

Numerische Lösung von Integralgleichungen für Risse

Diplomarbeit

vorgelegt von
Christian Schuft
aus
Steißfurt

angefertigt im
Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
der Georg-August-Universität Göttingen
2006

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Grundlagen	3
2.1	Allgemeine Voraussetzungen	3
2.2	Funktionalanalytische Grundlagen	5
2.3	Die Hölderräume $C^{0,\alpha}$ und $C^{k,\alpha}$	7
3	Potenzialtheorie	11
3.1	Harmonische Funktionen	11
3.2	Die Green'schen Formeln	13
3.3	Einfach- und Doppelschichtpotenzial über eine geschlossene Kurve	14
3.3.1	Randintegraloperatoren	17
3.4	Einfachschichtpotenzial über einen offenen Bogen	21
4	Formulierung des Problems	23
5	Eindeutigkeit und Existenz	25
5.1	Eindeutigkeit	25
5.2	Existenz	26
6	Lösungsverfahren	35
6.1	Verfahren mit einer Integralgleichung erster Art	35
6.2	Verfahren mit einer Integralgleichung zweiter Art	36
6.2.1	Die Randintegraloperatoren auf dem Einheitskreis	36
6.2.2	Modifizierung der Normalableitung des Doppelschichtpotenzials	38
6.2.3	Die Integralgleichung zweiter Art	41
7	Numerische Behandlung	43
7.1	Trigonometrische Interpolation	44
7.2	Ein Kollokationsverfahren	47
7.3	Quadraturverfahren	49
7.3.1	Quadraturformel für den stark singulären Operator	50

7.3.2	Quadraturformel für den kompakten Operator	52
7.4	Das numerische Verfahren	55
7.5	Konvergenz- und Fehleranalyse	57
7.6	Numerik der Integralgleichung erster Art	68
7.6.1	Das numerische Verfahren	69
7.6.2	Vergleich mit der näherungsweise Lösung der Integralgleichung zweiter Art	70
7.6.3	Konvergenz- und Fehleranalyse	71
7.7	Effizienzvergleich	73
7.8	Stabilität	74
7.9	Numerische Beispiele	75
8	Fazit und Ausblick	81
	Literaturverzeichnis	83

Kapitel 1

Einleitung

Wir wollen in dieser Arbeit die mathematische Behandlung des Dirichletproblems für die Laplacegleichung im Außengebiet eines Bogens im \mathbb{R}^2 betrachten. Ein solches Randwertproblem tritt zum Beispiel in der Elektrostatik auf.

Den offenen Bogen, welcher einen geerdeten dünnen Leiter im \mathbb{R}^2 repräsentiert, bezeichnen wir mit Γ . Wenn wir auf Γ ein elektrisches Feld f durch Punktquellen außerhalb von Γ erzeugen, dann kann ein elektrostatisches Potenzial u im \mathbb{R}^2 durch das folgende Randwertproblem zur Laplacegleichung modelliert werden:

Gesucht wird eine beschränkte, in \mathbb{R}^2 stetige und in $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ harmonische Funktion u zu der Dirichletrandbedingung

$$u = f \quad \text{auf } \Gamma$$

mit vorgegebener Funktion f .

Zur Lösung dieses Problems kann ein Einfachschichtpotenzialansatz gemacht werden, der auf eine zu lösende Integralgleichung erster Art führt.

Da die bei der näherungsweise Lösung dieser Integralgleichung entstehenden linearen Gleichungssysteme numerisch instabil sind und deren Konditionszahlen somit kritische Werte erreichen, wurde in [JR03] vorgeschlagen (und in [JR04] modifiziert), die Integralgleichung erster Art durch Regularisierung in eine numerisch stabile Integralgleichung zweiter Art zu überführen und diese dann beispielsweise durch Nyströmverfahren mit Tschebyscheffknoten numerisch zu lösen.

Ziel dieser Arbeit ist es, die Existenzanalyse und auch die numerische Lösung gegenüber [JR03] zu vereinfachen. Dies werden wir durch konsequente Anwendung der Cosinus-Substitution (siehe dazu [Kre99], Section 7.6) erreichen.

Wir werden das obige physikalisch motivierte Problem in Kapitel 4 als abstraktes mathematisches Problem formulieren, bevor wir uns damit beschäftigen werden, eine Lösungstheorie aufbauend auf einem Einfachschichtpotenzialansatz zu entwickeln.

Danach beschäftigen wir uns mit der äquivalenten Umformung der so entstandenen Integralgleichung erster Art in eine Integralgleichung zweiter Art und im Anschluss mit der numerischen Behandlung beider äquivalenter Lösungsverfahren. Dabei untersuchen wir ihre Konvergenzverhalten, stellen einen Effizienzvergleich an und überprüfen letztlich die theoretischen Ergebnisse an einigen numerischen Beispielen, die mit den vorgestellten Methoden berechnet worden sind.

Zunächst aber wollen wir funktionalanalytische und potenzialtheoretische Grundlagen für die Überlegungen in den Kapiteln 5 und 6 zusammenstellen.

Kapitel 2

Grundlagen

In diesem Kapitel wollen wir funktionalanalytische Grundlagen schaffen, die in der in Kapitel 4 gestellten Aufgabe zur Anwendung kommen.

Der Existenzbeweis in Kapitel 5 wird mit Hilfe der *Riesz*-Theorie geführt, die wir an dieser Stelle ebenfalls entwickeln wollen. Auf dem Weg dorthin werden wir Eigenschaften kompakter Operatoren, die in der *Riesz*-Theorie von Bedeutung sind, angeben. Da wir uns im Verlauf der Arbeit mit der beschränkten Invertierbarkeit von Integraloperatoren beschäftigen wollen, werden wir grundlegende Resultate dazu festhalten.

Weiterhin werden wir Hölderräume betrachten, da die Randdaten des Problems aus Kapitel 4 sowie die zu ermittelnden Dichten aus diesen sein werden.

Wir beginnen jedoch mit allgemeinen Voraussetzungen an die von uns betrachteten Geometrien.

2.1 Allgemeine Voraussetzungen

Das in Kapitel 4 formulierte Problem ist wesentlich davon abhängig, dass wir uns mit einem *offenen Bogen* im \mathbb{R}^2 beschäftigen. Dazu wollen wir zuerst festhalten, was wir darunter verstehen:

Definition 2.1 Eine Teilmenge $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ heißt *Bogen der Klasse C^k* , $k \in \mathbb{N}$, wenn

$$\Gamma = \{x(s) : s \in [-1, 1]\}$$

ist, wobei $x : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine injektive und k -mal stetig differenzierbare Funktion ist mit $|x'(s)| \neq 0$ für alle $s \in [-1, 1]$. Wir nennen x eine *reguläre Parametrisierung*.

Weiterhin bezeichnen wir die Endpunkte $x(-1)$ und $x(1)$ von Γ mit z_{-1} bzw. z_1 sowie das Innere des Bogens Γ mit $\Gamma_0 := \Gamma \setminus \{z_{-1}, z_1\}$.

Die Orientierung des Bogens ergibt sich aufgrund der Durchlaufrichtung von z_{-1} nach z_1 . Wir bezeichnen den durch diese Orientierung gegebenen Einheits-tangentialvektor an Γ an der Stelle $x(s)$ mit

$$t(x(s)) = \frac{1}{|x'(s)|} x'(s).$$

Den Einheitsnormalenvektor ν an Γ definieren wir durch

$$\nu(x(t)) := \frac{1}{|x'(t)|} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} x'(t), \quad t \in [-1, 1]. \quad (2.1)$$

Wir möchten festhalten, dass man stets ein Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ und eine Parametrisierungsfunktion

$$\tilde{x} : [a, b] \rightarrow \Gamma$$

von Γ finden kann, so dass $|\tilde{x}'(s)| = 1$ für alle $s \in [a, b]$. Man nennt dann Γ *bezüglich seiner Bogenlänge parametrisiert*. Mit $|\Gamma|$ wollen wir weiterhin die Länge des Bogens Γ bezeichnen, die sich durch

$$|\Gamma| := \int_{-1}^1 |x'(s)| ds$$

berechnet.

Wir benötigen im Folgenden Aussagen über die Regularität des Randes eines einfach zusammenhängenden Gebietes. Dazu definieren wir:

Definition 2.2 Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes, einfach zusammenhängendes Gebiet. Dann heißt für $k \in \mathbb{N}$ der Rand ∂D des Gebiets D *von der Klasse C^k* , falls eine injektive, reguläre, auf ganz \mathbb{R} k -mal stetig differenzierbare 2π -periodische Funktion z existiert, die ∂D parametrisiert, also

$$\partial D = \{z(s) : s \in [0, 2\pi)\}$$

gilt mit $|z'(s)| \neq 0$ für alle $s \in [0, 2\pi)$.

Die Parametrisierungsfunktion z soll dabei linksorientiert sein, womit der nach außen weisende Einheitsnormalenvektor ν an ∂D durch

$$\nu(z(s)) := \frac{1}{|z'(s)|} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} z'(s), \quad s \in [0, 2\pi)$$

gegeben ist. Mit t bezeichnen wir den Einheitstangentenvektor an ∂D , den wir durch

$$t(z(s)) := \frac{1}{|z'(s)|} z'(s)$$

erhalten.

2.2 Funktionalanalytische Grundlagen

Der in Kapitel 5 geführte Existenzbeweis baut darauf, das Hauptresultat der *Riesz*-Theorie anzuwenden. Dieses macht Aussagen über Operatorgleichungen zweiter Art in normierten Räumen. Die dabei behandelten Operatoren sind kompakt. Daher wollen wir nun mit Eigenschaften von kompakten Operatoren beginnen.

Definition 2.3 Seien X, Y normierte Räume. Ein linearer Operator $A : X \rightarrow Y$ heißt *kompakt*, falls für alle beschränkten Teilmengen $U \subseteq X$ das Bild $A(U) \subseteq Y$ relativ kompakt ist.

Satz 2.4 *Linearkombinationen kompakter Operatoren sind kompakt.*

BEWEIS. Ein Beweis hierzu findet sich in [Kre99], Thm. 2.15. □

Satz 2.5 *Seien X, Y, Z normierte Räume. Seien weiterhin $A : X \rightarrow Y$ und $B : Y \rightarrow Z$ beschränkte, lineare Operatoren. Dann ist das Produkt $BA : X \rightarrow Z$ ein kompakter Operator, falls einer der Operatoren A oder B kompakt ist.*

BEWEIS. Ein Beweis hierzu findet sich in [Kre99], Thm. 2.16. □

Wir wollen noch kurz den Satz von Banach festhalten, bevor wir uns der *Riesz*-Theorie widmen.

Satz 2.6 (Banach) *Seien X und Y Banachräume und sei $A : X \rightarrow Y$ beschränkt und bijektiv. Dann ist der inverse Operator $A^{-1} : Y \rightarrow X$ linear und beschränkt.*

BEWEIS. Ein Beweis hierzu findet sich in [Kre04], Thm. 12.3. □

Nun sind wir in der Lage das Hauptresultat der *Riesz*-Theorie anzugeben.

Satz 2.7 *Sei $A : X \rightarrow X$ ein kompakter Operator auf einem normierten Raum X . Der Operator $I - A$ ist genau dann injektiv, wenn er surjektiv ist. Falls er injektiv und somit auch bijektiv ist, dann ist der inverse Operator $(I - A)^{-1}$ beschränkt.*

BEWEIS. Ein Beweis hierzu findet sich in [Kre99], Thm. 3.4. \square

Korollar 2.8 Sei $A : X \rightarrow X$ ein kompakter Operator auf einem normierten Raum X . Falls die homogene Gleichung

$$\varphi - A\varphi = 0$$

nur die triviale Lösung $\varphi = 0$ besitzt, dann hat für jedes $f \in X$ die inhomogene Gleichung

$$\varphi - A\varphi = f$$

genau eine Lösung $\varphi \in X$ und diese Lösung hängt stetig von der rechten Seite ab.

BEWEIS. Ein Beweis hierzu findet sich in [Kre99], Cor. 3.5. \square

Korollar 2.9 Seien X, Y normierte Räume und $S : X \rightarrow Y$ ein beschränkter, linearer Operator, der eine beschränkte Inverse $S^{-1} : Y \rightarrow X$ besitzt. Weiterhin sei $A : X \rightarrow Y$ ein kompakter Operator. Dann besitzt die Operatorgleichung

$$S\varphi - A\varphi = f \tag{2.2}$$

für jede rechte Seite $f \in Y$ genau eine Lösung $\varphi \in X$, falls die Operatorgleichung

$$S\varphi - A\varphi = 0$$

nur die triviale Lösung $\varphi = 0$ besitzt. Die Lösung der Gleichung (2.2) hängt stetig von der rechten Seite ab.

BEWEIS. Ein Beweis hierzu findet sich in [Kre99], Cor. 3.6. \square

In dieser Arbeit werden wir Integraloperatoren behandeln. Dazu wollen wir in den nächsten Sätzen eine Verbindung mit den soeben eingeführten kompakten Operatoren schaffen.

Satz 2.10 Seien G_1, G_2 nichtleere, kompakte, Jordan-messbare Mengen, die mit dem Abschluss ihres Inneren übereinstimmen. Sei $K : G_1 \times G_2 \rightarrow \mathbb{C}$ stetig. Dann heißt der lineare Operator $A : C(G_2) \rightarrow C(G_1)$ gegeben durch

$$(A\varphi)(x) := \int_{G_2} K(x, y)\varphi(y) ds(y), \quad \varphi \in C(G_2), x \in G_1 \tag{2.3}$$

Integraloperator mit stetigem Kern K . Er ist ein beschränkter Operator mit

$$\|A\|_\infty := \max_{x \in G_1} \int_{G_2} |K(x, y)| ds(y).$$

BEWEIS. Ein Beweis hierzu findet sich in [Kre99], Thm. 2.8. \square

Satz 2.11 *Der Integraloperator mit stetigem Kern ist ein kompakter Operator von $C(G_2)$ nach $C(G_1)$.*

BEWEIS. Ein Beweis hierzu findet sich in [Kre99], Thm. 2.21. \square

Wir werden sehen, dass bei der Betrachtung des offenen Bogens Γ Integraloperatoren mit *schwach singulärem* Kern auftauchen.

Definition 2.12 Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes, einfach zusammenhängendes Gebiet mit Rand ∂D der Klasse C^2 . Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ kompakt, so dass $G \cap \partial D \neq \emptyset$. Sei $K : G \times \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ definiert und stetig für alle $x \in G$ und $y \in \partial D$ mit $x \neq y$. Dann heißt K *schwach singulär*, falls Konstanten $M > 0$ und $\alpha \in (0, 1]$ existieren, so dass

$$|K(x, y)| \leq M|x - y|^{\alpha-1}$$

für alle $x \in G, y \in \partial D$ mit $x \neq y$ gilt.

Satz 2.13 *Seien D und G wie in Definition 2.12, dann ist der durch (2.3) definierte Integraloperator mit schwach singulärem Kern $K : G \times \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ ein kompakter Operator von $C(\partial D)$ nach $C(G)$.*

BEWEIS. Ein Beweis hierzu findet sich in [Hee03], Satz 2.11. \square

2.3 Die Hölderräume $C^{0,\alpha}$ und $C^{k,\alpha}$

Der Existenznachweis einer Lösung des uns gestellten Problems wird sich wesentlich auf die Theorie gleichmäßig hölderstetiger Funktionen stützen. Daher wollen wir diese im Folgenden kurz einführen.

Definition 2.14 Eine reellwertige Funktion φ , die auf einer Menge $G \subseteq \mathbb{R}^m$ definiert ist, heißt *gleichmäßig hölderstetig mit Hölderexponent $\alpha \in (0, 1]$* , falls eine Konstante $C > 0$ existiert, so dass

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq C|x - y|^\alpha$$

für alle $x, y \in G$ gilt.

Der durch $C^{0,\alpha}(G)$ bezeichnete lineare Raum aller beschränkten und gleichmäßig hölderstetigen Funktionen mit Hölderexponent α heißt *Hölderraum*.

Satz 2.15 *Der Hölderraum $C^{0,\alpha}(G)$ wird durch die Norm*

$$\|\varphi\|_{0,\alpha} := \|\varphi\|_{\infty,G} + \sup_{\substack{x,y \in G \\ x \neq y}} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

zu einem Banachraum.

BEWEIS. Ein Beweis hierzu findet sich in [Kre99], Thm. 7.2. □

Wir definieren induktiv den Raum $C^{k,\alpha}(\mathbb{R})$ für $k \in \mathbb{N}$ wie folgt:

Definition 2.16 Eine Funktion $\varphi \in C^k(\mathbb{R})$ für $k \in \mathbb{N}$ heißt *k-mal gleichmäßig hölderstetig differenzierbar mit Hölderexponent $\alpha \in (0, 1]$* , falls für die Ableitung von φ gilt:

$$\varphi' \in C^{k-1,\alpha}(\mathbb{R}).$$

Der lineare Raum der k -mal gleichmäßig hölderstetig differenzierbaren Funktionen mit beschränkter Ableitung wird mit $C^{k,\alpha}(\mathbb{R})$ bezeichnet.

Satz 2.17 *Der Hölderraum $C^{k,\alpha}(\mathbb{R})$ wird mit Hilfe der Norm*

$$\|\varphi\|_{k,\alpha} := \|\varphi\|_k + \|\varphi^{(k)}\|_{0,\alpha}$$

zu einem Banachraum. Die hierbei auftretende Norm $\|\varphi\|_k$ ist definiert durch

$$\|\varphi\|_k := \sum_{j=0}^{k-1} \|\varphi^{(j)}\|_{\infty}.$$

BEWEIS. Vgl. [Alt92], Lemma 1.8. □

Korollar 2.18 *Die Räume $C_{\text{ger}}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$ (bzw. $C_{\text{ger}}^{k,\alpha}[0, 2\pi]$) der 2π -periodischen, geraden, gleichmäßig hölderstetigen (bzw. k -mal hölderstetig differenzierbaren) Funktionen sind Banachräume.*

BEWEIS. Die Räume $C_{\text{ger}}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$, bzw. $C_{\text{ger}}^{k,\alpha}[0, 2\pi]$ bilden abgeschlossene Unterräume in $C^{0,\alpha}(\mathbb{R})$ bzw. in $C^{k,\alpha}(\mathbb{R})$. Damit sind sie nach Abschnitt 1.2 in [Kre99] vollständig, also Banachräume. □

Für $0 < \alpha < \beta \leq 1$ kann man leicht sehen, dass jede Funktion $\varphi \in C^{0,\beta}(G)$ auch in $C^{0,\alpha}(G)$ enthalten ist. Für diese Einbettung haben wir die folgenden Kompaktheitseigenschaften:

Satz 2.19 Sei $0 < \alpha < \beta \leq 1$ und G kompakt. Dann sind die Einbettungsoperatoren

$$I^\alpha : C^{0,\alpha}(G) \rightarrow C(G)$$

und

$$I^{\alpha,\beta} : C^{0,\beta}(G) \rightarrow C^{0,\alpha}(G)$$

kompakt.

BEWEIS. Ein Beweis hierzu findet sich in [Kre99], Thm. 7.4. □

Korollar 2.20 Der Einbettungsoperator

$$I^{1,\alpha} : C^{1,\alpha}(G) \rightarrow C(G)$$

ist ebenfalls kompakt.

BEWEIS. Offensichtlich ist die Einbettung

$$\tilde{I} : C^{1,\alpha}(G) \rightarrow C^{0,\alpha}(G)$$

beschränkt. Da das Produkt eines beschränkten und eines kompakten Operators nach Satz 2.5 kompakt ist, folgt aus Satz 2.19 durch $I^{1,\alpha} := I^\alpha \tilde{I}$ die Aussage des Satzes. □

Letztlich wollen wir noch den Raum $C^{1,\alpha}(\Gamma)$ einführen, in dem sich die rechte Seite des von uns betrachteten Problems befindet. Dazu wollen wir die *Differenziation nach der Bogenlänge s* definieren durch

$$\varphi'(x) := \frac{\partial \varphi}{\partial s}(x) := \frac{d(\varphi \circ \tilde{x})(s)}{ds}.$$

Diese Definition überträgt sich in analoger Weise auf Gebiete mit hinreichend glattem Rand.

Nun können wir analog zur Definition 2.16 den Raum $C^{1,\alpha}(\Gamma)$ einführen. Mit der Norm

$$\|\varphi\|_{1,\alpha} := \|\varphi\|_\infty + \|\varphi'\|_{0,\alpha}$$

wird $C^{1,\alpha}(\Gamma)$ zu einem Banachraum.

Kapitel 3

Potenzialtheorie

Die Potenzialtheorie beschäftigt sich mit Randwertproblemen für die Laplacegleichung. Die Lösungen dieser Probleme, die so genannten harmonischen Funktionen, stellen zum Beispiel zeitunabhängige Temperaturverteilungen, Potentiale von elektrostatischen und magnetostatischen Feldern und Geschwindigkeitspotentiale von inkompressiblen wirbelfreien Strömungen dar.

Wir wollen in diesem Kapitel einige Ansatzfunktionen und Eigenschaften dieser Funktionen vorstellen, die zur Lösung der obigen Randwertproblemen genutzt werden können.

3.1 Harmonische Funktionen

Zuerst werden wir einige grundlegende Eigenschaften harmonischer Funktionen darstellen.

Definition 3.1 Eine zweimal stetig differenzierbare, reellwertige Funktion u auf einem Gebiet $G \subset \mathbb{R}^2$ heißt harmonisch, wenn sie die Laplace'sche Differentialgleichung

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } G$$

erfüllt, wobei

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}.$$

Wir wollen nun die Grundlösung zur Laplacegleichung im \mathbb{R}^2 einführen und einige wichtige Eigenschaften festhalten.

Satz 3.2 Die Funktion $\Phi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, für $x \neq y$ definiert durch

$$\Phi(x, y) := \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x - y|},$$

heißt Grundlösung der Laplacegleichung im \mathbb{R}^2 . Für $x, y \in \mathbb{R}^2$ und $x \neq y$ gilt

$$\text{grad}_x \Phi(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \frac{x - y}{|x - y|^2}, \quad (3.1)$$

$$\text{grad}_y \Phi(x, y) = -\text{grad}_x \Phi(x, y). \quad (3.2)$$

Für festes $y \in \mathbb{R}^2$ ist Φ harmonisch bezüglich x in $\mathbb{R}^2 \setminus \{y\}$.

BEWEIS. Sei $y \in \mathbb{R}^2$ fest und $x \neq y$. Eine einfache Rechnung ergibt

$$\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial x_i} = -\frac{1}{2\pi} \frac{x_i - y_i}{|x - y|^2}, \quad i = 1, 2,$$

und

$$\frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x_i^2} = -\frac{1}{2\pi} \frac{|x - y|^2 - 2(x_i - y_i)^2}{|x - y|^4}, \quad i = 1, 2.$$

Damit folgt für die Gradienten

$$\text{grad}_x \Phi(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \frac{x - y}{|x - y|^2}$$

und nach analoger Rechnung

$$\text{grad}_y \Phi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \frac{x - y}{|x - y|^2}.$$

Des Weiteren haben wir

$$\frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x_2^2} = -\frac{1}{2\pi} \frac{2|x - y|^2 - 2(x_1 - y_1)^2 - 2(x_2 - y_2)^2}{|x - y|^4} = 0,$$

also dass Φ bezüglich x harmonisch ist. □

Satz 3.3 Harmonische Funktionen sind analytisch.

BEWEIS. Ein Beweis hierzu findet sich in [Kre99], Thm. 6.6. □

Satz 3.4 (Mittelwertsatz) Sei u eine in der Kreisscheibe $B(x_0, r) \subseteq \mathbb{R}^2$ harmonische und in $B[x_0, r]$ stetige Funktion. Dann gilt

$$u(x_0) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B(x_0, r)} u(y) ds(y).$$

BEWEIS. Ein Beweis hierzu findet sich in [Kre99], Thm. 6.7. \square

Satz 3.5 (Maximum-Minimum-Prinzip) *Eine in einem Gebiet harmonische und nicht konstante Funktion besitzt kein Maximum und kein Minimum.*

BEWEIS. Ein Beweis hierzu findet sich in [Kre99], Thm. 6.8. \square

3.2 Die Green'schen Formeln

Dieser Abschnitt dient der Angabe der Green'schen Sätze und Formeln. Wir werden diese unter anderem bei der Entwicklung einiger Eigenschaften der im Abschnitt 3.3 zu behandelnden Randintegraloperatoren benötigen.

Dazu sei $D \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet der Klasse C^2 und ν sei die in das Äußere von D weisende Einheitsnormale an den Rand ∂D . Dann gilt für Funktionen $u \in C^1(\overline{D})$ und $v \in C^2(\overline{D})$ der *erste Green'sche Satz*

$$\int_D \{u\Delta v + \text{grad } u \cdot \text{grad } v\} dx = \int_{\partial D} u \frac{\partial v}{\partial \nu} ds. \quad (3.3)$$

Für $u, v \in C^2(\overline{D})$ gilt der *zweite Green'sche Satz*

$$\int_D (u\Delta v - v\Delta u) dx = \int_{\partial D} \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu} - v \frac{\partial u}{\partial \nu} \right) ds. \quad (3.4)$$

Bemerkung 3.6 Der Beweis der Green'schen Sätze erfolgt durch Anwendung des Gauß'schen Divergenzsatzes. Nach [Erh87], Kapitel VII, Paragraph 2 sind für ein Vektorfeld $F : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}^2$ bereits die Bedingungen $F \in C(\overline{D}) \cap C^1(D)$ und $\int_D |\text{div } F| dx < \infty$ hinreichend für den Divergenzsatz. Damit können wir die Voraussetzung zur Anwendung der Green'schen Sätze abschwächen von $u, v \in C^2(\overline{D})$ auf $u, v \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D)$, wenn u und v harmonisch in D sind.

