

Vergleich von Stabilisierungsverfahren für singulär gestörte Probleme

Diplomarbeit

vorgelegt von
Barbara Pitz
aus
Neunkirchen/Saar

angefertigt im
Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
der Georg-August-Universität zu Göttingen
28. Juli 2005

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	5
1 Modellproblem und Stabilisierung	7
1.1 Notationen	7
1.1.1 Allgemeines	7
1.1.2 Funktionenräume, Skalarprodukte und Normen	8
1.2 Modellproblem und variationelle Formulierung	9
1.3 Eindeutige Lösbarkeit des Variationsproblems	10
1.4 Grundlagen zu finiten Elementen	13
1.5 Notwendigkeit der Stabilisierung	15
1.5.1 Upwind-Verfahren	16
2 Stromliniendiffusionsmethode	21
2.1 Idee und diskrete Formulierung	21
2.2 Konvergenzanalyse	22
2.3 Optimale Parameterwahl	28
3 Subgrid-Viscosity-Methode	33
3.1 Motivation und Voraussetzungen	33
3.2 Diskretisierung	35
3.3 Konvergenzanalyse	37
3.4 Erweiterungen	45
3.4.1 Mögliche Verbesserungen der Definition von S_{SVM} :	45
3.4.2 Singulär gestörte Probleme	46
3.5 Beispiel	47
3.6 Zulässige finite Elemente	50
4 Multiskalenmethode	53
4.1 Multiskalenansatz	53
4.2 Lokale Projektionsmethode	55
4.2.1 Diskretisierung	55
4.2.2 Konvergenzanalyse	58
4.3 Spezialfall der lokalen Projektionsmethode	68

5	Vergleich der Methoden	71
5.1	Zusammenhang zwischen der Subgrid-Viscosity- und der lokalen Projektionsmethode	71
5.2	Methodenvergleich	73
5.2.1	Allgemeine Struktur	73
5.2.2	Analysis	73
5.2.3	Parameterdesign	73
5.2.4	Implementierung	74
5.3	Einbettungen der Methoden ineinander	74
5.3.1	Darstellung der Subgrid-Viscosity-Methode als residuale Stabilisierungsmethode	74
5.3.2	Darstellung der lokalen Projektionsmethode als residuale Stabilisierungsmethode	75
5.4	Zusammenfassung und Ausblick	76
	Danksagung	79
	Literaturverzeichnis	80

Einleitung

In der vorliegenden Arbeit werden Stabilisierungsverfahren zum Lösen partieller Differentialgleichungen mit finiten Elementen untersucht. Dazu beschränken wir uns auf die Betrachtung von konvektionsdominierten (*stationären*) *Advektions-Diffusions-Reaktionsgleichungen* (ADR-Gleichungen) der Form

$$-\varepsilon \Delta u + \beta \cdot \nabla u + \mu u = f.$$

Dabei ist $-\varepsilon \Delta u$ der *Diffusions-*, $\beta \cdot \nabla u$ der *Konvektions-* oder *Advektionsterm* und μu der *Reaktionsterm*. Die rechte Seite f bezeichnet den *Quellterm*. Diese Art von Gleichungen tritt beispielsweise bei der Modellierung des Wärmetransports in fließenden Gewässern, dem Ladungsträgertransport in Halbleitern oder der Ausbreitung von Epidemien auf. Die Besonderheit dieser Gleichungen besteht darin, dass ihre *globale Péclet-Zahl*

$$Pe := \frac{\|\beta\|_{0,\infty,\Omega} h}{2|\varepsilon|} \gg 1$$

ist. (h bezeichne die Gitterweite und $\|\cdot\|_{0,\infty,\Omega}$ die Maximumsnorm auf Ω .) Repräsentative Beispielwerte rangieren von ca. 25 (Stofftransport im Grundwasser) bis über 10^7 (Halbleitermodellierung).

Ziel der Arbeit ist verschiedene Stabilisierungstechniken finiter Elemente in ihren Ideen zu erläutern, ihre Analysis auszuarbeiten und sie kritisch miteinander zu vergleichen.

In Kapitel 1 werden die Notationen festgelegt und einige Grundlagen vermittelt. Wir wollen zeigen, wieso die von uns betrachtete Art von Problemen stabilisiert werden muss. Kapitel 2 ist der ältesten Stabilisierungsmethode, der Stromliniendiffusionsmethode, gewidmet. Sie gehört zu den residualen Stabilisierungsverfahren. Wir erklären die Vorgehensweise und beweisen Konvergenzabschätzungen. Daran schließt sich die Analyse neuerer Verfahren an. Im Gegensatz zur Stromliniendiffusionsmethode benutzen diese Methoden zwei Gitter, also mehrere Finite-Elemente-Räume. In diesem Zusammenhang werden in Kapitel 3 die Subgrid-Viscosity-Methode von J.-L. Guermond und in Kapitel 4 die lokale Projektionsmethode von M. Braack und E. Burman vorgestellt. Letztere beruht im Wesentlichen auf der Multiskalenmethode nach Collis [Col01]. In diesen Kontext werden wir eine weitere Stabilisierungsmethode einordnen. Sie geht zurück auf V. John, S. Kaya und W. Layton. Schließlich werden in Kapitel 5 alle Methoden miteinander verglichen. Wir werden sehen, dass die lokale

Projektionsmethode als Erweiterung der Subgrid–Viscosity–Methode angesehen werden kann. Außerdem werden die neueren Mehrgitter–Ansätze als residuale Verfahren dargestellt. Obwohl allen Methoden unterschiedliche Ideen zu Grunde liegen, sind die Grenzen untereinander fließend.

Kapitel 1

Modellproblem und Stabilisierung

Ziel dieses Kapitels ist die Bereitstellung einiger Grundlagen. So werden die in der Arbeit verwendeten Notationen erklärt und grundlegende Begriffe definiert. Das aus der ADR-Gleichung resultierende Modellproblem, auf das in der gesamten Arbeit Bezug genommen wird, wird aufgestellt und variationell formuliert. Anschließend wird dessen eindeutige Lösbarkeit bewiesen und der zur Lösung allgemein verwendete Galerkin-Ansatz dargestellt. Dieser, die zugehörige Konvergenzanalyse und ein entsprechendes Beispiel zeigen die Instabilität der Lösung auf, zu deren Behebung erste Ideen erläutert werden.

1.1 Notationen

1.1.1 Allgemeines

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$	beschränktes Gebiet
$\partial\Omega$	Rand des Gebietes Ω
$\text{diam}(\Omega)$	Durchmesser des Gebietes Ω
$n = (n_i)_{i=1,\dots,d}$	$(n : \partial(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^d, n_i \in L^\infty(\Omega))$ äußere Einheitsnormale
I	Identität
δ_{ij}	Kronecker-Symbol
$\mathcal{L}(X, Y)$	Menge der linearen, stetigen Operatoren aus dem normierten Raum X in den normierten Raum Y
X^*	(= $\mathcal{L}(X, \mathbb{R})$) Dualraum des normierten Raums X
$\mathbb{P}_r(\Omega)$	Polynome vom Grad $\leq r$ über Ω

Die in der Arbeit auftretenden reellen, positiven Konstanten c , c' oder C sind von den Gitterweiten h bzw. H unabhängig. Soweit nichts anderes gesagt wird bzw. sie nicht mit einem Index versehen sind, handelt es sich um generische Konstanten, die ihren Wert je nach betrachteter Gleichung ändern.

1.1.2 Funktionenräume, Skalarprodukte und Normen

Räume stetiger Funktionen

- $\mathcal{C}(\Omega)$ Menge der in Ω stetigen Funktionen
- $\mathcal{C}^l(\Omega)$ ($l \in \mathbb{N}$) Menge der in Ω l -fach stetig differenzierbaren Funktionen
- $\mathcal{C}(\bar{\Omega})$ Menge der in Ω beschränkten und gleichmäßig stetigen Funktionen
- $\mathcal{C}_0(\Omega)$ ($l \in \mathbb{N}$) Menge der in Ω stetigen Funktionen mit kompaktem Träger

Räume messbarer Funktionen

- $L^p(\Omega)$ ($p \in [1, \infty)$) Menge jener Lebesgue-messbarer Funktionen, deren Betrag in der p -ten Potenz über Ω Lebesgue-integrierbar sind
 - $L^\infty(\Omega)$ Menge messbarer, wesentlich beschränkter Funktionen
- Die Norm in $L^p(\Omega)$, $p \in [1, \infty)$ ist dabei wie folgt definiert:

$$\|u\|_{0,p,\Omega} = \left(\int_{\Omega} |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Im Fall $p = 2$ wird $\|u\|_{0,\Omega}$ statt $\|u\|_{0,2,\Omega}$ geschrieben. Das Skalarprodukt in $L^2(\Omega)$ sei für alle $u, v \in L^2(\Omega)$ definiert als

$$(u, v)_{0,\Omega} = \int_{\Omega} u v dx.$$

Zu $L^\infty(\Omega)$ gehört die Norm

$$\|u\|_{0,\infty,\Omega} := \|u\|_{\infty,\Omega} := \begin{cases} \max_{x \in \bar{\Omega}} |u(x)| & \text{für } u \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}), \\ \text{ess sup}_{x \in \Omega} |u(x)| & \text{für } u \in L^\infty(\Omega). \end{cases}$$

Sobolevräume

Ein Vektor $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$ nichtnegativer ganzer Zahlen $\alpha_i \in \{0, 1, 2, \dots\}$ heißt *Multiindex*. Mit

$$|\alpha| := \sum_{i=1}^d \alpha_i$$

bezeichnet man dessen *Ordnung*, bzw. *Länge*. Im Folgenden wird die Schreibweise

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d}$$

benutzt, weshalb man für differenzierbare Funktionen u die Abkürzung

$$\partial^\alpha u := \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_d^{\alpha_d} u$$

verwenden kann.

Die *Sobolevräume* werden für $m \in \mathbb{N}, p \in [1, \infty]$ wie folgt definiert:

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid u \in L^p(\Omega) \text{ mit } \partial^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ für } |\alpha| \leq m\}.$$

Der Raum $W_0^{m,p}(\Omega)$ ist die Vervollständigung von $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ bezüglich der *Sobolevnorm* $\|\cdot\|_{m,p,\Omega}$ (Definition folgt). Im Fall $p = 2$ wird der Sobolevraum

$W^{m,2}(\Omega)$ als $H^m(\Omega)$ bezeichnet. Dann bildet er nämlich zusammen mit dem Skalarprodukt

$$(u, v) := \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} \partial^{\alpha} u \partial^{\alpha} v \, dx, \quad \text{für alle } u, v \in H^m(\Omega),$$

einen Hilbertraum. Die Sobolevräume sind für $p \in [1, \infty)$ ausgestattet mit der Norm

$$\|u\|_{m,p,\Omega} := \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |\partial^{\alpha} u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

und für $p = \infty$ mit

$$\|u\|_{m,\infty,\Omega} := \max_{|\alpha| \leq m} |\partial^{\alpha} u|_{\infty,\Omega}.$$

Ebenso existieren für $m \in \mathbb{N}$ und $p \in [1, \infty)$ die *Sobolevhalbnormen*

$$|u|_{m,p,\Omega} := \left(\sum_{|\alpha|=m} \int_{\Omega} |\partial^{\alpha} u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

und

$$|u|_{m,\infty,\Omega} := \max_{|\alpha|=m} |\partial^{\alpha} u|_{\infty,\Omega}.$$

1.2 Modellproblem und variationelle Formulierung

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = \{2, 3\}$ ein polygonal berandetes Gebiet mit Lipschitz-stetigem Rand $\partial\Omega$. Wir betrachten das folgende *homogene Dirichlet-Randwertproblem*:

$$(MP) \quad \begin{cases} -\varepsilon \Delta u + \beta \cdot \nabla u + \mu u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.1)$$

Dabei bezeichne $\beta \in [L^{\infty}(\Omega)]^d$ ein Vektorfeld im \mathbb{R}^d und es gelte $f \in L^2(\Omega)$ und $\nabla \cdot \beta, \mu \in L^{\infty}(\Omega)$. Da wir den Fall großer globaler Péclet-Zahlen betrachten, gelte für die Diffusionskonstante $\varepsilon \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq \varepsilon \ll 1.$$

Diese Art der ADR-Probleme bezeichnet man als *singulär gestörte Probleme*. Für eine positive, hinreichend kleine Konstante μ_0 gelte

$$\mu - \frac{1}{2} \nabla \cdot \beta \geq \mu_0 > 0. \quad (1.2)$$

Das zugeordnete *Variationsproblem* lautet:

$$(VP) \quad \begin{cases} \text{Finde ein } u \in V, \text{ so dass} \\ a(u, v) = (f, v)_{0,\Omega} \quad \forall v \in V, \end{cases} \quad (1.3)$$

mit der zugehörigen Bilinearform $a : V \times V \mapsto \mathbb{R}$ definiert durch

$$a(u, v) = (\varepsilon \nabla u, \nabla v)_{0,\Omega} + (\beta \cdot \nabla u, v)_{0,\Omega} + (\mu u, v)_{0,\Omega}. \quad (1.4)$$

Hierbei sei V ein in den Hilbertraum $L = L^2(\Omega)$ stetig eingebetteter und bezüglich L dichter Hilbertraum. Wir wählen $V = H_0^1(\Omega)$.

1.3 Eindeutige Lösbarkeit des Variationsproblems

Wir wollen nun den folgenden Satz auf unser Variationsproblem (1.3) anwenden, um so eine eindeutige Lösung sicherzustellen.

Satz 1.1 (Lax–Milgram). *Sei V ein Hilbertraum, $F \in V^*$ und $a : V \times V \mapsto \mathbb{R}$ eine V -elliptische*

$$\exists c_E > 0 : a(u, u) \geq c_E \|u\|_V^2 \quad \text{für alle } u \in V$$

und stetige

$$\exists M > 0 : |a(u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V \quad \text{für alle } u, v \in V$$

Bilinearform. Dann besitzt das Variationsproblem

$$\begin{cases} \text{Finde ein } u \in V, \text{ so dass} \\ a(u, v) = F(v) \quad \forall v \in V \end{cases}$$

genau eine Lösung $u \in V$ und es gilt die A-priori-Abschätzung

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{c_E} \|F\|_{V^*}.$$

Beweis: [Alt92, S.118]

□

Im Folgenden wird bewiesen, dass die Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ die zur Erfüllung des Satzes von Lax-Milgram nötigen Bedingungen erfüllt.

Lemma 1.2. *Seien $\beta \in [L^\infty(\Omega)]^d$ und $\mu \in L^\infty(\Omega)$. Gilt*

$$\mu - \frac{1}{2} \nabla \cdot \beta \geq \mu_0 > 0,$$

so ist die Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ V -elliptisch.

Beweis: Sei $u \in V$. Mittels partieller Integration gilt für $v \in V$ allgemein

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\beta \cdot \nabla u) v \, dx &= \int_{\Omega} \left(\sum_i \beta_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) v \, dx \\ &= \sum_i \left(- \int_{\Omega} u \frac{\partial}{\partial x_i} (\beta_i v) \, dx + \int_{\partial\Omega} (\beta_i \cdot n_i) u v \, ds \right) \\ &\stackrel{u, v \in V}{=} \sum_i \left(- \int_{\Omega} u \frac{\partial \beta_i}{\partial x_i} v \, dx - \int_{\Omega} \beta_i u \frac{\partial v}{\partial x_i} \, dx \right) \\ &= - \int_{\Omega} (\nabla \cdot \beta) u v \, dx - \int_{\Omega} (\beta \cdot \nabla v) u \, dx. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Daher gilt im Fall $v = u$

$$\int_{\Omega} (\beta \cdot \nabla u) u \, dx = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \cdot \beta) u^2 \, dx. \quad (1.6)$$

Wendet man dieses Ergebnis auf die Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ an und nutzt die Beziehung (1.2), so gilt

$$\begin{aligned} a(v, v) &= \int_{\Omega} \varepsilon \nabla v \cdot \nabla v \, dx + \int_{\Omega} \beta \cdot \nabla v \, v \, dx + \int_{\Omega} \mu v \, v \, dx \\ &= \int_{\Omega} \varepsilon (\nabla v)^2 \, dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla \cdot \beta) v^2 \, dx + \int_{\Omega} \mu v^2 \, dx \\ &= \int_{\Omega} \varepsilon (\nabla v)^2 \, dx + \int_{\Omega} \left(\mu - \frac{1}{2} \nabla \cdot \beta \right) v^2 \, dx \\ &\geq \int_{\Omega} \varepsilon (\nabla v)^2 \, dx + \int_{\Omega} \mu_0 v^2 \, dx \\ &= \varepsilon \|v\|_{1,\Omega}^2 + \mu_0 \|v\|_{0,\Omega}^2 \\ &\geq c_E \|v\|_{1,\Omega}^2 \end{aligned} \quad (1.7)$$

mit $c_E := \min\{\varepsilon, \mu_0\}$. □

Lemma 1.3. *Die Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ ist in V stetig.*

Beweis: Seien $u, v \in V$. Anwendung der Cauchy–Schwarz’schen Ungleichung (C.S.) führt zu

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\stackrel{(1.5)}{=} |(\varepsilon \nabla u, \nabla v)_{0,\Omega} - (u, \beta \cdot \nabla v)_{0,\Omega} - ((\nabla \cdot \beta)u, v)_{0,\Omega} + (\mu u, v)_{0,\Omega}| \\ &\leq \varepsilon \|u\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega} + \|\beta\|_{\infty,\Omega} \|u\|_{0,\Omega} \|v\|_{1,\Omega} + (\|\beta\|_{1,\infty,\Omega} + \|\mu\|_{\infty,\Omega}) \|u\|_{0,\Omega} \|v\|_{0,\Omega} \\ &\leq (\|u\|_{1,\Omega} + \|u\|_{0,\Omega}) ((\varepsilon + \|\beta\|_{\infty,\Omega}) \|v\|_{1,\Omega} + (\|\beta\|_{1,\infty,\Omega} + \|\mu\|_{\infty,\Omega}) \|v\|_{0,\Omega}) \\ &\stackrel{C.S.}{\leq} M \|u\|_{1,\Omega} \|v\|_{1,\Omega}. \end{aligned}$$

Dabei ist $M := 2 \max\{\varepsilon + \|\beta\|_{\infty,\Omega}, \|\beta\|_{1,\infty,\Omega} + \|\mu\|_{\infty,\Omega}\}$. Im Spezialfall $\varepsilon \ll 1$ kann man die Konstante M als von ε unabhängig betrachten. □

Mit Hilfe des Riesz’schen Darstellungssatzes (vgl. [Lub00, S.51]) definieren wir für $F \in L^*$ und $f \in L$:

$$F(v) = (f, v)_{0,\Omega} \quad \text{für alle } v \in L. \quad (1.8)$$

Wir zeigen nun, dass f aus dem Modellproblem (MP), bzw. $F(\cdot) = (f, \cdot)_{0,\Omega}$ die Bedingungen des Satzes 1.1 erfüllt, d.h. dass F eine stetige Linearform auf V ist.

Offensichtlich ist F für alle $v \in V$ linear. Da darüberhinaus für alle $v \in V$

$$|F(v)| = |(f, v)_{0,\Omega}| \leq \|f\|_{0,\Omega} \|v\|_{0,\Omega} \leq \|f\|_{0,\Omega} \|v\|_{1,\Omega} \quad (1.9)$$

gilt, ist F ein Element des Dualraums V^* .

Definition 1.4 (Hadamard). *Das Problem*

$$\begin{cases} \text{Finde ein } u \in V, \text{ so dass} \\ a(u, v) = (f, v)_{0,\Omega} \quad \forall v \in L, \end{cases}$$

heißt wohlgestellt, wenn es genau eine Lösung besitzt und die A-priori-Abschätzung

$$\exists c > 0, \forall f \in L : \|u\|_V \leq c \|f\|_L$$

gilt.

Wir haben gezeigt, dass die Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ stetig und V -elliptisch und $F \in V^*$ ist. Die Voraussetzungen des Satzes 1.1 sind somit erfüllt, wodurch er auf das Variationsproblem (1.3) anwendbar ist. Dies liefert die Wohlgestelltheit des Variationsproblems (1.3) mit der A-priori-Abschätzung

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{c_E} \|F\|_{V^*}.$$

Aufgrund der Beziehung

$$\|F\|_{V^*} = \sup_{v \in V} \frac{|F(v)|}{\|v\|_{1,\Omega}} \stackrel{(1.9)}{\leq} \sup_{v \in V} \frac{\|f\|_{0,\Omega} \|v\|_{1,\Omega}}{\|v\|_{1,\Omega}} = \|f\|_{0,\Omega}$$

kann die A-priori-Abschätzung auch als

$$\|u\|_V \leq \frac{1}{c_E} \|f\|_{0,\Omega}$$

geschrieben werden.

Bemerkung 1.5. *Anhand dieser Abschätzung können schon Stabilitätsprobleme aufgezeigt werden. Wenn ε und damit c_E sehr klein ist, kann der Gradient von u nämlich nicht mehr kontrolliert werden.*

1.4 Grundlagen zu finiten Elementen

Im Folgenden werden Begriffe zum Thema finite Elemente definiert, die zum Verständnis der Arbeit wichtig sind.

Definition 1.6. Sei $\mathcal{T}_h := \{T_i\}_{i=1}^M$ eine Zerlegung des Gebietes Ω in abgeschlossene Dreiecks- bzw. Vierecks-Elemente mit folgenden Eigenschaften:

1. $\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^M T_i$.
2. Für $T_i, T_j \in \mathcal{T}_h$ ist $\text{int}(T_i) \cap \text{int}(T_j) = \emptyset$, wobei $\text{int}(T)$ das offene Element (ohne Rand) bezeichne.
3. Besteht $T_i \cap T_j$ aus genau einem Punkt, so ist dieser ein Eckpunkt sowohl von T_i also auch von T_j .
4. Besteht $T_i \cap T_j$ für $i \neq j$ aus mehr als einem Punkt, so ist $T_i \cap T_j$ eine Kante sowohl von T_i als auch von T_j .

Eine Zerlegung von Ω mit den Eigenschaften 1. und 2. heißt Triangulierung von Ω . Kommen die Eigenschaften 3. und 4. hinzu, spricht man von einer zulässigen Triangulierung.

Definition 1.7. Eine Familie von Triangulierungen $\{\mathcal{T}_h\}_h$ heißt uniform, wenn es eine Zahl $\kappa > 0$ gibt, so dass jedes Element T von \mathcal{T}_h einen Kreis mit Radius

$$\rho_T \geq \frac{h}{\kappa}$$

enthält.

Dabei gelte für $0 < h < 1$:

$$h := \max_{T \in \mathcal{T}_h} h_T$$

mit

$$h_T := \text{diam}(T) = \max_{x, y \in T} \|x - y\|_d,$$

wobei $\|\cdot\|_d$ die euklidische Norm im \mathbb{R}^d bezeichne.

Definition 1.8. Eine Familie von Triangulierungen $\{\mathcal{T}_h\}$ heißt quasiuniform, wenn es eine Zahl $\kappa > 0$ gibt, so dass jedes Element $T \in \mathcal{T}_h$ einen Kreis vom Radius ρ_T mit

$$\rho_T \geq \frac{h_T}{2\kappa}$$

enthält.

Wir gehen in dieser Arbeit immer davon aus, dass die Familie $\{\mathcal{T}_h\}_h$ durch affin-lineare Transformation eines *Referenzelementes* \hat{T} erzeugt wird. Es existiert also eine bijektive, affin-lineare Abbildung

$$F = F_T : \hat{T} \longrightarrow T,$$

die das Referenzelement auf jedes beliebige andere Element der Triangulierung abbildet.

Definition 1.9 (Finites Element, nach [Cia91]). *Ein finites Element ist ein Tripel $\{T, P, \Sigma\}$ mit*

- *einer abgeschlossenen, im Innern nichtleeren Teilmenge T des \mathbb{R}^d mit Lipschitz-stetigem Rand,*
- *einem endlichdimensionalen Raum P ($\dim P = M$) reellwertiger Funktionen über T , und*
- *einer Menge Σ , bestehend aus M Linearformen $\Phi_i, 1 \leq i \leq M$ (den Freiheitsgraden), die eine Basis von P^* bildet.*

Zur Vereinfachung werden wir nur sogenannte *Lagrange-Elemente* betrachten. Das sind finite Elemente, deren Freiheitsgrade Funktionswerte einer hinreichend glatten Funktion an festen Punkten der Elemente $T \in \mathcal{T}_h$ (*Knoten*) sind. Für folgende Definition führen wir den Finite-Elemente-Raum

$$V_h := \{v \in V \mid v|_T \in \mathbb{P}_k(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\} \subset V, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (1.10)$$

ein.

Definition 1.10 (Lagrange-Interpolierende). *Seien a_1, \dots, a_M die Knoten und damit $u(a_i), i = 1, \dots, M$, die Freiheitsgrade der Triangulierung \mathcal{T}_h , unter Nutzung einer hinreichend glatten Funktion u . Sei $\{\varphi_1, \dots, \varphi_M\}$ die (nodale) Basis des Finite-Elemente-Raumes V_h mit der Eigenschaft*

$$\varphi_i(a_j) = \delta_{ij}$$

für $0 \leq i, j \leq M$. Dann heißt der eindeutig bestimmte Interpolationsoperator

$$\mathcal{I}_h(u) := \sum_{i=1}^M u(a_i) \varphi_i \in V_h \quad (1.11)$$

Lagrange-Interpolierende zu u .

1.5 Notwendigkeit der Stabilisierung

Die Anwendung der üblichen Standard-Diskretisierungen (Finite-Differenzen-, Finite-Elemente- sowie Finite-Volumen-Methode) auf konvektionsdominierte Gleichungen, insbesondere auf das von uns betrachtete Modellproblem (MP), bereitet Schwierigkeiten. Die Lösung oszilliert. Doch warum versagen die sonst so bewährten Ansätze?

Um dies zu untersuchen, stellen wir den Galerkin-Ansatz auf und betrachten kurz die Vorgehensweise zum Erhalt von Fehlerabschätzungen für das Modellproblem (MP). Anschließend werden wir diese Ausführungen, die in Anlehnung an [KA00] und [QV97] entstanden, anhand eines Beispiels verdeutlichen.

Galerkin-Ansatz:

Sei $\{\mathcal{T}_h\}_h$ eine quasiuniforme Familie zulässiger Triangulierungen des Gebietes Ω und V_h nach (1.10) ein Finite-Elemente-Raum. Dann lautet das *diskrete Variationsproblem*:

$$(DP) \quad \begin{cases} \text{Finde ein } u_h \in V_h, \text{ so dass} \\ a(u_h, v_h) = (f, v_h)_{0,\Omega} \quad \forall v_h \in V_h. \end{cases} \quad (1.12)$$

Lemma 1.11 (Céa). *Unter den Voraussetzungen, dass die Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$ V -elliptisch und bezüglich $\|\cdot\|_V$ stetig ist, gilt für den Fehler der Galerkin-Lösung:*

$$\|u - u_h\|_V \leq \frac{M}{c_E} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_V. \quad (1.13)$$

Beweis: [KA00, S.62] □

Da wir mit den Lemmata 1.2 und 1.3 die Erfüllung der Voraussetzungen des Céa-Lemmas gezeigt haben, gilt im Fall des von uns betrachteten Modellproblems 1.1:

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq \frac{M}{c_E} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{1,\Omega}.$$

Wenn ε im Vergleich zu $\|\beta\|_{\infty,\Omega}$ und/oder $\|\mu_0\|_{\infty,\Omega}$ klein ist, wird der Bruch $\frac{M}{c_E}$ groß. In diesem Fall kann die Galerkin-Methode schlechte bzw. falsche Ergebnisse liefern.

