

Diplomarbeit

Identifizierung von Rissen durch elektrostatische Verfahren

vorgelegt von
Martin Wannert
aus
Bochum

angefertigt am
Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
der Georg-August-Universität Göttingen
2006

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Formulierung des direkten Problems	3
3	Grundlagen	5
3.1	Allgemeine Voraussetzung	5
3.2	Funktionalanalytische Grundlagen	6
3.3	Hölder-Räume	9
3.4	Sobolev-Räume	11
3.5	Potenzialtheoretische Grundlagen	13
3.5.1	Harmonische Funktionen	14
3.5.2	Potenziale	15
3.6	Inverse und schlecht gestellte Probleme	18
3.6.1	Schlecht gestellte Probleme und Regularisierungsverfahren	18
3.6.2	Inverse Randwertprobleme	20
4	Das direkte Problem	21
4.1	Eindeutigkeit der Lösung	21
4.2	Existenz einer Lösung	22
4.2.1	Lösungsansatz	22
4.2.2	Die Integralgleichung erster Art	23
4.2.3	Die Integralgleichung zweiter Art	30
4.2.4	Existenzbeweis	31
4.3	Die numerische Methode	32
4.3.1	Die parametrisierten Integraloperatoren	32
4.3.2	Trigonometrische Interpolation	32
4.3.3	Ein Kollokationsverfahren	34
4.3.4	Quadraturformeln für die Anteile über Γ	36
4.3.5	Quadraturformeln für die Anteile über ∂D	37
4.3.6	Die Näherungsgleichungen	37
4.3.7	Ergebnisse numerischer Experimente	39

5	Berechnung der Normalableitung auf ∂D	43
5.1	Eigenschaften der Normalableitung des Doppelschichtpotenzials	43
5.2	Numerische Berechnung der Integrale	46
6	Das inverse Problem	49
6.1	Formulierung des Problems	49
6.2	Das Reziprozitätsprinzip von Maxwell-Betti	50
7	Das Verfahren von Andrieux und Ben Abda	53
7.1	Bestimmung der Geradengleichung	54
7.2	Vollständige Bestimmung des Schlitzes	56
7.3	Numerische Ergebnisse	62
8	Nichtlineare Integralgleichungen zur Lösung des inversen Problems	67
8.1	Nichtlineare Operatorgleichungen	68
8.2	Numerische Lösung der Integralgleichungen	70
	8.2.1 Die parametrisierten Integraloperatoren	70
	8.2.2 Fréchet-Ableitungen	72
8.3	Iterationsschema	74
8.4	Numerische Methode	74
8.5	Ergebnisse numerischer Experimente	75
8.6	Zusammenfassung	77
	Literaturverzeichnis	79

Kapitel 1

Einleitung

Das folgende inverse Problem tritt im Rahmen der zerstörungsfreien Materialprüfung bei der Identifizierung von Rissen durch elektrostatische Verfahren auf. Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein einfach zusammenhängendes beschränktes Gebiet mit C^2 -glattem Rand ∂D und sei $\Gamma \subset D$ ein Geradenstück. Ein elektrostatisches Potenzial u in dem Leiter D mit einem nichtleitenden Riss Γ bei vorgegebener Spannung am Rand wird durch das folgende Randwertproblem zur Laplace-Gleichung modelliert.

Gesucht ist eine in \overline{D} stetige und in $D \setminus \Gamma$ harmonische Funktion u zu der Dirichlet-Randbedingung

$$u = f \quad \text{auf } \partial D$$

und der homogenen Neumann-Randbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{auf } \Gamma$$

mit der gegebenen Funktion f . Der nicht leitende Riss wird dabei durch die homogene neumannsche Randbedingung auf Γ modelliert. Ziel dieser Arbeit ist es das zugehörige inverse Problem zu lösen, nämlich aus Kenntnis der Normalableitung $\partial u / \partial \nu$ auf ∂D , also dem (gemessenen) Stromfluss, den unbekanntem Schlitz Γ zu rekonstruieren.

Wir werden zwei Verfahren zur Lösung dieses Problems vorstellen und miteinander vergleichen. Zuerst werden wir ein Verfahren behandeln, das Andrieux und Ben Abda in [ABA96] vorgeschlagen haben und das im Falle eines Geradenstücks eine direkte Inversionsformel liefert. Dieses Verfahren werden wir mit einem an die Arbeit [KR05] angelehnten iterativen Verfahren vergleichen, das auf der Lösung von zwei nicht linearen Integralgleichungen beruht.

Zu einer Untersuchung des inversen Problems gehört auch immer eine gute Kenntnis des direkten Problems. Dazu werden wir in Kapitel 4, nachdem wir vorher

die notwendigen funktionalanalytischen und potenzialtheoretischen Grundlagen geschaffen haben, der Diplomarbeit [Lan03] folgend die Lösungstheorie zum direkten Problem entwickeln.

Danach folgt ein kleiner Exkurs, wie die Normalableitung der Lösung u des direkten Problems auf dem äußeren Rand ∂D numerische berechnet werden kann.

Die letzten beiden Kapitel widmen sich dann schließlich der Entwicklung der beiden Verfahren und deren numerischer Umsetzung.

Kapitel 2

Formulierung des direkten Problems

Bevor wir das inverse Problem lösen, werden wir uns mit dem direkten Problem befassen. Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein einfach zusammenhängendes beschränktes Gebiet mit C^2 -glattem Rand ∂D und $\Gamma \subset D$ ein abgeschlossener Bogen der Klasse C^3 . Wir werden uns hier nicht auf ein Geradenstück beschränken, sondern den allgemeinen Fall eines Schlitzes betrachten. In diesem kurzen Kapitel werden wir zuerst das Problem formulieren, um dann in Kapitel 3 die funktionalanalytischen und potenzialtheoretischen Grundlagen zur Lösung des Randwertproblems zu schaffen.

Problemstellung 2.1 Gesucht ist eine Funktion $u \in C^2(D \setminus \Gamma) \cap (C(\bar{D} \setminus \Gamma))$ mit existierenden Normalableitungen

$$\frac{\partial u_{\pm}(x)}{\partial \nu} := \lim_{h \rightarrow \pm 0} \langle \nu(x), \text{grad } u(x \pm h\nu(x)) \rangle, \quad x \in \Gamma_0,$$

im Sinne lokal gleichmäßiger Konvergenz mit existierenden Grenzwerten

$$\begin{aligned} u_+(x) &= \lim_{h \rightarrow +0} u(x + h\nu(x)), \quad x \in \Gamma, \\ u_-(x) &= \lim_{h \rightarrow -0} u(x + h\nu(x)), \quad x \in \Gamma, \end{aligned}$$

im Sinne gleichmäßiger Konvergenz, $u_{\pm} \in C(\Gamma)$, die in den Endpunkten x_{-1}^* und x_1^* des Bogens stetig ist, die in $D \setminus \Gamma$ die Laplace-Gleichung

$$\Delta u = 0, \tag{2.1a}$$

die Dirichlet-Randbedingung

$$u = f \quad \text{auf } \partial D \tag{2.1b}$$

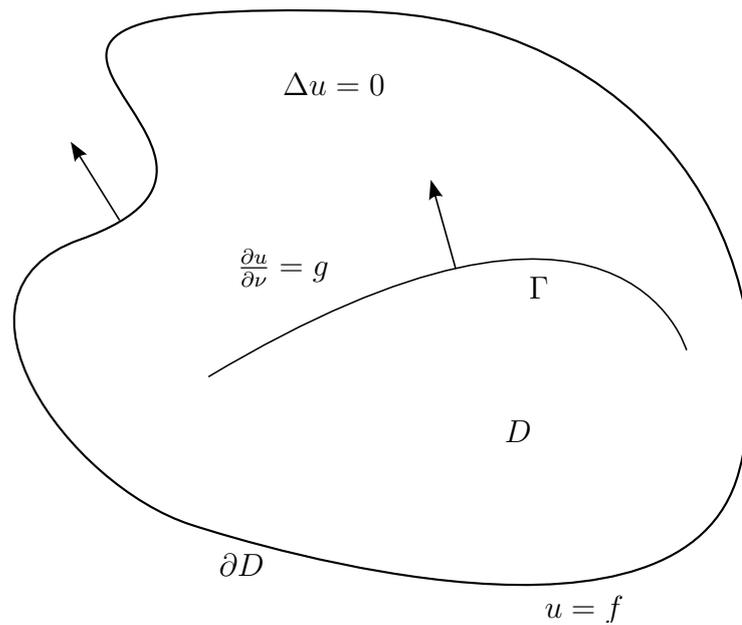


Abbildung 2.1: Skizze der Problemstellung

und die Neumann-Randbedingung

$$\frac{\partial u_{\pm}}{\partial \nu} = g \quad \text{auf } \Gamma \quad (2.1c)$$

erfüllt. Dabei sind $f \in C(\partial D)$ und $g \in C^{0,\alpha}(\Gamma)$ gegebene Funktionen, wobei $C^{0,\alpha}(\Gamma)$ den linearen Raum der auf Γ definierten, beschränkten und gleichmäßig hölderstetigen Funktionen mit Hölderexponent α bezeichnet.

Kapitel 3

Grundlagen

In diesem Kapitel werden wir einige Grundlagen aus der Funktionalanalysis und der Theorie der Integralgleichungen zusammenstellen, die wir bei der Lösung des direkten und inversen Problems benötigen. Wir werden Hölder-Räume einführen, die wir zur Lösung des direkten Problems benötigen. Außerdem werden wir uns mit Sobolev-Räumen beschäftigen, die eine Rolle bei der Lösung des inversen Problems spielen.

Wir werden allerdings mit einigen allgemeinen Voraussetzungen beginnen, die im Verlauf der Arbeit Bestand haben werden.

3.1 Allgemeine Voraussetzung

Wir setzen also voraus, dass $D \subset \mathbb{R}^2$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit C^2 -glattem Rand ist. Der Rand ∂D lässt sich daher durch eine injektive zweimal stetig differenzierbare Funktion $z_1 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ darstellen, von der wir annehmen, dass sie 2π -periodisch ist, also

$$\partial D := \{z_1(s) : s \in [0, 2\pi]\}.$$

Der Einheitsnormalenvektor ν an ∂D ist stets nach außen orientiert.

Ferner bezeichnet $\Gamma \subset D$ mit $\Gamma \cap \partial D = \emptyset$ einen abgeschlossenen Bogen der Klasse C^3 , das heißt es gilt

$$\Gamma := \{\gamma(s) : s \in [-1, 1]\},$$

mit $\gamma : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ injektiv und dreimal stetig differenzierbar. Die Endpunkte bezeichnen wir mit $x_{-1}^* := \gamma(-1)$ und mit $x_1^* := \gamma(1)$. Zur Abkürzung bezeichnen wir weiter mit

$$\Gamma_0 := \Gamma \setminus \{x_{-1}^*, x_1^*\}$$

das Innere des Bogens.

Mit $t(z_1(s))$ bezeichnen wir den Einheitstangentenvektor an ∂D im Punkt $z_1(s)$,

$$t(z_1(s)) := \frac{1}{|z_1'(s)|} z_1'(s).$$

Analog definieren wir den Einheitstangentenvektor $t(\gamma(s))$ an Γ .

3.2 Funktionalanalytische Grundlagen

Die Funktionalanalysis beschäftigt sich mit Operatoren zwischen linearen Räumen. Da Operatoren eine wichtige Rolle bei der Behandlung von Integralgleichungen spielen, wollen wir an dieser Stelle einige Ergebnisse zitieren, die wir im Verlauf dieser Arbeit benötigen werden. Wir beginnen mit der Betrachtung von beschränkten, linearen Operatoren.

Definition 3.1 Seien X und Y normierte Räume. Ein Operator $A : X \rightarrow Y$ heißt *beschränkt*, wenn es eine Konstante $C > 0$ gibt, so dass für alle $\varphi \in X$

$$\|A\varphi\| \leq C\|\varphi\|$$

gilt. Jede Zahl C , die diese Ungleichung erfüllt, heißt *Schranke* für den Operator A . Den Raum aller beschränkten und linearen Abbildungen von X nach Y bezeichnen wir mit $\mathcal{L}(X, Y)$.

Satz 3.2 *Ein linearer Operator ist genau dann stetig, wenn er beschränkt ist.*

BEWEIS. Ein Beweis hierfür findet sich in [Kre99], Thm. 2.5 □

Satz 3.3 *Es seien X, Y, Z normierte Räume und $A : X \rightarrow Y$ und $B : Y \rightarrow Z$ beschränkte lineare Operatoren. Dann ist auch $BA : X \rightarrow Z$, definiert durch*

$$(BA)\varphi := B(A\varphi)$$

ein beschränkter linearer Operator mit

$$\|BA\| \leq \|B\|\|A\|.$$

BEWEIS. Ein Beweis hierfür findet sich in [Kre99], Thm. 2.7 □

Die Theorie kompakter Operatoren ist fundamental für die Analyse linearer Integralgleichungen. Wir werden nun zuerst den Begriff eines kompakten Operators definieren und dann das für uns wichtige Resultat der Theorie kompakter Operatoren, die Riesz-Theorie, formulieren.

Definition 3.4 Ein linearer Operator $A : X \rightarrow Y$ heißt *kompakt*, wenn er jede beschränkte Menge aus X in eine relativ kompakte Menge in Y abbildet.

Wir schließen nun einige Eigenschaften kompakter Operatoren an.

Satz 3.5 *Kompakte lineare Operatoren sind beschränkt.*

BEWEIS. Ein Beweis hierfür findet sich in [Kre99], Thm. 2.14 □

Satz 3.6 *Lineare Kombinationen von kompakten linearen Operatoren sind kompakt.*

BEWEIS. Ein Beweis hierfür findet sich in [Kre99], Thm. 2.15 □

Satz 3.7 *Seien X, Y, Z normierte Räume und $A : X \rightarrow Y$ und $B : Y \rightarrow Z$ beschränkte lineare Operatoren. Dann ist das Produkt $BA : X \rightarrow Z$ kompakt, falls einer der beiden Operatoren A oder B kompakt ist.*

BEWEIS. Ein Beweis hierfür findet sich in [Kre99], Thm. 2.16 □

Satz 3.8 *Die Identitätsabbildung $I : X \rightarrow X$ ist genau dann kompakt, wenn X endlich dimensional ist.*

BEWEIS. Ein Beweis hierfür findet sich in [Kre99], Thm. 2.20 □

Der nun folgende Satz gibt uns ein Resultat über die Kompaktheit von Ausdrücken der Form

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$

wobei, $A_{11} : X_1 \rightarrow X_1$, $A_{12} : X_2 \rightarrow X_1$, $A_{21} : X_1 \rightarrow X_2$ und $A_{22} : X_2 \rightarrow X_2$ kompakte Operatoren sind.

Satz 3.9 *Seien X_i , $i = 1, \dots, n$ normierte Räume und $A_{ik} : X_k \rightarrow X_i$ lineare Operatoren. Auf dem kartesischen Produkt $X = X_1 \times \dots \times X_n$ definieren wir die Norm durch*

$$\|\varphi\|_\infty := \max_{i=1, \dots, n} \|\varphi_i\|_{X_i}, \quad \varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$$

und erklären einen Operator $A : X \rightarrow X$ durch

$$(A\varphi)_i := \sum_{k=1}^n A_{ik} \varphi_k, \quad i = 1, \dots, n.$$

Sind alle A_{ik} kompakt, so ist auch A kompakt.

BEWEIS. Ein Beweis hierfür findet sich in [Lan03], Satz 2.7 □

Als Abschluss formulieren wir noch eines der Kernstücke der Theorie kompakter Operatoren, die bereits erwähnte Riesz-Theorie.

Satz 3.10 (Riesz-Theorie) Sei $A : X \rightarrow X$ ein kompakter linearer Operator in einem normierten Raum X und bezeichne mit $I : X \rightarrow X$ die Identitätsabbildung auf X . Dann ist $I - A$ genau dann injektiv, wenn es surjektiv ist. Falls $I - A$ injektiv ist (und daher bijektiv), so ist der inverse Operator $(I - A)^{-1} : X \rightarrow X$ beschränkt.

BEWEIS. Ein Beweis hierfür findet sich in [Kre99], Thm. 3.4 □

Die folgenden Sätze geben nun die Verbindung zwischen Integraloperatoren, wie sie in dieser Arbeit auftreten, und kompakten Operatoren.

Satz 3.11 Sei $G \subset \mathbb{R}^m$ eine jordan-messbare Menge. Dann ist der Integraloperator

$$(A\varphi)(x) := \int_G K(x, y) \varphi(y) dy, \quad x \in G$$

mit stetigem Kern $K \in C(G \times G)$ ein kompakter Operator.

BEWEIS. Ein Beweis hierfür findet sich in [Kre99], Thm. 2.21 □

Nun betrachten wir Integraloperatoren mit schwach singulärem Kern, das heißt der Kern K ist definiert und stetig für alle $x, y \in G, x \neq y$ und es gibt positive Konstanten M und $\alpha \in (0, m]$ so, dass

$$|K(x, y)| \leq M|x - y|^{\alpha - m}$$

für alle $x, y \in G$ mit $x \neq y$.

Satz 3.12 Integraloperatoren mit schwach singulärem Kern sind kompakt in $C(G)$.

BEWEIS. Ein Beweis hierfür findet sich in [Kre99], Thm. 2.22 □

3.3 Hölder-Räume

Um die Abbildungseigenschaften der Integraloperatoren angeben zu können, die wir zum Existenznachweis einer Lösung des direkten Problems benötigen, werden wir nun kurz die dafür benötigten Hölder-Räume angeben.

Definition 3.13 Eine Funktion $f : G \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ heißt *gleichmäßig hölderstetig* mit Hölderexponent $0 < \alpha \leq 1$, falls eine Konstante C existiert mit

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha$$

für alle $x, y \in G$. Mit $C^{0,\alpha}(G)$ bezeichnen wir den linearen Raum aller auf G definierten, beschränkten und gleichmäßig hölderstetigen Funktionen mit Hölderexponent α und nennen ihn *Hölderraum*.

Satz 3.14 *Mit der Norm*

$$\|f\|_\alpha := \sup_{x \in G} |f(x)| + \sup_{\substack{x, y \in G \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

wird der Hölderraum $C^{0,\alpha}(G)$ zu einem Banachraum.

BEWEIS. Ein Beweis hierfür findet sich in [Kre99], Thm. 7.2 □

Satz 3.15 *Sei $0 < \alpha < \beta \leq 1$ und sei G kompakt. Dann sind die Einbettungsoperatoren*

$$I^\beta : C^{0,\beta}(G) \rightarrow C(G)$$

und

$$I^{\alpha,\beta} : C^{0,\beta}(G) \rightarrow C^{0,\alpha}(G)$$

kompakt.

BEWEIS. Ein Beweis hierfür findet sich in [Kre99], Thm. 7.4 □

Im weiteren Verlauf werden wir die Räume $C^{k,\alpha}[0, 2\pi]$ der 2π -periodischen, k -mal gleichmäßig hölderstetig differenzierbaren Funktionen benötigen. Wir definieren diese Räume induktiv, indem wir sagen, dass $f \in C^{k,\alpha}[0, 2\pi]$, falls für

die erste Ableitung von f gilt: $f' \in C^{k-1,\alpha}[0, 2\pi]$. Der Raum $C^{k,\alpha}[0, 2\pi]$ wird dabei mit der Norm

$$\|f\|_{k,\alpha} := \sum_{j=0}^{k-1} \|f^{(j)}\|_{\infty} + \|f^{(k)}\|_{\alpha}$$

zu einem Banachraum.

Darüber hinaus definieren wir für $k \in \mathbb{N}$ die Räume

$$\begin{aligned} C_{\text{ger}}^{k,\alpha}[0, 2\pi] &:= \{ \xi \in C^{k,\alpha}[0, 2\pi] : \xi \text{ gerade} \}, \\ C_{\text{ung}}^{k,\alpha}[0, 2\pi] &:= \{ \xi \in C^{k,\alpha}[0, 2\pi] : \xi \text{ ungerade} \} \quad \text{und} \\ C_{0,\text{ger}}^{k,\alpha}[0, 2\pi] &:= \left\{ \xi \in C^{k,\alpha}[0, 2\pi] : \xi \text{ gerade, } \int_0^{2\pi} \xi(s) ds = 0 \right\} \end{aligned}$$

Außerdem benötigen wir den Raum $C^{1,\alpha}(\Gamma)$. Deshalb definieren wir zuerst den *Gradienten auf dem Bogen* durch

$$\text{Grad } f(\gamma(\sigma)) := \frac{1}{|\gamma'(\sigma)|} \frac{d(f \circ \gamma)(\sigma)}{d\sigma} \gamma'(\sigma).$$

Für $f \in C^1(\Gamma)$ wird noch die Differenziation nach der Bogenlänge eingeführt:

$$f'(x) := \frac{\partial f}{\partial s}(x) := \langle \text{Grad } f(x), t(x) \rangle,$$

wobei $t(x)$ den Tangentialvektor an Γ im Punkt x bezeichnet.