Durch die soeben gemachte Bemerkung können wir nun den folgenden Satz auch für $u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$ formulieren und auf den Beweis, der für $u \in C^2(\overline{D})$ geführt wurde, verweisen.

Satz 3.7 *Sei $u \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$ harmonisch in D . Dann gilt die Green'sche Darstellungsformel*

$$u(x) = \int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \Phi(x, y) - u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \right\} ds(y), \quad x \in D. \quad (3.5)$$

BEWEIS. Vgl. [Kre99], Thm. 6.5. □

Um äußere Randwertprobleme untersuchen zu können, müssen wir das asymptotische Verhalten harmonischer Funktionen für $|x| \rightarrow \infty$ betrachten. Daher wollen wir die Green'sche Formel auf unbeschränkte Gebiete erweitern. Auch in diesem Fall können wir auf Bemerkung 3.6 zurückgreifen und den folgenden Satz für $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}) \cap C^1(\mathbb{R}^2 \setminus D)$ formulieren und auf den Beweis, der für $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus D)$ geführt wurde, verweisen.

Satz 3.8 Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ ein beschränktes Gebiet mit C^2 -glattem Rand ∂D und nach außen orientierter Einheitsnormale ν an ∂D . Sei $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}) \cap C^1(\mathbb{R}^2 \setminus D)$ eine beschränkte harmonische Funktion. Dann existiert eine Konstante $u_\infty \in \mathbb{R}$, so dass

$$u(x) = u_\infty + \int_{\partial D} \left[u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} - \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \Phi(x, y) \right] ds(y) \quad (3.6)$$

für alle $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ gilt. Weiter sind

$$\int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \nu} ds = 0 \quad (3.7)$$

und die Mittelwerteigenschaft im Unendlichen

$$u_\infty = \frac{1}{2\pi r} \int_{|y|=r} u(y) ds(y) \quad (3.8)$$

für genügend große $r \in \mathbb{R}$ erfüllt.

BEWEIS. Vgl. [Kre99], Thm. 6.10. □

3.3 Einfach- und Doppelschichtpotenzial über eine geschlossene Kurve

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit dem Einfach- und dem Doppelschichtpotenzial über eine geschlossene Kurve. Ziel wird es sein, Randintegraloperatoren aus beiden zu entwickeln und ihre Regularitätseigenschaften darzustellen. Hierbei halten wir uns vor allem an die Darstellung in [Sch96], in der die Aussagen für die Grundleistung zur Helmholtzgleichung im \mathbb{R}^2 gemacht werden. Da die in diesem Abschnitt zitierten Regularitätseigenschaften

für die in dieser Arbeit betrachtete Grundlösung zur Laplacegleichung im \mathbb{R}^2 bewiesen wurden, können wir bei den Beweisen auf [Sch96] verweisen.

Im Verlauf dieses Abschnitts bezeichnen wir mit $D \subset \mathbb{R}^2$ ein beschränktes, einfach zusammenhängendes Gebiet mit zusammenhängendem Rand ∂D der Klasse C^2 .

Weiterhin bezeichnen C_α und $C_{\alpha, \partial D}$ im Folgenden immer positive Konstanten, die von α bzw. von ∂D und α abhängen.

Satz 3.9 Für $\varphi \in C(\partial D)$ heißt

$$u(x) := \int_{\partial D} \Phi(x, y) \varphi(y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D,$$

das Einfachschichtpotenzial und

$$v(x) := \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \varphi(y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \partial D,$$

das Doppelschichtpotenzial mit Dichte φ zur Grundlösung $\Phi(x, y)$ der Laplacegleichung im \mathbb{R}^2 .

Diese Potenziale sind harmonische Funktionen in D und in $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$.

BEWEIS. Da die Grundlösung in $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D} \times \partial D$ und in $D \times \partial D$ nicht singulär ist, kann man Differenziation und Integration in u bzw. v vertauschen. Damit folgt die Aussage aus der Harmonizität der Grundlösung. \square

Wir werden uns in den folgenden Sätzen mit den Sprungbeziehungen der soeben eingeführten Potenziale beschäftigen. Das bedeutet, dass wir ihr Verhalten auf dem Rand ∂D des Gebietes D charakterisieren werden.

Satz 3.10 Es seien $\varphi \in C^{0, \alpha}(\partial D)$ und $0 < \alpha < 1$. Dann lässt sich der Gradient des Einfachschichtpotenzials u gleichmäßig hölderstetig von $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ nach $\mathbb{R}^2 \setminus D$ und von D nach \bar{D} fortsetzen mit den Grenzwerten

$$\text{grad } u_{\pm}(x) = \int_{\partial D} \text{grad}_x \Phi(x, y) \varphi(y) ds(y) \mp \frac{1}{2} \nu(x) \varphi(x), \quad x \in \partial D, \quad (3.9)$$

wobei das Integral als Cauchy-Hauptwert zu verstehen ist.

BEWEIS. Ein Beweis hierzu findet sich in [Kre99], Satz 7.28. \square

Satz 3.11 Das Doppelschichtpotenzial v mit Dichte $\varphi \in C(\partial D)$ lässt sich stetig von $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ nach $\mathbb{R}^2 \setminus D$ und von D nach \bar{D} mit den Grenzwerten

$$v_{\pm}(x) = \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \varphi(y) ds(y) \pm \frac{1}{2} \varphi(x), \quad x \in \partial D, \quad (3.10)$$

fortsetzen, wobei

$$v_{\pm}(x) := \lim_{h \rightarrow +0} u(x \pm h\nu(x))$$

ist und das Integral als uneigentliches Integral existiert.

BEWEIS. Ein Beweis hierzu findet sich in [Kre99], Thm. 6.17. \square

Satz 3.12 Für das Doppelschichtpotenzial v aus Satz 3.11 mit Dichte $\varphi \in C(\partial D)$ gilt:

$$v \in C^{0,\alpha}(\partial D)$$

und

$$\|v\|_{\alpha, \partial D} \leq C_{\alpha, \partial D} \|\varphi\|_{\infty, \partial D}$$

für alle $0 < \alpha < 1$.

BEWEIS. Ein Beweis hierzu findet sich in [Sch96], 2.25. \square

Satz 3.13 Es seien $\varphi \in C^{0,\alpha}(\partial D)$ und $0 < \alpha < 1$. Dann ist das Doppelschichtpotenzial v mit Dichte φ eine auf ∂D gleichmäßig hölderstetig differenzierbare Funktion.

BEWEIS. Ein Beweis hierzu findet sich in [Sch96], 2.34. \square

Satz 3.14 Die ersten Ableitungen des Doppelschichtpotenzials v mit Dichte $\varphi \in C^{1,\alpha}(\partial D)$ können gleichmäßig hölderstetig von D nach \bar{D} und von $\mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ nach $\mathbb{R}^2 \setminus D$ fortgesetzt werden. Die Normalableitung ist gegeben durch

$$\frac{\partial v_{\pm}}{\partial \nu}(x) = \frac{\partial}{\partial t(x)} \int_{\partial D} \Phi(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial s}(y) ds(y), \quad x \in \partial D, \quad (3.11)$$

und die Tangentialableitung durch

$$\frac{\partial v_{\pm}}{\partial t}(x) = - \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} \frac{\partial \varphi}{\partial s}(y) ds(y) \pm \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial s}(x), \quad x \in \partial D, \quad (3.12)$$

wobei $t(x)$ den Einheitstangentenvektor in Kurvenrichtung im Punkt $x \in \partial D$ bezeichnet.

BEWEIS. Ein Beweis hierzu findet sich in [Kre99], Thm. 7.29. \square

3.3.1 Randintegraloperatoren

Durch die zuvor gemachten Ausführungen ist es uns nun möglich, für $x \in \partial D$, $\varphi \in C(\partial D)$ und $\psi \in C^{1,\alpha}(\partial D)$ die folgenden Integraloperatoren einzuführen:

$$(S\varphi)(x) := 2 \int_{\partial D} \Phi(x, y) \varphi(y) ds(y), \quad (3.13)$$

$$(K\varphi)(x) := 2 \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \varphi(y) ds(y), \quad (3.14)$$

$$(K'\varphi)(x) := 2 \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} \varphi(y) ds(y), \quad (3.15)$$

$$(T\psi)(x) := 2 \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \psi(y) ds(y). \quad (3.16)$$

Mit Hilfe dieser Operatoren lassen sich die obigen Sprungbeziehungen in der Form

$$u_{\pm} = \frac{1}{2} S\varphi \quad (3.17)$$

und

$$\frac{\partial u_{\pm}}{\partial \nu} = \frac{1}{2} K'\varphi \mp \frac{1}{2} \varphi \quad (3.18)$$

für das Einfachschichtpotenzial u mit stetiger Dichte φ und

$$v_{\pm} = \frac{1}{2} K\varphi \pm \frac{1}{2} \varphi \quad (3.19)$$

und

$$\frac{\partial v_{\pm}}{\partial \nu} = \frac{1}{2} T\varphi \quad (3.20)$$

für das Doppelschichtpotenzial v mit stetiger Dichte φ darstellen. Bei der Beziehung (3.20) ist zu beachten, dass die Dichte aufgrund der Abbildungseigenschaften des Operators T (siehe Satz 3.16) aus $C^{1,\alpha}(\partial D)$ stammen muss.

Bemerkung 3.15 Aus Satz 3.14 wird ersichtlich, dass sich T durch S ausdrücken lässt durch die Darstellung

$$T\psi = \frac{\partial}{\partial t} S \frac{\partial \psi}{\partial s}.$$

Wir wollen nun die von uns weiterhin benötigten Abbildungseigenschaften der Integraloperatoren untersuchen.

Satz 3.16 Sei $\partial D \in C^2$. Dann sind die Operatoren S und K beschränkt von $C^{0,\alpha}(\partial D)$ nach $C^{1,\alpha}(\partial D)$. Die Operatoren K und K' sind beschränkt von $C(\partial D)$ nach $C^{0,\alpha}(\partial D)$ und kompakt in $C^{0,\alpha}(\partial D)$. Außerdem bildet der Operator T beschränkt von $C^{1,\alpha}(\partial D)$ nach $C^{0,\alpha}(\partial D)$ ab.

BEWEIS. Aus den vorangegangenen Sätzen können wir schließen:

- Der Operator S ist nach Satz 3.10 beschränkt von $C^{0,\alpha}(\partial D)$ nach $C^{1,\alpha}(\partial D)$.
- Der Operator K ist nach Satz 3.12 beschränkt von $C(\partial D)$ nach $C^{0,\alpha}(\partial D)$. Für K' lässt sich diese Aussage analog zeigen. Nach Satz 3.13 ist K außerdem beschränkt von $C^{0,\alpha}(\partial D)$ nach $C^{1,\alpha}(\partial D)$. Da die Einbettung I^α von $C^{0,\alpha}(\partial D)$ nach $C(\partial D)$ kompakt ist, ist $K := KI^\alpha : C^{0,\alpha}(\partial D) \rightarrow C^{0,\alpha}(\partial D)$ nach Satz 2.5 kompakt. Für K' folgt dies analog.
- Der Operator T lässt sich nach der Bemerkung 3.15 in der Form $T\varphi = \frac{\partial}{\partial t} S \frac{\partial \varphi}{\partial s}$ schreiben. Somit ist er nach Satz 3.10 beschränkt von $C^{1,\alpha}(\partial D)$ nach $C^{0,\alpha}(\partial D)$. \square

Satz 3.17 Die Integraloperatoren K und K' sind adjungiert bezüglich des Dualsystems $\langle C(\partial D), C(\partial D) \rangle$ mit der Bilinearform

$$\langle \varphi, \psi \rangle := \int_{\partial D} \varphi(y) \psi(y) ds(y), \quad \varphi, \psi \in C(\partial D). \quad (3.21)$$

Die Operatoren T und S sind selbstadjungiert bezüglich des Dualsystems (3.21).

BEWEIS. Die Adjungiertheit der Operatoren K und K' , sowie die Selbstadjungiertheit von S folgen direkt durch Vertauschen der Integrationsreihenfolge nach dem Satz von Fubini. Für die Selbstadjungiertheit des Operators T erhalten wir unter Ausnutzung der obigen Sprungbeziehungen (3.20) und (3.19), des Abklingverhaltens im Unendlichen, sowie des zweiten Green'schen Satzes, dass

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} T\varphi\psi ds &= \int_{\partial D} 2 \frac{\partial u}{\partial \nu} (v_+ - v_-) ds = \int_{\partial D} (u_+ - u_-) 2 \frac{\partial v}{\partial \nu} ds \\ &= \int_{\partial D} \varphi T\psi ds, \end{aligned}$$

wobei wir mit u und v Doppelschichtpotenziale mit Dichten $\varphi \in C^{1,\alpha}(\partial D)$ bzw. $\psi \in C^{1,\alpha}(\partial D)$ bezeichnen. \square

Satz 3.18 Für eine Lösung u zur Laplacegleichung in D mit $u \in C^2(D) \cap C^{1,\alpha}(\overline{D})$ erfüllen die Randwerte und die Normalableitung

$$\begin{pmatrix} u \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -K & S \\ -T & K' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} \end{pmatrix}, \quad (3.22)$$

d.h. der Operator in (3.22) ist ein Projektionsoperator im Produktraum der Randwerte und der Normalableitungen von Lösungen der Laplacegleichung.

Analog gilt für eine beschränkte Lösung u zur Laplacegleichung in $C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}) \cap C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^2 \setminus D)$ die Beziehung

$$\begin{pmatrix} u \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K & -S \\ T & -K' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} \end{pmatrix}. \quad (3.23)$$

BEWEIS. Wir nutzen die Green'sche Darstellungsformel aus Satz 3.7

$$u(x) = \int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \Phi(x, y) - u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \right\} ds(y), \quad x \in D,$$

und betrachten den Grenzübergang $x \rightarrow \partial D$. Da $u \in C^{1,\alpha}(\overline{D})$ ist, ist die Einschränkung von $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ auf den Rand $\frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial D}$ in $C^{0,\alpha}(\partial D)$. Da weiterhin S und K nach Satz 3.16 beschränkt von $C^{0,\alpha}(\partial D)$ nach $C^{1,\alpha}(\partial D)$ sind, erhalten wir mit den obigen Sprungbeziehungen

$$u|_{\partial D} = \underbrace{\frac{1}{2}S \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial D}}_{3.17} - \underbrace{\left(\frac{1}{2}Ku|_{\partial D} - \frac{1}{2}u|_{\partial D} \right)}_{3.19}$$

und damit

$$u|_{\partial D} = S \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial D} - Ku|_{\partial D}. \quad (3.24)$$

Jetzt bilden wir die Normalableitung von u und nutzen die Green'sche Darstellungsformel. Wiederum können wir die Abbildungseigenschaften aus Satz 3.16 nutzen: K' ist kompakt in $C^{0,\alpha}(\partial D)$ und T ist beschränkt von $C^{1,\alpha}(\partial D)$ nach $C^{0,\alpha}(\partial D)$. Damit ergibt sich für den Grenzübergang

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial D} = \underbrace{\frac{1}{2}K' \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial D} + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial D}}_{3.18} - \underbrace{\frac{1}{2}Tu|_{\partial D}}_{3.20}$$

und somit

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial D} = K' \frac{\partial u}{\partial \nu}|_{\partial D} - Tu|_{\partial D}. \quad (3.25)$$

Aus (3.24) und (3.25) folgt schließlich (3.22).

Die Beziehung (3.23) folgt analog mit Hilfe der Darstellungsformel (3.6). \square

Korollar 3.19 *Die Randintegraloperatoren erfüllen die Beziehungen*

$$ST = K^2 - I \quad (3.26)$$

und

$$TS = K'^2 - I, \quad (3.27)$$

wobei I in (3.26) für den Identitätsoperator in $C^{0,\alpha}$ und in (3.27) für den Identitätsoperator in $C^{1,\alpha}$ steht.

BEWEIS. Dieses Korollar beweisen wir, indem wir in (3.22) zuerst ein Einfachschichtpotenzial u und dann ein Doppelschichtpotenzial v mit Dichten φ bzw. ψ einsetzen. Dabei gelten die Sprungbeziehungen (3.17) bis (3.20) für $x \rightarrow \partial D, x \in D$. Nach Einsetzen dieser Beziehungen in (3.22) erhalten wir

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}S\varphi \\ \frac{1}{2}(K' + I)\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -K & S \\ -T & K' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}S\varphi \\ \frac{1}{2}(K' + I)\varphi \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

und

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(K - I)\psi \\ \frac{1}{2}T\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -K & S \\ -T & K' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(K - I)\psi \\ \frac{1}{2}T\psi \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

Hierbei liefert uns (3.28) zum einen $KS = SK'$ und zum anderen

$$K' + I = -TS + K'(K' + I),$$

woraus wir sofort (3.27) ersehen können. Des Weiteren gibt uns (3.29) $K'T = TK$ und

$$K - I = -K^2 + K + ST,$$

so dass wir (3.26) erhalten.

Falls u und v Lösungen zur Laplacegleichung im Außenraum von D sind, gelten die entsprechenden Sprungbeziehungen (3.17) bis (3.20) für $x \rightarrow \partial D, x \in \mathbb{R}^2 \setminus \bar{D}$ und wir erhalten (3.26) bzw. (3.27) durch analoges Vorgehen mit Einsetzen in (3.23). \square

Am Ende dieses Abschnittes wollen wir noch den Operator \tilde{S} als modifiziertes Einfachschichtpotenzial auf ∂D einführen und zeigen, dass er im Gegensatz zum Einfachschichtpotenzialoperator S beschränkt invertierbar von $C^{0,\alpha}(\partial D)$ nach $C^{1,\alpha}(\partial D)$ ist.

Der Einfachheit halber führen wir den Mittelungsoperator $M : C^{0,\alpha}(\partial D) \rightarrow C^{0,\alpha}(\partial D)$ für $x \in \partial D$ durch

$$(M\varphi)(x) := \varphi(x) - \frac{1}{|\partial D|} \int_{\partial D} \varphi \, ds \quad (3.30)$$

ein.

Nun können wir den Operator \tilde{S} für Dichten $\psi \in C^{0,\alpha}$ definieren durch

$$(\tilde{S}\psi)(x) := \frac{1}{2}(SM\psi)(x) + \frac{1}{|\partial D|} \int_{\partial D} \psi \, ds \quad (3.31)$$

$$= \int_{\partial D} (M\psi)(y) \Phi(x, y) \, ds(y) + \frac{1}{|\partial D|} \int_{\partial D} \psi \, ds, \quad x \in \partial D. \quad (3.32)$$

Satz 3.20 *Der modifizierte Einfachschichtpotenzialoperator $\tilde{S} : C^{0,\alpha}(\partial D) \rightarrow C^{1,\alpha}(\partial D)$ ist beschränkt und bijektiv mit einer beschränkten Inversen $\tilde{S}^{-1} : C^{1,\alpha}(\partial D) \rightarrow C^{0,\alpha}(\partial D)$.*

BEWEIS. Ein Beweis hierzu findet sich in [Kre99], Thm. 7.30. □

3.4 Einfachschichtpotenzial über einen offenen Bogen

Wir wollen in diesem Abschnitt das Einfachschichtpotenzial über einen offenen Bogen $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ betrachten und für dieses benötigte Regularitätsaussagen treffen. In den Beweisen der folgenden Aussagen wird im Wesentlichen ausgenutzt, dass wir Integraloperatoren mit schwach singulärem Kern betrachten.

Satz 3.21 *Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ ein Bogen der Klasse C^3 . Für $\tilde{\psi} \in C(\Gamma)$ sei die Funktion ψ gegeben durch*

$$\psi(z) = \frac{\tilde{\psi}(z)}{\sqrt{|z - z_1||z - z_{-1}|}}, \quad z \in \Gamma_0. \quad (3.33)$$

Dann existiert der Ausdruck $\int_{\Gamma} \psi \, ds$ als uneigentliches Integral bezüglich der Endpunkte z_{-1} und z_1 .

BEWEIS. Ein Beweis hierzu findet sich in [Hee03], Satz 3.16. □

Satz 3.22 Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ ein Bogen der Klasse C^3 . Für die Funktion ψ , gegeben durch (3.33), ist das Einfachschichtpotenzial

$$u(x) := \int_{\Gamma} \Phi(x, y) \psi(y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (3.34)$$

stetig auf ganz \mathbb{R}^2 .

BEWEIS. Ein Beweis hierzu findet sich in [Hee03], Satz 3.19. □

Satz 3.23 Die in (3.34) definierte Funktion u ist genau dann beschränkt auf ganz \mathbb{R}^2 , wenn $\int_{\Gamma} \psi ds = 0$ ist.

Ist die Bedingung $\int_{\Gamma} \psi ds = 0$ erfüllt, so gilt sogar $u(x) \rightarrow 0$ für $|x| \rightarrow \infty$ gleichmäßig für alle Richtungen.

BEWEIS. Ein Beweis hierzu findet sich in [Hee03], Satz 3.20. □

Satz 3.24 Die in (3.34) definierte Funktion u ist in $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ zweimal stetig differenzierbar und harmonisch.

BEWEIS. Vgl. [Kre99], Abschnitt 6.3, S. 78 □

Satz 3.25 Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ ein Bogen der Klasse C^3 und sei ν die in (2.1) definierte Einheitsnormale an Γ . Dann lässt sich die Normalableitung der in (3.34) definierten Funktion u einseitig stetig von $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ nach Γ_0 durch

$$\frac{\partial u_{\pm}}{\partial \nu}(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} \psi(y) ds(y) \mp \frac{1}{2} \psi(x), \quad x \in \Gamma_0, \quad (3.35)$$

fortsetzen, wobei das Integral als uneigentliches Integral bezüglich x existiert und der Ausdruck

$$\frac{\partial u_{\pm}}{\partial \nu}(x) := \lim_{h \rightarrow +0} \langle \nu(x), \text{grad } u(x \pm h\nu(x)) \rangle$$

im Sinne lokal gleichmäßiger Konvergenz auf Γ_0 zu verstehen ist.

BEWEIS. Ein Beweis hierzu findet sich in [Hee03], Satz 3.22. □

Kapitel 4

Formulierung des Problems

In diesem kurzen Kapitel wollen wir das Problem, welches wir bereits in der Einleitung vorgestellt haben, exakt formulieren und bildlich veranschaulichen. In den vorangegangenen Kapiteln haben wir die dafür notwendigen Voraussetzungen geschaffen.

Wir wollen in dieser Arbeit das Dirichletproblem für die Laplacegleichung im Außengebiet des Bogens Γ im \mathbb{R}^2 betrachten:

Problemstellung 4.1 Sei $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ ein offener Bogen der Klasse C^3 . Gesucht ist eine beschränkte Lösung $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma) \cap C(\mathbb{R}^2)$ der Laplacegleichung

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma, \quad (4.1)$$

die die Dirichletrandbedingung

$$u = f \quad \text{auf } \Gamma \quad (4.2)$$

erfüllt. Dabei ist $f \in C^{1,\alpha}(\Gamma)$ vorgegeben.

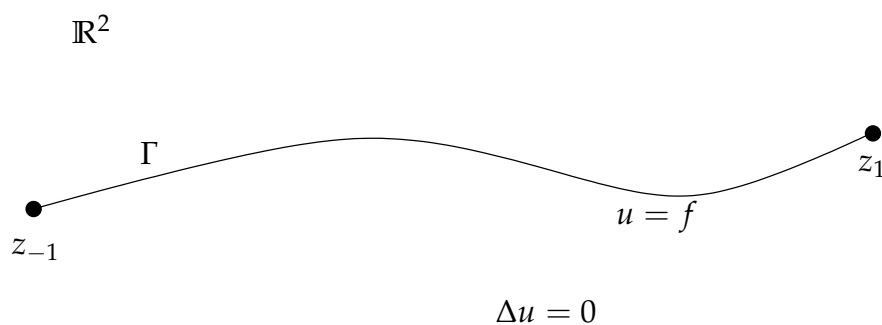


Abbildung 4.1: Problemstellung

Kapitel 5

Eindeutigkeit und Existenz

In diesem Kapitel werden wir zum einen den Nachweis erbringen, dass die gestellte Aufgabe aus Kapitel 4 höchstens eine Lösung besitzt. Dazu wollen wir uns des Maximum-Minimum-Prinzips aus Abschnitt 3.1 bedienen. Zum anderen werden wir einen konstruktiven Beweis der Lösbarkeit von Problem 4.1 geben. Dies wird mit Hilfe der in Kapitel 3 eingeführten Potentiale und der daraus resultierenden Anwendbarkeit der *Riesz*-Theorie aus Abschnitt 2.2 geschehen.

5.1 Eindeutigkeit

Da wir auf dem Schlitz Γ des Problems 4.1 Dirichletdaten gegeben haben, können wir auf klassische Weise die Eindeutigkeit der Lösung mit dem Maximum-Minimum-Prinzip aus Abschnitt 3.1 beweisen.

Satz 5.1 *Das Dirichletproblem für das Außengebiet eines Bogens aus Kapitel 4 hat höchstens eine Lösung*

BEWEIS. Sei $u := u_1 - u_2$ die Differenz von zwei Lösungen des Dirichletproblems 4.1. Dann ist $u \in C^2(\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma) \cap C(\mathbb{R}^2)$ und $\Delta u = \Delta u_1 - \Delta u_2 = 0$ in $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$. Weiterhin haben wir $u = u_1 - u_2 = f - f = 0$ auf Γ .

Das heißt, dass u auf dem Gebiet $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ harmonisch ist. Daher muss u nach dem Maximum-Minimum-Prinzip aus Satz 3.5 das Supremum und Infimum entweder auf dem Bogen Γ annehmen oder im Unendlichen.