Folgendes eindimensionales Beispiel zeigt, dass die Galerkin-Methode im singular gestörten Fall tatsächlich schlechte Ergebnisse liefert:

Beispiel 1.12. *Für $u \in V = H_0^1(0, 1)$ und $\varepsilon, \beta > 0$ sei das Problem*

$$-\varepsilon u'' + \beta u' = 0 \quad (1.14)$$

mit den Randbedingungen $u(0) = 0$ und $u(1) = 1$ gegeben. Es besitzt die exakte Lösung

$$u(x) = \frac{1 - e^{\beta \frac{x}{\varepsilon}}}{1 - e^{\frac{\beta}{\varepsilon}}}.$$

Bei $x = 1$ hat die Lösung eine Randgrenzschicht der Weite $O(\frac{\varepsilon}{\beta})$, falls $\frac{\varepsilon}{\beta} \ll 1$ ist.

Wir betrachten nun die zugehörige Galerkin-Approximation mit stückweise linearen finiten Elementen über einem uniformen Gitter. Seien die Gitterweite $h = \frac{1}{n}$ und die Gitterpunkte $x_j = jh$ für $j = 0, \dots, n$. Als Finite-Elemente-Raum definieren wir

$$V_h := \{v \in C(\bar{\Omega}) \mid v|_T \in \mathbb{P}_1 \ \forall T \in \mathcal{T}_h\} \cap H_0^1(0, 1).$$

\mathcal{T}_h bezeichne die zugrunde liegende Triangulierung.

Wir erhalten das lineare System $A\xi = F$ mit den Komponenten:

$$\begin{aligned} A &= \text{tridiag}\left(-\frac{\varepsilon}{h} - \frac{\beta}{2}, \frac{2\varepsilon}{h}, -\frac{\varepsilon}{h} + \frac{\beta}{2}\right), \\ F &= (0, \dots, 0, \frac{\varepsilon}{h} - \frac{\beta}{2}), \\ \xi &= \{u_h(x_j)\}_{j=1, \dots, n-1}. \end{aligned}$$

Mit der Gitter-Péclet-Zahl

$$Pe = \frac{\beta h}{2\varepsilon},$$

erhalten wir für $j = 1, \dots, n-1$, unter der Annahme, dass $2\varepsilon \neq \beta h$ gilt, die Näherungslösung

$$\xi_j = u_h(x_j) = \frac{\left(\frac{1+Pe}{1-Pe}\right)^j - 1}{\left(\frac{1+Pe}{1-Pe}\right)^n - 1}.$$

Ist $Pe > 1$, so ist $\frac{1+Pe}{1-Pe} < 0$, wodurch die Lösung u_h oszilliert (vgl. hierzu Abbildung 1.1).

Bei festem ε und β kann man die Gitterweite h prinzipiell immer so klein wählen, dass die Gitter-Péclet-Zahl ≤ 1 ist und damit Oszillationen vermeiden. Allerdings ist das sehr unpraktisch, weil man dann lineare Systeme mit einer nicht mehr bearbeitbaren großen Zahl von Unbekannten erhält. Darüberhinaus kann man die kleine Gitterweite h in höheren Dimensionen nicht mehr realisieren.

1.5.1 Upwind-Verfahren

Wir stellen fest, dass die pure Galerkin-Methode in Fällen großer (Gitter-)Péclet-Zahlen (und damit kleiner Diffusionskonstanten ε) nicht die gewünschten Ergebnisse erzielt. Also muss man das Verfahren verbessern, bzw. stabilisieren. Doch wie macht man das?

Betrachten wir unser eindimensionales Beispiel nochmal näher, so sehen wir,

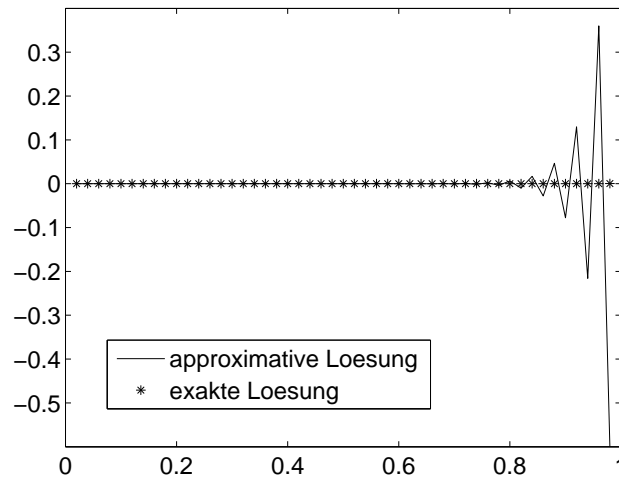


Abbildung 1.1: Lösungsverhalten beim Galerkin-Ansatz bzw. dem Finite-Differenzen-Verfahren: Für den Plot wurden $\varepsilon = 0,005$ und $\beta = 2$ gesetzt. Die Schrittweite h entspricht $1/50$.

dass das lineare System, das wir über finite Elemente gewonnen haben, äquivalent zu dem ist, welches man durch Anwendung des Finite-Differenzenverfahrens erhalten würde:

$$\begin{aligned}
 -\varepsilon \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} + \beta \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h} &= 0 \quad \text{für } j = 1, \dots, n-1, \\
 u_0 &= 0, \\
 u_n &= 1.
 \end{aligned}$$

Das liegt daran, dass wir ein uniformes Gitter benutzt und β konstant gewählt haben. Ist ε verschwindend klein, fällt der erste Term des Systems heraus, so dass die Lösung nur noch von u_{j+1} und u_{j-1} , also nur noch von jedem zweiten Wert abhängt. Abbildung 1.1 zeigt, das dann oszillierende Verhalten der Lösung.

Diese Feststellung hat man schon vor über 50 Jahren gemacht. Damals hat man sich überlegt, statt des zentralen Differenzenquotienten den vorwärts- oder rückwärtsgenommenen Differenzenquotienten — je nach Richtung des Strömungsfeldes — zur Approximation des Konvektionsterms zu benutzen. Man nimmt immer den gegen den Wind gerichteten (= upwind) bzw. den stromaufwärtsgerichteten Differenzenquotienten, wodurch der Name des so entstandenen Verfahrens *upwind finite differences* motiviert wird. Im vorliegenden Fall ist β positiv, was bedeutet, dass der Transport von links nach rechts stattfindet. Daher nehmen wir hier den rückwärtsgenommenen Differenzenquotienten um

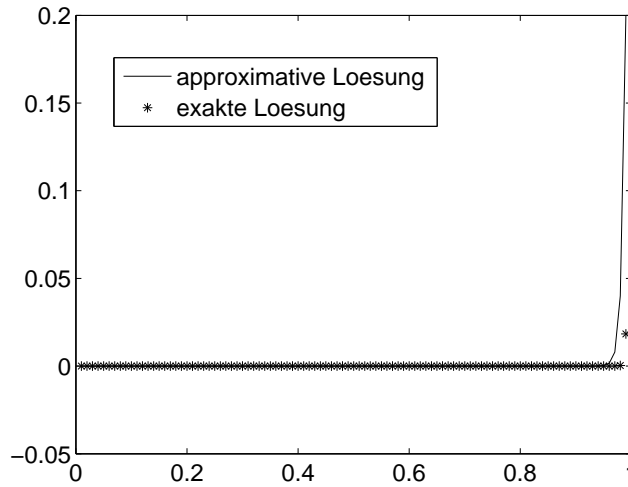


Abbildung 1.2: Lösungsverhalten beim Upwind-Verfahren: Für den Plot wurden $\varepsilon = 0,005$ und $\beta = 2$ gesetzt. Die Schrittweite h entspricht $1/50$.

$\beta \cdot u'$ zu approximieren. Es ergibt sich damit das neue System:

$$\begin{aligned} -\varepsilon \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2} + \beta \frac{u_j - u_{j-1}}{h} &= 0 \quad \text{für } j = 1, \dots, n-1, \\ u_0 &= 0, \\ u_n &= 1. \end{aligned}$$

Als Lösung erhält man

$$u_j = \frac{(1 + 2Pe)^j - 1}{(1 + 2Pe)^n - 1} \quad j = 1, \dots, n-1.$$

u_j oszilliert nicht länger, sondern für jedes β, ε und h nimmt sein Wert bei größer werdendem j zu. Abbildung 1.2 verdeutlicht das Lösungsverhalten.

Nachteilig an dieser Methode ist, dass sie nur eine Konvergenzordnung von h hat. Dennoch eignen sich die rückwärts- bzw. vorwärtsgenommenen Differenzenquotienten deutlich besser zur Berechnung konvektionsdominierter Gleichungen als die zentralen Differenzenquotienten.

Später stellte man fest, dass der Benutzung nichtzentraler Differenzenquotienten auch eine andere Bedeutung beigemessen werden kann. Man kann nämlich die upwind-Approximation des Gradienten von u zu

$$\frac{u_j - u_{j-1}}{h} = \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h} - \frac{h}{2} \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2}$$

umschreiben. Dies entspricht offenbar der zentrierten Differenzenapproximation des regularisierten Operators $\nabla - \frac{h}{2} \nabla^2$. Das heißt, man führt numerische Dissipation ein, die als direkte Diskretisierung eines künstlichen Viskositätsterms

$-\frac{h}{2}\nabla^2 u$ betrachtet werden kann.

Aus diesen Überlegungen ergaben sich die im Folgenden vorgestellten Stabilisierungsverfahren. Der Grundgedanke ist immer, künstliche Diffusion zum Ausgangsproblem hinzu zu addieren und dadurch mehr Stabilität zu erreichen.

Kapitel 2

Stromliniendiffusionsmethode

Die Stromliniendiffusionsmethode ist eines der ersten Finite-Elemente-Verfahren, das zur Stabilisierung von Problemen, bei denen die Galerkin-Methode fehl schlägt, entwickelt wurde. Da sie immer noch das am weitesten verbreitete Stabilisierungsverfahren ist, kann man sie als klassische Stabilisierungsmethode bezeichnen. Sie baut direkt auf das in der Einleitung kurz vorgestellte Upwind-Verfahren auf. Wie der Name schon vermuten lässt, geht es darum, künstliche Diffusion in Richtung des Strömungsfeldes β hinzu zu addieren. Wir werden im Folgenden das Verfahren anhand des Modellproblems aus Kapitel 1.2 vorstellen. Neben der Methodik der Stromliniendiffusionsmethode gehen wir auf die Analysis ein, wobei wir uns hauptsächlich auf [KA00] und [RST96] beziehen. Wir versuchen so, Stärken und Schwächen und damit Ansatzpunkte für neuere Verfahren herauszuarbeiten.

2.1 Idee und diskrete Formulierung

Betrachten wir unser Modellproblem (MP) aus Kapitel 1.2

$$\text{(MP)} \quad \begin{cases} -\varepsilon \Delta u + \beta \cdot \nabla u + \mu u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.1)$$

auf einem polyedrischen Gebiet Ω mit den in Abschnitt 1.2 getroffenen Annahmen. Als Finite-Elemente-Raum wählen wir den zu V konformen Raum

$$V_h := \{v_h \in V \mid v_h|_T \in \mathbb{P}_k(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h\}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Dabei sei \mathcal{T}_h eine quasiuniforme Familie zulässiger Triangulierungen. Vorausgesetzt, die Lösung u des Modellproblems liegt in $H^{k+1}(\Omega)$, mit $k \in \mathbb{N}$, kann man das Modellproblem (MP) als Gleichung im $L^2(\Omega)$ auffassen. Da im Allgemeinen $\Delta u_h \notin L^2(\Omega)$ aber $\Delta u_h \in L^2(T)$ für alle $T \in \mathcal{T}_h$ gilt, berechnen wir Δu_h elementweise und betrachten

$$-\varepsilon \Delta u + \beta \cdot \nabla u + \mu u = f \quad (2.2)$$

auf jedem Element T der Triangulierung.

Bei der Stromliniendiffusionsmethode werden passend gewichtete Residuen zum Ursprungsproblem hinzuaddiert. Diese Residuen erhält man, indem man in $L^2(T)$ den Term $\beta \cdot \nabla v_h$ mit der Gleichung 2.2 skalar multipliziert, mit der Stromliniendiffusionskonstanten δ_T skaliert und über alle Elemente T aufsummiert. Wir erhalten damit

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \delta_T (-\varepsilon \Delta u + \beta \cdot \nabla u + \mu u, \beta \cdot \nabla v_h)_{0,\Omega} = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \delta_T (f, \beta \cdot \nabla v_h)_{0,\Omega}. \quad (2.3)$$

Addiert man nun diese Residuen zu dem auf V_h eingeschränkten Variationsproblem (VP) aus Kapitel 1.2, ergibt sich folgende neue variationelle Gleichung:

$$\begin{cases} \text{Finde ein } u \in V \cap H^{k+1}(\Omega), \text{ so dass} \\ a_h(u, v_h) = (f, v_h)_h \quad \forall v_h \in V_h. \end{cases} \quad (2.4)$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} a_h(u, v_h) &:= a(u, v_h) + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \delta_T (-\varepsilon \Delta u + \beta \cdot \nabla u + cu, \beta \cdot \nabla v_h)_{0,T}, \\ (f, v_h)_h &:= (f, v_h)_{0,\Omega} + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \delta_T (f, \beta \cdot \nabla v_h)_{0,T}. \end{aligned}$$

Die entsprechende Diskretisierung lautet:

$$\begin{cases} \text{Finde ein } u_h \in V_h, \text{ so dass} \\ a_h(u_h, v_h) = (f, v_h)_h \quad \forall v_h \in V_h. \end{cases} \quad (2.5)$$

Ursprünglich geht die Stromliniendiffusionsmethode auf Hughes und Brooks [HB79] zurück. Sie nannten sie *Streamline-Upwind-Petrov-Galerkin-Methode*, kurz SUPG-Methode. Dieser Name rührt daher, dass man die Stromliniendiffusionsmethode als Petrov-Galerkin-Methode interpretieren kann. Macht man nämlich den normalen Galerkin-Ansatz, wählt dann aber $v + \delta_T \beta \nabla v$ als Testfunktion, erhält man das gleiche Schema wie mit der Stromliniendiffusionsmethode.

2.2 Konvergenzanalyse

Um im Folgenden die Stabilität, Konsistenz und damit Konvergenz der Stromliniendiffusionsmethode untersuchen zu können, benötigen wir zwei elementbezogene Abschätzungen:

Lemma 2.1. *Sei $u \in V \cap H^{k+1}(\Omega)$ Lösung des Variationsproblems (1.3). Dann existiert für die Lagrange-Interpolierende $\mathcal{I}_h(u)$ eine Konstante $c_{int} > 0$, unabhängig von u und T , so dass*

$$\|u - \mathcal{I}_h(u)\|_{l,T} \leq c_{int} h_T^{k+1-l} |u|_{k+1,T} \quad (2.6)$$

für $l, k \in \mathbb{N}$, $l \leq k$ und alle $T \in \mathcal{T}_h$ gilt.

Beweis: Den Beweis findet man z.B. in [Lub00, S.93]. \square

Satz 2.2 (Inverse Abschätzung). *Sei $\{\mathcal{T}_h\}_h$ eine uniforme Familie von regulären Triangulierungen. Es gibt eine von h unabhängige Konstante $c > 0$, so dass für $v \in V_h$ gilt:*

$$\|v\|_{1,\Omega} \leq \frac{c}{\min_{T \in \mathcal{T}_h} h} \|v\|_{0,\Omega}. \quad (2.7)$$

Beweis: [KA00, S.151]. \square

Korollar 2.3. *Für alle $v_h \in V_h \cap H^{k+1}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und alle $T \in \mathcal{T}_h$ gilt die inverse Ungleichung*

$$\|\Delta v_h\|_{0,T} \leq \frac{c_{inv}}{h_T} |v_h|_{1,T} \quad (2.8)$$

mit einer von v_h und T unabhängigen positiven Konstanten c_{inv} .

Wir zeigen nun, dass die Stromliniendiffusionsmethode konsistent ist:

Satz 2.4. *Besitzen die Probleme (2.4) und (2.5) jeweils eine Lösung $u \in V \cap H^2(\Omega)$ bzw. $u_h \in V_h$, so gilt für alle $v_h \in V_h$ die Fehlergleichung*

$$a_h(u - u_h, v_h) = 0. \quad (2.9)$$

Beweis: Seien $u \in V \cap H^2(\Omega)$ und $u_h, v_h \in V_h$. Wir ziehen das Variationsproblem (2.4) vom diskreten Problem (2.5) ab. Für die linke Seite gilt dann

$$\begin{aligned} a_h(u_h, v_h) - a(u, v_h) &= \\ &= a(u_h - u, v_h) + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \delta_T (-\varepsilon \Delta u_h + \beta \cdot \nabla u_h + cu_h, \beta \cdot \nabla v_h)_{0,T} \end{aligned}$$

und für die rechte Seite

$$(f, v_h)_h - (f, v_h)_{0,\Omega} = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \delta_T (f, \beta \cdot \nabla v_h)_{0,T}.$$

Da sich nach (2.3) die beiden Summenausdrücke der obigen Gleichungen zu Null ergeben, folgt die Behauptung. \square

Die Stabilität der Stromliniendiffusionsmethode erhält man nun aus der Elliptizität der Bilinearform $a_h(\cdot, \cdot)$. Die dafür notwendige Norm ist die sogenannte *Stromliniendiffusionsnorm*:

$$\|v\|_{\text{SD}} := \left(\varepsilon |v|_{1,\Omega}^2 + \mu_0 \|v\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \delta_T \|\beta \cdot \nabla v_h\|_{0,\Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

für alle $v \in V$.

Satz 2.5. Wählt man δ_T , so dass

$$0 < \delta_T \leq \frac{1}{2} \min \left\{ \frac{h_T^2}{\varepsilon c_{inv}^2} ; \frac{\mu_0}{\|\mu\|_{0,\infty,T}^2} \right\} \quad (2.10)$$

gilt, ist die Bilinearform $a_h(\cdot, \cdot)$ für alle $v_h \in V_h$ gemäß

$$a_h(v_h, v_h) \geq \frac{1}{2} \|v_h\|_{SD}^2 \quad (2.11)$$

V-elliptisch.

Beweis: Sei $v_h \in V_h$ gegeben. Nutzt man Ergebnis (1.7), folgt direkt

$$a_h(v_h, v_h) \geq \varepsilon \|\nabla v_h\|_{0,\Omega}^2 + \mu_0 \|v_h\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \delta_T (-\varepsilon \Delta v_h + \beta \cdot \nabla v_h + \mu v_h, \beta \cdot \nabla v_h)_{0,T}.$$

Betrachten wir nun separat den Summenterm, ohne den leicht abzuschätzenden mittleren Term:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \delta_T (-\varepsilon \Delta v_h + \mu v_h, \beta \cdot \nabla v_h)_{0,T} \right| \\ & \leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \{ |(-\varepsilon \sqrt{|\delta_T|} \Delta v_h, \sqrt{|\delta_T|} \beta \cdot \nabla v_h)_{0,T}| + |(\sqrt{|\delta_T|} \mu v_h, \sqrt{|\delta_T|} \beta \cdot \nabla v_h)_{0,T}| \} \\ & \leq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left\{ \varepsilon^2 |\delta_T| \|\Delta v_h\|_{0,T}^2 + |\delta_T| \|\mu\|_{0,\infty,T}^2 \|v_h\|_{0,T}^2 + \frac{|\delta_T|}{2} \|\beta \cdot \nabla v_h\|_{0,T}^2 \right\} \\ & \stackrel{(2.8)}{\leq} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left\{ \varepsilon^2 |\delta_T| \frac{c_{inv}^2}{h_T^2} \|\nabla v_h\|_{0,T}^2 + |\delta_T| \|\mu\|_{0,\infty,T}^2 \|v_h\|_{0,T}^2 + \frac{|\delta_T|}{2} \|\beta \cdot \nabla v_h\|_{0,T}^2 \right\}. \end{aligned}$$

Die vorletzte Zeile erhält man durch Anwendung der Ungleichung

$$ab \leq a^2 + \frac{b^2}{4}.$$

Mit Hilfe der Gleichheit

$$\|v\|_{0,\Omega}^2 = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|v\|_{0,T}^2,$$

ergibt sich für $a_h(v_h, v_h)$ dann insgesamt

$$\begin{aligned} a_h(v_h, v_h) & \geq \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left\{ (\varepsilon - \varepsilon^2 |\delta_T| \frac{c_{inv}^2}{h_T^2}) \|\nabla v_h\|_{0,T}^2 + (\mu_0 - |\delta_T| \|\mu\|_{0,\infty,T}^2) \|v_h\|_{0,T}^2 \right. \\ & \quad \left. + (\delta_T - \frac{|\delta_T|}{2}) \|\beta \cdot \nabla v_h\|_{0,T}^2 \right\}. \end{aligned}$$

Wählt man δ_T wie im Satz angegeben, folgt

$$\begin{aligned} a_h(v_h, v_h) & \geq \frac{\varepsilon}{2} \|\nabla v_h\|_{0,\Omega}^2 + \frac{\mu}{2} \|v_h\|_{0,\Omega}^2 + \frac{1}{2} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \delta_T \|\beta \cdot \nabla v_h\|_{0,T}^2 \\ & \geq \frac{1}{2} \|v_h\|_{SD}^2. \end{aligned}$$

□

Die gerade gezeigte Stabilität und Konsistenz der Stromliniendiffusionsmethode erlauben nun Konvergenz-Untersuchungen. Da die Elliptizitätsabschätzung (2.11) nur auf dem Finite-Elemente-Raum V_h gilt, wird zunächst der Ausdruck $I_h(u) - u_h \in V_h$ abgeschätzt.

Satz 2.6. *Unter der Voraussetzung, dass $u \in V \cap H^{k+1}(\Omega)$ und (2.10) erfüllt sind, gilt die Abschätzung*

$$\|I_h(u) - u_h\|_{SD} \leq c h^k \sqrt{\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left\{ \varepsilon + \frac{h_T^2}{\delta_T} + h_T^2 + \|\beta\|_{\infty, T}^2 \delta_T \right\} |u|_{k+1, T}^2}, \quad (2.12)$$

mit der Lagrange-Interpolierenden $I_h(u)$.

Beweis: Seien u und δ_T wie im Lemma gefordert. Da $\mathcal{I}_h(u) - u_h \in V_h$, gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\mathcal{I}_h(u) - u_h\|_{SD} &\stackrel{(2.11)}{\leq} a_h(\mathcal{I}_h(u) - u_h, \mathcal{I}_h(u) - u_h) \\ &\stackrel{(2.9)}{=} a_h(\mathcal{I}_h(u) - u, \mathcal{I}_h(u) - u_h). \end{aligned}$$

Offensichtlich ist die Ungleichungskette

$$\begin{aligned} \|\nabla(u - \mathcal{I}_h(u))\|_{0, \Omega}^2 &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\nabla(u - \mathcal{I}_h(u))\|_{0, T}^2 \\ &\stackrel{(2.6)}{\leq} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} c^2 h_T^{2k} |u|_{k+1, T}^2 \\ &\leq c^2 h^{2k} |u|_{k+1, \Omega}^2 \end{aligned} \quad (2.13)$$

richtig, wodurch sich, unter Beachtung von $u \in V \cap H^{k+1}(\Omega)$, die drei folgenden Abschätzungen ergeben:

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_{\Omega} \nabla(\mathcal{I}_h(u) - u) \cdot \nabla(\mathcal{I}_h(u) - u_h) dx &\leq \sqrt{\varepsilon} |\mathcal{I}_h(u) - u|_{1, \Omega} \|\mathcal{I}_h(u) - u_h\|_{SD} \\ &\stackrel{(2.13)}{\leq} c_{\text{int}} \sqrt{\varepsilon} h^k |u|_{k+1, \Omega} \|\mathcal{I}_h(u) - u_h\|_{SD}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} [\beta \cdot \nabla(\mathcal{I}_h(u) - u) + \mu(\mathcal{I}_h(u) - u)](\mathcal{I}_h(u) - u_h) dx \\
& \stackrel{(1.5)}{=} \int_{\Omega} (\mu - \nabla \cdot \beta)(\mathcal{I}_h(u) - u)(\mathcal{I}_h(u) - u_h) dx \\
& \quad - \int_{\Omega} (\mathcal{I}_h(u) - u)(\beta \cdot \nabla)(\mathcal{I}_h(u) - u_h) dx \\
& \stackrel{C.S.}{\leq} \|\mu - \nabla \cdot \beta\|_{\infty, \Omega} \|\mathcal{I}_h(u) - u\|_{0, \Omega} \|\mathcal{I}_h(u) - u_h\|_{0, \Omega} \\
& \quad + \|\mathcal{I}_h(u) - u\|_{0, \Omega} \|\beta \cdot \nabla(\mathcal{I}_h(u) - u_h)\|_{0, \Omega} \\
& = (\|\mu - \nabla \cdot \beta\|_{\infty, \Omega} \frac{1}{\sqrt{\mu_0}} \|\mathcal{I}_h(u) - u\|_{0, \Omega}) (\sqrt{\mu_0} \|\mathcal{I}_h(u) - u_h\|_{0, \Omega}) \\
& \quad + \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{\delta_T} \|\mathcal{I}_h(u) - u\|_{0, T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \delta_T \|\beta \cdot \nabla(\mathcal{I}_h(u) - u_h)\|_{0, T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \stackrel{C.S.}{\leq} \left[\frac{\|\mu - \nabla \cdot \beta\|_{\infty, \Omega}^2}{\mu_0} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\mathcal{I}_h(u) - u\|_{0, T}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{\delta_T} \|\mathcal{I}_h(u) - u\|_{0, T}^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}} \\
& \quad \left[\mu_0 \|\mathcal{I}_h(u) - u_h\|_{0, \Omega}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \delta_T \|\beta \cdot \nabla(\mathcal{I}_h(u) - u_h)\|_{0, T}^2 \right]^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Von nun an bezeichne C die Konstante

$$C := \max\left\{ \frac{\|\mu - \nabla \cdot \beta\|_{\infty, \Omega}^2}{\mu_0}; 1 \right\}.$$