Definition 3.16 Eine reelwertige Funktion f , die auf Γ definiert ist, heißt *gleichmäßig hölderstetig differenzierbar* mit Hölderexponent $0 < \alpha \leq 1$, falls eine Konstante $C > 0$ existiert, so dass

$$|f'(x) - f'(y)| \leq C|x - y|^{\alpha}$$

für alle $x, y \in \Gamma$ gilt. Mit $C^{1,\alpha}(\Gamma)$ bezeichnen wir den linearen Raum aller Funktionen, die auf Γ definiert, dort beschränkt und gleichmäßig hölderstetig differenzierbar mit Hölderexponent α sind.

Mit der Norm

$$\|f\|_{1,\alpha} := \|f\|_{\infty} + \|f'\|_{\alpha}$$

wird $C^{1,\alpha}$ zu einem Banachraum.

Analog dazu definieren wir den Raum $C^{1,\alpha}(\partial D)$.

3.4 Sobolev-Räume

In diesem Abschnitt werden wir nun die so genannten *Sobolev-Räume* einführen, die wir zur Lösung des inversen Problems benötigen. Sobolev-Räume spielen eine Rolle bei der Behandlung von Integralgleichungen zum Finden einer schwachen Lösung von Randwertproblemen.

Definition 3.17 Sei $0 \leq p < \infty$. Mit $H^p[0, 2\pi]$ bezeichnen wir den Raum aller Funktionen $\varphi \in L^2[0, 2\pi]$ mit der Eigenschaft

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} (1 + m^2)^p |a_m|^2 < \infty$$

mit den Fourier-Koeffizienten a_m von φ . Den Raum $H^p[0, 2\pi]$ nennen wir *Sobolev-Raum*.

Satz 3.18 Der Sobolev-Raum $H^p[0, 2\pi]$ wird mit dem Skalarprodukt

$$\langle \varphi, \psi \rangle_p := \sum_{m=-\infty}^{\infty} (1 + m^2)^p a_m \bar{b}_m$$

für $\varphi, \psi \in H^p[0, 2\pi]$ zu einem Hilbertraum. Die Norm auf $H^p[0, 2\pi]$ ist gegeben durch

$$\|\varphi\|_p = \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} (1 + m^2)^p |a_m|^2 \right\}^{1/2}.$$

Die trigonometrischen Polynome liegen dicht in $H^p[0, 2\pi]$.

BEWEIS. Ein Beweis hierfür findet sich in [Kre99], Thm. 8.2 □

Satz 3.19 Sei $p > 1/2$. Dann konvergiert die Fourier-Reihe für $\varphi \in H^p[0, 2\pi]$ absolut und gleichmäßig. Der Grenzwert ist stetig und 2π -periodisch und stimmt mit φ fast überall überein. Die Einbettung von $H^p[0, 2\pi]$ in den Raum der stetigen 2π -periodischen Funktionen $C[0, 2\pi]$ ist kompakt.

BEWEIS. Ein Beweis hierfür findet sich in [Kre99], Thm. 8.4 □

Satz 3.20 Für $k \in \mathbb{N}$ gilt $C^k[0, 2\pi] \subset H^k[0, 2\pi]$ und auf $C^k[0, 2\pi]$ ist die Norm $\|\cdot\|_k$ äquivalent zu

$$\|\varphi\|_{k,k} := \left(\int_0^{2\pi} \{|\varphi(t)|^2 + |\varphi^{(k)}(t)|^2\} dt \right)^{1/2}.$$

Definition 3.21 Für $0 \leq p < \infty$ notieren wir den *Dualraum* von $H^p[0, 2\pi]$ mit $H^{-p}[0, 2\pi]$.

Der Raum $H^{-p}[0, 2\pi]$ wird charakterisiert durch den folgenden Satz.

Satz 3.22 Für $F \in H^{-p}[0, 2\pi]$ ist die Norm gegeben durch

$$\|F\|_p = \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} (1 + m^2)^{-p} |c_m|^2 \right\}^{1/2},$$

wobei $c_m = F(f_m)$.

BEWEIS. Ein Beweis hierfür findet sich in [Kre99], Thm. 8.10 □

Satz 3.23 (Duale Paarung) Für jede Funktion $g \in L^2[0, 2\pi]$ definiert die duale Paarung

$$G(\varphi) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(t) \overline{g(t)} dt, \quad \varphi \in H^p[0, 2\pi]$$

ein lineares Funktional $G \in H^{-p}[0, 2\pi]$. In diesem Sinne ist $L^2[0, 2\pi]$ ein Unterraum der Dualräume $H^{-p}[0, 2\pi]$ und die trigonometrischen Polynome sind dicht in $H^{-p}[0, 2\pi]$.

BEWEIS. Ein Beweis hierfür findet sich in [Kre99], Thm. 8.11 □

Bemerkung 3.24 Wir haben in diesem Abschnitt bisher nur Sobolev-Räume auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ eingeführt, benötigen sie aber auf dem Rand ∂D eines einfach zusammenhängenden Gebiets $D \subset \mathbb{R}^2$. Mit Hilfe der Parametrisierung z_1 können wir für $0 \leq p \leq 2$ den Sobolev-Raum $H^p(\partial D)$ als den Raum aller Funktionen $\varphi \in L^2(\partial D)$ mit der Eigenschaft $\varphi \circ z_1 \in H^p[0, 2\pi]$ definieren. Das Skalarprodukt auf $H^p(\partial D)$ ist dann für alle $\varphi, \psi \in H^p(\partial D)$ durch

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{H^p(\partial D)} := \langle \varphi \circ z_1, \psi \circ z_1 \rangle_{H^p[0, 2\pi]}$$

gegeben.

Auch wenn wir uns hier auf 2π -periodische Parametrisierungen beschränkt haben, müssen wir die Möglichkeit verschiedener Parametrisierungen der Randkurve ∂D zulassen. Daher zeigen wir im folgenden Satz, dass die Definition bezüglich der Parametrisierung invariant ist.

Satz 3.25 Seien z_1 und \tilde{z}_1 zwei verschiedene reguläre 2π -periodische Parametrisierungen von ∂D . Sei $0 \leq p \leq 2$. Dann sind die Sobolev-Räume

$$H^p(\partial D) := \{\varphi \in L^2(\partial D) : \varphi \circ z_1 \in H^p[0, 2\pi]\}$$

mit dem Skalarprodukt

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{H^p(\partial D)} := \langle \varphi \circ z_1, \psi \circ z_1 \rangle_{H^p[0, 2\pi]}$$

und

$$\tilde{H}^p(\partial D) := \{\varphi \in L^2(\partial D) : \varphi \circ \tilde{z}_1 \in H^p[0, 2\pi]\}$$

mit dem Skalarprodukt

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{\tilde{H}^p(\partial D)} := \langle \varphi \circ \tilde{z}_1, \psi \circ \tilde{z}_1 \rangle_{H^p[0, 2\pi]}$$

homöomorph.

BEWEIS. Ein Beweis hierfür findet sich in [Kre99], Thm. 8.14 □

Definition 3.26 Der Sobolev-Raum $H^1(D)$ eines beschränkten Gebiets $D \subset \mathbb{R}^2$ mit C^1 -glattem Rand ∂D ist definiert als Vervollständigung des Raums $C^1(\overline{D})$ der stetig differenzierbaren Funktionen bezüglich der Norm

$$\|u\|_{H^1(D)} := \left(\int_D \{|u(x)|^2 + |\text{grad } u(x)|^2\} dx \right)^{1/2}.$$

Da jede Cauchy-Folge bezüglich $\|\cdot\|_{H^1(D)}$ auch eine Cauchy-Folge bezüglich $\|\cdot\|_{L^2(D)}$ ist, kann man $H^1(D)$ als Unterraum von $L^2(D)$ auffassen.

3.5 Potenzialtheoretische Grundlagen

Die Potenzialtheorie beschäftigt sich mit der Lösungstheorie von Randwertproblemen zur Laplace-Gleichung. Die Lösungen der Laplace-Gleichung, die so genannten harmonischen Funktionen, beschreiben z. B. zeitunabhängige Temperaturverteilungen oder Potentiale von elektrostatischen und magnetostatischen Feldern.

3.5.1 Harmonische Funktionen

Definition 3.27 Eine zweimal stetig differenzierbare reellwertige Funktion u auf einem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^2$ heißt *harmonisch*, wenn sie die *Laplace'sche Differenzialgleichung*

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } D$$

erfüllt, wobei

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}.$$

Satz 3.28 *Harmonische Funktionen sind analytisch.*

BEWEIS. Ein Beweis hierfür findet sich in [Kre99], Thm. 6.6 □

Satz 3.29 *Die Funktion*

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x - y|}, \quad x \neq y$$

heißt *Grundlösung der Laplace-Gleichung*. Für festes $y \in \mathbb{R}^2$ ist sie *harmonisch* in $\mathbb{R}^2 \setminus \{y\}$.

BEWEIS. Ein Beweis hierfür findet sich in [Kre99], Thm. 6.2 □

Satz 3.30 (Green'sche Sätze) Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet der Klasse C^1 und sei ν die in das Äußere von D weisende Einheitsnormale an den Rand ∂D . Dann gilt für Funktionen $u \in C^1(\overline{D})$ und $v \in C^2(\overline{D})$ der erste Green'sche Satz

$$\int_D \{u \Delta v + \text{grad } u \cdot \text{grad } v\} dx = \int_{\partial D} u \frac{\partial v}{\partial \nu} ds. \quad (3.1)$$

Für $u, v \in C^2(\overline{D})$ gilt der zweite Green'sche Satz

$$\int_D \{u \Delta v - v \Delta u\} dx = \int_{\partial D} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) ds. \quad (3.2)$$

BEWEIS. Ein Beweis hierfür findet sich in [Kre99], Thm. 6.3 □

Satz 3.31 (Green'sche Darstellungsformel) Sei D wie in Satz 3.30 und sei $u \in C^2(\overline{D})$ harmonisch in D . Dann gilt die Green'sche Darstellungsformel

$$u(x) = \int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \Phi(x, y) - u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \right\} ds(y), \quad x \in D. \quad (3.3)$$

BEWEIS. Ein Beweis hierfür findet sich in [Kre99], Thm. 6.5 □

Satz 3.32 (Minimum-Maximum-Prinzip) *Eine in einem Gebiet harmonische und nicht konstante Funktion besitzt kein Minimum und kein Maximum.*

BEWEIS. Ein Beweis hierfür findet sich in [Kre99], Thm. 6.8 □

Satz 3.33 (Satz von Holmgren) *Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet mit C^2 -glattem Rand ∂D und sei $u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$ eine Lösung zur Laplace-Gleichung in D , so dass*

$$u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{auf } \Lambda \quad (3.4)$$

für eine offene Teilmenge $\Lambda \subset \partial D$. Dann verschwindet u identisch in D .

BEWEIS. Wir wollen die Green'sche Darstellungsformel für harmonische Funktionen anwenden und definieren

$$v(x) := \int_{\partial D \setminus \Lambda} \left\{ \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \Phi(x, y) - u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \right\} ds(y),$$

wobei u die Bedingung (3.4) erfüllt. Diese Funktion v ist für alle $x \in (R^2 \setminus \partial D) \cup \Lambda$ definiert und dort harmonisch also analytisch. Aufgrund der Green'schen Darstellungsformel (3.3) und des zweiten Green'schen Satzes (3.2) erhalten wir

$$v(x) = \begin{cases} u(x), & x \in D \\ 0, & x \in (R^2 \setminus \overline{D}) \cup \Lambda. \end{cases}$$

Wegen der Analytizität von v muss also auch $v \equiv 0$ in D gelten und daher auch $u \equiv 0$ in D . □

3.5.2 Potenziale

Beim direkten Problem lässt sich die Existenz einer Lösung mit Hilfe von Potenzialen beweisen. Wir werden dazu Einfach- und Doppelschichtpotenziale über den äußeren Rand ∂D und den Bogen Γ mit Dichten aus geeigneten Funktionsräumen einführen.

Wir beginnen mit der Definition der Potenziale über den Bogen Γ .

Definition 3.34 Es sei

$$C^{1,\alpha,*}(\Gamma) := \left\{ \psi : \psi(x_1^*) = \psi(x_{-1}^*) = 0, \right. \\ \left. \frac{d(\psi \circ \gamma)(\sigma)}{d\sigma} = \frac{\tilde{\psi}(\arccos \sigma)}{\sqrt{1-\sigma^2}}, \tilde{\psi} \in C^{0,\alpha}[0, \pi] \right\}.$$

Mit Hilfe dieses Funktionenraums ist es uns nun möglich, das Doppelschichtpotenzial über den Bogen Γ einzuführen.

Definition 3.35 Es sei $\psi \in C^{1,\alpha,*}(\Gamma)$. Dann bezeichnen wir mit

$$v(x) := \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial v(y)} \psi(y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$$

das *Doppelschichtpotenzial mit Dichte ψ über Γ* .

Wir können folgende Aussage über die stetige Fortsetzbarkeit des Doppelschichtpotenzials machen:

Satz 3.36 *Das Doppelschichtpotenzial v mit Dichte $\psi \in C^{1,\alpha,*}(\Gamma)$ lässt sich stetig von $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ nach Γ mit den Grenzwerten*

$$v_{\pm}(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial v(y)} \psi(y) ds(y) \pm \frac{1}{2} \psi(x), \quad x \in \Gamma$$

fortsetzen, wobei

$$v_{\pm}(x) := \lim_{h \rightarrow +0} v(x \pm hv(x))$$

und das Integral als uneigentliches Integral existiert.

Der Gradient des Doppelschichtpotenzials kann stetig von $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ nach Γ_0 fortgesetzt werden und die Normalableitung von v ist gegeben durch

$$\frac{\partial v_{\pm}(x)}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v(x)} \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial v(y)} \psi(y) ds(y), \quad x \in \Gamma_0.$$

Sie erfüllt darüber hinaus die Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial v(x)} \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial v(y)} \psi(y) ds(y) = \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial t(x)} \frac{\partial \psi(y)}{\partial s} ds(y), \quad x \in \Gamma_0. \quad (3.5)$$

BEWEIS. Ein Beweis hierfür findet man in [Lan03], Satz 5.6 □

Nun führen wir das Einfach- und Doppelschichtpotenzial über den äußeren Rand ∂D ein.

Definition 3.37 Es sei $\varphi \in C(\partial D)$. Dann bezeichnen wir mit

$$\tilde{u}(x) := \int_{\partial D} \Phi(x, y) \varphi(y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D$$

das *Einfachschichtpotenzial* und mit

$$u(x) := \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \varphi(y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D$$

das *Doppelschichtpotenzial mit Dichte φ über ∂D* .

Über das Doppelschichtpotenzial über den Rand ∂D können wir natürlich eine analoge Aussage über die stetige Fortsetzbarkeit treffen.

Satz 3.38 *Das Doppelschichtpotenzial u mit Dichte $\varphi \in C(\partial D)$ lässt sich stetig von $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ nach $\mathbb{R}^2 \setminus D$ und von D nach \bar{D} mit den Grenzwerten*

$$u_{\pm}(x) = \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \varphi(y) ds(y) \pm \frac{1}{2} \varphi(x), \quad x \in \partial D$$

fortsetzen, wobei

$$u_{\pm}(x) := \lim_{h \rightarrow +0} u(x \pm h\nu(x))$$

und das Integral als uneigentliches Integral existiert.

BEWEIS. Einen Beweis hierfür findet man in [Kre99], Thm. 6.17 □

Wir treffen noch eine analoge Aussage für das Einfachschichtpotenzial \tilde{u} .

Satz 3.39 *Sei $\partial D \in C^2$ und $\varphi \in C(\partial D)$. Dann ist das Einfachschichtpotenzial \tilde{u} mit Dichte φ stetig in \mathbb{R}^2 mit*

$$\tilde{u}(x) = \int_{\partial D} \Phi(x, y) \varphi(y) ds(y), \quad x \in \partial D,$$

wobei das Integral als uneigentliches Integral zu verstehen ist.

BEWEIS. Einen Beweis hierfür findet man in [Kre99], Thm. 6.14 □

Dies macht es uns nun möglich, für Dichten $\varphi \in C(\partial D)$ und $\psi \in C^{1,\alpha,*}(\Gamma)$ die folgenden Integraloperatoren einzuführen:

$$\begin{aligned} (K_{\partial D}\varphi)(x) &:= 2 \int_{\partial D} \frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial\nu(y)} \varphi(y) ds(y), \quad x \in \partial D, \\ (K_{\Gamma}\varphi)(x) &:= 2 \int_{\Gamma} \frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial\nu(y)} \varphi(y) ds(y), \quad x \in \partial D, \\ (S_{\Gamma}\psi)(x) &:= \int_{\Gamma} \Phi(x,y) \psi(y) ds(y), \quad x \in \Gamma, \\ (T_{\partial D}\varphi)(x) &:= \frac{\partial}{\partial\nu(x)} \int_{\partial D} \frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial\nu(y)} \varphi(y) ds(y), \quad x \in \Gamma_0, \\ (T_{\Gamma}\psi)(x) &:= \frac{\partial}{\partial\nu(x)} \int_{\Gamma} \frac{\partial\Phi(x,y)}{\partial\nu(y)} \psi(y) ds(y), \quad x \in \Gamma_0 \end{aligned}$$

Den Operator S_{Γ} haben wir eingeführt, um darauf hinzuweisen, dass sich der Operator T_{Γ} wegen (3.5) durch S_{Γ} über die Darstellung

$$T_{\Gamma}\psi = \frac{\partial}{\partial s} S_{\Gamma} \frac{\partial\psi}{\partial s}$$

ausdrücken lässt.

3.6 Inverse und schlecht gestellte Probleme

Im zweiten Teil dieser Arbeit wollen wir ein *inverses Problem* lösen. Wir wollen in diesem Abschnitt erläutern, was darunter zu verstehen ist.

3.6.1 Schlecht gestellte Probleme und Regularisierungsverfahren

Hadamard formulierte um 1900 drei Forderungen für die mathematische Modellierung physikalischer Probleme: Das Problem muss eine Lösung besitzen, die Lösung muss eindeutig sein und die Lösung muss stetig von den Daten abhängen.

Definition 3.40 (Hadamard) Sei $A : U \subset X \rightarrow V \subset Y$ ein Operator, der eine Teilmenge U eines normierten Raums X in eine Teilmenge V eines normierten Raums Y abbildet. Die Gleichung

$$A\varphi = f$$

heißt *korrekt gestellt* oder *gut gestellt*, falls $A : U \rightarrow V$ bijektiv ist und der inverse Operator $A^{-1} : V \rightarrow U$ stetig ist. Andernfalls heißt die Gleichung *inkorrekt gestellt* oder *schlecht gestellt*.

Ein typisches Beispiel für ein schlecht gestelltes Problem ist eine lineare Operatorgleichung mit einem kompakten Operator.

Satz 3.41 Sei $A : X \rightarrow Y$ ein kompakter linearer Operator eines normierten Raums X in einen normierten Raum Y und X sei nicht endlich dimensional. Dann ist die Gleichung erster Art $A\varphi = f$ inkorrekt gestellt.

BEWEIS. Nehmen wir an, A^{-1} existiere und sei stetig. Da das Produkt aus einem stetigen und einem kompakten Operator wieder kompakt ist, folgt, dass $I = A^{-1}A$ kompakt ist. Also ist X nach Satz 3.8 endlich dimensional und wir haben einen Widerspruch. \square

Um schlecht gestellte Probleme approximativ zu lösen, brauchen wir also ein so genanntes *Regularisierungsverfahren*. Wir wollen also die Gleichung

$$A\varphi = f$$

bei Vorliegen einer gestörten rechten Seite f^δ mit Fehlerniveau

$$\|f^\delta - f\| \leq \delta$$

stabil lösen, das heißt, die Lösung φ^δ soll stetig von den Daten f^δ abhängen. Außerdem können wir im Allgemeinen nicht erwarten, dass f^δ im Bildbereich $A(X)$ des Operators liegt. φ^δ soll also eine brauchbare Approximation an die Lösung φ der ungestörten Gleichung darstellen. Das Ziel ist es jetzt, den unbeschränkten inversen Operator $A^{-1} : A(X) \rightarrow X$ durch einen beschränkten linearen Operator $R : Y \rightarrow X$ anzunähern.

Definition 3.42 Seien X und Y normierte Räume und sei $A : X \rightarrow Y$ ein injektiver beschränkter linearer Operator. Eine Familie von beschränkten linearen Operatoren $R_\alpha : Y \rightarrow X$, $\alpha > 0$, heißt *Regularisierungsverfahren* für den Operator A , falls

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} R_\alpha A\varphi = \varphi$$

für alle $\varphi \in X$. Der Parameter α heißt *Regularisierungsparameter*.

Wir wollen jetzt die sogenannte *Tikhonov-Regularisierung* einführen, die wir im Verlauf der Arbeit benutzen werden.

Satz 3.43 *Seien X und Y Hilbert-Räume und $A : X \rightarrow Y$ ein kompakter linearer Operator. Dann hat für jedes $\alpha > 0$ der Operator $\alpha I + A^* A : X \rightarrow X$ eine beschränkte Inverse. Falls A zusätzlich injektiv ist, so beschreiben die linearen Operatoren*

$$R_\alpha := (\alpha I + A^* A)^{-1} A^*$$

ein Regularisierungsverfahren für A mit $\|R_\alpha\| \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$.