Nehmen wir also an, dass das Supremum im Unendlichen angenommen wird, also gleich u_∞ ist. Dann gilt $u(x) \leq u_\infty$ für alle $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$. Mit der Mittelwertigkeit im Unendlichen (3.8) aus Satz 3.8 können wir folgern, dass $u = u_\infty$ außerhalb eines hinreichend großen Kreises ist (um diesen Satz anwenden zu

können, wählen wir uns ein beliebiges C^2 -glattes Gebiet D mit $\Gamma \subset D$). Mit der Analytizität von u in $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ nach Satz 3.3 erhalten wir schließlich $u = u_\infty$ überall in $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$. Da u stetig ist in \mathbb{R}^2 folgt aus der homogenen Randbedingung $u = 0$ in ganz \mathbb{R}^2 . Die gleiche Argumentation liefert für den Fall, dass das Infimum im Unendlichen angenommen wird, das Gewünschte.

Zuletzt behandeln wir den Fall, dass sowohl das Maximum als auch das Minimum auf dem Bogen Γ angenommen werden. Dann können wir unmittelbar aus der homogenen Randbedingung und der Stetigkeit von u in \mathbb{R}^2 schließen, dass $u = 0$ in \mathbb{R}^2 . \square

5.2 Existenz

In diesem Abschnitt wollen wir einen konstruktiven Beweis der Lösbarkeit des Problems 4.1 führen. Dabei werden wir die in Kapitel 3 eingeführten Potentiale nutzen, um die Randbedingung in eine Integralgleichung zu transformieren, deren Lösbarkeit dann mit Hilfe der *Riesz-Fredholm*-Theorie bewiesen wird. Dabei werden wir uns an die Ausführungen in [Hee03] zu Kapitel 7.6 in [Kre99] halten.

Als Ansatz für die Lösung u des Problems 4.1 wählen wir:

$$u(x) := (S_\Gamma \varphi)(x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (5.1)$$

wobei der Operator S_Γ ein Einfachschichtpotential ist, welches für $x \in \mathbb{R}^2$ definiert ist durch

$$(S_\Gamma \varphi)(x) := \int_\Gamma \Phi(x, y) (\tilde{M}\varphi)(y) ds(y) + \frac{1}{|\Gamma|} \int_\Gamma \varphi ds. \quad (5.2)$$

Der hierbei auftretende Mittelungsoperator \tilde{M} ist ähnlich zum Mittelungsoperator im Falle des Randes ∂D des Gebiets $D \subset \mathbb{R}^2$ aus (3.30) definiert. Wir setzen für $x \in \Gamma_0$

$$(\tilde{M}\varphi)(x) := \varphi(x) - \frac{1}{|\Gamma|} \int_\Gamma \varphi ds. \quad (5.3)$$

Für die Dichte φ gilt

$$\varphi(x) := \frac{\check{\varphi}(x)}{\sqrt{|x - z_1| \cdot |x - z_{-1}|}}, \quad x \in \Gamma_0, \quad (5.4)$$

mit $\check{\varphi} \in C^{0,\alpha,*}(\Gamma)$ und der Raum $C^{0,\alpha,*}(\Gamma)$ ist definiert durch

$$C^{0,\alpha,*}(\Gamma) := \left\{ \check{\varphi} \in C(\Gamma) : \check{\varphi}(x(t)) = \varphi_1(t) \cdot \varphi_2(\arccos t), \right. \\ \left. \varphi_1 \in C^1[-1, 1], \varphi_2 \in C_{\text{ger}}^{0,\alpha}[0, 2\pi] \right\}.$$

Dieser analog zu [Hee03] eingeführte Funktionenraum ist notwendig, da wir im Laufe des Existenzbeweises sehen werden, dass das Einfachschichtpotenzial (5.2) in einen beschränkt invertierbaren und einen kompakten Operator von $C_{\text{ger}}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$ nach $C_{\text{ger}}^{1,\alpha}[0, 2\pi]$ zerfällt, daher ist es sinnvoll Lösungsfunktionen $\varphi_2 \in C_{\text{ger}}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$ zu wählen. Weiterhin wird bei der Rückübersetzung des invertierbaren Operators in einen Operator über den offenen Bogen Γ die Arcus-Cosinus-Substitution nötig. Dies verursacht ein wurzelsinguläres Verhalten der Dichte in den Endpunkten des Bogens, welches durch die stetige Differenzierbarkeit der Funktion φ_1 und in (5.4) berücksichtigt wird.

Satz 5.2 *Die durch (5.1) definierte Funktion u löst das Problem 4.1, falls die Dichte φ die Integralgleichung*

$$S_{\Gamma}\varphi = f \quad \text{auf } \Gamma \tag{5.5}$$

löst.

BEWEIS. Sei φ eine Lösung der Gleichung (5.5) und damit u definiert durch (5.1) - (5.4). Dadurch nimmt u auf Γ die Dirichletrandwerte f an und die Regularitätsbedingung (4.1) folgt aus den Sätzen 3.22 und 3.24. Weiterhin ist $\int_{\Gamma} \tilde{M}\varphi ds = 0$, wodurch mit Satz 3.23 die Beschränktheit von u in ganz \mathbb{R}^2 folgt. \square

Satz 5.3 *Die Integralgleichung (5.5) hat höchstens eine Lösung.*

BEWEIS. Da der betrachtete Integraloperator linear ist, reicht es zu zeigen, dass die homogene Integralgleichung nur die triviale Lösung besitzt.

Sei φ also eine Lösung der homogenen Gleichung

$$S_{\Gamma}\varphi = 0 \quad \text{auf } \Gamma.$$

Dann löst $u := S_{\Gamma}\varphi$ das Problem 4.1 nach Satz 5.2 mit homogener Randbedingung. Dadurch ist aber $u \equiv 0$ nach dem Eindeutigkeitssatz 5.1.

Somit haben wir insbesondere, dass $\frac{\partial u_{\pm}}{\partial \nu} = 0$ auf Γ_0 . Dies wiederum bedeutet, dass

$$0 = \frac{\partial(S_{\Gamma}\varphi)_{-}}{\partial \nu}(x) = \frac{\partial(S_{\Gamma}\varphi)_{+}}{\partial \nu}(x), \quad x \in \Gamma_0,$$

und die Sprungbeziehungen aus Satz 3.25 liefern uns, dass

$$(\tilde{M}\varphi)(x) = \frac{\partial(S_\Gamma\varphi)_-(x)}{\partial\nu} - \frac{\partial(S_\Gamma\varphi)_+(x)}{\partial\nu} = 0, \quad x \in \Gamma_0.$$

Damit erhalten wir für $x \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} 0 &= (S_\Gamma\varphi)(x) \\ &= \int_\Gamma \Phi(x, y)(\tilde{M}\varphi)(y) ds(y) + \frac{1}{|\Gamma|} \int_\Gamma \varphi ds \\ &= \frac{1}{|\Gamma|} \int_\Gamma \varphi ds. \end{aligned}$$

Diese Rechnungen ergeben schließlich

$$0 = (\tilde{M}\varphi)(x) = \varphi(x) - \frac{1}{|\Gamma|} \int_\Gamma \varphi ds = \varphi(x)$$

auf Γ_0 , d.h. die homogene Form von (5.5) hat nur die triviale Lösung. \square

Sei nun $x : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine reguläre Parametrisierung des offenen C^3 -glatten Bogens $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$. Nach dem Einsetzen dieser Parametrisierung über Γ führen wir eine Cosinus-Substitution durch, so dass die Integralgleichung (5.5) die Form

$$(L + L_c)\tilde{\varphi} = g \quad \text{auf } [0, \pi] \tag{5.6}$$

annimmt.

Die Operatoren L und L_c haben dabei die Form

$$(L\tilde{\varphi})(t) := \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \left\{ -\ln [4(\cos t - \cos \tau)^2] + 4 \right\} \tilde{\varphi}(\tau) d\tau, \quad t \in [0, \pi], \tag{5.7}$$

$$(L_c\tilde{\varphi})(t) := \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \{p(t, \tau) - 4\} \tilde{\varphi}(\tau) d\tau, \quad t \in [0, \pi], \tag{5.8}$$

mit

$$\begin{aligned} p(t, \tau) &:= \ln \frac{4[\cos t - \cos \tau]^2}{|x(\cos t) - x(\cos \tau)|^2} + \frac{4\pi}{|\Gamma|} \\ &\quad - \frac{1}{|\Gamma|} \int_0^\pi \ln \frac{1}{|x(\cos t) - x(\cos \sigma)|^2} |x'(\cos \sigma)| \sin \sigma d\sigma \end{aligned}$$

für $t, \tau \in \mathbb{R}, t \neq \tau$ und wir setzen

$$g(t) := f(x(\cos t)) \quad t \in [0, \pi].$$

Der Zusammenhang der Integralgleichungen (5.5) und (5.6) wird in den beiden folgenden Sätzen charakterisiert.

Satz 5.4 Wenn $\tilde{\varphi} \in C_{\text{ger}}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$ die Integralgleichung (5.6) löst, dann ist φ eine Lösung von (5.5), wobei φ durch (5.4) mit

$$\check{\varphi}(x(t)) := \frac{\sqrt{|x(t) - z_1| \cdot |x(t) - z_{-1}|}}{|x'(t)|\sqrt{1-t^2}} \cdot \tilde{\varphi}(\arccos t), \quad t \in [-1, 1], \quad (5.9)$$

definiert ist. Die hierbei auftretende Funktion $\check{\varphi}$ gehört zu $C^{0,\alpha,*}(\Gamma)$.

BEWEIS. Sei $\tilde{\varphi} \in C_{\text{ger}}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$ eine Lösung von (5.6) und φ definiert durch die Aussage des Satzes.

Im Folgenden wollen wir zeigen, dass (5.5) durch entsprechende Umformungen in (5.6) übergeht. Wir beginnen mit der linken Seite von (5.5). Um eine einfachere Basis für die Umformungen zu erhalten, ordnen wir die Terme des Operators S_Γ aus der Darstellung (5.2) um. Dies liefert uns

$$\begin{aligned} & \int_\Gamma \Phi(x, y)(\tilde{M}\varphi)(y) ds(y) + \frac{1}{|\Gamma|} \int_\Gamma \varphi ds \\ &= \int_\Gamma \Phi(x, y)\varphi(y) ds(y) - \int_\Gamma \Phi(x, y) \left(\frac{1}{|\Gamma|} \int_\Gamma \varphi ds \right) ds(y) + \frac{1}{|\Gamma|} \int_\Gamma \varphi ds \\ &= \int_\Gamma \Phi(x, y)\varphi(y) ds(y) - \frac{1}{|\Gamma|} \int_\Gamma \left(\int_\Gamma \Phi(x, y) ds(y) \right) \varphi ds + \frac{1}{|\Gamma|} \int_\Gamma \varphi ds \\ &= \int_\Gamma \left(\Phi(x, y) + \frac{1}{|\Gamma|} - \frac{1}{|\Gamma|} \int_\Gamma \Phi(x, z) ds(z) \right) \varphi(y) ds(y). \end{aligned}$$

Jetzt setzen wir die reguläre Parametrisierung x des Bogens Γ ein und führen die Cosinus-Substitution durch. Dadurch ergibt sich

$$\begin{aligned} & \int_\Gamma \Phi(x, y)(\tilde{M}\varphi)(y) ds(y) + \frac{1}{|\Gamma|} \int_\Gamma \varphi ds \\ &= \int_0^\pi \left(\Phi(x(\cos t), x(\cos \tau)) + \frac{1}{|\Gamma|} \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{|\Gamma|} \int_0^\pi \Phi(x(\cos t), x(\cos \sigma)) |x'(\cos \sigma)| \sin \sigma d\sigma \right) \\ & \quad \cdot \varphi(x(\cos \tau)) |x'(\cos \tau)| \sin \tau d\tau \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \left(\ln \frac{1}{|x(\cos t) - x(\cos \tau)|^2} + \frac{4\pi}{|\Gamma|} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{|\Gamma|} \int_0^\pi \ln \frac{1}{|x(\cos t) - x(\cos \sigma)|^2} |x'(\cos \sigma)| \sin \sigma d\sigma \right) \\
&\quad \cdot \varphi(x(\cos \tau)) |x'(\cos \tau)| \sin \tau d\tau \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \left(-\ln [4(\cos t - \cos \tau)^2] + \ln \frac{4(\cos t - \cos \tau)^2}{|x(\cos t) - x(\cos \tau)|^2} + \frac{4\pi}{|\Gamma|} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{|\Gamma|} \int_0^\pi \ln \frac{1}{|x(\cos t) - x(\cos \sigma)|^2} |x'(\cos \sigma)| \sin \sigma d\sigma \right) \\
&\quad \cdot \varphi(x(\cos \tau)) |x'(\cos \tau)| \sin \tau d\tau \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \left(-\ln [4(\cos t - \cos \tau)^2] + p(t, \tau) \right) \\
&\quad \cdot \varphi(x(\cos \tau)) |x'(\cos \tau)| \sin \tau d\tau.
\end{aligned} \tag{5.10}$$

Wenn wir (5.7) und (5.8) mit (5.10) vergleichen, sehen wir, dass für $x \in \Gamma$ der Operator S_Γ in den Operator $L + L_c$ übergeht, falls für $\tau \in [0, \pi]$ die Bedingung

$$\tilde{\varphi}(\tau) = \varphi(x(\cos \tau)) |x'(\cos \tau)| \sin \tau \tag{5.11}$$

erfüllt ist.

Daher müssen wir noch zeigen, dass die Dichte φ die Bedingung (5.11) erfüllt.

Dazu setzen wir zuerst die Definition von φ in die rechte Seite von (5.11) ein und erhalten

$$\begin{aligned}
\varphi(x(\cos \tau)) |x'(\cos \tau)| \sin \tau &= \frac{\tilde{\varphi}(\arccos(\cos \tau))}{|x'(\cos \tau)| \sqrt{1 - (\cos \tau)^2}} |x'(\cos \tau)| \sin \tau \\
&= \tilde{\varphi}(\tau)
\end{aligned}$$

für alle $\tau \in [0, \pi]$.

Die rechte Seite von (5.6) geht analog durch Einsetzen der Parametrisierung und Cosinus-Substitution aus (5.5) hervor.

Zuletzt sehen wir aus der Definition von $C^{0,\alpha,*}(\Gamma)$ und aus (5.9), dass die Funktion $\tilde{\varphi}$ in $C^{0,\alpha,*}(\Gamma)$ liegt, falls der Ausdruck

$$\frac{\sqrt{|x(t) - z_1| \cdot |x(t) - z_{-1}|}}{|x'(t)| \sqrt{1 - t^2}}$$

auf $[-1, 1]$ einmal stetig differenzierbar ist. Dies folgt aber mit Hilfe der Taylorentwicklung der Parametrisierung x um die Endpunkte des Bogens und der Regularität der Parametrisierung auf ganz $[-1, 1]$, vgl. hierzu den Beweis zu Satz 4.7 in [Hee03]. \square

Satz 5.5 *Die Integralgleichung (5.6) hat höchstens eine Lösung.*

BEWEIS. Wieder reicht es zu zeigen, dass die homogene Form der Integralgleichung (5.6) nur die triviale Lösung besitzt, da der zugehörige Integraloperator linear ist.

Sei nun $\tilde{\varphi}$ eine Lösung der homogenen Form, dann löst nach Satz 5.4 die dort definierte Dichte φ die Integralgleichung (5.5) mit homogener rechter Seite. Mit Hilfe von Satz 5.3 gilt dann $\varphi \equiv 0$, wodurch sofort $\tilde{\varphi} \equiv 0$ folgt. \square

Das folgende technische Lemma wird für die nächsten Umformungen benötigt.

Lemma 5.6 *Für $t, \tau \in \mathbb{R}$ mit $t \neq \tau$ gilt die Identität*

$$\ln[4(\cos t - \cos \tau)^2] = \ln\left(4 \sin^2 \frac{t - \tau}{2}\right) + \ln\left(4 \sin^2 \frac{t + \tau}{2}\right). \quad (5.12)$$

BEWEIS. Ein Beweis hierzu findet sich in [Hee03], Lemma 4.9. \square

Wir formen mit der Identität (5.12) die Gleichung (5.6) weiter um zu

$$(\tilde{L} + L_c)\tilde{\varphi} = g \quad \text{auf } [0, 2\pi], \quad (5.13)$$

wobei der Operator \tilde{L} definiert ist durch

$$(\tilde{L}\tilde{\varphi})(t) := \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ -\ln\left(4 \sin^2 \frac{t - \tau}{2}\right) + 2 \right\} \tilde{\varphi}(\tau) d\tau, \quad t \in [0, 2\pi], \quad (5.14)$$

und die Gleichung (5.13) als eine Gleichung auf $[0, 2\pi]$ zu verstehen ist, die durch gerade Fortsetzung des Operators L_c und der rechten Seite g entsteht.

Der Zusammenhang der Gleichungen (5.6) und (5.13) wird im folgenden Satz dargestellt.

Satz 5.7 *Jede Lösung $\tilde{\varphi} \in C_{ger}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$ von (5.13) löst auch (5.6). Falls eine solche Lösung existiert, ist sie eindeutig bestimmt.*

BEWEIS. Sei $\tilde{\varphi} \in C_{\text{ger}}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$ eine Lösung von (5.13). Mit Hilfe der Identität (5.12) formen wir nun $L\tilde{\varphi}$ für $t \in [0, \pi]$ um und bekommen

$$\begin{aligned} (L\tilde{\varphi})(t) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \left\{ -\ln [4(\cos t - \cos \tau)^2] + 4 \right\} \tilde{\varphi}(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \left\{ -\ln \left(4 \sin^2 \frac{t-\tau}{2} \right) + 2 \right\} \tilde{\varphi}(\tau) d\tau \\ &\quad + \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \left\{ -\ln \left(4 \sin^2 \frac{t+\tau}{2} \right) + 2 \right\} \tilde{\varphi}(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Aufgrund der Geradheit von $\tilde{\varphi}$ und durch Substitution von $\tau = -\bar{\tau}$ erhalten wir im zweiten Summanden

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \left\{ -\ln \left(4 \sin^2 \frac{t+\tau}{2} \right) + 2 \right\} \tilde{\varphi}(\tau) d\tau \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_0^{-\pi} \left\{ -\ln \left(4 \sin^2 \frac{t-\bar{\tau}}{2} \right) + 2 \right\} \tilde{\varphi}(-\bar{\tau}) d\bar{\tau} \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^0 \left\{ -\ln \left(4 \sin^2 \frac{t-\bar{\tau}}{2} \right) + 2 \right\} \tilde{\varphi}(\bar{\tau}) d\bar{\tau}, \end{aligned}$$

wodurch wir nach Umbenennung von $\bar{\tau}$ in τ

$$(L\tilde{\varphi})(t) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^\pi \left\{ -\ln \left(4 \sin^2 \frac{t-\tau}{2} \right) + 2 \right\} \tilde{\varphi}(\tau) d\tau$$

bekommen.

Die 2π -Periodizität des Integranden in der Integrationsvariablen liefert uns für $t \in [0, \pi]$

$$(L\tilde{\varphi})(t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ -\ln \left(4 \sin^2 \frac{t-\tau}{2} \right) + 2 \right\} \tilde{\varphi}(\tau) d\tau = (\tilde{L}\tilde{\varphi})(t),$$

was zu einer Übereinstimmung von L und \tilde{L} für Dichten $\tilde{\varphi} \in C_{\text{ger}}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$ auf $[0, \pi]$ führt.

Die Einschränkung der Gleichung (5.13) auf $[0, \pi]$ liefert uns somit, dass die Lösung $\tilde{\varphi}$ auch die Gleichung (5.6) löst. Nach Satz 5.5 hat die Gleichung aber höchstens eine Lösung, so dass $\tilde{\varphi}$ dadurch eindeutig bestimmt ist. \square

Der Beweis zum folgenden Satz ist in ähnlicher Form in [Hee03] (Satz 4.11) zu finden. Da wir aber im Beweis eine Verbindung zwischen dem Operator \tilde{L} und dem modifizierten Einfachschichtpotenzialoperator \tilde{S} , definiert in (3.31), herstellen werden, wollen wir ihn hier noch einmal kurz skizzieren.

Satz 5.8 *Der in (5.14) definierte Operator \tilde{L} ist ein beschränkter und bijektiver Operator von $C_{\text{ger}}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$ nach $C_{\text{ger}}^{1,\alpha}[0, 2\pi]$ mit einer beschränkten Inversen $\tilde{L}^{-1} : C_{\text{ger}}^{1,\alpha}[0, 2\pi] \rightarrow C_{\text{ger}}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$.*

BEWEIS. Wir wollen zeigen, dass der modifizierte Einfachschichtpotenzialoperator $\tilde{S} : C^{0,\alpha}(\partial D) \rightarrow C^{1,\alpha}(\partial D)$ definiert in (3.31) auf dem Einheitskreis für Dichten $\tilde{\psi} \in C_{\text{ger}}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$ mit \tilde{L} übereinstimmt.

Dazu wählen wir die reguläre 2π -periodische Parametrisierung x des Einheitskreises, welche durch $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ gegeben ist. Diese setzen wir in die parametrisierte Form von \tilde{S} ein, die in [Kre99], Problem 7.2, angegeben ist. Somit erhalten wir für den dort angegebenen Kern

$$p(t, \tau) := \ln \frac{4 \sin^2 \frac{t-\tau}{2}}{|x(t) - x(\tau)|^2} - \frac{1}{|\partial D|} \int_0^{2\pi} \ln \frac{1}{|x(t) - x(\sigma)|^2} |x'(\sigma)| d\sigma + \frac{4\pi}{|\partial D|}, \quad t \neq \tau,$$

mit $|\partial D| = 2\pi$ als die Länge des Einheitskreises, durch mehrere Umformungen

$$\begin{aligned} p(t, \tau) &= 2 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left(4 \sin^2 \frac{t-\sigma}{2} \right) d\sigma \\ &= 2, \end{aligned}$$

da

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left(4 \sin^2 \frac{t-\sigma}{2} \right) d\sigma = 0$$

nach Lemma 8.21 in [Kre99] gilt. Somit nimmt der Operator \tilde{S} auf dem Einheitskreis für Dichten $\tilde{\psi} \in C^{0,\alpha}[0, 2\pi]$ die Form

$$(\tilde{S}\tilde{\psi})(t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ -\ln \left(4 \sin^2 \frac{t-\tau}{2} \right) + 2 \right\} \tilde{\psi}(\tau) d\tau, \quad t \in [0, 2\pi],$$

an. Wir wollen \tilde{S} auf dem Einheitskreis mit \tilde{S}_0 bezeichnen.

Wir sehen sofort, dass \tilde{L} , definiert in (5.14), für Dichten $\tilde{\psi} \in C_{\text{ger}}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$ mit \tilde{S}_0 übereinstimmt. Da \tilde{S} nach Satz 3.20 beschränkt invertierbar ist, gilt dies auch für \tilde{S}_0 , was sogleich die Beschränktheit und Injektivität des Operators \tilde{L} als Einschränkung von \tilde{S}_0 auf die 2π -periodischen und geraden Funktionen nach sich zieht.

Für die Surjektivität von \tilde{L} auf $C_{\text{ger}}^{1,\alpha}[0, 2\pi]$ betrachten wir ein $f \in C_{\text{ger}}^{1,\alpha}[0, 2\pi] \subseteq C^{1,\alpha}[0, 2\pi]$. Da \tilde{S} surjektiv ist, existiert ein $\psi \in C^{1,\alpha}[0, 2\pi]$ mit $\tilde{S}\psi = f$. Eine kurze Rechnung zeigt, dass für $t \in \mathbb{R}$

$$f(-t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ -\ln \left(4 \sin^2 \frac{t-\tau}{2} \right) + 2 \right\} \psi(-\tau) d\tau$$

gilt. Jetzt nutzen wir noch die Geradheit von f aus und bekommen so für $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} 0 &= f(t) - f(-t) \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ -\ln \left(4 \sin^2 \frac{t-\tau}{2} \right) + 2 \right\} (\psi(\tau) - \psi(-\tau)) d\tau. \end{aligned}$$

Die Injektivität von \tilde{S} gibt damit

$$\psi(\tau) - \psi(-\tau) = 0 \quad \text{für alle } \tau \in \mathbb{R},$$

was $\psi \in C_{\text{ger}}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$ zur Folge hat. Daher gilt auch $\tilde{L}\psi = f$.

Somit ist die Bijektivität von \tilde{L} gezeigt. Da des Weiteren die Räume $C^{0,\alpha}$ und $C^{1,\alpha}$ nach Satz 2.18 Banachräume sind, folgt mit dem Satz von Banach 2.6, dass die zugehörige Inverse $\tilde{L}^{-1} : C_{\text{ger}}^{1,\alpha}[0, 2\pi] \rightarrow C_{\text{ger}}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$ beschränkt ist. \square

Satz 5.9 *Der in (5.8) definierte Operator L_c ist ein kompakter Operator von $C_{\text{ger}}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$ nach $C_{\text{ger}}^{1,\alpha}[0, 2\pi]$.*

BEWEIS. Ein Beweis hierzu findet sich in [Hee03], Satz 4.13. \square

Als Kernaussage dieses Abschnittes erhalten wir nun

Satz 5.10 *Das Problem 4.1 ist eindeutig lösbar.*

BEWEIS. Wir betrachten Gleichung (5.13). Nach Satz 5.8 ist der Operator $\tilde{L} : C_{\text{ger}}^{0,\alpha}[0, 2\pi] \rightarrow C_{\text{ger}}^{1,\alpha}[0, 2\pi]$ beschränkt invertierbar. Weiterhin ist der Operator $L_c : C_{\text{ger}}^{0,\alpha}[0, 2\pi] \rightarrow C_{\text{ger}}^{1,\alpha}[0, 2\pi]$ nach Satz 5.9 kompakt. Da nach Satz 5.7 die zu (5.13) gehörige homogene Gleichung nur trivial lösbar ist, können wir insgesamt Korollar 2.9 anwenden und erhalten, dass Gleichung (5.13) eine eindeutig bestimmte Lösung $\tilde{\varphi}$ besitzt, die stetig von der rechten Seite abhängt. Die Sätze 5.2 bis 5.7 liefern, dass auch das Problem 4.1 eine Lösung besitzt, welche nach Satz 5.1 eindeutig bestimmt ist. \square

Kapitel 6

Lösungsverfahren

Um das Problem 4.1 numerisch zu lösen, können wir die in Abschnitt 5.2 konstruierte Integralgleichung unmittelbar diskretisieren. Wie wir dort festgestellt, ist die zu lösende Integralgleichung erster Art. Das dazu numerisch zu behandelnde Verfahren wollen wir in Abschnitt 6.1 kurz zusammenfassen.