Dann gilt weiter

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} [\beta \cdot \nabla(\mathcal{I}_h(u) - u) + \mu(\mathcal{I}_h(u) - u)](\mathcal{I}_h(u) - u_h) dx \\
& \leq C \left[\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(1 + \frac{1}{\delta_T}\right) \|\mathcal{I}_h(u) - u\|_{0, T}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \|\mathcal{I}_h(u) - u_h\|_{\text{SD}} \\
& \stackrel{(2.6)}{\leq} C c_{\text{int}} \left[\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(1 + \frac{1}{\delta_T}\right) h_T^{2(k+1)} |u|_{k+1, T}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \|\mathcal{I}_h(u) - u_h\|_{\text{SD}} \\
& \leq C c_{\text{int}} \left[\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(1 + \frac{1}{\delta_T}\right) h_T^2 c h^{2k} |u|_{k+1, T}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \|\mathcal{I}_h(u) - u_h\|_{\text{SD}} \\
& \leq C c_{\text{int}} c h^k \left[\sum_{T \in \mathcal{T}_h} (1 + \delta_T^{-1}) h_T^2 |u|_{k+1, T}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \|\mathcal{I}_h(u) - u_h\|_{\text{SD}},
\end{aligned}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} [\beta \cdot \nabla(\mathcal{I}_h(u) - u) + \mu(\mathcal{I}_h(u) - u)](\mathcal{I}_h(u) - u_h) dx \\
& \leq c h^k \left[\sum_{T \in \mathcal{T}_h} (1 + \delta_T^{-1}) h_T^2 |u|_{k+1, T}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \|\mathcal{I}_h(u) - u_h\|_{\text{SD}}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \delta_T \left(-\varepsilon \Delta(\mathcal{I}_h(u) - u) + \beta \cdot \nabla(\mathcal{I}_h(u) - u) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \mu(\mathcal{I}_h(u) - u), \beta \cdot \nabla(\mathcal{I}_h(u) - u_h) \right)_{0,T} \right| \\
& \stackrel{C.S.}{\leq} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \delta_T \left[\| -\varepsilon \Delta(\mathcal{I}_h(u) - u) \|_{0,T} + \| \beta \cdot \nabla(\mathcal{I}_h(u) - u) \|_{0,T} + \right. \\
& \quad \left. \| \mu(\mathcal{I}_h(u) - u) \|_{0,T} \right] \| \beta \cdot \nabla(\mathcal{I}_h(u) - u_h) \|_{0,T} \\
& \stackrel{(2.8)}{\leq} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \delta_T \left[\varepsilon \frac{c_{\text{inv}}}{h_T} \| \nabla(\mathcal{I}_h(u) - u) \|_{0,T} + \| \beta \cdot \nabla(\mathcal{I}_h(u) - u) \|_{0,T} + \right. \\
& \quad \left. \| \mu(\mathcal{I}_h(u) - u) \|_{0,T} \right] \| \beta \cdot \nabla(\mathcal{I}_h(u) - u_h) \|_{0,T} \\
& \stackrel{(2.6)}{\leq} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sqrt{\delta_T} \left[\varepsilon c_{\text{inv}} h_T^{-1} + \| \beta \|_{\infty,T} + \| \mu \|_{\infty,T} h_T \right] c_{\text{int}} |u|_{k+1,T} h_T^k \\
& \quad \sqrt{\delta_T} \| \beta \cdot \nabla(\mathcal{I}_h(u) - u_h) \|_{0,T} \\
& \stackrel{C.S.}{\leq} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \delta_T \left[\varepsilon c_{\text{inv}} h_T^{-1} + \| \beta \|_{\infty,T} + \| \mu \|_{\infty,T} h_T \right]^2 c_{\text{int}}^2 |u|_{k+1,T}^2 h_T^{2k} \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \quad \| \mathcal{I}_h(u) - u_h \|_{\text{SD}} \\
& \leq c h^k \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left[\sqrt{\delta_T} \varepsilon h_T^{-1} + \sqrt{\delta_T} (\| \beta \|_{\infty,T} + \| \mu \|_{\infty,T} h_T) \right]^2 |u|_{k+1,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
& \quad \| \mathcal{I}_h(u) - u_h \|_{\text{SD}}.
\end{aligned}$$

Die Konstante c habe hierbei den Wert

$$c := c_{\text{int}} c_{\text{inv}}.$$

Unter der Annahme $0 < \delta_T \leq \frac{1}{2} \min \left\{ \frac{h_T^2}{\varepsilon c_{\text{inv}}^2}; \frac{\mu_0}{\| \mu \|_{0,\infty,T}^2} \right\}$ gilt insbesondere die Abschätzung

$$\varepsilon \delta_T \leq \frac{h_T^2}{c_{\text{inv}}^2}.$$

Damit kann man obige Umformung vereinfachen zu

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \delta_T \left(-\varepsilon \Delta(\mathcal{I}_h(u) - u) + \beta \cdot \nabla(\mathcal{I}_h(u) - u) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \mu(\mathcal{I}_h(u) - u), \beta \cdot \nabla(\mathcal{I}_h(u) - u_h) \right)_{0,T} \right| \\
& \leq c h^k \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{\sqrt{\varepsilon}}{c_{\text{inv}}} + (\| \beta \|_{\infty,T} + \| \mu \|_{\infty,T} h_T) \sqrt{\delta_T} \right)^2 |u|_{k+1,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \| \mathcal{I}_h(u) - u_h \|_{\text{SD}} \\
& \leq c' h^k \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} \left[\varepsilon + (\| \beta \|_{\infty,T}^2 + \| \mu \|_{\infty,T}^2 h_T^2) \delta_T \right] |u|_{k+1,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \| \mathcal{I}_h(u) - u_h \|_{\text{SD}}.
\end{aligned}$$

In der letzten Zeile wurde benutzt, dass für positive, reelle Zahlen x und y

$$(x + y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$$

gilt. Daher ergibt sich die Konstante c' zu

$$c' = 2c \max\left\{\frac{1}{c_{\text{inv}}}; 1\right\}.$$

Aufgrund der Gültigkeit der Beziehung (2.10) können wir die Abschätzung

$$\delta_T \leq \frac{\mu_0}{\|\mu\|_{0,\infty,T}^2}$$

zur Umformung der letzten Zeile nutzen:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \delta_T \left(-\varepsilon \Delta(\mathcal{I}_h(u) - u) + \beta \cdot \nabla(\mathcal{I}_h(u) - u) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \mu(\mathcal{I}_h(u) - u), \beta \cdot \nabla(\mathcal{I}_h(u) - u_h) \right)_{0,T} \right| \\ & \leq c' h^k \left(\sum_{T \in \mathcal{T}_h} [\varepsilon + \|\beta\|_{\infty,T}^2 \delta_T + \mu_0 h_T^2] |u|_{k+1,T}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|\mathcal{I}_h(u) - u_h\|_{\text{SD}}. \end{aligned}$$

Die Zusammenfassung aller Abschätzungen und anschließende Division durch $\|\mathcal{I}_h(u) - u_h\|_{\text{SD}}$ liefert die Behauptung. \square

Bemerkung 2.7. Die Abschätzung (2.12) lässt sich noch etwas verschärfen (vgl. [Lub94]). Wir wollen uns aber mit den hier dargelegten Abschätzungen begnügen, da sie für das weitere Vorgehen in der Arbeit völlig ausreichend sind.

2.3 Optimale Parameterwahl

Um die Abschätzung (2.12) zu optimieren, versucht man den Term

$$\varepsilon + \frac{h_T^2}{\delta_T} + h_T^2 + \|\beta\|_{\infty,T}^2 \delta_T \quad (2.14)$$

unter der Bedingung (2.10) zu minimieren. Dazu wählen wir

$$\delta_T \sim \min\left\{\frac{\mu_0}{\|\mu\|_{\infty,T}^2}; \frac{h_T^2}{\varepsilon c_{\text{inv}}^2}; \frac{h_T}{\|\beta\|_{\infty,T}}\right\}. \quad (2.15)$$

Setzt man die darin beiden letzten Terme gleich, erhält man

$$\frac{h_T \|\beta\|_{\infty,T}}{\varepsilon c_{\text{inv}}^2} = \frac{1}{c_{\text{inv}}^2} \text{Pe}_T = 1.$$

Eine Unterscheidung bezüglich der lokalen Péclet-Zahl ist daher sinnvoll.

- 1.Fall: $\min\left\{\frac{\mu_0}{\|\mu\|_{\infty,T}^2}; \frac{h_T^2}{\varepsilon c_{\text{inv}}^2}; \frac{h_T}{\|\beta\|_{\infty,T}}\right\} = \frac{\mu_0}{\|\mu\|_{\infty,T}^2}$, d.h. $\delta_T = \delta_0 \frac{\mu_0}{\|\mu\|_{\infty,T}^2}$.
Offensichtlich gilt

$$\frac{\mu_0}{\|\mu\|_{\infty,T}^2} \leq \frac{h_T}{\|\beta\|_{\infty,T}},$$

womit wir folgern:

$$\begin{aligned} \varepsilon + \frac{h_T^2}{\delta_T} + h_T^2 + \|\beta\|_{\infty,T}^2 \delta_T &\leq \varepsilon + \frac{\|\mu\|_{\infty,T}^2 h_T^2}{\delta_0 \mu_0} + h_T^2 + \delta_0 \|\beta\|_{\infty,T} h_T \\ &\leq \left(\frac{\|\mu\|_{\infty,T}^2}{\delta_0 \mu_0} + 1 + \delta_0 \|\beta\|_{\infty,T}\right) (\varepsilon + h_T). \end{aligned}$$

- 2.Fall: $\delta_T = \delta_1 \frac{h_T^2}{\varepsilon}$, d.h. $\text{Pe}_T \leq 1$.
Wir wissen, dass dann

$$\delta_T = \delta_1 \frac{h_T^2}{\varepsilon} = \delta_1 \frac{2 \text{Pe}_T h_T}{\|\beta\|_{\infty,T}} \leq \delta_1 \frac{2 h_T}{\|\beta\|_{\infty,T}}$$

gilt. Dies in (2.14) eingesetzt, führt zu

$$\begin{aligned} \varepsilon + \frac{h_T^2}{\delta_T} + h_T^2 + \|\beta\|_{\infty,T}^2 \delta_T &= \varepsilon \left(1 + \frac{1}{\delta_1}\right) + h_T^2 + 2 \delta_1 \|\beta\|_{\infty,T} h_T \\ &\leq \max\left\{1 + \frac{1}{\delta_1}; 1 + 2 \delta_1 \|\beta\|_{\infty,T}\right\} (\varepsilon + h_T). \end{aligned}$$

- 3.Fall: $\delta_T = \delta_2 \frac{h_T}{\|\beta\|_{\infty,T}}$, d.h. $\text{Pe}_T > 1$.
Wir erhalten:

$$\begin{aligned} \varepsilon + \frac{h_T^2}{\delta_T} + h_T^2 + \|\beta\|_{\infty,T}^2 \delta_T &= \varepsilon + \frac{\|\beta\|_{\infty,T} h_T}{\delta_2} + h_T^2 + \delta_2 h_T \|\beta\|_{\infty,T} \\ &\leq \left(\frac{\|\beta\|_{\infty,T}}{\delta_2} + 1 + \delta_2 \|\beta\|_{\infty,T}\right) (\varepsilon + h_T). \end{aligned}$$

Die Konstanten δ_0, δ_1 und δ_2 werden dabei unabhängig von ε und T gewählt. Da $\|\beta\|_{\infty,T} \leq c \|\beta\|_{\infty,\Omega}$ gilt, erhalten wir also in allen Fällen

$$\varepsilon + \frac{h_T^2}{\delta_T} + h_T^2 + \|\beta\|_{\infty,T}^2 \delta_T \leq c(\varepsilon + h_T), \quad (2.16)$$

mit von T und ε unabhängiger Konstanten $c > 0$. Wie wir sehen, hängt δ_T aber von c_{inv} ab und dieses wiederum ist abhängig vom verwendeten Gitter und dem Finite-Elemente-Raum V_h . Abschätzungen für c_{inv} findet man in [HH92].

Bemerkung 2.8. *Im Fall stückweise linearer finiter Elemente bei einem ein-dimensionalen Problem mit konstanten Koeffizienten kann ein optimales δ_T berechnet werden, womit an den Knoten die exakte Lösung erreicht wird. In zwei oder mehr Dimensionen funktioniert dies nicht mehr, weshalb wir hier einfach den Term (2.14) minimiert haben. Weiterführende Gedanken über ein Kriterium, δ_T optimal zu wählen, haben sich Roos, Stynes und Tobiska gemacht. Für detailliertere Informationen hierzu, vgl. [RST96, Remark 3.34].*

Satz 2.9. *Sei*

$$\delta_T \sim \min\left\{\frac{\mu_0}{\|\mu\|_{\infty,T}^2}; \frac{h_T^2}{\varepsilon c_{inv}^2}; \frac{h_T}{\|\beta\|_{\infty,T}}\right\}.$$

Liegt die schwache Lösung u von (1.3) in $H^{k+1}(\Omega)$, gilt mit einer von ε, h und u unabhängigen Konstanten $c > 0$:

$$\|u - u_h\|_{SD} \leq c(\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{h}) h^k |u|_{k+1,\Omega}.$$

Beweis: Mit Hilfe der Dreiecksungleichung erkennt man, dass

$$\|u - u_h\|_{SD} \leq \|u - \mathcal{I}_h(u)\|_{SD} + \|\mathcal{I}_h(u) - u_h\|_{SD}$$

ist. Der zweite Term wurde schon in vorherigem Lemma abgeschätzt, so dass wir uns nur noch mit dem ersten Term beschäftigen müssen:

$$\begin{aligned} & \|u - \mathcal{I}_h(u)\|_{SD}^2 \\ &= \varepsilon |u - \mathcal{I}_h(u)|_{1,\Omega}^2 + \mu_0 \|u - \mathcal{I}_h(u)\|_{0,\Omega}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \delta_T \|\beta \cdot \nabla(u - \mathcal{I}_h(u))\|_{0,T}^2 \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \varepsilon \|\nabla(u - \mathcal{I}_h(u))\|_{0,T}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \mu_0 \|u - \mathcal{I}_h(u)\|_{0,T}^2 \\ &\quad + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \|\beta\|_{\infty,T}^2 \delta_T \|\nabla(u - \mathcal{I}_h(u))\|_{0,T}^2 \\ &\stackrel{(2.6)}{\leq} c_{int}^2 \sum_{T \in \mathcal{T}_h} [\varepsilon h_T^{2k} + \mu_0 h_T^{2(k+1)} + \delta_T \|\beta\|_{0,\infty,T}^2 h_T^{2k}] |u|_{k+1,T}^2 \\ &\leq c_{int}^2 \max\{\mu_0; 1\} h^{2k} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} [\varepsilon + h_T^2 + \delta_T \|\beta\|_{\infty,T}^2] |u|_{k+1,T}^2 \\ &\stackrel{(2.16)}{\leq} c(\varepsilon + h) h^{2k} |u|_{k+1,\Omega}^2. \end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. \square

Wir interessieren uns speziell für den Fall großer Péclet-Zahlen. Wenn nun $Pe_T \gg 1$ gilt, gilt insbesondere

$$\varepsilon \ll \frac{1}{2} \|\beta\|_{0,\infty,T} h_T.$$

Deswegen lässt sich in diesem Fall das Resultat des Satzes 2.9 spezialisieren:

Korollar 2.10. *Im Fall großer Péclet-Zahlen erhalten wir insbesondere die Fehlerabschätzung*

$$\|u - u_h\|_{0,\Omega} + \left(c \sum_{T \in \mathcal{T}_h} h_T \|\beta \cdot \nabla(u - u_h)\|_{0,\Omega}^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq c h^{k+\frac{1}{2}} |u|_{k+1,\Omega}.$$

Bemerkung 2.11. *Der L^2 -Fehler der Lösung ist nicht optimal im Vergleich zur Interpolationsfehlerabschätzung*

$$\|u - \mathcal{I}_h(u)\|_{0,\Omega} \leq ch^{k+1} |u|_{k+1,\Omega}.$$

Hingegen ist der L^2 -Fehler der Richtungsableitung von u in Richtung β optimal. Es sei außerdem darauf hingewiesen, dass die Norm $|u|_{k+1}$ im Allgemeinen von negativen Potenzen von ε abhängt. Daher ist die durch den Satz ausgedrückte Konvergenz für $h \rightarrow 0$ nicht gleichmäßig bezüglich ε .

Inzwischen gibt es viele Varianten der Stromliniendiffusionsmethode. Häufig nutzt man zum Beispiel die *Galerkin-Least-Squares-Methode*. Hier wird zur Stabilisierung das volle Residuum genutzt, d.h. man löst das diskrete Problem

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Finde ein } u_h \in V_h, \text{ so dass für alle } v_h \in V_h \text{ gilt:} \\ a(u_h, v_h) + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \delta_T(-\varepsilon \Delta u_h + \beta \cdot \nabla u_h + \mu u_h, -\varepsilon \Delta v_h + \beta \cdot \nabla v_h + \mu v_h) \\ = (f, v_h)_{0,\Omega} + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \delta_T(f, -\varepsilon \Delta v_h + \beta \cdot \nabla v_h + \mu v_h). \end{array} \right.$$

Sie hat gegenüber der Stromliniendiffusionsmethode den Vorteil, dass der Stabilisierungsterm symmetrisch ist. Wie wir in den folgenden Kapiteln feststellen werden, ist dies eine wünschenswerte Eigenschaft.

Die Methode von Douglas/Wang fällt ebenfalls in den Kontext der Galerkin-Least-Squares-Methode. Das hierdurch entstehende Variationsproblem lautet

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Finde ein } u_h \in V_h, \text{ so dass für alle } v_h \in V_h \text{ gilt:} \\ a(u_h, v_h) + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \delta_T(-\varepsilon \Delta u_h + \beta \cdot \nabla u_h + \mu u_h, \varepsilon \Delta v_h + \beta \cdot \nabla v_h - \mu v_h) \\ = (f, v_h)_{0,\Omega} + \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \delta_T(f, \varepsilon \Delta v_h + \beta \cdot \nabla v_h - \mu v_h). \end{array} \right.$$

Es sei nochmals hervorgehoben, dass es sich bei all diesen Methoden um residuale Methoden handelt.

Kapitel 3

Subgrid–Viscosity–Methode

3.1 Motivation und Voraussetzungen

Die auf den Veröffentlichungen von Jean–Luc Guermond [Gue99, Gue01, EG04] basierende Subgrid–Viscosity–Methode ist ein stabilisiertes Galerkin–Verfahren zur Approximation monotoner, linearer, nicht notwendigerweise elliptischer Operatoren in Hilberträumen. Ihre Wurzeln liegen in der nichtlinearen Galerkin–Methode. Sie basiert auf den Prinzipien der Galerkin–Approximation, Skalenseparation und der künstlichen Auflösung nichtaufgelöster Skalen. Von der Stromliniendiffusionsmethode unterscheidet sie sich dadurch, dass der Approximationsraum in zwei diskrete Unterräume aufgespalten und nur auf dem (dadurch entstandenen) feinen Gitter künstliche Diffusion hinzugefügt wird. Die Methode ist zwar nicht mehr vollständig konsistent, aber die Stabilisierung enthält keinen von der Diffusionskonstanten ε abhängigen noch anzupassenden Parameter.

Das Kapitel ist so gegliedert, dass zuerst die allgemeine Theorie behandelt und diese dann auf eine Abwandlung des Modellproblems 1.1 angewendet wird.

Seien V und L zwei Hilberträume, wobei V dicht und stetig in L eingebettet ist. Der Riesz’sche Darstellungssatz erlaubt die Identifikation des Raumes L mit dessen Dualraum L^* . Es sei $b(\cdot, \cdot)$ eine auf $V \times L$ stetige Bilinearform, d.h. $b(\cdot, \cdot) \in \mathcal{L}(V \times L, \mathbb{R})$. Dies impliziert die Existenz einer positiven Konstanten $c_a \in \mathbb{R}$, so dass für alle $u \in V$ und alle $v \in L$

$$|b(u, v)| \leq c_a \|u\|_V \|v\|_L \quad (3.1)$$

gilt. Darüberhinaus sei $b(\cdot, \cdot)$ *positiv*, d.h. für alle $v \in V$ gelte

$$b(v, v) \geq 0.$$

Wir betrachten für ein $f \in L$ das Variationsproblem

$$\begin{cases} \text{Finde ein } u \in V, \text{ so dass} \\ b(u, v) = (f, v)_L \quad \forall v \in L. \end{cases} \quad (3.2)$$

Da die Bilinearform $b(\cdot, \cdot)$ nach Voraussetzung nicht elliptisch sein muss, kann Satz (1.1) zur eindeutigen Lösbarkeit des Modellproblems nicht herangezogen werden. Die Wohlgestellttheit des Problems (3.2) soll daher das folgende Theorem liefern.

Theorem 3.1 (Banach–Nečas–Babuška (BNB)). *Es seien V ein Banachraum und L ein reflexiver Banachraum. Sei $b(\cdot, \cdot) \in \mathcal{L}(V \times L, \mathbb{R})$ und $f \in V^*$. Dann ist das Problem*

$$\begin{cases} \text{Finde ein } u \in V, \text{ so dass} \\ b(u, v) = (f, v)_L \quad \forall v \in L \end{cases} \quad (3.3)$$

wohlgestellt, genau dann wenn gilt:

$$\exists \gamma \in \mathbb{R}, \gamma > 0: \quad \inf_{u \in V} \sup_{v \in L} \frac{b(u, v)}{\|u\|_V \|v\|_L} \geq \gamma \quad (3.4)$$

$$\forall v \in L: \quad (\forall u \in V: b(u, v) = 0) \Rightarrow (v = 0). \quad (3.5)$$

Darüber hinaus gilt die A-priori-Abschätzung

$$\gamma \|u\|_V \leq \|f\|_L.$$

Beweis: [EG04, S.85]. □

Wir setzen voraus, dass die Bilinearform $b(\cdot, \cdot)$ die Bedingungen (3.4) und (3.5) des BNB-Theorems erfüllt. Daher ist das BNB-Theorem auf das Problem (3.2) anwendbar und liefert uns dessen eindeutige Lösbarkeit und die A-priori-Abschätzung

$$\gamma \|u\|_V \leq \|f\|_L.$$

Als direkte Folgerung des BNB-Theorems ist der Operator $B : V \rightarrow L$, definiert durch

$$(Bu, v)_L = b(u, v) \quad \text{für alle } (u, v) \in V \times L,$$

ein Isomorphismus. Zusätzlich folgt aus der Positivität der Bilinearform $b(\cdot, \cdot)$ die Relation

$$(Bv, v)_L = b(v, v) \geq 0 \quad \text{für alle } v \in V,$$

was bedeutet, dass B *monoton* ist.

Zur Vereinfachung sei B eine Kombination von Operatoren mit Ordnung ≤ 1 . Man denke z.B. an die Modellierung eines Advektions-Reaktions-Problems und den dabei auftretenden Operator. Erst in Teil 3.4.2 werden wir die Theorie so erweitern, dass sie auf das Modellproblem 1.1 angewendet werden kann.

3.2 Diskretisierung

Die Subgrid-Viscosity-Methode ist eine Zwei-Gitter-Methode, da man, wie in der Motivation bereits erwähnt, mit zwei diskreten Unterräumen von V beziehungsweise L arbeitet. Seien $V_H \subset V$ und $V_h \subset L$ diese beiden endlichdimensionalen Unterräume. H und h , die Indizes der beiden Räume, seien positiv und geben die jeweiligen Gitterweiten an. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit gelte $H < 1$ und $h < 1$.

Um Stabilität zu sichern, müssen V_H und V_h die sogenannte *diskrete inf-sup-Bedingung*

$$\exists c_s > 0 : \inf_{v_H \in V_H} \sup_{\Phi_h \in V_h} \frac{b(v_H, \Phi_h)}{\|v_H\|_V \|\Phi_h\|_L} \geq c_s \quad (3.6)$$

gleichmäßig in h erfüllen.

Im Fall $V_H = V_h$, wird die diskrete inf-sup-Bedingung nicht erfüllt, da dann c_s proportional zur Gitterweite h ist. Deswegen wird weiter gefordert, dass

$$V_H \subsetneq V_h \subset V$$

gilt. Man führt dann den finiten Raum V_h^H ein, welcher zum Testraum der finiten Elemente (V_H) hinzuaddiert wird. In Formeln ausgedrückt heißt das:

$$V_h = V_H \oplus V_h^H.$$

Betrachtet man diese Zerlegung aus dem Blickwinkel der variationellen Multiskalenmethode, wie sie in [Col01] vorgestellt wird, erhält man folgendes Schema:

$$V = V_h \oplus \hat{V}, \text{ bzw. } V = V_H \oplus V_h^H \oplus \hat{V}.$$

Der gesamte Raum V wird demnach aufgespalten in *aufgelöste* und *nichtaufgelöste Skalen*, wobei der Raum der nichtaufgelösten Skalen \hat{V} unendlichdimensional ist. Man kann daher den Raum V_H als *Raum der großen aufgelösten Skalen* und V_h^H als *Raum der kleinen aufgelösten Skalen* interpretieren. Guermont nennt V_h^H den *Untergitterraum*, was Verwirrung stiftet, weil der Begriff „Untergitterraum“ meist für den unendlichdimensionalen Raum steht.

Sei nun $P_{\text{SVM}} : V_h \rightarrow V_H$ die Projektion von V_h auf V_H parallel zu V_h^H . Man sucht also ein $P_{\text{SVM}} u_h \in V_H$, so dass für alle $v_H \in V_H$

$$(P_{\text{SVM}} u_h - u_h, v_H)_{0,\Omega} = 0$$

gilt. Aufgrund dieser Definition benutzen wir im Weiteren die Notationen

$$v_H = P_{\text{SVM}} v_h \quad \text{und} \quad v_h^H = (I - P_{\text{SVM}})v_h.$$

Mit der Forderung, dass für alle Gitterweiten H und h

$$\exists c_p > 0 : \forall v_h \in V_h : \|P_{\text{SVM}} v_h\|_L \leq c_p \|v_h\|_L \quad (3.7)$$

gelte, wird die direkte Summe *L-stabil*.

Um ein Maß für die Güte der Approximation zu haben, möge V_H die folgende Interpolationsbedingung erfüllen:

Es existiert ein in V dichter Unterraum $W \subseteq H^{k+1}(\Omega)$ und es gibt Konstanten $k \in \mathbb{N}, k \geq 1, c_i \in \mathbb{R}_+$, so dass für alle $w \in W$

$$\inf_{v_H \in V_H} \left(\|w - v_H\|_L + H \|w - v_H\|_V \right) \leq c_i H^{k+1} \|w\|_W \quad (3.8)$$

gilt.

Ferner gelte die inverse Ungleichung:

$$\exists c_u > 0: \forall v_h \in V_h: \|v_h\|_V \leq c_u \frac{1}{H} \|v_h\|_L. \quad (3.9)$$

Sie ist aber nur unter zwei Bedingungen erfüllt:

1. H und h sind gleicher Ordnung. Beispielsweise kann man $H = 2h$ oder $H = h$ wählen. (Hier sei aber nochmal darauf hingewiesen, dass für die Wahl von $h = H$ die Stabilität des Verfahrens nicht mehr garantiert ist.)
2. Die verwendeten Gitter müssen uniform sein. Dies ist eine starke Einschränkung, weil somit a priori lokale Gitteranpassungen ausgeschlossen sind. Es sei bemerkt, dass man die Theorie auch auf Familien nicht-uniformer Gitter ausweiten kann (siehe dazu [Gue01, S.181]).

Nachdem damit die kleinen aufgelösten Skalen zur Kontrolle der großen aufgelösten Skalen der approximierten Lösung eingeführt sind, fehlt noch die Kontrolle über die kleinen aufgelösten Skalen selbst. Zu diesem Zweck führt man künstliche Diffusion ein:

Sei S_{SVM} eine Abbildung von $V_h^H \times V_h^H$ nach \mathbb{R} , für die es Konstanten $c_{b1}, c_{b2} > 0$ gibt, so dass für alle $(v_h^H, w_h^H) \in V_h^H \times V_h^H$ gilt:

$$c_{b1} H \|v_h^H\|_s^2 \leq S_{\text{SVM}}(v_h^H, v_h^H) \quad \text{Elliptizität,} \quad (3.10)$$

$$S_{\text{SVM}}(v_h^H, w_h^H) \leq c_{b2} H \|v_h^H\|_s \|w_h^H\|_s \quad \text{Stetigkeit.} \quad (3.11)$$

$\|\cdot\|_s$ sei dabei eine Norm mit der Eigenschaft, dass Konstanten $c_{e1}, c_{e2} > 0$ existieren, so dass für alle $v_h^H \in V_h^H$

$$c_{e1} \|v_h^H\|_V \leq \|v_h^H\|_s \leq c_{e2} \frac{1}{H} \|v_h^H\|_L \quad (3.12)$$

gilt.

Prinzipiell gibt es viele Möglichkeiten S_{SVM} zu wählen. Jedoch hat sich gezeigt, dass die „richtige“ Wahl von S_{SVM} entscheidend für die Konvergenz des Verfahrens, bzw. die Güte der Approximation ist.