BEWEIS. Ein Beweis hierfür findet sich in [Kre99], Thm. 15.26 □

Wir werden nun noch eine zweite Charakterisierung der Tikhonov-Regularisierung als Minimierungsproblem kennen lernen.

Satz 3.44 *Sei wieder $A : X \rightarrow Y$ ein beschränkter linearer Operator und sei $\alpha > 0$. Dann existiert zu jedem $f \in Y$ ein eindeutig bestimmtes $\varphi_\alpha \in X$, so dass*

$$\|A\varphi_\alpha - f\|^2 + \alpha \|\varphi_\alpha\|^2 = \inf_{\varphi \in X} \{ \|A\varphi - f\|^2 + \alpha \|\varphi\|^2 \}.$$

φ_α ist dabei gegeben durch die eindeutige Lösung der Gleichung

$$\alpha \varphi_\alpha + A^* A \varphi_\alpha = f$$

und hängt stetig von f ab.

BEWEIS. Ein Beweis hierfür findet sich in [Kre99], Thm. 16.1 □

3.6.2 Inverse Randwertprobleme

Nun wollen wir noch einführen, was unter einem *inversen Randwertproblem* zu verstehen ist. Inverse Randwertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen beginnen immer mit der Antwort zu dem direkten Problem, das heißt mit der Lösung des direkten Problems. Aus Kenntnis dieser Lösung sollen nun bei inversen Randwertproblemen Informationen über den Rand und/oder Randwerte ermittelt werden. Bei inversen Problemen versucht man also, von der Wirkung auf die Ursache zu schließen.

Kapitel 4

Das direkte Problem

Das direkte Problem wurde ausführlich in der Diplomarbeit [Lan03] behandelt, so dass wir an dieser Stelle nur den Lösungsweg skizzieren werden und für Beweise auf die eben erwähnte Diplomarbeit verweisen. Auch werden wir in dieser Arbeit auf eine Fehler- und Konvergenzanalyse verzichten und verweisen hierfür ebenfalls auf [Lan03].

4.1 Eindeutigkeit der Lösung

Um zu zeigen, dass das Problem aus dem vorangegangenen Abschnitt höchstens eine Lösung besitzt, könnte man durch die Tatsache, dass wir auf dem äußeren Rand ∂D unseres Gebiets Dirichletdaten gegeben haben, zunächst auf die Idee kommen, einen Beweisversuch über das Minimum-Maximum-Prinzip zu führen. Dieser Versuch misslingt leider, denn der Bogen Γ gehört ebenfalls zum Rand des Gebiets. Auf Γ sind aber nur Neumann-Daten gegeben, über die Funktionswerte kann man allerdings keine Aussage treffen.

Stattdessen werden wir den Beweis mit Hilfe folgender Variante des Green'schen Satzes erbringen.

Lemma 4.1 *Sei u eine Lösung des homogenen Problems aus Kapitel 2, also $u|_{\partial D} = 0$ und $\frac{\partial u_{\pm}}{\partial \nu}|_{\Gamma} = 0$. Dann gilt*

$$\text{grad } u \in L^2(D)$$

und diese Version des Green'schen Satzes ist gültig:

$$\int_D |\text{grad } u(y)|^2 dy = 0.$$

BEWEIS. Ein Beweis hierfür findet sich in [Lan03], Lemma 4.1 □

Mit Hilfe dieses Lemmas folgt nun fast automatisch dieser

Satz 4.2 *Das Problem aus Kapitel 2 hat höchstens eine Lösung.*

BEWEIS. Seien u_1 und u_2 zwei Lösungen des Problems (2.1a)-(2.1c) und definiere $u := u_1 - u_2$. Dann ist u eine Lösung des Problems (2.1a)-(2.1c) mit homogenen Randwerten. Es folgt

$$0 = \int_D |\text{grad } u|^2 dy,$$

und daher ist $\text{grad } u = 0$ in $D \setminus \Gamma$. Also muss u konstant in $D \setminus \Gamma$ sein. Durch die homogene Randbedingung $u = 0$ auf ∂D und die Stetigkeit auf $\overline{D} \setminus \Gamma$ erhalten wir $u = 0$ in $D \setminus \Gamma$. Nun können wir aus Existenz der Grenzwerte u_{\pm} schließen, dass $u = 0$ in D ist und somit $u_1 = u_2$. □

4.2 Existenz einer Lösung

4.2.1 Lösungsansatz

Da das klassische Dirichletproblem durch einen Doppelschichtpotenzialansatz über ∂D gelöst werden kann, werden wir unsere Ansatzfunktion ebenfalls mit einem Doppelschichtpotenzial über ∂D ansetzen.

Das Problem für einen offenen Bogen im \mathbb{R}^2 wurde in [Mön96] mit einem Doppelschichtpotenzialansatz über den Bogen Γ gelöst. Wir suchen also eine Lösung u der Form:

$$u(x) := \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \varphi(y) ds(y) + \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \psi(y) ds(y), \quad x \in D \setminus \Gamma, \quad (4.1)$$

mit den unbekanntenen Dichten $\varphi \in C(\partial D)$ und $\psi \in C^{1,\alpha,*}(\Gamma)$.

Der folgende Satz stellt nun den Zusammenhang zwischen dem Randwertproblem und unserer Ansatzfunktion her.

Satz 4.3 *Die Funktion u löst das gekoppelte Dirichlet-Neumann-Problem, falls φ und ψ dem folgenden System von Integralgleichungen genügen:*

$$\varphi(x) - (K_{\partial D} \varphi)(x) - (K_{\Gamma} \psi)(x) = -2f(x), \quad x \in \partial D, \quad (4.2a)$$

$$(T_{\partial D} \varphi)(x) + (T_{\Gamma} \psi)(x) = g(x), \quad x \in \Gamma_0. \quad (4.2b)$$

Wir erhalten also aufgrund des Bogens eine eher „unangenehme“ Integralgleichung erster Art mit einem stark singulären Kern. Die zweite sich ergebende Integralgleichung ist eine Integralgleichung zweiter Art, die bis auf einen Störungsterm über den Bogen Γ der Integralgleichung des klassischen inneren Dirichletproblems entspricht.

Satz 4.4 Für jede rechte Seite $(f, g) \in C(\partial D) \times C^{1,\alpha,*}(\Gamma)$ gibt es höchstens ein Paar von Funktionen (φ, ψ) , welches das System von Integralgleichungen aus Satz 4.3 löst.

BEWEIS. Ein Beweis findet sich in [Lan03], Satz 5.8 □

Das Ziel ist es nun, auf das System von Integralgleichungen die Riesz-Theorie anzuwenden. Dazu muss das System

$$\begin{pmatrix} Id_{C(\partial D)} - K_{\partial D} & -K_{\Gamma} \\ T_{\partial D} & T_{\Gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2f \\ g \end{pmatrix}$$

auf die Form $Id - A$, A kompakt, gebracht werden. Da die erste Integralgleichung schon in der gewünschten Form vorliegt, werden wir uns zuerst mit der zweiten Integralgleichung beschäftigen, in der T_{Γ} der „unangenehme“ Operator mit stark singulärem Kern ist. Wir werden zeigen, dass man diesen Operator durch geeignete Umformungen in einen invertierbaren und einen kompakten Operator aufspalten kann, so dass die Integralgleichung am Ende die gewünschte Form erhält.

4.2.2 Die Integralgleichung erster Art

Die Integralgleichung (4.2b) kann man wegen (3.5) auch in der Form

$$\frac{\partial}{\partial \nu(x)} \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \varphi(y) ds(y) + \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial t(x)} \frac{\partial \psi(y)}{\partial s} ds(y) = g(x), \quad x \in \Gamma_0 \quad (4.3)$$

schreiben.

Nun werden wir die Parametrisierung des Bogens Γ in den Operator einsetzen und die so genannte Cosinus-Substitution ausführen. Wir betrachten dazu zunächst den zweiten Term der linken Seite in (4.3), setzen

$$x = \gamma(t), \quad y = \gamma(t)$$

und berechnen damit

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial t(x)} \frac{\psi(y)}{\partial s} ds(y) &= \frac{1}{2\pi|\gamma'(t)|} \int_{-1}^1 \frac{\langle \gamma(t) - \gamma(\tau), \gamma'(\tau) \rangle}{|\gamma(t) - \gamma(\tau)|^2} \frac{d(\psi \circ \gamma)(\tau)}{d\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi|\gamma'(t)|} \int_{-1}^1 \left(K_1(t, \tau) + K_2(t, \tau) \right) \frac{d(\psi \circ \gamma)(\tau)}{d\tau} d\tau, \end{aligned}$$

indem wir

$$K_1(t, \tau) := \frac{1}{t - \tau}$$

und

$$K_2(t, \tau) := \frac{\langle \gamma(t) - \gamma(\tau), \gamma'(\tau) \rangle}{|\gamma(t) - \gamma(\tau)|^2} - K_1(t, \tau)$$

setzen. K_1 und K_2 sind offensichtlich für $t \neq \tau$ stetig differenzierbar. Der Kern K_2 kann jedoch für $t = \tau$ stetig differenzierbar ergänzt werden, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 4.5 K_2 ist für $t = \tau$ stetig mit dem Grenzwert

$$\lim_{\tau \rightarrow t} K_2(t, \tau) = \frac{\langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle}{2|\gamma'(t)|^2}.$$

Außerdem ist $\frac{\partial}{\partial t} K_2(t, \tau)$ eine stetige Funktion und es gilt

$$\frac{\partial}{\partial \tau} K_2(\tau, \tau) = \frac{\langle \gamma'(\tau), \gamma'''(\tau) \rangle}{6|\gamma'(\tau)|^2} + \frac{|\gamma''(\tau)|^2}{4|\gamma'(\tau)|^2} - \frac{\langle \gamma'(\tau), \gamma''(\tau) \rangle^2}{2|\gamma'(\tau)|^4}.$$

BEWEIS. Ein Beweis hierfür findet sich in [Lan03], Satz 5.9 □

Für $x \notin \partial D$, also insbesondere für $x \in \Gamma_0$ dürfen wir im Ausdruck

$$\frac{\partial}{\partial v(x)} \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial v(y)} \varphi(y) ds(y)$$

Differenziation und Integration vertauschen. Wir berechnen für den Kern dieses Integrals

$$\frac{\partial}{\partial v(x)} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial v(y)} = \frac{1}{2\pi} \frac{|x - y|^2 \langle v(y), v(x) \rangle - 2 \langle x - y, v(y) \rangle \langle x - y, v(x) \rangle}{|x - y|^4}$$

und definieren

$$M(t, y) := 2\pi|\gamma'(t)| \frac{\partial}{\partial v(\gamma(t))} \frac{\partial \Phi(\gamma(t), y)}{\partial v(y)}.$$

Nun ist es uns möglich, die Integralgleichung (4.3) unter Benutzung der oben durchgeführten Umformungen für $t \in (-1, 1)$, durch Substitution von $t = \cos s$ und $\tau = \cos \sigma$, $s, \sigma \in (0, \pi)$, und durch Setzen von

$$h(x) := |\gamma'(t)|g(\gamma(t))$$

wie folgt zu schreiben:

$$\begin{aligned} h(\cos s) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} M(\cos s, y) \varphi(y) ds(y) + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left(K_1(\cos s, \cos \sigma) \right. \\ \left. + K_2(\cos s, \cos \sigma) \right) \frac{d(\psi \circ \gamma)(\cos \sigma)}{d \cos \sigma} \sin \sigma d\sigma. \end{aligned}$$

Lemma 4.6 *Die Funktion*

$$\xi(\sigma) := \psi \circ \gamma(\cos \sigma) \cdot \text{sign}(\pi - \sigma)$$

erfüllt die Eigenschaft $\xi \in C_{\text{ung}}^{1,\alpha}[0, 2\pi]$ und es ist

$$\xi'(\sigma) = \frac{d\xi(\sigma)}{d\sigma} = -|\sin \sigma| \frac{d(\psi \circ \gamma)(\cos \sigma)}{d \cos \sigma}.$$

BEWEIS. Ein Beweis hierfür findet sich in [Lan03], Satz 5.10 □

Unter Ausnutzung der Geradheit von $K_1(\cos s, \cos \sigma)$ in σ und ξ' auf $[0, 2\pi]$ und den Definitionen

- $\tilde{h}(s) := -2h(\cos s) = -2|\gamma'(\cos s)|g(\gamma(\cos s))$
- $\tilde{M}(s, y) := M(\cos s, y)$
- $\tilde{K}_1(s, \sigma) := K_1(\cos s, \cos \sigma)$
- $\tilde{K}_2(s, \sigma) := K_2(\cos s, \cos \sigma)$

erhalten wir die Gleichung

$$\tilde{h}(s) = -\frac{1}{\pi} \int_{\partial D} \tilde{M}(s, y) \varphi(y) ds(y) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\tilde{K}_1(s, \sigma) + \tilde{K}_2(s, \sigma) \right) \xi'(\sigma) d\sigma. \quad (4.4)$$

Jetzt beschäftigen wir uns mit der Äquivalenz der Gleichungen (4.2b) und (4.4) und formulieren dazu folgendes Resultat:

Satz 4.7 Falls das Paar $(\varphi, \psi) \in C(\partial D) \times C^{1,\alpha,*}(\Gamma)$ eine Lösung der Integralgleichung (4.2b) ist, so erhalten wir durch

$$\xi(\sigma) := (\psi \circ \gamma)(\cos s) \operatorname{sign}(\pi - \sigma), \quad \sigma \in [0, 2\pi],$$

$\xi \in C^{1,\alpha}[0, 2\pi]$ und φ ein Paar von Funktionen, das eine Lösung der Integralgleichung (4.4) ist und umgekehrt. Dabei ist ξ eine ungerade Funktion.

Jetzt multiplizieren wir die Integralgleichung (4.4) mit $\sin s$ und erhalten folgenden

Satz 4.8 Die Integralgleichung (4.4) und die Integralgleichung

$$\begin{aligned} \bar{h}(s) = & -\frac{1}{\pi} \int_{\partial D} \tilde{M}(s, y) \varphi(y) \sin s \, ds(y) \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\tilde{K}_1(s, \sigma) + \tilde{K}_2(s, \sigma) \right) \xi'(\sigma) \sin s \, d\sigma \end{aligned} \quad (4.5)$$

mit $\bar{h}(s) := \tilde{h}(s) \sin s$, $s \in [0, 2\pi]$, sind äquivalent.

BEWEIS. Ein Beweis hierfür findet sich in [Lan03], Satz 5.12 □

Bemerkung 4.9 Wegen der Sätze 4.7 und 4.8 ist es ausreichend, die Dichte ξ im Funktionenraum $C_{\text{ung}}^{1,\alpha}[0, 2\pi]$ zu suchen, um eine Lösung des Randwertproblems zu erhalten.

Wir entwickeln nun passende Integraloperatoren für die Integralgleichung (4.5). Dazu benutzen wir die Identität

$$\frac{1}{2} \left(\cot \frac{\sigma - s}{2} - \cot \frac{s + \sigma}{2} \right) = \frac{\sin s}{\cos s - \cos \sigma}$$

und erhalten nun für das Integral über den Kern K_1

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin s}{\cos s - \cos \sigma} \xi'(\sigma) \, d\sigma = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cot \frac{\sigma - s}{2} \xi'(\sigma) \, d\sigma.$$

Dies ermöglicht es uns nun, die folgenden Integraloperatoren einzuführen:

Definition 4.10 Für $s \in [0, 2\pi]$ sei

$$\begin{aligned} (T_0 \xi)(s) &:= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cot \frac{\sigma - s}{2} \xi'(\sigma) \, d\sigma \\ (A\xi)(s) &:= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{K}_2(s, \sigma) \xi'(\sigma) \, d\sigma \\ (B\xi)(s) &:= -\frac{1}{\pi} \int_{\partial D} \tilde{M}(s, y) \varphi(y) \, ds(y), \end{aligned}$$

wobei \widehat{K}_2 und \widehat{M} durch

$$\widehat{K}_2(s, \sigma) := \sin s \widetilde{K}_2(s, \sigma) \text{ und } \widehat{M}(s, y) := \sin s \widetilde{M}(s, y)$$

definiert sind.

Das Ziel ist es nun zu zeigen, dass der lineare Operator T_0 als Abbildung von $C_{\text{ung}}^{1,\alpha}[0, 2\pi]$ nach $C_{\text{ung}}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$ beschränkt invertierbar ist. Wir stellen dazu zunächst eine enge Verbindung dieses Operators zum Cauchy-Integraloperator über den Einheitskreis in der komplexen Ebene her.

Satz 4.11 *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet mit C^2 -Rand ∂G . Dann ist der Cauchy-Integraloperator $A_{\text{Cau}} : C^{0,\alpha}(\partial G) \rightarrow C^{0,\alpha}(\partial G)$ definiert durch*

$$(A_{\text{Cau}}f)(z) := \frac{1}{\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \partial G, f \in C^{0,\alpha}(\partial G)$$

beschränkt. Er erfüllt

$$A_{\text{Cau}}^2 = \text{Id}.$$

BEWEIS. Ein Beweis hierfür findet sich in [Kre99], Cor. 7.7, Thm. 7.10 \square

Es sei nun $t(s) = e^{is}$, $s \in [0, 2\pi]$ eine Parametrisierung des Einheitskreises in \mathbb{C} . Durch Setzen von $z = e^{is}$ und $\zeta = e^{i\sigma}$ berechnen wir

$$\frac{d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2} \left(\cot \frac{\sigma - s}{2} + i \right) d\sigma$$

und erhalten damit für Funktionen $\psi \in C^{0,\alpha}(\partial B(0,1))$

$$(A_{\text{Cau}}\psi)(e^{is}) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \left(\cot \frac{\sigma - s}{2} + i \right) \psi(e^{i\sigma}) d\sigma, \quad s \in [0, 2\pi].$$

Aus dieser Beziehung entnehmen wir, dass der Cauchy-Integraloperator eine ähnliche Form hat wie der Operator T_0 . Die Idee besteht nun darin, den Operator gerade auf solche Funktionen anzuwenden, für die

$$\int_0^{2\pi} \psi(e^{i\sigma}) d\sigma = 0$$

gilt. Außerdem werden wir einen Zusammenhang zwischen Funktionen $\psi \in C^{0,\alpha}(\partial B(0,1))$ und Funktionen $\xi \in C^{0,\alpha}[0, 2\pi]$ herstellen. Wir beschäftigen uns zunächst mit dem zweiten Aspekt.

Sei also $\xi \in C^{0,\alpha}[0, 2\pi]$. Durch Setzen von

$$\tilde{\xi}(e^{is}) := \xi(s), \quad s \in [0, 2\pi]$$

erhalten wir eine Funktion $\tilde{\xi} \in C^{0,\alpha}(\partial B(0,1))$. Damit können wir den Operator A_{Cau} auch als Operator von $C^{0,\alpha}[0, 2\pi]$ nach $C^{0,\alpha}[0, 2\pi]$ auffassen.

Wir betrachten den Operator

$$L := iA_{\text{Cau}}|_{C_{0,\text{ger}}^{0,\alpha}[0,2\pi]},$$

der für $\xi \in C_{0,\text{ger}}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$ die Gestalt

$$(L\xi)(s) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cot \frac{\sigma - s}{2} \xi(\sigma) d\sigma, \quad s \in [0, 2\pi]$$

annimmt und schließen folgenden Satz an:

Satz 4.12 *Der Operator*

$$L : C_{0,\text{ger}}^{0,\alpha}[0, 2\pi] \rightarrow C_{0,\text{ger}}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$$

ist beschränkt, bijektiv und besitzt eine beschränkte Inverse.

BEWEIS. Ein Beweis hierfür findet sich in [Lan03], Satz 5.15 □

Weiter definieren wir für Funktion $\xi \in C_{0,\text{ung}}^{1,\alpha}[0, 2\pi]$ und $\psi \in C_{0,\text{ger}}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$ zwei Operatoren

$$\begin{aligned} (J\psi)(t) &:= \int_0^t \psi(\sigma) d\sigma, \quad t \in [0, 2\pi] \\ (D\xi)(t) &:= \xi'(t), \quad t \in [0, 2\pi], \end{aligned}$$

über die wir Folgendes festhalten:

Satz 4.13 *Die Operatoren*

$$J : C_{0,\text{ger}}^{0,\alpha}[0, 2\pi] \rightarrow C_{0,\text{ung}}^{1,\alpha}[0, 2\pi]$$

und

$$D : C_{0,\text{ung}}^{1,\alpha}[0, 2\pi] \rightarrow C_{0,\text{ger}}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$$

sind jeweils beschränkt und bijektiv.

BEWEIS. Ein Beweis hierfür findet sich in [Lan03], Satz 5.16 □

Mit diesen Vorüberlegungen können wir nun die Invertierbarkeit von T_0 beweisen.

Satz 4.14 *Der Operator $T_0 : C_{0,ung}^{1,\alpha}[0, 2\pi] \rightarrow C_{0,ung}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$ ist beschränkt invertierbar.*

BEWEIS. Es sei $\xi \in C_{0,ung}^{1,\alpha}[0, 2\pi]$. Dann haben wir zwischen den Operatoren T_0 und L die Beziehung

$$T_0 \xi = (LD)(\xi) = L\xi'.$$

Daraus erhalten wir mit der Beschränktheit von L und D sofort die Beschränktheit von T_0 .