Eine weitere Möglichkeit besteht darin die Integralgleichung erster Art äquivalent in eine Integralgleichung zweiter Art zu transformieren und diese dann numerisch auszuwerten. Diese Umformung wollen wir in Abschnitt 6.2 durchführen.

6.1 Verfahren mit einer Integralgleichung erster Art

In diesem Abschnitt wollen wir die in Kapitel 5 hergeleitete Integralgleichungsmethode zur Lösung des Problems 4.1 noch einmal zusammenfassend darstellen. Die dort vorgestellte Methode beruht darauf, die Integralgleichung erster Art aus (5.5) soweit zu modifizieren, dass wir eine Integralgleichung erhalten, die aus der Summe eines beschränkt invertierbaren und eines kompakten Operators besteht, so dass wir darauf die *Riesz-Fredholm*-Theorie anwenden können.

Zusammenfassung 6.1 *Das Problem 4.1 ist eindeutig lösbar.*

Die in (5.1) definierte Funktion u mit Dichte φ definiert durch Satz 5.4 löst das Problem, wenn die Dichte $\tilde{\varphi} \in C_{\text{ger}}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$ die Integralgleichung (5.13)

$$(\tilde{L} + L_c)\tilde{\varphi} = g \quad \text{auf } [0, 2\pi]$$

löst, wobei die Operatoren in (5.14) und (5.8) definiert sind.

6.2 Verfahren mit einer Integralgleichung zweiter Art

Wir wollen nun die Integralgleichung (5.13) äquivalent in eine Integralgleichung zweiter Art umformen. Dazu nutzen wir aus, dass der Operator \tilde{L} nach Satz 5.8 beschränkt invertierbar ist. Wir werden also versuchen seinen inversen Operator anzugeben.

Da der Operator \tilde{L} für Dichten $\varphi \in C_{\text{ger}}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$ wie im Beweis zu Satz 5.8 gezeigt mit der parametrisierten Form des modifizierten Einfachschichtpotenzialoperators \tilde{S}_0 für den Fall der Einheitskreisscheibe übereinstimmt, ist es sinnvoll, als Ansatz für die Inverse den Operator T zu wählen, der als Normalableitung des Doppelschichtpotenzials definiert ist. Über ihn wissen wir aus Korollar 3.19, dass die Anwendung auf das Einfachschichtpotenzial S die Form $TS = K'^2 - I$ annimmt, wobei K' wieder die Normalableitung von S bezeichnet.

6.2.1 Die Randintegraloperatoren auf dem Einheitskreis

Im Folgenden werden wir die Randintegraloperatoren auf dem Einheitskreis benötigen. Dazu wollen wir sie zusammenfassend im nächsten Lemma parametrisieren. Des Weiteren werden wir uns auf Dichten aus den Räumen $C_{\text{ger}}^{0,\alpha}[0, 2\pi] \subset C^{0,\alpha}(\mathbb{R})$ und $C_{\text{ger}}^{1,\alpha}[0, 2\pi] \subset C^{1,\alpha}(\mathbb{R})$ einschränken, da dies für die Problemstellung ausreichend ist.

Lemma 6.2 *Seien $\varphi \in C_{\text{ger}}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$ und $\psi \in C_{\text{ger}}^{1,\alpha}[0, 2\pi]$. Dann nehmen die Randintegraloperatoren (3.13)-(3.16) auf dem Einheitskreis die Form*

$$\begin{aligned} (S_0\varphi)(t) &:= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} -\ln\left(4 \sin^2 \frac{t-\tau}{2}\right) \varphi(\tau) d\tau, \quad t \in [0, 2\pi], \\ (K_0\varphi)(t) &:= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\tau) d\tau, \quad t \in [0, 2\pi], \\ (K'_0\varphi)(t) &:= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\tau) d\tau, \quad t \in [0, 2\pi], \\ (T_0\psi)(t) &:= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cot \frac{\tau-t}{2} \psi'(\tau) d\tau, \quad t \in [0, 2\pi], \end{aligned}$$

an. Das modifizierte Einfachschichtpotenzial \tilde{S} hat auf dem Einheitskreis die Form

$$(\tilde{S}_0\varphi)(t) = \frac{1}{2}(S_0\varphi)(t) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\tau) d\tau, \quad t \in [0, 2\pi].$$

BEWEIS. Seien $\varphi \in C_{\text{ger}}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$ und $\psi \in C_{\text{ger}}^{1,\alpha}[0, 2\pi]$. Weiterhin sei $z(t) := (\cos t, \sin t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$ eine reguläre 2π -periodische Parametrisierung des Einheitskreises, dann ist $|z'(t)| = 1$ für alle $t \in [0, 2\pi]$. Wir substituieren nun immer $x = z(t)$ und $y = z(\tau)$. Außerdem werden wir vereinfachend $\varphi(t)$ anstelle von $\varphi(z(t))$ schreiben. Dann erhalten wir mit Hilfe von trigonometrischen Identitäten für den Operator S

$$\begin{aligned} (S_0\varphi)(t) &= 2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{4\pi} \ln \frac{1}{|z(t) - z(\tau)|^2} \varphi(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \frac{1}{(\cos t - \cos \tau)^2 + (\sin t - \sin \tau)^2} \varphi(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} -\ln \left(4 \sin^2 \frac{t - \tau}{2} \right) \varphi(\tau) d\tau, \quad t \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

Für Punkte x, y auf dem Einheitskreis gilt $|x| = |y| = 1$, sowie $\nu(x) = x$ und $\nu(y) = y$. Bei der Parametrisierung des Operators K müssen wir die Normalableitung der Grundlösung $\Phi(x, y)$ im Punkt x bilden. Nach Definition gilt:

$$\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} := \langle \text{grad}_x \Phi(x, y), \nu(x) \rangle.$$

Mit Satz 3.2 bekommen wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} &= -\frac{1}{2\pi} \frac{\langle x - y, x \rangle}{|x - y|^2} = -\frac{1}{2\pi} \frac{x^2 - xy}{x^2 - 2xy + y^2} \\ &= -\frac{1}{2\pi} \frac{1 - xy}{2(1 - xy)} = -\frac{1}{4\pi}. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir für die parametrisierte Form von K

$$\begin{aligned} (K_0\varphi)(t) &= 2 \int_0^{2\pi} -\frac{1}{4\pi} \varphi(\tau) |z'(\tau)| d\tau \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\tau) d\tau, \quad t \in [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

Ähnlich kann man

$$\frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} = -\frac{1}{4\pi}$$

berechnen, so dass sich für K' analog

$$(K'_0\varphi)(t) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\tau) d\tau, \quad t \in [0, 2\pi],$$

ergibt.

Die Parametrisierung des Operators T erfordert die Berechnung von

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \ln \left(4 \sin^2 \frac{t-\tau}{2} \right) &\stackrel{(*)}{=} \frac{\partial}{\partial t} \ln (2 - 2 \cos(t-\tau)) \\ &= \frac{\sin(t-\tau)}{1 - \cos(t-\tau)} \\ &\stackrel{(**)}{=} \cot \left(\frac{t-\tau}{2} \right), \end{aligned}$$

wobei die trigonometrischen Identitäten für $(*)$ und $(**)$ in [Zei03] auf den Seiten 60 bzw. 65 zu finden sind. Mit der Darstellung $T\psi = \frac{\partial}{\partial t} S \frac{\partial \varphi}{\partial s}$ aus Bemerkung 3.15 erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} (T_0\psi)(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} -\frac{\partial}{\partial t} \ln \left(4 \sin^2 \frac{t-\tau}{2} \right) \psi'(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} -\cot \left(\frac{t-\tau}{2} \right) \psi'(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cot \left(\frac{\tau-t}{2} \right) \psi'(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Die Form des Operators \tilde{S}_0 folgt aus dem Beweis von Satz 5.8. □

6.2.2 Modifizierung der Normalableitung des Doppelschichtpotenzials

Wir wollen die Wirkung der Operatoren S_0 und T_0 auf die trigonometrischen Monome $f_m(t) := e^{imt}$ für $m \in \mathbb{Z}$ untersuchen. Dabei werden wir in den nächsten Lemmata feststellen, dass diese Operatoren nicht injektiv sind. Aus diesem Grund wollen wir den Operator T_0 leicht modifizieren, um einen beschränkt invertierbaren Operator zu erhalten.

Des Weiteren werden uns die folgenden Aussagen bei der numerischen Behandlung der auftretenden Integraloperatoren behilflich sein.

Lemma 6.3 *Für die trigonometrischen Monome gilt*

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left(4 \sin^2 \frac{s}{2} \right) f_m(s) ds = \begin{cases} 0, & m = 0, \\ -\frac{1}{|m|}, & m = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} \quad (6.1)$$

BEWEIS. Ein Beweis hierzu findet sich in [Kre99], 8.21. \square

Mit diesem Lemma ist es uns nun möglich, das Verhalten der Operatoren S_0 und T_0 auf die trigonometrischen Monome zu studieren.

Lemma 6.4 Für $m \in \mathbb{Z}, m \neq 0$ gilt

$$S_0 f_m = \frac{1}{|m|} f_m$$

und

$$T_0 f_m = -|m| f_m.$$

Weiterhin erhalten wir $S_0 f_0 = T_0 f_0 = 0$, d.h. die Operatoren S_0 und T_0 sind nicht injektiv.

BEWEIS. Wir benutzen Lemma 6.3 und substituieren $s := t - \tau$, t fest, in (6.1). Durch die 2π -Periodizität des Integranden erhalten wir für $m \in \mathbb{Z}, m \neq 0$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{|m|} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left(4 \sin^2 \frac{s}{2} \right) e^{-ims} ds \\ &= \frac{e^{-imt}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left(4 \sin^2 \frac{t - \tau}{2} \right) e^{im\tau} d\tau. \end{aligned}$$

Ein Vergleich mit der Darstellung von S_0 aus Lemma 6.2 ergibt

$$S_0 f_m = \frac{1}{|m|} f_m.$$

Nun nutzen wir, dass $T\varphi = \frac{\partial}{\partial t} S \frac{\partial \varphi}{\partial s}$ gilt, und bekommen

$$\begin{aligned} T_0 f_m(t) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{im}{|m|} e^{imt} \right) \\ &= -|m| e^{imt}. \end{aligned}$$

Aus (6.1) für $m = 0$ folgt sofort

$$S_0 f_0 = T_0 f_0 = 0$$

und das Lemma ist bewiesen. \square

Da der Operator T_0 nach Lemma 6.4 nicht injektiv ist, wollen wir ihn etwas modifizieren, um einen bijektiven Operator zu erhalten, der aufgrund der benötigten Äquivalenz der betrachteten Gleichungssysteme von existenzieller Bedeutung ist.

Im weiteren Verlauf dieses Kapitels wollen wir uns daher mit dem Operator

$$(\tilde{T}_0\varphi)(t) := -2(T_0\varphi)(t) + (N\varphi)(t) \quad (6.2)$$

beschäftigen und von ihm zeigen, dass er von $C_{\text{ger}}^{1,\alpha}[0, 2\pi]$ nach $C_{\text{ger}}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$ beschränkt invertierbar ist. Der hierbei auftretende Operator N hat für $\varphi \in C_{\text{ger}}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$ die Form

$$(N\varphi)(t) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\tau) d\tau, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Wenn wir uns die Darstellung der Integraloperatoren auf dem Einheitskreis in Lemma 6.2 ansehen, bemerken wir, dass die folgenden Zusammenhänge bestehen:

$$\tilde{S}_0 = \frac{1}{2}S_0 + N, \quad (6.3)$$

$$K_0 = -N = K'_0. \quad (6.4)$$

Aus der Definition von N folgt sofort

$$N^2 = N. \quad (6.5)$$

Damit können wir auch den folgenden Satz beweisen.

Satz 6.5 *Der in (6.2) definierte Operator \tilde{T}_0 ist ein beschränkter und bijektiver Operator von $C_{\text{ger}}^{1,\alpha}[0, 2\pi]$ nach $C_{\text{ger}}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$ mit einer beschränkten Inversen $\tilde{T}_0^{-1} : C_{\text{ger}}^{0,\alpha}[0, 2\pi] \rightarrow C_{\text{ger}}^{1,\alpha}[0, 2\pi]$.*

BEWEIS. Wir werden zeigen, dass \tilde{T}_0 der inverse Operator zum in (5.14) definierten Operator \tilde{L} ist. Im Beweis von Satz 5.8 haben wir gesehen, dass \tilde{L} mit dem modifizierten Einfachschichtpotenzial auf dem Einheitskreis \tilde{S}_0 für Dichten aus $C_{\text{ger}}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$ übereinstimmt.

Daher berechnen wir mit (6.2) und (6.3)

$$\tilde{T}_0\tilde{L} = \tilde{T}_0\tilde{S}_0 = -T_0S_0 - 2T_0N + \frac{1}{2}NS_0 + N^2$$

und betrachten die einzelnen Summanden der rechten Seite dieser Darstellung.

Für $t \in [0, 2\pi]$ und festes φ ist $(N\varphi)(t)$ konstant. Aus der Linearität von \tilde{T}_0 und Lemma 6.4 erhalten wir daher

$$T_0 N = 0. \quad (6.6)$$

Weiterhin nutzen wir die Selbstadjungiertheit des Operators S_0 aus Satz 3.17 bezüglich des Dualsystems $\langle C_{\text{ger}}^{0,\alpha}[0, 2\pi], C_{\text{ger}}^{0,\alpha}[0, 2\pi] \rangle$ mit der Bilinearform

$$\langle \varphi, \psi \rangle := \int_0^{2\pi} \varphi(\tau) \psi(\tau) d\tau, \quad \varphi, \psi \in C_{\text{ger}}^{0,\alpha}[0, 2\pi],$$

sowie die Eigenschaft $S_0 f_0 = 0$ nach Lemma 6.4 und erhalten

$$(NS_0\varphi)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (S_0\varphi)(\tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\tau) S_0 f_0(\tau) d\tau = 0 \quad (6.7)$$

für $t \in [0, 2\pi]$. Aus (3.27) und (6.4) bis (6.7) erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} \tilde{T}_0 \tilde{S}_0 &= I - K_0'^2 + N \\ &= I, \end{aligned} \quad (6.8)$$

wobei I für die Identität in $C_{\text{ger}}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$ steht.

Auf ähnliche Art und Weise bekommen wir

$$\tilde{L} \tilde{T}_0 = I. \quad (6.9)$$

Hierbei bezeichne I die Identität in $C_{\text{ger}}^{1,\alpha}[0, 2\pi]$.

Da wir nun gezeigt haben, dass \tilde{T}_0 die Inverse des Operators \tilde{L} ist, erhalten wir aus Satz 5.8, dass \tilde{T}_0 beschränkt invertierbar von $C_{\text{ger}}^{1,\alpha}[0, 2\pi]$ nach $C_{\text{ger}}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$ ist. \square

6.2.3 Die Integralgleichung zweiter Art

Mit dem soeben dargestellten Operator \tilde{T}_0 können wir nun die Integralgleichung aus (5.13) äquivalent umformen in die Integralgleichung

$$\tilde{\varphi} - L_{\text{reg}} \tilde{\varphi} = \check{g} \quad \text{auf } [0, 2\pi], \quad (6.10)$$

wobei der Operator L_{reg} definiert ist durch

$$L_{\text{reg}}\tilde{\varphi} := (-\tilde{T}_0 L_c)\tilde{\varphi} \quad (6.11)$$

mit $\tilde{\varphi} \in C_{\text{ger}}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$ und \check{g} sich ergibt durch

$$\check{g} := \tilde{T}_0 g \quad \text{auf } [0, 2\pi].$$

Den Zusammenhang zwischen (5.13) und (6.10) wollen wir jetzt im folgenden Satz analysieren.

Satz 6.6 *Sei $\tilde{\varphi} \in C_{\text{ger}}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$. Dann löst $\tilde{\varphi}$ Gleichung (6.10) genau dann, wenn sie auch (5.13) löst. Weiterhin ist (6.10) eine Integralgleichung zweiter Art.*

BEWEIS. Sei $\tilde{\varphi} \in C_{\text{ger}}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$ eine Lösung von (6.10). Wir multiplizieren Gleichung (6.10) von links mit der nach Satz 6.5 eindeutig bestimmten Inversen \tilde{T}_0^{-1} von \tilde{T}_0 . Diese Inverse ist nach Satz 6.5 der Operator $\tilde{S}_0 : C_{\text{ger}}^{0,\alpha}[0, 2\pi] \rightarrow C_{\text{ger}}^{1,\alpha}[0, 2\pi]$ und stimmt nach Satz 5.8 mit dem Operator \tilde{L} überein. Für die linke Seite von (6.10) ergibt sich

$$\begin{aligned} \tilde{T}_0^{-1}(\tilde{\varphi} - L_{\text{reg}}\tilde{\varphi}) &= \tilde{T}_0^{-1}\tilde{\varphi} - \tilde{T}_0^{-1}L_{\text{reg}}\tilde{\varphi} \\ &= \tilde{T}_0^{-1}\tilde{\varphi} - \tilde{T}_0^{-1}(-\tilde{T}_0 L_c)\tilde{\varphi} \\ &= \tilde{L}\tilde{\varphi} + L_c\tilde{\varphi} \quad \text{auf } [0, 2\pi]. \end{aligned}$$

Für die rechte Seite bekommen wir analog

$$\tilde{T}_0^{-1}\check{g} = g \quad \text{auf } [0, 2\pi].$$

Damit löst $\tilde{\varphi}$ auch (5.13). Analog erhalten wir die Gegenrichtung. Weiterhin ist L_c nach Satz 5.9 kompakt. Durch die Beschränktheit von \tilde{T}_0 folgt damit aus Satz 2.5 die Kompaktheit von $\tilde{T}_0 L_c$. Wir erhalten also eine Integralgleichung der Form „I – kompakt“. Damit ist (6.10) eine Integralgleichung zweiter Art. \square

Wir erhalten das Hauptresultat dieses Kapitels:

Korollar 6.7 *Die in (5.1) definierte Funktion u mit Dichte φ , definiert in Satz 5.4, löst das Problem 4.1, wenn die Dichte $\tilde{\varphi} \in C_{\text{ger}}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$ die Integralgleichung (6.10) löst.*

BEWEIS. Dies folgt unmittelbar aus Satz 6.6. \square

Kapitel 7

Numerische Behandlung

In diesem Kapitel widmen wir uns der numerischen Behandlung des in Abschnitt 6.2 hergeleiteten Lösungsverfahrens zur Lösung des Problems aus Kapitel 4 mit einer Integralgleichung zweiter Art und des dazu äquivalenten Lösungsverfahrens mit einer Integralgleichung erster Art aus Abschnitt 6.1.

Unser Hauptaugenmerk liegt auf der numerischen Lösung der Integralgleichung zweiter Art, die in den nächsten Abschnitten ausführlich behandelt wird. Die Integralgleichung erster Art werden wir nur kurz in Abschnitt 7.6 betrachten.

Ein aufgrund seiner schnellen Konvergenz bei Integralgleichungen zweiter Art sehr effizientes Verfahren ist die Methode von Nyström. Jedoch wollen wir ein so genanntes Kollokationsverfahren nutzen, welches uns bessere Mittel für die Konvergenzanalyse zur Verfügung stellt, da der Kern des zu approximierenden Integrals hierbei wieder ein Integral ist. Ein weiterer Grund liegt darin, dass auf die Integralgleichung erster Art das Nyströmverfahren nicht angewendet werden kann und wir so eine bessere Vergleichsmöglichkeit der numerischen Verfahren beider Integralgleichungen haben.

Die auftretenden Integrale müssen wir numerisch approximieren. Dazu werden wir in Abschnitt 7.3 Quadraturverfahren vorstellen. Wir wollen die benötigten Quadraturformeln gewinnen, indem wir in geeigneten Unterräumen interpolieren und dann exakt integrieren.

Bei der Konvergenzanalyse machen wir uns die Eigenschaft zu Nutze, dass sich das Kollokationsverfahren als Projektionsmethode interpretieren lässt und wir uns so der Eigenschaften von Projektionsoperatoren bedienen können. Dies wird genauer in Abschnitt 7.5 ausgeführt.

Wir betrachten die Integralgleichung zweiter Art (6.10):

$$\tilde{\varphi} - L_{\text{reg}}\tilde{\varphi} = \check{g} \quad \text{auf } [0, 2\pi].$$

Der hierbei auftretende Operator $(I - L_{\text{reg}})$ bildet von $C_{\text{ger}}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$ nach $C_{\text{ger}}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$ ab und ermöglicht uns eine Diskretisierung mittels trigonometrischer Interpolation.

7.1 Trigonometrische Interpolation

Wir benötigen für die numerische Approximation der theoretischen Lösung geeignete endlich dimensionale Unterräume trigonometrischer Polynome. Diese sowie zugehörige Interpolations- und Projektionsoperatoren wollen wir in diesem Abschnitt einführen.

Definition 7.1 Für $n \in \mathbb{N}$ ist die Menge T_n der *trigonometrischen Polynome* vom Grad $\leq n$ definiert als

$$T_n := \left\{ \sum_{k=0}^n \alpha_k \cos(kt) + \sum_{k=1}^n \beta_k \sin(kt) : \alpha_k, \beta_k \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \right\}. \quad (7.1)$$

T_n ist ein $(2n + 1)$ -dimensionaler reeller Vektorraum und enthalten in $C[0, 2\pi]$.

Weiter ist die Menge $T_{n,\text{ger}}$ der *geraden trigonometrischen Polynome* vom Grad $\leq n$ definiert als

$$T_{n,\text{ger}} := \left\{ \sum_{k=0}^n \alpha_k \cos(kt) : \alpha_k \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R} \right\}. \quad (7.2)$$

Sie ist ein $(n + 1)$ -dimensionaler reeller Vektorraum und enthalten in $C_{\text{ger}}^{1,\alpha}[0, 2\pi] \subset C_{\text{ger}}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$.

Da wir die trigonometrische Interpolation mit einer geraden Knotenzahl verwenden wollen, wählen wir zu vorgegebenen $n \in \mathbb{N}$ die $2n$ äquidistanten Stützstellen

$$t_j^{(n)} := \frac{j\pi}{n} \quad j = 0, \dots, 2n - 1. \quad (7.3)$$

Der Einfachheit halber schreiben wir t_j anstelle von $t_j^{(n)}$.

Als erstes Ergebnis erhalten wir den

Satz 7.2 Für beliebiges $f \in C[0, 2\pi]$ existiert genau ein $u_f \in T_n$,

$$u_f(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} [\alpha_k \cos(kt) + \beta_k \sin(kt)] + \frac{\alpha_n}{2} \cos(kt),$$

welches die Interpolationsbedingung

$$u_f(t_j) = f(t_j) \quad \text{für } j = 0, \dots, 2n - 1$$

erfüllt. Die Koeffizienten von u_f sind dabei gegeben durch

$$\alpha_k := \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{2n-1} f(t_j) \cos(kt_j), \quad k = 0, \dots, n,$$

$$\beta_k := \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{2n-1} f(t_j) \sin(kt_j), \quad k = 1, \dots, n - 1.$$

BEWEIS. Ein Beweis hierzu findet sich in [Kre98], Thm. 8.25. □

Lemma 7.3 Für die äquidistante Unterteilung von $[0, 2\pi]$, wie sie in (7.3) gegeben wurde, bildet

$$\left\{ L_j^n(t) := \frac{1}{2n} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \cos(k(t - t_j)) + \cos(n(t - t_j)) \right), \right. \\ \left. t \in [0, 2\pi], j = 0, \dots, 2n - 1 \right\}$$

die so genannte Lagrange-Basis von T_n , d.h. ihre Elemente bilden eine Basis von T_n und erfüllen die Beziehung

$$L_j^n(t_k) = \delta_{jk} \tag{7.4}$$

für alle $j, k = 0, \dots, 2n - 1$.

BEWEIS. Ein Beweis hierzu findet sich in [Wer92], Abschnitt 3.2.2, Lemma 2.3. □

Lemma 7.4 Für die äquidistante Unterteilung von $[0, 2\pi]$, wie sie in (7.3) gegeben wurde, seien L_j^n die Elemente der Lagrange-Basis von T_n . Dann bildet die Menge

$$\left\{ L_0^n, L_n^n, L_j^n + L_{2n-j}^n : j = 1, \dots, n - 1 \right\} \tag{7.5}$$

eine Basis von $T_{n,ger}$.

