

Spektralrandintegralmethoden zur Maxwell-Gleichung

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultäten
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von
Martin Pieper
aus
Geseke

Göttingen 2007

D7

Referent: Prof. Dr. R. Kreß

Korreferent: Prof. Dr. T. Hohage

Tag der mündlichen Prüfung: 05. Juli 2007

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
1.1	Mathematische Problemstellung	4
1.2	Gliederung	8
2	Grundlagen	11
2.1	Notationen	11
2.2	Skalare Funktionen	15
2.2.1	Skalare Kugelflächenfunktionen	16
2.2.2	Die Gauß-Rechteck-Quadraturformel	18
2.2.3	Der Approximationsoperator \mathcal{L}_n	20
2.2.4	Konvergenz der Quadraturformel	23
2.3	Vektorfelder	24
2.3.1	Vektorielle Kugelflächenfunktionen	25
2.3.2	Die Gauß-Rechteck-Quadraturformel	32
2.3.3	Der Approximationsoperator \mathbf{L}_n	34
2.3.4	Approximationsgüte von \mathbf{L}_n in $t(\partial B)$	36
2.3.5	Konvergenz der Quadraturformel	45
3	Die skalare Methode	47
3.1	Beschreibung der skalaren Methode	48
3.2	Das Galerkin-Verfahren	51
3.3	Diskretisierung der Integraloperatoren	53
3.4	Implementation	56
3.5	Numerische Ergebnisse	59
3.6	Zur Konvergenzanalyse	63
3.7	Modifikation der Methode	68
3.7.1	Zerlegung der Sphäre	69
3.7.2	Die modifizierte skalare Methode	73
3.7.3	Bewertung	75
4	Die vektorielle Methode	79
4.1	Transformation auf die Sphäre	80
4.2	Approximation des Integraloperators	84

4.3	Implementation	87
4.4	Gedanken zur Konvergenzanalyse	91
4.5	Bewertung	94
5	Ein inverses Streuproblem als Anwendung	97
5.1	Das inverse Streuproblem	98
5.2	Das Problem als System von Integralgleichungen	99
5.3	Numerische Lösung des inversen Problems	102
5.4	Bewertung	105
6	Zur inversen akustischen Streuung in \mathbb{R}^3	109
6.1	Problembeschreibung	110
6.2	Das Problem als System von Integralgleichungen	111
6.2.1	Erste Methode: Schlecht gestellte Gleichungen	111
6.2.2	Zweite Methode: Gut und schlecht gestellte Gleichung	116
6.3	Bewertung	121
7	Zusammenfassung und Ausblick	123
8	Anhang	127
8.1	Zur Approximationsgüte von \mathbf{L}_n	127
8.2	Zur Optimalität der Norm von \mathbf{L}_n	133
8.3	Zur Implementation der vektoriellen Größen	135
	Literaturverzeichnis	137
	Danksagung	143
	Lebenslauf	145

Kapitel 1

Einleitung

Elektromagnetische Wellen begegnen uns im täglichen Leben an vielen Stellen. Ohne sie gäbe es weder Fernsehen, Radio noch Handys, denn all diese Geräte verwenden elektromagnetische Wellen zur Signalübertragung. Darüber hinaus zählen noch viele andere Phänomene zum weiten elektromagnetischen Spektrum, das von energiereicher Gamma- und Röntgenstrahlung, über das sichtbare Licht, bis hin zu kurzwelligen Mikro- und Radiowellen reicht.

Zuerst wurden elektromagnetische Wellen 1865 nur theoretisch von James Clerk Maxwell (13. Juni 1831 - 05. November 1879) vorausgesagt. Heinrich Hertz (22. Februar 1857 - 01. Januar 1894) war es schließlich, der diese Wellen 1880 zum ersten Mal experimentell erzeugen und nachweisen konnte. Seitdem begann eine Entwicklung, die immer noch andauert und ständig an Tempo gewinnt.

In der vorliegenden Arbeit wollen wir uns speziell mit der Streuung von elektromagnetischen Wellen befassen. Dabei reden wir von Streuung, wenn eine Welle in einem homogenen Medium auf ein Hindernis trifft, an dem die Homogenität unterbrochen ist. In diesem Fall ruft das Hindernis eine sogenannte Streuwelle hervor. Ziel in der Streutheorie elektromagnetischer Wellen ist es nun, für bekannte Streuobjekte und einfallende Wellen diese gestreute Welle zu bestimmen.

Es gibt eine Reihe von praktischen Anwendungen, bei denen Streuprobleme eine wichtige Rolle spielen. So ist z.B. der Flugzeugkonstrukteur daran interessiert, wie sich die elektromagnetische Strahlung der Bordinstrumente im Flugzeug ausbreitet oder wie Störquellen im Passagierbereich (Handy, Laptop etc.) wirken, damit keine Störungen während des Fluges auftreten. Ein anderes Beispiel sind Hochspannungsleitungen oder Handymasten. Hier muss sichergestellt werden, dass keine schädliche Strahlung für Anwohner entsteht.

Eine weitere Problemklasse benutzt elektromagnetische Streuung als Hilfsmittel zur Problemlösung: So werden z.B. bei der Minensuche elektromagnetische Wellen aus-

gesendet, die dann an Minen und anderen Gegenständen im Boden gestreut werden. Diese Streuwellen werden gemessen. Anschließend versucht man mit diesen Messdaten zu entscheiden, ob eine Mine im Boden vergraben ist oder nicht. Ein ähnliches Problem werden wir am Ende der Arbeit als mögliche Anwendung unserer Verfahren diskutieren.

Im nächsten Abschnitt wollen wir nun unser elektromagnetisches Streuproblem mathematisch beschreiben und unsere Lösungsmethode erläutern. Hierbei halten wir uns an die Darstellung von Colton und Kreß [7]. Anschließend geben wir die Gliederung der Arbeit an.

1.1 Mathematische Problemstellung

Die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen wird durch die sogenannten *Maxwell-Gleichungen* beschrieben. Für das elektrische Feld \mathcal{E} und das magnetische Feld \mathcal{H} lauten diese allgemein:

$$\operatorname{rot} \mathcal{E} + \mu \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathcal{H} - \epsilon \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = \sigma \mathcal{E}.$$

Hierbei nehmen wir an, dass sich die Welle in einem isotropen Medium im \mathbb{R}^3 ausbreitet. Weiter soll dieses Medium eine ortsunabhängige elektrische Permeabilität ϵ , eine magnetische Permeabilität μ und eine elektrische Leitfähigkeit σ besitzen.

Gehen wir speziell von zeitharmonischen Wellen der Form

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(x, t) &:= \operatorname{Re} \left\{ \left(\epsilon + \frac{i\sigma}{\omega} \right)^{-1/2} E(x) e^{-i\omega t} \right\} \\ \mathcal{H}(x, t) &:= \operatorname{Re} \{ \mu^{-1/2} H(x) e^{-i\omega t} \} \end{aligned}$$

mit Frequenz $\omega > 0$ aus, so ergeben sich die sogenannten *reduzierten Maxwell-Gleichungen* für die nur noch ortsabhängigen Größen E und H :

$$\operatorname{rot} E - i\kappa H = 0, \quad \operatorname{rot} H + i\kappa E = 0. \quad (1.1)$$

Hierbei bezeichnen wir mit κ die konstante Wellenzahl, die gegeben ist durch:

$$\kappa^2 := \left(\epsilon + \frac{i\sigma}{\omega} \right) \mu \omega^2.$$

Das Vorzeichen von κ wird so gewählt, dass $\operatorname{Im}(\kappa) \geq 0$ ist. Als letzte Vereinfachung nehmen wir noch an, dass unser Streuobjekt von einem homogenen Medium mit verschwindender Leitfähigkeit $\sigma = 0$ umgeben ist.

Zur vollständigen Problembeschreibung fehlen uns jetzt noch eine Rand- und eine Ausstrahlungsbedingung für unsere zeitharmonische, elektromagnetische Welle. Wir beginnen mit der Randbedingung:

In dieser Arbeit betrachten wir die Streuung an einem perfekt leitenden Objekt $D \subset \mathbb{R}^3$. Aus der Physik ist bekannt, dass für ein solches Streuobjekt die Tangentialkomponente des elektrischen Gesamtfeldes E am Rand ∂D des Objektes verschwindet. Als Gesamtfeld bezeichnen wir hierbei die Summe der bekannten, einfallenden Felder E^i und H^i mit den gesuchten, gestreuten Feldern E^s und H^s , also:

$$E := E^i + E^s \quad \text{und} \quad H := H^i + H^s.$$

Damit ergibt sich, mit der nach außen weisenden Normalen ν bzgl. ∂D , die folgende Randbedingung an das elektrische Gesamtfeld:

$$\nu \times E = 0 \quad \text{auf} \quad \partial D.$$

Wir fordern weiter von der gestreuten Welle, dass sie die sogenannte *Silver-Müller-Ausstrahlungsbedingung* erfüllt, d.h.

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (H^s \times x - rE^s) = 0 \quad \text{oder} \quad (1.2)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (E^s \times x + rH^s) = 0, \quad (1.3)$$

wobei $r = |x|$ und der Grenzwert gleichmäßig in alle Richtungen zu verstehen ist. Eine solche Lösung der reduzierten Maxwell-Gleichungen wird auch *ausstrahlende Lösung* genannt.

Wir können nun das *direkte elektromagnetische Streuproblem* aufstellen:

Gegeben ist eine einfallende elektromagnetische Welle E^i und H^i , die eine ganze Lösung der reduzierten Maxwell-Gleichungen (1.1) ist. Gesucht wird eine Lösung

$$E = E^i + E^s \quad \text{und} \quad H = H^i + H^s,$$

welche die reduzierten Maxwell-Gleichungen in $\mathbb{R}^3 \setminus D$ erfüllt und der Randbedingung

$$\nu \times E = 0 \quad \text{auf} \quad \partial D$$

genügt. Weiterhin soll das gestreute Feld E^s und H^s die Silver-Müller-Ausstrahlungsbedingung (1.2) oder (1.3) erfüllen.

Durch Umbenennung der Unbekannten können wir dieses direkte Streuproblem auch als *äußeres Maxwell-Problem* formulieren:

Gegeben ist ein tangentes Vektorfeld $c \in t(\partial D)$. Gesucht ist eine ausstrahlende Lösung $E, H \in C^1(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ der reduzierten Maxwell-Gleichungen (1.1), welche die folgende Randbedingung erfüllt:

$$\nu \times E = c \quad \text{auf } \partial D.$$

Nach Colton und Kreß ist dieses äußere Maxwell-Problem für Objekte $D \subset \mathbb{R}^3$ mit zusammenhängendem, C^2 -glattem Rand, eindeutig lösbar ([7], Thm. 6.21) und es existieren bereits eine Reihe von Lösungsmethoden. Für die Klasse der Finite-Element-Methoden verweisen wir auf das Buch [45] von Monk und die darin angegebene Literatur. Als Standardlöser in der Industrie werden der FISC-Löser (Fast Illinois Solver Code) und hiermit verwandte Verfahren verwendet (siehe [60]). In der vorliegenden Arbeit wollen wir die Lösung jedoch mit Hilfe von Integralgleichungsmethoden, die eine größere Konvergenzordnung besitzen, bestimmen.

Bei Colton und Kreß [7] finden wir, dass die Vektorfelder

$$E(x) := \operatorname{rot} \int_{\partial D} a(y) \Phi(x, y) ds(y) \quad (1.4)$$

$$H(x) := \frac{1}{i\kappa} \operatorname{rot} E(x) \quad (1.5)$$

genau dann Lösungen des äußeren Maxwell-Problems sind, wenn die tangente Dichte $a \in t(\partial D)$ die folgende Randintegralgleichung löst:

$$a(x) + 2 \int_{\partial D} \nu(x) \times \operatorname{rot}_x \{ \Phi(x, y) a(y) \} ds(y) = 2c(x), \quad x \in \partial D. \quad (1.6)$$

Wir bezeichnen hierbei mit

$$\Phi(x, y) := \frac{e^{i\kappa|x-y|}}{4\pi|x-y|} \quad (1.7)$$

die Grundleistung der Helmholtz-Gleichung. Die Integralgleichung ist eindeutig lösbar, falls κ kein innerer Maxwell-Eigenwert ist, was wir in den folgenden Kapiteln dieser Arbeit stets annehmen. Hierbei wird κ ein innerer Maxwell-Eigenwert genannt, falls eine nichttriviale Lösung E, H zur Maxwell-Gleichung in D existiert, welche die homogene Randbedingung $\nu \times E = 0$ auf ∂D erfüllt.

Zerlegen wir den Kern des magnetischen Dipol-Operators

$$(\mathcal{M}a)(x) := 2 \int_{\partial D} \nu(x) \times \operatorname{rot}_x \{ \Phi(x, y) a(y) \} ds(y), \quad x \in \partial D, \quad (1.8)$$

so erhalten wir Folgendes:

$$\nu(x) \times \operatorname{rot}_x \{ \Phi(x, y) a(y) \} = \nabla_x \Phi(x, y) [\nu(x) - \nu(y)] \cdot a(y) - a(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)}.$$

Wir stellen fest, dass dieser Operator eine Singularität vom selben Typ besitzt wie die Integraloperatoren, die zur Lösung akustischer Streuprobleme verwendet werden (siehe Colton und Kreß [7], Abschnitt 3.2 und Thm. 6.11). Daher liegt es nahe, zur Lösung der Integralgleichung (1.6) Lösungsmethoden für akustische Streuprobleme zu adaptieren. Betrachten wir hauptsächlich Streuobjekte, die sich hinreichend glatt über der Einheitsphäre parametrisieren lassen, so kommt Wienerts Methode ([64] bzw. [7], Abschnitt 3.6) in Frage.

Wienert entwickelte 1990 in seiner Dissertation Quadraturformeln, welche die Singularitäten der Einfach- bzw. Doppelschichtpotentiale bei akustischen Streuproblemen analytisch behandeln. Leider konnte er jedoch keine Aussagen zur Konvergenzgeschwindigkeit des zugehörigen Nyström-Verfahrens machen. Im Jahr 2002 gelang dies Graham und Sloan (siehe [21]) für ein leicht modifiziertes Galerkin-Verfahren, welches verwandt ist mit Wienerts Methode. Dieses Galerkin-Verfahren konvergiert superalgebraisch.

Auf diese beiden Arbeiten aufbauend, versuchen wir hier ein neues numerisches Verfahren zur Lösung elektromagnetischer Streuprobleme zu entwickeln, von dem wir uns ebenfalls superalgebraische Konvergenz erhoffen. Wir verfolgen hierbei zwei Strategien, was zu den folgenden beiden Verfahren führt:

- **Skalare Methode:** Wir zerlegen den Integraloperator \mathcal{M} und betrachten die entsprechenden Gleichungen komponentenweise. Die hierbei entstehenden Integraloperatoren besitzen dieselbe Form wie die Operatoren, auf die Graham und Sloans Methode angewendet werden kann. Daher können wir ihr Galerkin-Verfahren leicht auf unsere komponentenweise betrachtete Integralgleichung übertragen.
- **Vektorielle Methode:** Wir betrachten die Integralgleichung als Vektorgleichung und approximieren mit Vektorfeldern, nicht mit skalaren Funktionen. Hier bieten sich die vektoriellen Kugelflächenfunktionen als Gegenstück zu den skalaren Kugelflächenfunktionen bei Graham und Sloan an. Bei dieser Vorgehensweise wollen wir sicherstellen, dass die tangentielle Natur des Problems erhalten bleibt, wodurch wir nur mit tangentialen Ansatzfunktionen arbeiten müssen, was die Größe des Problems reduziert. Dies erreichen wir mit Hilfe der Funktionalmatrix der zu ∂D zugehörigen Parametrisierung.

1.2 Gliederung

In Teil zwei der Einleitung wollen wir nun den die Gliederung bzw. den Inhalt der Arbeit angeben:

Ein Blick ins Inhaltsverzeichnis zeigt, dass **Kapitel zwei**, das Grundlagenkapitel, breiten Raum einnimmt. Dies spiegelt gut das **Grundanliegen dieser Dissertation** wider: Wir haben uns bemüht, alle in den Hauptkapiteln vorgestellten Verfahren auf eine **theoretisch fundierte Grundlage** zu stellen. Ohne ein tieferes Verständnis der Mathematik hinter den Verfahren kann kein guter Algorithmus entwickelt werden. Hierzu war es vor allem nötig, im Bereich der sphärischen Vektorfelder neue Erkenntnisse im Umgang mit vektoriellen Kugelflächenfunktionen zu gewinnen, da dieser Bereich in der Mathematik bisher eher stiefmütterlich behandelt wurde (siehe die Einleitung zum Abschnitt 2.3.1).

Nachdem wir kurz die verwendete Notation eingeführt haben, beschäftigen wir uns zuerst mit skalaren, sphärischen Funktionen. Die Aussagen in diesem Bereich sind bereits seit längerem bekannt und werden der Vollständigkeit halber angegeben. Im **Abschnitt 2.3** kommen wir dann schließlich zu den **Vektorfeldern**. Die Idee war es, alle relevanten Ergebnisse für skalare Kugelflächenfunktionen auf den vektoriellen Fall zu übertragen. Hierbei zeigte sich eine enge Verwandtschaft zwischen den skalaren Funktionen und den vektoriellen Kugelflächenfunktionen.

Nachdem wir die vektoriellen Kugelflächenfunktionen eingeführt und einige Ergebnisse zusammengestellt haben, befassen wir uns in **Abschnitt 2.3.2** mit der **Gauß-Rechteck-Quadraturformel für Vektorfelder**. Die skalaren Ergebnisse zu dieser Quadraturformel sind bereits bei Wienert ([64], 1990) zu finden. Für den vektoriellen Fall existierten bisher nur einige wenige Aussagen (siehe Nestel [49], 1996). Wir zeigen in Abschnitt 2.3.2, dass es möglich ist, die Ergebnisse komplett zu übertragen. Die wichtigsten Aussagen hierbei sind sicherlich, dass auch im vektoriellen Fall die Quadraturformel exakt für vektorielle Kugelflächenfunktionen bis zur Ordnung $2n$ ist (**Satz 2.39**) und dass ähnliche Konvergenzaussagen, wie im skalaren Fall, gelten (**Satz 2.52**).

Die wohl wichtigsten neuen Aspekte des Grundlagenkapitels betreffen den **Approximationsoperator L_n** in **Abschnitt 2.3.3**. Diesen Operator benötigen wir zur Definition des diskreten Integraloperators in Kapitel vier. Er wurde bereits von Nestel in seiner Dissertation [49] verwendet. Nestel arbeitet jedoch ausschließlich mit Sobolev-Räumen. Da bisher, soweit wir wissen, keine Ergebnisse vorliegen, in denen L_n als Abbildung zwischen den Räumen der stetigen, tangentialen Vektorfelder betrachtet wird, übertragen wir in Abschnitt 2.3.3 zuerst einige bekannte Eigenschaften aus dem skalaren Fall. Anschließend befassen wir uns in **Abschnitt 2.3.4** mit der **Approximationsgüte von L_n** .

In **Satz 2.45** geben wir eine Normabschätzung für \mathbf{L}_n an, die entscheidend für die Konvergenz der vektoriellen Methode in Kapitel vier ist. Im skalaren Fall wurde 2000 von Sloan und Womersley [59] gezeigt, dass die Lebesgue-Konstante des skalaren Approximationsoperators \mathcal{L}_n $\mathcal{O}(n^{1/2})$ ist. Diese stimmt mit der Konstante für die orthogonale Projektion überein, von der bekannt ist, dass sie die kleinste Norm unter allen Projektionen besitzt. Damit erweist sich \mathcal{L}_n als echte Alternative zur orthogonalen Projektion. Ein ähnliches Ergebnis wäre auch für den vektoriellen Operator \mathbf{L}_n wünschenswert. Wir waren zwar nicht in der Lage einen kompletten Beweis hierfür anzugeben, jedoch haben wir in Abschnitt 2.3.4 einige entscheidende Schritte in diese Richtung gemacht. So konnten wir in **Satz 2.46** z.B. zeigen, dass auch für Vektorfelder die orthogonale Projektion die kleinste Norm besitzt, was bisher unbekannt war.

Nachdem wir alle Grundlagen angegeben haben, behandeln wir als Erstes in **Kapitel drei** die **skalare Lösungsmethode**. Hierbei beschreiben wir in Abschnitt 3.1 bis 3.3 zunächst die Diskretisierung der Integralgleichung und das zugehörige Galerkin-Verfahren. Anschließend gehen wir kurz auf die Implementierung dieser Methode ein und geben numerische Beispiele an. In Abschnitt 3.6 erläutern wir schließlich noch die gefundenen numerischen Ergebnisse und geben in Abschnitt 3.7 eine mögliche Modifikation der Methode an.

Kapitel vier befasst sich mit der **vektoriellen Methode**. Unter den Spektralmethoden ist unser Verfahren das erste, welches nur mit tangentialen Kugelflächenfunktionen, auch für allgemeinere Streuobjekte, arbeitet. Wir diskutieren zuerst die Transformation auf die Sphäre und die Diskretisierung des Integraloperators (Abschnitt 4.1 und 4.2). Dabei gehen wir besonders darauf ein, wie wir den tangentialen Charakter der Gleichung erhalten können. Anschließend behandeln wir noch die Implementation, gehen kurz auf die Konvergenzanalyse des Verfahrens ein und bewerten die gefundenen Ergebnisse am Ende des Kapitels.

Nach der Herleitung der beiden Lösungsverfahren geben wir in **Kapitel fünf** ein **inverses elektromagnetisches Streuproblem** als Anwendungsbeispiel für diese Methoden an. Dazu beschreiben wir zuerst das inverse Streuproblem und überführen es anschließend in ein äquivalentes System von Integralgleichungen (**Satz 5.2**), welches mit den von uns entwickelten Methoden gelöst werden kann. Die Grundidee hierzu stammt von Kreß und Rundell ([38], 2005), die so ein inverses Problem für die Laplace-Gleichung gelöst haben. Später wurden diese Ideen von Ivanyslyn und Kreß [29] auf ein akustisches Streuproblem übertragen. In der vorliegenden Arbeit wird dieses Verfahren erstmals für ein inverses elektromagnetisches Streuproblem entwickelt und angewendet. Nach den theoretischen Überlegungen behandeln wir die praktische Umsetzung des Verfahrens und geben eine abschließende Bewertung an.

Ivanyshyn und Kreß behandeln in [29] nur den zweidimensionalen Fall. Unsere Ideen für das inverse elektromagnetische Streuproblem lassen sich jedoch leicht auch auf **dreidimensionale, inverse akustische Streuprobleme** übertragen. In **Kapitel sechs** gehen wir daher auf diese Probleme, ihre Lösung durch ein System von zwei Integralgleichungen und die numerische Behandlung ein. Wir geben hierbei **zwei Möglichkeiten** an: Ein System von zwei schlecht gestellten Gleichungen, wie wir es bei Ivanyshyn und Kreß finden bzw. ein System von einer gut gestellten und einer schlecht gestellten Gleichung, wie in Kapitel fünf beim inversen elektromagnetischen Problem. Die Hauptaussagen werden in **Satz 6.1 und 6.3** zusammengefasst. Angaben zur numerischen Umsetzung finden sich in den Abschnitten 6.2.1 und 6.2.2.

Den Abschluss der Arbeit bildet **Kapitel sieben**: Hier fassen wir die Hauptaussagen noch einmal zusammen und geben einen Ausblick auf weitere interessante Fragen, die sich im Rahmen dieser Dissertation ergeben.

Im **Anhang (Kapitel acht)** können schließlich noch einige Detailrechnungen und weiterführende Betrachtungen gefunden werden, die für die Entwicklung der numerischen Lösungsverfahren eher von sekundärem Interesse sind.

Kapitel 2

Grundlagen

In diesem Kapitel geben wir alle Hilfsmittel an, die wir zur Herleitung und Analyse unserer numerischen Verfahren benötigen. Wir beginnen mit der Notation, die wir in den Hauptkapiteln drei und vier verwenden. Anschließend behandeln wir skalare Funktionen und Vektorfelder auf der Sphäre. Um das Grundlagenkapitel kurz zu halten, beweisen wir nur die nötigsten Ergebnisse und zitieren bei bekannten Resultaten die entsprechende Literatur.

2.1 Notationen

Im Grundlagenkapitel und den Hauptkapiteln (Kap. drei und vier) dieser Arbeit verwenden wir in der Regel die Notation von Freedon, Gervens und Schreiner [14] bzw. Graham und Sloan [21]. Wir beginnen mit der üblichen Matrix- Vektornotation, gehen anschließend auf die spezielle sphärische Notation ein und beenden diesen Abschnitt mit der Einführung der wichtigsten Funktionenräume und den zugehörigen Normen bzw. Innenprodukten.

Wie üblich bezeichnen wir mit \mathbb{N} , \mathbb{R} und \mathbb{C} die Mengen der natürlichen, der reellen und der komplexen Zahlen. Vektoren im \mathbb{R}^3 bzw. im \mathbb{C}^3 notieren wir als Spaltenvektoren:

$$x = (x_1, x_2, x_3)^T .$$

Wir verwenden die folgenden Verknüpfungen für reellwertige Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^3$ (Innenprodukt, Vektorprodukt, Tensorprodukt):

$$\begin{aligned} x \cdot y &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \\ x \times y &= (x_2 y_3 - x_3 y_2, x_3 y_1 - x_1 y_3, x_1 y_2 - x_2 y_1)^T \\ x \otimes y &= \begin{pmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & x_1 y_3 \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & x_2 y_3 \\ x_3 y_1 & x_3 y_2 & x_3 y_3 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Für Vektoren $x \in \mathbb{C}^3$ bezeichnen wir mit \bar{x} die komponentenweise, komplexe Konjugation. Das Innenprodukt auf \mathbb{C}^3 lautet dann:

$$x \cdot \bar{y} = x_1 \bar{y}_1 + x_2 \bar{y}_2 + x_3 \bar{y}_3.$$

Wir verwenden die folgenden Vektornormen auf dem \mathbb{R}^3 :

$$\begin{aligned} |x| &= \sqrt{x \cdot x} \\ \|x\|_\infty &= \max_{j=1,2,3} |x_j|. \end{aligned}$$

Im \mathbb{C}^3 ist die euklidische Norm entsprechend definiert durch:

$$|x| = \sqrt{x \cdot \bar{x}}.$$

Um die euklidische Vektornorm vom Betrag zu unterscheiden, verwenden wir auch $\|x\|_2$, wenn Verwechslungen auftreten können. In Abschnitt 2.3.4 benötigen wir zur Normbestimmung des vektoriellen Approximationsoperators die zur euklidischen Vektornorm zugehörige Matrixnorm. Diese ist für $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ wie folgt definiert:

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\rho(\mathbf{A}^T \mathbf{A})},$$

Hierbei bezeichnen wir mit $\rho(\mathbf{B})$ den Spektralradius der Matrix $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, d.h.

$$\rho(\mathbf{B}) := \max_{j=1,2,3} |\lambda_j|,$$

wobei λ_1, λ_2 und $\lambda_3 \in \mathbb{C}$ die Eigenwerte von \mathbf{B} sind.

Kommen wir nun zur speziellen Notation auf der Sphäre. Unter ∂B verstehen wir die Einheitssphäre, also

$$\partial B := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}.$$

Zur besseren Unterscheidung verwenden wir für Vektoren im \mathbb{R}^3 stets lateinische Buchstaben und für Vektoren auf der Einheitssphäre griechische. Im \mathbb{R}^3 bezeichnen wir mit

$$e_1 := (1, 0, 0)^T, \quad e_2 := (0, 1, 0)^T \quad \text{und} \quad e_3 := (0, 0, 1)^T$$

die kanonische Standardbasis. Unter \mathbf{I} verstehen wir die Einheitsmatrix. Sphärische Vektoren $\xi \in \partial B$ stellen wir auch durch Kugelkoordinaten dar:

$$\xi = (\sin(\theta) \cos(\phi), \sin(\theta) \sin(\phi), \cos(\theta))^T, \quad \theta \in [0, \pi], \quad \phi \in [0, 2\pi].$$

Die Parametrisierung, die das Rechteck $A := [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ auf die Einheitssphäre ∂B abbildet, bezeichnen wir mit

$$p : A \rightarrow \partial B, \quad (\theta, \phi) \mapsto p(\theta, \phi) := (\sin(\theta) \cos(\phi), \sin(\theta) \sin(\phi), \cos(\theta))^T. \quad (2.1)$$

In Kapitel zwei arbeiten wir hauptsächlich mit skalaren Funktionen, d.h. Funktionen F mit

$$F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3 \quad \text{bzw.} \quad F : \partial B \rightarrow \mathbb{C}^3.$$

Dagegen verwenden wir im dritten Kapitel in der Regel Vektorfelder

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3 \quad \text{bzw.} \quad f : \partial B \rightarrow \mathbb{C}^3.$$

Zur besseren Unterscheidung, bezeichnen wir im Grundlagenkapitel und in Kapitel drei und vier skalare Funktionen immer mit Großbuchstaben und Vektorfelder mit kleinen. In Kapitel fünf bzw. Kapitel sechs übernehmen wir jedoch die traditionelle Schreibweise, wie sie z.B. bei Colton und Kreß [7] zu finden ist. Wir schreiben dann das elektromagnetische Feld E , H groß und akustische Wellen u klein, obwohl E und H Vektorfelder sind und u skalar ist. Bei der vektoriellen Lösungsmethode in Kapitel drei treten zusätzlich matrixwertige Funktionen auf. Diese kennzeichnen wir durch Fettdruck:

$$\mathbf{f} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}^{3 \times 3} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{F} : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}^{3 \times 3}.$$

Mit \mathbb{D} ist hier der Definitionsbereich der matrixwertigen Funktion gemeint. Dieser kann z.B. das Rechteck A oder die Einheitskugel ∂B sein.

Am Ende dieses Abschnittes führen wir nun die Funktionsklassen ein, die wir in den folgenden Kapiteln verwenden. Wir benutzen hier ebenfalls wieder Großbuchstaben zur Kennzeichnung von skalaren Funktionsräumen und kleine Buchstaben für die entsprechenden Räume der Vektorfelder.

Für stetige bzw. r -mal stetig differenzierbare skalare Funktionen ($r \in \mathbb{N}$) schreiben wir wie üblich, $C(\mathbb{D})$ bzw. $C^r(\mathbb{D})$, wobei \mathbb{D} den Definitionsbereich bezeichnet, der entweder die Oberfläche ∂D des Streuobjektes D , die Kugeloberfläche ∂B oder das Rechteck A ist. Mit den Normen

$$\|F\|_\infty := \sup_{x \in \mathbb{D}} |F(x)| \quad \text{bzw.} \quad \|F\|_r := \sum_{|\nu| \leq r} \sup_{x \in \mathbb{D}} |F^{(\nu)}(x)|$$

werden $C(\mathbb{D})$ und $C^r(\mathbb{D})$ Banachräume. ν ist hierbei ein Multi-Index.

Bei der Analyse der Quadraturformel arbeiten wir nicht nur mit stetigen Funktionen, sondern auch mit Hölder-Funktionen. Wir bezeichnen mit $C^{0,\alpha}(\mathbb{D})$ den Raum der hölderstetigen skalaren Funktionen ($0 < \alpha < 1$). Versehen mit der Norm

$$\|F\|_{0,\alpha} := \|F\|_\infty + \sup_{x \neq y \in \mathbb{D}} \frac{|F(x) - F(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

wird auch $C^{0,\alpha}(\mathbb{D})$ zu einem Banachraum. Mit $C^{r,\alpha}(\mathbb{D})$ bezeichnen wir weiter den Raum aller r -fach differenzierbaren Funktionen, wobei alle Ableitungen bis zur Ordnung r hölderstetig sind. Aus $C^{r,\alpha}(\mathbb{D})$ wird durch

$$\|F\|_{r,\alpha} := \sum_{|\nu| \leq r-1} \|F^{(\nu)}\|_\infty + \sum_{|\nu|=r} \|F^{(\nu)}\|_{0,\alpha}$$

ein Banachraum.

Auf diesen skalaren Funktionsräumen verwenden wir das L^2 -Innenprodukt:

$$(F, G) := \int_{\mathbb{D}} F(x) \overline{G(x)} ds(x). \quad (2.2)$$

Als $L^2(\mathbb{D})$ bezeichnen wir den üblichen Raum der quadratintegrierbaren Funktionen über dem Definitionsbereich \mathbb{D} . Mit dem Innenprodukt (2.2) wird $L^2(\mathbb{D})$ zu einem Hilbertraum. Die zugehörige Norm ergibt sich aus (2.2) zu:

$$\|F\|_{L^2(\mathbb{D})} := \sqrt{(F, F)}.$$

Ein Polynom vom Grad kleiner gleich n in drei Variablen, welches auf die Einheitskugel ∂B eingeschränkt ist, nennen wir sphärisches Polynom. Den Raum dieser sphärischen Polynome vom Grad kleiner gleich n bezeichnen wir mit \mathbb{P}_n . Da \mathbb{P}_n ein Teilraum von $C(\partial B)$ ist, verwenden wir die übliche Supremumsnorm.

Kommen wir nun zu den Vektorfeldern, die hauptsächlich in Kapitel vier verwendet werden. Mit $c(\mathbb{D})$ bzw. $c^r(\mathbb{D})$ bezeichnen wir analog zum skalaren Fall die stetigen bzw. r -mal stetig differenzierbaren Vektorfelder. Dabei gehört ein Vektorfeld f genau dann zu einem der beiden Räume, wenn die einzelnen Komponentenfunktionen $f \cdot e_i$ ($i = 1, 2, 3$) zum entsprechenden skalaren Funktionsraum gehören. Wir verwenden die folgenden Normen:

$$\|f\|_{\infty} := \sup_{x \in \mathbb{D}} \|f(x)\|_V \quad \text{bzw.} \quad \|f\|_r := \|f\|_{\infty} + \sup_{i=1,2,3} \|f \cdot e_i\|_r. \quad (2.3)$$

Hierbei bezeichnet $\|\cdot\|_V$ eine beliebige Vektornorm auf dem \mathbb{C}^3 . Auf Grund der Äquivalenz aller Normen auf \mathbb{C}^3 sind die entsprechenden Normen auf $c(\mathbb{D})$ bzw. $c^r(\mathbb{D})$ mit unterschiedlicher Vektornorm $\|\cdot\|_V$ auch äquivalent. In der Regel verwenden wir aber die euklidische Vektornorm.

Wie im skalaren Fall, arbeiten wir auch mit hölderstetigen oder hölderstetig differenzierbaren Vektorfeldern. Wir nennen ein Vektorfeld f hölderstetig oder hölderstetig r -mal differenzierbar, wenn die einzelnen Komponentenfunktionen $f \cdot e_i$ ($i = 1, 2, 3$) im entsprechenden skalaren Funktionsraum liegen. Es gilt also:

$$f \in c^{r,\alpha}(\mathbb{D}) \quad \Leftrightarrow \quad f \cdot e_i \in C^{r,\alpha}(\mathbb{D}), \quad i = 1, 2, 3.$$

Wir verwenden auf $c^{r,\alpha}(\mathbb{D})$, mit $r \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in [0, 1]$, die folgende Norm:

$$\|f\|_{r,\alpha} := \|f\|_{\infty} + \sup_{i=1,2,3} \|f \cdot e_i\|_{r,\alpha}. \quad (2.4)$$

Ist ein Vektorfeld f auf der glatten Oberfläche ∂D eines beschränkten Gebietes $D \subset \mathbb{R}^3$ definiert und besitzt ∂D die nach außen weisende Normale ν , so nennen wir f tangential, wenn für alle $x \in \partial D$ gilt:

$$\nu(x) \cdot f(x) = 0.$$

Den Raum aller stetigen, tangentialen Vektorfelder bezeichnen wir mit $t(\partial D)$. Analog wird mit $t^r(\partial D)$ der Raum aller r -mal stetig differenzierbaren, tangentialen Vektorfelder bezeichnet. Die Hölder-Räume tangentialer Vektorfelder notieren wir schließlich noch durch $t^{r,\alpha}(\partial D)$. Für diese Räume verwenden wir wieder die Normen (2.3), bzw. (2.4).

Alle hier vorgestellten Räume vektorieller Funktionen sind mit den entsprechend eingeführten Normen Banachräume. Für diese Räume definieren wir außerdem das folgende Innenprodukt:

$$(f, g) := \int_{\mathbb{D}} f(x) \cdot \overline{g(x)} ds(x).$$

Analog zum skalaren Fall bezeichnen wir mit $l^2(\mathbb{D})$ den Raum aller quadratintegrierbaren Vektorfelder. Beschränken wir uns auf die Betrachtung von tangentialen Vektorfeldern $f \in l^2(\partial D)$, so verwenden wir die Bezeichnung $l_t^2(\partial D)$. Da $l_t^2(\partial D)$ ein Teilraum von $l^2(\partial D)$ ist, erbt er die übliche l^2 -Norm:

$$\|f\|_{l^2(\partial D)} := \sqrt{(f, f)}.$$

2.2 Skalare Funktionen

Nachdem wir nun unsere Notation eingeführt haben, befassen wir uns mit skalaren Funktionen. Hierbei behandeln wir vor allem sogenannte sphärische Funktionen, d.h. Funktionen, die auf der Sphäre definiert sind, da wir hauptsächlich mit diesen in Kapitel drei arbeiten werden.

Zur Approximation von sphärischen Funktionen eignen sich besonders gut Kugelflächenfunktionen. Diese sind auf der Sphäre analog zu den trigonometrischen Polynomen bei der Fourier-Analyse zu sehen. Wir beginnen daher mit einer kurzen Einführung über Kugelflächenfunktionen. Anschließend gehen wir auf die Gauß-Rechteck-Quadraturformel zur numerischen Integration auf der Sphäre ein. Diese besitzt einen engen Zusammenhang zu Kugelflächenfunktionen und eignet sich daher besonders gut für unser Problem. Die nächsten Abschnitte befassen sich schließlich mit dem Approximationsoperator \mathcal{L}_n . Diesen verwenden wir zur Definition des diskreten Integraloperators beim skalaren Lösungsverfahren in Kapitel drei. Wir geben kurz die wichtigsten Eigenschaften von \mathcal{L}_n an, die bei der Fehleranalyse benötigt werden.

2.2.1 Skalare Kugelflächenfunktionen

Kugelflächenfunktionen sind schon lange in der Mathematik bekannt und werden für die unterschiedlichsten Probleme mit sphärischer Symmetrie verwendet. Sie wurden in den 1780er-Jahren bereits von Laplace und Legendre eingeführt (siehe [41] und [43]). Seitdem gibt es zahlreiche Literatur, die sich mit der Theorie der Kugelflächenfunktionen beschäftigt. Einige frühe Bücher stammen z.B. von Heine (1878, [26]) und Neumann (1887, [48]). Heute gelten vor allem die Arbeiten von Lebedev [42], Lense [44] und Müller [46], neben vielen anderen, als Standardwerke.

Eine etwas aktuellere und sehr ausführliche Darstellung über Kugelflächenfunktionen kann bei Freedon, Gervens und Schreiner [14] gefunden werden. Die Autoren beschränken sich jedoch in ihrem Buch nur auf den reellwertigen Fall, der in der Geomathematik überwiegend auftritt. Ihre Ergebnisse können aber einfach auf komplexwertige Kugelflächenfunktionen übertragen werden (siehe hierzu auch Fengler [12], Remark 1.2.4).

Da Kugelflächenfunktionen und ihre wichtigsten Eigenschaften allgemein als bekannt vorausgesetzt werden können und wir uns im Grundlagenkapitel kurz fassen wollen, folgen wir hier weitestgehend der knappen Darstellung von Colton und Kreß ([7], Abschnitt 2.3). Ausführlichere Einführungen können z.B. in der angegebenen Standardliteratur ([42],[44] und [46]) und in [14] gefunden werden.

Wir beginnen mit der üblichen Definition von Kugelflächenfunktionen und geben anschließend eine etwas konkretere Darstellung an:

Definition 2.1 *Die Einschränkung eines homogenen, harmonischen Polynoms vom Grad $n \in \mathbb{N}$ auf die Einheitskugel ∂B nennen wir eine Kugelflächenfunktion der Ordnung n . Den Raum aller Kugelflächenfunktionen der Ordnung n bezeichnen wir mit X_n .*

Der folgende Satz gibt Auskunft über die Dimension von X_n :

Satz 2.2 *Es gibt genau $2n + 1$ linear unabhängige Kugelflächenfunktionen der Ordnung n .*

Beweis: Siehe Colton und Kreß [7], Theorem 2.6. □

Mit Hilfe der assoziierten Legendre-Funktionen

$$P_n^m(t) := (1 - t^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(t)}{dt^m}, \quad m = 0, 1, \dots, n, t \in [-1, 1] \quad (2.5)$$

können wir Kugelflächenfunktionen in Kugelkoordinaten wie folgt darstellen:

$$Y_{n,m}(\theta, \phi) = P_n^m(\cos \theta) e^{im\phi}. \quad (2.6)$$

Eine Herleitung dieser Darstellung kann bei Colton und Kreß [7] in Abschnitt 2.3 gefunden werden. Mit P_n bezeichnen wir hierbei die üblichen Legendre-Polynome (siehe z.B. Szegö [57]). Benutzen wir die Vorzeichenkonvention von Condon und Shortley [9], so erhalten wir:

Satz 2.3 *Die Kugelflächenfunktionen*

$$Y_{n,m}(\theta, \phi) := c_n^m P_n^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi} \quad (2.7)$$

mit $m = -n, \dots, n$ und $n = 0, 1, 2, \dots$ bilden ein vollständiges Orthonormalsystem für $L^2(\partial B)$. Die Normierung ist gegeben durch:

$$c_n^m := \begin{cases} (-1)^m \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} & \text{für } m \geq 0 \\ (-1)^m c_n^{|m|} & \text{für } m < 0 \end{cases} \quad (2.8)$$

Aus dem letzten Satz ergibt sich sofort:

Folgerung 2.4 *Für das Integral über die Kugelflächenfunktionen mit $n \in \mathbb{N}$ und $m = -n, \dots, n$ gilt:*

$$\int_{\partial B} Y_{n,m}(\eta) ds(\eta) = \sqrt{4\pi} \delta_{0n}$$

Diese Eigenschaft werden wir später nutzen, um den diskreten Integraloperator explizit angeben zu können. Hierzu benötigen wir eine weitere Aussage, die bei Kreß [36] gefunden werden kann:

Lemma 2.5 *Für die Kugelflächenfunktionen mit $n \in \mathbb{N}$ und $m = -n, \dots, n$ gilt:*

$$\int_{\partial B} \frac{Y_{n,m}(\eta)}{|\xi - \eta|} ds(\eta) = \frac{4\pi}{2n+1} Y_{n,m}(\xi), \quad \xi \in \partial B.$$

In Abschnitt 2.1 hatten wir \mathbb{P}_n , den Raum der sphärischen Polynome vom Grad kleiner gleich n eingeführt. Die Kugelflächenfunktionen besitzen folgende Beziehung zu diesen Polynomen:

Satz 2.6 *Es sei $\{Y_{n,m}\}$, $n = 0, 1, \dots, N$ und $m = -n \dots n$, ein Orthonormalsystem von Kugelflächenfunktionen der Ordnung kleiner gleich N . Dann bildet dieses System eine Basis für \mathbb{P}_N . Es gilt also*

$$\mathbb{P}_N = \bigoplus_{n=0}^N X_n.$$

Beweis: Siehe Kounchev [34], Abschnitt 10.9. \square

Am Ende dieses Abschnitts über skalare Kugelflächenfunktionen geben wir schließlich noch das wichtige Additionstheorem an:

Satz 2.7 *Es sei $\{Y_{n,m}\}$, $m = -n, \dots, n$, ein beliebiges System von $2n + 1$ orthonormalen Kugelflächenfunktionen der Ordnung n . Dann gilt für alle $\eta, \xi \in \partial B$ das Additionstheorem:*

$$\sum_{m=-n}^n Y_{m,n}(\xi) \overline{Y_{m,n}(\eta)} = \frac{2n+1}{4\pi} P_n(\xi \cdot \eta).$$

Beweis: Siehe Colton und Kreß [7], Theorem 2.8. \square

2.2.2 Die Gauß-Rechteck-Quadraturformel

Wir befassen uns nun mit der numerischen Integration auf der Sphäre. Es gibt zahlreiche Quadraturen, die speziell für die sphärische Integration geeignet sind. Wir verweisen hierzu auf Atkinson [1] und Stroud [61]. In dieser Arbeit verwenden wir die Gauß-Rechteck-Quadraturformel, die bereits von Wienert [64] und Graham und Sloan [21] beim akustischen Streuproblem angewendet wurde.

Ausgangspunkt für die Herleitung der Quadraturformel bildet die Transformation des Integrals auf Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned} \int_{\partial B} F(\eta) ds(\eta) &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (F \circ p)(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 (F \circ p)(\cos^{-1} t, \phi) dt d\phi. \end{aligned}$$

Wir wenden nun auf die t - und die ϕ -Integration zwei Quadraturformeln an und beginnen mit der $2(n+1)$ -Punkt-Rechteckregel mit äquidistanter Stützstellendistanz $\pi/(n+1)$:

$$\int_0^{2\pi} G(\phi) d\phi \approx \sum_{r=0}^{2n+1} \mu_r G(\phi_r).$$

Die Stützstellen und Gewichte sind hierbei gegeben durch:

$$\phi_r := \frac{r\pi}{n+1} \quad \text{und} \quad \mu_r := \frac{\pi}{n+1}.$$

Zur Approximation der t -Integration verwenden wir eine $(n + 1)$ -Punkt-Gaußregel:

$$\int_{-1}^1 H(t) dt \approx \sum_{s=1}^{n+1} \nu_s H(t_s).$$

Die Stützstellen t_s sind hierbei die Nullstellen der Legendre-Polynome vom Grad $n+1$ und ν_s die üblichen Gauß-Legendre-Gewichte (siehe z.B. Werner [63], Abschnitt 4.3). Zusammengefaßt erhalten wir dann die Gauß-Rechteck-Regel:

$$\int_{\partial B} F(\eta) ds(\eta) \approx \sum_{r=0}^{2n+1} \sum_{s=1}^{n+1} \mu_r \nu_s (F \circ p)(\theta_s, \phi_r). \quad (2.9)$$

Die Quadraturpunkte $p(\theta_s, \phi_r) \in \partial B$, an denen die zu integrierende Funktion ausgewertet wird, kürzen wir auch oft wie folgt ab:

$$p_{r,s} := p(\theta_s, \phi_r).$$

Eine wichtige Aussage zur Gauß-Rechteck-Quadraturformel gibt der nächste Satz an:

Satz 2.8 *Die Gauß-Rechteck-Quadraturformel ist exakt für sphärische Polynome vom Grad kleiner gleich $2n + 1$.*

Beweis: Der Beweis von Sloan und Womersley ([59], Section 6 und Example 6.1) für reelle Kugelflächenfunktionen lässt sich leicht auf komplexwertige Kugelflächenfunktionen übertragen. \square

Bemerkung 2.9 *Graham und Sloan benötigen zum Konvergenzbeweis in [21] nur eine Exaktheit für Polynome vom Grad $2n$. Wir werden jedoch in Abschnitt 2.3.2 sehen, dass dies für die vektorielle Lösungsmethode nicht ausreicht. Hier benötigen wir den höheren Exaktheitsgrad $2n + 1$ der Gauß-Rechteck-Regel aus Satz 2.8.*

Mit Hilfe der Gauß-Rechteck-Regel können wir das L^2 -Innenprodukt approximieren und erhalten die folgende diskrete Version:

$$(F, G)_m := \sum_{r=0}^{2n+1} \sum_{s=1}^{n+1} \mu_r \nu_s (F \circ p)(\theta_s, \phi_r) \overline{(G \circ p)(\theta_s, \phi_r)}. \quad (2.10)$$

Hierbei steht m für die Anzahl der verwendeten Quadraturpunkte, bei der Gauß-Rechteck-Regel also $m = 2(n + 1)^2$. Diese Notation haben wir von Graham und Sloan [21] übernommen. Es gilt das folgende Lemma:

Lemma 2.10 *Es sei $\{Y_{l,k}\}$, $l = 0, 1, \dots, n$ $|k| \leq l$ ein Orthonormalsystem von Kugelflächenfunktionen der Ordnung kleiner gleich n . Dann gilt:*

$$(Y_{l,k}, Y_{l',k'})_m = \delta_{l,l'} \delta_{k,k'}.$$

Beweis: Die Aussage folgt sofort aus der Exaktheit der Gauß-Rechteck-Regel für sphärische Polynome vom Grad kleiner gleich $2n + 1$ (Satz 2.8) und Satz 2.6.