Da sich T_0 durch L und D darstellen lässt und diese beiden Operatoren bijektiv sind, muss auch T_0 bijektiv sein. Indem wir

$$JL^{-1}T_0\xi = JL^{-1}LD\xi = J\xi' = \xi$$

bilden, sehen wir sogar, dass die Inverse von T durch JL^{-1} gegeben wird, wodurch auch unmittelbar die Beschränktheit von T_0^{-1} bewiesen ist. □

Zum Abschluß klären wir noch die Abbildungseigenschaften der Operatoren A und B .

Satz 4.15 *Die Operatoren A und B verfügen über folgende Abbildungseigenschaften:*

$$A : C_{ung}^{1,\alpha}[0, 2\pi] \rightarrow C_{ung}^{0,\alpha}[0, 2\pi] \tag{4.6a}$$

$$B : C(\partial D) \rightarrow C_{ung}^{0,\alpha}[0, 2\pi] \tag{4.6b}$$

BEWEIS. Ein Beweis hierfür findet sich in [Lan03], Satz 5.18 □

Nun sind wir in der Lage, unsere Ausgangsintegralgleichung (4.2b) wegen der Invertierbarkeit von T_0 und den Abbildungseigenschaften von A und B aus Satz 4.15 in der Form

$$\xi + T_0^{-1}A\xi + T_0^{-1}B\varphi = T_0^{-1}\bar{h}$$

zu schreiben, wobei die Operatoren $T_0^{-1}A$ und $T_0^{-1}B$ kompakt sind.

4.2.3 Die Integralgleichung zweiter Art

Wir beschäftigen uns jetzt noch mit der wesentlich einfacher zu behandelnden Integralgleichung (4.2a). Für $x \in \partial D$ berechnen wir

$$\begin{aligned} -2f(x) &= \varphi(x) - 2 \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \varphi(y) ds(y) - 2 \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \psi(y) ds(y) \\ &= \varphi(x) - \frac{1}{\pi} \int_{\partial D} H(x, y) \varphi(y) ds(y) \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(x, \gamma(\cos \sigma)) \xi(\sigma) |\gamma'(\cos \sigma)| d\sigma, \end{aligned}$$

indem wir $H := \frac{\langle x-y, \nu(y) \rangle}{|x-y|^2}$ definieren, die Parametrisierung des Bogens Γ einsetzen, die Cosinus-Substitution durchführen und benutzen, dass der Ausdruck

$$H(x, \gamma(\cos \sigma)) \xi(\sigma) \sin \sigma |\gamma'(\cos \sigma)|$$

eine in σ auf $[0, 2\pi]$ gerade Funktion darstellt.

Definition 4.16 Für $x \in \partial D$ sei

$$(\tilde{A}\varphi)(x) := -\frac{1}{\pi} \int_{\partial D} H(x, y) \varphi(y) ds(y) \quad (4.7a)$$

$$(\tilde{B}\xi)(x) := -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{H}(x, \sigma) \xi(\sigma) d\sigma, \quad (4.7b)$$

wobei \tilde{H} durch $\tilde{H}(x, \sigma) := H(x, \gamma(\cos \sigma)) \sin \sigma |\gamma'(\cos \sigma)|$ definiert ist.

Satz 4.17 Die Operatoren \tilde{A} und \tilde{B} verfügen über die folgenden Abbildungseigenschaften:

$$\tilde{A}: C(\partial D) \rightarrow C(\partial D) \quad (4.8a)$$

$$\tilde{B}: C_{\text{ung}}^{1,\alpha}[0, 2\pi] \rightarrow C(\partial D). \quad (4.8b)$$

Die Operatoren sind in diesen Räumen auch kompakt und der Kern des Operators \tilde{A} lässt sich durch

$$\frac{\partial \Phi(z(t), z(t))}{\partial \nu(z(t))} = \frac{\langle z''(t), \nu(z(t)) \rangle}{2|z'(t)|^2} \quad (4.9)$$

stetig auf die Diagonale fortsetzen.

BEWEIS. Ein Beweis hierfür findet sich in [Lan03], Satz 5.20 □

4.2.4 Existenzbeweis

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun die Existenz des in Kapitel 2 formulierten Problems beweisen.

Durch Setzen von $\bar{f} := -2f$ und $\bar{h}_0 := T_0^{-1}\bar{h}$ geht mit diesen Vorbereitungen unser System von Integralgleichungen, gegeben durch (4.2a) und (4.2b) in das System

$$\left[\begin{pmatrix} \text{Id}_{C(\partial D)} & 0 \\ 0 & \text{Id}_{C_{\text{ung}}^{1,\alpha}[0,2\pi]} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ T_0^{-1}A & T_0^{-1}B \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \varphi \\ \xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{f} \\ \bar{h}_0 \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

über, welches nach Satz 4.8 äquivalent zum Ausgangssystem ist. Jetzt können wir folgenden Satz formulieren:

Satz 4.18 *Die Operatorgleichung (4.10) hat für alle rechten Seiten*

$$(\bar{f}, \bar{h}_0) \in C(\partial D) \times C_{\text{ung}}^{1,\alpha}[0, 2\pi]$$

genau ein Paar von Funktionen $(\varphi, \xi) \in C(\partial D) \times C_{\text{ung}}^{1,\alpha}[0, 2\pi]$ als Lösung. Diese Lösung hängt stetig von der rechten Seite ab. Daraus folgt die Existenz einer Lösung des Problems aus Kapitel 2 für Randwerte $f \in C(\partial D)$ und $g \in C^{0,\alpha}(\Gamma)$.

BEWEIS. T_0^{-1} ist ein beschränkter Operator, A und B sind kompakte Operatoren, also sind $T_0^{-1}A$ und $T_0^{-1}B$ nach Satz 3.7 auch kompakte Operatoren. Daher ist auch der Operator $Q : C(\partial D) \times C_{\text{ung}}^{1,\alpha}[0, 2\pi] \rightarrow C(\partial D) \times C_{\text{ung}}^{1,\alpha}[0, 2\pi]$, definiert durch

$$Q := \begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ T_0^{-1}A & T_0^{-1}B \end{pmatrix},$$

nach Satz 3.9 kompakt. Ferner definieren wir den Operator

$$\text{Id}_{C(\partial D) \times C_{\text{ung}}^{1,\alpha}[0,2\pi]} : C(\partial D) \times C_{\text{ung}}^{1,\alpha}[0, 2\pi] \rightarrow C(\partial D) \times C_{\text{ung}}^{1,\alpha}[0, 2\pi]$$

durch

$$\text{Id}_{C(\partial D) \times C_{\text{ung}}^{1,\alpha}[0,2\pi]} := \begin{pmatrix} \text{Id}_{C(\partial D)} & 0 \\ 0 & \text{Id}_{C_{\text{ung}}^{1,\alpha}[0,2\pi]} \end{pmatrix}.$$

Satz 4.4 sagt uns nun, dass $\mathcal{N}(\text{Id}_{C(\partial D) \times C_{\text{ung}}^{1,\alpha}[0,2\pi]} + Q) = \{0\}$. Aus der Riesz-Theorie für kompakte Operatoren folgt, dass unser Integralgleichungssystem eine Lösung besitzt und somit unsere Ansatzfunktion u wegen Satz 4.3 eine Lösung des Problems aus Kapitel 2 ist. \square

4.3 Die numerische Methode

4.3.1 Die parametrisierten Integraloperatoren

Für die numerische Behandlung ist es noch notwendig, in die Operatoren

$$\begin{aligned}\tilde{A} &: C(\partial D) \rightarrow C(\partial D) \\ \tilde{B} &: C_{\text{ung}}^{1,\alpha}[0, 2\pi] \rightarrow C(\partial D) \\ B &: C(\partial D) \rightarrow C_{\text{ung}}^{0,\alpha}[0, 2\pi]\end{aligned}$$

die Parametrisierung von ∂D einzusetzen. Wir setzen also $x = z(s)$, $y = z(\sigma)$ und erhalten für $s \in [0, 2\pi]$ die Operatoren

$$\begin{aligned}\tilde{A}' &: C[0, 2\pi] \rightarrow C[0, 2\pi], \\ \tilde{B}' &: C_{\text{ung}}^{1,\alpha}[0, 2\pi] \rightarrow C[0, 2\pi], \\ B' &: C[0, 2\pi] \rightarrow C_{\text{ung}}^{0,\alpha}[0, 2\pi],\end{aligned}$$

die durch

$$\begin{aligned}(\tilde{A}'\varphi)(s) &:= -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} H_1(s, \sigma)\varphi(\sigma) d\sigma, \quad \varphi \in C[0, 2\pi], \\ (\tilde{B}'\xi)(s) &:= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_2(s, \sigma)\xi(\sigma) d\sigma, \quad \xi \in C_{\text{ung}}^{1,\alpha}, \\ (B'\varphi)(s) &:= -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \overline{M}(s, \sigma)\varphi(\sigma) d\sigma, \quad \varphi \in C[0, 2\pi]\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}H_1(s, \sigma) &:= H(z(s), z(\sigma))|z'(\sigma)| \\ H_2(s, \sigma) &:= H(z(s), \gamma(\cos \sigma)) \sin \sigma |y'(\cos \sigma)| \\ \overline{M}(s, \sigma) &:= \widehat{M}(s, z(\sigma))|z'(\sigma)|\end{aligned}$$

definiert sind. Wegen der Regularität des Randes ∂D übertragen sich die Beschränktheit und die Kompaktheit der Operatoren \tilde{A} , \tilde{B} und B auf die Operatoren \tilde{A}' , \tilde{B}' und B' , weswegen wir diese ab hier miteinander identifizieren.

4.3.2 Trigonometrische Interpolation

Dieser Abschnitt dient der Einführung geeigneter endlichdimensionaler Funktionenräume und zugehöriger Interpolations- und Projektionsoperatoren. Zur

Approximation der Operatoren verwenden wir trigonometrische Interpolation mit gerader Knotenzahl. Dazu sei $N \in \mathbb{N}$ vorgegeben. Wir wählen die $2N$ äquidistanten Stützstellen

$$t_j^{(N)} := \frac{j\pi}{N}, \quad j = 0, \dots, N,$$

die wir zur Integration über Γ verwenden werden, definieren

$$T_N := \left\{ q \in C[0, 2\pi] : q(t) = \sum_{k=0}^N a_k \cos kt + \sum_{k=1}^{N-1} b_k \sin kt, \quad a_k, b_k \in \mathbb{R} \right\}$$

und halten folgenden Satz fest:

Satz 4.19 Zu $f \in C[0, 2\pi]$ existiert genau ein trigonometrisches Polynom $q_N \in T_N$,

$$q_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} (a_k \cos kt + b_k \sin kt) + \frac{a_N}{2} \cos Nt,$$

welches der Interpolationsbedingung

$$q_N(t_j^{(N)}) = f(t_j^{(N)}), \quad j = 0, \dots, 2N-1$$

genügt. Die Koeffizienten sind dabei gegeben durch

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{2N-1} f(t_j^{(N)}) \cos kt_j^{(N)}, \quad k = 0, \dots, N,$$

$$b_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{2N-1} f(t_j^{(N)}) \sin kt_j^{(N)}, \quad k = 1, \dots, N-1.$$

BEWEIS. Ein Beweis hierfür findet man in [Kre98], Satz 8.25

□

Wir erhalten, dass die Lagrange-Basis von T_N die Form

$$L_j(t) = \frac{1}{2N} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{N-1} \cos k(t - t_j^{(N)}) + \cos N(t - t_j^{(N)}) \right)$$

für $t \in [0, 2\pi]$ und $j = 0, \dots, 2N-1$ hat.

Da wir insbesondere ungerade, 2π -periodische Funktionen interpolieren werden, definieren wir noch den zugehörigen Raum

$$T_{N,\text{ung}} := \left\{ q \in C[0, 2\pi] : q(t) = \sum_{k=1}^{N-1} b_k \sin kt, \quad b_k \in \mathbb{R} \right\}.$$

Wir führen noch den zur trigonometrischen Interpolation gehörigen Interpolationsoperator

$$P_n : C[0, 2\pi] \rightarrow T_N \quad (4.11)$$

$$f \mapsto \sum_{k=1}^{2N-1} f(t_j^{(N)}) L_j^{(N)}$$

ein und definieren zusätzlich den zur trigonometrischen Interpolation ungerader 2π -periodischer Funktionen zugehörigen Interpolationsoperator durch

$$P_{N,\text{ung}} := P_N|_{C_{\text{ung}}[0,2\pi]}.$$

Darüberhinaus benötigen wir noch die Stützstellen

$$u_i^{(M)} := \frac{i\pi}{M}, \quad i = 0, \dots, 2M - 1$$

für $M \in \mathbb{N}$ zur Integration über ∂D und den analog zum (4.11) definierten Interpolationsoperator P_M .

4.3.3 Ein Kollokationsverfahren

Die im vorherigen Abschnitt definierten Projektions- bzw. Interpolationsoperatoren geben uns nun die Möglichkeit, die unendlich dimensionale Operatorgleichung auf ein endlich dimensionales lineares Gleichungssystem zu reduzieren. Dieser Abschnitt dient dazu, dieses Verfahren formal einzuführen.

Definition 4.20 Seien X und Y Banach-Räume und sei $A : X \rightarrow Y$ ein injektiver, beschränkter linearer Operator. Ferner seien $X_n \subset X$ und $Y_n \subset Y$ zwei Folgen von Unterräumen mit $\dim X_n = \dim Y_n = n \in \mathbb{N}$ und $P_n : Y \rightarrow Y_n$ Projektionsoperatoren. Die durch X_n und P_n erzeugte *Projektionsmethode* approximiert bei gegebenem $f \in Y$ die Gleichung

$$A\varphi = f \quad (4.12)$$

für $\varphi \in Y$ durch die projizierte Gleichung

$$P_n A \varphi_n = P_n f \quad (4.13)$$

für $\varphi_n \in X_n$. Die Projektionsmethode heißt *konvergent* für den Operator A , falls es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt derart, dass für jedes $f \in A(X)$ die Näherungsgleichung (4.13) für alle $n \geq n_0$ eine eindeutige Lösung $\varphi_n \in X_n$ besitzt und wenn diese Lösungen für $n \rightarrow \infty$ gegen die eindeutige Lösung φ von $A\varphi = f$ konvergieren.

Bemerkung 4.21 Da $P_n A : X_n \rightarrow Y_n$ ein linearer Operator zwischen zwei endlich dimensionalen Räumen ist, reduziert sich das Lösen von (4.13) auf das Lösen eines lineares Gleichungssystem.

Zur Lösung der Operatorgleichungen werden wir ein spezielles Projektionsverfahren verwenden, nämlich ein Kollokationsverfahren.

Die Grundidee eines Kollokationsverfahrens zur approximativen Lösung von (4.12) besteht darin, dass die exakte Gleichung an endlich vielen Punkten, den so genannten Kollokationspunkten, erfüllt ist. Sei dazu $Y = C[a, b]$ (Kollokationsverfahren sind auch auf anderen Funktionsräumen definierbar, zum Beispiel auf Sobolev-Räumen) und $A : X \rightarrow Y$ ein beschränkter linearer Operator. Seien $X_n \subset X$ und $Y_n \subset Y$ Folgen von Unterräumen mit $\dim X_n = \dim Y_n = n$. Wir wählen nun n Punkte x_1, \dots, x_n in $[a, b]$ so, dass der Unterraum Y_n bezüglich dieser Punkte unisolvent ist, also die Interpolationsaufgabe mit dem Unterraum Y_n und den Punkten x_1, \dots, x_n eindeutig lösbar ist. Dann approximiert das Kollokationsverfahren die Lösung von (4.12) durch ein Element $\varphi_n \in X_n$ mit

$$(A\varphi_n)(x_j) = f(x_j), \quad j = 1, \dots, n. \quad (4.14)$$

Sei $X_n = \text{span}\{u_1, \dots, u_n\}$, dann können wir φ_n darstellen als Linearkombination

$$\varphi_n = \sum_{k=1}^n \gamma_k u_k$$

und erhalten das zu (4.14) äquivalente lineare Gleichungssystem

$$\sum_{k=1}^n \gamma_k (Au_k)(x_j) = f(x_j), \quad j = 1, \dots, n$$

für die Koeffizienten $\gamma_1, \dots, \gamma_n$.

Bemerkung 4.22 Wenn wir das Kollokationsverfahren auf eine Gleichung mit einem Integraloperator mit stetigem oder schwach singulärem Kern K anwenden, erhalten wir nur ein semi-diskretes Verfahren, denn wenn wir

$$\varphi_n = \sum_{k=1}^n \gamma_k L_k$$

mit der Lagrange-Basis von X_n darstellen, erhalten wir das Gleichungssystem

$$\sum_{k=1}^n \gamma_k \int_a^b K(x_j, y) L_k(y) dy = f(x_j), \quad j = 1, \dots, n.$$

Die einfachste Methode, aus diesem Verfahren ein voll-diskretes Verfahren zu machen, ist, die auftretenden Integrale durch geeignete Quadraturoperatoren zu approximieren. Diesen Weg werden wir auch in dieser Arbeit einschlagen.

4.3.4 Quadraturformeln für die Anteile über Γ

Wir beschäftigen uns nun zunächst mit der Entwicklung einer Quadraturformel für

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cot \frac{\sigma-s}{2} \xi'(\sigma) d\sigma.$$

Dazu interpolieren wir die Dichte ξ durch ein trigonometrisches Interpolationspolynom und integrieren dann exakt. Wir berechnen

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cot \frac{\sigma-s}{2} \xi'(\sigma) d\sigma \approx \sum_{j=0}^{2N-1} \xi(t_j^{(N)}) R_j^{(N)}(s), \quad 0 \leq s \leq 2\pi$$

mit

$$R_j^{(N)}(s) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cot \frac{\sigma-s}{2} (L_j^{(N)})'(\sigma) d\sigma.$$

Das folgende Lemma hilft uns, die Gewichte $R_j^{(N)}$ exakt zu integrieren.

Lemma 4.23 *Im Sinne des Cauchy'schen Hauptwerts gilt für alle $m \in \mathbb{Z}$*

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cot \frac{\sigma-s}{2} \cos m\sigma d\sigma &= -2\pi \sin ms, \\ \int_0^{2\pi} \cot \frac{\sigma-s}{2} \sin m\sigma d\sigma &= 2\pi \cos ms. \end{aligned}$$

BEWEIS. Ein Beweis hierfür findet sich in [Lan03], Lemma 6.3 □

Dies ergibt nun

$$R_j^{(N)}(s) = -\frac{1}{N} \left(\sum_{m=1}^{N-1} m \cos m(s - t_j^{(N)}) + \frac{N}{2} \cos n(s - t_j^{(N)}) \right)$$

für $j = 0, \dots, 2N-1$.

Als nächstes wollen wir mit einer ähnlichen Idee eine Quadraturformel für

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \widehat{K}_2(s, \sigma) \xi'(\sigma) d\sigma$$

herleiten. Da $\xi(0) = \xi(2\pi) = 0$ und $\widehat{K}_2(s, \sigma)$ in σ stetig differenzierbar ist, können wir zunächst einmal partiell integrieren und erhalten

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \widehat{K}_2(s, \sigma) \xi'(\sigma) d\sigma = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{K}_2(s, \sigma) \xi(\sigma) d\sigma,$$

wobei $\bar{K}_2(s, \sigma) := \frac{\partial}{\partial \sigma} \widehat{K}_2(s, \sigma)$ ist. Nun können wir approximieren

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{K}_2(s, \sigma) \xi(\sigma) d\sigma \approx -\frac{1}{2N} \sum_{j=0}^{2N-1} \bar{K}_2(s, t_j^{(N)}) \xi(t_j^{(N)}).$$

Analog approximieren wir

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H_2(s, \sigma) \xi(\sigma) d\sigma \approx -\frac{1}{2N} \sum_{j=0}^{2N-1} H_2(s, t_j^{(N)}) \xi(t_j^{(N)}).$$

4.3.5 Quadraturformeln für die Anteile über ∂D

Da wir auf beide Integralgleichungen eine Kollokationsmethode anwenden wollen, werden wir die Integrale über ∂D ebenso behandeln wie die Integrale über Γ und den Kern mit der Dichte durch das Interpolationspolynom ersetzen und dann integrieren.

