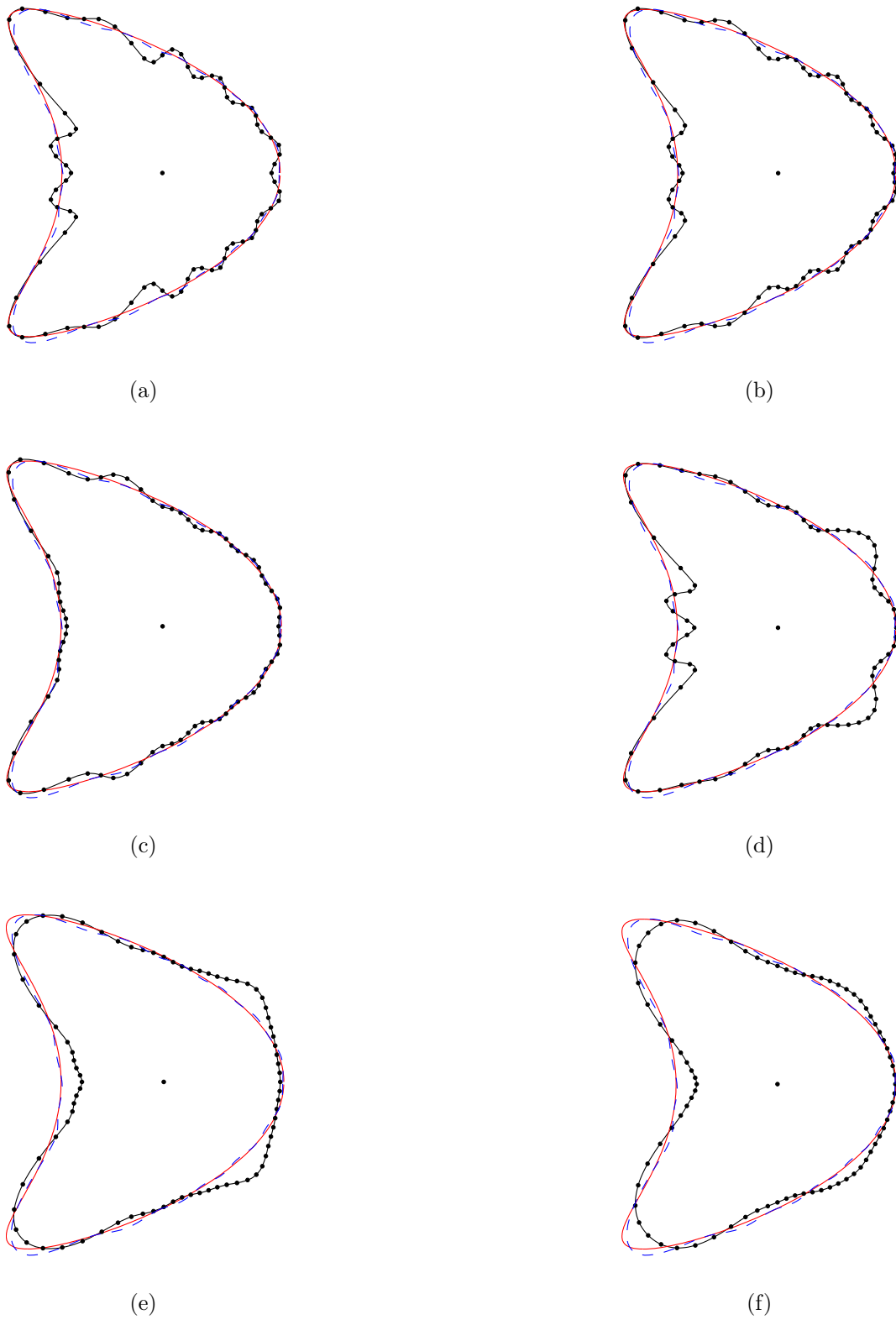


Abb. 6.5: Rekonstruktionen einer Drachenfigur unter Verwendung der L^2 , H^1 und H^2 -Norm für den Strafterm; (a)-(c) für die Randwerte f_1 , (d)-(f) für die Randwerte f_2 .