□

2.2.3 Der Approximationsoperator \mathcal{L}_n

Beim skalaren Lösungsverfahren approximieren wir die glatten, sphärischen Anteile im Integranden durch Kugelflächenfunktionen. Hierzu verwenden wir den Approximationsoperator \mathcal{L}_n , den wir nun herleiten wollen.

Als Ausgangspunkt wählen wir die Aussage von Satz 2.3. Demnach können wir jede stetige Funktion auf der Sphäre als Fourierreihe (Laplacereihe) von Kugelflächenfunktionen darstellen:

$$F = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l (F, Y_{l,k}) Y_{l,k}.$$

Summieren wir nur über Kugelflächenfunktionen bis zur Ordnung n , so erhalten wir die orthogonale Projektion \mathcal{P}_n auf \mathbb{P}_n :

$$\mathcal{P}_n F := \sum_{l=0}^n \sum_{k=-l}^l (F, Y_{l,k}) Y_{l,k}. \quad (2.11)$$

Den Projektor approximieren wir nun, indem wir an Stelle des L^2 -Innenproduktes die diskrete Version (2.10) verwenden:

$$\mathcal{L}_n F := \sum_{l=0}^n \sum_{k=-l}^l (F, Y_{l,k})_m Y_{l,k}. \quad (2.12)$$

Diese Approximation wird schon länger in der Mathematik verwendet. So kann die grundlegende Idee bereits 1838 bei Neumann [47] gefunden werden. Aufbauend auf diese Arbeit taucht bei Lense ([44], 1954) erstmals der Operator in ähnlicher, wenn auch noch nicht so handlicher, Form auf. Wienert nutzt schließlich 1990 in seiner Dissertation [64] die Approximation zur numerischen Lösung einer singulären Integralgleichung. Diese Idee wurde danach von mehreren Autoren aufgegriffen: Nestel 1996 [49], Graham und Sloan 2002 [21], Ganesh und Graham 2004 [15].

Eine genauere Untersuchung des Approximationsoperators \mathcal{L}_n , hier besonders die Bestimmung der Approximationsgüte für stetige Funktionen, kann bei Sloan und Womersley [59] gefunden werden. Von Sloan stammt auch die Bezeichnung Hyperinterpolationsoperator. Hierbei spricht Sloan von Hyperinterpolation, wenn die Anzahl der Quadraturpunkte die Anzahl der Freiheitsgrade bei der Approximation übersteigt (siehe [58]).

Wir wollen nun einige Eigenschaften des Operators \mathcal{L}_n zusammentragen und beginnen mit dem folgenden Lemma:

Lemma 2.11 *Der Operator \mathcal{L}_n ist ein Projektor von $C(\partial B)$ nach \mathbb{P}_n .*

Beweis: Der Bildraum ist laut Definition \mathbb{P}_n . Nach Lemma 2.10 erhalten wir sofort für alle $F \in C(\partial B)$:

$$\mathcal{L}_n(\mathcal{L}_n F) = \mathcal{L}_n F.$$

□

Hieraus ergibt sich direkt die Folgerung:

Folgerung 2.12 *Für alle $P \in \mathbb{P}_n$ gilt $\mathcal{L}_n P = P$.*

Ein entscheidender Punkt bei der Konvergenzanalyse des Verfahrens von Graham und Sloan (siehe [21], Abschnitt 2.1 und Thm. 3.1) ist die Approximationsgüte des Operators \mathcal{L}_n , die hauptsächlich von der Norm $\|\mathcal{L}_n\|_\infty$ abhängt (siehe Sloan/Womersley [59], Abschnitt 5). Wienert konnte in seiner Arbeit [64] nur die Ordnung n^2 zeigen, was nicht ausreicht. Bei Sloan und Womersley ([59], Theorem 5.5.4) kann das folgende, optimale Ergebnis gefunden werden:

Satz 2.13 *Für alle $n \in \mathbb{N}$ existieren zwei Konstanten $c_1, c_2 > 0$, sodass gilt:*

$$c_1 n^{1/2} \leq \|\mathcal{L}_n\|_\infty \leq c_2 n^{1/2}. \quad (2.13)$$

Beweis: Diese Aussage wird bei Sloan und Womersley [59], Theorem 5.5.4 bewiesen. Hierzu muss die gewählte Quadratur eine gewisse Regularitätseigenschaft erfüllen. Nach Reimer [54] ist diese jedoch entbehrlich. Daher erfüllt unsere Gauß-Rechteck-Regel die Voraussetzungen des Satzes bei Sloan und Womersley.

□

Wir können ein besseres Resultat erreichen, wenn wir den Operator \mathcal{L}_n als Abbildung von $C(\partial B)$ nach $L^2(\partial B)$ betrachten. In diesem Fall gilt:

Satz 2.14 *Für jede Funktion $F \in C(\partial B)$ gilt:*

$$\|\mathcal{L}_n F\|_{L^2(\partial B)} \leq \sqrt{4\pi} \|F\|_\infty.$$

Beweis: Siehe Sloan [58], Theorem 1. \square

Da wir die Integralgleichungen in dieser Arbeit nur für stetige Dichten betrachten, gehen wir auf die L^2 -Eigenschaften des Operators nicht weiter ein (siehe auch Graham und Sloan [21], Section 2.1).

Zur Definition der diskreten Integraloperatoren in Abschnitt 3.3 benötigen wir eine Erweiterung des Definitionsbereiches von \mathcal{L}_n auf $C(A)$, wobei A das Rechteck $[0, \pi] \times [0, 2\pi]$ bezeichnet. Durch diese Fortsetzung können wir eine größere Klasse von Funktionen behandeln, nämlich alle Funktionen F , die stetig auf der punktierten Sphäre $\partial B \setminus \{\hat{n}, -\hat{n}\}$ sind, vorausgesetzt sie besitzen eine Fortsetzung, die in $C(A)$ liegt. Hierbei bezeichnet \hat{n} den Nordpol der Sphäre.

Es sei $F \in C(\partial B)$, dann ist $F \circ p \in C(A)$, wobei p die Parametrisierung (2.1) der Sphäre ist. Wir führen nun ein gewichtetes Innenprodukt auf $C(A)$ ein:

$$\langle F, G \rangle := \int_0^{2\pi} \int_0^\pi F(\theta, \phi) \overline{G(\theta, \phi)} \sin \theta \, d\theta \, d\phi. \quad (2.14)$$

Mit Hilfe der Gauß-Rechteck-Regel erhalten wir wieder folgendes diskrete Innenprodukt:

$$\langle F, G \rangle_m := \sum_{r=0}^{2n+1} \sum_{s=1}^{n+1} \mu_r \nu_s F(\theta_s, \phi_r) \overline{G(\theta_s, \phi_r)}. \quad (2.15)$$

Zwischen dem üblichen Innenprodukt und dem oben definierten auf $C(A)$ besteht über die Parametrisierung p folgender Zusammenhang ($F, G \in C(\partial B)$):

$$\begin{aligned} (F, G) &= \langle F \circ p, G \circ p \rangle \\ (F, G)_m &= \langle F \circ p, G \circ p \rangle_m. \end{aligned}$$

Wie wir sehen, sind die beiden rechten Seiten dieser Gleichungen auch für Funktionen definiert, die nur stetig auf der punktierten Sphäre $\partial B \setminus \{\hat{n}, -\hat{n}\}$ sind und eine Fortsetzung auf $C(A)$ besitzen, im Gegensatz zu den linken Seiten. Wir können damit nun die Erweiterung des Approximationsoperators \mathcal{L}_n auf $C(A)$ definieren:

$$\tilde{\mathcal{L}}_n F := \sum_{l=0}^n \sum_{|k| \leq l} \langle F, Y_{l,k} \circ p \rangle_m Y_{l,k} \circ p. \quad (2.16)$$

Dieser Operator $\tilde{\mathcal{L}}_n$ ist tatsächlich eine Fortsetzung von \mathcal{L}_n , was an folgendem Zusammenhang gesehen werden kann:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_n F)(\xi) &= (\mathcal{L}_n F)(p(\theta, \phi)) \\ &= (\tilde{\mathcal{L}}_n(F \circ p))(\theta, \phi) \end{aligned} \quad (2.17)$$

für $(\theta, \phi) \in A$ und $F \in C(\partial B)$. Wichtig ist das folgende Lemma, welches Auskunft über die Norm der Fortsetzung gibt:

Lemma 2.15 *Es gilt $\|\tilde{\mathcal{L}}_n\|_{\infty, A} = \|\mathcal{L}_n\|_{\infty, \partial B}$ und daher auch*

$$c_1 n^{1/2} \leq \|\tilde{\mathcal{L}}_n\|_{\infty, A} \leq c_2 n^{1/2}.$$

Beweis: Siehe Lemma 2.1 bei Graham und Sloan [21] und Satz 2.13. □

2.2.4 Konvergenz der Quadraturformel

Kommen wir nun zurück zur Gauß-Rechteck-Quadraturformel. Diese steht in engem Zusammenhang zum Approximationsoperator \mathcal{L}_n , den bereits Wienert in seiner Dissertation ([64], Satz 5.1) bewiesen hat. Es gilt:

Satz 2.16 *Für stetige Funktionen $F \in C(\partial B)$ ist die Integration von $\mathcal{L}_n F$ identisch mit der Gauß-Rechteck-Regel:*

$$\int_{\partial B} (\mathcal{L}_n F)(\eta) ds(\eta) = \sum_{r=0}^{2n+1} \sum_{s=1}^{n+1} \mu_r \nu_s F(\theta_s, \phi_r). \quad (2.18)$$

Beweis: Nach Definition von \mathcal{L}_n und der Gauß-Rechteck-Regel, zusammen mit Folgerung 2.4, erhalten wir:

$$\begin{aligned} \int_{\partial B} (\mathcal{L}_n F)(\eta) ds(\eta) &= \sum_{l=0}^n \sum_{|k| \leq l} (F, Y_{l,k})_m \int_{\partial B} Y_{l,k}(\eta) ds(\eta) \\ &= \sqrt{4\pi} (F, Y_{0,0})_m \\ &= \sum_{r=0}^{2n+1} \sum_{s=1}^{n+1} \mu_r \nu_s F(\theta_s, \phi_r). \end{aligned} \quad \square$$

Indem wir nun die Aussagen von Satz 2.16 und 2.13 benutzen, können wir Konvergenzaussagen zur Quadraturformel machen. Hierzu betrachten wir mit einem beliebigen Polynom $P \in \mathbb{P}_n$:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial B} F(\eta) ds(\eta) - \int_{\partial B} (\mathcal{L}_n F)(\eta) ds(\eta) \right| &\leq \int_{\partial B} \|F - \mathcal{L}_n F\|_{\infty} ds(\eta) \\ &= 4\pi \|(F - P) - \mathcal{L}_n(F - P)\|_{\infty} \\ &\leq 4\pi (1 + \|\mathcal{L}_n\|_{\infty}) \|F - P\|_{\infty} \\ &\leq C n^{1/2} \|F - P\|_{\infty}. \end{aligned}$$

Wir haben also den Fehler der Quadratur zurückgeführt auf den Fehler bei der Approximation von stetigen Funktionen durch Polynome. Nutzen wir z.B. die Aussage von Ragozin [52], dass für jedes $r \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in [0, 1]$ eine Konstante $C_{r,\alpha} > 0$ so existiert, dass es zu jedem $F \in C^{r,\alpha}(\partial B)$ ein $P \in \mathbb{P}_n$ gibt mit

$$\|F - P\|_\infty \leq C_{r,\alpha} \frac{1}{n^{r+\alpha}} \|F\|_{r,\alpha}, \quad (2.19)$$

so erhalten wir:

Satz 2.17 *Für alle $F \in C^{r,\alpha}(\partial B)$ mit $r \in \mathbb{N}$, $\alpha \in [0, 1]$ und $r + \alpha > 1/2$ konvergiert die Gauß-Rechteck-Quadraturformel. Für den Fehler gilt die Abschätzung:*

$$\left| \int_{\partial B} F(\eta) ds(\eta) - \int_{\partial B} (\mathcal{L}_n F)(\eta) ds(\eta) \right| \leq \tilde{C}_{r,\alpha} \frac{1}{n^{r+\alpha-1/2}} \|F\|_{r,\alpha}.$$

Dieser Satz enthält die Aussage, dass die Gauß-Rechteckregel für analytische Funktionen superalgebraisch konvergiert. Bei Wienert ([64], Satz 5.2) kann sogar gefunden werden, dass exponentielle Konvergenz vorliegt.

Die Konvergenzaussage gilt aber auch für Integrale über allgemeinere Oberflächen ∂D , falls diese eine genügend glatte, globale Parametrisierung über der Sphäre besitzen. Bezeichnen wir mit J die Jacobideterminante dieser Parametrisierung $q : \partial B \rightarrow \partial D$, so ergibt sich:

$$\int_{\partial D} F(y) ds(y) = \int_{\partial B} F(q(\eta)) J(\eta) ds(\eta).$$

Auf das zweite, sphärische Integral können wir nun die Gauß-Rechteckregel anwenden. Konvergenz nach Satz 2.17 erhalten wir nun, falls der transformierte Integrand $F(q(\eta)) J(\eta)$ hinreichend glatt ist.

2.3 Vektorfelder

Neben dem skalaren Verfahren entwickeln wir in Kapitel vier auch eine vektorielle Methode. Hierbei arbeiten wir mit Vektorfeldern, speziell wieder solchen, die auf der Sphäre definiert sind.

Zur Approximation dieser sphärischen Vektorfelder verwenden wir sogenannte vektorielle Kugelflächenfunktionen. Diese stellen eine Erweiterung der skalaren Kugelflächenfunktionen auf den vektoriellen Fall dar. Wir beginnen daher mit der Einführung dieser speziellen Funktionen. Da die vektoriellen Kugelflächenfunktionen nicht so bekannt sind wie die skalaren, fällt diese Einführung etwas länger und

ausführlicher aus. Anschließend gehen wir auf die Gauß-Rechteck-Quadraturformel bei Vektorfeldern ein, bevor wir den vektoriellen Approximationsoperator einführen und betrachten. Auch die vektoriellen Kugelflächenfunktionen stehen in engem Zusammenhang zur verwendeten Quadraturformel. Diesen Zusammenhang beleuchten wir schließlich am Ende des Abschnittes.

2.3.1 Vektorielle Kugelflächenfunktionen

Vektorielle Kugelflächenfunktionen werden seit den 50er-Jahren hauptsächlich in der Physik (Quantenmechanik) verwendet. Unglücklicherweise gibt es jedoch, im Gegensatz zu den skalaren Kugelflächenfunktionen, eine Reihe unterschiedlicher Definitionen und Notationen. Einen Literaturüberblick hierzu gibt Thorne [62]. In der Mathematik sind diese speziellen Vektorfelder jedoch eher selten zu finden. Eine frühe Arbeit stammt z.B. von Lagally und Franz ([39], 1964).

Eine ausführliche Darstellung kann bei Freedon, Gervens und Schreiner [14] gefunden werden, es wird jedoch wieder nur der reelle Fall behandelt. Die Übertragung ins Komplexe ist allerdings leicht möglich. Freedon, Gervens und Schreiner legen bei ihrer Definition der vektoriellen Kugelflächenfunktionen besonderen Wert auf einen einfachen Übergang von skalaren zu vektoriellen Funktionen. Hierbei bleiben viele Eigenschaften der skalaren Kugelflächenfunktionen erhalten. Ein weiterer wichtiger Punkt für unsere Anwendung ist, dass zwischen normalen und tangentialen Funktionen unterschieden wird. Daher folgen wir hier diesem Ansatz.

Da wir in Kapitel vier nur mit tangentialen Vektorfeldern arbeiten, beschränken wir uns hauptsächlich auf den tangentialen Fall und vernachlässigen normale Kugelflächenfunktionen. Wir beginnen mit der Definition von drei Operatoren, die skalare Funktionen F auf Vektorfelder über der Sphäre abbilden:

Definition 2.18 *Es sei $F \in C(\partial B)$ bzw. $F \in C^1(\partial B)$. Wir definieren dann die folgenden Operatoren $o^{(1)} : C(\partial B) \rightarrow c(\partial B)$ bzw. $o^{(i)} : C^1(\partial B) \rightarrow c(\partial B)$, $i = 2, 3$:*

$$i) \quad o^{(1)}F(\xi) := \xi F(\xi)$$

$$ii) \quad o^{(2)}F(\xi) := \nabla F(\xi)$$

$$iii) \quad o^{(3)}F(\xi) := \xi \times \nabla F(\xi)$$

Hierbei ist mit "∇" der Oberflächengradient bzgl. der Sphäre gemeint (siehe Colton und Kreß [7] oder Freedon, Gervens und Schreiner [14]). Bei $o^{(1)}F$ handelt es sich um ein normales Vektorfeld und bei $o^{(i)}F$ ($i = 2, 3$) um tangentiale Felder.

Als Erstes stellen wir fest, dass wir durch jedes Orthonormalsystem von skalaren Kugelflächenfunktionen sofort ein Orthonormalsystem für $l_t^2(\partial B)$ erhalten.

Satz 2.19 *Es sei $\{Y_{n,m}\}$, $n = 1, 2, \dots$ und $m = -n, \dots, n$ ein Orthonormalsystem von skalaren Kugelflächenfunktionen. Dann bilden die Vektorfelder*

$$y_{n,m}^{(i)} := \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} o^{(i)} Y_{n,m} \quad (2.20)$$

ein vollständiges Orthonormalsystem im Raum der quadratintegrierbaren, tangentialen Vektorfelder über der Sphäre.

Beweis: Siehe Colton und Kreß, [7], Thm. 6.23. \square

Hierdurch motiviert, definieren wir nun die vektoriellen Kugelflächenfunktionen dadurch, dass wir die Operatoren $o_{\xi}^{(i)}$ auf skalare Kugelflächenfunktionen anwenden:

Definition 2.20 *Alle Vektorfelder $o^{(i)} Y_n$ mit $i = 1, 2, 3$, $n \geq 1$ und $Y_n \in X_n$ werden als vektorielle Kugelflächenfunktionen vom Grad n bezeichnet. Unter $x_n^{(i)}$ verstehen wir den Raum aller vektoriellen Kugelflächenfunktionen der Ordnung n vom Typ $i = 1, 2, 3$. Den Raum aller tangentialen Kugelflächenfunktionen vom Grad n notieren wir wie folgt:*

$$x_n := \bigoplus_{i=2}^3 x_n^{(i)}.$$

Von nun an vernachlässigen wir die normalen Kugelflächenfunktionen vom Typ $i = 1$ und betrachten nur noch die tangentialen Felder vom Typ $i = 2, 3$. Die Ergebnisse, die wir für die tangentialen Vektorfelder finden, gelten in der Regel jedoch auch für normale Kugelflächenfunktionen vom Typ $i = 1$. Hierzu verweisen wir auf das Buch von Freedon, Gervens und Schreiner [14].

Wir untersuchen jetzt weitere Eigenschaften der Kugelflächenfunktionen. Dabei beginnen wir mit der komponentenweisen Betrachtung:

Satz 2.21 *Es gelten die folgenden Inklusionen:*

$$\begin{aligned} x_n^{(2)} &\subset \bigoplus_{j=1}^3 X_{n-1} e_j \oplus \bigoplus_{j=1}^3 X_{n+1} e_j \\ x_n^{(3)} &\subset \bigoplus_{j=1}^3 X_n e_j. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir komponentenweise

$$X_n e_j := \{Y_n e_j : Y_n \in X_n\}$$

verwendet.

Beweis: Siehe Freedon, Gervens und Schreiner, [14], (12.3.3) und (12.3.4). \square

Die Aussage des Satzes ist also, dass die einzelnen Komponenten $y_n^{(i)} \cdot e_j$ sich als Linearkombinationen von skalaren Kugelflächenfunktionen schreiben lassen. Beim Typ drei genügen skalare Kugelflächenfunktionen vom Grad n , beim Typ zwei benötigen wir die Grade $n - 1$ und $n + 1$.

Dieser Satz ist in zweifacher Hinsicht interessant: Zum einen können mit Hilfe von Satz 2.21 viele Resultate durch komponentenweise Betrachtung einfach auf Eigenschaften der skalaren Kugelflächenfunktionen zurückgeführt werden, zum anderen finden wir den ersten Unterschied zum skalaren Fall. Die skalaren Kugelflächenfunktionen ergaben sich als Restriktionen von homogenen, harmonischen Polynomen auf die Sphäre. Nach Satz 2.21 ergeben sich die vektoriellen Kugelflächenfunktionen jedoch nicht als einfache Restriktionen von Vektorpolynomen. Daher arbeiten wir im vektoriellen Fall mit den Räumen $x_n^{(i)}$ ($i = 2, 3$) bzw. mit x_n und nicht mit Polynomen, wie im skalaren Fall.

Zusammen mit Satz 2.3 ergibt sich die einfache Folgerung:

Folgerung 2.22 Für $y_n^{(i)} \in x_n^{(i)}$ und $Y_m \in X_m$ gilt

$$\int_{\partial B} y_n^{(i)}(\eta) Y_m(\eta) ds(\eta) = 0$$

für $i = 2$ und $m \notin \{n - 1, n + 1\}$ oder falls $i = 3$ und $m \neq n$ gilt.

Setzen wir $m = 0$ so erhalten wir weiter:

Folgerung 2.23 Für $y_n^{(i)} \in x_n^{(i)}$ gilt

$$\int_{\partial B} y_n^{(i)}(\eta) ds(\eta) = 0$$

für $i = 2$ und $n \neq 1$ oder $i = 3$ und $n \geq 1$.

Den Fall $i = 2$ und $n = 1$ berechnen wir gesondert:

Lemma 2.24 *Es gilt:*

$$\begin{aligned} \int_{\partial B} y_{1,0}^{(2)}(\eta) ds(\eta) &= \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \int_{\partial B} y_{1,1}^{(2)}(\eta) ds(\eta) &= -\sqrt{\frac{4\pi}{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \\ \int_{\partial B} y_{1,-1}^{(2)}(\eta) ds(\eta) &= \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Bemerkung 2.25 *Die Vektoren, die in Lemma 2.24 auftreten, werden auch komplexe Einheitsvektoren genannt und z.B. zur Definition von vektoriellen Kugelflächenfunktionen nach Edmonds verwendet (siehe Edmonds [11] oder Fengler [12]).*

Neben Folgerung 2.23 und Lemma 2.24 benötigen wir noch die folgende Aussage, um in Kapitel vier den diskreten Integraloperator aufstellen zu können:

Lemma 2.26 *Es sei $n \geq 1$ und $|m| \leq n$. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} \int_{\partial B} \frac{y_{n,m}^{(2)}(\eta)}{|\xi - \eta|} ds(\eta) &= G_{(2,1)}(n) y_{n,m}^{(1)}(\xi) + G_{(2,2)}(n) y_{n,m}^{(2)}(\xi) \\ \int_{\partial B} \frac{y_{n,m}^{(3)}(\eta)}{|\xi - \eta|} ds(\eta) &= G_{(3,3)}(n) y_{n,m}^{(3)}(\xi). \end{aligned}$$

Die Faktoren sind dabei wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} G_{(2,1)}(n) &= \frac{4\pi n(n+1)}{2n+1} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+3} \right) \\ G_{(2,2)}(n) &= \frac{4\pi}{2n+1} \left(\frac{n}{2n+3} + \frac{n+1}{2n-1} \right) \\ G_{(3,3)}(n) &= \frac{4\pi}{2n+1}. \end{aligned}$$

Beweis: Die Aussagen folgen sofort aus der zweiten Funck-Hecke-Formel (siehe Freedon, Gervens und Schreiner [14], Thm. 12.7.6). \square

Da die skalaren Kugelflächenfunktionen dicht in $C(\partial B)$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ liegen, ergibt sich aus Satz 2.21:

Satz 2.27 *Es sei $\{y_{n,m}^{(i)}\}$ mit $i = 2, 3$, $n \geq 1$ und $|m| \leq l$ das Orthonormalsystem aus (2.20), dann liegt das System vektorieller Kugelflächenfunktionen bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ dicht im Raum der stetigen, tangentialen Vektorfelder $t(\partial B)$.*

Nun kommen wir zum Additionstheorem für vektorielle Kugelflächenfunktionen. Dieses lässt sich einfach aus Satz 2.7 herleiten. Da wir bisher die Operatoren $o^{(i)}$ nur auf skalare Funktionen angewendet haben, benötigen wir noch die folgende Definition zur Herleitung des Additionstheorems:

Definition 2.28 *Es sei $f : \partial B \rightarrow \mathbb{C}^3$ ein hinreichend glattes Vektorfeld mit der komponentenweisen Darstellung*

$$f(\xi) = \sum_{j=1}^3 F_j(\xi) e_j.$$

Dann definieren wir:

$$o^{(i)}f(\xi) := \sum_{j=1}^3 (o^{(i)}F_j(\xi)) \otimes e_j, \quad i = 2, 3.$$

Satz 2.29 *Es sei $\{y_{n,m}^{(i)}\}$ das Orthonormalsystem aus (2.20). Dann gilt:*

$$\sum_{m=-n}^n y_{n,m}^{(i)}(\xi) \otimes \overline{y_{n,m}^{(i)}(\eta)} = \frac{2n+1}{4\pi} \mathbf{p}_n^{(i)}(\xi, \eta), \quad \xi, \eta \in \partial B. \quad (2.21)$$

Hierbei bezeichnet $\mathbf{p}_n^{(i)} : \partial B \times \partial B \rightarrow \mathbb{R}^3 \otimes \mathbb{R}^3$ das Legendre-Tensorfeld vom Typ $i = 2, 3$ der Ordnung $n \geq 1$:

$$\mathbf{p}_n^{(i)}(\xi, \eta) := \frac{1}{n(n+1)} o_\xi^{(i)} o_\eta^{(i)} P_n(\xi \cdot \eta), \quad i = 2, 3.$$

Beweis: Verwenden wir Satz 2.7 (Additionstheorem für skalare Kugelflächenfunktionen) und Definition 2.28, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} \sum_{m=-n}^n y_{n,m}^{(i)}(\xi) \otimes \overline{y_{n,m}^{(i)}(\eta)} &= \frac{1}{n(n+1)} \sum_{m=-n}^n o_\xi^{(i)} Y_{n,m}(\xi) \otimes \overline{o_\eta^{(i)} Y_{n,m}(\eta)} \\ &= \frac{1}{n(n+1)} o_\xi^{(i)} o_\eta^{(i)} \sum_{m=-n}^n Y_{n,m}(\xi) \overline{Y_{n,m}(\eta)} \\ &= \frac{1}{n(n+1)} \frac{2n+1}{4\pi} o_\xi^{(i)} o_\eta^{(i)} P_n(\xi \cdot \eta). \end{aligned}$$

□

Diesen Satz und den zugehörigen Beweis haben wir dem Buch von Freedon, Gervens und Schreiner [14] entnommen. Das Additionstheorem für vektorielle Kugelflächenfunktionen ist in der Literatur eher unbekannt und wurde vermutlich in [14], bzw. der Dissertation von Gervens (siehe [20]), erstmals in dieser Form formuliert und

bewiesen.

Für die spätere Programmierung und die Normabschätzung unseres vektoriellen Approximationsoperators benötigen wir konkrete Ausdrücke für diese Legendre-Tensoren. Bei Freedon, Gervens und Schreiner [14] (Thm. 12.6.3) finden wir:

Satz 2.30 *Es sei $n \geq 1$. Dann gilt für $\xi, \eta \in \partial B$:*

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_n^{(2)}(\xi, \eta) &= \frac{1}{n(n+1)} (P_n''(\xi \cdot \eta)(\eta - (\xi \cdot \eta)\xi) \otimes (\xi - (\xi \cdot \eta)\eta) \\ &\quad + P_n'(\xi \cdot \eta) (\mathbf{I} - \xi \otimes \xi - (\eta - (\xi \cdot \eta)\xi) \otimes \eta)) \\ \mathbf{p}_n^{(3)}(\xi, \eta) &= \frac{1}{n(n+1)} (P_n''(\xi \cdot \eta) \xi \times \eta \otimes \eta \times \xi \\ &\quad + P_n'(\xi \cdot \eta) ((\xi \cdot \eta)(\mathbf{I} - \xi \otimes \xi) - (\eta - (\xi \cdot \eta)\xi) \otimes \xi)). \end{aligned}$$

Wir geben nun noch weitere Eigenschaften der Legendre-Tensoren an, die wir bei den Untersuchungen zur Approximationsgüte in Abschnitt 2.3.4 verwenden. Als erstes bemerken wir, dass für $a \in \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{p}_n^{(i)}(\cdot, \eta)a = \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{|m| \leq n} (y_{n,m}^{(i)}(\xi) \cdot a) y_{n,m}^{(i)}(\cdot) \quad (2.22)$$

eine vektorielle Kugelflächenfunktion der Ordnung n vom Typ $i = 2, 3$ ist. Wir können also vektorielle Kugelflächenfunktionen durch Legendre-Tensoren ausdrücken. Analog zum skalaren Fall erhalten wir:

Satz 2.31 *Es sei $y_n^{(i)}$ eine vektorielle Kugelflächenfunktion vom Typ $i = 2, 3$ der Ordnung $n \geq 1$. Dann existieren $2n+1$ Punkte $\eta_1, \dots, \eta_{2n+1} \in \partial B$ und $2n+1$ Vektoren $a_1, \dots, a_{2n+1} \in \mathbb{R}^3$, sodass sich $y_n^{(i)}$ in der Form*

$$y_n^{(i)} = \sum_{j=1}^{2n+1} c_j \mathbf{p}_n^{(i)}(\cdot, \eta_j) a_j$$

mit geeigneten Koeffizienten $c_1, \dots, c_{2n+1} \in \mathbb{R}$ schreiben lässt.

Beweis: Siehe Gervens, [20], Abschnitt II.1 Lemma 27. □

Beim Umgang mit vektoriellen Kugelflächenfunktionen und Legendre-Tensoren sind gewisse Invarianzeigenschaften im Bezug auf Rotationen wichtig. Wir führen daher folgende Transformation ein:

Definition 2.32 *Es sei $F \in C(\partial B)$, $f \in c(\partial B)$ und $\mathbf{A} \in SO(3)$. Dann definieren wir die Transformationen $E_{\mathbf{A}}$ und $\mathbf{E}_{\mathbf{A}}$ durch:*

$$i) \quad E_{\mathbf{A}}F(\cdot) := F(\mathbf{A}\cdot).$$

$$ii) \quad \mathbf{E}_A f(\cdot) := \mathbf{A}^T f(\mathbf{A}\cdot).$$

Hier verwenden wir die Notation von Reimer (siehe [53]). In Abschnitt 3.3 und 4.2 benutzen wir in (3.28) und Definition 4.3 hingegen die Notation von Graham und Sloan (siehe [21]), um die entsprechenden Verfahren besser vergleichen zu können. Im nächsten Lemma geben wir einige einfache Eigenschaften dieser Transformationen an:

Lemma 2.33 *Die Transformationen E_A und \mathbf{E}_A besitzen die folgenden Eigenschaften:*

i) *Für die Normen gilt*

$$\|E_A\|_\infty = 1 \quad \text{und} \quad \|\mathbf{E}_A\|_\infty = 1. \quad (2.23)$$

ii) *Seien $\mathbf{A}, \mathbf{C} \in SO(3)$, dann gilt:*

$$E_{\mathbf{AC}} = E_C E_A \quad \text{und} \quad \mathbf{E}_{\mathbf{AC}} = \mathbf{E}_C \mathbf{E}_A. \quad (2.24)$$

iii) *Für $i = 2, 3$ gilt die folgende Vertauschungsregel:*

$$o_\xi^{(i)} E_A F(\xi) = \mathbf{E}_A o_\xi^{(i)} F(\xi) \quad (2.25)$$

Beweis: Die ersten beiden Aussagen lassen sich leicht nachrechnen. Die dritte Aussage wird bei Freedon, Gervens und Schreiner [14] in Abschnitt 12.7 exemplarisch bewiesen. \square

Nun untersuchen wir die Wirkung dieser Transformationen auf Kugelflächenfunktionen und Legendre-Tensoren.

Satz 2.34 *Die Räume der skalaren und der vektoriellen Kugelflächenfunktionen sind orthogonalinvariant, d.h.*

$$E_A Y_n \in X_n \quad \text{und} \quad \mathbf{E}_A y_n^{(i)} \in x_n^{(i)}$$

für $Y_n \in X_n$ und $y_n^{(i)} \in x_n^{(i)}$.

Beweis: Siehe Gervens [20] Abschnitt I.3 Lemma 14 für den skalaren Fall und Abschnitt II.1 Satz 1 für die vektorielle Aussage. \square

Ähnlich zum skalaren Fall erhalten wir noch Folgendes:

Lemma 2.35 *Es sei $\eta \in \partial B$ fest und $y_n^{(i)}$ eine vektorielle Kugelflächenfunktion der Ordnung n vom Typ $i = 2, 3$, für die*

$$\mathbf{E}_A y_n^{(i)} = y_n^{(i)}, \quad \text{für alle } \mathbf{A} \in SO(3) \text{ mit } \mathbf{A}\eta = \eta$$

gilt. Dann existiert eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ mit

$$y_n^{(i)}(\xi) = C o_\xi^{(i)} P_n(\xi \cdot \eta), \quad \xi \in \partial B.$$

Beweis: Siehe Freedon, Gervens und Schreiner [14] Lemma 12.7.3 (ii). \square

In der Dissertation von Gervens finden wir in Abschnitt II.3 auf Seite 32 folgende Eigenschaft der Legendre-Tensoren:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{p}_n^{(i)}(\mathbf{A}\xi, \eta) = \mathbf{p}_n^{(i)}(\xi, \eta) \quad \text{für alle } \mathbf{A} \in SO(3) \text{ mit } \mathbf{A}\eta = \eta, \quad (2.26)$$

also ergibt sich mit Lemma 2.35 und (2.22):

Lemma 2.36 *Es sei $a \in \mathbb{R}^3$, dann existiert eine Konstante $C \in \mathbb{R}$ mit:*

$$\mathbf{p}_n^{(i)}(\xi, \eta)a = C o_\xi^{(i)} P_n(\xi \cdot \eta), \quad \xi \in \partial B. \quad (2.27)$$

2.3.2 Die Gauß-Rechteck-Quadraturformel

Wir wollen nun die Gauß-Rechteck-Quadraturformel für sphärische Vektorfelder einführen. Hierbei müssen wir zwei Integraltypen betrachten, einmal das l^2 -Innenprodukt

$$(f, g) = \int_{\partial B} f(\eta) \cdot \overline{g(\eta)} ds(\eta)$$

und dann das Integral über vektorwertige Funktionen

$$\int_{\partial B} f(\eta) ds(\eta) = \sum_{j=1}^3 \left(\int_{\partial B} f(\eta) \cdot e_j ds(\eta) \right) e_j.$$

Bei beiden Typen können wir die skalare Quadraturformel aus Abschnitt 2.2.2 verwenden. Wir erhalten dann analog zum skalaren Fall das diskrete Innenprodukt:

$$(f, g)_m := \sum_{r=0}^{2n+1} \sum_{s=1}^{n+1} \mu_r \nu_s f(p(\theta_s, \phi_r)) \cdot \overline{g(p(\theta_s, \phi_r))}. \quad (2.28)$$

Mit Hilfe von Satz 2.21 und der Exaktheit der skalaren Quadraturformel ergibt sich sofort:

Lemma 2.37 *Es sei $\{y_{l,k}^{(i)}\}$ das Orthonormalsystem aus (2.20). Dann gilt für Kugelflächenfunktionen bis zur Ordnung n :*

$$(y_{l,k}^{(i)}, y_{l',k'}^{(i')})_m = \delta_{ll'} \delta_{kk'} \delta_{ii'}.$$

Beweis: Nach Satz 2.6 und 2.21 ist $y_{l,k}^{(3)} \cdot \overline{y_{l',k'}^{(3)}}$ $\in \mathbb{P}_{2n}$ und wird daher exakt integriert. Weiter finden wir, dass

$$y_{l,k}^{(2)} \cdot \overline{y_{l',k'}^{(2)}} = y_{l,k}^{(3)} \cdot \overline{y_{l',k'}^{(3)}}$$

und somit auch

$$(y_{l,k}^{(2)}, y_{l',k'}^{(2)})_m = (y_{l,k}^{(3)}, y_{l',k'}^{(3)})_m$$

gilt. Es fehlt also der "gemischte" Fall: $(y_{l,k}^{(2)}, y_{l',k'}^{(3)})_m$. Mit $l, l' \leq n$ gilt

$$y_{l,k}^{(2)} \cdot \overline{y_{l',k'}^{(3)}} \in \mathbb{P}_{2n+1}.$$

Daher wird auch hier nach Satz 2.8 exakt integriert. \square

Bemerkung 2.38 Die Aussage von Lemma 2.37 finden wir auch bei Nestel ([49], im Beweis zu Lemma 4.8), jedoch ist unser Beweis durch konsequentes Ausnutzen von Satz 2.8 und 2.21 wesentlich kürzer als die langen Rechnungen bei Nestel.

Kommen wir nun zur Quadraturformel für Integrale über sphärische Vektorfelder. Wir wenden komponentenweise die Gauß-Rechteck-Quadraturformel für skalare Funktionen an:

$$\begin{aligned} \int_{\partial B} f(\eta) ds(\eta) &\approx \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{r=0}^{2n+1} \sum_{s=1}^{n+1} \mu_r \nu_s f(p(\theta_s, \phi_r)) \cdot e_j \right) e_j \\ &= \sum_{r=0}^{2n+1} \sum_{s=1}^{n+1} \mu_r \nu_s f(p(\theta_s, \phi_r)). \end{aligned}$$

Satz 2.39 Die Quadraturformel für Integrale über sphärische Vektorfelder ist exakt für tangentielle Kugelflächenfunktionen y_l von der Ordnung kleiner gleich $2n$.

Beweis: Nach Satz 2.6 und 2.21 gilt für die einzelnen Komponenten

$$y_l^{(i)} \cdot e_j \in \mathbb{P}_{2n+1}$$

mit $l \leq 2n$, $i = 2, 3$ und $j = 1, 2, 3$. Daher integriert die Quadraturformel nach Satz 2.8 exakt. \square

Bemerkung 2.40 An den beiden letzten Beweisen können wir sehen, dass die Exaktheit für skalare Polynome vom Grad $2n+1$ nötig ist, um ähnliche Eigenschaften der Quadraturformel für den vektoriellen Fall zeigen zu können (siehe auch Bemerkung 2.9). Ganesh und Hawkins scheinen diese Ergebnisse nicht zu kennen, da sie in ihren Arbeiten stets mehr Quadraturpunkte verwenden, um Exaktheit für die vektoriellen Kugelflächenfunktionen zu erhalten.

Bemerkung 2.41 Die Aussagen aus Lemma 2.37 und Satz 2.39 gelten auch für normale Kugelflächenfunktionen vom Typ $i = 1$.

2.3.3 Der Approximationsoperator \mathbf{L}_n

Nachdem wir nun im letzten Abschnitt die Gauß-Rechteck-Quadraturformel für vektorwertige Funktionen eingeführt haben, können wir den vektoriellen Approximationsoperator \mathbf{L}_n definieren. Diesen benötigen wir zur Approximation der glatten Anteile im Integranden bei der Herleitung des diskreten Integraloperators in Kapitel vier.

Wir gehen analog zum skalaren Fall vor und starten mit der Aussage aus Satz 2.19. Wir können stetige, tangentielle Vektorfelder auf der Sphäre als Fourierreihe von vektoriellen Kugelflächenfunktionen darstellen:

$$f = \sum_{i=2}^3 \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{|k| \leq l} (f, y_{l,k}^{(i)}) y_{l,k}^{(i)}.$$

Diese Reihe schneiden wir wieder bei der Ordnung $n \in \mathbb{N}$ ab und erhalten die orthogonale Projektion:

$$\mathbf{P}_n f := \sum_{i=2}^3 \sum_{l=1}^n \sum_{|k| \leq l} (f, y_{l,k}^{(i)}) y_{l,k}^{(i)}. \quad (2.29)$$

Ersetzen wir nun das Innenprodukt durch die diskrete Version (2.28), so erhalten wir unseren vektoriellen Approximationsoperator:

$$\mathbf{L}_n f := \sum_{i=2}^3 \sum_{l=1}^n \sum_{|k| \leq l} (f, y_{l,k}^{(i)})_m y_{l,k}^{(i)}. \quad (2.30)$$

Wie wir sehen, wird der vektorielle Operator völlig analog zum skalaren Fall definiert. Er ist allerdings noch nicht so intensiv untersucht worden wie \mathcal{L}_n . Uns sind nur die Dissertation von Nestel [49] und die Arbeiten [18] und [19] von Ganesh und Hawkins bekannt. In beiden Arbeiten wird \mathbf{L}_n zur Lösung von Integralgleichungen verwendet. Nestels Verfahren funktioniert allerdings nur auf der Sphäre und lässt sich leider nicht auf allgemeinere Gebiete D übertragen. Aussagen über Eigenschaften dieses Approximationsoperators finden sich nur in Nestels Dissertation, allerdings werden nur Sobolev-Räume betrachtet.

Wir geben nun einige Eigenschaften des Approximationsoperators \mathbf{L}_n an. Hierbei gehen wir analog zum skalaren Fall in Abschnitt 2.2.3 vor. Wir beginnen mit einem Lemma, das auch bei Nestel gefunden werden kann ([49], Lemma 4.8):

Lemma 2.42 *Der Operator \mathbf{L}_n ist ein Projektor von $t(\partial B)$ nach $\bigoplus_{\nu=1}^n x_\nu$.*

Beweis: Der Beweis verläuft analog zum skalaren Fall in Lemma 2.11:

Der Bildraum ist laut Definition $\bigoplus_{\nu=1}^n x_\nu$. Nach Lemma 2.37 erhalten wir für alle $f \in t(\partial B)$:

$$\mathbf{L}_n(\mathbf{L}_n f) = \mathbf{L}_n f.$$

□

Als Folgerung ergibt sich sofort:

Folgerung 2.43 Für alle $y \in \bigoplus_{\nu=1}^n x_\nu$ gilt $\mathbf{L}_n y = y$.

Als Nächstes führen wir, wie in Abschnitt 2.2.3, eine Fortsetzung des Approximationsoperators \mathbf{L}_n auf $c(A)$ ein. Diese Fortsetzung $\tilde{\mathbf{L}}_n$ benötigen wir zur späteren Definition des diskreten, vektoriellen Integraloperators in Abschnitt 4.2.

Auch für sphärische Vektorfelder $f \in c(\partial B)$ gilt $f \circ p \in c(A)$, also $c(\partial B) \subset c(A)$. Wir führen dann analog zum skalaren Fall folgendes Innenprodukt auf $c(A)$ ein:

$$\langle f, g \rangle := \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\theta, \phi) \cdot \overline{g(\theta, \phi)} \sin \theta \, d\theta \, d\phi$$

und diskretisieren es mit Hilfe der Gauß-Rechteck-Regel:

$$\langle f, g \rangle_m := \sum_{r=0}^{2n+1} \sum_{s=1}^{n+1} \mu_r \nu_s f(\theta_s, \phi_r) \cdot \overline{g(\theta_s, \phi_r)}.$$

Wir definieren die Fortsetzung:

$$\tilde{\mathbf{L}}_n f := \sum_{i=2}^3 \sum_{l=1}^n \sum_{|k| \leq l} \langle f, y_{l,k}^{(i)} \circ p \rangle y_{l,k}^{(i)} \circ p. \quad (2.31)$$

Auch im vektoriellen Fall ergeben sich wieder folgende Zusammenhänge für $f, g \in c(\partial B)$:

$$\begin{aligned} (f, g) &= \langle f, g \rangle \\ (f, g)_m &= \langle f, g \rangle_m \\ (\mathbf{L}_n f)(\xi) &= (\mathbf{L}_n f)(p(\theta, \phi)) \\ &= (\tilde{\mathbf{L}}_n f)(f \circ p)(\theta, \phi), \end{aligned}$$

womit sich $\tilde{\mathbf{L}}_n$ als echte Fortsetzung von $c(\partial B)$ auf $c(A)$ herausstellt.

Zum Schluss benötigen wir noch ähnliche Aussagen zur Approximationsgüte, d.h.

zur Norm von \mathbf{L}_n , wie im skalaren Fall (Satz 2.13). Bei Nestel finden wir hierzu nur Ergebnisse für Sobolev-Räume, daher leiten wir eine entsprechende Aussage für stetige, tangentialen Vektorfelder im nächsten Abschnitt selbst her. Hierzu benötigen wir noch zwei andere Darstellungsmöglichkeiten für \mathbf{L}_n :

Lemma 2.44 *Der Approximationsoperator \mathbf{L}_n aus (2.30) besitzt die folgenden Darstellungen:*

$$i) (\mathbf{L}_n f)(\xi) = \sum_{r=0}^{2n+1} \sum_{s=1}^{n+1} \mu_r \nu_s \sum_{i=2}^3 \sum_{l=1}^n \sum_{|k| \leq l} \left(y_{l,k}^{(i)}(\xi) \otimes \overline{y_{l,k}^{(i)}(p_{r,s})} \right) f(p_{r,s})$$

$$ii) (\mathbf{L}_n f)(\xi) = \sum_{r=0}^{2n+1} \sum_{s=1}^{n+1} \mu_r \nu_s \sum_{i=2}^3 \sum_{l=1}^n \frac{2l+1}{4\pi} \mathbf{p}_l^{(i)}(\xi, p_{r,s}) f(p_{r,s}).$$

Hierbei verwenden wir die Abkürzung $p_{r,s} = p(\theta_s, \phi_r)$.

Beweis: Darstellung i) ergibt sich durch Einsetzen von (2.28); ii) folgt dann mit Hilfe des Additionstheorems aus Satz 2.29. \square

2.3.4 Approximationsgüte von \mathbf{L}_n in $t(\partial B)$

Wir wollen nun die Approximationsgüte von \mathbf{L}_n bestimmen. Diese hängt, wie im skalaren Fall (siehe Sloan/Womersley [59], Abschnitt 5), wieder hauptsächlich von der Norm des Operators ab. Da uns bisher keine solche Abschätzung für \mathbf{L}_n als Operator auf stetigen (tangentialen) Vektorfeldern bekannt ist, geben wir in diesem Abschnitt eine komplette Analysis an. Wir beginnen mit der Hauptaussage und skizzieren den längeren Beweis. Damit der Beweis übersichtlich bleibt, verwenden wir hierbei mehrere technische Hilfsaussagen, die im Anhang 8.1 getrennt bewiesen werden. Anschließend diskutieren wir, wie scharf die gefundene Abschätzung ist. Diese Frage ist wichtig für die Konvergenz der vektoriellen Methode aus Kapitel vier.