Wir berechnen also mit $M \in \mathbb{R}$

$$-\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \bar{M}(s, \sigma) \varphi(\sigma) d\sigma \approx -\frac{1}{M} \sum_{k=0}^{2M-1} \bar{M}(s, u_k^{(M)}) \varphi(u_k^{(M)})$$

und

$$-\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} H_1(s, \sigma) \varphi(\sigma) d\sigma \approx -\frac{1}{M} \sum_{k=0}^{2M-1} H_1(s, u_k^{(M)}) \varphi(u_k^{(M)}).$$

4.3.6 Die Näherungsgleichungen

Nun stellen wir noch die zu den eben entwickelten Quadraturformeln zugehörigen Operatoren auf. Dafür definieren wir

$$(A_N \xi)(s) := -\frac{1}{2N} \sum_{j=0}^{2N-1} \bar{K}_2(s, t_j^{(N)}) \xi(t_j^{(N)}), \quad 0 \leq s \leq 2\pi$$

$$(B_M \varphi)(s) := -\frac{1}{M} \sum_{i=0}^{2M-1} \bar{M}(s, u_i^{(M)}) \varphi(u_i^{(M)}), \quad 0 \leq s \leq 2\pi$$

$$(\tilde{A}_M \varphi)(s) := -\frac{1}{M} \sum_{i=0}^{2M-1} H_1(s, u_i^{(M)}) \varphi(u_i^{(M)}), \quad 0 \leq s \leq 2\pi$$

$$(\tilde{B}_N \xi)(s) := -\frac{1}{2N} \sum_{j=0}^{2N-1} H_2(s, t_j^{(N)}) \xi(t_j^{(N)}), \quad 0 \leq s \leq 2\pi$$

und können damit die diskretisierten Gleichungen in der Form

$$\varphi_M + \tilde{A}_M \varphi_M + \tilde{B}_N \xi_N = f \quad (4.15a)$$

$$B_M \varphi_M + T_0 \xi_N + A_N \xi_N = g \quad (4.15b)$$

mit $(\varphi_n, \xi_n) \in T_{n/2} \times T_{n,\text{ung}}$ schreiben, wobei wir berücksichtigen, dass T_0 auf trigonometrischen Polynomen exakt ist. Die Anwendung einer Kollokationsmethode liefert nun unter Ausnutzung von $T_0 \xi \in T_{n,\text{ung}}$ für $\xi \in T_{n,\text{ung}}$

$$P_M \varphi_M + P_M \tilde{A}_M \varphi_M + P_M \tilde{B}_N \xi_N = P_M f \quad (4.16a)$$

$$P_{N,\text{ung}} B_N \varphi_M + P_{N,\text{ung}} T_0 \xi_N + P_{N,\text{ung}} A_N \xi_N = P_{N,\text{ung}} g. \quad (4.16b)$$

Gleichung (4.16b) ist mit folgendem linearen Gleichungssystem äquivalent:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{2N-1} \xi_N(t_j^{(N)}) \left(R_j^{(N)}(t_k^{(N)}) - \frac{1}{2N} \bar{K}_2(t_k^{(N)}, t_j^{(N)}) \right) \\ - \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{2M-1} \bar{M}(t_k^{(N)}, u_j^{(M)}) \varphi_M(u_j^{(M)}) = g(t_k^{(N)}), \quad k = 0, \dots, 2N-1. \end{aligned}$$

Die Gewichte $R_j^{(N)}$ haben dabei die explizite Form

$$R_j^{(N)}(t_k^{(N)}) = -\frac{1}{N} \left(\sum_{m=1}^{N-1} m \cos m(k-j) \frac{\pi}{N} + \frac{N}{2} (-1)^{k-j} \right).$$

Die Gleichung (4.16a) ist äquivalent zu dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \varphi_M(u_k^{(M)}) - \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{2M-1} H_1(u_k^{(M)}, u_j^{(M)}) \varphi_M(u_j^{(M)}) - \\ \frac{1}{2N} \sum_{j=0}^{2N-1} H_2(u_k^{(M)}, t_j^{(N)}) \xi_N(t_j^{(N)}) = f(u_k^{(M)}), \quad k = 0, \dots, 2M-1. \end{aligned}$$

Somit haben wir eine vollständig diskrete Methode zur numerischen Lösung unseres Ausgangssystems von Integralgleichungen.

Wegen der Konvergenzanalyse in der Arbeit [Lan03] erwarten wir exponentielle Konvergenz.

4.3.7 Ergebnisse numerischer Experimente

Nun wollen wir einige numerische Testergebnisse vorstellen. Als Testfunktion verwenden wir dabei

$$f(z) = \Im(\sqrt{z^2 - 1}), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Die Funktion f ist holomorph in $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ und stetig in ± 1 . Also stellt f eine harmonische Funktion in $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ dar. Zur Vereinfachung werden wir die komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ mit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ identifizieren. In die Tabellen tragen wir den numerisch errechneten Wert und den Fehler $|u(x, y) - f(x, y)|$ in Abhängigkeit von N ein. Wir wählen dazu N gerade und setzen die Zahl der Stützstellen auf ∂D auf $M := N/2$, um das Gleichungssystem nicht zu groß werden zu lassen.

Beispiel 4.24 Wir parametrisieren das Geradenstück durch

$$\Gamma := \{(t, 0) : t \in [-1, 1]\}$$

und die Ellipse durch

$$\partial D := \{(5 \cos t, 3 \sin t) : t \in [0, 2\pi]\}.$$

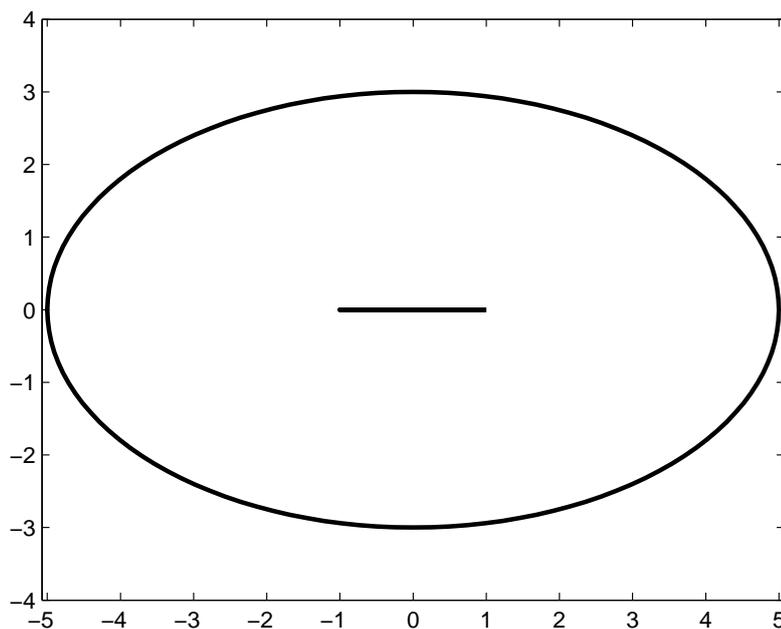


Abbildung 4.1: Ellipse mit Geradenstück

Tabelle 4.1: Fehler im Punkt $(-1, 1)$

N	u	Fehler
8	1.21460998487876	0.0574096646353
16	1.26595942854083	0.0060602209732
32	1.27202056336933	0.0000009138552
64	1.27201964950848	0.00000000000055
128	1.27201964951398	0.00000000000000

Tabelle 4.2: Fehler im Punkt $(1, 0.01)$

N	u	Fehler
8	0.05504785028482	0.04520246143150
16	0.09280187297823	0.00744843873809
32	0.10054336726142	0.00002930555450
64	0.10025072535430	0.00000041363798
128	0.10025031171703	0.00000000000071

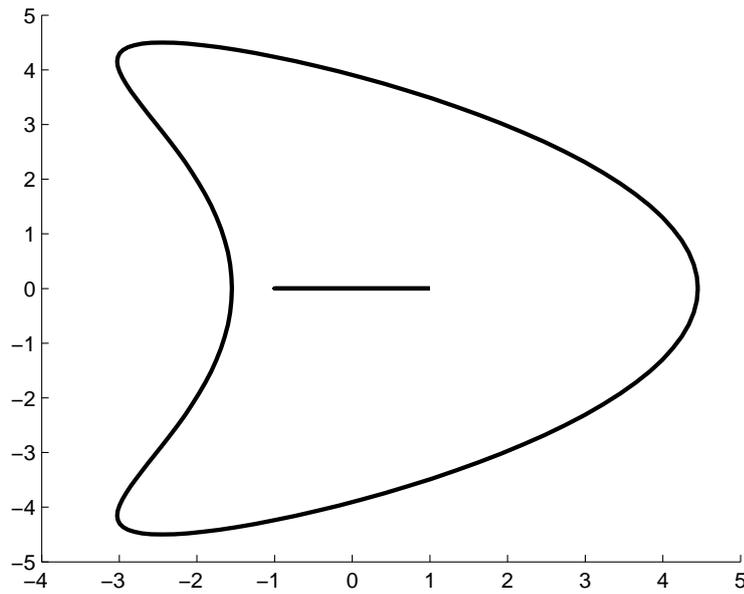
Die Betrachtung des Fehlers im Punkt $(-1, 1)$ als auch im Punkt nahe des Schlitzes $(1, 0.01)$ zeigt deutlich die erwartete exponentielle Konvergenz.

Beispiel 4.25 Wir parametrisieren das Geradenstück durch

$$\Gamma := \{(t, 0) : t \in [-1, 1]\}$$

und den Drachen durch

$$\partial D := \{(3(\cos t + 0.65(\cos 2t - 1)), 1.5 \sin t) : t \in [0, 2\pi]\}.$$

**Abbildung 4.2:** Drachen mit Geradenstück**Tabelle 4.3:** Fehler im Punkt (1,1)

N	u	Fehler
16	1.28930357224273	0.01728392272866
32	1.27154945876851	0.00047019074556
64	1.27201269191030	0.00000695760376
128	1.27201964655594	0.00000000295812

Auch hier wird die exponentielle Konvergenz deutlich.

Kapitel 5

Berechnung der Normalableitung auf ∂D

Um das inverse Problem lösen zu können, müssen wir die Normalableitung der Lösung auf dem äußeren Rand ∂D kennen. Wir müssen also die Normalableitungen der Doppelschichtpotenziale über ∂D und Γ des Lösungsansatzes u aus (4.1) numerisch auswerten. Das Potenzial über den Bogen Γ bereitet hier keine Schwierigkeiten, da es ja nur für $x \in \partial D$ ausgewertet wird. Wir werden uns an dieser Stelle auf Dichten $\varphi \in C^{1,\alpha}(\partial D)$ beschränken, da wir nur für diese Dichten das entstehende Integral in eine Form bringen können, die wir numerisch auswerten können.

5.1 Eigenschaften der Normalableitung des Doppelschichtpotenzials

Also beschäftigen wir uns mit dem Potenzial über ∂D und formulieren dazu folgenden

Satz 5.1 *Die Normalableitung eines Doppelschichtpotenzials ist beim Durchgang durch ∂D stetig und hat für $x \in \partial D$ die Darstellung als Hadamard-Integral*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \nu(x)}(x) &= \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \log \frac{1}{|x-y|} \varphi(y) ds(y) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{\partial D} \left\{ \frac{\langle \nu(y), \nu(x) \rangle}{|x-y|^2} - 2 \frac{\langle \nu(y), x-y \rangle \langle x-y, \nu(x) \rangle}{|x-y|^4} \right\} \varphi(y) ds(y). \end{aligned}$$

BEWEIS. Siehe [Hac89], Satz 8.2.15 □

Um die Normalableitung auf dem Rand numerisch berechnen zu können, muss eine geeignete Quadraturformel zur Berechnung des hypersingulären Integrals entwickelt werden. Dazu formulieren wir zuerst ein Analogon zu einem Teil der Aussage von Satz 3.36.

Satz 5.2 Falls die Dichte $\varphi \in C^{1,\alpha}(\partial D)$ ist, dann gilt für $x \in \partial D$

$$\frac{\partial}{\partial \nu(x)} \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \varphi(y) ds(y) = \int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial t(x)} \log \frac{1}{|x - y|} \frac{\partial}{\partial s} \varphi(y) ds(y),$$

wobei $t(x)$ den Einheitstangentenvektor in Kurvenrichtung im Punkt $x \in \partial D$ bezeichnet.

BEWEIS. Einen Beweis hierfür findet man in [Kre99], Thm. 7.29. \square

Mit diesem Satz berechnen wir mit Hilfe der bereits eingeführten Parametrisierung

$$\partial D = \{z_1(s) : s \in [0, 2\pi)\}$$

des äußeren Randes

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \log \frac{1}{|x - y|} \varphi(y) ds(y) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\langle z_1'(t), z_1(\tau) - z_1(t) \rangle}{|z_1'(t)| |z_1(t) - z_1(\tau)|^2} \varphi'(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{|z_1'(t)|} \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \cot \frac{\tau - t}{2} \varphi'(\tau) d\tau \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{2 \langle z_1'(t), z_1(\tau) - z_1(t) \rangle}{|z_1(t) - z_1(\tau)|^2} - \cot \frac{\tau - t}{2} \right) \varphi'(\tau) d\tau \right\}, \end{aligned}$$

wobei wir $\varphi(\tau)$ einfachheitshalber mit $\varphi(z_1(\tau))$ identifizieren. Der Cotangensanteil stammt dabei von der Parametrisierung des Einheitskreises.

Wir werden nun diese Darstellung nutzen, um die Normalableitung numerisch auszuwerten. Vorher werden wir noch die Analytizität des Kerns des zweiten Integrals beweisen.

Satz 5.3 Der Kern

$$K_R(t, \tau) := \frac{2 \langle z_1'(t), z_1(\tau) - z_1(t) \rangle}{|z_1(t) - z_1(\tau)|^2} - \cot \frac{\tau - t}{2}$$

ist analytisch mit

$$\lim_{t \rightarrow \tau} K_R(t, \tau) = -\frac{\langle z_1'(t), z_1''(t) \rangle}{|z_1'(t)|^2}. \quad (5.1)$$

BEWEIS. Wir führen eine Taylorentwicklung von $z_1(\tau)$ an der Stelle $\tau = t$ durch und erhalten mit der Abkürzung $h := \tau - t$

$$z_1(\tau) = z_1(t) + z_1'(t)h + z_1''(t)\frac{h^2}{2} + O(|h|^3).$$

Aus der Potenzreihenentwicklung des Cotangens erhalten wir für $h \rightarrow 0$

$$\cot \frac{h}{2} = \frac{2}{h} - \frac{h}{6} + O(|h|^3)$$

und schließlich

$$\begin{aligned} K_R(t, \tau) &= \frac{2 \langle z_1'(t), z_1'(t)h + z_1''(t)\frac{h^2}{2} \rangle}{|z_1'(t)|^2 h^2 + O(|h|^3)} \\ &\quad + \frac{(\frac{h}{6} - \frac{2}{h})(|z_1'(t)|^2 h^2 + \langle z_1'(t), z_1''(t) \rangle h^3) + O(|h|^3)}{|z_1'(t)|^2 h^2 + O(|h|^3)} \\ &= -\frac{\langle z_1'(t), z_1''(t) \rangle h^2 + O(|h|^3)}{|z_1'(t)|^2 h^2 + O(|h|^3)}. \end{aligned}$$

Das ergibt für der Diagonalwert

$$\lim_{t \rightarrow \tau} K_R(t, \tau) = -\frac{\langle z_1'(t), z_1''(t) \rangle}{|z_1'(t)|^2}.$$

□

Jetzt müssen wir noch die Ableitung der Dichte im zweiten Integral beseitigen. Dazu nutzen wir die 2π -Periodizität von z aus, integrieren einmal partiell und erhalten

$$\int_0^{2\pi} K_R(t, \tau) \varphi'(\tau) d\tau = - \int_0^{2\pi} \frac{\partial K_R(t, \tau)}{\partial \tau} \varphi(\tau) d\tau.$$

Mit der Bezeichnung

$$\tilde{K}_R(t, \tau) := -\frac{\partial}{\partial \tau} K_R(t, \tau)$$

berechnen wir für $t \neq \tau$

$$\begin{aligned} \tilde{K}_R(t, \tau) &= 4 \frac{\langle z_1'(\tau), z_1(\tau) - z_1(t) \rangle \langle z_1'(t), z_1(\tau) - z_1(t) \rangle}{|z_1(t) - z_1(\tau)|^4} \\ &\quad - 2 \frac{\langle z_1'(t), z_1'(\tau) \rangle}{|z_1(t) - z_1(\tau)|^2} - \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\tau-t}{2}}. \end{aligned}$$

Für $t = \tau$ erhalten wir durch die Taylorentwicklungen

$$z_1(\tau) = z_1(t) + z_1'(t)h + z_1''(t)\frac{h^2}{2} + z_1'''(t)\frac{h^3}{6} + O(|h|^4)$$

und

$$\cot \frac{h}{2} = \frac{2}{h} - \frac{h}{6} - \frac{h^3}{360} + O(|h|^5)$$

für $h \rightarrow 0$ durch Einsetzen in den entsprechenden Differenzenquotienten für den Diagonalwert

$$\tilde{K}_R(t, t) = \frac{1}{3} \frac{\langle z_1'(t), z_1'''(t) \rangle}{|z_1'(t)|^2} + \frac{1}{2} \frac{|z_1''(t)|^2}{|z_1'(t)|^2} - \frac{1}{6} \frac{\langle z_1'(t), z_1''(t) \rangle^2}{|z_1'(t)|^4}. \quad (5.2)$$

Somit können wir schreiben

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial v(x)} \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \frac{\partial}{\partial v(y)} \log \frac{1}{|x-y|} \varphi(y) ds(y) \\ &= \frac{1}{|z'(t)|} \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \cot \frac{\tau-t}{2} \varphi'(\tau) d\tau + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{K}_R(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau \right\}. \end{aligned}$$

5.2 Numerische Berechnung der Integrale

Das zweite Integral kann nun einfach zum Beispiel mit der zusammengesetzten Trapezregel unter Beachtung der Diagonalwerte berechnet werden.

Wenden wir uns daher dem ersten Integral zu. Die folgenden Berechnungen beruhen auf der Idee, die Dichte durch ihr trigonometrisches Interpolationspolynom zu ersetzen und dann exakt zu integrieren. Mit den Stützstellen

$$u_j^{(M)} = \frac{j\pi}{M}, \quad j = 0, \dots, 2M-1$$

für $M \in \mathbb{N}$ und dem Raum der trigonometrischen Polynome

$$T_M := \left\{ v \in C[0, 2\pi] : v(t) = \sum_{m=0}^M a_m \cos mt + \sum_{m=1}^{M-1} b_m \sin mt \right\}$$

betrachten wir den Interpolationsoperator

$$\begin{aligned} P_M : C[0, 2\pi] &\rightarrow T_M \\ f &\mapsto \sum_{j=0}^{2M-1} f(u_j^{(M)}) L_j^{(M)}. \end{aligned}$$

Die Lagrangefaktoren sind dann für $j = 0, \dots, 2M - 1$ gegeben durch

$$L_j^{(M)}(t) := \frac{1}{2M} \left\{ 1 + \sum_{m=1}^{M-1} \cos m(t - u_j^{(M)}) + \cos M(t - u_j^{(M)}) \right\}.$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \cot \frac{\tau - s}{2} \varphi'(\tau) d\tau &\approx \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \cot \frac{\tau - s}{2} ((P_M \varphi)(\tau))' d\tau \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \cot \frac{\tau - s}{2} \left(\sum_{j=0}^{2M-1} \varphi(u_j^{(M)}) L_j^{(M)}(\tau) \right)' d\tau \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{2M-1} \varphi(u_j^{(M)}) R_j^{(M)}(s) \end{aligned}$$

mit

$$R_j^{(M)}(s) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cot \frac{\tau - s}{2} (L_j^{(M)})'(\tau) d\tau.$$

Wir können die Ausdrücke $R_j^{(n)}$ wieder mit Lemma 4.23 für $j = 0, \dots, 2n - 1$ exakt integrieren:

$$R_j^{(M)}(s) = -\frac{1}{M} \left(\sum_{m=1}^{M-1} m \cos m(s - u_j^{(M)}) + \frac{M}{2} \cos M(s - u_j^{(M)}) \right).$$

Die restlichen auftretenden Integrale können wir zum Beispiel mit der zusammengesetzten Trapezregel unter Berücksichtigung der Diagonalwerte (5.1) und (5.2) berechnen.

Nun können wir die Normalableitung der Lösung numerisch berechnen und haben alles bei der Hand, um uns dem inversen Problem zuwenden zu können.

Kapitel 6

Das inverse Problem

Bei der Betrachtung des inversen Problems werden wir uns auf den Spezialfall des linearen Schlitzes beschränken, obwohl das direkte Problem für einen allgemeinen Bogen $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ formuliert wurde. In diesem Kapitel werden wir das inverse Problem formulieren und in den beiden folgenden Kapiteln jeweils ein Verfahren zur Lösung des Problems untersuchen.

Obwohl das direkte Problem für Funktionen $f \in C(\partial D)$ gelöst wurde, betrachten wir für das inverse Problem rechte Seiten $f \in H^{1/2}(\partial D)$, da nur in diesem Fall sichergestellt werden kann, dass die Normalableitung der Lösung auf dem äußeren Rand ∂D auch existiert.

6.1 Formulierung des Problems

Problemstellung 6.1 Sei also $D \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet mit C^2 -glattem Rand, das einen linearen Schlitz $\Gamma \subset \Pi$ mit $\partial D \cap \Gamma = \emptyset$ enthält, wobei Π eine affine Gerade im \mathbb{R}^2 ist. Sei ferner u die Lösung des Randwertproblems

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } D \setminus \Gamma \quad (6.1a)$$

$$u = f \quad \text{auf } \partial D \quad (6.1b)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{auf } \Gamma \quad (6.1c)$$

mit einer gegebenen Funktion $f \in H^{1/2}(\partial D)$. Das inverse Problem wird nun wie folgt formuliert:

Rekonstruiere aus dem gegebenen äußeren Rand ∂D , den gegebenen Dirichletdaten f auf ∂D und aus der gemessenen Normalableitung auf ∂D

$$g := \frac{\partial u}{\partial \nu} \Big|_{\partial D}$$

den linearen Schlitz Γ .

