

Hausarbeit im Rahmen der Ersten Staatsprüfung
für das Lehramt an Gymnasien

**Graphentheoretische Konzepte in der
Gymnasialen Oberstufe**
- Ein Unterrichtsentwurf unter Berücksichtigung der Neuen
Medien.

Vorgelegt von Thomas Wassong

Betreut durch Dr. Gerd Rapin
und Prof. Dr. Eckart Modrow

Göttingen, den 09. März 2007

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	v
1. Mathematische Grundlagen der Graphentheorie	1
1.1. Einstieg in die Graphentheorie	4
1.2. Eulergraphen	11
1.3. Die Suche nach den kürzesten Wegen	16
1.3.1. Kürzeste Wege in ungewichteten Graphen	18
1.3.2. Kürzeste Wege in gewichteten Graphen	20
1.4. Anwendungen der Graphentheorie	24
1.4.1. Turniergraphen	24
1.4.2. Perfektes Matching	28
1.4.3. Stabiles Fachwerk	34
2. Graphentheorie im didaktischen Diskurs	41
2.1. Die Entwicklung in den Jahren 1950–1980	42
2.1.1. Geometrische Propädeutik in der Grundschule	42
2.1.2. Graphentheorie im gymnasialen Mathematikunterricht	45
2.2. Ansätze der letzten zehn Jahre	47
2.2.1. Veröffentlichungen im Bereich Graphentheorie und Didaktik	47
2.2.2. Graphentheorie in Lehrplänen und Standards	50
2.3. Zielsetzungen dieser Arbeit	51
3. Webbasierte Lernumgebungen im Mathematikunterricht	53
3.1. Computer im Mathematikunterricht	53
3.2. „Neue Medien“ und „Neues Lernen“	55
3.3. Internet im Mathematikunterricht	56
3.4. Beispiele für webbasierte Lernumgebungen	57
3.5. Gefahren beim Arbeiten mit Neuen Medien	59
3.6. Zusammenfassung und Ziele	60
4. Unterrichtsentwürfe zur Graphentheorie	61
4.1. Einstieg und Grundlegung der Begriffe	63
4.1.1. Zusammenfassung	63
4.1.2. Vorbereitungen	63
4.1.3. Voraussetzungen	64
4.1.4. Fachdidaktische Analyse und Reduktion	64
4.1.5. Methodische Überlegungen	69

4.1.6.	Verlaufsplan	73
4.2.	Eulergraphen und Briefträger	75
4.2.1.	Zusammenfassung	75
4.2.2.	Vorbereitungen	75
4.2.3.	Voraussetzungen	75
4.2.4.	Fachdidaktische Analyse und Reduktion	75
4.2.5.	Methodische Überlegungen	78
4.2.6.	Verlaufsplan	83
4.3.	Kürzeste Wege in ungewichteten Graphen	84
4.3.1.	Zusammenfassung	84
4.3.2.	Vorbereitungen	84
4.3.3.	Voraussetzungen	84
4.3.4.	Fachdidaktische Analyse und Reduktion	85
4.3.5.	Methodische Überlegungen	88
4.3.6.	Verlaufsplan	92
4.4.	Kürzeste Wege in gewichteten Graphen	94
4.4.1.	Zusammenfassung	94
4.4.2.	Vorbereitungen	94
4.4.3.	Voraussetzungen	94
4.4.4.	Fachdidaktische Analyse und Reduktion	94
4.4.5.	Methodische Überlegungen	98
4.4.6.	Verlaufsplan	103
4.5.	Fachwerke, Turniergraphen und perfektes Matching	104
4.5.1.	Zusammenfassung	104
4.5.2.	Vorbereitungen	104
4.5.3.	Voraussetzungen	105
4.5.4.	Fachdidaktische Analyse und Reduktion	105
4.5.5.	Methodische Überlegungen	107
4.5.6.	Verlaufsplan	110
5.	Praktische Umsetzung der Unterrichtsentwürfe	113
5.1.	Durchführung in der Arbeitsgruppe	114
5.1.1.	Einführung und Grundlegung der Begriffe	115
5.1.2.	Eulergraphen und Briefträger	117
5.1.3.	Kürzeste Wege in ungewichteten Graphen	118
5.1.4.	Kürzeste Wege in gewichteten Graphen	120
5.1.5.	Fachwerke, Turniergraphen und perfektes Matching	122
5.2.	Durchführung im Leistungskurs Informatik	124
5.2.1.	Kürzeste Wege in ungewichteten Graphen	124
5.2.2.	Kürzeste Wege in gewichteten Graphen	126
5.2.3.	Fachwerke, Turniergraphen und perfektes Matching	128

6. Ergebnisse der Evaluation	131
6.1. Zur Art des Unterrichts	132
6.2. Zum Bearbeiten der Module und Aufgaben	133
6.3. Bewertung der einzelnen Module	134
6.3.1. Bewertung des Moduls <i>Fachwerke und Graphen</i>	134
6.3.2. Bewertung des Moduls <i>Paare finden</i>	135
6.3.3. Bewertung des Moduls <i>Turniergraphen</i>	136
6.4. Zum Interesse an der Graphentheorie	136
6.5. Bewertung der ersten vier Unterrichtsstunden	138
6.6. Zum Verständnis der SuS von Graphentheorie	139
7. Auswertung der Unterrichtseinheiten	141
7.1. Zur Graphentheorie	141
7.2. Zu webbasierten Lernumgebungen	144
Zusammenfassung und Ausblick	147
Anhang	151
A. Aufgabenblätter	151
A.1. Einstiegsaufgabe zur Graphentheorie	152
A.2. Wiederholung der Begriffe und Aufgaben zur Vertiefung der Graphen- theorie	153
A.3. Der Bauer mit dem Wolf, dem Schaf und dem Kohlkopf	154
A.4. Das Königsberger Brückenproblem	155
A.5. Neue Begriffe und Vertiefung zu Eulergraphen	156
A.6. Einstieg zu kürzesten Wegen	157
A.7. Vertiefung zum Breitensuch-Algorithmus	158
A.8. Wiederholung zu kürzesten Wegen	159
A.9. Einstieg zum Routenplanen	160
A.10. Folie zu Einstieg zum Routenplanen	161
A.11. Vertiefung zum Dijkstra-Algorithmus	162
B. Ilias-Module	163
B.1. Einführung in die Graphentheorie	164
B.2. Fachwerk und Graphen	165
B.3. Paare finden	176
B.4. Turniergraphen	183
C. Informationen zur beigelegten CD	189
D. Literaturverzeichnis	193
D.1. Literatur	193
D.2. Links	196

Einleitung

Kreatives, kombinatorisches und argumentierendes Denken wird provoziert.¹

Mit diesem Satz begründet HEINRICH WINTER den Einsatz von Graphentheorie im Mathematikunterricht der Grundschule. Doch was für die Grundschule wahr ist, lässt sich auch auf andere Schulstufen übertragen, denn die Graphentheorie besticht zudem dadurch, dass „ohne mathematisches Vorwissen [...] nicht-triviale [, graphentheoretische] Beobachtungen gemacht und unterschiedlich ‚hoch‘ begründet werden [können]“².

Diese beiden Eigenschaften der Graphentheorie sind zentral für die Argumentation zur Aufnahme der Graphentheorie in den Schulalltag. Die vorliegende Arbeit versucht in diese Diskussion einen neuen Aspekt einzubringen. Im Zentrum steht dabei die Graphentheorie ergänzt um den Einsatz Neuer Medien, insbesondere den Einsatz webbasierter Lernumgebungen. Es lassen sich Synergie-Effekte zwischen den Neuen Medien und der Graphentheorie in ihrem Wirken auf einen neuartigen Unterricht nutzen. Dabei darf jedoch kein Medium ausschließlich genutzt werden, weshalb neben den Neuen auch auf analoge Medien zurückgegriffen wird. Dieser Aspekt wird in einem 5 Doppelstunden umfassenden Unterrichtsentwurf ausgearbeitet und durchgeführt.

Das zentrale Beispiel für den unterstützenden Einsatz webbasierter Lernumgebungen wird ein Java-Applet sein, welches den SuS³ ermöglicht zu erkennen, was es bedeutet, dass ein Fachwerk stabil ist. In diesem Applet können die SuS Fachwerke mit unterschiedlichen Querstreben an einigen Schnittpunkten bewegen und erfahren, ob

¹ HEINRICH WINTER: Geometrisches Vorspiel im Mathematikunterricht der Grundschule. In: Der Mathematikunterricht, 5 1971, S. 58.

² Ebd.

³ SuS ist eine Abkürzung für Schülerinnen und Schüler, die ich in dieser Arbeit verwende. SuS werde ich auch nutzen, wenn nur eine Person gemeint ist.

das Fachwerk seine Form behält. Diese Erfahrung begleitet von unterstützenden Erläuterungen ist ohne den Einsatz webbasierter Lernumgebungen nicht oder nur sehr schwierig zu erreichen.

Die Arbeit ist in drei Teile gegliedert: Der erste Teil umfasst das Kapitel *Mathematische Grundlagen der Graphentheorie* ab Seite 1, das Kapitel *Graphentheorie im didaktischen Diskurs* ab Seite 41 und das Kapitel *Webbasierte Lernumgebungen im Mathematikunterricht* ab Seite 53, in denen die theoretischen Grundlagen für die Unterrichtsentwürfe präsentiert werden. Dazu gehören neben den mathematischen auch die didaktischen Grundlagen, zu denen ich eine Übersicht über die bisherigen Diskussionen in Bezug auf die Graphentheorie, den Einsatz Neuer Medien im Allgemeinen und den Einsatz webbasierter Lernumgebungen im Besonderen zähle. Während ich bei der Darstellung der didaktischen Diskussion den zeitlichen Verlauf skizziere, steht bei der Diskussion über den Einsatz Neuer Medien zunächst die Kategorisierung der Medien und danach der Einsatz von webbasierten Lernumgebungen im Vordergrund.

In den Kapiteln 2.3 ab Seite 51 und 3.6 ab Seite 60 werden anhand der vorherigen Ausführungen die Ziele dieser Arbeit zu den Themen *Graphentheorie* und *Neue Medien* genauer definiert. Dabei stehen zum Einen eine breite Fächerung der Themen sowie eine methodische und didaktische Analyse der Unterrichtsentwürfe und zum Anderen der Medieneinsatz, insbesondere einer webbasierten Lernumgebung im Vordergrund.

Der zweite Teil besteht aus den Unterrichtsentwürfen, die im Kapitel *Unterrichtsentwürfe zur Graphentheorie* ab Seite 61 dieser Arbeit wiedergegeben werden. Dabei werden die Entwürfe sowohl in fachlicher als auch in methodischer Hinsicht erläutert. Die erstellten Arbeitsblätter finden sich im Anhang A ab Seite 151, eine Druckversion der ILIAS-Module im Anhang B ab Seite 163.

Die fünf Unterrichtsentwürfe erstrecken sich von der Einführung der Graphentheorie und den Eulergraphen über das Problem der Kürzesten Wege zu den Anwendungen der Turniergraphen, dem Finden von Paaren und den stabilen Fachwerken. Bei dem Problem der Kürzesten Wege werden sowohl ungewichtete als auch gewichtete Graphen betrachtet, wobei auf Grundlage der Breitensuche für ungewichtete Graphen der Dijkstra-Algorithmus für gewichtete Graphen entwickelt wird.

Der dritte Abschnitt befasst sich mit der Durchführung der Unterrichtsentwürfe und ihrer Evaluation. Zur Evaluation des Unterrichts werden zwei Instrumente benutzt.

Einleitung

Zum Einen beschreibe ich meine Eindrücke im jeweiligen Unterricht und reflektiere diese im Kapitel *Praktische Umsetzung der Unterrichtsentwürfe* ab Seite 113. Zum Anderen habe ich einen Fragebogen erstellt, den die SuS am Ende der letzten Stunde ausgefüllt haben. Die Auswertung dieser Evaluation erfolgt im Kapitel *Ergebnisse der Evaluation* ab Seite 131.

Die Unterrichtsentwürfe wurden mit einer Arbeitsgruppe im elften Jahrgang und einem Leistungskurs Informatik aus dem zwölften Jahrgang durchgeführt. Die Durchführung in beiden Lerngruppen wird beschrieben, ebenso die Ergebnisse der Evaluationen in beiden Gruppen. Die jeweilige Durchführung wird am Ende der Berichte reflektiert. An geeigneten Stellen finden sich Überlegungen, welche Veränderungen in den Entwürfen aufgrund der Beobachtungen während der Durchführung erfolgen könnten.

Aufgrund der Ergebnisse aus der Durchführung und der Evaluation werden im Kapitel *Auswertung der Unterrichtseinheiten* ab Seite 141 die in den Kapiteln 2.3 und 3.6 formulierten Ziele überprüft. Dabei ergibt sich, dass die Ziele im Wesentlichen erreicht wurden. Lediglich an einer Stelle kann aus den Ergebnissen eine Änderung der Entwürfe gefordert werden. In Hinblick auf den Einsatz der Neuen Medien werden alle Ziele voll erfüllt. Zudem wird festgestellt, dass die SuS vom Einsatz webbasierter Lernumgebungen begeistert sind. Gleichzeitig wird aber betont, dass die Neuen Medien nur eine Methode neben anderen sein können. Jedoch ist es mehr als eine Überlegung Wert, Neue Medien nicht nur als Werkzeuge im Mathematikunterricht einzusetzen.

Zum Abschluss der Arbeit fasse ich meine Ergebnisse zusammen und präsentiere einen Ausblick auf weitere Projekte, die sich an dieses anschließen können. Zu den weiteren Projekten gehört neben der Aufnahme von weiteren Themen und anderen webbasierten Lernumgebungen auch die Ausarbeitung einer vollständigen Unterrichtseinheit samt Abschlussklausur.

Im Anhang findet sich neben den erwähnten Aufgabenblättern und ILIAS-Modulen eine Live-CD, mit der die erstellten Module in einer ILIAS-Umgebung getestet werden können. Der Anhang C gibt weitere Informationen zur Nutzung der Live-CD.

Die gewählten Themen aus der Graphentheorie verfolgen die Absicht, den SuS einen möglichst breiten Einblick in die Graphentheorie zu gewähren. Jedoch ist die Auswahl weder repräsentativ noch zwangsläufig. Anstatt des Themas *Kürzeste Wege* wären auch

Färbungsprobleme vorstellbar gewesen oder die Anwendungen der Graphentheorie hätten anders gewählt werden können. Die Wahl dieser Themen geht vor allem auf meine persönlichen Interessen, meine Ideen zur Umsetzung der einzelnen Themen und dem Wunsch nach einer möglichst breiten Fächerung zurück. Ein wichtiges Thema, welches hier aus Zeitgründen nicht betrachtet wird, ist die Isomorphie von Graphen. Obwohl Graphen in den vorgestellten Unterrichtsentwürfen nur in ihrer bildlichen Darstellung verwendet werden, wird die Nichtbeachtung der Isomorphie von Graphen keine negativen Auswirkungen haben. Im Fall des Breitensuch-Algorithmus hilft die Nichtbeachtung sogar Feinheiten des Algorithmus zu erfahren, wie in Kapitel 4.4.4 zu lesen ist.

1. Mathematische Grundlagen der Graphentheorie

Die Graphentheorie ist ein Teilgebiet der Diskreten Mathematik und beschäftigt sich mit den Eigenschaften von Graphen und ihren Beziehungen untereinander. Die Anfänge der Graphentheorie lassen sich auf das Königsberger Brückenproblem von Leonard Euler aus dem Jahr 1736 zurückführen. Leonard Euler zeigte in seiner Publikation *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*⁴, dass es nicht möglich ist, in Königsberg die Pregel an ihren sieben Brücken je einmal zu überqueren und am Ausgangspunkt wieder anzukommen.⁵

Graphen bestehen im Wesentlichen aus zwei Mengen: der *Knotenmenge* V (= Vertices (engl. Knoten)) und der *Kantenmenge* E (= Edges (engl. Kanten)). Dabei enthalten die Elemente der Kantenmenge zwei Knoten. Zwischen diesen beiden Knoten existiert dann eine Kante bzw. eine Verbindung. Ich lasse hier explizit keine Schlingen oder Mehrfachkanten zu. *Schlingen* sind Kanten, bei denen der Anfangsknoten gleich dem Endknoten ist, und *Mehrfachkanten* liegen vor, wenn mehr als eine Kante mit den gleichen Anfangs- und Endknoten im selben Graphen existiert. Graphen, die Schlingen oder Mehrfachkanten enthalten, werden *Multigraphen* genannt. Graphen ohne Schlingen oder Mehrfachkanten heißen *einfache Graphen*.

Bildlich lässt sich ein Graph darstellen, indem man die Knoten als Punkte und die Kanten als Linien zwischen den Knoten zeichnet. Dabei ist es jedem selbst überlassen, ob sich die Linien so selten wie möglich kreuzen, ob Kanten als gerade bzw. gekrümmte Linie gezeichnet werden oder wie die Wahl bezüglich der Positionen der

⁴ LEONARD EULER: *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*. In: *Commentationes algebraicae ad theoriam combinationum et probabilitatum pertinentes*. Birkhäuser Verlag, 1923 (= *Opera Mathematica* Volume 7) URL: <http://math.dartmouth.edu/~euler/docs/originals/E053.pdf> – Zuletzt besucht am 02.02.2007.

⁵ Die Eulergraphen, die auf diese Veröffentlichung zurückgehen, werden im Kapitel *Eulergraphen* ab Seite 11 näher betrachtet. Das Königsberger Brückenproblem wird im Kapitel *Eulergraphen und Briefträger* ab Seite 75 betrachtet.

1. Mathematische Grundlagen der Graphentheorie

Knoten fällt. Die Abbildung 1.1 zeigt ein Beispiel einer bildlichen Darstellung eines Graphen.

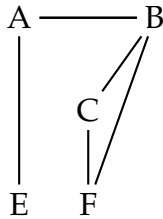


Abbildung 1.1.: Bildliche Darstellung eines Graphen.

Ich werde im Folgenden zwischen zwei Arten von Kanten unterscheiden, den gerichteten und den ungerichteten Kanten. Eine *gerichtete Kante* zwischen den Knoten v und w bedeutet, dass es eine Verbindung von v nach w gibt, jedoch nicht umgekehrt. Bei einer *ungerichteten Kante* zwischen den Knoten v und w existieren beide Richtungen. Ein Graph ist entweder ein gerichteter oder ungerichteter Graph, es gibt keine Graphen sowohl mit gerichteten als auch mit ungerichteten Kanten. Ein Graph mit gerichteten Kanten nennt man *gerichteten Graphen*, einen mit ungerichteten Kanten *ungerichteten Graphen*.

Das vorliegende Kapitel klärt zunächst einige Grundbegriffe (Kapitel 1.1), bevor es sich den Eulergraphen zuwendet (Kapitel 1.2). Danach steht die Suche nach den kürzesten Wegen (Kapitel 1.3) im Mittelpunkt. Abschließend stelle ich drei Anwendungen der Graphentheorie vor: die Turniergraphen (Kapitel 1.4.1), das perfekte Matching (Kapitel 1.4.2) und die Stabilität von Fachwerken (Kapitel 1.4.3).

Für die verwendeten Definitionen und Beweise wurde auf folgende Literatur zurückgegriffen.

Die beiden klassischen Werke über Anwendungen der Graphentheorie sind *Graphs and their uses* von OYSTEIN ORE⁶ und *Introductory graph theory* von GARY CHATRAN⁷. In ihnen finden sich Beweise und Beispiele zu den klassischen Anwendungen wie Färbungsprobleme oder die Suche nach den kürzesten Wegen. Das deutschen Werk *Gra-*

⁶ OYSTEIN ORE; ROBIN J. WILSON (Hrsg.): *Graphs and their uses*. Washington: The mathematical association of america, 1990 (= New mathematical library 34).

⁷ GARY CHATRAN: *Introductory graph theory*. New York: Dover Publications, Inc., 1985.

phen für Einsteiger - Rund um das Haus vom Nikolaus von MANFRED NITZSCHE⁸ bietet eine vergleichbare Auswahl von Anwendungen. In diesen drei Werke wird darauf Wert gelegt, möglichst einfach und anschaulich die Zusammenhänge in der Graphentheorie zu erläutern. In den grundlegenden Definitionen werden so z.B. weitestgehend auf mathematische Formeln verzichtet.

Einen anderen Weg geht hier REINHARD DIESTEL⁹ in seinem Buch *Graphentheorie*, der alle Definitionen und Beweise formal definiert und weniger die Anwendungsmöglichkeiten der Graphentheorie im Blick hat.

Ich werde in diesem Kapitel so weit wie möglich und praktikabel die Definitionen und Sätze formal formulieren ohne dabei die allgemeine Verständlichkeit außer Acht zu lassen.

⁸ MANFRED NITZSCHE: *Graphen für Einsteiger - Rund um das Haus vom Nikolaus*. Wiesbaden: Friedrich Vieweg & Sohn Verlag, 2005.

⁹ REINHARD DIESTEL: *Graphentheorie*. Heidelberg: Springer-Verlag, 2006 URL: <http://www.math.uni-hamburg.de/home/diestel/books/graphentheorie/GraphentheorieIII.pdf> – Zuletzt besucht am 05.03.2007.

1.1. Einstieg in die Graphentheorie

Zunächst definiere ich die Menge aller Graphen, die ich im Folgenden betrachten werde.

Definition Menge endlicher Graphen

Ein Graph $G = (V, E)$ mit $|V| < \infty$ heißt endlicher Graph.

Γ bezeichne die Menge aller endlichen Graphen

$$\Gamma = \{(V, E) : 0 < |V| < \infty\}.$$

Anmerkung Die Kantenmenge E wurde bisher nicht näher bestimmt. Dies erfolgt in den weiteren Definitionen, da sie abhängig von den Knotenmengen der einzelnen Unterklassen von endlichen Graphen ist. Wichtig ist zunächst, dass die Kanten in E nur über Knoten aus V definiert sind.

Die Graphentheorie ermöglicht es Teile eines Graphen wieder als Graphen zu definieren.

Definition Teilgraph

Der Graph $G_T = (V_T, E_T) \in \Gamma$ ist genau dann ein Teilgraph von $G = (V, E) \in \Gamma$, wenn gilt $V_T \subset V$ und $E_T \subset E$.

Innerhalb der Menge der endlichen Graphen gibt es zwei Klassen von Graphen, die sich in ihren Kantenmengen unterscheiden. Die erste Klasse sind die ungerichteten Graphen.

Definition ungerichteter Graph

Ein ungerichteter Graph $G = (V, E) \in \Gamma$ besteht aus einer Knotenmenge V und einer Kantenmenge $E \subset \{\{v_1, v_2\} \mid v_1, v_2 \in V, v_1 \neq v_2\}$.

Man bezeichnet die Menge

$$\Gamma_u = \{(V, E) : 0 < |V| < \infty \text{ und } \{v_1, v_2\} \in E \Rightarrow v_1, v_2 \in V, v_1 \neq v_2\} \subset \Gamma$$

als die Menge aller ungerichteten Graphen.

1.1. Einstieg in die Graphentheorie

Die zweite Klasse sind die gerichteten Graphen.

Definition gerichteter Graph

Ein gerichteter Graph $G = (V, E) \in \Gamma$ besteht aus einer Knotenmenge V und einer Kantenmenge $E \subset \{(v_1, v_2) \mid v_1, v_2 \in V, v_1 \neq v_2\}$.

Der Knoten $v_1 \in V$ heißt Anfangsknoten, $v_2 \in V$ Endknoten der Kante $(v_1, v_2) \in E$. Man sagt, die Kante $(v_1, v_2) \in E$ zeigt von v_1 nach v_2 .

Man bezeichnet die Menge

$$\Gamma_g = \{(V, E) : 0 < |V| < \infty \text{ und } (v_1, v_2) \in E \Rightarrow v_1, v_2 \in V, v_1 \neq v_2\} \subset \Gamma$$

als die Menge aller gerichteten Graphen.

Nun betrachte ich jeweils ein Beispiel zu diesen Klassen.

Beispiel ungerichteter Graph. Sei $G = (V, E) \in \Gamma_u$ ein Graph mit $V = \{A, B, C, D\}$ und $E = \{\{A, B\}, \{B, C\}, \{C, D\}, \{D, B\}\}$. Die Abbildung 1.2 zeigt eine bildliche Darstellung von G .

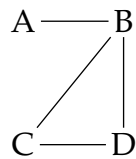


Abbildung 1.2.: Beispiel eines ungerichteten Graphen.

Beispiel gerichteter Graph. Sei $G = (V, E) \in \Gamma_g$ ein gerichteter Graph mit $V = \{A, B, C, D\}$ und $E = \{(A, B), (B, C), (C, D), (D, C), (B, D)\}$. Die Abbildung 1.3 zeigt eine bildliche Darstellung von G .

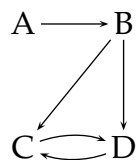


Abbildung 1.3.: Beispiel eines gerichteten Graphen.

Bei der bildlichen Darstellung eines gerichteten Graphen wird die *Richtung* der Kanten mit Pfeilen gekennzeichnet.

1. Mathematische Grundlagen der Graphentheorie

Oft wird in ungerichteten Graphen nach Knoten gefragt, die mit einem anderen Knoten eine Kante gemeinsam haben. Diese Beziehung zwischen zwei Knoten betrachtet die folgende Definition.

Definition adjazent, inzident

In einem ungerichteten Graphen $G = (V, E) \in \Gamma_u$ ist ein Knoten $v_1 \in V$ mit dem Knoten $v_2 \in V$ benachbart oder adjazent, wenn die Kante von v_1 nach v_2 existiert, also $\{v_1, v_2\} \in E$. In einem ungerichteten Graphen $G = (V, E) \in \Gamma_u$ ist ein Knoten $v \in V$ mit der Kante $e \in E$ inzident, wenn $v \in e$ gilt.

Anmerkung Bei gerichteten Graphen gibt es äquivalente Definitionen, die aber in dieser Arbeit nicht von Interesse sind.

In einigen Fällen ist es sinnvoll, nicht einzelne Kanten zu betrachten, sondern Aneinanderreihungen von Kanten. Diese nenne ich *Kantenzüge*. Formal sind die Definitionen für ungerichtete und gerichtete Graphen unterschiedlich, so dass hier zwei Definitionen gegeben werden.

Definition Kantenzug in ungerichteten Graphen

Ein Kantenzug k in einem ungerichteten Graphen $G = (V, E) \in \Gamma_u$ ist eine Folge von Knoten v_1, \dots, v_l mit $l > 1$, in der gilt

$$k(v_1, \dots, v_l) \text{ mit } \{v_i, v_{i+1}\} \in E \text{ und } v_i, v_{i+1} \in V \text{ für alle } i \in \{1, \dots, l-1\}.$$

v_1 nennt man den Anfangsknoten und v_l den Endknoten des Kantenzuges. Man spricht auch von einem Kantenzug von v_1 nach v_l .

Die Länge des Kantenzuges $|k(v_1, \dots, v_l)|$ ist $l - 1$.

K_G bezeichne die Menge aller Kantenzüge in G .

E_k bezeichne die Menge der Kanten auf dem Kantenzug k , d.h.

$$E_k = \{ \{v_i, v_{i+1}\} \in E : k(v_1, \dots, v_l) \in K_G \text{ und } i \in \{1, \dots, l-1\} \}.$$

Anmerkung Wenn in einem ungerichteten Graphen $G = (V, E) \in \Gamma_u$ der Kantenzug $k(v_1, \dots, v_l) \in K_G$ existiert, so existieren auch die Kantenzüge

$$k(v_i, \dots, v_j) \in K_G \text{ für alle } i, j \in \{1, \dots, l\}, i \neq j.$$

1.1. Einstieg in die Graphentheorie

Definition Kantenzug in gerichteten Graphen

Ein Kantenzug k in einem gerichteten Graphen $G = (V, E) \in \Gamma_g$ ist eine Folge von Knoten v_1, \dots, v_l mit $l > 1$, in der gilt

$$k(v_1, \dots, v_l) \text{ mit } (v_i, v_{i+1}) \in E \text{ und } v_i, v_{i+1} \in V \text{ f\"ur alle } i \in \{1, \dots, l-1\}.$$

v_1 nennt man den Anfangsknoten und v_l den Endknoten des Kantenzuges. Man spricht auch von einem Kantenzug von v_1 nach v_l .

Die Länge des Kantenzuges $|k(v_1, \dots, v_l)|$ ist $l - 1$.

K_G bezeichne die Menge aller Kantenzüge in G .

E_k bezeichne die Menge der Kanten auf dem Kantenzug k , d.h.

$$E_k = \{(v_i, v_{i+1}) \in E : k(v_1, \dots, v_l) \in K_G \text{ und } i \in \{1, \dots, l-1\}\}.$$

Anmerkung Wenn in einem gerichteten Graphen $G = (V, E) \in \Gamma_g$ der Kantenzug $k(v_1, \dots, v_l) \in K_G$ existiert, so existieren auch die Kantenzüge

$$k(v_i, \dots, v_j) \in K_G \text{ f\"ur alle } i, j \in \{1, \dots, l\}, i < j.$$

Auf dieser Grundlage können weitere Begriffe für beide Klassen von Graphen äquivalent definiert werden.

Definition Weg

Ein Weg w in einem Graphen $G = (V, E) \in \Gamma$ ist ein Kantenzug $w(v_1, \dots, v_l)$ in G , in dem jeder Knoten einmal vorkommt, d.h.

$$w(v_1, \dots, v_l) \in K_G \text{ und } v_i \neq v_j \forall i, j \in \{1, \dots, l\}, i \neq j.$$

v_1 nennt man den Anfangsknoten und v_l den Endknoten des Weges. Man spricht auch von einem Weg von v_1 nach v_l .

Die Länge des Weges $|w(v_1, \dots, v_l)|$ ist $l - 1$.

W_G sei die Menge aller Wege in G .

1. Mathematische Grundlagen der Graphentheorie

Anmerkung Wenn in einem ungerichteten Graphen $G = (V, E) \in \Gamma_u$ der Weg $w(v_1, \dots, v_l) \in K_G$ existiert, so existieren auch die Wege

$$w(v_i, \dots, v_j) \text{ für alle } i, j \in \{1, \dots, l\}, i \neq j.$$

Für gerichtete Graphen gilt die Einschränkung $i < j$.

Definition verbunden

Die Knoten $v_1, v_2 \in V$ sind genau dann in einem Graphen $G = (V, E) \in \Gamma$ verbunden, wenn es einen Weg von v_1 nach v_2 gibt, d.h. es existiert ein Weg $w(v_1, \dots, v_2) \in W_G$.

Definition zusammenhängend

Ein Graph $G = (V, E) \in \Gamma$ mit $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ ist genau dann zusammenhängend, wenn alle Knoten des Graphen miteinander verbunden sind, d.h.

$$\forall v_i, v_j \in V \text{ mit } i, j \in \{1, \dots, n\} \text{ und } i \neq j \text{ existiert ein Weg } w(v_i, \dots, v_j) \in W_G.$$

Wenn ein Graph nicht zusammenhängend ist, so gibt es Teilgraphen, die zusammenhängend sind. Die Teilgraphen nennt man Komponenten des Graphen.

Definition Kreis, kreisfrei

Ein Graph $G = (V, E) \in \Gamma$ enthält dann einen Kreis k , wenn k ein Kantenzug in G ist, in dem der Anfangsknoten gleich dem Endknoten ist und alle Kanten nur einmal genutzt werden. Es gilt also

$$\exists k(v_1, \dots, v_n) \in K_G : v_1 = v_n \text{ und } \{v_i, v_{i+1}\} \neq \{v_j, v_{j+1}\} \forall i, j \in \{1, \dots, n-1\}, i \neq j.$$

Ein Graph $G = (V, E) \in \Gamma$ ist dann ein Kreis, wenn er einen Kreis $k(v_1, \dots, v_n) \in K_G$ enthält mit $E_k = E$ und $\{v_1, \dots, v_n\} = V$.

$K_{G_\circ} \subset K_G$ bezeichne die Menge aller Kreise in G . Ein Graph ist dann kreisfrei, wenn kein Kreis in ihm gefunden werden kann.

Um die neuen Definitionen zu verdeutlichen, betrachte ich nun ein Beispiel.

Beispiel. Sei zunächst der Graph in Abbildung 1.4 auf der gegenüberliegenden Seite gegeben.

Dieser Graph ist nicht zusammenhängend. Die beiden Zusammenhangskomponenten erstrecken sich über die Knotenmengen $\{A, B, C, D\}$ und $\{E, F, G, H, I\}$.

1.1. Einstieg in die Graphentheorie

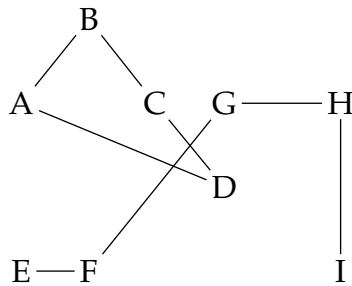


Abbildung 1.4.: Beispiel eines nicht zusammenhängenden Graphen.

Der Graph enthält einen Kreis, nämlich $k(A, B, C, D, A)$. Nach der genauen Definition eines Kreises handelt es sich um acht Kreise, nämlich $k(A, B, C, D, A)$, $k(B, C, D, A, B)$, $k(C, D, A, B, C)$, $k(D, A, B, C, D)$, $k(A, D, C, B, A)$, $k(D, C, B, A, D)$, $k(C, B, A, D, C)$ und $k(B, A, D, C, B)$.

Nun betrachte ich den Unterschied zwischen Kantenzug und Weg. Der Kantenzug $k(A, B, C, D, A, B, C)$ ist kein Weg, da die Knoten A, B und C mehr als einmal vorkommen. Dafür ist der Kantenzug $k(A, B, C)$ ein Weg.

Für einige Anwendungen benötigt man die Anzahl der Kanten, die an einem Knoten beginnen oder enden. Dabei gibt es unterschiedliche Definitionen für die beiden Klassen von Graphen. Hier werden für die beiden Klassen unterschiedliche Begriffe verwendet.

Definition Grad eines Knoten in einem ungerichteten Graphen

Der Grad $d(v)$ eines Knoten $v \in V$ in einem ungerichteten Graphen $G = (V, E) \in \Gamma_u$ ist definiert durch

$$d(v) = |\{v_i \in V : \{v, v_i\} \in E\}|.$$

Definition Eingangsgrad und Ausgangsgrad eines Knoten in einem ungerichteten Graphen

Der Eingangsgrad $d_-(v)$ eines Knoten $v \in V$ in einem gerichteten Graphen $G = (V, E) \in \Gamma_g$ ist definiert durch

$$d_-(v) = |\{v_i \in V : (v_i, v) \in E\}|.$$

Der Ausgangsgrad $d_+(v)$ ist definiert durch

$$d_+(v) = |\{v_i \in V : (v, v_i) \in E\}|.$$

1. Mathematische Grundlagen der Graphentheorie

Beispiel Eingangsgrad, Ausgangsgrad. Gegeben sei folgender gerichteter Graph.

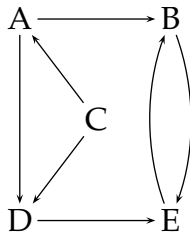


Abbildung 1.5.: Beispiel Eingangs- und Ausgangsgrad eines gerichteten Graphen.

Die folgende Tabelle gibt eine Übersicht der Ausgangs- und Eingangsgrade der Knoten.

Knoten	d_+	d_-
A	2	1
B	1	2
C	2	0
D	1	2
E	1	2

Zum Abschluss eine kurze Bemerkung über die Verwendung der Begriffe „gerichteter“ und „ungerichteter Graph“ in den folgenden Kapiteln.

Anmerkung Im Folgenden sind mit Graphen stets ungerichtete Graphen gemeint. Gerichtete Graphen werden explizit als solche gekennzeichnet.

1.2. Eulergraphen

1.2. Eulergraphen

Aus Kindertagen ist den Meisten die Zeichnung vom „Haus des Nikolaus“ bekannt. Das Problem liegt dabei darin, das Haus in einem Zug zu zeichnen.

Beispiel erweitertes Haus des Nikolaus. Die folgende Abbildung zeigt eine Erweiterung vom Haus des Nikolaus.

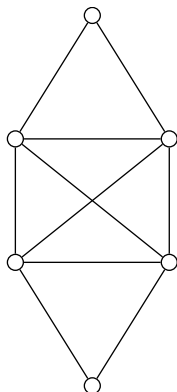


Abbildung 1.6.: Erweiterung vom Haus des Nikolaus.

In dieser Version besitzt das Haus einen Keller. Folgender Vers wird dabei gesprochen.

Das Haus vom Ni - ko - laus hat 'nen Kel - ler.

Auch das Haus mit Keller lässt sich in einem Zug zeichnen, wie ich in diesem Kapitel überprüfen werde.

Um dieses Problem formal zu charakterisieren, dient folgende Definition.

Definition Eulergraph

Ein zusammenhängender Graph $G = (V, E) \in \Gamma_u$ wird Eulergraph genannt, wenn er ein Kreis k ist. Einen Kantenzug k mit $E_k = E$ nennt man Eulertour.

Um einen Eulergraphen identifizieren zu können, bediene ich mich eines Satzes. Doch zuvor muss ein Lemma bewiesen werden.

Lemma 1 Hat in einem Graphen $G = (V, E) \in \Gamma_u$ jeder Knoten $v \in V$ einen geraden Grad, so lässt sich G in endlich viele Teilgraphen $K_i = (V_i, E_i) \in \Gamma_u$, $i = 1, \dots, n$ aufteilen mit den Eigenschaften

1. Mathematische Grundlagen der Graphentheorie

- $E_i \cap E_j = \emptyset \forall i \neq j.$
- $\bigcup_{i=1}^n E_i = E.$
- $\bigcup_{i=1}^n V_i = V.$
- $K_i, i = 1, \dots, n$ sind Kreise.

Beweis. Sei $G = (V, E) \in \Gamma_u$ ein Graph, in dem jede Ecke $v \in V$ einen geraden Grad hat.

Man betrachtet nun einen Weg $w \in W_G$ mit maximaler Länge l , also

$$w(v_0, \dots, v_l) \in W_G \text{ mit } l := |w(v_0, \dots, v_l)| = \max\{|w| : w \in W_G\}.$$

Für v_0 gibt es einen Nachbarn v_j mit $j \in \{2, \dots, l\}$, da v_0 von geradem Grad ist und es sonst einen Weg $w(v_j, v_0, \dots, v_l)$ der Länge $l + 1$ geben würde. Dies ist allerdings nach Definition von w ausgeschlossen. Somit hat man einen Kreis $k(v_0, v_1, \dots, v_j, v_0) \in K_G$ in G gefunden.

Nun extrahiert man den Kreis und erhält $K_1 = (V_1, E_1) \in \Gamma_u$ mit $V_1 := \{v_0, \dots, v_k\}$ und $E_1 := E_k$ und betrachtet den Teilgraphen $G_1 := (V, E \setminus E_1)$. G_1 hat in allen Knoten einen geraden Grad. Man kann also ebenfalls einen Kreis extrahieren, wie oben beschrieben. Dies wiederholt man in endlich vielen Schritten, bis die Kantenmenge des Teilgraphen G_i leer ist.

Per Konstruktion gelten die genannten Eigenschaften. □

Satz 2 Ein zusammenhängender Graph $G = (V, E) \in \Gamma_u$ ist genau dann ein Eulergraph, wenn der Grad jedes Knoten gerade ist.

Beweis. Sei $G = (V, E) \in \Gamma_u$ zusammenhängend und ein Eulergraph. Dann besitzt jede Ecke einen geraden Grad, da es in jedem Knoten zu jeder Kante eine zweite Kante geben muss, um den Knoten wieder zu verlassen. Dabei darf jede Kante nur einmal genutzt werden.

Sei $G = (V, E) \in \Gamma_u$ zusammenhängend und jeder Knoten $v \in V$ habe einen geraden Grad. Nach Lemma 1 zerfällt G in die Teilgraphen und Kreise $K_i = (V_i, E_i)$. Nun wählt man einen Kreis $K_1 = (V_1, E_1)$ mit $k(v_1, \dots, v_n, v_1) \in K_G$ und $\{v_1, \dots, v_n\} = V_1$. Da G zusammenhängend ist, kann man einen zweiten Kreis $K_2 = (V_2, E_2)$ mit

1.2. Eulergraphen

$k(u_1, \dots, u_m, u_1) \in K_{G_0}$, $\{u_1, \dots, u_m\} = V_2$ und $u_1 \in V_1$ wählen. Diese beiden Kreise verbindet man an diesem Knoten u_1 nun miteinander, so dass der Kreis

$$K = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2) \text{ mit } k(v_1, \dots, u_1, \dots, u_m, u_1, \dots, v_n, v_1) \in K_{G_0}$$

entsteht.

Diese Konstruktion wiederholt man in endlich vielen Schritten, bis alle Kreise K_i miteinander im Kreis $K \in \Gamma_u$ verbunden sind. Nach Lemma 1 gilt $K = G$. \square

Folgerung *Ein zusammenhängender Graph $G = (V, E) \in \Gamma_u$ ist genau dann ein Eulergraph, wenn er in endlich viele Kreise zerfällt.*

Beweis. Sei $G = (V, E) \in \Gamma_u$ ein Eulergraph. Dann ist G per Definition auch ein Kreis.

Sei $G = (V, E) \in \Gamma_u$ ein Graph, der in endlich viele Kreise zerfällt. Dann ist G auch ein Eulergraph, wie im zweiten Teil des vorherigen Beweises gezeigt wurde. \square

Mittels der letzten Folgerung lässt sich ein Algorithmus zum Auffinden von Eulertouren formulieren.

Definition Algorithmus von Hierholzer

Sei $G = (V, E) \in \Gamma_u$ ein zusammenhängender Graph, in dem jeder Knoten einen geraden Grad hat.

- *G wird in Kreise nach Lemma 1 aufgeteilt.*
- *In einem beliebigen Knoten wird die Tour gestartet.*
- *Wenn man in einem Knoten auf einen neuen Kreis trifft, so wird der Kreis gewechselt.*
- *Wenn man in einem Knoten auf einen bekannten Kreis trifft, so wird der Kreis erst dann gewechselt, wenn der aktuelle Kreis vollständig in die Tour aufgenommen wurde.*

Beispiel Algorithmus von Hierholzer. Für den Algorithmus von Hierholzer betrachte ich in Abbildung 1.7 auf der nächsten Seite ein Beispiel.

Die hier gezeigte Figur ist in jedem Knoten von geradem Grad und zerfällt damit in endlich viele Kreise, in diesem Fall in drei. Angewandt auf dieses Beispiel liefert der Algorithmus von Hierholzer eine Eulertour, deren Kanten in der Darstellung durchnummeriert sind.

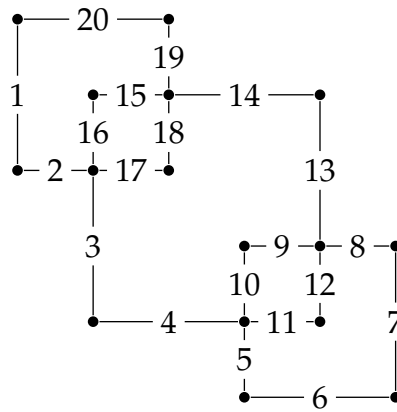


Abbildung 1.7.: Beispiel des Algorithmus von Hierholzer.

Beispiel erweitertes Haus vom Nikolaus (Fortsetz.). Auch das erweiterte Haus vom Nikolaus hat in jeder Ecke einen geraden Grad. Damit existiert eine Eulertour in diesem Graphen. Um diese zu identifizieren, teilt man den Graphen in die folgenden Kreise auf.

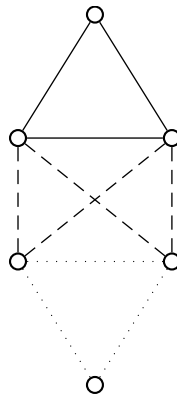


Abbildung 1.8.: Erweiterung vom Haus des Nikolaus.

Mittels des Hierholzer-Algorithmus ist es nun ein „Kinderspiel“, die Eulertour zu finden.

Nachdem ich das erweiterte Haus vom Nikolaus betrachtet habe, wechsle ich zum normalen Haus vom Nikolaus. Dieses lässt sich bekanntlich in einem Zug zeichnen, allerdings hört man nicht am Anfangsknoten wieder auf. Auch dafür gibt es in der Graphentheorie einen Begriff.

1.2. Eulergraphen

Definition Semi-Eulergraph

Ein zusammenhängender Graph $G = (V, E) \in \Gamma_u$ wird Semi-Eulergraph genannt, wenn es einen Kantenzug in G gibt, der alle Kanten in E besucht und bei dem der Anfangsknoten nicht der Endknoten ist. Dieser Kantenzug wird Semi-Eulertour genannt.

Auch hier gibt es einen Satz, mit dem Semi-Eulergraphen identifiziert werden können.

Satz 3 Ein zusammenhängender Graph $G = (V, E) \in \Gamma_u$ ist genau dann ein Semi-Eulergraph, wenn es zwei Knoten $v_1, v_2 \in V$ gibt, die keinen geraden Grad haben, während alle anderen Knoten einen geraden Grad haben.

Beweis. Sei $G = (V, E) \in \Gamma_u$ ein zusammenhängender Graph mit genau zwei Knoten $v_1, v_2 \in V$ mit ungeradem Grad. Dann fügt man einen Knoten $v \notin V$ und zwei Kanten $e_1 := \{v, v_1\}$ und $e_2 := \{v, v_2\}$ zu G hinzu. Der so entstandene Graph $G' = (V \cup \{v\}, E \cup \{e_1, e_2\}) \in \Gamma_u$ ist ein zusammenhängender Graph, in dem alle Knoten einen geraden Grad haben. Somit ist G' nach Satz 2 ein Eulergraph. Wenn man nun aus der Eulertour die Kanten e_1 und e_2 und den Knoten v entfernt, ergibt das eine Semi-Eulertour. Damit ist G ein Semi-Eulergraph.

Sei nun $G = (V, E) \in \Gamma_u$ ein Semi-Eulergraph mit dem Anfangspunkt $v_1 \in V$ und dem Endpunkt $v_2 \in V$. Dann fügt man einen Knoten $v \notin V$ und die Kanten $e_1 := \{v, v_1\}$ und $e_2 := \{v, v_2\}$ zu G hinzu. Damit ist der entstandene Graph $G' = (V \cup \{v\}, E \cup \{e_1, e_2\}) \in \Gamma_u$ ein Eulergraph und nach Satz 2 ein zusammenhängender Graph, in dem alle Knoten einen geraden Grad haben. Wenn man nun die Kanten e_1 und e_2 und den Knoten v entfernt, haben die Knoten v_1 und v_2 einen ungeraden Grad. Damit ist G ein zusammenhängender Graph, in dem genau zwei Knoten einen ungeraden Grad haben. \square

1.3. Die Suche nach den kürzesten Wegen

Eine Hauptanwendung der Graphentheorie besteht in der Berechnung von kürzesten Wegen in einem Graphen. Dabei können den Kanten Gewichte zugeordnet werden, an denen sich die Bestimmung des kürzesten Weges orientiert.

In diesem Abschnitt wird mich das folgende Beispiel begleiten.

Beispiel Kürzeste Wege. Gegeben sei der ungerichtete Graph $G = (V, E) \in \Gamma_u$ in der folgenden bildlichen Darstellung.

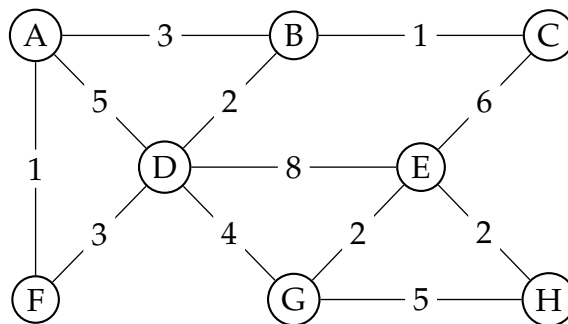


Abbildung 1.9.: Beispiel eines gewichteten Graphen.

Von diesem Graphen soll ein Teilgraph ausgewählt werden, der lediglich einen Weg zwischen dem Knoten A und jedem anderen Knoten enthält. Diese Wege sollen im Ursprungsgraphen die kürzesten Wege zwischen A und den Zielknoten sein. Was dabei unter einem kürzesten Weg zu verstehen ist, werde ich in diesem Kapitel noch definieren.

Mit den Überlegungen in Kapitel 1.1 kann man folgern, dass dieser Teilgraph kreisfrei und zusammenhängend ist.

Zunächst definiere ich jedoch zwei Begriffe, um das Problem zu charakterisieren.

Definition Baum

Ein Graph $G = (V, E) \in \Gamma_u$ wird **Baum** genannt, wenn er zusammenhängend und kreisfrei ist.

Lemma 4 Sei $G = (V, E) \in \Gamma_u$ ein Baum mit $|V| = n$. Dann gilt $|E| = n - 1$.

Beweis. Sei $G = (V, E) \in \Gamma_u$ ein Baum.

Ich beweise die Aussage mittels vollständiger Induktion über $i := |V|$.

1.3. Die Suche nach den kürzesten Wegen

$i = 1$: Für $i = 1$ gilt immer $|E| = 0$.

$i \Rightarrow i + 1$: Sei die Behauptung für i bewiesen und es gelte $|V_{i+1}| = i + 1$ im Baum

$$G_{T_{i+1}} = (V_{i+1}, E_{i+1}) \in \Gamma_u.$$

Zunächst wähle ich einen Knoten $v \in V$ mit Grad 1. Dieser existiert, da $G_{T_{i+1}}$ kreisfrei ist.

Dann ist der Graph $G'_{T_{i+1}} = (V'_{i+1}, E'_{i+1}) \in \Gamma_u$ mit $V'_{i+1} = V_{i+1} \setminus \{v\}$, $|V'_{i+1}| = i$, $E'_{i+1} = \{\{u, w\} \in E_{i+1} : u, w \neq v\}$ nach Voraussetzung ein Baum. Zudem gilt $|E'_{i+1}| = i - 1$, da v vom Grad 1 in $G_{T_{i+1}}$ ist.

Daraus folgt $|E_{i+1}| = |E'_{i+1}| + 1 = i - 1 + 1 = i$.

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

Anmerkung Dieses Lemma wird in Kapitel 1.4.3 benötigt.

Definition gewichteter Graph

In einem gewichteten Graphen wird jeder Kante ein Gewicht zugeordnet. Die entsprechende Funktion

$$f : E \rightarrow \mathbb{R}_+$$

wird Kostenfunktion genannt.

Ein Graph, dem diese Kostenfunktion fehlt, nennt man einen ungewichteten Graphen.

Anmerkung Man kann sich auch negative Kosten für eine Kante vorstellen. Diesen Fall betrachte ich hier aber nicht.

Definition Länge eines Weges in gewichteten Graphen

Die Länge eines Weges $w(v_1, \dots, v_k)$ in einem gewichteten Graphen $G = (V, E) \in \Gamma_u$ mit der Kostenfunktion $f : E \rightarrow \mathbb{R}_+$ ist definiert als die Summe

$$|w(v_1, \dots, v_k)| := \sum_{i=1}^{k-1} f(\{v_i, v_{i+1}, \}).$$

In ungewichteten Graphen gilt die bekannte Definition aus Kapitel 1.1.

Lemma 5 Sei $G = (V, E) \in \Gamma_u$ und $w_1 := w(v_1, \dots, v_j, \dots, v_k)$, $w_2 := w(v_1, \dots, v_j)$ und $w_3 := w(v_j, \dots, v_k)$ mit $w_1, w_2, w_3 \in W_G$ und $E_{w_1} = E_{w_2} \cup E_{w_3}$. Es gilt die Aussage

$$|w_1| = |w_2| + |w_3|.$$

Beweis.

$$\begin{aligned}
 |w_1| &= \sum_{i=1}^{k-1} f(\{v_i, v_{i+1}, \}) \\
 &= \sum_{i=1}^{j-1} f(\{v_i, v_{i+1}, \}) + \sum_{i=j}^{k-1} f(\{v_i, v_{i+1}, \}) \\
 &= |w_2| + |w_3|. \quad \square
 \end{aligned}$$

Auf das Eingangsbeispiel angewendet bedeuten diese Definitionen, dass in einem gewichteten Graphen, dessen Kostenfunktion durch die bildliche Darstellung gegeben ist, einen Baum der kürzesten Wege gesucht wird.

Definition Baum der kürzesten Wege

Sei $G_T = (V, E_T) \in \Gamma_u$ ein Baum und ein Teilgraph des Graphen $G = (V, E) \in \Gamma_u$.

G_T ist genau dann ein Baum der kürzesten Wege in G bezüglich des Knotens v_0 , wenn gilt

$$\begin{aligned}
 \forall w_i := w(v_0, \dots, v_i) \in W_{G_T} \text{ mit } v_i \in V : \\
 |w_i| = \min \{ |w(v_0, \dots, v_i)| : w(v_0, \dots, v_i) \in W_G \}.
 \end{aligned}$$

Diese Definition gilt für gewichtete und ungewichtete Graphen.

Für dieses Problem existieren verschiedene Algorithmen. An dieser Stelle betrachte ich den *Breitensuch-Algorithmus* für ungewichtete Graphen und den *Dijkstra-Algorithmus* für gewichtete Graphen. Das Interesse für kürzeste Wege in ungerichteten Graphen ergibt sich z.B. bei der Suche nach der geringsten Anzahl von Zwischenstationen oder Umstiegen zwischen zwei Stationen.

1.3.1. Kürzeste Wege in ungewichteten Graphen

Zunächst steht die Breitensuche im Mittelpunkt. Dieser Algorithmus berechnet einen Baum der kürzesten Wege in einem ungerichteten Graphen.

Definition Breitensuche

Gegeben sei ein ungewichteter, zusammenhängender Graph $G = (V, E) \in \Gamma_u$ mit einem Startknoten $v \in V$, $n := |V|$ und den Funktionen $l : V \rightarrow \mathbb{R}, l(v) := 0$ für alle $v \in V$ und $g : E \rightarrow \mathbb{R}, g(e) := 0$ für alle $e \in E$. Der Breitensuch-Algorithmus ist wie folgt definiert:

1.3. Die Suche nach den kürzesten Wegen

1. Setze $v_0 := v, V_0 := \{v_0\}$ und $E_0 := \emptyset$.

2. Für $i = 0, \dots, n - 2$:

a) Betrachte für alle Kanten $e = \{u, v\}$ mit $u \in V_i, v \in V \setminus V_i$ den Ausdruck $g(e) := l(u) + 1$ und wähle unter diesen Kanten $e' = \{u', v'\}$ mit $g(e') = \min g(e)$.

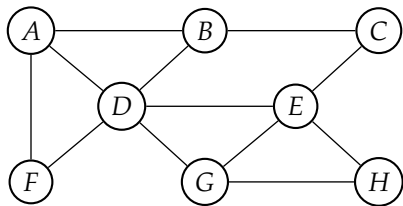
b) Setze $v_{i+1} := v', e_{i+1} := e'$ und $V_{i+1} := V_i \cup \{v_{i+1}\}, E_{i+1} := E_i \cup \{e_{i+1}\}$ sowie $l(v_{i+1}) := g(e')$. Den aktuellen Baum nennt man $B_{i+1} := (V_{i+1}, E_{i+1})$.

Anmerkung Die Richtigkeit der Breitensuche beweise ich später als Folgerung aus dem Satz 6.

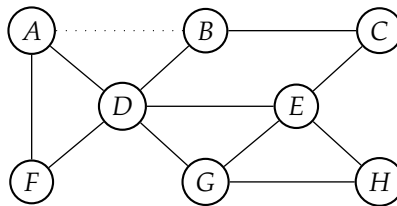
Beispiel zur Breitensuche. Um den Breitensuch-Algorithmus zu verdeutlichen, führe ich ihn an dem Eingangsbeispiel vor und lasse die Kostenfunktion außer Acht, um einen ungewichteten Graphen zu erhalten.

Zunächst wähle ich A als Startknoten und definiere V_0 und E_0 .

Im zweiten Schritt wählt man den Knoten B , da $l(B) = \min\{l(v) : v \in V\}$ gilt. Ebenso fügt man die Kante $\{A, B\}$ zu E_1 hinzu.



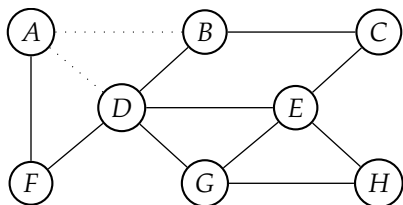
Schritt 1 $V_0 = \{A\}, E_0 = \emptyset$.



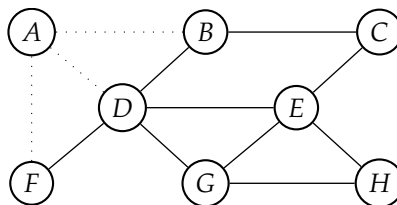
Schritt 2 $V_1 = \{A, B\}, E_1 = \{\{A, B\}\}$.

Abbildung 1.10.: Breitensuche an einem Beispiel durchgeführt.

Dieses Vorgehen wird nun solange wiederholt, bis alle Knoten in V aufgenommen wurden.

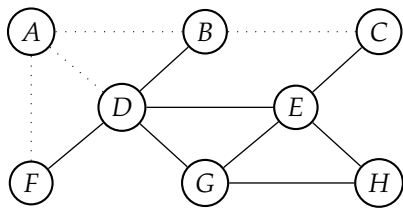


Schritt 3 $V_2 = \{A, B, D\}, E_2 = \{\{A, B\}, \{A, D\}\}$.

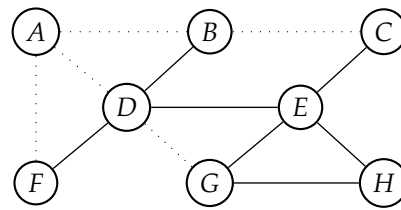


Schritt 4 $V_3 = \{A, B, D, F\}, E_3 = \{\{A, B\}, \{A, D\}, \{A, F\}\}$.