BEWEIS. Es ist einfach einzusehen, dass die Elemente L_0^n, L_n^n und $L_j^n + L_{2n-j}^n, j = 1, \dots, n-1$, gerade und somit in $T_{n,\text{ger}}$ enthalten sind. Dass (7.5) eine Basis von $T_{n,\text{ger}}$ bildet, folgt schließlich aus der linearen Unabhängigkeit der Lagrange-Basis von T_n und der Dimension von $T_{n,\text{ger}}$. \square

Satz 7.5 *Wir wollen die Räume T_n und $T_{n,\text{ger}}$ mit der äquidistanten Unterteilung von $[0, 2\pi]$ aus (7.3) versehen. Dann werden durch $P_n : C[0, 2\pi] \rightarrow T_n$ und $P_{n,\text{ger}}^{k,\alpha} : C_{\text{ger}}^{k,\alpha}[0, 2\pi] \rightarrow T_{n,\text{ger}}$ für $k = 0, 1$ beschränkte, lineare Operatoren gegeben, die für $g \in C[0, 2\pi]$ und $f \in C_{\text{ger}}^{k,\alpha}[0, 2\pi], k = 0, 1$, definiert sind durch*

$$P_n g := \sum_{j=0}^{2n-1} g(t_j) L_j^n$$

und

$$P_{n,\text{ger}}^{k,\alpha} f := \sum_{j=0}^{2n-1} f(t_j) L_j^n, \quad k = 0, 1.$$

Diese Operatoren heißen *trigonometrische Interpolationsoperatoren auf T_n bzw. $T_{n,\text{ger}}$* . Sie sind Projektionsoperatoren mit

$$P_{n,\text{ger}}^{k,\alpha} = P_n|_{C_{\text{ger}}^{k,\alpha}[0, 2\pi]}, \quad k = 0, 1.$$

BEWEIS. Ein Beweis hierzu ergibt sich aus [Kre99], Thm. 11.2 und Thm. 13.4. \square

Satz 7.6 *Die Projektionsoperatoren erfüllen für alle $f \in C^{k,\alpha}[0, 2\pi]$*

$$\|P_n f - f\|_\infty \leq C \frac{\ln n}{n^{k+\alpha}} \|f\|_{k,\alpha} \quad \text{für alle } \alpha \in (0, 1] \quad (7.6)$$

sowie

$$\|P_n f - f\|_{l,\beta} \leq C \frac{\ln n}{n^{k-l+\alpha-\beta}} \|f\|_{k,\alpha} \quad (7.7)$$

für alle $k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ mit $l \leq k$ und alle $0 < \beta \leq \alpha \leq 1$ mit einer von k, l, α und β abhängigen Konstanten C .

BEWEIS. Ein Beweis hierzu ergibt sich aus [Kre99], Thm. 11.6, S.184f. \square

Korollar 7.7

$$P_n : C^{0,\beta}[0, 2\pi] \rightarrow T_n, \|\cdot\|_{0,\alpha} \subset C^{0,\alpha}[0, 2\pi]$$

ist beschränkt für $0 < \alpha < \beta \leq 1$.

Für $\varphi \in C_{\text{ger}}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$ und $\beta = \alpha$ existiert für $n > 1$ ein $C > 0$, so dass gilt

$$\|P_n \varphi\|_{0,\alpha} \leq C \ln n \|\varphi\|_{0,\alpha}. \quad (7.8)$$

BEWEIS. Sei $\varphi \in C^{0,\beta}[0, 2\pi]$ und $0 < \alpha < \beta \leq 1$. Dann folgt mit Satz 7.6

$$\begin{aligned} \|P_n \varphi\|_{0,\alpha} &\leq \|P_n \varphi - \varphi\|_{0,\alpha} + \|\varphi\|_{0,\alpha} \\ &\leq C \frac{\ln n}{n^{\beta-\alpha}} \|\varphi\|_{0,\beta} + \|\varphi\|_{0,\beta} \\ &= \tilde{C} \|\varphi\|_{0,\beta}. \end{aligned}$$

Für $\varphi \in C_{\text{ger}}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$ und $\beta = \alpha$ ist $n^{\beta-\alpha} = 1$ und eine analoge Abschätzung liefert (7.8) für $n > 1$. \square

Satz 7.8 Für $n > 1$ existiert ein $C > 0$ mit

$$\|P_n\|_{\infty} \leq C \ln n.$$

BEWEIS. Ein Beweis hierzu findet sich in [Kre99], Thm. 11.4. \square

7.2 Ein Kollokationsverfahren

Wir haben im vorigen Abschnitt Projektions- und Interpolationsoperatoren eingeführt. Diese ermöglichen uns, die unendlich dimensionale Operatorgleichung zweiter Art durch ein endlich dimensionales lineares Gleichungssystem zu approximieren. Wir wollen in diesem Abschnitt dieses Verfahren formal einführen.

Definition 7.9 (Projektionsverfahren) Sei X ein Banachraum und sei $A : X \rightarrow X$ ein beschränkter, linearer Operator. Für $n \in \mathbb{N}$ seien $X_n \subset X$ eine Folge von Unterräumen mit $\dim X_n = n$ und $P_n : X \rightarrow X_n$ Projektionsoperatoren. Die durch X_n und P_n erzeugte *Projektionsmethode* approximiert (bei vorgegebenem $f \in X$) die Gleichung

$$\varphi - A\varphi = f \tag{7.9}$$

für $\varphi \in X$ durch die projizierte Gleichung

$$\varphi_n - P_n A \varphi_n = P_n f \tag{7.10}$$

für $\varphi_n \in X_n$. Die Projektionsmethode heißt *konvergent* für den Operator A , falls es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt derart, dass für jedes $f \in A(X)$ die Näherungsgleichung (7.10) für alle $n \geq n_0$ eine eindeutige Lösung $\varphi_n \in X_n$ besitzt, und wenn diese Lösungen für $n \rightarrow \infty$ gegen die eindeutige Lösung φ von $\varphi - A\varphi = f$ konvergieren.

Um die auftretende Operatorgleichung approximativ zu lösen, werden wir ein Kollokationsverfahren verwenden, welches ein spezielles Projektionsverfahren ist. Dazu definieren wir formal:

Definition 7.10 (Kollokationsverfahren) Sei X ein Banachraum mit $X \subset C[a, b]$ und $A : X \rightarrow X$ ein beschränkter linearer Operator. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $X_n \subset X$ eine Folge von Unterräumen mit $\dim X_n = n$. Wir wählen n Punkte $x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)} \in [a, b]$ derart, dass der Unterraum X_n unisolvant ist bezüglich dieser Punkte, also die Interpolationsaufgabe mit dem Unterraum X_n und den Interpolationspunkten $x_1^{(n)}, \dots, x_n^{(n)}$ eindeutig lösbar ist.

Dann besteht das *Kollokationsverfahren* zur näherungsweise Lösung der Integralgleichung

$$\varphi - A\varphi = f, \quad \varphi, f \in X, \quad (7.11)$$

in der Bestimmung einer Funktion $\varphi_n \in X_n$, so dass die Gleichung (7.11) in den Kollokationspunkten erfüllt ist, d.h. dass

$$\varphi_n(x_j^{(n)}) - (A\varphi_n)(x_j^{(n)}) = f(x_j^{(n)}), \quad j = 1, \dots, n, \quad (7.12)$$

gilt.

Die Interpretation des Kollokationsverfahrens als Projektionsmethode wird im folgenden Lemma verdeutlicht:

Lemma 7.11 *Unter den Bedingungen von Definition 7.10 löst $\varphi_n \in X_n$ die Gleichung*

$$\varphi_n - P_n A \varphi_n = P_n f \quad (7.13)$$

genau dann, wenn $\varphi_n \in X_n$ die Gleichung (7.12) löst. Die Operatoren P_n bezeichnen Projektions- und Interpolationsoperatoren auf den mit der Lagrange-Basis an den Kollokationspunkten versehenen Unterräumen $X_n \subset X$.

Die Gleichungen (7.12) und (7.13) entsprechen einem $n \times n$ Gleichungssystem.

BEWEIS. Sei $\varphi_n \in X_n$ eine Lösung von (7.13). Dann bedeutet (7.13), dass die Interpolierenden $\varphi_n - P_n A \varphi_n$ und $P_n f$ übereinstimmen. Dies ist wiederum gleichbedeutend mit der Aussage von (7.12), dass $\varphi_n - A\varphi_n$ und f an den Kollokationspunkten die gleichen Werte haben.

Sei nun $\{u_1^{(n)}, \dots, u_n^{(n)}\}$ die Lagrange-Basis zu den Kollokationspunkten von X_n . Dann können wir $\varphi_n \in X_n$ darstellen als lineare Kombination

$$\varphi_n = \sum_{k=1}^n \gamma_k u_k^{(n)},$$

wobei $\gamma_j = \varphi_n(x_j^{(n)})$, $j = 1, \dots, n$, gilt. Dadurch sehen wir, dass (7.12) bzw. (7.13) als lineares $n \times n$ Gleichungssystem

$$\gamma_j - \sum_{k=1}^n \gamma_k (Au_k^{(n)})(x_j^{(n)}) = f(x_j^{(n)}), \quad j = 1, \dots, n, \quad (7.14)$$

mit reellen Koeffizienten $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ geschrieben werden kann. \square

Bemerkung 7.12 Das Kollokationsverfahren in der Form von Lemma 7.11 ist nur ein semi-diskretes Verfahren, da der Operator A im Allgemeinen nicht exakt auf den Basisfunktionen $u_1^{(n)}, \dots, u_n^{(n)}$ des Raums X_n ausgewertet werden kann.

Daher müssen wir auch ihn entsprechend approximieren, um ein vollständig diskretes Verfahren zu erhalten.

7.3 Quadraturverfahren

Um das semidiskrete Kollokationsverfahren aus Abschnitt 7.2 in ein vollständig diskretes Verfahren zu überführen, führen wir in diesem Abschnitt Quadraturformeln zur Approximation der auftretenden Integraloperatoren ein.

Dabei hat eine Quadraturformel zur numerischen Approximation von Integralen der Form

$$Q(g) := \int_a^b g(x) dx, \quad g \in C[a, b],$$

im Allgemeinen die Gestalt

$$Q_n(g) := \sum_{j=1}^n \alpha_j^{(n)} g(x_j^{(n)}), \quad n \in \mathbb{N}, \alpha_j^{(n)} \in \mathbb{R}, j = 0, \dots, n.$$

Hierbei seien $n \in \mathbb{N}$ und $[a, b] \subset \mathbb{R}$ mit $a \leq x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \dots < x_n^{(n)} \leq b$ gegeben.

Eine Folge (Q_n) von Quadraturformeln nennen wir ein *Quadraturverfahren*.

Definition 7.13 Ein Quadraturverfahren (Q_n) heißt *konvergent*, falls $Q_n(g) \rightarrow Q(g)$, $n \rightarrow \infty$, für alle $g \in C[a, b]$, d.h. falls die Folge der linearen Funktionale $Q_n : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ punktweise gegen das Integral $Q : C[a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert.

7.3.1 Quadraturformel für den stark singulären Operator

Wir wollen uns jetzt mit der Entwicklung einer Quadraturformel für

$$(\tilde{T}_0\varphi)(t) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[\cot\left(\frac{\tau-t}{2}\right) \varphi'(\tau) - \frac{1}{2}\varphi(\tau) \right] d\tau$$

beschäftigen. Dazu werden wir zuerst die Dichte $\varphi \in C_{\text{ger}}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$ durch ein trigonometrisches Interpolationspolynom interpolieren und dann exakt integrieren. Nach Satz 7.5 stimmen P_n und $P_{n,\text{ger}}^{0,\alpha}$ für $\varphi \in C_{\text{ger}}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$ überein. Der Einfachheit halber wollen wir daher von jetzt an den Operator P_n benutzen. Wir berechnen

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[\cot\left(\frac{\tau-t}{2}\right) \varphi'(\tau) - \frac{1}{2}\varphi(\tau) \right] d\tau \\ & \approx -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[\cot\left(\frac{\tau-t}{2}\right) ((P_n\varphi)(\tau))' - \frac{1}{2}(P_n\varphi)(\tau) \right] d\tau \\ & = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[\cot\left(\frac{\tau-t}{2}\right) \left(\sum_{j=0}^{2n-1} \varphi(t_j) L_j^n(\tau) \right)' - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{2n-1} \varphi(t_j) L_j^n(\tau) \right] d\tau \\ & = \sum_{j=0}^{2n-1} \varphi(t_j) R_j^n(t), \quad t \in [0, 2\pi], \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} R_j^n(t) & := -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[\cot\left(\frac{\tau-t}{2}\right) (L_j^n)'(\tau) - \frac{1}{2}L_j^n(\tau) \right] d\tau \\ & = (\tilde{T}_0 L_j^n)(t). \end{aligned} \tag{7.15}$$

Wir wollen die Gewichte $R_j^n(t)$ berechnen. Dazu benötigen wir das folgende

Lemma 7.14 Für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$(\tilde{T}_0 \sin m\cdot)(t) = 2m \sin mt, \tag{7.16}$$

$$(\tilde{T}_0 \cos m\cdot)(t) = 2m \cos mt, \tag{7.17}$$

mit $t \in [0, 2\pi]$. Des Weiteren haben wir für konstante Funktionen $\varphi \equiv c$

$$(\tilde{T}_0\varphi)(t) = c \quad \text{für alle } t \in [0, 2\pi]. \tag{7.18}$$

BEWEIS. Zuerst betrachten wir den Operator $(N\varphi)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\tau) d\tau$ in (6.2). Für $m \in \mathbb{N}$ und $t \in [0, 2\pi]$ gilt

$$\int_0^{2\pi} \cos m\tau d\tau = \int_0^{2\pi} \sin m\tau d\tau = 0,$$

daher ist $(N \cos m\cdot)(t) = (N \sin m\cdot)(t) = 0$ für $t \in [0, 2\pi]$.

Außerdem erhalten wir aus der Eulerschen Formel $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ die Beziehung

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

sowie

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Damit liefert uns Lemma 6.4 und (6.2)

$$(\tilde{T}_0 \sin m\cdot)(t) = 2m \frac{e^{imt} - e^{-imt}}{2i} = 2m \sin mt$$

und

$$(\tilde{T}_0 \cos m\cdot)(t) = 2m \frac{e^{imt} + e^{-imt}}{2} = 2m \cos mt.$$

Somit erhalten wir (7.16) und (7.17).

Die Gleichheit (7.18) erhalten wir sofort mit $T_0 f_0 = 0$ aus Lemma 6.4 und

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} c d\tau = c. \quad \square$$

Nun können wir die Gewichte $R_j^n(t)$ berechnen. Mit der Linearität von \tilde{T}_0 und einem Additionstheorem ergibt sich:

$$\begin{aligned} R_j^n(t) &= (\tilde{T}_0 L_j^n)(t) \\ &= \frac{1}{2n} \left((\tilde{T}_0 1)(t) + 2 \sum_{m=1}^{n-1} (\tilde{T}_0 \cos(m(\cdot - t_j)))(t) \right. \\ &\quad \left. + (\tilde{T}_0 \cos(n(\cdot - t_j)))(t) \right) \\ &= \frac{1}{2n} \left(1 + 2 \sum_{m=1}^{n-1} \left[\cos mt_j (\tilde{T}_0 \cos(m\cdot))(t) + \sin mt_j (\tilde{T}_0 \sin(m\cdot))(t) \right] \right. \\ &\quad \left. + \cos nt_j (\tilde{T}_0 \cos(n\cdot))(t) + \sin nt_j (\tilde{T}_0 \sin(n\cdot))(t) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2n} \left(1 + 2 \sum_{m=1}^{n-1} [2m(\cos mt_j \cos mt + \sin mt_j \sin mt)] \right. \\
&\quad \left. + 2n(\cos nt_j \cos nt + \sin nt_j \sin nt) \right) \\
&= \frac{1}{2n} \left(1 + 4 \sum_{m=1}^{n-1} m \cos(m(t - t_j)) + 2n \cos n(t - t_j) \right)
\end{aligned}$$

für $j = 0, \dots, 2n - 1$.

Wir haben also eine Quadraturformel gefunden, für die gilt:

$$P_n \tilde{T}_0 q = \tilde{T}_0 q \quad \text{für } q \in T_n$$

Wir halten fest:

Satz 7.15 *Der Operator \tilde{T}_0 bildet $T_{n,\text{ger}}$ bijektiv nach T_n ab. Auf der Lagrange-Basis von T_n hat er die Werte*

$$(\tilde{T}_0 L_j^n)(t) = \frac{1}{2n} \left(1 + 4 \sum_{m=1}^{n-1} m \cos(m(t - t_j)) + 2n \cos n(t - t_j) \right). \quad (7.19)$$

BEWEIS. Die Darstellung (7.19) erhalten wir aus der oben ausgeführten Rechnung und die Bijektivität aus der Injektivität von \tilde{T}_0 von $C_{\text{ger}}^{1,\alpha}[0, 2\pi]$ nach $C_{\text{ger}}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$ sowie der Tatsache, dass $T_{n,\text{ger}} \subset C_{\text{ger}}^{1,\alpha}[0, 2\pi] \subset C_{\text{ger}}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$ endliche Dimension hat. \square

7.3.2 Quadraturformel für den kompakten Operator

Um den kompakten Operator L_{reg} aus (6.11) zu approximieren, wollen wir ähnlich wie im vorigen Abschnitt vorgehen. Als Vorbereitung formen wir den Operator um, indem wir ihn auf ein Element $\varphi \in C_{\text{ger}}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$ anwenden. An dieser Stelle sei daher an die Definition der Operatoren

$$(\tilde{T}_0 \varphi)(t) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[\cot \left(\frac{\tau - t}{2} \right) \varphi'(\tau) - \frac{1}{2} \varphi(\tau) \right] d\tau$$

und

$$(L_c \varphi)(t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \{p(t, \tau) - 4\} \varphi(\tau) d\tau$$

aus (6.2) bzw. (5.8) erinnert.

Lemma 7.16 Sei $\varphi \in C_{\text{ger}}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$. Dann lässt sich der Operator L_{reg} darstellen durch

$$(L_{\text{reg}}\varphi)(t) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{p}(t, \sigma) \varphi(\sigma) d\sigma, \quad (7.20)$$

wobei der Kern \tilde{p} gegeben ist durch

$$\tilde{p}(t, \sigma) := \frac{1}{4} \tilde{T}_0 p(\cdot, \sigma)(t) - 1 \quad (7.21)$$

mit $0 < \alpha < \beta \leq 1$. Er befindet sich in $C_{\text{ger}}^{0,\beta}[0, 2\pi]$ bezüglich der ersten Variablen und in $C_{\text{ger}}^2[0, 2\pi]$ bezüglich der zweiten Variablen.

BEWEIS. In [Hee03], Beweis zu Satz 4.13, wurde gezeigt, dass der Kern $p(t, \sigma)$ des Operators L_c in $C_{\text{ger}}^2[0, 2\pi]$ liegt, wenn die Parametrisierungsfunktion x des C^3 -glatten Bogens Γ regulär ist. Daher ist auch der Integrand von L_c für $\varphi \in C_{\text{ger}}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$ gerade, so dass wir in der folgenden Rechnung

$$(L_c\varphi)(t) = \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} \{p(t, \tau) - 4\} \varphi(\tau) d\tau$$

betrachten können.

Mit der zweimal stetigen Differenzierbarkeit von $p(t, \sigma)$ und der Selbstadjungiertheit des Operators T_0 berechnen wir dann für $\varphi \in C_{\text{ger}}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$

$$\begin{aligned} (L_{\text{reg}}\varphi)(t) &= -(\tilde{T}_0 L_c\varphi)(t) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \cot\left(\frac{\tau-t}{2}\right) \frac{\partial}{\partial\tau} (L_c\varphi)(\tau) - \frac{1}{2} (L_c\varphi)(\tau) \right\} d\tau \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \cot\left(\frac{\tau-t}{2}\right) \frac{\partial}{\partial\tau} \left(\frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} \{p(\tau, \sigma) - 4\} \varphi(\sigma) d\sigma \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1}{16\pi} \int_0^{2\pi} \{p(\tau, \sigma) - 4\} \varphi(\sigma) d\sigma \right) \right\} d\tau \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \cot\left(\frac{\tau-t}{2}\right) \frac{\partial}{\partial\tau} p(\tau, \sigma) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} p(\tau, \sigma) + 2 \right\} d\tau \right) \varphi(\sigma) d\sigma. \end{aligned}$$

Wenn wir den Kern dieses Operators betrachten, erhalten wir

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \cot\left(\frac{\tau-t}{2}\right) \frac{\partial}{\partial\tau} p(\tau, \sigma) - \frac{1}{2} p(\tau, \sigma) + 2 \right\} d\tau \\ &= \frac{1}{4} \tilde{T}_0 p(\cdot, \sigma)(t) - 1. \end{aligned}$$

Dies liefert uns (7.21).

Da der Operator \tilde{T}_0 von $C_{\text{ger}}^{1,\beta}[0, 2\pi]$ nach $C_{\text{ger}}^{0,\beta}[0, 2\pi]$ abbildet und $p \in C_{\text{ger}}^2[0, 2\pi] \subset C_{\text{ger}}^{1,\beta}[0, 2\pi]$ bezüglich der ersten Variablen ist, sehen wir, dass \tilde{p} in $C_{\text{ger}}^{0,\beta}[0, 2\pi]$ liegt für $0 < \alpha < \beta \leq 1$ bezüglich t und in $C_{\text{ger}}^2[0, 2\pi]$ bezüglich σ . \square

An dieser Stelle können wir nun die explizite Form der Gleichung (6.10) festhalten:

$$\varphi(t) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{p}(t, \sigma) \varphi(\sigma) d\sigma = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[\cot\left(\frac{\tau-t}{2}\right) g'(\tau) - \frac{1}{2}g(\tau) \right] d\tau \quad (7.22)$$

für $t \in [0, 2\pi]$.

Nun sind wir in der Lage eine Quadraturformel für (7.20) anzugeben.

Satz 7.17 *Der numerische Approximationsoperator $L_{\text{reg}}^{n,n}$ zu L_{reg} ist für $\varphi \in C_{\text{ger}}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$ gegeben durch*

$$(L_{\text{reg}}^{n,n} \varphi)(t) := -\frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{2n-1} \left(\frac{1}{4} \sum_{j=0}^{2n-1} R_j^n(t) p(t_j, t_k) - 1 \right) \varphi(t_k), \quad (7.23)$$

wobei $R_j^n(t)$ die Gewichte der Quadraturformel für \tilde{T}_0 bezeichnen, die in (7.15) definiert sind.

BEWEIS. Wir betrachten für $\varphi \in C_{\text{ger}}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$ den Operator L_{reg} aus (7.20):

$$(L_{\text{reg}} \varphi)(t) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{p}(t, \sigma) \varphi(\sigma) d\sigma.$$

Nun interpolieren wir für festes t den Ausdruck $\tilde{p}(t, \sigma) \varphi(\sigma)$ bezüglich σ durch

$$(P_n(\tilde{p}(t, \cdot) \varphi(\cdot)))(\sigma) = \sum_{j=0}^{2n-1} \tilde{p}(t, t_j) \varphi(t_j) L_j^n(\sigma).$$

Wegen $\int_0^{2\pi} L_j^n(\sigma) d\sigma = \frac{\pi}{n}$ approximieren wir

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{p}(t, \sigma) \varphi(\sigma) d\sigma \approx -\frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{2n-1} \tilde{p}(t, t_j) \varphi(t_j) \int_0^{2\pi} L_j^n(\sigma) d\sigma \quad (7.24)$$

$$= -\frac{1}{2n} \sum_{j=0}^{2n-1} \tilde{p}(t, t_j) \varphi(t_j) \quad (7.25)$$

$$=: (L_{\text{reg}}^n \varphi)(t) \quad (7.26)$$

Das in (7.25) auftretende Integral \tilde{p} , welches in (7.21) definiert wurde, approximieren wir, indem wir uns die Quadraturformel des stark singulären Operators \tilde{T}_0 zu Nutze machen, die wir in Abschnitt 7.3.1 hergeleitet haben. Wir interpolieren zuerst bezüglich t und integrieren dann exakt. Es ist

$$\begin{aligned}
\tilde{p}(t, \sigma) &= \frac{1}{4} \tilde{T}_0 p(\cdot, \sigma)(t) - 1 \\
&\approx \frac{1}{4} (\tilde{T}_0 P_n(p(\cdot, \sigma)))(t) - 1 \\
&= -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left[\cot\left(\frac{\tau-t}{2}\right) (P_n p(\cdot, \sigma))'(\tau) - \frac{1}{2} (P_n p(\cdot, \sigma))(\tau) \right] d\tau - 1 \\
&= \frac{1}{4} \sum_{j=0}^{2n-1} R_j^n(t) p(t_j, \sigma) - 1
\end{aligned} \tag{7.27}$$

mit $R_j^n(t)$ wie in (7.15).

Einsetzen von (7.27) in (7.25) ergibt dann (7.23). \square

Bemerkung 7.18 Wir beschränken uns an dieser Stelle darauf, für die beiden Interpolationen im Beweis zu Satz 7.17 dieselbe äquidistante Unterteilung von $[0, 2\pi]$ zu verwenden, wie sie in Abschnitt 7.1 gegeben ist.

7.4 Das numerische Verfahren

Jetzt sind wir in der Lage, das in Abschnitt 7.2 vorgestellte Kollokationsverfahren auf die in Abschnitt 6.2 entwickelte theoretische Lösung anzuwenden.

Dazu seien ein Banachraum $X := C_{\text{ger}}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$, für $n \in \mathbb{N}$ der endlich dimensionale Unterraum $X_n := T_{n,\text{ger}}$ sowie die äquidistante Unterteilung von $[0, 2\pi]$ wie in Abschnitt 7.1 gegeben.

Das Kollokationsverfahren aus Abschnitt 7.2 zur approximativen Lösung der Integralgleichung (6.10) entspricht dann dem Lösen des linearen Gleichungssystems

$$\varphi_n - P_{n,\text{ger}}^{0,\alpha} L_{\text{reg}} \varphi_n = P_{n,\text{ger}}^{0,\alpha} \tilde{T}_0 g \tag{7.28}$$

für $\varphi_n \in T_{n,\text{ger}}$.