Die Idee hinter den beiden Verfahren, die wir in den nächsten beiden Kapiteln untersuchen werden, ist der intuitive Ansatz, die Differenz der Lösung für ein Gebiet mit Schlitz mit der Lösung für ein identisches Gebiet, diesmal allerdings ohne Schlitz, zu betrachten. Im folgenden Abschnitt werden wir diesen Ansatz präzisieren und die funktionalanalytischen Grundlagen dazu schaffen.

6.2 Das Reziprozitätsprinzip von Maxwell-Betti

Sei H ein Hilbertraum, a eine symmetrische, stetige und koerzitive Bilinearform auf $H \times H$, das heißt es existiert eine Konstante $\gamma > 0$ mit

$$a(v, v) \geq \gamma \|v\|^2$$

für alle $v \in H$, und seien L_1 und L_2 stetige Linearformen auf H . Betrachte die Lösungen u_1, u_2 des Variationsproblems

$$a(u_i, v) = L_i(v) \quad \text{für alle } v \in H, \quad i = 1, 2.$$

Wählt man nun $v = u_1$ für $i = 2$ und $v = u_2$ für $i = 1$ erhält man wegen der Symmetrie der Bilinearform a

$$L_1(u_2) = L_2(u_1).$$

Das nennt man das *Reziprozitätsprinzip*.

Sei \tilde{u} nun die Lösung des folgenden Problems im Gebiet ohne Schlitz:

$$\Delta \tilde{u} = 0 \quad \text{in } D \tag{6.2}$$

$$\tilde{u} = \tilde{f} \quad \text{auf } \partial D. \tag{6.3}$$

Wir bezeichnen analog zu (6.1a-6.1c) die Normalableitung auf dem äußeren Rand ∂D mit \tilde{g} .

In unserem Fall sind die Bilinearform durch

$$a(u, v) := \int_{D \setminus \Gamma} \nabla u \cdot \nabla v \, dx$$

und die Linearformen durch

$$L_1(v) := \int_{\partial D} g v \, ds$$

bzw.

$$L_2(v) := \int_{\partial D} \tilde{g} v \, ds$$

gegeben (vgl. [OD96]).

Folglich betrachten wir

$$L_1(\tilde{u}) - L_2(u) = \int_{\partial D} (g\tilde{f} - \tilde{g}f) \, ds,$$

wobei das Integral im Falle von g bzw. $\tilde{g} \in H^{-1/2}(\partial D)$ als duale Paarung zu verstehen ist. Dieses Integral verschwindet nach dem Reziprozitätsprinzip, falls das Gebiet keinen Schlitz enthält. Das erlaubt uns nun, Folgendes zu definieren.

Definition 6.2 Für eine in D harmonische Funktion $U \in H^1$ definiert

$$RG_{[f,g]}(U) := \int_{\partial D} \frac{\partial U}{\partial \nu} f - gU \, ds \quad (6.4)$$

die *Reziprozitätslücke*. (6.4) definiert eine Linearform auf dem Raum

$$H := \{U \in H^1(D), \Delta U = 0 \text{ in } D\}.$$

Mit Hilfe dieser Definition können wir nun den folgenden zentralen Satz formulieren und beweisen.

Lemma 6.3 *Es gilt*

$$RG_{[f,g]}(U) = - \int_{\Gamma} p \frac{\partial U}{\partial \nu} \, ds,$$

wobei $p := u_+ - u_-$ mit

$$u_{\pm} := \lim_{h \rightarrow 0} u(x \pm h\nu(x)), \quad x \in \Gamma$$

den Sprung von u entlang Γ bezeichnet und das Vorzeichen natürlich von der Richtung des Normalenvektors abhängt.

BEWEIS. Wir wenden für $U \in H$ den Green'schen Satz auf das Gebiet D an:

$$\begin{aligned} RG_{[f,g]}(U) &= \int_{\partial D} f \frac{\partial U}{\partial \nu} - gU \, ds \\ &= \int_{\partial D} u \frac{\partial U}{\partial \nu} - U \frac{\partial u}{\partial \nu} \, ds \\ &= \int_D u \underbrace{\Delta U}_{=0} - U \underbrace{\Delta u}_{=0} \, dx - \int_{\Gamma} p \frac{\partial U}{\partial \nu} - U \underbrace{\frac{\partial u}{\partial \nu}}_{=0} \, ds \\ &= - \int_{\Gamma} p \frac{\partial U}{\partial \nu} \, ds \end{aligned}$$

□

Kapitel 7

Das Verfahren von Andrieux und Ben Abda

In diesem Kapitel werden wir das erste Verfahren zur Lösung des inversen Problems vorstellen. Ziel wird es sein, durch Einsetzen geeigneter Funktionen $U \in H$ in das Reziprozitätslückenfunktional (6.4) die kartesische Gleichung der Geraden Π zu ermitteln, auf der der Schlitz Γ liegt, und zum Schluss des Kapitels den Schlitz eindeutig zu identifizieren. Dieses Verfahren wurde von Andrieux und Ben Abda in [ABA96] vorgeschlagen.

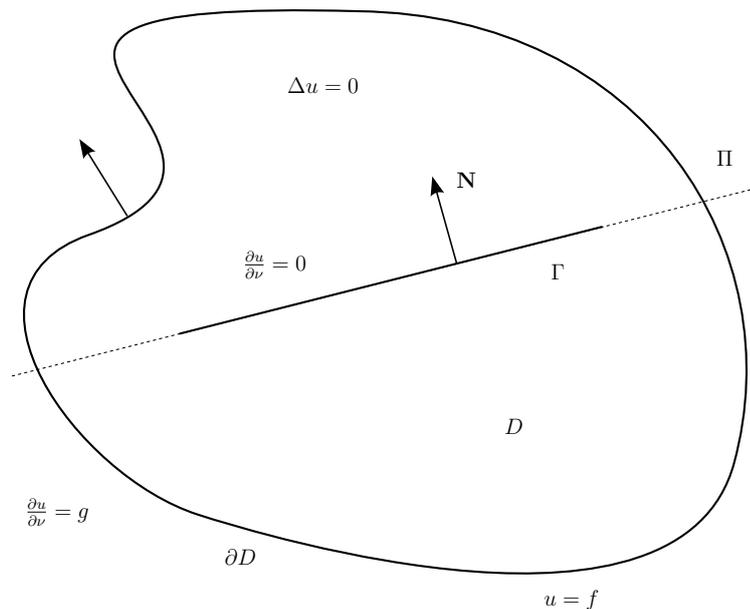


Abbildung 7.1: Skizze der Problemstellung

7.1 Bestimmung der Geradengleichung

Wir haben jetzt mit dem Reziprozitätsfunktional das Werkzeug an der Hand, das es uns ermöglicht, die karthesische Gleichung der Geraden Π zu ermitteln, die den Schlitz Γ enthält. Zuerst werden wir die Normale an Π ermitteln und danach die Konstante, um die Geradengleichung zu vervollständigen. Mit der a-priori-Information, dass es sich bei dem Schlitz um ein Geradenstück handelt, bezeichnen wir den Einheitsnormalenvektor an den Schlitz mit

$$\mathbf{N} := (n_1, n_2)^T.$$

Im folgenden bezeichnet $p := u_+ - u_-$ mit

$$u_{\pm} := \lim_{h \rightarrow 0} u(x \pm hv(x)), \quad x \in \Gamma$$

den Sprung von u entlang Γ .

Satz 7.1 (Bestimmung der Einheitsnormalen) Für $k = 1, 2$ bezeichnen wir mit

$$\chi_k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_k$$

die Projektion auf die k -te Komponente und definieren

$$L_k := RG_{[f,g]}(\chi_k).$$

Falls f so gewählt wurde, dass $\int_{\Gamma} p \, ds \neq 0$, dann sind die Komponenten des Einheitsnormalenvektors der Geraden, die den Schlitz enthält, gegeben durch

$$n_k = \frac{L_k}{-\sqrt{L_1^2 + L_2^2}}, \quad k = 1, 2.$$

Außerdem erhalten wir

$$\left| \int_{\Gamma} p \, ds \right| = \sqrt{L_1^2 + L_2^2}.$$

BEWEIS. Offensichtlich ist $\chi_k \in H$, $k = 1, 2$ und wir können Lemma 6.3 anwenden. Es gilt

$$\frac{\partial \chi_k}{\partial \mathbf{N}} = \langle \text{grad } \chi_k, \mathbf{N} \rangle = n_k,$$

d.h.

$$L_k := RG_{[f,g]}(\chi_k) = -n_k \int_{\Gamma} p \, ds$$

für $k = 1, 2$ nach Lemma 6.3.

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Gamma} p \, ds \right)^2 &= \left(\int_{\Gamma} p \, ds \right)^2 \underbrace{(n_1^2 + n_2^2)}_{=1} \\ &= \left(\int_{\Gamma} p n_1 \, ds \right)^2 + \left(\int_{\Gamma} p n_2 \, ds \right)^2 \\ &= L_1^2 + L_2^2. \end{aligned}$$

Daraus folgen sofort die beiden Aussagen. □

Zu dem aus dem vorangegangenen Satz ermittelten Normalenvektor

$$\mathbf{N} = (n_1, n_2)^T$$

wählen wir einen normierten, zu \mathbf{N} orthogonalen Vektor \mathbf{T} und bezeichnen die zu der neuen Basis (\mathbf{T}, \mathbf{N}) des \mathbb{R}^2 gehörenden kartesischen Koordinaten mit (X_1, X_2) . In dieser Basis ist die Gleichung der Geraden Π gegeben durch

$$X_2 - C = 0.$$

Die Lokalisierung der Geraden Π wird unter der Annahme $\int_{\Gamma} p \, ds \neq 0$ vervollständig durch den folgenden

Satz 7.2 (Bestimmung der Konstanten C) Die Konstante C der Geradengleichung ist gegeben durch

$$C = \frac{RG_{[f,g]}(p)}{\left| \int_{\Gamma} p \, ds \right|},$$

wobei

$$p(X_1, X_2) = \frac{X_1^2 - X_2^2}{2}.$$

BEWEIS. Aus $X_2 - C = 0$ folgt

$$\int_{\Gamma} p X_2 \, ds = C \int_{\Gamma} p \, ds,$$

wobei $\int_{\Gamma} p \, ds$ aus dem vorangegangenen Satz bekannt ist. Wenn wir $U \in H$ so wählen, dass $\frac{\partial U}{\partial \mathbf{N}} = -X_2$ auf Γ , dann gibt uns Lemma 6.3 das gewünschte Resultat. Die Funktion

$$p(X_1, X_2) = \frac{X_1^2 - X_2^2}{2}$$

ist harmonisch und erfüllt diese Bedingung. \square

Dadurch haben wir eine explizite Formel zur Erlangung der Gleichung der Geraden Π erhalten, die den Schlitz Γ enthält.

7.2 Vollständige Bestimmung des Schlitzes

Jetzt muss nur noch die Länge des Schlitzes bestimmt werden. Wir werden dazu den Sprung p in eine Fourier-Reihe entwickeln und zur Identifikation des Schlitzes den Träger dieser Fourier-Reihe bestimmen. Wieder wird das Reziprozitätslückenfunktional (6.4) ein wichtiges Werkzeug sein.

Wir definieren dazu zuerst ein neues orthonormales System $(O', \mathbf{T}, \mathbf{N})$, das aus dem vorherigen durch Verschieben des Ursprungs hervorgeht. O' wird hierbei so gewählt, dass $O' \in \Pi$.

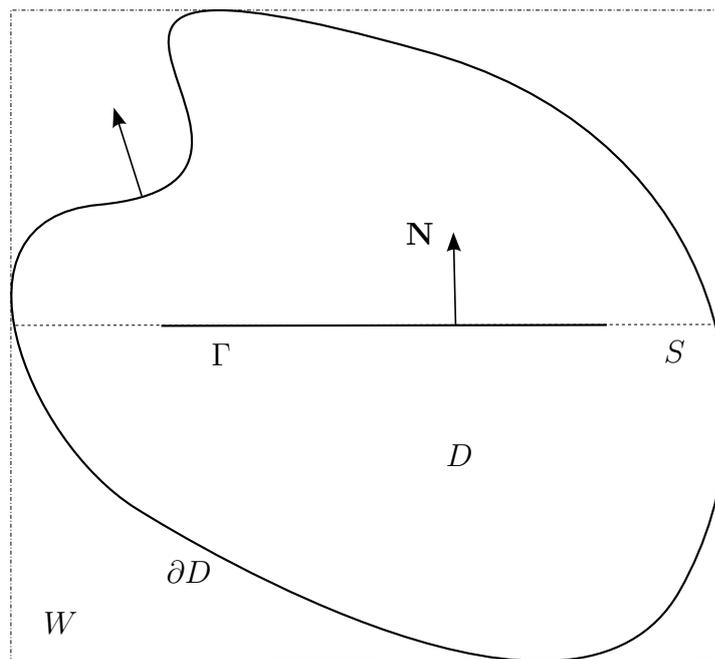
Sei d nun der Durchmesser von D und W ein offenes Rechteck, das D enthält. Dann hat W die Form

$$W = \left(a_1 - \frac{d}{2}, a_1 + \frac{d}{2} \right) \times \left(a_2 - \frac{d}{2}, a_2 + \frac{d}{2} \right)$$

mit einem geeigneten inneren Punkt (a_1, a_2) von D , natürlich bezüglich des neuen orthonormalen Systems $(O', \mathbf{T}, \mathbf{N})$.

Wir setzen nun $S := \Pi \cap W$, dann hat S nach Translation die Form

$$S = \left(-\frac{d}{2}, +\frac{d}{2} \right).$$

Abbildung 7.2: Skizze von W und S

Sei $\{\vartheta_k, k \in \mathbb{N}\}$ mit

$$\vartheta_k(x) = \sin\left(\frac{2\pi}{d}k\left(x + \frac{d}{2}\right)\right)$$

eine orthogonale Basis von $L^2(S)$. Wir definieren weiter eine Familie von Funktionen $(\theta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ durch

$$\theta_k(x, y) = \frac{d}{2\pi k} \vartheta_k(x) \sinh\left(\frac{2\pi}{d}ky\right), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Lemma 7.3 θ_k definiert für alle $k \in \mathbb{N}$ eine in W harmonische Funktion und auf S gilt

$$\frac{\partial \theta_k^i}{\partial N} = \vartheta_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

BEWEIS. Sei $(x, y) \in W$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 \Delta \theta_k(x, y) &= \frac{\partial^2 \theta_k}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 \theta_k}{\partial y^2}(x, y) \\
 &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \cos \left(\frac{2\pi}{d} k \left(x + \frac{d}{2} \right) \right) \sinh \left(\frac{2\pi}{d} k y \right) \right\} \\
 &\quad + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \sin \left(\frac{2\pi}{d} k \left(x + \frac{d}{2} \right) \right) \cosh \left(\frac{2\pi}{d} k y \right) \right\} \\
 &= -\frac{2\pi k}{d} \sin \left(\frac{2\pi}{d} k \left(x + \frac{d}{2} \right) \right) \sinh \left(\frac{2\pi}{d} k y \right) \\
 &\quad + \frac{2\pi k}{d} \sin \left(\frac{2\pi}{d} k \left(x + \frac{d}{2} \right) \right) \sinh \left(\frac{2\pi}{d} k y \right) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Also ist θ_k harmonisch in W .

Für den zweiten Teil der Aussage berechnen wir

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \theta_k}{\partial N} &= \text{grad } \theta_k \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \sinh \left(\frac{2\pi}{d} k y \right) \cos \left(\frac{2\pi}{d} k \left(x + \frac{d}{2} \right) \right) \\ \cosh \left(\frac{2\pi}{d} k y \right) \sin \left(\frac{2\pi}{d} k \left(x + \frac{d}{2} \right) \right) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \end{pmatrix} \\
 &= \sin \left(\frac{2\pi}{d} k x \right).
 \end{aligned}$$

Hierbei wurde verwendet, dass die Einheitsnormale an Γ bezüglich des neuen Koordinatensystems durch $(0, 1)^T$ gegeben ist. Außerdem gilt nach Verschieben des Ursprungs $y = 0$ auf Γ . \square

Lemma 7.4 Sei \tilde{p} die Erweiterung von p mit 0 auf ganz S . Dann gilt für $k \in \mathbb{N}$

$$RG_{[f,g]}(\theta_k) = - \int_S \tilde{p} \cdot \vartheta_k \, ds$$

BEWEIS. Dies folgt sofort nach Anwendung von Lemma 6.3 und Lemma 7.3. \square

Bemerkung 7.5 Aus Lemma 7.4 erhalten wir die Fourier-Koeffizienten von \tilde{p} auf S . In der numerischen Implementierung werden wir natürlich eine abgeschnittene Fourierreihenentwicklung zur Rekonstruktion des Sprunges benutzen

$$\tilde{p}_n = - \sum_{k=1}^{k_{max}} RG_{[f,g]}(\theta_k) \cdot \vartheta_k.$$

Wir sind allerdings nicht an der Rekonstruktion des Sprunges an sich interessiert, sondern an der Lokalisierung des Schlitzes. Dazu müssen wir allerdings noch einige Vorarbeiten erledigen.

Lemma 7.6 Seien $D_+, D_- \subset \mathbb{R}^2$ Gebiete mit $D_+ \cap D_- = \emptyset$ und $\Lambda := \partial D_+ \cap \partial D_- \neq \emptyset$, das heißt D_+ und D_- haben ein Stück Rand gemeinsam. Seien ferner v_+ und v_- harmonisch in D_+ bzw. D_- und es gelte

$$v_+ = v_- \quad \text{auf } \Lambda \quad (7.1)$$

und

$$\frac{\partial v_+}{\partial \nu} = \frac{\partial v_-}{\partial \nu} \quad \text{auf } \Lambda. \quad (7.2)$$

Dann ist v definiert durch

$$v(x) := \begin{cases} v_+(x), & x \in D_+ \cup \Lambda \\ v_-(x), & x \in D_- \end{cases}$$

harmonisch in $D := D_+ \cup D_- \cup \Lambda$.

BEWEIS. Sei $x \in D_+$. Dann gilt nach der Green'schen Darstellungsformel

$$u_+(x) = \int_{\partial D_+} \left\{ \frac{\partial v_+}{\partial \nu}(y) \Phi(x, y) - v_+(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \right\} ds(y)$$

und

$$0 = \int_{\partial D_-} \left\{ \frac{\partial v_-}{\partial \nu}(y) \Phi(x, y) - v_-(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \right\} ds(y)$$

mit jeweils in das Außengebiet von D_+ bzw. D_- weisenden Normalen.

Addition der beiden Gleichungen ergibt dann

$$\begin{aligned}
v_+(x) &= \int_{\partial D_+} \left\{ \frac{\partial v_+}{\partial \nu}(y) \Phi(x, y) - v_+(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \right\} ds(y) \\
&\quad + \int_{\partial D_-} \left\{ \frac{\partial v_-}{\partial \nu}(y) \Phi(x, y) - v_-(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \right\} ds(y) \\
&= \int_{\partial D_+ \setminus \Lambda} \left\{ \frac{\partial v_+}{\partial \nu}(y) \Phi(x, y) - v_+(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \right\} ds(y) \\
&\quad + \int_{\Lambda} \left\{ \frac{\partial v_+}{\partial \nu}(y) \Phi(x, y) - v_+(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \right\} ds(y) \\
&\quad + \int_{\partial D_- \setminus \Lambda} \left\{ \frac{\partial v_-}{\partial \nu}(y) \Phi(x, y) - v_-(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \right\} ds(y) \\
&\quad + \int_{\Lambda} \left\{ \frac{\partial v_-}{\partial \nu}(y) \Phi(x, y) - v_-(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \right\} ds(y)
\end{aligned}$$

Wegen der entgegengesetzten Normalenrichtung bei der Integration über Λ und wegen (7.1) und (7.2) gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\Lambda} \left\{ \frac{\partial v_+}{\partial \nu}(y) \Phi(x, y) - v_+(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \right\} ds(y) &= \\
&\quad - \int_{\Lambda} \left\{ \frac{\partial v_-}{\partial \nu}(y) \Phi(x, y) - v_-(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \right\} ds(y)
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$v_+(x) = \int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial v}{\partial \nu}(y) \Phi(x, y) - v(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \right\} ds(y).$$

Eine analoge Rechnung liefert für $x \in D_-$

$$v_-(x) = \int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial v}{\partial \nu}(y) \Phi(x, y) - v(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \right\} ds(y)$$

und somit auch eine für $x \in \Lambda$ gültige Darstellung

$$v(x) = \int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial v}{\partial \nu}(y) \Phi(x, y) - v(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \right\} ds(y),$$

aus der wir die Harmonizität ablesen. □

Lemma 7.7 Sei $\tilde{\Gamma}$ eine offene Teilmenge des Schlitzes Γ und auf $\tilde{\Gamma}$ gelte $u_+ = u_-$. Dann gilt $u_+ = u_-$ auf ganz Γ .