Nun können wir das diskrete Problem (welches wegen der Elliptizität von S_{SVM} und der diskreten inf-sup-Bedingung eine eindeutige Lösung besitzt, vgl. [Gue01]) formulieren:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Finde ein } u_h \in V_h, \text{ so dass} \\ b(u_h, v_h) + S_{\text{SVM}}(u_h^H, v_h^H) = (f, v_h)_L \quad \forall v_h \in V_h. \end{array} \right. \quad (3.13)$$

Der einzige Unterschied zur Standard–Galerkin–Formulierung liegt im zusätzlichen Term S_{SVM} .

3.3 Konvergenzanalyse

Nachdem alle notwendigen Voraussetzungen aufgeführt wurden, beweisen wir die Konvergenz der Subgrid–Viscosity–Methode. Dabei verlangt vor allem der Stabilitätsbeweis große Aufmerksamkeit.

Zur Vereinfachung der Notation wird

$$b_h(v_h, w_h) := b(v_h, w_h) + S_{\text{SVM}}(v_h^H, w_h^H).$$

Der *symmetrische Anteil der Bilinearform* $b(\cdot, \cdot)$ sei gegeben durch:

$$\begin{aligned} b_s : V \times V &\longrightarrow \mathbb{R} \\ b_s(v, w) &:= \frac{1}{2}((Bv, w)_L + (v, Bw)_L) \quad \text{für alle } (v, w) \in V \times V. \end{aligned}$$

$b_s(\cdot, \cdot)$ ist also bilinear und wegen der Monotonie von B positiv.

Man definiert zwei weitere Normen:

$$\begin{aligned} \|v\|_{h,A}^2 &:= b_s(v, v) + H\|v\|_V^2 \quad \text{und} \\ \|v\|_{h,\frac{1}{2}}^2 &:= b_s(v, v) + H\|v\|_V^2 + \frac{1}{H}\|v\|_L^2 = \|v\|_{h,A}^2 + \frac{1}{H}\|v\|_L^2. \end{aligned}$$

Lemma 3.2. *Wegen (3.9) gilt für alle $w_h \in V_h$ die Beziehung:*

$$\|w_h\|_{h,\frac{1}{2}} \leq \frac{c_L}{\sqrt{H}} \|w_h\|_L. \quad (3.14)$$

Beweis: Mit der Ungleichung $\sqrt{x^2 + y^2} \leq x + y$, falls $x, y \in \mathbb{R}_0^+$ erhält man:

$$\begin{aligned} \|w_h\|_{h,\frac{1}{2}} &\stackrel{\text{Def}}{=} \sqrt{b_s(w_h, w_h) + H\|w_h\|_V^2 + \frac{1}{H}\|w_h\|_L^2} \\ &\leq \sqrt{b_s(w_h, w_h)} + \sqrt{H}\|w_h\|_V + \frac{1}{\sqrt{H}}\|w_h\|_L. \end{aligned}$$

Da man den symmetrischen Anteil der Bilinearform $b(\cdot, \cdot)$ wie folgt nach oben abschätzen kann

$$\begin{aligned} b_s(w_h, w_h) &= b(Hw_h, \frac{1}{H}w_h) \\ &\stackrel{\text{Stetigkeit von } b}{\leq} c_a(\sqrt{H}\|w_h\|_V) \left(\frac{1}{\sqrt{H}}\|w_h\|_L \right) \\ &\stackrel{\text{bin. Ungl.}}{\leq} \frac{c_a}{2} (H\|w_h\|_V^2 + \frac{1}{H}\|w_h\|_L^2), \end{aligned}$$

ergibt sich zusammen mit obiger Ungleichung:

$$\begin{aligned}
\|w_h\|_{h,\frac{1}{2}} &\leq \sqrt{\frac{c_a}{2}} (\sqrt{H}\|w_h\|_V + \frac{1}{\sqrt{H}}\|w_h\|_L) + \sqrt{H}\|w_h\|_V + \frac{1}{\sqrt{H}}\|w_h\|_L \\
&= (\sqrt{\frac{c_a}{2}} + 1)(\sqrt{H}\|w_h\|_V + \frac{1}{\sqrt{H}}\|w_h\|_L) \\
&\stackrel{(3.9)}{\leq} \frac{c_u}{\sqrt{H}} (\sqrt{\frac{c_a}{2}} + 1) \|w_h\|_L + (\sqrt{\frac{c_a}{2}} + 1) \frac{1}{\sqrt{H}} \|w_h\|_L \\
&= \frac{1}{\sqrt{H}} (c_u + 1) (\sqrt{\frac{c_a}{2}} + 1) \|w_h\|_L \\
&= \frac{c_L}{\sqrt{H}} \|w_h\|_L,
\end{aligned}$$

wobei $c_L := (c_u + 1)(\sqrt{\frac{c_a}{2}} + 1)$. □

Lemma 3.3 (Stabilität). *Es existiert eine Konstante $c > 0$, unabhängig von den Gitterweiten h und H , so dass gilt:*

$$\inf_{v_h \in V_h} \sup_{w_h \in V_h} \frac{b_h(v_h, w_h)}{\|v_h\|_{h,A} \|w_h\|_{h,A}} \geq c.$$

Beweis: Sei $v_h \in V_h$ beliebig. Aus (3.6) folgt, dass

$$c_s \|v_H\|_V \leq \sup_{w_h \in V_h} \frac{b(v_H, w_h)}{\|w_h\|_L}.$$

Unter Nutzung der eingeführten Notation im Bezug auf die L -Stabilität der direkten Summe und der Definition der diskreten Bilinearform $b_h(\cdot, \cdot)$ ist

$$\begin{aligned}
b(v_H, w_h) &= b(v_h - v_h^H, w_h) + S_{\text{SVM}}(v_h^H, w_h^H) - S_{\text{SVM}}(v_h^H, w_h^H) \\
&= b_h(v_h, w_h) - b_h(v_h^H, w_h).
\end{aligned}$$

Also gilt:

$$c_s \|v_H\|_V \leq \sup_{w_h \in V_h} \frac{b_h(v_h, w_h) - b_h(v_h^H, w_h)}{\|w_h\|_L}.$$

Die diskrete inf-sup-Bedingung liefert demnach Kontrolle über $\|v_H\|_V$.

Erneute Anwendung der Definition von $b_h(\cdot, \cdot)$, kombiniert mit der Stetigkeit von S_{SVM} , führt zu

$$\begin{aligned}
b_h(v_h^H, w_h) &= b(v_h^H, w_h) + S_{\text{SVM}}(v_h^H, w_h^H) \\
&\stackrel{(3.11)}{\leq} c_a \|v_h^H\|_V \|w_h\|_L + c_{b2} H \|v_h^H\|_s \|w_h^H\|_s \\
&\stackrel{(3.12)}{\leq} \frac{c_a}{c_{e1}} \|v_h^H\|_s \|w_h\|_L + c_{b2} c_{e2} \|v_h^H\|_s \|w_h^H\|_L.
\end{aligned}$$

Die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|w_h^H\|_L &\stackrel{\text{Notation}}{=} \|(I - P_{\text{SVM}})w_h\|_L \stackrel{\Delta \text{singl.}}{\leq} \|w_h\|_L + \|P_{\text{SVM}} w_h\|_L \\ &\stackrel{(3.7)}{\leq} \|w_h\|_L + c_p \|w_h\|_L = (1 + c_p) \|w_h\|_L \end{aligned}$$

liefert

$$\begin{aligned} b_h(v_h^H, w_h) &\leq \left(\frac{c_a}{c_{e1}} + c_{b2} c_{e2} (1 + c_p) \right) \|v_h^H\|_s \|w_h\|_L \\ &\leq c_1 \|v_h^H\|_s \|w_h\|_L, \end{aligned}$$

wobei $c_1 = \frac{c_a}{c_{e1}} + c_{b2} c_{e2} (1 + c_p)$ gesetzt wird.

Damit haben wir insgesamt:

$$c_s \|v_H\|_V \leq \sup_{w_h \in V_h} \frac{b_h(v_h, w_h)}{\|w_h\|_L} + c_1 \|v_h^H\|_s. \quad (3.15)$$

Um diese Abschätzung weiter zu konkretisieren, benötigt man eine Beziehung zwischen den Bilinearformen $b_s(v_h, v_h)$ und $b_h(v_h, v_h)$. Diese folgert man aus der Elliptizität von S_{SVM} :

$$\begin{aligned} b_s(v_h, v_h) + c_{b1} H \|v_h^H\|_s^2 &\stackrel{(3.10)}{\leq} b_s(v_h, v_h) + S_{\text{SVM}}(v_h^H, v_h^H) \\ &= b_h(v_h, v_h). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Quadrieren von (3.15) und Multiplikation mit $\frac{c_{b1} H}{4c_1^2}$ führt zu:

$$\begin{aligned} &\frac{c_s^2 c_{b1} H}{4c_1^2} \|v_H\|_V^2 \\ &\leq \frac{c_{b1} H}{4c_1^2} \sup_{w_h \in V_h} \frac{b_h^2(v_h, w_h)}{\|w_h\|_L^2} + \frac{c_{b1} H}{4} \|v_h^H\|_s^2 + \frac{c_{b1} H}{2c_1} \sup_{w_h \in V_h} \frac{b_h(v_h, w_h)}{\|w_h\|_L} \|v_h^H\|_s \\ &\leq \frac{c_{b1} H}{2c_1^2} \sup_{w_h \in V_h} \frac{b_h^2(v_h, w_h)}{\|w_h\|_L^2} + \frac{c_{b1} H}{2} \|v_h^H\|_s^2. \end{aligned}$$

Addiert man hierzu (3.16), erhält man

$$\begin{aligned} b_s(v_h, v_h) + c_{b1} H \|v_h^H\|_s^2 + \frac{c_s^2 c_{b1} H}{4c_1^2} \|v_H\|_V^2 \\ \leq b_h(v_h, v_h) + \frac{c_{b1} H}{2c_1^2} \sup_{w_h \in V_h} \frac{b_h^2(v_h, w_h)}{\|w_h\|_L^2} + \frac{c_{b1} H}{2} \|v_h^H\|_s^2. \end{aligned}$$

Subtraktion von $\frac{c_{b1} H}{2} \|v_h^H\|_s^2$, liefert weiter:

$$\begin{aligned} b_s(v_h, v_h) + \frac{c_{b1} H}{2} \|v_h^H\|_s^2 + \frac{c_s^2 c_{b1} H}{4c_1^2} \|v_H\|_V^2 \\ \leq b_h(v_h, v_h) + \frac{c_{b1}}{2c_1^2} \sup_{w_h \in V_h} \frac{b_h^2(v_h, w_h)}{H^{-1} \|w_h\|_L^2}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Beachtet man, dass wegen der Definition der Räume V_H und V_h^H als direkte Summe zusammen mit der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} \|v_h\|_V &\leq \|v_H\|_V + \|v_h^H\|_V \\ &\stackrel{(3.12)}{\leq} \|v_H\|_V + \frac{1}{c_{e1}} \|v_h^H\|_s \end{aligned}$$

gilt, so führt Gleichung (3.17) zu einer Abschätzung der Norm $\|v_h\|_{h,A}^2$. Es gilt nämlich:

$$\begin{aligned} \|v_h\|_{h,A}^2 &\stackrel{Def}{=} b_s(v_h, v_h) + H \|v_h\|_V^2 \\ &\leq b_s(v_h, v_h) + H \left[\|v_H\|_V + \frac{1}{c_{e1}} \|v_h^H\|_s \right]^2 \\ &\leq b_s(v_h, v_h) + H \|v_H\|_V^2 + \frac{H}{c_{e1}^2} \|v_h^H\|_s^2 + \frac{2H}{c_{e1}} \|v_H\|_V \|v_h^H\|_s \\ &\leq b_s(v_h, v_h) + 2H \|v_H\|_V^2 + \frac{2H}{c_{e1}^2} \|v_h^H\|_s^2 \\ &\leq \max \left\{ \frac{8c_1^2}{c_a^2 c_{b1}}; \frac{4}{c_{b1} c_{e1}^2}; 1 \right\} \left(b_s(v_h, v_h) + \frac{c_{b1} H}{2} \|v_h^H\|_s^2 + \frac{c_s^2 c_{b1} H}{4c_1^2} \|v_H\|_V^2 \right) \\ &\stackrel{(3.17)}{\leq} \max \left\{ \frac{8c_1^2}{c_a^2 c_{b1}}; \frac{4}{c_{b1} c_{e1}^2}; 1 \right\} \left(b_h(v_h, v_h) + \frac{c_{b1}}{2c_1^2} \sup_{w_h \in V_h} \frac{b_h^2(v_h, w_h)}{H^{-1} \|w_h\|_L^2} \right) \\ &\leq c_2 b_h(v_h, v_h) + c_3 \sup_{w_h \in V_h} \frac{b_h^2(v_h, w_h)}{H^{-1} \|w_h\|_L^2}, \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} c_2 &= \max \left\{ \frac{8c_1^2}{c_a^2 c_{b1}}; \frac{4}{c_{b1} c_{e1}^2}; 1 \right\} \\ c_3 &= \frac{c_{b1}}{2c_1^2} \max \left\{ \frac{8c_1^2}{c_a^2 c_{b1}}; \frac{4}{c_{b1} c_{e1}^2}; 1 \right\}. \end{aligned}$$

Wendet man nun die arithmetisch-geometrische Ungleichung an, folgt:

$$\begin{aligned} \|v_h\|_{h,A}^2 &\leq \frac{c_2 b_h(v_h, v_h)}{\|v_h\|_{h,A}} \|v_h\|_{h,A} + c_3 \sup_{w_h \in V_h} \frac{b_h^2(v_h, w_h)}{H^{-1} \|w_h\|_L^2} \\ &\leq \frac{1}{2} \left[\frac{c_2^2 b_h^2(v_h, v_h)}{\|v_h\|_{h,A}^2} + \|v_h\|_{h,A}^2 \right] + c_3 \sup_{w_h \in V_h} \frac{b_h^2(v_h, w_h)}{H^{-1} \|w_h\|_L^2}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|v_h\|_{h,A}^2 &\leq c_2^2 \frac{b_h^2(v_h, v_h)}{\|v_h\|_{h,A}^2} + 2c_3 \sup_{w_h \in V_h} \frac{b_h^2(v_h, w_h)}{H^{-1} \|w_h\|_L^2} \\ &\leq c_2^2 \sup_{w_h \in V_h} \frac{b_h^2(v_h, w_h)}{\|w_h\|_{h,A}^2} + c_3 \sup_{w_h \in V_h} \frac{b_h^2(v_h, w_h)}{H^{-1} \|w_h\|_L^2}. \end{aligned}$$

Wegen

$$\frac{1}{H} \|w_h\|_L^2 \stackrel{(3.14)}{\geq} c_L \|w_h\|_{h,\frac{1}{2}}^2 \stackrel{Def. Norm}{\geq} c_L \|w_h\|_{h,A}^2,$$

folgt schließlich

$$\begin{aligned} \|v_h\|_{h,A}^2 &\leq c_2^2 \sup_{w_h \in V_h} \frac{b_h^2(v_h, w_h)}{\|w_h\|_{h,A}^2} + 2c_3 \sup_{w_h \in V_h} \frac{b_h^2(v_h, w_h)}{c_L \|w_h\|_{h,A}^2} \\ \Leftrightarrow \|v_h\|_{h,A}^2 &\leq (c_2^2 + \frac{2c_3}{c_L}) \sup_{w_h \in V_h} \frac{b_h^2(v_h, w_h)}{\|w_h\|_{h,A}^2} \\ \Leftrightarrow c &\leq \inf_{v_h \in V_h} \sup_{w_h \in V_h} \frac{b_h^2(v_h, w_h)}{\|w_h\|_{h,A}^2 \|v_h\|_{h,A}^2}. \end{aligned}$$

Die Konstante $c =: c_{Stab}$ hat hier den Wert

$$c_{Stab} = \frac{1}{c_2^2 + \frac{2c_3}{c_L}}.$$

□

Lemma 3.4 (Stetigkeit). *Es existiert eine von H und h unabhängige Konstante c , so dass für alle $(v, w) \in V \times V$ gilt:*

$$b(v, w) \leq c \|v\|_{h,\frac{1}{2}} \|w\|_{h,A}.$$

Beweis: Seien $v, w \in V$. Die Bilinearform $b(\cdot, \cdot)$ lässt sich zu

$$\begin{aligned} b(v, w) &= b(v, w) + b(w, v) - b(w, v) \\ &= 2b_s(v, w) - b(w, v) \end{aligned}$$

umformen. Aus der Monotonie und Symmetrie der Bilinearform $b_s(\cdot, \cdot)$ folgt, dass

$$\begin{aligned} b(v, w) &\leq 2\sqrt{b_s(v, v)}\sqrt{b_s(w, w)} + c_a \|w\|_V \|v\|_L \\ &\leq \max\{c_a, 2\} \left[\sqrt{b_s(v, v)}\sqrt{b_s(w, w)} + (\|w\|_V \sqrt{H}) \frac{\|v\|_L}{\sqrt{H}} \right] \end{aligned}$$

gilt. Die Cauchy–Schwarz’sche Ungleichung liefert

$$b(v, w) \leq \max\{c_a, 2\} \sqrt{b_s(v, v) + \frac{\|v\|_L^2}{H}} \sqrt{b_s(w, w) + H\|w\|_V^2},$$

so dass nur noch die Definitionen der Normen $\|\cdot\|_{h,A}$ und $\|\cdot\|_{h,\frac{1}{2}}$ eingesetzt werden müssen:

$$\begin{aligned} b(v, w) &\leq \max\{c_a, 2\} \sqrt{b_s(v, v) + \frac{\|v\|_L^2}{H} + H\|v\|_V^2} \|w\|_{h,A} \\ &= c \|v\|_{h,\frac{1}{2}} \|w\|_{h,A}, \end{aligned}$$

mit $c := \max\{c_a, 2\}$.

□

Lemma 3.5 (approximative Konsistenz). *Seien $u \in V$ und $u_h \in V_h$. Dann gilt für alle $w_h \in V_h$ und alle $v_H \in V_H$:*

- i) $b_h(u_h, w_h) = b(u, w_h)$,
- ii) $b_h(v_H, w_h) = b(v_H, w_h)$.

Beweis:

1. Die Gleichung des Problems (3.2) soll für alle Elemente $v \in L$, also auch für alle Elemente aus V_h erfüllt sein. Sei daher $v_h \in V_h$ beliebig. Subtrahiert man die Gleichung (3.13) von Gleichung (3.2), so gilt:

$$\begin{aligned} b(u - u_h, v_h) - S_{\text{SVM}}(u_h^H, v_h^H) &= (0, v_h)_L = 0 \\ \Leftrightarrow b(u, v_h) - (b(u_h, v_h) + S_{\text{SVM}}(u_h^H, v_h^H)) &= 0 \\ \Leftrightarrow b(u, v_h) &= b_h(u_h, v_h) \end{aligned}$$

für alle $v_h \in V_h$.

2. Die Elemente $v_H \in V_H$ besitzen keine Untergitterskalen. Deshalb folgt:

$$b_h(v_H, w_h) = b(v_H, w_h) + S_{\text{SVM}}(0, w_h^H),$$

was wegen der Stetigkeit von S_{SVM} identisch ist mit

$$b_h(v_H, w_h) = b(v_H, w_h).$$

□

Das Lemma befasst sich mit Fällen, in denen von der diskreten zur kontinuierlichen Bilinearform übergegangen werden kann. Diesbezüglich bedeutet die Gleichung (i), dass $b_h(\cdot, \cdot)$ auf $b(\cdot, \cdot)$ ausgeweitet werden kann, wenn u das diskrete Problem (3.13) löst. Schreibt man die Gleichung um, erhält man

$$b(u - u_h, w_h) = S_{\text{SVM}}(u_h^H, w_h^H),$$

wodurch klar wird, dass keine volle Galerkin-Orthogonalität und damit nur approximative Konsistenz vorliegt. Gleichung (ii) dagegen besagt, dass für Elemente, die nur große aufgelöste Skalen enthalten (also aus dem Raum V_H stammen), die Stabilisierung wegfällt.

Satz 3.6 (Konvergenz). *Unter den Annahmen (3.6), (3.7), (3.9), (3.10), (3.11) und (3.12) besitzt das diskrete Problem (3.13) genau eine Lösung, welche für alle Gitterweiten $h < H$ gleicher Ordnung die Relation*

$$\|u - u_h\|_{h,A} \leq c \inf_{v_H \in V_H} \|u - v_H\|_{h, \frac{1}{2}}$$

erfüllt.

Beweis: Sei $v_H \in V_H$ beliebig.

$$\begin{aligned} \|u_h - v_H\|_{h,A} &\stackrel{\text{Stabilität}}{\leq} c \sup_{w_h \in V_h} \frac{b_h(u_h - v_H, w_h)}{\|w_h\|_{h,A}} \\ &\stackrel{\text{Konsistenz}}{\leq} c \sup_{w_h \in V_h} \frac{b(u - v_H, w_h)}{\|w_h\|_{h,A}} \\ &\stackrel{\text{Stetigkeit}}{\leq} c \|u - v_H\|_{h, \frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Mit der Dreiecksungleichung und der Tatsache, dass $\|\cdot\|_{h,A} \leq \|\cdot\|_{h, \frac{1}{2}}$ gilt, folgt:

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{h,A} &\leq \|u - v_H\|_{h,A} + \|u_h - v_H\|_{h,A} \\ &\leq \|u - v_H\|_{h, \frac{1}{2}} + c \|u - v_H\|_{h, \frac{1}{2}} \\ &\leq (1 + c) \|u - v_H\|_{h, \frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Da $v_H \in V_H$ beliebig war, kann man auch das Infimum der v_H betrachten, was zu dem gewünschten Ergebnis

$$\|u - u_h\|_{h,A} \leq (1 + c) \inf_{v_H \in V_H} \|u - v_H\|_{h, \frac{1}{2}}$$

führt. Hier entspricht die Konstante dem Wert

$$c = c_{Stab} \max\{c_a; 2\}.$$

□

Der Beweis dieses Satzes zeigt, dass Stabilität, Konsistenz und Stetigkeit zur Konvergenz des Verfahrens tatsächlich erforderlich sind.

Korollar 3.7. *Unter den Annahmen (3.6)–(3.12) gilt, wenn $u \in W$ Lösung des Problems (3.2) ist, dass die Lösung u_h des diskreten Problems (3.13) für alle Gitterweiten $h < H$ gleicher Ordnung der folgenden Ungleichung genügt:*

$$\sqrt{H} \|u - u_h\|_V + \sqrt{b_s(u - u_h, u - u_h)} \leq c H^{k + \frac{1}{2}} \|u\|_W.$$

Beweis: Sei $u \in W$. Aus der Definition der Norm $\|\cdot\|_{h,A}$ und Satz 3.6 kann man folgern, dass

$$\begin{aligned} &H \|u - u_h\|_V^2 + b_s(u - u_h, u - u_h) \\ &= \|u - u_h\|_{h,A}^2 \\ &\leq (c_{Stab} \max\{c_a; 2\}) \inf_{v_H \in V_H} \|u - v_H\|_{h, \frac{1}{2}}^2 \end{aligned}$$

ist. Wegen der Definition der Norm $\|\cdot\|_{h,\frac{1}{2}}$ und der Tatsache, dass $b_s(\cdot, \cdot)$ positiv ist, kann man die rechte Seite zu

$$\begin{aligned} & \inf_{v_H \in V_H} \|u - v_H\|_{h,\frac{1}{2}}^2 \\ &= \inf_{v_H \in V_H} \left\{ b_s(u - v_H, u - v_H) + H\|u - v_H\|_V^2 + \frac{1}{H}\|u - v_H\|_L^2 \right\} \\ &\leq \inf_{v_H \in V_H} \left\{ H\|u - v_H\|_V^2 + \frac{1}{H}\|u - v_H\|_L^2 \right\} \end{aligned}$$

umformen. Wurzelziehen

$$\begin{aligned} \inf_{v_H \in V_H} \|u - v_H\|_{h,\frac{1}{2}} &\leq \inf_{v_H \in V_H} \left\{ \sqrt{H}\|u - v_H\|_V + \frac{1}{\sqrt{H}}\|u - v_H\|_L \right\} \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{H}} \inf_{v_H \in V_H} \left\{ H\|u - v_H\|_V + \|u - v_H\|_L \right\} \end{aligned}$$

und die Interpolationsbedingung aus Kapitel 3.2 führen dann zu:

$$\inf_{v_H \in V_H} \|u - v_H\|_{h,\frac{1}{2}} \leq H^{-\frac{1}{2}} c_i H^{k+1} \|u\|_W.$$

Also gilt

$$H\|u - u_h\|_V^2 + b_s(u - u_h, u - u_h) \leq c H^{k+\frac{1}{2}} \|u\|_W$$

mit $c = c_{Stab} \max\{c_a; 2\} c_i$. □

Bemerkung 3.8.

1. Der Konvergenzbeweis benutzt Argumente des Strang Lemmas. $b_h(\cdot, \cdot)$ ist nur auf $V_h \times V_h$ definiert, wodurch $b_h(u, v_h)$ keinen Sinn machen würde, wenn $u \in V$ aber $u \notin V_h$ wäre. (u hat a priori keine Dekomposition in $V_H \oplus V_h^H$).
2. Die Konvergenzabschätzung (Korollar) ist quasioptimal in V . Falls $b_s(\cdot, \cdot)$ L -elliptisch ist, ist sie jedoch nicht optimal in L , da

$$\|u - u_h\|_L \leq c H^{k+\frac{1}{2}} \|u\|_W$$

gilt. Die Optimalität kann man zurückgewinnen, wenn man das vorliegende Gitter V_h mit bestimmten geometrischen Eigenschaften ausstattet. [Zho97, Gue01]

3. Die Konvergenzabschätzungen der Subgrid-Viscosity-Methode sind ähnlich zu denen der Stromliniendiffusionsmethode.

3.4 Erweiterungen

Wir werden nun einige Voraussetzungen aus Abschnitt 3.2 modifizieren, um so schärfere und leichter zu beweisende Abschätzungen zu erhalten. Ziel des darauf folgenden Unterabschnittes ist die Ausdehnung der Theorie auf singular gestörte Probleme.

3.4.1 Mögliche Verbesserungen der Definition von S_{SVM} :

Nach Voraussetzung ist der Operator B eine Kombination von Operatoren nullter und erster Ordnung. Man kann ihn also aufspalten in $B = B_0 + B_1$, wobei B_0 einen Operator nullter und B_1 einen Operator erster Ordnung bezeichnet. Diese Zerlegung impliziert die Zerlegung der Bilinearform in $b(\cdot, \cdot) = b_0(\cdot, \cdot) + b_1(\cdot, \cdot)$, mit deren Hilfe die Annahmen aus Kapitel 3.2 verfeinert werden können:

Es existiert eine Halbnorm $|\cdot|_V$ in V , so dass für alle $(u, v) \in V \times L$ gilt:

$$\begin{aligned} \|u\|_V &\leq c(\sqrt{b_s(u, u)} + |u|_V), \\ b_0(u, v) &\leq c_0 \sqrt{b_s(u, u)} \|v\|_L, \\ b_1(u, v) &\leq c_1 |u|_V \|v\|_L. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Die Forderung (3.6) kann abgeschwächt werden zu:

$$\forall u_h \in V_h \text{ gilt: } \sup_{v_h \in V_h} \frac{b_1(u_H, v_h)}{\|v_h\|_L} \geq c_{a1} |u_H|_V - c_\delta \sqrt{b_s(u_h, u_h)}, \quad (3.19)$$

wobei $c_{a1} > 0$ und $c_\delta \geq 0$ unabhängig von $\{H, h\}$.