Wir benötigen das (7.28) entsprechende vollständig diskrete Verfahren. Dazu haben wir den Operator L_{reg} in Abschnitt 7.3.2 approximiert und den Approximationsoperator $L_{\text{reg}}^{n,n}$ in (7.23) erhalten. Für den Operator \tilde{T}_0 haben wir in

Satz 7.15 eine explizite Darstellung der Werte auf der Lagrange-Basis von T_n angeben können. Das Verhalten des Operators $L_{\text{reg}}^{n,n}$ auf der Lagrange-Basis von T_n wollen wir im Folgenden untersuchen, um eine Darstellung als lineares Gleichungssystem im \mathbb{R}^n in der Form von (7.14) zu erhalten. Mit der Eigenschaft (7.4) der Lagrange-Basis von T_n bekommen wir für (7.23)

$$\begin{aligned} (L_{\text{reg}}^{n,n} L_k^n)(t) &= -\frac{1}{2n} \sum_{m=0}^{2n-1} \left(\frac{1}{4} \sum_{j=0}^{2n-1} R_j^n(t) p(t_j, t_m) - 1 \right) L_k^n(t_m) \\ &= -\frac{1}{2n} \left(\frac{1}{4} \sum_{j=0}^{2n-1} R_j^n(t) p(t_j, t_k) - 1 \right), \quad k = 0, \dots, 2n-1. \end{aligned} \quad (7.29)$$

Nun können wir das die Integralgleichung (6.10) approximierende lineare Gleichungssystem mit reellen Koeffizienten in der Form von (7.14) angeben:

$$\gamma_j - \sum_{k=0}^{2n-1} \gamma_k (L_{\text{reg}}^{n,n} L_k^n)(t_j) = \tilde{T}_0 g_n(t_j), \quad j = 0, \dots, 2n-1, \quad (7.30)$$

was äquivalent ist zu

$$\widehat{\varphi}_n - P_{n,\text{ger}}^{0,\alpha} L_{\text{reg}}^{n,n} \widehat{\varphi}_n = \tilde{T}_0 g_n, \quad (7.31)$$

mit $g_n := P_{n,\text{ger}}^{1,\alpha} g$ und $\gamma_j := \widehat{\varphi}_n(t_j)$ für $j = 0, \dots, 2n-1$. Hierbei haben wir $P_n \tilde{T}_0 g_n = \tilde{T}_0 g_n$ ausgenutzt, da $g_n \in T_{n,\text{ger}}$ ist.

Die Werte $(L_{\text{reg}}^{n,n} L_k^n)(t_j)$ an den Kollokationspunkten ergeben sich nach (7.29) zu

$$(L_{\text{reg}}^{n,n} L_k^n)(t_j) = -\frac{1}{2n} \left(\frac{1}{4} \sum_{m=0}^{2n-1} R_m^n(t_j) p(t_m, t_k) - 1 \right), \quad j, k = 0, \dots, 2n-1.$$

Infolge von (7.3) haben die auftretenden Gewichte $R_m^n(t_j)$ die explizite Form

$$R_m^n(t_j) = \frac{1}{2n} \left(1 + 4 \sum_{k=1}^{n-1} k \cos\left(k \frac{j-m}{n} \pi\right) + 2n(-1)^{j-m} \right)$$

für $m, j = 0, \dots, 2n-1$, was uns bei der konkreten, numerischen Implementierung behilflich sein wird.

Bemerkung 7.19 Aus der Geradheit von φ folgt $\varphi(t_j) = \varphi(t_{2n-j})$ für $j = 1, \dots, n-1$. Daher können wir das a priori $2n \times 2n$ -Gleichungssystem auf ein $(n+1) \times (n+1)$ -Gleichungssystem reduzieren.

7.5 Konvergenz- und Fehleranalyse

Das im vorigen Abschnitt entwickelte Verfahren zur Bestimmung einer Näherungslösung zu Gleichung (6.10) wollen wir jetzt auf Konvergenz untersuchen.

Satz 7.20 *Gegeben sei die Gleichung*

$$(I - A)\varphi = f,$$

wobei $A : X \rightarrow X$ ein kompakter Operator sei, so dass $I - A$ injektiv ist. Nehmen wir noch an, die Projektionsoperatoren $P_n : X \rightarrow X_n$ erfüllen $\|P_n A - A\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$. Für $\varphi_n \in X_n$ ist dann für hinreichend große n die Näherungsgleichung

$$\varphi_n - P_n A \varphi_n = P_n f \quad (7.32)$$

eindeutig lösbar für alle $f \in X$ und es gilt die Fehlerabschätzung

$$\|\varphi_n - \varphi\| \leq M \|P_n \varphi - \varphi\| \quad (7.33)$$

mit einer von A abhängigen positiven Konstanten M .

BEWEIS. Ein Beweis hierzu findet sich in [Kre99], Thm. 13.10. □

Auf den vollständig diskreten Fall können wir diesen Satz leider nicht anwenden, da er nichts über die dort auftretenden Approximationsoperatoren aussagt. Um Konvergenz dieser Operatoren zu zeigen, werden wir weiterhin höhere Regularitätsforderungen als die in der Existenztheorie stellen. Wir fordern also zuerst, dass g in der rechten Seite von (6.10) aus $C_{\text{ger}}^{1,\beta}[0, 2\pi]$ ist, wodurch sich $\tilde{T}_0 g$ in $C_{\text{ger}}^{0,\beta}[0, 2\pi]$ befindet. Da weiterhin nach Lemma 7.16 $L_{\text{reg}}\varphi$ in $C_{\text{ger}}^{0,\beta}[0, 2\pi]$ ist für $\varphi \in C_{\text{ger}}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$, erhalten wir aus

$$\varphi = \tilde{T}_0 g + L_{\text{reg}}\varphi,$$

dass die wahre Lösung $\tilde{\varphi} \in C_{\text{ger}}^{0,\beta}[0, 2\pi]$ ist. Daher wollen wir Satz 7.20 zuerst auf das semi-diskrete Verfahren anwenden.

Satz 7.21 *Die (6.10) approximierende Gleichung (7.28) ist für hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$ eindeutig lösbar und es gilt die Fehlerabschätzung*

$$\|\varphi_n - \tilde{\varphi}\|_{0,\alpha} \leq M \left\| P_{n,\text{ger}}^{0,\alpha} \tilde{\varphi} - \tilde{\varphi} \right\|_{0,\alpha}. \quad (7.34)$$

BEWEIS. Nach Satz 6.6 ist der in (6.10) auftretende Operator von der Form $I - L_{\text{reg}}$ mit einem kompakten Operator L_{reg} . Korollar 6.7 liefert uns die Injektivität von $I - L_{\text{reg}}$.

Da L_{reg} nach den obigen Regularitätsforderungen beschränkt von $C_{\text{ger}}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$ nach $C_{\text{ger}}^{0,\beta}[0, 2\pi]$ abbildet, erhalten wir mit Satz 7.6, dass für alle $0 < \alpha < \beta \leq 1$

$$\begin{aligned} \left\| P_{n,\text{ger}}^{0,\alpha} L_{\text{reg}} \varphi - L_{\text{reg}} \varphi \right\|_{0,\alpha} &\leq C \frac{\ln n}{n^{\beta-\alpha}} \|L_{\text{reg}} \varphi\|_{0,\beta} \\ &\leq \tilde{C} \frac{\ln n}{n^{\beta-\alpha}} \|\varphi\|_{0,\alpha} \end{aligned}$$

gilt.

Dies hat

$$\left\| P_{n,\text{ger}}^{0,\alpha} L_{\text{reg}} \varphi - L_{\text{reg}} \varphi \right\|_{0,\alpha} \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

zur Folge.

Damit gilt auch für die Operatornorm

$$\left\| P_{n,\text{ger}}^{0,\alpha} L_{\text{reg}} - L_{\text{reg}} \right\| = \sup_{\substack{\varphi \in C_{\text{ger}}^{0,\alpha}[0,2\pi] \\ \|\varphi\|_{0,\alpha} \neq 0}} \frac{\left\| P_{n,\text{ger}}^{0,\alpha} L_{\text{reg}} \varphi - L_{\text{reg}} \varphi \right\|_{0,\alpha}}{\|\varphi\|_{0,\alpha}} \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Wir können somit Satz 7.20 auf die Näherungsgleichung (7.28) zu (6.10) anwenden, wodurch wir für hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$ die eindeutige Lösbarkeit von (7.28) bekommen sowie für $0 < \alpha < \beta \leq 1$ aus (7.33) mit Satz 7.6 die Fehlerabschätzung

$$\begin{aligned} \|\varphi_n - \tilde{\varphi}\|_{0,\alpha} &\leq M \left\| P_{n,\text{ger}}^{0,\alpha} \tilde{\varphi} - \tilde{\varphi} \right\|_{0,\alpha} \\ &\leq \hat{C} \frac{\ln n}{n^{\beta-\alpha}} \|\tilde{\varphi}\|_{0,\beta} \end{aligned} \tag{7.35}$$

mit $\hat{C} = MC$ und C wie in Satz 7.6.

Das bedeutet, dass die Näherungslösungen φ_n gegen die wahre Lösung $\tilde{\varphi}$ konvergieren. \square

Obwohl wir Konvergenz der Näherungslösung gegen die wahre Lösung erhalten haben, ist die niedrige Konvergenzrate (7.35) nicht befriedigend. Abhilfe verschafft uns das folgende Resultat mit dem unter weiteren Regularitätsforderungen die Konvergenzrate bei der trigonometrischen Interpolation verbessert werden kann.

Satz 7.22 Sei $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ analytisch und 2π -periodisch. Dann existiert ein $s > 0$ sowie ein Streifen $D := \mathbb{R} \times (-s, s) \subset \mathbb{C}$, so dass g zu einer holomorphen, beschränkten und 2π -periodischen Funktion $g : D \rightarrow \mathbb{C}$ fortgesetzt werden kann.

Außerdem wird der Fehler der trigonometrischen Interpolation gegeben durch

$$\|P_n g - g\|_\infty \leq M \frac{\coth \frac{s}{2}}{\sinh ns}$$

mit einer von g und D abhängigen Konstanten $M > 0$.

BEWEIS. Ein Beweis hierzu findet sich in [Kre99], Thm. 11.7. □

Wir können das Ergebnis von Satz 7.22 durch die Abschätzung

$$\|P_n g - g\|_\infty \leq C e^{-ns} \tag{7.36}$$

zusammenfassen, wobei C und s von g abhängige positive Konstanten sind. Es lassen sich leicht ähnliche Fehlerabschätzungen für $(P_n g - g)^{(k)}$ mit $k = 1, 2, 3$ herleiten (siehe [Mö94] zu Satz 4.25). Da die $C^k[0, 2\pi]$ -Norm stärker ist als die $C^{k-1, \alpha}[0, 2\pi]$ -Norm, erhalten wir daraus

$$\|P_n g - g\|_{k, \alpha} \leq C n^{k+1} e^{-ns} \leq C e^{-n\tilde{s}}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Korollar 7.23 Mit den Voraussetzungen von Satz 7.21 für einen analytischen Bogen Γ und analytische rechte Seite erhalten wir für die Lösung der Näherungsgleichung (7.28) zu (6.10) die Fehlerabschätzung

$$\|\varphi_n - \tilde{\varphi}\|_{0, \alpha} \leq C e^{-ns}$$

mit von $\tilde{\varphi}$ abhängigen Konstanten C und s .

BEWEIS. Aus der Analytizität des Bogens Γ erhalten wir die Analytizität des Kerns $p(\cdot, \cdot)$ des Operators L_c bezüglich beider Variablen. Wir zeigen nun, dass dadurch auch die Analytizität des Kerns $\tilde{p}(\cdot, \cdot)$ des Operators L_{reg} bezüglich der ersten Variablen folgt.

Satz 7.22 kann auch auf Funktionen von zwei Veränderlichen angewendet werden (siehe [Mö94], Satz 4.25), d.h. der in beiden Variablen analytische und 2π -periodische Kern p kann zu einer beschränkten und 2π -periodischen sowie bezüglich der ersten Variablen holomorphen Funktion auf $D = \mathbb{R} \times (-s, s) \subset \mathbb{C}$, dem Parallelstreifen aus Satz 7.22, fortgesetzt werden. Diese Funktion kann nach

[FL03], Kapitel 6, S. 149ff, in eine lokal gleichmäßig konvergente Fourierreihe auf D entwickelt werden:

$$p(\cdot, \sigma)(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(\sigma) e^{ikt}$$

mit

$$a_k(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(t, \sigma) e^{-ikt} dt.$$

Sei $D = D_1 \cup D_2$ mit $D_1 := \mathbb{R} \times (-s, 0] \subset \mathbb{C}$ und $D_2 := \mathbb{R} \times [0, s) \subset \mathbb{C}$. Dann gilt für die Fourierkoeffizienten a_k mit $k \geq 0$:

$$\begin{aligned} |a_k(\sigma)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(t - is, \sigma) e^{-ikt - ks} dt \right| \\ &\leq e^{-ks} \sup_{z \in D} p(z, \sigma) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |e^{-ikt}| dt \\ &= e^{-ks} \sup_{z \in D_1} p(z, \sigma).. \end{aligned} \quad (7.37)$$

Analog ergibt sich für $k < 0$:

$$|a_k(\sigma)| \leq e^{ks} \sup_{z \in D_2} p(z, \sigma). \quad (7.38)$$

Da der Kern \tilde{p} die Gestalt $\tilde{p}(t, \sigma) = \frac{1}{4} \tilde{T}_0 p(\cdot, \sigma)(t) - 1$ hat, berechnen wir für $k \in \mathbb{Z}$ wie in Lemma 7.14

$$(\tilde{T}_0 e^{ik\cdot})(t) = 2|k| e^{ikt}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \tilde{T}_0 p(\cdot, \sigma)(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(\sigma) (\tilde{T}_0 e^{ik\cdot})(t) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k(\sigma) e^{ikt} \end{aligned}$$

mit

$$b_k(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(t, \sigma) 2ke^{-ikt} dt.$$

Mit (7.37) ergibt sich für $k \geq 0$

$$\begin{aligned} |b_k(\sigma)| &\leq 2ke^{-ks} \sup_{z \in D_1} p(z, \sigma) \\ &\leq Ce^{-k(s - \ln k/k)} \sup_{z \in D_1} p(z, \sigma) \\ &\leq Ce^{-k\tilde{s}} \sup_{z \in D_1} p(z, \sigma) \end{aligned}$$

und mit (7.38) für $k < 0$

$$|b_k(\sigma)| \leq C e^{k\tilde{s}} \sup_{z \in D_2} p(z, \sigma).$$

Da p beschränkt ist, konvergiert also die Fourierreihe von $\tilde{p}(t, \sigma)$ lokal gleichmäßig in D bei festem σ . Somit ist \tilde{p} bezüglich der ersten Variable holomorph in D und damit analytisch auf $[0, 2\pi]$.

Aus der Analytizität der vorgegebenen Randdaten g erhalten wir analog die Analytizität von $\tilde{T}_0 g$, also der rechten Seite von (6.10). Insgesamt folgt mit

$$\varphi(t) = (\tilde{T}_0 g)(t) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{p}(t, \sigma) \varphi(\sigma) d\sigma,$$

dass die wahre Lösung analytisch ist. Es gilt dann Satz 7.21 mit der durch (7.36) verbesserten Fehlerabschätzung

$$\begin{aligned} \|\varphi_n - \tilde{\varphi}\|_{0,\alpha} &\leq M \left\| P_{n,\text{ger}}^{0,\alpha} \tilde{\varphi} - \tilde{\varphi} \right\|_{0,\alpha} \\ &\leq \hat{C} e^{-ns}. \end{aligned} \quad \square$$

Um nun dem Problem der Approximationsoperatoren im vollständig diskreten Verfahren entgegenzutreten, können wir das folgende Resultat festhalten. Dabei wird anstelle der semi-diskreten Gleichung (7.32) die Näherungsgleichung

$$\tilde{\varphi}_n - P_n A_n \tilde{\varphi}_n = P_n f_n \quad (7.39)$$

behandelt.

Satz 7.24 *Unter den Annahmen von Satz 7.20 an den Operator A und die Projektionsoperatoren P_n gelte ferner für $n \rightarrow \infty$*

$$(P_n A_n - P_n A) \psi \rightarrow 0 \quad \text{für alle } \psi \in X$$

und

$$\|P_n A_n - P_n A\|_{X_n \rightarrow X_n} \rightarrow 0. \quad (7.40)$$

Für $\tilde{\varphi}_n \in X_n$ ist dann für hinreichend große n die Näherungsgleichung (7.39) eindeutig lösbar und es gilt die Fehlerabschätzung

$$\|\tilde{\varphi}_n - \varphi\| \leq M \{ \|P_n \varphi - \varphi\| + \|P_n (A_n - A) \varphi\| + \|P_n (f_n - f)\| \} \quad (7.41)$$

mit einer positiven Konstanten M .

BEWEIS. Ein Beweis hierzu findet sich in [Kre99], Cor. 13.11. \square

Um diesen Satz auf unseren konkreten Fall anwenden zu können, benötigen wir die beiden folgenden Lemmata.

Lemma 7.25 *Der Operator \tilde{T}_0 ist beschränkt invertierbar von $C_{ger}^{k+1,\alpha}[0, 2\pi]$ nach $C_{ger}^{k,\alpha}[0, 2\pi]$ für $k \in \mathbb{N}$.*

BEWEIS. Sei $\varphi \in C_{ger}^{k+1,\alpha}[0, 2\pi]$. Aus [Mö94], Lemma 4.20, folgt für $1 \leq m \leq k$

$$(\tilde{T}_0\varphi)^{(m)}(t) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cot\left(\frac{\tau-t}{2}\right) \varphi^{(m+1)}(\tau) d\tau.$$

Nach Lemma 6.2 gilt dann $(\tilde{T}_0\varphi)^{(m)}(t) = -\frac{1}{2}(T_0\varphi^{(m)})(t)$, woraus nun mit Satz 3.16

$$\|(\tilde{T}_0\varphi)^{(m)}\|_{0,\alpha} = \left\| -\frac{1}{2}(T_0\varphi^{(m)}) \right\|_{0,\alpha} \leq C \|\varphi^{(m)}\|_{1,\alpha} \leq \tilde{C} \|\varphi\|_{m+1,\alpha}$$

folgt. Dann ist

$$\begin{aligned} \|\tilde{T}_0\varphi\|_{k,\alpha} &= \sum_{m=1}^{k-1} \|(\tilde{T}_0\varphi)^{(m)}\|_{\infty} + \|(\tilde{T}_0\varphi)^{(k)}\|_{0,\alpha} \\ &\leq \sum_{m=1}^k \|(\tilde{T}_0\varphi)^{(m)}\|_{0,\alpha} \\ &\leq \sum_{m=1}^k \tilde{C} \|\varphi\|_{m+1,\alpha} \\ &\leq C \|\varphi\|_{k+1,\alpha}. \end{aligned}$$

Die Invertierbarkeit folgt wie in Satz 6.5. \square

Wir müssen die Regularität des Bogens weiter erhöhen, so dass der Kern $p(\cdot, \cdot)$ des Operators L_c in $C_{ger}^3[0, 2\pi]$ bezüglich beider Variablen ist. Damit können wir das folgende Lemma beweisen.

Lemma 7.26 *Für $\varphi \in C_{ger}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$ und $0 < \alpha < \beta \leq 1$ gilt die Abschätzung*

$$\|(L_{reg} - L_{reg}^{n,n})\varphi\|_{0,\alpha} \leq C \frac{\ln^2 n}{n^\gamma} \|\varphi\|_{0,\alpha}$$

mit $\gamma := \min\{\alpha, \beta - \alpha\}$. Die Folge

$$L_{reg}^{n,n} : C_{ger}^{0,\alpha}[0, 2\pi] \rightarrow C_{ger}^{0,\alpha}[0, 2\pi],$$

konvergiert daher in der Norm gegen den Operator L_{reg} .

BEWEIS. Für $\varphi \in C_{\text{ger}}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$ betrachten wir

$$\left\| (L_{\text{reg}} - L_{\text{reg}}^{n,n})\varphi \right\|_{0,\alpha} \leq \left\| (L_{\text{reg}} - L_{\text{reg}}^n)\varphi \right\|_{0,\alpha} + \left\| (L_{\text{reg}}^n - L_{\text{reg}}^{n,n})\varphi \right\|_{0,\alpha}. \quad (7.42)$$

Zuerst wollen wir die erste Norm der rechten Seite abschätzen. Dazu definieren wir

$$h_1(\varphi)(t) := (L_{\text{reg}}^n \varphi)(t) - (L_{\text{reg}} \varphi)(t).$$

Wir werden der Übersicht halber wieder P_n anstelle von $P_{n,\text{ger}}^{0,\alpha}$ schreiben.

Aus dem Beweis von Satz 7.17 erkennen wir, dass h_1 die Form

$$h_1(\varphi)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \{ (P_n(\tilde{p}(t, \cdot)\varphi(\cdot)))(\sigma) - \tilde{p}(t, \sigma)\varphi(\sigma) \} d\sigma$$

annimmt. Unter Verwendung von Satz 7.6 schätzen wir folgendermaßen ab:

$$\begin{aligned} \|h_1(\varphi)\|_{\infty} &= \sup_{t \in [0, 2\pi]} |h_1(\varphi)(t)| \\ &\leq \sup_{t \in [0, 2\pi]} \|P_n(\tilde{p}(t, \cdot)\varphi(\cdot)) - \tilde{p}(t, \cdot)\varphi(\cdot)\|_{\infty} \\ &\leq \sup_{t \in [0, 2\pi]} C_1 \frac{\ln n}{n^{\alpha}} \|\tilde{p}(t, \cdot)\varphi(\cdot)\|_{0,\alpha} \\ &\leq \sup_{t \in [0, 2\pi]} C_1 \frac{\ln n}{n^{\alpha}} \|\tilde{p}(t, \cdot)\|_{0,\alpha} \|\varphi\|_{0,\alpha} \\ &\leq C_2 \frac{\ln n}{n^{\alpha}} \|\varphi\|_{0,\alpha}, \end{aligned} \quad (7.43)$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass der Kern \tilde{p} in beiden Variablen beschränkte Ableitungen besitzt.

Um die verbliebene Hölderhalbnorm abzuschätzen, betrachten wir $t_1, t_2 \in [0, 2\pi]$ mit $t_1 \neq t_2$ und berechnen

$$\begin{aligned} |h_1(\varphi)(t_1) - h_1(\varphi)(t_2)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ (P_n(\tilde{p}(t_1, \cdot)\varphi(\cdot)))(\sigma) - \tilde{p}(t_1, \sigma)\varphi(\sigma) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (P_n(\tilde{p}(t_2, \cdot)\varphi(\cdot)))(\sigma) - \tilde{p}(t_2, \sigma)\varphi(\sigma) \right\} d\sigma \right| \\ &\leq \|P_n(\tilde{p}(t_1, \cdot)\varphi(\cdot)) - \tilde{p}(t_2, \cdot)\varphi(\cdot) \\ &\quad - (\tilde{p}(t_1, \cdot)\varphi(\cdot) - \tilde{p}(t_2, \cdot)\varphi(\cdot))\|_{\infty} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C_3 \frac{\ln n}{n^\alpha} \|\tilde{p}(t_1, \cdot) \varphi(\cdot) - \tilde{p}(t_2, \cdot) \varphi(\cdot)\|_{0,\alpha} \\
&\leq C_4 \frac{\ln n}{n^\alpha} \|\tilde{p}(t_1, \cdot) - \tilde{p}(t_2, \cdot)\|_{0,\alpha} \|\varphi\|_{0,\alpha}. \tag{7.44}
\end{aligned}$$

Durch Anwendung des Mittelwertsatzes erhalten wir

$$\|\tilde{p}(t_1, \cdot) - \tilde{p}(t_2, \cdot)\|_{0,\alpha} \leq C_5 |t_1 - t_2|^\alpha \cdot \left\{ \left\| \frac{\partial}{\partial t} \tilde{p}(\cdot, \cdot) \right\|_\infty + \left\| \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{p}(\cdot, \cdot) \right\|_\infty \right\},$$

da \tilde{p} aufgrund der höheren Regularität in $C_{\text{ger}}^3[0, 2\pi]$ bezüglich der zweiten Variablen ist. Nach dem Einsetzen in (7.44) und der Division durch $|t_1 - t_2|^\alpha$ ergibt sich die Abschätzung für die Hölderhalbnorm. Zusammen mit (7.43) erhalten wir

$$\|h_1(\varphi)\|_{0,\alpha} \leq \hat{C} \frac{\ln n}{n^\alpha} \|\varphi\|_{0,\alpha}. \tag{7.45}$$

Als nächstes wollen wir die zweite Norm in (7.42) betrachten. Wir definieren

$$h_2(\varphi)(t) := (L_{\text{reg}}^n \varphi)(t) - (L_{\text{reg}}^{n,n} \varphi)(t).$$

Wiederum aus dem Beweis von Satz 7.17 sehen wir, dass

$$\begin{aligned}
h_2(\varphi)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} &\left\{ (P_n((\frac{1}{4}\tilde{T}_0 p(\cdot, \cdot)(t) - 1)\varphi(\cdot)))(\sigma) \right. \\
&\left. - (P_n((\frac{1}{4}\tilde{T}_0 (P_n p(\cdot, \cdot))(t) - 1)\varphi(\cdot)))(\sigma) \right\} d\sigma
\end{aligned}$$

ist. Nun berechnen wir

$$\begin{aligned}
&\sup_{t \in [0, 2\pi]} |h_2(\varphi)(t)| \\
&\leq \sup_{t \in [0, 2\pi]} \left\| P_n((\frac{1}{4}\tilde{T}_0 p(\cdot, \cdot)(t) - 1)\varphi(\cdot)) \right. \\
&\quad \left. - P_n((\frac{1}{4}\tilde{T}_0 (P_n p(\cdot, \cdot))(t) - 1)\varphi(\cdot)) \right\|_\infty \\
&\leq \sup_{t \in [0, 2\pi]} \|P_n\|_{C \rightarrow C} \left\| (\tilde{T}_0 [p(\cdot, \cdot) - (P_n p(\cdot, \cdot))])(t) \right\|_\infty \|\varphi\|_\infty \\
&\leq C_1 \ln n \sup_{t \in [0, 2\pi]} \sup_{\sigma \in [0, 2\pi]} \left| ((\tilde{T}_0 [p(\cdot, \cdot) - (P_n p(\cdot, \cdot))])(t))(\sigma) \right| \|\varphi\|_\infty
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= C_1 \ln n \sup_{\sigma \in [0, 2\pi]} \sup_{t \in [0, 2\pi]} \left| ((\tilde{T}_0 [p(\cdot, \cdot) - (P_n p(\cdot, \cdot))])(t))(\sigma) \right| \|\varphi\|_\infty \\
&\leq C_1 \ln n \sup_{\sigma \in [0, 2\pi]} \left\| \tilde{T}_0 [p(\cdot, \sigma) - (P_n p(\cdot, \sigma))] \right\|_{0, \alpha} \|\varphi\|_{0, \alpha} \\
&\leq \sup_{\sigma \in [0, 2\pi]} C_1 \ln n \left\| \tilde{T}_0 \right\|_{C^{1, \alpha} \rightarrow C^{0, \alpha}} \|p(\cdot, \sigma) - P_n p(\cdot, \sigma)\|_{1, \alpha} \|\varphi\|_{0, \alpha} \\
&\leq \sup_{\sigma \in [0, 2\pi]} C_2 \ln n \frac{\ln n}{n^{\beta - \alpha}} \|p(\cdot, \sigma)\|_{1, \beta} \|\varphi\|_{0, \alpha} \\
&\leq C' \frac{\ln^2 n}{n^{\beta - \alpha}} \|\varphi\|_{0, \alpha}.
\end{aligned}$$

Hierbei bedeutet $\|P_n\|_{C \rightarrow C}$, dass P_n als Operator von $C[0, 2\pi]$ nach $C[0, 2\pi]$ aufgefasst wird und die verwendete Abschätzung aus Satz 7.8 folgt. Außerdem haben wir ausgenutzt, dass \tilde{T}_0 als Operator von $C_{\text{ger}}^{1, \alpha}[0, 2\pi]$ nach $C_{\text{ger}}^{0, \alpha}[0, 2\pi]$ nach Satz 6.5 beschränkt ist und p sich in $C_{\text{ger}}^3[0, 2\pi]$ befindet.