BEWEIS. Wir definieren zuerst eine Funktion $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$v(X_1, X_2) := \begin{cases} u(X_1, X_2), & X_2 \geq 0 \\ u(X_1, -X_2), & X_2 < 0. \end{cases}$$

Nach Lemma 7.6 ist v harmonisch in $D \cup \Gamma$. Sei I eine Umgebung von $\tilde{\Gamma}$. Ebenfalls nach Lemma 7.6 ist u harmonisch in I . Nach Konstruktion haben u und v dieselben Cauchy-Daten auf $\tilde{\Gamma}$, also gilt nach dem Satz von Holmgren mit $D_- := \{(X_1, X_2) \in D : X_2 < 0\}$

$$u|_{D_-} = v|_{D_-}.$$

Also ist

$$u_- = v_- = v_+ = u_+$$

auf ganz Γ . □

Lemma 7.8 Bezeichne mit $\text{supp}(\tilde{p})$ den Träger von \tilde{p} und mit $\text{Meas}(D)$ das Lebesgue-Maß eines Gebiets D . Dann gilt

$$\text{Meas}(\text{supp}(\tilde{p})) = \text{Meas}(\Gamma).$$

BEWEIS. Nach Definition gilt $\text{supp}(\tilde{p}) \subseteq \Gamma$. Wir nehmen an, dass

$$\text{Meas}(\text{supp}(\tilde{p})) < \text{Meas}(\Gamma).$$

Dann existiert ein offenes Intervall $I \subseteq \Gamma \setminus \text{supp}(\tilde{p})$, so dass

$$p = 0 \quad \text{auf } I \tag{7.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{auf } I. \tag{7.4}$$

Nach Lemma 7.7 gilt dann $p = 0$ auf ganz Γ . Das stellt einen Widerspruch zur Voraussetzung

$$\int_{\Gamma} p \, ds \neq 0$$

dar. □

Aus diesem Lemma folgt sofort:

Korollar 7.9 p kann keine konstanten Nullwerte auf einer offenen Teilmenge von Γ mit positivem Maß annehmen.

Nun sind wir in der Lage, die eindeutige Identifizierbarkeit des Schlitzes zu beweisen.

Satz 7.10 Falls D einen Schlitz Γ enthält und die Dirichletdaten auf ∂D so gewählt wurden, dass $\int_{\Gamma} p \, ds \neq 0$, dann ist Γ eindeutig bestimmt.

BEWEIS. Aus Lemma 7.4 erhalten wir die Dekomposition von \tilde{p} in die Basis $(\theta_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von $L^2(S)$. Dadurch wird \tilde{p} und insbesondere sein Träger identifiziert. Aus Lemma 7.8 erhalten wir dann die Aussage. \square

Wir schließen diesen Abschnitt mit einer Bemerkung zur Exaktheit der Rekonstruktion.

Bemerkung 7.11 Die Bestimmung der Einheitsnormalen an Γ und der Konstanten C aus Satz 7.1 bzw. Satz 7.2 sind exakt, sofern die Daten exakt sind. Es ist nur die numerische Integration auszuführen. Nur die abgeschnittene Fourierreihenentwicklung des Sprungs stellt eine Approximation dar.

7.3 Numerische Ergebnisse

In diesem Abschnitt wollen wir einige Ergebnisse der numerischen Experimente präsentieren. Zur Datengewinnung wird das direkte Problem wie in Kapitel 4 beschrieben numerisch gelöst. Dazu werden 256 Stützstellen auf dem äußeren Rand ∂D benutzt.

Wir parametrisieren den äußeren Rand ∂D zur Vereinfachung als Einheitskreis, d. h. $z_1(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$. Das direkte Problem zur Datengewinnung wird wie in Kapitel 4 beschrieben gelöst und die Normalableitung auf ∂D anschließend mit Hilfe von Kapitel 5 berechnet.

Beispiel 7.12 Wir parametrisieren den Schlitz durch

$$\Gamma := \{(0.5t, 0.5t), t \in [-1, 1]\}.$$

Der Normalenvektor $\mathbf{N} := (n_1, n_2)^T$ an die Gerade, die den Schlitz enthält, ist dabei gegeben durch

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \sqrt{0.5} \\ -\sqrt{0.5} \end{pmatrix}.$$

In der folgenden Tabelle tragen wir den Betrag des Fehlers in den beiden Komponenten des numerisch berechneten Normalenvektors gegen die Anzahl der Stützstellen auf. Zur Berechnung der Integrale wurde die Zusammengesetzte Trapezregel benutzt.

Tabelle 7.1: Fehler bei der Berechnung des Normalenvektors

M	Fehler in n_1	Fehler in n_2
16	0.001217768448	0.001215674828
32	0.000006262301	0.000006262246
64	0.000000000095	0.000000000095
128	0.000000000000	0.000000000000

Deutlich zeigt sich die exponentielle Konvergenz der Trapezregel.

Nun betrachten wir die Rekonstruktionen des Sprungs zur Identifizierung des Schlitzes für verschiedene k_{max} und $M = 16, 32, 64$ und 128 Stützstellen auf ∂D . Dazu plotten wir die abgeschnittene Fourierreihenentwicklung des Sprungs. Die gestrichelten Linien in den folgenden Grafiken zeigen die wahre Position des Schlitzes.

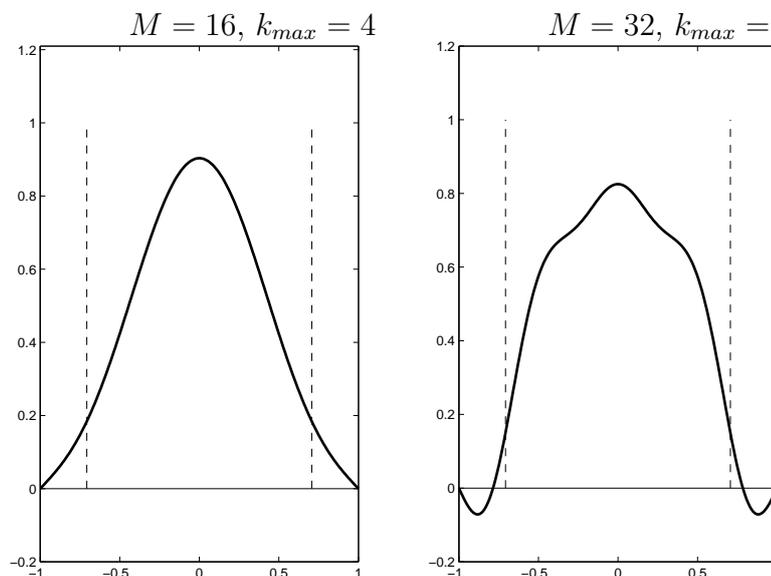
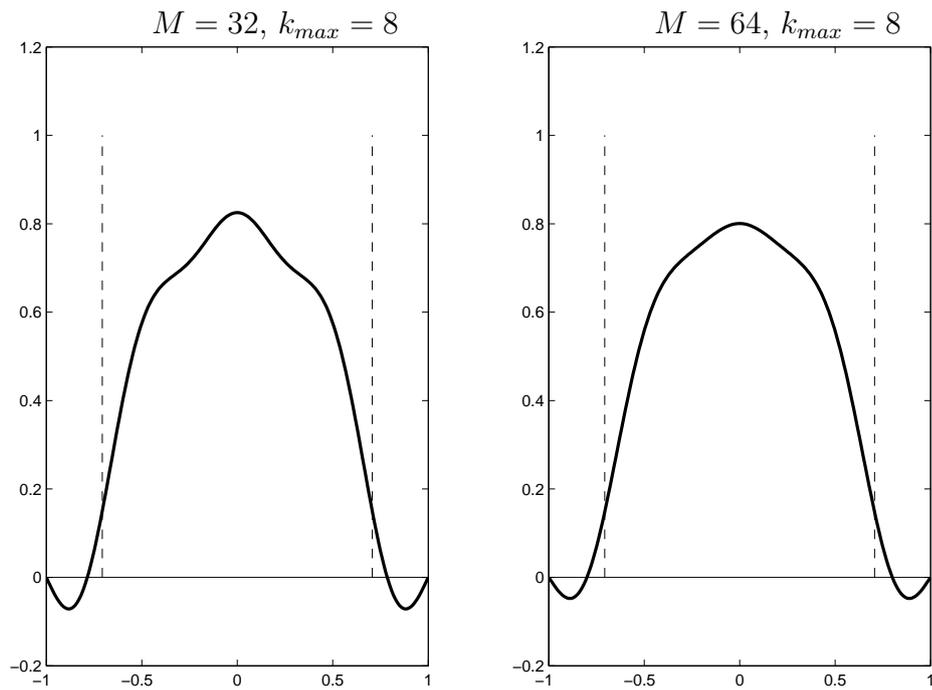
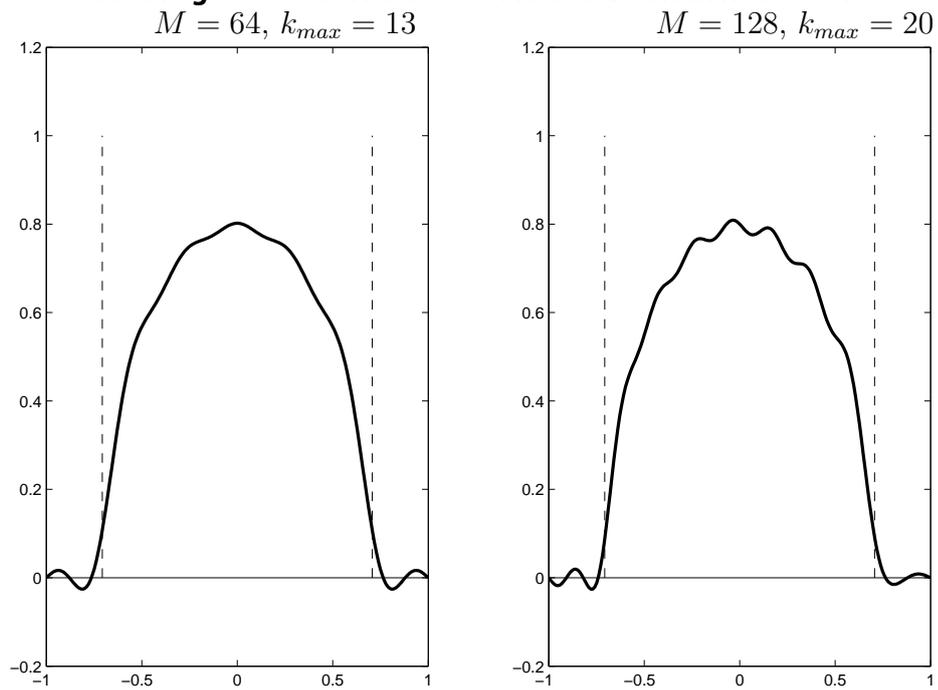


Abbildung 7.3: Rekonstruktion mit 16 und 32 Stützstellen auf ∂D

**Abbildung 7.4:** Rekonstruktion mit 32 und 64 Stützstellen auf ∂D **Abbildung 7.5:** Rekonstruktion mit 64 und 128 Stützstellen auf ∂D

Man erkennt, dass die Bestimmung der Geraden Π , die den Schlitz enthält, sehr exakt möglich ist. Die Bilder zeigen, dass die Lage des Schlitzes umso besser ermittelt werden kann, je größer wir k_{max} wählen. Die hier gewählten Werte sind die für die jeweilige Stützstellenzahl maximalen, bei größeren Werten osziliert die Lösung sehr stark. Um eine genauere Rekonstruktion zu erhalten, muss also die Stützstellenzahl M erhöht werden.

Kapitel 8

Nichtlineare Integralgleichungen zur Lösung des inversen Problems

Wir betrachten nun ein zweites Verfahren, um das inverse Problem zu lösen, also den linearen Schlitz zu rekonstruieren. Im Gegensatz zum Verfahren von Andrieux und Ben Abda ist dieses Verfahren ein iteratives Verfahren. Wieder wird auch für dieses Verfahren das Konzept der Reziprozitätslücken die Grundlage für die Herleitung bilden. Wir werden analog zu [KR05] vorgehen und das dort vorgestellte Verfahren auf unsere Situation übertragen.

Ein Standardverfahren zur Lösung inverser Randwertprobleme dieser Art ist die Lösung der Operatorgleichung $F(\Gamma) = g$ durch ein regularisiertes Newtonverfahren, wobei F den Schlitz Γ auf die Normalableitung $g := \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial D}$ abbildet. Diese Verfahren benötigen aber in jedem Iterationsschritt die Lösung eines Vorwärtsproblems. Das ist bei dem Verfahren, das wir hier betrachten, nicht notwendig. Außerdem kann hier die Fréchet-Ableitung der Operatoren wieder direkt durch Integraloperatoren ausgedrückt werden.

Sei u also wieder die Lösung von Problem (6.1a) - (6.1c). Wir bezeichnen die (gemessene) Normalableitung auf dem äußeren Rand ∂D mit

$$g := \frac{\partial u}{\partial \nu}.$$

Ziel ist es nun also, aus Kenntnis von f , g und ∂D den unbekanntem Schlitz Γ zu rekonstruieren.

Zur Erinnerung definieren wir wieder wie in Definition (6.2) für eine harmonische Funktion $U \in H^1(D)$ das Reziprozitätslückenfunktional $RG_{[f,g]}$ durch

$$RG_{[f,g]}(U) := \int_{\partial D} \left(f \frac{\partial U}{\partial \nu} - gU \right) ds.$$

Erinnerung 8.1 Aus dem zweiten Green'schen Satz folgt

$$RG_{[f,g]}(U) = - \int_{\Gamma} p \frac{\partial U}{\partial \nu} ds, \quad (8.1)$$

wobei $p := u_+ - u_-$ mit

$$u_{\pm} := \lim_{h \rightarrow 0} u(x \pm h\nu(x)), \quad x \in \Gamma$$

den Sprung von u entlang Γ bezeichnet. Nach dem Reziprozitätsprinzip verschwindet $RG_{[f,g]}$ identisch, falls kein Schlitz vorhanden ist.

Ziel ist es nun, durch die Wahl geeigneter Testfunktionen U aus (8.1) zwei Integralgleichungen für die beiden Unbekannten p und Γ herzuleiten, von denen eine stärker schlecht gestellt (*severely ill-posed*) sein wird als die andere (*mildly ill-posed*). Um die Integralgleichungen zu erhalten, werden wir zum einen Funktionen U mit Singularitäten in $D \setminus \Gamma$ und zum anderen mit Singularitäten auf Γ wählen.

Danach werden wir zeigen, dass die Lösung der Integralgleichungen äquivalent zur Lösung des inversen Problems ist. Da die auftretenden Integraloperatoren wegen der Abhängigkeit von Γ nichtlinear sind, werden wir zur Lösung der Operatorgleichung ein regularisiertes Newtonverfahren verwenden.

8.1 Nichtlineare Operatorgleichungen

Führen wir also zuerst mit Hilfe der Grundlösung

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x - y|}, \quad x \neq y, \quad x, y \in \mathbb{R}^2$$

der Laplace-Gleichung im \mathbb{R}^2 die beiden Doppelschichtpotenzialoperatoren

$$\begin{aligned} Q_c &: L^2(\Gamma) \rightarrow L^2(\Gamma) \\ Q_1 &: L^2(\Gamma) \rightarrow L^2(\partial D) \end{aligned}$$

ein, die wie folgt definiert sind:

$$\begin{aligned} (Q_c p)(x) &:= -\frac{\partial}{\partial v(x)} \int_{\Gamma} p(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial v(y)} ds(y), & x \in \Gamma, \\ (Q_1 p)(x) &:= -\int_{\Gamma} p(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial v(y)} ds(y), & x \in \partial D. \end{aligned}$$

Notation 8.2 Wir kennzeichnen die Operatoren mit dem Index $i \in \{c, 1\}$, um deutlich zu machen, ob diese Operatoren nach $L^2(\Gamma)$ oder nach $L^2(\partial D)$ abbilden.

Für die bekannten Funktionen f und g definieren wir noch das kombinierte Einfach- und Doppelschichtpotenzial

$$w(x) := \int_{\partial D} \left\{ f(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial v(y)} - g(y) \Phi(x, y) \right\} ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D$$

und führen für die unbekannte Funktion p das Doppelschichtpotenzial

$$v(x) := \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial v(y)} p(y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$$

ein.

Außerdem ergibt sich für $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D$ durch Vertauschen von Differenziation und Integration

$$\frac{\partial w(x)}{\partial v} = \int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial}{\partial v(x)} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial v(y)} f(y) ds(y) - \frac{\partial}{\partial v(x)} \Phi(x, y) g(y) \right\} ds(y).$$

Jetzt können wir folgenden Satz beweisen:

Satz 8.3 *Das inverse Randwertproblem und das System von Integralgleichungen*

$$Q_c p = \frac{\partial w}{\partial v} \Big|_{\Gamma} \tag{8.2a}$$

$$Q_1 p = w \Big|_{\partial D} \tag{8.2b}$$

sind äquivalent.

BEWEIS. Seien Γ und p Lösungen des inversen Randwertproblems. Dann ergibt sich aus (8.1) angewandt auf $U = \Phi(x, \cdot)$ mit einem Punkt $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$

$$-v = w \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}.$$

Aus den Sprungbeziehungen für Einfach- und Doppelschichtpotenziale folgt, dass Γ und p die Gleichungen (8.2a) und (8.2b) erfüllen.

Umgekehrt, falls Γ und p die Integralgleichungen (8.2a) und (8.2b) erfüllen, ist die Funktion $w + v$ beschränkt und harmonisch in $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$. Aus (8.2b) folgt nun, dass $v + w = 0$ auf ∂D . Aus der Eindeutigkeit des äußeren Dirichlet-Problems zur Laplace-Gleichung schließen wir $v + w = 0$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$.

Aus (8.2a) folgt, dass $\frac{\partial}{\partial \nu} v + \frac{\partial}{\partial \nu} w = 0$ auf Γ . Betrachten wir nun die harmonische Funktion $u := -v - w$ in $D \setminus \Gamma$. Dann folgt aus den Sprungbeziehungen für Einfach- und Doppelschichtpotenziale, dass $u = f$, $\frac{\partial u}{\partial \nu} = g$ auf ∂D und $u_+ - u_- = p$, $\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0$ auf Γ . \square

8.2 Numerische Lösung der Integralgleichungen

8.2.1 Die parametrisierten Integraloperatoren

Wir nehmen wieder an, dass die äußere Randkurve durch

$$\partial D = \{z_1(t) : t \in [0, 2\pi]\}$$

mit einer 2π -periodischen, zweimal stetig differenzierbaren Funktion $z_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $|z_1'(t)| > 0$ für alle $t \in [0, 2\pi]$ und der Schlitz durch

$$\Gamma = \{\gamma(s) : s \in [-1, 1]\}$$

mit einer injektiven, dreimal stetig differenzierbaren Funktion

$$\gamma : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

mit $|\gamma'(s)| > 0$ für alle $s \in [-1, 1]$ parametrisiert werden können.

Wir wenden die Cosinus-Substitution an, substituieren also $s = \cos t$, $t \in [0, \pi]$ in der Repräsentation von Γ und überführen den Integraloperator Q_c mit der abkürzenden Schreibweise $z_c(t) := \gamma(\cos t)$ und unter Berücksichtigung von (3.5) für $t \in [0, \pi]$ in seine parametrisierte Form

$$(B_c p)(t) := -\frac{1}{2\pi|z_c(t)|} \int_0^\pi \frac{z_c'(t) \cdot [z_c(t) - z_c(\tau)]}{|z_c(t) - z_c(\tau)|^2} p'(z_c(\tau)) \sin \tau \, d\tau.$$

Der Integraloperator Q_1 hat dann für $t \in [0, 2\pi]$ die Form

$$(B_1 p)(t) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\mu_c(\tau) \cdot [z_1(t) - z_c(\tau)]}{|z_1(t) - z_c(\tau)|^2} p(z_c(\tau)) \sin \tau d\tau.$$

mit $\mu_c(t) := (-z'_{c,2}(t), z'_{c,1}(t))$ als Normalenvektor.

Die Kerne des Operators B_1 ist glatt, die numerische Berechnung von B_c wird wie in den Abschnitten 4.2.2 und 4.3.4 durchgeführt.