Betrachten wir den vektoriellen Operator \mathbf{L}_n in der zweiten Darstellung aus Lemma 2.44 und die Legendre-Tensoren aus Satz 2.30, so fällt auf, dass wir erste und zweite Ableitungen von Legendre-Polynomen abschätzen müssen. Vergleichen wir mit dem skalaren Operator \mathcal{L}_n bei Sloan und Womersley [59], so stellen wir fest, dass hier nur Legendre- bzw. Jacobi-Polynome, aber keine Ableitungen auftreten. Daher erwarten wir für den vektoriellen Operator eine ungünstigere Approximationsgüte. Wir finden:

Satz 2.45 *Für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert eine Konstante $C > 0$, sodass gilt:*

$$\|\mathbf{L}_n\|_\infty \leq C n^{3/2}.$$

Beweis: Wir verwenden für \mathbf{L}_n die Darstellung aus Lemma 2.44:

$$(\mathbf{L}_n f)(\xi) = \sum_{r=0}^{2n+1} \sum_{s=1}^{n+1} \mu_r \nu_s \sum_{i=2}^3 \sum_{l=1}^n \frac{2l+1}{4\pi} \mathbf{p}_l^{(i)}(\xi, p_{r,s}) f(p_{r,s})$$

und führen folgende Abkürzung ein:

$$\mathbf{A}(\xi, p_{r,s}) := \sum_{i=2}^3 \sum_{l=1}^n \frac{2l+1}{4\pi} \mathbf{p}_l^{(i)}(\xi, p_{r,s}). \quad (2.32)$$

Mit Hilfe der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung können wir wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{L}_n\|_\infty &\leq \sup_{\xi \in \partial B} \sum_{r=0}^{2n+1} \sum_{s=1}^{n+1} \mu_r \nu_s \|\mathbf{A}(\xi, p_{r,s})\|_2 \\ &\leq \left(\sum_{r=0}^{2n+1} \sum_{s=1}^{n+1} \mu_r \nu_s \right)^{1/2} \sup_{\xi \in \partial B} \left(\sum_{r=0}^{2n+1} \sum_{s=1}^{n+1} \mu_r \nu_s \|\mathbf{A}(\xi, p_{r,s})\|_2^2 \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Wegen der Exaktheit der Gauß-Rechteck-Quadraturformel (Satz 2.8), erhalten wir für den ersten Faktor:

$$\left(\sum_{r=0}^{2n+1} \sum_{s=1}^{n+1} \mu_r \nu_s \right)^{1/2} = \sqrt{4\pi}.$$

Weiter können wir die euklidische Matrixnorm von \mathbf{A} gegen die Frobeniusnorm, also gegen die Spur von $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$, abschätzen:

$$\|\mathbf{L}_n\|_\infty \leq \sqrt{4\pi} \sup_{\xi \in \partial B} \left(\sum_{r=0}^{2n+1} \sum_{s=1}^{n+1} \mu_r \nu_s \text{Spur}(\mathbf{A}(\xi, p_{r,s})^T \mathbf{A}(\xi, p_{r,s})) \right)^{1/2}$$

Das Supremum über $\xi \in \partial B$ wird angenommen, daher können wir mit einem festen $\xi_0 \in \partial B$ weiterarbeiten. Verwenden wir Lemma 8.1 im Anhang, so sehen wir, dass für festes $\xi_0 \in \partial B$ die Spur

$$\begin{aligned} \text{Spur}(\mathbf{A}(\xi_0, \eta)^T \mathbf{A}(\xi_0, \eta)) &= \\ &\sum_{l, \tilde{l}=1}^n \frac{(2l+1)(2\tilde{l}+1)}{16\pi^2 l(l+1)\tilde{l}(\tilde{l}+1)} \{ 2 P_l''(\xi_0 \cdot \eta) P_{\tilde{l}}''(\xi_0 \cdot \eta) (1 - (\xi_0 \cdot \eta)^2)^2 \\ &\quad + 2 (P_l'(\xi_0 \cdot \eta) P_{\tilde{l}}'(\xi_0 \cdot \eta))' ((\xi_0 \cdot \eta)^2 - 1) ((\xi_0 \cdot \eta) + 1) \} \end{aligned}$$

ein (skalares) sphärisches Polynom vom Grad kleiner gleich $2n$ in η ist und daher nach Satz 2.8 von der Gauß-Rechteck-Regel exakt integriert wird:

$$\|\mathbf{L}_n\|_\infty \leq \sqrt{4\pi} \left(\int_{\partial B} \text{Spur}(\mathbf{A}(\xi_0, \eta)^T \mathbf{A}(\xi_0, \eta)) ds(\eta) \right)^{1/2}.$$

Da die Spur der symmetrischen, positiv semidefiniten Matrix $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ positiv ist, gilt:

$$\int_{\partial B} \text{Spur}(\mathbf{A}(\xi_0, \eta)^T \mathbf{A}(\xi_0, \eta)) ds(\eta) = \left| \int_{\partial B} \text{Spur}(\mathbf{A}(\xi_0, \eta)^T \mathbf{A}(\xi_0, \eta)) ds(\eta) \right|.$$

Daher genügt es also, die folgenden beiden Ausdrücke abzuschätzen:

$$I_1 = \sum_{l, \tilde{l}=1}^n \frac{(2l+1)(2\tilde{l}+1)}{16\pi^2 l(l+1)\tilde{l}(\tilde{l}+1)} 4\pi \left| \int_{-1}^1 P_l''(t) P_{\tilde{l}}''(t) (1-t^2)^2 dt \right|$$

$$I_2 = \sum_{l, \tilde{l}=1}^n \frac{(2l+1)(2\tilde{l}+1)}{16\pi^2 l(l+1)\tilde{l}(\tilde{l}+1)} 4\pi \left| \int_{-1}^1 (P_l'(t) P_{\tilde{l}}'(t))' (t^2-1)(t+1) dt \right|$$

Wir haben hier $t := \xi_0 \cdot \eta$ substituiert. Nach Lemma 8.2 und 8.3 im Anhang gilt schließlich:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{L}_n\|_\infty &\leq \sqrt{4\pi} \left(\frac{3C_2}{\pi} n^3 + 18\pi n^2 + 45\pi n^3 \right)^{1/2} \\ &\leq \sqrt{2C_2 + 88} \pi n^{3/2}. \end{aligned}$$

□

Der entscheidende Schritt, um die Ordnung $n^{3/2}$ zu erhalten, ist die Verwendung der Spur. Diese stellt sich als sphärisches Polynom heraus und wird daher von der Quadraturformel exakt integriert. Durch das Integral "verlieren" wir eine Ableitungsordnung der Legendre-Polynome, was im Endeffekt zur verbesserten Abschätzung führt. Ohne das Integral würden wir nicht $n^{3/2}$, sondern nur $n^{5/2}$ bekommen. Ein ähnlicher "Trick" ist im skalaren Fall beim Operator \mathcal{L}_n nicht notwendig.

Offen ist nach wie vor die Frage, ob die Lebesgue-Konstante des vektoriiellen Approximationsoperators $\mathcal{O}(n^{3/2})$ ist, d.h. ob die Abschätzung in Satz 2.45 bzgl. der Potenz von n nicht verbessert werden kann. Für den skalaren Operator \mathcal{L}_n ist dies bekannt (siehe Sloan und Womersley [59], Abschnitt 5). Wir wollen diesen Punkt nun etwas näher untersuchen:

Bei Nestel ([49], Korollar 4.10) finden wir für die Sobolev-Räume H_p^T ein ähnliches Ergebnis:

$$\|\mathbf{L}_n\|_{H_p^T} \leq \begin{cases} n^{3/2} & \text{für } p > -1 \\ (1 + \ln n) n^{1/2} & \text{für } p = -1 \\ n^{1/2-p} & \text{für } p < -1 \end{cases}.$$

Leider macht Nestel jedoch keine weiteren Aussagen darüber, wie scharf seine Abschätzungen sind. Wir untersuchen daher den Beweis von Sloan und Womersley

(siehe [59]) zur Approximationsgüte des skalaren Operators \mathcal{L}_n :

Die Abschätzung nach unten erhalten Sloan und Womersley aus der Tatsache, dass die orthogonale Projektion die kleinste Norm unter allen Projektionen auf den Raum der skalaren Kugelflächenfunktionen besitzt und für diese

$$c_1 n^{1/2} \leq \|\mathcal{P}_n\|_\infty \leq c_2 n^{1/2}$$

gilt. Beweise zu diesen beiden Aussagen können bei Reimer ([53], Abschnitt 11 und Thm. 12.1) bzw. bei Gronwall ([24], 1914) gefunden werden.

Im Folgenden wollen wir zumindest teilweise versuchen, diese Beweisschritte auf Vektorfelder zu übertragen. Als Erstes zeigen wir, dass auch im vektoriellen Fall die orthogonale Projektion \mathbf{P}_n die kleinste Norm unter allen Projektionen besitzt. Dieses Ergebnis war bisher unbekannt. Beim Beweis nutzen wir die Grundidee von Reimer, die auf Berman ([2], 1952) und Daugavet ([10], 1974) zurückgeht.

Satz 2.46 *Die orthogonale Projektion \mathbf{P}_n besitzt die kleinste Norm unter allen Projektionen auf den Raum der tangentialen Kugelflächenfunktionen, d.h. ist $\mathbf{\Omega}$ eine Projektion auf $\bigoplus_{l=1}^n x_l$, so gilt*

$$\|\mathbf{P}_n\|_\infty \leq \|\mathbf{\Omega}\|_\infty .$$

Beweis: Es sei $\mathbf{\Omega} : c(\partial B) \rightarrow \bigoplus_{l=1}^n x_l$ eine beliebige Projektion. Wir definieren dann den sogenannten Berman-Operator:

$$(\mathbf{B}f)(\cdot) := \int_{SO(3)} \mathbf{E}_A \mathbf{\Omega} \mathbf{E}_{A^T} f(\cdot) dA \Big/ \int_{SO(3)} dA .$$

Die Norm der Transformation \mathbf{E}_A ist nach (2.23) eins, also erhalten wir:

$$\|\mathbf{B}\|_\infty \leq \|\mathbf{\Omega}\|_\infty .$$

Können wir nun zeigen, dass $\mathbf{B} = \mathbf{P}_n$ gilt, so ist die Aussage des Satzes bewiesen. Wir zeigen hierzu, dass

$$\mathbf{B}y_{l,k}^{(i)} = \mathbf{P}_n y_{l,k}^{(i)} \quad \text{für alle } i = 2, 3, l \geq 1 \text{ und } |k| \leq l \quad (2.33)$$

ist. Dies genügt, da nach Satz 2.27 die Kugelflächenfunktionen $y_{l,k}^{(i)}$ dicht in $t(\partial B)$ liegen. Wir beginnen mit dem einfachen Fall $1 \leq l \leq n$:

Da nach Satz 2.34 die tangentialen Kugelflächenfunktionen invariant unter der Transformation \mathbf{E}_A sind, gilt:

$$\mathbf{B}y_{l,k}^{(i)} = y_{l,k}^{(i)} \quad \text{für } i = 2, 3, 1 \leq l \leq n, |k| \leq l .$$

Hieraus folgt aber sofort $\mathbf{B} = \mathbf{P}_n$ auf $\bigoplus_{l=1}^n x_l$.

Sei nun $l > n$. Wir nutzen Satz 2.31, nach welchem sich jede tangentielle Kugelflächenfunktion durch Legendre-Tensoren ausdrücken lässt. Daher genügt es,

$$\mathbf{B}(\mathbf{p}_l^{(i)}(\cdot, \eta)a) = \mathbf{P}_n(\mathbf{p}_l^{(i)}(\cdot, \eta)a), \quad l > n, i = 2, 3 \quad (2.34)$$

für beliebiges $\eta \in \partial B$ und $a \in \mathbb{R}^3$ zu zeigen. Wir beginnen mit der rechten Seite: Nach (2.22) ist $\mathbf{p}_l^{(i)}(\cdot, \eta)a$ eine tangentielle Kugelflächenfunktion der Ordnung $l > n$ vom Typ $i = 2, 3$, deshalb gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_n(\mathbf{p}_l^{(i)}(\cdot, \eta)a) &= \sum_{j=2}^3 \sum_{\tilde{l}=1}^n \sum_{|k| \leq \tilde{l}} \underbrace{(\mathbf{p}_l^{(i)}(\cdot, \eta)a, y_{\tilde{l},k}^{(j)})_{l^2}}_{=0} y_{\tilde{l},k}^{(j)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Kommen wir nun zur linken Seite von (2.34). Um zu zeigen, dass auch diese Seite verschwindet, stellen wir $\mathbf{p}_l^{(i)}(\cdot, \eta)a$ wie folgt dar (siehe Lemma 2.36):

$$\mathbf{p}_l^{(i)}(\xi, \eta)a = C o_\xi^{(i)} P_l(\xi \cdot \eta).$$

Nach (2.25) gilt:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_A \mathbf{p}_l^{(i)}(\xi, \eta)a &= C \mathbf{E}_A o_\xi^{(i)} P_l(\xi \cdot \eta) \\ &= C o_\xi^{(i)} E_A P_l(\xi \cdot \eta). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Als Nächstes führen wir zur vektoriellen Projektion $\mathbf{\Omega}$ eine skalare Projektion Ω ein, die mit $o^{(i)}$ vertauscht. Es seien $F \in C^1(\partial B)$ und $i = 2, 3$ fest vorgegeben. Dann definieren wir das Vektorfeld $f := o^{(i)}F$. Auf dieses können wir $\mathbf{\Omega}$ anwenden und erhalten

$$\mathbf{\Omega}f = \sum_{l=1}^n \sum_{|k| \leq l} \alpha_{l,k}^{(i)} y_{l,k}^{(i)}$$

mit geeigneten Koeffizienten $\alpha_{l,k}^{(i)}$. Es treten hierbei laut Definition von f nur Kugelflächenfunktionen vom Typ i auf. Wir führen dann die zugehörige skalare Projektion Ω für F wie folgt ein:

$$\Omega F := \sum_{l=1}^n \sum_{|k| \leq l} \frac{\alpha_{l,k}^{(i)}}{\sqrt{l(l+1)}} Y_{l,k}.$$

Wir bemerken, dass mit Hilfe eines Dichtheitsarguments Ω auf $C(\partial B)$ wohldefiniert ist. Laut Definition der vektoriellen Kugelflächenfunktionen (siehe (2.20)) gilt für skalare Kugelflächenfunktionen der Ordnung $l \leq n$

$$\Omega Y_{l,k} = Y_{l,k}.$$

Daher ist Ω tatsächlich eine Projektion auf $\bigoplus_{l=1}^n X_l$. Für spezielle Vektorfelder der Form $f = o^{(i)}F$ gilt:

$$\begin{aligned}\Omega f &= \sum_{l,k} \alpha_{l,k}^{(i)} y_{l,k} \\ &= \sum_{l,k} \frac{\alpha_{l,k}^{(i)}}{\sqrt{l(l+1)}} o_{\xi}^{(i)} Y_{l,k} \\ &= o_{\xi}^{(i)} \sum_{l,k} \frac{\alpha_{l,k}^{(i)}}{\sqrt{l(l+1)}} Y_{l,k} \\ &= o_{\xi}^{(i)} \Omega F.\end{aligned}$$

Wenden wir dies und noch einmal die Vertauschbarkeit von $\mathbf{E}_{\mathbf{A}}$ auf (2.35) an, so ergibt sich:

$$\mathbf{E}_A \Omega \mathbf{E}_{A^T} \mathbf{p}_l^{(i)}(\xi, \eta) a = C o_{\xi}^{(i)} E_A \Omega E_{A^T} P_l(\xi \cdot \eta),$$

woraus

$$\int_{SO(3)} \mathbf{E}_A \Omega \mathbf{E}_{A^T} \mathbf{p}_l^{(i)}(\xi, \eta) a dA = C o_{\xi}^{(i)} \int_{SO(3)} E_A \Omega E_{A^T} P_l(\xi \cdot \eta) dA$$

und schließlich

$$\mathbf{B} \mathbf{p}_l^{(i)}(\xi, \eta) a = C o_{\xi}^{(i)} B P_l(\xi \cdot \eta)$$

mit dem skalaren Berman-Operator (siehe Reimer [53], (12.5)), folgt. Da Reimer im Beweis zu Thm. 12.1 aber zeigt, dass

$$B P_l(\xi \cdot \eta) = 0$$

für $l > n$ ist, ergibt sich schließlich

$$\mathbf{B} \mathbf{p}_l^{(i)}(\xi, \eta) a = 0 \implies \mathbf{B} \mathbf{p}_l^{(i)}(\xi, \eta) a = \mathbf{P}_n \mathbf{p}_l^{(i)}(\xi, \eta) a$$

für $l > n$, woraus $\mathbf{B} = \mathbf{P}_n$ und die Behauptung dieses Satzes folgen. \square

Im nächsten Beweisschritt müssen wir nun die Norm der orthogonalen Projektion nach unten abschätzen. Betrachten wir die Beweise von Reimer ([53], Abschnitt 11 und (11.6)) und Gronwall [24] für die skalare Projektion, so sehen wir, dass zuerst ein Ausdruck für die Norm des Projektors hergeleitet wird, der explizit berechnet werden kann. Angelehnt an Reimer und Kreß ([37], Thm. 2.8) finden wir Folgendes:

$$c_1 \sup_{\xi \in \partial B} \int_{\partial B} \|\mathbf{A}(\xi, \eta)\| ds(\eta) \leq \|\mathbf{P}_n\|_{\infty} \leq c_2 \sup_{\xi \in \partial B} \int_{\partial B} \|\mathbf{A}(\xi, \eta)\| ds(\eta). \quad (2.36)$$

Hierbei ist \mathbf{A} nach (2.32) definiert, $\|\cdot\|$ bezeichnet eine beliebige Matrixnorm und $c_1, c_2 > 0$ sind Konstanten. Vermutlich lässt sich in (2.36) sogar Gleichheit zeigen. Unabhängig davon muss nun im letzten Schritt, um endgültig zu beweisen, dass die Abschätzung in Satz 2.45 scharf ist, das Integral in (2.36) ausgerechnet bzw. nach unten abgeschätzt werden. Dies ist jedoch nicht trivial, wie der lange und sehr technische Beweis von Gronwall [24] für den skalaren Projektor zeigt.

Betrachten wir daher noch einmal (2.32), so stellen wir fest, dass eine Abschätzung im Wesentlichen das Verhalten der Legendre-Tensoren $\mathbf{p}_l^{(i)}$ berücksichtigen muss. Nach Satz 2.30 wird dieses Verhalten jedoch maßgeblich durch die erste und zweite Ableitung der Legendre-Polynome bestimmt. Daher ist auch für die orthogonale Projektion ein ungünstigeres Ergebnis als $\mathcal{O}(n^{1/2})$ zu erwarten, da im skalaren Fall nur Legendre- bzw. Jacobi-Polynome und keine Ableitungen auftreten.

Weitere Indizien zur Optimalität der Normabschätzung aus Satz 2.45 können im Anhang 8.2 gefunden werden. Zum Schluss geben wir nun noch eine entsprechende Abschätzung für die Fortsetzung $\tilde{\mathbf{L}}_n$ an:

Lemma 2.47 *Für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert eine Konstante $C > 0$, sodass gilt:*

$$\|\tilde{\mathbf{L}}_n\|_\infty \leq C n^{3/2}.$$

Beweis: Analog zum Operator \mathbf{L}_n können wir auch die Fortsetzung durch

$$(\tilde{\mathbf{L}}_n f)(\theta, \phi) = \sum_{r=0}^{2n+1} \sum_{s=1}^{n+1} \mu_r \nu_s \sum_{i=2}^3 \sum_{l=1}^n \frac{2l+1}{4\pi} \mathbf{p}_l^{(i)}(p(\theta, \phi), p_{r,s}) f(\theta_s, \phi_r)$$

darstellen. Mit der Abkürzung

$$\mathbf{A}(p(\theta, \phi), p_{r,s}) := \sum_{i=2}^3 \sum_{l=1}^n \frac{2l+1}{4\pi} \mathbf{p}_l^{(i)}(p(\theta, \phi), p_{r,s}),$$

können wir wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned} \|\tilde{\mathbf{L}}_n\|_\infty &\leq \sup_{(\theta, \phi) \in A} \sum_{r=0}^{2n+1} \sum_{s=1}^{n+1} \mu_r \nu_s \|\mathbf{A}(p(\theta, \phi), p_{r,s})\|_2 \\ &= \sup_{\xi \in \partial B} \sum_{r=0}^{2n+1} \sum_{s=1}^{n+1} \mu_r \nu_s \|\mathbf{A}(\xi, p_{r,s})\|_2. \end{aligned}$$

Diesen Ausdruck haben wir aber bereits im Beweis zu Satz 2.45 behandelt. Die Aussage ergibt sich also analog. \square

Bemerkung 2.48 Die Aussagen in diesem Abschnitt gelten auch, wenn wir nicht nur tangentielle, sondern zusätzlich auch normale Kugelflächenfunktionen verwenden. Hierzu verweisen wir auf die Darstellung von $\mathbf{p}_l^{(1)}$ in Thm. 12.6.3 bei Freedon, Gervens und Schreiner [14].

Approximationsgüte in $l_t^2(\partial B)$

Für die Betrachtungen zum vektoriellen Verfahren in Kapitel vier genügen die bisherigen Ergebnisse zur Approximationsgüte für stetige Vektorfelder. Zur Vollständigkeit und um ein weiteres Mal die enge Verwandtschaft zwischen dem skalaren und dem vektoriellen Fall aufzuzeigen, betrachten wir in diesem Abschnitt \mathbf{L}_n auch noch als Abbildung von $t(\partial B)$ nach $l_t^2(\partial B)$ (vergleiche auch mit Satz 2.14). Hierzu verwenden wir die Beweisideen von Sloan [58] und übertragen diese auf den vektoriellen Fall. Wir beginnen mit einigen Hilfsaussagen:

Lemma 2.49 Für das diskrete Innenprodukt (2.28) und $f \in t(\partial B)$ gilt:

- i) $(f - \mathbf{L}_n f, y)_m = 0$ für alle $y \in \bigoplus_{\nu=1}^n x_\nu$
- ii) $(\mathbf{L}_n f, \mathbf{L}_n f)_m + (f - \mathbf{L}_n f, f - \mathbf{L}_n f)_m = (f, f)_m$
- iii) $(\mathbf{L}_n f, \mathbf{L}_n f)_m \leq (f, f)_m$
- iv) $(\mathbf{L}_n f, \mathbf{L}_n f) = (\mathbf{L}_n f, \mathbf{L}_n f)_m$.

Beweis:

- i) Wir können $y \in \bigoplus_{\nu=1}^n x_\nu$ mit geeigneten Koeffizienten $\alpha_{l,k}^{(i)} \in \mathbb{C}$ wie folgt darstellen:

$$y = \sum_{i=2}^3 \sum_{l=1}^n \sum_{|k| \leq l} \alpha_{l,k}^{(i)} y_{l,k}^{(i)}. \quad (2.37)$$

Damit ergibt sich

$$(f, y)_m = \sum_{i=2}^3 \sum_{l=1}^n \sum_{|k| \leq l} \overline{\alpha_{l,k}^{(i)}} (f, y_{l,k}^{(i)})_m. \quad (2.38)$$

Verwenden wir nun die Definition von \mathbf{L}_n (2.30), die Darstellung (2.37) und Lemma 2.37, so sehen wir, dass $(\mathbf{L}_n f, y)_m$ mit (2.38) übereinstimmt.

ii) Nach i) ergibt sich mit $y = \mathbf{L}_n f$:

$$(\mathbf{L}_n f, \mathbf{L}_n f)_m = (f, \mathbf{L}_n f)_m.$$

Hieraus folgt insbesondere, dass $(f, \mathbf{L}_n f)_m \in \mathbb{R}$. Wir erhalten dann

$$\begin{aligned} (f, f)_m &= (f, f)_m + 2 \underbrace{\{(\mathbf{L}_n f, \mathbf{L}_n f)_m - (f, \mathbf{L}_n f)_m\}}_{=0} \\ &= (f, f)_m + 2(\mathbf{L}_n f, \mathbf{L}_n f)_m - (f, \mathbf{L}_n f)_m - (\mathbf{L}_n f, f)_m \\ &= (\mathbf{L}_n f, \mathbf{L}_n f)_m + (f - \mathbf{L}_n f, f - \mathbf{L}_n f)_m. \end{aligned}$$

iii) Da $(f - \mathbf{L}_n f, f - \mathbf{L}_n f)_m \geq 0$, folgt iii) direkt aus ii).

iv) Nach Definition von \mathbf{L}_n (2.30) und Satz 2.19 erhalten wir:

$$\begin{aligned} (\mathbf{L}_n f, \mathbf{L}_n f) &= \sum_{i,i'=2}^3 \sum_{l,l'=1}^n \sum_{|k| \leq l} \sum_{|k'| \leq l'} (f, y_{l,k}^{(i)})_m \overline{(f, y_{l',k'}^{(i')})_m} (y_{l,k}^{(i)}, y_{l',k'}^{(i')}) \\ &= \sum_{i=2}^3 \sum_{l=1}^n \sum_{|k| \leq l} |(f, y_{l,k}^{(i)})_m|^2. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck ergibt sich analog auch für das diskrete Innenprodukt, wenn wir Satz 2.37 anwenden:

$$\begin{aligned} (\mathbf{L}_n f, \mathbf{L}_n f)_m &= \sum_{i,i'=2}^3 \sum_{l,l'=1}^n \sum_{|k| \leq l} \sum_{|k'| \leq l'} (f, y_{l,k}^{(i)})_m \overline{(f, y_{l',k'}^{(i')})_m} (y_{l,k}^{(i)}, y_{l',k'}^{(i')})_m \\ &= \sum_{i=2}^3 \sum_{l=1}^n \sum_{|k| \leq l} |(f, y_{l,k}^{(i)})_m|^2. \end{aligned}$$

□

Nun sind wir in der Lage, die Norm von $\mathbf{L}_n : c(\partial B) \rightarrow l_t^2(\partial B)$ abzuschätzen:

Satz 2.50 Für jedes tangentielle Vektorfeld $f \in t(\partial B)$ gilt:

$$\|\mathbf{L}_n f\|_{l^2(\partial B)} \leq \sqrt{4\pi} \|f\|_\infty.$$

Beweis: Nach Lemma 2.49 ii) und iv) gilt:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{L}_n f\|_{l^2(\partial B)}^2 &= (\mathbf{L}_n f, \mathbf{L}_n f) \\
&= (\mathbf{L}_n f, \mathbf{L}_n f)_m \\
&\leq (f, f)_m \\
&= \sum_{r=0}^{2n+1} \sum_{s=1}^{n+1} \mu_r \nu_s f(p_{r,s}) \cdot \overline{f(p_{r,s})} \\
&\leq \sum_{r=0}^{2n+1} \sum_{s=1}^{n+1} \mu_r \nu_s \|f\|_\infty^2 \\
&= 4\pi \|f\|_\infty^2.
\end{aligned}$$

□

2.3.5 Konvergenz der Quadraturformel

Bevor wir in diesem Abschnitt auf die Konvergenz der Quadraturformel für Vektorfelder eingehen, wollen wir untersuchen, ob ein ähnlicher Zusammenhang mit den vektoriellen Kugelflächenfunktionen besteht wie im skalaren Fall (Satz 2.16). Es gilt analog:

Satz 2.51 Für tangentielle, stetige Vektorfelder $f \in t(\partial B)$ ist die Integration von $\mathbf{L}_n f$ identisch mit der Gauß-Rechteckregel:

$$\int_{\partial B} (\mathbf{L}_n f)(\eta) ds(\eta) = \sum_{r=0}^{2n+1} \sum_{s=1}^{n+1} \mu_r \nu_s f(p_{r,s}).$$

Beweis: Benutzen wir Folgerung 2.23 und das Additionstheorem aus Satz 2.29, so können wir umformen zu:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B} (\mathbf{L}_n f)(\eta) ds(\eta) &= \sum_{i=2}^3 \sum_{l=1}^n \sum_{|k| \leq l} (f, y_{l,k}^{(i)})_m \int_{\partial B} y_{l,k}^{(i)}(\eta) ds(\eta) \\
&= \sum_{k=-1}^1 (f, y_{1,k}^{(2)})_m \int_{\partial B} y_{1,k}^{(2)}(\eta) ds(\eta) \\
&= \sum_{r=0}^{2n+1} \sum_{s=1}^{n+1} \mu_r \nu_s \frac{3}{4\pi} \left(\int_{\partial B} \mathbf{p}_1^{(2)}(\eta, p_{r,s}) ds(\eta) \right) f(p_{r,s}).
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Darstellung

$$\mathbf{p}_1^{(2)}(\xi, \eta) = \frac{1}{2} ((\mathbf{I} - \xi \otimes \xi) - (\eta - (\xi \cdot \eta) \otimes \eta))$$

aus Satz 2.30 können wir das Integral berechnen:

$$\frac{3}{4\pi} \int_{\partial B} \mathbf{P}_1^{(2)}(\eta, p_{r,s}) ds(\eta) = \mathbf{I} - p_{r,s} \otimes p_{r,s}.$$

Da $f \in t(\partial B)$ tangential ist, gilt $(p_{r,s} \otimes p_{r,s})f(p_{r,s}) = 0$, womit die Behauptung bewiesen ist. \square

Nun wollen wir eine ähnliche Konvergenzaussage wie im skalaren Fall (Satz 2.17) finden. Hierbei könnten wir analog vorgehen, indem wir Satz 2.45 benutzen. Da die Normabschätzung für den vektoriellen Operator aber nur von der Ordnung $n^{3/2}$ ist, wählen wir einen anderen Weg, der zu einem besseren Ergebnis führt:

Wir nutzen die Tatsache, dass wir komponentenweise die skalare Quadraturformel anwenden, d.h. es gilt nach Satz 2.16 und 2.51:

$$\begin{aligned} \int_{\partial B} \mathbf{L}_n f(\eta) ds(\eta) &= \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{r=0}^{2n+1} \sum_{s=1}^{n+1} \mu_r \nu_s f(p_{r,s}) \cdot e_j \right) e_j \\ &= \sum_{j=1}^3 \int_{\partial B} \mathcal{L}_n(f \cdot e_j)(\eta) ds(\eta) e_j. \end{aligned}$$

Mit der Normabschätzung für \mathcal{L}_n aus Satz 2.13 erhalten wir schließlich für ein beliebiges Polynom $P \in \mathbb{P}_n$:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial B} f(\eta) ds(\eta) - \int_{\partial B} \mathbf{L}_n f(\eta) ds(\eta) \right| &= \left| \sum_{j=1}^3 \int_{\partial B} ((f \cdot e_j)(\eta) - \mathcal{L}_n(f \cdot e_j)(\eta)) ds(\eta) e_j \right| \\ &\leq C \max_{j=1,2,3} \|f \cdot e_j - \mathcal{L}_n(f \cdot e_j)\|_\infty \\ &\leq \tilde{C} n^{1/2} \max_{j=1,2,3} \|f \cdot e_j - P\| \end{aligned}$$

Verwenden wir nun wie in Abschnitt 2.2.4 wieder die Aussage von Ragozin [52], so gilt auch im vektoriellen Fall der folgende Satz:

Satz 2.52 *Für alle $f \in t^{r,\alpha}(\partial B)$ mit $r \in \mathbb{N}$, $\alpha \in [0, 1]$ und $r + \alpha > 1/2$ konvergiert die Gauß-Rechteck-Quadraturformel. Für den Fehler gilt die Abschätzung*

$$\left| \int_{\partial B} f(\eta) ds(\eta) - \int_{\partial B} \mathbf{L}_n f(\eta) ds(\eta) \right| \leq C_{r,\alpha} \frac{1}{n^{r+\alpha-1/2}} \|f\|_{r,\alpha}.$$

Bemerkung 2.53 *Wir haben uns in diesem Abschnitt wieder nur auf tangentielle Vektorfelder beschränkt. Werden bei der Definition des Approximationsoperators \mathbf{L}_n auch die normalen Kugelflächenfunktionen vom Typ $i = 1$ verwendet, so können alle Aussagen dieses Abschnittes auch auf den Fall stetiger Vektorfelder übertragen werden.*

Kapitel 3

Die skalare Methode

Nach dem Grundlagenkapitel kommen wir nun zum ersten Lösungsverfahren für die Integralgleichung

$$a(x) + 2 \int_{\partial D} \nu(x) \times \operatorname{rot}_x \{ \Phi(x, y) a(y) \} ds(y) = 2c(x), \quad x \in \partial D. \quad (3.1)$$

Wir stellen hierbei folgende Bedingungen an das Streuobjekt $D \subset \mathbb{R}^3$:

- $D \subset \mathbb{R}^3$ ist zusammenhängend.
- Das Komplement $\mathbb{R}^3 \setminus D$ ist zusammenhängend.
- Die Oberfläche ∂D ist global glatt über die Einheitskugel ∂B parametrisierbar, d.h. es existiert eine C^∞ -Abbildung $q : \partial B \rightarrow \partial D$.
- Für die Funktionaldeterminante J von q gilt $J(\xi) > 0$ für alle $\xi \in \partial B$ (Diese Eigenschaft gilt automatisch, da q eine globale Parametrisierung ist.).

Außerdem fordern wir noch, dass die Wellenzahl κ kein Maxwell-Eigenwert ist. Dann ist die Integralgleichung nach Colton und Kreß ([7], Abschnitt 6.4) für jede rechte Seite $c \in t(\partial D)$ eindeutig lösbar.

Wir beginnen das Kapitel mit einer kurzen Beschreibung des Verfahrens. Hierbei erläutern wir die Grundidee und geben die komponentenweise Zerlegung der Integralgleichung an. Anschließend entwickeln wir für diese Gleichung voll- und semi-diskrete Galerkin-Verfahren. Um ein volldiskretes Verfahren zu erhalten, müssen wir die Integraloperatoren approximieren. Nachdem wir diese diskreten Operatoren eingeführt haben, beschäftigen wir uns schließlich noch mit der Implementierung, geben numerische Beispiele an und untersuchen die Konvergenz des Verfahrens. Bei diesen Untersuchungen haben wir festgestellt, dass die Methode modifiziert werden muss um superalgebraische Konvergenz zu erhalten. Auf diese Modifikationen gehen wir im letzten Abschnitt dieses Kapitels ein.

3.1 Beschreibung der skalaren Methode

Wir beschreiben zunächst die Grundidee des skalaren Verfahrens. In der Einleitung hatten wir bereits erwähnt, dass der Kern des Integraloperators

$$(\mathcal{M}a)(x) := 2 \int_{\partial D} \nu(x) \times \operatorname{rot}_x \{ \Phi(x, y) a(y) \} ds(y), \quad x \in \partial D \quad (3.2)$$

eine Singularität vom gleichen Typ besitzt wie die Integraloperatoren, die bei akustischen Streuproblemen auftreten. Daher versuchen wir, existierende Lösungsverfahren für diese Probleme auf unseren elektromagnetischen Fall zu übertragen. Wir betrachten hierzu sogenannte Spektralmethoden, die für glatte Grunddaten exponentiell bzw. superalgebraisch konvergieren. Zu dieser Gruppe von Lösungsmethoden gehören auch das Nyström-Verfahren von Wienert ([64], 1990) und das Galerkin-Verfahren von Graham und Sloan ([21], 2002). Wir entscheiden uns hier für Galerkin-Verfahren, da das entstehende Gleichungssystem des volldiskreten Verfahrens am Ende nur etwa halb so groß ist wie das System, das bei einem Nyström-Verfahren entsteht (siehe Graham/Sloan [21], am Ende von Abschnitt 6).

Wir betrachten bei unserem Verfahren die Integralgleichung für die Dichte $a \in t(\partial D)$ komponentenweise und nutzen konsequent die tangentielle Natur des Problems aus, d.h. wir verwenden die Tatsache, dass die Vektorfelder a und c tangential sind und dass der Integraloperator \mathcal{M} tangentielle Dichten wieder auf tangentielle Vektorfelder abbildet. Der Vorteil bei dieser Vorgehensweise ist, dass wir so die Größe unseres Gleichungssystems für die Komponentenfunktionen auf ein 2×2 -System reduzieren können (siehe (3.10) und (3.38)). Es stellt sich weiterhin heraus, dass die so erhaltenen, nun skalaren Integraloperatoren ähnliche Eigenschaften besitzen wie die Operatoren, die Graham und Sloan [21] behandeln. Daher können wir ihre Spektralrandintegralmethode auf unser komponentenweises System anwenden.

Ein ähnliches Verfahren wurde zeitgleich von Ganesh und Hawkins vorgeschlagen. In ihrer Arbeit [17] nutzen sie jedoch nicht, wie wir in diesem Abschnitt, die tangentielle Natur der Gleichung aus. Dies führt dazu, dass sie nicht die Größe des Gleichungssystems reduzieren können. Sie müssen daher mit dem vollen 3×3 -System arbeiten.

Wir starten nun mit der Beschreibung unserer skalaren Methode und überführen zuerst die vektorielle Integralgleichung (3.1) in ein äquivalentes System von skalaren Integralgleichungen. Dazu zerlegen wir die Vektorfelder a und c in ihre Tangentialkomponenten und erhalten folgende Darstellung:

$$a(x) = \sum_{u=1}^2 A_u(x) t_u(x) \quad \text{bzw.} \quad c(x) = \sum_{u=1}^2 C_u(x) t_u(x). \quad (3.3)$$

Mit $t_u(x)$, $u = 1, 2$, bezeichnen wir eine Basis des Tangentialraums am Punkt $x \in \partial D$. Damit wir später einfache und kurze Ausdrücke für unsere Integralopera-

toren erhalten, fordern wir, dass die Tangentialvektoren $t_u(x)$ mit der nach außen weisenden Normalen $\nu(x)$ ein Orthonormalsystem bilden. In der Regel stehen die Standard-Tangentialvektoren

$$\frac{\partial q(p(\theta, \phi))}{\partial \theta} \quad \text{und} \quad \frac{\partial q(p(\theta, \phi))}{\partial \phi}$$

jedoch nicht senkrecht aufeinander. Daher wenden wir das Gram-Schmidt'sche Orthonormalisierungsverfahren an und erhalten:

$$\nu(\theta, \phi) = \frac{1}{\left| \frac{\partial q(p(\theta, \phi))}{\partial \theta} \times \frac{\partial q(p(\theta, \phi))}{\partial \phi} \right|} \left(\frac{\partial q(p(\theta, \phi))}{\partial \theta} \times \frac{\partial q(p(\theta, \phi))}{\partial \phi} \right) \quad (3.4)$$

und

$$t_1(\theta, \phi) := \frac{1}{\left| \frac{\partial q(p(\theta, \phi))}{\partial \theta} \right|} \frac{\partial q(p(\theta, \phi))}{\partial \theta} \quad (3.5)$$

$$t_2(\theta, \phi) := \frac{1}{|\tilde{t}_2(\theta, \phi)|} \left\{ \underbrace{\frac{\partial q(p(\theta, \phi))}{\partial \phi} - \left(\frac{\partial q(p(\theta, \phi))}{\partial \phi} \cdot t_1(\theta, \phi) \right) t_1(\theta, \phi)}_{:= \tilde{t}_2(\theta, \phi)} \right\} \quad (3.6)$$

wobei wir für $x \in \partial D$ die Parametrisierung $x = (q \circ p)(\theta, \phi)$ verwendet haben. Da wir Kugelkoordinaten benutzen, kann die Tangentialbasis auch bei $\theta = 0$ bzw. $\theta = \pi$ definiert werden (siehe Abschnitt 3.6). Es gelten folgende Beziehungen für die drei Vektoren $\nu(x)$, $t_1(x)$ und $t_2(x)$:

$$t_1(x) \times t_2(x) = \nu(x), \quad t_1(x) \times \nu(x) = -t_2(x) \quad \text{und} \quad t_2(x) \times \nu(x) = t_1(x). \quad (3.7)$$

Die einzelnen Komponentenfunktionen aus der Darstellung (3.3) der Vektorfelder a und c ergeben sich nun einfach aus den Skalarprodukten:

$$A_u(x) = a(x) \cdot t_u(x) \quad \text{bzw.} \quad C_u(x) = c(x) \cdot t_u(x). \quad (3.8)$$

Setzen wir (3.3) in die Integralgleichung (3.1) ein, so erhalten wir das folgende, äquivalente Gleichungssystem für die skalaren Komponentenfunktionen A_u mit $u = 1, 2$:

$$A_u(x) + \left[2 \int_{\partial D} \nu(x) \times \text{rot}_x \left(\Phi(x, y) \sum_{v=1}^2 A_v(y) t_v(y) \right) ds(y) \right] \cdot t_u(x) = 2C_u(x).$$

Verwenden wir die Integraloperatoren

$$(\mathcal{M}_{uv}A)(x) := 2 \int_{\partial D} t_u(x) \cdot \left(\nu(x) \times \text{rot}_x (\Phi(x, y) t_v(y)) \right) A(y) ds(y), \quad (3.9)$$

so können wir das Gleichungssystem auch in Matrix-Vektor-Form aufschreiben:

$$\begin{pmatrix} (I + \mathcal{M}_{11}) & \mathcal{M}_{12} \\ \mathcal{M}_{21} & (I + \mathcal{M}_{22}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1(x) \\ A_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2C_1(x) \\ 2C_2(x) \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Wir haben also unsere vektorielle Integralgleichung (3.1) in ein äquivalentes Integralgleichungssystem für die skalaren Funktionen A_u ($u = 1, 2$) mit skalaren Integraloperatoren umgeformt. Um die Ähnlichkeit unserer Integraloperatoren \mathcal{M}_{uv} zu den Operatoren, die Graham und Sloan betrachten, deutlicher zu machen, formen wir weiter um. Verwenden wir (3.7) in (3.9), so erhalten wir mit

$$\chi(u) := 3 - u, \quad u = 1, 2$$

die umgeformten Integraloperatoren

$$\begin{aligned} (\mathcal{M}_{uv}A)(x) &= (-1)^u 2 \int_{\partial D} t_{\chi(u)}(x) \cdot \operatorname{rot}_x(\Phi(x, y) t_v(y)) ds(y) \\ &= (-1)^u 2 \int_{\partial D} \nabla_x \Phi(x, y) \cdot (t_v(y) \times t_{\chi(u)}(x)) ds(y) \end{aligned}$$

Berechnen wir nun den Gradienten der Grundlösung (1.7)

$$\nabla_x \Phi(x, y) = \frac{e^{i\kappa|x-y|}}{4\pi} \left(\frac{i\kappa(x-y)}{|x-y|^2} - \frac{(x-y)}{|x-y|^3} \right),$$

verwenden wie Ganesh und Graham in [15] die Bezeichnungen

$$S^c(x, y) := \cos(\kappa|x-y|) \quad \text{und} \quad S^s(x, y) := \begin{cases} \frac{\sin(\kappa|x-y|)}{|x-y|} & x \neq y \\ \kappa & x = y \end{cases} \quad (3.11)$$

und fassen weiter zusammen zu

$$M_{uv}^{(1)}(x, y) := (-1)^{u+1} \left(S^c(x, y) \frac{(x-y) \cdot (t_v(y) \times t_{\chi(u)}(x))}{|x-y|^2} + \kappa S^s(x, y) (x-y) \cdot (t_v(y) \times t_{\chi(u)}(x)) \right) \quad (3.12)$$

$$M_{uv}^{(2)}(x, y) := (-1)^u \left(\kappa S^c(x, y) - S^s(x, y) \right) \cdot \frac{(x-y) \cdot (t_v(y) \times t_{\chi(u)}(x))}{|x-y|^2}, \quad (3.13)$$

so erhalten wir als endgültige Form für \mathcal{M}_{uv} :

$$\begin{aligned} (\mathcal{M}_{uv}A)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \frac{1}{|x-y|} M_{uv}^{(1)}(x,y) A(y) ds(y) \\ &\quad + \frac{i}{2\pi} \int_{\partial D} M_{uv}^{(2)}(x,y) A(y) ds(y). \end{aligned} \quad (3.14)$$

Diese Form der Integraloperatoren ist nun ähnlich zu den Operatoren bei Graham und Sloan. Daher können wir nun im folgenden Abschnitt ein Galerkin-Verfahren zur Lösung des Integralgleichungssystems (3.10) angeben.

3.2 Das Galerkin-Verfahren

Wir leiten schrittweise ein volldiskretes Galerkin-Verfahren zur Lösung unseres Problems her. Dazu beginnen wir mit einem nicht-diskreten Galerkin-Verfahren, welches wir schrittweise diskretisieren. Als Ansatzraum für die Komponentenfunktionen wählen wir den Raum \mathbb{P}_n der sphärischen Polynome vom Grad kleiner gleich n . Deshalb transformieren wir zuerst das gesamte System (3.10) auf die Sphäre. Hierbei verwenden wir die Parametrisierung $q : \partial B \rightarrow \partial D$ unseres Streuobjektes.

Für die Komponentenfunktionen definieren wir:

$$\tilde{A}_u(\xi) := A_u(q(\xi)) \quad \text{und} \quad \tilde{C}_u(\xi) := C_u(q(\xi)), \quad u = 1, 2 \quad (3.15)$$

Als neue, sphärische Integraloperatoren erhalten wir:

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathcal{M}}_{uv}\tilde{A})(\xi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} \frac{1}{|q(\xi) - q(\eta)|} M_{uv}^{(1)}(q(\xi), q(\eta)) \tilde{A}(\eta) J(\eta) ds(\eta) \\ &\quad + \frac{i}{2\pi} \int_{\partial D} M_{uv}^{(2)}(q(\xi), q(\eta)) \tilde{A}(\eta) J(\eta) ds(\eta). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Hierbei bezeichnen wir mit $J(\eta)$ die Jacobi-Determinante zur Parametrisierung q . Dies führt auf das sphärische System:

$$\begin{pmatrix} (I + \tilde{\mathcal{M}}_{11}) & \tilde{\mathcal{M}}_{12} \\ \tilde{\mathcal{M}}_{21} & (I + \tilde{\mathcal{M}}_{22}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A}_1(\xi) \\ \tilde{A}_2(\xi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\tilde{C}_1(\xi) \\ 2\tilde{C}_2(\xi) \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

Bevor wir nun das Galerkin-Verfahren herleiten, führen wir noch folgende nützliche Notation zur Abkürzung ein:

$$\tilde{a}(\xi) := \begin{pmatrix} \tilde{A}_1(\xi) \\ \tilde{A}_2(\xi) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{c}(\xi) := \begin{pmatrix} \tilde{C}_1(\xi) \\ \tilde{C}_2(\xi) \end{pmatrix}. \quad (3.18)$$

Diese zweikomponentigen Vektorfelder hängen mit den vorher verwendeten, dreikomponentigen Vektorfeldern $a(x)$ und $c(x)$ über (3.3), (3.8) und (3.15) zusammen. Fassen wir die Integraloperatoren $\tilde{\mathcal{M}}_{uv}$ noch wie folgt zusammen

$$\tilde{\mathcal{M}} := \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{M}}_{11} & \tilde{\mathcal{M}}_{12} \\ \tilde{\mathcal{M}}_{21} & \tilde{\mathcal{M}}_{22} \end{pmatrix},$$

so können wir das Integralgleichungssystem (3.17) etwas kompakter als

$$(I + \tilde{\mathcal{M}})\tilde{a} = 2\tilde{c} \quad (3.19)$$

schreiben. Führen wir für Vektorfelder der Form (3.18) schließlich noch folgendes Innenprodukt ein

$$(\tilde{a}, \tilde{b}) := (\tilde{A}_1, \tilde{B}_1) + (\tilde{A}_2, \tilde{B}_2),$$

welches äquivalent zum üblichen l^2 -Innenprodukt für die dreikomponentigen Vektorfelder ist, so ergibt sich das Galerkin-Verfahren:

Wir suchen eine Näherungslösung $a_n \in \mathbb{P}_n^2$, die

$$(a_n + \tilde{\mathcal{M}}a_n, w_n) = 2(\tilde{c}, w_n) \quad (3.20)$$

für alle $w_n \in \mathbb{P}_n^2$ erfüllt.