Da $b_s(u_h, u_h)$ durch die Monotonie von $b(\cdot, \cdot)$ kontrolliert wird, muss nur noch $|u_H|_V$ durch die inf-sup-Bedingung kontrolliert werden. (Damit ist (3.19) leichter zu beweisen als (3.6).)

Schwächere Definition von S_{SVM} :

Es gibt eine Halbnorm $|\cdot|_s$, so dass für alle $(v_h^H, w_h^H) \in V_h^H \times V_h^H$ gilt:

$$\begin{aligned} c_{e1} |v_h^H|_V &\leq |v_h^H|_s \leq c_{e2} \frac{1}{H} \|v_h^H\|_L, \\ S_{\text{SVM}}(v_h^H, v_h^H) &\geq c_{b1} H |v_h^H|_s^2 && \text{Elliptizität,} \\ S_{\text{SVM}}(v_h^H, w_h^H) &\leq c_{b2} H |v_h^H|_s |w_h^H|_s && \text{Stetigkeit.} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Satz 3.9. *Unter den Annahmen (3.7)–(3.9) und (3.18)–(3.20) und der Bedingung, dass $u \in W$ Lösung des Problems (3.2) ist, genügt die Lösung u_h des diskreten Problems (3.13) für alle Gitterweiten $h < H$ gleicher Ordnung der folgenden Ungleichung:*

$$\sqrt{H} \|u - u_h\|_V + \sqrt{b_s(u - u_h, u - u_h)} \leq cH^{k+\frac{1}{2}} \|u\|_W.$$

Beweis: [Gue01, S.174ff]

□

3.4.2 Singulär gestörte Probleme

Um die gerade entwickelte Theorie auf das Modellproblem (1.1) anwenden zu können, muss sie noch entsprechend erweitert werden. Bisher wurden nämlich Operatoren zweiter Ordnung und damit der Viskositätsterm außer Acht gelassen. Wie wir gleich sehen werden, lassen sich aber alle entwickelten Ergebnisse bedenkenlos auf den Fall der Advektions-Diffusions-Reaktionsgleichung ausweiten (vgl. dazu auch [Gue99]).

Aufbauend auf das bisher Dargelegte betrachten wir nun das Variationsproblem

$$\begin{cases} \text{Finde ein } u \in V \cap X, \text{ so dass} \\ b(u, v) + \varepsilon d(u, v) = (f, v)_L \quad \forall v \in V \cap X. \end{cases} \quad (3.21)$$

Dabei gelten bezüglich der verwendeten Räume die Beziehungen

$$\begin{aligned} V \subset L &\equiv L^* \subset V^*, \\ X \subset L &\equiv L^* \subset X^*. \end{aligned}$$

Zusätzlich zu der bisherigen Bilinearform $b(\cdot, \cdot)$ definiert man

$$\begin{aligned} d : X \times X &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ d(u, v) &:= (\nabla u, \nabla v)_{0, \Omega}, \end{aligned}$$

eine bezüglich der Halbnorm in X elliptische und stetige Bilinearform. Da damit auch $b(\cdot, \cdot) + d(\cdot, \cdot)$ elliptisch ist, d.h.

$$|v|_X^2 \leq b(v, v) + d(v, v)$$

gilt, ist das Problem in Folge des Satzes 1.1 eindeutig lösbar.

Seien nun V_H und V_h zwei endlich dimensionale Unterräume von $V \cap X$, welche die Bedingungen aus Kapitel 3.2 erfüllen. Das zugehörige diskrete Problem lautet:

$$\begin{cases} \text{Finde ein } u_h \in V_h, \text{ so dass} \\ b(u_h, v_h) + \varepsilon d(u_h, v_h) + S_{\text{SVM}}(u_h^H, v_h^H) = (f, v_h)_L \quad \forall v_h \in V_h. \end{cases} \quad (3.22)$$

Unter der Voraussetzung, dass für alle $v_h \in V_h$

$$|v_h|_X \leq c \frac{1}{H} \|v_h\|_L \quad (3.23)$$

gilt, besitzt es, nach [Gue01, S.177], eine eindeutige Lösung.

Satz 3.10. *Unter den Bedingungen (3.7), (3.8), (3.9), (3.18), (3.19), (3.20) und (3.23) und der Voraussetzung, dass $u \in W$ ist, gibt es eine Konstante c , so dass für die Lösung u_h des Problems (3.22) die (quasioptimalen) Konvergenzabschätzungen*

1. $\sqrt{b_s(u - u_h, u - u_h)} + \sqrt{\varepsilon} \|u - u_h\|_X \leq c H^k (\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{H}) \|u\|_W,$
2. $\|u - u_h\|_V \leq c H^k \|u\|_W$

gelten.

Beweis: siehe [Gue01].

3.5 Beispiel

Um zu zeigen, dass die in Kapitel 3.2 getroffenen Annahmen erfüllbar sind, geben wir ein passendes Beispiel. Schritt für Schritt beweisen wir dann die Gültigkeit der einzelnen Forderungen.

Wir betrachten das Modellproblem (1.1) mit $\varepsilon = 0$ und der Randbedingung

$$u_{\Gamma^-} = 0.$$

$\Gamma^- := \{x \in \partial\Omega \mid (\beta \cdot n)(x) < 0\}$ mit dem äußeren Normaleneinheitsvektor n auf $\partial\Omega$ bezeichne dabei den Eintrittsrand des Gebietes. Schärfer als in Abschnitt 1.2 wird nun gefordert, dass β ein Vektorfeld im $\mathcal{C}^1(\bar{\Omega})^d$ und der Rand von Ω stückweise \mathcal{C}^1 -glatt sind. Außerdem betrachten wir nun als Hilbertraum V den Raum

$$V := \{v \in L^2(\Omega) \mid \beta \cdot \nabla v \in L^2(\Omega) \text{ und } v_{\Gamma^-} = 0\},$$

versehen mit der Norm

$$\|v\|_V := \sqrt{\|v\|_{0,\Omega}^2 + \|\beta \cdot \nabla v\|_{0,\Omega}^2}$$

und der Halbnorm

$$|v|_V := \|\beta \cdot \nabla v\|_{0,\Omega}.$$

Man kann nun

$$S_{\text{SVM}}(v_h^H, w_h^H) = H(v_h^H, w_h^H)_X$$

setzen, was impliziert, dass $\|\cdot\|_s = \|\cdot\|_X$ ist.

X sei hier ein in V stetig und dicht eingebetteter Hilbertraum, z.B. $H_0^1(\Omega)$. Das heißt mit anderen Worten:

$$S_{\text{SVM}}(v_h^H, w_h^H) = H(v_h^H, w_h^H)_{0,\Omega} + H(\nabla v_h^H, \nabla w_h^H)_{0,\Omega}. \quad (3.24)$$

Eine andere Möglichkeit wäre, $\|\cdot\|_s = \|\cdot\|_V$ und damit

$$S_{\text{SVM}}(v_h^H, w_h^H) = H(v_h^H, w_h^H)_{0,\Omega} + H(\beta \cdot \nabla v_h^H, \beta \cdot \nabla w_h^H)_{0,\Omega}. \quad (3.25)$$

zu setzen.

In beiden Fällen ist S_{SVM} symmetrisch. Der Unterschied zwischen den beiden S_{SVM} besteht darin, dass im ersten Fall die Diffusion isotrop ist, während sie im zweiten nur in Stromlinienrichtung erfolgt. Die isotrope Diffusion kann nützlich sein, um Crosswind-Oszillationen zu vermeiden.

Bemerkung 3.11. *Betrachtet man die veränderte Definition von S_{SVM} nach Abschnitt 3.4.1, kann man für alle $(v_h^H, w_h^H) \in V_h^H \times V_h^H$ folgende Stabilisierungen nutzen:*

- für den isotropen Fall:

$$\begin{aligned} |v_h^H|_s &= \|\nabla v_h^H\|_{0,\Omega}, \\ S_{SVM}(v_h^H, w_h^H) &= H (\nabla v_h^H, \nabla w_h^H)_{0,\Omega}, \end{aligned} \quad (3.26)$$

- für den anisotropen Fall:

$$\begin{aligned} |v_h^H|_s &= \|\beta \cdot \nabla v_h^H\|_{0,\Omega}, \\ S_{SVM}(v_h^H, w_h^H) &= H (\beta \cdot \nabla v_h^H, \beta \cdot \nabla w_h^H)_{0,\Omega}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Anders als in (3.24) und (3.25) wird nur dort künstliche Diffusion hinzugefügt, wo sie benötigt wird. Die Stabilisierungsterme sind aber bei allen vorgestellten Wahlen der S_{SVM} in Regionen kleiner Gradienten klein.

Nun soll gezeigt werden, dass alle an unser Beispielproblem gestellten Bedingungen erfüllt sind und man daher den Satz 3.6 und zugehöriges Korollar 3.7 anwenden kann.

Wir beginnen mit den allgemeinen Voraussetzungen aus Abschnitt 3.1:

- Der Raum V ist stetig in L eingebettet:
Für alle $v \in V$ gilt:

$$\|v\|_{0,\Omega} \leq \sqrt{\|v\|_{0,\Omega}^2} \leq \sqrt{\|v\|_{0,\Omega}^2 + \|\beta \cdot \nabla v\|_{0,\Omega}^2} = \|v\|_V.$$

- Die Bilinearform $b(\cdot, \cdot)$ ist auf $V \times L$ stetig:

$$\begin{aligned} |b(u, v)| &= |(\beta \cdot \nabla u + \mu u, v)_{0,\Omega}| \\ &\leq \|\beta \cdot \nabla u + \mu u\|_{0,\Omega} \|v\|_{0,\Omega} \\ &\leq (\|\beta \cdot \nabla u\|_{0,\Omega} + \|\mu\|_{\infty,\Omega} \|u\|_{0,\Omega}) \|v\|_{0,\Omega} \\ &\leq \max\{1, \|\mu\|_{\infty,\Omega}\} (\|\beta \cdot \nabla u\|_{0,\Omega} + \|u\|_{\infty,\Omega}) \|v\|_{0,\Omega} \\ &\stackrel{C.S.}{\leq} \max\{1, \|\mu\|_{\infty,\Omega}\} \sqrt{\|\beta \cdot \nabla u\|_{0,\Omega}^2 + \|u\|_{0,\Omega}^2} \|v\|_{0,\Omega}. \end{aligned}$$

- $b(\cdot, \cdot)$ ist positiv: Für alle $v \in V$ gilt:

$$\begin{aligned} b(v, v) &= (\beta \cdot \nabla v + \mu v, v)_{0,\Omega} \\ &\stackrel{(1.6)}{=} -\frac{1}{2} ((\nabla \cdot \beta) v, v)_{0,\Omega} + (\mu v, v)_{0,\Omega} \\ &\stackrel{(1.2)}{\geq} (\mu_0 v, v)_{0,\Omega} \\ &\geq 0, \end{aligned}$$

weil nach Voraussetzung $\mu_0 > 0$.

- $b(\cdot, \cdot)$ erfüllt die Bedingungen des BNB-Theorems:
In [EG04, S.231: Beweis zu Proposition 5.9] wird mit Hilfe der Friedrich-Operatoren gezeigt, dass der Operator B ein Isomorphismus ist. Daraus folgt direkt die Gültigkeit des BNB-Theorems.

Die grundlegenden Voraussetzungen sind damit bestätigt. Nun müssen die Bedingungen, die zur Erfüllung des Satzes 3.6 und des Korollars 3.7 nötig sind, nachgewiesen werden.

Bedingung (3.8): Interpolationseigenschaft für $w \in W = H^{k+1}(\Omega)$:

$$\begin{aligned}
& \inf_{x_H \in V_H} \left\{ \|w - x_H\|_{0,\Omega} + H \sqrt{\|w - x_H\|_{0,\Omega}^2 + \|\beta \cdot \nabla(w - x_H)\|_{0,\Omega}^2} \right\} \\
& \leq \inf_{x_H \in V_H} \left\{ \|w - x_H\|_{0,\Omega} + \max\{1, \|\beta\|_\infty\} H \|w - x_H\|_{1,\Omega} \right\} \\
& \stackrel{(2.7)}{\leq} \max\{1, \|\beta\|_\infty\} \inf_{x_H \in V_H} \left\{ \|w - x_H\|_{0,\Omega} + c \frac{H}{H} \|w - x_H\|_{0,\Omega} \right\} \\
& \leq c \max\{1, \|\beta\|_\infty\} \inf_{x_H \in V_H} \left\{ \|w - x_H\|_{0,\Omega} \right\} \\
& \leq c \max\{1, \|\beta\|_\infty\} \|w - \mathcal{I}_h(w)\|_{0,\Omega} \\
& \stackrel{(2.6)}{\leq} c \max\{1, \|\beta\|_\infty\} H^{k+1} \|w\|_{k+1,\Omega}.
\end{aligned}$$

Bedingung (3.9): Nachweis der inversen Ungleichung:

$$\begin{aligned}
\|v_h\|_V &= \sqrt{\|v_h\|_{0,\Omega}^2 + \|\beta \cdot \nabla v_h\|_{0,\Omega}^2} \leq \sqrt{\max\{1, \|\beta\|_\infty\} \|v_h\|_{1,\Omega}^2} \\
&= \sqrt{\max\{1, \|\beta\|_\infty\}} \|v_h\|_{1,\Omega} \stackrel{(2.7)}{\leq} c \frac{1}{H} \|v_h\|_{0,\Omega},
\end{aligned}$$

wobei c sich aus der Konstanten c der Gleichung (2.7) multipliziert mit dem Ausdruck $\sqrt{\max\{1, \|\beta\|_\infty\}}$ zusammensetzt.

Wir werden nun beide vorgestellten Stabilisierungsterme (3.24) und (3.25) auf ihre Eigenschaften hin überprüfen. Beginnen wir mit S_{SVM} nach (3.24):

Bedingung (3.10): Elliptizität des Stabilisierungsterms S_{SVM} :

$$\begin{aligned}
S_{\text{SVM}}(v_h^H, v_h^H) &= H \|v_h^H\|_{0,\Omega}^2 + H \|\nabla v_h^H\|_{0,\Omega}^2 \\
&= H \|v_h^H\|_s^2.
\end{aligned}$$

Bedingung (3.11): Stetigkeit des Stabilisierungsterms S_{SVM} :

$$\begin{aligned}
S_{\text{SVM}}(v_h^H, w_h^H) &= H ((v_h^H, w_h^H)_{0,\Omega} + (\nabla v_h^H, \nabla w_h^H)_{0,\Omega}) \\
&\leq H (\|v_h^H\|_{0,\Omega} \|w_h^H\|_{0,\Omega} + \|\nabla v_h^H\|_{0,\Omega} \|\nabla w_h^H\|_{0,\Omega}) \\
&\stackrel{C.S.}{\leq} H (\sqrt{\|v_h^H\|_{0,\Omega}^2 + \|\nabla v_h^H\|_{0,\Omega}^2} \sqrt{\|w_h^H\|_{0,\Omega}^2 + \|\nabla w_h^H\|_{0,\Omega}^2}) \\
&= H \|v_h^H\|_s \|w_h^H\|_s.
\end{aligned}$$

Bedingung (3.12): Normabschätzung:

$$\begin{aligned}
\|v_h^H\|_V &= \sqrt{\|v_h^H\|_{0,\Omega}^2 + \|\beta \cdot \nabla v_h^H\|_{0,\Omega}^2} \\
&\leq \max\{1, \|\beta\|_{\infty,\Omega}\} \sqrt{\|v_h^H\|_{0,\Omega}^2 + \|\nabla v_h^H\|_{0,\Omega}^2} \\
&= \max\{1, \|\beta\|_{\infty,\Omega}\} \|v_h^H\|_s,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|v_h^H\|_s &= \sqrt{\|v_h^H\|_{0,\Omega}^2 + \|\nabla v_h^H\|_{0,\Omega}^2} \\
&\stackrel{(2.7)}{\leq} \sqrt{\|v_h^H\|_{0,\Omega}^2 + c^2 \frac{1}{H^2} \|v_h^H\|_{0,\Omega}^2} \\
&\leq \sqrt{c^2 + 1} \frac{1}{H} \|v_h^H\|_{0,\Omega}.
\end{aligned}$$

Kommen wir nun zu unserem zweiten Stabilisierungsterm (3.25).

Bedingung (3.10): Elliptizität des Stabilisierungsterms S_{SVM} :

$$\begin{aligned}
S_{\text{SVM}}(v_h^H, w_h^H) &= H (\|v_h^H\|_{0,\Omega}^2 + \|(\beta \cdot \nabla)v_h^H\|_{0,\Omega}^2) \\
&= H \|v_h^H\|_s^2.
\end{aligned}$$

Bedingung (3.11): Stetigkeit des Stabilisierungsterms S_{SVM} :

$$\begin{aligned}
S_{\text{SVM}}(v_h^H, w_h^H) &= H \{(v_h^H, w_h^H)_{0,\Omega} + (\beta \cdot \nabla v_h^H, \beta \cdot \nabla w_h^H)_{0,\Omega}\} \\
&\stackrel{C.S.}{\leq} H \{\|v_h^H\|_{0,\Omega} \|w_h^H\|_{0,\Omega} + \|(\beta \cdot \nabla)v_h^H\|_{0,\Omega} \|(\beta \cdot \nabla)w_h^H\|_{0,\Omega}\} \\
&\stackrel{C.S.}{\leq} H \sqrt{\|v_h^H\|_{0,\Omega}^2 + \|(\beta \cdot \nabla)v_h^H\|_{0,\Omega}^2} \sqrt{\|w_h^H\|_{0,\Omega}^2 + \|(\beta \cdot \nabla)w_h^H\|_{0,\Omega}^2} \\
&= H \|v_h^H\|_s \|w_h^H\|_s.
\end{aligned}$$

Bedingung (3.12): Normabschätzung:

$$c_e 1 \|v_h^H\|_V \leq \|v_h^H\|_s.$$

$$\begin{aligned}
\|v_h^H\|_s &= \sqrt{\|v_h^H\|_{0,\Omega}^2 + \|(\beta \cdot \nabla)v_h^H\|_{0,\Omega}^2} \\
&\leq \sqrt{\|v_h^H\|_{0,\Omega}^2 + \|\beta\|_{\infty,\Omega}^2 \|\nabla v_h^H\|_{0,\Omega}^2} \\
&\stackrel{(2.7)}{\leq} \sqrt{(1 + \|\beta\|_{\infty,\Omega}^2 c^2 \frac{1}{H^2}) \|v_h^H\|_{0,\Omega}^2} \\
&\leq c' \frac{1}{H} \|v_h^H\|_{0,\Omega}.
\end{aligned}$$

Nun müssen noch die L-Stabilität (3.7) und die Gültigkeit der inf-sup-Bedingung bezüglich der diskreten Räume V_h und V_H (3.6) getestet werden. Bislang haben wir aber noch keine Finite-Elemente-Räume eingeführt. Dies geschieht im folgenden Abschnitt.

3.6 Zulässige finite Elemente

Im Folgenden werden vier Finite-Elemente-Paare angegeben, welche die Hypothesen der Subgrid-Viscosity-Methode erfüllen (vgl. Abbildung 3.1).

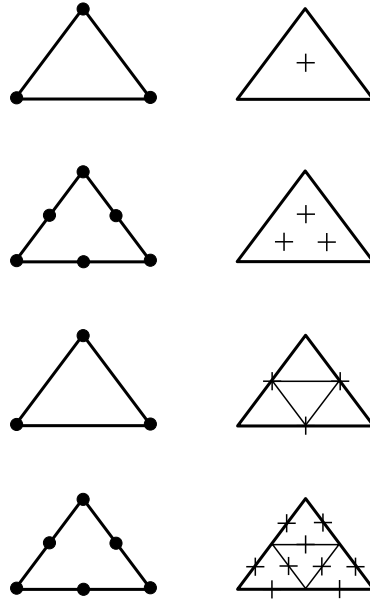


Abbildung 3.1: FE in der im Text dargestellten Reihenfolge. Auf der linken Seite befinden sich die großen aufgelösten Skalenelemente, auf der rechten die kleinen aufgelösten Skalenelemente.

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein polygonal berandetes Gebiet und $\{\mathcal{T}_H\}_{H>0}$ eine uniforme Familie zulässiger Triangulierungen. Das Referenzsimplex sei mit \hat{T} bezeichnet und $F_{T_H} : \hat{T} \rightarrow T_H$ sei die affine Abbildung, die das Referenzsimplex auf jedes Element der Triangulierung $\{\mathcal{T}_H\}_{H>0}$ abbildet.

1. \mathbb{P}_1 -Interpolation und Blasen-Funktionen:

Hier wählt man

$$V_H = \{v_H \in H^1(\Omega) \mid v_H|_{T_H} \in \mathbb{P}_1(T_H), \text{ für alle } T_H \in \mathcal{T}_H\}$$

für die großen aufgelösten Skalen. Sei nun $\hat{\Phi} \in H_0^1(\hat{T})$, $0 \leq \hat{\Phi} \leq 1$ eine spezielle *Blasen-Funktion* auf \hat{T} . Wir wählen $\hat{\Phi}$ als Produkt der $d+1$ baryzentrischen Koordinaten auf \hat{T} . Im Folgenden werden wir immer diese spezielle Blasen-Funktion meinen, wenn wir von einer „Blasen-Funktion“ reden. Mit der Definition $\Phi_H = \hat{\Phi} \circ F_{T_H}^{-1}$ kann man dann den Raum der kleinen aufgelösten Skalen als

$$V_h^H = \{v_h^H \in H^1(\Omega) \mid v_h^H|_{T_H} \in \text{span}\{\Phi_H\}, \text{ für alle } T_H \in \mathcal{T}_H\}$$

darstellen. V_h ergibt sich als direkte Summe von V_H und V_h^H .

2. \mathbb{P}_2 -Interpolation und Blasen-Funktionen:

Sei

$$V_H := \{v_H \in H^1(\Omega) \mid v_H|_{T_H} \in \mathbb{P}_2(T_H), \text{ für alle } T_H \in \mathcal{T}_H\}.$$

Seien $\{\hat{\Phi}_1, \dots, \hat{\Phi}_{d+1}\}$ eine Familie von $d+1$ linear unabhängigen reellwertigen Funktionen in $H_0^1(\hat{T})$ und $\Phi_{i,H} := \hat{\Phi}_i \circ F_{T_H}^{-1}$ für $1 \leq i \leq d+1$. Weiter sei $\{\hat{\Theta}_1, \dots, \hat{\Theta}_{k_H}\}$ eine Basis des Raumes $\mathbb{P}_2(\hat{T})$. Da die $\hat{\Phi}_1, \dots, \hat{\Phi}_{d+1}$ in $H_0^1(\hat{T})$ liegen, sind die Vektoren $\hat{\Theta}_1, \dots, \hat{\Theta}_{k_H}, \hat{\Phi}_1, \dots, \hat{\Phi}_{d+1}$ notwendigerweise linear unabhängig. Darum setzt man:

$$V_h^H = \{v_h^H \in H^1(\Omega) \mid v_h^H|_{T_H} \in \text{span}\{\Phi_{1,h}, \dots, \Phi_{d+1,h}\}, \text{ für alle } T_H \in \mathcal{T}_H\}.$$

Wieder ergibt sich der Raum V_h durch Bildung der direkten Summe.

3. \mathbb{P}_1 -Interpolation auf beiden Gittern (in 2D):

Sei

$$V_H := \{v_H \in H^1(\Omega) \mid v_H|_{T_H} \in \mathbb{P}_1(T_H), \text{ für alle } T_H \in \mathcal{T}_H\}.$$

Aus jedem Dreieck $T_H \in \mathcal{T}_H$ konstruiert man vier neue Dreiecke durch Verbindung der Mitten der Kanten von T_H . h setzt man als $\frac{H}{2}$. Damit ist \mathcal{T}_h die neue Triangulierung. Für jedes Makroelement T_H bezeichnet man mit \mathcal{P}_{T_H} die Menge der stetigen Funktionen auf T_H , die auf jedem Teildreieck von T_H stückweise \mathbb{P}_1 sind und an den drei Ecken von T_H verschwinden. Damit ergibt sich für V_h^H :

$$V_h^H = \{v_h^H \in H^1(\Omega) \mid v_h^H|_{T_H} \in \mathcal{P}_{T_H}, \text{ für alle } T_H \in \mathcal{T}_H\}.$$

Und da V_h die direkte Summe der Räume V_H und V_h^H ist, gilt:

$$V_h = \{v_h \in H^1(\Omega) \mid v_h|_{T_h} \in \mathbb{P}_1(T_h), \text{ für alle } T_h \in \mathcal{T}_h\}.$$

4. \mathbb{P}_2 -Interpolation auf beiden Gittern (in 2D):

Sei

$$V_H := \{v_H \in H^1(\Omega) \mid v_H|_{T_H} \in \mathbb{P}_2(T_H) \text{ für alle } T_H \in \mathcal{T}_H\}.$$

h und \mathcal{T}_h seien definiert wie bei der \mathbb{P}_1 -Interpolation auf beiden Gittern (in 2D). Für jedes $T_h \in \mathcal{T}_h$ seien $\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3$ die drei nodalen Basisfunktionen des \mathbb{P}_2 , verbunden mit den Mitten jeder Kante von T_h . Man setzt dann

$$V_h^H = \{v_h^H \in H^1(\Omega) \mid v_h^H|_{T_h} \in \text{span}\{\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3\}, \text{ für alle } T_h \in \mathcal{T}_h\},$$

wodurch sich

$$V_h = \{v_h \in H^1(\Omega) \mid v_h|_{T_h} \in \mathbb{P}_2(T_h), \text{ für alle } T_h \in \mathcal{T}_h\}$$

ergibt.

In allen vier betrachteten Fällen ist die direkte Summe der Räume V_H und V_h^H L^2 -stabil, weil deren Basen linear unabhängig sind (vgl. [Gue99, S.1303 f]), und die finiten Elemente erfüllen eine diskrete inf-sup-Bedingung, wenn β stückweise konstant ist. Allerdings müssen im Fall der \mathbb{P}_2 -Interpolation und Blasen-Funktionen noch weitere Bedingungen an die kleinen aufgelösten Skalen gestellt werden, damit die diskrete inf-sup-Bedingung tatsächlich erfüllt ist [Gue99]. Allgemein wird für Nachweise über die Erfüllung der diskreten inf-sup-Bedingung bezüglich der vorgestellten Raumpaare auf [Gue99, S.1301 f] verwiesen.

Kapitel 4

Multiskalenmethode

Ziel dieses Kapitels ist es, eine Stabilisierungsmethode von Malte Braack und Erik Burman [BB04] vorzustellen, welche mit lokalen Projektionen arbeitet. In diesem Kontext gehen wir auch noch auf eine ähnliche Methode ein, die von V.John, S.Kaya, W.Layton entwickelt wurde (vgl. [JKL05]). Beide basieren auf dem Konzept der Multiskalenmethode, welche wir zu Beginn dieses Kapitels kurz erläutern werden. Wir beziehen uns wie bisher auf Abschnitt 1.2 und das darin definierte Modellproblem (1.1):

$$(MP) \quad \begin{cases} -\varepsilon \Delta u + \beta \cdot \nabla u + \mu u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.1)$$

4.1 Multiskalenansatz

Ausgehend von der Multiskalenmethode nach Collis [Col01] wird der Raum V in drei Unterräume aufgespalten:

$$V = \bar{V} \oplus \tilde{V} \oplus \hat{V}. \quad (4.2)$$

Die Räume sind so gewählt, dass \bar{V} die großen und \tilde{V} die kleinen aufgelösten Skalen darstellen, während \hat{V} für die nichtaufgelösten Skalen steht. In Kapitel 3.2 haben wir ebenfalls auf Collis verwiesen. Auch bei der Subgrid-Viscosity-Methode haben wir nämlich eine Raum-Aufspaltung in kleine und große aufgelöste Skalen. Auf die nichtaufgelösten Skalen geht J.L. Guermond nicht näher ein. Wir werden sehen, dass diese auch bei der folgenden Stabilisierung nur eine mindere Rolle spielen.