Nach der Parametrisierung des kombinierten Einfach- und Doppelschichtpotenzials w erhält man als Folge der Sprungbeziehungen mit den Bezeichnungen $w_c := \frac{\partial w}{\partial \nu}|_\Gamma$ und $w_1 := w|_{\partial D}$ für $t \in [0, \pi]$ bzw. $t \in [0, 2\pi]$

$$\begin{aligned} w_c(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ f(z_1(\tau)) \left[\frac{\langle \mu_1(\tau), \mu_c(t) \rangle}{|z_c(t) - z_1(\tau)|^2} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 2 \frac{\langle \mu_1(\tau), [z_c(t) - z_1(\tau)] \rangle \langle [z_c(t) - z_1(\tau)], \mu_c(t) \rangle}{|z_c(t) - z_1(\tau)|^4} \right] \right. \\ &\quad \left. - g(z_1(\tau)) \frac{\mu_c(t) \cdot [z_c(t) - z_1(\tau)]}{|z_c(t) - z_1(\tau)|^2} |z_1(\tau)| \right\} d\tau \\ w_1(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ f(z_1(\tau)) \frac{\mu_1(\tau) \cdot [z_1(t) - z_1(\tau)]}{|z_1(t) - z_1(\tau)|^2} \right. \\ &\quad \left. - g(z_1(\tau)) \ln \frac{1}{|z_1(t) - z_1(\tau)|} |z'_1(\tau)| \right\} d\tau + \frac{1}{2} f(z_1(t)), \end{aligned}$$

wobei das Integral von w_1 als uneigentliches Integral zu verstehen ist.

Die numerische Berechnung des Integrals

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_1(\tau)) \frac{\mu_1(\tau) \cdot [z_1(t) - z_1(\tau)]}{|z_1(t) - z_1(\tau)|^2} d\tau$$

erfolgt wie gehabt unter Benutzung von

$$\lim_{\tau \rightarrow t} \frac{\mu_1(\tau) \cdot [z_1(t) - z_1(\tau)]}{|z_1(t) - z_1(\tau)|^2} = \frac{\mu_1(t) \cdot z''_1(t)}{2|z'_1(t)|^2} \quad (8.3)$$

mittels einer Quadraturformel wie zum Beispiel der Trapezregel.

Für das zweite Integral berechnen wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\tau) \ln \frac{1}{|z_1(t) - z_1(\tau)|} |z'_1(\tau)| d\tau = \\ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ -\ln \left| \sin \frac{t-\tau}{2} \right| + \ln \frac{|\sin \frac{t-\tau}{2}|}{|z_1(t) - z_1(\tau)|} \right\} g(\tau) |z'_1(\tau)| d\tau. \end{aligned}$$

Der Kern

$$K_3(t, \tau) := \ln \frac{\left| \sin \frac{t-\tau}{2} \right|}{|z_1(t) - z_1(\tau)|}$$

ist stetig mit Diagonalwerten

$$\lim_{\tau \rightarrow t} K_3(t, \tau) = -\ln 2 |z_1'(t)|.$$

Jetzt gehen wir analog zu [Kre99], Section 12.3 vor und formen wie folgt um:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| \sin \frac{t-\tau}{2} \right| g(\tau) |z_1'(\tau)| d\tau \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| \sin^2 \frac{t-\tau}{2} \right| g(\tau) |z_1'(\tau)| d\tau \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| 4 \sin^2 \frac{t-\tau}{2} \right| g(\tau) |z_1'(\tau)| d\tau + \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \ln 4 g(\tau) |z_1'(\tau)| d\tau. \end{aligned}$$

Nun können wir die dort vorgeschlagene Quadraturformel benutzen und erhalten mit den Stützstellen $u_j = \frac{j\pi}{M}$, $j = 0, \dots, 2M-1$

$$\approx -\frac{1}{2} \sum_{j=0}^{2M-1} R_j^{(M)}(t) g(u_j) |z_1'(u_j)| + \frac{\ln 4}{4\pi} \int_0^{2\pi} g(\tau) |z_1'(\tau)| d\tau$$

mit

$$R_j^{(M)} := -\frac{1}{M} \left\{ \sum_{m=1}^{M-1} \frac{1}{m} \cos m(t - u_j) + \frac{1}{2M} \cos M(t - u_j) \right\}.$$

Wir notieren jetzt die Integralgleichungen in der parametrisierten Form

$$B_c(z_c, p) = w_c(z_c) \tag{8.4a}$$

$$B_1(z_c, p) = w_1, \tag{8.4b}$$

um die Abhängigkeit der Operatoren von der Parametrisierung des Schlitzes zu verdeutlichen.

8.2.2 Fréchet-Ableitungen

Wir möchten das System von Integralgleichungen mit einem Newton-Verfahren lösen, da die auftretenden Operatoren nichtlinear sind, weil sie von Γ abhängen. Dazu definieren wir zuerst eine Verallgemeinerung des Begriffs der Differenzierbarkeit auf Operatoren zwischen Banachräumen.

Definition 8.4 Seien X und Y Banachräume. Eine Abbildung $F : \mathcal{D}(F) \subset X \rightarrow Y$ heißt *Fréchet-differenzierbar* in einem Punkt $x \in \mathcal{D}(F)$, falls es eine offene Kugel $B_r(x) \subset \mathcal{D}(F)$ und einen linearen Operator $D \in \mathcal{L}(X, Y)$ gibt mit

$$\lim_{\substack{\|h\| \rightarrow 0 \\ h \in B_r(0)}} \frac{\|F(x+h) - F(x) - Dh\|_Y}{\|h\|_X} = 0.$$

Der Operator $F'(x) := D$ heißt *Fréchet-Ableitung* oder *Linearisierung* von F in x . Die Abbildung F heißt *Fréchet-differenzierbar* in der offenen Menge $U \subset \mathcal{D}(F)$, wenn sie in allen Punkten aus U eine Fréchet-Ableitung besitzt. Ist die Abbildung $F' : U \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ stetig, so heißt F *stetig Fréchet-differenzierbar* in U .

Wir benötigen also noch die Fréchet-Ableitungen der Operatoren bezüglich der Parametrisierung des Schlitzes. Wir erhalten sie durch formelles Differenzieren der Kerne nach z_c (siehe [Pot94]). Die Fréchet-Ableitung des Operators B_1 in Richtung ζ_c ist dann für $t \in [0, 2\pi]$ gegeben durch

$$\begin{aligned} B'_1(z_c, p; \zeta_c)(t) = & \\ & \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\mu_c(\tau) \cdot [z_1(t) - z_c(\tau)][z_1(t) - z_c(\tau)] \cdot \zeta_c(\tau)}{|z_1(t) - z_c(\tau)|^4} p(z_c(\tau)) \sin \tau d\tau \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{[\zeta'_c(\tau)]^\perp \cdot [z_1(t) - z_c(\tau)] - \mu_c(\tau) \cdot \zeta_c(\tau)}{|z_1(t) - z_c(\tau)|^2} p(z_c(\tau)) \sin \tau d\tau. \end{aligned}$$

Der Kern dieses Integraloperators ist natürlich glatt. Für die Fréchet-Ableitung des Operators B_c berechnen wir für $t \in [0, \pi]$:

$$\begin{aligned} B'_c(z_c, p; \zeta_c)(t) = & \\ & \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \left\{ \frac{\zeta'_c(t) \cdot [z_c(t) - z_c(\tau)]}{|z_c(t) - z_c(\tau)|^2} + \frac{z'_c(t) \cdot [\zeta_c(t) - \zeta_c(\tau)]}{|z_c(t) - z_c(\tau)|^2} \right\} p'(z_c(\tau)) \sin \tau d\tau \\ & - \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{z'_c(\tau) \cdot [z_c(t) - z_c(\tau)][\zeta_c(t) - \zeta_c(\tau)] \cdot [z_c(t) - z_c(\tau)]}{|z_c(t) - z_c(\tau)|^4} p'(z_c(\tau)) \sin \tau d\tau. \end{aligned}$$

In dem hier vorliegenden Fall eines Geradenstücks verschwindet der Operator identisch, da sich der Operator B_c analog zu Abschnitt 4.2.2 durch die dort eingeführten Operatoren T_0 und A darstellen lässt, wobei T_0 nicht von der Parametrisierung des Schlitzes abhängt und A für den Fall eines Geradenstücks identisch verschwindet.

Die Ableitung von w_c ist gegeben durch

$$w'_c(z_c; \zeta_c)(t) = \left(\begin{array}{l} \text{grad} \frac{\partial w(t)}{\partial z_{c,1}(t)} \cdot \zeta_c(t) \\ \text{grad} \frac{\partial w(t)}{\partial z_{c,2}(t)} \cdot \zeta_c(t) \end{array} \right) \cdot \mu_c(t) \\ + \text{grad} w(t) \cdot \left(\frac{[\zeta'_c(t)]^\perp}{|z'_c(t)|} - \mu_c(t) \frac{\zeta'_c(t) \cdot z'_c(t)}{|z'_c(t)|^3} \right)$$

und hat ebenfalls einen glatten Kern.

Die Fréchet-Ableitung von w_1 bezüglich z_c ist offensichtlich 0.

8.3 Iterationsschema

Da die Operatoren B_c und B_1 linear bezüglich p sind, ergibt sich aus der Linearisierung von (8.4a) und (8.4b)

$$B_c(z_c, p) + B_c(z_c, \psi) + B'_c(z_c, p; \zeta_c) = w_c(z_c) + w'_c(z_c; \zeta_c) \quad (8.5a)$$

$$B_1(z_c, p) + B_1(z_c, \psi) + B'_1(z_c, p; \zeta_c) = w_1. \quad (8.5b)$$

Mit gegebenen aktuellen Approximationen an z_c und p muss das System bezüglich ψ und ζ_c gelöst werden, um das Update $p + \psi$ der Funktionswerte und $z_c + \zeta_c$ der Parametrisierung des Schlitzes zu erhalten. Diese Prozedur wird dann iteriert. Die Schlechtgestellttheit des Problems erfordert natürlich eine Regularisierungsmethode. Wir werden hier die Tikhonov-Regularisierung anwenden.

Um eine Anfangslösung für z_c zu erhalten, kann man zum Beispiel das Verfahren aus Kapitel 7 anwenden. Mit dieser Anfangslösung wird dann die schlecht gestellte Operatorgleichung

$$B_1(z_c, p) = w_1$$

gelöst, um eine Anfangslösung für p zu erhalten. Nun kann die Iteration mit dem Lösen der Gleichungen (8.5a) und (8.5b) gestartet werden.

8.4 Numerische Methode

Als endlichdimensionalen Ansatzraum für die Updates $\zeta(s)$ wählen wir den Raum der Polynome vom Grad ≤ 1 auf dem Intervall $[-1, 1]$, da wir ja wissen,

daß der Schlitz die Form eines Geradenstücks besitzt. Nach Durchführung der Cosinus-Substitution erhalten wir also

$$\zeta_c(t) = (a_0^1 + a_1^1 \cos t, a_0^2 + a_1^2 \cos t) \quad t \in [0, \pi].$$

Um die Integraloperatoren aus (8.5a) und (8.5b) zu approximieren, wählen wir $M + 1$ äquidistant verteilte Quadraturpunkte

$$t_j := \frac{i\pi}{M}, \quad j = 0, \dots, M$$

für die Integration über Γ und $2M$ äquidistant verteilte Quadraturpunkte

$$u_i := \frac{i\pi}{M}, \quad i = 0, \dots, 2M - 1$$

für die Integration über ∂D und nähern die Integrale durch die zusammengesetzte Trapezregel an. Um ein voll diskretes Verfahren zu erhalten, benutzen wir dieselben $M + 1$ Punkte als Kollokationspunkte. Wir erhalten also ein $(3M + 1) \times (M + 1 + 4)$ -Gleichungssystem für die vier Koeffizienten a_i^j , $i = 0, 1, j = 1, 2$ und $M + 1$ Funktionswerte $p(z_c(t_0)), \dots, p(z_c(t_M))$.

8.5 Ergebnisse numerischer Experimente

In diesem Abschnitt werden wir einige Ergebnisse der numerischen Experimente präsentieren. Wir parametrisieren dazu den äußeren Rand ∂D durch die Ellipse

$$\partial D := \{(2 \cos t, \sin t), \quad t \in [0, 2\pi]\}$$

und den Schlitz durch

$$\Gamma := \{(0.5t, 0.2t), \quad t \in [-1, 1]\}.$$

Als Dirichlet-Randwerte zur Lösung des direkten Problems wählen wir auf ∂D

$$f(z_1(t)) := z_{1,1}(t)^2 - z_{1,2}(t)^2, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Wir bereits in Abschnitt 7.3 beschrieben, lösen wir das direkte Problem numerisch, indem wir 256 Stützstellen auf ∂D und doppelt so viele auf Γ benutzen.

Da die Schlechtgestellttheit der Gleichungen (8.2a) und (8.2b) sich auf die linearisierten Gleichungen (8.5a) und (8.5b) vererbt, wenden wir auf die beiden

Gleichungen Tikhonov-Regularisierung mit Regularisierungsparametern α für die erste und β für die zweite Gleichung an.

Als Abbruchkriterium für die Iteration wählen wir

$$\frac{\|\zeta_c\|}{\|z_c\|} < \delta,$$

wobei $\delta > 0$ eine vorgegebene Toleranz ist.

Die folgenden Abbildungen zeigen die Rekonstruktionen für $M = 16$, $\alpha = 10^{-4}$, $\beta = 10^{-2}$ und $\delta = 10^{-2}$ für exakte Daten f und g . Als Startlösung für den Schlitz wurde

$$\{(0.4t, 0), \quad t \in [-1, 1]\}$$

gewählt. Die Startlösung wird durch die gepunktete, die wahre Lösung durch die gestrichelte und die Rekonstruktion durch die durchgezogene Linie dargestellt.

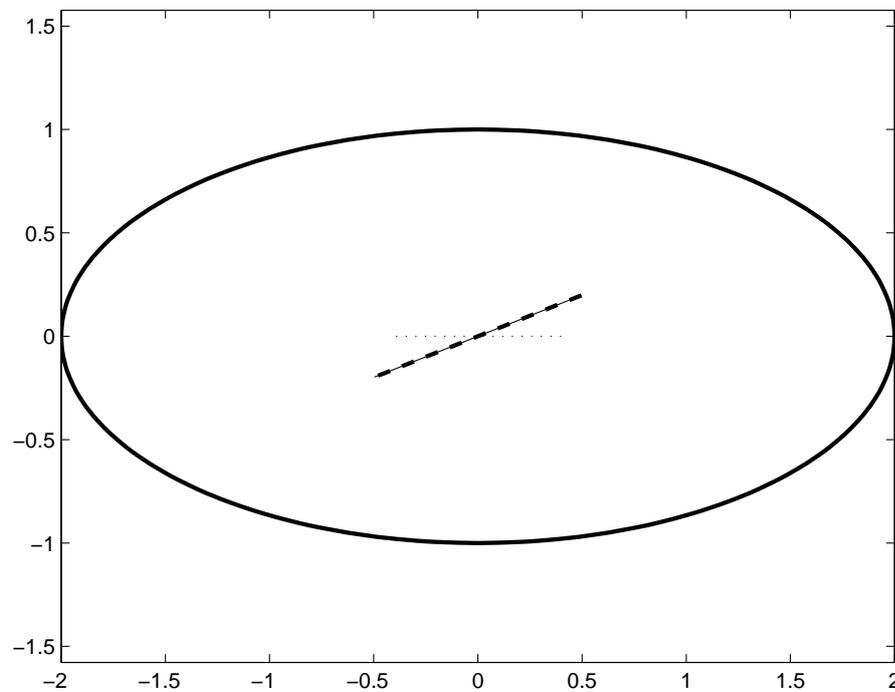


Abbildung 8.1: Rekonstruktion nach 3 Iterationen

Tabelle 8.1: Rekonstruktion mit exakten Daten

a	Rekonstruktion	wahre Lösung
a_0^1	-0.00000000589	0.0
a_1^1	0.49709975057	0.5
a_0^2	0.00000000103	0.0
a_1^2	0.19765363289	0.2

Bei Erhöhung der Stützstellenzahl auf 32 ergibt sich mit $\alpha = 10^{-5}$ und unter Beibehaltung der restlichen Vorgaben folgendes Ergebnis:

Tabelle 8.2: Rekonstruktion mit exakten Daten

a	Rekonstruktion	wahre Lösung
a_0^1	-0.00000002678	0.0
a_1^1	0.49846655210	0.5
a_0^2	0.00000000504	0.0
a_1^2	0.19719477351	0.2

Auch durch Erhöhung der Stützstellenzahl scheint keine wesentliche Verbesserung zu erzielen zu sein.

Mit gestörten Daten war leider keine stabile Rekonstruktion möglich. Bei den numerischen Tests war zu beobachten, dass die stabile Lösung der Gleichung (8.5a) nur bei einer sehr exakten Näherung an den Sprung p möglich ist. Bei gestörten Daten war es aber nicht möglich, p in der benötigten Weise zu ermitteln.

8.6 Zusammenfassung

Die numerischen Ergebnisse zeigen, dass das in diesem Kapitel vorgestellte Verfahren dem Verfahren aus Kapitel 7 deutlich überlegen ist, was die Exaktheit der Rekonstruktion angeht. Allerdings ist dieses Verfahren sehr von den Regularisierungsparameter und der Startlösung abhängig.

Das von Andrieux und Ben Abda vorgestellte Verfahren bestimmt dagegen exakt und stabil die Gerade, in der der gesuchte Schlitz liegt, die einzige Approximation tritt bei der Bestimmung des Trägers der Fourier-Reihe auf. Das Verfahren ist

nicht Laufzeitintensiv, so dass es sich anbietet, dieses Verfahren zum Finden einer Startlösung für das zweite vorgestellte Verfahren zu verwenden.

Es erscheint durchaus möglich, das in diesem Kapitel vorgestellte Verfahren nicht nur für ein Geradenstück zu betrachten, sondern durch Erweiterung des Ansatzraums auch andere Schlitze zu rekonstruieren. In [IK05] wurde das Verfahren aus [KR05] bereits auf den Fall eines nicht leitenden Einschlusses und auf den Fall eines perfekt leitenden Schlitzes übertragen.

Das Verfahren von Andrieux und Ben Abda lässt sich allerdings nicht auf andere Geometrien übertragen.

Literaturverzeichnis

- [ABA96] ANDRIEUX, Stephané ; BEN ABDA, Amel: Identification of planar cracks by complete overdetermined data: inversion formulae. In: *Inverse Problems* 12 (1996), S. 553–563
- [BBAJ97] BANNOUR, Tarek ; BEN ABDA, Amel ; JAOUA, Mohamed: A semi-explicit algorithm for the reconstruction of 3D planar cracks. In: *Inverse Problems* 13 (1997), S. 899–917
- [Hac89] HACKBUSCH, Wolfgang: *Integralgleichungen: Theorie und Numerik*. Teubner, Stuttgart, 1989
- [IK05] IVANYSHYN, Olha ; KRESS, Rainer: Nonlinear integral equations for solving inverse boundary value problems for inclusions and cracks. In: *Jour. Integral Equations and Appl.* (to appear) (2005)
- [Jör70] JÖRGENS, Konrad: *Lineare Integraloperatoren*. Teubner, Stuttgart, 1970
- [KR05] KRESS, Rainer ; RUNDELL, William: Nonlinear integral equations and iterative solution for an inverse boundary value problem. In: *Inverse Problems* 21 (2005), S. 1207–1223
- [Kre05] KRESS, Rainer: *Funktionalanalysis*. Vorlesungsskript, WS 2004/05
- [Kre98] KRESS, Rainer: *Numerical Analysis*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1998
- [Kre99] KRESS, Rainer: *Linear Integral Equations*. 2nd. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1999
- [Lan03] LANGER, Stefan: *Integralgleichungsmethode für das Neumann Problem in einem Gebiet mit Schlitz*, Göttingen, Diplomarbeit, 2003
- [Mar68] MARTENSEN, Erich: *Potentialtheorie*. Teubner, Stuttgart, 1968
- [Mön96] MÖNCH, Lars: On the numerical solution of the direct scattering problem for an open sound-hard arc. In: *Journal of Computational and Applied Mathematics* 71 (1996), S. 343–356

- [OD96] ODEN, J. T. ; DEMKOWICZ, Leszek F.: *Applied Functional Analysis*. CRC Press, New York, 1996
- [Pot94] POTTHAST, Roland: Fréchet differentiability of boundary integral operators in invers acoustic scattering. In: *Inverse Problems* 10 (1994), S. 431–447
- [Rie03] RIEDER, Andreas: *Keine Probleme mit Inversen Problemen*. Friedr. Vieweg & Sohn Verlag/GWV Fachverlage GmbH, Wiesbaden, 2003

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen bedanken, die mich während meines Studiums und bei der Anfertigung meiner Diplomarbeit unterstützt und damit direkt oder indirekt zu ihrem Gelingen beigetragen haben.

Mein Dank gilt in erster Linie Herrn Prof. Dr. Rainer Kreß für die interessante Themenstellung, die hervorragende Betreuung während der Entstehung der Arbeit und dafür, dass er mit seinen guten Vorlesungen und seiner Begeisterung mein Interesse für die numerische Mathematik geweckt hat.

Ich danke meinen Eltern dafür, dass sie mir dieses Studium ermöglicht haben, mir vieles mit auf den Weg gegeben haben und immer ein offenes Ohr für meine Sorgen und Probleme haben.

Weiterhin danke ich Christian Schuff für die vielen Diskussionen, Denkanstöße und kritischen Korrekturen.

Ich möchte Kira Voß danken, die mir zwar nicht mathematisch, dafür aber moralisch in besonderem Maße die ganze Zeit zur Seite gestanden hat.

Ich danke all denen, die mich in dieser Zeit unterstützt haben, die ich hier aber nicht namentlich erwähnt habe.