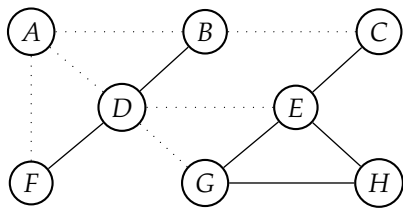
Abbildung 1.11.: Breitensuche an einem Beispiel durchgeführt. (Fortsetz. I)



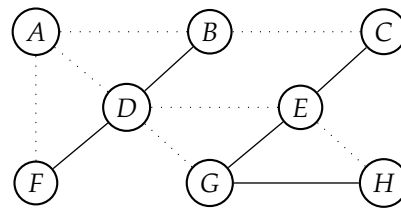
Schritt 5 $V_4 = \{A, B, D, F, C\}$, $E_4 = \{\{A, B\}, \{A, D\}, \{A, F\}, \{B, C\}\}$.



Schritt 6 $V_5 = \{A, B, D, F, C, G\}$, $E_5 = \{\{A, B\}, \{A, D\}, \{A, F\}, \{B, C\}, \{D, G\}\}$.



Schritt 7 $V_6 = \{A, B, D, F, C, G, E\}$, $E_6 = \{\{A, B\}, \{A, D\}, \{A, F\}, \{B, C\}, \{D, G\}, \{D, E\}\}$.



Schritt 8 $V_7 = \{A, B, D, F, C, G, E, H\}$, $E_7 = \{\{A, B\}, \{A, D\}, \{A, F\}, \{B, C\}, \{D, G\}, \{D, E\}, \{E, H\}\}$.

Abbildung 1.12.: Breitensuche an einem Beispiel durchgeführt. (Fortsetz. II)

Der gefundene Teilgraph, dessen Kanten durch die Strichelung gekennzeichnet sind, ist ein Baum der kürzesten Wege. Vom Startknoten A aus lässt sich in diesem Graphen jeder Knoten auf genau einem Weg verbinden. Dieser Weg besucht dabei die geringste Anzahl an Knoten, die in dem Ursprungsgraphen möglich ist.

1.3.2. Kürzeste Wege in gewichteten Graphen

Im nächsten Schritt befasse ich mich mit den kürzesten Wegen in gewichteten Graphen. Dazu betrachte ich den Dijkstra-Algorithmus.

Satz 6 (Dijkstra-Algorithmus) Gegeben sei ein gewichteter, zusammenhängender Graph $G = (V, E) \in \Gamma_u$ mit einem Startknoten $v \in V$, einer Kostenfunktion $f : E \rightarrow \mathbb{R}_+$, $n := |V|$ und den Funktionen $l : V \rightarrow \mathbb{R}, l(v) := 0$ für alle $v \in V$ und $g : E \rightarrow \mathbb{R}, g(e) := 0$ für alle $e \in E$.

Der Dijkstra-Algorithmus ist wie folgt definiert:

1. Setze $v_0 := v, V_0 := \{v_0\}, E_0 := \emptyset$ und $l(v_0) := 0$.
2. Für $i = 0, \dots, n - 2$:

1.3. Die Suche nach den kürzesten Wegen

- a) Betrachte für alle Kanten $e = \{u, v\}$ mit $u \in V_i, v \in V \setminus V_i$ den Ausdruck $g(e) := l(u) + f(e)$ und wähle unter diesen Kanten $e' = \{u', v'\}$ mit $g(e') = \min g(e)$.
- b) Setze $v_{i+1} := v', e_{i+1} := e'$ und $V_{i+1} := V_i \cup \{v_{i+1}\}, E_{i+1} := E_i \cup \{e_{i+1}\}$ sowie $l(v_{i+1}) := g(e')$. Den aktuellen Baum nennt man $B_{i+1} := (V_{i+1}, E_{i+1})$.

Dieser Algorithmus berechnet in gewichteten Graphen einen Baum B_{n-1} der kürzesten Wege vom Startknoten v_0 aus. Dabei gilt $V_{n-1} = V$.

Beweis. Zunächst wird bewiesen, dass B_{n-1} ein Baum ist, und danach, dass es ein Baum der kürzesten Wege bezüglich des Knotens v_0 ist. Abschließend zeige ich $V_{n-1} = V$.

Da $B_i = (V_i, E_i)$ immer ein Knoten v_{i+1} und eine Kante $e_{i+1} = \{v_{i+1}, u\}$ hinzugefügt wird, wobei B_i den Knoten u schon enthält, ist B_{i+1} zusammenhängend. Da weiterhin v_{i+1} nicht in B_i enthalten ist, ist B_{i+1} auch kreisfrei. Damit ist B_{i+1} und im Besonderen B_{n-1} ein Baum.

Den Beweis, dass B_n ein Baum der kürzesten Wege ist, führe ich mit vollständiger Induktion über i .

$i = 1$: Im ersten Schritt wird die Kante $\{v_0, v_1\} \in E$ hinzugefügt. Nach dem Algorithmus hat diese Kante minimales Gewicht zwischen v_0 und seinen Nachbarknoten, somit auch zwischen v_0 und v_1 . Damit ist B_1 ein Baum der kürzesten Wege bezüglich v_0 .

$i \Rightarrow i + 1$: Sei nun B_i ein Baum der kürzesten Wege bezüglich v_0 . Es ist zu zeigen, dass auch B_{i+1} ein Baum der kürzesten Wege bezüglich v_0 ist.

Sei nun $e_{i+1} = \{u, v\}$ und $w_{i+1} := w(v_0, \dots, u, v) \in W_{G_T}$. Es gilt nach dem Algorithmus $g(e_{i+1}) \leq g(\{u', v'\})$ für alle $u' \in V_i, v' \in V \setminus V_i$. Zu zeigen ist nun

$$|w_{i+1}| = \min \{|w(v_0, \dots, v)| : w(v_0, \dots, v) \in W_G\}.$$

Zunächst untersucht man alle Wege von v_0 nach v in G . Diese Wege haben mindestens eine Kante der Form $\{u', v'\}$ mit $u' \in V_i, v' \in V \setminus V_i$, da $v_0 \in V_i$ und $v \in$

1. Mathematische Grundlagen der Graphentheorie

$V \setminus V_i$. Dazu betrachte ich $w' = w(v_0, \dots, u', v', \dots, v) \in W_G$. Es gilt

$$\begin{aligned}
 |w'| & \stackrel{\text{nach Lemma 5}}{=} |w(v_0, \dots, u', v')| + |w(v', \dots, v)| \\
 & = |g(\{u', v'\})| + |w(v', \dots, v)| \\
 & \stackrel{\text{nach Algorithmus}}{\geq} |g(\{u, v\})| + \underbrace{|w(v', \dots, v)|}_{\geq 0} \\
 & \geq |g(\{u, v\})| \\
 & = |w_{i+1}|.
 \end{aligned}$$

Damit ist die Induktion bewiesen.

Zum Schluss zeige ich $V_{n-1} = V$:

Zunächst gilt $V_{n-1} \subset V$, da nur Knoten aus V zu V_i hinzugefügt werden.

Für $i = 0, \dots, n-2$ wird jeweils ein Knoten zu V_i hinzugefügt und es gilt $|V_0| = 1$.

Damit folgt

$$|V_{n-1}| = 1 + \sum_{i=0}^{n-2} 1 = 1 + (n-1) = n.$$

Also gilt $|V_{n-1}| = |V|$. Da V und V_{n-1} endlich sind, folgt $V_{n-1} = V$. □

Folgerung Gegeben sei ein ungewichteter, zusammenhängender Graph $G = (V, E) \in \Gamma_u$ mit einem Startknoten $x \in V$ und $n := |V|$.

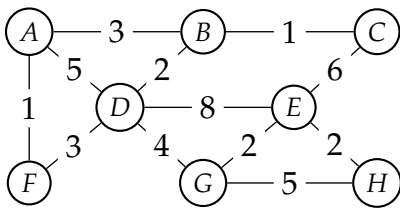
Der Breitensuch-Algorithmus berechnet in einem ungewichteten Graphen einen Baum B_{n-1} der kürzesten Wege vom Startknoten v_0 aus. Dabei gilt $V_{n-1} = V$.

Beweis. Man betrachtet einen ungewichteten Graphen $G = (V, E) \in \Gamma_u$ und ordnet ihm die Kostenfunktion $f : E \rightarrow \{1\}$ zu. Auf diesen Graphen lässt sich der Dijkstra-Algorithmus anwenden. Das Ergebnis ist nach dem vorherigen Satz ein Baum B_{n-1} der kürzesten Wege vom Startknoten v_0 aus, wobei $V_{n-1} = V$ gilt. □

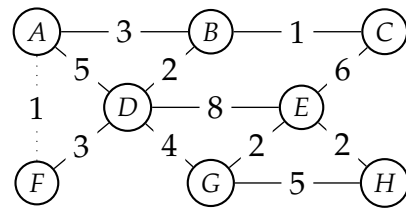
Beispiel Dijkstra-Algorithmus. Auch diesen Algorithmus will ich zum besseren Verständnis an dem Eingangsbeispiel vorführen. Dabei wähle ich wieder den Knoten A als Startknoten v_0 .

Im zweiten Schritt wählt man nun die minimale Kante, die von v_0 ausgeht. Das ist die Kante $\{A, F\}$ und fügen F der Menge E_1 hinzu. Ich führe den Algorithmus an dieser Stelle gleich zu Ende.

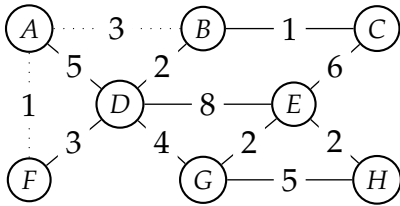
1.3. Die Suche nach den kürzesten Wegen



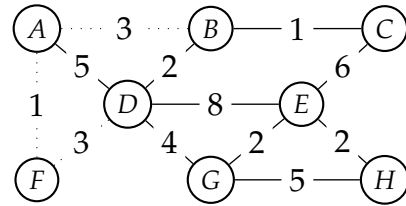
Schritt 1 $V_0 = \{A\}$, $E_0 = \emptyset$.



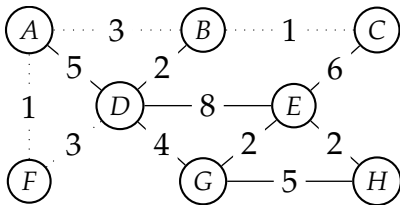
Schritt 2 $V_1 = \{A, F\}$, $E_1 = \{\{A, F\}\}$.



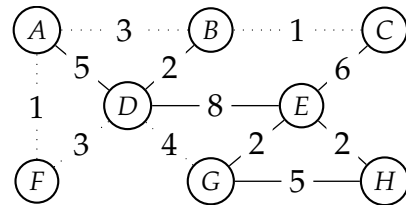
Schritt 3 $V_2 = \{A, F, B\}$, $E_2 = \{\{A, F\}, \{A, B\}\}$.



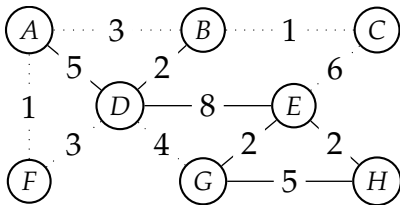
Schritt 4 $V_3 = \{A, F, B, D\}$, $E_3 = \{\{A, F\}, \{A, B\}, \{F, D\}\}$.



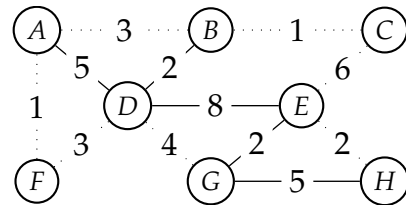
Schritt 5 $V_4 = \{A, F, B, D, C\}$, $E_4 = \{\{A, F\}, \{A, B\}, \{F, D\}, \{B, C\}\}$.



Schritt 6 $V_5 = \{A, F, B, D, C, G\}$, $E_5 = \{\{A, F\}, \{A, B\}, \{F, D\}, \{B, C\}, \{D, G\}\}$.



Schritt 7 $V_6 = \{A, F, B, D, C, G, E\}$, $E_6 = \{\{A, F\}, \{A, B\}, \{F, D\}, \{B, C\}, \{D, G\}, \{C, E\}\}$.



Schritt 8 $V_7 = \{A, F, B, D, C, G, E, H\}$, $E_7 = \{\{A, F\}, \{A, B\}, \{F, D\}, \{B, C\}, \{D, G\}, \{C, E\}, \{E, H\}\}$.

Abbildung 1.13.: Dijkstra-Algorithmus an einem Beispiel durchgeführt.

Der Baum $B = (V_7, E_7)$ ist nach Satz 6 auf der Seite 20 ein Baum der kürzesten Wege bezüglich des Knotens A .

1.4. Anwendungen der Graphentheorie

Um das breite Anwendungsgebiet der Graphentheorie zu zeigen, habe ich drei Anwendungen ausgewählt. Dabei handelt es sich in Kapitel 1.4.1 zum Ersten um Turniergraphen, also um die Möglichkeit Reihenfolgen bei Turnieren oder in sozialen Netzen zu ermitteln.

Das Kapitel 1.4.2 betrachtet die Suche nach Paaren in Graphen. Dabei werden vor allem Paare berücksichtigt, deren Mitglieder ein Unterscheidungsmerkmal besitzen, welches sie in zwei disjunkte Gruppen aufteilt. Ein Beispiel ist hier die Partnersuche bei Heiratsvermittlern oder bei Tanzkursen.

Abschließend wird in Kapitel 1.4.3 der Frage nachgegangen, wann Baugerüste stabil sind, also nicht in sich selbst zusammenfallen können. Die Ergebnisse dieser Untersuchung finde ich am Interessantesten, da sie nicht intuitiv, aber dennoch leicht nachvollziehbar sind.

1.4.1. Turniergraphen

Die erste Anwendung in diesem Kapitel sind die Turniergraphen. Sie entstehen z.B. bei einem Sportturnier, bei der alle Mannschaften oder Teilnehmer gegeneinander antreten und in ihren Spielen einen klaren Sieger ermitteln. Damit gibt es zwischen jedem Paar von Teilnehmern eine eindeutige Hierarchie. Weitere Anwendungen finden sich in der Untersuchung von sozialen Geflechten von Menschen und Tieren.

Die zentralen Aussagen über die Turniergraphen sind die Existenz einer Reihenfolge und die Existenz eines Königs und seiner Vizekönige. Was man unter einem König und seinen Vizekönigen versteht, klärt sich später. Zunächst betrachte ich die Definition eines Turniergraphen.

Definition Turniergraph

Sei $T_G = (V, E) \in \Gamma_g$ ein gerichteter Graph. Man nennt T_G genau dann einen Turniergraphen, wenn

$$\forall v_1, v_2 \in V, v_1 \neq v_2 : \text{es existiert genau eine Kante zwischen } v_1 \text{ und } v_2.$$

Beispiel Turniergraph. Man stelle sich eine Gruppe von vier SuS vor. Unter ihnen bilden sich soziale Beziehungen, die sich in dominantem Verhalten einer Person gegen-

1.4. Anwendungen der Graphentheorie

über einer Anderen äußern. Aus diesen sozialen Beziehungen kann man einen Turniergraphen bilden und diesen darstellen.

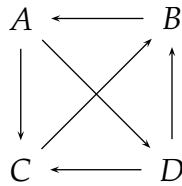


Abbildung 1.14.: Beispiel Turniergraph.

Die gerichtete Kante zwischen den Knoten A und B bedeutet, dass der SuS B gegenüber A ein dominantes Verhalten zeigt.

Nun komme ich zur Existenz einer Reihenfolge. Eine Reihenfolge in einem Turniergraphen zeichnet sich dadurch aus, dass alle Teilnehmer berücksichtigt werden und ein Teilnehmer gegen seinen Vorgänger gewonnen und gegen den Nachfolger in dieser Reihenfolge verloren hat.¹⁰ Formal lässt sich diese Reihenfolge so definieren.

Definition Hamiltonweg

Sei $G = (V, E) \in \Gamma_g$ ein gerichteter Graph. G besitzt genau dann einen Hamiltongraph, wenn gilt

$$\exists w(v_1, \dots, v_n) \in W_G \text{ mit } n = |V|.$$

Nun betrachte ich zunächst die Existenzaussage bevor ich mich einem Beispiel widme.

Satz 7 In jedem Turniergraphen gibt es einen Hamiltonweg.

Beweis. Ich führe den Beweis mittels der vollständigen Induktion über die Anzahl der Knoten in dem Turniergraphen $T_G = (V, E) \in \Gamma_g$ mit $i := |V|$.

$i = 2$: Ein Turniergraph mit zwei Knoten besitzt genau eine gerichtete Kante. Damit ist die Reihenfolge durch diese Kante bestimmt. Bei der Kante $(v_1, v_2) \in E$ lautet der Hamiltonweg $w(v_1, v_2)$.

$i \Rightarrow i + 1$: Angenommen es gilt $V = \{v_1, \dots, v_{i+1}\}$ und es gibt einen Hamiltonweg $w(v_1, \dots, v_i)$. Dann unterscheidet man drei Fälle.

¹⁰ Neben Gewinnen ist hier auch dominantes Verhalten o. ä. gemeint.

1. Mathematische Grundlagen der Graphentheorie

1. Wenn die Kante $(v_{i+1}, v_1) \in E$ existiert, ist $w(v_{i+1}, v_1, \dots, v_i)$ ein Hamiltonweg. Es existiert also eine Kante von v_{i+1} auf den ersten Knoten des Hamiltonweges.
2. Wenn es eine Kante (v_{i+1}, v_l) mit $l := \min\{k \in \{2, \dots, i\} : \exists (v_{i+1}, v_k) \in E\}$ gibt, ist $w(v_1, \dots, v_{l-1}, v_{i+1}, v_l, \dots, v_i)$ ein Hamiltonweg. Wir wählen also den ersten Knoten in der Reihenfolge, auf den eine Kante von v_{i+1} zeigt und fügen v_{i+1} vor ihm in die Reihenfolge.
3. Wenn die ersten beiden Fälle nicht eintreten, zeigen alle Kanten von den Knoten v_1, \dots, v_i auf v_{i+1} . Damit existiert auch die Kante $(v_i, v_{i+1}) \in E$ und der Hamiltonweg lautet $w(v_1, \dots, v_i, v_{i+1})$.

Damit sind alle Fälle abgedeckt und die Aussage bewiesen. □

Beispiel Rangfolge in einem Turniergraphen. Ich betrachte nun wieder unser Beispiel. Nach der obigen Aussage lässt sich hier mindestens eine Rangfolge finden. Zwei Rangfolgen zeigt die folgende Abbildung.

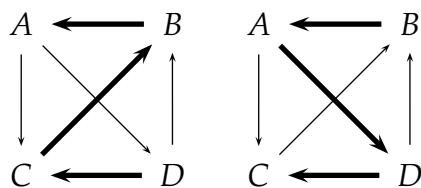


Abbildung 1.15.: Beispiele Rangfolge in einem Turniergraph.

Die Rangfolge im ersten Beispiel lautet D, C, B, A und im Zweiten B, A, D, C . Man erkennt schnell, dass dieser Graph einen Kreis $k(A, D, C, B, A)$ enthält. Damit kann jeder Knoten in diesem Turniergraphen eine Rangfolge anführen oder sich auf dem letzten Platz wiederfinden.

Nun findet sich aber noch eine weitere Art, einen Anführer einer Gruppe zu ermitteln. Das einfachste Beispiel ist hier der *Diktator*, also ein Mitglied eines sozialen Netzes, der sich gegenüber allen anderen Mitgliedern dominant verhält. Graphentheoretisch ausgedrückt bedeutet es, dass der entsprechende Knoten im Turniergraphen einen Eingangsgrad von 0 hat, also sich niemand dem Diktator gegenüber dominant verhält.

1.4. Anwendungen der Graphentheorie

Dieser Fall tritt nicht häufig auf, so dass man eine etwas mildere Form der Kontrolle finden kann. Es handelt sich dabei um eine Person, die sich jeder anderen Person gegenüber entweder direkt oder über nur einen Mittelsmann indirekt dominant verhält. Man spricht dabei vom *König und seinen Vizekönigen*. Diese Konstellation findet sich in jedem Turniergraphen, wie der folgenden Satz zeigt.

Satz 8 Sei $T_G = (V, E) \in \Gamma_g$ ein Turniergraph. Dann gilt

$$\exists v_k \in V : \forall v \in V \setminus \{v_k\} \text{ existiert ein Weg } w(v_k, \dots, v) \text{ mit } 1 \leq |w(v_k, \dots, v)| \leq 2.$$

Beweis. Sei $T_G = (V, E) \in \Gamma_g$ ein Turniergraph. Man betrachtet den Knoten v_k mit dem höchsten Ausgangsgrad $d_+(v_k) = \max\{d_+(v) : v \in V\}$. Darüber definiert man die Mengen $X = \{v \in V : (v_k, v) \in E\}$ und $Y := \{v \in V : (v, v_k) \in E\}$. Es gilt $X \cup Y \cup \{v_k\} = V$ und $|X| = d_+(v_k)$.

Nun wählt man $v_y \in Y$. Angenommen es existiert kein $v \in X$, so dass $(v, v_y) \in E$. Dann gilt $d_+(v_y) \geq |X \cup \{v_k\}| > d_+(v_k)$. Das wäre aber ein Widerspruch zu der Annahme $d_+(v_k) = \max\{d_+(v) : v \in V\}$. Somit gibt es für alle $v_y \in Y$ ein $(v_x, v_y) \in E$ mit $v_x \in X$.

Also existiert ein Weg $w(v_a, v_x) \in W_{T_G}$ für alle $v_x \in X$ mit $|w(v_a, v_x)| = 1$ und ein Weg $w(v_a, v_x, v_y) \in W_{T_G}$ für alle $v_y \in Y$ mit $v_x \in X$ und $|w(v_a, v_x, v_y)| = 2$. \square

Beispiel König und Vizekönige. Ich wende nun diesen Satz auf das Beispiel an. Dem Beweis folgend wähle ich einen Knoten mit maximalem Ausgangsgrad. Daraus ergeben sich vier mögliche Situationen.

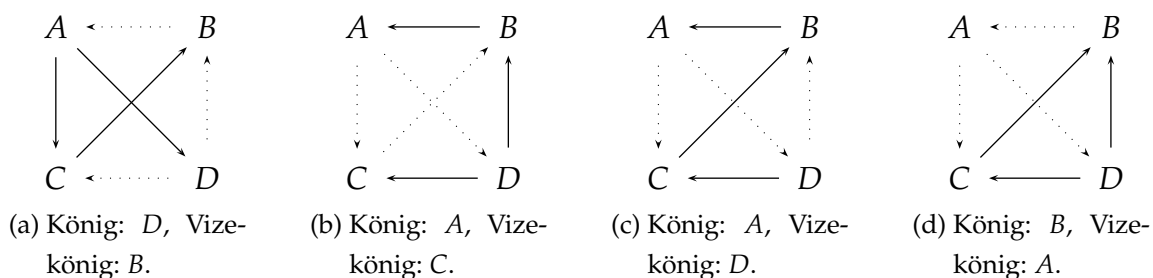


Abbildung 1.16.: Beispiel König und Vizekönige in einem Turniergraph.

Unser Beispiel zeigt im vierten Fall, dass es auch Könige geben kann, die keinen maximalen Ausgangsgrad haben. Dort gibt es entsprechend „mächtige“ Vizekönige.

1.4.2. Perfektes Matching

Die zweite hier vorgestellte Anwendung betrifft das Finden von Paaren. Eine mögliche Situation ist dabei, dass es zwei Gruppen gibt, zwischen denen sich die Paare finden sollen. Ein Paar besteht dann jeweils aus einem Teilnehmer aus der einen und einem Teilnehmer aus der anderen Gruppe. Dieses Unterkapitel erläutert zunächst drei zentrale Definitionen in diesem Bereich und zeigt mit einer Folgerung aus dem Satz 9 den Zusammenhang zwischen diesen drei Definitionen auf.

Die erste Definition befasst sich mit der graphentheoretischen Behandlung von zwei disjunkten Knotenmengen.

Definition bipartiter Graph

Sei $G = (V \cup U, E) \in \Gamma_u$ ein Graph mit $|V| \geq 1$ und $|U| \geq 1$. G ist genau dann ein bipartiter Graph, wenn gilt

$$\forall \{v_1, v_2\} \in E : v_1 \in V \text{ und } v_2 \in U$$

und

$$V \cap U = \emptyset.$$

Anmerkung Um bipartite Graphen in ihrer bildlichen Darstellung zu kennzeichnen, werden die zwei disjunkten Knotenmengen hervorgehoben. Dabei werden alle Knoten der einen Mengen auf der rechten Seite und die anderen Knoten auf der linken Seite gezeichnet. Da keine Kanten innerhalb der disjunkten Knotenmengen existieren, verlaufen die Kanten nur zwischen der rechten und der linken Seite.

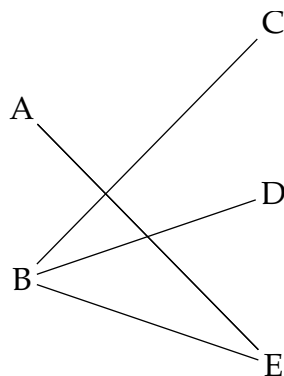


Abbildung 1.17.: Beispiel eines bipartiten Graphen.

1.4. Anwendungen der Graphentheorie

Einige bipartite Graphen werden nicht in der beschriebenen Anordnung dargestellt. Es stehen dann oft andere Eigenschaften im Mittelpunkt der Darstellung. Um dennoch bestimmen zu können, ob es sich um einen bipartiten Graphen handelt, kann die folgende Eigenschaft genutzt werden.

Eigenschaft 1 Sei $G = (V, E) \in \Gamma_u$ ein Graph mit $|V| \geq 2$.
 G ist genau dann bipartit, wenn gilt

$$\{k \in K_{G_o} : |k| \nmid 2\} = \emptyset.$$

Beweis. Sei $G = (U_1 \cup U_2, E) \in \Gamma_u$ ein bipartiter Graph mit $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, $|U_1| \geq 1$ und $|U_2| \geq 1$.

Angenommen es gilt $\{k \in K_{G_o} : |k| \nmid 2\} \neq \emptyset$. Dann kann ein Kreis $k(u_1, \dots, u_n, u_1)$ mit $|k(u_1, \dots, u_n, u_1)| \nmid 2$, $u_1 \in U_1$ und $u_2, \dots, u_n \in U_1 \cup U_2$ gewählt werden. Damit existiert aber auch eine Kante $(u_n, u_1) \in E$ mit $u_n, u_1 \in U_1$, da n ungerade ist. Dies ist ein Widerspruch zum bipartiten Graphen. Also gilt $\{k \in K_{G_o} : |k| \nmid 2\} = \emptyset$.

Sei $G = (V, E) \in \Gamma_u$ ein Graph mit $|V| \geq 2$ und es gelte $\{k \in K_{G_o} : |k| \nmid 2\} = \emptyset$.

Dann wählt man einen Knoten $v \in V$ und definiert X_1 als die Menge aller Knoten, die mit dem Knoten v adjazent sind. Es gilt also $X_1 := \{v_2 \in V : \{v, v_2\} \in E\}$.

Im zweiten Schritt definiert man die Menge Y_1 als die Menge aller Knoten, die zu Knoten aus der Menge X_1 adjazent sind. Es gilt also $Y_1 := \{v_2 \in V : \{v_1, v_2\} \in E \text{ mit } v_1 \in X_1\}$. Dabei gilt $X_1 \cap Y_1 = \emptyset$, da es sonst einen Kreis mit ungerader Länge geben würde.

Im nächsten Schritt definiert man die Menge X_2 als die Menge aller Knoten, die zu Knoten aus der Menge Y_1 adjazent sind. Es gilt also $X_2 := \{v_2 \in V : \{v_1, v_2\} \in E \text{ mit } v_1 \in Y_1\}$. Dabei gilt $X_2 \cap Y_1 = \emptyset$, da es sonst einen Kreis mit ungerader Länge geben würde.

Dieses Verfahren wiederholt man, bis $X_i = X_{i+1}$, $i \in \mathbb{N}$ und $Y_j = Y_{j+1}$, $j \in \mathbb{N}$ gilt. Damit hat man zwei disjunkte Mengen definiert mit $X_i \cup Y_j = V$ und für alle $\{v_1, v_2\} \in E$ gilt $v_1 \in X_i$ und $v_2 \in Y_j$.

Wenn G nicht zusammenhängend ist, wendet man das Verfahren auf jede einzelne Komponente an. □

Beispiel bipartiter Graph. Nun betrachte ich das folgende Beispiel.

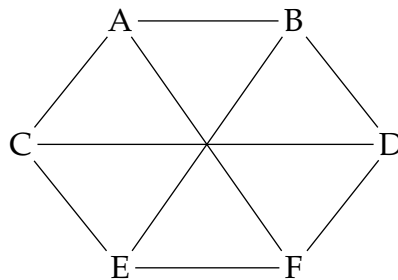


Abbildung 1.18.: Beispiel eines bipartiten Graphen: ein Sechseck.

Alle Kreise in diesem Graphen haben eine gerade Länge. Somit handelt es sich um einen bipartiten Graphen. Die folgende bildliche Darstellung hebt die disjunkten Knotenmengen hervor.

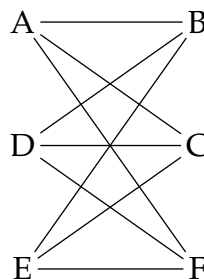


Abbildung 1.19.: Sechseck-Beispiel mit hervorgehobenen Knotenmengen.

Nachdem ich nun die bipartiten Graphen eingeführt habe, komme ich zum Finden von Paaren in Graphen. Die folgende Definition betrachtet den Fall, in dem jeder Knoten einer Menge W einen Partner findet.

Definition perfektes Matching

Sei $G = (V, E) \in \Gamma_u$ ein Graph. Dann wird eine Menge M mit der folgenden Eigenschaft ein perfektes Matching bezüglich der Menge $W \subset V$ genannt.

$$M \subset E : \forall w \in W \text{ existiert genau eine Kante } e \in M \text{ mit } w \in e.$$

Anmerkung Unter einem perfektem Matching ohne Angabe der Menge versteht man ein perfektes Matching bezüglich der Menge V .

1.4. Anwendungen der Graphentheorie

Beispiel perfektes Matching. In der folgenden Abbildung vom erweiterten Haus des Nikolaus wurde ein perfektes Matching gefunden und die entsprechenden Kanten hervorgehoben.

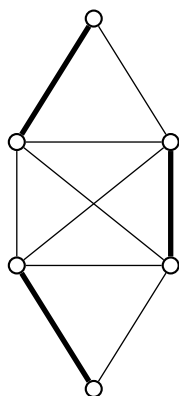


Abbildung 1.20.: Beispiel eines perfekten Matchings an der Erweiterung vom Haus des Nikolaus.

Wichtig ist, dass es sich hierbei nicht um einen bipartiten Graphen handelt. Es existieren mehrere Kreise der Länge 3, z.B. der Giebel oder der Keller im Haus vom Nikolaus.

Um endlich eine Aussage über ein perfektes Matching treffen zu können, fehlt eine dritte Definition.

Definition regulärer Graph

Sei $G = (V, E) \in \Gamma_u$ ein Graph. G ist genau dann ein regulärer Graph, wenn gilt

$$\forall v \in V : d(v) = r \text{ mit } r \in \mathbb{N}.$$

Beispiel regulärer Graph. Bei dem Beispiel in Abbildung 1.18, das Sechseck, handelt es sich um einen regulären Graphen. Jeder Knoten hat den Grad 3.

Nun komme ich zu der angekündigten Existenzaussage.

Satz 9 (Heiratssatz) Sei $G = (V \cup U, E) \in \Gamma_u$ ein bipartiter Graph. Es gibt genau dann ein perfektes Matching M bezüglich der Menge V , wenn gilt

$$\forall T \subset V : |T| \leq |\{u \in U : \{u, w\} \in E \text{ mit } w \in T\}|.$$

1. Mathematische Grundlagen der Graphentheorie

Beweis. Sei $G = (V \cup U, E) \in \Gamma_u$ ein bipartiter Graph, in dem für alle $T \subset V$ gilt $|T| \leq |\{u \in U : \{u, w\} \in E \text{ mit } w \in T\}|$.

Dann besitzt G ein perfektes Matching bezüglich der Menge V , wie die folgende vollständige Induktion über $i := |V|$ zeigt.

$i = 1$: Sei $G_1 = (V_1 \cup U, E_1) \in \Gamma_u$ ein bipartiter Graph mit $V_1 := \{v_1\}$. Dann existiert nach Voraussetzung eine Menge $U_1 \subset U$ mit $|U_1| \geq |V_1|$ und $u_1 \in U_1$. Damit gibt es ein perfektes Matching $M := \{\{v_1, u_1\}\}$ bezüglich der Menge V_1 .

$i \Rightarrow i + 1$: Sei die Aussage für i bewiesen und $G_{i+1} = (V_{i+1} \cup U, E_{i+1}) \in \Gamma_u$ ein bipartiter Graph mit $V_{i+1} = \{v_1, \dots, v_{i+1}\}$. Dann existiert nach Voraussetzung eine Menge U_{i+1} mit $|U_{i+1}| \geq |V_{i+1}|$. Betrachtet man nun die Mengen $T_{i+1} := \{v_1, \dots, v_i\} \subset V_{i+1}$ und $S_{i+1} := \{u \in U_{i+1} : \{u, t\} \in E_{i+1} \text{ mit } t \in T_{i+1}\} \subset U_{i+1}$, kann man zwei Fälle unterscheiden.

$|S_{i+1}| = i$: Dann existiert nach Voraussetzung ein perfektes Matching M_{i+1} bezüglich der Menge T_{i+1} . Ebenso existiert ein $u \in U_{i+1} \setminus S_{i+1}$ mit $\{v_{i+1}, u\} \in E_{i+1}$. Das perfekte Matching bezüglich V_{i+1} lautet somit

$$M_{i+1} \cup \{\{v_{i+1}, u\}\} \text{ mit } u \in U_{i+1} \setminus S_{i+1}.$$

$|S_{i+1}| \geq i + 1$: Dann wählt man einen Knoten $u \in U_{i+1}$ mit $\{u, v_{i+1}\} \in E_{i+1}$. Sei nun $G'_{i+1} = (V'_{i+1} \cup U'_{i+1}, E'_{i+1}) \in \Gamma_u$ ein Teilgraph von G_{i+1} mit $V'_{i+1} = T_{i+1}$, $U'_{i+1} = S_{i+1} \setminus \{u\}$ und $E'_{i+1} = \{\{v', u'\} \in E_{i+1} : v' \in V'_{i+1} \text{ und } u' \in U'_{i+1}\}$. In G'_{i+1} gilt für alle $T \subset V'_{i+1}$

$$|T| \leq |\{u \in U'_{i+1} : \{u, t\} \in E'_{i+1} \text{ mit } t \in T\}|,$$

da $|V'_{i+1}| = |T_{i+1}| < |S_{i+1}| \leq |\{u \in U'_{i+1} : \{u, t\} \in E'_{i+1} \text{ mit } t \in T_{i+1}\}| + 1$ und nach Voraussetzung.

Es existiert also ein perfektes Matching M'_{i+1} in G'_{i+1} bezüglich der Menge V'_{i+1} .

Das perfekte Matching in G_{i+1} bezüglich V_{i+1} lautet $M'_{i+1} \cup \{\{u, v_{i+1}\}\}$.

Der Fall $|S_{i+1}| < i$ ist nach Voraussetzung nicht möglich.

Damit besitzt G ein perfektes Matching bezüglich der Menge V .

1.4. Anwendungen der Graphentheorie

Sei $G = (V \cup U, E) \in \Gamma_u$ ein bipartiter Graph mit perfektem Matching M bezüglich der Menge V . Sei $T \subset V$ und $S = \{u \in U : \{u, t\} \in E \text{ mit } t \in T\}$. Da $M \subset E$ gilt, folgt

$$|T| = |\{u \in U : \{u, t\} \in M \text{ mit } t \in T\}| \leq |S|.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. \square

Folgerung *Zu jedem regulären und bipartiten Graphen existiert ein perfektes Matching.*

Beweis. Sei $G = (V \cup U, E) \in \Gamma_u$ ein regulärer und bipartiter Graph. Man betrachtet nun die Mengen $T \subset V$ und $S := \{u \in U : \{u, t\} \in E \text{ mit } t \in T\} \subset U$. Dann gilt $|S| \geq |T|$, denn für die Anzahl der Kanten $\{s, t\} \in E$ mit $s \in S$ und $t \in T$ gilt $r * |S| \geq |\{\{s, t\} \in E : s \in S \text{ und } t \in T\}| = r * |T|$, da G regulär ist.

Ebenso gilt für die Mengen $S' \subset U$ und $T' := \{v \in V : \{v, s\} \in E \text{ mit } s \in S'\} \subset V$ die Aussage $|T'| \geq |S'|$.

Damit gibt es nach Satz 9 ein perfektes Matching bezüglich V und ein perfektes Matching bezüglich U . Daraus folgt die Existenz eines perfekten Matchings bezüglich $V \cup U$. \square

Beispiel. Das Beispiel in Abbildung 1.18, das Sechseck, ist, wie gesehen, sowohl regulär als auch bipartit. Somit lässt sich ein perfektes Matching finden.

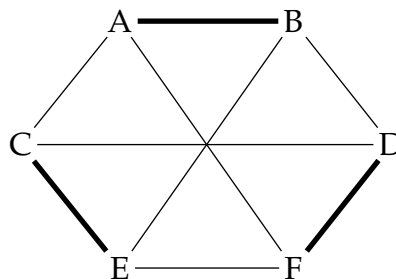


Abbildung 1.21.: Beispiel eines bipartiten, regulären Graphen mit perfektem Matching.

1.4.3. Stabiles Fachwerk

Die folgende Anwendung lässt sich nur mit großem Aufwand und Exkursen in die Physik formal formulieren, so dass hier ein Kompromiss zwischen Genauigkeit und Verständlichkeit gewählt wurde. Die Erläuterungen in diesem Kapitel orientieren sich vor allem an OYSTEIN ORE: Graphs and their uses, S. 46–49.

Die Anwendung bezieht sich auf die Stabilität von Fachwerken. Fachwerke lassen sich im Alltag häufig finden: Baugerüste und Fachwerkhäuser sind Beispiele. Doch auch in Bauwerken kann man das Stahlgrundgerüst mit einem Fachwerk identifizieren. Bei all diesen Konstruktionen muss sich der Architekt fragen, wann ein solches Fachwerk stabil ist. Wir bezeichnen ein Fachwerk dann als stabil, wenn in allen Schnittpunkten eines Fachwerkes die Winkel unveränderbar sind.

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit den Aussagen, wann ein solches Fachwerk stabil ist. Was man sich nun genau unter einem Fachwerk vorzustellen hat, lässt sich am Besten an einem Beispiel verdeutlichen.

Beispiel Fachwerk. Ein Fachwerk besteht aus Rechtecken, den so genannten Fächern. Folgende Abbildung zeigt ein einfaches Fachwerk. Dieses Fachwerk besteht aus 4 Spalten und 2 Zeilen.

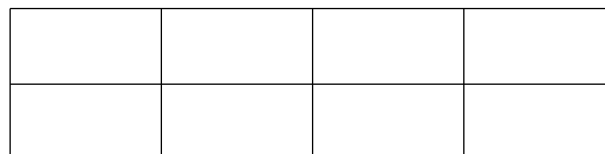


Abbildung 1.22.: Beispiel für ein Fachwerk.

Der entscheidende Nachteil an diesem Fachwerk ist seine Instabilität. Wenn man sich ein entsprechendes Baugerüst vorstellt, so ist es leicht nachvollziehbar, dass das Gerüst unter geringer Belastung zusammenfallen würde. Keines der Rechtecke ist stabil, hat also keine konstanten Winkel in den Ecken. Das Fachwerk könnte dann aussehen wie in der Abbildung 1.23 auf der gegenüberliegenden Seite.

Um diese Instabilität zu vermeiden, gibt es die Möglichkeit Querstreben einzubauen. Ein Fach, das mit einer Querstrebe versehen ist, ist stabil, d.h. das rechteckige Fach kann durch keine Bewegung mehr in ein Parallelogramm verformt werden.

1.4. Anwendungen der Graphentheorie

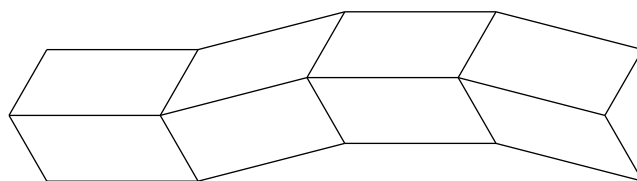


Abbildung 1.23.: Beispiel für ein instabiles Fachwerk.

Um ein Maximum an Stabilität zu erreichen, könnte jedes Fach mit einem Querbalken versehen werden. Es wären alle Fächer stabil und damit auch das gesamte Fachwerk. Mich interessiert aber an dieser Stelle keine maximale Stabilität, sondern eine Aussage darüber, ob auch mit weniger Kanten Stabilität möglich ist und wie man diese Stabilität erkennen kann.

Zunächst komme ich zu den Querstreben. Ich füge in das Ausgangsbeispiel verschiedene Querstreben ein, so dass es nun von dieser Gestalt ist.

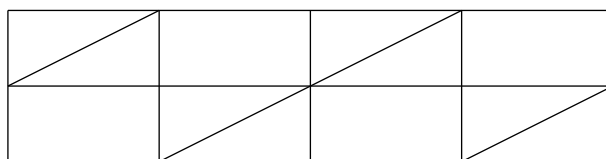


Abbildung 1.24.: Beispiel für ein Fachwerk mit Querstreben.

Doch reichen diese Querstreben nicht, denn auch dieses Fachwerk ist instabil, wie die folgende Abbildung zeigt.

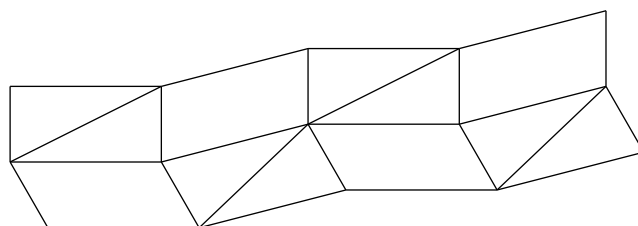


Abbildung 1.25.: Beispiel für ein instabiles Fachwerk mit Querstreben.

Um der Stabilitätsaussage ein wenig näher zu kommen, führe ich nun einen graphentheoretischen Begriff ein.

Definition zu einem Fachwerk zugehöriger bipartiter Graph

Sei ein Fachwerk gegeben. Der zu diesem Fachwerk zugehörige bipartite Graph wird folgendermaßen konstruiert.

Die beiden Knotenmengen eines bipartiten Graphen, der zu einem Fachwerk gehört, repräsentieren die Spalten und die Zeilen in dem Fachwerk. Eine Kante zwischen zwei Knoten existiert genau dann, wenn das entsprechende Fach im Fachwerk eine stabilisierende Querstrebe besitzt.

Beispiel zu einem Fachwerk zugehöriger bipartiter Graph. Die obengenannte Definition wende ich auf das Beispiel aus der Abbildung 1.24 auf der vorherigen Seite an. Dieses Fachwerk besitzt 2 Spalten und 4 Zeilen. Die 4 Querstreben befinden sich zwischen der 1-ten Spalte und der 1-ten Zeile, zwischen der 2-ten Spalte und der 2-ten Zeile, zwischen der 3-ten Spalte und der 1-ten Zeile und zwischen der 4-ten Spalte und der 2-ten Zeile.

Damit ergibt sich folgender bipartite Graph.

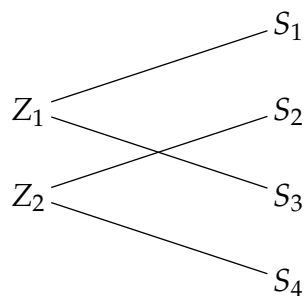


Abbildung 1.26.: Beispiel eines zu einem Fachwerk zugehörigen bipartiten Graphen.

Eine wichtige Erkenntnis an diesem Graphen, die später noch interessant sein wird, ist, dass der Graph nicht zusammenhängend ist.

Als weiteres Beispiel betrachte ich das 2×4 Fachwerk mit maximaler Stabilität. Der zu diesem Fachwerk zugehörige bipartite Graph wird in Abbildung 1.27 auf der gegenüberliegenden Seite bildlich dargestellt.

Dieser Graph besitzt alle möglichen Kanten ebenso wie das Fachwerk alle möglichen Querstreben besitzt.

Nun komme ich zu der Stabilitätsaussage.¹¹

¹¹ Vgl. OYSTEIN ORE: Graphs and their uses, S. 48.

1.4. Anwendungen der Graphentheorie

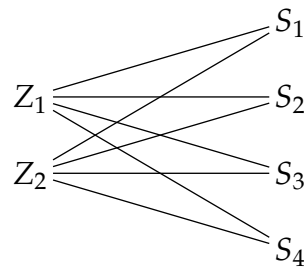


Abbildung 1.27.: Beispiel eines zu einem maximal-stabilen Fachwerk zugehörigen bipartiten Graphen.

Satz 10 Ein Fachwerk ist genau dann stabil, wenn der zugehörige bipartite Graph zusammenhängend ist.

Um diese Aussage nachvollziehen zu können, muss man sich bewusst machen, was indirekte Stabilität eines Faches bedeutet.

Wenn ein Fach A in der i -ten Spalte und der k -ten Zeile eine Querstrebe besitzt, so ist die i -te Spalte zu der k -ten Zeile stabil. Diese Spalte lässt sich zu dieser Zeile in den Winkeln nicht mehr verändern, sie sind konstant. Nun konstruiert man zwei weitere Fächer, die stabil sind. Das Fach B liegt in der i -ten Spalte und der l -ten Zeile, das Fach C in der j -ten Spalte und der l -ten Zeile. Die Abbildung 1.28 verdeutlicht die Situation.

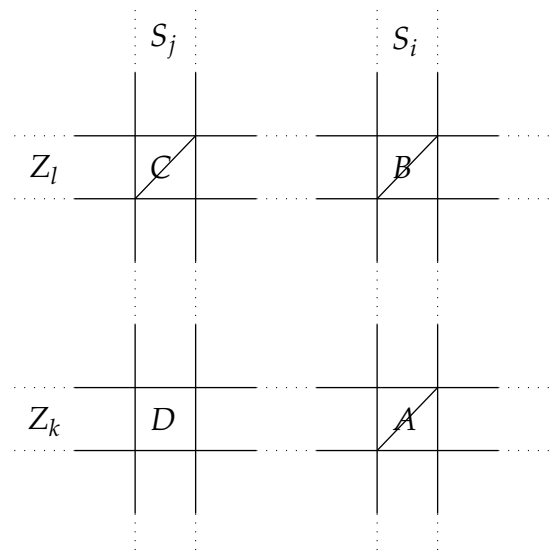


Abbildung 1.28.: Hilfsskizze Fachwerk zur Erläuterung von Satz 10.

1. Mathematische Grundlagen der Graphentheorie

Nun überlegt man sich, welche Spalten zu welchen Zeilen stabil sind. Die k -te Zeile ist mittels des Faches A stabil zur Spalte i . Diese wiederum ist stabil zur Zeile l durch das Fach B . Die Zeile l ist auch stabil zur Spalte j , wofür das Fach C verantwortlich ist. Also ist die Zeile k über die Spalte i und die Zeile l zur Spalte j stabil. Diese Stabilität wird hier indirekt erreicht, weswegen man von einer indirekten Stabilität spricht.

Die indirekte Stabilität ist der Kernbegriff der Stabilitätsaussage. Um das zu erkennen ist ein letzter Schritt nötig, in dem diese indirekte Stabilität auf die zugehörigen bipartiten Graphen übertragen wird.

Der zum konstruierten Fachwerk zugehörige bipartite Graph hat folgende Gestalt.

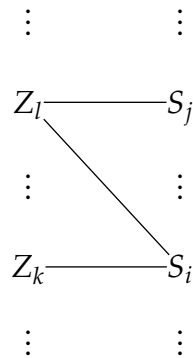


Abbildung 1.29.: Hilfsskizze bipartiter Graph zur Erläuterung von Satz 10.

Wie sich zeigt, wird die indirekte Stabilität der Zeile k zur j -ten Spalte durch einen Weg von Z_k nach S_j symbolisiert. Auf die Stabilitätsaussage bezogen bedeutet das, wenn eine Spalte und eine Zeile eines Fachwerkes in dem zugehörigen bipartiten Graphen verbunden sind, also ein Weg zwischen ihnen existiert, dann sind diese Spalte und diese Zeile zueinander (indirekt) stabil. Wenn jede Zeile zu jeder Spalte stabil ist, dann ist nach Definition das Fachwerk stabil. Im zugehörigen bipartiten Graphen ist dann jede Zeile mit jeder Spalte verbunden. Damit ist der zugehörige bipartite Graph nach Definition zusammenhängend.

Nun verdeutliche ich diese Aussage an einem Beispiel.

Beispiel Stabilität eines Fachwerkes. Ich betrachte nun zwei Fachwerke und die dazugehörigen bipartiten Graphen.

1.4. Anwendungen der Graphentheorie

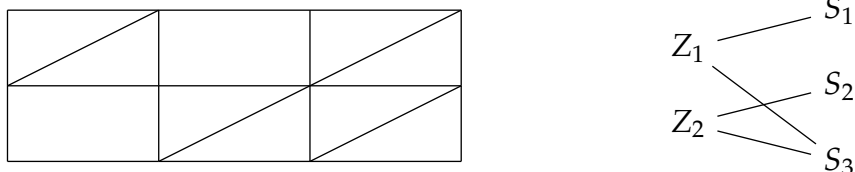


Abbildung 1.30.: Erstes Beispiel für ein Fachwerk mit Querstreben und dem dazugehörigen bipartiten Graphen.

Man stellt fest, dass der Graph zusammenhängend ist und das Fachwerk damit stabil.

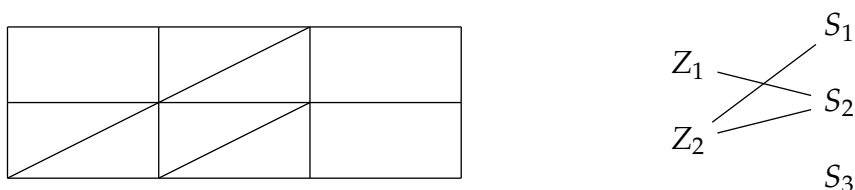


Abbildung 1.31.: Zweites Beispiel für ein Fachwerk mit Querstreben und dem dazugehörigen bipartiten Graphen.

Hier stellt man fest, dass z.B. der Knoten S_3 mit keinem Knoten verbunden ist. Damit ist dieses Fachwerk nicht stabil.

Zum Abschluss betrachten wir noch die minimale Anzahl von Querstreben.

Satz 11 Ein stabiles Fachwerk mit m Zeilen und n Spalten hat mindestens $n + m - 1$ Querstreben.

Ein Fachwerk ist genau dann stabil, wenn der zugehörige bipartite Graph zusammenhängend ist. Eine minimale Anzahl von Kanten wird dabei dann erreicht, wenn es keinen Kreis gibt. Ansonsten könnte man eine Kante des Kreises entfernen und der Graph wäre immer noch zusammenhängend.

Damit haben wir einen zusammenhängenden und kreisfreien Graphen, also nach der Definition auf Seite 16 einen Baum mit $n + m$ Knoten und dieser besitzt nach Lemma 4 genau $n + m - 1$ Kanten. Damit muss auch das Fachwerk $n + m - 1$ Querstreben besitzen.

1. *Mathematische Grundlagen der Graphentheorie*

2. Graphentheorie im didaktischen Diskurs

Dieses Kapitel soll kurz über die Entwicklung der Graphentheorie im didaktischen Diskurs informieren. Anschließend formuliere ich meine eigenen didaktischen Ziele, die ich in dieser Arbeit verfolge.

5

Der didaktische Diskurs beginnt in den 1950er Jahren mit der Forderung einer geometrischen Propädeutik in der Grundschule, die auch von graphentheoretischen Elementen begleitet wird. Diese Gedanken werden dann Anfang der 1970er Jahre auf alle Schulstufen übertragen. Die zentralen Veröffentlichungen dieser Phase werde ich kurz diskutieren.

10

Danach stelle ich die Diskussion der neueren Zeit dar. Dazu gehört ein Überblick über die Veröffentlichungen der letzten Jahre und die Entwicklungen in Lehrplänen und Standards in Bezug auf Graphentheorie bzw. Diskrete Mathematik. Zwischen 1980 und 1996 gab es keine nennenswerten Veröffentlichungen, so dass dieser Zeitraum hier nicht diskutiert wird.

15

Abschließend werde ich mich von den vorgestellten Ansätzen abgrenzen und meine eigene, hier vertretene Position wiedergeben.

Da es sich nur um eine kurze Einführung handelt, verweise ich auf zwei ausführlichere Werke. Zum Einen sei die Dissertation von BRIGITTE LUTZ-WESTPHAL¹² genannt, die die Entwicklung in Bezug auf Graphentheorie und Kombinatorische Optimierung in deutschsprachigen Veröffentlichungen dokumentiert. Zum Anderen fasst die Dis-

20

¹² BRIGITTE LUTZ-WESTPHAL: Kombinatorische Optimierung - Inhalte und Methoden für einen authentischen Mathematikunterricht. Dissertation Technische Universität Berlin, 2006, URL: http://www.math.tu-berlin.de/~westphal/diss_online.pdf – Zuletzt besucht am 02.02.2007, S. 19–39.

sertation von SILKE THIES¹³ die Entwicklung der Diskreten Mathematik in einem internationalen Kontext zusammen.

2.1. Die Entwicklung in den Jahren 1950–1980

2.1.1. Geometrische Propädeutik in der Grundschule

5 Die Anfänge der Graphentheorie im didaktischen Diskurs finden sich in der Forderung einzelner Wissenschaftler, auch in der Grundschule Geometrie zu lehren. Dabei geht es nach HEINRICH WINTER um fünf Gründe: Denken und Raum, die Entdeckung unseres Raumes, Größenbereiche und Messen, Kreativität und die Vorbereitung der systematischen Geometrie.¹⁴

- 10 • Ausgehend von den Ausführungen Piagets¹⁵, nach dem „Denken - grob gesagt - Handeln [ist], ein Handeln, das sich im Laufe der ontogenetischen Entwicklung zunehmend verinnerlicht (und damit versprachlicht)“¹⁶, folgert HEINRICH WINTER als eine Hauptaufgabe der Geometrie in der Grundschule, dass „die Bilder der Sprache [...] durch eigenes Handeln zunächst einmal im Unterricht aufgetaut werden [müssen]“¹⁷, um die Bilder wieder von der Muttersprache zu trennen um sie später fundierter einzubauen. „Wenn uns das gelingt, dann ist die Mathematik nicht die erste Fremdsprache, sondern geradezu ein Mittel auch muttersprachlicher Zucht.“¹⁸
- 15
- Die Entdeckung des Raumes ist eine zentrale Aufgabe des Unterrichts in der Grundschule.
- 20

Die Kinder, die zur Schule kommen, bringen schon einen reichen Schatz an Erfahrungen mit, den es zu bereichern und zu ordnen gilt. Dazu gehört nicht nur das Erfassen von Formen, sondern auch und eigentlich mehr noch das Erfassen von räumlichen

¹³ SILKE THIES: Zur Bedeutung diskreter Arbeitsweisen im Mathematikunterricht. Dissertation Justus-Liebig-Universität Gießen, 2002, URL: <http://bibd.uni-giessen.de/gdoc/2002/uni/d020154.pdf> – Zuletzt besucht am 03.02.2007, S. 24–69.

¹⁴ Vgl. HEINRICH WINTER: Geometrisches Vorspiel im Mathematikunterricht der Grundschule, S. 44–49.

¹⁵ Vgl. JEAN PIAGET: Psychologie der Intelligenz. Zürich: Rascher, 1948.

¹⁶ HEINRICH WINTER: Geometrisches Vorspiel im Mathematikunterricht der Grundschule, S. 45.

¹⁷ Ebd., S. 47.

¹⁸ Ebd.

2.1. Die Entwicklung in den Jahren 1950–1980

Beziehungen und deren Gesetzmäßigkeiten in bestimmten realen Phänomenbereichen oder in entsprechend didaktisch zubereiteten Situationen.¹⁹

Sinnvolle Beispiel hierzu finden sich wortwörtlich an jeder Straßenecke.

- Mit Größenbereichen und Messen wurden SuS in der Grundschule schon immer konfrontiert, doch fehlt ihnen oft die Grundlegung zentraler Begriffe über Längenrelationen („so lang wie“, „länger als“, „kürzer als“). Die geometrische Propädeutik fundiert diese Begriffe sorgfältiger als bisher. 5

- Zur Kreativität schreibt HEINRICH WINTER:

Die Bemühungen zur Erhaltung und Steigerung der Kreativität, zu denen es sicher keinen Erfolgsalgorithmus geben kann, sind an sich an keinen bestimmten Stoff gebunden. Jede Gelegenheit sollte wahrgenommen werden, die Schüler zum Entdecken, Finden und Erfinden zu veranlassen. Geometrische Fragestellungen scheinen sich jedoch in besonderer Weise zu eignen, weil sich einmal Problemstellungen geradezu von selbst aufdrängen, zweitens Lösungen sich letztlich experimentell verfolgen lassen und schließlich in der Regel nur geringes Vorwissen vorausgesetzt werden muß.²⁰ 10
15

- HEINRICH WINTER vertritt die Meinung, dass „im 5. Schuljahr gar nicht die Zeit vorhanden ist, die Voraussetzungen zu einem vernünftigen Einstieg in die Geometrie in der erforderlichen Breite zu entwickeln.“²¹

RUTH PROKSCH stellt in ihrem Buch *Geometrische Propädeutik*²² u.a. am Beispiel von graphentheoretischen Aussagen dar, wie mit den Kenntnissen aus einer geometrischen Propädeutik in der Grundschule einfache Aussagen hergeleitet werden können. In einem Beispiel²³ leitet sie aus der Aufgabe, eine Figur mit möglichst wenigen Zügen zu zeichnen, folgende systematische Aussage her: 20

Die halbe Anzahl der Ecken ungerader Ordnung ist die Zahl der Farben bei günstiger Färbung.²⁴ 25

In didaktischer Hinsicht fordert HEINRICH WINTER weniger fachlich orientierte Systematik, da „die Schule [...] immer höchstens auf dem Wege zum wissenschaftlichen

¹⁹ HEINRICH WINTER: Geometrisches Vorspiel im Mathematikunterricht der Grundschule, S. 47.

²⁰ Ebd., S. 49.

²¹ Ebd.

²² RUTH PROKSCH: Geometrische Propädeutik. Göttingen: Vandenhoeck und Ruprecht, 1956.