Dieses Galerkin-Verfahren ist nicht diskretisiert, da wir zwei Integrale auswerten müssen: einmal das Innenprodukt und dann die Integraloperatoren. Wir erhalten ein semidiskretes Galerkin-Verfahren, wenn wir das Innenprodukt durch die Gauß-Rechteck-Regel wie folgt diskretisieren:

$$(\tilde{a}, \tilde{b})_m := \sum_{u=1}^2 \sum_{r=0}^{2n+1} \sum_{s=1}^{n+1} \mu_r \nu_s \tilde{A}_u(p(\theta_s, \phi_r)) \overline{\tilde{B}_u(p(\theta_s, \phi_r))}. \quad (3.21)$$

Das semidiskrete Galerkin-Verfahren lautet dann:

Gesucht ist eine Näherungslösung $a_n \in \mathbb{P}_n^2$, die

$$(a_n + \tilde{\mathcal{M}}a_n, w_n)_m = 2(\tilde{c}, w_n)_m \quad (3.22)$$

für alle $w_n \in \mathbb{P}_n^2$ erfüllt.

Bei diesem Verfahren müssen immer noch Integrale zum Auswerten der Operatoren $\tilde{\mathcal{M}}_{uv}$ berechnet werden. Daher diskretisieren wir im nächsten Abschnitt diese Integraloperatoren, um so ein volldiskretes Galerkin-Verfahren zu erhalten. Vorher geben wir aber noch eine zweite, äquivalente Formulierung der Verfahren (3.20) und (3.22) an. Mit Hilfe der Operatoren \mathcal{P}_n und \mathcal{L}_n (siehe (2.11) und (2.12)) ergibt sich für (3.20):

Gesucht wird eine Näherungslösung $a_n \in \mathbb{P}_n^2$, die die folgende Gleichung erfüllt:

$$a_n + \mathcal{P}_n \tilde{\mathcal{M}} a_n = 2\mathcal{P}_n \tilde{c}. \quad (3.23)$$

Hierbei wenden wir den Projektor \mathcal{P}_n komponentenweise auf die Vektorfelder an:

$$\mathcal{P}_n \tilde{c} := \begin{pmatrix} \mathcal{P}_n \tilde{C}_1 \\ \mathcal{P}_n \tilde{C}_2 \end{pmatrix}. \quad (3.24)$$

Für das semidiskrete Verfahren (3.22) können wir schließlich schreiben:

Gesucht wird eine Näherungslösung $a_n \in \mathbb{P}_n^2$, die die folgende Gleichung erfüllt:

$$a_n + \mathcal{L}_n \tilde{\mathcal{M}} a_n = 2\mathcal{L}_n \tilde{c}. \quad (3.25)$$

3.3 Diskretisierung der Integraloperatoren

Wir diskretisieren nun die Integraloperatoren $\tilde{\mathcal{M}}_{uv}$, um zu einem vollen diskreten Galerkin-Verfahren zu kommen. Da, wie wir bereits mehrfach erwähnt haben, die Operatoren eine ähnliche Form besitzen wie die Operatoren, die Graham und Sloan in [21] betrachten, wenden wir ihre Spektralmethode zur Approximation an. Die Grundidee zu diesem Vorgehen kann bereits 1990 bei Wienert [64] gefunden werden.

Als Erstes versuchen wir eine radiale Singularität zu bekommen, da wir dann Lemma 2.5 anwenden können. Hierzu ergänzen wir im ersten Integral von (3.16) die folgende Funktion:

$$R(\xi, \eta) := \frac{|\xi - \eta|}{|q(\xi) - q(\eta)|}, \quad \xi, \eta \in \partial B.$$

Fassen wir dann die Kerne $M_{u,v}^{(i)}$ ($i = 1, 2$), die Jacobi-Determinante J und die Funktion R zusammen zu:

$$\tilde{M}_{uv}^{(1)}(\xi, \eta) := R(\xi, \eta) M_{uv}^{(1)}(q(\xi), q(\eta)) J(\eta) \quad (3.26)$$

$$\tilde{M}_{uv}^{(2)}(\xi, \eta) := M_{uv}^{(2)}(q(\xi), q(\eta)) J(\eta), \quad (3.27)$$

so erhalten wir schließlich die Integraloperatoren

$$(\tilde{\mathcal{M}}_{uv} \tilde{A})(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B} \frac{1}{|\xi - \eta|} \tilde{M}_{uv}^{(1)}(\xi, \eta) \tilde{A}(\eta) ds(\eta) + \frac{i}{2\pi} \int_{\partial B} \tilde{M}_{uv}^{(2)}(\xi, \eta) \tilde{A}(\eta) ds(\eta).$$

Im nächsten Schritt wollen wir die Singularität in $\xi \in \partial B$ auf den Nordpol $\hat{n} := (0, 0, 1)^T$ transformieren. Dies ist nötig, damit die Kernfunktionen $\tilde{M}_{uv}^{(j)}$ ($j = 1, 2$)

genügend regulär für unsere Approximation mit \mathcal{L}_n sind (siehe Lemma 3.2). Hierzu sei \mathbf{T}_ξ eine orthogonale Matrix, die ξ auf den Nordpol abbildet, die also durch

$$\mathbf{T}_\xi \xi := \hat{n}$$

definiert wird. Für unterschiedliche Realisierungen dieser Matrix \mathbf{T}_ξ verweisen wir auf Wienert [64], Abschnitt 6.2. Mit Hilfe dieser Matrix können wir nun eine Transformation auf $C(\partial B)$ bzw. auf $C(\partial B \times \partial B)$ definieren:

$$\mathcal{T}_\xi F(\eta) := F(\mathbf{T}_\xi^{-1}\eta), \quad \eta \in \partial B, F \in C(\partial B) \quad (3.28)$$

$$\mathcal{T}_\xi G(\eta, \zeta) := G(\mathbf{T}_\xi^{-1}\eta, \mathbf{T}_\xi^{-1}\zeta), \quad \eta, \zeta \in \partial B, G \in C(\partial B \times \partial B) \quad (3.29)$$

Hierbei verwenden wir im Gegensatz zum Grundlagenkapitel (siehe Def. 2.32) die Notation von Graham und Sloan. Wir erhalten dann

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathcal{M}}_{uv}\tilde{A})(\xi) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B} \frac{1}{|\hat{n} - \hat{\eta}|} \mathcal{T}_\xi \tilde{M}_{uv}^{(1)}(\hat{n}, \hat{\eta}) \mathcal{T}_\xi \tilde{A}(\hat{\eta}) ds(\hat{\eta}) \\ &\quad + \frac{i}{2\pi} \int_{\partial B} \mathcal{T}_\xi \tilde{M}_{uv}^{(2)}(\hat{n}, \hat{\eta}) \mathcal{T}_\xi \tilde{A}(\hat{\eta}) ds(\hat{\eta}), \end{aligned} \quad (3.30)$$

wobei $\hat{\eta}$ durch $\hat{\eta} := \mathbf{T}_\xi \eta$ definiert wird und wir die Invarianz der euklidischen Norm bzw. des Oberflächenmaßes auf ∂B unter orthogonalen Transformationen ausgenutzt haben. Auf die genügend glatten Anteile im Integranden dieser Operatoren wenden wir nun unseren Approximationsoperator \mathcal{L}_n an. Hierzu wählen wir ein n' mit der Eigenschaft

$$(1 + c_1)n \leq n' \leq c_2n \quad (3.31)$$

für zwei feste Konstanten $c_1, c_2 > 0$. Wienert wählt in seiner Dissertation $n' = n$, kann jedoch für diese Wahl keine Konvergenz seines Nyström-Verfahrens zeigen. Für den Konvergenzbeweis nach Graham und Sloan ist die Forderung (3.31) jedoch notwendig. Wir erhalten dann mit Lemma 2.4 und 2.5 die folgenden diskreten Operatoren:

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathcal{M}}_{uv}^{n'}\tilde{A})(\xi) &:= \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B} \frac{1}{|\hat{n} - \hat{\eta}|} \mathcal{L}_{n'} \left\{ \mathcal{T}_\xi \tilde{M}_{uv}^{(1)}(\hat{n}, \cdot) \mathcal{T}_\xi \tilde{A}(\cdot) \right\}(\hat{\eta}) ds(\hat{\eta}) \\ &\quad + \frac{i}{2\pi} \int_{\partial B} \mathcal{L}_{n'} \left\{ \mathcal{T}_\xi \tilde{M}_{uv}^{(2)}(\hat{n}, \cdot) \mathcal{T}_\xi \tilde{A}(\cdot) \right\}(\hat{\eta}) ds(\hat{\eta}) \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{l=0}^{n'} \sum_{|k| \leq l} \frac{4\pi}{2l+1} (\mathcal{T}_\xi \tilde{M}_{uv}^{(1)}(\hat{n}, \cdot) \mathcal{T}_\xi \tilde{A}(\cdot), Y_{l,k}(\cdot))_{m'} Y_{l,k}(\hat{n}) \\ &\quad + \frac{i}{2\pi} (\mathcal{T}_\xi \tilde{M}_{uv}^{(2)}(\hat{n}, \cdot) \mathcal{T}_\xi \tilde{A}(\cdot), 1)_{m'}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

$$(3.33)$$

Diese Operatoren sind für die spätere Implementierung gut geeignet, jedoch ist diese Definition in gewisser Hinsicht problematisch: Die Kernfunktionen $\tilde{\mathcal{M}}_{uv}^{(j)}$ können unstetig auf ∂B sein und liegen dann nicht im Definitionsbereich von \mathcal{L}_n . Dieses Problem lässt sich aber einfach lösen, indem wir eine zweite, äquivalente Definition angeben. Verwenden wir nämlich Kugelkoordinaten und die Fortsetzung $\tilde{\mathcal{L}}_n$ von \mathcal{L}_n , so werden wir später zeigen (Lemma 3.2), dass dann alle Kernfunktionen im Definitionsbereich von $\tilde{\mathcal{L}}_n$ liegen (siehe auch Graham und Sloan [21], Abschnitt 4.1). Zur Herleitung der zweiten Definition substituieren wir $\hat{\eta} = p(\theta, \phi)$ in (3.30) und erhalten

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathcal{M}}_{uv}\tilde{A})(\xi) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathcal{T}_\xi \tilde{M}_{uv}^{(1)}(\hat{\eta}, p(\theta, \phi)) \mathcal{T}_\xi \tilde{A}(p(\theta, \phi)) \cos(\theta/2) d\theta d\phi \quad (3.34) \\ &\quad + \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathcal{T}_\xi \tilde{M}_{uv}^{(2)}(\hat{\eta}, p(\theta, \phi)) \mathcal{T}_\xi \tilde{A}(p(\theta, \phi)) \sin(\theta) d\theta d\phi, \end{aligned}$$

Wenden wir nun die Fortsetzung $\tilde{\mathcal{L}}_{n'}$ an, so ergibt sich wegen (2.17) die äquivalente Form:

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathcal{M}}_{uv}^{n'}\tilde{A})(\xi) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \tilde{\mathcal{L}}_{n'} \left\{ \mathcal{T}_\xi \tilde{M}_{uv}^{(1)}(\hat{\eta}, p(\cdot)) \mathcal{T}_\xi \tilde{A}(p(\cdot)) \right\}(\theta, \phi) \cos(\theta/2) d\theta d\phi \\ &\quad + \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \tilde{\mathcal{L}}_{n'} \left\{ \mathcal{T}_\xi \tilde{M}_{uv}^{(2)}(\hat{\eta}, p(\cdot)) \mathcal{T}_\xi \tilde{A}(p(\cdot)) \right\}(\theta, \phi) \sin(\theta) d\theta d\phi. \end{aligned}$$

Diese zweite Definition ist unproblematisch. Berechnen wir die Integrale, so bekommen wir wieder (3.33) als diskrete Version. Fassen wir anschließend diese Integraloperatoren zusammen zu

$$\tilde{\mathcal{M}}^{n'} := \begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{M}}_{11}^{n'} & \tilde{\mathcal{M}}_{12}^{n'} \\ \tilde{\mathcal{M}}_{21}^{n'} & \tilde{\mathcal{M}}_{22}^{n'} \end{pmatrix},$$

so erhalten wir unser volldiskretes Galerkin-Verfahren:

Gesucht ist eine Näherungslösung $a_n \in \mathbb{P}_n^2$, die

$$(a_n + \tilde{\mathcal{M}}^{n'} a_n, w_n)_m = 2(\tilde{c}, w_n)_m \quad (3.35)$$

für alle $w_n \in \mathbb{P}_n^2$ erfüllt.

Oder in der äquivalenten Operatorform mit \mathcal{L}_n :

Gesucht ist eine Näherungslösung $a_n \in \mathbb{P}_n^2$, die folgende Gleichung erfüllt:

$$a_n + \mathcal{L}_n \tilde{\mathcal{M}}^{n'} a_n = 2\mathcal{L}_n \tilde{c}. \quad (3.36)$$

3.4 Implementation

Wir gehen nun auf die Implementierung des volldiskreten Galerkin-Verfahrens (3.35) ein:

Gesucht ist eine Näherungslösung $a_n \in \mathbb{P}_n^2$, die

$$(a_n + \tilde{\mathcal{M}}^{n'} a_n, w_n)_m = 2(\tilde{c}, w_n)_m \quad (3.37)$$

für alle $w_n \in \mathbb{P}_n^2$ erfüllt.

Verwenden wir die Kugelflächenfunktionen $Y_{l,k}$, $l \leq n$ und $|k| \leq l$, als Basis für \mathbb{P}_n , so können wir die gesuchte Lösung wie folgt darstellen:

$$a_n(\xi) = \begin{pmatrix} A_n^1(\xi) \\ A_n^2(\xi) \end{pmatrix}, \quad A_n^\gamma(\xi) = \sum_{l=0}^n \sum_{|k| \leq l} \alpha_{lk}^\gamma Y_{l,k}(\xi), \quad \gamma = 1, 2.$$

Gleichung (3.37) muß für alle $w_n \in \mathbb{P}_n^2$ gelten. Äquivalent ist die Forderung, dass die Gleichung für die Basisfunktionen

$$p_{l,k}^1 := \begin{pmatrix} Y_{l,k} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad p_{l,k}^2 := \begin{pmatrix} 0 \\ Y_{l,k} \end{pmatrix}, \quad (l \leq n, |k| \leq l)$$

gilt. Hieraus ergibt sich das Gleichungssystem ($l' \leq n$, $|k'| \leq l'$):

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^n \sum_{|k| \leq l} \left\{ \delta_{ll'} \delta_{kk'} + (\tilde{\mathcal{M}}_{11}^{n'} Y_{l,k}, Y_{l',k'})_m \right\} \alpha_{lk}^1 + (\tilde{\mathcal{M}}_{12}^{n'} Y_{l,k}, Y_{l',k'})_m \alpha_{lk}^2 &= 2(\tilde{C}_1, Y_{l',k'})_m \\ \sum_{l=0}^n \sum_{|k| \leq l} (\tilde{\mathcal{M}}_{21}^{n'} Y_{l,k}, Y_{l',k'})_m \alpha_{lk}^1 + \left\{ \delta_{ll'} \delta_{kk'} + (\tilde{\mathcal{M}}_{22}^{n'} Y_{l,k}, Y_{l',k'})_m \right\} \alpha_{lk}^2 &= 2(\tilde{C}_2, Y_{l',k'})_m \end{aligned}$$

Wir führen nun die folgenden Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned} \left(\tilde{\mathbf{M}}_{uv}^{n'} \right)_{l'k',lk} &:= (\tilde{\mathcal{M}}_{uv}^{n'} Y_{l,k}, Y_{l',k'})_m \\ \mathcal{A} &:= \begin{pmatrix} \mathcal{A}_1 \\ \mathcal{A}_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad (\mathcal{A}_\gamma)_{lk} := \alpha_{lk}^\gamma \\ \mathcal{C} &:= \begin{pmatrix} \mathcal{C}_1 \\ \mathcal{C}_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad (\mathcal{C}_\gamma)_{l'k'} := 2(\tilde{C}_\gamma, Y_{l',k'})_m \end{aligned}$$

und erhalten damit eine Matrix-Vektor-Form des Gleichungssystems:

$$\left[\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{M}}_{11}^{n'} & \tilde{\mathbf{M}}_{12}^{n'} \\ \tilde{\mathbf{M}}_{21}^{n'} & \tilde{\mathbf{M}}_{22}^{n'} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \mathcal{A}_1 \\ \mathcal{A}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{C}_1 \\ \mathcal{C}_2 \end{pmatrix}. \quad (3.38)$$

Unser Hauptproblem besteht nun darin, die Matrixelemente $(\tilde{\mathbf{M}}_{uv}^{n'})_{l'k',lk}$ möglichst effektiv zu berechnen. Für jeden Eintrag der $(n+1)^2 \times (n+1)^2$ Teilmatrizen $\tilde{\mathbf{M}}_{uv}^{n'}$ muss ein Doppelintegral mit Hilfe einer Quadraturformel approximiert werden. Hierzu werden $\mathcal{O}(n^2)$ Funktionsauswertungen verwendet. Dies ergibt also einen Berechnungsaufwand von $\mathcal{O}(n^8)$. Wienert hat 1990 in seiner Dissertation [64] gezeigt, dass dieser Aufwand auf $\mathcal{O}(n^5)$ reduziert werden kann. Wir nutzen Wienerts Idee und gehen analog zu Ganesh und Graham [15] vor:

Wir bezeichnen mit $\tilde{\mu}_{r'}$ und $\tilde{\nu}_{s'}$ die Quadraturgewichte der Gauß-Rechteck-Regel für n' und kürzen die zugehörigen Quadraturpunkte $p(\tilde{\theta}_{s'}, \tilde{\phi}_{r'})$ durch $p_{r's'}$ ab. Anschließend wenden wir auf (3.33) das Additionstheorem für Kugelflächenfunktionen (Satz 2.7) an und benutzen

$$\beta_{s'}^{n'} := \sum_{l=0}^{n'} P_l(\cos(\tilde{\theta}_{s'})).$$

Dann ergibt sich für die einzelnen Matrixkomponenten schließlich:

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathbf{M}}_{uv}^{n'})_{l'k',lk} &= \sum_{r=0}^{2n+1} \sum_{s=1}^{n+1} \mu_r \nu_s \sum_{r'=0}^{2n'+1} \sum_{s'=1}^{n'+1} \tilde{\mu}_{r'} \tilde{\nu}_{s'} \left\{ \frac{1}{2\pi} \beta_{s'}^{n'} \mathcal{T}_{p_{rs}} \tilde{M}_{uv}^{(1)}(\hat{n}, p_{r's'}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{i}{2\pi} \mathcal{T}_{p_{rs}} \tilde{M}_{uv}^{(2)}(\hat{n}, p_{r's'}) \right\} \mathcal{T}_{p_{rs}} Y_{l,k}(p_{r's'}) \overline{Y_{l',k'}(p_{rs})}. \end{aligned}$$

Nun gehen wir auf die Implementierung der Transformation \mathcal{T}_ξ ein. Für eine orthogonale Matrix Ω schreiben wir

$$\mathcal{T}(\Omega)\psi(\eta) := \psi(\Omega^{-1}\eta).$$

Mit den Matrizen

$$P(\phi_r) := \begin{pmatrix} \cos \phi_r & -\sin \phi_r & 0 \\ \sin \phi_r & \cos \phi_r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad Q(\theta_s) := \begin{pmatrix} \cos \theta_s & 0 & \sin \theta_s \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_s & 0 & \cos \theta_s \end{pmatrix}$$

erhalten wir dann

$$\mathcal{T}_{p_{rs}} = \mathcal{T}(P(\phi_r)) \mathcal{T}(Q(-\theta_s)) \mathcal{T}(P(-\phi_r)). \quad (3.39)$$

Betrachten wir nun die transformierten Kugelflächenfunktionen $\mathcal{T}_{p_{rs}} Y_{l,k}(p_{r's'})$. Da der Raum der sphärischen Polynome invariant unter Rotationen ist (siehe Satz 2.34), können wir $\mathcal{T}_{p_{rs}} Y_{l,k}(p_{r's'})$ als Linearkombination von Kugelflächenfunktionen vom Grad l darstellen. Bei Ganesh und Graham ([15], (3.30) und (3.31)) finden wir:

$$\mathcal{T}_{p_{rs}} Y_{l,k} = \sum_{|\tilde{k}| \leq l} F_{sl\tilde{k}k} e^{i(k-\tilde{k})\phi_r} Y_{l,\tilde{k}} \quad (3.40)$$

$$F_{sl\tilde{k}k} = e^{i(k-\tilde{k})\pi/2} \sum_{|m| \leq l} d_{\tilde{k}m}^{(l)}(\pi/2) d_{km}^{(l)}(\pi/2) e^{im\theta_s}. \quad (3.41)$$

Die Koeffizienten $d_{\tilde{k}\tilde{k}}^{(l)}(\pi/2)$ können wir nach Ganesh und Graham ([15], (3.32)) wie folgt berechnen:

$$d_{\tilde{k}\tilde{k}}^{(l)}(\pi/2) = 2^{\tilde{k}} \left[\frac{(l + \tilde{k})!(l - \tilde{k})!}{(l + k)!(l - k)!} \right]^{1/2} P_{l+\tilde{k}}^{(k-\tilde{k}, -k-\tilde{k})}(0).$$

Hierbei bezeichnet $P_q^{(a,b)}$ ein normiertes Jacobi-Polynom (siehe z.B. Szegő [57], Seite 68). Zur Bestimmung der Werte für $k - \tilde{k} < 0$ oder $-k - \tilde{k} < 0$, können wir die folgenden Symmetrieeigenschaften ausnutzen:

$$d_{\tilde{k}\tilde{k}}^{(l)}(\alpha) = (-1)^{\tilde{k}-k} d_{\tilde{k}\tilde{k}}^{(l)}(\alpha) = d_{-k-\tilde{k}}^{(l)}(\alpha) = d_{\tilde{k}\tilde{k}}^{(l)}(-\alpha).$$

Verwenden wir nun $p_{rs} = p(\theta_s, \phi_r)$, $p_{r's'}^{r's'} = \mathbf{T}_{p_{rs}}^{-1} p(\tilde{\theta}_{s'}, \tilde{\phi}_{r'})$ und die Darstellung (2.7) der Kugelflächenfunktionen, so erhalten wir schließlich:

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathbf{M}}_{uv}^{n'})_{l'k',lk} &= \sum_{r,s} \mu_r \nu_s \sum_{r',s'} \tilde{\mu}_{r'} \tilde{\nu}_{s'} \left\{ \frac{1}{2\pi} \beta_{s'}^{n'} \tilde{M}_{uv}^{(1)}(p_{rs}, p_{r's'}^{r's'}) + \frac{i}{2\pi} M_{uv}^{(2)}(p_{rs}, p_{r's'}^{r's'}) \right\} \\ &\quad \sum_{|\tilde{k}|\leq l} e^{i(k-\tilde{k})\phi_r} F_{sl\tilde{k}\tilde{k}} c_l^{\tilde{k}} P_l^{|\tilde{k}|}(\cos \tilde{\theta}_{s'}) e^{i\tilde{k}\tilde{\phi}_{r'}} c_{l'}^{k'} P_{l'}^{|k'|}(\cos \theta_s) e^{-ik'\phi_r}. \end{aligned}$$

Die einzelnen Matrixelemente werden nun durch sukzessive Berechnung der folgenden Größen bestimmt:

$$\begin{aligned} (E_{uv}^{(\gamma)})_{sr s' \tilde{k}} &:= \sum_{r'=0}^{2n'+1} \tilde{\mu}_{r'} \tilde{M}_{uv}^{(\gamma)}(p_{rs}, p_{r's'}^{r's'}) e^{i\tilde{k}\tilde{\phi}_{r'}}, \quad \gamma = 1, 2 \\ (D_{uv})_{sr l \tilde{k}} &:= \sum_{s'=1}^{n'+1} \tilde{\nu}_{s'} \left\{ \beta_{s'}^{n'} \frac{1}{2\pi} (E_{uv}^{(1)})_{sr s' \tilde{k}} + \frac{i}{2\pi} (E_{uv}^{(2)})_{sr s' \tilde{k}} \right\} c_l^{\tilde{k}} P_l^{|\tilde{k}|}(\cos \tilde{\theta}_{s'}) \\ (C_{uv})_{sr l k} &:= \sum_{|\tilde{k}|\leq l} (D_{uv})_{sr l \tilde{k}} e^{i(k-\tilde{k})\phi_r} F_{sl\tilde{k}\tilde{k}} \\ (B_{uv})_{sk'lk} &:= \sum_{r=0}^{2n+1} (C_{uv})_{sr l k} \mu_r e^{-ik'\phi_r} \\ (\tilde{\mathbf{M}}_{uv}^{n'})_{l'k',lk} &:= \sum_{s=1}^{n+1} (B_{uv})_{sk'lk} \nu_s c_{l'}^{k'} P_{l'}^{|k'|}(\cos \theta_s). \end{aligned}$$

Wie wir sehen können, muss für jede dieser Größen eine Summe mit maximal $2n'+2$ Elementen berechnet werden. Wir erhalten also für jede der $(n+1)^2 \times (n+1)^2$ Teilmatrizen $\tilde{\mathbf{M}}_{uv}^{n'}$ nur noch einen Berechnungsaufwand von $\mathcal{O}(n^5)$.

3.5 Numerische Ergebnisse

Um unser Verfahren numerisch zu testen, betrachten wir das elektromagnetische Feld, das von einem magnetischen Dipol am Punkt $x_p \in D$ erzeugt wird:

$$E_m(x) := \operatorname{rot}_x e \Phi(x, x_p).$$

Für den konstanten Vektor e wählen wir den ersten Einheitsvektor e_1 und als Aufpunkt:

$$x_p := (0; 0.1; -0.1)^T.$$

Damit ergibt sich dann das folgende äußere Maxwell-Problem:

Gesucht sind ausstrahlende Lösungen $E, H \in c^1(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cap c(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ der reduzierten Maxwell-Gleichungen

$$\operatorname{rot} E - i\kappa H = 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{rot} H + i\kappa E = 0$$

in $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$. Weiterhin erfüllen E und H die folgende Randbedingung:

$$\nu(x) \times E(x) = \nu(x) \times E_m(x) \quad x \in \partial D.$$

Eine Näherungslösung finden wir, indem wir die Integralgleichung

$$a(x) + 2 \int_{\partial D} \nu(x) \times \operatorname{rot}_x \{ \Phi(x, y) a(y) \} ds(y) = 2\nu(x) \times E_m(x), \quad x \in \partial D$$

numerisch mit unserer skalaren Methode lösen und die gefundene Dichte a_n im Ansatz

$$E(x) := \operatorname{rot}_x \int_{\partial D} a_n(y) \Phi(x, y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D},$$

verwenden. Diese Lösung vergleichen wir mit der wahren Lösung E_m . Hierbei wurden die folgenden Streuobjekte betrachtet:

$$r(\theta, \phi) \cdot (A \sin \theta \cos \phi, B \sin \theta \sin \phi, C \cos \phi)^T, \quad \theta \in [0, \pi], \phi \in [0, 2\pi)$$

mit

S1: Kugel; $r = 2$ und $A = B = C = 1$

S2: Ellipsoid; $r = 1$, $A = 1$ und $B = C = 3$

S3: Ellipsoid; $r = 1$, $A = 1$, $B = 2$ und $C = 3$.

S4: Erdnuss; $r(\theta) = \frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{2}}} \cdot \left\{ \cos(2\theta) + \sqrt{2 - \sin^2(2\theta)} \right\}^{1/2}$, $A = C = 1$ und $B = 2$

Den Fehler zwischen Näherungslösung und wahrer Lösung haben wir für die drei Punkte

$$x_1 = (2, 3, 5)^T, \quad x_2 = (-3, 5, -1)^T \quad \text{und} \quad x_3 = (10, 15, -30)^T,$$

jeweils für $\kappa = 1$, $\kappa = 1.5$ und $\kappa = 3$ bestimmt. Einen Teil der Ergebnisse fassen wir in den Tabellen am Ende des Abschnittes zusammen.

Um die Konvergenzgeschwindigkeit in diesen Beispielen zu verdeutlichen, haben wir zuerst die Wurzel aus dem Fehler gezogen und anschließend den Kehrwert mit umgekehrter, vertikaler Achse graphisch in Abbildung 3.1 dargestellt. In dieser Graphik kennzeichnen die unterschiedlichen Farben die verwendeten Werte für die Wellenzahl κ . **Blau** steht für $\kappa = 1$, **grün** für $\kappa = 1.5$ und **rot** schließlich für $\kappa = 3$. Die Auswertungspunkte x_1 , x_2 und x_3 können durch die Linienart unterschieden werden. Die Sterne (*) stehen für den Punkt x_1 , die Kreise (o) für x_2 und die Kreuze (+) für x_3 .

Da für die Wurzel ein lineares Fehlerverhalten deutlich zu erkennen ist, stellen wir fest, dass unser Verfahren in diesen Beispielen nur quadratisch konvergiert. Wir hatten jedoch superalgebraische Konvergenz, wie sonst bei Spektralverfahren üblich, erwartet. Auf die Gründe für diese geringere Konvergenzgeschwindigkeit gehen wir nun im folgenden Abschnitt ein.

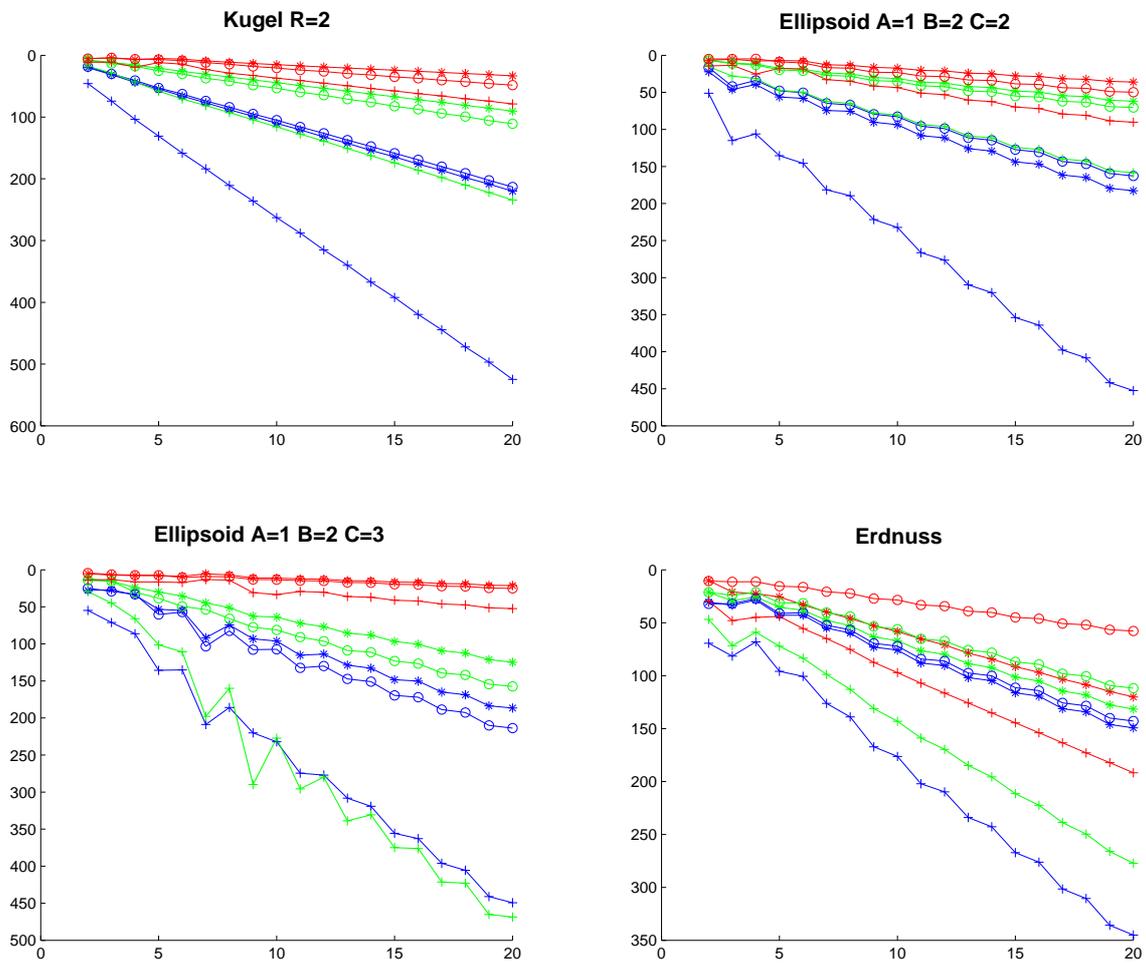


Abbildung 3.1: Quadratische Konvergenzgeschwindigkeit

Streuobjekt S_1						
	$\kappa = 1$			$\kappa = 3$		
n	x_1	x_2	x_3	x_1	x_2	x_3
3	1.0217e-03	1.0991e-03	1.8197e-04	5.2980e-02	5.7657e-02	7.9218e-03
5	3.3636e-04	3.5891e-04	5.8300e-05	3.8965e-02	2.1395e-02	7.2900e-03
7	1.6969e-04	1.8318e-04	2.9599e-05	1.2373e-02	7.1004e-03	1.9121e-03
9	1.0242e-04	1.1090e-04	1.7964e-05	5.7486e-03	3.0417e-03	9.3972e-04
11	6.8636e-05	7.4243e-05	1.2057e-05	3.4828e-03	1.7454e-03	5.9988e-04
13	4.9187e-05	5.3065e-05	8.6476e-06	2.3593e-03	1.1542e-03	4.1268e-04
15	3.6959e-05	3.9716e-05	6.5011e-06	1.7114e-03	8.2231e-04	3.0182e-04
17	2.8767e-05	3.0748e-05	5.0620e-06	1.3002e-03	6.1529e-04	2.3051e-04
19	2.3009e-05	2.4423e-05	4.0498e-06	1.0220e-03	4.7662e-04	1.8180e-04

Streuobjekt S_2						
	$\kappa = 1.5$			$\kappa = 3$		
n	x_1	x_2	x_3	x_1	x_2	x_3
3	4.1559e-03	4.1805e-03	4.9554e-04	1.9238e-02	2.4321e-02	5.7389e-03
5	1.1155e-03	6.7206e-04	9.7156e-05	1.6308e-02	1.8733e-02	3.6871e-03
7	5.0134e-04	3.4891e-04	2.5555e-05	3.2829e-02	1.1915e-02	5.7772e-03
9	2.5463e-04	1.6680e-04	1.1912e-05	8.3142e-03	5.7937e-03	1.0462e-03
11	1.9217e-04	1.2126e-04	1.1436e-05	6.7247e-03	4.6487e-03	1.1637e-03
13	1.3646e-04	8.4310e-05	8.7079e-06	4.6779e-03	3.4176e-03	7.6987e-04
15	1.0687e-04	6.5939e-05	7.1150e-06	3.6021e-03	2.5982e-03	5.9341e-04
17	8.3730e-05	5.1525e-05	5.6336e-06	2.8445e-03	2.0500e-03	4.6901e-04
19	6.8097e-05	4.1955e-05	4.6212e-06	2.2989e-03	1.6553e-03	3.7956e-04

Streuobjekt S_3						
	$\kappa = 1.5$			$\kappa = 3$		
n	x_1	x_2	x_3	x_1	x_2	x_3
3	9.0347e-03	7.9256e-03	1.2684e-03	3.5062e-02	4.0314e-02	5.5638e-03
5	3.2605e-03	2.5663e-03	4.4767e-04	2.0658e-02	1.3215e-02	3.2816e-03
7	1.7665e-03	1.3752e-03	2.5893e-04	6.1711e-03	3.6061e-03	9.3555e-04
9	1.1077e-03	8.5828e-04	1.6511e-04	3.7818e-03	1.9278e-03	5.8413e-04
11	7.6678e-04	5.9232e-04	1.1514e-04	2.4453e-03	1.2801e-03	3.8436e-04
13	5.6127e-04	4.3256e-04	8.4629e-05	1.7383e-03	9.0675e-04	2.7367e-04
15	4.2868e-04	3.2968e-04	6.4793e-05	1.2998e-03	6.7605e-04	2.0515e-04
17	3.3772e-04	2.5917e-04	5.1117e-05	1.0101e-03	5.2396e-04	1.5974e-04
19	2.7262e-04	2.0873e-04	4.1296e-05	8.0792e-04	4.1791e-03	1.2797e-04

Streuobjekt S_4						
	$\kappa = 1$			$\kappa = 1.5$		
n	x_1	x_2	x_3	x_1	x_2	x_3
3	8.9065e-04	9.8237e-04	1.5036e-04	1.1724e-03	1.7396e-03	1.9475e-04
5	5.4039e-04	5.9085e-04	1.0865e-04	7.9666e-04	1.0311e-03	1.9214e-04
7	3.2933e-04	3.6384e-04	6.2808e-05	4.3966e-04	6.1156e-04	1.0235e-04
9	1.8737e-04	2.0687e-04	3.5763e-05	2.4829e-04	3.4767e-04	5.8178e-05
11	1.2861e-04	1.4100e-04	2.4470e-05	1.7024e-04	2.3505e-04	3.9590e-05
13	9.6360e-05	1.0512e-04	1.8265e-05	1.2694e-04	1.7370e-04	2.9276e-05
15	7.3968e-05	8.0529e-05	1.4004e-05	9.7173e-05	1.3250e-04	2.2361e-05
17	5.8119e-05	6.3245e-05	1.1001e-05	7.6209e-05	1.0390e-04	1.7543e-05
19	4.6834e-05	5.0956e-05	8.8638e-06	6.1307e-05	8.3621e-05	1.4118e-05

3.6 Zur Konvergenzanalyse

Wir haben an den numerischen Beispielen aus dem letzten Abschnitt gesehen, dass unser Verfahren nicht, wie erwartet, superalgebraisch konvergiert. Stattdessen zeigte sich in den betrachteten Beispielen nur quadratische Konvergenz. In diesem Abschnitt wollen wir nun untersuchen, wieso unser Verfahren nicht die superalgebraische Konvergenzgeschwindigkeit besitzt wie das entsprechende skalare Verfahren von Graham und Sloan [21].

Das schlechtere Konvergenzresultat ist zuerst einmal verwunderlich, da wir zeigen können, dass die transformierten, skalaren Integralkerne $\mathcal{T}_\xi \tilde{M}_{uv}^{(1)}$ und $\mathcal{T}_\xi \tilde{M}_{uv}^{(2)}$ in (3.34) (siehe auch (3.26) und (3.27)) dieselbe Regularität aufweisen, wie die Kerne in Graham und Sloans Methode:

Definition 3.1 *Wir definieren:*

- (i) *Eine stetige, skalare Funktion auf \mathbb{R}^2 gehört zum Funktionenraum C_p , wenn sie in beiden Variablen 2π -periodisch ist.*
- (ii) *Eine Funktion aus C_p gehört zum Raum C_p^∞ , wenn sie unendlich oft differenzierbar ist und alle Ableitungen 2π -periodisch bzgl. beider Variablen sind.*
- (iii) *Eine Funktion $V : \partial B \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ nennen wir gleichmäßig C_p^∞ auf ∂B , wenn für alle $\xi \in \partial B$ die Funktion $(\theta, \phi) \mapsto V(\xi, \theta, \phi)$ eine C_p^∞ -Funktion ist und jede partielle Ableitung bzgl. (θ, ϕ) gleichmäßig beschränkt bzgl. $\xi \in \partial B$ ist.*

Lemma 3.2 *Die Kernfunktionen*

$$(\theta, \phi) \mapsto \mathcal{T}_\xi \tilde{M}_{uv}^{(\gamma)}(\hat{n}, p(\theta, \phi)), \quad u, v, \gamma = 1, 2$$

sind gleichmäßig C_p^∞ auf ∂B .

Beweis: Wir gehen analog zu Graham und Sloan [21], Lemma 4.6 vor und betrachten:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_\xi \tilde{M}_{uv}^{(1)}(\hat{n}, p(\theta, \phi)) &= \mathcal{T}_\xi R(\hat{n}, p(\theta, \phi)) \mathcal{T}_\xi M_{uv}^{(1)}(q(\hat{n}), q(p(\theta, \phi))) \mathcal{T}_\xi J(p(\theta, \phi)) \\ \mathcal{T}_\xi \tilde{M}_{uv}^{(2)}(\hat{n}, p(\theta, \phi)) &= \mathcal{T}_\xi M_{uv}^{(2)}(q(\hat{n}), q(p(\theta, \phi))) \mathcal{T}_\xi J(p(\theta, \phi)) \end{aligned}$$

Wir beginnen mit $\mathcal{T}_\xi J(p(\theta, \phi))$. Da die Parametrisierungen p und q C^∞ -Funktionen sind und p periodisch ist, ist auch

$$\mathcal{T}_\xi J(p(\theta, \phi)) \in C^\infty(A)$$

und periodisch. Die Funktion

$$(\theta, \phi) \mapsto \mathcal{T}_\xi R(\hat{n}, p(\theta, \phi))$$

ist nach Graham und Sloan [21], Lemma 4.6, gleichmäßig C_p^∞ . Daher müssen wir nur noch zeigen, dass auch

$$(\theta, \phi) \mapsto \mathcal{T}_\xi M_{uv}^{(\gamma)}(q(\hat{n}), q(p(\theta, \phi))), \quad u, v, \gamma = 1, 2$$

gleichmäßig C_p^∞ ist. Dazu betrachten wir (3.12) und (3.13) und stellen fest, dass wir nur noch die Anteile

$$\frac{(q(\mathbf{T}_\xi^{-1}\hat{n}) - q(\mathbf{T}_\xi^{-1}p(\theta, \phi))) \cdot \left(t_v(q(\mathbf{T}_\xi^{-1}p(\theta, \phi))) \times t_{\chi(u)}(q(\mathbf{T}_\xi^{-1}\hat{n})) \right)}{\|q(\mathbf{T}_\xi^{-1}\hat{n}) - q(\mathbf{T}_\xi^{-1}p(\theta, \phi))\|_2^2}$$

betrachten müssen, da die anderen Anteile wie S^s oder S^c beliebig glatt und durch die Verknüpfung mit $q \circ p$ periodisch sind.

Zur Abkürzung definieren wir die Funktion

$$Q(\xi, \theta, \phi) := q(\mathbf{T}_\xi^{-1}p(\theta, \phi)).$$

Diese Funktion ist nach [16] (Lemma 4.1) gleichmäßig C_p^∞ . Das gleiche gilt auch für die Verknüpfung mit den Tangentialvektoren, da wir eine glatte C^∞ -Parametrisierung voraussetzen. Wir betrachten also

$$\frac{(Q(\xi, 0, 0) - Q(\xi, \theta, \phi)) \cdot (t_v(Q(\xi, \theta, \phi)) \times t_{\chi(u)}(Q(\xi, 0, 0)))}{\|Q(\xi, 0, 0) - Q(\xi, \theta, \phi)\|_2^2} \quad (3.42)$$

und stellen fest, dass Zähler und Nenner gleichmäßig C_p^∞ sind und dass der Nenner genau dann verschwindet, wenn $\theta = 2\pi l$ mit $l \in \mathbb{Z}$ ist. Die Behauptung folgt also, wenn wir zeigen, dass für festes $\phi \in \mathbb{R}$ der Ausdruck (3.42) regulär ist, wenn θ gegen Null geht.

Dazu formen wir Zähler und Nenner um. Beginnen wir mit $v = 1$ und $\chi(u) = 1, 2$ und verwenden

$$Q_1 := \frac{\partial Q}{\partial \theta}$$

und $Q(\xi, 0, 0) = Q(\xi, 0, \phi)$ für $\phi \in \mathbb{R}$. Dann erhalten wir

$$Q(\xi, 0, \phi) - Q(\xi, \theta, \phi) = -\theta \int_0^1 Q_1(\xi, t\theta, \phi) dt$$

und somit für den Nenner in (3.42)

$$\|Q(\xi, 0, \phi) - Q(\xi, \theta, \phi)\|^2 = \theta^2 \left(\int_0^1 Q_1(\xi, t\theta, \phi) dt \right) \cdot \left(\int_0^1 Q_1(\xi, t\theta, \phi) dt \right) \quad (3.43)$$

Graham und Sloan zeigen in [21], Lemma 4.6, dass der Ausdruck

$$\left(\int_0^1 Q_1(\xi, t\theta, \phi) dt \right) \cdot \left(\int_0^1 Q_1(\xi, t\theta, \phi) dt \right)$$

in einer Umgebung von $\theta = 0$ nicht verschwindet. Betrachten wir nun den Zähler

$$(Q(\xi, 0, \phi) - Q(\xi, \theta, \phi)) \cdot (t_1(Q(\xi, \theta, \phi)) \times t_{\chi(u)}(Q(\xi, 0, 0)))$$

und verwenden

$$Q_2 := \frac{\partial^2 Q}{\partial \theta^2},$$

so erhalten wir für die erste Klammer:

$$Q(\xi, 0, \phi) - Q(\xi, \theta, \phi) = \theta^2 \int_0^1 \int_t^1 Q_2(\xi, s\theta, \phi) ds dt - \theta Q_1(\xi, \theta, \phi).$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} & Q_1(\xi, \theta, \phi) \cdot (t_1(Q(\xi, \theta, \phi)) \times t_{\chi(u)}(Q(\xi, 0, 0))) \\ &= t_{\chi(u)}(Q(\xi, 0, 0)) \cdot (Q_1(\xi, \theta, \phi) \times t_1(Q(\xi, \theta, \phi))). \end{aligned}$$

Nach Definition von Q_1 und dem Tangentialvektor t_1 sind die beiden Vektoren linear abhängig, also verschwindet das Kreuzprodukt, daher können wir θ^2 in Zähler und Nenner kürzen. (3.42) ist also genügend regulär in einer Umgebung von $\theta = 0$.

Betrachten wir als Nächstes (3.42) für $j = 2$ und $\chi(u) = 1$. Den Nenner ersetzen wir wieder durch (3.43). Für den Zähler verwenden wir

$$Q(\xi, 0, \phi) - Q(\xi, \theta, \phi) = -\theta^2 \int_0^1 \int_0^t Q_2(\xi, s\theta, \phi) ds dt - \theta Q_1(\xi, 0, \phi).$$

Wieder verschwindet

$$\begin{aligned} & Q_1(\xi, 0, \phi) \cdot (t_2(Q(\xi, \theta, \phi)) \times t_1(Q(\xi, 0, \phi))) \\ &= t_2(Q(\xi, \theta, \phi)) \cdot (t_1(Q(\xi, 0, \phi)) \times Q_1(\xi, 0, \phi)), \end{aligned}$$

da die Vektoren t_1 und Q_1 nach Definition linear abhängig sind.