Auf ähnliche Art und Weise können wir $\|h(\varphi)'\|$ berechnen. Es ist mit Hilfe von (7.7)

$$\begin{aligned}
&\sup_{t \in [0, 2\pi]} |(h_2(\varphi))'(t)| \\
&= \sup_{t \in [0, 2\pi]} \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (P_n((\frac{1}{4}\tilde{T}_0 p(\cdot, \cdot))(t) - 1)\varphi(\cdot))(\sigma) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \frac{\partial}{\partial t} (P_n((\frac{1}{4}\tilde{T}_0 (P_n p(\cdot, \cdot)))(t) - 1)\varphi(\cdot))(\sigma) \right\} d\sigma \right| \\
&\leq C_1 \ln n \sup_{t \in [0, 2\pi]} \left\| \frac{\partial}{\partial t} \tilde{T}_0 [p(\cdot, \cdot) - P_n p(\cdot, \cdot)](t) \right\|_\infty \|\varphi\|_\infty \\
&\leq C_1 \ln n \sup_{\sigma \in [0, 2\pi]} \left\| \frac{\partial}{\partial t} \tilde{T}_0 [p(\cdot, \sigma) - P_n p(\cdot, \sigma)] \right\|_\infty \|\varphi\|_{0, \alpha} \\
&\leq C_1 \ln n \sup_{\sigma \in [0, 2\pi]} \left\| \tilde{T}_0 [p(\cdot, \sigma) - P_n p(\cdot, \sigma)] \right\|_{1, \alpha} \|\varphi\|_{0, \alpha} \\
&\leq C_1 \ln n \sup_{\sigma \in [0, 2\pi]} \left\| \tilde{T}_0 \right\|_{C^{2, \alpha} \rightarrow C^{1, \alpha}} \|p(\cdot, \sigma) - P_n p(\cdot, \sigma)\|_{2, \alpha} \|\varphi\|_{0, \alpha}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq C_2 \ln n \sup_{\sigma \in [0, 2\pi]} \frac{\ln n}{n^{\beta-\alpha}} \|p(\cdot, \sigma)\|_{2, \beta} \|\varphi\|_{0, \alpha} \\ &\leq C'' \frac{\ln^2 n}{n^{\beta-\alpha}} \|\varphi\|_{0, \alpha} \quad \text{für } 0 < \alpha < \beta \leq 1. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir den Operator \tilde{T}_0 als Operator von $C_{\text{ger}}^{2, \alpha}[0, 2\pi]$ nach $C_{\text{ger}}^{1, \alpha}[0, 2\pi]$ betrachtet, der nach Lemma 7.25 beschränkt ist, und die höhere Glattheit von p ausgenutzt.

Zusammen erhalten wir aus den letzten beiden Abschätzungen

$$\|h_2(\varphi)\|_{0, \alpha} \leq \|h_2(\varphi)\|_{\infty} + \|h_2(\varphi)'\|_{\infty} \leq \tilde{C} \frac{\ln^2 n}{n^{\beta-\alpha}} \|\varphi\|_{0, \alpha}. \quad (7.46)$$

Insgesamt ergibt sich nunmehr für (7.42)

$$\begin{aligned} \|(L_{\text{reg}} - L_{\text{reg}}^{n, n})\varphi\|_{0, \alpha} &\leq \hat{C} \frac{\ln n}{n^{\alpha}} \|\varphi\|_{0, \alpha} + \tilde{C} \frac{\ln^2 n}{n^{\beta-\alpha}} \|\varphi\|_{0, \alpha} \\ &\leq \bar{C} \frac{\ln n + \ln^2 n}{n^{\gamma}} \|\varphi\|_{0, \alpha} \\ &\leq C \frac{\ln^2 n}{n^{\gamma}} \|\varphi\|_{0, \alpha} \end{aligned}$$

mit $\gamma := \min\{\alpha, \beta - \alpha\}$. Damit erhalten wir für die Operatornorm

$$\begin{aligned} \|(L_{\text{reg}} - L_{\text{reg}}^{n, n})\| &= \sup_{\substack{\varphi \in C_{\text{ger}}^{0, \alpha}[0, 2\pi] \\ \|\varphi\|_{0, \alpha} = 1}} \|(L_{\text{reg}} - L_{\text{reg}}^{n, n})\varphi\|_{0, \alpha} \\ &\leq C \frac{\ln^2 n}{n^{\gamma}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

wodurch die Konvergenz in der Norm gezeigt ist. \square

Bemerkung 7.27 In (7.46) ist die grobe Abschätzung der $\|\cdot\|_{0, \alpha}$ -Norm ausreichend, da wir im weiteren Verlauf der Konvergenzanalyse vom Bogen Γ ohnehin eine hinreichende Glätte fordern werden.

Wir haben uns nun die nötigen Hilfsmittel geschaffen, um eine Konvergenzaussage für das vollständig diskrete Verfahren gegeben in (7.31) treffen zu können.

Satz 7.28 *Mit den Voraussetzungen von Satz 7.21 und den eben gemachten zusätzlichen Regularitätsforderungen ist das lineare Gleichungssystem (7.30) des vollständig diskreten Verfahrens zur näherungsweise Lösung der Integralgleichung (6.10) für hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$ eindeutig lösbar und es gilt die Fehlerabschätzung*

$$\|\widehat{\varphi}_n - \widetilde{\varphi}\|_{0,\alpha} \leq M \left\{ \left\| P_{n,\text{ger}}^{0,\alpha} \widetilde{\varphi} - \widetilde{\varphi} \right\|_{0,\alpha} + \left\| P_{n,\text{ger}}^{0,\alpha} (L_{\text{reg}}^{n,n} - L_{\text{reg}}) \widetilde{\varphi} \right\|_{0,\alpha} + \left\| P_{n,\text{ger}}^{0,\alpha} (\check{g}_n - \check{g}) \right\|_{0,\alpha} \right\}. \quad (7.47)$$

BEWEIS. Wir nutzen Lemma 7.26 sowie Korollar 7.7 und erhalten

$$\left\| P_{n,\text{ger}}^{0,\alpha} (L_{\text{reg}}^{n,n} - L_{\text{reg}}) \right\|_{0,\alpha} \leq C \ln n \left\| (L_{\text{reg}}^{n,n} - L_{\text{reg}}) \right\|_{0,\alpha} \leq \widetilde{C} \frac{\ln^3 n}{n^\gamma} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

mit $\gamma = \min\{\alpha, \beta - \alpha\}$. Dadurch haben wir natürlich zum einen punktweise Konvergenz und zum anderen ist auch (7.40) erfüllt, da $T_{n,\text{ger}} \subset C_{\text{ger}}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$. Wir können also Satz 7.24 anwenden und erhalten, dass das lineare Gleichungssystem (7.30) für rechte Seiten $g \in C_{\text{ger}}^{1,\beta}[0, 2\pi]$ für hinreichend große n eindeutig lösbar ist.

Die Näherung an die rechte Seite g haben wir durch Interpolation erhalten, daher können wir mit Satz 7.6 und Korollar 7.7 unter Ausnutzung der höheren Glattheit

$$\begin{aligned} \left\| P_{n,\text{ger}}^{0,\alpha} (\widetilde{T}_0 g_n - \widetilde{T}_0 g) \right\|_{0,\alpha} &= \left\| P_{n,\text{ger}}^{0,\alpha} \widetilde{T}_0 (P_{n,\text{ger}}^{1,\alpha} g - g) \right\|_{0,\alpha} \\ &\leq C \ln n \left\| P_{n,\text{ger}}^{1,\alpha} g - g \right\|_{1,\alpha} \left\| \widetilde{T}_0 \right\|_{C^{1,\alpha} \rightarrow C^{0,\alpha}} \\ &\leq \widetilde{C} \frac{\ln^2 n}{n^{\beta-\alpha}} \|g\|_{1,\beta} \end{aligned} \quad (7.48)$$

mit $0 < \alpha < \beta \leq 1$ berechnen. Mit den Konvergenzraten aus Lemma 7.26 und aus Satz 7.21 bekommen wir somit für $0 < \alpha < \beta \leq 1$ aus (7.41) die Fehlerabschätzung

$$\begin{aligned} \|\widehat{\varphi}_n - \widetilde{\varphi}\|_{0,\alpha} &\leq M \left\{ C_1 \frac{\ln n}{n^{\beta-\alpha}} \|\widetilde{\varphi}\|_{0,\beta} + C_2 \frac{\ln^3 n}{n^\gamma} \|\widetilde{\varphi}\|_{0,\beta} + C_3 \frac{\ln^2 n}{n^{\beta-\alpha}} \|g\|_{1,\beta} \right\} \\ &\leq C \frac{\ln^3 n}{n^\gamma} \end{aligned}$$

mit einer geeigneten Konstanten C und $\gamma = \min\{\alpha, \beta - \alpha\}$. Damit erhalten wir die Konvergenz der vollständig diskreten Näherungslösung gegen die wahre Lösung. \square

Wie schon im semi-diskreten Fall ist die Konvergenzrate im vollständig diskreten Verfahren nicht befriedigend. Wir können jedoch unter den gleichen zusätzlichen Regularitätsforderungen an den Bogen Γ und die rechte Seite die Konvergenzgeschwindigkeit drastisch erhöhen. Dies halten wir im folgenden Korollar fest.

Korollar 7.29 *Mit den Voraussetzungen von Satz 7.28 für einen analytischen Bogen Γ und analytische rechte Seite erhalten wir für die Lösung der vollständig diskreten Näherungsgleichung zu (6.10) die Fehlerabschätzung*

$$\|\widehat{\varphi}_n - \widetilde{\varphi}\|_{0,\alpha} \leq Ce^{-ns}$$

mit von $\widetilde{\varphi}$ abhängigen Konstanten C und s .

BEWEIS. Der Beweis läuft analog zu dem des Korollars 7.23. Die Analytizität überträgt sich auf die Kerne der auftretenden Operatoren und die wahre Lösung. Die Aussage des Satzes 7.28 bleibt auch bei diesen Regularitätsforderungen erhalten, jedoch haben wir für die trigonometrische Interpolation nach Satz 7.22 exponentielle Konvergenz für analytische Funktionen. Wir erhalten also für die Summanden der rechten Seite von (7.47) aus (7.35), den Abschätzungen im Beweis des Lemmas 7.26 und aus (7.48)

$$\begin{aligned} \left\| P_{n,\text{ger}}^{0,\alpha} \widetilde{\varphi} - \widetilde{\varphi} \right\|_{0,\alpha} &\leq C_1 e^{-ns_1}, \\ \left\| P_{n,\text{ger}}^{0,\alpha} (L_{\text{reg}}^{n,n} - L_{\text{reg}}) \widetilde{\varphi} \right\|_{0,\alpha} &\leq C_2 e^{-ns_2}, \\ \left\| P_{n,\text{ger}}^{0,\alpha} (\check{g}_n - \check{g}) \right\|_{0,\alpha} &\leq C_3 e^{-ns_3} \end{aligned}$$

mit geeigneten Konstanten C_k und s_k für $k = 1, 2, 3$ und damit

$$\|\widehat{\varphi}_n - \widetilde{\varphi}\|_{0,\alpha} \leq Ce^{-ns}. \quad \square$$

7.6 Numerik der Integralgleichung erster Art

In diesem Abschnitt wollen wir eine Methode zur numerischen Berechnung von Näherungslösungen der in Abschnitt 6.1 vorgestellten Integralgleichung erster Art kurz darstellen und auf Konvergenz untersuchen. Dazu werden wir wieder, wie bei der Integralgleichung zweiter Art, ein Kollokationsverfahren benutzen.

7.6.1 Das numerische Verfahren

Die zu lösende Integralgleichung (5.13) hat die Form

$$(\tilde{L} + L_c)\tilde{\varphi} = g \quad \text{auf } [0, 2\pi].$$

Dabei bildet $\tilde{L} + L_c$ von $C_{\text{ger}}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$ nach $C_{\text{ger}}^{1,\alpha}[0, 2\pi]$ ab. Wir müssen also die Operatoren \tilde{L} und L_c diskretisieren. Dazu wählen wir zu den Banachräumen $X := C_{\text{ger}}^{0,\alpha}[0, 2\pi]$ und $Y := C_{\text{ger}}^{1,\alpha}[0, 2\pi]$ die endlich dimensionalen Unterräume $X_n = Y_n := T_n$, wobei auf T_n wieder die äquidistante Unterteilung von $[0, 2\pi]$ wie in Abschnitt 7.1 gegeben ist.

Das nun auftretende Kollokationsverfahren entspricht dem Lösen des linearen Gleichungssystems

$$P_{n,\text{ger}}^{1,\alpha}(\tilde{L} + L_c)\varphi_n = P_{n,\text{ger}}^{1,\alpha}g \quad (7.49)$$

für $\varphi_n \in T_{n,\text{ger}}$ mit den in Satz 7.5 eingeführten Projektionsoperatoren $P_{n,\text{ger}}^{1,\alpha}$ und $P_{n,\text{ger}}^{0,\alpha}$.

Wir benötigen zur numerischen Auswertung das Verhalten der Operatoren auf T_n . Dazu halten wir fest:

Satz 7.30 *Der in (5.14) definierte Operator \tilde{L} bildet $T_{n,\text{ger}}$ bijektiv nach $T_{n,\text{ger}}$ ab. Auf der Lagrange-Basis von T_n hat er die Werte*

$$(\tilde{L}L_j^n)(t) = \frac{1}{2n} \left(1 + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m} \cos(m(t - t_j)) + \frac{1}{2n} \cos n(t - t_j) \right). \quad (7.50)$$

BEWEIS. Ein Beweis hierzu findet sich in [Hee03], Folg. 5.7. □

Für den in (5.8) gegebenen kompakten Operator L_c erhalten wir den numerischen Approximationsoperator, indem wir die gerade Fortsetzung auf $[0, 2\pi]$ betrachten, dann $\{p(t, \sigma) - 4\}\varphi(\sigma)$ bezüglich σ bei festem t durch

$$(P_n(\{p(t, \cdot) - 4\}\varphi(\cdot)))(\sigma) = \sum_{j=0}^{2n-1} \{p(t, t_j) - 4\}\varphi(t_j)L_j^n(\sigma)$$

interpolieren und zuletzt mit Hilfe von $\int_0^{2\pi} L_j^n(\sigma) d\sigma = \frac{\pi}{n}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{8\pi} \int_0^{2\pi} \{p(t, \sigma) - 4\} \varphi(\sigma) d\sigma &\approx \frac{1}{8\pi} \sum_{j=0}^{2n-1} \{p(t, t_j) - 4\} \varphi(t_j) \int_0^{2\pi} L_j^n(\sigma) d\sigma \\ &= \frac{1}{8n} \sum_{j=0}^{2n-1} \{p(t, t_j) - 4\} \varphi(t_j) \\ &=: (\widehat{L}_c^n \varphi_n)(t) \end{aligned}$$

approximieren. Auf der Lagrange-Basis von T_n hat dieser die Werte

$$(\widehat{L}_c^n L_k^n)(t) = \frac{1}{8n} (p(t, t_k) - 4). \quad (7.51)$$

Das zu lösende lineare Gleichungssystem mit reellen Koeffizienten nimmt insgesamt die Form

$$\sum_{k=0}^{2n-1} \gamma_k \left((\widetilde{L} L_k^n)(t_j) + (\widehat{L}_c^n L_k^n)(t_j) \right) = g_n(t_j), \quad j = 0 \dots, 2n-1, \quad (7.52)$$

an, was aufgrund von Satz 7.30 äquivalent ist zu

$$\widetilde{L} \widehat{\varphi}_n + P_{n,\text{ger}}^{1,\alpha} \widehat{L}_c^n \widehat{\varphi}_n = g_n, \quad (7.53)$$

wobei $g_n := P_{n,\text{ger}}^{1,\alpha} g$ eine Näherung an g ist und $\gamma_j := \widehat{\varphi}_n(t_j)$ für $j = 0 \dots, 2n-1$.

Das entstehende Gleichungssystem kann wieder aufgrund der Struktur der Basis von $T_{n,\text{ger}}$ von einem a priori $2n \times 2n$ -Gleichungssystem auf ein $(n+1) \times (n+1)$ -Gleichungssystem reduziert werden.

7.6.2 Vergleich mit der näherungsweise Lösung der Integralgleichung zweiter Art

Satz 7.31 Die linearen Gleichungssysteme (7.31) und (7.53) zur näherungsweise Lösung der Integralgleichungen (6.10) bzw. (5.13) sind äquivalent.

BEWEIS. Nach den Sätzen 7.15 und 7.30 sind die Operatoren \widetilde{T}_0 und \widetilde{L} bijektiv von $T_{n,\text{ger}}$ nach $T_{n,\text{ger}}$, so dass für $\psi \in T_{n,\text{ger}}$ gilt:

$$P_{n,\text{ger}}^{0,\alpha} \widetilde{T}_0 \psi = \widetilde{T}_0 \psi \quad \text{und} \quad P_{n,\text{ger}}^{1,\alpha} \widetilde{L} \psi = \widetilde{L} \psi.$$

Wir multiplizieren (7.53) von links mit $P_{n,\text{ger}}^{0,\alpha} \tilde{T}_0$ und erhalten

$$P_{n,\text{ger}}^{0,\alpha} \tilde{T}_0 \tilde{L} \hat{\varphi}_n + P_{n,\text{ger}}^{0,\alpha} \tilde{T}_0 P_{n,\text{ger}}^{1,\alpha} \hat{L}_c^n \hat{\varphi}_n = P_{n,\text{ger}}^{0,\alpha} \tilde{T}_0 g_n. \quad (7.54)$$

Da $g_n = P_{n,\text{ger}}^{1,\alpha} g \in T_{n,\text{ger}}$, ergibt sich für die rechte Seite von (7.54)

$$P_{n,\text{ger}}^{0,\alpha} \tilde{T}_0 g_n = \tilde{T}_0 g_n.$$

Der erste Summand der linken Seite von (7.54) lässt sich wegen $\hat{\varphi}_n \in T_{n,\text{ger}}$ und $\tilde{T}_0 = \tilde{L}^{-1}$ umformen zu

$$P_{n,\text{ger}}^{0,\alpha} \tilde{T}_0 \tilde{L} \hat{\varphi}_n = P_{n,\text{ger}}^{0,\alpha} \hat{\varphi}_n = \hat{\varphi}_n.$$

Für den zweiten Summanden von (7.54) betrachten wir zuerst \hat{L}_c^n und erkennen, dass

$$(\hat{L}_c^n \hat{\varphi}_n)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (P_n(\{\frac{1}{4}p(t, \cdot) - 1\} \hat{\varphi}_n(\cdot)))(\sigma) d\sigma$$

ist. Da P_n hier nach σ projiziert und $\tilde{T}_0 P_{n,\text{ger}}^{1,\alpha}$ auf t wirkt, können wir $\tilde{T}_0 P_{n,\text{ger}}^{1,\alpha}$ mit der Integration und P_n vertauschen und erhalten

$$\begin{aligned} (\tilde{T}_0 P_{n,\text{ger}}^{1,\alpha} \hat{L}_c^n \hat{\varphi}_n)(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (P_n((\frac{1}{4} \tilde{T}_0 (P_{n,\text{ger}}^{1,\alpha} p(\cdot, \cdot))(t) - 1) \hat{\varphi}_n(\cdot)))(\sigma) d\sigma \\ &= (L_{\text{reg}}^{n,n} \hat{\varphi}_n)(t). \end{aligned}$$

Somit ist

$$P_{n,\text{ger}}^{0,\alpha} \tilde{T}_0 P_{n,\text{ger}}^{1,\alpha} \hat{L}_c^n \hat{\varphi}_n = P_{n,\text{ger}}^{0,\alpha} L_{\text{reg}}^{n,n} \hat{\varphi}_n.$$

Wir haben also insgesamt (7.31) durch Äquivalenzumformungen aus (7.53) erhalten, wodurch die Lösungen der linearen Gleichungssysteme (7.31) und (7.53) übereinstimmen. \square

Bemerkung 7.32 Die Äquivalenz der beiden Näherungsverfahren folgt im Beweis von Satz 7.31 aus der Verwendung der Lagrange-Basis von T_n bei den entsprechenden Quadraturformeln. Daher ist im semi-diskreten Fall sowie bei anderer Wahl der Basis im Allgemeinen keine Äquivalenz zu erwarten.

7.6.3 Konvergenz- und Fehleranalyse

Wir wollen das soeben dargestellte numerische Verfahren auf Konvergenz untersuchen. Allerdings wollen wir auf eine ausführliche Analyse verzichten, da diese analog zur Konvergenzanalyse der Kollokationsmethode zur Integralgleichung zweiter Art aus Abschnitt 7.5 verläuft.

Wir beginnen mit einem Analogon zu Satz 7.20:

Satz 7.33 Gegeben sei die Gleichung

$$S\varphi - A\varphi = f,$$

wobei $S : X \rightarrow Y$ ein linearer, beschränkter Operator mit beschränkter Inverser $S^{-1} : Y \rightarrow X$ und $A : X \rightarrow Y$ ein kompakter Operator seien, so dass der Operator $S - A$ injektiv ist. Weiter seien für $n \in \mathbb{N}$ Unterräume $X_n \subset X$ bzw. $Y_n \subset Y$ mit $\dim X_n = \dim Y_n = n$ sowie Projektionsoperatoren $P_n : Y \rightarrow Y_n$ gegeben.

Falls zusätzlich $Y_n = S(X_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ sowie $\|P_n A - A\| \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$ gilt, so ist für $\varphi_n \in X_n$ die approximierende Gleichung

$$P_n(S - A)\varphi_n = P_n f \tag{7.55}$$

für hinreichend großes $n \in \mathbb{N}$ eindeutig lösbar und es existiert eine von S und A abhängige positive Konstante M , so dass

$$\|\varphi_n - \varphi\|_X \leq M \|P_n S\varphi - S\varphi\|_Y$$

gilt.

BEWEIS. Ein Beweis hierzu findet sich in [Kre99], Thm. 13.12. □

Wieder ist es uns nicht möglich, diesen Satz direkt auf die Näherungsgleichung anzuwenden, da er nichts über die im vollständig diskreten Verfahren auftauchenden Näherungsoperatoren aussagt. Für die Konvergenzuntersuchungen dieser Näherungsoperatoren wollen wir wieder höhere Regularitätsforderungen als in der Existenztheorie stellen.

Wir wollen an dieser Stelle direkt vom Bogen Γ und der rechten Seite g in (5.13) fordern, dass sie analytisch sind. Dann erhalten wir das dem Korollar 7.23 entsprechende

Korollar 7.34 Für die Gleichung (5.13) mit analytischem Bogen Γ und analytischer rechter Seite g seien für $n \in \mathbb{N}$ die Unterräume $\tilde{X}_n = \tilde{Y}_n = T_{n,ger}$ sowie der Projektionsoperator $P_{n,ger}^{1,\alpha}$ aus Satz 7.5 gegeben. Dann ist die approximierende Gleichung (7.49) für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$ eindeutig lösbar und wir erhalten für die Lösung φ_n der Näherungsgleichung (7.49) zu (5.13) die Fehlerabschätzung

$$\|\varphi_n - \tilde{\varphi}\|_{0,\alpha} \leq C e^{-ns}$$

mit von $\tilde{\varphi}$ abhängigen Konstanten C und s .

BEWEIS. Der Beweis kann analog zu dem des Satzes 7.21 und des Korollars 7.23 geführt werden. Hierbei ergeben sich für

$$\left\| P_{n,\text{ger}}^{1,\alpha} L_c - L_c \right\|_{1,\alpha}$$

und

$$\left\| P_{n,\text{ger}}^{1,\alpha} \tilde{L} \tilde{\varphi} - \tilde{L} \tilde{\varphi} \right\|_{1,\alpha}$$

gewünschte Abschätzungen wie in Abschnitt 7.5. \square

Für die Konvergenzanalyse im vollständig diskreten Verfahren können wir auf die entsprechende Aussage bei der Integralgleichung zweiter Art verweisen, da wir in Abschnitt 7.6.2 die Äquivalenz der beiden Näherungsverfahren gezeigt haben.