Gemäß der Separation (4.2) kann man das Variationsproblem (VP) aus Abschnitt 1.2

$$(VP) \quad \begin{cases} \text{Finde ein } u \in V, \text{ so dass} \\ a(u, v) = (f, v)_{0,\Omega} \quad \forall v \in V, \end{cases} \quad (4.3)$$

in drei Teilprobleme aufspalten:

$$\begin{aligned} a(u, \bar{v}) &= (f, \bar{v})_{0,\Omega} \quad \text{für alle } \bar{v} \in \bar{V}, \\ a(u, \tilde{v}) &= (f, \tilde{v})_{0,\Omega} \quad \text{für alle } \tilde{v} \in \tilde{V}, \\ a(u, \hat{v}) &= (f, \hat{v})_{0,\Omega} \quad \text{für alle } \hat{v} \in \hat{V}. \end{aligned}$$

Spaltet man nun auch u in seine Bestandteile auf, erkennt man die unterschiedlichen Einflüsse der einzelnen Skalen aufeinander. Man erhält Gleichungen der Gestalt

$$a(\bar{u}, \bar{v}) + a(\tilde{u}, \bar{v}) = (f, \bar{v})_{0,\Omega} - a(\hat{u}, \bar{v}), \quad (4.4)$$

$$a(\bar{u}, \tilde{v}) + a(\tilde{u}, \tilde{v}) = (f, \tilde{v})_{0,\Omega} - a(\hat{u}, \tilde{v}), \quad (4.5)$$

$$a(\bar{u}, \hat{v}) + a(\tilde{u}, \hat{v}) = (f, \hat{v})_{0,\Omega} - a(\hat{u}, \hat{v}). \quad (4.6)$$

Auf der linken Seite von Gleichung 4.4 erkennt man den Einfluss der kleinen aufgelösten Skalen auf die großen Skalen, während die rechte Seite von (4.4) den Einfluss der nichtaufgelösten Skalen auf die großen Skalen zeigt. Gleichung (4.5) verdeutlicht zum einen, dass der Rest der großen Skalen die kleinen aufgelösten Skalen lenkt. Zum anderen lässt die linke Seite von (4.5) wieder den Einfluss der nichtaufgelösten Skalen auf die kleinen Skalen erkennen. Schließlich macht die Gleichung 4.6 klar, dass die nichtaufgelösten Skalen von den Resten der aufgelösten Skalen getrieben werden. Alle Gleichungen sind demnach miteinander verknüpft. Um das Problem gut modellieren zu können, sollen deshalb bestimmte Annahmen getroffen werden.

Modellannahmen:

1. Die nichtaufgelösten Skalen \hat{V} haben keinen direkten Einfluss auf die großen Skalen \bar{V} . Das bedeutet, dass

$$-a(\hat{u}, \bar{v}) = 0$$

gesetzt wird. Allerdings ist hier Vorsicht geboten: Ist bei der späteren Diskretisierung die Gitterweite h identisch mit der größeren Gitterweite H , so wird diese Annahme relativ unrealistisch.

2. Der Einfluss der nichtaufgelösten Skalen auf die kleinen aufgelösten Skalen wird durch einen künstlichen Viskositätsterm modelliert. Zu diesem Zweck wird ein Operator $S_{\text{LPS}} : (\bar{V} \oplus \tilde{V}) \times (\bar{V} \oplus \tilde{V}) \rightarrow \mathbb{R}$ eingeführt, der auf den kleinen aufgelösten Skalen agiert. Für alle $\tilde{v} \in \tilde{V}$ gelte demnach

$$S_{\text{LPS}}(\tilde{u}, \tilde{v}) \approx -a(\hat{u}, \tilde{v}).$$

Zusammen mit diesen Annahmen können wir die drei Gleichungen (4.4),(4.5) und (4.6) zu zwei Gleichungen vereinfachen, indem die nichtaufgelösten Skalen nur noch durch den zusätzlichen Viskositätsterm zum Ausdruck gebracht werden:

$$a(\bar{u} + \tilde{u}, \bar{v}) = (f, \bar{v})_{0,\Omega} \quad \text{für alle } \bar{v} \in \bar{V}, \quad (4.7)$$

$$a(\bar{u} + \tilde{u}, \tilde{v}) + S_{\text{LPS}}(\tilde{u}, \tilde{v}) = (f, \tilde{v})_{0,\Omega} \quad \text{für alle } \tilde{v} \in \tilde{V}. \quad (4.8)$$

Wie bei der Subgrid–Viscosity–Methode gibt es viele Möglichkeiten, diesen stabilisierenden Term S_{LPS} zu wählen. Diese Wahl entscheidet letztendlich über das Verfahren, das man benutzt.

4.2 Lokale Projektionsmethode

Bei der Stabilisierung durch lokale Projektion nach Malte Braack und Erik Burman [BB04] stellt man an S_{LPS} folgende Forderungen:

1. S_{LPS} ist symmetrisch:

$$S_{\text{LPS}}(u, v) = S_{\text{LPS}}(v, u) \quad \forall u, v \in \bar{V} \oplus \tilde{V}. \quad (4.9)$$

2. Auf den großen Skalen verschwindet S_{LPS} :

$$S_{\text{LPS}}(\bar{v}, \cdot) = 0 \quad \forall \bar{v} \in \bar{V}. \quad (4.10)$$

3. S_{LPS} ist auf den kleinen Skalen elliptisch. Es erfüllt also

$$S_{\text{LPS}}(\tilde{u}, \tilde{u}) \geq c \|\nabla \tilde{u}\|_{0, \Omega}^2 \quad \forall \tilde{u} \in \tilde{V}. \quad (4.11)$$

Diese Forderung wird allerdings nicht explizit benötigt. Für die lokale Projektionsmethode reicht eine schwächere Forderung. Was das bedeutet, werden wir im Beweis zu Lemma 4.3 sehen, wenn ein konkreter Stabilisierungsterm ausgewählt wurde.

Wenn der Viskositätsterm S_{LPS} Forderung (4.10) erfüllt, so liefert dies Galerkin–Orthogonalität für den Diskretisierungsfehler $u - \bar{u} - \tilde{u}$ auf den großen Skalen:

Lemma 4.1. *Sei u eine Lösung zum Problem (VP) und $\bar{u} + \tilde{u}$ eine Näherungslösung, gewonnen durch Auflösung der Gleichungen (4.7) und (4.8). Dann gilt für alle $\bar{v} \in \bar{V}$*

$$a(u - \bar{u} - \tilde{u}, \bar{v}) = 0.$$

Beweis: Man subtrahiert (4.7) von (VP). □

4.2.1 Diskretisierung

Sei $\mathcal{T}_h = \{T\}$ ein quasiuniformes Gitter von Parallelepipeden T . Für ein $q \in \mathbb{N}$ sei $H := 2^q h$ und damit \mathcal{T}_H ein gröberes Gitter, das durch q -malige globale Vergrößerung von \mathcal{T}_h entsteht. Für unsere Betrachtungen soll $H = 2h$ gelten. Man betrachtet im Folgenden nun die Finite–Elemente–Räume

$$\begin{aligned} P_h^r(\Omega) &:= \{\varphi \in \mathcal{C}(\Omega) \mid \varphi|_T = \hat{\varphi} \circ F_T^{-1}\}, \\ P_{h, \text{disc}}^r(\Omega) &:= \{\varphi \in L^2(\Omega) \mid \varphi|_T = \hat{\varphi} \circ F_T^{-1}\}, \end{aligned}$$

wobei $r \in \mathbb{N}$ und $\hat{\varphi}$ ein Polynom r -ten Grades ist.
 V_H entspreche \bar{V} als Raum der großen aufgelösten Skalen:

$$V_H := \{\psi \in P_H^r(\Omega) \mid \psi|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Der Raum V_h dagegen sei der Raum der gesamten aufgelösten Skalen, das heißt:

$$V_h = \bar{V} \oplus \tilde{V}.$$

Er wird definiert durch

$$V_h := \{\psi \in P_h^r(\Omega) \mid \psi|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

Demnach ist V_H ein Teilraum von V_h , genauer gilt

$$V_h = V_H \oplus \tilde{V}_h,$$

wobei \tilde{V}_h dem Raum \tilde{V} entspreche. An dieser Stelle möchten wir nochmals an die Räume V_h und V_H der Subgrid-Viscosity-Methode erinnern. Sowohl bei der lokalen Projektionsmethode als auch bei der Subgrid-Viscosity-Methode bezeichnet V_h den gesamten Raum der aufgelösten Skalen und V_H den Raum der großen aufgelösten Skalen. Allerdings werden diese nicht gleich gewählt. In Kapitel 5 werden wir darauf näher eingehen.

Das diskrete Problem kann nun wie folgt formuliert werden:

$$\begin{cases} \text{Finde ein } u_h \in V_h, \text{ so dass} \\ a(u_h, v_h) + S_{\text{LPS}}(\tilde{u}_h, \tilde{v}_h) = (f, v_h)_{0,\Omega} \quad \forall v_h \in V_h. \end{cases} \quad (4.12)$$

Lemma 4.2. *Unter Nutzung von (4.10) lässt sich das diskrete Problem (4.12) zu*

$$\begin{cases} \text{Finde ein } u_h \in V_h, \text{ so dass} \\ a(u_h, v_h) + S_{\text{LPS}}(u_h, v_h) = (f, v_h)_{0,\Omega} \quad \forall v_h \in V_h. \end{cases} \quad (4.13)$$

umformulieren.

Beweis: Seien $u_h, v_h \in V_h$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} S_{\text{LPS}}(\tilde{u}_h, \tilde{v}_h) &= S_{\text{LPS}}(u_h - u_H, \tilde{v}_h) \\ &= S_{\text{LPS}}(u_h, \tilde{v}_h) - S_{\text{LPS}}(u_H, \tilde{v}_h) \\ &\stackrel{(4.10)}{=} S_{\text{LPS}}(u_h, \tilde{v}_h). \end{aligned}$$

Aufgrund der Symmetrie des Stabilisierungsterms S_{LPS} folgt die Behauptung. \square

Noch ist aber nicht geklärt, was unter dem Stabilisierungsterm zu verstehen ist. Die Stabilisierung soll auf einer lokalen Projektion basieren. Darum definiert man den Projektionsoperator

$$P_{\text{LPS}} : L^2(\Omega) \longrightarrow P_{H,\text{disc}}^{r-1}(\Omega)$$

durch

$$(P_{\text{LPS}}\phi, \psi)_{0,\Omega} = (\phi, \psi)_{0,\Omega} \quad \text{für alle } \psi \in P_{H,\text{disc}}^{r-1}(\Omega). \quad (4.14)$$

Für $r = 1$ enthält $P_{H,\text{disc}}^{r-1}(\Omega)$ stückweise konstante und für $r = 2$ stückweise lineare Funktionen. Weiter definiert man die Projektion

$$Q_{\text{LPS}} = I - P_{\text{LPS}}.$$

Mit Hilfe dieser Definitionen kann man S_{LPS} nun folgendermaßen wählen:

$$S_{\text{LPS}}(u, v) := (\delta Q_{\text{LPS}} \nabla u, Q_{\text{LPS}} \nabla v)_{0,\Omega} \quad (4.15)$$

oder

$$S_{\text{LPS}}(u, v) := (\delta Q_{\text{LPS}}(\beta \cdot \nabla)u, Q_{\text{LPS}}(\beta \cdot \nabla)v)_{0,\Omega}. \quad (4.16)$$

Der Parameter $\delta \geq 0$ hängt von h ab. Die Wahl (4.16) bietet den Vorteil, dass die zusätzliche Crosswind-Diffusion in (4.15) minimiert wird.

Lemma 4.3. *Sowohl (4.15) als auch (4.16) erfüllen die an S_{LPS} gestellten Bedingungen (4.9), (4.10) und (4.11).*

Beweis: Seien $u_h, v_h \in V_h$, $u_H \in V_H$ und $\tilde{u}_h \in \tilde{V}_h$.

Wir behandeln erst den Stabilisierungsterm (4.15):

Offensichtlich ist $S_{\text{LPS}}(u_h, v_h)$ symmetrisch. Bezüglich der großen Skalen erfüllt S_{LPS} :

$$\begin{aligned} S_{\text{LPS}}(u_H, \cdot) &= (\delta Q_{\text{LPS}} \nabla u_H, \cdot)_{0,\Omega} \\ &= (\delta (\nabla u_H - P_{\text{LPS}} \nabla u_H), \cdot)_{0,\Omega} \\ &= (\delta (\nabla u_H - \nabla u_H), \cdot)_{0,\Omega} \\ &= 0, \end{aligned}$$

weil $P_H^r(\Omega) \subset P_{H,\text{disc}}^r(\Omega)$. Damit gilt Forderung (4.10). Schließlich ergibt sich aufgrund der Definition von S_{LPS} und $\delta > 0$:

$$S_{\text{LPS}}(\tilde{u}_h, \tilde{u}_h) = \delta \|Q_{\text{LPS}} \nabla \tilde{u}_h\|_{0,\Omega}^2.$$

Dies ist eine Abschwächung der Forderung (4.11), d.h. S_{LPS} erfüllt eine schwache Elliptizitätsbedingung. Wie in Kapitel 4.2 bereits angekündigt, ist diese für die Zwecke der lokalen Projektionsmethode vollkommen ausreichend.

Kommen wir nun zum Stabilisierungsterm (4.16):

Offensichtlich ist auch dieser für $u_h, v_h \in V_h$ symmetrisch. Weiter gilt

$$\begin{aligned}
S_{\text{LPS}}(u_H, \cdot) &= (\delta Q_{\text{LPS}}(\beta \cdot \nabla)u_H, \cdot)_{0,\Omega} \\
&= (\delta [(\beta \cdot \nabla)u_H - P_{\text{LPS}}(\beta \cdot \nabla)u_H], \cdot)_{0,\Omega} \\
&= (\delta [(\beta \cdot \nabla)u_H - P_{\text{LPS}}(\sum_i \beta_i \frac{\partial u_H}{\partial x_i})], \cdot)_{0,\Omega} \\
&= (\delta [(\beta \cdot \nabla)u_H - \sum_i \beta_i P_{\text{LPS}}(\frac{\partial u_H}{\partial x_i})], \cdot)_{0,\Omega} \\
&= (\delta [(\beta \cdot \nabla)u_H - \sum_i \beta_i \frac{\partial u_H}{\partial x_i}], \cdot)_{0,\Omega} \\
&= (\delta [(\beta \cdot \nabla)u_H - (\beta \cdot \nabla)u_H], \cdot)_{0,\Omega} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

also (4.10). Bleibt noch die (schwache) Elliptizität von S_{LPS} bezüglich $\|\cdot\|_{0,\Omega}$ zu zeigen. Diese ergibt sich wieder automatisch aus der Definition:

$$S_{\text{LPS}}(\tilde{u}_h, \tilde{u}_h) = \sqrt{\delta} \|Q_{\text{LPS}}(\beta \cdot \nabla)\tilde{u}_h\|_{0,\Omega}^2.$$

□

Bemerkung 4.4. Man kann für S_{LPS} nach (4.15) auch zeigen, dass Elliptizität in Form von (4.11) gilt:

$$\begin{aligned}
S_{\text{LPS}}(\tilde{u}_h, \tilde{u}_h) &= \delta \|Q_{\text{LPS}}\nabla\tilde{u}_h\|_{0,\Omega}^2 \\
&\stackrel{\text{Pythagoras}}{=} \delta (\|\nabla\tilde{u}_h\|_{0,\Omega}^2 - \|P_{\text{LPS}}\nabla\tilde{u}_h\|_{0,\Omega}^2) \\
&\geq \delta \left(1 - \frac{\|P_{\text{LPS}}\nabla\tilde{u}_h\|_{0,\Omega}^2}{\|\nabla\tilde{u}_h\|_{0,\Omega}^2}\right) \|\nabla\tilde{u}_h\|_{0,\Omega}^2 \\
&\geq c \|\nabla\tilde{u}_h\|_{0,\Omega}^2
\end{aligned}$$

mit $c = \delta \left(1 - \frac{\|P_{\text{LPS}}\nabla\tilde{u}_h\|_{0,\Omega}^2}{\|\nabla\tilde{u}_h\|_{0,\Omega}^2}\right)$. Wegen

$$0 \leq \frac{\|P_{\text{LPS}}\nabla\tilde{u}_h\|_{0,\Omega}^2}{\|\nabla\tilde{u}_h\|_{0,\Omega}^2} \leq \frac{\|P_{\text{LPS}}\|^2 \|\nabla\tilde{u}_h\|_{0,\Omega}^2}{\|\nabla\tilde{u}_h\|_{0,\Omega}^2} = \|P_{\text{LPS}}\|^2 = 1$$

liegt c in $[0; \delta]$. Dies entspricht einem zusätzlichen lösungsabhängigen und damit nichtlinearen Diffusionsanteil. Falls $\|\nabla\tilde{u}_h\|_{0,\Omega} = 0$ ist, wählt man $\delta = 0$. Damit ist aber S_{LPS} elliptisch auf den kleinen Skalen.

Es sei aber nochmals betont, dass dies hier nicht verlangt wird.

4.2.2 Konvergenzanalyse

Lemma 4.5 (Interpolations- und Stabilitätseigenschaft von Q_{LPS}).

Für den Operator Q_{LPS} aus Abschnitt 4.2.1 gelten die Relationen

$$\|Q_{\text{LPS}}\nabla v\|_{0,\Omega} \leq c h^{r-1} \|v\|_{r,\Omega} \quad \forall v \in H^r(\Omega) \quad (4.17)$$

$$\|Q_{\text{LPS}}v\|_{0,\Omega} \leq c \|v\|_{0,\Omega} \quad \forall v \in L^2(\Omega). \quad (4.18)$$

Beweis: Sei $w \in H^{r-1}(\Omega)$ definiert als $w = \nabla v$, wobei $v \in H^r(\Omega)$ ist. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \|Q_{\text{LPS}} \nabla v\|_{0,T} &= \|w - P_{\text{LPS}} w\|_{0,T} \stackrel{(4.14)}{\leq} \|w - \mathcal{I}_h w\|_{0,T} \\ &\stackrel{(2.6)}{\leq} h_T^{r-1} c |w|_{r-1,T} \leq h_T^{r-1} c \|v\|_{r,T} \end{aligned}$$

für alle $T \in \mathcal{T}_H$. Die Stabilität des Operators Q_{LPS} ist eine Folge der L^2 -Stabilität von P_{LPS} :

$$\|Q_{\text{LPS}} v\|_{0,\Omega} \leq \|v\|_{0,\Omega} + \|P_{\text{LPS}} v\|_{0,\Omega} \leq \|v\|_{0,\Omega} + c \|v\|_{0,\Omega} = (1+c) \|v\|_{0,\Omega}$$

für alle $v \in L^2(\Omega)$. \square

Um im Folgenden eine A-priori-Abschätzung herleiten zu können, führen wir eine Tripelnorm in V ein:

$$\| \| u \| \| := \sqrt{\|(\mu - \frac{1}{2} \nabla \cdot \beta)^{\frac{1}{2}} u\|_{0,\Omega}^2 + \|\sqrt{\varepsilon} \nabla u\|_{0,\Omega}^2 + S_{\text{LPS}}(u, u)}.$$

Wir werden sehen, dass mit Hilfe dieser Norm eine Elliptizitäts- und Stetigkeitsaussage getroffen werden kann. Ziel ist, den Satz 1.1 anzuwenden und damit die Existenz und Eindeutigkeit der diskreten Lösung zu sichern.

Lemma 4.6 (Elliptizität). *Für alle $u \in V$ gilt die Gleichheit:*

$$\| \| u \| \|^2 = a(u, u) + S_{\text{LPS}}(u, u). \quad (4.19)$$

Beweis: Sei $u \in V$. Dann gilt für die Bilinearform $a(\cdot, \cdot)$:

$$\begin{aligned} a(u, u) &= (\mu u, u)_{0,\Omega} + (\beta \cdot \nabla u, u)_{0,\Omega} + (\varepsilon \nabla u, \nabla u)_{0,\Omega} \\ &\stackrel{(1.6)}{=} (\mu u, u)_{0,\Omega} - \frac{1}{2} ((\nabla \cdot \beta) u, u)_{0,\Omega} + \|\sqrt{\varepsilon} \nabla u\|_{0,\Omega}^2 \\ &= ((\mu - \frac{1}{2} (\nabla \cdot \beta)) u, u)_{0,\Omega} + \|\sqrt{\varepsilon} \nabla u\|_{0,\Omega}^2 \\ &= \|\sqrt{\mu - \frac{1}{2} (\nabla \cdot \beta)} u\|_{0,\Omega}^2 + \|\sqrt{\varepsilon} \nabla u\|_{0,\Omega}^2, \end{aligned}$$

woraus die Behauptung

$$\begin{aligned} a(u, u) + S_{\text{LPS}}(u, u) &= \|\sqrt{\mu - \frac{1}{2} (\nabla \cdot \beta)} u\|_{0,\Omega}^2 + \|\sqrt{\varepsilon} \nabla u\|_{0,\Omega}^2 + S_{\text{LPS}}(u, u) \\ &= \| \| u \| \|^2 \end{aligned}$$

folgt. \square

Da der Operator S_{LPS} (sowohl in der Form (4.15) als auch in der Form (4.16)) bilinear ist, ist der gesamte Ausdruck $a(u, v) + S_{\text{LPS}}(u, v)$ bilinear. Um den Satz 1.1

anwenden zu können, muss nur noch die Stetigkeit von $a(u, v) + S_{\text{LPS}}(u, v)$ nachgewiesen werden:

$$\begin{aligned}
& |a(u, v) + S_{\text{LPS}}(u, v)| \\
&= |(\mu u, v)_{0,\Omega} + 2 \frac{1}{2} (\beta \cdot \nabla u, v)_{0,\Omega} + (\varepsilon \nabla u, \nabla v)_{0,\Omega} + S_{\text{LPS}}(u, v)| \\
&\stackrel{(1.5)}{=} |((\mu - \frac{1}{2} \nabla \cdot \beta) u, v)_{0,\Omega} + (\varepsilon \nabla u, \nabla v)_{0,\Omega} + S_{\text{LPS}}(u, v)| \\
&\quad + |\frac{1}{2} (u, \beta \cdot \nabla v)_{0,\Omega}| + |\frac{1}{2} (\beta \cdot \nabla u, v)_{0,\Omega}| \\
&\stackrel{C.S.}{\leq} \|u\| \|v\| + \frac{1}{2} \|\beta\|_{\infty,\Omega} (|u|_{1,\Omega} \|v\|_{0,\Omega} + \|u\|_{0,\Omega} |v|_{1,\Omega}) \\
&\stackrel{C.S.}{\leq} \|u\| \|v\| + \frac{\|\beta\|_{\infty,\Omega}}{2\sqrt{\varepsilon}\sqrt{\mu_0}} \|u\| \|v\| \\
&= c \|u\| \|v\|
\end{aligned}$$

mit $c = (1 + \frac{\|\beta\|_{\infty,\Omega}}{2\sqrt{\varepsilon}\sqrt{\mu_0}})$. Wir haben damit die Erfüllung aller Voraussetzungen des Satzes 1.1 gezeigt. Anwendung auf das diskretisierte Variationsproblem (VP) liefert uns dessen eindeutige Lösbarkeit.

Lemma 4.7 (approximative Galerkin Orthogonalität). *Sei $u \in V$ Lösung von (VP) und $u_h \in V_h$ Lösung von Problem (4.13) mit dem Stabilisierungsterm (4.15). Dann gilt für alle $v_h \in V_h$ die Gleichheit*

$$a(u - u_h, v_h) = S_{\text{LPS}}(u_h, v_h). \quad (4.20)$$

Beweis: Die Behauptung ergibt sich durch Subtraktion des diskreten Problems (4.13) von dem Ausgangsproblem (VP). \square

Galerkin Orthogonalität liefert normalerweise die Konsistenz der Lösung. Da wir hier aber nur approximative Galerkin Orthogonalität haben, haben wir auch keine volle Konsistenz. Es muss daher noch das asymptotische Verhalten des Stabilisierungsterms S_{LPS} analysiert werden, wie z.B. seine Abhängigkeit von der Gitterweite h . Zu diesem Zweck arbeiten wir im Folgenden mit dem modifizierten Clément–Interpolationsoperator $j_h : V \rightarrow V_h$, der in [BB01, S.183] eingeführt wird. Er besitzt die folgenden Eigenschaften:

1. Orthogonalitätseigenschaft:

Für alle $v \in V$ und alle $w \in P_{H,\text{disc}}^{r-1}(\Omega)$ gilt:

$$(v - j_h v, w)_{0,\Omega} = 0. \quad (4.21)$$

2. Approximationseigenschaft in der L^2 -Norm und der H^1 -Seminorm:

Für alle $v \in H^r(\Omega)$ mit $r \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\|v - j_h v\|_{0,\Omega} \leq c h^r \|v\|_{r,\Omega}, \quad (4.22)$$

$$\|\nabla(v - j_h v)\|_{0,\Omega} \leq c h^{r-1} \|v\|_{r,\Omega}. \quad (4.23)$$

3. L^2 -Stabilität und H^1 -Stabilität:

Für alle $v \in L^2(\Omega)$ gilt

$$\|j_h v\|_{0,\Omega} \leq c \|v\|_{0,\Omega}, \quad (4.24)$$

und für alle $v \in H^1(\Omega)$ gilt

$$\|j_h v\|_{1,\Omega} \leq c \|v\|_{1,\Omega}. \quad (4.25)$$

Den Nachweis dieser Eigenschaften kann man für $r = 1, 2$ in [BB04, S.9ff] nachlesen.

Lemma 4.8. *Bezeichne j_h den modifizierten Clément-Interpolationsoperator. Für alle $u \in V \cap H^r(\Omega)$, $r \in \mathbb{N}$ gilt für den Stabilisierungsterm (4.15)*

$$\sqrt{S_{LPS}(j_h u, j_h u)} \leq c \sqrt{\delta} h^{r-1} \|u\|_{r,\Omega} \quad (4.26)$$

und für den Stabilisierungsterm (4.16)

$$\sqrt{S_{LPS}(j_h u, j_h u)} \leq c \sqrt{\delta} \|\beta\|_\infty h^{r-1} \|u\|_{r,\Omega}. \quad (4.27)$$

Beweis: Sei $u \in V \cap H^r(\Omega)$. Durch Nullergänzung erhält man die Umformungen

$$\begin{aligned} S_{LPS}(j_h u, j_h u) &= S_{LPS}(u + j_h u - u, u + j_h u - u) \\ &= S_{LPS}(u + j_h u - u, u) + S_{LPS}(u + j_h u - u, j_h u - u) \\ &= S_{LPS}(u, u) + 2 S_{LPS}(j_h u - u, u) + S_{LPS}(j_h u - u, j_h u - u) \\ &\leq 2 (S_{LPS}(u, u) + S_{LPS}(j_h u - u, j_h u - u)). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Von hier an unterscheiden wir zwischen den einzelnen Stabilisierungstermen. Zuerst untersuchen wir den Term (4.15):

Der erste Term der rechten Seite lässt sich abschätzen zu

$$S_{LPS}(u, u) = \delta \|Q_{LPS} \nabla u\|_{0,\Omega}^2 \stackrel{(4.17)}{\leq} \delta c h^{2(r-1)} \|u\|_{r,\Omega}^2,$$

und für den Rest ergibt sich

$$\begin{aligned} S_{LPS}(j_h u - u, j_h u - u) &= \delta \|Q_{LPS} \nabla(j_h u - u)\|_{0,\Omega}^2 \\ &\stackrel{(4.18)}{\leq} c \delta \|\nabla(j_h u - u)\|_{0,\Omega}^2 \\ &\stackrel{(4.23)}{\leq} c' \delta h^{2(r-1)} \|u\|_{r,\Omega}^2. \end{aligned}$$

Setzt man die beiden abgeschätzten Terme in die Ungleichung (4.28) ein, folgt die Behauptung.