Es bleibt der Fall $v, \chi(u) = 2$. Den Nenner ersetzen wir durch (3.43) und für den Zähler verwenden wir

$$Q(\xi, 0, \phi) - Q(\xi, \theta, \phi) = -\theta^2 \int_0^1 \int_0^t Q_2(\xi, s\theta, \phi) ds dt - \theta Q_1(\xi, 0, \phi).$$

Da jetzt nur der Tangentialvektor t_2 auftritt, verschwindet das Spatprodukt

$$Q_1(\xi, 0, \phi) \cdot (t_2(Q(\xi, \theta, \phi)) \times t_2(Q(\xi, 0, \phi)))$$

nicht. Wir können allerdings zeigen, dass dieser Ausdruck, dividiert durch den Nenner (3.43), für $\theta \rightarrow 0$ genügend glatt ist. Wir formen das Spatprodukt wie folgt um:

$$\begin{aligned} Q_1(\xi, 0, \phi) \cdot (t_2(Q(\xi, \theta, \phi)) \times t_2(Q(\xi, 0, \phi))) \\ = t_2(Q(\xi, \theta, \phi)) \cdot (t_2(Q(\xi, 0, \phi)) \times Q_1(\xi, 0, \phi)). \end{aligned}$$

Das Kreuzprodukt $t_2(Q(\xi, 0, \phi)) \times Q_1(\xi, 0, \phi)$ entspricht bis auf Normierung dem negativen Normalenvektor. Wir erhalten also:

$$Q_1(\xi, 0, \phi) \cdot (t_2(Q(\xi, \theta, \phi)) \times t_2(Q(\xi, 0, \phi))) = -\frac{t_2(Q(\xi, \theta, \phi)) \cdot \nu(Q(\xi, 0, \phi))}{\|Q_1(\xi, 0, \phi)\|_2}.$$

Wir ergänzen $-t_2(Q(\xi, 0, \phi))$ und verwenden

$$t_2(Q(\xi, \theta, \phi)) - t_2(Q(\xi, 0, \phi)) = \theta \int_0^1 \frac{\partial t_2}{\partial \theta}(\xi, t\theta, \phi) dt.$$

Damit erhalten wir im Zähler einen weiteren Faktor θ , den wir dann gegen θ^2 im Nenner (3.43) kürzen können. Im so erhaltenen Ausdruck

$$\frac{-\int_0^1 \frac{\partial t_2}{\partial \theta}(\xi, t\theta, \phi) dt \cdot \nu(Q(\xi, 0, \phi))}{\|Q_1(\xi, 0, \phi)\|_2 \left(\int_0^1 Q_1(\xi, t\theta, \phi) dt \right) \cdot \left(\int_0^1 Q_1(\xi, t\theta, \phi) dt \right)}$$

ist der Nenner ungleich Null und genügend glatt für $\theta \rightarrow 0$. □

Wie wir gesehen haben, liegt die schlechtere Konvergenzordnung also nicht an den verwendeten Integralkernen. Es stellt sich heraus, dass der Grund vielmehr in der Darstellung

$$a(x) = \sum_{u=1}^2 A_u(x) t_u(x) \tag{3.44}$$

des tangentialen Vektorfeldes a zu suchen ist:

Lemma 3.3 *Es sei $D \subset \mathbb{R}^3$ mit:*

- $D \subset \mathbb{R}^3$ ist zusammenhängend.
- Das Komplement $\mathbb{R}^3 \setminus D$ ist zusammenhängend.
- Die Oberfläche ∂D ist global, glatt über die Einheitssphäre ∂B parametrisierbar, d.h. es existiert eine C^∞ -Abbildung $q : \partial B \rightarrow \partial D$.

Dann besitzt jedes stetige, tangentiale Vektorfeld t auf ∂D mindestens eine Nullstelle.

Beweis: Nehmen wir an, dass doch ein stetiges, tangentiales Vektorfeld t auf ∂D existiert, welches nullstellenfrei ist. Dann können wir mit Hilfe der Parametrisierung q und der zugehörigen Funktionalmatrix D_q ein stetiges Vektorfeld auf der Sphäre ∂B wie folgt definieren:

$$\tilde{t}(\xi) := D_{q(\xi)}^{-1} t(q(\xi)).$$

Hierbei nehmen wir an, dass $x \in \partial D$ durch $\xi \in \partial B$ parametrisiert wird: $x = q(\xi)$. Die Inverse der Funktionalmatrix existiert, da q eine globale Parametrisierung ist, d.h. die Jacobi-Determinante verschwindet nicht. Aus der Abbildungseigenschaft der Inversen können wir folgern, dass dieses neue Vektorfeld nun tangential bzgl. der Sphäre ist (siehe auch Abschnitt 4.1, Lemma 4.2). Weiter gilt:

$$t(x) \neq 0 \quad \forall x \in \partial D \quad \implies \quad \tilde{t}(\xi) \neq 0 \quad \forall \xi \in \partial B.$$

Dies ist aber ein Widerspruch zum Satz vom Igel (engl. "Hairy ball Theorem"), der besagt, dass es auf der Sphäre kein stetiges, tangentiales Vektorfeld geben kann, welches keine Nullstelle besitzt. \square

Bemerkung 3.4 *Im Beweis haben wir den Satz vom Igel verwendet. Dieser wurde erstmals 1911 von Brouwer [3] bewiesen.*

Nach Lemma 3.3 verschwinden also unsere Basisvektoren t_u ($u = 1, 2$) in der Darstellung (3.44) an mindestens einem Punkt $x \in \partial D$, egal wie wir die Vektoren t_u wählen. Bei unserer Wahl (3.5) und (3.6) liegen diese Nullstellen am Nord- und Südpol, falls wir nicht normieren. Durch die Normierung entstehen schließlich Singularitäten.

Bei der praktischen Implementierung treten diese Singularitäten nicht auf, da wir Kugelkoordinaten verwenden. Hierdurch können wir die Tangentialbasis glatt für $\theta \rightarrow 0$ und jedes $\phi \in [0, 2\pi]$ auf $A := [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ fortsetzen. Dies ist auch der Grund, warum die Integralkerne nach Lemma 3.2 trotzdem dieselbe Regularität besitzen wie im akustischen Fall.

Das Problem besteht nun darin, dass das Vektorfeld a stetig auf ∂D definiert ist und nicht auf $A = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$. Nehmen wir an, $\hat{x} \in \partial D$ werde durch den Nordpol $\hat{n} \in \partial B$ parametrisiert, d.h. es gilt $\hat{x} = q(\hat{n})$. Dann ist der Wert $a(\hat{x}) = a \circ q(\hat{n})$ eindeutig festgelegt. Verwenden wir nun Kugelkoordinaten und betrachten den Grenzwert $\theta \rightarrow 0$ für unterschiedliche $\phi \in [0, 2\pi]$, so erhalten wir auf Grund der nicht eindeutigen Tangentialbasis in \hat{x} unterschiedliche Werte für $a(\hat{x}) = a \circ q(p(\theta, \phi))$, falls $a(\hat{x}) \neq 0$ ist. Deshalb sind die Komponentenfunktionen A_u in diesem Punkt \hat{x} nicht stetig.

Ähnliche Probleme hatte auch Wienert (siehe [64], Seite 86 und (8.27)) bei der Analyse seines Nyström-Verfahrens. Unser Ansatz funktioniert ebenfalls nur bei Vektorfeldern, die stetig auf der punktierten Sphäre sind, d.h. ohne den Nord- und Südpol. Jedoch sind diese Vektorfelder nicht unbedingt auch stetig auf der gesamten Sphäre.

Betrachten wir noch einmal Abbildung 3.1, so fallen neben der quadratischen Konvergenz auch die "Zacken" in den Graphen auf: bei geraden n liegt eine schlechtere Konvergenzgeschwindigkeit vor als bei ungeraden n . Auch dieses Phänomen hat mit dem oben beschriebenen Problem am Nordpol zu tun:

Der Nordpol ist zwar nie Quadraturpunkt wenn wir die Gauß-Rechteck-Regel verwenden, d.h. es gilt immer $p_{rs} \neq \hat{n}$, jedoch wenden wir bei $p_{rs}^{r's'}$ die Transformationsmatrix $\mathbf{T}_{p_{rs}}^{-1}$ an:

$$p_{rs}^{r's'} = \mathbf{T}_{p_{rs}}^{-1} p(\tilde{\theta}_{s'}, \tilde{\phi}_{r'}).$$

Hierdurch kann es durchaus vorkommen, dass $p_{rs}^{r's'} = \hat{n}$ ist. Berechnen wir die Transformation, so stellen wir fest, dass dies genau dann der Fall ist, wenn $\phi_r = 0$ oder $\phi_r = \pi$ ist und gleichzeitig $\theta_s = \pi/2$ gilt. Die letzte Bedingung ist aber nur erfüllt, wenn n gerade ist, da in diesem Fall eine ungerade Anzahl an Gauß-Stützstellen θ_s vorliegt und somit $\theta_s = \pi/2$ ein Quadraturpunkt ist.

Wir stellen also fest, dass für gerade n die Kerne und Dichten auch am Nordpol ausgewertet werden müssen. In diesem Fall macht sich das oben beschriebene Problem der nicht eindeutigen Tangentialbasis am Nordpol besonders stark bemerkbar, wodurch die schlechtere Konvergenz für gerade n erklärt wird.

3.7 Modifikation der Methode

Im letzten Abschnitt dieses Kapitels wollen wir uns überlegen, ob wir unsere skalare Methode so modifizieren können, dass sie evtl. doch superalgebraisch konvergiert. Hierbei ist natürlich darauf zu achten, dass die Vorteile erhalten bleiben, insbesondere soll das resultierende Gleichungssystem am Ende wieder kleiner als das System bei Ganesh und Hawkins [17] sein. Wir betrachten in diesem Abschnitt nur die Ku-

gel als Streuobjekt. Die vorgestellten Modifikationen können jedoch leicht auch für andere Streuobjekte, die über die Kugel parametrisierbar sind, verallgemeinert werden.

Wir hatten eine schlechtere Konvergenzgeschwindigkeit erhalten, da wir kein stetiges Tangentialfeld ohne Nullstellen auf der Sphäre definieren konnten. Die Grundidee der Modifikation ist nun, die Kugel in Teilgebiete zu zerlegen, auf denen problemlos eine nullstellenfreie Tangentialbasis angegeben werden kann. Da unsere Dichten stetig auf der gesamten Sphäre sind, dürfen diese Teilgebiete nicht disjunkt sein, sondern müssen überlappen. Außerdem muß sichergestellt werden, dass der Übergang zwischen diesen Bereichen glatt ist.

In den folgenden Abschnitten wollen wir nun diskutieren, wie wir das ursprüngliche skalare Verfahren modifizieren müssen. Wir befassen uns zuerst mit einer günstigen Zerlegung der Kugel in Teilgebiete, auf denen wir dann problemlos unsere stetige Dichte in ihre Tangentialanteile zerlegen können. Anschließend geben wir das modifizierte Verfahren an und bewerten es schließlich noch im letzten Abschnitt.

3.7.1 Zerlegung der Sphäre

Wie wir bereits wissen, ist es nach dem Satz vom Igel nicht möglich, ein nullstellenfreies, tangenciales Vektorfeld auf der Sphäre zu definieren. Betrachten wir speziell unsere Tangentialbasis aus (3.5) und (3.6), so stellen wir fest, dass die Nullstellen am Nord- und Südpol der Kugel auftreten. Dies liegt daran, dass hier die übliche Parametrisierung

$$p(\theta, \phi) = (\sin(\theta) \cos(\phi), \sin(\theta) \sin(\phi), \cos(\theta))^T \quad (3.45)$$

bzgl. ϕ nicht eindeutig ist. Wir müssen also unsere Teilgebiete auf der Sphäre so wählen, dass sie einerseits diese singulären Punkte nicht enthalten, aber andererseits trotzdem die gesamte Kugeloberfläche abgedeckt wird. Wir versuchen hierbei so wenig Teilgebiete wie möglich zu verwenden, da durch zu viele Unterteilungen das Verfahren unnötig kompliziert wird. Im Folgenden geben wir zwei Möglichkeiten an, bei denen wir jeweils mit zwei Teilgebieten auskommen.

Konstruktion durch zwei Parametrisierungen

In der Literatur finden wir neben der üblichen Parametrisierung (3.45) der Sphäre noch eine zweite Parametrisierung:

$$\tilde{p}(\theta, \phi) := (\cos(\theta), \sin(\theta) \cos(\phi), \sin(\theta) \sin(\phi))^T, (\theta, \phi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi] \quad (3.46)$$

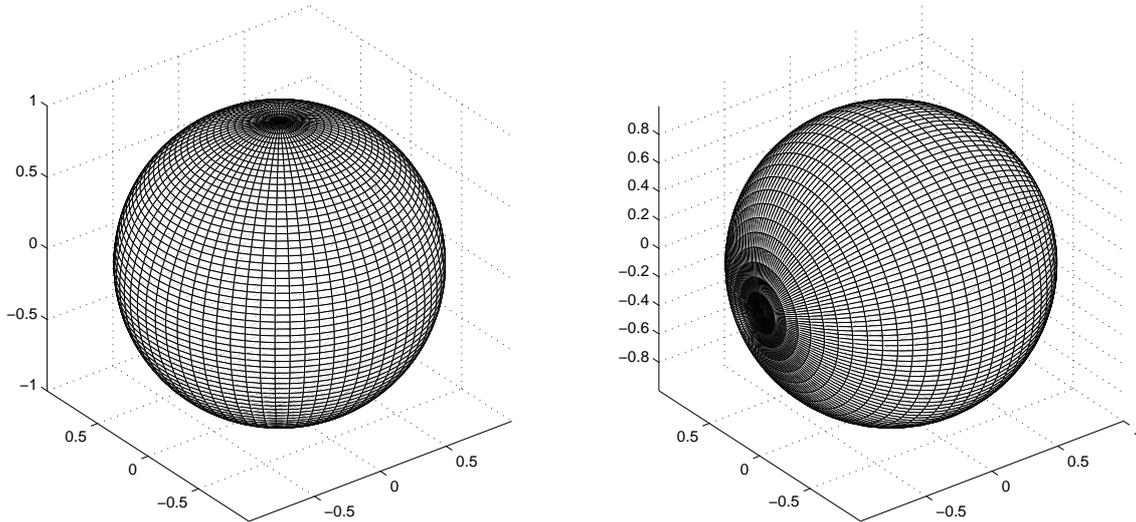


Abbildung 3.2: Sphäre parametrisiert durch p und \tilde{p}

Betrachten wir Abbildung 3.2, so sehen wir, dass bei der zweiten Parametrisierung \tilde{p} die singulären Punkte bei $(\pm 1, 0, 0)^T$ liegen. Diese Tatsache können wir nun ausnutzen, um zwei Teilgebiete zu definieren, in denen keine singulären Punkte liegen, bei denen aber die Vereinigung die gesamte Sphäre ergibt:

Wir starten mit der ersten Parametrisierung p und geben uns einen (nicht zu großen) Winkel $\theta_0 \in (0, \pi/2)$ vor. Zum ersten Teilgebiet gehören dann alle $p(\theta, \phi)$, für die $\theta \in [\theta_0, \pi - \theta_0]$ ist. Dies ergibt die Kugel ohne die sphärischen Kappen, welche durch θ_0 am Nord- bzw. $\pi - \theta_0$ am Südpol definiert werden.

Als Nächstes betrachten wir die zweite Parametrisierung \tilde{p} und gehen analog vor: Wir definieren das zweite Teilgebiet so, dass alle $\tilde{p}(\theta, \phi)$ mit $\theta \in [\theta_0, \pi - \theta_0]$ im Gebiet liegen. Wir schneiden also wieder sphärische Kappen ab, dieses Mal jedoch bzgl. der Punkte $(\pm 1, 0, 0)^T$.

Der Parameter θ_0 muss nun so gewählt werden, dass die Vereinigung die gesamte Sphäre ergibt (evtl. sollten auch unterschiedliche θ_0 -Werte verwendet werden). Die singulären Punkte, also Nord- und Südpol bzw. $(\pm 1, 0, 0)^T$, gehören aber nicht zu den entsprechenden Teilgebieten. Diese Situation veranschaulichen wir in Abbildung 3.3. Auf den einzelnen Teilgebieten können wir nun wieder wie üblich durch Differentiation der entsprechenden Parametrisierung eine Tangentialbasis ohne Nullstellen definieren.

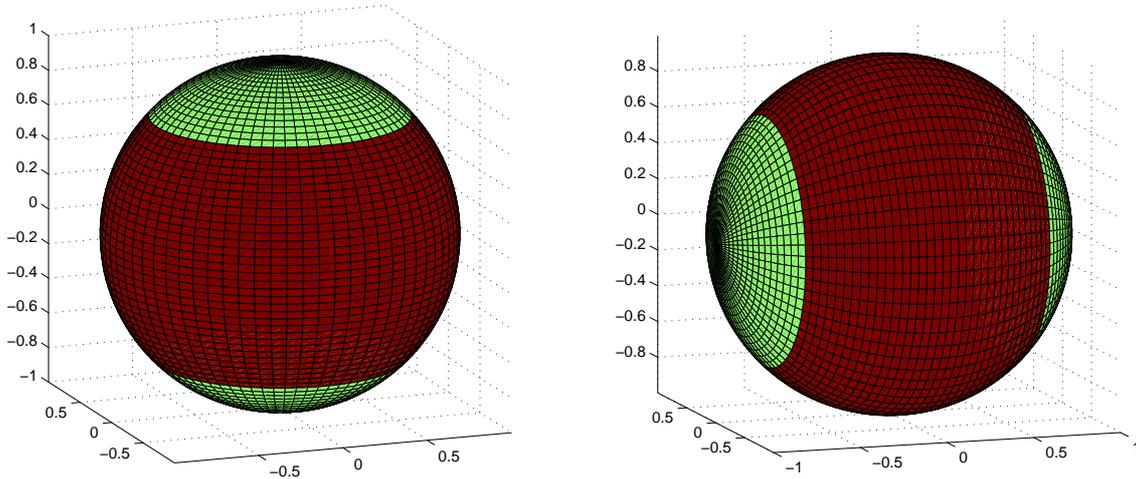


Abbildung 3.3: Erste Definition der Teilgebiete auf der Sphäre

Bemerkung 3.5 Bei einem allgemeineren Streuobjekt ergibt sich mit derselben Aufteilung der Sphäre analog die Tangentialbasis, indem die Verkettungen $q \circ p$ bzw. $q \circ \tilde{p}$ in den entsprechenden Bereichen differenziert werden.

Konstruktion mit stereographischer Projektion

Nun verfolgen wir eine andere Idee um zwei Teilgebiete zu konstruieren, deren Vereinigung die gesamte Sphäre ergibt, die aber keine singulären Punkte besitzen. Hierzu versuchen wir die Standardparametrisierung (3.45) so zu modifizieren, dass Nord- und Südpol (die Punkte, die durch $\theta = 0$ bzw. $\theta = \pi$ parametrisiert werden), auf einer Halbkugel liegen. Auf der anderen Halbkugel können wir dann ohne Probleme eine nullstellenfreie Tangentialbasis wie üblich definieren.

Wir diskutieren im Folgenden die Konstruktion für die Südhalbkugel und verwenden hierzu die stereographische Projektion (siehe z.B. Rühls [55], Kapitel I, §3). Eine entsprechende Parametrisierung der Nordhalbkugel lässt sich analog konstruieren.

Es sei $\xi \in \partial B$ mit den Komponenten $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T$. Dann ist das Bild von ξ unter der stereographischen Projektion ρ wie folgt definiert:

$$\rho(\xi) := \left(\frac{\xi_1}{1 - \xi_3}, \frac{\xi_2}{1 - \xi_3} \right)^T.$$

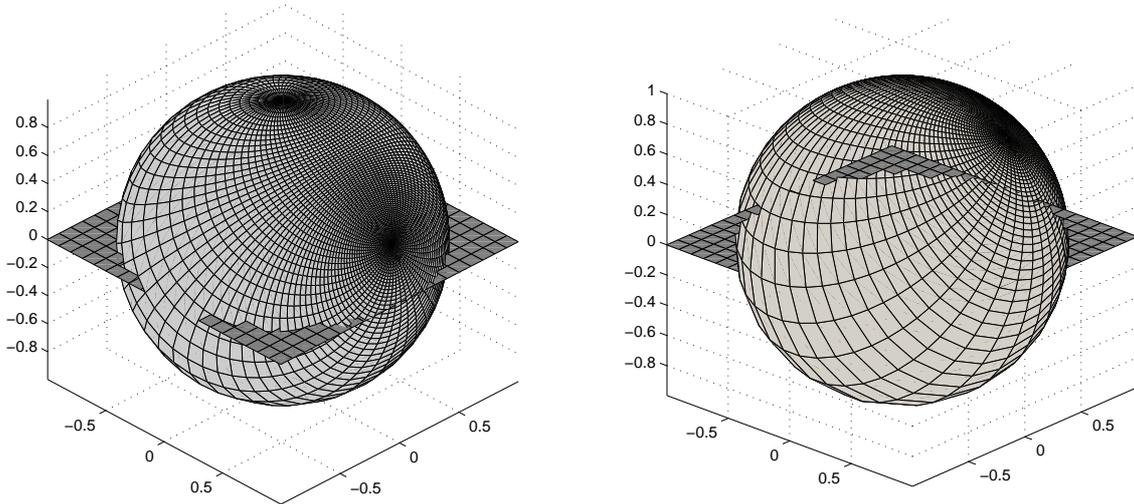


Abbildung 3.4: Transformation des Südpols auf die Nordhalbkugel

Fassen wir den \mathbb{R}^2 als komplexe Zahlenebene auf, so können wir auch schreiben:

$$\rho(\xi) = z \quad \text{mit} \quad z = \frac{\xi_1}{1 - \xi_3} + i \frac{\xi_2}{1 - \xi_3}.$$

Die Rückprojektion sieht dann wie folgt aus:

$$\xi_1 = \frac{z + \bar{z}}{z\bar{z} + 1}, \quad \xi_2 = \frac{i(\bar{z} - z)}{z\bar{z} + 1}, \quad \xi_3 = \frac{z\bar{z} - 1}{z\bar{z} + 1}.$$

Die Bilder der Nord- und Südhalbkugel sind demnach:

$$\rho(N) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1\} \quad \text{und} \quad \rho(S) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$$

und der Äquator entspricht dem Einheitskreis der komplexen Ebene.

Die Idee ist nun, eine Transformation zu finden, welche das Bild des Südpols ($z = 0$) in den Bildbereich der Nordhalbkugel transformiert. Führen wir anschließend die Rückprojektion durch, so liegen dann beide singulären Punkte auf der Nordhalbkugel. Hierbei helfen uns die sogenannten Möbius-Transformationen:

$$\phi : z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{mit} \quad a, b, c, d \in \mathbb{C} \quad \text{und} \quad ad - bc \neq 0.$$

Diese bilden die Automorphismengruppe der Sphäre und setzen sich aus drei Elementartypen zusammen: Verschiebungen, Drehstreckungen und der Inversion. Für unsere Zwecke genügen jedoch Verschiebungen:

$$V_b : z \mapsto z + b, \quad b \in \mathbb{C},$$

wobei wir uns sogar auf reelle Verschiebungen $b \in \mathbb{R}$ beschränken können. Wählen wir nun $|b| > 1$, so wird der Nullpunkt (Bild des Südpols) durch V_b in den Bildbereich der Nordhalbkugel verschoben. Das Ergebnis nach der Rückprojektion zeigt Abbildung 3.4. Wir können nun auf der Südhalbkugel ohne Probleme durch Differentiation der Parametrisierung eine Tangentialbasis definieren. Hierzu müssen wir allerdings den Parameterbereich (θ, ϕ) der Punkte kennen, die nun die Südhalbkugel bilden. Dieser lässt sich aber relativ einfach berechnen:

Alle Punkte, die im Kreis vom Radius eins um den Punkt $-b \in \mathbb{C}$ liegen, werden durch V_b auf den Einheitskreis verschoben und bilden somit nach der Rückprojektion die neue Südhalbkugel. Also müssen wir das Urbild dieser Punkte finden, d.h. wir suchen

$$\rho^{-1}(K) \quad \text{mit} \quad K := \{z \in \mathbb{C} : |z + b| < 1\}.$$

Da die Möbius-Transformationen kreistreu sind (siehe Rühls [55], "Satz von der Kreistreue"), ist das Urbild von K ein Kreis auf der Sphäre. Dieser kann explizit bestimmt werden. Hierzu verweisen wir auf Rühls ([55], Seite 30). Aus dem "nördlichsten" bzw. dem "südlichsten" Punkt dieses Kreises erhalten wir den Parameterbereich für θ . Der Bereich für ϕ ergibt sich dann hieraus in Abhängigkeit von θ .

Bemerkung 3.6 *Wieder können wir diese Konstruktion einfach auf allgemeinere Streuobjekte übertragen, indem wir in den entsprechenden Parameterbereichen die Verkettung $q \circ p$ differenzieren.*

3.7.2 Die modifizierte skalare Methode

Nachdem wir nun zwei Möglichkeiten diskutiert haben, wie wir die Sphäre aufteilen können, sind wir in der Lage, unser modifiziertes Verfahren anzugeben. Der wesentliche Punkt ist, dass wir die tangentielle Dichte a in zwei tangentielle Vektorfelder a_1 und a_2 aufteilen, die jeweils nur auf einem der beiden Teilgebiete G_1 und G_2 definiert sind. Da a stetig auf der gesamten Sphäre ist, müssen die Übergänge von G_1 nach G_2 glatt sein. Daher suchen wir reellwertige Funktionen χ_1 und χ_2 auf der Sphäre, die folgende Eigenschaften besitzen:

- 1) χ_1 und χ bilden eine Zerlegung der eins, d.h. $\chi_1 + \chi_2 = 1$.
- 2) $G_1 \subset \text{supp}\chi_1$ und $G_2 \subset \text{supp}\chi_2$.

- 3) $\text{supp}\chi_1$ und $\text{supp}\chi_2$ dürfen nicht zu groß sein, damit die singulären Punkte nicht enthalten sind.
- 4) $a_1 := \chi_1 \cdot a$ und $a_2 := \chi_2 \cdot a$ sollen genügend glatt sein, damit $a = a_1 + a_2$ stetig auf ∂B ist.

Es stellt sich nun die Frage, wie solche Funktionen χ_1 und χ_2 konkret definiert werden können. Beginnen wir mit der Aufteilung der Kugel in die erweiterte Nord- und Südhalbkugel, die mit Hilfe der stereographischen Projektion gewonnen werden kann. Hier überlappen die beiden Halbkugeln im Bereich des Äquators, daher können wir eine übliche "cut-Funktion" wie z.B.

$$f(\theta) := \exp(1) \cdot \exp\left(-\frac{1}{\sin^2\theta}\right), \quad \theta \in [0, \pi/2] \quad (3.47)$$

für den Parameterbereich von θ so modifizieren, dass der Übergang am Äquator entsprechend glatt ist. Hierbei muss allerdings sichergestellt werden, dass die Funktion f auch Punkt 1) erfüllt, also eine Zerlegung der eins bildet.

Zerlegen wir die Kugel nach der ersten Methode, also mit Hilfe der Parametrisierungen p und \tilde{p} , hilft eine solche Funktion f nicht weiter, da der Schnitt $G_1 \cap G_2$ wesentlich größer und nicht zusammenhängend ist. Hier ist es schwer zu erreichen, dass χ_1 und χ_2 einerseits eine Zerlegung der eins bilden, aber andererseits die Vektorfelder

$$a_1 = \chi_1 \cdot a \quad \text{und} \quad a_2 = \chi_2 \cdot a$$

im Wesentlichen nur Werte ungleich Null auf G_1 bzw. G_2 annehmen. Daher ist in diesem Fall noch einige Arbeit nötig, damit die Aufteilung nach der ersten Methode verwendet werden kann.

Haben wir nun Funktionen χ_1 und χ_2 so gefunden, dass die Punkte 1) bis 4) erfüllt sind, so können wir die einzelnen Anteile a_1 und a_2 ohne Probleme, wie vorher bei der ursprünglichen skalaren Methode in (3.3), in die Tangentialkomponenten zerlegen. Dies ist möglich, da a_1 und a_2 wieder tangential sind:

$$\begin{aligned} \xi \cdot a_1(\xi) &= \chi_1(\xi) \xi \cdot a(\xi) = 0 \\ \xi \cdot a_2(\xi) &= \chi_2(\xi) \xi \cdot a(\xi) = 0. \end{aligned}$$

Außerdem nehmen a_1 und a_2 im Wesentlichen nur auf G_1 bzw. G_2 Werte ungleich Null an und der Schnitt $G_1 \cap G_2$ enthält keine singulären Punkte. Definieren wir also durch Differentiation der entsprechenden Parametrisierungen für G_1 und G_2 die Tangentialvektoren $t_{G_i}^1$ und $t_{G_i}^2$ ($i = 1, 2$), so zerlegen wir a_i wie folgt:

$$a_i = \sum_{u=1}^2 A_{G_i}^u(\xi) t_{G_i}^u(\xi), \quad i = 1, 2. \quad (3.48)$$

Die Komponentenfunktionen $A_{G_i}^u$ ($u, i = 1, 2$) sind auf Grund unserer Konstruktion nun stetig auf der gesamten Sphäre. Durch Einsetzen dieses Ansatzes und Umformung erhalten wir dann die folgenden Integraloperatoren:

$$(\mathcal{M}_{G_i}^{uv} A_{G_i})(\xi) := 2 \int_{\partial B} t_{G_i}^u(\xi) \cdot \left(\xi \times \operatorname{rot}_\xi (\Phi(\xi, \eta) t_{G_i}^v(\eta)) \right) A_{G_i}(\eta) ds(\eta).$$

Wir können die Integraloperatoren in dieser Form schreiben, da nach Punkt 3) eigentlich nur über G_1 bzw. G_2 integriert wird und damit unsere Tangentialbasen eindeutig definiert sind. Das zugehörige Integralgleichungssystem sieht dann wie folgt aus:

$$\begin{aligned} \sum_{u=1}^2 A_{G_1}^u t_{G_1}^u + \sum_{u,v=1}^2 (\mathcal{M}_{G_1}^{uv} A_{G_1}^v) t_{G_1}^u + \sum_{u=1}^2 A_{G_2}^u t_{G_2}^u + \sum_{u,v=1}^2 (\mathcal{M}_{G_2}^{uv} A_{G_2}^v) t_{G_2}^u \\ = 2 \sum_{u=1}^2 (C_{G_1}^u t_{G_1}^u + C_{G_2}^u t_{G_2}^u). \end{aligned}$$

Bei der ursprünglichen Methode konnten wir dieses System in Abschnitt 3.1 weiter zerlegen, indem wir das Skalarprodukt mit den Tangentialvektoren gebildet haben. Dies ist hier leider nicht so einfach möglich, da wir voraussetzen mussten, dass der Schnitt unserer Teilgebiete G_1 und G_2 nicht leer ist. Hierdurch treten auf $G_1 \cap G_2$ auch gemischte Produkte $t_{G_1}^u \cdot t_{G_2}^v$ auf und es ist nicht ohne weiteres zu erwarten, dass diese verschwinden. Weiter ist es fraglich, ob wir die Tangentialbasen auf G_1 und G_2 so definieren können, dass sie einerseits auf den jeweiligen Teilgebieten ein Orthonormalsystem bilden, aber andererseits auch die gemischten Skalarprodukte auf dem Schnitt verschwinden. Daher können wir das System hier nicht in einfacher Matrix-Vektor-Form wie in (3.10) schreiben. Da der Schnitt $G_1 \cap G_2$ jedoch möglichst klein ausfallen soll, treten in der obigen Gleichung nur an wenigen Punkten der Sphäre beide Anteile auf, daher besitzt das zugehörige diskrete Gleichungssystem viele Nulleinträge.

3.7.3 Bewertung

Nachdem wir eine mögliche Modifikation zur skalaren Methode vorgestellt haben, wollen wir diese nun abschließend bewerten. Wir beginnen mit einer Beurteilung der beiden Zerlegungen aus Abschnitt 3.7.1. Anschließend wollen wir untersuchen, ob das Verfahren aus 3.7.2 weiterhin die Vorteile der ursprünglichen Methode besitzt.

Die in 3.7.1 vorgestellten Möglichkeiten zur Zerlegung der Sphäre besitzen unterschiedliche Vor- und Nachteile. So ist die erste Methode, welche die beiden Parametrisierungen p und \tilde{p} nutzt, sicher nicht so aufwändig und daher einfacher als

die zweite Methode. Vergleichen wir z.B. die Parameterbereiche, die G_1 und G_2 beschreiben:

Beim ersten Verfahren wird der ϕ -Bereich nicht eingeschränkt. Es werden alle $\phi \in [0, 2\pi]$ zur Beschreibung der Teilgebiete benutzt. Der θ -Bereich wird sehr einfach durch einen festen Winkel θ_0 beschrieben: $\theta \in [\theta_0, \pi - \theta_0]$. Bei der stereographischen Methode muss hingegen der Parameterbereich für θ erst in Abhängigkeit von der Verschiebung $b \in \mathbb{C}$ berechnet werden. Die Intervallgrenzen für den jeweiligen ϕ -Bereich sind sogar Funktionen von θ : $\phi \in [\phi_{min}(\theta), \phi_{max}(\theta)]$.

Bei der Definition der Funktionen χ_i in 3.7.2 traten jedoch Probleme bei der ersten Methode auf. Da beim stereographischen Verfahren die Teilgebiete G_i der erweiterten Nord- bzw. Südhalbkugel entsprechen, ist der Schnitt $G_1 \cap G_2$ sehr einfach. Je nachdem, wie weit wir die Halbkugeln erweitern, können wir bestimmen, wie groß der Schnitt ist. Dies brachte Vorteile bei der Definition von χ_i . Wir konnten einfache "cut-Funktionen" für den θ -Bereich verwenden. Bei der ersten Zerlegung hingegen ist der Schnitt wesentlich größer, nicht zusammenhängend und schwerer zu beschreiben, daher ist die Definition von χ_i hier problematisch.

Betrachten wir nun die Integralgleichung aus Abschnitt 3.7.2. Wir hatten bereits auf das Problem hingewiesen, dass wir die Gleichung nicht bzgl. der einzelnen Tangentialanteile entkoppeln können. Hierdurch fällt das zugehörige diskrete Gleichungssystem natürlich größer aus. Wir suchen die Entwicklungskoeffizienten bzgl. der skalaren Kugelflächenfunktionen bis zur Ordnung $n \in \mathbb{N}$ für vier skalare Funktionen ($A_{G_i}^u$ mit $u, i = 1, 2$). Das heißt wir müssen insgesamt $4(n+1)^2$ Unbekannte, also doppelt so viele wie vorher, bestimmen. Daher ist das modifizierte Gleichungssystem größer als das System der ursprünglichen skalaren Methode und übertrifft auch die Größe des Gleichungssystems bei Ganesh und Hawkins [17]. Also scheint der Vorteil unseres skalaren Verfahrens auf den ersten Blick verloren gegangen zu sein. Diese Sichtweise ist jedoch sehr pessimistisch:

Wir hatten bereits erwähnt, dass die Matrix des zugehörigen diskreten Gleichungssystems viele Nulleinträge aufweist, da die Funktionen $A_{G_i}^u$ im Wesentlichen nur auf den entsprechenden Teilgebieten G_i definiert sind. Wird diese Tatsache sinnvoll ausgenutzt, so können wir die Lösung des Systems deutlich beschleunigen und so den Nachteil kompensieren. Hieraus ergibt sich aber auch noch ein anderer Vorteil:

Insgesamt müssen Matrizen für acht Integraloperatoren aufgestellt werden. Da diese die ursprüngliche Form behalten haben, ist dies mit einem Aufwand von $\mathcal{O}(n^5)$ möglich. Durch die kleineren Träger der Dichten genügt es aber, über eines der Teilgebiete G_i zu integrieren. Daher müssen wir beim Aufstellen der Matrizen nur über etwa die Hälfte der Quadraturpunkte summieren, was den Aufwand ein weiteres Mal reduziert.

Könnten wir das Integralgleichungssystem entkoppeln, so müssten wir nur zwei Gleichungssysteme der Größe $2(n+1)^2 \times 2(n+1)^2$ anstelle von $4(n+1)^2 \times 4(n+1)^2$ lösen. Dies kann evtl. durch eine iterative Lösungsstrategie erreicht werden: Kennen wir eine Startnäherung, z.B. für $A_{G_1}^u$ ($u = 1, 2$), so können wir diese nutzen und die gekoppelten Anteile im Schnitt berechnen. Anschließend genügt es, $A_{G_2}^u$ ($u = 1, 2$) aus dem kleineren Gleichungssystem für G_2 zu bestimmen. Mit dieser Lösung können wir dann analog eine neue Näherung für $A_{G_1}^u$ ($u = 1, 2$) finden. Durch dieses iterative Vorgehen erreichen wir, dass nur Gleichungssysteme der Größe $2(n+1)^2 \times 2(n+1)^2$ gelöst werden müssen.

Wir stehen nun natürlich vor dem Problem, eine Startnäherung zu finden. Diese können wir aber z.B. durch Lösen des vollen Gleichungssystems mit einem kleineren Wert $n \in \mathbb{N}$ erhalten. Eine andere Möglichkeit wäre es, zu Beginn die gekoppelten Terme zu ignorieren und das entsprechende System für G_i zu lösen.

Zusammenfassend haben wir also festgestellt, dass es sich durchaus lohnt, eine solche Modifikation zu betrachten, auch wenn sich hieraus viele weitere neue Fragestellungen und Probleme ergeben. Es spricht aber auch noch ein weiterer Grund dafür, sich mit einem solchen Zerlegungsverfahren zu beschäftigen. Wir können so die Klasse der Streuobjekte, auf die unser Spektralverfahren anwendbar ist, erweitern. Wollen wir allgemeinere Objekte behandeln, dann müssen wir die Oberfläche, ähnlich wie hier vorgestellt, in Teile zerlegen, die dann eine lokale Parametrisierung besitzen. Dies ist jedoch nicht trivial, da auch hier darauf geachtet werden muss, dass die Übergänge zwischen diesen Teilgebieten hinreichend glatt sind. Unsere Modifikation könnte aber ein erster Schritt in diese Richtung sein.

Kapitel 4

Die vektorielle Methode

Nachdem wir die skalare Methode hergeleitet und analysiert haben, beschäftigen wir uns nun mit dem zweiten neuen Lösungsverfahren, der vektoriellen Methode. Hierbei stellen wir dieselben Bedingungen an unser Streuobjekt D wie in Kapitel drei. Außerdem fordern wir wieder, dass κ kein Maxwell-Eigenwert ist, um eindeutige Lösbarkeit der Integralgleichung

$$a(x) + 2 \int_{\partial D} \nu(x) \times \operatorname{rot}_x \{ \Phi(x, y) a(y) \} ds(y) = 2c(x), \quad x \in \partial D \quad (4.1)$$

gewährleisten zu können.

Die Grundidee bei diesem Verfahren ist, direkt mit Vektorfeldern zu approximieren und nicht komponentenweise wie in Kapitel drei zu arbeiten. Hier bieten sich die vektoriellen Kugelflächenfunktionen aus Definition 2.20 als Gegenstück zu den skalaren Kugelflächenfunktionen bei der akustischen Streuung an. Bei den Spektralmethoden existieren bisher nur zwei Arbeiten, die diese vektoriellen Kugelflächenfunktionen verwenden. Dies ist einmal die bereits erwähnte Dissertation von Nestel [49], wobei seine Methode nur anwendbar ist, wenn das Streuobjekt eine Kugel ist. Die Erweiterung seiner Ideen auf allgemeinere Streuobjekte ist jedoch nicht ohne weiteres möglich (siehe [49], Bemerkungen 3.25 (ii), 3.37 und 4.24 (ii)). Die andere Arbeit stammt von Ganesh und Hawkins [18]. Sie verwenden jedoch neben den tangentialen Kugelflächenfunktionen auch normale Kugelflächenfunktionen. Daher ist die Methode, die wir in diesem Kapitel vorstellen, das erste vektorielle Spektralverfahren für allgemeinere Streuobjekte, welches nur tangentiale Ansatzfunktionen verwendet, wodurch der Lösungsaufwand reduziert wird.

Von Ganesh und Hawkins existiert eine weitere Arbeit (siehe [19]), in der ein sogenanntes Hybridverfahren vorgestellt wird. Hier werden zur Diskretisierung des Integraloperators die komponentenweisen Ansatzfunktionen aus [17] verwendet. Für das Galerkin-Verfahren hingegen wählen sie tangentiale Kugelflächenfunktionen, falls das Streuobjekt eine Kugel ist. Bei allgemeineren Streuobjekten verwenden sie

jedoch auch normale Kugelflächenfunktionen.

Die Grundidee zu unserem vektoriellen Verfahren sieht nun wie folgt aus:

Wir transformieren zuerst die Gleichung auf die Sphäre, damit wir anschließend mit vektoriellen Kugelflächenfunktionen ansetzen können. Bei dieser Transformation tritt jedoch schon die erste Schwierigkeit auf. Die ursprüngliche Integralgleichung besitzt tangentialen Charakter bzgl. ∂D , d.h. es treten nur tangentielle Vektorfelder a und c auf und der Integraloperator

$$(\mathcal{M}a)(x) := 2 \int_{\partial D} \nu(x) \times \text{rot}_x \{ \Phi(x, y) a(y) \} ds(y), \quad x \in \partial D \quad (4.2)$$

bildet diese in sich ab. Diesen Charakter wollen wir bei der Transformation erhalten, damit wir auf der Sphäre im Gegensatz zu Ganesh und Hawkins nur vektorielle Kugelflächenfunktionen vom Typ $i = 2, 3$ verwenden können. Mit Hilfe der Abbildungseigenschaften der Funktionalmatrix zur Parametrisierung q können wir eine Lösung für dieses Problem in Abschnitt 4.1 angeben.

Die hierdurch erhaltene sphärische Integralgleichung soll wieder mit einem volldiskreten Galerkin-Verfahren gelöst werden. Hierzu müssen wir den, nun vektoriellen Integraloperator, approximieren. Auch bei dieser Approximation ist darauf zu achten, dass die tangentielle Natur des Problems nicht zerstört wird. Diese Diskretisierung behandeln wir in Abschnitt 4.2.

Nachdem wir unser vektorielles Verfahren hergeleitet haben, behandeln wir in Abschnitt 4.3 schließlich die Implementation der Methode. Hierbei gehen wir analog zum skalaren Verfahren vor, damit wir die Vorteile, die von Wienert entdeckt wurden und zu einem Berechnungsaufwand $\mathcal{O}(n^5)$ führen, beibehalten können. Anschließend machen wir uns in Abschnitt 4.4 Gedanken zur Konvergenzanalyse des Verfahrens und beurteilen die Methode schließlich noch in Abschnitt 4.5.

4.1 Transformation auf die Sphäre

Wir wollen nun die Integralgleichung (4.1) auf die Einheitssphäre transformieren und hierbei den tangentialen Charakter erhalten. Hierzu ist die kurze Vektor-Form des Integraloperators in (4.2) ungeeignet. Wir geben daher eine etwas kompliziertere, jedoch für unser Vorhaben geeignetere, Matrix-Version an. Hierbei zerlegen wir den Integraloperator sofort so, dass wir eine ähnliche Form wie in Abschnitt 3.1

erhalten. Dazu betrachten wir den Integranden:

$$2\nu(x) \times \operatorname{rot}(\Phi(x, y) a(y)) = 2 \{ \nabla_x \Phi(x, y) \otimes [\nu(x) - \nu(y)] - \nu(x) \cdot \nabla_x \Phi(x, y) \mathbf{I} \} a(y).$$

Verwenden wir nun

$$\nabla_x \Phi(x, y) = \frac{e^{i\kappa|x-y|}}{4\pi} \left(\frac{i\kappa(x-y)}{|x-y|^2} - \frac{(x-y)}{|x-y|^3} \right)$$

und

$$e^{i\kappa|x-y|} = \cos(\kappa|x-y|) + i \sin(\kappa|x-y|),$$

so erhalten wir folgende Zerlegung:

$$(\mathcal{M}a)(x) := \int_{\partial D} \left[\frac{1}{|x-y|} \mathbf{M}_1(x, y) + \mathbf{M}_2(x, y) \right] a(y) ds(y), \quad (4.3)$$

Hierbei sind die matrixwertigen Kerne \mathbf{M}_1 und \mathbf{M}_2 wie folgt definiert ($i = 1, 2$):

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_i(x, y) &:= M_{i,1}(x, y) \frac{1}{|x-y|^2} (x-y) \otimes [\nu(x) - \nu(y)] \\ &\quad + M_{i,2}(x, y) \frac{1}{|x-y|^2} \nu(x) \cdot (x-y) \mathbf{I} + \mathbf{M}_{i,3}(x, y) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} M_{1,1}(x, y) &:= -\frac{1}{2\pi} S^c(x, y), & M_{1,2}(x, y) &:= -M_{1,1}(x, y) \\ \mathbf{M}_{1,3}(x, y) &:= \frac{1}{2\pi} \kappa S^s(x, y) \{ \nu(x) \cdot (x-y) \mathbf{I} - (x-y) \otimes (\nu(x) - \nu(y)) \} \\ M_{2,1}(x, y) &:= \frac{i}{2\pi} \{ \kappa S^c(x, y) - S^s(x, y) \}, & M_{2,2}(x, y) &:= -M_{2,1}(x, y) \\ S^c(x, y) &:= \cos(\kappa|x-y|), & S^s(x, y) &:= \begin{cases} \frac{\sin(\kappa|x-y|)}{|x-y|}, & x \neq y \\ \kappa, & x = y \end{cases} \end{aligned}$$

Die Matrix $\mathbf{M}_{2,3}$ ist die Nullmatrix. Die Funktionen $M_{i,j}$ sind unendlich oft differenzierbar auf $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. Weiter weisen wir darauf hin, dass \mathbf{M}_1 rein reell und \mathbf{M}_2 rein imaginär ist. Eine erste wichtige Aussage gibt uns das folgende Lemma:

Lemma 4.1 *Für die matrixwertigen Funktionen $\mathbf{M}_1(x, y)$ und $\mathbf{M}_2(x, y)$ mit $x, y \in \partial D$ gilt:*

$$\mathbf{M}_1(x, y) : T_y \rightarrow T_x, \quad \mathbf{M}_2(x, y) : T_y \rightarrow T_x,$$

wobei T_x bzw. T_y den Tangentialraum an $x \in \partial D$ bzw. $y \in \partial D$ bezeichnen.