²³ Ebd., S. 91–95.

²⁴ Vgl. Ebd., S. 93. Sie setzt einen Zug mit der Färbung in eine Farbe gleich. Es fällt auf, dass die Diskussion sehr formal geführt und nicht auf didaktisch relevante Themen wie die konkrete Umsetzung im Unterricht eingegangen wird.

2. Graphentheorie im didaktischen Diskurs

Denken [ist]“²⁵. Ebenso stellt er eine Verzahnung mit anderen Fächern und das Überschreiten der praktischen Erfahrung in der Vordergrund. Unter dem Stichpunkt *Spiele und konkretes Material* argumentiert HEINRICH WINTER, dass die Merkmale des Spieles, Spielraum und Spielregeln, veraltet sind.

- 5 Das strukturierbare Material in der Hand der Schüler vereinfacht die umweltlichen Situationen, erlaubt schier unbegrenzte Variationen, die praktisch durchgeführt werden können, und erleichtert damit auch das Hinausschreiten über das Praktische. Nicht Betrachten, sondern Handeln evoziert Denken.²⁶

In der weiteren Folge des Artikels listet HEINRICH WINTER Beispielaufgaben für seine
10 Ideen auf. Dabei unterscheidet er zwischen den Anwendungsgebieten *Gebiete* und *Netze*. Bei den *Netzen* handelt es sich im Wesentlichen um Graphen, also um „Systeme aus Ecken (Stationen, Knotenpunkten) und Bögen (Straßen, Kanten), wobei jeder Bogen mit seinen beiden Enden in einer Ecke endet, und zwei verschiedene Bögen höchstens Ecken gemeinsam haben“²⁷.

15 Dabei empfiehlt HEINRICH WINTER die Beschäftigung mit *Netzen* aus den folgenden Gründen.

1. Netze modellieren unmittelbar die netzhafte Struktur von Begriffssystemen. Den Ecken entsprechen die Begriffe, den Bögen die Relationen zwischen den Begriffen.
2. Ohne mathematisches Vorwissen können nicht-triviale Beobachtungen gemacht und unterschiedlich „hoch“ begründet werden.
20
3. Netzhafte Strukturen begegnen uns in der Umwelt: Straßennetze, Flußnetze, Grabennetze, Eisenbahnnetze, Gebäudeaufteilungen, ...
4. Kreatives, kombinatorisches und argumentierendes Denken wird provoziert.
5. Es ergeben sich neuartige Aufgabenstellungen in der Arithmetik.²⁸

25 In den Aufgabenbeispielen zu *Netzen* finden sich Aufgaben, die zu ähnlichen Ergebnissen führen, wie sie RUTH PROKSCH schon erläutert hat.²⁹ Des Weiteren finden sich Aufgaben zu Hamilton- und Eulergraphen, Bäumen und gerichtete Graphen.

Der diskutierte Artikel enthält verschiedene Aspekte, die hier interessant sind. Zum Einen bietet er die Graphentheorie als ein Thema an, das „kreatives [...] und argumentierendes Denken [...] provoziert.“³⁰ Zum Zweiten arbeitet er in seinen Beispielen
30

²⁵ HEINRICH WINTER: Geometrisches Vorspiel im Mathematikunterricht der Grundschule, S. 50.

²⁶ Ebd., S. 51.

²⁷ Ebd., S. 58.

²⁸ Ebd.

²⁹ RUTH PROKSCH: Geometrische Propädeutik, S. 91–95.

³⁰ HEINRICH WINTER: Geometrisches Vorspiel im Mathematikunterricht der Grundschule, S. 58.

2.1. Die Entwicklung in den Jahren 1950–1980

len algorithmische Elemente heraus und gibt einen komprimierten Überblick über das gesamte Themenspektrum der Graphentheorie. Weiterhin verzichtet HEINRICH WINTER im Gegensatz zum üblichen Stil der damaligen Mathematikdidaktik auf formale Definitionen des Stoffes und formuliert stattdessen Anweisungen und Hilfestellungen zur Methodik und für den Unterricht. 5

Leider beschränkt sich HEINRICH WINTER lediglich auf die Grundschule und lässt höhere Schulstufen außer Acht. Zwar finden sich in anderen Schriften Verweise auf diesen Artikel, jedoch beziehen sich diese vorwiegend auf Graphentheorie im gymnasialen Mathematikunterricht. Im Kontext der Grundschule wurde der Artikel wenig beachtet. 10

2.1.2. Graphentheorie im gymnasialen Mathematikunterricht

Das Thema *Graphentheorie* findet in der Literatur in den 1970er Jahren vermehrt Beachtung. Davon zeugen u.a. die drei Themenhefte der Zeitschrift *Der Mathematikunterricht* zur Graphentheorie aus den Jahren 1973, 1974 und 1978.

In diesem Zusammenhang müssen die Schriften von HANS-GÜNTHER BIGALKE genannt werden, der sich vor allem auf HEINRICH WINTER bezieht. In seinem Artikel *Über die mögliche Bedeutung der Graphentheorie beim Lernen von Mathematik*³¹ arbeitet er drei Gründe für eine mathematikdidaktische Diskussion der Graphentheorie heraus: 15

- die immense Anwendungsfreudigkeit, 20
- die große Anschaulichkeit und
- die weitgestreute Problemfreudigkeit auf jedem beliebigen Niveau.³²

Zudem klassifiziert HANS-GÜNTHER BIGALKE in der Graphentheorie vier Bereiche, die die Graphentheorie in Bezug auf den Schuleinsatz überschaubarer machen. Diese vier Bereiche verdeutlicht er mit Beispielen und identifiziert die oben genannten drei Aspekte einer mathematikdidaktischen Diskussion in jedem dieser vier Bereiche. Die Bereiche mit entsprechenden Beispielen sind: 25

³¹ HANS-GÜNTHER BIGALKE: Über die mögliche Bedeutung der Graphentheorie beim Lernen von Mathematik. In: *Didaktik der Mathematik*, 3 1974. Dabei handelt es sich um eine erweiterte Version des Aufsatzes Ders.: Graphentheorie im Unterricht? In: *Der Mathematikunterricht*, 4 1974.

³² Ders.: Über die mögliche Bedeutung der Graphentheorie beim Lernen von Mathematik, S. 191.

Modelle für Probleme, die eine algorithmische Lösung erfordern

Rundreiseprobleme, Labyrinthprobleme oder Probleme der Unterhaltungsmathematik

Lösungen von Problemen mit Hilfe graphentheoretischer Sätze

5 Sätze über Eulersche und Hamiltonsche Wege, Turniere und Zerlegungen von Graphen

Veranschaulichung von (eventuell komplizierten) Zusammenhängen

Kombinatorik und Gruppentheorie im mathematischen oder Graphentheorie im nicht-mathematischen Kontext, z.B. Biologie, Technik oder Linguistik

10 **Leichtverständliche Probleme mit beliebig hohem Schwierigkeitsgrad**

Einfache Sätze über Wege, Kreise, Zyklen, ...

Leider versäumt HANS-GÜNTHER BIGALKE an dieser Stelle methodische und unterrichtsrelevante Anmerkungen zu geben und führt keine schülergerechte Diskussionen der Aufgaben.

15 Ähnlich arbeitet MAX JEGER in seinem Aufsatz *Elementare Begriffe und Sätze aus der Theorie der Graphen*. Jedoch fordert er ein Umdenken in der Mathematikdidaktik.

20 Es wäre höchst verhängnisvoll, wenn sich die Didaktiker einseitig auf die Strukturen und auf das Axiomatisieren festlegen würden. Sie haben sich ebenso sehr mit der Frage zu befassen, wie Mathematik im Unterricht vermehrt zum Erlebnis werden kann. Die Kritik an der langweiligen Mathematik auf unseren Schulen ist durchaus ernst zu nehmen. In einer Modernisierung, die nur Teilaspekte der wissenschaftlichen Mathematik herausgreift, liegt die Gefahr, daß neben der traditionellen Sterilität auch noch eine moderne Sterilität Platz greift.³³

25 Es zeigt sich, dass die Graphentheorie in den Jahren 1950–1980 vereinzelt für einen Schuleinsatz diskutiert wurde, ohne jedoch wirkliche Ergebnisse vorweisen zu können. Bemerkenswert ist dabei, dass alle Artikel zum Einen die Provokation von kreativem und argumentierendem Denken betonen und zum Anderen eine Modernisierung der Mathematikdidaktik fordern.

30 Diese Entwicklung fasst KARL-DIETER KLOSE in seiner Einführung zum dritten Themenheft Graphentheorie der Zeitschrift *Der Mathematikunterricht* gut zusammen.

³³ MAX JEGER: *Elementare Begriffe und Sätze aus der Theorie der Graphen*. In: *Der Mathematikunterricht*, 4 1974, S. 12.

2.2. Ansätze der letzten zehn Jahre

Graphentheoretische Fragestellungen haben seit einigen Jahren Eingang in die neuere Schulbuchliteratur gefunden. Im Zuge der Modernisierung des Mathematikunterrichts konnte die Mathematikdidaktik nicht achtlos an einer Reihe von Themenkreisen vorübergehen, die sich durch Anwendungsbezogenheit einerseits, durch die Verbindung interessanter Problemstellungen und anschaulicher Arbeitsweisen andererseits auszeichnen. Insbesondere Grundschulbücher wiesen eine Fülle von Aufgaben aus der sogenannten Unterhaltungsmathematik auf - zum Unbehagen einiger Lehrer, zur Freude vieler Schüler; die Lehrpläne gaben ihren Segen dazu.

Die letzten zwei, drei Jahre verstärkten diese Tendenz nicht. Lehr- und Bildungspläne für den Bereich der Grundschule reduzieren zwar erfreulicherweise den Umfang des zu lernenden mathematischen Begriffsapparates, geben nichtklassischen Unterrichtsinhalten aber gleichzeitig nur noch wenig Raum. Es mag dies ein wenig daran liegen, daß es der Mathematikdidaktik nur unzureichend gelungen ist, zu verdeutlichen, wie einzelne in der Grundschule behandelte Themenkreise eine sinnvolle Fortsetzung im Mathematikunterricht der höheren Klassen erfahren können [...]³⁴

2.2. Ansätze der letzten zehn Jahre

Die Jahre nach 1980 zeigen eine deutliche Verflachung der Diskussionen zum Thema Graphentheorie in der Schule. Die ersten Auswirkungen sind schon 1985 in einer Untersuchung von HANNELORE PIEPER und GERD WALTHER mit dem Titel *Graphen im Mathematikunterricht - eine Analyse der derzeitigen Curriculumsituation*³⁵ zu erkennen. Die Autoren untersuchen das Vorkommen von Graphentheorie in den Curricula und den Schulbüchern der Zeit. Es zeigt sich, dass „der Trend zur Reduzierung, bis hin zur Eliminierung von graphentheoretischen [...] Themen in Lehrplänen und Schulbuchwerken [...] unverkennbar [ist]“³⁶.

Diese Erkenntnis lässt sich auf die folgenden 10 Jahre ausweiten, so dass hier keine Veröffentlichungen aus den Jahren 1980–1996 untersucht werden.

2.2.1. Veröffentlichungen im Bereich Graphentheorie und Didaktik

Erst 1997 findet sich mit NIGEL GREENS Artikel *Unterrichtsvorschläge zur diskreten Mathematik*³⁷ wieder ein Vorschlag, Graphentheorie in der Schule einzusetzen. Dieser Ar-

³⁴ KARL-DIETER KLOSE: Zur Einführung. In: Der Mathematikunterricht, 3 1978, S. 3.

³⁵ HANNELORE PIEPER und GERD WALTHER: Graphen im Mathematikunterricht - eine Analyse der derzeitigen Curriculumsituation. In: RAINER BODENDIECK (Hrsg.): Graphen in Forschung und Unterricht. Festschrift K. Wagner. Salzdettfurth: Verlag Barbara Franzbecker, 1985.

³⁶ Ebd., S. 240.

³⁷ NIGEL GREEN: Unterrichtsvorschläge zur diskreten Mathematik. In: mathematik lehren, 1997, Nr. 84.

tikel bezieht sich vor allem auf ein Projekt aus England und es fehlen die methodischen und unterrichtsrelevanten Anmerkungen. Jedoch formuliert NIGEL GREEN eine Konsequenz aus dem Unterricht der Diskreten Mathematik.

5 Mathematik wird leider oft so unterrichtet, dass die Lernenden nach „der“ Antwort suchen sowie der Bestätigung, dass diese Antwort korrekt ist. Diskrete Mathematik steckt jedoch voller Probleme für die es keine „richtige“ Lösung gibt. Vielmehr ermöglicht sie den Lernenden, verschiedene Lösungsansätze und Modelle zu vergleichen.³⁸

Eine weitere interessante Veröffentlichung im Bereich der Graphentheorie ist das Buch *Das Geheimnis der kürzesten Wege*.³⁹ Dabei handelt es sich um ein Jugendbuch für ab
10 15-Jährige. Die Hauptfigur Ruth bekommt einen Computer geschenkt, auf dem sie das Programm „Vim“ findet. Mit Hilfe von „Vim“ wird sie in die Problematik des Routenplanens eingeführt. Es werden nacheinander alle wesentlichen Probleme und Lösungen besprochen, begonnen bei der Kombinatorischen Explosion⁴⁰, über den Dijkstra-Algorithmus bis zum Problem des Handlungsreisenden⁴¹. Da es sich um einen Roman
15 handelt, ist es nicht überraschend, dass keine Hinweise zu finden sind, wie das Thema im Unterricht behandelt werden könnte. Jedoch lassen sich diesem Buch einige interessante Themen und Unterrichtsideen entnehmen.

Als eine zentrale Veröffentlichung der letzten Jahre muss das Heft *Diskrete Mathematik* der Zeitschrift *mathematik lehren* genannt werden. Dort sind zwei Artikel hervorzuheben, die sich mit der Graphentheorie beschäftigen: *Wie komme ich optimal zum Ziel?*⁴²
20 und *Zu viele Bäume?*⁴³ BRIGITTE LUTZ-WESTPHAL beschreibt im ersten Artikel eine Unterrichtsreihe über *kürzeste-Wege-Algorithmen für Graphen*. Dabei handelt es sich um 9 Unterrichtsstunden, die zunächst in die Graphentheorie einführen und dann über die Breitensuche den Dijkstra-Algorithmus behandeln. Die letzte Stunde befasst sich mit
25 einem Ausblick auf NP-schwere Probleme. Diese Unterrichtsreihe kann als die Erste in einer didaktischen Veröffentlichung bezeichnet werden, die sich mit der Graphentheorie befasst und konkrete Erläuterungen zur Umsetzung gibt. Die Ergebnisse dieser Unterrichtsreihe finden sich in ihrer Dissertation.⁴⁴

³⁸ NIGEL GREEN: Unterrichtsvorschläge zur diskreten Mathematik, S. 62.

³⁹ PETER GRITZMANN und RENÉ BRANDENBERG: *Das Geheimnis der kürzesten Wege*. Springer Verlag, 2003.

⁴⁰ Vgl. dazu Ders.: *Zu viele Bäume?* In: *mathematik lehren*, 2005, Nr. 129, S. 63 oder BRIGITTE LUTZ-WESTPHAL: *Wie komme ich optimal zum Ziel?* In: *mathematik lehren*, 2005, Nr. 129, S. 57.

⁴¹ Dabei handelt es sich um das Problem, alle Städte in der kürzesten Rundreise zu erreichen und keine Stadt doppelt zu besuchen. Vgl. hierzu z.B. GARY CHATRAND: *introductory graph theory*, S. 67–77

⁴² BRIGITTE LUTZ-WESTPHAL: *Wie komme ich optimal zum Ziel?*

⁴³ PETER GRITZMANN und RENÉ BRANDENBERG: *Zu viele Bäume?*

⁴⁴ Vgl. BRIGITTE LUTZ-WESTPHAL: *Kombinatorische Optimierung - Inhalte und Methoden für einen authentischen Mathematikunterricht*.

2.2. Ansätze der letzten zehn Jahre

Der Artikel von PETER GRITZMANN und RENÉ BRANDENBERG befasst sich mit einer Aufgabenreihe zum Thema *minimale Spannbäume*. Allerdings werden hier wiederum keine methodischen und unterrichtsrelevanten Hilfestellungen gegeben, sondern lediglich die Aufgaben und mögliche Lösungswege besprochen.

Dem Heft *Diskrete Mathematik* beigelegt ist eine Ausgabe der Reihe *Mathe-Welt*. Es handelt sich dabei um das Heft *U-Bahnpläne und kurze Wege*⁴⁵, eine Sammlung von Materialien zu den Themen *Graphen, Wege optimieren* und *Routen planen*. 5

Bei diesen Veröffentlichungen ist zu beachten, dass diese vor allem unter dem Stichwort *Kombinatorische Optimierung* verfasst wurden. Dabei handelt es sich um die Aufgaben aus der Diskreten Mathematik und dort vor allem aus der Graphentheorie, die eine diskrete Anzahl minimieren oder maximieren wollen, z.B. Spannbäume, Wege oder Handlungsreisen. Damit werden jedoch wichtige Gebiete der Graphentheorie außen vor gelassen, wie Eulergraphen, Turniere, Matchings oder Fachwerke. 10

Neben den Veröffentlichungen in Print-Medien nehmen weiterhin die Veröffentlichungen im Internet zu.⁴⁶ Eine Webseite, die Unterrichtsmaterialien auch für Graphentheorie anbietet, ist www.matheprisma.de⁴⁷. Folgende Module zum Thema Graphentheorie stehen zur Verfügung. 15

- Quadratur des Quadrates
- Das Königsberger Brückenproblem
- Das Vierfarbenproblem 20
- Wege auf Graphen

Unter einem Modul verstehen die Autoren eine geordnete Folge von Webseiten mit Aufgaben, Erläuterungen und interaktiven Elementen wie Java-Applets. Diese Module stehen auf der Seite zum Download zur Verfügung und sind für den Unterricht frei verfügbar. Seit Februar 2007 bietet die Webseite auch ein Autorentool namens *teachTool*⁴⁸ an, mit dem neue Module erstellt und bestehende Module leicht verändert werden können.⁴⁹ 25

⁴⁵ ANDREAS LÖBIG: *U-Bahnpläne und kurze Wege*. Selze: Erhard Friedrich Verlag, 2005 (= *Mathe-Welt* 129).

⁴⁶ Einige der Print-Medien sind ebenfalls im Internet veröffentlicht. Da es sich dabei jedoch um pdf-Dateien hält, zähle ich sie zu den Print-Medien.

⁴⁷ FACHBEREICH MATHEMATIK DER BERGISCHEN UNIVERSITÄT WUPPERTAL: *MathePrisma*. URL: www.matheprisma.de – Zuletzt besucht am 06.02.2007.

⁴⁸ Ders.: *teachTool*. URL: www.matheprisma.de/teachTool/ – Zuletzt besucht am 06.02.2007.

⁴⁹ Dieses Internetangebot wird auf Seite 57 dieser Arbeit näher beschrieben.

2.2.2. Graphentheorie in Lehrplänen und Standards

Damit sich neue Themen im Unterricht durchsetzen können, bedarf es einer Erwähnung in den Lehrplänen des Faches und neuerdings müssen auch Standards formuliert werden. Die Vorreiterrolle für die Standards hat die amerikanische Mathematiklehrervereinigung, die NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (NCTM) eingenommen. In der Version von 1989 wurde sogar ein eigener „Standard“ für Diskrete Mathematik formuliert. In der Neuformulierung von 2000⁵⁰ fiel dieser Standard jedoch weg. Die Begründung dazu lautet: „As an active branch of contemporary mathematics that is widely used in business and industry, discrete mathematics should be an integral part of the school mathematics curriculum, and these topics naturally occur throughout the other strands of mathematics.“⁵¹

Als besondere Bestandteile der Diskreten Mathematik werden in den Standards drei genannt: Kombinatorik, Iteration und Rekursion und die Graphentheorie.⁵² Da die Standards der NCTM als Grundlage für die Standards-Diskussion gelten, steht zu erwarten, dass die deutsche Version der Standards ähnlichen Inhalt besitzt.

Das niedersächsische *Kerncurriculum für das Gymnasium Schuljahrgänge 5 – 10 - Fach Mathematik*⁵³ von 2006 weist keine Kompetenzen auf, die mit der Diskreten Mathematik oder der Graphentheorie zu identifizieren sind. Die formulierten Kompetenzen sind

- Probleme mathematisch lösen,
- mathematisch argumentieren,
- mathematisch modellieren,
- kommunizieren,
- mathematische Darstellungen verwenden und
- mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen.

⁵⁰ NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS: Principles and Standards for School Mathematics. 2000.

⁵¹ Ebd., S. 30.

⁵² Vgl. ebd., S. 31.

⁵³ Vgl. NIEDERSÄCHSISCHES KULTUSMINISTERIUM: Kerncurriculum für das Gymnasium Schuljahrgänge 5 – 10 - Fach Mathematik. Hannover: Niedersächsisches Kultusministerium, 2006 URL: http://db2.nibis.de/1db/cuvo/datei/kc_gym_mathe_nib.pdf – Zuletzt besucht am 07.02.2007.

2.3. Zielsetzungen dieser Arbeit

Betrachtet man jedoch die Ausführungen von HEINRICH WINTER von Seite 44 dieser Arbeit, so finden sich die genannten Gründe hier wieder: mit Netzen kann modelliert, unterschiedlich „hoch“ mathematisch argumentiert werden und es werden Probleme mathematisch gelöst, da netzhafte Strukturen uns in der Umwelt begegnen. Zudem wird ein kreatives und argumentierendes Denken provoziert, was zur mathematischen Argumentation und Kommunikation führt. Ähnlich wie in den Standards der NCTM lässt sich Graphentheorie in allen Standards finden. Graphentheorie wirkt also standard-übergreifend. 5

2.3. Zielsetzungen dieser Arbeit

Nachdem ich nun die wichtigsten Stationen in der didaktischen Auseinandersetzung mit der Graphentheorie skizziert habe, formuliere ich auf dieser Basis die Ziele dieser Arbeit in Bezug auf die Vermittlung von graphentheoretischen Inhalten. Die Ziele dieser Arbeit lassen sich in vier Stichpunkten zusammenfassen: 10

1. Die vier Bereiche, die HANS-GÜNTHER BIGALKE formuliert, sollen abgedeckt werden, um einen möglichst breiten Einblick in die Graphentheorie zu vermitteln. Die inhaltlichen Vorgaben sind dazu im Kapitel *Mathematische Grundlagen der Graphentheorie* ab Seite 1 gegeben. 15
2. Die Inhalte werden entgegen den Veröffentlichungen von BRIGITTE LUTZ-WESTPHAL, PETER GRITZMANN und RENÉ BRANDENBERG über die Kombinatorische Optimierung hinausgehen. Damit wird der erste Punkt unterstützt und interessante Themengebiete wie Matching-Probleme oder Fachwerke werden nicht ausgeschlossen. 20
3. Die Unterrichtsentwürfe sollen methodische und unterrichtsrelevante Überlegungen enthalten. Aufgrund des beschränkten Platzes werden allerdings die Methoden nicht ausführlich mit allen Vor- und Nachteilen besprochen, sondern lediglich die damit verfolgten Ziele dargestellt. Ebenfalls werden Unterrichtsmaterialien entworfen. Die Darstellung der Unterrichtsstunden und -materialien findet sich im Kapitel *Unterrichtsentwürfe zur Graphentheorie* ab Seite 61. 25
4. Die Unterrichtsentwürfe und -materialien werden mit Blick auf ihre Tauglichkeit und die Reaktionen der SuS durchgeführt und evaluiert. Die Beschreibung der Durchführung findet sich im Kapitel *Praktische Umsetzung der Unterrichtsentwürfe* 30

2. Graphentheorie im didaktischen Diskurs

ab Seite 113, die Ergebnisse der Evaluation im Kapitel *Ergebnisse der Evaluation* ab Seite 131.

Die Kontrolle dieser Ziele erfolgt im Kapitel *Zur Graphentheorie* ab Seite 141.

3. Webbasierte Lernumgebungen im Mathematikunterricht

Neue Medien werden im Alltag immer wichtiger. Kaum ein Arbeitsplatz kann noch auf den Umgang mit Computern verzichten und auch für die SuS wird der Umgang immer selbstverständlicher. 5

Die Aufgabe der Didaktik scheint es nun zu sein, den Computer ebenfalls in den Schulalltag zu integrieren. Dabei stellt sich jedoch die Frage, ob und wie es didaktisch sinnvoll ist, auf Neue Medien im Unterricht zurückzugreifen. Ebenso stellt sich die Frage, welche Medien möglich sind und welche didaktischen Überlegungen damit verbunden sind. 10

Das aktuelle Kapitel versucht diese Fragen kurz zu beantworten und betrachtet eines dieser Medien, nämlich das Internet in der Funktion eines tutoriellen Systems, intensiver.

3.1. Computer im Mathematikunterricht

Wenn über Computer im Mathematikunterricht geschrieben wird, so wird die Möglichkeit, Computer einzusetzen, oft in zwei Gruppen unterschieden: *Werkzeuge* und *Lernumgebungen*.⁵⁴ 15

Werkzeuge sind Programme, die bei der Bearbeitung von Problemen Hilfe leisten können. Dazu gehören z.B. Tabellenkalkulations-, Computer-Algebra- und Dynamische Geometriesysteme. 20

Unter *Lernumgebungen* versteht man durch die Lehrkraft vorstrukturierte Inhalte und Ziele, die einer Lerngruppe von Außen instruiert werden. Das Spektrum reicht dabei

⁵⁴ Vgl. z.B. BÄRBEL BARZEL, STEPHAN HUSSMANN und TIMO LEUDERS (Hrsg.): Computer, Internet & Co. im Mathematikunterricht. Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor, 2005, S. 30.

3. Webbasierte Lernumgebungen im Mathematikunterricht

von offenen Aufgabenstellungen über interaktive Arbeitsblätter bis zu so genannten Drill&Practice-Programmen.

Bei der Nutzung von Computersystemen im Unterricht, sei es als Lernumgebung oder als Werkzeug, muss stets bewusst sein, dass die Auswahl des Mediums immer einen
5 didaktischen Hintergrund haben muss.

Medien haben keine primäre Rolle beim Lernen zu erfüllen und sollen didaktisch qualifizierte Lehrkräfte nicht ersetzen. Medien - ob digital oder analog - sind eine sinnvolle didaktische Hilfe.⁵⁵

Dies zieht folgende Erkenntnis über die Funktion des Lehrens mit sich:

10 Lehren, das sich als reine Informationsvermittlung versteht, verbietet sich von selbst. Vielmehr bedeutet Lehren das Bereitstellen von geeigneten Angeboten zum Lernen. Das können und müssen auch Angebote in Form von Informationen sein, insofern dürfen wir auch weiterhin unser Wissen an andere herantragen. [...]
15 Vielmehr müssen die geschaffenen Lernarrangements zur aktiven Auseinandersetzung mit dem Lerngegenstand herausfordern.⁵⁶

Um Lernarrangements zu schaffen, durch die die SuS zur Auseinandersetzung herausgefordert werden, ist es nötig, die Bedürfnisse und die Erfahrungswelt der SuS zu erkennen. Gute Arrangements entstehen dann, wenn sie an die Erfahrungswelt der SuS angepasst werden.

20 Diese Passung wird jedoch nicht erreicht durch eine optimale Lernstrategie - diese kann weder für alle Schülerinnen und Schüler die gleiche sein, noch ist sie pragmatisch für jeden einzelnen ermittelbar -, sondern durch die Reichhaltigkeit der Angebote, aus der auch sehr unterschiedliche Individuen produktiv ihren Nutzen ziehen können.⁵⁷

Die Erkenntnis, dass nicht die Auswahl der Medien primär über den Lernerfolg entscheidet, sondern die Lehrkraft, die sich bewusst für das eine oder andere Medium
25 entscheidet, findet sich auch in der Pädagogischen Psychologie.

30 Vor allem aber scheint sich eine Überzeugung durchzusetzen: Das «Medium» alleine ist gar nicht entscheidend! «Der Computer» ist nicht besser als «der Lehrer», «der Lehrer» nicht besser als «das Video» und «das Lernen im Web» ist nicht besser als «das Lernen in der Seminargruppe», die ihrerseits nicht besser ist als «der Studienbrief». [...] Es kommt darauf an, wie die entsprechende Lernumgebung konzipiert und gestaltet ist.⁵⁸

⁵⁵ PAUL KLIMSMA und LUDWIG J. ISSING (Hrsg.): Informationen und Lernen mit Multimedia und Internet. Weinheim: Beltz PVU, 2002, S. 16.

⁵⁶ BÄRBEL BARZEL, STEPHAN HUSSMANN und TIMO LEUDERS: Computer, Internet & Co. im Mathematikunterricht, S. 17.

⁵⁷ Ebd., S. 18.

⁵⁸ HELMUT N. NIEGEMANN: Neue Lernmedien. konzipieren, entwickeln, einsetzen. Bern: Verlag Hans Huber, 2001, S. 9–10.

3.2. „Neue Medien“ und „Neues Lernen“

Doch nicht nur die Konzeption und Gestaltung ist wichtig, sondern auch die Ausgewogenheit der Medien.

Bei der Konstruktion einer solchen „elektronischen Lernumgebung“ darf nicht der Fehler begangen werden, den gesamten Lernprozess auf das digitale Medium zu übersetzen. Das Verhältnis zwischen individuellen und kooperativen Lernphasen mit und ohne das Medium Computer muss sorgsam erwogen werden.⁵⁹

5

3.2. „Neue Medien“ und „Neues Lernen“

Ein Grund für die Nutzung von Computern im Unterricht findet sich in der Vorstellung, dass mit dem Einsatz von Neuen Medien ein Neues Lernen gefördert werden kann. Mit diesem Grund hat sich BÄRBEL BARZEL intensiver auseinandergesetzt.⁶⁰

10

Mit *Neuem Lernen* assoziiert sie zwei Aspekte. Zum Einen verbindet sie offene Aufgaben, also Aufgaben, in denen das „Problem [...] erst einmal konkretisiert werden [muss], Lösungswege liegen nicht auf der Hand, das Ergebnis - falls es überhaupt ein eindeutiges gibt - ist zunächst unbekannt.“⁶¹ Zum Anderen geht eine höhere Selbständigkeit im Arbeiten der SuS damit einher.

15

Nach BÄRBEL BARZEL können Neue Medien das Neue Lernen vor allem dadurch erreichen, dass der Einsatz von Neuen Medien einen neuen Typ von Aufgaben und Unterricht erfordert. Computer, als Werkzeuge eingesetzt, erfordern einen neuen Aufgabentyp, um die neuen Werkzeuge effektiv nutzen zu können, während der Computer als Lernumgebung einen neuen Unterrichtstyp fordert, da die Lerngruppen nicht mehr im Ganzen gelenkt werden, sondern jede Teilgruppe, die einen Computer nutzt, für sich das Tempo bestimmt.

20

Dieser Zusammenhang wird auch an anderer Stelle bestätigt.

Alle bisherigen Erfahrungen zum Einsatz *neuer Technologien* zeigen, dass mit dem Einsatz des Computers als Werkzeug in der Hand des Schülers eine größere Selbsttätigkeit einhergeht. Der Computer ist ein Katalysator für verschiedene Formen des individualisierten

25

⁵⁹ TIMO LEUDERS (Hrsg.): Mathematik-Didaktik. Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II. Cornelsen Verlag Scriptor, 2003, S. 204.

⁶⁰ Vgl. BÄRBEL BARZEL: Warum gehören „Neues Lernen“ und „Neue Medien“ im Mathematikunterricht zusammen? In: Der Mathematikunterricht, 3 2004.

⁶¹ ANDREAS BÜCHTER und TIMO LEUDERS: Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern - Leistung überprüfen. Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor, 2005, S. 88.

3. Webbasierte Lernumgebungen im Mathematikunterricht

Unterrichts, der Partnerarbeit und kooperativer Arbeitsformen, womit die Hoffnung verbunden ist, dass sich bei diesen Unterrichtsformen eine größere Selbsttätigkeit entwickelt (was nicht zwangsläufig der Fall sein muss).⁶²

3.3. Internet im Mathematikunterricht

- 5 In den bisherigen Ausführungen habe ich lediglich zwischen Werkzeugen und Lernumgebungen als Kategorien von Neuen Medien unterschieden. Das Medium, welches den Alltag am meisten verändert hat - das Internet - lässt sich in diese Kategorien nicht einordnen. Um diese Einordnung vornehmen zu können, muss die Frage gestellt werden, zu welchem Zweck das Internet genutzt werden soll. Hier unterscheidet
10 HEINZ SCHUMANN zwischen neun Einsatzgebieten des Internets im Mathematikunterricht:

Das Internet

- als Quelle von Lexikon-Wissen
- zur Beschaffung von Unterrichtsmaterialien
- 15 • als Medium zur Literatursuche
- als Publikationsmedium
- als Kommunikationsmedium
- als tutorielles System
- als Demonstrationsmedium
- 20 • und Werkzeuge (Tools)
- und Informationssammlungen.⁶³

Nach dieser Unterscheidung der Einsatzgebiete zeigt sich, dass das Internet sowohl als Werkzeug (Tools, Quelle von Lexikon-Wissen, ...) als auch als Lernumgebung (tutorielles System, Demonstrationsmedium) einsetzbar ist.

- 25 Mein Hauptinteresse in dieser Arbeit liegt auf den tutoriellen Systemen bzw. den webbasierten Lernumgebungen, die ich im Folgenden näher untersuchen werden.
Zu tutoriellen Systemen schreiben HANS-GEORG WEIGAND und THOMAS WETH:

⁶² HANS-GEORG WEIGAND und THOMAS WETH: Computer im Mathematikunterricht. Neue Wege zu alten Zielen. Spektrum, Akademischer Verlag, 2002, S. 34.

⁶³ HEINZ SCHUMANN: INTERNET und Mathematikunterricht - eine Übersicht. In: Der Mathematikunterricht, 4 2003, S. 7.

3.4. Beispiele für webbasierte Lernumgebungen

Tutorielle Systeme konnten sich bisher im Schulunterricht nicht durchsetzen und es stellt sich die Frage, ob durch das Internet ein neuer Anlauf zur Verwendung derartiger Systeme möglich sein wird. So lassen sich über das Netz in einfacher Weise Antworten überprüfen und entsprechende Rückmeldungen geben, Tests aktualisieren und mit Hilfe verteilter Systeme Entwicklung und Wartung von Programmen auf mehrere Leute an verschiedenen Orten verteilen.⁶⁴

5

Für TIMO LEUDERS stellt sich die Frage, ob durch das Internet tutorielle Systeme verstärkt genutzt werden, nicht.

Eine wachsende Bedeutung bekommt es [das Internet] aber als einheitliche Lernumgebung, in die oben beschriebene Werkzeuge integriert werden können.⁶⁵

10

3.4. Beispiele für webbasierte Lernumgebungen

Beispiele, in denen das Internet als multimediale Lernumgebung bzw. als tutorielles System genutzt wird, sind nicht reichlich. Dennoch werde ich hier zwei Beispiele vorstellen. Zum Einen sind die Module zu nennen, die unter der Adresse www.mathe-prisma.de zu finden sind. Zum Anderen betrachte ich kurz die so genannten WebQuests.

15

Unter www.mathe-prisma.de stehen 42 Module über verschiedene Themen der Schul- und Universitätsmathematik zur Verfügung. Die Fachgebiete sind Algebra, Arithmetik, Analysis, Geometrie, Graphentheorie, Stochastik und Informatik, ebenso kann man nach den Altersstufen Sekundarstufe I, Sekundarstufe II und Studium unterscheiden.

20

Ein Modul baut sich aus mehreren Seiten auf, die nacheinander bearbeitet werden können; durch einen Navigationsframe im unteren Seitenbereich ist auch das Springen zwischen den Seiten möglich. Die einzelnen Seiten bestehen aus erklärendem Text, Animationen und Aufgaben. Man kann diese Module auch als interaktive Schulbuchseiten bezeichnen.

25

Auf den Seiten finden sich viele Hinweise zur Erstellung der Module, so werden z.B. die genutzten Java-Script-Elemente erläutert oder ein Tool zum Download angeboten, dass die Erstellung der Module erheblich vereinfacht und standardisiert. Leider werden keine Erläuterungen zur Nutzung der Module im Unterricht gegeben, jedoch kann

⁶⁴ HANS-GEORG WEIGAND und THOMAS WETH: Computer im Mathematikunterricht. Neue Wege zu alten Zielen, S. 250.

⁶⁵ TIMO LEUDERS: Mathematik-Didaktik. Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II, S. 232.

3. Webbasierte Lernumgebungen im Mathematikunterricht

man seine Erfahrungen den Autoren über ein Formular zukommen lassen. Die Autoren wollen dieses Feedback nutzen, um ihr Angebot zu verbessern.

Unter WebQuests versteht man Aufgaben oder Projekte, die den SuS bestimmte Internetadressen als Quelle angeben und die SuS auffordern, die Informationen unter
5 den Adressen zu verarbeiten und darzustellen. Ein WebQuest erstreckt sich dabei über mindestens 5 Schulstunden mit Hausaufgabenzeit.

Ein WebQuest ist immer in sechs Teile gegliedert, die den SuS alle relevanten Informationen liefern sollen. Dazu gehören

die Einleitung, um die SuS an das Thema heranzuführen,

10 **die Aufgabe**, die die SuS mit dem WebQuest erfüllen sollen,

das Vorgehen, damit die SuS eine Orientierung haben,

die Quellen, in denen die SuS die benötigten Informationen bekommen können,

die Bewertungsmaßstäbe, nach denen die Lehrkraft die Ergebnisse bewertet und

das Fazit, welches das Gelernte zusammenfasst.

15 Die WebQuests gehen auf die Ideen von BERNIE DODGE und TOM MARCH aus den USA zurück, die eine Methode entwickeln wollten, Inhalte aus dem Internet sinnvoll für den Unterricht zu nutzen. In der deutschsprachigen Fachliteratur finden sich zu diesem Thema vor allem Beiträge von CHRISTINE BESCHERER.⁶⁶ Von ihr stammt auch die Sammlung deutschsprachiger Mathematik-WebQuests, zu finden unter www.mathe-webquests.de⁶⁷, ein weiteres gelungenes Beispiel wurde von MARTIN REUSS geschrieben.⁶⁸ Als Kompetenzen, die ein SuS bei einem WebQuest erwerben kann, werden von CHRISTINE BESCHERER Lesen und Interpretieren, Argumentieren, Problemlösen, Modellieren, Darstellen und Kommunizieren genannt.⁶⁹

⁶⁶ z.B. CHRISTINE BESCHERER: Mit WebQuests im Internet recherchieren. In BÄRBEL BARZEL, STEPHAN HUSSMANN und TIMO LEUDERS (Hrsg.): Computer, Internet & Co. im Mathematikunterricht. Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor, 2005.

⁶⁷ CHRISTINE BESCHERER: Mathe-Webquests. URL: www.mathe-webquests.de – Zuletzt besucht am 14.02.2007.

⁶⁸ MARTIN REUSS: WebQuest Strahlensätze. URL: <http://www.lehrer-online.de/url/strahlensaetze-webquest> – Zuletzt besucht am 14.02.2007.

⁶⁹ Vgl. CHRISTINE BESCHERER: Mit WebQuests im Internet recherchieren, S. 115–116.

3.5. Gefahren beim Arbeiten mit Neuen Medien

Neben allen Vorteilen, die der Einsatz Neuer Medien im Mathematikunterricht mit sich bringt, müssen auch die Risiken diskutiert werden. Hierzu bieten BÄRBEL BARZEL, STEPHAN HUSSMANN und TIMO LEUDERS eine kurze Übersicht:

- Bestimmte Aufgabentypen werden nur noch vom Rechner ausgeführt. Dazu gehören oft *zentrale Algorithmen*, die nun nicht mehr per Hand ausgeführt werden. Damit geht eine zentrale Fähigkeit verloren. 5
- Durch die Möglichkeit, Informationen gebündelt und in schneller Reihenfolge darzustellen, drängt sich eine *Beschleunigung* des Lernens auf, der entgegenge- wirkt werden muss. Diese Beschleunigung verhindert ein Reflektieren der erleb- ten Ereignisse. 10
- Neben der Beschleunigung existiert auch die Gefahr der Bilderflut bzw. einer *allgemeinen Reizüberflutung*. Die SuS nehmen die Abbildungen bzw. die Medien nur noch oberflächlich wahr.
- Ein breites Angebot an Beispielen und Themen darf nicht zu Lasten der *Übersicht- lichkeit* der Darstellung gehen. Hier muss ein Kompromiss gefunden werden. 15
- Ebenso muss die Gestaltung einer Bedienungsfläche zwischen Funktionali- tät und Einfachheit abwägen. Dabei darf die Bedienung nicht zu *komplex* werden.
- Die Bildung von Begriffen muss *unabhängig von den Medien* erfolgen, da sonst unerwünschte Effekte auftreten können.⁷⁰ 20

Eine gute Stundenvorbereitung muss sich mit diesen Gefahren auseinandersetzen und entsprechende Antworten darauf finden.

⁷⁰ Vgl. BÄRBEL BARZEL, STEPHAN HUSSMANN und TIMO LEUDERS: Computer, Internet & Co. im Ma- thematikunterricht, S. 38–40.

3.6. Zusammenfassung und Ziele

Das vorliegende Kapitel zeigt, dass Neue Medien im Unterricht eine Berechtigung wie jedes andere Medium haben. Es kommt dabei darauf an, welche Ziele man mit dem Medium verfolgt. Ebenfalls muss eine Medienvielfalt erreicht werden. Im Mathematikunterricht lässt sich eine breite Anwendung von Neuen Medien finden, jedoch vorwiegend in der Funktion von Werkzeugen. Webbasierte Lernumgebungen sind selten im Mathematikunterricht anzutreffen, obwohl es einige überzeugende Beispiele dafür gibt, wie das Kapitel 3.4 zeigt.

In dieser Arbeit möchte ich ein weiteres Beispiel für den Einsatz einer webbasierten Lernumgebung geben. Dabei werden vor allem die relevanten Gefahren betrachtet. Die Bilderflut wird durch eine sorgfältig gewählte Auswahl von erklärenden Bildern eingeschränkt, ebenso werden die Beispiele auf ein Minimum reduziert, um eine hohe Übersichtlichkeit zu gewährleisten. Bei der Komplexität der Bedienung verlasse ich mich auf die unkomplizierte Bedienung der eingesetzten webbasierten Lernumgebung⁷¹ und eine Darstellung der Module in der einfachsten Form. Die Medienabhängigkeit wird eingedämmt, da der Aufbau bis auf einige Multimedia-Komponenten dem Abschnitt eines Lehrbuchs gleicht. Der Beschleunigung des Lernens wird durch Aufgaben entgegen getreten, die nicht am Rechner zu bearbeiten sind und deren Lösungen nicht vorgegeben werden, sondern durch den Vergleich mit anderen SuS verifiziert werden müssen. Ebenso ist der Aufbau der Seiten so gewählt, dass möglichst kleine Sinneinheiten zu einer Seite zusammengefasst werden.

Um die Wirkung der Aufgaben in Bezug auf die „Entschleunigung“ besser einschätzen zu können, zielen einige Fragen meiner Evaluation auf den Umgang mit den Aufgaben ab. Eine Diskussion dieser Ergebnisse findet sich im Kapitel *Zum Bearbeiten der Module und Aufgaben* ab Seite 133, die Auswertung im Kapitel *Zu webbasierten Lernumgebungen* ab Seite 144.

⁷¹ Ich nutze hier das Lernmanagement-System ILIAS. Weitere Informationen finden sich unter ILIAS open source. URL: www.ilias.de – Zuletzt besucht am 01.01.2007.

4. Unterrichtsentwürfe zur Graphentheorie

In diesem Kapitel werden die Unterrichtsentwürfe zur Graphentheorie vorgestellt. Die Durchführung und die Evaluation der Stunden und deren Interpretation folgt im Kapitel *Praktische Umsetzung der Unterrichtsentwürfe* ab Seite 113, im Kapitel *Ergebnisse der Evaluation* ab Seite 131 und im Kapitel *Auswertung der Unterrichtseinheiten* ab Seite 141. Bei den Unterrichtsstunden handelt es sich um 5 Doppelstunden über jeweils 90 Minuten. Die Themen, die bearbeitet werden, erstrecken sich von einem Einstieg in die Graphentheorie und den Eulergraphen über die Suche nach kürzesten Wegen bis hin zu drei Anwendungen der Graphentheorie. Die fachlichen Inhalte dieser Stunden basieren alle auf den Ausführungen im Kapitel *Mathematische Grundlagen der Graphentheorie* ab Seite 1.

Als Ziellerngruppe wurden SuS aus der gymnasialen Oberstufe gewählt. Vor allem die Anwendungen aus Kapitel *Anwendungen der Graphentheorie* ab Seite 24 erfordern Voraussetzungen im kognitiven Bereich, die einer solchen Lerngruppe zugeschrieben werden können. Ebenso erfordern meine Entwürfe zu den kürzesten Wegen für die Erfassung des Begriffs „Algorithmus“ diese kognitiven Fähigkeiten.

Die Erarbeitung der Entwürfe erfolgte aufgrund eigener Ideen, wobei an einigen Stellen auf vorhandene Entwürfe zurückgegriffen wurde. Die Quellen wurden an den entsprechenden Stellen angegeben und finden sich auch in der Übersicht über die Graphentheorie in der Schule im Kapitel *Graphentheorie im didaktischen Diskurs* ab Seite 41. Die eigenen Ideen finden sich vor allem in den Arbeitsblättern und in den ILIAS-Modulen der fünften Stunde wieder.

Bei der Auswahl der Aufgaben habe ich darauf Wert gelegt, auch bei Aufgaben, die zur Vertiefung oder Wiederholung des Stoffes dienen, einen SuS-gerechten und für SuS interessanten Hintergrund zu wählen. Ebenso lag mein Interesse darin, einen umfangreichen Einstieg in die Graphentheorie zu bieten und das Interesse der SuS zu

4. Unterrichtsentwürfe zur Graphentheorie

wecken. Auch mittels breitgefächerter Sozialformen, von Gruppenarbeit über Partner- und Einzelarbeit hin zu Vorträgen der Lehrkraft, soll das Interesse der SuS geweckt werden.

5 Einen Überblick über die Punkte, die die Beschreibung einer Unterrichtsstunde ausmachen, gibt die folgende Liste.

Zusammenfassung Dieser Punkt gibt einen kurzen Überblick über die Stunde und ihren Inhalt sowie ihre Ziele.

Organisatorisches Hier werden kurz die nötigen Vorbereitungen für die Stunde erläutert.

10 **Voraussetzungen** Unter diesem Punkt verstehe ich die Voraussetzungen der SuS in fachlicher Hinsicht für eine erfolgreiche Durchführung der Stunde. Hier kann auch entnommen werden, ob der Unterrichtsentwurf losgelöst von dieser Einheit, etwa als Vertretungs- oder Überbrückungsstunde, genutzt werden kann.

15 **Fachdidaktische Analyse und Reduktion** Dieser Abschnitt verweist auf den fachlich-mathematischen Inhalt des Kapitels 1 in der Stunde. Es wird beschrieben, welcher Stoff vermittelt wird und welche Vereinfachungen vorgenommen wurden. Dabei werden auch die fachlichen Inhalte der Aufgaben ausführlich erläutert und Lösungsvorschläge präsentiert. Da die Aufgabenstellungen hier nicht wiederholt werden, sondern nur auf die entsprechenden Aufgaben verwiesen wird,
20 empfiehlt sich eine parallele Lektüre der Arbeitsblätter in Anhang A ab Seite 151.

Methodische Überlegungen Die Methodik beschreibt die Umsetzung des Inhalts. Dabei wird vor allem auf die Art und Formulierung der Aufgaben und die Lernformen eingegangen. Da ich kein eigenes Kapitel zu Unterrichtsmethoden geschrieben habe, wird an den nötigen Stellen auf die Unterrichtsmethoden Bezug
25 genommen. Hier wird nicht der zeitliche Ablauf beschrieben, dazu dient der Verlaufsplan. Am Ende der methodischen Überlegungen führe ich kurz die Kompetenzen auf, die die SuS in dieser Stunde erlangen.

Verlaufsplan Der Verlaufsplan gibt einen tabellarischen Überblick über die Stunde. Dabei wird über den Zeitverlauf, die inhaltlichen Aspekte und die Aktivitäten
30 der SuS informiert. Ebenso werden die Sozialformen, das Material und die verwendeten Medien aufgelistet.

Aufgabenblätter Die Aufgabenblätter finden sich im Anhang A dieser Arbeit. Da jedes Arbeitsblatt einen eindeutigen Titel trägt, ist eine schnelle Zuordnung der

4.1. Einstieg und Grundlegung der Begriffe

Arbeitsblätter möglich. Ebenso sind sie in der Reihenfolge der Ausgabe geordnet.

Die Beschreibung der Unterrichtsstunden setzt die umfassende Kenntnis des Kapitels Kapitel *Mathematische Grundlagen der Graphentheorie* ab Seite 1 voraus. Die Lösungsvorschläge zu den Aufgaben werden nicht im Einzelnen vorgerechnet, sondern lediglich das Ergebnis präsentiert. Der Weg zu diesen Ergebnissen sollte nach Studium des Kapitels 1 leicht nachvollziehbar sein.

4.1. Einstieg und Grundlegung der Begriffe

4.1.1. Zusammenfassung

Die Einführungsstunde in die Graphentheorie dient der Grundlegung zentraler Begriffe in der Graphentheorie. Dazu gehören vor allem die Begriffe „Graph“, „Knoten“ und „Kante“.

Die Einführung wird durch eine zeitintensive Aufgabe dominiert, die den SuS hilft, die Struktur von Graphen zu erfassen. Bei dieser Aufgabe handelt es sich um einen Abhängigkeitsbaum von Ereignissen und Aufgaben in einem Computerspiel. Die Grundlagen werden durch zwei Vertiefungsaufgaben für alle SuS und einer kniffligeren Aufgabe aus der Unterhaltungsmathematik für stärkere SuS gefestigt.

Die Aufgaben dieser Stunde wurden gewählt, um einen interessanten Einstieg in die Graphentheorie zu ermöglichen und die notwendigen Grundlagen für die weiteren Stunden zu schaffen.

4.1.2. Vorbereitungen

Die Vorbereitungen auf diese Stunde reduzieren sich auf die ausreichende Kopie der drei Arbeitsblätter *Einstiegsaufgabe zur Graphentheorie*⁷², *Wiederholung der Begriff und Aufgaben zur Vertiefung der Graphentheorie*⁷³ und *Der Bauer mit dem Wolf, dem Schaf und dem Kohlkopf*⁷⁴.

⁷² Vgl. Seite 152.

⁷³ Vgl. Seite 153.

⁷⁴ Vgl. Seite 154.

4.1.3. Voraussetzungen

Die erste Stunde dient zur Grundsetzung der zentralen Definitionen der Graphentheorie. In diesem Sinne sind keine Voraussetzungen für die Stunde nötig. Vielmehr ist diese Stunde Voraussetzung für alle nachfolgenden Stunden dieser Unterrichtseinheit.

4.1.4. Fachdidaktische Analyse und Reduktion

Der fachliche Inhalt der ersten Stunde reduziert sich auf die Definitionen der Begriffe „Graph“, „Knoten“, „Kanten“, „inzident“, „kreisfrei“, „zusammenhängend“ und „Weg“. Dabei stehen vor allem Beispiele und der Umgang mit diesen Begriffen im Vordergrund. Dies wird durch Aufgaben erreicht, die nach den entsprechenden Begriffen in einem Graphen fragen. Zudem wird den SuS ein Blatt ausgeteilt, auf dem die Begriffe erläutert sind.

Ebenfalls im Vordergrund steht hier die Modellierung von Problemen. Daher zielen die Lösungen der Aufgaben zunächst auf das Erstellen eines Graphen. Im zweiten Schritt werden einfache Aufgaben angewendet, die dem Verständnis der Modellierung dienen.

Das Aufgabenblatt *Einstiegsaufgabe zur Graphentheorie* enthält eine Beschreibung des Levels, welches auf seine Spielbarkeit überprüft werden soll. Die Aufgaben sollen die SuS dazu anleiten, das Problem zu modellieren und anhand der Modellierung die Lösbarkeit zu entscheiden.

Die erste Aufgabe fordert die SuS auf, zunächst einen Abhängigkeitsgraphen für die Aufgaben des Levels zu zeichnen. Die Lösungsstrategie ist, dass jede Aufgabe des Levels durch einen Knoten modelliert wird. Zwischen diesen Knoten gibt es genau dann eine Kante, wenn ein Knoten Voraussetzung für den anderen Knoten ist. Um diese Abhängigkeit vollständig darzustellen, handelt es sich um gerichtete Kanten, deren Anfangsknoten derjenige ist, welcher Voraussetzung für den Endknoten ist. Der Knoten „Start“ repräsentiert die Ausgangssituation des Levels. Die weiteren Knoten sind entsprechend der Nummerierung in der Aufgabenstellung benannt. Die Abbildung 4.1 auf der gegenüberliegenden Seite zeigt eine Umsetzung dieser Strategie. Bei dieser Abbildung ist zu beachten, dass schon die Lösungen für die nächsten beiden Aufgaben mit eingezeichnet sind.

4.1. Einstieg und Grundlegung der Begriffe

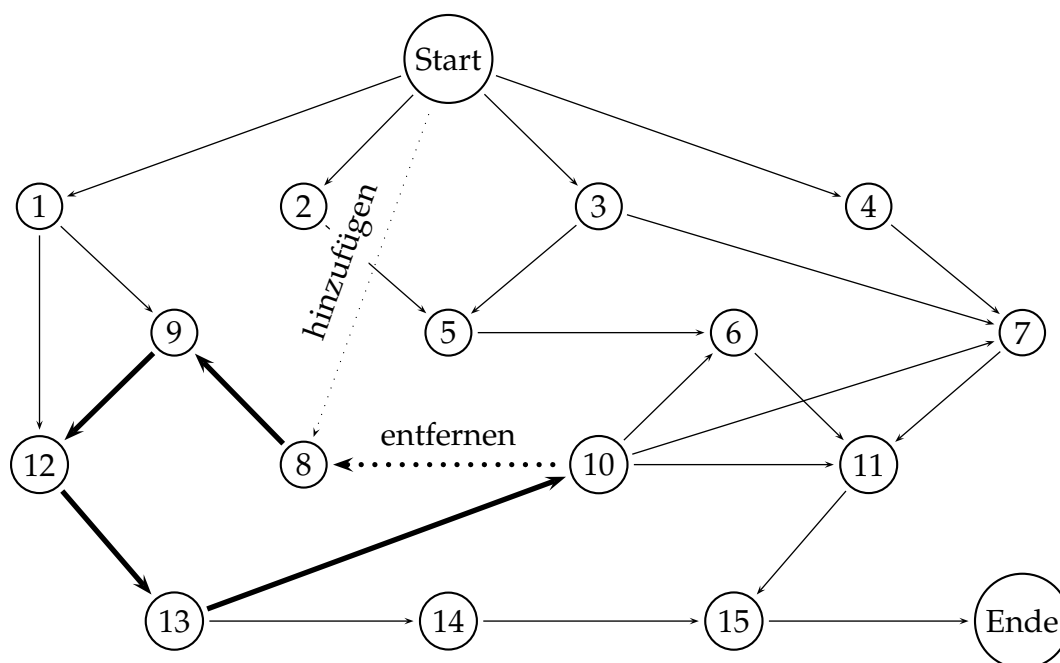


Abbildung 4.1.: *Einstiegsaufgabe zur Graphentheorie*: Lösungsvorschlag für die Aufgaben 1, 2 und 3.

Die Aufgabe 2 des Aufgabenblattes fragt nach der Lösbarkeit des Spiels. Unlösbar ist das Spiel dann, wenn ein Kreis in den Abhängigkeiten gefunden werden kann. Unsere Aufgabe besitzt genau einen Kreis, der in der Abbildung 4.1 mit dick gezeichneten Linien hervorgehoben wurde.

In der dritten Aufgabe sollen die SuS die Abhängigkeiten nun so abändern, dass das Spiel lösbar ist. Dies kann durch das Entfernen einer Kante erreicht werden, mit dem der Kreis durchbrochen wird. Es eignet sich die Kante $(10,8)$, auch aus kontextuellen Gründen. Allerdings erfordert dies die Aufnahme der Kante $(\text{Start},8)$, da sonst Knoten 8 keine Voraussetzung hat und das Modell somit nicht mehr konsistent ist. Diese Veränderungen werden in der Abbildung 4.1 durch die gestrichelten Kanten verdeutlicht.

Das Aufgabenblatt *Wiederholung der Begriff und Aufgaben zur Vertiefung der Graphentheorie* wiederholt zunächst die bisher bekannten Begriffe: „Graph“, „Kanten“ und „Knoten“, „Richtung“, „Weg“ und „Kreis“. Die Definitionen wurden in leicht verständlicher Sprache geschrieben und entsprechen nicht den formalen Definitionen aus Kapitel 1.

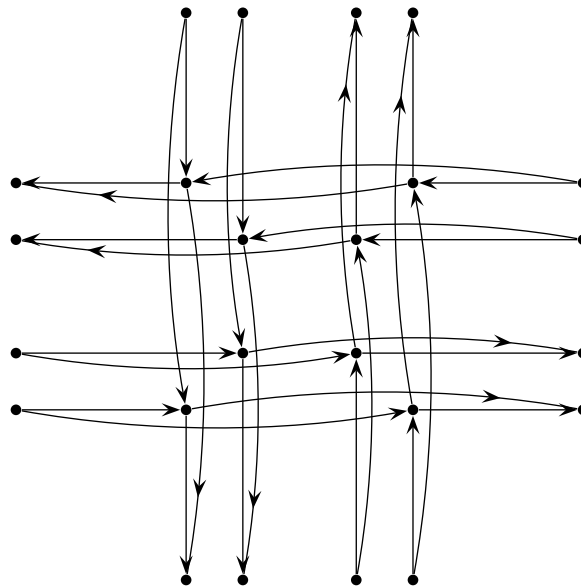


Abbildung 4.2.: *Aufgaben zur Vertiefung der Graphentheorie*: Aufgabenblock 1: Lösung zur Aufgabe 1.

Die formalen Definitionen würden einen Verlust der Einfachheit für die SuS nachsichziehen, der nicht erwünscht ist.