Korollar 7.35 *Mit den Voraussetzungen von Korollar 7.34 für einen analytischen Bogen Γ und analytische rechte Seite erhalten wir für die Lösung der vollständig diskreten Näherungsgleichung zu (5.13) die Fehlerabschätzung*

$$\|\hat{\varphi}_n - \tilde{\varphi}\|_{0,\alpha} \leq C e^{-ns}$$

mit von $\tilde{\varphi}$ abhängigen Konstanten C und s .

BEWEIS. Dies folgt aus der Äquivalenz der vollständig diskreten Verfahren zur Integralgleichung erster und der Integralgleichung zweiter Art und damit aus Korollar 7.29. \square

7.7 Effizienzvergleich

Wir wollen kurz die numerische Umsetzung beider Lösungsverfahren aus den vorigen Abschnitten auf Effizienz vergleichen.

Zuerst betrachten wir das Aufstellen der Gleichungssysteme. Wir erhalten bei (7.30) im Vergleich zu (7.52) einen Mehraufwand einer Multiplikation zweier $(n+1) \times (n+1)$ Matrizen, um $L_{\text{reg}}^{n,n}$ aufstellen zu können, und eine zusätzliche Matrix-Vektor Multiplikation auf der rechten Seite von (7.30). Die erste Multiplikation erfordert einen Aufwand von $\mathcal{O}(n^3)$ und die Zweite von $\mathcal{O}(n^2)$.

In den Abschnitten 7.4 und 7.6.1 haben wir gesehen, dass beide Verfahren das Lösen je eines $(n+1) \times (n+1)$ -dimensionalen linearen Gleichungssystems erfordern. Diese können mit Standard-Lösern wie der *Gauß-Elimination* behandelt

werden, die somit beide den gleichen Aufwand von $\mathcal{O}(n^3)$ verursachen. Der Speicheraufwand für die entstehenden Matrizen liegt bei je $\mathcal{O}(n^2)$.

Anstelle von direkten Lösern wird man bei größer werdenden Gleichungssystemen eher auf iterative Verfahren zurückgreifen, um den Rechenaufwand zu reduzieren.

7.8 Stabilität

In diesem Abschnitt wollen wir kurz die Frage der Stabilität linearer Gleichungssysteme erörtern, die bei der Diskretisierung von Integralgleichungen auftritt.

Ein lineares System wird *stabil* genannt, wenn kleine Änderungen der Daten auch nur kleine Änderungen der Lösung verursachen. Dazu wollen wir das Konzept der *Konditionszahl* einführen.

Definition 7.36 Seien X und Y normierte Räume und sei $A : X \rightarrow Y$ ein beschränkter, linearer Operator mit einer beschränkten Inversen $A^{-1} : Y \rightarrow X$. Dann wird

$$\text{cond}(A) := \|A\| \|A^{-1}\|$$

die *Konditionszahl* von A genannt.

Aus [Kre99], Section 14.1, geht hervor, dass ein numerisches Verfahren zur Lösung von Integralgleichungen die Stabilität der zugrunde liegenden Integralgleichung erhält, wenn die Konditionszahlen der entstehenden linearen Gleichungssysteme gleichmäßig beschränkt sind.

Wir wollen jedoch in dieser Arbeit auf eine ausführliche Stabilitätsanalyse verzichten und uns darauf beschränken, die Stabilität des numerischen Verfahrens für die Integralgleichung zweiter Art und die Instabilität des Verfahrens für die Integralgleichung erster Art anhand der Konditionszahlen in den folgenden numerischen Beispielen zu untermauern.

7.9 Numerische Beispiele

In diesem Abschnitt wollen wir anhand von numerischen Beispielen das Verhalten der in den vorigen Abschnitten dargestellten numerischen Verfahren vergleichen. Die praktische Umsetzung der Algorithmen fand hierbei in der Programmiersprache *MATLAB* statt und wurde auf einem Computer mit 1.5 GHz Intel Centrino Prozessor und 1 GB Arbeitsspeicher ausgeführt.

Dazu betrachten wir die Problemstellung im Umfeld der Elektrostatik in \mathbb{R}^2 . Hierbei ist der Schlitz Γ ein geerdeter Leiter und das elektrische Feld auf dem Schlitz wird durch Punktquellen außerhalb des Schlitzes erzeugt. Das bedeutet, dass drei Felder anwesend sind: das einfallende Feld u_i , das reflektierte Feld u_r und das Gesamtfeld $u_t = u_i + u_r$. Dabei ist $u_t = 0$ auf dem Schlitz und harmonisch in $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$. Für die betrachteten Beispiele werden wir die Äquipotenziallinien des Gesamtfeldes zeichnen und Tabellen angeben, die die Konvergenzraten der vorgestellten Verfahren präsentieren, indem wir den Fehler des reflektierten Feldes berechnen.

Bemerkung 7.37 Die folgenden Beispiele haben keine einfache analytische Lösung. Daher testen wir die Exaktheit beider Verfahren, indem wir die Lösung an einer großen Zahl M von Knoten auf dem Schlitz Γ auswerten (in den Experimenten benutzen wir immer $M = 4000$) und mit den durch die gegebenen Punktquellen erzeugten Dirichletrandwerten vergleichen.

Die zu lösenden Gleichungssysteme (7.30) und (7.52) sind nach Abschnitt 7.6.2 äquivalent, so dass die Lösungen beider Verfahren gleich sind. Daher werden wir die Fehlerauswertung nur für die Lösungen des linearen Gleichungssystems zur Integralgleichung zweiter Art in den folgenden Tabellen darstellen.

In jeder dieser Tabellen beinhaltet die erste Spalte die Anzahl n der Diskretisierungspunkte des Schlitzes Γ zum Aufstellen des $(n + 1) \times (n + 1)$ -Gleichungssystems. Die zweite Spalte enthält die Konditionszahl K_1 der Matrix des linearen Gleichungssystems (7.52) und die dritte Spalte entsprechend die Konditionszahl K_2 von (7.30).

In der vierten Spalte haben wir den relativen L^2 Fehler $E^2(\Gamma)$ auf dem Schlitz erfasst, wie wir es in Bemerkung 7.37 beschrieben haben, d.h. wir betrachten Fehler der Art

$$\frac{\|u_{n-1} - u\|_2}{\|u\|_2}.$$

Die fünfte Spalte beinhaltet den Maximumfehler $E^\infty(\Gamma)$ auf dem Schlitz.

In den letzten beiden Spalten betrachten wir den Fehler, der sich folgendermaßen ergibt: Wir werten die numerische Lösung auf einem Kreis mit Radius 1.4 um den Ursprung an 4000 Punkten aus und vergleichen dies mit der numerischen Lösung mit der doppelten Zahl an Diskretisierungspunkten. Die sechste Spalte enthält den relativen L^2 Fehler $E^2(u)$ und die siebente Spalte den Maximumfehler $E^\infty(u)$.

Wir werden durch die folgenden Beispiele die in den Abschnitten 7.5 und 7.6.3 bewiesene exponentielle Konvergenz beider numerischer Verfahren untermauern.

Weiterhin werden wir feststellen, dass die Konditionszahlen der zu lösenden Gleichungssysteme im Fall der Integralgleichung erster Art entsprechend der Zahl der Diskretisierungspunkte anwächst und im Fall der Integralgleichung zweiter Art in etwa konstant bleibt.

Für die in Abschnitt 7.7 getroffenen Effizienzaussagen liefern die hier behandelten Beispiele aufgrund der raschen Konvergenz nur unzureichende Ergebnisse. Es treten erst ab 128 Stützstellen messbare Zeiten auf, welche in einer Größenordnung von 10^{-2} s liegen. Der Aufwand der Matrixmultiplikation zum Aufstellen des Gleichungssystems zur Integralgleichung zweiter Art liegt in derselben Größenordnung bei gleicher Stützstellenzahl. Der Aufwand für die Matrix-Vektor Multiplikation ist hingegen in den Beispielen nicht messbar.

Wir beginnen mit der folgenden Anordnung:

Beispiel 7.1 Wir betrachten einen geraden Schlitz Γ_1 parametrisiert durch

$$\Gamma_1 = \{(t, -0.2) : t \in [-1, 1]\}.$$

Die Dirichletdaten werden durch eine Einheitsladung in $(0, 0)$ generiert.

Da die Γ_1 und die rechte Seite analytisch sind, können wir nach den Ergebnissen der letzten Abschnitte exponentielle Konvergenzraten erwarten, die dann auch in Tabelle 7.1 bestätigt wird.

n	K_1	K_2	$E^2(\Gamma_1)$	$E^\infty(\Gamma_1)$	$E^2(u)$	$E^\infty(u)$
4	14.527	2.3641	2.0206e-01	2.9204e-01	1.0373e-01	5.8393e-02
8	26.818	2.0650	4.9532e-02	7.9522e-02	1.0544e-02	5.8087e-03
16	51.943	1.9296	5.5415e-03	9.5826e-03	2.1934e-04	1.2032e-04
32	102.35	1.8645	1.2518e-04	2.2794e-04	1.9001e-07	1.0406e-07
64	203.19	1.8326	1.1382e-07	2.1243e-07	2.8519e-13	1.5632e-13
128	404.88	1.8167	1.7537e-13	3.3329e-13	2.2510e-16	4.4409e-16

Tabelle 7.1: Numerische Ergebnisse für Beispiel 7.1

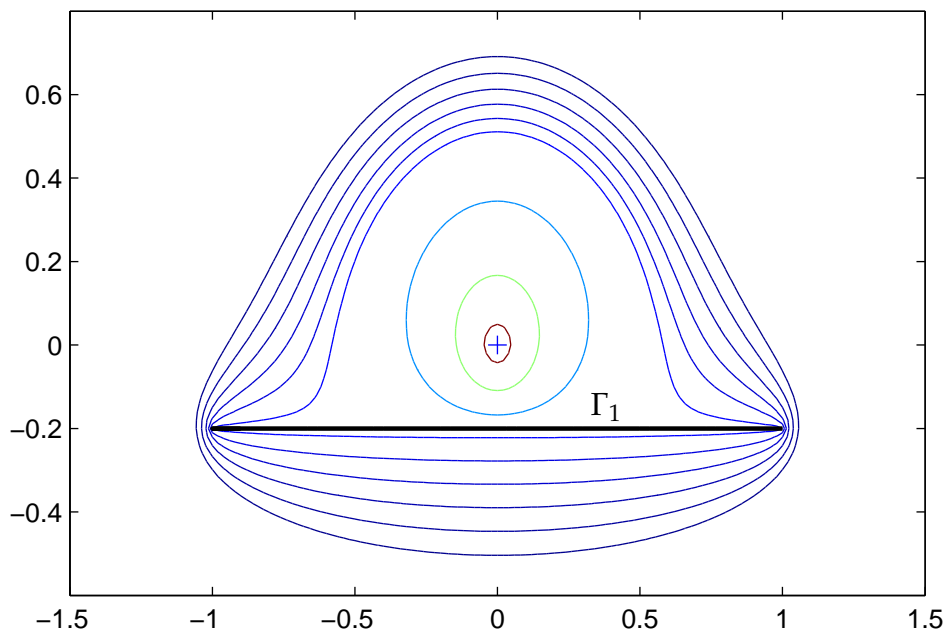


Abbildung 7.1: Quelle, Bogen und Äquipotenziallinien für Beispiel 7.1

Beispiel 7.2 In diesem Beispiel wird der Schlitz Γ_2 durch einen elliptischen Bogen repräsentiert, der durch

$$\Gamma_2 = \{(0.8 \cos t, 0.5 \sin t + 0.25) : t \in [-\pi, 0]\}$$

parametrisiert ist. Die Dirichletdaten werden durch eine positive Einheitsladung in $(0, 0)$ und eine negative Einheitsladung in $(0, -0.5)$ generiert.

Auch in diesem Beispiel sind die rechte Seite und Γ_2 analytisch und wir erhalten die erwartete exponentielle Konvergenz.

n	K_1	K_2	$E^2(\Gamma_2)$	$E^\infty(\Gamma_2)$	$E^2(u)$	$E^\infty(u)$
4	14.098	2.4946	2.0121e-01	8.8035e-02	1.1589e-01	2.6356e-02
8	26.317	2.2164	7.4973e-02	3.9546e-02	2.2540e-02	5.3587e-03
16	51.116	2.0975	1.4127e-02	7.1870e-03	9.8724e-04	2.3509e-04
32	100.79	2.0413	6.1889e-04	3.3920e-04	2.0637e-06	4.9090e-07
64	200.14	2.0140	1.3095e-06	7.4144e-07	1.1578e-11	2.7504e-12
128	398.80	2.0006	7.4722e-12	4.2731e-12	2.8108e-16	1.1102e-16

Tabelle 7.2: Numerische Ergebnisse für Beispiel 7.2

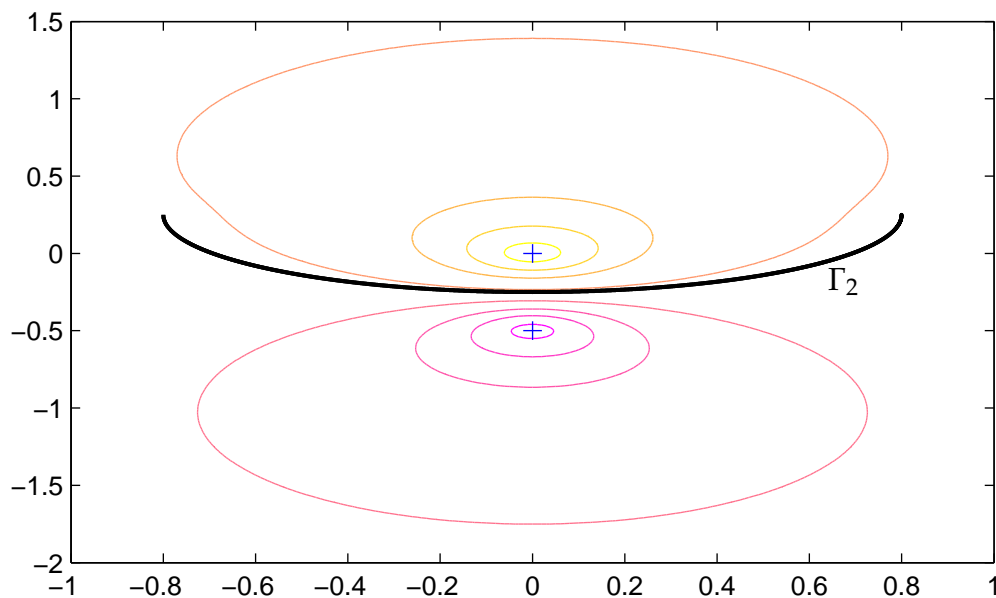


Abbildung 7.2: Quelle, Bogen und Äquipotenziallinien für Beispiel 7.2

Beim folgenden abschließenden Beispiel haben wir erneut einen analytischen Schlitz Γ_3 gewählt, so dass wir mit der Analytizität der rechten Seite auch exponentielle Konvergenz erhalten.

Beispiel 7.3 Dieses Beispiel behandelt eine Spirale als Schlitz Γ_3 , parametrisiert durch

$$\{(t \cos(3.3\pi t) - 0.1, t \sin(3.3\pi t)) : t \in [0.2, 1.2]\}.$$

Hier werden die Dirichletdaten durch eine positive Einheitsladung in $(0, 0)$ gegeben.

n	K_1	K_2	$E^2(\Gamma_3)$	$E^\infty(\Gamma_3)$	$E^2(u)$	$E^\infty(u)$
8	10.825	5.7357	3.2382e-02	6.0886e-02	1.0015e-01	1.8020e-02
16	18.308	5.7479	3.0195e-03	7.9654e-03	1.8458e-03	3.2845e-04
32	35.723	5.7924	1.0395e-04	2.8342e-04	1.0796e-05	1.9193e-06
64	70.879	5.8165	5.3163e-07	1.4440e-06	2.0002e-09	3.3821e-10
128	141.18	5.8287	3.7466e-11	8.0842e-11	2.1089e-15	4.3715e-16
256	281.74	5.8348	3.9782e-14	1.6305e-12	1.5131e-15	4.1894e-16

Tabelle 7.3: Numerische Ergebnisse für Beispiel 7.3

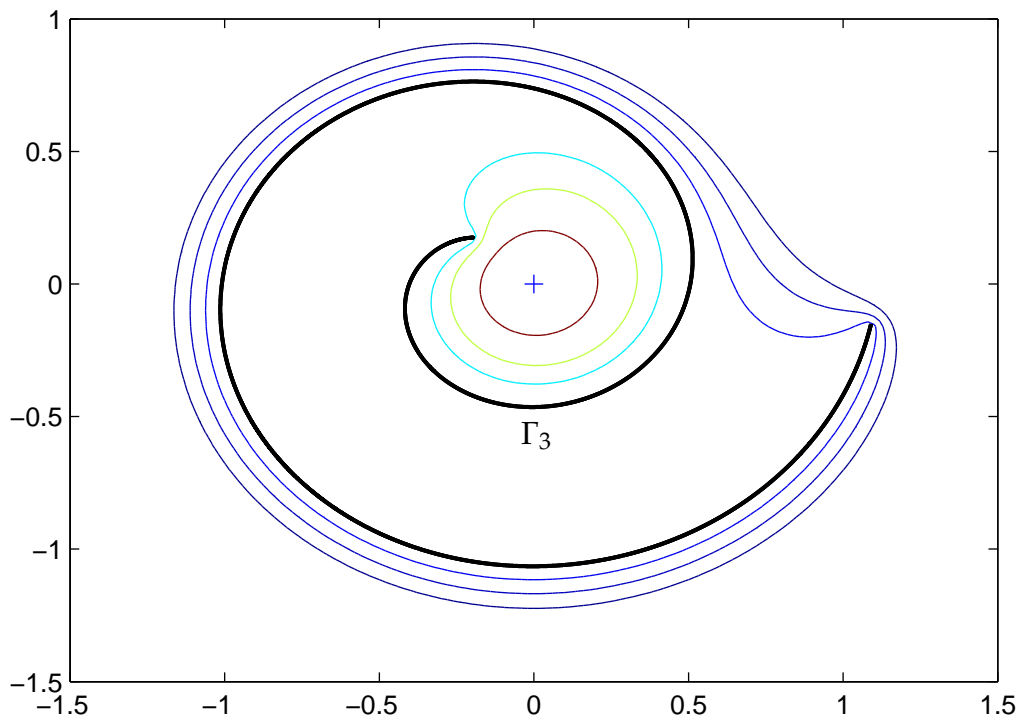


Abbildung 7.3: Quelle, Bogen und Äquipotenziallinien für Beispiel 7.3

Kapitel 8

Fazit und Ausblick

In dieser Arbeit haben wir gesehen, dass die beiden äquivalenten Verfahren zur Lösung des Problems aus Kapitel 4 die in Kapitel 7 gezeigte exponentielle Konvergenz vorweisen. Es ist aufgefallen, dass die numerische Lösung der Integralgleichung zweiter Art im Sinne des Abschnitts 7.8 stabil ist, wohingegen beim Gleichungssystem zur numerischen Lösung der Integralgleichung erster Art die Konditionszahl linear mit der Feinheit der Diskretisierung anwächst. Dieses Verhalten war in Anbetracht der Ergebnisse aus Section 14.1 in [Kre99] zu erwarten.

Jedoch stellen wir fest, dass der Operator \tilde{T}_0 (siehe Abschnitt 7.3.1) aufgrund seiner Abbildungseigenschaften instabil ist, was sich durch die Anwendung auf die Randdaten negativ auf den eventuell auftretenden Datenfehler auswirkt. Ein Ausweg besteht darin, bei zusätzlich vorhandenem Wissen über die Ableitung der gegebenen rechten Seite den Operator \tilde{T}_0 durch die stabilen so genannten *Garrickschen Quadraturformeln* (siehe [Kre71]) zu approximieren.

In [JR03] wurde die Summe eines Quadrupelschichtpotenzials und eines gewichteten Doppelschichtpotenzials als Regularisierer für ein Einfachschichtpotenzial genutzt. Dies wurde zuerst für ein Geradenstück durchgeführt und danach auf den Fall eines allgemeinen offenen Bogens übertragen. Da der benutzte Regularisierer nicht injektiv ist, wurde sein Urbildraum modifiziert, was zu Problemen in der Existenzanalyse führte und sich auch auf die numerische Lösung fortsetzt.

In dieser Arbeit haben wir durch Anwendung der Cosinus-Substitution die Existenzanalyse wesentlich vereinfachen können und konnten durch die Wahl des bijektiven Operators \tilde{T}_0 für den entsprechenden Regularisierer die Probleme aus [JR03] umgehen. Daher haben wir auch ein gegenüber [JR03] vereinfachtes numerisches Lösungsverfahren erhalten.

Am Ende wollen wir Erweiterungsmöglichkeiten für das in dieser Arbeit behandelte Problem vorstellen:

Mehrere Bögen Wir können das Problem 4.1 dahingehend erweitern, dass wir eine beliebige endliche Zahl an disjunkten Bögen Γ_j mit $j = 1, \dots, m$ als Rand zulassen. Wir erhalten damit ein System von mehreren Integralgleichungen ähnlicher Gestalt, so dass bei der Existenztheorie keine weiteren Schwierigkeiten zu erwarten sind.

Das entstehende Gleichungssystem wird jedoch entsprechend größer werden, so dass Probleme bei der direkten Lösung zu erwarten sind und iterative Methode zu bevorzugen sind.

Wir erwarten weiterhin, dass durch die größer werdenden Gleichungssysteme die exponentielle Konvergenz erst bei erhöhter Stützstellenzahl eintritt.

Andere Modellumgebungen Ferner kann man die Laplacegleichung als Modellfall zur Helmholtzgleichung oder zu den Navier-Gleichungen in der Elastodynamik auffassen, wobei dabei dann Streuprobleme für akustische oder elastische Wellen an einem Riss beschrieben werden. Diese Modellumgebungen können dann sowohl im \mathbb{R}^2 als auch im \mathbb{R}^3 betrachtet werden. Wir erwarten, dass die hier dargestellten Methoden sich ohne große Probleme auch auf diese komplizierteren Fälle ausdehnen lassen.

Inverses Problem Es ist offensichtlich, dass sich das hier behandelte Problem als Ausgangspunkt für ein zugehöriges inverses Problem eignet. Hierbei sei vor allem auf inverse Streuprobleme hingewiesen, wie sie z.B. auch in den oben angesprochenen Modellumgebungen auftreten.

Literaturverzeichnis

- [Alt92] ALT, Hans W.: *Lineare Funktionalanalysis. Eine anwendungsorientierte Einführung*. 2. Auflage. Springer Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1992
- [Erh87] ERHARD, Heinz: *Differential- und Integralrechnung III*. Vorlesungsskript Wintersemester 1986/1987, Göttingen, 1987
- [FL03] FISCHER, Wolfgang ; LIEB, Ingo: *Funktionentheorie. Komplexe Analysis in einer Veränderlichen*. Vieweg, 2003
- [Hee03] HEESE, Harald: *Integralgleichungsmethode für ein Randwertproblem aus der Theorie der Supraleitung*, Göttingen, Diplomarbeit, 2003
- [JR03] JIANG, Shidong ; ROKHLIN, Vladimir: Second kind integral equations for the classical potential theory on open surfaces I: analytical apparatus. In: *Journal of Computational Physics* 191 (2003), S. 40–74
- [JR04] JIANG, Shidong ; ROKHLIN, Vladimir: Second kind integral equations for the classical potential theory on open surfaces II. In: *Journal of Computational Physics* 195 (2004), S. 1–16
- [Kre71] KRESS, Rainer: Ein ableitungsfreies Restglied für die trigonometrische Interpolation periodischer analytischer Funktionen. In: *Num. Math.* 16 (1971), S. 389–396
- [Kre98] KRESS, Rainer: *Numerical Analysis*. Springer Verlag, New York - Berlin - Heidelberg, 1998
- [Kre99] KRESS, Rainer: *Linear Integral Equations*. Second Edition. Springer Verlag, New York - Berlin - Heidelberg, 1999
- [Kre04] KRESS, Rainer: *Lineare Funktionalanalysis*. Vorlesungsskript Wintersemester 2003/2004, Göttingen, 2004
- [Mö94] MÖNCH, Lars: *Ein Quadraturformelverfahren für eine hypersinguläre Integralgleichung bei der Helmholtzgleichung im \mathbb{R}^2* , Göttingen, Diplomarbeit, 1994

- [Sch96] SCHORMANN, Christoph: *Newton-Verfahren für ein inverses Transmissionsproblem bei elektromagnetischen Wellen*, Göttingen, Diplomarbeit, 1996
- [Wer92] WERNER, Jochen: *Numerische Mathematik*. Vieweg Verlag, 1992
- [Zei03] ZEIDLER, Eberhard: *Teubner - Taschenbuch der Mathematik*. B.G. Teubner Verlag, 2003

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei allen bedanken, die mich bei der Entstehung dieser Arbeit sowie während meines gesamten Studiums in jeglicher Art und Weise unterstützt haben.

Mein Dank gilt in erster Linie Herrn Professor Dr. Rainer Kreß für die interessante Themenstellung, für die hervorragende Betreuung während der Entstehung dieser Arbeit und für die vielen guten Vorlesungen der vergangenen Jahre. Seine Begeisterung auf diesem Gebiet öffnete mir den Weg zur numerischen Mathematik.

Ich danke meinen Eltern, die mir mein Studium ermöglicht haben und immer für mich da sind.

Ich möchte Tina Anne Schütz danken, die mir mathematisch und moralisch während dieser Zeit eine große Unterstützung war.

Ein weiterer Dank gilt meinem Freund Martin Wannert für die Diskussionen, Ratschläge und Korrekturhinweise.

Zuletzt möchte ich allen danken, die mir ebenfalls in dieser Zeit zur Seite standen und die ich hier nicht namentlich erwähnt habe.