Beweis: Es sei $a \in \mathbb{R}^3$ tangential bzgl. $y \in \partial D$, d.h. es gilt $\nu(y) \cdot a = 0$. Dann erhalten wir für $x \in \partial D$:

$$\begin{aligned} \nu(x) \cdot \mathbf{M}_1(x, y)a &= -\frac{1}{2\pi} \frac{S^c(x, y)}{|x - y|^2} [\nu(x) \cdot (x - y)] [(\nu(x) - \nu(y)) \cdot a] \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \frac{S^c(x, y)}{|x - y|^2} [\nu(x) \cdot (x - y)] [\nu(x) \cdot a] \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \kappa S^s(x, y) \left\{ [\nu(x) \cdot (x - y)] [\nu(x) \cdot a] \right. \\ &\quad \left. - [\nu(x) \cdot (x - y)] [(\nu(x) - \nu(y)) \cdot a] \right\} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Eine analoge Rechnung zeigt, dass auch $\nu(x) \cdot \mathbf{M}_2(x, y)a = 0$ gilt. \square

Unser weiteres Vorgehen sieht nun wie folgt aus:

Wir transformieren die Integralgleichung (4.1) mit dem Integraloperator (4.3) durch Substitution von $x = q(\xi)$ bzw. $y = q(\eta)$ auf die Sphäre ($\xi, \eta \in \partial B$):

$$a(q(\xi)) + \int_{\partial B} \underbrace{\left[\frac{\mathbf{M}_1(q(\xi), q(\eta))}{|q(\xi) - q(\eta)|} + \mathbf{M}_2(q(\xi), q(\eta)) \right]}_{=: \mathbf{M}(q(\xi), q(\eta))} a(q(\eta)) J(\eta) ds(\eta) = 2 c(q(\xi)).$$

Die tangentielle Natur der Gleichung erhalten wir, indem wir die Funktionalmatrix D_q der Parametrisierung q ergänzen:

$$D_{q(\xi)}^{-1} a(q(\xi)) + \int_{\partial B} D_{q(\xi)}^{-1} \mathbf{M}(q(\xi), q(\eta)) D_{q(\eta)} D_{q(\eta)}^{-1} a(q(\eta)) J(\eta) ds(\eta) = 2 D_{q(\xi)}^{-1} c(q(\xi)).$$

Die Matrix D_q ist invertierbar, da nach Voraussetzung stets $J \neq 0$ gilt. Zu einer sphärischen Integralgleichung kommen wir nun durch die folgenden Definitionen:

$$\tilde{a}(\xi) := D_{q(\xi)}^{-1} a(q(\xi)) \quad (4.4)$$

$$\tilde{c}(\xi) := D_{q(\xi)}^{-1} c(q(\xi)) \quad (4.5)$$

$$\tilde{\mathbf{M}}_1(\xi, \eta) := D_{q(\xi)}^{-1} R(\xi, \eta) \mathbf{M}_1(q(\xi), q(\eta)) J(\eta) D_{q(\eta)} \quad (4.6)$$

$$\tilde{\mathbf{M}}_2(\xi, \eta) := D_{q(\xi)}^{-1} \mathbf{M}_2(q(\xi), q(\eta)) J(\eta) D_{q(\eta)}. \quad (4.7)$$

Hierbei haben wir bei der Definition von $\tilde{\mathbf{M}}_1$ sofort die Funktion

$$R(\xi, \eta) := \frac{|\xi - \eta|}{|q(\xi) - q(\eta)|}$$

ergänzt, was uns zu einer radialen Singularität führt. Die sphärische Gleichung lautet dann:

$$\tilde{a}(\xi) + \underbrace{\int_{\partial B} \left[\frac{\tilde{\mathbf{M}}_1(\xi, \eta)}{|\xi - \eta|} + \tilde{\mathbf{M}}_2(\xi, \eta) \right] \tilde{a}(\eta) ds(\eta)}_{=:(\tilde{\mathcal{M}}\tilde{a})(\xi)} = 2\tilde{c}(\xi), \quad \xi \in \partial B \quad (4.8)$$

Die tangentielle Natur dieser Integralgleichung ergibt sich nun aus dem folgenden Lemma:

Lemma 4.2 Für $\xi, \eta \in \partial B$ und $x, y \in \partial D$ mit $q(\xi) = x$ und $q(\eta) = y$ gilt:

- i) Das Vektorfeld \tilde{a} ist tangential bzgl. der Sphäre, d.h. für ξ gilt $\xi \cdot \tilde{a}(\xi) = 0$.
- ii) Die Kerne $\tilde{\mathbf{M}}_1(\xi, \eta)$ und $\tilde{\mathbf{M}}_2(\xi, \eta)$ besitzen folgende Abbildungseigenschaft:

$$\tilde{\mathbf{M}}_i : T_\eta \rightarrow T_\xi, \quad i = 1, 2.$$

Beweis:

- i) Nach Definition (4.4) gilt

$$\tilde{a}(\xi) = D_{q(\xi)}^{-1} a(q(\xi)),$$

wobei das Vektorfeld a tangential bzgl. $x = q(\xi) \in \partial D$ ist. Die Aussage folgt nun sofort aus der Abbildungseigenschaft

$$D_{q(\xi)} : T_\xi \rightarrow T_x \quad (4.9)$$

der Funktionalmatrix und der Forderung, dass die Jacobi-Determinante stets ungleich Null ist.

- ii) Wir beginnen mit

$$\tilde{\mathbf{M}}_1(\xi, \eta) := D_{q(\xi)}^{-1} R(\xi, \eta) \mathbf{M}_1(q(\xi), q(\eta)) J(\eta) D_{q(\eta)}.$$

Da R und die Jacobi-Determinante J skalare Funktionen sind, genügt es, die Abbildungseigenschaften des Matrizenprodukts

$$D_{q(\xi)}^{-1} \mathbf{M}_1(q(\xi), q(\eta)) D_{q(\eta)}$$

zu betrachten. Nach Lemma 4.1 und (4.9) ergibt sich die Behauptung aus dem folgenden, kommutierenden Diagramm:

$$\begin{array}{ccc}
T_\eta & \xrightarrow{\tilde{\mathbf{M}}_1} & T_\xi \\
D_{q(\eta)} \downarrow & & \uparrow D_{q(\xi)}^{-1} \\
T_y & \xrightarrow{R\mathbf{M}_1J} & T_x
\end{array}$$

Die Behauptung für den zweiten Kern $\tilde{\mathbf{M}}_2$ kann analog bewiesen werden. \square

Mit Hilfe des orthogonalen Projektors \mathbf{P}_n aus (2.29) können wir nun auf dem Raum der tangentialen Kugelflächenfunktionen vom Grad kleiner gleich n folgendes Galerkin-Verfahren angeben:

Gesucht ist eine Näherungslösung $a_n \in \bigoplus_{\nu=1}^n x_\nu$, die folgende Gleichung erfüllt:

$$a_n + \mathbf{P}_n \tilde{\mathcal{M}} a_n = 2\mathbf{P}_n \tilde{c}. \quad (4.10)$$

Analog zum skalaren Fall aus Kapitel drei erhalten wir ein semidiskretes Verfahren, indem wir unseren Approximationsoperator \mathbf{L}_n anwenden:

Gesucht ist eine Näherungslösung $a_n \in \bigoplus_{\nu=1}^n x_\nu$, die folgende Gleichung erfüllt:

$$a_n + \mathbf{L}_n \tilde{\mathcal{M}} a_n = 2\mathbf{L}_n \tilde{c}. \quad (4.11)$$

Im nächsten Abschnitt diskretisieren wir den Integraloperator $\tilde{\mathcal{M}}$, um ein volldiskretes Galerkin-Verfahren zu erhalten.

4.2 Approximation des Integraloperators

Wir gehen bei der Diskretisierung analog zum skalaren Fall in Abschnitt 3.3 vor. Da wir nach Definition (4.6) durch die Funktion R in Gleichung (4.8) bereits eine radiale Singularität vorliegen haben, können wir direkt mit der Transformation der Singularität auf den Nordpol beginnen. Diese Transformation ist auch hier nötig, um hinreichend glatte Funktionen zur Approximation mit \mathbf{L}_n zu bekommen.

Hierzu führen wir wieder die orthogonale Matrix \mathbf{T}_ξ ein, die dadurch definiert wird, dass sie $\xi \in \partial B$ auf den Nordpol abbildet:

$$\mathbf{T}_\xi \xi = \hat{n}.$$

Mit Hilfe dieser Matrix können wir nun folgende Transformation definieren:

Definition 4.3 Wir definieren die Transformation \mathcal{T}_ξ mit $\xi \in \partial B$ für skalare Funktionen F , Vektorfelder f und matrixwertige Funktionen \mathbf{A} auf ∂B wie folgt:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_\xi F(\eta) &:= F(\mathbf{T}_\xi^{-1}\eta) \\ \mathcal{T}_\xi f(\eta) &:= \mathbf{T}_\xi f(\mathbf{T}_\xi^{-1}\eta) \\ \mathcal{T}_\xi \mathbf{A}(\eta) &:= \mathbf{T}_\xi \mathbf{A}(\mathbf{T}_\xi^{-1}\eta) \mathbf{T}_\xi^{-1}.\end{aligned}$$

Für Funktionen, die auf $\partial B \times \partial B$ definiert sind, modifizieren wir die Definition entsprechend:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_\xi F(\eta, \zeta) &:= F(\mathbf{T}_\xi^{-1}\eta, \mathbf{T}_\xi^{-1}\zeta) \\ \mathcal{T}_\xi f(\eta, \zeta) &:= \mathbf{T}_\xi f(\mathbf{T}_\xi^{-1}\eta, \mathbf{T}_\xi^{-1}\zeta) \\ \mathcal{T}_\xi \mathbf{A}(\eta, \zeta) &:= \mathbf{T}_\xi \mathbf{A}(\mathbf{T}_\xi^{-1}\eta, \mathbf{T}_\xi^{-1}\zeta) \mathbf{T}_\xi^{-1}.\end{aligned}$$

Wir haben die Definition dieser Transformation für Vektorfelder und Matrixfunktionen entsprechend angepasst. Dies hat mehrere Gründe, auf die wir später noch eingehen werden. Als erste Begründung verweisen wir auf Satz 2.34. Hier sehen wir, dass gewisse Invarianzeigenschaften bzgl. dieser Transformation bestehen, wodurch sich die obige Definition in natürlicher Weise anbietet.

Wir starten nun mit unserer Approximation, indem wir beim Operator

$$(\tilde{\mathcal{M}}\tilde{a})(\xi) = \int_{\partial B} \left[\frac{\tilde{\mathbf{M}}_1(\xi, \eta)}{|\xi - \eta|} + \tilde{\mathbf{M}}_2(\xi, \eta) \right] \tilde{a}(\eta) ds(\eta)$$

zweimal die Identität $\mathbf{I} = \mathbf{T}_\xi^{-1} \mathbf{T}_\xi$ ergänzen:

$$(\tilde{\mathcal{M}}\tilde{a})(\xi) = \mathbf{T}_\xi^{-1} \int_{\partial B} \left[\frac{\mathbf{T}_\xi \tilde{\mathbf{M}}_1(\xi, \eta) \mathbf{T}_\xi^{-1}}{|\xi - \eta|} + \mathbf{T}_\xi \tilde{\mathbf{M}}_2(\xi, \eta) \mathbf{T}_\xi^{-1} \right] \mathbf{T}_\xi \tilde{a}(\eta) ds(\eta).$$

Verwenden wir dann $\mathbf{T}_\xi \xi = \hat{n}$, $\mathbf{T}_\xi \eta = \hat{\eta}$, die Transformation aus Definition 4.3 und die Invarianz der euklidischen Norm bzw. des Oberflächenmaßes, so erhalten wir:

$$(\tilde{\mathcal{M}}\tilde{a})(\xi) = \mathbf{T}_\xi^{-1} \int_{\partial B} \left[\frac{\mathcal{T}_\xi \tilde{\mathbf{M}}_1(\hat{n}, \hat{\eta})}{|\hat{n} - \hat{\eta}|} + \mathcal{T}_\xi \tilde{\mathbf{M}}_2(\hat{n}, \hat{\eta}) \right] \mathcal{T}_\xi \tilde{a}(\hat{\eta}) ds(\hat{\eta}).$$

Diesen transformierten Integraloperator wollen wir nun analog zum skalaren Fall durch Anwenden des Approximationsoperators \mathbf{L}_n diskretisieren. Anschließend wollen wir Folgerung 2.23, Lemma 2.24 und 2.26 auf die Integrale

$$\int_{\partial B} \frac{1}{|\hat{n} - \hat{\eta}|} y_{l,k}^{(i)}(\hat{\eta}) ds(\hat{\eta}) \quad \text{und} \quad \int_{\partial B} y_{l,k}^{(i)}(\hat{\eta}) ds(\hat{\eta})$$

anwenden. Dies ergibt jedoch sowohl tangentiale als auch normale Kugelflächenfunktionen bzgl. \hat{n} , die unseren tangentialen Charakter zerstören. Hier helfen uns aber die Modifikationen für Vektorfelder bzw. Matrixfunktionen in Definition 4.3. Es gilt nämlich nach Lemma 4.2 für $i = 1, 2$:

$$\begin{aligned} \hat{n} \cdot \mathcal{T}_\xi \tilde{\mathbf{M}}_i(\hat{n}, \hat{\eta}) \mathcal{T}_\xi \tilde{a}(\hat{\eta}) &= (\mathbf{T}_\xi \xi) \cdot \mathbf{T}_\xi \tilde{\mathbf{M}}_i(\mathbf{T}_\xi^{-1} \hat{n}, \mathbf{T}_\xi^{-1} \hat{\eta}) \mathbf{T}_\xi^{-1} \mathbf{T}_\xi \tilde{a}(\mathbf{T}_\xi^{-1} \hat{\eta}) \\ &= \xi \cdot \mathbf{T}_\xi^{-1} \mathbf{T}_\xi \tilde{\mathbf{M}}_i(\xi, \eta) \tilde{a}(\eta) \\ &= \xi \cdot \tilde{\mathbf{M}}_i(\xi, \eta) \tilde{a}(\eta) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Daher ist auch das Integral tangential bzgl. \hat{n} und wir können den Projektor

$$\mathcal{P}(\hat{n}) := \mathbf{I} - \hat{n} \otimes \hat{n}$$

einfügen:

$$(\tilde{\mathcal{M}}\tilde{a})(\xi) = \mathbf{T}_\xi^{-1} \mathcal{P}(\hat{n}) \int_{\partial B} \left[\frac{\mathcal{T}_\xi \tilde{\mathbf{M}}_1(\hat{n}, \hat{\eta})}{|\hat{n} - \hat{\eta}|} + \mathcal{T}_\xi \tilde{\mathbf{M}}_2(\hat{n}, \hat{\eta}) \right] \mathcal{T}_\xi \tilde{a}(\hat{\eta}) ds(\hat{\eta})$$

Approximieren wir nun durch Anwenden von \mathbf{L}_n , so verschwinden alle normalen Anteile und wir erhalten einen tangentialen Ausdruck bzgl. \hat{n} , der durch Anwendung von \mathbf{T}_ξ^{-1} tangential bzgl. $\xi \in \partial B$ wird. Damit haben wir die ursprüngliche, tangentiale Natur der sphärischen Gleichung (4.8) erhalten. Wir definieren also den diskreten Integraloperator wie folgt:

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathcal{M}}^{n'}\tilde{a})(\xi) &:= \mathbf{T}_\xi^{-1} \mathcal{P}(\hat{n}) \int_{\partial B} \frac{1}{|\hat{n} - \hat{\eta}|} \mathbf{L}_n \left\{ \mathcal{T}_\xi \tilde{\mathbf{M}}_1(\hat{n}, \cdot) \mathcal{T}_\xi \tilde{a}(\cdot) \right\}(\hat{\eta}) ds(\hat{\eta}) \\ &\quad + \mathbf{T}_\xi^{-1} \mathcal{P}(\hat{n}) \int_{\partial B} \mathbf{L}_n \left\{ \mathcal{T}_\xi \tilde{\mathbf{M}}_2(\hat{n}, \cdot) \mathcal{T}_\xi \tilde{a}(\cdot) \right\}(\hat{\eta}) ds(\hat{\eta}). \end{aligned}$$

Hierbei stellen wir an $n' = n'(n)$ wieder die Bedingung, dass zwei positive Konstanten c_1 und c_2 existieren mit:

$$(1 + c_1)n \leq n' \leq c_2 n.$$

Die Definition des diskreten Integraloperators besitzt dieselben Vor- bzw. Nachteile wie die analoge Definition in Abschnitt 3.3. Verwenden wir jedoch auch hier wieder die Parametrisierung p der Sphäre und die Fortsetzung $\tilde{\mathbf{L}}_n$, so bekommen wir die folgende äquivalente Form

$$\begin{aligned} (\tilde{\mathcal{M}}^{n'}\tilde{a})(\xi) &= \mathbf{T}_\xi^{-1} \mathcal{P}(\hat{n}) \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \tilde{\mathbf{L}}_n \left\{ \mathcal{T}_\xi \tilde{\mathbf{M}}_1(\hat{n}, p(\cdot)) \mathcal{T}_\xi \tilde{a}(p(\cdot)) \right\}(\theta, \phi) \cos(\theta/2) d\theta d\phi \\ &\quad + \mathbf{T}_\xi^{-1} \mathcal{P}(\hat{n}) \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \tilde{\mathbf{L}}_n \left\{ \mathcal{T}_\xi \tilde{\mathbf{M}}_2(\hat{n}, p(\cdot)) \mathcal{T}_\xi \tilde{a}(p(\cdot)) \right\}(\theta, \phi) \sin(\theta) d\theta d\phi. \end{aligned}$$

Hier tritt die Schwierigkeit, dass die glatten Integralanteile nicht im Definitionsbereich des Approximationsoperators liegen können, nicht mehr auf.

Wir erhalten also schließlich das folgende, volldiskrete Galerkin-Verfahren:

Gesucht ist eine Näherungslösung $a_n \in \bigoplus_{\nu=1}^n x_\nu$, die folgende Gleichung erfüllt:

$$a_n + \mathbf{L}_n \tilde{\mathcal{M}}^{n'} a_n = 2\mathbf{L}_n \tilde{c}. \quad (4.12)$$

4.3 Implementation

Wir gehen nun auf die konkrete Implementation des volldiskreten Galerkin-Verfahrens (4.12) ein. Hierbei versuchen wir, analog zu Abschnitt 3.4 vorzugehen. Dies gelingt uns auch, jedoch müssen wir an einigen Stellen leichte Modifikationen vornehmen. Auf diese Besonderheiten wollen wir hier speziell eingehen. Wir betrachten die folgende Variante des Galerkin-Verfahrens:

Wir suchen eine Näherungslösung $a_n \in \bigoplus_{\nu=1}^n x_\nu$, welche

$$(a_n, w_n)_m + (\tilde{\mathcal{M}}^{n'} a_n, w_n)_m = 2(\tilde{c}, w_n)_m \quad (4.13)$$

für alle $w_n \in \bigoplus_{\nu=1}^n x_\nu$ erfüllt.

Machen wir für a_n den Ansatz

$$a_n = \sum_{i=2}^3 \sum_{l=1}^n \sum_{|k| \leq l} a_{l,k}^{(i)} y_{l,k}^{(i)}$$

und wählen $w_n = y_{l',k'}^{(i)}$ mit $i' = 2, 3$, $l' \leq n$ und $|k'| \leq l'$, so erhalten wir das Gleichungssystem

$$\sum_{i=2}^3 \sum_{l=1}^n \sum_{|k| \leq l} \{ \delta_{ii'} \delta_{ll'} \delta_{kk'} + \mathbf{M}_{i'l'k',ilk} \} a_{l,k}^{(i)} = 2(c, y_{l',k'}^{(i')})_m$$

für $i' = 2, 3$; $l' \leq n$; $|k'| \leq l'$. Nun wollen wir die Matrix genauer angeben:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{i'l'k',ilk} &:= (\tilde{\mathcal{M}}_{n'} y_{l,k}^{(i)}, y_{l',k'}^{(i')})_m \\ &= \sum_{r=0}^{2n+1} \sum_{s=1}^{n+1} \mu_r \nu_s \tilde{\mathcal{M}}_{n'} y_{l,k}^{(i)}(p_{rs}) \overline{y_{l',k'}^{(i')}(p_{rs})}. \end{aligned}$$

Wenden wir Folgerung 2.23, Lemma 2.24 und 2.26 an und definieren die Matrizen

$$\mathbf{B}_{r's'}^{n'} := \sum_{i=2}^3 \sum_{l=1}^{n'} \sum_{|k| \leq l} G_{(i,i)}(l) y_{l,k}^{(i)}(\hat{n}) \otimes \overline{y_{l,k}^{(i)}(p_{r's'})} \quad (4.14)$$

$$\mathbf{C}_{r's'}^{n'} := \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \overline{y_{1,-1}^{(2)}(p_{r's'})} - \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \overline{y_{1,1}^{(2)}(p_{r's'})} \right\} \quad (4.15)$$

mit

$$G_{(2,2)}(l) = \frac{4\pi}{2l+1} \left(\frac{l}{2l+3} + \frac{l+1}{2l-1} \right)$$

$$G_{(3,3)}(l) = \frac{4\pi}{2l+1},$$

so erhalten wir schließlich:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{i'l'k',ilk} = & \sum_{r=0}^{2n+1} \sum_{s=1}^{n+1} \mu_r \nu_s \mathbf{T}_{p_{rs}}^{-1} \sum_{r'=0}^{2n'+1} \sum_{s'=1}^{n'+1} \tilde{\mu}_{r'} \tilde{\nu}_{s'} \left\{ \mathbf{B}_{r's'}^{n'} \mathcal{T}_{p_{rs}} \tilde{\mathbf{M}}_1(\hat{n}, p_{r's'}) \right. \\ & \left. + \mathbf{C}_{r's'}^{n'} \mathcal{T}_{p_{rs}} \tilde{\mathbf{M}}_2(\hat{n}, p_{r's'}) \right\} \mathcal{T}_{p_{rs}} y_{l,k}^{(i)}(p_{r's'}) \cdot \overline{y_{l'k'}^{(i')}(p_{rs})}. \end{aligned}$$

Wie im skalaren Fall in Abschnitt 3.4 müssen wir transformierte Kugelflächenfunktionen berechnen. Durch (3.40) konnte der Aufwand reduziert werden. Dies wollen wir auch im vektoriellen Fall erreichen. Hier hilft uns aber erneut die spezielle Definition 4.3 der Transformation \mathcal{T}_ξ . Wir finden in Lemma 2.33 :

$$\mathcal{T}_\xi \left(o_\xi^{(i)} Y_{l,k}(\xi) \right) = o_\xi^{(i)} (\mathcal{T}_\xi Y_{l,k}(\xi)), \quad i = 1, 2, 3, \xi \in \partial B.$$

Wenden wir dies an, so ergibt sich mit (3.40) schließlich:

$$\mathcal{T}_{p_{rs}} y_{l,k}^{(i)} = \sum_{|\tilde{k}| \leq l} F_{sl\tilde{k}k} e^{i(k-\tilde{k})\phi_r} y_{l,\tilde{k}}^{(i)}. \quad (4.16)$$

Wir können also im vektoriellen Fall ebenfalls mit $F_{sl\tilde{k}k}$ arbeiten, völlig analog zur skalaren Methode. Dann sieht unsere Matrix \mathbf{M} wie folgt aus:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{u'l'k',ulk} = & \sum_{r=0}^{2n+1} \sum_{s=1}^{n+1} \mu_r \nu_s \mathbf{T}_{p_{rs}}^{-1} \sum_{r'=0}^{2n'+1} \sum_{s'=1}^{n'+1} \tilde{\mu}_{r'} \tilde{\nu}_{s'} \left\{ \mathbf{B}_{r's'}^{n'} \mathcal{T}_{p_{rs}} \tilde{\mathbf{M}}_1(\hat{n}, p_{r's'}) \right. \\ & \left. + \mathbf{C}_{r's'}^{n'} \mathcal{T}_{p_{rs}} \tilde{\mathbf{M}}_2(\hat{n}, p_{r's'}) \right\} \sum_{|\tilde{k}| \leq l} F_{sl\tilde{k}k} e^{i(k-\tilde{k})\phi_r} y_{l,\tilde{k}}^{(u)}(p_{r's'}) \cdot \overline{y_{l'k'}^{(u')}(p_{rs})}. \end{aligned}$$

Wir haben hier die Typen der vektoriellen Kugelflächenfunktionen nicht, wie sonst üblich mit i und i' , sondern mit u und u' bezeichnet, um eine Verwechslung mit der

komplexen Zahl i zu vermeiden. Diese Notation behalten wir nun bei.

Nachdem wir die Matrix aufgestellt haben, wollen wir die einzelnen Summen wieder zerlegen, wie in Abschnitt 3.4. Dies ist jedoch zunächst einmal nicht ohne weiteres möglich, was daran liegt, dass wir skalare Kugelflächenfunktionen nach Satz 2.3 wie folgt schreiben können:

$$Y_{l,k}(\theta, \phi) = c_l^k P_l^{|k|}(\cos \theta) e^{ik\phi}.$$

Wir sehen, dass die l -Abhängigkeit nur beim Legendre-Polynom auftritt. Daher können wir die Kugelflächenfunktionen bei der Aufstellung unserer Hilfsgrößen "trennen", in einen nur von k und ϕ abhängigen Teil und einen Anteil, der von l, k und θ abhängt. Dies ist wichtig, da sonst die erste Hilfsgröße $E_{sr s' \tilde{k}}$ zusätzlich noch von l abhängt (vergleiche mit Abschnitt 3.4).

Für die vektoriellen Kugelflächenfunktionen vom Typ $u = 2$ finden wir bei Fenger [12] im Anhang (Der Faktor $(-1)^k$ wird bereits in (2.8) berücksichtigt. Es ist $t = \cos \theta$):

$$\begin{aligned} y_{l,k}^{(2)}(\eta) = & \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} c_l^k P_l^{|k|}(t) e^{ik\phi} ik \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \right. \\ & \left. + \sqrt{1-t^2} c_l^k P_l^{|k|'}(t) e^{ik\phi} \begin{pmatrix} -t \cos \phi \\ -t \sin \phi \\ \sqrt{1-t^2} \end{pmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Da im ersten Summand die Legendre-Funktion $P_l^{|k|}$ und im zweiten die Ableitung $P_l^{|k|'}$ auftritt, können wir hier nicht wie im skalaren Fall "trennen". Wir schlagen daher Folgendes vor:

Wir formen (4.17) um:

$$y_{l,k}^{(2)}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \left\{ c_l^k P_l^{|k|}(t) \alpha_k^{(2)}(t, \phi) + c_l^k P_l^{|k|'}(t) \beta_k^{(2)}(t, \phi) \right\} \quad (4.18)$$

mit

$$\begin{aligned} \alpha_k^{(2)}(t, \phi) & := \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} e^{ik\phi} ik \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} \\ \beta_k^{(2)}(t, \phi) & := \sqrt{1-t^2} e^{ik\phi} \begin{pmatrix} -t \cos \phi \\ -t \sin \phi \\ \sqrt{1-t^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Kugelflächenfunktionen vom Typ $u = 3$ ergeben sich dann völlig analog, wenn wir

$$\begin{aligned}\alpha_k^{(3)}(t, \phi) &:= p(t, \phi) \times \alpha_k^{(2)}(t, \phi) \\ \beta_k^{(3)}(t, \phi) &:= p(t, \phi) \times \beta_k^{(2)}(t, \phi)\end{aligned}$$

verwenden. Benutzen wir für den Kern folgende Abkürzung

$$\mathbf{K}_{r'} = \mathbf{B}_{r's'}^{n'} \mathbf{T}_{p_{rs}} \tilde{\mathbf{M}}_1(p_{rs}, p_{rs}^{r's'}) + \mathbf{C}_{r's'}^{n'} \mathbf{T}_{p_{rs}} \tilde{\mathbf{M}}_2(p_{rs}, p_{rs}^{r's'}),$$

so erhalten wir wie im skalaren Fall die folgenden Hilfsgrößen und die Matrix \mathbf{M} :

$$\begin{aligned}E_{sr's'\tilde{k}}^{\alpha,u} &= \sum_{r'=0}^{2n'+1} \tilde{\mu}_{r'} \mathbf{K}_{r'} \mathbf{T}_{p_{rs}}^{-1} \alpha_{\tilde{k}}^{(u)}(\cos \tilde{\theta}_{s'}, \tilde{\phi}_{r'}) \\ E_{sr's'\tilde{k}}^{\beta,u} &= \sum_{r'=0}^{2n'+1} \tilde{\mu}_{r'} \mathbf{K}_{r'} \mathbf{T}_{p_{rs}}^{-1} \beta_{\tilde{k}}^{(u)}(\cos \tilde{\theta}_{s'}, \tilde{\phi}_{r'}) \\ D_{sr'l\tilde{k}}^u &= \sum_{s'=1}^{n'+1} \tilde{\nu}_{s'} \left\{ c_l^{\tilde{k}} P_l^{|\tilde{k}|}(\cos \tilde{\theta}_{s'}) E_{sr's'\tilde{k}}^{\alpha,u} + c_l^{\tilde{k}} P_l^{|\tilde{k}|}(\cos \tilde{\theta}_{s'}) E_{sr's'\tilde{k}}^{\beta,u} \right\} \\ C_{sr'l\tilde{k}}^u &= \sum_{|\tilde{k}| \leq l} F_{sl\tilde{k}\tilde{k}} e^{i(k-\tilde{k})\phi_r} D_{sr'l\tilde{k}}^u \\ B_{sk'l\tilde{k}}^{\alpha,u,u'} &= \sum_{r=0}^{2n+1} \mu_r \left(\mathbf{T}_{p_{rs}}^{-1} C_{sr'l\tilde{k}}^u \right) \cdot \overline{\alpha_{k'}^{u'}(\cos \theta_s, \phi_r)} \\ B_{sk'l\tilde{k}}^{\beta,u,u'} &= \sum_{r=0}^{2n+1} \mu_r \left(\mathbf{T}_{p_{rs}}^{-1} C_{sr'l\tilde{k}}^u \right) \cdot \overline{\beta_{k'}^{u'}(\cos \theta_s, \phi_r)} \\ \mathbf{M}_{u'l'k',ulk} &= \sum_{s=1}^{n+1} \nu_s \left(B_{sk'l\tilde{k}}^{\alpha,u,u'} c_{l'}^{k'} P_{l'}^{|k'|}(\cos \theta_s) + B_{sk'l\tilde{k}}^{\beta,u,u'} c_{l'}^{k'} P_{l'}^{|k'|}(\cos \theta_s) \right)\end{aligned}$$

Wir weisen darauf hin, dass die ersten vier Größen vektoriell sind, während die anderen skalar sind. Zum besseren Vergleich mit den Größen in Abschnitt 3.4 verwenden wir jedoch keine unterschiedliche Notation, die diese Eigenschaft hervorhebt.

Betrachten wir den Berechnungsaufwand, so fällt auf, dass dieser ebenfalls $\mathcal{O}(n^5)$ ist, da wir wieder für jedes Matrixelement maximal $2n' + 2$ Größen addieren müssen.

Zur Implementation der auftretenden, vektoriellen Größen, insbesondere der Kugelflächenfunktionen, verweisen wir auf den Anhang 8.3 und die Dissertation von Fengler [12].

4.4 Gedanken zur Konvergenzanalyse

Bevor wir zur abschließenden Bewertung der vektoriiellen Methode kommen, wollen wir uns in diesem Abschnitt noch kurz mit der Konvergenzanalyse des Verfahrens beschäftigen. Auf Grund der engen Verwandtschaft unserer Methode zur Spektralrandintegralmethode von Graham und Sloan (siehe [21]) scheint es sinnvoll, ihren Konvergenzbeweis genauer zu untersuchen. Diesen Weg gehen auch Ganesh und Hawkins bei ihrer Analyse in [17] und [19].

Betrachten wir zuerst die Integralkerne: Wir verwenden dieselbe Aufteilung des Integraloperators wie Ganesh und Hawkins in [17] (vgl. mit (4.3)). Daher können wir ihr Resultat aus dem Anhang B übernehmen und wissen, dass die Kerne genügend glatt sind. Der Beweis dieser Glattheit geht auf Graham und Sloan zurück ([21], Lemma 4.6) und wird analog geführt wie im Beweis zu Lemma 3.2.

Nach Sloan (private Kommunikation im Januar 2007), sind zwei weitere Punkte ausschlaggebend für den Beweis der superalgebraischen Konvergenzordnung im skalaren Fall:

- 1.) Für die Norm des Approximationsoperators gilt

$$\|\mathcal{L}_n\|_\infty \leq c n^{1-\epsilon} \quad \text{mit } \epsilon > 0.$$

- 2.) Für Funktionale der Form

$$\mathcal{I}_H(F) := \int_0^{2\pi} \int_0^\pi F(\theta, \phi) H(\theta) d\theta d\phi$$

mit stetiger Kernfunktion H und $F \in C(A)$ gilt:

$$\mathcal{I}_H(\tilde{\mathcal{L}}_n T) = \mathcal{I}_H(T), \quad \text{für alle } T \in \mathbb{T}_n, \quad (4.19)$$

wobei \mathbb{T}_n den Raum der komplexwertigen, trigonometrischen Polynome vom Grad kleiner gleich n in θ und ϕ bezeichnet, die reflexionssymmetrisch sind, d.h. es gilt $T(\theta, \phi) = T(-\theta, \phi + \pi)$ für alle $\theta, \phi \in \mathbb{R}$.

Wir betrachten diese beiden Punkte nun etwas genauer:

Wienert hatte in seiner Dissertation ([64], 1990) nur eine Normabschätzung der Form $\|\mathcal{L}_n\|_\infty \leq Cn^2$ zur Verfügung. Dies ist ein Grund dafür, dass er nicht die Konvergenz seiner Nyström-Methode zeigen konnte. Die Forderung, dass die Norm von der Ordnung $\mathcal{O}(n^{1-\epsilon})$ ist, geht an mehreren Stellen im Konvergenzbeweis von Graham und Sloan ein:

- beim Existenzbeweis einer Lösung zum ursprünglichen und zum semidiskreten Galerkin-Verfahren (Thm. 3.1); diese Aussage wird anschließend dazu benötigt, die Existenz einer Lösung des volldiskreten Verfahrens zu zeigen (Abschnitt 4.3);
- bei der Abschätzung zur Approximationsgüte des diskreten Integraloperators (Thm. 4.2);
- beim Beweis der superalgebraischen Konvergenz des volldiskreten Galerkin-Verfahrens (Abschnitt 4.3);

Gerade beim ersten Punkt, der letztendlich auch im Konvergenzbeweis zum volldiskreten Verfahren benötigt wird, lässt sich der Beweis mit einer schlechteren Normabschätzung der Ordnung $\mathcal{O}(n^\alpha)$ ($\alpha > 1$) nicht mehr führen. Auch bei den Konvergenzuntersuchungen von Ganesh und Hawkins spielt dies eine wichtige Rolle. In [17] verwenden sie komponentenweise skalare Kugelflächenfunktionen zur Diskretisierung und sind daher in der Lage, die Ergebnisse für \mathcal{L}_n aus Satz 2.13 auf ihren vektoriellen Operator zu übertragen ([17], (A.10)). Bei ihrer Hybridmethode benutzen sie zwar zur Diskretisierung des Integraloperators wieder die komponentenweise definierten Kugelflächenfunktionen, als Ansatzraum ihres Galerkin-Verfahrens fungiert aber der Raum der vektoriellen Kugelflächenfunktionen nach Definition 2.20. Deshalb tritt hier auch der vektorielle Approximationsoperator \mathbf{L}_n aus (2.30) auf. Am Ende von Abschnitt 3.2 in [19] erwähnen sie, dass sich die Konvergenzbetrachtungen aus [17] übertragen lassen, falls - wie beim skalaren Operator - auch $\|\mathbf{L}_n\|_\infty = \mathcal{O}(n^{1-\epsilon})$ mit $\epsilon > 0$ gilt, wovon sie ohne weiteren Beweis ausgehen.

Unsere Betrachtungen aus Abschnitt 2.3.4 und die Überlegungen aus dem Anhang 8.2 zeigen jedoch, dass wir in diesem Fall nicht ohne weiteres die skalaren Ergebnisse übertragen können. Sie deuten sogar eher darauf hin, dass dies nicht möglich ist. Da es, soweit wir wissen, keine weiteren Aussagen zur Normabschätzung für $\mathbf{L}_n : t(\partial B) \rightarrow t(\partial B)$ gibt, können wir bisher nur

$$\|\mathbf{L}_n\|_\infty \leq c n^{3/2} \quad (4.20)$$

verwenden, was nicht ausreichend ist. Zur Frage, wie scharf diese Abschätzung ist, verweisen wir auf Abschnitt 2.3.4. Hier gehen wir auch weiter darauf ein, wie ein Beweis, der die Optimalität von (4.20) zeigt, aussehen kann.

Neben der Frage nach der Approximationsgüte des Operators \mathbf{L}_n , ist Punkt 2.) genauso entscheidend. Um festzustellen, wie gut der diskrete Integraloperator \mathcal{M}_n den Integraloperator \mathcal{M} approximiert, wird Eigenschaft (4.19) im Beweis zu Thm. 4.2 in [21] benötigt: Das "Herzstück der Analysis" in diesem Beweis ist, dass im Integral nach (4.19) trigonometrische Polynome ergänzt werden können. Anschließend werden dann die guten Approximationseigenschaften dieser Polynome ausgenutzt,

um die gewünschte Approximationsgüte von $\mathcal{M}_{n'}$ zu erhalten.

Es stellt sich nun die Frage, ob Eigenschaft (4.19) im vektoriellen Fall auch gültig ist. Ein erstes Problem taucht auf, wenn wir analog zum Raum \mathbb{T}_n vektorielle trigonometrische Polynome verwenden wollen. Für skalare Kugelflächenfunktionen gibt Satz 2.6 den Zusammenhang zu sphärischen Polynomen und somit zum Raum \mathbb{T}_n an (siehe auch [21], (4.26)). Nach Satz 2.21 gilt Ähnliches für die vektoriellen Kugelflächenfunktionen nicht.

Wir versuchen daher zunächst einmal zu klären, ob Eigenschaft (4.19) überhaupt für vektorielle Kugelflächenfunktionen gilt. Hierzu finden wir bei Ganesh und Hawkins ([17], (A.7) und Remark 2), dass dies für die komponentenweise definierten Kugelflächenfunktionen der Fall ist, aber bei vektoriellen Kugelflächenfunktionen, wie wir sie verwenden, nicht gilt. Leider wird hierauf nicht näher eingegangen.

Laut Sloan (private Kommunikation im Januar 2007) besteht die entscheidende Eigenschaft, die eine nicht konstante Funktion besitzen muss, damit (4.19) gilt darin, dass die Rechteckregel bzgl. der ϕ -Integration exakt ist und gleichzeitig mit dem Integral verschwindet (vgl. auch [21], Lemma 4.10 und 4.11). Deshalb betrachten wir nun die Integration von vektoriellen Kugelflächenfunktionen bzgl. ϕ bei festem θ :

Für Kugelflächenfunktionen vom Typ $i = 2$ finden wir bei Fengler ([12], (15.3)):

$$y_{l,k}^{(2)}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} c_l^k P_l^{|k|}(t) e^{ik\phi} ik \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{pmatrix} + \sqrt{1-t^2} c_l^k P_l^{|k|'}(t) e^{ik\phi} \begin{pmatrix} -t \cos \phi \\ -t \sin \phi \\ \sqrt{1-t^2} \end{pmatrix} \right\}, \quad (4.21)$$

wobei $t = \cos \theta$ verwendet wird. Wählen wir nun z.B. $l, k = 1$, so erhalten wir bei festem $t \in [-1, 1]$:

$$\int_0^{2\pi} y_{l,k}^{(2)}(t, \phi) d\phi = \frac{c_1^1}{\sqrt{2}} (\pi + t^2 \pi) \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.22)$$

Dieser Ausdruck verschwindet jedoch für kein $t \in [-1, 1]$. Daher besitzen die vektoriellen Kugelflächenfunktion nicht die entscheidende Eigenschaft, die nach Sloan zum Beweis von (4.19) nötig ist.

Zusammenfassend haben wir also in diesem Abschnitt festgestellt, dass zum Beweis der Konvergenz unserer vektoriellen Methode nach Graham und Sloan die beiden wichtigsten Eigenschaften (vermutlich) nicht erfüllt sind. Daher kann ohne weiteres

zunächst einmal keine komplette Konvergenzanalyse durchgeführt werden. Einen wichtigen Schritt zur Klärung der Konvergenzfrage haben wir in Abschnitt 2.3.4 gemacht, indem wir versucht haben, die Frage nach der Lebesgue-Konstante von \mathbf{L}_n zu beantworten. Jedoch gibt es auch hier noch offene Punkte bzgl. der Normabschätzung der orthogonalen Projektion, die zuerst geklärt werden sollten. Wird hierbei herausgefunden, dass tatsächlich nur (4.20) gilt, so muss ein komplett neuer Konvergenzbeweis, der sich nicht an Graham und Sloan orientiert, gefunden werden.

4.5 Bewertung

Kommen wir nun zur abschließenden Bewertung der vektoriellen Methode:

Wir haben, wie auch schon in Kapitel drei, besonderen Wert darauf gelegt, die tangentielle Natur der Integralgleichung zu erhalten und auszunutzen. Dies ist uns mit dem in diesem Kapitel vorgestellten Verfahren gelungen. Mit Hilfe der Abbildungseigenschaften der Funktionalmatrix (4.9) und den angepassten Transformationen aus Definition 4.3 haben wir erreicht, dass die transformierte Integralgleichung ihre tangentialen Eigenschaften auch auf der Sphäre behält. Dies führte dazu, dass uns bei der vektoriellen Methode tangentielle Kugelflächenfunktionen vom Typ $i = 2, 3$ genügt haben. Damit ist dieses Verfahren das erste, welches nur mit tangentialen Ansatzfunktionen arbeitet und trotzdem auf allgemeinere Streuobjekte angewendet werden kann.

Ziehen wir nun einen Vergleich zu anderen Spektralverfahren für die Maxwell-Gleichungen: Die 1996 von Nestel vorgeschlagene Methode in seiner Dissertation [49] kann nur auf Kugeln angewendet werden und wurde praktisch nie getestet. Sie ist eher als ein erster Versuch zu sehen, die Ergebnisse der akustischen Streuung auf den elektromagnetischen Fall zu übertragen. Daher wollen wir unser Verfahren mit den Arbeiten von Ganesh und Hawkins ([17], [18] und [19]) vergleichen. Als Erstes fällt sicherlich auf, dass in [18] und [19] auch mit normalen Kugelflächenfunktionen gearbeitet wird. Dies hat gegenüber unserer Methode den Nachteil, dass die Dimension der verwendeten Ansatzräume größer ist, wodurch sich auch das diskrete Gleichungssystem am Ende des Verfahrens vergrößert. Es spricht aber noch ein zweiter Grund gegen die Verwendung von normalen Ansatzfunktionen: Die Integralgleichung besitzt tangentialen Charakter, daher ist es das Natürlichste, dass bei der Diskretisierung nur tangentielle Vektorfelder verwendet werden.

Neben diesem auffälligsten Unterschied gibt es aber noch weitere: Durch eine genaue theoretische Betrachtung der verwendeten vektoriellen Kugelflächenfunktionen, die wir im Grundlagenkapitel durchgeführt haben, waren wir in der Lage, auch im vektoriellen Fall die skalare Quadraturformel zu verwenden. Ganesh und Hawkins benutzen zwar auch die Gauß-Rechteck-Regel, jedoch mit $2(n+2)^2$ Quadraturpunk-

ten, was $4n + 6$ Punkte mehr sind als bei uns. Nach Lemma 2.37 genügt aber schon unsere geringere Anzahl an Quadraturpunkten.

Wir hatten zu Beginn der Betrachtung bereits die angepasste Transformation aus Definition 4.3 erwähnt: Betrachten wir Satz 2.34, so scheint diese Modifikation nahezu liegen. Bei Ganesh und Hawkins wird jedoch die aus dem skalaren Verfahren bekannte Transformation benutzt.

Trotz dieser Unterschiede und scheinbaren Nachteile belegen die numerischen Ergebnisse von Ganesh und Hawkins, dass ihre Verfahren gute Ergebnisse liefern und eine akzeptable Konvergenzordnung besitzen. Nur das Verfahren aus [18] zeigt eine leicht verschlechterte Konvergenz. Die anderen Verfahren, bei denen komponentenweise definierte Kugelflächenfunktionen bzw. eine Kombination mit den vektoriellen Kugelflächenfunktionen verwendet wird, konvergieren für glatte Daten superalgebraisch. In [17] findet sich sogar eine komplette Konvergenzanalyse hierzu. Auf die Probleme im Zusammenhang mit einem Konvergenzbeweis für das Verfahren aus [19] sind wir im letzten Abschnitt schon eingegangen.

Für unsere vektorielle Methode liegen leider noch keine numerischen Ergebnisse vor und wie wir in Abschnitt 4.4 bereits ausgeführt haben, ist auch die Frage nach der Konvergenz bzw. der Konvergenzgeschwindigkeit noch völlig offen. Unabhängig davon, was zukünftige Untersuchungen und numerische Beispiele ergeben werden, scheint es dennoch interessant zu sein, die genannten Vorteile unserer Methode auf die Verfahren von Ganesh und Hawkins zu übertragen und mit ihren Ideen zu kombinieren.

Vergleichen wir nun zum Abschluss noch die vektorielle Methode mit dem skalaren Verfahren aus Kapitel drei: Bei der ursprünglich vorgeschlagenen skalaren Methode stellten wir eine schlechtere Konvergenz fest. Nach einer genauen Analyse des Verfahrens konnten wir diese Konvergenzresultate erklären und haben entsprechende Modifikationen angegeben. In der Beurteilung in Abschnitt 3.7.3 haben wir gesehen, dass diese Modifikationen zwar die ursprünglichen Probleme beseitigen, jedoch dafür das Verfahren komplizierter werden lassen. In diesem Punkt liegt sicherlich ein klarer Vorteil bei der vektoriellen Methode. Ein weiterer Grund, der für die vektorielle Methode spricht, ist, dass die Verwendung von Vektorfeldern, hier speziell tangentialen Kugelflächenfunktionen, natürlicher zu sein scheint als eine komponentenweise Betrachtung, bei der zuerst das Objekt in Teile zerlegt werden muss.

Wir haben zu Beginn dieses Abschnittes schon erwähnt, dass wir die Abbildungseigenschaften der Funktionalmatrix zur Parametrisierung q ausnutzen. Hier könnte bei der praktischen Umsetzung unseres vektoriellen Verfahrens ein Problem auftreten: Bei den bisherigen theoretischen Betrachtungen und Herleitungen genügten uns die Existenz und die Eigenschaften der Funktionalmatrix. Wollen wir unser Ver-

fahren jedoch implementieren, so sind wir gezwungen diese Matrix konkret für das gegebene Streuobjekt auszurechnen. Aus der höheren Analysis (siehe z.B. Jänich [30]) wissen wir, dass die Parametrisierung q als eine Abbildung zwischen den beiden zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten ∂B und ∂D aufzufassen ist. Die Ableitung einer solchen Funktion wird mit Hilfe von Karten, die unsere Objekte beschreiben, bestimmt. Wir haben bisher immer mit einer globalen Karte gearbeitet. Dies macht keine Probleme bei den Operationen, die wir bisher, z.B. bei der skalaren Methode, durchgeführt haben, wie etwa die Integration über Mannigfaltigkeiten. Wollen wir jedoch differenzieren, so könnte es Probleme geben, da hierbei in der Regel mehrere Karten verwendet werden müssen. Dieser Umstand könnte dazu führen, dass wir auch bei der vektoriellen Methode gezwungen sind, unser Streuobjekt in mehrere Teile, die von unterschiedlichen, glatt überlappenden Karten beschrieben werden, zu zerlegen.

Zusammenfassend können wir sagen, dass unsere vektorielle Methode sicher eine echte Alternative zu den bereits bekannten Verfahren bildet und neue Impulse gibt. Sollten sich jedoch bei einer zukünftigen Konvergenzanalyse oder bei der praktischen Umsetzung unsere oben geäußerten Bedenken bewahrheiten, so ist es trotzdem lohnenswert, die Grundideen und Besonderheiten unseres Verfahrens mit den anderen Methoden zu kombinieren. Falls wir bei der Implementation dazu gezwungen sein sollten, das Streuobjekt zu zerlegen, so gilt hier dieselbe Feststellung, die wir bereits in Abschnitt 3.7.3 gemacht haben: Die Zerlegung und die Herleitung eines entsprechenden Verfahrens sind sicherlich nicht trivial, wie auch schon Ganesh und Hawkins in [17] festgestellt haben, jedoch könnte dies ein wichtiger Schritt sein, um in Zukunft mit den Spektralmethoden auch andere Streuobjekte, die nicht global über ∂B parametrisiert werden können, zu behandeln.

Kapitel 5

Ein inverses Streuproblem als Anwendung

Wir betrachten nun ein inverses elektromagnetisches Streuproblem als Anwendungsbeispiel für die Verfahren, die wir in Kapitel drei und vier entwickelt haben. Dabei beschreiben wir zuerst das inverse Problem genauer und zeigen anschließend, dass dieses Problem äquivalent zu einem System von zwei Integralgleichungen ist. Zur Lösung der ersten Gleichungen können wir unsere Verfahren verwenden. Der Integraloperator in der zweiten Gleichung besitzt einen sehr glatten Kern und kann daher recht einfach mit Hilfe der Gauß-Rechteck-Regel aus Abschnitt 2.3.2 behandelt werden.