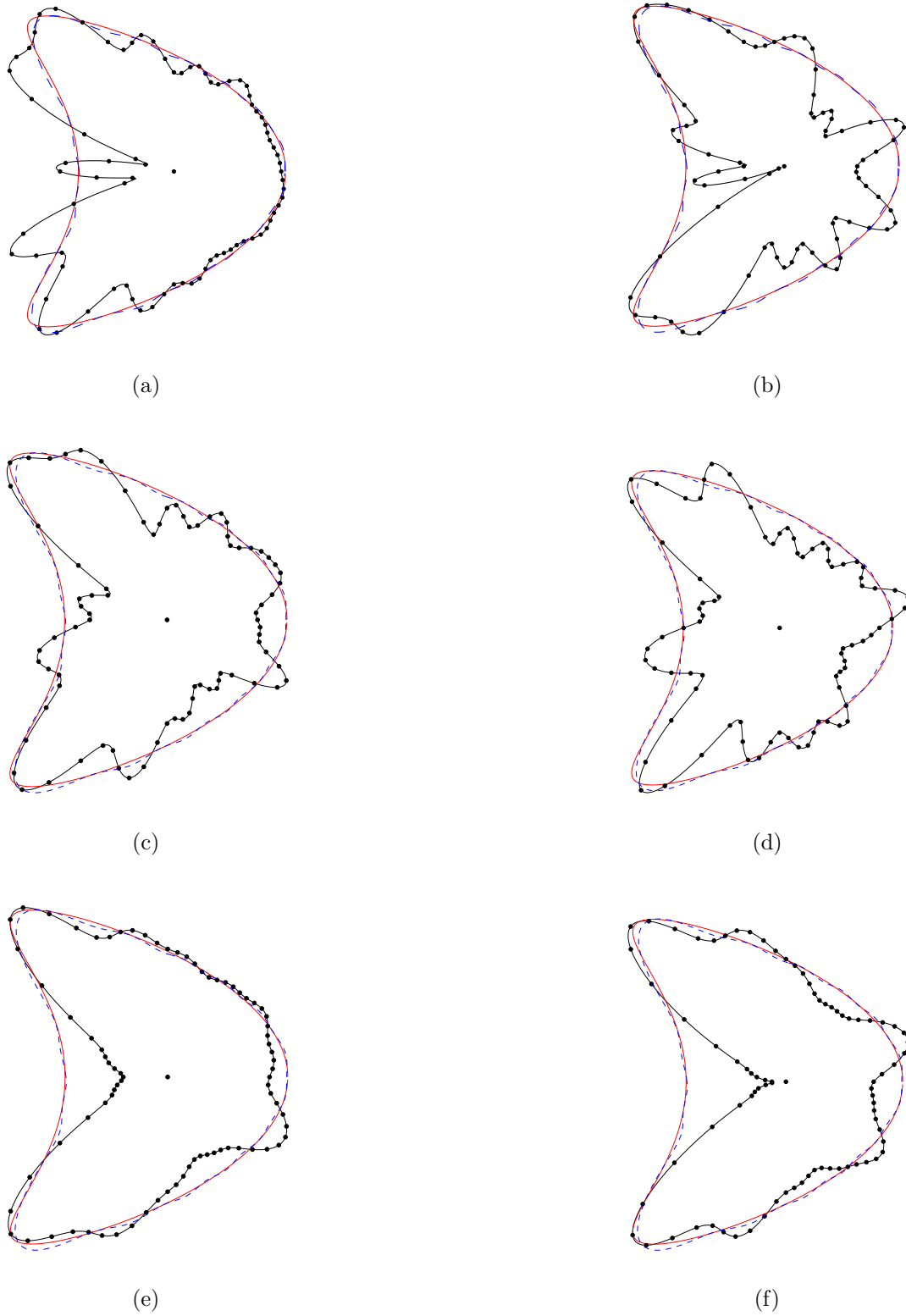


Abb. 6.6: Rekonstruktionen einer Drachenfigur mit fehlerhaften Daten ($\delta = 0.05$).
(a),(b) Beste und schlechteste Rekonstruktion bei Verwendung der L^2 -Norm.
(c),(d) Beste und schlechteste Rekonstruktion bei Verwendung der H^1 -Norm.
(e),(f) Beste und schlechteste Rekonstruktion bei Verwendung der H^2 -Norm.

Danksagung

Hiermit danke ich all denen, die mich bei der Anfertigung dieser Arbeit unterstützt haben. Ein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. Rainer Kreß für die gute Betreuung der Arbeit und die interessante Aufgabenstellung. Herrn Dr. Peter Hähner danke ich, mir die Schönheit der angewandten Mathematik näher gebracht zu haben. Zu guter letzt danke ich meinen Kommilitonen und allen Freunden, die ich im Studium gefunden habe, für die schöne Zeit, die wir in Göttingen miteinander verbringen durften.

Literaturverzeichnis

- [1] BANKS, H. und F. KOJIMA: *Boundary shape identification in two-dimensional electrostatic problems using SQUIDS*, 1998.
- [2] BRIGOLA, ROLF: *Fourieranalysis, Distributionen und Anwendungen*. Vieweg Verlag, 1996.
- [3] FISCHER, HELMUT und HELMUT KAUL: *Mathematik für Physiker Band 2*. Teubner Verlag, 1998.
- [4] HEUSER, HARRO: *Lehrbuch der Analysis, Teil 2*. Teubner, 2002.
- [5] KRESS, RAINER: *A Nyström method for boundary integral equations in domains with corners*. *Numerische Mathematik*, 58:145–161, 1990.
- [6] KRESS, RAINER: *Linear Integral Equation*. Springer, 2. Auflage, 1999.
- [7] KRESS, RAINER: *Potentialtheorie: Direkte und Inverse Probleme, Vorlesungsskript WS 2001/02*. Institut für Numerische und Angewandte Mathematik, Universität Göttingen, 2002.
- [8] MIRANDA, C.: *Partial Differential Equations of Elliptic Type*. Springer, 2. Auflage, 1970.
- [9] ROLAND, POTTHAST: *Fréchet Differenzierbarkeit von Randintegraloperatoren und Randwertproblemen zur Helmholtzgleichung und den zeitharmonischen Maxwellgleichungen*. Doktorarbeit, Institut für Numerische und Angewandte Mathematik, Georg-August-Universität zu Göttingen, 1994.
- [10] WEINBERGER, HANS F.: *A first course in partial differential equations*. Blaisdell Publishing Company, 1969.