Der Abschnitt *Aufgaben zur Vertiefung der Graphentheorie* besteht aus zwei Aufgabenblöcken mit insgesamt 5 Aufgaben.⁷⁵ Mit diesen Aufgaben sollen die SuS die neuen Begriffe vertiefen und anwenden. Zudem wird wieder die Modellierung geübt.

Der erste Aufgabenblock befasst sich mit der Modellierung von einer Straßenkreuzung mit zwei vierspurigen Straßen und allen Abbiegemöglichkeiten. Die erste Aufgabe fordert einen entsprechenden Graphen. Die Abbildung 4.2 zeigt eine mögliche Lösung. Dabei steht vor allem der gerichtete Graph im Vordergrund. Ein ungerichteter Graph würde das Fahren auf der falschen Spur erlauben.

Die Antwort auf die Frage nach einer Wendemöglichkeit auf der Kreuzung hängt von der Modellierung ab. Wenn im Graphen keine U-Turns berücksichtigt wurden, so sollte es keine Wendemöglichkeit geben. Wenn es doch der Fall ist, muss der Graph auf seine Richtigkeit überprüft werden. Der Graph nach Abbildung 4.2 besitzt keine Wendemöglichkeit.

⁷⁵Die Aufgaben wurden BRIGITTE LUTZ-WESTPHAL: *Wie komme ich optimal zum Ziel?*, S. 60 entnommen und angepasst.

4.1. Einstieg und Grundlegung der Begriffe

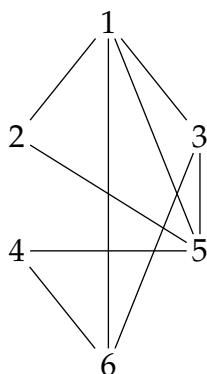


Abbildung 4.3.: Aufgaben zur Vertiefung der Graphentheorie: Aufgabenblock 2: Lösung zur Aufgabe 1.

Der zweite Aufgabenblock befasst sich mit einem U-Bahn-Liniennetz. Die erste Aufgabe fordert einen Graphen, der die Umsteigemöglichkeiten der einzelnen U-Bahn-Linien beschreibt. In diesem Graphen gibt es für jede U-Bahn-Linie einen Knoten. Eine Kante zwischen zwei Knoten existiert dann, wenn es eine Umsteigemöglichkeit von der einen U-Bahn-Linie zur anderen gibt. Die Abbildung 4.3 zeigt eine Lösung. 5

Die zweite Aufgabe fragt nach den Modellierungen der Knoten im Ausgangsgraphen und im Graphen nach Aufgabe 1. Im Ausgangsgraphen modellieren die Knoten die einzelnen Haltestellen, an denen ein Fahrgast ein- und aussteigen kann. Der Graph entspricht dem Aussehen des Streckennetzes auf einer Landkarte. Im Graphen nach Aufgabe 1 modellieren die Knoten eine gesamte Linie. Eine Entsprechung auf einer Landkarte gibt es für diesen Graphen nicht. Diese Unterscheidung wird auch in der Bezeichnung der Knoten deutlich. Im Ausgangsgraphen haben die Knoten keine Bezeichnung, da die Namen der Haltestellen nicht bekannt sind. Dafür wurden verschiedene Wege im Graphen mit Nummern versehen. Diese Nummern tauchen nun wieder in den Knoten des Graphen nach Aufgabe 1 auf. Die Bezeichnungen sind in der jeweiligen Modellierung äquivalent. 10
15

Die dritte Aufgabe fragt nach den Modellierungen der Kanten bzw. der Wege im Ausgangsgraphen und im Graphen nach Aufgabe 1. Im Ausgangsgraphen bedeutet ein Weg die Reihenfolge von Haltestellen, die ein Fahrgast zwischen dem Anfangsknoten und dem Endknoten des Weges besucht. Ein Weg im Graphen nach Aufgabe 1 findet seine Entsprechung in der Reihenfolge der U-Bahn-Linien mit denen ein Fahrgast fährt, wenn er in die Linie des Anfangsknotens einsteigt und aus der Linie des Endknotens wieder aussteigt. Der Unterschied besteht nun darin, dass man im ersten 20

4. Unterrichtsentwürfe zur Graphentheorie

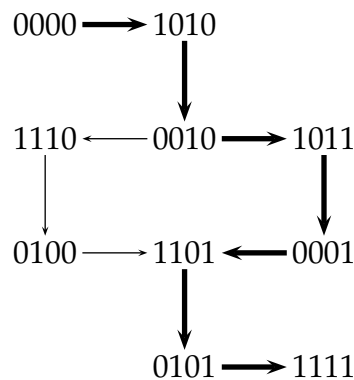


Abbildung 4.4.: *Der Bauer mit dem Wolf, dem Schaf und dem Kohlkopf*: Lösungen für die Aufgaben 1 und 2.

Graphen nicht erkennen kann, wann man umsteigen muss, während im Graphen nach Aufgabe 1 nicht erkennbar ist, welche Haltestellen man besucht.

Das letzte Aufgabenblatt *Der Bauer mit dem Wolf, dem Schaf und dem Kohlkopf* beschäftigt sich mit einem bekannten Rätsel aus der Unterhaltungsmathematik. Dabei handelt es sich um den Bauern, der mit einem Wolf, einem Kohlkopf und einem Schaf einen Fluss überqueren muss. Der Bauer muss verschiedene Bedingungen berücksichtigen, die im Aufgabentext formuliert sind. Die Lösung dieser Aufgabe, vor allem die Modellierung ist recht anspruchsvoll, so dass diese Aufgabe für stärkere SuS gedacht ist. Voraussichtlich muss die Lehrkraft auch für die stärkeren SuS Tipps geben.

- Die erste Aufgabe fordert eine Modellierung des Problems. Dazu werden zunächst alle möglichen Zustände betrachtet. Diese möglichen Zustände formuliert man in einer vierstelligen Binärzahl. Die erste Stelle dieser Zahl zeigt die Position des Bauern. Bei 0 befindet sich der Bauer auf der ursprünglichen Seite des Flusses, bei 1 auf der Zielseite. Ebenso steht die zweite Stelle für den Wolf, die dritte für das Schaf und die vierte für den Kohlkopf. Von diesen möglichen Zuständen existieren 10, von denen jeder durch einen Knoten in dem Graphen repräsentiert wird. Eine Kante zwischen zwei Knoten existiert dann, wenn beide Zustände aufeinander folgen können. Dabei werden wieder gerichtete Graphen verwendet.

Die Abbildung 4.4 zeigt eine mögliche Lösung der Modellierung samt einem Weg durch diesen Graphen vom Knoten 0000 zum Knoten 1111. Damit ist die Aufgabe 2 gelöst.

4.1. Einstieg und Grundlegung der Begriffe

4.1.5. Methodische Überlegungen

Nach dem Austeilen des ersten Aufgabenblattes soll jeder SuS die Aufgabenstellung lesen. Eventuelle Fragen werden zunächst im Plenum und erst danach von der Lehrkraft geklärt werden. Während und nach dem Lesen sollen die SuS sich Gedanken über eine mögliche Lösungsstrategie für die Aufgaben 1 und 2 machen und notieren. 5

Nach dem Lesen und Formulieren der ersten Gedanken werden Zweiergruppen gebildet. Je nach Sitzordnung oder Besonderheiten der Lerngruppe können die Zweiergruppen gelost, vorgegeben oder durch die Sitzordnung bestimmt werden. Es empfehlen sich aufgrund der Zeit die letzten beiden Vorschläge. Während dieser ersten Gruppenphase sollen beide Teilnehmer einer Gruppe sich gegenseitig ihre Lösungsgedanken vorstellen und Gemeinsamkeiten und Unterschiede feststellen. Wenn noch Zeit übrig ist, soll die Gruppe eine gemeinsame Strategie entwickeln. Die SuS sollen nicht primär herausfinden, welche der beiden Strategien am Effizientesten ist, schneller zu einer Lösung findet oder falsch ist. Das Ziel ist es, die Lösungsgedanken des Gegenübers zu verstehen und miteinander über diese Gedanken zu reden ohne den Anspruch des Besseren. Sicherlich wird sich am Ende der Gruppenarbeit herausstellen, welche Strategie überzeugender ist. Dies widerspricht aber nicht dem Ziel, dass die SuS miteinander über ihre Lösungsgedanken diskutieren. Für die erste Gruppenarbeitsphase werden mindestens 10 Minuten eingeplant. Dies kann auf bis zu 15 Minuten ausgedehnt werden, je nach Größe der Lerngruppe und Bedarf. 10
15
20

Im nächsten Schritt werden jeweils zwei Zweiergruppen zu einer Vierergruppe zusammengelegt. In den Vierergruppen sollen die SuS ebenfalls ihre Gedanken austauschen und sie miteinander verknüpfen. Auch hier werden 10 – 15 Minuten veranschlagt. 25

Für einen Einstieg in die Gruppenarbeit und für das Erlangen der formulierten Ziele sollten die Gruppen nicht mehr als vier SuS umfassen. Die Gefahr, dass einzelne SuS nicht oder wenig beachtet werden, steigt mit der Größe der Gruppe. Bei 2 mal 2 Teilnehmern ist die Gefahr, dass ein SuS wenig beachtet wird, sehr gering; in einer Zweiergruppe wird jeder beachtet. Damit wird ebenfalls eine positive Erfahrung der Gruppenarbeit von den SuS gemacht. 30

An Ergebnissen erwarte ich eine relativ große Bandbreite. Beginnend beim Ausprobieren von verschiedenen Spielverläufen, also der Brute-Force-Methode, über ein Un-

4. Unterrichtsentwürfe zur Graphentheorie

tereinanderschreiben von Abhängigkeiten⁷⁶ bis hin zu ungerichteten und gerichteten Graphen sind Lösungen vorstellbar.

Richtig ist ein Lösungsweg dann, wenn er den richtigen Grund der Unlösbarkeit bringt und der Abhängigkeitskreis gefunden wurde. An dieser Stelle wird ein Graph als Lösung preferiert, da er die Abhängigkeiten übersichtlich darstellt, die Modellierung klar ist und damit die Bedeutung des Graphen schnell erfasst werden kann. Auch die Probleme in den Abhängigkeiten können schnell erfasst und Anderen erläutert werden.

Nach der Gruppenarbeitsphase präsentieren zwei oder drei Gruppen nacheinander im Plenum ihre Lösungsstrategien. Auch hier steht das Verständnis der anderen Strategien im Vordergrund. Hinzu kommt jetzt die formulierte Kritik an den Strategien. Nachdem die SuS ihre eigenen Strategien entwickelt haben, sollte es ihnen möglich sein, die Stärken und Schwächen von anderen Strategien im Vergleich zu ihren eigenen zu erkennen.

Die Gruppen sollen sich freiwillig melden und ihre Strategien vorstellen. Für den Fall, dass sich nicht genügend Gruppen freiwillig melden, wurden von der Lehrkraft zwei Gruppen während der Erarbeitungsphase vorgemerkt. Die Anzahl der Gruppen richtet sich nach der verbleibenden Zeit, mindestens sollten es jedoch zwei sein, um einen Vergleich zwischen den Lösungen zu ermöglichen.

Wenn eine (fast) richtige Lösung präsentiert wurde, wird die Präsentation nicht abgebrochen. Vielmehr ist es die Aufgabe der nachfolgenden Gruppen, ihre eigenen Strategien mit Blick auf die vorherigen Präsentationen zu kritisieren.

Wenn keine richtige Lösung präsentiert wird, ist es die Aufgabe der Lehrkraft mit gezielten Fragen auf die Probleme der vorgestellten Lösungen hinzuweisen und von den SuS Verbesserungsvorschläge zu erfragen.

⁷⁶ Den Anfang machen die Aufgaben, die man ohne Voraussetzungen erfüllen kann. Darunter werden die Aufgaben eingetragen, die nur mit diesen Ersten erfüllbar sind, usw. Es wird also nur dann eine Aufgabe aufgenommen, wenn alle Voraussetzungen vorher schon genannt wurden. Sollten keine Aufnahmen mehr möglich und noch nicht alle Aufgaben aufgenommen sein, so ist das Level nicht lösbar.

Es handelt sich hierbei um eine kontrollierte Form des Ausprobierens von verschiedenen Lösungswegen.

4.1. Einstieg und Grundlegung der Begriffe

Im nächsten Schritt werden die neuen Erkenntnisse nun gefestigt. Dazu dient das Aufgabenblatt *Wiederholung der Begriffe und Aufgaben zur Vertiefung der Graphentheorie*.

Die Wiederholung der Begriffe dient den SuS als Nachschlagewerk für die folgenden Aufgaben und Stunden. Dabei werden die Definitionen kurz von den SuS vorgelesen und mit Beispielen erläutert.

Danach werden die Definitionen mit Hilfe der nachfolgenden Aufgaben angewendet. Um jeden SuS gleichmäßig zu fördern und den Lernerfolg jedes SuS sicher zu stellen, erfolgt die Bearbeitung des Aufgabenblattes in Einzelarbeit. An diesem Punkt geht es auch darum, die schwächeren SuS zu unterstützen und den stärkeren SuS zusätzliche Aufgaben zu geben.⁷⁷

Das Hauptaugenmerk der Erläuterungen liegt auf den nicht-mathematischen Formulierungen, so dass die SuS einen leichten Zugang dazu haben. Die Aufgaben wiederum haben ihren Schwerpunkt in der Modellierung und den Anwendungsmöglichkeiten der Erläuterungen. Die erste Aufgabe richtet sich vor allem an die Modellierung. Auch hier spielt die Entscheidung zu einem gerichteten Graphen eine wichtige Rolle. Die zweite Aufgabe setzt sich mehr mit den Definitionen auseinander, wobei die Teilaufgaben 2 und 3 ebenfalls die Modellierung befragt.

Nach Möglichkeit sollte den SuS nun Gelegenheit gegeben werden, in Ruhe und ohne Zeitdruck die Aufgaben zu lösen, das Gelernte zu verarbeiten und sich eigene Gedanken zu dem Thema zu machen.

Für die stärkeren SuS eignet sich das Aufgabenblatt *Der Bauer mit dem Schaf, dem Wolf und dem Kohlkopf*. Hier steht ein bekanntes Problem der Unterhaltungsmathematik im Mittelpunkt, dass die Meisten nicht systematisch lösen, sondern nur durch ausprobieren. Mittels der Graphentheorie wird eine systematische Analyse des Problems präsentiert, die alle Lösungen ermittelt.

Die SuS, die das vorangegangene Aufgabenblatt fertig bearbeitet haben, bekommen dieses Aufgabenblatt ausgeteilt. Es wird ihnen zunächst Zeit gegeben, sich mit dem Problem alleine auseinander zusetzen und verschiedene Versuche zur systematischen Lösung auszuprobieren. Nach 5 – 10 Minuten ohne Erfolg wird den SuS von der Lehrkraft der Tipp gegeben werden, sich die einzelnen Zustände oder Situationen beim

⁷⁷ Die entsprechenden Aufgaben folgen im nächsten Abschnitt.

4. Unterrichtsentwürfe zur Graphentheorie

Überqueren des Flusses vorzustellen und diese als Knoten in einem Graphen zu betrachten.⁷⁸ Nach weiteren 5 – 10 Minuten bekommen die SuS den Tipp, zwei Knoten dann miteinander zu verbinden, wenn der Übergang von einem Zustand zum nächsten durch das Übersetzen mit dem Boot, gegebenenfalls mit Passagier, möglich ist.

5 Durch diesen Tipp sollte die Lösung auf der Hand liegen. Wenn es mehrere SuS gibt, die diese Aufgaben bearbeiten, werden sie zur Zusammenarbeit aufgefordert, um gemeinsam eine Lösung zu finden. Diese wird dann durch die Lehrkraft kurz überprüft werden.

10 Den übrigen SuS wird dieses Aufgabenblatt nicht als Hausaufgabe gestellt, um sie nicht dafür zu bestrafen, dass andere SuS schneller waren als sie.

Folgende Kompetenzen erreichen die SuS in dieser Stunde.

- Inhaltskompetenzen: Die SuS ...

- ... kennen die Begriffe „Graph“, „Kanten“ und „Knoten“, „Richtung“, „Weg“ und „Kreis“ und wenden sie an.

15 ... stellen Abhängigkeiten als Graphen dar.

- ... modellieren Situationen als Zustände, erkennen die Übergänge zwischen den Zuständen und stellen sie als Graphen dar.

- ... modellieren Fahrspuren und den Wechsel zwischen ihnen als Graphen.

- Prozesskompetenzen: Die SuS ...

20 ... diskutieren und vergleichen ihre Lösungsideen und formulieren gemeinsam neue Lösungen.

- ... unterscheiden zwischen verschiedenen Modellen eines Problems.

⁷⁸ Mit der Betrachtung der Situationen als Zustände könnte man diese Aufgabe als Einführung in endliche Automaten im Informatikunterricht behandeln.

4.1.6. Verlaufsplan

Zeit	Inhalt	Lernaktivitäten	Material/Medien
0:00 – 0:05	Begrüßung		
0:05 – 0:15	Austeilen und Lesen des Aufgabenblattes, erste Ideen notieren		Aufgabenblatt <i>Einstiegsaufgabe zur Graphentheorie</i>
0:15 – 0:45	Gruppierung in Zweiergruppen, danach in Vierergruppen	SuS stellen sich gegenseitig ihre Lösungsideen vor. SuS stellen Unterschiede und Gemeinsamkeiten in ihren Ideen fest. SuS bilden gemeinsame Lösungsideen.	
0:45 – 1:00	Darstellung der Ergebnisse von ausgewählten Gruppen	SuS präsentieren ihre Lösungen. SuS versuchen, Fehler und Verbesserungen zu formulieren. SuS vergleichen verschiedene Lösungen.	

Zeit	Inhalt	Lernaktivitäten	Material/Medien
1:00 – 1:30	Wiederholung der Begriffe und Üben von Modellierung	SuS wiederholen die neuen Begriffe. SuS interpretieren und vergleichen ihre Modellierungen. SuS lösen eine Knobelaufgabe systematisch.	Aufgabenblatt <i>Wiederholung der Begriff und Aufgaben zur Vertiefung der Graphentheorie</i> und Aufgabenblatt <i>Der Bauer mit dem Schaf, dem Wolf und dem Kohlkopf</i>

4.2. Eulergraphen und Briefträger

4.2.1. Zusammenfassung

Die zweite Stunde dieser Unterrichtsreihe beschäftigt sich mit dem Thema Eulergraphen und damit mit den Ursprüngen der Graphentheorie. Der Einstieg erfolgt über das Problem der Königsberger Brücken von Leonard Euler aus dem Jahr 1736. Weiterhin beschäftigt sich diese Stunde mit der Hierholzer-Methode und mit dem Begriff „Grad eines Knotens“.

5

Das Thema Eulergraphen wurde ausgewählt, da das Problem der Eulergraphen aufgrund der Kinderzeichnung „Das Haus vom Nikolaus“ den SuS bekannt ist. An diesem Thema sollen die SuS einen Einblick in die Vorgehensweise der Graphentheorie zur Problemlösung bekommen.

10

4.2.2. Vorbereitungen

Diese Stunde benötigt an Vorbereitung eine ausreichende Anzahl an Kopien der beiden Aufgabenblätter *Das Königsberger Brückenproblem*⁷⁹ und *Neue Begriffe und Vertiefung zu Eulergraphen*⁸⁰. Ebenso wird verschiedenfarbige Kreide benötigt.

15

4.2.3. Voraussetzungen

Die Voraussetzungen beschränken sich in dieser Stunde auf Kenntnisse der Begriffe „Graph“, „Knoten“ und „Kante“, die mit der Stunde *Einführung und Grundlegung der Begriffe* vermittelt werden.

4.2.4. Fachdidaktische Analyse und Reduktion

20

Für den Begriff des Eulergraphen bzw. das Erkennen eines solchen wird der Satz 2 auf der Seite 12 benötigt. Der Beweis zu diesem Satz besteht aus zwei Teilen, aus der

⁷⁹ Vgl. Seite 155.

⁸⁰ Vgl. Seite 156.

4. Unterrichtsentwürfe zur Graphentheorie

Hin- und der Rückrichtung der Äquivalenz. Im Beweis des Satzes wurde für die Rückrichtung das Lemma 1 auf der Seite 11 genutzt, in dem die Aussage allgemeiner bewiesen wurde. Auf diesem Lemma baut auch der Hierholzer-Algorithmus auf. Diese Zweiteilung ist in der Stundenkonstruktion ebenfalls angelegt. Zunächst erarbeiten sich die SuS die Hinrichtung, danach erfolgt die Rückrichtung durch einen Vortrag der Lehrkraft. Abschließend steht die Anwendung der Hierholzermethode im Blickpunkt.

Bei dem Aufgabenblatt *Das Königsberger Brückenproblem* stehen zunächst keine fachlichen Inhalte im Vordergrund, sondern die Heranbringung an das Thema und die ersten Gehversuche in diesem Thema. Dabei leiten die Aufgaben die SuS an, das Königsberger Brückenproblem zu lösen und eine Vermutung über eine Eigenschaft von Eulergraphen zu formulieren, die dann verifiziert wird.

Für den Graphen, den die Aufgabe 1 fordert, ist es unerheblich, ob es sich um einen einfachen Graphen oder einen Multigraphen (mit Mehrfachkanten) handelt. Eine mögliche Lösung findet sich in der Abbildung 4.5. Hier wird ein einfacher Graph verwendet.

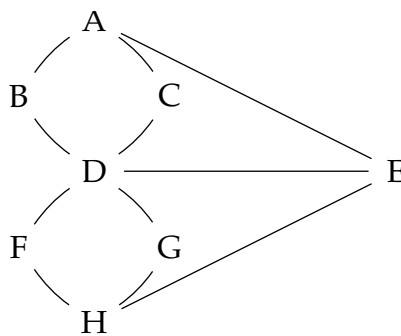


Abbildung 4.5.: *Das Königsberger Brückenproblem*: Lösungsvorschlag zur Aufgabe 1.

Die zweite Aufgabe muss nach Ausprobieren mit nein beantwortet werden, so dass die Aufgabe 3 beantwortet wird. Dazu zeigt Abbildung 4.6 auf der gegenüberliegenden Seite zwei Lösungsvorschläge, einer mit neuen Brücken und einer, in dem alte Brücken abgerissen wurden. Aus Kapitel 1.2 weiß man, dass alle Knoten einen geraden Grad haben müssen.

In der vierten Aufgabe stellen die SuS die Unterschiede in den Graden der einzelnen Knoten fest. Diese Vermutung wird in der Aufgabe 5 an verschiedenen anderen Figu-

4.2. Eulergraphen und Briefträger

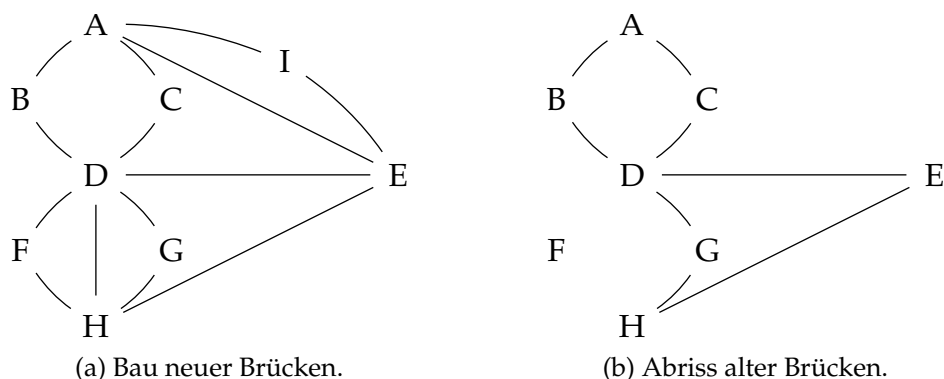


Abbildung 4.6.: Das Königsberger Brückenproblem: Lösungsvorschlag zur Aufgabe 3.

ren überprüft. Hier können z.B. das Pentagramm, der Davidstern, das Haus vom Nikolaus⁸¹ oder Varianten davon genannt werden. Das Pentagramm ist ein ungerichteter Graph mit 5 Knoten, indem jeder Knoten genau zwei Nachbarn hat. Bei dem Davidstern ist zu beachten, dass er aus zwei Kreisen besteht, die nicht zusammenhängend sind. Hier müssen die Schnittpunkte als zusätzliche Knoten genutzt werden, damit der Graph zusammenhängend ist. 5

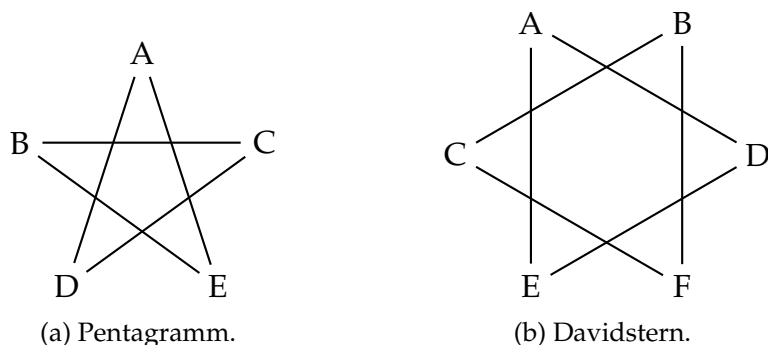


Abbildung 4.7.: Das Königsberger Brückenproblem: Lösungsvorschlag zur Aufgabe 5.

Die Aufgabe 6 fordert die SuS auf, einen Beweis zu führen. Dabei reicht es zu zeigen, dass jeder Knoten in einem Eulergraph einen geraden Grad hat. Die Umkehrung wird zunächst außer Acht gelassen.

Nach dem ersten Aufgabenblatt folgt ein Vortrag durch die Lehrkraft über den noch nicht bewiesenen Teil des Satzes 2 auf der Seite 12 bzw. über die Aussage des Lem- 10

⁸¹ Mathematisch passt das Haus vom Nikolaus an dieser Stelle nicht, doch dazu Weiteres bei den methodischen Überlegungen.

4. Unterrichtsentwürfe zur Graphentheorie

mas 1 auf der Seite 11 und den daraus resultierenden Hierholzer-Algorithmus. Im Mittelpunkt steht dabei weniger die Aussage, dass ein Eulergraph in mehrere Kreise aufgeteilt werden kann, sondern der Hierholzer-Algorithmus.

Das zweite Aufgabenblatt dieser Stunde trägt den Namen *Neue Begriffe und Vertiefung zu Eulergraphen*. Dieses Aufgabenblatt dient zum Einen zur Festigung der Begriffe und zur Anwendung des Hierholzer-Algorithmus.

Die neuen Begriffe „Grad eines Knotens“, „Eulerkreis“ und der „Hierholzer-Algorithmus“ werden zunächst auf dem Aufgabenblatt schriftlich festgehalten.

Die *Vertiefung zu Eulergraphen* besteht aus 4 Aufgaben zum Problem eines Briefträgers in Göttingen, der eine Route durch sein neues Gebiet finden soll. Die Bedingung an die Route lautet, keinen Weg umsonst zu laufen.⁸² Dies wird vor allem dadurch erreicht, dass Briefe in Straßen entweder auf einer Straßenseite oder auf beiden Seiten gleichzeitig ausgetragen werden.

Die erste Aufgabe befasst sich mit dem Problem der Stichstraßen, deren Endpunkte einen ungeraden Grad haben. Die Lösung besteht hierbei darin die Straßenseite jeweils als eine Kante aufzufassen. Ebenso besteht dieses Problem bei allen Kreuzungen mit einer ungeraden Anzahl von Straßen. Hier werden ebenfalls die Straßenseiten als einzelne Kanten aufgefasst. Dadurch ergibt sich nun ein Graph, deren Knoten alle einen geraden Grad haben.

In Aufgabe 2 und 3 wird zunächst ein entsprechender Graph gezeichnet und dann die Hierholzer-Methode angewandt. Die Abbildung 4.8 auf der gegenüberliegenden Seite zeigt eine mögliche Aufteilung der Kreise.⁸³

4.2.5. Methodische Überlegungen

Im ersten Abschnitt der Stunde bearbeiten die SuS in Partnerarbeit das Aufgabenblatt *Das Königsberger Brückenproblem*. Diese Struktur wird allerdings voraussichtlich während der Bearbeitung verlassen und es werden sich einige größere Lerngruppen fin-

⁸² Diese Aufgabe ist an das Chinese Postman Problem von Mei Ko Kwan aus dem Jahr 1962 angelehnt. Der Unterschied liegt darin, dass das Chinese Postman Problem auf gewichteten Graphen definiert ist, während es sich hier um ungewichtete Graphen handelt. Weitere Informationen zum Chinese Postman Problem finden sich z.B. in MANFRED NITZSCHE: Graphen für Einsteiger - Rund um das Haus vom Nikolaus, S. 91.

⁸³ Dabei wurde die kleine Straße zwischen der Bürgerstraße und dem Walkemühlenweg außer Acht gelassen, da sich hier kein Hauseingang befindet.

4.2. Eulergraphen und Briefträger

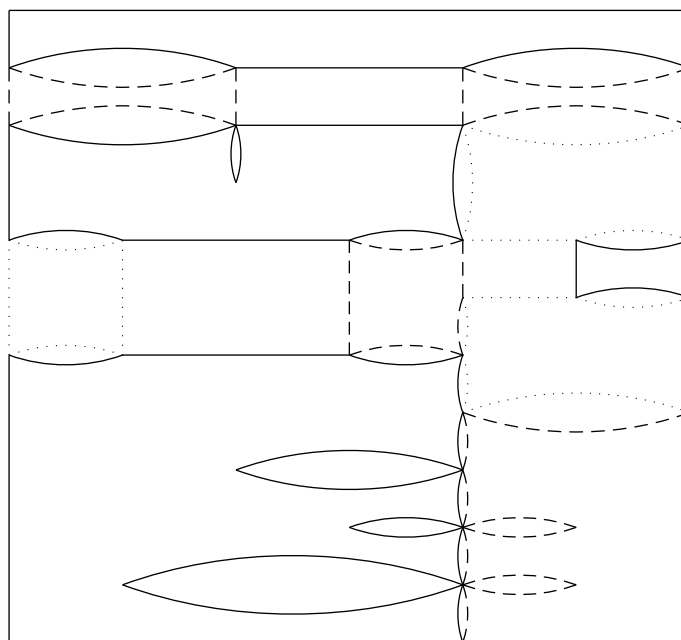


Abbildung 4.8.: *Neue Begriffe und Vertiefung zu Eulergraphen: Lösungsvorschlag zu Aufgabe 3.*

den. Diese werden sich dann wieder zu den Partnergruppen auflösen um das Problem dort weiter zu besprechen.

Das Aufgabenblatt *Das Königsberger Brückenproblem* beginnt mit der Aufgabe, einen entsprechenden Graphen für das Problem zu zeichnen. Damit werden die SuS aufgefordert, das Problem zu modellieren. Gleichzeitig wiederholen die SuS den Inhalt der letzten Stunde und können das dort Gelernte wieder anwenden.

Die Aufgabe 2 fordert die SuS auf, sich mit dem Problem nun intensiv auseinanderzusetzen und sich eine Lösung zu überlegen. Nach Probieren erfahren sie, dass es keine Lösung gibt. Diese Erfahrung sollen sie in der dritten Aufgabe dahin umsetzen, dass sie den modellierten Graphen so abändern, dass eine Lösung möglich ist. Die vierte Aufgabe fordert die SuS auf, eine Systematik in den Lösungen zu finden. Auf der einen Seite existiert der Ausgangsgraph ohne eine Eulertour, auf der anderen Seite existieren die Graphen nach Aufgabe 3 mit einer Eulertour. Anhand des Vergleiches dieser beiden Graphen wird einigen, nicht allen SuS der Unterschied auffallen. In diesem Moment wird die Kommunikation zwischen den SuS genutzt, damit alle SuS die Lösung erfahren. Dadurch wird es jedem SuS ermöglicht, in seinem eigenen Tempo die Eigenschaft von Eulergraphen nachzuvollziehen. Durch die Partnerarbeit wird gleichzeitig die Kommunikation über mathematische Probleme gefördert.

4. Unterrichtsentwürfe zur Graphentheorie

An diesem Punkt ist zu erwarten, dass die Partnerarbeit von den SuS kurzzeitig verlassen wird, um von anderen SuS die Lösung zu erfahren. Dieser Effekt ist solange wünschenswert, wie der Weg zurück zu den Partnern gefunden wird. Dieses Zurück muss unter Umständen von der Lehrkraft über eine Aufforderung initiiert werden.

5 Nur durch die Rückkehr zur Partnerarbeit wird auf der einen Seite gewährleistet, den Partner und seine Probleme zu achten und auf der anderen Seite die Möglichkeit erkannt, sich Hilfe bei Anderen zu besorgen und mit ihnen darüber zu diskutieren. Dabei darf allerdings nicht der Partner vernachlässigt werden und es muss über die entsprechenden Erkenntnisse informiert werden.

10 Die nächsten beiden Aufgaben 3 und 4 sollen die SuS dazu bringen, ihre Vermutung an weiteren Beispielen auszuprobieren und zu verifizieren und dann im Allgemeinen zu beweisen. Der Beweis soll in dieser Stunde nur soweit gehen, dass die SuS erkennen: Für eine Eulertour existiert in jedem Knoten für jede eingehende Kante eine ausgehende Kante. Diese Aussage kann durch die verschiedenen Beispiele unterstützt werden,
15 die oben genannt wurden. Im Falle des „Hauses vom Nikolaus“ kann die Lehrkraft die Zweiergruppe darauf hinweisen, dass es sich dabei nicht um eine geschlossene Eulertour handelt, und sie fragen, wie das Haus verändert werden müsste, bevor es die entsprechende Eigenschaft besitzt. Eine mögliche Veränderung wäre die Erweiterung des Hauses mit einem Keller.⁸⁴ Wenn die Gruppen keine Beispiele finden, so sollte die
20 Lehrkraft an dieser Stelle die eigenen einfließen lassen.

Nach der Bearbeitung dieser Aufgaben werden die Aufgaben 1 – 3 kurz von der Lehrkraft erläutert. Die richtigen Antworten sollten nun von jedem SuS schon erfahren worden sein. Für die Aufgabe 5 werden so viele Beispiele wie möglich samt Eulertour an der Tafel gesammelt. Die Sammlung der Beispiele kann als Zeitpuffer genutzt
25 werden.

Danach wird der SuS, der das letzte Beispiel vorgestellt hat, nach seiner Lösung von Aufgabe 4 gefragt. Diese soll er dann an den Beispielen zeigen und anschließend eine kurze Begründung für die Korrektheit geben. Diese Begründung kann dann von den SuS diskutiert werden mit dem Ziel, am Ende eine knappe und treffende Formulierung
30 zu finden, mit der die meisten SuS einverstanden sind. In dieser Diskussion spielt die Lehrkraft den Moderator, hält sich allerdings mit der Regulierung des Findungsprozesses zurück.

⁸⁴ Vgl. Seite 11.

4.2. Eulergraphen und Briefträger

Der mittlere Abschnitt der Stunde bildet ein Vortrag zum zweiten Teil des Beweises zum Satz 2 auf der Seite 12, der im Mittelpunkt dieser Stunde steht.

Die Lehrkraft erläutert zunächst kurz den Begriff „Grad eines Knoten“, um dieser zentralen Eigenschaft eines Knotens einen Namen zu geben. Die Beispiele, die sich noch an der Tafel befinden, können hier zur Verdeutlichung dienen. 5

Nach der Vorstellung des Begriffes „Grad eines Knoten“ argumentiert die Lehrkraft zunächst, dass die Formulierung der SuS vom vorherigen Abschnitt nicht vollständig ist. Es wurde zwar bisher betrachtet, dass in einem Eulergraph jede Ecke einen geraden Grad besitzt, allerdings fehlt die Umkehrung. Dazu formuliert die Lehrkraft zunächst die Umkehrung und geht dann darauf ein, dass Graphen mit Knoten geraden Grades in Kreise aufgeteilt werden können. Für die Frage des Warums muss je nach Lerngruppe entschieden werden. Bei einer stärkeren Gruppe kann der Beweis des Lemmas 1 auf der Seite 11 skizziert werden, eine schwächere Gruppe muss diese Behauptung mit dem Hinweis auf seine Komplexität annehmen. 10

Der weitere Schritt ist nun, diese Kreise miteinander zu verbinden, so dass sie sich in einem Zug zeichnen lassen. Dazu wird die Hierholzer-Methode angewendet, die die SuS verstehen und selbst anwenden sollen. Als Beispiele für den Hierholzer-Algorithmus eignen sich z.B. die Olympischen Ringe oder das Audi-Logo. Diese haben den Vorteil, dass sie aus den Kreisen bestehen, in die jeder Eulergraph zerfällt. Um die Hierholzer-Methode weiter zu verdeutlichen, eignen sich auch die Beispiele der Aufgabe 5 vom vorherigen Aufgabenblatt. Dabei sollte aber darauf geachtet werden, dass der Graph in mehr als einen Kreis aufgeteilt werden kann.⁸⁵ Um die einzelnen Kreise hervorzuheben wird bunte Kreide genutzt. 15 20

Die letzte Phase bildet das Aufgabenblatt *Neue Begriffe und Vertiefung zu Eulergraphen*. Die erste Hälfte dieses Aufgabenblattes soll den SuS zur Orientierung dienen und wird im Unterricht nicht weiter besprochen. 25

Die zweite Hälfte dient der Wiederholung von Eulergraphen und der Anwendung des Hierholzer-Algorithmus. Die drei dazugehörigen Aufgaben werden in Gruppen von drei bis vier SuS bearbeitet.

Die erste Aufgabe dient den SuS sich zunächst mit dem Problem und dem Kartenausschnitt vertraut zu machen. Auch können dabei einige unklare Fakten geklärt werden wie die schmale Verbindung zwischen Bürgerstraße und Walkemühlenweg oder 30

⁸⁵ Diese Forderung erfüllt z.B. das Pentagramm nicht.

4. Unterrichtsentwürfe zur Graphentheorie

die Verbindung vom Stegemühlenweg und der Lotzestraße.⁸⁶ Gleichzeitig hat diese Aufgabe auch eine mathematische Dimension. Hier wird die Erkenntnis des ersten Aufgabenblattes angewendet. Das Ziel ist es, allen Straßenkreuzungen einen geraden Grad zuzuordnen. Die zweite und dritte Aufgabe fordern nun die Modellierung des Problems durch Graphen und das Finden eines Eulerkreises mittels des Hierholzer-Algorithmus.

Da die Bearbeitung der ersten Aufgabe nicht eindeutig ist, fällt ein Vergleich der Lösungen der einzelnen Gruppen schwer. In diesem Fall stellen sich zwei Gruppen gegenseitig ihre Lösungen vor und verifizieren sich das Ergebnis gegenseitig. Dadurch wird die Möglichkeit der Ergebnisüberprüfung gewährleistet.

Folgende Kompetenzen erreichen die SuS in dieser Stunde.

- Inhaltskompetenzen: Die SuS ...

- ... kennen das Königsberger Brückenproblem und die Lösung des Problems.

- ... kennen den Hierholzer-Algorithmus und wenden ihn an.

- ... passen einen Graphen so an, dass er nur Knoten mit geradem Grad besitzt.

- ... finden einen kürzesten Weg für Briefträger.

- Prozesskompetenzen: Die SuS ...

- ... formulieren eigene Lösungen für ein Problem und passen ihre Lösungen an, wenn sie sich als falsch erwiesen haben.

- ... stellen sich ihre Lösungen vor und überprüfen sie gegenseitig.

⁸⁶In einem Göttinger Gymnasium sollte man zusätzlich mit Zeit rechnen, in der sich die SuS über dieses Gebiet austauschen, z.B. wer dort wohnt, welche Sportvereine dort ansässig sind, etc.

4.2.6. Verlaufsplan

Zeit	Inhalt	Lernaktivitäten	Material/Medien
0:00 – 0:05	Begrüßung		
0:05 – 0:35	Erarbeitung der Eigenschaften von Eulergraphen	SuS modellieren das Königsberger Brückenproblem. SuS erfahren die Nichtlösbarkeit eines Problems. SuS formulieren eine Vermutung über Eigenschaften von Eulergraphen. SuS begründen diese Formulierung.	Aufgabenblatt <i>Das Königsberger Brückenproblem</i>
0:35 – 0:45	Zusammentragen der Ergebnisse und Formulierung eines Beweises für Satz 2 durch die SuS	SuS diskutieren über ein mathematisches Problem. SuS lösen ein mathematisches Problem gemeinsam.	
0:45 – 1:00	Vortrag zum Hierholzer-Algorithmus	SuS erfahren etwas über den Hierholzer-Algorithmus. SuS lernen mathematische Beweisführung kennen.	
1:00 – 1:20	Vertiefung zu Eulergraphen und Hierholzermethode	SuS wenden den Hierholzer-Algorithmus an. SuS modellieren ein Problem.	Aufgabenblatt <i>Neue Begriffe und Vertiefung zu Eulergraphen</i>
1:20 – 1:30	Vergleich der Ergebnisse	SuS stellen sich ihre Ergebnisse vor. SuS prüfen gegenseitig ihre Ergebnisse auf Richtigkeit.	

4.3. Kürzeste Wege in ungewichteten Graphen

4.3.1. Zusammenfassung

Diese Stunde befasst sich mit einem Einstieg in die Thematik der kürzesten Wege. Dabei werden ungewichtete Graphen betrachtet, zu denen ein Algorithmus gesucht wird, der in diesen einen kürzesten Weg berechnet. Es wurde der Breitensuch-Algorithmus ausgewählt. Dieser Algorithmus wird von der Lehrkraft vorgegeben, die SuS finden allerdings die Grundidee des Algorithmus selbst. Im Vordergrund steht die Auseinandersetzung mit dem Begriff „Algorithmus“ und die Anwendung der Breitensuche.

Das Problem der kürzesten Wege tritt im Alltag häufig auf, z.B. bei Zugverbindungen oder in Navigationsgeräten. Oftmals erkennen wir es aber nicht als solches, sondern verlassen uns auf die Arbeit eines Computers und dessen Ergebnis. Mittels der Graphentheorie wird den SuS gezeigt, dass es sich hierbei um ein nicht-triviales Problem handelt, dessen Lösung einige Anstrengungen erfordert.

4.3.2. Vorbereitungen

Die Vorbereitung zu dieser Stunde besteht in der ausreichenden Kopie der beiden Aufgabenblätter *Einstieg zu kürzesten Wegen*⁸⁷ und *Vertiefung zum Breitensuch-Algorithmus*⁸⁸. Diese Stunde dient unter anderem als Vorbereitung auf die nächste Stunde.

4.3.3. Voraussetzungen

Die SuS sollten die Begriffe „Graph“, „Kante“, „Knoten“ und „Weg“ verstehen und nutzen. Es wird im Speziellen nicht davon ausgegangen, dass sie den Begriff „Algorithmus“ bereits kennen.

⁸⁷ Vgl. Seite 157.

⁸⁸ Vgl. Seite 158.

4.3. Kürzeste Wege in ungewichteten Graphen

4.3.4. Fachdidaktische Analyse und Reduktion

Der mathematische Inhalt der Stunde bezieht sich auf die Definition eines ungewichteten Graphen und des Breitensuch-Algorithmus. Obwohl mit der Breitensuche ein Baum der kürzesten Wege berechnet wird, fällt der Begriff „Baum“ an dieser Stelle nicht. Dieser würde den Inhalt der Stunde sprengen.

5

Das Aufgabenblatt *Einstieg zu kürzesten Wegen* eröffnet die Stunde. Das Ziel dieses Aufgabenblattes ist es, den SuS den Begriff Algorithmus näher zu bringen. Dazu wird mittels eines Computers eine Instanz präsentiert, die einen Algorithmus abarbeitet. Die Fragen auf diesem Blatt haben entsprechend weniger graphentheoretische Inhalte.

10

Die ersten beiden Aufgaben beschäftigen sich mit der Abbildung des Hamburger Nahverkehrsplanes. Für die Verbindung von der Haltestelle Landungsbrücken und der Haltestelle Kellinghusenstraße gibt es zwei Möglichkeiten: die Erste ist die direkte Verbindung mit der U3, die Zweite führt zunächst mit der S1 zur Haltestelle Jungfernstieg und von dort aus mit der U1 zur Haltestelle Kellinghusenstraße. Die erste Verbindung hat den Vorteil einer Direktverbindung, die zweite Verbindung besucht allerdings mit 5 Zwischenstationen eine Station weniger.

15

Es existieren weitere Verbindungen mit unterschiedlichen Begründungsmöglichkeiten zwischen den Haltestellen Barmbek und Berliner Tor und zwischen Schlump und Wandsbek-Gartenstadt. Bei der ersten Verbindung besteht der Unterschied in der Anzahl der Haltestellen gegen eine möglicherweise längere Fahrtzeit. Bei der zweiten Verbindung reichen die Begründungsmöglichkeiten von Direktverbindung bzw. weniger Umstiege zu weniger Haltestellen und einer möglicherweise geringeren Fahrtzeit.

20

Bei all diesen Verbindungen muss darauf geachtet werden, dass die Argumentation nicht lauten kann, dass eine Strecke auf der Abbildung länger ist als eine andere, da der Verkehrsplan nicht maßstabsgetreu ist.

25

Mit der Aufgabe 3 beginnt die Unterscheidung zwischen der Vorgehensweise eines Menschen und der eines Computers, der einen Algorithmus abarbeitet. Sie vergleicht die menschliche Vorgehensweise mit der, die durch einen Algorithmus gegeben wird. Es ist eine menschliche Eigenschaft, den Graphen in einem Blick zu erfassen und bestimmte Verbindungen auszuschließen. So würde man z.B. eine Verbindung zwischen Schlump und Kellinghusenstraße nicht über Ulzburg suchen. Es bleiben also weniger

30

4. Unterrichtsentwürfe zur Graphentheorie

Verbindungsmöglichkeiten übrig, die es zu überprüfen gilt. Einem Computer kann diese Eigenschaft nicht oder nur umständlich programmiert werden. Hier müssen alle Verbindungen überprüft oder andere Ausschlusskriterien gefunden werden.

5 Mittels der Aufgabe 4 wird nun nach einer Bedingung gesucht, wie einzelne Wege ausgeschlossen werden können. Hier muss die Bedingung genannt werden, dass alle Verbindungen, die länger als eine gefundene Verbindung sind, nicht mehr für einen kürzesten Weg in Frage kommen. Damit ist die Hauptidee der Breitensuche gefunden. Diese Idee muss noch dahin umformuliert werden, dass man gleichzeitig vom Startknoten aus in alle Richtungen nach einer möglichen Verbindung sucht.

10 Im nächsten Schritt wird der gefundene Breitensuch-Algorithmus an einem Beispiel angewendet. Die Formulierung des Algorithmus auf dem Arbeitsblatt *Vertiefung zum Breitensuch-Algorithmus* orientiert sich an der Definition der Breitensuche auf Seite 18.

Die Abbildung 4.9 zeigt das Beispiel mit einem zugehörigem Baum der kürzesten Wege bzgl. dem Knoten A, welches die SuS bearbeiten sollen.

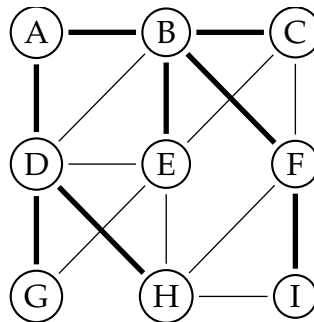


Abbildung 4.9.: *Vertiefung zum Breitensuch-Algorithmus*: Lösungsvorschlag zu Aufgabe 1.

15 Der zweite Aufgabenblock des Arbeitsblattes befasst sich mit einem Transportnetz. Hier soll die maximale Anzahl dafür ermittelt werden, wie oft eine Fracht umgeschlagen werden muss. Dazu muss von jedem Hafen aus ein Baum der kürzesten Wege und darin die maximale Entfernung ermittelt werden.

20 Die Anwendung der Breitensuche von Hamburg aus ergibt den Ergebnisbaum in Abbildung 4.10 auf der gegenüberliegenden Seite. Wenn man nacheinander alle Häfen als Startknoten auswählt, ergibt sich, dass die maximale Zahl der Umschlagvorgänge

4.3. Kürzeste Wege in ungewichteten Graphen

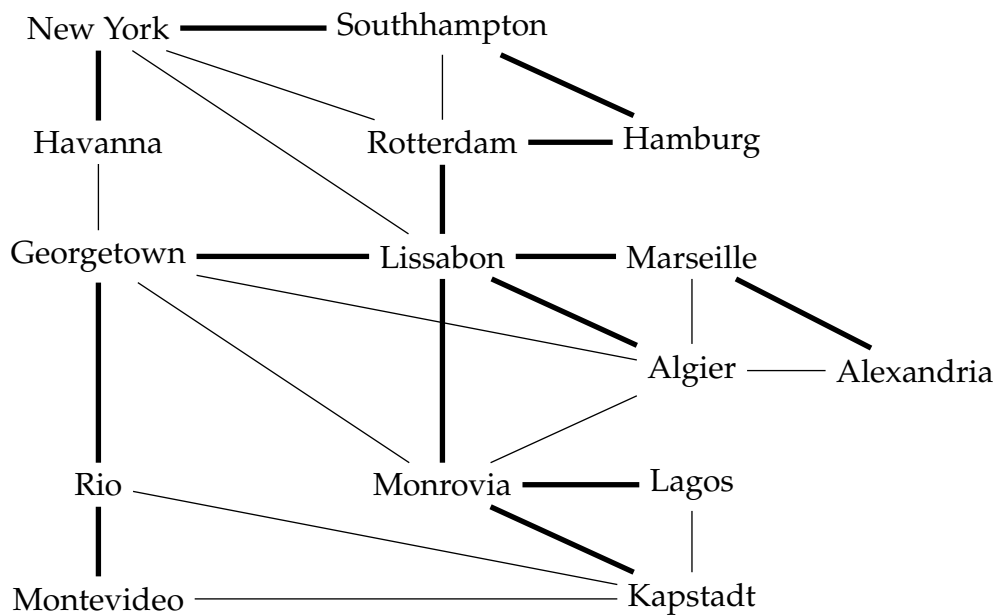


Abbildung 4.10.: Wiederholungsaufgabe: Teillösung von Aufgabe 1.

5 bleibt. Die Startknoten, bei denen sich eine maximale Länge von 5 ergibt, sind Hamburg, Southhampton und Montevideo. Für Alexandria, New York, Marseille, Lagos, Kapstadt, Rio und Rotterdam sind es 4, für Algier, Lissabon, Georgetown, Monrovia und Havanna sind es 3 Umschlagvorgänge.

Desweiteren kann folgende Zusatzaufgabe gestellt werden.⁸⁹ Diese Aufgabe formuliert ein Problem, welches sich mit dem Breitensuch-Algorithmus lösen lässt. Da die Lösung der Aufgabe eine Abstraktion des bisher Erlernten fordert, wird die Aufgabe nur den stärkeren SuS gestellt.

Der chinesische Kaiser steht vor einem Problem: Er möchte die Nachrichten an die Verwaltungen der einzelnen Städte so schnell wie möglich übermitteln. Dabei stehen ihm uns bekannte Möglichkeiten wie Telefon, Fernsehen oder Internet nicht zur Verfügung. Die Nachrichten müssen zu Fuß in die Städte getragen werden. Dabei kann ein Bote pro Tag genau eine Nachbarstadt erreichen.

Aufgabe: Überlegt Euch eine Strategie, wie das Problem des Kaisers gelöst werden kann.

⁸⁹ Die Aufgabe ist in Anlehnung an folgende Geschichte entstanden: TOBIAS STAMM: Dijkstra-Algorithmus. URL: <http://mandalex.manderby.com/d/dijkstra.php?id=93> – Zuletzt besucht am 19.02.2007.

4. Unterrichtsentwürfe zur Graphentheorie

Die Lösung zu dieser Aufgabe findet sich in einer Anwendung der Breitensuche. Vom Palast aus werden Boten mit der Nachricht in alle Nachbarstädte ausgesendet. Dort angekommen, werden wiederum Boten mit der Nachricht in alle Nachbarstädte ausgesendet, außer in die Herkunftsstadt. Dies geschieht in jeder Stadt, die das erste Mal von einem Boten besucht wird. Alle nachfolgenden Boten werden nicht weiter beachtet. Mit dieser Strategie werden alle Städte auf dem kürzesten Weg erreicht. Im Groben handelt es sich dabei um eine Anwendung der Breitensuche. Der konstante Abstand zwischen den Städten wird durch den Zusatz erreicht, dass ein Bote genau eine Nachbarstadt pro Tag erreichen kann. Die Städte werden als Knoten betrachtet und zwischen ihnen existiert genau dann eine Kante, wenn sie Nachbarstädte sind, also ohne Umwege erreicht werden können. Der Startknoten ist die Hauptstadt, von der aus die Nachrichten verschickt werden.

4.3.5. Methodische Überlegungen

Die Einführung in diese Stunde zielt auf den vorbereitenden Charakter für die nächste Stunde. Es müssen beide Stunden als eine Einheit gesehen werden, ohne die Vorbereitung durch die aktuelle Stunde ist die nächste Stunde nicht durchzuführen. Dabei sollte allerdings der Inhalt der aktuellen Stunde nicht geschmälert werden. Sie könnte auch separat betrachtet werden und dabei ein sinnvolles Ergebnis liefern.

Die Stunde beginnt mit dem Aufgabenblatt *Einstieg zu kürzesten Wegen*. Das Aufgabenblatt zeigt einen aktuellen Plan des Nahverkehrsliniennetzes der Stadt Hamburg.⁹⁰ Zudem gibt es vier vorbereitende Aufgaben zum Höhepunkt der Stunde, der Auseinandersetzung mit dem Begriff „Algorithmus“.

Zunächst lesen die SuS das Aufgabenblatt lediglich durch und betrachten das Liniennetz. Wahrscheinlich wird der Eine oder Andere seinem Nachbarn erzählen, wo in Hamburg er wann schon mal gewesen ist und was er dort erlebt hat. Diese Zeit wird den SuS gegeben, um danach intensiver arbeiten zu können. Länger als 10 Minuten dauert diese Phase aber nicht an.

Im Plenum werden dann die vier Aufgaben besprochen. Der Sinn dieser Aufgaben ist zum Einen, unterschiedliche Möglichkeiten von Bewertungen einer kürzesten Strecke kennen zu lernen, und zum Anderen, den Begriff „Algorithmus“ zu erfahren.

⁹⁰ Sicherlich wären auch Liniennetze anderer Städte geeignet.

4.3. Kürzeste Wege in ungewichteten Graphen

Die ersten beiden Aufgaben zielen auf den ersten Sinn. Es ist eine Start- und eine Zielhaltestelle gegeben. Die Aufgabe ist es nun, eine Verbindung zwischen diesen Haltestellen zu suchen und Kriterien für die Ergebnisse anzugeben. Auch nach Alternativen für die gefundene Verbindung soll gesucht werden. Dabei sind vor allem die unterschiedlichen Kriterien von Interesse. Dabei können z.B. Anzahl der Umstiege, Anzahl der Haltestellen, Durchschnittsgeschwindigkeit, Zeitverbrauch, Un- und Ausfallwahrscheinlichkeit etc. genannt werden. Mit weiteren Start- und Zielhaltestellen - Beispiele siehe Seite 85 - können weitere Kriterien gefunden werden. Diese werden an der Tafel festgehalten. 5

Nach diesen ersten beiden Aufgaben wird darauf hingewiesen, welche der gesamten Kriterien in dieser und welche erst mit dem Algorithmus der nächsten Stunde behandelt werden. Dazu ist es wichtig, die Kriterien in Kategorien einzuteilen, z.B. in konstante und nicht-konstante Entfernungen zwischen verbundenen Haltestellen. Zu der ersten Kategorie gehört z.B. die Anzahl der Haltestellen oder die Anzahl der Umstiege, zu der zweiten Kategorie gehören z.B. die Durchschnittsgeschwindigkeit, wenn sie auf den Streckenabschnitten variiert, oder der Zeitverbrauch. Dabei sollte berücksichtigt werden, dass für die Anzahl der Umstiege eine andere Modellierung notwendig ist als für die Anzahl der Haltestellen. Die jetzige Stunde befasst sich ab jetzt nur mit konstanten Entfernungen zwischen zwei Knoten. 10 15

Die weiteren Aufgaben bringen den SuS die Möglichkeiten und Grenzen eines Computers bzw. eines Algorithmus näher. Die erste Aufgabe bezieht sich auf die unterschiedliche Vorgehensweise von Menschen und Computern. Dabei soll herausgestellt werden, dass die menschliche Vorgehensweise mehr intuitiv verläuft und auf der Eigenschaft aufbaut, ein Problem im Ganzen zu überblicken. Einem Computer lässt sich ein solcher Überblick nicht einprogrammieren. Somit müssen in einem Algorithmus, den ein Computer ausführt, anderen Kriterien angeführt werden, um einzelne Strecken auszuschließen. Nach diesen Möglichkeiten wird in der vierten Aufgabe gefragt. 20 25

Der Vergleich mit Programmen in Computern wird an dieser Stelle gewählt, da diese im Alltag der SuS der Prototyp für Algorithmen darstellt. Durch diesen Vergleich können die SuS allerdings ebenso die Funktionsweise von Computerprogrammen besser verstehen. 30

Der zweite Teil der dritten Aufgabe kann nicht klar beantwortet werden. Es muss abgewägt werden zwischen der Komplexität einer entsprechenden Lösung und der Alternative aufgrund von anderen Algorithmen. Da allerdings viele Entscheidungen auf

4. Unterrichtsentwürfe zur Graphentheorie

Erfahrung basieren und sich damit stetig ändern, wird eine Alternative zur menschlichen Vorgehensweise preferiert.

Mit der vierten Aufgabe soll dann eine solche Alternative gefunden werden. Hier steht das Prinzip im Vordergrund, dass eine Verbindung nur dann die kürzeste sein kann, wenn alle anderen bisher gefundenen Verbindungen nicht kürzer sind. Dies scheint klar zu sein, allerdings muss man sich die Konsequenzen dazu überlegen. Eine Konsequenz ist, dass die erste gefundene Verbindung die kürzeste ist, wenn vom Startpunkt aus alle möglichen Wege in gleichgroßen Schritten im gleichen Tempo begangen werden.

Das genannte Prinzip sollen die SuS im Plenum einbringen und diskutieren, sowie die entsprechende Konsequenz daraus ziehen. Besonders für den zweiten Schritt wird wahrscheinlich die Hilfe der Lehrkraft benötigt.