Die Idee, das inverse Problem äquivalent als System von Integralgleichungen zu formulieren, geht auf Kreß und Rundell ([38], 2005) zurück. Sie haben diese Methode für ein inverses Problem zur Laplace-Gleichung entwickelt. Ivanyshyn und Kreß ([29], 2006) haben dann gezeigt, dass sich diese Vorgehensweise auch auf zweidimensionale inverse, akustische Streuprobleme übertragen lässt. Wir nutzen diese Ideen jetzt erstmals zur Lösung eines inversen, elektromagnetischen Streuproblems. Hierbei können wir jedoch nicht völlig analog zu Ivanyshyn und Kreß vorgehen, da wir das Auftreten des elektrischen Dipoloperators \mathcal{N} (siehe (5.6)) vermeiden wollen; denn dieser ist nicht schwach singulär, sondern hypersingulär und kann daher mit unseren Lösungsmethoden nicht behandelt werden.

In diesem Kapitel weichen wir leicht von unserer üblichen Notation ab. Wir verwenden für das elektrische Feld E und das magnetische Feld H die traditionelle Notation mit Großbuchstaben, obwohl es sich natürlich um Vektorfelder handelt. Die weitere Notation in diesem Kapitel orientiert sich an Colton/Kreß [7] und Ivanyshyn/Kreß [29].

5.1 Das inverse Streuproblem

Wir beginnen mit dem direkten Streuproblem, welches wir bereits in der Einleitung hergeleitet haben und geben anschließend hierzu das inverse Problem, das wir betrachten wollen, an:

Es sei $D \subset \mathbb{R}^3$ ein perfekt leitendes, einfach zusammenhängendes Streuobjekt, das zunächst einen C^2 -glatten Rand ∂D besitzen soll. Beim direkten Streuproblem ist eine einfallende elektromagnetische Welle E^i und H^i bekannt und wir suchen das Gesamtfeld $E = E^i + E^s$ und $H = H^i + H^s$, welches die reduzierten Maxwell Gleichungen

$$\operatorname{rot}E - i\kappa H = 0, \operatorname{rot}H + i\kappa E = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$$

löst und auf dem Rand ∂D die Randbedingung

$$\nu \times E = 0 \quad \text{auf } \partial D$$

erfüllt. Weiterhin soll das gestreute Feld E^s und H^s eine der Silver-Müller-Ausstrahlungsbedingungen (1.2) oder (1.3) erfüllen, also eine ausstrahlende Welle sein.

Bei Colton und Kreß ([7], Thm. 6.8) finden wir, dass dann die gestreute Welle E^s und H^s die folgende Asymptotik besitzt:

$$\begin{aligned} E^s(x) &= \frac{e^{i\kappa|x|}}{|x|} \left\{ E_\infty(\hat{x}) + O\left(\frac{1}{|x|}\right) \right\}, \quad |x| \rightarrow \infty, \\ H^s(x) &= \frac{e^{i\kappa|x|}}{|x|} \left\{ H_\infty(\hat{x}) + O\left(\frac{1}{|x|}\right) \right\}, \quad |x| \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

Der Grenzwert ist gleichmäßig in alle Richtungen zu verstehen und \hat{x} bezeichnet den auf eins normierten Vektor $x \in \mathbb{R}^3$. Wir nennen E_∞ das elektrische Fernfeld und H_∞ das magnetische Fernfeld. E_∞ und H_∞ sind Tangentialfelder auf der Kugel und orthogonal zueinander.

Die Fernfelder bilden nun neben der bekannten, einfallenden Welle E^i , H^i die Messdaten, mit deren Hilfe wir das unbekannte Streuobjekt rekonstruieren wollen. Das inverse, elektromagnetische Streuproblem wird nun wie folgt formuliert:

Wir wollen mit Hilfe einer einfallenden Welle E^i , H^i und dem zugehörigen Fernfeld E_∞ bzw. H_∞ die unbekannte Oberfläche ∂D des Streuobjekts D bestimmen.

Bemerkung 5.1 *Bei dieser Problemstellung soll der unbekannte Rand durch Kenntnis des Fernfeldes bei nur einer einfallenden Welle rekonstruiert werden. Die Eindeutigkeit dieses inversen Problems ist nach Cakoni und Colton noch nicht geklärt und ein offenes Problem (siehe [4], Abschnitt 3).*

5.2 Das Problem als System von Integralgleichungen

Ziel dieses Abschnittes ist es, zu zeigen, dass wir unser inverses Streuproblem äquivalent als System von zwei Integralgleichungen formulieren können. Wir geben hierzu zuerst die längere Herleitung an und fassen schließlich am Ende des Abschnittes die gefundenen Ergebnisse in Satz 5.2 zusammen.

Ivanyshyn und Kreß wählen in [29] als Ausgangspunkt ihrer Herleitung das Huygens'sche Prinzip für akustische Wellen (siehe z.B. Colton/Kreß [7], Thm. 3.12). Das entsprechende Prinzip für elektromagnetische Wellen können wir nicht verwenden, da wir den hypersingulären elektrischen Dipoloperator \mathcal{N} vermeiden wollen. Wir starten daher mit den Stratton-Chu-Formeln (siehe [7], Thm. 6.2 und 6.6):

Für Lösungen $E, H \in c^1(D) \cap c(\bar{D})$ zur Maxwell-Gleichung gilt:

$$\begin{aligned} E(x) = & -\operatorname{rot} \int_{\partial D} \nu(y) \times E(y) \Phi(x, y) ds(y) \\ & + \frac{1}{i\kappa} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \int_{\partial D} \nu(y) \times H(y) \Phi(x, y) ds(y), \quad x \in D \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} H(x) = & -\operatorname{rot} \int_{\partial D} \nu(y) \times H(y) \Phi(x, y) ds(y) \\ & - \frac{1}{i\kappa} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \int_{\partial D} \nu(y) \times E(y) \Phi(x, y) ds(y), \quad x \in D. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Für ausstrahlende Lösungen $E, H \in c^1(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cap c(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ gilt:

$$\begin{aligned} E(x) = & \operatorname{rot} \int_{\partial D} \nu(y) \times E(y) \Phi(x, y) ds(y) \\ & - \frac{1}{i\kappa} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \int_{\partial D} \nu(y) \times H(y) \Phi(x, y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D} \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} H(x) = & \operatorname{rot} \int_{\partial D} \nu(y) \times H(y) \Phi(x, y) ds(y) \\ & + \frac{1}{i\kappa} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \int_{\partial D} \nu(y) \times E(y) \Phi(x, y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Als Nächstes wiederholen wir die Definition des magnetischen Dipoloperators \mathcal{M} und führen den elektrischen Dipoloperator \mathcal{N} ein:

$$(\mathcal{M}a)(x) := 2 \int_{\partial D} \nu(x) \times \operatorname{rot}_x \{a(y) \Phi(x, y)\} ds(y), \quad x \in \partial D \quad (5.5)$$

$$(\mathcal{N}b)(x) := 2\nu(x) \times \operatorname{rot} \operatorname{rot} \int_{\partial D} \nu(y) \times b(y) \Phi(x, y) ds(y), \quad x \in \partial D. \quad (5.6)$$

Mit Hilfe der Sprungbeziehungen dieser Operatoren und den Stratton-Chu-Formeln erhalten wir die sogenannten Calderon-Projektoren (siehe [50], Thm 5.4 in Section 1.4.1):

Für Lösungen $E, H \in c^1(D) \cap c^{0,\alpha}(\bar{D})$ zu den Maxwell-Gleichungen gilt:

$$\begin{pmatrix} \nu \times E \\ \nu \times H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathcal{M} & \frac{1}{i\kappa} \mathcal{N}Q \\ -\frac{1}{i\kappa} \mathcal{N}Q & -\mathcal{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu \times E \\ \nu \times H \end{pmatrix} \quad (5.7)$$

Analog gilt für ausstrahlende Lösungen $E, H \in c^1(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cap c^{0,\alpha}(\mathbb{R}^3 \setminus D)$

$$\begin{pmatrix} \nu \times E \\ \nu \times H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{M} & -\frac{1}{i\kappa} \mathcal{N}Q \\ \frac{1}{i\kappa} \mathcal{N}Q & \mathcal{M} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu \times E \\ \nu \times H \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

Der Operator Q ist hier wie folgt definiert:

$$Qa := a \times \nu. \quad (5.9)$$

Das einfallende Feld erfüllt (5.7) in D und das gestreute Feld (5.8) in $\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$. Daher können wir die zweite Gleichung von (5.7) für E^i und H^i und die zweite Gleichung von (5.8) für E^s und H^s betrachten. Als Erstes bilden wir das Kreuzprodukt dieser Gleichungen mit der (nach außen weisenden) Normalen ν . Anschließend subtrahieren wir die Gleichungen. Berücksichtigen wir die Randbedingung für ein perfekt leitendes Streuobjekt, $\nu \times E = 0$, so erhalten wir schließlich die sogenannte Magnetfeldgleichung

$$b + \mathcal{M}'b = 2(\nu \times H^i) \times \nu \quad (5.10)$$

für die tangentielle Komponente $b := (\nu \times H) \times \nu$ des magnetischen Gesamtfeldes. Mit \mathcal{M}' bezeichnen wir den zu \mathcal{M} adjungierten Operator bzgl. der Bilinearform

$$B(a, b) := \int_{\partial D} a \cdot b ds.$$

Es gilt folgende Formel (siehe Colton/Kreß [7] (6.44)):

$$\mathcal{M}' = Q\mathcal{M}Q.$$

Wie wir sehen, tritt also der magnetische Dipoloperator, den wir mit unseren Lösungsverfahren behandeln können, in der Magnetfeldgleichung auf.

Zur Herleitung der zweiten Gleichung betrachten wir das magnetische Fernfeld H_∞ . Hierzu verwenden wir nun doch noch das Hygens'sche Prinzip für elektromagnetische Wellen (siehe Colton/Kreß [7], Thm 6.22):

Es seien E^i, H^i zwei ganze Streulösungen der Maxwell Gleichungen für ein perfekt leitendes Streuobjekt. Dann gilt für das magnetische Fernfeld:

$$H_\infty(\xi) = \frac{i\kappa}{4\pi} \xi \times \int_{\partial D} \nu(y) \times H(y) e^{-i\kappa \xi \cdot y} ds(y), \quad \xi \in \partial B. \quad (5.11)$$

Definieren wir nun den magnetischen Fernfeldoperator durch

$$(S_\infty f)(\xi) := \frac{i\kappa}{4\pi} \xi \times \int_{\partial D} f(y) e^{-i\kappa \xi \cdot y} ds(y), \quad \xi \in \partial B, f \in c(\partial D), \quad (5.12)$$

so finden wir, dass die Lösung ∂D des inversen Streuproblems und die unbekannte Tangentialkomponente $b := (\nu \times H) \times \nu$ des totalen Magnetfeldes auf dem Rand folgendes Integralgleichungssystem lösen:

$$b + \mathcal{M}'b = 2(\nu \times H^i) \times \nu \Big|_{\partial D} \quad (5.13)$$

$$S_\infty(\nu \times b) = H_\infty \quad (5.14)$$

Um die Äquivalenz zwischen diesem Integralgleichungssystem und unserem inversen Problem endgültig zu zeigen, nehmen wir nun an, dass der Rand ∂D und das Vektorfeld b das Integralgleichungssystem lösen. Dann müssen wir nachweisen, dass wir damit auch eine Lösung des inversen Problems gefunden haben.

Zuerst bemerken wir, dass b auf Grund der rechten Seite von (5.13) und der Abbildungseigenschaft des Operators $\mathcal{M}' = Q\mathcal{M}Q$, ein tangenciales Vektorfeld ist.

Da die einfallende Welle H^i bekannt ist, kennen wir auch die Tangentialkomponente auf dem Rand:

$$\nu \times H^i \Big|_{\partial D}.$$

Wir definieren dann H^s und E^s als Lösung des äußeren Randwertproblems mit der folgenden Randbedingung:

$$\nu \times H^s \Big|_{\partial D} = \nu \times b - \nu \times H^i \Big|_{\partial D}. \quad (5.15)$$

Für die Felder E^s, H^s gelten in $\mathbb{R}^3 \setminus D$ die Stratton-Chu-Formeln (5.3) und (5.4). Die bekannte einfallende Welle E^i, H^i können wir durch (5.1) und (5.2) in D darstellen.

Mit denselben Umformungen wie vorher erhalten wir die Calderon-Projektionen für E^i , H^i und E^s , H^s (siehe (5.7) und (5.8)). Kombinieren wir wieder die zweiten Gleichungen dieser Projektionen, so ergibt sich die folgende Gleichung:

$$b + \mathcal{M}'b = 2(\nu \times H^i) \times \nu + \frac{1}{i\kappa} \mathcal{N}Q(\nu \times E) \times \nu,$$

wobei wir

$$b = \left(\nu \times (H^s + H^i) \Big|_{\partial D} \right) \times \nu$$

nach (5.15) und $E := E^s + E^i$ auf ∂D verwendet haben. Da b nach Voraussetzung Gleichung (5.13) löst, ergibt sich weiter

$$\frac{1}{i\kappa} \mathcal{N}Q(\nu \times E) \times \nu = 0. \quad (5.16)$$

Der Operator \mathcal{N} bildet nach Colton und Kreß ([7], Thm. 6.17) tangentielle Vektorfelder auf tangentielle Vektorfelder ab, also ist (5.16) genau dann erfüllt, wenn

$$\mathcal{N}Q(\nu \times E) = 0 \quad (5.17)$$

gilt, da $Q(\nu \times E)$ tangential ist. Der Operator $\mathcal{N}Q$ ist injektiv, falls κ kein innerer Maxwell-Eigenwert ist (siehe [50], Chapter 1.4.2, §2). In diesem Fall erhalten wir aus (5.17)

$$\nu \times E = 0 \quad \text{auf } \partial D,$$

also erfüllt unser Vektorfeld E die Randbedingung für ein perfekt leitendes Streuobjekt. Nach Gleichung (5.14) besitzen E und $H := H^s + H^i$ auch das korrekte Fernfeld H_∞ .

Damit haben wir nun gezeigt, dass die Lösung ∂D und b des Integralgleichungssystems (5.13) und (5.14) das inverse Streuproblem löst, vorausgesetzt κ ist kein innerer Maxwell-Eigenwert.

Wir fassen dieses Ergebnis im folgenden Satz zusammen:

Satz 5.2 *Es sei κ kein innerer Maxwell-Eigenwert, dann ist das inverse, elektromagnetische Streuproblem äquivalent zum Integralgleichungssystem*

$$b + \mathcal{M}'b = 2(\nu \times H^i) \times \nu \Big|_{\partial D} \quad (5.18)$$

$$S_\infty(\nu \times b) = H_\infty. \quad (5.19)$$

5.3 Numerische Lösung des inversen Problems

Wir wollen nun das inverse elektromagnetische Streuproblem numerisch lösen. Hierzu verwenden wir die Äquivalenz zum Integralgleichungssystem aus Satz 5.2. Wir

nehmen dazu, wie auch schon in Kapitel drei und vier an, dass κ kein Maxwell Eigenwert ist. Betrachten wir nun die Gleichungen (5.18) und (5.19) etwas genauer, so stellen wir Folgendes fest:

Bei fest vorgegebenem, C^2 -glattem Rand ∂D besitzt die erste Gleichung

$$b + \mathcal{M}'b = 2(\nu \times H^i) \times \nu \Big|_{\partial D}$$

eine eindeutige Lösung $b \in t(\partial D)$. Diese Lösung hängt außerdem stetig von der rechten Seite ab, d.h. die erste Integralgleichung ist "gut gestellt" (well posed).

Sehen wir uns nun die zweite Gleichung

$$S_\infty(\nu \times b) = H_\infty$$

an, so fällt auf, dass der Integraloperator S_∞ einen sehr glatten Kern besitzt (Exponentialfunktion). Daher ist diese Gleichung, als Integralgleichung erster Art mit kompaktem Integraloperator, stark schlecht gestellt (severely ill-posed).

Es bietet sich nun das folgende iterative, numerische Verfahren zur Lösung des inversen Problems an:

Ausgehend von einer Startnäherung für den unbekanntem Rand ∂D berechnen wir mit Hilfe einer der beiden Methoden aus Kapitel drei bzw. vier die eindeutige Lösung b der ersten Integralgleichung. Anschließend verwenden wir diese Lösung b in einer linearisierten Version der zweiten Integralgleichung, um eine neue Näherung für den Rand ∂D zu bekommen. Diese Näherung verwenden wir dann wieder in der ersten Gleichung und iterieren.

Diesen iterativen Algorithmus wollen wir nun näher beschreiben. Als Erstes führen wir eine spezielle Parametrisierung für die Näherungen an den unbekanntem Rand ein. Bezeichnen wir mit

$$p(\theta, \phi) := (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)^T$$

wieder die üblichen Kugelkoordinaten und beschränken uns auf sternförmige Gebiete, so können wir den Rand wie folgt parametrisieren:

$$q(\theta, \phi) := r(\theta, \phi) p(\theta, \phi).$$

Wir suchen also eine Näherungslösung für die Radiusfunktion r . Da wir die Verfahren aus Kapitel drei und vier verwenden, fordern wir ab jetzt zusätzlich, dass diese Radiusfunktion C^∞ -glatt ist.

Auf die numerische Lösung der ersten Integralgleichung (5.18) gehen wir nicht näher

ein. Wir verweisen hierzu auf Kapitel drei und vier bzw. die darin angegebene Literatur. Wir betrachten also sofort die Linearisierung von (5.19). Hierzu führen wir als Abkürzung die vektorielle Dichte

$$\psi := (\nu \times b \circ q) J$$

ein, wobei J wie üblich die Jacobi-Determinante der Parametrisierung q der aktuellen Randnäherung bezeichnet. Wir erhalten dann folgende parametrisierte Form für den Fernfeldoperator:

$$(S_\infty \psi)(\tilde{\theta}, \tilde{\phi}) := \frac{i\kappa}{4\pi} p(\tilde{\theta}, \tilde{\phi}) \times \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \psi(\theta, \phi) e^{-i\kappa p(\tilde{\theta}, \tilde{\phi}) \cdot q(\theta, \phi)} \sin \theta \, d\theta \, d\phi.$$

Um die Abhängigkeit von der Radiusfunktion r deutlicher zu machen, bezeichnen wir diesen parametrisierten Operator ab sofort mit $S_\infty(r, \psi)$. Diese Notation verwenden auch Ivanyshyn und Kreß [29]. Nun berechnen wir die Frechet-Ableitung von S_∞ . Nach Potthast [51] erhalten wir:

$$S'_\infty(r, \psi, s) = \frac{i\kappa}{4\pi} p(\tilde{\theta}, \tilde{\phi}) \times \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \psi(\theta, \phi) e^{-i\kappa p(\tilde{\theta}, \tilde{\phi}) \cdot q(\theta, \phi)} p(\tilde{\theta}, \tilde{\phi}) \cdot \zeta(\theta, \phi) \sin \theta \, d\theta \, d\phi.$$

Hierbei bezeichnen wir mit s das gesuchte Update der aktuellen Näherung r an die gesuchte Radiusfunktion. Weiter haben wir

$$\zeta(\theta, \phi) := s(\theta, \phi) \cdot p(\theta, \phi)$$

verwendet. Die linearisierte Version von Gleichung (5.19) sieht dann wie folgt aus:

$$S_\infty(r, \psi) + S'_\infty(r, \psi, s) = H_\infty. \quad (5.20)$$

Wir wollen diese Gleichung nun nach dem Radiusupdate s lösen. Hierzu verwenden wir wieder ein volldiskretes Galerkin-Verfahren. Da s eine skalare Funktion ist, wählen wir den Raum der sphärischen Polynome vom Grad kleiner gleich n als Ansatzraum. Nach Satz 2.6 bilden die skalaren Kugelflächenfunktionen eine Basis für \mathbb{P}_n . Wir machen daher folgenden Ansatz:

$$s(\theta, \phi) := \sum_{l=0}^n \sum_{|k| \leq l} s_{l,k} Y_{l,k}(\theta, \phi).$$

Da wir über die Sphäre bzw. $(\theta, \phi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ integrieren und der Integraloperator S'_∞ einen sehr glatten Kern besitzt, bietet sich zur Approximation die

Gauß-Rechteck-Regel an (siehe Abschnitt 2.3.2 und Satz 2.52). Wir erhalten dann den diskreten Operator:

$$S'_{\infty, N}(r, \psi, s) := \frac{i\kappa}{4\pi} p(\theta, \phi) \times \sum_{r=0}^{2N+1} \sum_{s=1}^{N+1} \mu_r \nu_s \psi_{rs} e^{-i\kappa p(\theta, \phi) \cdot q_{rs}} p(\theta, \phi) \cdot p_{rs} s(\theta_s, \phi_r),$$

wobei wir die Abkürzungen

$$q_{rs} := q(\theta_s, \phi_r), \quad p_{rs} := p(\theta_s, \phi_r) \quad \text{und} \quad \psi_{rs} := \psi(\theta_s, \phi_r)$$

verwendet haben. Fassen wir die rechte Seite zusammen zu:

$$c := H_{\infty} - S_{\infty}(r, \psi)$$

und verwenden das diskrete Skalarprodukt

$$(f, g)_M := \sum_{r=0}^{2N+1} \sum_{s=1}^{N+1} \mu_r \nu_s f(\theta_s, \phi_r) \overline{g(\theta_s, \phi_r)},$$

so ergibt sich schließlich folgendes volldiskrete Galerkin-Verfahren:

Gesucht wird eine Näherungslösung $s_n \in \mathbb{P}_n$, die

$$(S'_{\infty, N}(r, \psi, s_n), w_n)_M = (c, w_n)_M \quad (5.21)$$

für alle $w_n \in \mathbb{P}_n^3$ löst.

Da wir eine skalare Funktion in einer Vektorgleichung suchen, ist dieses System natürlich überbestimmt. Daher verwenden wir zur Lösung die Methode der kleinsten Quadrate. Weiter ist die Integralgleichung (5.20) schlecht gestellt, also wenden wir zusätzlich noch auf das lineare Gleichungssystem, das aus (5.21) resultiert, die Tikhonov-Regularisierung an.

5.4 Bewertung

Lösungsverfahren für akustische inverse Streuproblemen werden bereits seit den 1980er-Jahren untersucht, daher existieren eine Reihe unterschiedlicher Methoden. Diese lassen sich grob in drei Gruppen einteilen:

- Iterative Verfahren
- Dekompositionsmethoden
- Sampling-Verfahren.

Seit etwa zehn Jahren wird nun versucht, diese Methoden vom akustischen Fall auf die verwandten, elektromagnetischen Probleme zu übertragen. Dies ist jedoch trotz der vielen Ähnlichkeiten nicht immer einfach, wie wir in den Kapiteln drei und vier dieser Arbeit gesehen haben, als wir versucht haben, die Spektralrandintegralmethode zu übertragen.

Ein weiteres Beispiel hierfür ist die Faktorisierungsmethode von Kirsch, die zur Gruppe der Sampling-Verfahren gehört. Diese wurde bereits auf viele skalare Probleme, wie die Helmholtzgleichung und die Streuung elastischer Wellen, angewendet (siehe z.B. [23], [25] und [32]), jedoch ergeben sich Schwierigkeiten im elektromagnetischen Fall. Es scheint aber so, als seien dies eher technische Probleme im Theorieteil (Kirsch [33]), da die numerischen Ergebnisse in der Dissertation [13] von Fischer zeigen, dass die Methode in der Praxis gut funktioniert.

Bei der Umsetzung anderer bekannter Verfahren gab es mehr Erfolg: Eine Version der Sampling-Methode nach Colton und Kirsch (Akustik: 1996) für elektromagnetische Probleme kann z.B. bei Colton, Haddar und Monk [6] (2002) gefunden werden. Cakoni kann in [5] mit Hilfe der Sampling-Methode nicht nur die Oberfläche des Streuobjektes, sondern auch physikalische Eigenschaften rekonstruieren. Bereits 1992 findet sich bei Colton und Kreß in der Erstausgabe in [7] in Abschnitt 7.3 eine elektromagnetische Version der Dekompositionsmethode nach Kirsch und Kreß (Akustik: 1987) und auch zu den iterativen, newtonartigen Verfahren können mehrere Arbeiten gefunden werden (siehe z.B. Hohage [27] oder Langer [40]).

Im vorliegenden Kapitel haben wir nun versucht, die relativ neue Lösungsmethode von Kreß und Rundell ([38], 2005) zu übertragen. Diese Methode stellt eine Art Hybridverfahren zwischen den iterativen und den Dekompositionsmethoden dar und nutzt Integralgleichungen. Interessanterweise stellte sich heraus, dass die Übertragung zum elektromagnetischen Fall ohne größere Probleme möglich ist: Die Ergebnisse aus der akustischen Streuung (Ivanyshyn und Kreß, [29], 2006) gelten mehr oder weniger auch für den elektromagnetischen Fall. Der einzige Unterschied besteht darin, dass wir, um den hypersingulären Operator (5.6) zu vermeiden, einen anderen Ausgangspunkt für die Herleitung gewählt haben. Dies führte dann, unter der Voraussetzung, dass κ kein Maxwell-Eigenwert ist, zu einer gut und einer schlecht gestellten Integralgleichung. Bei Ivanyshyn und Kreß im akustischen Fall hingegen wird mit zwei schlecht gestellten Gleichungen gearbeitet und es gibt keine Einschränkung an die Wellenzahl.

Bei unseren weiteren Betrachtungen fiel auf, dass die gut gestellte Gleichung (5.13) mit Hilfe der Spektralrandintegralmethoden aus Kapitel drei und vier gelöst werden kann. Daher haben wir nicht, wie im akustischen Fall, beide Gleichungen linearisiert und simultan gelöst, sondern speziell ausgenutzt, dass wir die erste Gleichung, wenn eine Näherung an den Rand vorgegeben ist, ohne Probleme lösen können.

Nun stellt sich natürlich die Frage, welche Vorgehensweise besser ist: simultanes oder getrenntes Lösen, wobei im letzteren Fall die Gutartigkeit der Gleichung ausgenutzt wird. Diese Frage wird bereits seit längerem für die Laplace-Gleichung und den akustischen Fall diskutiert und es existieren unterschiedliche Meinungen. In [29] beschreiben Ivanyshyn und Kreß beide Versionen, sie wählen jedoch den simultanen Lösungsweg, obwohl das Lösen von zwei kleineren, getrennten Gleichungen schneller ist. Den Grund für ihre Entscheidung liefern die numerischen Ergebnisse, die bei Kreß und Rundell in [38] zu finden sind. Hier wird beobachtet, dass die simultane Lösungsversion leicht bessere Ergebnisse liefert und kleinere Regularisierungsparameter benötigt. In Kürze erscheint jedoch eine Arbeit von Ivanyshyn und Johansson (siehe [28]), in der beide Versionen verglichen werden. Sie kommen zu dem Schluss, dass beide Varianten Vor- und Nachteile besitzen und es vom jeweiligen Problem abhängt, welche Vorgehensweise bessere Ergebnisse liefert, wobei die Unterschiede eher gering sind.

Zu der hier vorgestellten elektromagnetischen Variante existieren bisher noch keine numerischen Ergebnisse, da hierzu noch ein perfekt implementierter Löser zum direkten Problem, wie in Kapitel drei oder vier vorgestellt, fehlt. Auf Grund der Ähnlichkeiten zum akustischen Verfahren ist jedoch zu erwarten, dass die elektromagnetische Methode vergleichbar gute numerische Ergebnisse liefern wird. Interessant wären daher Resultate zum dreidimensionalen, akustischen Fall. Diese existieren bisher aber leider noch nicht, deshalb wird im nächsten Kapitel zunächst einmal die theoretische Seite dieses Problems betrachtet.

Kapitel 6

Zur inversen akustischen Streuung in \mathbb{R}^3

Im vorletzten Kapitel dieser Dissertation verlassen wir die elektromagnetischen Streuprobleme und kommen zur akustischen Streuung. Speziell wollen wir ein Lösungsverfahren für ein akustisches Streuproblem im \mathbb{R}^3 angeben, welches Ähnlichkeiten zum elektromagnetischen Problem in Kapitel fünf besitzt. Wieder überführen wir das inverse Problem in ein äquivalentes System aus zwei Integralgleichungen, die wir dann numerisch lösen können. Wir geben in diesem Kapitel jedoch zwei unterschiedliche Möglichkeiten an:

In Abschnitt 6.2.1 orientieren wir uns an Ivanyshyn und Kreß [29] und zeigen, dass ihr System mit zwei schlecht gestellten Integralgleichungen durch leichte Modifikation auch im \mathbb{R}^3 verwendet werden kann. Danach versuchen wir in Abschnitt 6.2.2 die Herleitung aus Kapitel fünf vom elektromagnetischen Fall auf die Akustik zu übertragen. Als Resultat erhalten wir dann ein System von Integralgleichungen, bei dem eine Gleichung gut und die andere schlecht gestellt ist.

Zur Lösung der beiden Integralgleichungssysteme schlagen wir wieder ein iteratives Verfahren vor. Beim ersten System linearisieren wir beide schlecht gestellten Integralgleichungen und lösen diese dann simultan. Da bei der zweiten Variante die erste Gleichung gut gestellt ist und mit dem Verfahren nach Graham und Sloan [21] gelöst werden kann, wählen wir hier dieselbe Strategie wie in Kapitel fünf. Wir linearisieren also nur die zweite Gleichung und lösen getrennt.

Diese beiden Ansätze wurden für zweidimensionale Streuprobleme bereits verwendet. Ivanyshyn und Kreß [29] lösen ihr System aus zwei schlecht gestellten Gleichungen simultan. Johansson und Sleeman [31] gehen separat vor. Bei ihnen besteht das Integralgleichungssystem jedoch, im Gegensatz zur hier vorgestellten 3d-Version, ebenfalls aus zwei schlecht gestellten Gleichungen. Ein Vergleich dieser beiden Vorgehensweisen kann bei Ivanyshyn und Johansson [28] gefunden werden.

Da wir bisher keine akustischen Streuprobleme behandelt haben, geben wir zuerst eine kurze Problembeschreibung an. Für eine tiefer gehende Einführung verweisen wir auf Colton und Kreß [7]. In diesem Kapitel übernehmen wir die übliche Schreibweise für akustische Streuprobleme aus [7], daher notieren wir hier die akustischen Wellen u , u^i und u^s mit kleinen Buchstaben, obwohl es skalare Funktionen sind.

6.1 Problembeschreibung

Wir betrachten, wie schon in Kapitel fünf, ein Streuobjekt $D \subset \mathbb{R}^3$, das einfach zusammenhängend ist und einen C^2 -glatten Rand ∂D besitzt. Beim direkten Streuproblem ist eine einfallende akustische Welle u^i bekannt und wir suchen das Gesamtfeld $u = u^i + u^s$, welches die Helmholtz-Gleichung

$$\Delta u + \kappa^2 u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$$

löst und auf dem Rand ∂D die Dirichlet-Randbedingung

$$u = 0 \quad \text{auf } \partial D$$

erfüllt. Weiterhin soll das gestreute Feld u^s die Sommerfeld'sche Ausstrahlungsbedingung

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial u^s}{\partial r} - i\kappa u^s \right) = 0$$

gleichmäßig in alle Richtungen erfüllen. Hierbei ist $r = |x|$, $x \in \mathbb{R}^3$.

Nach Colton und Kreß ([7], Thm. 2.5) besitzt die gestreute Welle u^s folgende Asymptotik:

$$u^s(x) = \frac{e^{i\kappa|x|}}{|x|} \left\{ u_\infty(\hat{x}) + O\left(\frac{1}{|x|}\right) \right\}, \quad |x| \rightarrow \infty,$$

wobei u_∞ das sogenannte Fernfeld von u ist.

Mit Hilfe dieses Fernfeldes formulieren wir nun, ähnlich wie im elektromagnetischen Fall, unser inverses Problem:

Beim inversen, akustischen Streuproblem ist das Fernfeld u_∞ für eine einfallende Welle u^i bekannt und wir versuchen die Oberfläche ∂D des unbekanntes Streuobjektes D zu rekonstruieren.

Beim inversen, elektromagnetischen Problem existierte noch keine Eindeutigkeitsaussage. Dies ist im akustischen Fall anders: Colton und Sleeman (siehe [8]) haben bereits 1983 die Eindeutigkeit des vorgestellten, inversen Problems bewiesen. Hierbei muss aber eine Bedingung an das Streuobjekt gestellt werden. Gintides (siehe [22]) hat diese Bedingung 2005 etwas abgeschwächt. Es gilt:

Das vorgestellte inverse Problem ist eindeutig lösbar, falls das unbekannte Streuobjekt in einer Kugel vom Radius R enthalten ist. Hierbei gilt folgende Beziehung zur Wellenzahl κ :

$$\kappa R < 4.49.$$

6.2 Das Problem als System von Integralgleichungen

Wir wollen nun zeigen, dass das inverse Problem äquivalent zu einem System von zwei Integralgleichungen ist. Wie wir zu Beginn des Kapitels schon erwähnt haben, geben wir zwei unterschiedliche Systeme an. Das erste System ergibt sich aus dem zweidimensionalen Streuproblem, das Ivanyshyn und Kreß [29] behandelt haben und das zweite System kann analog zum elektromagnetischen Fall in Kapitel fünf hergeleitet werden.

6.2.1 Erste Methode: Schlecht gestellte Gleichungen

Wir wählen, wie Ivanyshyn und Kreß [29], das Huygens'sche Prinzip (siehe Colton und Kreß, [7], Thm. 3.12) als Ausgangspunkt unserer Herleitung:

Das akustische Gesamtfeld u erfüllt folgende Gleichung:

$$u(x) = u^i(x) - \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \Phi(x, y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}. \quad (6.1)$$

Weiter gilt für das Fernfeld:

$$u_\infty(\xi) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) e^{-i\kappa \xi \cdot y} ds(y), \quad \xi \in \partial B. \quad (6.2)$$

Mit Φ bezeichnen wir hier wieder die Grundlösung zur Helmholtz-Gleichung im \mathbb{R}^3 :

$$\Phi(x, y) := \frac{e^{i\kappa|x-y|}}{4\pi|x-y|}, \quad x, y \in \mathbb{R}^3, x \neq y.$$

Führen wir nun den Einfachschichtpotentialoperator

$$(S\varphi)(x) := 2 \int_{\partial D} \Phi(x, y) \varphi(y) ds(y), \quad x \in \partial D \quad (6.3)$$

und den Fernfeldoperator

$$(S_\infty \varphi)(\xi) := -\frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \varphi(y) e^{-i\kappa \xi \cdot y} ds(y), \quad \xi \in \partial B \quad (6.4)$$

ein, so erhalten wir aus der Randbedingung $u = 0$ auf ∂D , den Sprungbeziehungen des Einfachschichtpotentials und den Gleichungen (6.1) und (6.2) folgendes Integralgleichungssystem:

$$Sh = 2u^i \Big|_{\partial D} \quad (6.5)$$

$$S_\infty h = u_\infty, \quad (6.6)$$

Dieses System wird von der Lösung ∂D des inversen Problems und der Normalableitung

$$h(y) := \frac{\partial u}{\partial \nu}(y), \quad y \in \partial D$$

gelöst.

Nehmen wir nun umgekehrt an, dass ∂D und h das Integralgleichungssystem (6.5) und (6.6) lösen, so ist ∂D auch eine Lösung des inversen Streuproblems. Denn definieren wir das Gesamtfeld u nach (6.1), so ist nach Gleichung (6.5) die Randbedingung $u = 0$ auf ∂D erfüllt. Gleichung (6.6) sichert schließlich, dass das gestreute Feld u^s zum Gesamtfeld u nach (6.1) das korrekte Fernfeld besitzt. Wir können also festhalten:

Satz 6.1 *Das inverse, akustische Streuproblem ist äquivalent zum Integralgleichungssystem (6.5) und (6.6).*

Bemerkung 6.2 *Das Integralgleichungssystem (6.5) und (6.6) besteht aus zwei Integralgleichungen erster Art. Die Kerne der Operatoren sind schwach singulär bzw. sogar C^∞ -glatt, daher sind beide Gleichungen schlecht gestellt.*

Numerische Lösung des Integralgleichungssystems

Wir wollen nun das inverse Problem mit Hilfe von Satz 6.1 lösen. Hierzu soll wieder eine iterative Strategie verwendet werden. Vorher linearisieren wir jedoch beide Gleichungen. Dazu beschränken wir uns auf sternförmige Gebiete, die sich wie folgt parametrisieren lassen:

$$q(\theta, \phi) := r(\theta, \phi) \cdot p(\theta, \phi), \quad (6.7)$$

wobei r die gesuchte Radiusfunktion ist. Führen wir die Dichte

$$\varphi := Jh \circ q \quad (6.8)$$

ein, wobei J wie üblich die Jacobi-Determinante der Parametrisierung q bezeichnet, so erhalten wir die folgenden parametrisierten Integraloperatoren:

$$S(r, \varphi)(\tilde{\theta}, \tilde{\phi}) := 2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \Phi(q(\tilde{\theta}, \tilde{\phi}), q(\theta, \phi)) \varphi(\theta, \phi) \sin \theta \, d\theta \, d\phi \quad (6.9)$$

$$S_\infty(r, \varphi)(\tilde{\theta}, \tilde{\phi}) := -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \varphi(\theta, \phi) e^{-i\kappa p(\tilde{\theta}, \tilde{\phi}) \cdot q(\theta, \phi)} \sin \theta \, d\theta \, d\phi. \quad (6.10)$$

Durch die Notation $S(r, \varphi)$ und $S_\infty(r, \varphi)$ wollen wir wieder die Abhängigkeit von der Radiusfunktion r betonen. Nun geben wir die Frechet-Ableitungen der beiden Integraloperatoren an, die wir nach Potthast [51] bestimmt haben:

$$\begin{aligned} S'(r, \varphi; s) &= 2i\kappa^2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \Phi(q(t), q(\tau)) \frac{[q(t) - q(\tau)] \cdot [\zeta(t) - \zeta(\tau)]}{|q(t) - q(\tau)|} \varphi(\tau) \sin \theta \, d\theta \, d\phi \\ &\quad - 2\kappa \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \Phi(q(t), q(\tau)) \frac{[q(t) - q(\tau)] \cdot [\zeta(t) - \zeta(\tau)]}{|q(t) - q(\tau)|^2} \varphi(\tau) \sin \theta \, d\theta \, d\phi \\ S'_\infty(r, \varphi; s) &= \frac{i\kappa}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \varphi(\tau) e^{-i\kappa p(t) \cdot q(\tau)} p(t) \cdot \zeta(\tau) \sin \theta \, d\theta \, d\phi. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Wir haben folgende Abkürzungen benutzt:

$$t := (\tilde{\theta}, \tilde{\phi}) \in A \quad \text{und} \quad \tau := (\theta, \phi) \in A.$$

Mit

$$\zeta(\theta, \phi) := s(\theta, \phi) p(\theta, \phi)$$

bezeichnen wir das Update der Parametrisierung. Definieren wir nun noch die rechten Seiten

$$w := 2u^i \circ q \quad \text{und} \quad w_\infty := u_\infty \circ p,$$

so erhalten wir folgendes, linearisiertes Integralgleichungssystem:

$$S(r, \varphi) + S(r, \psi) + S'(r, \varphi; s) = w(r) + w'(r; s) \quad (6.12)$$

$$S_\infty(r, \varphi) + S_\infty(r, \psi) + S'_\infty(r, \varphi; s) = w_\infty. \quad (6.13)$$

Das iterative Vorgehen sieht nun wie folgt aus:

Wir geben eine Startnäherung für die unbekannte Radiusfunktion r und die Normalableitung φ vor und lösen das linearisierte System. Dies gibt uns die Updates s und ψ , woraus wir eine neue Näherungslösung $r + s$ und $\phi + \psi$ erhalten. Diese

Prozedur wird dann iteriert.

Da die Kerne der auftretenden Integraloperatoren, wie wir im nächsten Abschnitt zeigen werden, die passende Form zur Anwendung von Graham und Sloans Spektralmethode [21] besitzen, wollen wir das linearisierte System mit Hilfe eines voll-diskreten Galerkin-Verfahrens lösen. Dazu führen wir folgende Notation ein:

$$\mathcal{S}_{n'} := \begin{pmatrix} S_{n'} & S'_{n'} - w' \\ S_{\infty, n'} & S'_{\infty, n'} \end{pmatrix} \quad c := \begin{pmatrix} w - S_{n'} \\ w_{\infty} - S_{\infty, n'} \end{pmatrix}.$$

Mit diesen Definitionen erhalten wir schließlich:

Wir suchen eine Näherungslösung $a_n := (\psi_n, s_n) \in \mathbb{P}_n^2$, die

$$(\mathcal{S}_{n'} a_n, v_n)_m = (c, v_n)_m$$

für alle $v_n \in \mathbb{P}_n^2$ erfüllt.

Auf die Definition der approximierten Integraloperatoren gehen wir nun im folgenden Abschnitt ein.

Approximation der Integraloperatoren

Wir beginnen mit der Approximation des Operators S und formen wie folgt um:

$$\begin{aligned} S(r, \psi)(t) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \mathcal{T}_{p(t)} M_1(0, 0, \hat{\theta}, \hat{\phi}) \mathcal{T}_{p(t)} \psi(\hat{\theta}, \hat{\phi}) \cos(\hat{\theta}/2) d\hat{\theta} d\hat{\phi} \\ &+ i \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \mathcal{T}_{p(t)} M_2(0, 0, \hat{\theta}, \hat{\phi}) \mathcal{T}_{p(t)} \psi(\hat{\theta}, \hat{\phi}) \sin \hat{\theta} d\hat{\theta} d\hat{\phi}, \quad t = (\tilde{\theta}, \tilde{\phi}) \in A. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir die Transformation aus Abschnitt 3.3 und folgende Kerne verwendet:

$$\begin{aligned} M_1(t, \tau) &:= \frac{1}{2\pi} S^c(q(t), q(\tau)) R(t, \tau) \\ M_2(t, \tau) &:= \frac{1}{2\pi} S^s(q(t), q(\tau)), \end{aligned}$$

mit den Funktionen

$$\begin{aligned} S^c(x, y) &:= \cos(\kappa|x - y|) \\ S^s(x, y) &:= \begin{cases} \frac{\sin(\kappa|x - y|)}{|x - y|} & x \neq y \\ \kappa & x = y \end{cases} \\ R(t, \tau) &:= \frac{|p(t) - p(\tau)|}{|q(t) - q(\tau)|}, \end{aligned}$$

die schon bei der skalaren Methode aufgetreten sind. Den diskreten Operator erhalten wir nun, indem wir die Fortsetzung (2.16) des Approximationsoperators \mathcal{L}_n anwenden:

$$\begin{aligned} S_{n'}(r, \psi)(\tilde{\theta}, \tilde{\phi}) &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \tilde{\mathcal{L}}_{n'} \left\{ \mathcal{T}_{p(t)} M_1(0, 0, \cdot) \mathcal{T}_{p(t)} \psi(\cdot) \right\}(\hat{\theta}, \hat{\phi}) \cos(\hat{\theta}/2) d\hat{\theta} d\hat{\phi} \\ &\quad + i \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \tilde{\mathcal{L}}_{n'} \left\{ \mathcal{T}_{p(t)} M_2(0, 0, \cdot) \mathcal{T}_{p(t)} \psi(\cdot) \right\}(\hat{\theta}, \hat{\phi}) \sin \hat{\theta} d\hat{\theta} d\hat{\phi}. \end{aligned}$$

Als Nächstes wollen wir die Frechet-Ableitung des Einfachschichtpotentials diskretisieren. Dazu überführen wir S' wieder in die übliche Form:

$$\begin{aligned} S'(r, \varphi; s)(t) &= \int_0^\pi \mathcal{T}_{p(t)} M'_1(0, 0, \hat{\theta}, \hat{\phi}) \mathcal{T}_{p(t)} M'(0, 0, \hat{\theta}, \hat{\phi}) \cos(\hat{\theta}/2) d\hat{\theta} d\hat{\phi} \\ &\quad + \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \mathcal{T}_{p(t)} M'_2(0, 0, \hat{\theta}, \hat{\phi}) \mathcal{T}_{p(t)} M'(0, 0, \hat{\theta}, \hat{\phi}) \sin \hat{\theta} d\hat{\theta} d\hat{\phi}. \end{aligned}$$

Die Funktionen M'_i und M' sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} M'_1(t, \tau) &:= -\frac{\kappa}{2\pi} S^c(q(t), q(\tau)) R(t, \tau) \varphi(\tau) \\ M'_2(t, \tau) &:= i \varphi(\tau) \left\{ \frac{\kappa^2}{2\pi} S^c(q(t), q(\tau)) - i \frac{\kappa}{2\pi} S^s(q(t), q(\tau)) \right\} \\ &\quad - \frac{\kappa^2}{2\pi} \sin(\kappa|q(t) - q(\tau)|) \varphi(\tau) \\ M'(t, \tau) &:= \frac{[q(t) - q(\tau)] \cdot [\zeta(t) - \zeta(\tau)]}{|q(t) - q(\tau)|^2}. \end{aligned}$$

Das besondere an dieser Definition ist, dass die Dichte φ in den Kernen M'_i zu finden ist und wir den Ausdruck M' als "Dichte" verwenden. Das liegt daran, dass φ bekannt ist und wir das Radiusupdate s bzw die Parametrisierung ζ suchen, die nur im Ausdruck M' enthalten ist.

Die diskrete Version ergibt sich wieder durch Anwenden von $\tilde{\mathcal{L}}_{n'}$:

$$\begin{aligned} S'_{n'}(r, \varphi; s)(t) &= \int_0^\pi \tilde{\mathcal{L}}_{n'} \left\{ \mathcal{T}_{p(t)} M'_1(0, 0, \cdot) \mathcal{T}_{p(t)} M'(0, 0, \cdot) \right\}(\hat{\theta}, \hat{\phi}) \cos(\hat{\theta}/2) d\hat{\theta} d\hat{\phi} \\ &\quad + \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \tilde{\mathcal{L}}_{n'} \left\{ \mathcal{T}_{p(t)} M'_2(0, 0, \cdot) \mathcal{T}_{p(t)} M'(0, 0, \cdot) \right\}(\hat{\theta}, \hat{\phi}) \sin \hat{\theta} d\hat{\theta} d\hat{\phi}. \end{aligned}$$

Die Approximation der Operatoren S_∞ und S'_∞ ist einfacher, da hier keine Singularität vorliegt. Wir wenden aus Symmetriegründen trotzdem die Transformation $\mathcal{T}_{\hat{x}}$ an und diskretisieren anschließend mit $\tilde{\mathcal{L}}_{n'}$. Da bei der Frechet-Ableitung ebenfalls die Parametrisierung ζ gesucht wird und nicht die Dichte φ , verfahren wir analog wie oben und erhalten dann die folgenden Operatoren:

$$S_{\infty, n'}(r, \psi)(\tilde{\theta}, \tilde{\phi}) := \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \tilde{\mathcal{L}}_{n'} \left\{ \mathcal{T}_{p(t)} M_\infty(0, 0, \cdot) \mathcal{T}_{p(t)} \psi(\cdot) \right\} (\hat{\theta}, \hat{\phi}) \sin \hat{\theta} d\hat{\theta} d\hat{\phi}$$

$$S'_{\infty, n'}(r, \varphi; s) := i \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \tilde{\mathcal{L}}_{n'} \left\{ \mathcal{T}_{p(t)} M'_\infty(0, 0, \cdot) \mathcal{T}_{p(t)} \tilde{M}(0, 0, \cdot) \right\} (\hat{\theta}, \hat{\phi}) \sin \hat{\theta} d\hat{\theta} d\hat{\phi}$$

mit den Funktionen:

$$M_\infty(t, \tau) := -\frac{1}{4\pi} e^{-i\kappa p(t) \cdot q(\tau)}$$

$$M'_\infty(t, \tau) := \frac{\kappa}{4\pi} e^{-i\kappa p(t) \cdot q(\tau)} \varphi(\tau)$$

$$\tilde{M}(t, \tau) := (p(t) \cdot \zeta(\tau)).$$

Bei der Approximation dieser Operatoren fällt auf, dass besonders die Approximationen der Frechet-Ableitungen kompliziert sind. Es wird nicht die eigentliche Dichte gesucht, sondern die Parametrisierung ζ des Randupdates. Hier ergibt sich ein Problem aus der Tatsache, dass unser gesuchtes Radiusupdate s beim Operator $S'_{n'}$ im folgenden Ausdruck auftritt:

$$(z(t) - z(\tau)) \cdot (\zeta(t) - \zeta(\tau)).$$

Daher betrachten wir im nächsten Abschnitt ein anderes Integralgleichungssystem, bei dem diese Probleme nicht auftreten.