Mit dem zweiten Stabilisierungsterm (4.16) verfahren wir genauso:

$$\begin{aligned}
S_{\text{LPS}}(u, u) &= \delta \|Q_{\text{LPS}}(\beta \cdot \nabla)u\|_{0,\Omega}^2 \\
&\stackrel{(4.17)}{\leq} c \delta h^{2(r-1)} \|\beta \cdot \nabla u\|_{r-1,\Omega}^2 \\
&\leq c \delta h^{2(r-1)} \|\beta\|_{\infty,\Omega}^2 \|u\|_{r,\Omega}^2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_{\text{LPS}}(j_h u - u, j_h u - u) &= \delta \|Q_{\text{LPS}}(\beta \cdot \nabla)(j_h u - u)\|_{0,\Omega}^2 \\
&\stackrel{(4.18)}{\leq} c \delta \|\beta \cdot \nabla(j_h u - u)\|_{0,\Omega}^2 \\
&\leq c \delta \|\beta\|_{\infty,\Omega}^2 \|\nabla(j_h u - u)\|_{0,\Omega}^2 \\
&\stackrel{(4.23)}{\leq} c' \delta \|\beta\|_{\infty,\Omega}^2 h^{2(r-1)} \|u\|_{r,\Omega}^2.
\end{aligned}$$

Erneutes Einsetzen der beiden Abschätzungen in Gleichung (4.28) führt zum gewünschten Ergebnis. \square

Lemma 4.9. *Wenn $\beta \in [W^{1,\infty}(\Omega)]^d$ ist, gilt für alle $v \in V_h$*

$$\|\sqrt{\delta} Q_{\text{LPS}}(\beta \cdot \nabla) v\|_{0,\Omega} \leq c_\beta \|v\| \quad (4.29)$$

mit $c_\beta = c \frac{\sqrt{\delta}}{\mu - \frac{1}{2} \nabla \cdot \beta} \|\beta\|_{1,\infty,\Omega} + \|\beta\|_{\infty,\Omega}$.

Beweis: Seien $\beta \in [W^{1,\infty}(\Omega)]^d$ und $v \in V_h$. Über eine Nullergänzung und die Dreiecksungleichung erhält man die Abschätzung

$$\begin{aligned}
&\|\sqrt{\delta} Q_{\text{LPS}}(\beta \cdot \nabla) v\|_{0,\Omega} \\
&\leq \|\sqrt{\delta} Q_{\text{LPS}}[(\beta - P_{\text{LPS}}\beta) \cdot \nabla] v\|_{0,\Omega} + \|\sqrt{\delta} Q_{\text{LPS}}[(P_{\text{LPS}}\beta) \cdot \nabla] v\|_{0,\Omega} \\
&\stackrel{(4.18)}{\leq} c \|\sqrt{\delta} [(\beta - P_{\text{LPS}}\beta) \cdot \nabla] v\|_{0,\Omega} + \|\sqrt{\delta} Q_{\text{LPS}}[(P_{\text{LPS}}\beta) \cdot \nabla] v\|_{0,\Omega}.
\end{aligned}$$

Nun werden die beiden Terme der rechten Seite separat untersucht. Betrachten wir erst den zweiten Ausdruck:

$$\begin{aligned}
\|\sqrt{\delta} Q_{\text{LPS}}[(P_{\text{LPS}}\beta) \cdot \nabla] v\|_{0,\Omega} &= \|\sqrt{\delta} ((P_{\text{LPS}}\beta) \cdot \nabla) v - P_{\text{LPS}}[(P_{\text{LPS}}\beta) \cdot \nabla] v\|_{0,\Omega} \\
&= \|\sqrt{\delta} ((P_{\text{LPS}}\beta) \cdot \nabla) v - [(P_{\text{LPS}}\beta) \cdot P_{\text{LPS}}\nabla] v\|_{0,\Omega} \\
&= \|\sqrt{\delta} ((P_{\text{LPS}}\beta) \cdot [\nabla - P_{\text{LPS}}\nabla]) v\|_{0,\Omega} \\
&= \|\sqrt{\delta} [(P_{\text{LPS}}\beta) \cdot Q_{\text{LPS}}\nabla] v\|_{0,\Omega} \\
&\leq \|\beta\|_{\infty,\Omega} \|\sqrt{\delta} Q_{\text{LPS}}\nabla v\|_{0,\Omega} \\
&\leq \|\beta\|_{\infty,\Omega} \sqrt{S_{\text{LPS}}(v, v)}.
\end{aligned}$$

Unter Verwendung der Approximationseigenschaft von P_{LPS} und einer lokalen inversen Ungleichung ergibt sich für den ersten Term der rechten Seite:

$$\begin{aligned}
\|[(\beta - P_{\text{LPS}}\beta) \cdot \nabla] v\|_{0,\Omega}^2 &= \sum_T \|[(Q_{\text{LPS}}\beta) \cdot \nabla] v\|_{0,T}^2 \\
&\leq \sum_T \|Q_{\text{LPS}}\beta\|_{0,T}^2 \|\nabla v\|_{0,T}^2 \\
&\stackrel{(4.17)}{\leq} c \sum_T h_T^2 \|\beta\|_{1,\infty,T}^2 \|\nabla v\|_{0,T}^2 \\
&\stackrel{(2.7)}{\leq} c \sum_T h_T^2 \|\beta\|_{1,\infty,T}^2 \frac{c'^2}{h_T^2} \|v\|_{0,T}^2 \\
&\leq c \|\beta\|_{1,\infty,\Omega}^2 \|v\|_{0,\Omega}^2.
\end{aligned}$$

Wurzelziehen und Einsetzen der beiden Abschätzungen in die Ausgangsungleichung führt zum geforderten Ergebnis. \square

Die beiden letzten Lemmata, zusammen mit der Elliptizität und der approximativen Galerkin-Orthogonalität, sichern die Konvergenz des Verfahrens, wodurch wir nun in der Lage sind, eine A-priori-Abschätzung anzugeben.

Theorem 4.10. *Unter der Annahme, dass die Lösung u des Modellproblems (MP) im Raum $H^{r+1}(\Omega)$ liegt, gelten folgende A-priori-Abschätzungen: Falls $\beta \in [W^{1,\infty}(\Omega)]^d$, gilt für den Stabilisierungsterm (4.15)*

$$\begin{aligned}
&\| \|u - u_h\| \| \\
&\leq C \left[\left(\sqrt{\mu - \frac{1}{2} \nabla \cdot \beta} + \frac{c \|\beta\|_{1,\infty,\Omega}}{\mu - \frac{1}{2} \nabla \cdot \beta} + \frac{\|\beta\|_{\infty,\Omega}}{\sqrt{\delta}} \right) h + \sqrt{\varepsilon} + c\sqrt{\delta} \right] h^r \|u\|_{r+1,\Omega}.
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Für die Stabilisierung der Form (4.16) erhält man dagegen

$$\begin{aligned}
&\| \|u - u_h\| \| \\
&\leq C \left(\sqrt{\mu - \frac{1}{2} \nabla \cdot \beta} h + \sqrt{\varepsilon} + \frac{c h}{\sqrt{\delta}} + c\sqrt{\delta} \|\beta\|_{\infty,\Omega} \right) h^r \|u\|_{r+1,\Omega}.
\end{aligned} \tag{4.31}$$

In beiden Fällen hängt die Konstante C von μ ab.

Beweis: Sei

$$u - u_h = (u - j_h u) + (j_h u - u_h) = \eta + \xi.$$

D.h. man zerlegt $u - u_h$ in einen Interpolationsteil η und einen Projektionsteil ξ . Laut Definition und aufgrund der Beziehungen (4.22) und (4.23) gilt für den Interpolationsteil:

$$\begin{aligned}
\| \|\eta\| \|^2 &= \left\| \sqrt{\mu - \frac{1}{2} \nabla \cdot \beta} (u - j_h u) \right\|_{0,\Omega}^2 + \|\sqrt{\varepsilon} \nabla (u - j_h u)\|_{0,\Omega}^2 \\
&\quad + \mathcal{S}_{\text{LPS}}(u - j_h u, u - j_h u) \\
&\leq c \left(\mu - \frac{1}{2} \nabla \cdot \beta \right) h^{2(r+1)} \|u\|_{r+1,\Omega}^2 + c' \varepsilon h^{2r} \|u\|_{r+1,\Omega}^2 \\
&\quad + \mathcal{S}_{\text{LPS}}(u - j_h u, u - j_h u)
\end{aligned}$$

Setzt man für S_{LPS} (4.15) ein, erhält man mit (4.26) die Abschätzung

$$\|\eta\| \leq c \left(\sqrt{\mu - \frac{1}{2} \nabla \cdot \beta} h + \sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\delta} \right) h^r \|u\|_{r+1, \Omega}. \quad (4.32)$$

Für S_{LPS} nach (4.16) ergibt sich mit (4.27)

$$\|\eta\| \leq c \left(\sqrt{\mu - \frac{1}{2} \nabla \cdot \beta} h + \sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\delta} \|\beta\|_{\infty, \Omega} \right) h^r \|u\|_{r+1, \Omega}. \quad (4.33)$$

Der Projektionsteil kann wie folgt umgeformt werden:

$$\begin{aligned} \|\xi\|^2 &= a(\xi, \xi) + S_{\text{LPS}}(\xi, \xi) \\ &= a(u - u_h - u + j_h u, \xi) + S_{\text{LPS}}(\xi, \xi) \\ &= a(u - u_h, \xi) - a(\eta, \xi) + S_{\text{LPS}}(\xi, \xi) \\ &\stackrel{(4.20)}{=} -a(\eta, \xi) + S_{\text{LPS}}(u_h, \xi) + S_{\text{LPS}}(\xi, \xi) \\ &= -a(\eta, \xi) + S_{\text{LPS}}(j_h u, \xi). \end{aligned} \quad (4.34)$$

Wieder werden die Terme der rechten Seite getrennt betrachtet: Für S_{LPS} nach (4.15) gilt

$$\begin{aligned} |S_{\text{LPS}}(j_h u, \xi)| &\stackrel{C.S.}{\leq} \sqrt{S_{\text{LPS}}(j_h u, j_h u)} \sqrt{S_{\text{LPS}}(\xi, \xi)} \\ &\stackrel{(4.26)}{\leq} c \sqrt{\delta} h^r \|u\|_{r+1, \Omega} \sqrt{S_{\text{LPS}}(\xi, \xi)} \\ &\leq c \sqrt{\delta} h^r \|u\|_{r+1, \Omega} \|\xi\|. \end{aligned} \quad (4.35)$$

S_{LPS} nach (4.16) erzeugt dagegen

$$\begin{aligned} |S_{\text{LPS}}(j_h u, \xi)| &\stackrel{C.S.}{\leq} \sqrt{S_{\text{LPS}}(j_h u, j_h u)} \sqrt{S_{\text{LPS}}(\xi, \xi)} \\ &\stackrel{(4.27)}{\leq} c \sqrt{\delta} \|\beta\|_{\infty, \Omega} h^r \|u\|_{r+1, \Omega} \sqrt{S_{\text{LPS}}(\xi, \xi)} \\ &\leq c \sqrt{\delta} \|\beta\|_{\infty, \Omega} h^r \|u\|_{r+1, \Omega} \|\xi\|. \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} |a(\eta, \xi)| &= |(\varepsilon \nabla \eta, \nabla \xi)_{0, \Omega} + (\beta \cdot \nabla \eta, \xi)_{0, \Omega} + (\mu \eta, \xi)_{0, \Omega}| \\ &\stackrel{C.S.}{\leq} \varepsilon \|\nabla \eta\|_{0, \Omega} \|\nabla \xi\|_{0, \Omega} + |(\beta \cdot \nabla \eta, \xi)_{0, \Omega} + (\mu \eta, \xi)_{0, \Omega}|. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Durch partielle Integration des Terms $(\beta \cdot \nabla \eta, \xi)_{0, \Omega}$ wird der Betragsterm der rechten Seite überführt in

$$| -(\beta \cdot \nabla \xi, \eta)_{0, \Omega} + ((\mu - \nabla \cdot \beta) \eta, \xi)_{0, \Omega} |,$$

wodurch (4.37) mit der Dreiecksungleichung und Cauchy Schwarz in folgender Weise nach oben abgeschätzt werden kann:

$$\begin{aligned} |a(\eta, \xi)| &\leq \varepsilon \|\nabla \eta\|_{0, \Omega} \|\nabla \xi\|_{0, \Omega} + |((\beta \cdot \nabla) \xi, \eta)_{0, \Omega}| \\ &\quad + |((\mu - \frac{1}{2} \nabla \cdot \beta) \eta, \xi)_{0, \Omega}| + | -((\frac{1}{2} \nabla \cdot \beta) \eta, \xi)_{0, \Omega} | \\ &\stackrel{(1.2)}{\leq} \|\eta\| \|\xi\| + |((\beta \cdot \nabla) \xi, \eta)_{0, \Omega}| + |(\mu(\eta, \xi))_{0, \Omega}|. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Weiter gilt für S_{LPS} nach (4.15)

$$\begin{aligned} |((\beta \cdot \nabla)\xi, \eta)_{0,\Omega}| &\stackrel{(4.21)}{=} |((\beta \cdot \nabla)\xi - P_{\text{LPS}}(\beta \cdot \nabla)\xi, u - j_h u)_{0,\Omega}| \\ &= |(Q_{\text{LPS}}(\beta \cdot \nabla)\xi, u - j_h u)_{0,\Omega}| \\ &\stackrel{(4.29)}{\leq} c_\beta \|\xi\| \left\| \frac{1}{\sqrt{\delta}}(u - j_h u) \right\|_{0,\Omega} \end{aligned} \quad (4.39)$$

$$\stackrel{(4.22)}{\leq} c_\beta \|\xi\| \frac{1}{\sqrt{\delta}} h^{r+1} \|u\|_{r+1,\Omega}, \quad (4.40)$$

und für S_{LPS} nach (4.16)

$$\begin{aligned} |((\beta \cdot \nabla)\xi, \eta)_{0,\Omega}| &\stackrel{(4.21)}{=} |((\beta \cdot \nabla)\xi - P_{\text{LPS}}(\beta \cdot \nabla)\xi, u - j_h u)_{0,\Omega}| \\ &= |(Q_{\text{LPS}}(\beta \cdot \nabla)\xi, u - j_h u)_{0,\Omega}| \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\delta}} \sqrt{S_{\text{LPS}}(\xi, \xi)} \|u - j_h u\|_{0,\Omega} \end{aligned} \quad (4.41)$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{\delta}} \|\xi\| c h^{r+1} \|u\|_{r+1,\Omega}. \quad (4.42)$$

Für beide Stabilisierungsterme gilt weiter

$$\begin{aligned} |\mu(\eta, \xi)_{0,\Omega}| &\leq \|\mu\|_{\infty,\Omega} |(\eta, \xi)_{0,\Omega}| \\ &\leq \frac{\|\mu\|_{\infty,\Omega}}{\mu_0} \|\eta\| \|\xi\|. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Betrachten wir nun wieder die verschiedenen Ausprägungen der S_{LPS} getrennt. Wir beginnen mit dem Stabilisierungsterm (4.15):

Setzt man (4.40) und (4.43) in (4.38) ein, erhält man für $a(\cdot, \cdot)$ insgesamt die Ungleichung

$$|a(\eta, \xi)| \leq \|\xi\| \left[\left(1 + \frac{\|\mu\|_{\infty,\Omega}}{\mu_0}\right) \|\eta\| + \frac{c_\beta}{\sqrt{\delta}} h^{r+1} \|u\|_{r+1,\Omega} \right]. \quad (4.44)$$

Damit ergibt sich für $\|\xi\|^2$ nach Einsetzen von (4.44) und (4.35) in (4.34)

$$\|\xi\|^2 \leq \|\xi\| \left[\left(1 + \frac{\|\mu\|_{\infty,\Omega}}{\mu_0}\right) \|\eta\| + \left(\frac{c_\beta}{\sqrt{\delta}} h + c\sqrt{\delta}\right) h^r \|u\|_{r+1,\Omega} \right]$$

$$\Leftrightarrow \|\xi\| \leq \left(1 + \frac{\|\mu\|_{\infty,\Omega}}{\mu_0}\right) \|\eta\| + \left(\frac{c_\beta}{\sqrt{\delta}} h + c\sqrt{\delta}\right) h^r \|u\|_{r+1,\Omega}.$$

Damit können wir das Ergebnis herleiten:

$$\begin{aligned} &\|u - u_h\| \\ &= \|\eta + \xi\| \\ &\leq \|\eta\| + \|\xi\| \\ &\leq \left(2 + \frac{\|\mu\|_{\infty,\Omega}}{\mu_0}\right) c \left(\sqrt{\mu - \frac{1}{2}\nabla \cdot \beta} h + \sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\delta} \right) h^r \|u\|_{r+1,\Omega} \\ &\quad + \left(\frac{c_\beta}{\sqrt{\delta}} h + c\sqrt{\delta}\right) h^r \|u\|_{r+1,\Omega} \\ &\leq c' \left(\sqrt{\mu - \frac{1}{2}\nabla \cdot \beta} h + \sqrt{\varepsilon} + \frac{c_\beta}{\sqrt{\delta}} h + c\sqrt{\delta} \right) h^r \|u\|_{r+1,\Omega} \\ &= c' \left(\sqrt{\mu - \frac{1}{2}\nabla \cdot \beta} h + \sqrt{\varepsilon} + \frac{c\|\beta\|_{1,\infty,\Omega} h}{\mu - \frac{1}{2}\nabla \cdot \beta} + \frac{\|\beta\|_{\infty,\Omega} h}{\sqrt{\delta}} + c\sqrt{\delta} \right) h^r \|u\|_{r+1,\Omega}. \end{aligned}$$

Die Konstante c' ist dabei von μ abhängig.

Zur Herleitung der A-priori-Abschätzung für unseren zweiten Stabilitätsterm (4.16) erhalten wir analog die Behauptung:

Einsetzen von (4.42) und (4.43) in (4.38), führt zu

$$|a(\eta, \xi)| \leq \|\xi\| \left[\left(1 + \frac{\|\mu\|_{\infty, \Omega}}{\mu_0}\right) \|\eta\| + \frac{1}{\sqrt{\delta}} c h^{r+1} \|u\|_{r+1, \Omega} \right]. \quad (4.45)$$

Damit ergibt sich für $\|\xi\|^2$ nach Einsetzen von (4.45) und (4.36) in (4.34)

$$\begin{aligned} \|\xi\|^2 &\leq \|\xi\| \left[\left(1 + \frac{\|\mu\|_{\infty, \Omega}}{\mu_0}\right) \|\eta\| + \left(\frac{ch}{\sqrt{\delta}} + c\sqrt{\delta} \|\beta\|_{\infty, \Omega}\right) h^r \|u\|_{r+1, \Omega} \right] \\ \Leftrightarrow \|\xi\| &\leq \left(1 + \frac{\|\mu\|_{\infty, \Omega}}{\mu_0}\right) \|\eta\| + \left(\frac{ch}{\sqrt{\delta}} + c\sqrt{\delta} \|\beta\|_{\infty, \Omega}\right) h^r \|u\|_{r+1, \Omega}. \end{aligned}$$

Wir folgern wie zuvor:

$$\begin{aligned} \|u - u_h\| &= \|\eta + \xi\| \\ &\leq \|\eta\| + \|\xi\| \\ &\leq \left(2 + \frac{\|\mu\|_{\infty, \Omega}}{\mu_0}\right) c \left(\sqrt{\mu - \frac{1}{2} \nabla \cdot \beta} h + \sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\delta} \|\beta\|_{\infty, \Omega} \right) h^r \|u\|_{r+1, \Omega} \\ &\quad + \left(\frac{ch}{\sqrt{\delta}} + c\sqrt{\delta} \|\beta\|_{\infty, \Omega}\right) h^r \|u\|_{r+1, \Omega} \\ &\leq c' \left(\sqrt{\mu - \frac{1}{2} \nabla \cdot \beta} h + \sqrt{\varepsilon} + \frac{ch}{\sqrt{\delta}} + c\sqrt{\delta} \|\beta\|_{\infty, \Omega} \right) h^r \|u\|_{r+1, \Omega}. \end{aligned}$$

Auch hier ist die Konstante c' von μ abhängig. □

Der Term $\|\beta\|_{1, \infty, \Omega}$, der unter Nutzung des Stabilisierungsterms (4.15) in der A-priori-Fehlerabschätzung auftritt, ist störend. Durch ihn müssen wir mehr Regularität fordern. Daher ist es nicht empfehlenswert isotrop Diffusion hinzu zu addieren.

Korollar 4.11. *Wählt man $\delta \sim h$, lässt sich sowohl unter Benutzung von Stabilisierungsterm (4.15) als auch von Stabilitätsterm (4.16) die Fehlerabschätzung umschreiben zu*

$$\|u - u_h\| \leq c(\sqrt{h} + \sqrt{\varepsilon}) h^r \|u\|_{r+1, \Omega}. \quad (4.46)$$

Für S_{LPS} nach (4.15) nimmt c den Wert

$$c = \max\left\{ \sqrt{\mu - \frac{1}{2} \nabla \cdot \beta} + \frac{c \|\beta\|_{1, \infty, \Omega}}{\mu_0} + \|\beta\|_{\infty, \Omega} + c; 1 \right\} C$$

an, während mit Definition (4.16)

$$c = \max\left\{ 1; \sqrt{\mu - \frac{1}{2} \nabla \cdot \beta} + c + c \|\beta\|_{\infty, \Omega} \right\} C$$

gilt.

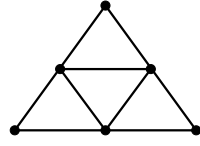


Abbildung 4.1: Bisektion in 2D: Da im Innern keine Freiheitsgrade existieren ist dieses Element nicht zur Triangulierung der lokalen Projektionsmethode geeignet.

Korollar 4.12. *In dem für uns interessanten Fall großer Péclet-Zahlen, d.h.*

$$Pe := \frac{\|\beta\|_{\infty, \Omega} h}{2\varepsilon} \gg 1$$

ergibt sich für beide Wahlen von S_{LPS} :

$$\| \| u - u_h \| \| \leq C h^{r+\frac{1}{2}} \| u \|_{r+1, \Omega}.$$

Beweis: Aus $Pe \gg 1$ folgt direkt

$$\varepsilon \ll \frac{\|\beta\|_{\infty, \Omega} h}{2}.$$

Dies setzen wir in (4.46) ein und erhalten

$$\| \| u - u_h \| \| \leq c \left(1 + \sqrt{\frac{\|\beta\|_{\infty, \Omega}}{2}} \right) h^{r+\frac{1}{2}} \| u \|_{k+1, \Omega},$$

womit die Behauptung folgt. \square

Bemerkung 4.13 (Simpliziale Elemente). *Bisher wurden zur Triangulierung Parallelepipede betrachtet. Der Grund dafür ist, dass mit diesen, bei jeder möglichen Vergrößerung, und damit jeder möglichen Wahl des Raumes V_H bei gegebenem V_h , Freiheitsgrade im Innern der (neuen) Makroelemente entstehen. Dadurch existieren immer Testfunktionen, die ihren Träger innerhalb eines Elementes $T \in \mathcal{T}_H$ haben. Simplizes müssen diese Eigenschaft ebenfalls gewährleisten. Demnach kann man nur dann Simplizes zur Triangulierung des Gebietes nutzen, wenn diese so gewählt sind, dass die Existenz von Testfunktionen, die ihren Träger im Innern eines Makroelementes haben, gesichert ist. Daher ist im Zweidimensionalen für $r = 1$ beispielsweise das Verfahren der Bisektion schlecht (vgl. Abbildung 4.1). Abbildung 4.2 stellt mögliche Elemente in zwei Dimensionen dar.*

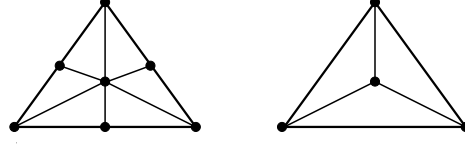


Abbildung 4.2: Zulässige Elemente für die lokale Projektionsmethode in 2D.

4.3 Spezialfall der lokalen Projektionsmethode

Wir wollen kurz auf einen Stabilisierungsansatz von V. John, S. Kaya und W. Layton [JKL05, BBJL05] eingehen. Wieder geht es um eine Zwei-Gitter-Methode, bei der nur auf dem feinen Gitter stabilisiert wird. Die Idee ist, global künstliche Diffusion hinzuzuaddieren und ihre Auswirkungen auf den großen aufgelösten Skalen dann wieder abzuziehen.

Sei $\mathcal{T}_H(\Omega)$ eine zulässige Triangulierung des Gebietes Ω und $\mathcal{T}_h(\Omega)$ eine Verfeinerung von $\mathcal{T}_H(\Omega)$. Ausgehend von dem Modellproblem (MP) aus Abschnitt 1.2 entsteht demnach folgendes diskretes Variationsproblem:

$$\begin{cases} \text{Finde ein } u_h \in V_h, \text{ so dass für alle } v_h \in V_h \text{ gilt:} \\ a(u_h, v_h) + (\varepsilon_{\text{add}} \nabla u_h, \nabla v_h)_{0,\Omega} - (\varepsilon_{\text{add}} P_{\text{JKL}} \nabla u_h, \nabla v_h)_{0,\Omega} \\ = (f, v_h)_{0,\Omega}. \end{cases} \quad (4.47)$$

Der Raum V_h sei ein endlichdimensionaler Unterraum des $H_0^1(\Omega)$. ε_{add} ist eine nichtnegative, von der Gitterweite h abhängige Funktion. In der Veröffentlichung [JKL05] wurde

$$\varepsilon_{\text{add}} = 0,1 h$$

gewählt. Studien zur (besten) Wahl von ε_{add} fehlen aber noch. Offenbar hat ε_{add} die gleiche Funktion wie die Konstante δ in [BB04], bzw. wie im Kapitel 4.2. Die Projektion

$$P_{\text{JKL}} : L^2(\Omega) \longrightarrow L_H \subset [L^2(\Omega)]^d$$

ist wie bei Braack/Burman L^2 -orthogonal und bildet in den Raum der großen Skalen, L_H , ab. Daher werden durch

$$(I - P_{\text{JKL}}) \nabla u_h$$

die kleinen Fluktuationen von ∇u_h dargestellt. Fassen wir die Stabilisierungsterme von (4.47) zusammen, erhalten wir

$$(\varepsilon_{\text{add}} \nabla u_h, \nabla v_h)_{0,\Omega} - (\varepsilon_{\text{add}} P_{\text{JKL}} \nabla u_h, \nabla v_h)_{0,\Omega} = (\varepsilon_{\text{add}} (I - P_{\text{JKL}}) (\nabla u_h), \nabla v_h)_{0,\Omega},$$

was gerade dem Stabilisierungsterm S_{LPS} nach (4.15) entspricht.