Nachdem der zentrale Gedanke der Breitensuche erarbeitet wurde, wird nun das Aufgabenblatt *Vertiefung zum Breitensuch-Algorithmus* ausgeteilt. Die SuS sollen nun die Breitensuche anhand des Graphen in der Abbildung 4.9 auf der Seite 86 anwenden. Dabei geht es vor allem darum, dass die SuS selbständig die Anweisungen verstehen und umsetzen. Die Bearbeitung der ersten Aufgabe erfolgt deswegen in Einzelarbeit, wobei allerdings nicht ausgeschlossen ist, dass sich Sitznachbarn gegenseitig helfen.

Im nächsten Abschnitt wird dann diese Aufgabe an der Tafel von einem SuS vorgerechnet und erläutert. Dabei kommt es darauf an, dass alle SuS die Breitensuche verstehen und anwenden können, da diese die zentrale Voraussetzung für die nächste Stunde ist.

Zum Abschluss der Stunde wird die Aufgabe 2 bearbeitet. Auch diese wird in Einzel- bzw. Gruppenarbeit von den SuS gelöst. An dieser Stelle ist es die Aufgabe der Lehrkraft, schwächere SuS bei der Bearbeitung der Aufgabe zu unterstützen. Durch die mehrmalige Anwendung der Breitensuche sind viele Übungsmöglichkeiten dazu gegeben.

Stärkeren SuS, die die Breitensuche nicht mehr üben müssen und die Lösung der Aufgabe schnell gefunden haben, kann die oben genannte Zusatzaufgabe mündlich gestellt werden.

4.3. Kürzeste Wege in ungewichteten Graphen

Folgende Kompetenzen erreichen die SuS in dieser Stunde.

- Inhaltskompetenzen: Die SuS ...
 - ... kennen den Begriff „Algorithmus“.
 - ... kennen den Breitensuch-Algorithmus und wenden ihn an.
 - ... unterscheiden zwischen gewichteten und ungewichteten Graphen. 5
 - ... kennen das Problem der Kürzesten Wege.
 - ... erkennen den Unterschied in der Arbeitsweise eines Algorithmus und eines Menschen.

- Prozesskompetenzen: Die SuS ...
 - ... besprechen gemeinsam ein Problem und lösen es. 10
 - ... können einen Algorithmus selbst beschreiben.

4.3.6. Verlaufsplan

Zeit	Inhalt	Lernaktivitäten	Material/Medien
0:00 – 0:05	Begrüßung		
0:05 – 0:15	Verteilen der Aufgabenblätter und Lesen der Aufgaben		Aufgabenblatt <i>Einstieg zu kürzesten Wegen</i>
0:15 – 0:45	Besprechung der Aufgaben im Plenum	<p>SuS erfahren, dass Verkehrspläne nicht maßstabsgetreu sind.</p> <p>SuS unterscheiden zwischen gewichteten und ungewichteten Graphen.</p> <p>SuS begreifen den Begriff „Algorithmus“.</p> <p>SuS erkennen die Grenzen in der Arbeitsweise eines Computers.</p>	
0:45 – 1:00	Bearbeitung der Aufgabe 1 und Nachvollziehen der Breitensuche	<p>SuS vollziehen den Algorithmus nach und wenden ihn an.</p> <p>SuS erkennen die Abbruchbedingungen vom Anfang der Stunde.</p> <p>SuS vollziehen die Arbeitsweise eines Computers nach.</p>	Aufgabenblatt <i>Vertiefung zum Breitensuch-Algorithmus</i>

Zeit	Inhalt	Lernaktivitäten	Material/Medien
1:00 – 1:10	Besprechung der Aufgabe 1		
1:10 – 1:25	Bearbeitung der Aufgabe 2	SuS erkennen die Aufgabenstellung. SuS wenden den Algorithmus wiederholt an. SuS vertiefen die Arbeitsweise des Algorithmus.	Aufgabenblatt <i>Wiederholungsaufgabe</i>
1:25 – 1:30	Besprechung der Aufgabe 2		

4.4. Kürzeste Wege in gewichteten Graphen

4.4.1. Zusammenfassung

In dieser Stunde wird mittels der Breitensuche, also einem Algorithmus zum Finden von kürzesten Wegen in ungewichteten Graphen, der Dijkstra-Algorithmus, ein Algorithmus zum Finden von kürzesten Wegen in gewichteten Graphen, erarbeitet.

Es handelt sich bei dieser Stunde um die thematische Fortsetzung der Unterrichtsstunde *Kürzeste Wege in ungewichteten Graphen*.

4.4.2. Vorbereitungen

Diese Stunde benötigt zur Vorbereitung eine ausreichende Kopie der drei Aufgabenblätter *Wiederholung zu kürzesten Wegen*⁹¹, *Einstieg zum Routenplanen*⁹² und *Vertiefung zum Dijkstra-Algorithmus*⁹³. Ebenso wird eine Folie für die Aufgabe 3 des Arbeitsblattes *Einstieg zum Routenplanen*⁹⁴ mit bunten Folienstiften benötigt. Auch sollte nicht vergessen werden, den Ort der nächsten Stunde bekannt zu geben. Diese findet in einem Computerraum der Schule statt.

4.4.3. Voraussetzungen

Die vorherige Stunde *Kürzeste Wege in ungewichteten Graphen*, im Speziellen die Breitensuche, ist für diese Stunde essentiell. Ebenso wird eine gewisse Erfahrung in der Modellbildung mit Graphen und den entsprechenden Begriffen gefordert.

4.4.4. Fachdidaktische Analyse und Reduktion

In dieser Stunde wird den SuS der Dijkstra-Algorithmus vermittelt. Dazu wird der Begriff „Baum der kürzesten Wege bezüglich eines Startknotens“ benötigt, der in seinem Sinn vermittelt wird bzw. in der vorherigen Stunde schon vermittelt wurde. Die

⁹¹ Vgl. Seite 159.

⁹² Vgl. Seite 160.

⁹³ Vgl. Seite 162.

⁹⁴ Vgl. Seite 161.

4.4. Kürzeste Wege in gewichteten Graphen

zentrale Idee dieser Stunde ist die Rückführung des Algorithmus von Dijkstra auf die Breitensuche. Der Beweis der Korrektheit des Breitensuch-Algorithmus wurde als Folgerung des Dijkstra-Algorithmus in Kapitel 6 identifiziert. Diesen gedanklichen Weg gehen die SuS in dieser Stunde rückwärts, indem sie die Breitensuche in ungewichteten Graphen auf gewichtete Graphen verallgemeinern. Dazu sind verschiedene Schritte notwendig, die noch erläutert werden.

5

Das Aufgabenblatt *Wiederholung zu kürzesten Wege* dient zunächst zur Wiederholung des Breitensuch-Algorithmus. Dieser soll in Aufgabe 1 auf die Aufgabenstellung angewendet werden. Die Vorgehensweise soll sich dabei explizit an der Formulierung des Algorithmus aus der letzten Stunde orientieren. Der Startknoten ist dabei der Knoten A.

10

Eine Lösung der Breitensuche findet sich in der Abbildung 4.11. Dabei sind die dick gezeichneten Kanten die Kanten des Baumes der kürzesten Wege bezüglich dem Startknoten A.

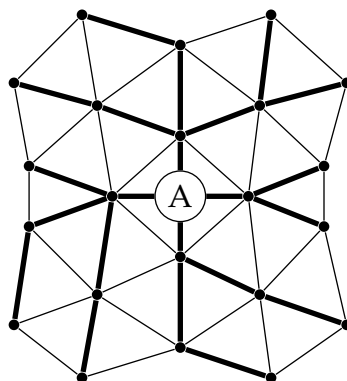


Abbildung 4.11.: *Wiederholung zu kürzesten Wege*: Lösungsvorschlag für Aufgabe 1.

In der Betrachtung der Lösungen könnten die SuS bemerken, dass der entstandene Baum nicht symmetrisch ist.⁹⁵ Diese Erkenntnis ist an dieser Stelle gewollt. Der Grund liegt in der Auswahl des hinzuzufügenden Knotens, wenn mehrere Knoten in Frage kommen. Je nach Auswahl kann sich ein symmetrischer Baum ergeben.

15

Die Aufgabe 2 soll die SuS anleiten, über die Ausfallsicherheit und weitere Eigenschaften des entstandenen Netzes nachzudenken. Für die Ausfallsicherheit wäre es z.B. notwendig, dass jeder Sendemast auf mindestens zwei Wegen zu erreichen ist. Dadurch

20

⁹⁵ Hierbei bezieht sich die Symmetrie natürlich nur auf die bildliche Darstellung.

4. Unterrichtsentwürfe zur Graphentheorie

können einzelne ausgefallene Verbindungen kompensiert werden. Diese Aufgabe ist bewusst offen gestellt, um den SuS eine möglichst breite Assoziationsmöglichkeit zu geben.

Das Aufgabenblatt *Einstieg zum Routenplanen* führt die SuS von der Breitensuche zum Algorithmus von Dijkstra. Dabei wird der Weg durch die Fragestellungen vorgegeben.

Die erste Aufgabe hat keinen besonderen fachlichen Inhalt. Sie dient lediglich dazu, dass sich die SuS mit dem Graphen vertraut machen. Es gibt zwei mögliche Wege: $w(S, A, G, F, Z)$ und $w(S, C, H, Z)$.

Die Aufgabe 2 stellt zunächst die Breitensuche über die Anzahl der Stopps in den Vordergrund. Die Abbildung 4.12 repräsentiert eine Lösung.

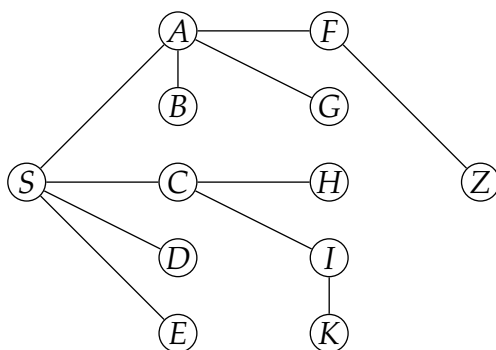


Abbildung 4.12.: *Einstieg zum Routenplanen*: Lösungsvorschlag für Aufgabe 2.

Die dritte Aufgabe enthält nun den entscheidenden Gedanken. Eine Kante wird so in neue Kanten unterteilt, dass die Anzahl der neuen Kanten gleich der Gewichtung der ursprünglichen Kante ist. Die Abbildung 4.13 auf der gegenüberliegenden Seite zeigt eine mögliche Lösung. Bei näherer Betrachtung erkennt man an einigen Stellen interessante Ereignisse, z.B. an den Kanten zwischen den Knoten C und I oder zwischen B und G. Die entsprechenden Kanten wurden jeweils nicht vollständig nachgebildet. Die Ereignisse sind jedoch für die weitere Bearbeitung weniger von Bedeutung.

4.4. Kürzeste Wege in gewichteten Graphen

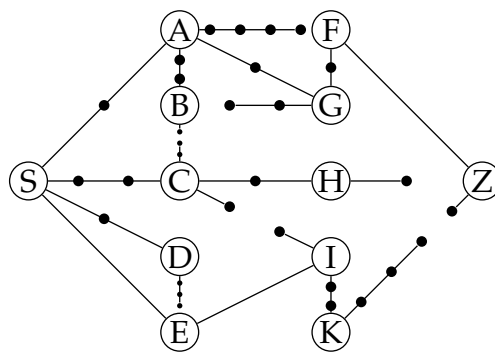


Abbildung 4.13.: *Einstieg zum Routenplanen*: Lösungsvorschlag für Aufgabe 3.

Die Aufgabe 4 gibt nun den letzten Schritt vor, nämlich mit dem bisher Erfahrenem einen Algorithmus zu formulieren und diesen auf das Beispiel anzuwenden. Eine Formulierung des Dijkstra-Algorithmus, also des Algorithmus, welchen die SuS kennenlernen sollen, findet sich im Kapitel 6. Eine Umformulierung des Breitensuch-Algorithmus könnte folgendermaßen aussehen:

1. Wähle einen Startknoten und markiere ihn als abgearbeitet. Er hat die Entfernung 0.
2. Ordne allen Nachbarknoten des Startknotens als Entfernung das Gewicht der Kante zwischen dem Startknoten und diesem Knoten zu und markiere die Knoten.
3. Wähle einen markierten Knoten mit der geringsten Entfernung, der noch nicht abgearbeitet wurde. Markiere diesen Knoten nun als abgearbeitet.
4. Ordne allen Knoten, die mit dem gewählten Knoten verbunden sind, als Entfernung die Entfernung des gewählten Knotens addiert mit dem Gewicht der verbindenden Kante zu, wenn die Entfernung geringer als die bisherige Entfernung ist oder ihnen noch keine Entfernung zugeordnet ist, und markiere die Knoten.
5. Wiederhole die Schritte 3 und 4 solange, bis alle Knoten abgearbeitet sind.

Es zeigt sich, dass lediglich die Schritte 2 und 4 wesentlich geändert wurden. Hier wurden zum Einen die Berechnung der Entfernung angepasst und zum Anderen die Möglichkeit eingearbeitet, die Entfernungen nachträglich zu verändern, wenn eine kürzere Verbindung gefunden wurde.

Den Algorithmus auf das Beispiel angewendet, ergibt den Baum der kürzesten Wege in Abbildung 4.14.

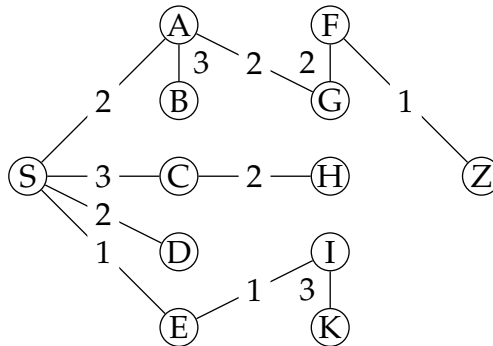


Abbildung 4.14.: *Einstieg zum Routenplanen*: Lösungsvorschlag für Aufgabe 4.

Bei genauerer Betrachtung des Ergebnisses und im Vergleich mit der Aufgabe 3 erkennt man, dass genau die Kanten den Baum bilden, die auch im Graphen nach Aufgabe 3 vollständig enthalten sind. Die interessanten Situationen der Aufgabe 3 fallen hier weg.

Das Aufgabenblatt *Vertiefung zum Dijkstra-Algorithmus* besteht aus der Aufgabe, in einer Landkarte mit Maßstab einen kürzesten Weg mittels des Dijkstra-Algorithmus zu finden. Dabei müssen zunächst die Kosten der Kanten in dem entsprechenden Graphen durch Ausmessen und Umrechnen in Kilometern gefunden werden. Den Graphen findet man in der Abbildung 4.15 auf der gegenüberliegenden Seite, ebenso einen Baum der kürzesten Wege.

4.4.5. Methodische Überlegungen

Die Stunde beginnt mit der Wiederholung der Breitensuche. Um die Wiederholung für alle SuS gleichermaßen zu gewährleisten, wird diese Aufgabe in Einzelarbeit bearbeitet. Für diese Wiederholung sollte genügend Zeit gelassen werden, da sie die Grundlage für den Rest der Stunde ist.

Bei der Gestaltung der Aufgabe war es mir wichtig, ein Thema zu finden, das nicht im direkten Sinne mit kürzesten Wegen zu tun hat, also eine Aufgabe zu finden, in der es

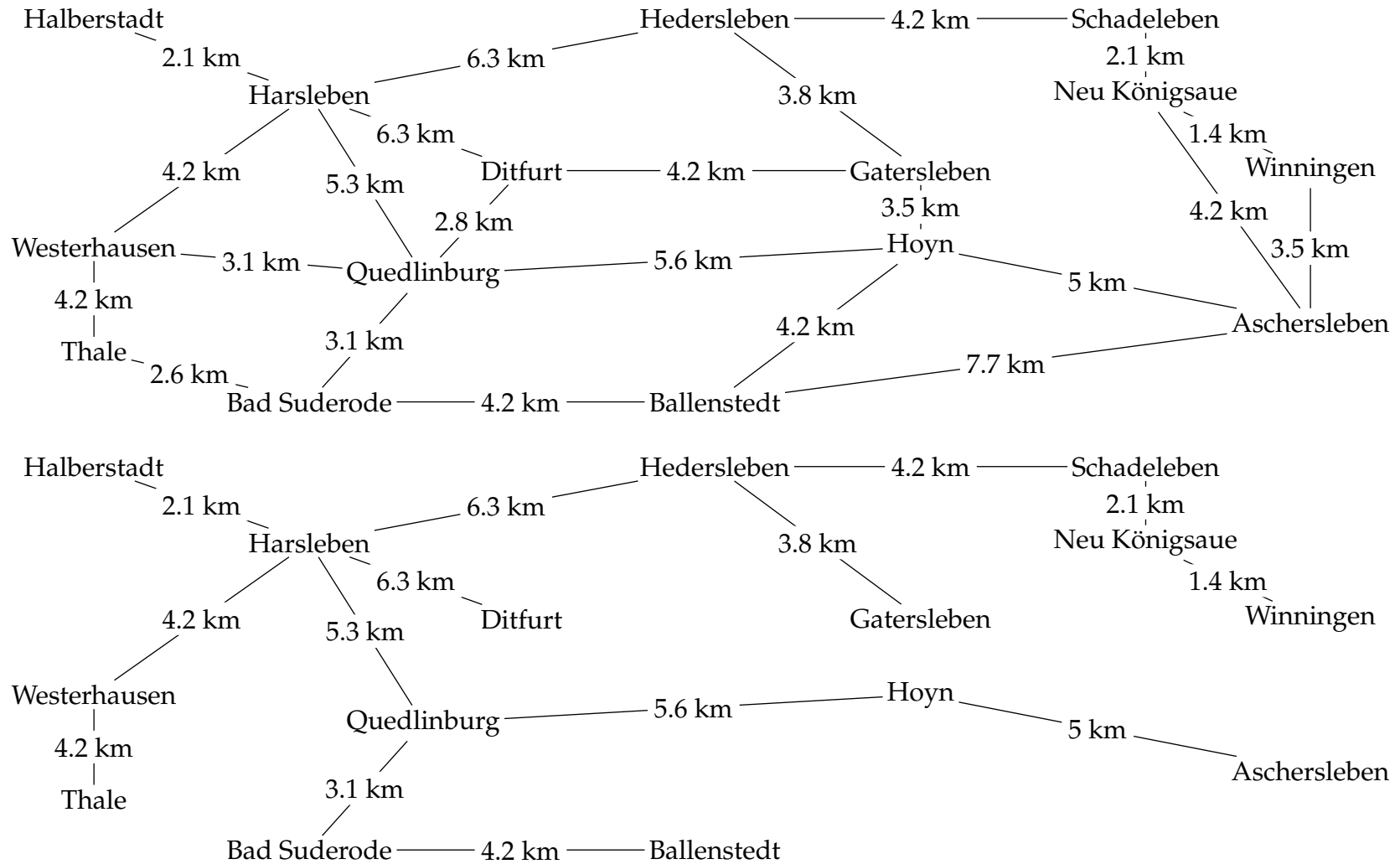


Abbildung 4.15.: Vertiefung zum Dijkstra-Algorithmus: Lösungsvorschlag zur Aufgabe 1.

4. Unterrichtsentwürfe zur Graphentheorie

nicht um Straßen oder andere Verkehrswege geht. Damit wird eine gewisse Fächerung der Aufgabentypen erreicht.

Es ist sicherlich nichts dagegen einzuwenden, wenn die SuS untereinander ihre Ergebnisse vergleichen. Für die sicheren und schnellen SuS bietet sich an, die Aufgabe 2 im Zweiergespräch zu diskutieren. Dabei ist es interessant zu beobachten, welche weiteren Kriterien oder Problemstellen die SuS neben der Ausfallsicherheit finden.

Anschließend wird kurz eine Lösung an der Tafel präsentiert und die Ergebnisse der zweiten Aufgabe von denen präsentiert, die sie schon bearbeitet haben.

Das Aufgabenblatt *Einstieg zum Routenplanen* ist so konzipiert, dass es in Gruppenarbeit⁹⁶ bearbeitet wird.

An dieser Stelle eignet sich die Gruppenarbeit, zunächst um die Wahrscheinlichkeit eines Erfolgserlebnisses zu erhöhen. In einer Gruppe wird sicherlich eine Lösung gefunden. Zudem sollte der Prozess, den Algorithmus zur Breitensuche umzuformulieren, durch die Gruppenarbeit erleichtert werden.

Die erste Aufgabe hat das Ziel, den SuS die Zeit zu geben, sich mit dem Graphen vertraut zu machen.

Die bunten Stifte in der dritten Aufgabe dienen dazu, dass die SuS nicht den Überblick verlieren, wann welche Kanten hinzugefügt wurden und wann welche nicht. Die Gewichte der Kanten wurden so gewählt, dass die Aufgabe bearbeitet werden kann; maximal 4 Zwischenknoten sind pro Kante einzufügen.

Bei der Aufgabe 4 entdecken die SuS zwei wichtige Unterschiede zur Breitensuche. Zum Einen werden die Entfernungen der Knoten anders berechnet. Zum Anderen können die Entfernungen von Knoten, denen schon eine Entfernung zugeordnet ist, wieder geändert werden, wenn man eine geringere Entfernung gefunden hat. Das Mindestziel dieser Aufgabe liegt für jede Gruppe in diesen beiden Punkten. Die genaue Formulierung des Algorithmus steht nur an zweiter Stelle und muss nicht von jeder Gruppe geleistet werden.

⁹⁶ Es eignen sich Vierergruppen, aber auch andere Gruppengrößen, die etwa durch die Sitzordnung vorgegeben sind.

4.4. Kürzeste Wege in gewichteten Graphen

Am Ende der Gruppenarbeitsphase werden die Ergebnisse zusammengetragen. Die Aufgaben 1 und 2 sollten dabei keinen großen Platz einnehmen, sie sind nur zum Einstieg gedacht. Die Aufgabe 3 wird von einem SuS vorgerechnet. Dazu bietet sich an, dass der Graph ohne die Kanten auf einer Folie⁹⁷ vorgezeichnet wurde. Mit mindestens zwei bunten Folienstiften werden die wichtigen Elemente der Aufgabe hervorgehoben. 5

Für die vierte Aufgabe sollte die Lehrkraft während der Gruppenarbeitsphase mindestens eine Gruppe herausgesucht haben, die die Aufgabe erklären kann. Dabei sollte zunächst der formulierte Algorithmus von einem SuS an die Tafel geschrieben werden und dann anhand des Beispiels vom Aufgabenblatt erläutert werden. Dabei sollte darauf geachtet werden, dass der Algorithmus konsequent vom SuS vorgeführt wird. 10

Wenn diese Erläuterung den SuS klar ist, stellt die Lehrkraft die Frage nach den Unterschieden zur Breitensuche. Dabei sollten die beiden oben erläuterten Punkte genannt werden. 15

Das Aufgabenblatt *Vertiefung zum Dijkstra-Algorithmus* besteht aus einer Aufgabe und ist als Puffer gedacht. Sie kann von den SuS zu Hause zu Ende geführt werden. Ein sinnvoller Beginn der Aufgabe mit ausreichender Zeit zum Einarbeiten sollte in dieser Stunde zu schaffen sein.

Zu Beginn der Aufgabe wird kurz mündlich geklärt, was die Aufgabe erfordert. Dabei steht vor allem die Erstellung des Graphen, insbesondere die Berechnung der Gewichtungen, im Vordergrund. Danach gehen die SuS in Gruppen- oder Einzelarbeit dazu über, die Aufgabe zu lösen. Die SuS, die Probleme bezüglich des Berechnens der Gewichtungen haben, fragen andere SuS um Rat. Mindestens ein SuS sollte sich an die Berechnungen erinnern. 20
25

Die Aufgabe ist offen gestellt, da nicht klar ist, welche der Ortschaften oder Kreuzungen im Graphen berücksichtigt werden. Die SuS sind hier aufgefordert sich selbst darüber Gedanken zu machen. Damit werden auch die Ergebnisse stark variieren.

An geeigneter Stelle sollte eine Lösung exemplarisch vorgerechnet werden. Dies kann auch auf die nächste Stunde verschoben werden. Eine andere Möglichkeit ist, sich die Ergebnisse der SuS anzuschauen und mit ihnen über die Ergebnisse zu diskutieren. Dadurch findet auch eine Ergebnissicherung statt. 30

⁹⁷ Eine entsprechende Vorlage findet sich im Anhang auf Seite 161.

4. Unterrichtsentwürfe zur Graphentheorie

Folgende Kompetenzen erreichen die SuS in dieser Stunde.

- Inhaltskompetenzen: Die SuS ...
 - ... kennen den Dijkstra-Algorithmus und wenden ihn an.
 - ... kennen die Unterschiede zwischen der Breitensuche und dem Dijkstra-Algorithmus.
 - ... modellieren ein Straßennetz mit Entfernungen als gewichteten Graphen.
- Prozesskompetenzen: Die SuS ...
 - ... erarbeiten sich in Gruppen die Lösung eines Problems.
 - ... passen einen Algorithmus an neue Gegebenheiten an.

4.4.6. Verlaufsplan

Zeit	Inhalt	Lernaktivitäten	Material/Medien
0:00 – 0:05	Begrüßung		
0:05 – 0:25	Wiederholung der Breitensuche	SuS wiederholen die Breitensuche. SuS erkennen die Bedeutung eines Baumes kürzester Wege.	Aufgabenblatt <i>Wiederholung zu kürzesten Wege</i>
0:25 – 1:05	Erarbeitung des Dijkstra-Algorithmus	SuS wenden die Breitensuche auf das Beispiel an. SuS erweitern die Breitensuche auf die Anzahl der Kilometer. SuS erkennen die beiden wesentlichen Unterschiede vom Dijkstra-Algorithmus und der Breitensuche. SuS formulieren den Dijkstra-Algorithmus.	Aufgabenblatt <i>Einstieg zum Routenplanen</i>
1:05 – 1:30	Vertiefung des Dijkstra-Algorithmus	SuS erstellen einen Lösungsgraphen. SuS wenden den Dijkstra-Algorithmus an.	Aufgabenblatt <i>Vertiefung zum Dijkstra-Algorithmus</i>

4.5. Fachwerke, Turniergraphen und perfektes Matching

4.5.1. Zusammenfassung

Diese Unterrichtsstunde behandelt drei ausgewählte Anwendungen der Graphentheorie. Die Vermittlung dieser Anwendungen erfolgt über das Learning-Management-System ILIAS. Dazu wurden drei Module erstellt, in denen die Anwendungen vorgestellt, notwendige Begriffe definiert, die ausgewählten Aussagen erläutert und mit Aufgaben vertieft werden. Die SuS können sich frei entscheiden, welche Module sie mit welcher Intensivität und in welcher Reihenfolge bearbeiten. Die Aufgabe der Lehrkraft ist in dieser Stunde die Betreuung der SuS bei Fragen zu den Inhalten.⁹⁸

Mittels der hier präsentierten Anwendungen von Graphentheorie wird den SuS der Praxisbezug der Graphentheorie gezeigt. Dies soll ihnen vermitteln, dass nicht jegliche Mathematik der Schule ohne Bezug zur Realität dasteht. Weiterhin sollen diese Anwendungen das weitere Interesse der SuS wecken. Die Auswahl des Lernmediums leistet hier weitere Unterstützung.

4.5.2. Vorbereitungen

Die organisatorischen Vorbereitungen dieser Stunde liegen in der Bereitstellung einer technischen Infrastruktur für die Nutzung von ILIAS. Dazu gehört eine ILIAS-Installation, die die SuS während der Stunde benutzen können. Dabei ist zu beachten, dass die Rechner der SuS eine angemessene Netzwerkverbindung zu der ILIAS-Installation besitzen, ISDN-Geschwindigkeit reicht hier nicht. Ebenso benötigt der Rechner einen Webbrowser mit einer Java-Installation. In der ILIAS-Installation müssen ausreichend Accounts für die SuS angelegt oder die Module öffentlich zugänglich gemacht werden.

Ebenfalls gehört auch die Reservierung des Computerraumes zur Vorbereitung.

⁹⁸ Die beigelegte CD enthält ein Linux-Live-System, auf dem das ILIAS-System mit den angefertigten Modulen installiert ist. Zu der CD finden sich weitere Informationen im Anhang *Informationen zur beigelegten CD* ab Seite 189.

4.5. Fachwerke, Turniergraphen und perfektes Matching

Die Lehrkraft sollte sich ebenfalls Gedanken über die Zusammenstellung der Module machen. So kann ein Modul weniger angeboten werden, damit alle SuS das Gleiche lernen, oder die Lösungsseiten der Module können deaktiviert werden.

4.5.3. Voraussetzungen

Inhaltlich kann diese Stunde auch ohne die vorherigen Stunden zur Graphentheorie durchgeführt werden. Zum Einstieg in die Graphentheorie gibt es ein entsprechendes Modul. 5

Weiterhin sollten die SuS über die Regeln im Computerraum Bescheid wissen. Eventuell sollte am Anfang der Stunde etwas zusätzliche Zeit eingeplant werden, um diese zu erläutern. 10

4.5.4. Fachdidaktische Analyse und Reduktion

Für die Erläuterung der Themen in den Modulen werden die Module auf den folgenden Seiten einzeln besprochen. Generell gilt, dass durch die geschriebenen Erklärungen auch Beweise vorgeführt werden, wenn auch in abgeschwächter Form. Dabei liegt es bei jedem SuS wie intensiv er die einzelnen Inhalte bearbeitet. 15

Die Erläuterungen zu den gestellten Aufgaben finden die SuS auf den Lösungsseiten am Ende der Module.

Für die Einführung und zur Motivation der SuS wurde versucht, realitätsnahe Beispiele zu behandeln, die mit den vorgestellten Aussagen betrachtet werden. Ebenso werden einige Beispiele genutzt, um die Aussage zu verdeutlichen. 20

Fachwerke

Die Erklärungen zu den Fachwerken wurden fast eins zu eins aus dem Kapitel 1.4.3 übernommen. Inhaltlich werden die Fachwerke und ihre zugehörigen bipartiten Graphen behandelt sowie die Aussage über die Stabilität von Fachwerken⁹⁹.

⁹⁹ Vgl. Satz 10 auf der Seite 37.

Um die SuS nicht mit neuen Begriffen zu überhäufen, werden die zugehörigen bipartiten Graphen nicht als bipartite Graphen bezeichnet, sondern lediglich „zugehöriger Graph“ genannt.

Die weiteren Begriffe und Aussagen werden ohne wesentliche Veränderungen zu Kapitel 1.4.3 übernommen.

Turniergraphen

Für die Turniergraphen ist es notwendig, zunächst gerichtete Graphen und Eingangs- und Ausgangsgrade von Knoten in gerichteten Graphen einzuführen. Danach folgt die Definition von Turniergraphen und die Aussage von Satz 7 auf der Seite 25. Auf den Begriff eines Hamiltongraphen wird an dieser Stelle nicht eingegangen, da er für das Verständnis der Aussage nicht nötig ist.

Die Erläuterung der Aussage von Satz 7 erfolgt über das Vorrechnen der Fälle von einem Teilnehmer bis zu vier Teilnehmern. Dabei wird die Aussage zu einem Teilnehmer entsprechend dem Induktionsbeginn im Beweis des Satzes begründet. Die weiteren Fälle werden entsprechend dem Induktionsschritt erläutert, allerdings auf den Einzelfall reduziert. Damit wird der Beweis des Satzes durch vollständige Induktion übertragen, die Form der Induktion allerdings verlassen.

Im Rest des Moduls steht der Begriff des „Königs und seinen Vizekönigen“ im Vordergrund. Hier wird die Aussage des Satzes 8 auf der Seite 27 ebenso begründet wie in Kapitel 1.4.1.

Perfektes Matching

Das Modul *Paare finden* startet mit dem Begriff „bipartiter Graph“ und der Eigenschaft 1 auf der Seite 29 zum Erkennen von bipartiten Graphen. Dabei wird die Eigenschaft nicht näher begründet. Als Nächstes folgen die Begriffe „regulärer Graph“ und „Perfektes Matching“. Der Begriff „Perfektes Matching“ wird an dieser Stelle unabhängig zu einer Menge eingeführt. Ein perfektes Matching liegt dann vor, wenn es für alle Knoten im Graphen genau einen Partner gibt. Abschließend wird die Aussage der Folgerung 1.4.2 auf der Seite 33 betrachtet und erläutert. Für die Erläuterung wird zunächst die Bedingung des Heiratssatzes in einem regulären Graphen gezeigt und dann aufgrund dieser Eigenschaft die entsprechende Richtung des Heiratssatzes

4.5. Fachwerke, Turniergraphen und perfektes Matching

bewiesen. Dazu wird an dem Beispiel einer Tanzschule die Situation für ein bis vier Mädchen und entsprechend vielen Jungen gezeigt. Für die Situation mit einem Mädchen entspricht die Begründung dem Induktionsanfang im Beweis des Heiratssatzes. Für die weiteren Fälle wurde der Induktionsschritt auf diese Fälle reduziert. Dabei wird der Mechanismus des Induktionsschrittes deutlich.

5

4.5.5. Methodische Überlegungen

Die didaktischen Überlegungen zum Thema *Neue Medien* wurden schon im Kapitel 3 erläutert. In diesem Kapitel steht die Umsetzung im Vordergrund.

Die Stunde beginnt nach der Begrüßung mit einer kurzen Einführung in das ILIAS-System. Dazu gehört das Einloggen in das System samt der Vergabe von Benutzernamen und den Passwörtern, das Anmelden am Kurs *Graphentheorie* durch die SuS und eine Erläuterung der Navigation im System. Je nach Lerngruppe und Zeit ist es ratsam, die einzelnen Benutzer am Kurs in der Vorbereitung anzumelden. Die notwendigen Aktionen am Bildschirm werden den SuS mittels eines Beamers gezeigt.

10

Danach ist es den SuS überlassen, welche Module sie in welcher Reihenfolge bearbeiten. Allerdings ist es ratsam, mit dem Modul über Fachwerke zu beginnen, da es inhaltlich am einfachsten und am wenigsten abstrakt ist. Die Module sind so konzipiert, dass die SuS zwei Module in den 90 Minuten gut bearbeiten können.

15

Eine weitere Besonderheit des Moduls über Fachwerke ist die Implementation von Java-Applets um das Verhalten von Fachwerken zu simulieren. Dazu wurde mit Hilfe des Programms Cinderella¹⁰⁰ ein Fachwerk mit 2 Zeilen und 4 Spalten konstruiert, welches nach und nach Querstreben hinzugefügt bekommt. Diese Konstruktionen wurden in das Modul als interaktive Java-Applets integriert, so dass die SuS in diesen Fachwerken die Stabilität der Fachwerke und das Verhalten der Fachwerke bei Nicht-Stabilität selbst erfahren können. Die Screenshots in Abbildung 4.16 auf der nächsten Seite zeigen das Verhalten der Applets an einem Beispiel.

20

25

Aus Konstruktionsgründen lassen sich nur die Punkte bewegen, die den größeren Radius haben. In den Screenshots sind die Punkte, die bewegt wurden, schwarz umrandet.

¹⁰⁰ Cinderella: Die interaktive Geometrie-Software Cinderella. URL: www.cinderella.de – Zuletzt besucht am 01.01.2007.

4. Unterrichtsentwürfe zur Graphentheorie

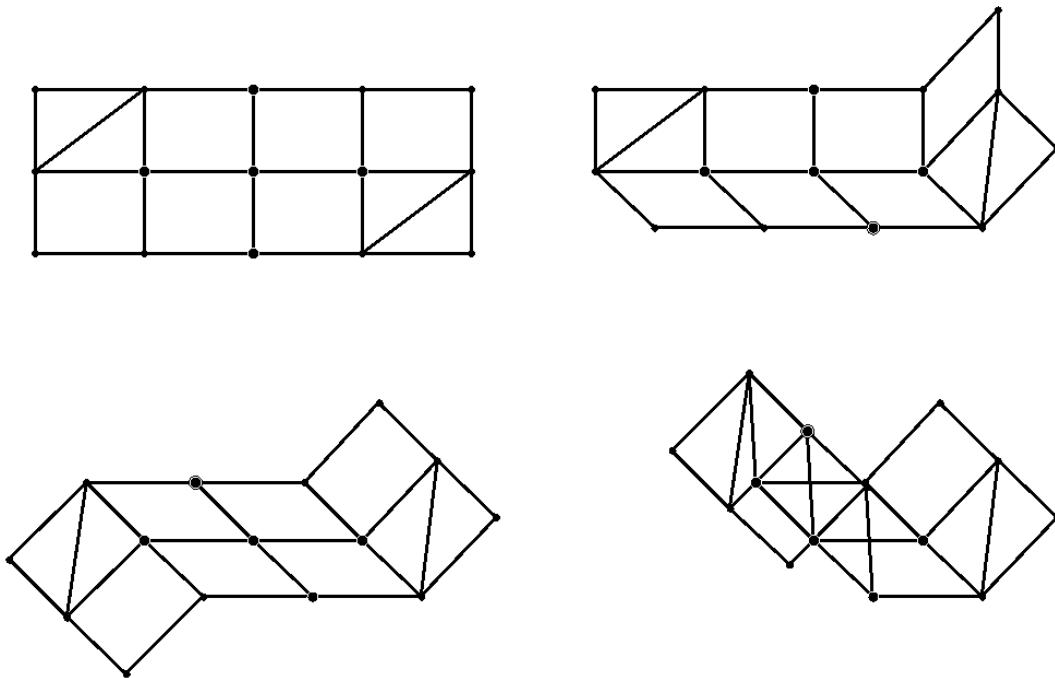


Abbildung 4.16.: Screenshots zum Java-Applet im Modul *Fachwerke und Graphen*.

Die Aufgaben lösen die SuS in ihrem Heft o.ä. Die Überprüfung ihrer Ergebnisse kann entweder im Vergleich mit den Mitschülern oder über die Lösungsseiten der Module erfolgen.

Die Lehrkraft steht während der Stunde für Fragen bereit, kann sich um schwächere SuS kümmern oder klasseninterne Probleme wie Klassenfahrten oder Streitigkeiten zwischen einzelnen SuS mit den Beteiligten besprechen.

Folgende Kompetenzen erreichen die SuS in dieser Stunde.

- Inhaltskompetenzen: Die SuS ...

- ... kennen die Begriffe „Fachwerk“, „zu einem Fachwerk zugehöriger Graph“, „bipartiter Graph“, „regulärer Graph“, „perfektes Matching“, „gerichteter Graph“, „Eingangs- und Ausgangsgrad“, „Turniergraph“, „Ranking“ und „König und Vizekönige“ und wenden sie an.
- ... kennen ein Kriterium zum Erkennen von bipartiten Graphen und perfekten Matchings.

4.5. Fachwerke, Turniergraphen und perfektes Matching

... wissen, wann ein Fachwerk stabil ist und welche Auswirkungen Instabilität hat.

... finden ein Ranking und einen König mit seinen Vizekönigen in einem Turniergraphen.

- Prozesskompetenzen: Die SuS ...

5

... lernen in einer digitalen Lernumgebung.

... fragen andere SuS um Rat.

... teilen sich die Zeit frei ein.

... lösen und überprüfen Aufgaben selbständig.

4.5.6. Verlaufsplan

Zeit	Inhalt	Lernaktivitäten	Material/Medien
0:00–0:05	Begrüßung und Einweisung in die Regeln des Computerraumes		
0:05–0:15	Einführung in das ILIAS-System		Computer und Beamer
0:15–1:30	selbständiges Bearbeiten der Module	<p>SuS erfahren die Inhalte der Module. SuS lernen den Umgang mit dem Learningcontent-Management-System ILIAS.</p> <p>SuS teilen sich die Zeit selbständig ein und bearbeiten die Inhalte selbständig.</p> <p>SuS lösen und überprüfen die Aufgaben selbständig.</p>	ILIAS-System
	Modul <i>Fachwerk und Graphen</i>	<p>SuS lernen die Begriffe „Fachwerk“ und „zu einem Fachwerk zugehöriger Graph“ kennen und anwenden.</p> <p>SuS erfahren die Auswirkung bei Instabilität von Fachwerken.</p> <p>SuS lernen eine Aussage über die Stabilität von Fachwerken.</p>	

Zeit	Inhalt	Lernaktivitäten	Material/Medien
	Modul <i>Paare finden</i>	<p>SuS lernen die Begriffe „bipartiter Graph“, „regulärer Graph“ und „perfektes Matching“ kennen und anwenden.</p> <p>SuS erfahren ein Kriterium zum Erkennen von bipartiten Graphen.</p> <p>SuS erfahren eine Aussage über Perfektes Matching.</p>	
	Modul <i>Turniergraphen</i>	<p>SuS lernen die Begriffe „gerichteter Graph“, „Eingangs- und Ausgangsgrad“, „Turniergraph“, „Ranking“ und „König und Vizekönige“ kennen und anwenden.</p> <p>SuS erfahren eine Aussage über das Ranking.</p> <p>SuS erfahren eine Aussage über Könige und Vizekönige</p>	

5. Praktische Umsetzung der Unterrichtsentwürfe

Dieses Kapitel beschreibt die Durchführung der Unterrichtsstunden der im Kapitel 4 vorgestellten Unterrichtseinheiten. Die Durchführung erfolgte in zwei Lerngruppen am Max-Plank-Gymnasium in Göttingen im Zeitraum von September 2006 bis Dezember 2006. 5

Bei der ersten Lerngruppe handelt es sich um insgesamt vier SuS, die an einer Arbeitsgruppe zur Graphentheorie teilgenommen haben. Diese Arbeitsgruppe fand außerhalb des regulären Unterrichts am Nachmittag statt, was die geringe Beteiligung der SuS erklärt. Nur zwei SuS haben regelmäßig an den Treffen teilgenommen. 10

Die zweite Gruppe ist ein Leistungskurs Informatik der Jahrgangsstufe 12 aus Göttingen. Hier fand der Unterricht im Rahmen des regulären Unterrichts statt, jedoch nur mit einer Auswahl von 6 SuS. Lediglich die letzte Stunde wurde mit 25 SuS durchgeführt.¹⁰¹

In beiden Lerngruppen wurde der Unterricht von mir geführt. Aufgrund der geringen Teilnehmerzahlen muss eine Einschränkung der Aussagekraft dieser Unterrichtsstunden vorgenommen werden. Es kann hier nur eine Aussage über den Stoff im Allgemeinen und den Einsatz der Medien getroffen werden, nicht über die vorgestellten Unterrichtsentwürfe und deren methodische Konzepte. Zentrale Elemente meiner Unterrichtsentwürfe wie die Sozialformen im Unterricht und damit verbundene Lerneffekte, auch fachlicher Natur, konnten nicht durchgeführt und getestet werden. Hier können nur Aussagen darüber getroffen werden, in wieweit die behandelten Themen und Aufgaben von den anwesenden SuS angenommen und bearbeitet worden sind. 15
20

¹⁰¹ Dazu mehr im Kapitel *Durchführung im Leistungskurs Informatik* ab Seite 124.

5.1. Durchführung in der Arbeitsgruppe

Die Arbeitsgruppe am Max-Plank-Gymnasium bestand aus vier SuS der elften Klasse, von denen zwei SuS regelmäßig teilgenommen haben. Ein SuS hat nur am ersten Treffen teilgenommen, ein weiterer an zwei Treffen.

- 5 Leider führte diese Unsicherheit an Teilnehmern zu mehreren Verschiebungen im Terminplan, so dass die Termine relativ weit auseinanderlagen. Zudem hinderte uns eine zweiwöchige schulische Veranstaltung an den Treffen.

Die ersten vier Treffen fanden in einem Klassenraum des Max-Plank-Gymnasiums statt, das letzte Treffen im Mathematischen Institut in Göttingen, um die dortigen Computereinrichtungen zu nutzen.

Die folgende Tabelle zeigt eine Übersicht der Treffen der Arbeitsgruppe.

Datum	Stunde
26.09.2006	Einführung und Grundlegung der Begriffe
10.10.2006	Eulergraphen und Briefträger
21.11.2006	Kürzeste Wege in ungewichteten Graphen
28.11.2006	Kürzeste Wege in gewichteten Graphen
05.12.2006	Fachwerke, Turniergraphen und perfektes Matching

Die Treffen orientierten sich grob an den Unterrichtsentwürfen aus Kapitel 4. Der Unterschied zu diesen ergibt sich durch die geringe Größe der Lerngruppe, so dass Elemente wie Einzel-, Partner- oder Gruppenarbeit entfielen. Stattdessen wurden die Aufgabenblätter stets in einer Diskussion im Plenum gelöst, welche von mir als Lehrkraft durch Fragen und Anmerkung geleitet wurde. Dabei wurden fast alle Aufgaben und Aufgabenblätter mit den SuS bearbeitet und besprochen.

Im Folgenden werden die Durchführungen der Unterrichtsstunden von mir beschrieben und anschließend in Bezug auf das Thema und die Unterrichtsentwürfe reflektiert. Vor dem ersten Treffen habe ich eine Änderung des Entwurfes vorgenommen. Diese Änderung und die Gründe dafür bespreche ich vor der Beschreibung der Durchführung.

5.1. Durchführung in der Arbeitsgruppe

5.1.1. Einführung und Grundlegung der Begriffe

Änderungen zu den Unterrichtsentwürfen

Da es sich bei den Teilnehmern der AG um mathematisch interessierte SuS handelte, habe ich die Zusatzaufgabe *Der Bauer mit dem Wolf, dem Schaf und dem Kohlkopf* vorgezogen und im Anschluss an das Aufgabenblatt *Einstiegsaufgabe zur Graphentheorie* bearbeitet.

Die Durchführung

Die erste Stunde verlief fast nach Plan. Zunächst waren einige organisatorische Probleme zu lösen. Der reservierte Raum wurde von einer Lehrkraft der Schule benötigt, so dass zunächst ein Ersatzraum gefunden werden musste. Leider waren nur zwei SuS anwesend, obwohl sich acht SuS im Vorfeld der AG bei mir gemeldet hatten. Zwei wurden durch die anwesenden SuS entschuldigt, über die Anderen gab es keine Informationen.

Mit den zwei anwesenden SuS begann ich die Stunde. Ich verteilte das Aufgabenblatt *Einstiegsaufgabe zur Graphentheorie*. Nach dem ersten Lesen des Aufgabentextes folgte schon der Kommentar, dass das Level nicht lösbar sei. Den Kreis in den Abhängigkeiten hatten die SuS schon herausgelesen. Dennoch bereitete die erste Aufgabe beiden SuS anfangs Probleme. Ihnen fehlte eine Idee für die grafische Darstellung. Einer der beiden SuS konnte sich jedoch etwas unter dem Begriff *Graphentheorie* vorstellen und hatte eine Idee, welche grafische Darstellung hier gewollt sein könnte. Damit ließ sich die Aufgabe entsprechend gut lösen, auch die nachfolgenden Aufgaben des Aufgabenblattes waren kein Problem mehr. Die Lösung der SuS verzichtete im Gegensatz zu meiner vorgestellten Lösung von Seite 65 auf die Knoten „Start“ und „Ende“. Dadurch war die Lösung allerdings nicht falsch.

Das Aufgabenblatt *Der Bauer mit dem Wolf, dem Schaf und dem Kohlkopf* bereitete den SuS Probleme. Die SuS brauchten recht lange (ca. 20 Minuten), um die vorgeschlagene Modellierung nachzuvollziehen. Dennoch war es ihnen nicht möglich, diese Modellierung umzusetzen und die Aufgabe zu lösen. Die Aufgabe wurde dann gemeinsam mit meiner Unterstützung an der Tafel gelöst.

5. Praktische Umsetzung der Unterrichtsentwürfe

Das Aufgabenblatt *Wiederholung der Begriffe und Aufgaben zur Vertiefung der Graphentheorie* konnten die SuS gut lösen. Das einzige Problem an dieser Stelle war die Aufgabe 1 des ersten Aufgabenblocks. Es stellte sich heraus, dass ein SuS ohne Führerschein Probleme hatte, die Aufgabe zu lösen. Ihm fehlte das Wissen über die Verkehrsverläufe an einer Kreuzung. In Zusammenarbeit mit dem zweiten SuS wurde dieses Problem dennoch gelöst.

Reflexion

Ich persönlich empfand das Treffen als anstrengend. Die missglückte Organisation des Raumes und die geringe Anzahl der Teilnehmer bereiteten mir während des Treffens Stress. Mit dem Ablauf der Stunde bin ich ebenfalls nicht ganz zufrieden, werte die Stunde aber dennoch als erfolgreich.

Die Einstiegsaufgabe wurde, wie oben beschrieben, durch das Vorwissen eines SuS gerettet. Da ich bei meinen Unterrichtsentwürfen in Kapitel 4 von einer größeren Lerngruppe ausgegangen bin, erhöht sich die Wahrscheinlichkeit, dass ein oder mehrere SuS die zentrale Idee haben und damit den Einstieg in die Graphentheorie ebnen. Wenn sich keine entsprechende Lösung findet, muss die Lehrkraft einen entsprechenden Vorschlag einbringen, ausreichend begründen und mit den SuS in Bezug auf die Vor- und Nachteile diskutieren. Dass die SuS den Kreis in den Abhängigkeiten schnell erkannt haben, rechne ich nicht negativ an. Nicht alle SuS haben diese Erkenntnis beim Lesen des Aufgabentextes, so dass diesen die grafische Darstellung entgegenkommt. Die SuS, die die Nichtlösbarkeit herauslesen, können in der grafischen Darstellung zum Einen eine Bestätigung ihrer Vermutung erkennen und zum Anderen lässt sich damit die zweite Aufgabe besser lösen, da sich weniger gut Fehler einschleichen können.

Das Aufgabenblatt *Der Bauer mit dem Wolf, dem Schaf und dem Kohlkopf* schien zwar für die SuS zu schwierig, doch bin ich mir sicher, dass dies vor allem an meiner Ungeduld gegenüber den SuS lag. Mit mehr Geduld wäre es den SuS sicher möglich gewesen, die Aufgabe mit meinen Erläuterungen zur Modellierung selbständig zu lösen.

Für das dritte Aufgabenblatt ergaben sich keine Schwierigkeiten. Das Problem bei der Kreuzungsaufgabe wurde durch Zusammenarbeit gelöst, die in anderen Lerngruppen ebenfalls zu erwarten ist.

5.1. Durchführung in der Arbeitsgruppe

5.1.2. Eulergraphen und Briefträger

Die Durchführung

Bei diesem Treffen waren nur ein SuS aus der vorherigen Stunde und zwei weitere SuS anwesend. Der im Gegensatz zum ersten Treffen fehlende SuS vom ersten Treffen nahm auch an keinem weiteren Treffen teil. Es gab keine organisatorischen Hürden zu nehmen, der reservierte Raum war diesmal frei. 5

Das zweite Treffen verlief ganz nach Plan. Dies wurde auch dadurch unterstützt, dass die SuS das Königsberger Brückenproblem und seine Lösung schon kannten. Allerdings fehlte den SuS die vollständige Begründung für die Lösung. Dies wurde bei diesem Treffen nachgeholt. Zu Beginn des Treffen wiederholte ich kurz den Inhalt des letzten Treffens für die beiden Neuen. Dabei ging es vor allem darum, den SuS die Begriffe zu erläutern. Auch hier stellte sich heraus, dass der Kreis in den Abhängigkeiten des ersten Aufgabenblattes auch für diese SuS offensichtlich war. 10

Bei der ersten Aufgabe des Aufgabenblattes *Das Königsberger Brückenproblem* machte sich bemerkbar, welcher SuS am vorherigen Treffen teilgenommen hatte. Während die beiden neuen SuS Probleme hatten, die Aufgabe zu lösen und einen Graphen zu modellieren, konnte der andere SuS die Aufgabe leicht lösen. Die weitere Bearbeitung des Aufgabenblattes zeigte, dass die gestellten Aufgaben den Gedankengängen der SuS entsprachen. So ergab sich jeweils für die Aufgaben 3 und 4 die Situation, dass ein SuS bei der Bearbeitung der Aufgabe einen Gedanken äußerte, wie weiter zu verfahren sei. Genau der geäußerte Gedanke fand sich dann in der nächsten Aufgabenstellung wieder. Für Aufgabe 5 wiederholte sich diese Situation jedoch nicht. An dieser Stelle fielen den SuS leider keine weiteren Figuren außer dem *Haus vom Nikolaus* ein. Die Beispiele des Audi-Logos und der Olympischen Ringe brachte ich an dieser Stelle selbst ein. Die Aufgabe 6 konnte aufgrund des Vorwissens schnell gelöst werden. 15
20
25

Im nächsten Schritt folgte der Vortrag über den Hierholzer-Algorithmus und die vollständige Begründung für den Satz 2 auf der Seite 12. Die Begründung für die Aussage, dass sich ein Eulergraph in Kreise aufteilen lässt, erläuterte ich an dieser Stelle nicht, da zwei der drei SuS am ersten Treffen nicht teilgenommen hatten und ihnen damit ein sicherer Umgang mit Graphen fehlte. Die Erklärung des Hierholzer-Algorithmus erfolgte am Beispiel der Olympischen Ringe. Leider fehlte in dem Raum bunte Krei- 30

5. Praktische Umsetzung der Unterrichtsentwürfe

de, so dass hier anstatt der bunten Kreide die vorhandenen einfarbigen Kreise genutzt wurden. Die SuS konnten dennoch der Erläuterung gut folgen.

Das Aufgabenblatt *Neue Begriffe und Vertiefung zu Eulergraphen* wurde gut gelöst. Die Erläuterung zum Hierholzer-Algorithmus brachte die SuS schnell auf die Idee, Kreise zu suchen. Diese Kreise fanden sich in den Straßen um die bebauten Gebieten wieder, so dass daraus schnell ein Eulerkreis gefunden wurde. Es stellte sich während der Bearbeitung heraus, dass man die Aufteilung optimieren konnte und nicht alle bebauten Gebiete einen Kreis um sich bildeten.

Reflexion

10 Nach den Problemen des ersten Treffens war dieses Treffen sehr erfreulich. Es ergaben sich keine organisatorischen Probleme und die Stunde verlief positiv. Das Vorwissen der SuS in Bezug auf das Königsberger Brückenproblem und dass die Aufgaben 3 und 4 den Gedankengängen der SuS entsprachen, steigerte das positive Gefühl nochmal.

15 Das erste Aufgabenblatt wurde in der Aufgabe 5 nicht gut gelöst. Dass die SuS nur ein Beispiel eingebracht haben, zeigt, dass diese Aufgabe auf einen Erfahrungsraum der SuS angewiesen ist, der den anwesenden SuS zu fehlen schien. Dieser Erfahrungsraum könnte jedoch bei anderen SuS vorhanden sein, so dass die Aufgabe nicht unpassend ist.

20 Die Erklärung des Hierholzer-Algorithmus hat auch sein Ziel erreicht. Das Aufgabenblatt *Neue Begriffe und Vertiefung zu Eulergraphen* konnte mit dem Hierholzer-Algorithmus erfolgreich gelöst werden. Für die Erklärung zeigt sich auch, dass die Hervorhebung der Kreise, sei es nun durch bunte Kreide oder durch einen Graphen, der schon Kreise aufweist, das Verständnis für die Erklärung erhöht.

25 5.1.3. Kürzeste Wege in ungewichteten Graphen

Die Durchführung

Das Treffen fand mit den gleichen SuS statt, die auch am zweiten Treffen teilgenommen hatten. Auch waren keine organisatorischen Probleme zu lösen, so dass alles nach Plan verlaufen konnte.

5.1. Durchführung in der Arbeitsgruppe

Leider verlief diese Stunde nicht nach Plan. Dies lag vor allem daran, dass ich Schwierigkeiten hatte, die SuS vom Problem der kürzesten Wege zu überzeugen. Die Antworten der SuS auf die Aufgaben 1 und 2 des Aufgabenblattes *Einstieg zu kürzesten Wegen* verwiesen vor allem auf die Möglichkeit, sich bei der Verkehrsgesellschaft nach der kürzesten Verbindung zu erkundigen. Damit war es schwierig, einen Einstieg in das Thema zu finden und die Problematik zu verdeutlichen. Leider konnte ich an dieser Stelle nicht vollends auf die SuS eingehen, um im Unterricht weiterzukommen. Ich überzeugte die SuS zunächst damit, dass auch die Verkehrsgesellschaft diesen Weg berechnen müsste.

Ein ähnliches Problem ergab sich bei den Aufgaben 3 und 4. Auf die Frage, wann der kürzeste Weg wirklich der kürzeste ist, antworteten die SuS, dass es der kürzeste Weg ist, wenn ein Computerprogramm ihn als solchen bezeichnen würde. Auf meine Erwiderung hin, dass auch ein Computerprogramm diese Wege berechnen würde, wurde klar, dass in einem Computer nicht eine Vorauswahl der kürzesten Wege gespeichert ist, sondern ein Programm auf entsprechende Anfragen hin die kürzesten Wege berechnet. Die Überlegung, wie in einem Computerprogramm der kürzeste Weg gefunden wird, brachte hervor, dass alle Wege berechnet werden und dann der kürzeste aller Wege das Ergebnis ist. Auf die Abbruchbedingung, wie in den Unterrichtsentwürfen auf Seite 86 formuliert ist, kamen die SuS leider nicht. Aus Zeitgründen fuhr ich an dieser Stelle mit einem Vortrag fort und erläuterte die Abbruchbedingung und den daraus resultierenden Algorithmus grob.

Danach folgte das Aufgabenblatt *Vertiefung zum Breitensuch-Algorithmus*. Die erste Aufgabe konnten die SuS mittels des formulierten Algorithmus gut lösen. Die Aufgabe 2 dieses Aufgabenblattes lösten die SuS ebenfalls schnell, indem sie die Länge der Ihnen am längsten erscheinende Verbindung ablasen und die Antwort „Es sind maximal 5 Umschlagvorgänge notwendig“ gaben. Der Breitensuch-Algorithmus wurde also leider nicht an wenigstens einem der 14 Häfen durchgeführt, sondern es wurde die Aufgabe „auf einen Blick“ gelöst. Nach dieser richtigen Antwort war es mir nicht mehr möglich, die SuS davon zu überzeugen, die Aufgabe wie gedacht zu lösen. Zudem war das Treffen schon vorbei, so dass auch die Zusatzaufgabe nicht mehr behandelt wurde.

Reflexion

Der entscheidende Moment dieser Stunde war die Vorstellung des Problems der Kürzesten Wege, welches die SuS nicht als solches identifizierten. Dadurch waren alle folgenden Aufgaben nicht mehr relevant und das Treffen verlor die bisher gewohnte Ungezwungenheit. Aus dieser Entwicklung resultierten auch die Probleme bei den
5 folgenden Aufgaben und die Zeitnot am Ende des Treffens.

Eine Lösung für dieses Problem sehe ich darin, die nicht bearbeitete Zusatzaufgabe als Einstieg zu verwenden. Damit bietet sich den SuS nicht die Möglichkeit, die Ausgaben eines Computerprogrammes als Tatsachen anzuerkennen. Gleichzeitig können die SuS
10 das vorgestellte Problem eher als solches anerkennen. Der Sprung in eine andere Zeit verhindert auch die Möglichkeit, auf das eigene Vorgehen zu verweisen. Aussagen wie „Da rufe ich bei der Verkehrsgesellschaft an ...“ sind dann nicht mehr möglich. Dennoch ist es möglich, von diesem Eingangsbeispiel ausgehend, den Breitensuch-Algorithmus zu erarbeiten.

15 Nach diesem Einstieg und der Formulierung der zentralen Gedanken würde das Aufgabenblatt *Vertiefung zum Breitensuch-Algorithmus* folgen. Das Aufgabenblatt *Einstieg zu kürzesten Wegen* würde dann keine Verwendung mehr finden.

5.1.4. Kürzeste Wege in gewichteten Graphen

Die Durchführung

20 An diesem Treffen nahmen nur zwei SuS teil, darunter der SuS, der schon beim ersten Treffen anwesend war. Ein organisatorisches Problem ergab sich am Ende des Treffens. Da Handwerker in unserem Raum die Tafel auswechseln mussten, beendeten wir unser Treffen frühzeitig.

Die Stunde verlief im Groben nach Plan. Bei der Bearbeitung des Aufgabenblattes *Wiederholung zu kürzesten Wegen* zeigte sich, dass die SuS Probleme mit dem Breitensuch-Algorithmus hatten. Es war ihnen zum Einen der Ablauf des Algorithmus nicht mehr präsent, obwohl er auf dem Aufgabenblatt formuliert war, und zum Anderen wussten sie nicht, was mit der Formulierung $n + 1$ gemeint ist. An dieser Stelle wiederholte ich die Erläuterung zum Breitensuch-Algorithmus.
25

5.1. Durchführung in der Arbeitsgruppe

Die Aufgabe 2 des Aufgabenblattes führte ebenfalls zu Schwierigkeiten, da die SuS keine Idee hatten, nach welchen Kriterien neue Leitungen hinzugefügt werden könnten. Die einzige Idee zielte in Richtung Symmetrie der Leitungen. Auch nachdem ich die Idee der Ausfallsicherheit einbrachte, konnten die SuS keine Kanten nennen, da sie den Begriff nicht einordnen konnten. Nach der Erläuterung dieses Begriffes konnte die Aufgabe gelöst werden. 5

Das Aufgabenblatt *Einstieg zum Routenplanen* wurde gut gelöst. Die Aufgaben 1 – 3 brachten keine Probleme mit sich und die SuS erfassten schnell den Unterschied zwischen dem Breitensuch-Algorithmus und dem Algorithmus von Dijkstra. Die Aufgabe 4 bereitete den SuS in dem Punkt Probleme, dass es ihnen schwer fiel, den Algorithmus umzuformulieren. Ich drängte an dieser Stelle nicht darauf, den Algorithmus umzuformulieren. Hauptsache war, dass sie die Funktionsweise verstanden hatten. 10

Die Bearbeitung des Aufgabenblattes *Vertiefung zum Dijkstra-Algorithmus* führte bei einem SuS zu Unmut, da er keine Lust hatte, diese umfangreiche Aufgabe durchzuführen. Beim zweiten SuS löste diese Weigerung zusätzlichen Ehrgeiz aus, so dass er den ersten SuS zur gemeinsamen Bearbeitung überreden konnte. Leider wurde diese Aufgabe nicht zu Ende geführt, da wir durch die Handwerker unterbrochen wurden. 15

Reflexion 20

Die Probleme mit dem Breitensuch-Algorithmus am Anfang der Stunde lassen sich durch die vorherige Stunde erklären. Da der Algorithmus bei der letzten Aufgabe des Aufgabenblattes *Vertiefung zum Breitensuch-Algorithmus* nicht wiederholt geübt wurde, fehlte nun die Erfahrung im Umgang mit dem Algorithmus. Mit dieser Übung wäre die Bearbeitung des Aufgabenblattes *Wiederholung zu kürzesten Wegen* wohl kein Problem gewesen. 25

Man kann sich zusätzlich überlegen die Aufgabe 2 des Aufgabenblattes *Wiederholung zu kürzesten Wegen* zu streichen. Wenn die SuS offene Fragestellungen nicht gewohnt sind, bekommen sie an dieser Stelle Probleme. Leider bietet es sich hier nicht an, offene Fragestellungen zu üben, da der Schwerpunkt auf der Graphentheorie liegen soll. Der Umgang mit diesen Fragestellungen hätte über die gesamte Unterrichtseinheit eingeführt und geübt werden. 30

5. Praktische Umsetzung der Unterrichtsentwürfe

Die Formulierung des Dijkstra-Algorithmus habe ich nicht weiter vertieft, da es sich um ein AG-Treffen handelte und nicht um eine Schulstunde. In einer Schulstunde wäre die Formulierung Pflicht gewesen und es wäre sicherlich ein befriedigendes Ergebnis zu Stande gekommen.

- 5 Bei der Bearbeitung des Aufgabenblattes *Vertiefung zum Dijkstra-Algorithmus* würde es in einer Schulstunde ähnlich verlaufen wie oben beschrieben. Einige SuS würden ihren Unmut über die Aufgabe äußern, doch in der Gruppe würde die Aufgabe bearbeitet werden.

5.1.5. Fachwerke, Turniergraphen und perfektes Matching

10 Die Durchführung

Das letzte Treffen der AG fand im Mathematischen Institut in Göttingen statt. Dieser Ort wurde aufgrund der technischen Möglichkeiten des Multimediaraumes gewählt. Zu dessen Ausstattung gehört neben den Computern ein Smartboard. Das Treffen an diesem Ort wurde beim vorherigen Treffen angekündigt, so dass beide SuS des vorherigen Treffens ins Mathematische Institut gefunden haben.

Das Treffen begann damit, den SuS kurz den Multimediaraum zu erklären und sie in das ILIAS-System¹⁰² einzuweisen. Die SuS fanden sich mit dem System schnell zu Recht und konnten mit den Modulen beginnen. Ich empfahl den SuS mit dem Modul *Fachwerke und Graphen* zu beginnen. Bei der Bearbeitung des Moduls stellte sich
20 heraus, dass die SuS unmotiviert waren und die zugehörigen Aufgaben nur recht widerwillig lösten. Um dem entgegenzutreten, zeigte ich den SuS die Möglichkeiten des Smartboards und lies die Beiden in Partnerarbeit die Aufgaben am Smartboard bearbeiten. Diese Maßnahme motivierte die SuS zum Bearbeiten der Aufgaben. Durch die gemeinsame Bearbeitung konnte ich gleich Rückmeldung geben, ob die Lösung
25 richtig war.

Nachdem das erste Modul fertig bearbeitet war, forderte ich die SuS auf, dass nun jeder ein anderes der beiden übrigen Module bearbeiten sollte. Auch hier haben die SuS abwechselnd das Smartboard zur Lösung ihrer Aufgaben benutzt. Die letzte Aufgabe

¹⁰² Die erstellten Module wurden in das ILIAS-System der Universität Göttingen eingebunden und es wurden Gast-Accounts für die SuS eingerichtet.

5.1. Durchführung in der Arbeitsgruppe

des Moduls *Paare finden* führte bei dem SuS, der das Modul bearbeitete, zu Unverständnis. Leider konnten ihn meine auf den Lösungsseiten des Moduls vorgestellten Überlegungen nicht überzeugen.

Dieses Treffen schloss mit der Bearbeitung der Evaluation durch die SuS, deren Ergebnisse im Kapitel *Ergebnisse der Evaluation* ab Seite 131 vorgestellt werden.

5

Reflexion

Ich empfand dieses Treffen als gelungen. Die SuS haben das ILIAS-System angenommen und konnten damit gut arbeiten. Die Module und die zugehörigen Aufgaben haben die SuS bis auf die genannte Ausnahme gut angenommen und konnten alle Aufgaben lösen.

10

Zu der letzten Aufgabe des Moduls *Paare finden* lässt sich das Gleiche sagen wie zu der Aufgabe 2 des Aufgabenblattes *Wiederholung zu kürzesten Wegen*: Die SuS waren offene Aufgaben nicht gewohnt, so dass es eine Überlegung wert ist, diese Aufgabe zu streichen. Auch an dieser Stelle bietet es sich nicht an, offene Aufgaben zu üben.

15

Ein weiteres Problem zeigt sich in der Motivation der SuS. Allerdings kann man dieses Problem auf den Rahmen der Treffen zurückführen. Es handelt sich um eine AG außerhalb der regulären Schulzeit. Die SuS hatten schon einen vollen Schultag hinter sich und standen zudem unter besonderer Beobachtung durch mich in Bezug auf ihre Reaktionen zum Unterricht. Dadurch fehlte den SuS auch die Möglichkeit abzuschalten und neue Motivation zu sammeln.

20

5.2. Durchführung im Leistungskurs Informatik

Bei dem Leistungskurs Informatik handelt es sich um einen schulübergreifenden Leistungskurs von Göttinger Gymnasien für den zwölften Jahrgang. Dieser Leistungskurs wird von Herrn Modrow unterrichtet, der mir die Möglichkeit gab, in diesem Kurs
5 meine Unterrichtsentwürfe zu testen.

Zunächst war geplant, die beiden Unterrichtsentwürfe zum Thema kürzeste Wege zu testen. Daran konnten die SuS teilnehmen, die Interesse an dem Thema hatten und mit dem Projekt im Unterricht erheblich weiter waren als der Rest der SuS. Es ergaben sich sechs SuS, die an meinem Unterricht teilnahmen.

10 Zu einem späterem Zeitpunkt ergab sich die Möglichkeit mit dem gesamten Kurs, also ca. 25 SuS, den fünften Unterrichtsentwurf durchzuführen.

Datum	Stunde
25.09.2006	Kürzeste Wege in ungewichteten Graphen
09.10.2006	Kürzeste Wege in gewichteten Graphen
16.11.2006	Fachwerke, Turniergraphen und perfektes Matching

Da es sich um einen Leistungskurs Informatik handelte, habe ich die Unterrichtsentwürfe an zwei Stellen ein wenig geändert, um den Voraussetzungen der SuS entgegen-
15 zukommen. Die einzelnen Änderungen finden sich in der Beschreibung der Durchführung wieder.

5.2.1. Kürzeste Wege in ungewichteten Graphen

Änderungen zu den Unterrichtsentwürfen

Die wichtigste Änderung erfolgte in der Erarbeitung des Breitensuch-Algorithmus.
20 Mein Ziel war es, die SuS mit ihren Informatikkenntnissen in diesem Bereich stärker zu fordern. Deswegen sollten die SuS selbst versuchen einen Algorithmus für das Problem der kürzesten Wege in ungewichteten Graphen zu finden, bevor ich ihnen den formulierten Algorithmus mit dem Aufgabenblatt *Vertiefung zum Breitensuch-Algorithmus* präsentierte. Das Aufgabenblatt *Einstieg zu kürzesten Wegen* kürzte ich um die Auf-
25 gaben 3 und 4.

5.2. Durchführung im Leistungskurs Informatik

Die Durchführung

Zunächst begann die Stunde damit, dass Herr Modrow, der parallel mit den übrigen SuS des Leistungskurses Unterricht machte, einige organisatorische Dinge zu besprechen hatte und ich dann mit den interessierten SuS den Raum wechselte. Dort begann ich mit einer kurzen Einführung in die Graphentheorie und erläuterte den SuS die Begriffe „Graph“, „Kante“ und „Knoten“. Ebenso ging ich kurz auf die Begriffe „Weg“ und „Kreis“ ein sowie auf die Problematik der Eulergraphen. An dieser Stelle zeigte sich, dass einige SuS vom Königsberger Brückenproblem schon gehört und das Thema im Unterricht behandelt hatten.

Als Nächstes verteilte ich das Aufgabenblatt *Einstieg zu kürzesten Wegen*. Die beiden Aufgaben wurden in dieser Lerngruppe gut angenommen und meiner Planung entsprechend bearbeitet. Hier konnte dann die Unterscheidung zwischen gewichteten und ungewichteten Graphen gemacht werden.

Nun sollten die SuS in Partnerarbeit einen Algorithmus für das Problem der kürzesten Wege finden. Dazu hatten die SuS ca. 30 Minuten Zeit. Die Ergebnisse wurden dann von den drei Gruppen an der Tafel vorgeführt. Zu den vorgestellten Algorithmen gehörten rekursive Varianten, insbesondere eine Backtracking-Variante. Die dritte Gruppe stellte eine Idee vor, die mit einem Referenzweg arbeitete, den es zu verbessern galt, bis kein besserer Weg gefunden werden konnte. Alle Algorithmen hatten ihre Schwachstellen, so dass ich versuchte, die SuS mit gezielten Fragen auf den Weg zum Breitensuch-Algorithmus zu führen. Nach 20 Minuten konnten die SuS den Breitensuch-Algorithmus formulieren, so dass das Hauptziel der Stunde erreicht war. An dieser Stelle waren die 90 Minuten vorbei, so dass das Aufgabenblatt *Vertiefung zum Breitensuche-Algorithmus* nicht mehr bearbeitet werden konnte.

Reflexion

Ich empfand diese Stunde als sehr gelungen und sie hat mir auch Spaß gemacht. Allerdings hat mich das gemeinsame Entwickeln des Algorithmus aus den Ideen der SuS sehr gefordert.

Der Einstieg in das Thema mit den ersten beiden Aufgaben des Aufgabenblattes *Einstieg zu kürzesten Wegen* wurde gut angenommen und führte zum gewünschten Ziel. Diese Aussage lässt sich auch bei der folgenden Erarbeitung des Breitensuch-Algorithmus treffen. Ich konnte sicherlich nicht davon ausgehen, dass die SuS innerhalb von

5. Praktische Umsetzung der Unterrichtsentwürfe

30 Minuten den Algorithmus selbst entwickeln, jedoch waren die Ansätze und zentralen Überlegungen so brauchbar, dass sie in der Stunde zum Algorithmus geführt haben.

5 Dass die Zeit für das Aufgabenblatt *Vertiefung zum Breitensuch-Algorithmus* zu knapp wurde, versteht sich aufgrund der vorherigen Verzögerung von selbst, so dass an dieser Stelle im Unterrichtsentwurf nicht falsch geplant wurde. Ebenso konnte die Zusatzaufgabe nicht mehr bearbeitet werden.

5.2.2. Kürzeste Wege in gewichteten Graphen

Änderungen zu den Unterrichtsentwürfen

10 Nachdem in der vorherigen Stunde weniger geschafft wurde, als geplant war, mussten für diese Stunde einige Änderungen vorgenommen werden. Zunächst startete die Stunde mit der Bearbeitung des Aufgabenblattes *Vertiefung zum Breitensuch-Algorithmus*, darauf folgte das Aufgabenblatt *Einstieg zum Routenplanen*. Das Aufgabenblatt *Wiederholung kürzeste Wege* wurde aus zeitlichen Gründen nicht bearbeitet.

15 Zum Abschluss der Stunde erläuterte ich kurz den Distanzvektor-Algorithmus zum Routen von Paketen in einem Netzwerk.¹⁰³ Dieser wurde eingeschoben, um den Inhalt mehr nach dem Fach Informatik auszurichten. Nach der Erläuterung des Distanzvektor-Algorithmus wurde ein Rollenspiel vollzogen. Dabei waren vier Gruppen notwendig, die jeweils einen Router im Netzwerk repräsentierten. Ebenso gab es für jeden
20 Router die Informationen, mit welchen Routern er zu welchen Kosten verbunden war. Daraufhin sollten die SuS den Distanzvektor-Algorithmus durchspielen und ihre Routingtabellen entsprechend austauschen, bis keine Verbesserungsmöglichkeiten mehr gefunden wurden.

Die Durchführung

25 Diese Stunde wurde mit fünf SuS durchgeführt, da sich ein SuS krank gemeldet hatte. Diesmal waren keine organisatorischen Vorbereitungen zu führen, so dass der Un-

¹⁰³ Dieses Thema gehört nicht primär zu dieser Arbeit, so dass sich keine Erläuterung in Kapitel 1 findet. Für weitere Informationen zum Distanzvektor-Algorithmus verweise ich deswegen auf die Literatur, z.B. DIMITRI BERTSEKAS und ROBERT GALLAGER: *Data Networks*. London: Prentice-Hall International, Inc., 1987, S. 325–333.

5.2. Durchführung im Leistungskurs Informatik

terricht pünktlich beginnen konnte. Die Stunde verlief nach Plan, bis auf ein kleineres Problem am Ende der Stunde.

Die Beschreibung des Breitensuch-Algorithmus auf dem ersten Aufgabenblatt *Vertiefung zum Breitensuch-Algorithmus* nahmen die SuS gut an, sie konnten ihre Ideen von der letzten Stunde wiederfinden und der Beschreibung des Algorithmus gut folgen. Ebenso wurden die Aufgaben des Aufgabenblattes gelöst.

Das Aufgabenblatt *Einstieg zum Routenplanen* erfüllte ebenfalls seine Bestimmung. Die SuS erkannten schnell das Prinzip des Dijkstra-Algorithmus und konnten die zentralen Unterschiede zum Breitensuch-Algorithmus benennen. Auch eine grobe und mündliche Formulierung des Algorithmus gelang an dieser Stelle.

Für das nächste Thema, der Distanzvektor-Algorithmus, blieb leider wenig Zeit, so dass ich ihn nur kurz erläutern konnte, bevor wir das Rollenspiel begannen. Die vier Router wurden so aufgeteilt, dass sich die SuS in zwei Zweiergruppen und einen einzelnen SuS aufteilten und ich den vierten Router übernahm. Leider gelang die Ausführung des Rollenspiels nicht so gut. Einige SuS hatten das Konzept noch nicht ganz verstanden, andere SuS spielten einen Router, der nur einen Nachbarn und somit nicht viel zu tun hatte. Zudem hatte ich zu wenige Routingtabellen für die SuS kopiert und ausgeteilt. Am Ende hatten die SuS zwar das Konzept verstanden, aber das Rollenspiel konnte aufgrund des Stundenendes nicht zu Ende geführt werden.

Reflexion

Diese Stunde verlief wie die vorherige Stunde gut und nach Plan. Die vorgenommenen Änderungen zum Unterrichtsentwurf in Kapitel 4 haben gegriffen und führten zum gewünschten Erfolg, so dass die SuS den Breitensuch-Algorithmus beherrschten und darauf aufbauend den Dijkstra-Algorithmus entwickeln konnten. Das Aufgabenblatt *Einstieg zum Routenplanen* half den SuS dabei den Dijkstra-Algorithmus zu entwickeln und die zentralen Unterschiede zum Breitensuch-Algorithmus zu benennen.

Der Abschluss der Stunde durch den Distanzvektor-Algorithmus war leider nicht so erfolgreich. Ich erkläre mir diese Entwicklung vor allem durch zwei Komponenten. Zum Einen war die Hereinnahme des Algorithmus zu viel für diese Stunde, so dass die SuS nicht mehr genügend aufnahmefähig für etwas Neues waren und die Zeit zur

sinnvollen Erläuterung fehlte. Zum Anderen war das Rollenspiel nicht genug durchdacht. Hätte ich es vorher einmal selbst durchgespielt, wäre mir aufgefallen, dass die Anzahl der Routingtabellen zu niedrig gewesen ist und dass ein Router zu wenig zu tun hatte. In diesem Fall wäre eine Möglichkeit gewesen, dass ich diesen Router übernommen hätte. Eine weitere Möglichkeit wäre gewesen, das Netz mit mehr Kanten zu versehen und damit jedem Router eine größere Anzahl an Verbindungen zuzuteilen. Ebenso wären vielleicht mehr Router angemessen gewesen, so dass jeder SuS alleine einen Router repräsentiert hätte. Das hätte den Lerneffekt erhöht.

5.2.3. Fachwerke, Turniergraphen und perfektes Matching

10 Die Durchführung

Die letzte Stunde im Leistungskurs Informatik fand mit allen SuS des Kurses statt. Ich konnte eine Doppelstunde, die Herr Modrow aus terminlichen Gründen hatte ausfallen lassen müssen, nutzen, um den Unterrichtsentwurf *Fachwerke, Turniergraphen und perfektes Matching* durchzuführen.¹⁰⁴

15 Für das ILIAS-System nutzte ich auch hier die ILIAS-Installation der Universität Göttingen und richtete den SuS vorher Gastaccounts ein. Ebenso ließ ich die SuS am Ende der Stunde die Evaluation durchführen.

Die Stunde verlief sehr gut. Nachdem ich den SuS kurz die wichtigsten Begriffe zur Graphentheorie erläutert hatte, nannte ich den SuS die URL der ILIAS-Installation und vergab die Accountdaten. Danach konnten die SuS mit ihrer Bearbeitung starten. Auch hier gab ich den SuS die Empfehlung mit dem Modul *Fachwerke und Graphen* zu beginnen. Ich ließ an dieser Stelle bewusst offen, dass es Aufgaben in diesen Modulen gibt und wie sie zu bearbeiten seien. Ich wollte beobachten, wie die SuS auf die Aufgaben reagieren und sie lösen. Die Lösungsvorschläge am Ende der Module hatte ich deaktiviert, so dass die SuS untereinander ihre Lösungen vergleichen oder mich nach der Richtigkeit ihrer Lösungen fragen mussten.

Die Bearbeitung der Module erfolgte ohne Probleme. Auffällig waren die Schwierigkeiten der SuS mit der letzten Aufgabe des Moduls *Paare finden*. Die SuS konnten mit

¹⁰⁴ Aufgrund der geringen Teilnahme an der AG wollte ich eine weitere Möglichkeit nutzen, um diesen Unterrichtsentwurf durchzuführen.

5.2. Durchführung im Leistungskurs Informatik

der Aufgabe nichts anfangen und wussten nicht, auf welches Ergebnis ich dabei hinaus wollte. Ebenso hatten die SuS Schwierigkeiten mit der Erläuterung der bipartiten Graphen in diesem Modul.

Die Anzahl der Module war genau ausreichend. Die schnelleren SuS hatten am Ende der Stunde alle drei Module samt der Aufgaben bearbeitet und benötigten dafür die vollen 90 Minuten. Die anderen SuS hatten zwei Module zu Ende bearbeitet. Lediglich ein SuS brauchte weniger als 90 Minuten für die drei Module, der jedoch keine der Aufgaben bearbeitet hatte.

Meine Beobachtungen zum Umgang mit den Aufgaben war, dass bis auf einen SuS alle die Aufgaben bearbeiteten. Einige SuS fragten jedoch, ob und wie sie die Aufgaben lösen sollten. Ich überlies an dieser Stelle wiederum den SuS die Entscheidung.

Reflexion

Auch diese Stunde sehe ich als gelungen an. Die SuS kamen sehr gut mit dem ILIAS-System und den Modulen sowie den Aufgaben zurecht, so dass ich wenige Fragen zu beantworten hatte, die sich überwiegend mit technischen Problemen befassten. Die Erklärungen der Module konnten die meisten SuS nachvollziehen bis auf die genannten Probleme mit den bipartiten Graphen. Diese Probleme sehe ich vor allem in der kurzen Erläuterung der bipartiten Graphen ohne ein ausreichendes graphisches Beispiel einzubringen. Zur weiteren Verwirrung führte die Eigenschaft der bipartiten Graphen, die auf der nachfolgenden Seite des Moduls diskutiert wird. An dieser Stelle könnte das Modul überarbeitet werden.

Ebenso könnte die letzte Aufgabe des Moduls *Paare finden* gestrichen werden. Die offene Fragestellung bedarf ein gewisses Training der SuS, welches man nicht voraussetzen kann. Damit ist eine wichtige Voraussetzung für diese Aufgabe nicht gegeben und sie ist in diesem Sinne nicht von den SuS lösbar.

Am meisten freute mich die Frage einiger SuS am Ende der Stunde, ob denn in der nächsten Stunde Zeit sei, um das übrige Modul zu bearbeiten. Diesen SuS schien der Unterricht gefallen zu haben.

5. *Praktische Umsetzung der Unterrichtsentwürfe*

6. Ergebnisse der Evaluation

Dieses Kapitel behandelt die Evaluation, die mit den SuS am Ende der Stunde *Fachwerke, Turniergraphen und perfektes Matching* durchgeführt wurde. Dabei werden die Fragen erläutert und die Ergebnisse kurz dargestellt. Eine ausführliche Interpretation der Ergebnisse wird in Kapitel 7 durchgeführt.

5

Die zu Grunde liegenden Daten wurden sowohl im Leistungskurs als auch in der AG gesammelt und zusammengeführt. Dies geschah zum Einen um eine möglichst breite Datengrundlage zu haben und zum Anderen um die Datengrundlage inhomogen zu gestalten und dadurch die Aussagefähigkeit zu erhöhen. Es ist klar, dass für $n = 18$ nur von einer sehr geringen Aussagekraft ausgegangen werden kann. Doch können diese Daten meine Aussagen in Kapitel 7 untermauern.

10

Die Fragen der Evaluation lassen sich thematisch in sechs Kapitel einteilen. Die Fragen erstrecken sich über die Themen *Art des Unterrichts, Bearbeitung der Module und Aufgaben, Bewertung der einzelnen Module, Interesse an der Graphentheorie, Bewertung der ersten vier Unterrichtsstunden* und *Verständnis der Graphentheorie*. Dabei gilt für alle Kapitel $n = 18$ außer dem Kapitel über die *Bewertung der ersten vier Unterrichtsstunden*. Hier beträgt n lediglich 2, so dass die dortigen Ergebnisse wenig berücksichtigt werden können. Im Kapitel über das *Verständnis der Graphentheorie* waren Freitextantworten gefordert, die hier nicht alle aufgezeigt werden, sondern lediglich eine Auswahl der Ergebnisse präsentiert wird.

15

20

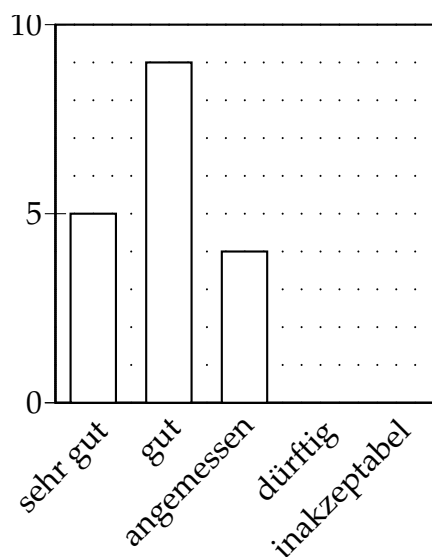
Die Ergebnisse werden grafisch dargestellt. Die genauen Fragen der Evaluation finden sich in den Bildunterschriften der Abbildungen, die Antwortmöglichkeiten werden im Text erläutert und in der Beschriftung der Abbildungen oft zu Stichpunkten zusammengefasst.

6.1. Zur Art des Unterrichts

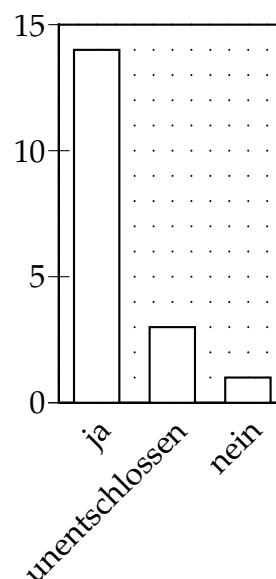
Zunächst wurden die SuS gefragt, wie ihnen die Art des Unterrichts der letzten Unterrichtsstunde gefallen hat. Mit der Art des Unterrichts meine ich die selbständige Arbeit am Computer mit vorgefertigten Modulen und Aufgaben. Das Antwortspektrum bildete eine Fünferskala.

Die zweite Frage zielte auf die Neigung der SuS, einen solchen Unterricht zu wiederholen. Diese Frage dient zum Einen als Kontrollfrage zur ersten Frage und zum Anderen stärkt es die Aussagekraft weiter. Es standen drei Antworten zur Auswahl.

Die Abbildung 6.1 zeigt jeweils ein Diagramm zu den Fragen mit der Verteilung der Antworten.



(a) Frage: Wie hat Dir die Art des Unterrichts heute gefallen?



(b) Frage: Könntest Du Dir weiteren Unterricht in dieser Form vorstellen?

Abbildung 6.1.: Ergebnisse der Fragen zur Art des Unterrichts.

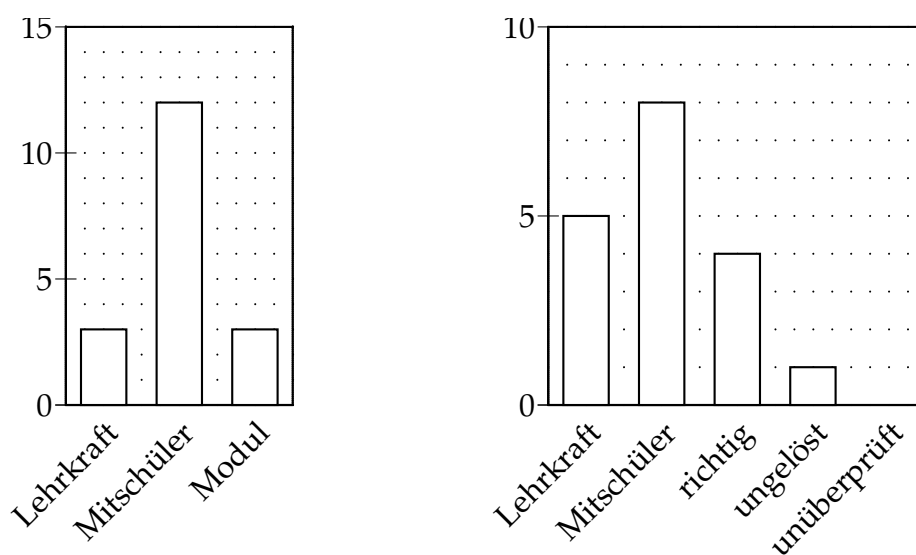
Die Ergebnisse zeigen, dass die SuS dieser Art des Unterrichts überwiegend positiv gegenüberstehen und ihn wiederholen würden. Die eine ablehnende Stimme und die drei unentschlossenen Stimmen können an dieser Stelle vernachlässigt werden, solange man nicht nur auf diese eine Art des Unterrichts setzt.

6.2. Zum Bearbeiten der Module und Aufgaben

Der zweite Themenblock befasst sich mit der Arbeitsweise der SuS. Dabei gilt es zu messen, wie die SuS mit der Bearbeitung der Aufgaben selbständig umgegangen sind, so wie es bei dieser Art des Unterrichts von ihnen gefordert wird.

Die erste Frage misst das Verhalten der SuS bei Unklarheiten in den Erläuterungen oder den Beispielen in den Modulen. Dabei standen die Antworten *Vergleich mit den Mitschülern, die Lehrkraft fragen* und *das Modul intensiv lesen, bis die Antwort gefunden wurde* zur Auswahl. 5

Die zweite Frage sucht nach dem Verhaltensmuster bei der Überprüfung der Aufgaben. Diese Frage wurde gesondert gestellt, da es die Option gab, die Aufgaben nicht zu bearbeiten. Die Antworten erstreckten sich über *Lehrkraft fragen, mit Mitschülern vergleichen, Meine Aufgaben sind immer richtig!*, *Aufgaben nicht bearbeitet* bis zu *Ich habe die Aufgaben nicht überprüft*. 10



(a) Frage: Wenn in den Modulen für Dich etwas unklar war, wen hast Du zuerst gefragt?

(b) Frage: Wenn Du eine Aufgabe gelöst hast, Dir aber die Möglichkeit fehlte, Deine Antwort zu vergleichen, wen hast Du gefragt?

Abbildung 6.2.: Ergebnisse der Fragen zum Bearbeiten der Module und Aufgaben.

An den Ergebnissen in der Abbildung 6.2 wird die Selbständigkeit der SuS deutlich. 66% der SuS haben sich bei Fragen zu den Modulen Hilfe bei Mitschülern bzw. beim 15

Nachbarn gesucht. Dies steigert bei den SuS zum Einen die Kompetenz, über den mathematischen Inhalt zu sprechen, vertieft aber zum Anderen auch die Kenntnis des Themas, da man mit anderen Sichtweisen konfrontiert ist und sich dabei neue Einsichten ergeben können.

- 5 Weniger homogen scheint da das Verhalten beim Vergleichen der Aufgaben, doch muss man hier die Ergebnisse genauer betrachten. Wenn die SuS wissen, dass ihre Aufgaben richtig gelöst sind, so ist das das Ziel von Selbständigkeit. Sicher fehlt hier die Prüfung, ob die Aufgaben wirklich richtig gelöst worden sind, doch das gestehe ich den SuS an dieser Stelle zu. Sehr wahrscheinlich wurden diese Lösungen auch
10 von anderen SuS zum Vergleich benutzt, so dass sich dort Fehler gefunden hätten. Somit sind es wiederum ca. 66% der SuS, die selbständig die Aufgaben gelöst haben.

6.3. Bewertung der einzelnen Module

- Ein weiterer Teil der Evaluation beschäftigte sich mit der Bewertung der einzelnen
15 Module durch die SuS. Hier sollten die SuS die einzelnen Module in den Kategorien *Erklärungen*, *Beispiele* und *Aufgaben* bewerten. Die vorangestellte Frage, wer welche Module bearbeitet hatte, ergab für das *Fachwerke und Graphen* $n = 16$, für *Paare finden* $n = 12$ und für das Modul *Turniergraphen* $n = 11$. Für die Bewertung der Module in den einzelnen Kategorien konnten die SuS Noten von 1 bis 6 vergeben, in Anlehnung
20 an die Schulnoten.¹⁰⁵

6.3.1. Bewertung des Moduls *Fachwerke und Graphen*

Die Abbildung 6.3 auf der gegenüberliegenden Seite zeigt die Ergebnisse der Bewertung des Moduls *Fachwerke und Graphen*. Dabei wird deutlich, dass die SuS dieses Modul durchweg positiv bewerteten.

- 25 Erfreulich sind in dieser Abbildung die hohen Werte im Notenbereich 1 und 2. Lediglich die Aufgaben kommen nicht so gut weg, was daran liegen mag, dass keine anwendungsorientierten Aufgaben gestellt wurden, sondern die SuS mit abstrakten Gittermodellen arbeiten sollten.

¹⁰⁵ Die SuS des Leistungskurses waren an dieser Stelle durch das Punktesystem der Oberstufe verwirrt, was jedoch frühzeitig aufgelöst werden konnte.

6.3. Bewertung der einzelnen Module

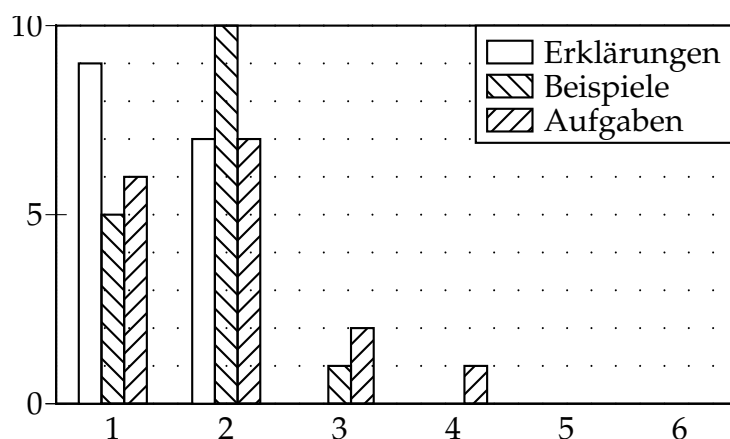


Abbildung 6.3.: Frage: Welche Note gibst Du dem Modul *Fachwerke und Graphen* für die Erklärungen, die Beispiele und die Aufgaben?

Es ergibt sich bei gleicher Gewichtung der einzelnen Bewertungen eine Durchschnittsnote von 1.7 durch die SuS.

6.3.2. Bewertung des Moduls *Paare finden*

Für das Modul *Paare finden* zeigt die Abbildung 6.4 die Ergebnisse. Hier konzentrieren sich die Ergebnisse auf die Noten 2 und 3, wobei auch sechs Stimmen im Einsbereich zu finden sind.

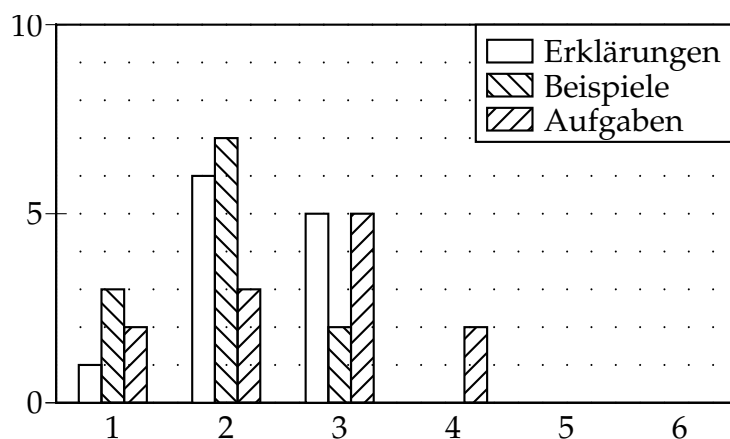


Abbildung 6.4.: Frage: Welche Note gibst Du dem Modul *Paare finden* für die Erklärungen, die Beispiele und die Aufgaben?

Die relativ schlechten Bewertungen in den Kategorien *Erklärungen* und *Aufgaben* begründen sich zum Einen durch die ungenügende Erklärung des Begriffes „bipartit“

und zum Anderen auf den darauf aufbauenden Aufgaben, mit denen die SuS folgerichtig Schwierigkeiten gehabt haben. Als Durchschnittsnote errechnet sich eine 2.3 für die Bewertung durch die SuS.

6.3.3. Bewertung des Moduls *Turniergraphen*

- 5 Als Drittes wurde das Modul *Turniergraphen* bewertet. Die Ergebnisse dieser Bewertung finden sich in Abbildung 6.5. Hier zeigt sich ebenfalls eine Konzentration der Stimmen auf den Zweier- und Dreierbereich. Der Einserbereich ist mit 4 Stimmen vertreten, während sich im Bereich 4 bis 6 zwei Stimmen finden.

Es ergibt sich eine Durchschnittsnote von 2.3.

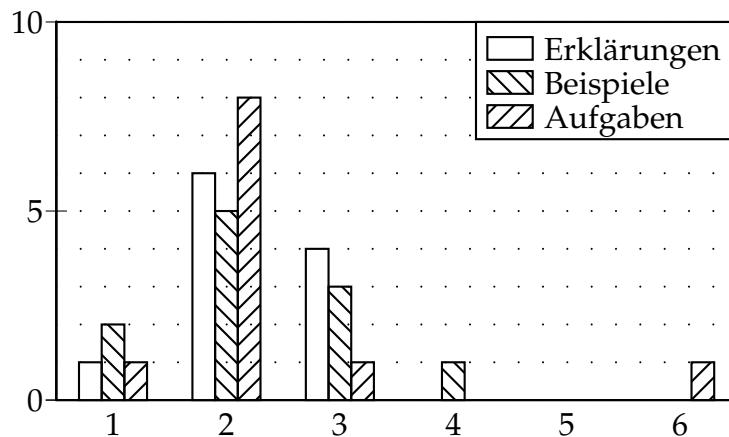


Abbildung 6.5.: Frage: Welche Note gibst Du dem Modul *Turniergraphen* für die Erklärungen, die Beispiele und die Aufgaben?

10 6.4. Zum Interesse an der Graphentheorie

Die SuS wurden zu ihrer Einstellung zur Graphentheorie befragt. Dabei sollten sie sich dazu äußern, wie sehr sie den folgenden fünf Aussagen zustimmen. Als mögliche Antworten standen *eindeutig wahr*, *wahr*, *unentschlossen*, *falsch* und *eindeutig falsch* zur Verfügung.

- 15
- Mir hat die Graphentheorie gut gefallen.
 - Ich fand das Thema interessant und ansprechend.

6.4. Zum Interesse an der Graphentheorie

- Mir haben die Beispiele und Anwendungen gut gefallen.
- Die Graphentheorie ist eines der wenigen Themen in der Mathematik, das mir in meinem Leben weiterhilft.
- Ich möchte mehr über die Graphentheorie wissen.

Die ersten beiden Aussagen zielen auf die allgemeine Neigung zum Thema *Graphentheorie* ab, während die dritte Aussage die Bewertung der einzelnen Module nochmals zusammenfasst. Die vierte Aussage fragt nach der Praxisrelevanz des Themas für die Umwelt der SuS und inwieweit die SuS diese erkannt haben. Da sich objektiv eine solche Praxisrelevanz für die SuS nicht erkennen lässt, dient diese Aussage vor allem zur Überprüfung der SuS, wie ernst sie die Evaluation ausfüllen.¹⁰⁶ Die Aussage 5 testet, wie stark das geweckte Interesse der SuS ist.

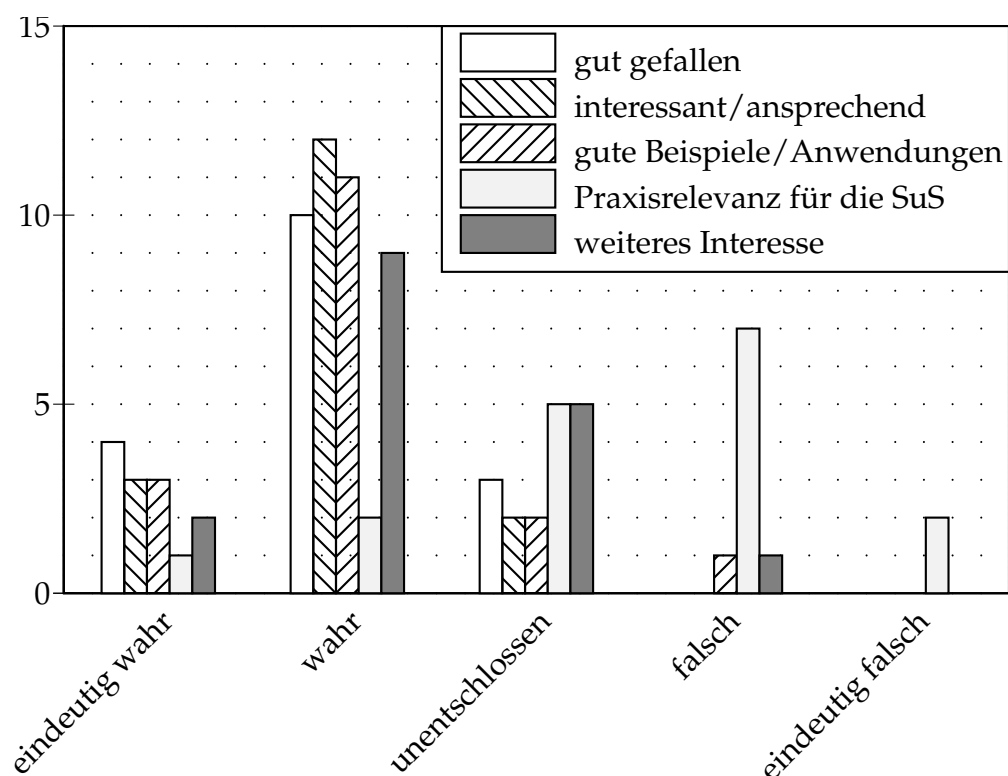


Abbildung 6.6.: Fünf Fragen zum Interesse an der Graphentheorie.

¹⁰⁶ Die Praxisrelevanz für die SuS darf hier nicht mit dem Praxisbezug der Themen verwechselt werden!

Die Abbildung 6.6 auf der vorherigen Seite zeigt die Ergebnisse bezüglich der oben vorgestellten Fragen.¹⁰⁷ Es ergibt sich, dass die SuS den Aussagen überwiegend zustimmen konnten, wobei die vierte Aussage eher abgelehnt wurde.

Die ersten beiden Aussagen wurden von keinem SuS abgelehnt, lediglich zwei bzw. drei SuS waren unentschieden. Die dritte Aussage wird lediglich von einem SuS abgelehnt und zwei SuS waren unentschieden. Damit wird das Gesamtbild der Bewertung der einzelnen Module bestätigt.

Das Ergebnis bezüglich der vierten Aussage zeigt, dass die SuS keine Praxisrelevanz für sich feststellen konnten. Dies zeigt nach obiger Ausführung, dass die SuS die Evaluation gewissenhaft ausgefüllt haben und die Ergebnisse somit verwertbar sind.

Der Aussage 5 konnten sechs SuS nicht zustimmen, also ca. 33%. Das bedeutet, dass bei 66% der SuS das Interesse für weitere Unterrichtsstunden über Graphentheorie besteht.

6.5. Bewertung der ersten vier Unterrichtsstunden

Die beiden SuS der Arbeitsgemeinschaft haben zu den bisherigen Fragen auch die ersten vier Unterrichtsstunden bewertet. Diese Ergebnisse werden hier kurz vorgestellt. Die Bewertung der Unterrichtsstunden erfolgte dabei in den Kategorien *Unterricht* und *Aufgaben*. Da allerdings die Bewertung der einzelnen Unterrichtsstunden in beiden Kategorien äquivalent sind, bilde ich hier nur ein Diagramm ab.¹⁰⁸

Die Abbildung 6.7 auf der gegenüberliegenden Seite zeigt das Ergebnis der Bewertung. Dabei wurden die Unterrichtsstunden und Aufgaben überwiegend mit der Note 1 bewertet. Lediglich die Unterrichtsstunden *Eulergraphen und Briefträger* und *Kürzeste Wege in ungewichteten Graphen* wurden von einem SuS mit einer 2 bewertet.

¹⁰⁷ Bei genauerem Hinsehen zeigt sich, dass hier nur noch 17 SuS an der Evaluation teilgenommen haben.

¹⁰⁸ Es ist zu beachten, dass die Unterrichtsstunden *Einführung und Grundlegung der Begriffe* von nur einem der beiden SuS besucht wurde.

6.6. Zum Verständnis der SuS von Graphentheorie

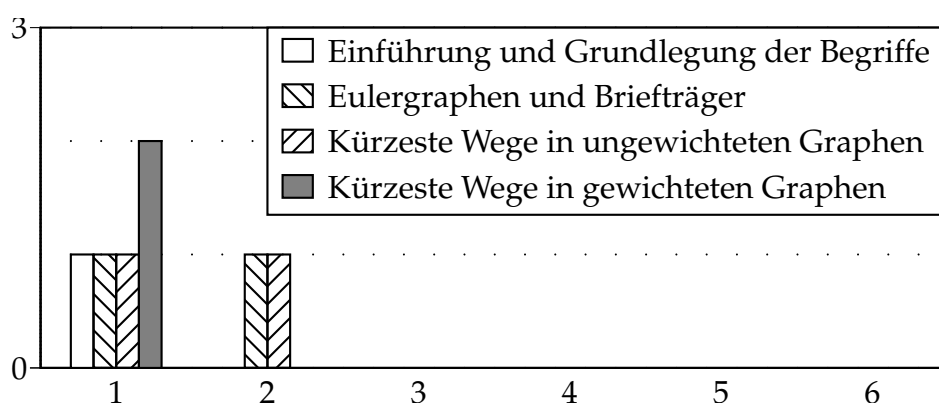


Abbildung 6.7.: Bewertung der ersten vier Unterrichtsstunden.

6.6. Zum Verständnis der SuS von Graphentheorie

Die letzte Frage der Evaluation befasst sich damit, was Graphentheorie mit Mathematik zu tun hat. Die SuS sollten ihre Antwort frei formulieren, es wurden keine Antworten zur Auswahl vorgegeben. An dieser Stelle werden auch nicht alle Antworten systematisch aufbereitet, sondern eine kleine Auswahl präsentiert.

5

Die Antworten der SuS lassen sich kurz in zwei Kategorien einteilen, die inhaltsleeren und die inhaltvollen Antworten. Zu den inhaltsleeren Antworten zähle ich z.B. Zitate aus Wikipedia oder Antworten wie „42“. Ebenso zähle ich Antworten wie „weiß nicht“ oder „genug“ dazu. Diese Kategorie umfasst acht Antworten.

Die ernstgemeinten Antworten umfassen neun Antworten. Dazu gehören Antworten, die zeigen, dass die SuS das Thema Graphentheorie nicht richtig einordnen können: „Könnte zum Gebiet der Funktionen gehören“ oder „[...] Graphen sind ja auch in der Mathematik überall in der Analysis vorhanden.“ Hier zeigt sich, dass die SuS einen Graphen mit einem Funktionsgraphen verwechseln. Da an dieser Evaluation vor allem SuS teilgenommen haben, die keine der ersten vier Unterrichtsstunden besucht haben, erklärt sich dieses schlechte Ergebnis teilweise. Dennoch muss der Unterrichtsentwurf der fünften Stunde in dieser Hinsicht überarbeitet werden.

10

15

Weitere Antworten sind eher allgemein gehalten: „Mathematiker + Problem = Formel / Allgemeingültigkeit“ oder „In der Mathematik wird auch immer versucht alles möglichst kurz zu fassen. Dies versucht man auch bei der Graphentheorie.“

20

Weiterhin gibt es auch Antworten, die es schaffen, die Graphentheorie recht gut einzuordnen und weitere Anwendungsgebiete zu nennen: „Könnte bei Netzwerkproblemen

6. *Ergebnisse der Evaluation*

helfen, in der Mathematik wahrscheinlich Algorithmen“ oder „Algebraische Strukturen? Mengelehre?“

7. Auswertung der Unterrichtseinheiten

Das folgende Kapitel verbindet die bisherigen Bestandteile der Arbeit. Die in den Kapiteln 2 und 3 formulierten Ziele zum Einsatz von Graphentheorie und Neuen Medien im Unterricht werden nun auf ihre Umsetzungen in den Unterrichtsentwürfen (Kapitel 4) geprüft. Dabei wird insbesondere auf die Beobachtungen bei der Durchführung des Unterrichts (Kapitel 5) und der Auswertung der Evaluation (Kapitel 6) eingegangen. Um zwischen dem Lehren von Graphentheorie und dem Einsatz von Neuen Medien wohl unterscheiden zu können, werden sie einzeln betrachtet.

7.1. Zur Graphentheorie

Im Kapitel 2.3 auf der Seite 51 wurden folgende Ziele in Bezug auf die Vermittlung von graphentheoretischen Inhalten formuliert: Eine möglichst breite Übersicht über die Graphentheorie, insbesondere keine Reduktion auf die Kombinatorische Optimierung steht in dieser Arbeit im Vordergrund, ebenso die Formulierung methodischer und unterrichtsrelevanter Überlegungen zu den Unterrichtsentwürfen und eine Bewertung der Entwürfe aufgrund den Erfahrungen mit den SuS.

Die Unterrichtsentwürfe bieten eine breite Auswahl von Themen aus der Graphentheorie an. Themen aus der Kombinatorischen Optimierung sind sicherlich durch die Diskussion der kürzesten Wege enthalten, jedoch lassen sich die drei Anwendungsthemen Matchings, Fachwerke und Turniergraphen hier nicht zuordnen. Das Thema Eulergraphen fällt ebenfalls nicht unter dem Begriff „Kombinatorische Optimierung“, bis auf die Anwendung auf dem Aufgabenblatt *Neue Begriffe und Vertiefung zu Eulergraphen*. Für eine vollständige Übersicht fehlen jedoch z.B. die Bereiche *Färbung von Graphen*, *minimal aufspannende Bäume* oder *Hamiltongraphen*.

7. Auswertung der Unterrichtseinheiten

Die vier definierten Bereiche von HANS-GÜNTHER BIGALKE¹⁰⁹ wurden ebenfalls abgedeckt:

Modelle für Probleme, die eine algorithmische Lösung erfordern

werden im Zusammenhang mit dem Hierholzer-Algorithmus und den kürzesten Wegen betrachtet.

Lösungen von Problemen mit Hilfe graphentheoretischer Sätze

werden durch das Thema Eulergraphen behandelt.

Veranschaulichung von (eventuell komplizierten) Zusammenhängen

kann man im Thema Fachwerke und Graphentheorie finden.

Leichtverständliche Probleme mit beliebig hohem Schwierigkeitsgrad

ziehen sich durch die gesamten Unterrichtsentwürfe. Ein Beispiel dazu ist die Durchführung der Unterrichtsstunden zu den kürzesten Wegen sowohl mit SuS der elften Klasse und einem Leistungskurs Informatik aus Jahrgang 12.

„Die immense Anwendungsfreudigkeit, die große Anschaulichkeit und die weitgestreute Problemfreudigkeit auf jedem beliebigen Niveau“¹¹⁰ finden sich ebenfalls in jedem einzelnen Entwurf wieder und werden vor allem in den Aufgaben deutlich.

Die methodischen und unterrichtsrelevanten Überlegungen wurden zu jeder Unterrichtsstunde formuliert und soweit wie möglich durch die Beobachtungen während der Durchführung ausgewertet. Ebenso wurden Unterrichtsziele in Form von Kompetenzen formuliert. Ob diese Ausführungen hilfreich sind, muss jeder Leser für sich selbst beurteilen.

Die Erfahrungen, die in Kapitel 5 formuliert sind, zeigen, dass die SuS das Thema gut angenommen und Spaß und Interesse an der Graphentheorie gefunden haben. Auch die Ergebnisse der Evaluation über das Interesse an der Graphentheorie¹¹¹ bestätigen diese Aussage.

In Bezug auf die Unterrichtsentwürfe lässt sich die Aussage machen, dass die Lernziele erreicht worden sind. Anzeichen dazu finden sich zum Einen in der überwiegend unproblematischen Durchführung der Unterrichtsstunden und zum Anderen zeugt die Situation zu Beginn der zweiten Stunde davon, in der die SuS keine Idee für die

¹⁰⁹ Vgl. Seite 45 dieser Arbeit.

¹¹⁰ HANS-GÜNTHER BIGALKE: Über die mögliche Bedeutung der Graphentheorie beim Lernen von Mathematik, S. 191.

¹¹¹ Vgl. dazu Abbildung 6.6 auf der Seite 137.

7.1. Zur Graphentheorie

Modellierung des Königsberger Brückenproblems fanden bis auf der SuS, der auch am ersten Treffen teilgenommen hatte.

Die Durchführung der Unterrichtsreihe zeigt weiterhin, dass die dritte Unterrichtsstunde problemfälliger ist. Mir ist es im Unterricht schwer gefallen, die SuS vom Problem der kürzesten Wege zu überzeugen. Auch wenn es letztendlich gelungen ist, der Weg dorthin verbesserungswürdig. Mein Vorschlag auf Seite 120 sieht in einer neuen Reihenfolge der Aufgaben die Lösung. Dabei wird die ursprüngliche Zusatzaufgabe der Stunde zur Einführung gewählt, bei der die SuS nicht auf andere Instanzen wie die Ausgaben eines Computers verweisen können. 5

Die weiteren Abweichungen von den Entwürfen lassen sich vor allem mit der geringen Gruppengröße erklären. In größeren Gruppen herrschen andere Dynamiken, die genutzt werden können, aber in der beschriebenen Durchführung fehlten. 10

Die Auswertung der Evaluation in Bezug auf die ersten vier Unterrichtsstunden und die Bewertung der Module der fünften Unterrichtsstunde belegen, dass die Aufgaben die SuS überwiegend angesprochen und motiviert haben. Diese Erkenntnis wird durch die Beobachtungen bei der Durchführung bestätigt. Die SuS haben keine der Aufgaben abgelehnt. 15

Leider zeigt die Evaluation auch, dass der Begriff Graph - zumindest bei einigen SuS des Leistungskurses Informatik, die nur an der fünften Stunde teilgenommen haben - weiterhin mit dem bekannten Begriff *Funktionsgraph* gleichgesetzt wurde. Hier muss der Unterschied noch deutlicher formuliert werden. 20

Nach dieser Auswertung zeigt sich, dass die Graphentheorie ein interessantes und lohnenswertes Gebiet der Schulmathematik sein kann. Ebenso wurde gezeigt, dass die Reduktion der Graphentheorie auf die kombinatorische Optimierung nicht notwendig ist, sondern sich auch andere, für SuS interessante und ansprechende Themen aus der Graphentheorie finden lassen. 25

Ebenso zeigt sich, dass die gesetzten Ziele bezüglich der Graphentheorie zur vollsten Zufriedenheit erfüllt worden sind. Lediglich in der Auswahl und Reihenfolge weniger Aufgaben gibt es Verbesserungsbedarf, der schon formuliert wurde.

7.2. Zu webbasierten Lernumgebungen

Die im Kapitel 3.6 ab Seite 60 formulierten Ziele beziehen sich auf den Einsatz von webbasierten Lernumgebungen im Mathematikunterricht. Die Erfüllung dieser Ziele wird in diesem Kapitel diskutiert. Daneben werden auch die Reaktionen auf die im Kapitel *Gefahren beim Arbeiten mit Neuen Medien* ab Seite 59 genannten Gefahren beim Einsatz von webbasierten Lernumgebungen erläutert.

Die SuS haben den Unterricht mit dem Medium *webbasierte Lernumgebung* gut angenommen und sprachen sich für eine weitere Verwendung des Mediums aus.¹¹² Dabei darf sich allerdings nicht ausschließlich auf dieses Medium verlassen werden, wie schon wiederholt geschrieben wurde.

Die Module, die für die fünfte Stunde erstellt wurden, sind ebenfalls bei den SuS gut angekommen. Die Evaluation zeigt, dass dabei vor allem die multimedialen Elemente die SuS angesprochen haben.¹¹³ Allerdings sind auch die Auswirkungen der weniger gelungenen Erläuterungen, z.B. zum Begriff „bipartit“, in der Evaluation deutlich erkennbar.

Die Befragung der SuS, an wen sie sich bei inhaltlichen Fragen gewendet haben, ergab, dass sich die SuS überwiegend untereinander geholfen haben. Die Lehrkraft wurde lediglich von manchen SuS zur Validierung der Lösungen befragt. Daraus folgt, dass die Kommunikation zwischen den SuS nochmals gefördert wurde.