V. John, S. Kaya und W. Layton untersuchen, wie der Raum L_H bestmöglich gewählt werden kann. Um zusätzliche, negative Viskosität zu vermeiden, soll L_H ein Unterraum des Raumes

$$W_h := \{\nabla v_h \mid v_h \in V_h\}$$

sein. Im Extremfall $L_H = W_h$ verschwindet die zugeführte Stabilisierung in der Gleichung (4.47) und man erhält wieder die instabile Galerkin–Diskretisierung. Aufgrund der Analyse der algorithmischen Aspekte, gelangen die Autoren von [JKL05] zu dem Ergebnis, dass L_H ein diskontinuierlicher Raum sein muss. Denn nur so kann die dünne Besetzung der sich durch Gleichung (4.47) ergebenden Matrizen garantiert werden. Außerdem ist es von Vorteil, eine L^2 –orthogonale Basis zu wählen.

Fazit: Man kann (den Notationen aus Kapitel 4.2.1 folgend)

$$L_H = P_{H,disc}^{r-1}(\Omega)$$

setzen, wodurch die Stabilisierungsmethode von V. John, S. Kaya und W. Layton zum Spezialfall der lokalen Projektionsmethode von M. Braack und E. Burman (vgl. [BB04]) wird. Damit ist klar, dass, wie in [Hei04] gezeigt wurde, die Methode im Fall der Advektions–Diffusions–Reaktionsgleichungen optimale Konvergenzabschätzungen liefert, wenn das grobe Gitter L_H hinreichend fein und die Lösung u hinreichend glatt sind.

Kapitel 5

Vergleich der Methoden

Wir wollen nun die vorgestellten Stabilisierungsmethoden kritisch miteinander vergleichen und Beziehungen untereinander herstellen. Dabei geht es nicht darum, eine beste Methode zu finden. Vielmehr werden Vor- und Nachteile der verschiedenen Methoden aufgezeigt und kompakt dargestellt. Der Leser kann dann für sich entscheiden, welche Stabilisierung sich für das von ihm behandelte Problem unter den gegebenen Voraussetzungen (Computersystem usw.) am besten eignet.

Die in den Kapiteln 2, 3 und 4 behandelte Verfahren sind Stabilisierungsverfahren für finite Elemente und als solche vom Aufwand her nicht mit der Galerkin-Diskretisierung vergleichbar. Die erforderlichen Matrizen sind dichter besetzt und der numerische (Speicher-)Aufwand ist drastisch erhöht. Da den einzelnen Verfahren ganz unterschiedliche Ideen zugrunde liegen, unterscheiden sie sich mehr oder minder stark, liefern aber alle quasioptimale Konvergenzabschätzungen. Vor allem die Stromliniendiffusionsmethode hebt sich als einzige residuale Methode von den anderen ab. Daher zeigen wir erst die Beziehungen zwischen der Subgrid-Viscosity-Methode und der lokalen Projektionsmethode auf, bevor wir uns mit einem allgemeinen Vergleich der Methoden auseinandersetzen.

Wie schon in Kapitel 4.3 angemerkt, kann die dort vorgestellte Projektionsmethode von V. John, S. Kaya und W. Layton als Spezialisierung der lokalen Projektionsmethode von M. Braack und E. Burman betrachtet werden. Daher bezieht sich das im Folgenden über die lokale Projektionsmethode Gesagte immer auch auf die Stabilisierung aus Kapitel 4.3.

5.1 Zusammenhang zwischen der Subgrid-Viscosity- und der lokalen Projektionsmethode

Beide Methoden sind Zwei-Gitter-Methoden, bei denen die Stabilisierung nur auf den kleinen aufgelösten Skalen stattfindet. D.h. auf den großen aufgelösten Skalen ist keine zusätzliche Stabilisierung erforderlich. Sie basieren auf der gleichen Raumaufteilung in große und kleine aufgelöste Skalen nach dem Modell der Multiskalen-Methode (vgl. [Col01]). Wie in [KL02] gezeigt wird, gehören sie damit in den Rahmen verallgemeinerter Multiskalen-Methoden und ermögli-

chen die physikalisch korrekte Darstellung der Energiefluktuationen, weil diese die Gitterlinien überschreiten können.

Aufgrund der gleichen Struktur, ist der Implementierungsaufwand beider Methoden vergleichbar hoch. Er ist letztendlich von der effizienten Implementierung der Projektionen und den hierarchischen Räumen abhängig. Auch die Effizienz des Löser für das algebraische System ist bedeutend. Wie die numerischen Auswertungen in [JKL05] ergeben, erhält man bessere Ergebnisse je feiner das grobe Gitter ist. Das hängt mit der Approximationseigenschaft des groben Raumes zusammen. Denn, je feiner man den Raum V_H bei gegebenem V_h wählt, desto genauer wird die A-priori-Fehlerabschätzung und je gröber man V_H wählt, desto stabiler wird das Verfahren.

Gemäß dem betrachteten Modellproblem (1.1) werden bei beiden Verfahren gleiche Bilinearformen und gleiche kontinuierliche Räume benutzt. Wir wollen nun untersuchen, inwiefern die Stabilisierungsterme (4.15) und (4.16) der lokalen Projektionsmethode die Bedingungen (3.10), (3.11) und (3.12) erfüllen, die an den Stabilisierungsterm der Subgrid-Viscosity-Methode gestellt werden:

S_{LPS} ist nach (4.11) elliptisch auf den kleinen Skalen und offensichtlich symmetrisch. Die Erfüllung der Bedingung (3.12) wurde schon in Kapitel 3.5 gezeigt. Es bleibt also nur zu zeigen, dass beide Stabilisierungsterme stetig sind. Für S_{LPS} nach (4.15) gilt:

$$\begin{aligned} S_{\text{LPS}}(\tilde{u}_h, \tilde{v}_h) &= (\delta(H) Q_{\text{LPS}} \nabla \tilde{u}_h, Q_{\text{LPS}} \nabla \tilde{v}_h)_{0,\Omega} \\ &\stackrel{c.S.}{\leq} c \delta(H) \|\nabla Q_{\text{LPS}} \tilde{u}_h\|_{0,\Omega} \|\nabla Q_{\text{LPS}} \tilde{v}_h\|_{0,\Omega}. \end{aligned}$$

Ebenso ergibt sich die Stetigkeit in Bezug auf den Stabilisierungsterm (4.16):

$$\begin{aligned} S_{\text{LPS}}(\tilde{u}_h, \tilde{v}_h) &= (\delta(H) Q_{\text{LPS}}(\beta \cdot \nabla) \tilde{u}_h, Q_{\text{LPS}}(\beta \cdot \nabla) \tilde{v}_h)_{0,\Omega} \\ &\stackrel{c.S.}{\leq} c \delta(H) \|\beta\|_{\infty,\Omega}^2 \|\nabla Q_{\text{LPS}} \tilde{u}_h\|_{0,\Omega} \|\nabla Q_{\text{LPS}} \tilde{v}_h\|_{0,\Omega}. \end{aligned}$$

Das heißt, dass die Stabilisierungsterme der lokalen Projektionsmethode die an den Stabilisierungsterm der Subgrid-Viscosity-Methode gestellten Bedingungen (3.10), (3.11) und (3.12) erfüllen.

Letztendlich unterscheiden sich beide Methoden nur in einem Punkt: Im Stabilisierungsterm wird die Reihenfolge der Projektion und Gradientenbildung vertauscht. Bildet man wie bei der lokale Projektionsmethode erst den Gradienten und projiziert dann, ist der Projektionsraum in der Regel nicht mehr stetig (da noch genügend Freiheitsgrade vorhanden sein sollen). Gerade die Diskontinuität des Projektionsraums ist aber der Grund dafür, dass nur lokale Informationen zur Berechnung der L^2 -Projektion nötig sind. Darüberhinaus kann man dann auf die Zulässigkeit der Triangulierung verzichten. Die Finite-Elemente-Räume der beiden Methoden unterscheiden sich demnach. M. Braack und E. Burman benutzen Parallelepipede zur Triangulierung, bzw. nur Simplizes, die die Existenz finiter Elemente, die einen Träger im Innern eines solchen Simplexes haben, gewährleisten. Die Nutzung finiter Elemente höherer Ordnung stellt keine Probleme dar. J.L. Guermond geht auf die Frage nach Elementen höherer Ordnung gar nicht ein. Die in Kapitel 3 vorgestellten Finite-Elemente-Raumpaare arbeiten mit finiten Elementen niedriger Ordnung. Da der Projektionsraum der

lokalen Projektionsmethode nicht stetig ist, spielt der Raum der kleinen aufgelösten Skalen \tilde{V}_h nur noch eine untergeordnete Rolle. Demnach wird nicht, wie bei J.L. Guermond, die inf-sup-Stabilität bezüglich der Räume V_H und \tilde{V}_h untersucht. M. Braack und E. Burman treffen eine (stärkere) Koerzitivitätsaussage. Insofern ist die Analysis der lokalen Projektionsmethode leichter, denn die Erfüllung der diskreten inf-sup-Bedingung ist der Grund dafür, dass der Stabilitätsbeweis bei J.-L. Guermond sehr aufwendig und schwierig ist. Außerdem braucht man für die lokale Projektionsmethode dann auch keine inverse Ungleichung, wodurch die Gitter nur quasiuniform sein müssen. Die geforderte Uniformität der Subgrid-Viscosity-Methode lässt sich nur dann umgehen, wenn man eine lokale inverse Ungleichung nutzt.

Aufgrund des gerade Dargelegten, kann man die lokale Projektionsmethode als Erweiterung der Subgrid-Viscosity-Methode auffassen.

5.2 Methodenvergleich

5.2.1 Allgemeine Struktur

Im Gegensatz zu der Subgrid-Viscosity-Methode und der lokalen Projektionsmethode liegt der Stromliniendiffusionsmethode nur ein Gitter zugrunde. Der in ihr vorkommende Stabilisierungsterm ist nicht symmetrisch. Bei der Betrachtung von Advektions-Diffusions-Reaktionsproblemen ist dies nicht so entscheidend. Doch wenn man beispielsweise die Navier-Stokes-Gleichungen stabilisieren will, ergeben sich ungewünschte Kopplungen unter den Variablen. Die Methoden aus den Kapiteln 3 und 4 liefern symmetrische Stabilisierungsterme und entgehen so dieser Kopplung. Allerdings können diese Verfahren dann auch nur noch eine schwache, approximative Konsistenz liefern.

5.2.2 Analysis

Bezüglich der Analysis ist die Stromliniendiffusionsmethode die am vollständigsten erforschte Methode. Die übrigen Methoden haben noch theoretische Lücken. Im Vergleich zu der Fehlerabschätzung der Stromliniendiffusionsmethode, fällt auf, dass bei der lokalen Projektionsmethode keine lokalen, also elementweisen, Aussagen bezüglich des Fehlers getroffen werden. Auch das Korollar 3.7 der Subgrid-Viscosity-Methode lässt nur globale Aussagen zu. Das ist insofern schlecht, als lokal die einzelnen Parameter des Modellproblems elementweise stark unterschiedliche Werte annehmen können und daher der Fehler lokal sehr unterschiedlich ausfallen kann.

5.2.3 Parameterdesign

Größtenteils fehlen auch noch Untersuchungen bezüglich des Stabilisierungsparameters δ der lokalen Projektions- und der Subgrid-Viscosity-Methode beziehungsweise ε_{add} der Methode aus Kapitel 4.3. Es ist nicht a priori klar, wieviel künstliche Diffusion zum Ausgangsproblem hinzu addiert werden muss (was

über den Stabilisierungsparameter gesteuert wird.). F. Brezzi et al. sind dieser Frage nachgegangen und haben versucht, ein Maß für die optimale Menge künstlicher Diffusion zu finden (vgl. [BHMS]). Allerdings sind die Methoden aus Kapitel 3 und 4 relativ robust, denn der Effekt der Überstabilisierung auf den Approximationsfehler ist gering. Man erhält nur eine weniger gut konditionierte Matrix. Die Stromliniendiffusionsmethode benötigt stattdessen eine inverse Ungleichung, die den Stabilisierungsparameter δ_T nach oben beschränkt. Außerdem müssen die Konstanten δ_0, δ_1 und δ_2 (vgl. Kapitel 2.2) geeignet gewählt werden.

Bezüglich des Stabilisierungsparameters haben die Subgrid-Viscosity-Methode und die lokale Projektionsmethode noch den Vorteil, dass dieser von der Diffusionskonstanten ε unabhängig ist. Dies ist vor allem zur Behandlung stark nichtlinearer und/oder vektorwertiger Probleme mit anisotropen Diffusionsmatrizen interessant. Die Methoden bleiben unabhängig von der lokalen Péclet-Zahl stabil.

5.2.4 Implementierung

Bezüglich der Implementierung müssen für die Stromliniendiffusionsmethode aufgrund des unsymmetrischen Stabilisierungsterms natürlich zusätzliche Terme miteinbezogen werden. Dies kann zu einer zeitaufwendigen Bildung des linearen Systems führen. Allerdings können die Terme leicht in schon existierende Codes eingebaut werden und das Schema ist insgesamt kompakt. Die Konstruktion effizienter Löser und Vorkonditionierer ist für Methoden mit symmetrischer Stabilisierung i.a. leichter.

5.3 Einbettungen der Methoden ineinander

Im Folgenden werden die Verbindungen der Methoden untereinander dargestellt. Es wird gezeigt, dass sowohl die Subgrid-Viscosity-Methode als auch die lokale Projektionsmethode als residuale Stabilisierungsmethode darstellbar sind.

5.3.1 Darstellung der Subgrid-Viscosity-Methode als residuale Stabilisierungsmethode

Das diskrete Variationsproblem (3.22) der Subgrid-Viscosity-Methode zum Modellproblem (1.1) lautet:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Finde ein } u_h \in V_h, \text{ so dass} \\ b(u_h, v_h) + \varepsilon d(u_h, v_h) + S_{\text{SVM}}(u_h^H, v_h^H) = (f, v_h)_L \quad \forall v_h \in V_h, \end{array} \right.$$

bzw.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Finde ein } u_h \in V_h, \text{ so dass} \\ a(u_h, v_h) + S_{\text{SVM}}(u_h^H, v_h^H) = (f, v_h)_L \quad \forall v_h \in V_h, \end{array} \right. \quad (5.1)$$

wenn man

$$b(u_h, v_h) + \varepsilon d(u_h, v_h) = a(u_h, v_h)$$

setzt.

Der Raum V_h ist die direkte Summe der Räume V_H und V_h^H . Jedes Element $u_h \in V_h$ ist demnach in eindeutiger Weise als Summe von Elementen der Räume V_H und V_h^H darstellbar:

$$u_h = u_H + u_h^H.$$

Daher kann man das diskrete Variationsproblem 5.1 in zwei Probleme aufspalten:

$$\begin{aligned} \text{I:} \quad & a(u_H + u_h^H, v_H) = (f, v_H)_{0,\Omega} \quad \text{für alle } v_H \in V_H, \\ \text{II:} \quad & a(u_H + u_h^H, v_h^H) + S_{\text{SVM}}(u_h^H, v_h^H) = (f, v_h^H)_{0,\Omega} \quad \text{für alle } v_h^H \in V_h^H. \end{aligned}$$

Um auf eine Formulierung zu kommen, die der der Stromliniendiffusionsmethode entspricht, müssen die kleinen Skalen eliminiert werden. Zu diesem Zweck sei $A : V_H \rightarrow L^2(\Omega)$ definiert durch

$$Au_{H|T_H} = \mu u_H + \beta \cdot \nabla u_H - \varepsilon \Delta u_H.$$

Aus Gleichung II erhält man für alle $v_h^H \in V_h^H$

$$\begin{aligned} a(u_h^H, v_h^H) + S_{\text{SVM}}(u_h^H, v_h^H) &= (f, v_h^H)_{0,\Omega} - a(u_H, v_h^H) \\ &= (f, v_h^H)_{0,\Omega} - (Au_H, v_h^H)_{0,\Omega} \\ &= (f - Au_H, v_h^H)_{0,\Omega}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Sei $G_h^H : L^2(\Omega) \rightarrow V_h^H$ ein Operator, der dadurch definiert ist, dass er für alle $g \in L^2(\Omega)$ und alle $v_h^H \in V_h^H$ Lösung der Gleichung

$$a(G_h^H(g), v_h^H) + S_{\text{SVM}}(G_h^H(g), v_h^H) = (g, v_h^H)_{0,\Omega}$$

ist. Somit kann man mit (5.2) Elemente des Raumes V_h^H darstellen als

$$u_h^H = G_h^H(f - Au_H).$$

Setzt man diese in Gleichung I ein, wird aus den zwei Gleichungen des diskreten Problems wieder eine einzige, die nur noch große Skalen enthält:

$$a(u_H, v_H) + a(G_h^H(f - Au_H), v_H) = (f, v_H)_{0,\Omega} \quad \text{für alle } v_H \in V_H.$$

Damit erreicht man eine Stabilisierung der Galerkin-Methode durch Addition eines zum Residuum der Gleichung, also zu $f - Au_H$, proportionalen Terms.

5.3.2 Darstellung der lokalen Projektionsmethode als residuale Stabilisierungsmethode

Um die lokale Projektionsmethode in der Form einer residualen Methode zu schreiben, muss die starke Konsistenz wieder hergestellt werden. Dies erreicht man durch Störung der rechten Seite des Variationsproblems 4.12:

$$a(u_h, v_h) + S(u_h, v_h) = \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (f, v_h + \delta Q_{\text{LPS}} \rho(v_h))_{0,T}, \quad (5.3)$$

mit

$$S(u_h, v_h) := (\delta Q_{\text{LPS}}\rho(u_h), Q_{\text{LPS}}\rho(v_h))_{0,\Omega}$$

und

$$\rho(u) := -\varepsilon \Delta u + \beta \cdot \nabla u + \mu u.$$

Subtrahiert man das diskrete Variationsproblem vom kontinuierlichen Variationsproblem erhält man so:

$$\begin{aligned} a(u - u_h, v_h) - S(u_h, v_h) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} [(f, v_h)_{0,T} - (f, v_h + \delta Q_{\text{LPS}}\rho(v_h))_{0,T}] \\ &= - \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (f, \delta Q_{\text{LPS}}\rho(v_h))_{0,T}. \end{aligned}$$

Unter Ausnutzung der Definition der Projektion P_{LPS} ist dies äquivalent zu der Aussage:

$$\begin{aligned} a(u - u_h, v_h) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} [(\delta Q_{\text{LPS}}\rho(u_h), Q_{\text{LPS}}\rho(v_h))_{0,T} - (\delta(f - P_{\text{LPS}}), Q_{\text{LPS}}\rho(v_h))_{0,T}] \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}_h} [(\delta Q_{\text{LPS}}(\underbrace{\rho(u_h) - f}_{=0}), Q_{\text{LPS}}\rho(v_h))_{0,T}] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Mittels (5.3) wird somit die lokale Projektionsmethode als Galerkin–Least–Squares–Methode umformuliert. Die Stabilisierung wirkt dabei nur als Filter auf den kleinen aufgelösten Skalen. Die großen aufgelösten Skalen sind dank der Interaktion zwischen den großen und kleinen aufgelösten Skalen stabil.

5.4 Zusammenfassung und Ausblick

Ziel der Arbeit war, verschiedene Konzepte zur Stabilisierung von Advektions–Diffusions–Reaktionsgleichungen vorzustellen und miteinander zu vergleichen. Nacheinander haben wir die Ideen und vollständige Analysis der Stromliniendiffusionsmethode, der Subgrid–Viscosity–Methode und der lokalen Projektionsmethode, inklusive der Stabilisierung nach [JKL05], erläutert und ihre Effekte auf ein Modellproblem vorgestellt. Mit dem Methodenvergleich in Kapitel 5 wurde gezeigt, dass alle Stabilisierungsverfahren optimale Konvergenzabschätzungen und damit gleichwertige Resultate liefern. Die Stabilisierungsmethode nach V. John, S. Kaya und W. Layton aus Kapitel 4.3 hat sich als Spezialfall der lokalen Projektionsmethode entpuppt und die lokale Projektionsmethode als Erweiterung der Subgrid–Viscosity–Methode. Alle drei Methoden haben einen starken Bezug zur Multiskalenmethode und beruhen auf einem Zwei–Gitter–Schema. Die Stabilisierung findet jeweils nur auf dem feineren Gitter statt. Gegenüber der Stromliniendiffusionsmethode haben die letztgenannten Stabilisierungsmethoden den Vorteil, dass die Stabilisierung von der

Diffusionskonstanten ε unabhängig ist. Allerdings können alle drei Verfahren nur eine schwache Konsistenz liefern. Ebenso ist Vorsicht bei der Wahl der Finite-Elemente-Räume, bzw. bei der Triangulierung geboten.

Schließlich wurde gezeigt, dass die Mehrgittermethoden trotz großer Unterschiede zur Stromliniendiffusionsmethode als residuale Stabilisierungsmethoden darstellbar sind.

Die Stromliniendiffusionsmethode ist die älteste Stabilisierungsmethode und daher auch die am besten erforschte. Man kennt ihre Wirkung auf jedmögliche Art von Problemen und die Analysis liegt mehr oder minder geschlossen vor. Die Möglichkeiten der Stromliniendiffusionsmethode sind daher auch weitgehendst ausgeschöpft. Deshalb wird man in Zukunft verstärkt an, bzw. nach neueren Ansätzen forschen. Die in den Kapiteln 3 und 4 vorgestellten Methoden bieten hierfür gute Ansatzpunkte.

Danksagung

Ich möchte mich bei allen bedanken, die zur Entstehung dieser Arbeit beigetragen haben. Mein ganz besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. Gert Lube. Durch seine Anregungen und die Teilnahme an der Sommerschule über h - p -Methoden in Karlsruhe und den in Göttingen organisierten Workshop wurde mein Interesse an Stabilisierungsverfahren geweckt, bzw. wurde ich immer wieder neu motiviert. Bedanken möchte ich mich auch bei meiner Arbeitsgruppe für die freundschaftliche Atmosphäre und Unterstützung. Schließlich möchte ich mich bei meinen Eltern bedanken, dass sie mir das Studium und die damit verbundene schöne Zeit in Göttingen ermöglicht und mich jederzeit in meinen Vorhaben unterstützt haben.

Literaturverzeichnis

- [Alt92] ALT, HANS WILHELM: *Lineare Funktionalanalysis - Eine anwendungsorientierte Einführung*. Springer, zweite, verbesserte Auflage, 1992.
- [BB01] BECKER, R. und BRAACK, M[ALTE]: *A finite element pressure gradient stabilization for the Stokes equations based on local projections*. *Calcolo*, 38(4):173–199, 2001.
- [BB04] BRAACK, M[ALTE] und BURMAN, E[RIK]: *A multiscale method towards turbulent flow based on local projection stabilization*. *Multiscale Model. Simul.*, Mai 2004.
- [BB05] BRAACK, M[ALTE] und BURMAN, E[RIK]: *Local projection stabilization for the Oseen problem and its interpretation as a variational multiscale method*. *SIAM J. Numer. Anal.*, Jun 2005.
- [BBBR04] BECKER, R., BRAACK, M[ALTE], BURMAN, E[RIK] und RICHTER, TH.: *Local projection stabilization for linear and quadratic finite elements*, Dez 2004. Mini-Workshop „Variational Multiscale and Stabilized Finite Element Methods“ in Göttingen.
- [BBJL05] BRAACK, M[ALTE], BURMAN, E[RIK], JOHN, V[OLKER] und LUBE, G[ERT]: *Stabilized finite element methods for the generalized Oseen problem*. 2005.
- [Bey98] BEY, JÜRGEN: *Finite-Volumen- und Mehrgitter-Verfahren für elliptische Randwertprobleme*. In: HANS GEORG BOCK, MITCHELL LUSKIN, WOLFGANG HACKBUSCH und ROLF RANNACHER (Herausgeber): *Advances in Numerical Mathematics*. B.G.Teubner Stuttgart, 1998.
- [BHMS] BREZZI, F., HOUSTON, P., MARINI, D. und SÜLI, E.: *Modeling Subgrid Viscosity for Advection-Diffusion Problems*.
- [Bra03] BRAESS, D.: *Finite Elemente — Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie*. Springer, 3., korrigierte und ergänzte Auflage, 2003.
- [BS02] BRENNER, SUSANNE C. und SCOTT, L. RIDGWAY: *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Band 15 der Reihe *Texts in Applied Mathematics*. Springer, 2002.

- [Cia91] CIARLET, P.G.: *Basic Error Estimates for Elliptic Problems*. In: CIARLET, P.G. und LIONS, J.L. (Herausgeber): *Finite Element Methods (Part 1)*, Band 2 der Reihe *Handbook of Numerical Analysis*. North-Holland, 1991.
- [Col01] COLLIS, S. SCOTT: *Monitoring unresolved scales in multiscale turbulence modeling*. *Physics of Fluids*, 13(6):1800–1806, Jun 2001.
- [EG04] ERN, ALEXANDRE und GUERMOND, JEAN-LUC: *Theory and Practice of Finite Elements*. In: S.S. ANTMAN, J.E. MARSDEN und L. SIROVICH (Herausgeber): *Applied Mathematical Sciences*, Band 159. Springer, 2004.
- [Gue99] GUERMOND, JEAN-LUC: *Stabilization of Galerkin approximations of transport equations by subgrid modeling*. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 33(6):1293–1316, 1999.
- [Gue01] GUERMOND, JEAN-LUC: *Subgrid Stabilization of Galerkin approximations of linear monotone operators*. *JMA Journal of Numerical Analysis*, 21:165–197, 2001.
- [HB79] HUGHES, T.J.R. und BROOKS, A.N.: *A multidimensional upwind scheme with no crosswind diffusion*. In: HUGHES, T.J.R. (Herausgeber): *Finite element methods for convection dominated flows*, Band 34 der Reihe *AMD*, Seiten 19–35. ASME, New York, 1979.
- [Hei04] HEITMANN, N.: *Subgrid stabilization of evolutionary diffusive transport problems*. Doktorarbeit, University of Pittsburgh, 2004.
- [HH92] HARARI, I. und HUGHES, T.J.R.: *What are C and h ?: Inequalities for the analysis and design of finite element methods*. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 97:157–192, 1992.
- [JKL05] JOHN, VOLKER, KAYA, SONGUL und LAYTON, WILLIAM: *A Two-Level Variational Multiscale Method for Convection-Diffusion Equations*. Feb 2005.
- [KA00] KNABNER, P. und ANGERMANN, L.: *Numerik partieller Differentialgleichungen — Eine anwendungsorientierte Einführung*. Springer, 2000.
- [KL02] KAYA, S. und LAYTON, W.J.: *Subgrid-scale Eddy Viscosity Methods are Variational Multiscale Methods*. Aug 2002.
- [Lub94] LUBE, GERT: *Stabilized Galerkin finite element methods for convection dominated and incompressible flow problems*. *Numerical analysis and mathematical modelling*, Banach center publications, 29, 1994.
- [Lub00] LUBE, GERT: *Analysis und Numerik elliptischer Differentialgleichungen - Sommersemester 2000*, Jul 2000. Georg-August-Universität Göttingen, NAM.

- [QV97] QUARTERONI, ALFIO und VALLI, ALBERTO: *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*. Band 23 der Reihe *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer, 1997.
- [RST96] ROOS, HANS-JÖRG, STYNES, MARTIN und TOBISKA, LUTZ: *Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equations — Convection-Diffusion and Flow Problems*. Band 24 der Reihe *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer, 1996.
- [Zho97] ZHOU, G.: *How accurate is the streamline diffusion finite element method?* *Math.Comp.*, 66:31–44, 1997.