Da die Lehrkraft nicht den Unterricht leiten und aktiv gestalten muss und die SuS sich gegenseitig helfen, hat sie Zeit für organisatorische Dinge, die nicht die gesamte Klasse betreffen. Dazu kann gehören, mit einzelnen schwächeren oder auffälligen SuS zu reden, Probleme mit dem Klassensprecher zu klären usw. Jedoch sollte dabei die Aufmerksamkeit auf den Rest der Lerngruppe nicht vernachlässigt werden.

Ein weiterer Vorteil der webbasierten Lernumgebungen bzw. der erstellten Module ist die hohe Wiederverwertbarkeit. Dazu trägt auch das Thema Graphentheorie bei. Da die SuS zur Graphentheorie in der Regel keine Vorkenntnisse besitzen, fangen alle auf dem gleichen Niveau an, egal in welcher Klassenstufe die Stunde gehalten wird. Lediglich die Gestaltung der Module, die Formulierungen und die ausgewählten Themen

¹¹² Vgl. Abbildung 6.1 auf der Seite 132.

¹¹³ Vgl. die Abbildungen 6.3 auf der Seite 135, 6.4 auf der Seite 135 und 6.5 auf der Seite 136.

7.2. Zu webbasierten Lernumgebungen

grenzen die Benutzbarkeit auf die gymnasiale Oberstufe ein. So können die erstellten Module leicht auf andere Lerngruppen übertragen werden.¹¹⁴

Auf die im Kapitel 3.5 genannten Gefahren beim Einsatz von webbasierten Lernumgebungen wurde auf folgende Art und Weise reagiert.

- Das eingesetzte Bildmaterial wurde sorgfältig ausgewählt und nur zur Unterstützung des Textes benötigt. Für jeden Begriff wurde nur ein Beispiel benötigt, teilweise wurden die Beispiele für mehrere Begriffe benutzt, wenn es möglich war. 5
- Die Bedienung der webbasierten Lernumgebungen war für die SuS angemessen, zumindest habe ich keine Bedienungsprobleme der SuS wahrgenommen. 10
- Der Inhalt der einzelnen Seiten wurde auf ein Minimum reduziert.
- Die Aufgaben wurden von den SuS wahrgenommen und halfen dabei, dass die SuS sich nicht nur mit dem Computer beschäftigt, sondern zum Vergleich der Lösungen auch mit anderen SuS kommuniziert haben.
- Die multimedialen Vorteile des Computers wurden genutzt, um den SuS Erfahrungen zu ermöglichen, die sonst nicht oder nur schwer zu ermöglichen sind. 15

Damit wurden alle wesentlichen Gefahren erkannt und ihnen entgegengewirkt.

Das Ergebnis dieser Untersuchung kann nur sein, dass der Einsatz von Neuen Medien auch als Lernumgebung bedacht werden muss. Sicherlich steht dabei die Frage nach der Effizienz, also dem Abwägen von Aufwand und Nutzen im Raum. Jedoch darf dabei nicht nur der unmittelbare Nutzen berechnet werden, sondern auch die hohe Wiederverwertbarkeit muss man berücksichtigen. Letztendlich bleibt es jeder Lehrkraft selbst überlassen, welche Medien sie einsetzt, doch ist sie dazu angehalten, die Auswahl der Medien nach bestem Wissen und Gewissen zu treffen und dabei auf eine Fächerung der Medien zu achten. 20
25

¹¹⁴ Für die eigene Verwendung kann die beigelegte CD genutzt werden. Weitere Informationen finden sich im Anhang C ab Seite 189.

7. Auswertung der Unterrichtseinheiten

Zusammenfassung und Ausblick

Zum Abschluss dieser Arbeit werde ich zum Einen begründen, wieso die Graphentheorie in Verbindung mit den Neuen Medien eine sinnvolle Kombination im Mathematikunterricht ergibt und wie diese Kombination den Unterricht bereichern kann. Zum Anderen werde ich kurz auf weiterführende Projekte eingehen, die auf dieser Arbeit aufsetzen können. 5

Graphentheorie und Neue Medien

Im Folgenden werde ich versuchen, die Kombination von Graphentheorie und Neuen Medien zu erläutern, die ich in dieser Arbeit gewählt habe. Das zentrale Ergebnis ist, dass mit dem Einsatz Neuer Medien die Erarbeitung der Graphentheorie besser 10
gelingen kann als ohne diesen Einsatz.

Die erste Erkenntnis ist, dass die Neuen Medien, speziell die Möglichkeiten der Interaktivität und der grafischen Darstellung, die Erarbeitung von graphentheoretischen Themen fördern.

Zum Einen sind die grafischen Darstellungen der Graphen zentral für das Verständnis. Dieser Status kann durch den Einsatz der Neuen Medien genutzt und verstärkt 15
werden. Dabei wird es sich zu Nutze gemacht, dass viele grafische Darstellungen erzeugt werden können, jedoch darf man nicht die Gefahr der Bilderflut dabei vergessen.

Zum Anderen ermöglicht es die Interaktivität der Neuen Medien, Veränderungen an 20
Graphen schneller und unmittelbarer zu erfahren und zu begreifen als mit einem analogen Medium. Hierzu können die instabilen Fachwerke als Paradebeispiel genannt werden. Und auch die Erarbeitung zum Problem der Kürzesten Wege kann unterstützt werden, wovon ich hier allerdings keinen Gebrauch gemacht habe.

Eine weitere Erkenntnis bezieht sich auf die Art des Unterrichts. Wie im Kapitel "*Neue Medien*" und "*Neues Lernen*" ab Seite 55 ausgeführt, fördert auf der einen Seite der Einsatz Neuer Medien einen offenen und selbständigen Unterricht. Auf der anderen Seite provoziert die Erarbeitung von graphentheoretischen Themen nach HEINRICH WINTER „kreatives, kombinatorisches und argumentierendes Denken“¹¹⁵, welches wiederum ein Ziel von offenem und selbständigem Unterricht ist. Es folgt, dass der Einsatz beider Elemente die gleichen Ziele verfolgt und sie sich somit ergänzen können. Die vorgestellten Unterrichtsentwürfe und die Beobachtungen bei der Durchführung deuten zumindest in diese Richtung.

Die bisherigen Ausführungen zeigen, dass der Einsatz von Neuen Medien die Erarbeitung von graphentheoretischen Themen unterstützen kann. Dies geschieht zum Einen in Bezug auf die Unterrichtsziele und zum Anderen durch die Erweiterung der Erfahrungsmöglichkeiten der SuS.

Eine Einschränkung dieser Erkenntnis liegt in zwei Punkten. Der erste Punkt ist, dass bei allen Synergieeffekten zwischen Neuen Medien und Graphentheorie auf eine abwechslungsreiche Mediennutzung geachtet werden muss. Ohne diese Abwechslung geht der Effekt der Neuen Medien verloren. Der zweite Punkt betrifft die Erstellung der Neuen Medien, die viel Zeit in Anspruch nimmt. Die Vorbereitung muss gründlicher als für eine Unterrichtsstunde ohne den Einsatz Neuer Medien erfolgen, da jede Eventualität explizit berücksichtigt werden muss und die Erläuterungen intensiver durchdacht werden müssen. Diese Zeit kann nicht immer erbracht werden, so dass erst über Jahre hinweg ein reichliches Portfolio aufgebaut werden kann.

Ausblick

Diese Arbeit dient dazu, neue Impulse in die Diskussion um Graphentheorie im Mathematikunterricht einzubringen und die Möglichkeiten vom Einsatz von Neuen Medien zu diesem Thema zu erläutern. Dieser Ansatz wurde erfolgreich umgesetzt, wie das vorherige Kapitel zeigt.

Jedoch wurde damit das Themenfeld *Graphentheorie und Neue Medien* nur angeschnitten und bei weitem nicht vollends ausgeschöpft. Dieses letzte Unterkapitel stellt eine Sammlung von Ideen dar, die das Themenfeld weiter ausschöpfen können.

¹¹⁵ HEINRICH WINTER: Geometrisches Vorspiel im Mathematikunterricht der Grundschule, S. 58.

Zusammenfassung und Ausblick

Die erste Idee bezieht sich auf die Ausweitung von Themen aus der Graphentheorie. Sinnvolle Erweiterungen können hier die Färbungsprobleme, minimal aufspannende Bäume oder die Euler-Formel für planare Graphen sein. Weiterhin können neue Anwendungen der Graphentheorie eingebunden werden.¹¹⁶ Ob sich bei diesen neuen Themen eine Verbindung mit Neuen Medien anbietet, muss von Fall zu Fall entschieden werden und ist abhängig von der Gesamtkonzeption der Unterrichtseinheit. 5

Eine bisher noch nicht betrachtete Form des Einsatzes von Neuen Medien sind die WebQuests.¹¹⁷ Es bietet sich an, die neuen Themen mit den WebQuests zu erarbeiten, um eine größere Vielfalt der Medien zu erreichen. Mit dem Einsatz von WebQuests wird ebenfalls ein projektartiger und damit selbständiger Unterricht unterstützt. 10

Mit dem vorherigen Punkt kann auch eine Überarbeitung der vorgestellten Entwürfe einhergehen. Es zeigte sich, dass die SuS an offene Aufgaben nicht gewöhnt waren. So lautet ein Ansatz, die vorgestellten Entwürfe insofern zu überarbeiten, dass offene Aufgaben und damit ein authentischer Unterricht stärker gefördert und gefordert werden. Hierzu muss ein Konzept erarbeitet werden, das den SuS ermöglicht, in offene Aufgabenstellungen hineinzuwachsen. Die Aufgaben werden dabei schrittweise geöffnet. 15

Eine letzte Stufe der Ausweitung dieses Themengebietes ist die Beschreibung einer vollständigen Unterrichtseinheit, beginnend bei einer Einführung in die Graphentheorie über einige Vertiefungsgebiete, die u.U. durch den Einsatz der Neuen Medien von den SuS frei zu wählen sind, bis hin zu einer bewerteten Abschlussarbeit, die die Wahlfreiheit der SuS berücksichtigt. Jedoch wird ein solcher Entwurf viel Zeit benötigen und ein hohes Maß an Disziplin seitens der SuS erfordern. 20

Meine abschließende Folgerung lautet die Graphentheorie mit in den Unterrichtsalltag zu integrieren. Diese Arbeit zeigt einen erfolgreichen Unterrichtsentwurf der nicht unbeachtet bleiben darf. Mein Vorschlag zielt zunächst auf das Semester 13.2 an niedersächsischen Gymnasien, in dem das Thema des Mathematikunterrichts aus wenigen Vorgaben gewählt werden kann. Dies scheint mir der beste Ansatzpunkt zu sein, um 25

¹¹⁶ Anregungen finden sich dazu in OYSTEIN ORE: *Graphs and their uses*, GARY CHATRAN: *introductory graph theory*, MANFRED NITZSCHE: *Graphen für Einsteiger - Rund um das Haus vom Nikolaus* oder PETER TITTMANN: *Graphentheorie - Eine anwendungsorientierte Einführung*. Leipzig: Fachbuchverlag, 2003.

¹¹⁷ Vgl. Kapitel 3.4 ab Seite 58.

die Graphentheorie schnellstmöglich aufzunehmen. Mit den Erfahrungen die in diesem Rahmen gemacht werden, muss dann über die Aufnahme in den weiteren Themenkanon diskutiert werden.

5 Eine weitere Forderung betrifft den Einsatz Neuer Medien in den Unterricht. Die einseitige Fixierung auf den Gebrauch der Neuen Medien als Werkzeug muss revidiert werden. Auch Themen im Mathematikunterricht eignen sich, um mittels einer web-basierten Lernumgebung behandelt zu werden, wie diese Arbeit zeigt. Dabei darf die Wahl des Mediums als Motivation für die SuS nicht unterschätzt werden. Zudem wird die Selbständigkeit der SuS durch einen solchen Unterricht gefördert.

A. Aufgabenblätter

Auf den folgenden Seiten sind die Aufgabenblätter dargestellt, die in den Unterrichtsentwürfen erläutert wurden. Die nächsten Seiten wurden im Gegensatz zum Original verkleinert um Kopf- und Fusszeilen zu ermöglichen. Das ursprüngliche Layout der Aufgabenblätter war nicht darauf ausgerichtet. Bei Bedarf können die \LaTeX -Quelldateien beim Autor angefragt werden.

Zunächst noch ein paar Quellenhinweise zu den verwendeten Abbildungen. Die Abbildung auf dem Aufgabenblatt *Das Königsberger Brückenproblem* wurde der Webseite www.matheprisma.de/Module/Koenigsb/PICS/koenigsb.jpeg entnommen und für einen Schwarz-Weiß-Ausdruck angepasst.

Bei den Abbildungen auf den Aufgabenblättern *Neue Begriffe und Vertiefung zu Eulergraphen* und *Vertiefung zum Dijkstra-Algorithmus* handelt es sich um Suchergebnisse der Internetdienstes maps.google.de. Die URLs der verwendeten Ausschnitte lauten: maps.google.de/maps?z=15&ll=51.523511,9.936962&spn=0.013992,0.054245 und maps.google.de/maps?z=11&ll=51.819227,11.281586&spn=0.22241,0.86792.

Bei der Abbildung auf dem Aufgabenblatt *Einstieg zum Routenplanen* handelt es sich um den U/S/A/R-Linienplan des Hamburger Verkehrsverbundes. Die URL lautet: www.hvv.de/pdf/fahrplaene/schnellbahn-regio-plan.pdf.

Alle weiteren Abbildungen wurden vom Autor erstellt.

Einstiegsaufgabe zur Graphentheorie

Eine Softwarefirma will ein neues Adventure auf den Markt bringen. Dazu prüft die Firma vor dem Beginn der Programmierung die Spielbarkeit.

Wie für ein Adventure üblich ist es die Aufgabe des Spielers, verschiedene Aufgaben zu erfüllen. Eine erfüllte Aufgabe kann Voraussetzung für eine weitere Aufgabe sein. Im zweiten Level des Adventures gibt es 15 Aufgaben zu erfüllen:

1. Es muss eine *Peitsche* gefunden werden.
2. Unter einem Tisch liegt ein *Messer*, das aufgenommen werden muss.
3. Bei einem Händler muss *Holz* gekauft werden,
4. ebenso werden dort *Streichhölzer* gekauft.
5. Aus dem Holz muss mit dem Messer ein *Holzschlüssel* geschnitzt werden,
6. um einen *Schrank* an der Feuerstätte zu *öffnen*, in dem sich Zutaten befinden.
7. Auf einer Feuerstätte wird mit dem Holz und dem Streichholz ein *Feuer entzündet*.
8. Die Feuerstätte wird von einer *Schlange bewacht*.
9. Mit der Peitsche muss die *Schlange vertrieben* werden.
10. Am Ende eines Geheimganges wird eine *Feuerstätte* entdeckt.
11. Auf der Feuerstätte muss ein *Trank* gebraut werden, deren Zutaten sich im Schrank befinden.
12. Nachdem die Schlange vertrieben wurde, zeigt sich ein *Graben*, der mit Hilfe der Peitsche *übersprungen* werden muss.
13. Nach dem Graben wird ein *Geheimgang* entdeckt,
14. in dem *Pflanzensamen* gefunden werden.
15. Mit Hilfe des Tranks und der Samen wächst eine *riesige Kletterpflanze*, die zum nächsten Level überführt.

Aufgabe 1: Wie könnt Ihr die Abhängigkeiten grafisch darstellen?

Aufgabe 2: Ist dieses Level lösbar?

Aufgabe 3: Wenn es nicht lösbar ist, welche Abhängigkeiten müssen hinzukommen/wegfallen, damit es lösbar wird?

Wiederholung der Begriffe

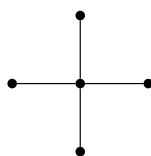
Ein *Graph* besteht aus Knoten und Kanten. Sowohl Kanten als Knoten können einen Namen haben. Wenn es eine Kante von dem Knoten A zum Knoten B gibt, so ist B mit A benachbart. Die Kanten können eine Richtung haben, so dass sie nicht in beiden Richtungen durchlaufen werden können.

Ein *Weg* ist eine Folge von Knoten, in der jeder Knoten nur einmal besucht wird. Bei aufeinanderfolgenden Knoten gibt es eine Kante vom ersten Knoten zum Zweiten. Bei Graphen mit Richtung muss die Richtung berücksichtigt werden.

Ein *Kreis* ist ein Weg, der wieder am Startknoten ankommt. Auch hier muss die Richtung berücksichtigt werden.

Aufgaben zur Vertiefung der Graphentheorie

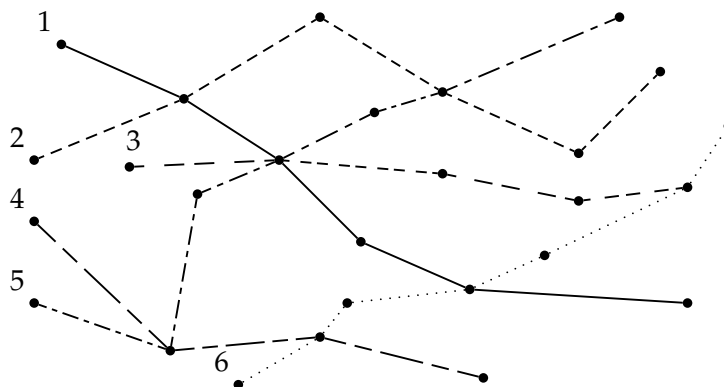
Dieser Graph soll eine Straßenkreuzung darstellen. Manchmal braucht man allerdings genauere Informationen über eine Kreuzung, z.B. welche Möglichkeiten es zum Abbiegen gibt.



Aufgabe 1: Zeichnet einen Graphen, der die Kreuzung von zwei vierspurigen Straßen mit allen Abbiegemöglichkeiten darstellt.

Aufgabe 2: Ist es möglich, an der Kreuzung zu wenden? Schreibe einen möglichen Weg auf.

Ihr seht hier ein U-Bahn-Liniennetz. Die Zahlen geben die Liniennummern an.



Aufgabe 1: Zeichnet einen Graphen, der darstellt, welche Linien sich kreuzen.

Aufgabe 2: Was bedeutet in dem Ausgangsgraphen ein Knoten, was bedeutet er in dem Graph nach Aufgabe 1?

Aufgabe 3: Welcher Unterschied besteht zwischen einem Weg im Ausgangsgraphen und einem Weg im Graphen nach Aufgabe 1?

Der Bauer mit dem Wolf, dem Schaf und dem Kohlkopf

Ein Bauer möchte mit einem Wolf, einem Schaf und einem Kohlkopf einen Fluss überqueren. Sein Boot ist aber so klein, dass er immer nur ein Teil mitnehmen kann. Dabei dürfen Wolf und Schaf nicht allein bleiben, weil der Wolf das Schaf sonst fressen würde. Ebenso würde das Schaf den Kohl fressen. Wie kommen alle auf die andere Seite?

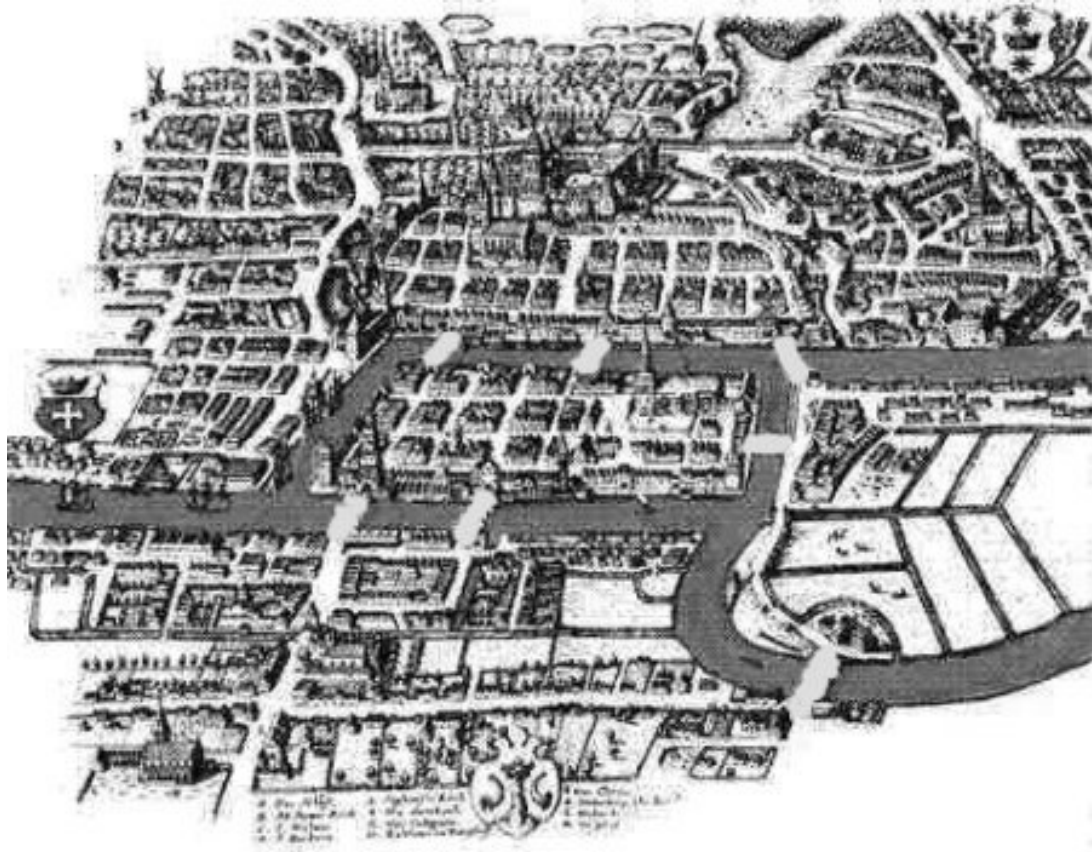
Aufgabe 1: Finde eine Modellierung für das Problem.

Aufgabe 2: In welcher Reihenfolge kann der Fluß überquert werden?

A.4 Das Königsberger Brückenproblem

Das Königsberger Brückenproblem

1736 stand Leonard Euler, ein berühmter Mathematiker, vor einem praktischen Problem. Sein täglicher Mittagsspaziergang in Königsberg sollte ihn über die schöne Pregel bringen, und das so oft wie möglich aber so wenig wie nötig. In ihr fand er die Entspannung zum Mittag, die er brauchte um den Rest des Tages durchzustehen. Allerdings wollte er keine Zeit verlieren, um sich wieder seiner Forschung zu widmen. Der optimale Weg sollte ihn über alle sieben Brücken führen und wieder am Anfang ankommen lassen. Dabei wollte er keine Brücke zweimal überqueren. Einen historischen Stadtplan von Königsberg mit der Pregel und seinen sieben Brücken seht Ihr auf der folgenden Grafik.



- Aufgabe 1:** Zeichnet einen Graphen, der das Problem repräsentiert.
- Aufgabe 2:** Könnt Ihr das Problem lösen?
- Aufgabe 3:** Wenn Ihr das Problem nicht lösen könnt, so baut neue Brücken oder reißt alte Brücken ab, bis Ihr einen Rundweg gefunden habt.
- Aufgabe 4:** Betrachtet nun den Ursprungsgraphen und den Graphen nach Aufgabe 3. Welche Unterschiede könnt Ihr feststellen? Formuliert eine Vermutung, wann ein Graph in einem Zug gezeichnet werden kann.
- Aufgabe 5:** Welche Figuren kennt Ihr noch, die man in einem Zug zeichnen kann. Überprüft Eure Vermutung von Aufgabe 4. Überlegt Euch eine neue Vermutung, wenn Eure erste Vermutung falsch war.
- Aufgabe 6:** Versucht nun Eure aktuelle Vermutung unabhängig vom Graphen zu begründen.

Neue Begriffe

Der *Grad eines Knotens* ist die Anzahl der Kanten, die den Knoten mit anderen Knoten verbindet.

Ein *Eulerkreis* ist ein Kantenzug, der alle Kanten des Graphen durchläuft und am Startknoten wieder ankommt.

Wenn jeder Grad eines Knotens gerade ist, gibt es einen Eulerkreis in diesem Graphen. Um einen Eulerkreis in einem Graphen zu finden, teilt man zunächst den Graphen in mehrere Kreise ein, wobei jede Kante nur einmal genutzt werden darf. Dann startet man in einem Knoten und folgt dem aktuellen Kreis solange, bis man auf einen neuen Kreis wechseln kann. Dann folgt man diesem Kreis wiederum bis man auf einen Kreis wechseln kann, der noch nicht genutzt wurde. Dies wiederholt man, bis alle Kreise einmal genutzt wurden. Auf dem letzten Kreis bleibt man solange wie möglich und wechselt dann auf einen nächsten Kreis. Auf diesem bleibt man ebenfalls solange wie möglich und wechselt dann zu einem anderen Kreis. Dies wiederholt man solange, bis man am Ausgangspunkt angekommen ist.

Vertiefung zu Eulergraphen

In Göttingen werden die Gebiete der Briefträger neu eingeteilt. Dabei ist ein Gebiet zwischen den Straßen Stettiner Straße, Lotzestraße, Bürgerstraße und Reinhäuserlandstraße entstanden.



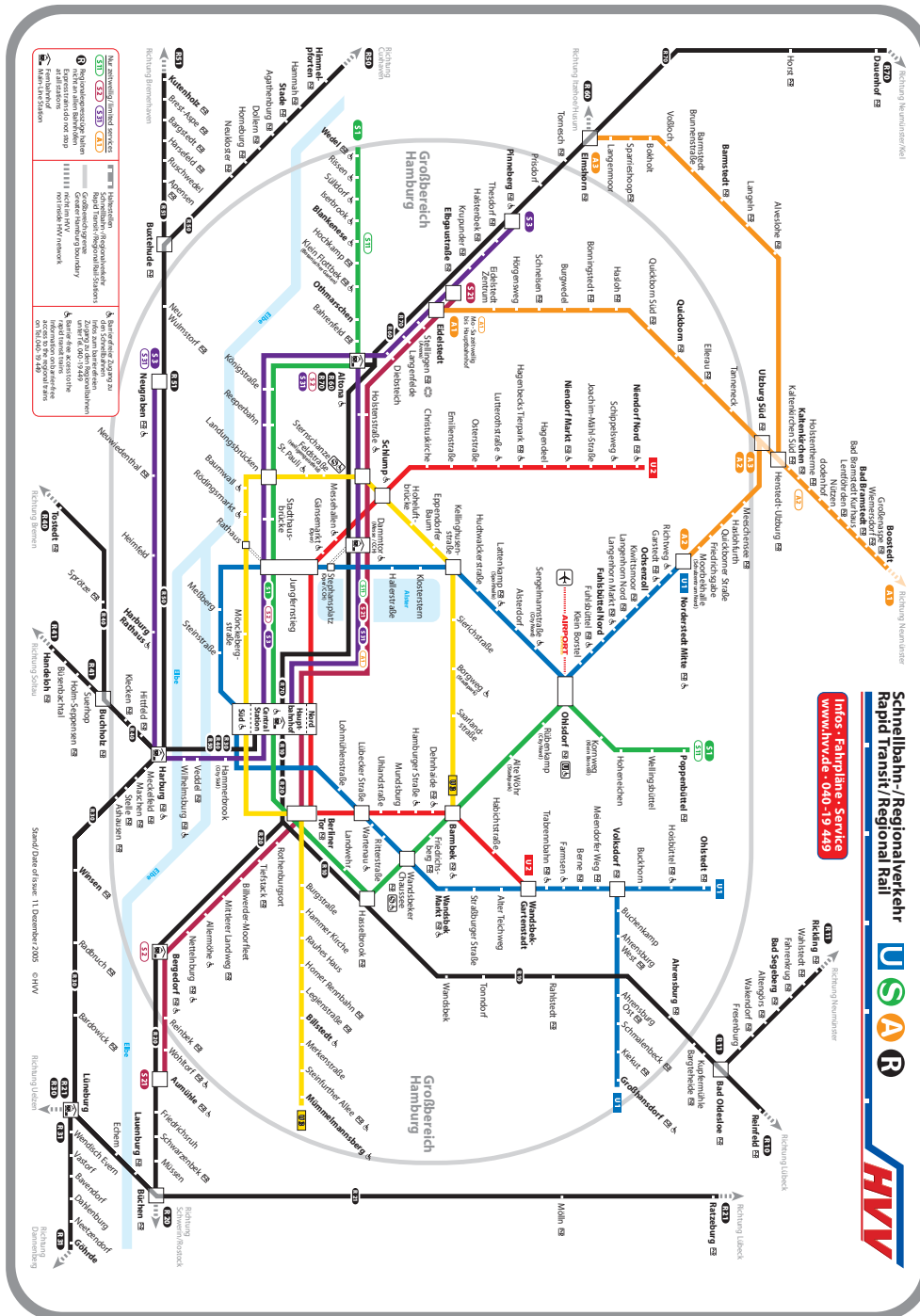
Damit der Briefträger keinen Weg umsonst läuft, wird ein Eulerkreis gesucht.

Aufgabe 1: Welche Straßen verhindern zunächst einen Eulerkreis bzw. einen Eulerzug? Wie könnte man mit diesen Straßen umgehen?

Aufgabe 2: Zeichne einen Graphen, der das Problem repräsentiert.

Aufgabe 3: Finde einen Eulerkreis für den Briefträger.

Einstieg zu kürzesten Wegen



- Aufgabe 1:** Welche Verbindung würdest Du zwischen den Haltestellen Landungsbrücken und Kellinghusenstraße wählen? Begründe Deine Wahl!
- Aufgabe 2:** Welche weitere Strecke wäre möglich? Was könnte die Begründung für diese Wahl sein?
- Aufgabe 3:** Wie kannst Du Dir sicher sein, dass Dein Weg wirklich der Kürzeste ist? Kann man einen Computer so programmieren, dass er in einem Graphen „auf einen Blick“ den kürzesten Weg finden oder eine Vermutung haben kann?
- Aufgabe 4:** Wie wird in einem Computerprogramm sichergestellt, dass der gefundene Weg der kürzeste ist?

Vertiefung zum Breitensuch-Algorithmus

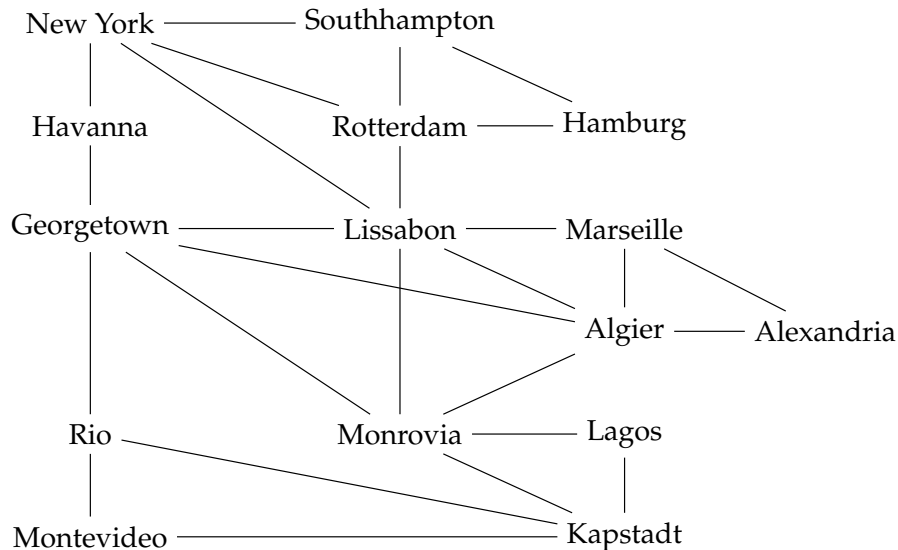
Die folgende Aufzählung formuliert den Breitensuch-Algorithmus.

1. Wähle einen Startknoten und markiere ihn als abgearbeitet. Er hat die Entfernung 0.
2. Markiere alle Nachbarknoten des Startknotens und ordne diesen Knoten die Entfernung 1 zu.
3. Wähle einen markierten Knoten mit der geringsten Entfernung, der noch nicht abgearbeitet wurde. Er hat die Entfernung n . Markiere diesen Knoten nun als abgearbeitet.
4. Markiere alle Knoten, die mit dem gewählten Knoten verbunden sind, sofern sie noch nicht markiert sind. Ihre Entfernung ist $n + 1$.
5. Wiederhole die Schritte 3 und 4 solange, bis alle Knoten abgearbeitet sind.

Aufgabe 1: Versuche den Algorithmus in dieser Formulierung an dem Beispiel an der Tafel nachzuvollziehen.

Wiederholungsaufgabe

Die folgende Grafik repräsentiert die internationalen Schiffsverbindungen im Atlantik. Dabei gibt es immer Routen zwischen den einzelnen Häfen. Nach Löschung der Ware und der Neuaufnahme kehren die Schiffe wieder zu ihrem Starthafen zurück.



Aufgabe 2: Wie oft muss eine Ware in diesem Netz maximal umgeschlagen werden? Wende dabei den Breitensuch-Algorithmus zur Übung an und wähle verschiedene Starthäfen.

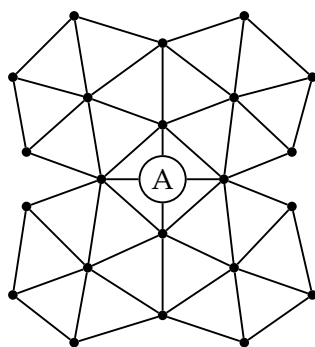
Wiederholung zu kürzesten Wegen

Die folgende Aufzählung formuliert den Breitensuch-Algorithmus.

1. Wähle einen Startknoten und markiere ihn als abgearbeitet. Er hat die Entfernung 0.
2. Markiere alle Nachbarknoten des Startknotens und ordne diesen Knoten die Entfernung 1 zu.
3. Wähle einen markierten Knoten mit der geringsten Entfernung, der noch nicht abgearbeitet wurde. Er hat die Entfernung n . Markiere diesen Knoten nun als abgearbeitet.
4. Markiere alle Knoten, die mit dem gewählten Knoten verbunden sind, sofern sie noch nicht markiert sind. Ihre Entfernung ist $n + 1$.
5. Wiederhole die Schritte 3 und 4 solange, bis alle Knoten abgearbeitet sind.

Aufgabe

In Dubai werden zur Zeit riesige Bauprojekte durchgeführt. Dazu werden auch neue Sendemasten für den Handyempfang aufgebaut. Die Positionen der Sendemasten sind so gewählt, dass die Abstände zwischen zwei Sendemasten, die miteinander verbunden werden können, gleich sind. Dadurch wird eine gleichbleibende Netzabdeckung erreicht. Folgende Grafik zeigt die Positionen der Sendemasten und die möglichen Verbindungen. Der Sendemast A ist gleichzeitig die zentrale Verteilerstation, von der aus alle Sendemasten erreicht werden sollen. Um eine geringe Verzögerung bei den Gesprächen zu gewährleisten, sollten die Wege zwischen den Sendemasten und der Verteilerstation so gering wie möglich sein.

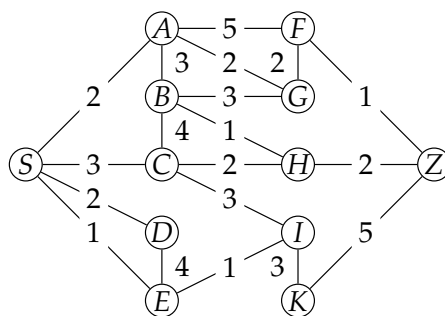


Aufgabe 1: Mache einen Vorschlag, wie die Sendemasten miteinander verbunden werden sollten.

Aufgabe 2: Gibt es Verbindungen, die Du zusätzlich einfügen würdest? Begründe Deine Wahl.

Einstieg zum Routenplanen

Der folgende Graph repräsentiert ein Straßennetz. Die Entfernungen sind in Kilometern angegeben.



Im Folgenden wollen wir einen kürzesten Weg von S nach Z finden

Aufgabe 1: Welchen Weg von S nach Z würdest Du auf den ersten Blick einschlagen?

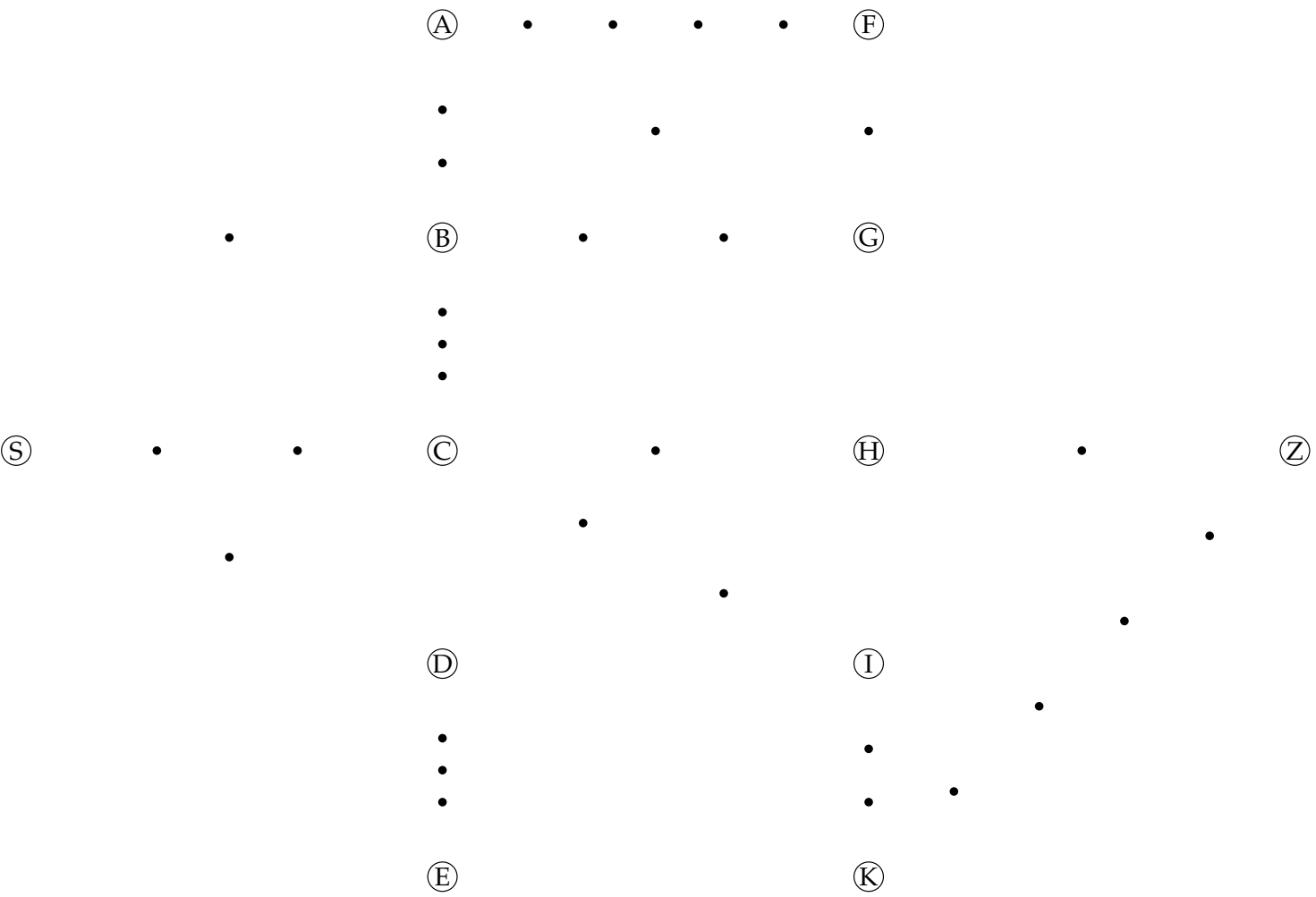
Aufgabe 2: Führe zunächst einen Algorithmus durch, der die Anzahl der Stopps als entscheidend betrachtet.

Aufgabe 3: Betrachte die Kilometerzahlen als Anzahl von Stopps auf der jeweiligen Strecke. Führe dann den Algorithmus aus Aufgabe 2 nochmals durch.

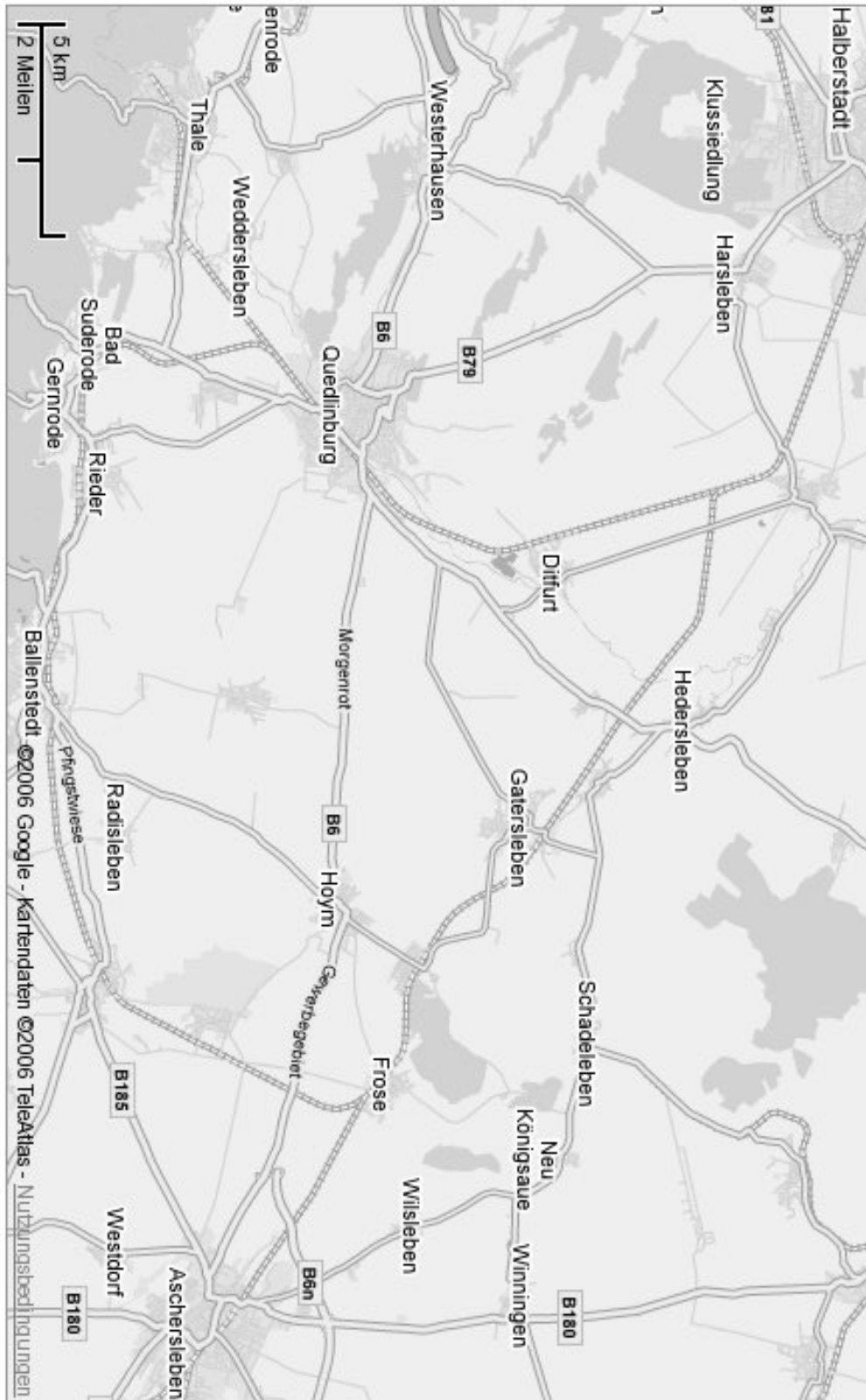
Tipp: Nutze ein freies Blatt Papier und für jeden Schritt verschiedenfarbige Stifte.

Aufgabe 4: Nun mache den letzten Schritt! Betrachte die Kilometerzahlen wieder als solche und formuliere einen Algorithmus, um den kürzesten Weg von S nach Z zu finden. Probiere ihn an dem Beispiel aus.

Tipp: Nimm den Algorithmus zur Breitensuche als Ausgangspunkt und formuliere ihn an geeigneten Stellen um.



Vertiefung zum Dijkstra-Algorithmus



Aufgabe 1: Finde den kürzesten Weg von Halberstadt nach Aschersleben mittels des Dijkstra-Algorithmus. Gib die Entfernung in Kilometern an.

B. Ilias-Module

Dieses Kapitel zeigt die erstellten ILIAS-Module in der Druckversion. Dabei ist zu beachten, dass die Druckversion sich nicht an die Seitenaufteilung der Module hält. Einen vollständigen Eindruck der Seitenaufteilung bekommt man, indem man die Module in einem ILIAS-System testet. Dafür kann die beigelegte CD genutzt werden.¹¹⁸ Die folgenden Seiten enthalten keine Seitenzahlen, um den vorhandenen Platz möglichst vollständig zu nutzen.

Die erstellten Module finden sich auf der CD und können in ein ILIAS-System importiert werden. Die Abbildungen wurden überwiegend vom Autor selbst erstellt. Lediglich die erste Abbildung des Moduls *Fachwerke und Graphen* stammt von folgender URL: www.maler-tropp.de/grafiken/geruestbau.jpg.

¹¹⁸ Für weitere Informationen siehe Anhang C ab Seite 189.

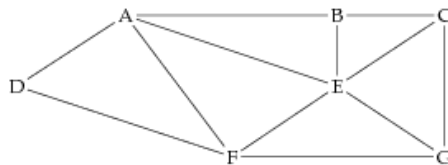
Inhaltsverzeichnis

- Graphen
- Grad eines Knotens

Graphen

Graphen bestehen aus Knoten und Kanten.

Dabei verbinden die Kanten jeweils zwei unterschiedliche Knoten. Am Besten kann man sich einen Graphen in einem Bild vorstellen.

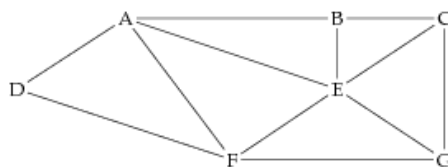


In diesem Beispiel gibt es die *Knoten* A , B , C , D , E und F .

Die *Kanten* verlaufen zwischen dem Knoten A und den Knoten B , D , E und F , zwischen B und A , C und E , zwischen C und B , E und G usw.

Grad eines Knotens

Unter dem Grad eines Knotens versteht man die Anzahl der Kanten, die an dem Knoten enden. Betrachten wir dazu unser Beispiel.



Folgende Tabelle listet die Grade der einzelnen Knoten auf.

Knoten	Grad
A	4
B	3
C	3
D	2
E	5
F	4
G	3

Inhaltsverzeichnis

Einführung

Was ist ein Fachwerk?

Was heißt stabil?

Wann ist ein Fachwerk stabil?

Der zu einem Fachwerk zugehörige Graph

Aufgaben

Aufgabe 1

Zusammenhang begründen

Aufgaben

Aufgabe 2

Aufgabe 3

Lösungen der Aufgaben

Lösung zu Aufgabe 1

Lösung zu Aufgabe 2

Lösung zu Aufgabe 3

Einführung

Oft sieht man in der Stadt Baugerüste herumstehen. Auf ihnen arbeiten Handwerker, die die Fassade neu streichen, neue Fenster einsetzen oder die Klinkersteine neu verputzen. Oft fragt man sich auch, warum dieses Gerüst nicht zur Seite weg bricht und (fast) jedem Sturm und Wetter Stand hält.

Das folgende Foto zeigt ein solches Baugerüst.



Wie man sieht, werden an einigen Stellen des Baugerüstes Querstreben eingefügt. Diese dienen dazu, das Gerüst stabil zu halten. Die Frage ist nun, an welchen Stellen sollten solche Querstreben eingefügt werden und wie viele braucht man mindestens, damit das Fachwerk stabil ist?

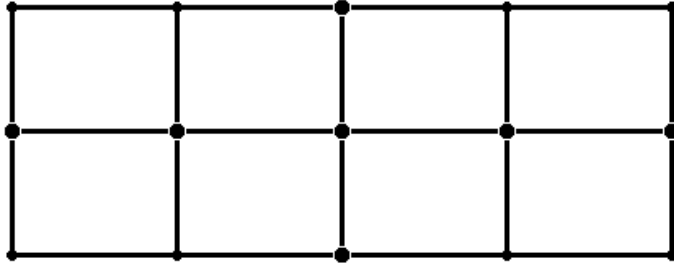
Diesen Fragen werden wir in diesem Modul nachgehen.

Was ist ein Fachwerk?

Zunächst müssen wir aber klären, was man genau unter einem Fachwerk versteht.

Unter einem Fachwerk versteht man eine Konstruktion aus waagerechten und vertikalen Streben, die jeweils in den Knotenpunkten beweglich sind.

Im folgenden Java-Applet könnt Ihr ausprobieren, wie beweglich ein solches Fachwerk ohne Querstreben ist. Dabei sind nur die hervorgehobenen Punkte aufgrund der Konstruktion beweglich.



Ein Fachwerk besteht aus mehreren Fächern. Damit sind die Rechtecke gemeint, die durch die waagerechten und vertikalen Streben konstruiert werden.

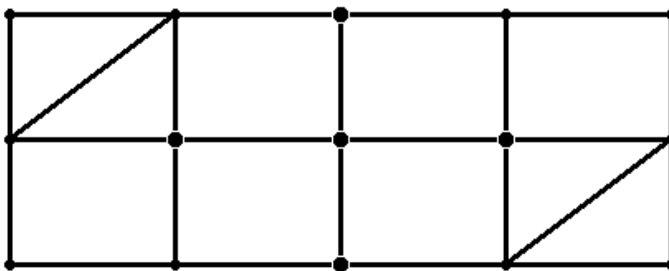
Was heißt stabil?

Unsere Frage am Anfang des Moduls war, wann ein Fachwerk stabil ist. Dazu müssen wir uns erstmal Gedanken darüber machen, was stabil bedeutet.

Ein Fachwerk ist dann stabil, wenn sich die Winkel nicht mehr verändern lassen. Drücken oder Ziehen in einem Knotenpunkt oder an einer Strebe führt dann nicht mehr zu einer Veränderung im Fachwerk. Die Winkel in den einzelnen Knotenpunkten bleiben dann fest bzw. stabil.

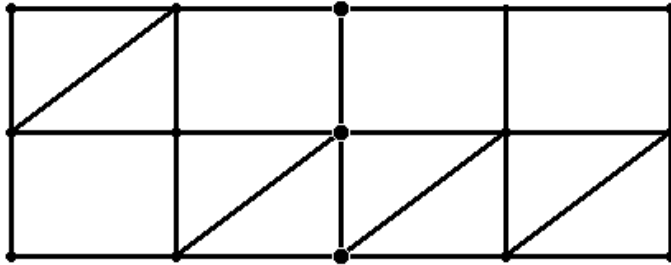
Ein einzelnes Fach kann durch eine Querstrebe stabil gemacht werden. Das folgende Applet zeigt das Fachwerk von der vorherigen Seite, in dem zwei Fächer durch Querstreben stabil gemacht wurden.

Probiert aus, wie stabil bzw. unstabil das Fachwerk nun ist und wie sich das Fachwerk jetzt anders verhält als ohne die beiden Querstreben.



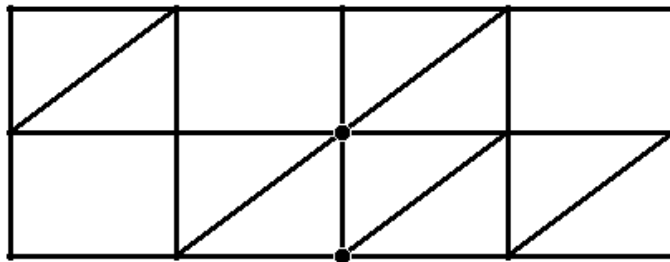
Wie Ihr sehen könnt, sind nur die beiden Fächer mit den Querstreben stabil, in allen anderen Knotenpunkten sind die Winkel beweglich. Wir werden jetzt nach und nach Querstreben hinzufügen und schauen, wie sich das Verhalten verändert.

Im folgenden Applet wurden wieder zwei Streben hinzugefügt.



Man kann weiterhin erkennen, dass das Fachwerk nicht stabil ist. Es fehlen also weitere Streben.

In diesem Fachwerk wurde nun eine weitere Strebe hinzugefügt. Durch Bewegen der Punkte wird nun lediglich das gesamte Fachwerk gedreht, die Winkel in den Knotenpunkten bleiben aber stabil. Damit ist das Fachwerk ebenfalls stabil.



Nun wissen wir, was es heißt, dass ein Fachwerk stabil ist. Uns fehlt aber noch die Information darüber, wie wir schnell sehen können, dass ein Fachwerk stabil ist. Man kann ja nicht immer einfach an irgendwelchen Knotenpunkten oder Streben drücken und ziehen, um die Stabilität zu überprüfen.

Dazu kommen wir auf den nächsten Seiten.

Wann ist ein Fachwerk stabil?

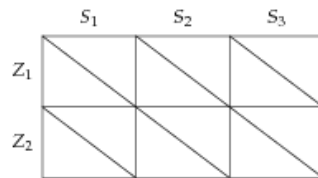
Es gibt eine Behauptung, die folgendermaßen lautet:

Ein Fachwerk ist genau dann stabil, wenn der dazugehörige Graph zusammenhängend ist.

Diese Behauptung sagt uns zunächst gar nichts. Damit uns die Behauptung etwas sagt, müssen wir uns zuerst damit auseinander setzen, was „der zu einem Fachwerk zugehörige Graph“ ist und wann er zusammenhängend ist.

Der zu einem Fachwerk zugehörige Graph

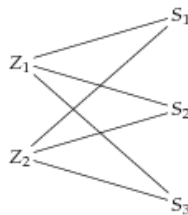
Jedes Fachwerk besteht aus einer Reihe von Spalten und Zeilen. Diese werden durchnummeriert, wie es die folgende Grafik zeigt.



Nun kann man einen Graphen zu diesem Fachwerk konstruieren mit den folgenden Eigenschaften:

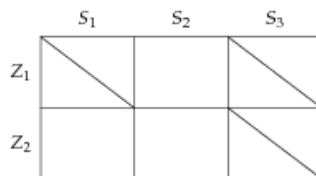
1. Die Knoten sind die jeweiligen Zeilen und Spalten aus der vorherigen Grafik, also Z_1, Z_2, S_1, S_2 und S_3 .
2. Zwischen zwei Knoten gibt es genau dann eine Kante, wenn das Fach, das in der entsprechenden Zeile und der entsprechenden Spalte liegt, einen Querbalken besitzt.

In unserem Beispiel sieht der Graph dazu folgendermaßen aus:

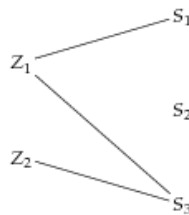


Hier wurde also jede Zeile mit jeder Spalte verbunden, denn in jedem Fach gibt es einen Querbalken.

Betrachten wir nun ein weiteres Beispiel. Zu dem Fachwerk



sieht der zugehörige Graph so aus:

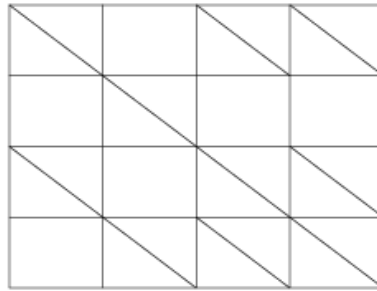


Es gibt einen Querbalken in dem Fach, welches in der Spalte 1 und der Zeile 1 liegt. Deswegen gibt es eine Kante zwischen Z_1 und S_1 . Ebenso gibt es einen Querbalken im Fach in der ersten Zeile und der dritten Spalte und damit auch eine Kante zwischen dem Knoten Z_1 und dem Knoten S_3 . Zu guter Letzt gibt es eine Kante zwischen dem Knoten Z_2 und dem Knoten S_3 ebenso wie das Fach in der Zeile 2 und der Spalte 3 einen Querbalken besitzt.

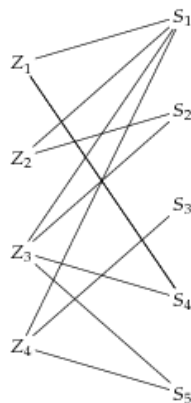
Aufgaben

Aufgabe 1

- a) Erstelle zu dem Fachwerk in der Grafik den zugehörigen Graphen.



b) Erstelle zu dem Graphen in der Grafik das zugehörige Fachwerk.



Lösung zu Aufgabe 1

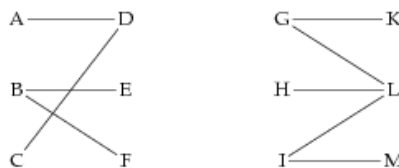
Zusammenhang begründen

Erinnern wir uns nun an die Behauptung

Ein Fachwerk ist genau dann stabil, wenn der dazugehörige Graph zusammenhängend ist.

Wir wissen nun, welches der Graph ist, der zu einem Fachwerk gehört. Was bedeutet aber nun zusammenhängend?

Zusammenhängend ist ein Graph genau dann, wenn man von jedem Knoten zu jedem anderen Knoten über Kanten in dem Graphen kommt. Betrachten wir zwei Beispiele.



Im linken Graphen gibt es vom Knoten **A** aus eine Kante zum Knoten **D** und von dort aus eine Kante zu **C**. Von diesen beiden Knoten gibt es aber keine Kanten zu weiteren Knoten, also auch nicht zu den Knoten **B**, **E** und **F**. Damit ist der Graph nicht zusammenhängend.

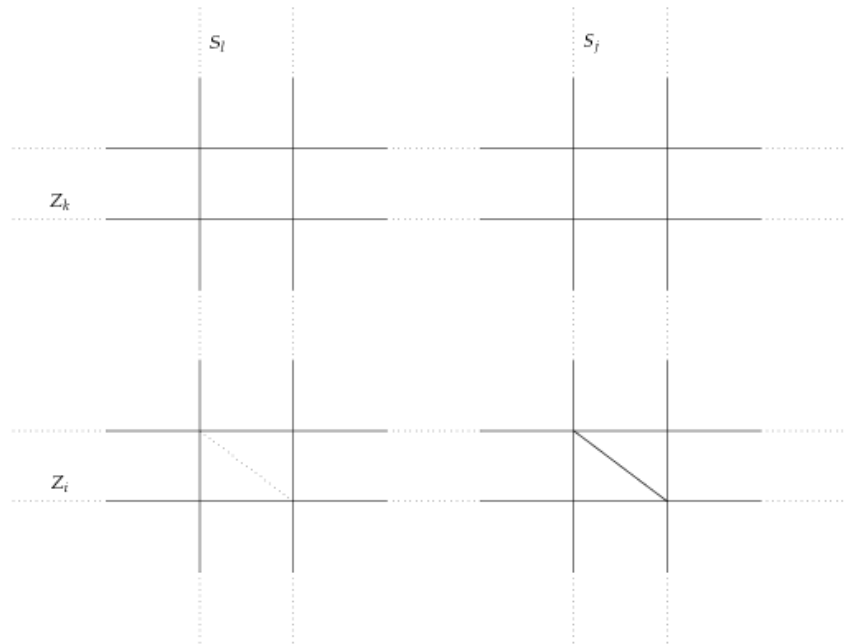
Im rechten Graphen gibt es vom Knoten **G** aus jeweils eine Kante zu den Knoten **H** und **L**. Von **L** aus gibt es Kanten zu den Knoten **H** und **I** und von **I** gibt es die Kante zu **M**. Damit sind von **G** aus alle Knoten erreichbar und der Graph zusammenhängend.

Nachdem wir nun wissen, was die einzelnen Begriffe in der Behauptung bedeuten, können wir uns nun daran machen, die Einzelteile zusammensetzen.

Erinnern wir uns noch einmal an die Behauptung

Ein Fachwerk ist genau dann stabil, wenn der dazugehörige Graph zusammenhängend ist.

Wir müssen uns nun überlegen, was es bedeutet, wenn das Fach, das in einer Zeile i und einer Spalte j liegt, stabilisiert ist, also eine Querstrebe besitzt. Nach den Überlegungen auf den vorherigen Seiten bedeutet es, dass die Winkel zwischen der Zeile i und der Spalte j nun unbeweglich sind. Die Winkel, die diese Zeile und diese Spalte miteinander verbinden, liegen im stabilisierten Fach. Damit sind auch die Winkel stabil.



Die Grafik zeigt einen Ausschnitt eines Graphen mit den Zeilen Z_i und Z_k sowie den Spalten S_l und S_j . Die Punkte zwischen den einzelnen Fächern bedeuten, dass dort noch viele andere Zeilen bzw. Spalten folgen können.

Die Begründung für die Behauptung geht auf der nächsten Seite weiter.

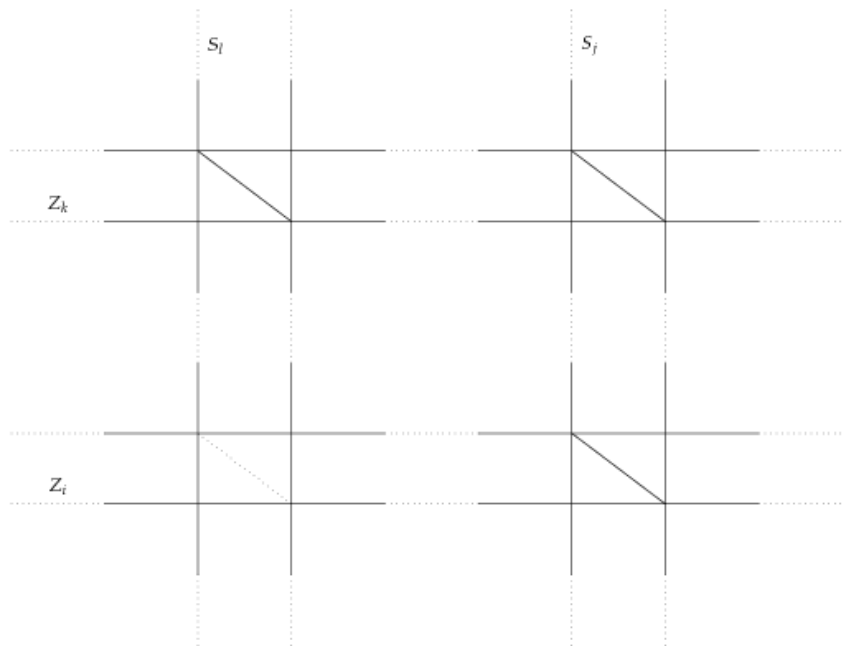
Nachdem wir den ersten Schritt geklärt haben, setzen wir weitere Querbalken in unser Beispiel.

Die Stabilität soll nun auch zwischen der Zeile k und der Spalte l existieren, das entsprechende Fach wurde also mit einer Querstrebe versehen.

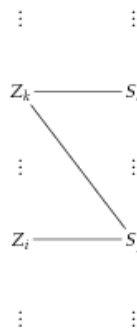
Wenn nun auch das Fach in der Zeile k und der Spalte j stabilisiert wurde, dann ergibt sich eine interessante Reihe:

Zeile i ist stabil zu Spalte j ist stabil zu Zeile k ist stabil zu Spalte l .

Das bedeutet nun, dass die Zeile i stabil zur Spalte l ist, obwohl das entsprechende Fach keine Querstrebe besitzt. Die Stabilität lässt sich also auch indirekt erreichen.



Wenn wir uns den zugehörigen Graphen anschauen, so ergibt sich, dass der Graph zu dem Fachwerk, das wir uns gerade überlegt haben, einen Weg vom Knoten z_k zum Knoten z_i besitzt.



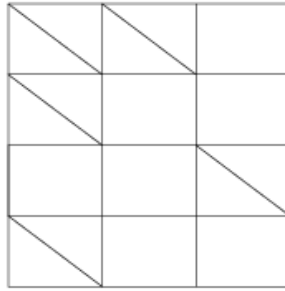
Mit unseren Überlegungen zeigt sich, dass sich die Stabilität in einem Fachwerk auch indirekt erreichen lässt, wenn die Zeile und die Spalte im entsprechenden Graphen verbunden sind. Wenn nun jede Zeile mit jeder Spalte verbunden ist und umgekehrt, also der entsprechende Graph zusammenhängend ist, dann ist jede Zeile direkt und indirekt zu jeder Spalte stabil. Damit ist jeder Winkel unbeweglich und das gesamte Fachwerk ist stabil.

Das war es, was wir zeigen wollten!

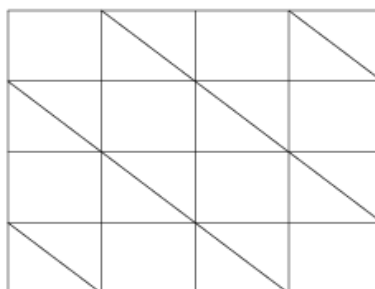
Aufgaben

Aufgabe 2

a) Entscheide, ob die folgenden Fachwerke stabil sind oder nicht.



b) Welche der folgenden Fachwerke sind nicht stabil? Mache Vorschläge, wie Du das Fachwerk mit möglichst wenigen zusätzlichen Querstreben stabil machen kannst.



Lösung zu Aufgabe 2

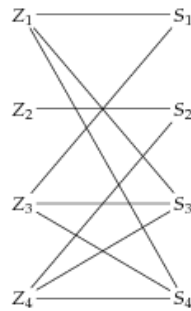
Aufgabe 3

Stell Dir vor, Du hast ein Fachwerk mit m Zeilen und n Spalten. Wie viele Querstreben brauchst Du mindestens, damit das Fachwerk stabil ist?

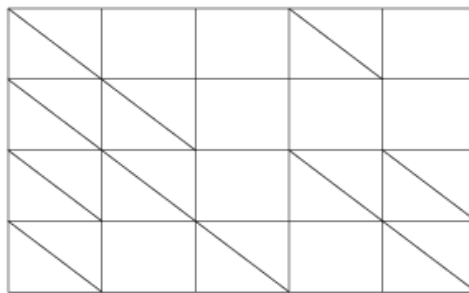
Lösungen der Aufgaben

Lösung zu Aufgabe 1

a) Der zugehörige Graph sieht folgendermaßen aus.



b) Das zugehörige Fachwerk hat folgende Gestalt.



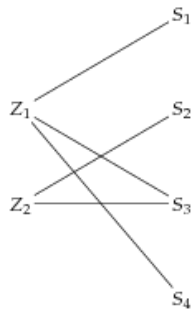
Lösung zu Aufgabe 2

a) Das erste Fachwerk hat folgenden zugehörigen Graphen.

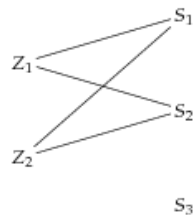


In diesem Graphen sind die Knoten Z_3 und S_3 zwar miteinander verbunden, allerdings mit keinen Knoten sonst. Damit ist der Graph nicht zusammenhängend und das Fachwerk nicht stabil.

Zum zweite Fachwerk gehört der folgenden Graph.



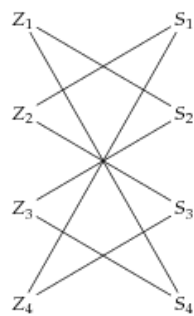
b) Dieser ist zusammenhängend und damit ist das Fachwerk stabil.
 Das erste Fachwerk ist nicht stabil, wie der zugehörige Graph zeigt.



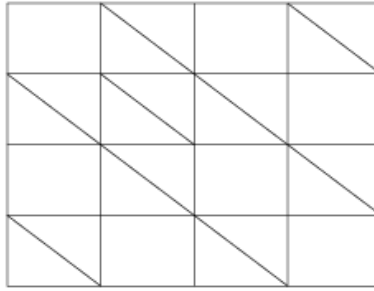
Stabil wäre das Fachwerk mit einer zusätzlichen Querstrebe:



Das zweite Fachwerk ist ebenfalls nicht stabil. Beim zugehörigen Graphen sollte man darauf achten, dass die Kanten sich nur zufällig überschneiden, dadurch allerdings kein Zusammenhang entsteht.



Auch hier reicht eine Querstrebe, um Stabilität zu erreichen.



Lösung zu Aufgabe 3

Die minimale Anzahl von Querstreben in einem Fachwerk mit m Zeilen und n Spalten ist $n+m-1$. Warum?

Wir betrachten nur den zu einem Fachwerk zugehörigen Graphen. Dieser muss zusammenhängend sein, damit das Fachwerk stabil ist. Die Anzahl der Querstreben ist dann minimal, wenn man keinen Kreis im Graphen finden kann. Wenn es nämlich einen Kreis gäbe, könnte man eine Kante des Kreises weglassen und der Graph wäre immer noch zusammenhängend. Man würde ja zu jedem Knoten auf dem anderen Weg im Kreis kommen.

Also muss unser Graph kreisfrei und zusammenhängend sein. Nun versuchen wir einen solchen Graphen zu zeichnen. Wir beginnen in einer der Ecken mit Grad 1. Von hier aus zeichnen wir die einzige Kante. Beim nächsten Knoten zeichnen wir eine weitere Kante usw. bis wir zu einem zweiten Knoten mit Grad 1 gekommen sind. Bis hier hin haben wir eine Kante weniger gezeichnet als wir Knoten besucht haben.

Damit haben wir schon einmal den Hauptteil geschafft. Jetzt zeichnen wir nacheinander alle Kanten, die noch nicht gezeichnet wurden und mit den bisherigen Knoten verbunden sind. Das ist dann für jeden Knoten eine Kante. Dies wiederholen wir, bis alle Knoten und alle Kanten gezeichnet sind.

Damit haben wir im ersten Teil eine Kante weniger als Knoten gezeichnet und im zweiten Teil genauso viele Kanten wie Knoten. Bei insgesamt $n+m$ Knoten macht das $n+m-1$ Kanten.

Inhaltsverzeichnis

- Einstieg
- Die Tanzschule „Leicht und Locker“
- Begriffe I
- Aufgaben
 - Aufgabe 1
- Begriffe II
- Wann ist ein perfektes Matching möglich?
- Beispiele
- Aufgaben
 - Aufgabe 2
 - Aufgabe 3
- Lösungen der Aufgaben
 - Lösung zu Aufgabe 1
 - Lösung zu Aufgabe 2
 - Lösung zu Aufgabe 3

Einstieg

Jeder, der einmal an einem Tanzkurs teilgenommen hat, kennt das Problem:

Die Verteilung am Anfang jeder Stunde oder am Anfang des Kurses zeigt sich als sehr schwierig. Jeder hat seine Vorlieben und seine Abneigungen und jeder erwartet, dass seine Vorlieben und Abneigungen berücksichtigt werden.

Wir werden uns nun anschauen, wann alle Bedürfnisse erfüllt werden können.

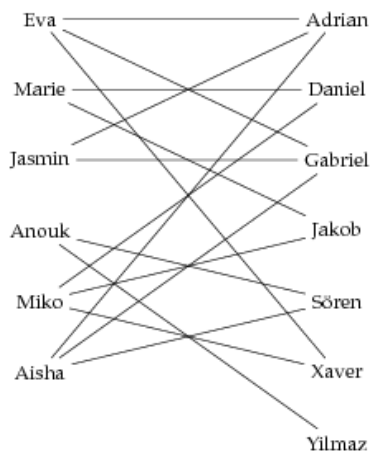
Auf der nächsten Seite findet Ihr ein Beispiel.

Die Tanzschule „Leicht und Locker“

Die Tanzschule „Leicht und Locker“ beginnt heute mit Ihrem neuen Tanzkurs für Anfänger. Aus Erfahrung weiß der Tanzlehrer, dass es immer Probleme bei der Paarbildung gibt.

Um dieses Problem zu umgehen, werden die Tanzschülerinnen aufgefordert, bei der Anmeldung maximal drei Partner zu wählen, mit denen sie tanzen würden. Damit werden in dem Kurs die männlichen Teilnehmer zu Kavalieren erzogen.

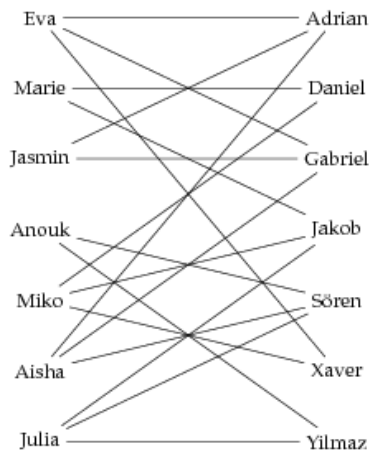
Für diesen Tanzkurs ergibt sich folgendes Bild:



Schaut Euch das Bild genau an. Könnt Ihr schon sagen, warum es keine perfekte Verteilung der Tanzpartner geben kann?

Die Lösung gibt es auf der nächsten Seite.

Wie Ihr wahrscheinlich schon vorher gesehen habt, gibt es eine Tanzschülerin weniger als Tanzschüler. Damit würde immer ein Junge leer ausgehen. Dies ist dem Tanzlehrer natürlich auch aufgefallen, so dass er eine Schülerin, die den Kurs schon absolviert hat, gebeten hat, noch einmal im Anfängerkurs mitzutanzten. Mit Julias Vorlieben ergibt sich nun folgendes Bild:



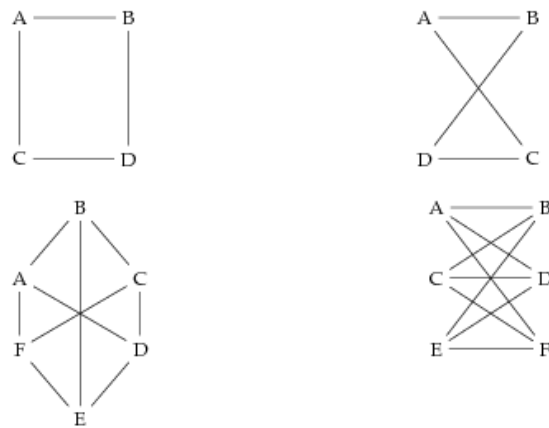
Um das Problem besser charakterisieren zu können, bilden wir nun ein paar Begriffe.

Begriffe I

Wie Ihr wahrscheinlich schon festgestellt habt, haben die „Graphen der Vorlieben“ auf den vorherigen Seiten eine besondere Struktur: Es gibt zwei Gruppen von *Knoten*, zwischen denen die *Kanten* verlaufen.

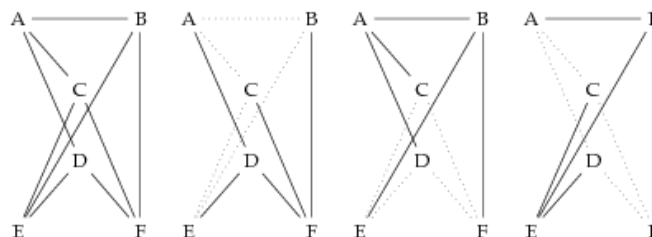
Wir nennen Graphen, die eine solche Eigenschaft haben, *bipartite Graphen*.

Ihr seht hier zwei Beispiele von bipartiten Graphen, die man auf den ersten Blick nicht als solche erkennt.



Man kann bipartite Graphen leicht erkennen, indem man alle Kreise in ihnen betrachtet. Wenn all diese Kreise eine gerade Anzahl von Knoten durchlaufen, so ist es ein bipartiter Graph.

Dazu betrachten wir kurz ein Beispiel:



Ihr seht hier einen Graphen, der verschiedene Kreise beinhaltet. Ihr könnt durch nachzählen erkennen, dass jeder Kreis

in dem Graphen eine gerade Anzahl an Knoten durchläuft.

Einige Kreise könnt Ihr in der Grafik erkennen.

Aufgaben

Aufgabe 1

Eine musikalische Familie:

Mutter spielt Geige und Klavier, Vater spielt Cello, Trompete und Klavier, Anne spielt Flöte, Bernd spielt Cello und Klarinette und Carola spielt Klavier, Cembalo und Flöte.

- Erstellt den zugehörigen bipartiten Graphen zu dieser musikalischen Familie.
- Welche Instrumente werden in der Familie von nur einem Mitglied gespielt?

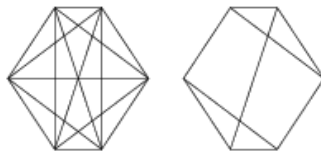
Lösung zu Aufgabe 1

Begriffe II

Der zweite Begriff, den wir hier brauchen, ist der des *regulären Graphen*. Der Zusammenhang mit unserem Problem ist noch nicht offensichtlich. Das klärt sich erst auf der nächsten Seite.

Unter einem regulären Graphen versteht man einen Graphen, in dem alle Knoten den gleichen Grad haben, also die Anzahl der Kanten an einem Knoten überall gleich ist.

Hier sind zwei Beispiele:



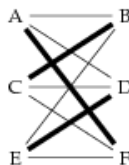
Der erste Graph ist sogar vollständig, das heißt alle mögliche Kanten sind eingezeichnet. Bei 6 Knoten hat jeder Knoten einen Grad von 5.

Im zweiten Graphen hat jeder Knoten einen Grad von 3.

Zum Dritten müssen wir wissen, was ein *perfektes Matching* ist.

Man redet dann von einem perfekten Matching, wenn man in einem Graphen so viele Paare finden kann, dass alle Knoten berücksichtigt werden.

Das folgende Beispiel zeigt ein perfektes Matching.



Die Grafik zeigt drei Paare, nämlich (A,F), (C,B) und (E,D). Damit sind alle Knoten des Graphen abgedeckt und wir haben ein perfektes Matching.

Wann ist ein perfektes Matching möglich?

Kommen wir nun zu den Voraussetzungen, unter denen ein perfektes Matching möglich ist.

Dazu gibt es ein einfaches Erkennungsmerkmal:

Wenn der bipartite Graph regulär ist, dann gibt es ein perfektes Matching.

Warum ist das so?

Die Antwort auf diese Frage ist leider ein wenig kompliziert. Wer möchte, kann sich auf der nächsten Seite die Begründung durchlesen. Wer nicht, kann die nächste Seite überspringen.

Hervorragend, dass Ihr versucht, die Begründung zu verstehen.

Wir gehen jetzt in zwei Schritten vor. Der erste Schritt ist, eine bestimmte Eigenschaft herauszuarbeiten. Im zweiten Schritt gehen wir die einzelnen Größen der Graphen durch.

Um die Argumentation zu erleichtern, unterscheiden wir nun die rechte und die linke Seite des Graphen. Die rechte Seite ist die Seite der Mädchen und die linke Seite die der Jungen.

Es erleichtert vielleicht die Begründung nachzuvollziehen, wenn Ihr Euch ein paar Skizzen macht.

Schritt 1:

Zunächst denken wir uns, dass der Grad der einzelnen Knoten r ist.

Nun nehmen wir uns eine beliebige Anzahl m von Mädchen. (Wir sagen, dass diese Anzahl m ist. Wir benennen die Anzahl also mit m .) Jedes Mädchen hat r Vorlieben an Jungen, es gehen also r Kanten von jedem Mädchen zu den Jungen. Bei m Mädchen macht das $m \cdot r$ Kanten. Diese $m \cdot r$ Kanten werden von mindestens m Jungen aufgenommen, denn jeder Junge kann nur r Kanten entgegen nehmen.

Diese Eigenschaft ist die zentrale Eigenschaft im zweiten Schritt.

Schritt 2:

Anzahl der Mädchen: 1

Dieser Fall ist ziemlich klar. Wenn es nur ein Mädchen gibt, dann gibt es nur ein Jungen und somit ist das Matching perfekt.

Anzahl der Mädchen: 2

Auch dieser Fall ist recht einfach. Entweder ist der Graph schon ein perfektes Matching oder jedes Mädchen bevorzugt jeden Jungen und man kann sich das Matching aussuchen.

Anzahl der Mädchen: 3

Nehmen wir zwei Mädchen. Wenn zwei Jungen zu den Vorlieben der Beiden gehören, dann können wir dort, wie gesehen, zwei Paare bilden. Das dritte Paar bilden die beiden übrigen.

Wenn drei Jungen zu den Vorlieben der Beiden gehören, dann bilden wir ein Paar vom dritten Mädchen und einer ihrer Vorlieben. Es bleiben zwei Mädchen und zwei Jungen, die, wie wir gesehen haben, ein perfektes Matching ergeben.

Anzahl der Mädchen: 4

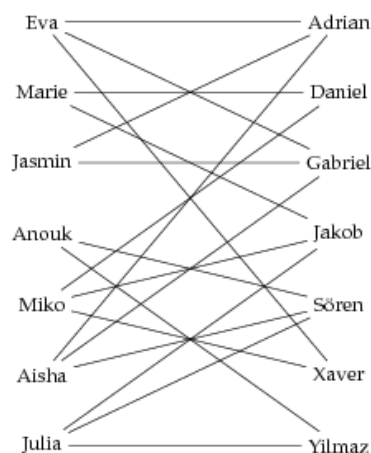
Nehmen wir drei Mädchen. Wenn drei Jungen zu den Vorlieben der Drei gehören, dann können wir dort, wie gesehen, drei Paare bilden. Das vierte Paar bilden die beiden übrigen.

Wenn vier Jungen zu den Vorlieben der Drei gehören, dann bilden wir ein Paar vom vierten Mädchen und einer ihrer Vorlieben. Es bleiben drei Mädchen und drei Jungen, die, wie wir gesehen haben, ein perfektes Matching ergeben.

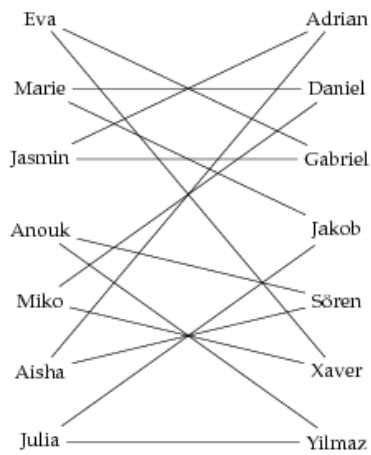
Beispiele

Nachdem wir nun die Aussage begründet haben, betrachten wir nun unser Beispiel vom Anfang.

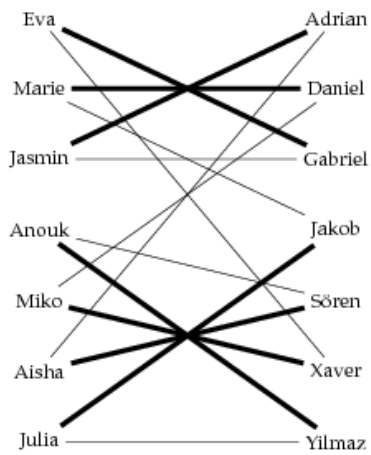
Die Vorlieben der Mädchen sahen so aus:



Dieser Graph ist nicht regulär, wie leicht zu erkennen ist. Aber man kann, indem einige Vorlieben außer Acht gelassen werden, einen regulären Graphen daraus machen. Das Ergebnis sieht dann so aus:



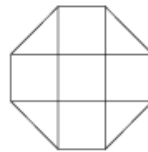
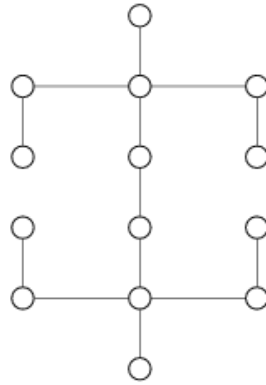
Dieser Graph ist bipartit und regulär und damit kann man ein perfektes Matching finden. Ein perfektes Matching sieht so aus:



Aufgaben

Aufgabe 2

Welche der folgenden Graphen sind bipartit, welche sind regulär?
 Wenn beide Bedingungen erfüllt sind, suche ein perfektes Matching.



Lösung zu Aufgabe 2

Aufgabe 3

Stelle Dir vor, in einem Unternehmen gibt es 10 Spezialaufgaben. Für diese Spezialaufgaben gibt es 10 Mitarbeiter, die für diese Aufgaben qualifiziert sind. Um Kosten zu sparen sollen aber nicht alle 10 Mitarbeiter für alle 10 Aufgaben zuständig bleiben. Die Weiterbildungskosten sind zu groß.

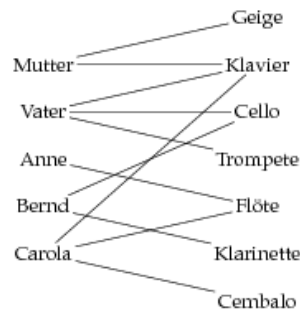
- a. Überlege Dir, wie viele Mitarbeiter für wie viele Aufgaben zuständig bleiben sollen, damit immer jede Aufgabe erledigt werden kann.

Lösung zu Aufgabe 3

Lösungen der Aufgaben

Lösung zu Aufgabe 1

Der bipartite Graph hat folgende Gestalt.



Dabei ist zu erkennen, dass jeweils nur ein Familienmitglied Geige, Trompete, Klarinette und Cembalo spielt.

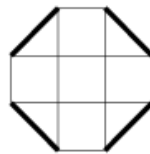
Lösung zu Aufgabe 2

Der erste Graph ist bipartit, da es keine Kreise mit ungerader Länge gibt. Zudem ist der Graph nicht regulär, da es Knoten mit Grad 1, 2 und 4 gibt.

Der zweite Graph ist nicht bipartit, da es Kreise mit der Länge 3 und 5 gibt. Auch regulär ist er nicht, da es Knoten mit Grad 2, 4 und 3 gibt.

Der dritte Graph ist sowohl bipartit als auch regulär. Es gibt Kreise der Länge 4, 6 und 8 und alle Knoten haben den Grad 3.

Ein mögliches perfektes Matching ist folgendes.



Lösung zu Aufgabe 3

Die einfachste Lösung wäre eine eindeutige Zuordnung von Mitarbeitern und Spezialaufgaben. Dann wäre allerdings bei einem Ausfall eines Mitarbeiters gleichzeitig seine Spezialaufgabe nicht mehr belegt. Ein neuer Mitarbeiter müsste schon entsprechend qualifiziert sein, was sich auch im Gehalt des Mitarbeiters niederschlagen würde.

Bei zwei Mitarbeitern pro Spezialaufgabe und gleichzeitig zwei Spezialaufgaben pro Mitarbeiter wäre nach unseren Erkenntnissen ein perfektes Matching möglich. Also würde nie jemand nichts zu tun haben und alle Aufgaben wären besetzt. Hier wäre auch die Ausfallsicherheit verbessert, da nicht eine komplette Spezialaufgabe mit einem Mitarbeiter wegfallen würde. Hier wäre im Gegensatz zur einfachsten Lösung die Neuanwerbung nicht so teuer. Es gäbe die Möglichkeit für eine gewisse Zeit einen neuen Mitarbeiter durch die beiden verbleibenden Spezialisten anzulernen. Das würde das Gehalt sparen und man müsste nicht den Erstbesten einstellen.

Bei drei Mitarbeitern pro Spezialaufgabe und drei Aufgaben pro Mitarbeiter käme der Effekt hinzu, dass der neue Mitarbeiter durch insgesamt 6 Mitarbeiter - jeweils zwei pro Aufgabe - angelernt werden würde. Das steigert die Kollegialität und die Integration des neuen Mitarbeiters. Ebenso erhöht es die Erfahrung des neuen Mitarbeiters. Von zwei Mitarbeitern lässt sich mehr lernen als von einem.

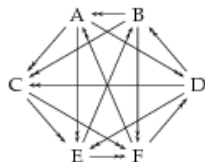
Turniergraphen

Inhaltsverzeichnis

- Einführung
- gerichtete Graphen
- Turniergraphen
- Aufgaben
 - Aufgabe 1
- Es gibt immer eine Rangfolge
- Aufgaben
 - Aufgabe 2
 - Aufgabe 3
- Anführer einer Gruppe
- Aufgaben
 - Aufgabe 4
- Lösungen der Aufgaben
 - Lösung zu Aufgabe 1
 - Lösung zu Aufgabe 2
 - Lösung zu Aufgabe 3
 - Lösung zu Aufgabe 4

Einführung

Der Zoo von Hannover besitzt ein Gehege mit sechs Affen. Ihren Namen sind Alfred, Bodo, Carl, Daniel, Ernst und Fritz. Die Wärter haben monatelang die Beziehungen zwischen den einzelnen Affen beobachtet und festgehalten. Die Hackordnung lässt sich im folgenden Graphen anschaulich aufbereiten. Dabei bedeutet ein Pfeil von **B** nach **A**, dass **B** gegenüber **A** dominant ist.



Dieses Modul beschäftigt sich nun mit den Möglichkeiten, eine solche Hackordnung auszuwerten. Dabei sollte nicht verschwiegen werden, dass alle Aussagen auch auf Beziehungsgeflechte von Menschen angewendet werden können.

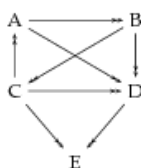
Eine Besonderheit dieses Graphen habt Ihr wahrscheinlich schon bemerkt. Die Kanten haben Pfeile. Dazu aber mehr auf der nächsten Seite.

gerichtete Graphen

Wie gesagt, die Graphen, die wir jetzt betrachten, haben Pfeile. Man redet in diesem Fall von gerichteten Graphen.

Gerichtete Graphen braucht man zum Beispiel bei Einbahnstraßen, wenn man sich das Straßennetz als einen Graphen vorstellt oder wenn man in einem Graphen ausdrücken möchte, wer Sympathien für eine andere Person hegt. Auch kann man mittels gerichteten Graphen Abhängigkeiten z. B. beim Kochen (zuerst muss man die Kartoffeln schälen, bevor man sie kocht oder möchte man doch lieber Pellkartoffeln haben?) ausdrücken.

Nun betrachten wir kurz ein Beispiel.



Was sind nun die großen Unterschiede zwischen gerichteten und ungerichteten Graphen? Ein Weg ist in beiden Typen klar. Man muss nur auf die Richtung achten. Aber der Grad eines Knotens muss nun ein wenig anders definiert werden. Anstatt des Grades eines Knotens wird nun unterschieden zwischen der Anzahl der eingehenden Kanten und der ausgehenden Kanten. Diese nennen wir nun Eingangsgrad und Ausgangsgrad eines Knotens.

Betrachten wir das Beispiel oben: Dort hat der Knoten A eine eingehende Kante und zwei ausgehende Kanten. Damit ist der Eingangsgrad 1 und der Ausgangsgrad 2. Für den Knoten E ergibt sich der Eingangsgrad 2 und der Ausgangsgrad 0. Die folgende Tabelle zeigt den Eingangs- und den Ausgangsgrad für alle Kanten.

Knoten	Eingangsgrad	Ausgangsgrad
<i>A</i>	1	2
<i>B</i>	1	2
<i>C</i>	1	3
<i>D</i>	3	1
<i>E</i>	2	0
Summe	8	8

Interessant ist übrigens, dass die Summe der Eingangsgrade gleich denen der Ausgangsgrade ist. Aber eigentlich ist das klar. Überlegt mal selbst!

Turniergraphen

Nachdem wir nun die gerichteten Graphen kennen, müssen wir uns um besondere gerichtete Graphen kümmern. Wenn wir uns das Beispiel mit den Affen anschauen, dann sehen wir, dass zwischen allen Knoten eine Kante verläuft. Das ist bei dem Beispiel der letzten Seite nicht der Fall. Ebenso ist das bei einem Straßennetz (Man kommt nicht von jeder Kreuzung direkt zu jeder anderen) oder beim Kochen (Um das Gemüse zu kochen, muss ich nicht vorher die Kartoffeln abgossen haben.)

Gerichtete Graphen, bei denen es zwischen allen Knoten eine Kante gibt, nennt man Turniergraphen. Der Name orientiert sich an Sportveranstaltungen, bei denen jede Mannschaft oder jeder Teilnehmer gegeneinander spielen oder kämpfen soll. Dabei entsteht dann auch ein gerichteter Graph, in dem zwischen allen Knoten eine Kante existiert.

Aufgaben

Aufgabe 1

Überlegt Euch, welche anderen Methoden es gibt, um einen Sieger oder eine Rangfolge zu bestimmen.

[Lösung zu Aufgabe 1](#)

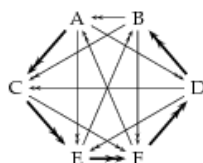
Es gibt immer eine Rangfolge

Kommen wir nun zu der ersten Aussage über Turniergraphen.

Es gibt immer mindestens eine Rangfolge in Turniergraphen.

Die Aussage ist etwas verwunderlich. Deswegen werden wir sie auf der nächsten Seite begründen. Aber zunächst erinnern wir uns an unser Eingangsbeispiel.

Nach der Aussage auf dieser Seite ist es in unserem Beispiel möglich, eine Reihenfolge zu finden. Die folgende Grafik zeigt eine mögliche Rangfolge.



Nun betrachten wir die Begründung für die Aussage von oben. Die Begründung ist nicht schwierig, so dass sie jeder verstehen kann. Nehmt Euch aber ein wenig Zeit, um die Begründung zu verstehen.

Für die Begründung betrachten wir jede Anzahl von Teilnehmern des Turniers einzeln.

Anzahl der Teilnehmer: 1

Für einen Teilnehmer macht es keinen Sinn, über eine Reihenfolge zu reden.

Anzahl der Teilnehmer: 2

Bei zwei Teilnehmern gibt es eine Kante zwischen diesen Beiden. Damit ist die Reihenfolge schon klar.

Anzahl der Teilnehmer: 3

Bei drei Teilnehmern wird es etwas komplizierter. Zunächst ignorieren wir einen Knoten. Dann bleiben zwei Knoten, die eine eindeutige Reihenfolge haben. In dieser Reihenfolge nennen wir den ersten Knoten A und den Zweiten B . In diese Reihenfolge versuchen wir nun den dritten Knoten, wir nennen ihn C , einzufügen. Dann gibt es drei Fälle:

1. Es gibt einen Pfeil von C zu A . Dann ist die Reihenfolge CAB .
 2. Es gibt einen Pfeil von C zu B . Dann gibt es auch einen Pfeil von A zu C (sonst wäre schon der erste Fall eingetreten). Damit ist die Reihenfolge ACB .
 3. Wenn es die ersten beiden Fälle nicht gibt, zeigen alle Pfeile auf C . Dann ist die Reihenfolge ABC .
1. Probiert es an ein paar Beispielen aus.

Anzahl der Teilnehmer: 4

Bei vier Teilnehmern ist es ähnlich kompliziert. Zunächst ignorieren wir einen Knoten. Dann bleiben drei Knoten, die eine eindeutige Reihenfolge haben. In dieser Reihenfolge nennen wir den letzten, also den untersten Knoten A , den Zweiten B und den Dritten C . In diese Reihenfolge versuchen wir nun den dritten Knoten, wir nennen ihn D , einzufügen. Dann gibt es vier Fälle:

1. Es gibt einen Pfeil von D zu A . Dann ist die Reihenfolge $DABC$.
2. Es gibt einen Pfeil von D zu B . Dann gibt es auch einen Pfeil von A zu D (sonst wäre schon der erste Fall eingetreten). Damit ist die Reihenfolge $ADBC$.
3. Es gibt einen Pfeil von D zu C . Dann gibt es auch einen Pfeil von B zu D (sonst wäre schon der erste Fall eingetreten). Damit ist die Reihenfolge $ABDC$.
4. Wenn es die ersten drei Fälle nicht gibt, zeigen alle Pfeile auf D . Dann ist die Reihenfolge $ABCD$.

Anzahl der Teilnehmer: mehr als 4

Das Schema ist nun immer das Gleiche. Probiert es selbst aus.

Aufgaben

Aufgabe 2

Findet Ihr weitere Rangfolgen? Welche Probleme ergeben sich damit.

[Lösung zu Aufgabe 2](#)

Aufgabe 3

Das Reisebüro „Schnell weg“ organisierte eine Rundreise durch fünf niedersächsische Städte, die durch ihre Brauerei bekannt geworden sind. Zum Standardprogramm in den Städten gehörte eine Brauereibesichtigung.

Die Teilnehmer der Rundreise wurden am Ende der Reise gebeten, die Biere gegeneinander abzuwägen. Dabei entstanden folgende Aussagen:

„Becks hat besser geschmeckt als Einbecker und Feldschlösschen.“

„Einbecker war nicht so gut wie das Jever oder das Gilde.“

„Das Gilde war besser als Becks und Jever.“

„Das Jever schmeckte besser als Becks und Feldschlösschen.“

„Feldschlösschen wurde von mir gegenüber Einbecker und Gilde bevorzugt.“

1. Welche fünf Städte wurden bereist?
2. Erstelle einen Turniergraphen für diese Aussagen.
3. Finde mindestens eine Rangfolge für die Biere.
4. Welche verschiedenen Biere können an der Spitze der Reihenfolge stehen und welche nicht?

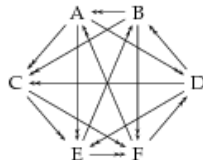
Anführer einer Gruppe

Kommen wir nun zu einer zweiten Aussage.

In einem Turniergraphen gibt es mindestens einen Knoten, von dem aus alle anderen Knoten direkt oder über weitere Knoten indirekt erreichbar sind. Man kann hier auch von einem König und seinen Vizekönigen sprechen.

Wir betrachten nun unser Beispiel, um die Aussage besser zu verstehen.

Hier nochmal der Graph der Affen-Hackordnung.



Nehmen wir in diesem Graphen den Knoten D . Von diesem kann man die Knoten B , C und E direkt erreichen. Mittels des Knotens B kann man die Knoten A und F indirekt erreichen. Damit können wir vom Knoten D alle Knoten direkt oder über den Knoten B indirekt erreichen. Das ist die obenstehende Aussage, die für alle Turniergraphen gilt. Man kann in diesem Beispiel auch von einem *König* (Knoten D) und seinem *Vizekönig* (Knoten B) sprechen.

Nehmen wir ein weiteres Beispiel und betrachten den Knoten A : Von ihm aus erreichen wir die Knoten D , E und C . Mittels des Knotens C erreichen wir indirekt den Knoten F und mittels D den Knoten B . Auch dies ist durch den obenstehenden Satz ausgesagt. Hier ist der Knoten A der *König* und die Knoten C und D sind die *Vizekönige*.

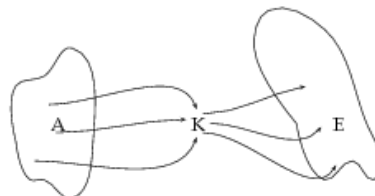
Man sieht also, dass es verschiedene Könige und für einen König mehrere Vizekönige geben kann.

Auf der nächsten Seite findet Ihr einen kleinen und mittelschweren Beweis für die Behauptung.

Den Beweis für den vorherigen Satz werden wir nun gemeinsam erarbeiten.

Dazu nehmen wir einen Knoten, der den größten Ausgangsgrad hat. Davon kann es mehrere geben, aber das ist uns egal. Wir nehmen irgendeinen von ihnen und nennen ihn K .

Im nächsten Schritt betrachten wir die Knoten, von denen ein Pfeil auf den Knoten K zeigt. Die Menge dieser Knoten nennen wir E wie Eingangsgrad. Die Anzahl in dieser Menge ist nämlich der Eingangsgrad von K . Weiterhin nehmen wir die restlichen Knoten, auf die die Pfeile von K aus zeigen. Diese Menge nennen wir A wie Ausgangsgrad.



Es kann natürlich passieren, dass die Menge E leer ist. Das passiert dann, wenn der Eingangsgrad von K 0 ist. In diesem Fall werden alle anderen Knoten direkt erreicht und die Aussage stimmt.

Betrachten wir nun den Fall, in dem E nicht leer ist, und also einige Knoten indirekt erreicht werden müssen. Wir betrachten dazu die Kanten, die zwischen den beiden Mengen verlaufen. Man stellt sich die Frage, ob es einen Knoten in E gibt, von dem aus alle Kanten nach A zeigen und es keine Kanten gibt, die von A auf diesen Knoten zeigen. Also: gibt es einen Knoten in E , der auf alle Knoten in A zeigt? Nein, denn dann wäre der Ausgangsgrad dieses Knotens größer als der Ausgangsgrad von K . Und das haben wir am Anfang ausgeschlossen, denn der Ausgangsgrad von K soll der Größte sein.

Also, wenn es keinen Knoten in E gibt, auf den keine Kante aus A zeigt, dann zeigt auf alle Knoten in E mindestens eine Kante aus A . Damit sind alle Knoten in E über Knoten aus A erreichbar, also von K aus indirekt erreichbar. Damit ist der Satz begründet. Alles klar?

Aufgaben

Aufgabe 4

In der Volleyballmannschaft des HC Göttingen spielen sieben Männer in der ersten Mannschaft. Aufgrund der Jahre, die diese Mannschaft nun zusammenspielt, haben sich soziale Bindungen ergeben. Diese lassen sich so ausdrücken:

Carlos, Sandro und Zacharias schließen sich oft Ünal an.

In den meisten Fällen unterstützen Philipp, Zacharias, Sandro und Hanno die Argumente von Carlos.

Fabian, Sandro, Philipp und Hanno sind selten nicht der Meinung von Zacharias.

Wenn Ünal, Fabian oder Sandro für etwas argumentieren, so argumentiert auch Philipp dafür.

Nach Diskussionen redet Fabian oft kein Wort mehr mit Hanno.

Sandro führt gegenüber Fabian und Hanno oft den Ton an.

Carlos und Ünal sind die größten Unterstützer von Fabian.

Hanno hegt große Sympathien für Philipp und Ünal für Hanno.

- Wie heißen die sieben Mitglieder der Mannschaft?
- Stelle den zugehörigen Turniergraphen auf.
- Finde alle möglichen Paare von Königen und Vizekönigen in dieser Mannschaft.
- Wie kannst Du am Schnellsten die Könige erkennen?
Tipp: Schau Dir die Begründung zu der zweiten Behauptung genauer an.

Lösung zu Aufgabe 4

Lösungen der Aufgaben

Lösung zu Aufgabe 1

Weitere bekannte Verfahren sind eine Tabelle, das K.-o.-System oder ein System über Herausforderungen.

Bei einer Tabelle werden den Siegern und Verlierern der einzelnen Spiele Punkte zugeordnet.

Beim K.-o.-System fliegt immer der Verlierer eines Spieles aus dem Turnier. Am Ende bleibt dann einer übrig, das ist dann der Sieger des Turniers.

Das System über Herausforderungen beginnt mit einer willkürlichen Tabelle mit allen Teilnehmern. Dann kann jede Mannschaft die Mannschaften zum Spiel herausfordern, die in der Tabelle maximal zwei Plätze über ihnen stehen. Die herausgeforderte Mannschaft muss das Spiel annehmen. Wenn der Herausforderer gewinnt, werden die Plätze getauscht. Nach einer gewissen Zeit entspricht die Reihenfolge der Tabelle den Stärken der Mannschaften.

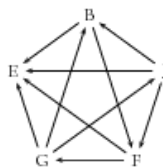
Lösung zu Aufgabe 2

Hier besteht die Problematik, dass es einen Kreis über alle Knoten gibt und zwar über **A, C, E, F, D, B** und wieder zu **A**. Damit kann jeder der Affen als Anführer einer Reihenfolge betrachtet werden.

Lösung zu Aufgabe 3

1) Es wurden die Städte Jever (Jever), Braunschweig (Feldschlösschen), Hannover (Gilde), Einbeck (Einbecker) und Bremen (Becks) besucht.

2) Der Turniergraph sieht folgendermaßen aus. Dabei gelten die Abkürzungen J=Jever, B=Becks, E=Einbecker, F=Feldschlösschen und G=Gilde.



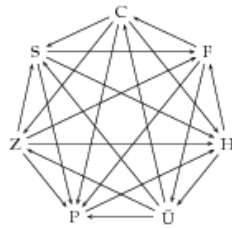
3) Eine mögliche Reihenfolge lautet

Becks – Feldschlösschen – Gilde – Jever – Einbecker

4) Da vom Knoten "Einbecker" keine Kanten beginnen, sondern nur enden, kann Einbecker nicht an der Spitze einer Reihenfolge stehen. Für alle anderen Knoten findet man eine Reihenfolge mit ihnen als Spitze.

Lösung zu Aufgabe 4

- a) Die sieben Mitglieder heißen Carlos, Sandro, Zacharias, Ünal, Philipp, Hanno und Fabian.
 b) Der Turniergraph sieht folgendermaßen aus.



Es gelten dabei die folgenden Abkürzungen Carlos=C, Sandro=S, Zacharias=Z, Ünal=Ü, Philipp=P, Hanno=H und Fabian=F.

- c) Es gibt folgende Paare von Königen und Vizekönigen. Die erstgenannten sind die Könige:

Carlos – Hanno

Zacharias – Fabian

Ünal – Sandro

Ünal – Zacharias

Fabian – Carlos und Ünal

Hanno – Ünal

- d) Man nimmt die Knoten mit dem höchsten Ausgangsgrad. Diese sind immer Könige. Allerdings gibt es auch Könige, die nicht den höchsten Ausgangsgrad haben. Diese muss man weiterhin suchen.

C. Informationen zur beigelegten CD

Die beigelegte CD besteht aus zwei Komponenten, die hier kurz erläutert werden sollen.

Zum Einen ist sie als LiveCD nutzbar, um die erstellten Module in einem ILIAS-System zu testen. Bei der LiveCD handelt es sich um eine angepasste Version der Linux-Distribution sidux 2007-01 «*χαος*»¹¹⁹.

Um die Module zu testen, bootet man seinen Rechner von der beigelegten CD. Dazu müssen u.U. die BIOS-Einstellungen angepasst werden. Wenn es Probleme beim Booten gibt, so verweise ich auf die Hilfe auf der sidux-Webseite www.sidux.com, insbesondere auf das Handbuch unter manual.sidux.com.

Nach erfolgreichem Booten startet ein Webbrowser und ruft die entsprechenden Module in einem ILIAS-System auf. Man beendet die LiveCD indem man sich abmeldet (wie gewohnt den Button rechts unten klicken) und wartet bis der Rechner heruntergefahren ist. **Achtung:** Die Taste ENTER muss am Ende gedrückt werden.

Die zweite Anwendung der CD liegt in den bereitgestellten Daten. Um an diese Daten zu gelangen, legen Sie die CD einfach in Ihren Rechner und greifen von ihrem installierten Betriebssystem auf die CD zu. Es finden sich verschiedene Verzeichnisse und Dateien auf der CD.

Die Datei `index.html` öffnet das sidux-Handbuch, welches sich auch auf der Webseite manual.sidux.com findet.

Im Verzeichnis `examensarbeit` finden sich weitere unterschiedliche Unterverzeichnisse. Im Unterverzeichnis `module` finden sich die erstellten ILIAS-Module im zip-Format.

¹¹⁹ sidux.com :: debian based live cd development. URL: www.sidux.com – Zuletzt besucht am 18.02.2007.

Diese zip-Dateien lassen sich in eine ILIAS-Umgebung importieren. Neben den ILIAS-Module werden im Unterverzeichnis `html-export` die exportierten Module im HTML-Format zur Verfügung gestellt. Für jedes der vier Module gibt es eine zip-Datei sowie ein Unterverzeichnis mit den Daten. In den Unterverzeichnissen kann die Datei `index.html` in einem Webbrowser geöffnet werden, um das exportierte Modul zu betrachten. Im Unterverzeichnis `ilias` findet sich das ILIAS-Release 3.7.5. Für Installationsfragen kontaktieren Sie bitte die Webseite www.ilias.de. Das Unterverzeichnis `pdf` enthält diese Arbeit als eine pdf-Datei, die mit den bekannten pdf-Ansichtsprogrammen geöffnet werden kann.

Zum Abschluss einige Bemerkungen zum Umgang mit der CD.

Dies ist experimentelle Software, die Benutzung geschieht auf eigenes Risiko. Der Autor kann unter keinen Umständen verantwortlich gemacht werden für Schäden an Hardware oder Software, Datenverlust oder andere direkte oder indirekte Schäden, die durch die Benutzung dieser Software entstehen. Wenn Sie mit diesen Bedingungen nicht einverstanden sind, erlischt die Erlaubnis, diese Software zu benutzen oder weiter zu verbreiten.

Die Software wird unter der GNU/GPL-Lizenz Version 2 (Der Lizenztext finden sich auf der CD in der Datei `licence.txt`) und anderen kompatiblen Lizenzen veröffentlicht. Dies gilt insbesondere auch für die erstellten ILIAS-Module. Ausgenommen von dieser Lizenz sind die notwendigen Java-Inhalte der Firma Sun und die Datei `cindyrun.jar`, die zur Darstellung der unter Cinderella2 erstellten Java-Applets notwendig sind.

Der Quellcode der genutzten und selbsterstellten Programme kann beim Autor unter der Emailadresse thomas.wassong@gmx.de angefragt werden. Die Übermittlung erfolgt dann gegen einen Unkostenbeitrag auf angemessenen Wegen.

Informationen zur beigelegten CD

Informationen zur beigelegten CD

D. Literaturverzeichnis

D.1. Literatur

BARZEL, Bärbel, HUSSMANN, Stephan und LEUDERS, Timo (Hrsg.): Computer, Internet & Co. im Mathematikunterricht. Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor, 2005.

BARZEL, Bärbel: Warum gehören „Neues Lernen“ und „Neue Medien“ im Mathematikunterricht zusammen? In: Der Mathematikunterricht, 3 2004, S. 52–62.

BERTSEKAS, Dimitri und GALLAGER, Robert: Data Networks. London: Prentice-Hall International, Inc., 1987.

BESCHERER, Christine: Mit WebQuests im Internet recherchieren. In Bärbel BARZEL, Stephan HUSSMANN und Timo LEUDERS (Hrsg.): Computer, Internet & Co. im Mathematikunterricht. Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor, 2005, S. 107–116.

BIGALKE, Hans-Günther: Graphentheorie im Unterricht? In: Der Mathematikunterricht, 4 1974, S. 5–10.

BIGALKE, Hans-Günther: Über die mögliche Bedeutung der Graphentheorie beim Lernen von Mathematik. In: Didaktik der Mathematik, 3 1974, S. 189–216.

BÜCHTER, Andreas und LEUDERS, Timo: Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern - Leistung überprüfen. Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor, 2005.

CHATRAND, Gary: Introductory graph theory. New York: Dover Publications, Inc., 1985.

DIESTEL, Reinhard: Graphentheorie. Heidelberg: Springer-Verlag, 2006 URL: <http://www.math.uni-hamburg.de/home/diestel/books/graphentheorie/GraphentheorieIII.pdf> – Zuletzt besucht am 05.03.2007.

EULER, Leonard: *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis*. In: *Commentationes algebraicae ad theoriam combinationum et probabilitatum pertinentes*. Birkhäuser Verlag, 1923 (= *Opera Mathematica Volume 7*) URL: <http://math.dartmouth.edu/~euler/docs/originals/E053.pdf> – Zuletzt besucht am 02.02.2007, S. 1 – 10.

GREEN, Nigel: *Unterrichtsvorschläge zur diskreten Mathematik*. In: *mathematik lehren*, 1997, Nr. 84, S. 60–64.

GRITZMANN, Peter und BRANDENBERG, René: *Das Geheimnis der kürzesten Wege*. Springer Verlag, 2003.

GRITZMANN, Peter und BRANDENBERG, René: *Zu viele Bäume?* In: *mathematik lehren*, 2005, Nr. 129, S. 62–64.

JEGER, Max: *Elementare Begriffe und Sätze aus der Theorie der Graphen*. In: *Der Mathematikunterricht*, 4 1974, S. 11–64.

KLIMSA, Paul und ISSING, Ludwig J. (Hrsg.): *Informationen und Lernen mit Multimedia und Internet*. Weinheim: Beltz PVU, 2002.

KLOSE, Karl-Dieter: *Zur Einführung*. In: *Der Mathematikunterricht*, 3 1978, S. 3–4.

LEUDERS, Timo (Hrsg.): *Mathematik-Didaktik. Praxishandbuch für die Sekundarstufe I und II*. Cornelsen Verlag Scriptor, 2003.

LUTZ-WESTPHAL, Brigitte: *Wie komme ich optimal zum Ziel?* In: *mathematik lehren*, 2005, Nr. 129, S. 56–61.

LUTZ-WESTPHAL, Brigitte: *Kombinatorische Optimierung - Inhalte und Methoden für einen authentischen Mathematikunterricht*. Dissertation Technische Universität Berlin, 2006, URL: http://www.math.tu-berlin.de/~westphal/diss_online.pdf – Zuletzt besucht am 02.02.2007.

LÖBIG, Andreas: *U-Bahnpläne und kurze Wege*. Selze: Erhard Friedrich Verlag, 2005 (= *Mathe-Welt 129*).

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS: *Principles and Standards for School Mathematics*. 2000.

NIEDERSÄCHSISCHES KULTUSMINISTERIUM: *Kerncurriculum für das Gymnasium Schuljahrgänge 5 – 10 - Fach Mathematik*. Hannover: Niedersächsisches Kultusministerium, 2006 URL: http://db2.nibis.de/1db/cuvo/datei/kc_gym_mathe_nib.pdf – Zuletzt besucht am 07.02.2007.

D.1. Literatur

NIEGEMANN, Helmut N.: Neue Lernmedien. konzipieren, entwickeln, einsetzen. Bern: Verlag Hans Huber, 2001.

NITZSCHE, Manfred: Graphen für Einsteiger - Rund um das Haus vom Nikolaus. Wiesbaden: Friedrich Vieweg & Sohn Verlag, 2005.

ORE, Oystein; WILSON, Robin J. (Hrsg.): Graphs and their uses. Washington: The mathematical association of america, 1990 (= New mathematical library 34).

PIAGET, Jean: Psychologie der Intelligenz. Zürich: Rascher, 1948.

PIEPER, Hannelore und WALTHER, Gerd: Graphen im Mathematikunterricht - eine Analyse der derzeitigen Curriculumsituation. In: BODENDIECK, Rainer (Hrsg.): Graphen in Forschung und Unterricht. Festschrift K. Wagner. Salzdettfurth: Verlag Barbara Franzbecker, 1985, S. 233–241.

PROKSCH, Ruth: Geometrische Propädeutik. Göttingen: Vandenhoeck und Ruprecht, 1956.

SCHUMANN, Heinz: INTERNET und Mathematikunterricht - eine Übersicht. In: Der Mathematikunterricht, 4 2003, S. 7 – 27.

THIES, Silke: Zur Bedeutung diskreter Arbeitsweisen im Mathematikunterricht. Dissertation Justus-Liebig-Universität Gießen, 2002, URL: <http://bibd.uni-giessen.de/gdoc/2002/uni/d020154.pdf> – Zuletzt besucht am 03.02.2007.

TITTMANN, Peter: Graphentheorie - Eine anwendungsorientierte Einführung. Leipzig: Fachbuchverlag, 2003.

WEIGAND, Hans-Georg und WETH, Thomas: Computer im Mathematikunterricht. Neue Wege zu alten Zielen. Spektrum, Akademischer Verlag, 2002.

WINTER, Heinrich: Geometrisches Vorspiel im Mathematikunterricht der Grundschule. In: Der Mathematikunterricht, 5 1971, S. 40–66.

D.2. Links

BESCHERER, Christine: Mathe-Webquests. URL: www.mathe-webquests.de – Zuletzt besucht am 14.02.2007.

Cinderella: Die interaktive Geometrie-Software Cinderella. URL: www.cinderella.de – Zuletzt besucht am 01.01.2007.

FACHBEREICH MATHEMATIK DER BERGISCHEN UNIVERSITÄT WUPPERTAL: Mathe-Prisma. URL: www.matheprisma.de – Zuletzt besucht am 06.02.2007.

FACHBEREICH MATHEMATIK DER BERGISCHEN UNIVERSITÄT WUPPERTAL: teachTool. URL: www.matheprisma.de/teachTool/ – Zuletzt besucht am 06.02.2007.

ILIAS open source. URL: www.ilias.de – Zuletzt besucht am 01.01.2007.

REUSS, Martin: WebQuest Strahlensätze. URL: <http://www.lehrer-online.de/url/strahlensaetze-webquest> – Zuletzt besucht am 14.02.2007.

sidux.com :: debian based live cd development. URL: www.sidux.com – Zuletzt besucht am 18.02.2007.

STAMM, Tobias: Dijkstra-Algorithmus. URL: <http://mandalex.manderby.com/d/dijkstra.php?id=93> – Zuletzt besucht am 19.02.2007.

Erklärung

Ich versichere, dass ich die vorliegende schriftliche Hausarbeit (Examensarbeit) selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt habe. Die Stellen der Arbeit, die dem Wortlaut oder dem Sinn nach anderen Werken entnommen sind, wurden in jedem Fall unter Angabe der Quellen (einschließlich des World Wide Web und anderer elektronischer Text- und Datensammlungen) und nach den üblichen Regeln wissenschaftlichen Zitierens kenntlich gemacht. Dies gilt auch für beigegebene Zeichnungen, bildliche Darstellungen, Skizzen und dergleichen. Mir ist bewusst, dass wahrheitswidrige Angaben als Täuschungsversuch behandelt werden.

Göttingen, den 09. März 2007

Ort, Datum

Unterschrift