6.2.2 Zweite Methode: Gut und schlecht gestellte Gleichung

Wir versuchen wieder, wie schon in Abschnitt 6.2.1, das inverse Problem durch ein äquivalentes System von zwei Integralgleichungen zu ersetzen. Nun verwenden wir aber die Green'sche Darstellungsformel (siehe Colton und Kreß, [7], Thm. 2.1 und 2.4):

Es sei $u \in C^2(D) \cap C^1(\bar{D})$ eine Lösung der Helmholtz-Gleichung. Dann gilt für $x \in D$:

$$u(x) = \int_{\partial D} \left\{ \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \Phi(x, y) - u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} \right\} ds(y), \quad x \in D. \quad (6.14)$$

Es sei nun $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cap C^1(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ eine ausstrahlende Lösung der Helmholtz-Gleichung. Dann gilt für $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}$:

$$u(x) = \int_{\partial D} \left\{ u(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} - \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \Phi(x, y) \right\} ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}. \quad (6.15)$$

Definieren wir das Einfach- und Doppelschichtpotential (siehe [7], (3.8) und (3.9)):

$$(S\varphi)(x) := 2 \int_{\partial D} \Phi(x, y) \phi(y) ds(y), \quad x \in \partial D$$

$$(K\varphi)(x) := 2 \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \varphi(y) ds(y), \quad x \in \partial D$$

und die zugehörigen Normalableitungen (siehe [7], (3.10) und (3.11)):

$$(K'\varphi)(x) := 2 \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(x)} \varphi(y) ds(y), \quad x \in \partial D$$

$$(T\varphi)(x) := 2 \frac{\partial}{\partial \nu(x)} \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial \nu(y)} \varphi(y) ds(y), \quad x \in \partial D,$$

so erhalten wir mit Hilfe der Sprungbeziehungen von S, K, K' und T , analog zu Kapitel fünf, die Calderon-Projektion:

Es sei $u \in C^2(D) \cap C^{1,\alpha}(\bar{D})$ eine Lösung der Helmholtz-Gleichung, dann gilt für die Randwerte und die Normalableitung:

$$\begin{pmatrix} u \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -K & S \\ -T & K' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} \end{pmatrix}. \quad (6.16)$$

Sei nun $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cap C^{1,\alpha}(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ eine ausstrahlende Lösung der Helmholtz-Gleichung, dann gilt:

$$\begin{pmatrix} u \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K & -S \\ T & -K' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} \end{pmatrix}. \quad (6.17)$$

Wir gehen nun analog zum elektromagnetischen Fall vor. Da die einfallende Welle u^i System (6.16) und die gestreute Welle u^s System (6.17) erfüllen, erhalten wir, unter Beachtung der Randbedingung $u = 0$, aus den Projektionen folgende Gleichungen:

$$S \frac{\partial u}{\partial \nu} = 2u^i \quad (6.18)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + K' \frac{\partial u}{\partial \nu} = 2 \frac{\partial u}{\partial \nu}. \quad (6.19)$$

Die erste Gleichung kommt uns bekannt vor. Es ist die Gleichung, die wir im letzten Abschnitt mit Hilfe des Hygens'schen Prinzips gewonnen haben. Also benutzen wir nun die zweite Gleichung und zeigen, dass diese an Stelle der ersten verwendet werden kann. Zuvor jedoch einige Bemerkungen:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + K' \frac{\partial u}{\partial \nu} = 2 \frac{\partial u}{\partial \nu}$$

ist eine Integralgleichung zweiter Art. Sie ist im Gegensatz zu (6.18) "gut gestellt" (well posed) und besitzt eine eindeutige Lösung, falls κ keine irreguläre Wellenzahl ist, d.h. kein innerer Neumann-Eigenwert ist. Ein weiterer Vorteil dieser Gleichung ist, dass wir sie numerisch mit der Spektralmethode von Graham und Sloan [21] lösen können.

Nun fahren wir fort mit unserer Herleitung: Analog zu Abschnitt 6.2.1 gilt für das Fernfeld natürlich wieder

$$S_\infty \frac{\partial u}{\partial \nu} = u_\infty,$$

woraus wir das folgende Gleichungssystem erhalten:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + K' \frac{\partial u}{\partial \nu} = 2 \frac{\partial u^i}{\partial \nu} \Big|_{\partial D} \quad (6.20)$$

$$S_\infty \frac{\partial u}{\partial \nu} = u_\infty. \quad (6.21)$$

Aus der obigen Herleitung geht hervor, dass die Lösung ∂D des inversen Problems und die Normalableitung des Gesamtfeldes u das Gleichungssystem (6.20) und (6.21) lösen. Wir müssen also noch zeigen, dass auch jede Lösung des Gleichungssystems eine Lösung des inversen Problems ist:

Nehmen wir an, dass ∂D und $\partial u/\partial \nu$ das System (6.20) und (6.21) lösen. Dann können wir u^s als Lösung des äußeren Randwertproblems mit folgender Randbedingung definieren:

$$\frac{\partial u^s}{\partial \nu} \Big|_{\partial D} = \frac{\partial u}{\partial \nu} - \frac{\partial u^i}{\partial \nu} \Big|_{\partial D}. \quad (6.22)$$

Für u^i und u^s gilt (6.14) bzw. (6.15). Dann ergibt sich über die Calderon-Projektion die folgende Gleichung:

$$-Tu + K' \frac{\partial u}{\partial \nu} + \frac{\partial u}{\partial \nu} = 2 \frac{\partial u^i}{\partial \nu}, \quad (6.23)$$

wobei wir $u := u^s + u^i$ auf ∂D gesetzt haben. Da nach Voraussetzung ∂D und $\partial u/\partial \nu$ Lösungen von (6.20) und (6.21) sind, folgt hieraus:

$$Tu = 0.$$

Unter der Annahme, dass κ keine irreguläre Wellenzahl ist, besitzt diese Gleichung nur die triviale Lösung $u = 0$. Daher erfüllt u die gewünschte Randbedingung. Durch Gleichung (6.21) wird wieder gesichert, dass u das richtige Fernfeld besitzt, daher bildet ∂D eine Lösung des inversen Streuproblems.

Wir fassen dies im folgenden Satz zusammen:

Satz 6.3 *Ist κ keine irreguläre Wellenzahl, so ist das inverse akustische Streuproblem äquivalent zum Integralgleichungssystem (6.20) und (6.21).*

Bemerkung 6.4 *In Satz 6.1 finden wir keine Einschränkung an die Wellenzahl κ . Dies liegt an der unterschiedlichen Herleitung der verwendeten Integralgleichungssysteme. Da wir das Ergebnis aus Satz 6.1 auch mit der hier vorgestellten Methode über die Calderon-Projektionen herleiten können, existiert evtl. noch eine weitere Möglichkeit, um System (6.20) und (6.21) zu erhalten, bei der keine Einschränkung an κ nötig ist.*

Numerische Lösung des Integralgleichungssystems

Wir wollen uns nun mit der numerischen Lösung des Integralgleichungssystems (6.20) und (6.21) befassen. Hierzu betrachten wir die beiden Gleichungen getrennt. Wir geben uns zuerst eine Startnäherung an den unbekanntem Rand, der durch (6.7) parametrisiert ist, vor und ermitteln so aus der gut gestellten, ersten Gleichung (6.20) eine Näherung an die unbekannte Dichte. Diese Dichte verwenden wir anschließend, um in einer linearisierten Version der zweiten Gleichung (6.21) ein Update s für die unbekannte Radiusfunktion r des Randes zu bestimmen. Die linearisierte Version, die wir verwenden, sieht wie folgt aus:

$$S'_\infty(r, \varphi, s) = u_\infty - S_\infty(r, \varphi). \quad (6.24)$$

Anschließend iterieren wir diese Vorgehensweise mit den neu bestimmten Funktionen.

Die Operatoren in Gleichung (6.24) kennen wir bereits aus Abschnitt 6.2.1 (siehe (6.10) und (6.11)). Wir verwenden hier jedoch eine leichte Modifikation, indem wir die Jacobi-Determinante nicht mit der Dichte verknüpfen wie in (6.8), da wir so in beiden Integralgleichungen mit derselben Dichte φ arbeiten können:

$$\begin{aligned} (S_\infty \varphi)(\tilde{\theta}, \tilde{\phi}) &:= -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \varphi(\theta, \phi) e^{-i\kappa p(\tilde{\theta}, \tilde{\phi}) \cdot q(\theta, \phi)} J(\theta, \phi) \sin \theta \, d\theta \, d\phi \\ S'_\infty(r, \varphi; s) &:= \frac{i\kappa}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \varphi(\theta, \phi) e^{-i\kappa p(\tilde{\theta}, \tilde{\phi}) \cdot q(\theta, \phi)} p(\tilde{\theta}, \tilde{\phi}) \cdot \zeta(\theta, \phi) J(\theta, \phi) \sin \theta \, d\theta \, d\phi. \end{aligned}$$

Kommen wir nun zur numerischen Lösung von (6.20) und (6.24). Wir verwenden hierzu wieder zwei volldiskrete Galerkin-Verfahren. Als Ansatzraum dient \mathbb{P}_n :

Benutzen wir die Kugelflächenfunktionen $Y_{l,k}$, $l = 0, \dots, n$ und $|k| \leq l$ als Basis von \mathbb{P}_n , so erhalten wir das diskretisierte Gleichungssystem:

$$\sum_{l=0}^n \sum_{|k| \leq l} [\delta_{l',l} \delta_{k',k} + \mathbf{K}'_{l'k',lk}] \varphi_{l,k} = 2 \left(\frac{\partial u^i}{\partial \nu}, Y_{l',k'} \right)_m$$

für $l' = 0, \dots, n$ und $|k'| \leq l'$ mit der Matrix

$$\mathbf{K}'_{l'k',lk} := (K'_{n'} Y_{l,k}, Y_{l',k'})_m.$$

Die gesuchte Näherung an die Dichte ergibt sich dann durch Linearkombination:

$$\varphi_n := \sum_{l=0}^n \sum_{|k| \leq l} \varphi_{l,k} Y_{l,k}. \quad (6.25)$$

Auf die Definition des diskreten Operators $K'_{n'}$ gehen wir hier nicht genauer ein. Wir verweisen auf Graham und Sloan [21] bzw. auf Ganesh und Graham [15] (siehe (2.24) und Abschnitt 3.1), wo weitere Einzelheiten zu diesem Verfahren gefunden werden können.

Die Operatoren S_∞ und S'_∞ diskretisieren wir mit Hilfe der Gauß-Rechteck-Regel aus Abschnitt 2.2.2. Hierbei verwenden wir denselben Wert n' wie vorher bei der Approximation von K' :

$$\begin{aligned} (S_{\infty, n'} \varphi)(\tilde{\theta}, \tilde{\phi}) &:= -\frac{1}{4\pi} \sum_{r=0}^{2n'+1} \sum_{s=1}^{n'+1} \mu_r \nu_s \varphi(\theta_s, \phi_r) e^{-i\kappa p(\tilde{\theta}, \tilde{\phi}) \cdot q_{rs}} J_{rs} \\ S'_{\infty, n'}(r, \varphi; s) &:= \frac{i\kappa}{4\pi} \sum_{r=0}^{2n'+1} \sum_{s=1}^{n'+1} \mu_r \nu_s \varphi(\theta_s, \phi_r) e^{-i\kappa p(\tilde{\theta}, \tilde{\phi}) \cdot q_{rs}} p(\tilde{\theta}, \tilde{\phi}) \cdot p_{rs} s_{rs} J_{rs}, \end{aligned}$$

mit den üblichen Abkürzungen:

$$p_{rs} := p(\theta_s, \phi_r), \quad q_{rs} := q(\theta_s, \phi_r), \quad s_{r,s} = s(\theta_s, \phi_r) \text{ und } J_{rs} := J(\theta_s, \phi_r).$$

Den Approximationsraum für das Radiusupdate wählen wir etwas kleiner, da hier Kugelflächenfunktionen niedriger Ordnung genügen. Wir suchen eine Lösung in \mathbb{P}_N und wenden wieder ein Galerkin-Verfahren auf die diskreten Integraloperatoren an:

$$\sum_{l=0}^N \sum_{|k| \leq l} \mathbf{S}'_{l'k',lk} s_{l,k} = (u_\infty - S_{\infty, n'}(r, \varphi), Y_{l',k'})_m \quad (6.26)$$

für $l' = 0, \dots, N$ und $|k'| \leq l'$ mit der Matrix

$$\mathbf{S}'_{l',lk} := (S'_{\infty,n'} Y_{l,k}, Y_{l',k'})_m.$$

Zur Approximation des Innenprodukts verwenden wir hierbei jedoch die Gauß-Rechteck-Produkt-Regel mit höherer Genauigkeit, unabhängig von N (z.B. wieder so wie vorher). Da diese Integralgleichung schlecht gestellt ist, wenden wir auf das diskrete Gleichungssystem (6.26) die Tikonov-Regularisierung an. Wir erhalten dann das Radiusupdate s_N durch die folgende Linearkombination:

$$s_N := \sum_{l=0}^N \sum_{|k| \leq l} s_{l,k} Y_{l,k}.$$

Hieraus ergibt sich die neue Näherungslösung an den unbekanntem Rand schließlich zu:

$$\tilde{q}(\theta, \phi) := (r(\theta, \phi) + s_N(\theta, \phi)) \cdot p(\theta, \phi).$$

6.3 Bewertung

Im vorliegenden Kapitel haben wir ein Lösungsverfahren für ein inverses, akustisches Problem im \mathbb{R}^3 hergeleitet und gezeigt, dass sich die Ideen von Ivanyshyn und Kreß [29] aus dem \mathbb{R}^2 grundsätzlich übertragen lassen. Wir haben jedoch nicht nur einfach die Methode aus [29] übertragen, sondern auch noch eine zweite Variante angegeben, deren Herleitung durch Kapitel fünf motiviert ist. Hierbei wurde festgestellt, dass wir die Gleichungen der ersten Methode (siehe (6.5) und (6.6)) auch erhalten können, wenn wir die Green'sche Darstellungsformel als Ausgangspunkt verwenden. Es gibt jedoch einen Unterschied: Wählen wir den Weg von Ivanyshyn und Kreß, so erhalten wir keine Einschränkung an die Wellenzahl. In Bemerkung 6.4 haben wir daher schon die Vermutung geäußert, dass wir evtl. auch in Satz 6.3 auf die Forderung an die Wellenzahl verzichten können. Ein entsprechender Beweis ist uns jedoch leider nicht bekannt.

Vergleichen wir nun die beiden vorgestellten Verfahren miteinander: In Abschnitt 6.2.1 haben wir bereits festgestellt, dass besonders die Diskretisierung der Frechet-Ableitungen kompliziert ist. Betrachten wir die zweite Methode, so sehen wir, dass hier nur die Frechet-Ableitung des Fernfeldoperators diskretisiert werden muss. Die wesentlich kompliziertere Ableitung S' tritt nicht mehr auf. Dies ist ein klarer Vorteil der zweiten Methode. Da wir ähnliche Techniken (Methode von Graham und Sloan) zur Lösung der Integralgleichungen verwenden, ergeben sich sonst keine gravierenden Unterschiede. Auf den Umstand, dass beim ersten Verfahren zwei schlecht gestellte Gleichungen simultan gelöst werden und bei der zweiten Methode eine Gleichung gut gestellt ist, sind wir in Abschnitt 5.4 schon ausführlich eingegangen.

Daher verweisen wir auf die Diskussion dort und gehen auf diese Fragestellung hier nicht weiter ein.

Bisher liegen keine numerischen Ergebnisse zu den vorgestellten Verfahren vor. Es ist jedoch zu erwarten, dass diese ähnlich gut ausfallen werden wie im \mathbb{R}^2 . Dies lässt sich wie folgt begründen: Zuerst einmal ist die Theorie hinter den Verfahren, besonders bei der ersten Methode, gleich. Betrachten wir dann die auftretenden Integraloperatoren, so fällt auf, dass diese alle hervorragend nach Graham und Sloan [21] diskretisiert werden können. Da sich diese Methode in mehreren numerischen Tests (siehe Ganesh und Graham [15]) bewährt hat, sind auch hier ähnlich gute Resultate zu erwarten. Unterstützt wird diese These durch die Dissertation von Serranho [56]. In dieser Arbeit wird ein Hybridverfahren zur Lösung des inversen, akustischen Streuproblems vorgestellt, das vergleichbar mit unserer Methode ist. In den numerischen Ergebnissen ist kein gravierender Unterschied in der Qualität zwischen \mathbb{R}^2 und \mathbb{R}^3 festzustellen und für die 3-d-Methode wird ebenfalls Graham und Sloans Verfahren angewendet.

Kapitel 7

Zusammenfassung und Ausblick

Im letzten Kapitel dieser Arbeit wollen wir noch einmal kurz die Ergebnisse zusammenfassen und vor allem einen Ausblick auf zukünftige Forschungsthemen, die sich im Kontext dieser Arbeit ergeben, aufzeigen. Hierbei verzichten wir weitestgehend auf eine Beurteilung der gefundenen Ergebnisse. Diese Bewertungen haben wir bereits am Ende eines jeden Kapitels gemacht und verweisen für mehr Details auf diese Abschnitte.

Beginnen wir mit dem Grundlagenkapitel: Im Großen und Ganzen finden sich die neuen und interessanten Aussagen im Abschnitt 2.3 über Vektorfelder. Wir haben hier versucht, vor allem die vektorielle Methode aus Kapitel vier, auf ein gutes, theoretisches Fundament zu stellen. Die Idee war, alle Ergebnisse, die bei der skalaren Methode nach Graham und Sloan [21] relevant sind, auch auf den vektoriellen Fall zu übertragen. Dies ist uns weitestgehend gelungen: So lassen sich z.B. alle Ergebnisse zur verwendeten Quadraturformel übertragen. Abstriche mussten wir lediglich beim Approximationsoperator \mathbf{L}_n machen. Obwohl wir in Abschnitt 2.3.3 viele Ergebnisse übertragen konnten, so ist uns dies bei der Betrachtung der Approximationsgüte im Abschnitt 2.3.4, zumindest im interessanten Fall $\mathbf{L}_n : t(\partial B) \rightarrow t(\partial B)$, nicht gelungen. In Satz 2.45 konnten wir nur eine Abschätzung der Form

$$\|\mathbf{L}_n\|_\infty \leq C n^{3/2} \tag{7.1}$$

beweisen. Im skalaren Fall finden wir bei Sloan und Womersley [59] $\mathcal{O}(n^{1/2})$. Jedoch ist (7.1) das bisher einzig bekannte Ergebnis für \mathbf{L}_n als Abbildung auf $t(\partial B)$ und wir vermuten, dass die Abschätzung sogar scharf ist. Wir waren jedoch leider nicht in der Lage, diese Vermutung zu beweisen, haben allerdings schon einige wichtige Schritte zu einem vollständigen Beweis gemacht. So konnten wir in Satz 2.46 z.B. zeigen, dass auch im vektoriellen Fall die orthogonale Projektion die kleinste Norm unter allen Projektionen besitzt. Dieses Ergebnis war bisher noch nicht bekannt.

Eine weitere Untersuchung dieses Problems ist sicher interessant und lohnenswert, da \mathbf{L}_n z.B. auch bei den Verfahren von Ganesh und Hawkins verwendet wird und die

Approximationsgüte, wie wir in Abschnitt 4.4 bereits diskutiert haben, eng mit der Konvergenz der elektromagnetischen Spektralmethoden zusammenhängt. Für Angaben, wie eine weitere Forschung in dieser Richtung aussehen könnte, verweisen wir auf Abschnitt 2.3.4. Interessant wäre sicher auch eine genauere Untersuchung zum Zusammenhang des skalaren Operators \mathcal{L}_n mit dem vektoriellen \mathbf{L}_n , evtl. können hierdurch weitere Ergebnisse auf den vektoriellen Fall übertragen werden. Als Beispiel hierfür verweisen wir auf die Konvergenzuntersuchung zur vektoriellen Quadraturformel in Abschnitt 2.3.5. Hier haben wir den Zusammenhang, der sich aus Satz 2.16 und 2.51 ergab, ausgenutzt.

In den Hauptkapiteln drei und vier dieser Arbeit haben wir zwei Verfahren zur Lösung des direkten, elektromagnetischen Streuproblems hergeleitet. Wir sind hierbei jeweils von unterschiedlichen Grundgedanken ausgegangen: In Kapitel drei verwenden wir skalare Kugelflächenfunktionen und arbeiten komponentenweise, hingegen werden im vierten Kapitel vektorielle Kugelflächenfunktionen zur Approximation auf der Sphäre benutzt. Ein Vergleich der beiden Methoden kann in Abschnitt 4.5 gefunden werden.

Zur skalaren Methode aus Kapitel drei finden sich numerische Ergebnisse in Abschnitt 3.5. Auf Grund dieser Resultate haben wir in Abschnitt 3.7 Modifikationen des Verfahrens diskutiert. Diese sind als Gedankenanstöße für zukünftige Arbeiten zu verstehen, da sich hieraus in Abschnitt 3.7.3 weitere neue Probleme ergaben. Interessant dürfte hier vor allem eine generelle Erweiterung der Spektralverfahren auf Streuobjekte sein, die nicht global über die Sphäre parametrisierbar sind. Dazu müsste das Streuobjekt geeignet zerlegt werden. Erste Ideen hierzu können in 3.7 gefunden werden.

Zum vektoriellen Verfahren liegen bisher keine numerischen Ergebnisse vor. Eine gute Implementation dieser Methode wäre aber auf jeden Fall wünschenswert, schon im Hinblick auf das inverse Problem aus Kapitel fünf. Außerdem könnten numerische Ergebnisse, ähnlich wie in Kapitel drei, wertvolle Hinweise auf die noch offene Konvergenzfrage geben. Dieses Problem wollen wir hier nicht noch einmal diskutieren und verweisen auf Abschnitt 4.4. Liegen für beide Verfahren numerische Ergebnisse vor, so wäre sicher ein Vergleich der beiden Methoden untereinander, aber auch mit den Methoden von Ganesh und Hawkins, interessant.

Wie wir bereits in Abschnitt 4.5 ausgeführt haben, gibt es mehrere Unterschiede zwischen unserer vektoriellen Methode und den Verfahren von Ganesh und Hawkins. Hier könnte eine zukünftig Zusammenarbeit sicher gute neue Ergebnisse hervorbringen, wenn die Vorteile der einzelnen Verfahren sinnvoll kombiniert werden können, wie es z.B. schon bei dem Hybridverfahren [19] der Fall ist. Unsere Ergebnisse können hier wichtige neue Impulse geben.

Weiter oben haben wir schon angemerkt, dass wir die Gleichungen immer auf dem Raum der stetigen (tangentialen) Vektorfelder betrachten. Bereits Graham und Sloan [21] haben am Ende von Abschnitt 2.1 angemerkt, dass eine Betrachtung von $\mathcal{L}_n : C(\partial B) \rightarrow L^2(\partial B)$ interessant ist, da hier die Norm nicht mit n wächst. In Abschnitt 2.3.4 haben wir gezeigt, dass dies auch im vektoriellen Fall gilt (Satz 2.50). Bisher ist jedoch noch keine Analysis, nicht einmal für den akustischen Fall, bekannt.

Kommen wir nun zu den inversen Problemen: Wir haben in den Kapiteln fünf und sechs Lösungsverfahren für ein inverses, elektromagnetisches und ein inverses, akustisches Streuproblem hergeleitet. Hierbei haben wir gezeigt, dass das inverse Problem äquivalent zu einem System von Integralgleichungen ist, welches stattdessen gelöst wird. Es stellte sich heraus, dass in beiden Fällen die Grundideen von Kreß und Rundell [38] bzw. Ivanyshyn und Kreß [29] ohne Probleme übertragbar sind.

Zu beiden Problemen existieren bisher noch keine numerischen Ergebnisse. Diese wären aber gerade im elektromagnetischen Fall interessant: In Bemerkung 5.1 haben wir festgestellt, dass es noch keine Eindeutigkeitsaussage zum inversen, elektromagnetischen Problem gibt. Numerische Ergebnisse könnten hier ein Indikator sein, ob eine solche Aussage gültig ist.

Zur Implementierung des elektromagnetischen Problems wird ein guter Vorwärtslöser benötigt, woran bisher auch eine praktische Realisierung gescheitert ist. Interessant wäre hier sicher auch ein numerischer Test, welche der bekannten Methoden (Kapitel drei und vier bzw. die Methoden von Ganesh und Hawkins) bessere Ergebnisse liefert.

Nachdem wir nun die einzelnen Kapitel betrachtet haben, kehren wir zurück zum Anfang dieser Arbeit: Wir wollten eine Lösung des äußeren Maxwell-Problems finden. Hierzu haben wir die Integralgleichung

$$a(x) + 2 \int_{\partial D} \nu(x) \times \operatorname{rot}_x \{ \Phi(x, y) a(y) \} ds(y) = 2c(x), \quad x \in \partial D$$

betrachtet. Wie wir bereits in der Einleitung erwähnt haben, ist diese Gleichung nur eindeutig lösbar, falls κ kein Maxwell-Eigenwert ist. Betrachten wir jedoch Thm. 6.19 bei Colton und Kreß [7], so sehen wir, dass diese Einschränkung an die Wellenzahl nicht gemacht werden muss, wenn wir die Gleichung modifizieren. In diesem Fall müssten wir jedoch den elektrischen Dipoloperator

$$(\mathcal{N}b)(x) := 2\nu(x) \times \operatorname{rot} \operatorname{rot} \int_{\partial D} \nu(y) \times b(y) \Phi(x, y) ds(y), \quad x \in \partial D$$

numerisch behandeln. Dies ist aber nicht so einfach, da \mathcal{N} hypersingulär ist. Jedoch gibt es gewisse Gemeinsamkeiten zum magnetischen Dipoloperator

$$(\mathcal{M}a)(x) := 2 \int_{\partial D} \nu(x) \times \operatorname{rot}_x \{a(y) \Phi(x, y)\} ds(y), \quad x \in \partial D :$$

Bei Kreiß (siehe [35] und [36]) finden wir, dass für $\kappa = 0$ die tangentialen Kugelflächenfunktionen Eigenfunktionen der beiden Integraloperatoren sind. Eine solche Eigenschaft war 1990 der Ausgangspunkt für Wienerts Betrachtungen. Es ist jedoch bisher völlig unklar, wie und ob überhaupt eines unserer Verfahren auf den hypersingulären Operator \mathcal{N} angewendet werden kann.

Zusammenfassend stellen wir fest, dass im Umfeld der Spektralmethoden zur Lösung elektromagnetischer Streuprobleme immer noch eine Menge offener Fragen existiert. Die Forschung in diesem Bereich befindet sich gerade erst im Anfangsstadium. In der vorliegenden Dissertation konnten wir jedoch mehrere neue Aspekte in diesem Forschungsbereich angeben: Gerade die theoretischen Ergebnisse aus dem Grundlagenkapitel zum Approximationsoperator \mathbf{L}_n können sich in Zukunft bei der weiteren Forschung als hilfreich und nützlich erweisen. Aber auch die neuen Ideen zur vektoriellen Methode und die Übertragung des inversen Lösungsverfahrens auf den elektromagnetischen Fall scheinen vielversprechend zu sein.

Kapitel 8

Anhang

8.1 Zur Approximationsgüte von \mathbf{L}_n

Wir behandeln nun die noch fehlenden Aussagen zum Beweis von Satz 2.45, d.h. die konkrete Darstellung der Spur von $\mathbf{A}(\xi, \eta)^T \mathbf{A}(\xi, \eta)$ und die Abschätzungen der Ausdrücke I_1 und I_2 . Wir beginnen mit der Spur:

Lemma 8.1 *Es gilt*

$$\begin{aligned} \text{Spur}(\mathbf{A}(\xi_0, \eta)^T \mathbf{A}(\xi_0, \eta)) = \\ \sum_{l, \tilde{l}=1}^n \frac{(2l+1)(2\tilde{l}+1)}{16\pi^2 l(l+1)\tilde{l}(\tilde{l}+1)} \{ 2 P_l''(\xi_0 \cdot \eta) P_{\tilde{l}}''(\xi_0 \cdot \eta) (1 - (\xi_0 \cdot \eta)^2)^2 \\ + 2 (P_l'(\xi_0 \cdot \eta) P_{\tilde{l}}'(\xi_0 \cdot \eta))' ((\xi_0 \cdot \eta)^2 - 1) ((\xi_0 \cdot \eta) + 1) \} \end{aligned}$$

Beweis: Mit (2.32) ergibt sich:

$$\mathbf{A}(\xi, \eta)^T \mathbf{A}(\xi, \eta) = \sum_{i, \tilde{i}=2}^3 \sum_{l, \tilde{l}=1}^n \frac{2l+1}{4\pi} \frac{2\tilde{l}+1}{4\pi} \mathbf{p}_l^{(i)}(\xi, \eta)^T \mathbf{p}_{\tilde{l}}^{(\tilde{i})}(\xi, \eta).$$

Da die Spur linear ist, müssen wir also die Matrizen $\mathbf{p}_l^{(i)}(\xi, \eta)^T \mathbf{p}_{\tilde{l}}^{(\tilde{i})}(\xi, \eta)$ betrachten. Hierzu verwenden wir Satz 2.30 und erhalten:

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_l^{(2)}(\xi, \eta)^T \mathbf{p}_l^{(2)}(\xi, \eta) &= \frac{1}{l(l+1)\tilde{l}(\tilde{l}+1)} (P_l''(\xi \cdot \eta) P_l''(\xi \cdot \eta) (1 - (\xi \cdot \eta)^2) \\
&\quad (\xi \otimes \xi - (\xi \cdot \eta) \xi \otimes \eta - (\xi \cdot \eta) \eta \otimes \xi + (\xi \cdot \eta)^2 \eta \otimes \eta) \\
&\quad + P_l''(\xi \cdot \eta) P_l'(\xi \cdot \eta) ((\xi \cdot \eta)^2 \xi \otimes \eta - (\xi \cdot \eta) \xi \otimes \xi \\
&\quad - (\xi \cdot \eta)^3 \eta \otimes \eta + (\xi \cdot \eta)^2 \eta \otimes \xi) + P_l'(\xi \cdot \eta) P_l''(\xi \cdot \eta) \\
&\quad ((\xi \cdot \eta)^2 \eta \otimes \xi - (\xi \cdot \eta)^3 \eta \otimes \eta - (\xi \cdot \eta) \xi \otimes \xi \\
&\quad + (\xi \cdot \eta)^2 \xi \otimes \eta) + P_l'(\xi \cdot \eta) P_l'(\xi \cdot \eta) (\mathbf{I} - \xi \otimes \xi - \eta \otimes \eta \\
&\quad + (\xi \cdot \eta) \xi \otimes \eta + (\xi \cdot \eta) \eta \otimes \xi - (\xi \cdot \eta)^2 \eta \otimes \eta) \\
\mathbf{p}_l^{(3)}(\xi, \eta)^T \mathbf{p}_l^{(3)}(\xi, \eta) &= \frac{1}{l(l+1)\tilde{l}(\tilde{l}+1)} ((1 - (\xi \cdot \eta)^2) (\eta \times \xi) \otimes (\eta \times \xi) \\
&\quad + P_l''(\xi \cdot \eta) P_l'(\xi \cdot \eta) (\xi \cdot \eta) (\eta \times \xi) \otimes (\xi \times \eta) \\
&\quad + P_l'(\xi \cdot \eta) P_l''(\xi \cdot \eta) (\xi \cdot \eta) (\xi \times \eta) \otimes (\eta \times \xi) \\
&\quad + P_l'(\xi \cdot \eta) P_l'(\xi \cdot \eta) ((\xi \cdot \eta)^2 \mathbf{I} - (\xi \cdot \eta) \eta \otimes \xi \\
&\quad - (\xi \cdot \eta) \xi \otimes \eta + \xi \otimes \xi)) \\
\mathbf{p}_l^{(2)}(\xi, \eta)^T \mathbf{p}_l^{(3)}(\xi, \eta) &= \frac{1}{l(l+1)\tilde{l}(\tilde{l}+1)} (P_l''(\xi \cdot \eta) P_l'(\xi \cdot \eta) ((\xi \cdot \eta) \xi \otimes \eta \\
&\quad - (\xi \cdot \eta)^2 \eta \otimes \eta - \xi \otimes \xi + (\xi \cdot \eta) \eta \otimes \xi) \\
&\quad + P_l'(\xi \cdot \eta) P_l''(\xi \cdot \eta) (\xi \times \eta) \otimes (\eta \times \xi) \\
&\quad + P_l'(\xi \cdot \eta) P_l'(\xi \cdot \eta) (\xi \cdot \eta) (\mathbf{I} - \eta \otimes \eta)
\end{aligned}$$

Für $\mathbf{p}_l^{(3)}(\xi, \eta)^T \mathbf{p}_l^{(2)}(\xi, \eta)$ gilt

$$\mathbf{p}_l^{(3)}(\xi, \eta)^T \mathbf{p}_l^{(2)}(\xi, \eta) = \left(\mathbf{p}_l^{(2)}(\xi, \eta)^T \mathbf{p}_l^{(3)}(\xi, \eta) \right)^T.$$

Für die Spur einer Matrix $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ist

$$\text{Spur}(\mathbf{B}) = \text{Spur}(\mathbf{B}^T),$$

daher können wir

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_l^{(2)}(\xi, \eta)^T \mathbf{p}_l^{(3)}(\xi, \eta) &= \frac{1}{\tilde{l}(\tilde{l}+1)l(l+1)} (P_l''(\xi \cdot \eta) P_l'(\xi \cdot \eta) ((\xi \cdot \eta) \xi \otimes \eta \\
&\quad - (\xi \cdot \eta)^2 \eta \otimes \eta - \xi \otimes \xi + (\xi \cdot \eta) \eta \otimes \xi) \\
&\quad + P_l'(\xi \cdot \eta) P_l''(\xi \cdot \eta) (\xi \times \eta) \otimes (\eta \times \xi) \\
&\quad + P_l'(\xi \cdot \eta) P_l'(\xi \cdot \eta) (\xi \cdot \eta) (\mathbf{I} - \eta \otimes \eta)
\end{aligned}$$

benutzen. Die Spuren der obigen Ausdrücke erhalten wir nun, indem wir

$$\begin{aligned}
\text{Spur}(\xi \otimes \xi) &= \|\xi\|_2^2 = 1 \\
\text{Spur}(\xi \otimes \eta) &= \text{Spur}(\eta \otimes \xi) = \xi \cdot \eta \\
\text{Spur}((\xi \times \eta) \otimes (\eta \times \xi)) &= (\xi \cdot \eta)^2 - 1 \\
\text{Spur}((\xi \times \eta) \otimes (\xi \times \eta)) &= 1 - (\xi \cdot \eta)^2.
\end{aligned}$$

verwenden. Damit ergibt sich schließlich:

$$\begin{aligned}
\text{Spur}(\mathbf{p}_l^{(2)}(\xi, \eta_j)^T \mathbf{p}_{\tilde{l}}^{(2)}(\xi, \eta_j)) &= \frac{1}{l(l+1)\tilde{l}(\tilde{l}+1)} (P_l''(\xi \cdot \eta_j) P_{\tilde{l}}''(\xi \cdot \eta_j) \\
&\quad (1 - (\xi \cdot \eta_j)^2)^2 + (P_l'(\xi \cdot \eta_j) P_{\tilde{l}}'(\xi \cdot \eta_j))' \\
&\quad (\xi \cdot \eta_j)((\xi \cdot \eta_j)^2 - 1) + P_l'(\xi \cdot \eta_j) P_{\tilde{l}}'(\xi \cdot \eta_j) \\
&\quad ((\xi \cdot \eta_j)^2 - 1)) \\
\text{Spur}(\mathbf{p}_l^{(3)}(\xi, \eta_j)^T \mathbf{p}_{\tilde{l}}^{(3)}(\xi, \eta_j)) &= \frac{1}{l(l+1)\tilde{l}(\tilde{l}+1)} (P_l''(\xi \cdot \eta_j) P_{\tilde{l}}''(\xi \cdot \eta_j) \\
&\quad (1 - (\xi \cdot \eta_j)^2)^2 + (P_l'(\xi \cdot \eta_j) P_{\tilde{l}}'(\xi \cdot \eta_j))' \\
&\quad (\xi \cdot \eta_j)((\xi \cdot \eta_j)^2 - 1) + P_l'(\xi \cdot \eta_j) P_{\tilde{l}}'(\xi \cdot \eta_j) \\
&\quad (1 - (\xi \cdot \eta_j)^2)) \\
\text{Spur}(\mathbf{p}_l^{(2)}(\xi, \eta_j)^T \mathbf{p}_{\tilde{l}}^{(3)}(\xi, \eta_j)) &= \text{Spur}(\mathbf{p}_{\tilde{l}}^{(2)}(\xi, \eta_j)^T \mathbf{p}_l^{(3)}(\xi, \eta_j)) \\
&= \frac{1}{l(l+1)\tilde{l}(\tilde{l}+1)} (P_l'(\xi \cdot \eta_j) P_{\tilde{l}}'(\xi \cdot \eta_j))' \\
&\quad ((\xi \cdot \eta_j)^2 - 1)
\end{aligned}$$

Fassen wir diese Ausdrücke zusammen, so erhalten wir die Aussage des Lemmas. \square

Nun kommen wir zu den Ausdrücken I_1 und I_2 . Der Ausdruck I_2 lässt sich einfacher behandeln, daher beginnen wir mit ihm:

Lemma 8.2 *Es gilt:*

$$\sum_{l, \tilde{l}=1}^n \frac{(2l+1)(2\tilde{l}+1)}{16\pi^2 l(l+1)\tilde{l}(\tilde{l}+1)} \left| 4\pi \int_{-1}^1 (P_l'(t) P_{\tilde{l}}'(t))' (t^2 - 1)(t + 1) dt \right| \leq 18\pi n^2 + 45\pi n^3.$$

Beweis: Wir betrachten zuerst den Fall $l > \tilde{l}$. Nach zweifacher, partieller Integration ergibt sich:

$$\begin{aligned}
4\pi \int_{-1}^1 (P_l'(t) P_{\tilde{l}}'(t))' \underbrace{(t^2 - 1)(t + 1)}_{=t^3+t^2-t-1} dt &= -4\pi P_l(t) P_{\tilde{l}}'(t) (3t^2 + 2t - 1) \Big|_{-1}^1 \\
&\quad + 4\pi \int_{-1}^1 P_l(t) (P_{\tilde{l}}''(t) (3t^2 + 2t - 1) + P_{\tilde{l}}'(t)(6t + 2)) dt.
\end{aligned}$$

Das Polynom $P_{\tilde{l}}''(t) (3t^2 + 2t - 1) + P_{\tilde{l}}'(t)(6t + 2)$ im Integral besitzt den Grad $\tilde{l} < l$, daher verschwindet das Integral auf Grund der Orthogonalitätseigenschaft des

Legendre-Polynoms P_l . Nutzen wir die Standardabschätzungen (siehe z.B. Freeden, Gervens und Schreiner [14], Abschnitt 3.2)

$$|P_l(t)| \leq |P_l(1)| = 1 \quad \text{und} \quad |P'_l(t)| \leq |P'_l(1)| = \frac{l(l+1)}{2}, \quad (8.1)$$

so erhalten wir:

$$4\pi \left| \int_{-1}^1 (P'_l(t)P'_l(t))'(t^2 - 1)(t + 1) dt \right| \leq 8\pi\tilde{l}(\tilde{l} + 1).$$

Im Fall $l < \tilde{l}$ ergibt sich durch analoges Vorgehen:

$$4\pi \left| \int_{-1}^1 (P'_l(t)P'_l(t))'(t^2 - 1) dt \right| \leq 8\pi l(l + 1).$$

Kommen wir nun zum Sonderfall $l = \tilde{l}$. Zweifache, partielle Integration ergibt:

$$\begin{aligned} 4\pi \int_{-1}^1 (P'_l(t)P'_l(t))' \underbrace{(t^2 - 1)(t + 1)}_{=t^3+t^2-t-1} dt &= -4\pi P_l(t)P'_l(t) (3t^2 + 2t - 1) \Big|_{-1}^1 \\ &+ 4\pi \int_{-1}^1 P_l(t) (P''_l(t) (3t^2 + 2t - 1) + P'_l(t)(6t + 2)) dt. \end{aligned}$$

Durch die Standardabschätzungen (8.1) finden wir für den ersten Ausdruck:

$$\left| -4\pi P_l(t) P'_l(t) (3t^2 + 2t - 1) \Big|_{-1}^1 \right| \leq 8\pi l(l + 1).$$

Das Integral im zweiten Ausdruck verschwindet in diesem Fall jedoch nicht, daher müssen wir weiter abschätzen. Wir verwenden

$$\begin{aligned} |P''_l(t)| &\leq |P''_l(1)| \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{2!} l(l+1)(l(l+1)-2) \\ &\leq \frac{1}{2} l^4 \end{aligned}$$

und erhalten:

$$\begin{aligned} \left| 4\pi \int_{-1}^1 P_l(t) (P''_l(t) (3t^2 + 2t - 1) + P'_l(t)(6t + 2)) dt \right| &\leq 4\pi \int_{-1}^1 (2l^4 + 8l^2) dt \\ &\leq 16\pi l^4 + 64\pi l^2. \end{aligned}$$

Fassen wir diese Teilergebnisse zusammen, so ergibt sich schließlich:

$$\begin{aligned} & \sum_{l, \tilde{l}=1}^n \frac{(2l+1)(2\tilde{l}+1)}{16\pi^2 l(l+1)\tilde{l}(\tilde{l}+1)} \left| 4\pi \int_{-1}^1 (P'_l(t)P'_{\tilde{l}}(t))'(t^2-1)(t+1) dt \right| \\ & \leq \frac{9}{16\pi^2} \sum_{l=1}^n \left(\sum_{\tilde{l}=1}^{l-1} 16\pi \underbrace{\frac{\tilde{l}}{l}}_{\leq 1} + \sum_{\tilde{l}=l+1}^n 16\pi \underbrace{\frac{l}{\tilde{l}}}_{\leq 1} + 80\pi l^2 \right) \leq 18\pi n^2 + 45\pi n^3 \end{aligned}$$

□

Kommen wir nun zum Ausdruck I_1 . Da hier die zweiten Ableitungen der Legendre-Polynome doppelt auftreten, hilft uns die Standardabschätzung

$$|P''_l(t)| \leq \frac{l^4}{2} \quad (8.2)$$

nicht weiter. Wir verwenden daher folgende Asymptotik für die zweiten Ableitungen, die bei Szegö [57] (Thm. 7.32.4) gefunden werden kann:

$$|P''_l(\cos(\theta))| = \begin{cases} \theta^{-5/2} \mathcal{O}(l^{3/2}) & cl^{-1} \leq \theta \leq \pi/2 \\ \mathcal{O}(l^4) & 0 \leq \theta \leq cl^{-1} \end{cases} \quad (8.3)$$

Hierbei haben wir $t = \cos(\theta)$ substituiert und die Symmetrie der Legendre-Polynome und der Sinusfunktion ausgenutzt. Weiter ist $c > 0$ eine feste Konstante, die jedoch nicht näher angegeben werden kann. Diese Abschätzungen können bzgl. der Ordnung von n nicht verbessert werden. Wie wir sehen, steht uns auch bei (8.3) im Bereich $0 \leq \theta \leq cl^{-1}$ wieder nur $\mathcal{O}(l^4)$ zur Verfügung. Hier hilft uns aber der Ausdruck $(1-t^2)^2$, was der folgende Beweis zeigt:

Lemma 8.3 *Mit einer Konstanten $C_2 > 0$ gilt:*

$$\sum_{l, \tilde{l}=1}^n \frac{(2l+1)(2\tilde{l}+1)}{16\pi^2 l(l+1)\tilde{l}(\tilde{l}+1)} \left| 4\pi \int_{-1}^1 P''_l(t)P''_{\tilde{l}}(t)(1-t^2)^2 dt \right| \leq \frac{3C_2}{\pi} n^3.$$

Beweis: Wir schätzen zuerst das Integral wie folgt ab:

$$\begin{aligned} \left| \int_{-1}^1 P''_l(t)P''_{\tilde{l}}(t)(1-t^2)^2 dt \right| & \leq \int_{-1}^1 |P''_l(t)P''_{\tilde{l}}(t)|(1-t^2)^2 dt \\ & = 2 \int_0^1 |P''_l(t)P''_{\tilde{l}}(t)|(1-t^2)^2 dt \\ & \leq 2 \int_0^1 \underbrace{u_l(t)u_{\tilde{l}}(t)}_{=:f_{\tilde{l}l}(t)}(1-t^2)^2 dt \end{aligned}$$

Hierbei haben wir im zweiten Schritt die Symmetrie der Legendre-Polynome, die entweder gerade oder ungerade sind und die Symmetrie von $(1 - t^2)^2$ ausgenutzt. Die Funktion u_l erhalten wir aus (8.2) und (8.3):

$$u_l(\cos \theta) := \min\{l^4, C_1 \theta^{-5/2} l^{3/2}\}.$$

Die Konstante $C_1 > 0$ kann hierbei nicht näher bestimmt werden, sie ergibt sich aus $c > 0$ und der ersten Abschätzung in (8.3). Auf Grund dieser Struktur ist die Funktion $f_{\bar{l}}$ auf drei Abschnitten stetig definiert:

$$f_{\bar{l}}(t) = \begin{cases} g_1(t) := C_1^2 \arccos(t)^{-5} l^{3/2} \bar{l}^{3/2} (1 - t^2)^2 & x \in D_1 \\ g_2(t) := C_1 \arccos(t)^{-5/2} \underline{l}^4 \bar{l}^{3/2} (1 - t^2)^2 & x \in D_2 \\ g_3(t) := \underline{l}^4 \bar{l}^4 (1 - t^2)^2 & x \in D_3 \end{cases}$$

Hierbei haben wir folgende Notation verwendet:

$$D_1 := \left[0, \cos \frac{C}{\underline{l}}\right), \quad D_2 := \left[\cos \frac{C}{\underline{l}}, \cos \frac{C}{\bar{l}}\right), \quad D_3 := \left[\cos \frac{C}{\bar{l}}, 1\right]$$

mit

$$C := C_1^{2/5}, \quad \underline{l} := \min\{l, \tilde{l}\} \quad \text{und} \quad \bar{l} := \max\{l, \tilde{l}\}.$$

Wir können dann das Integral wie folgt aufteilen und weiter abschätzen:

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_{\bar{l}}(t) dt &= \int_{D_1} g_1(t) dt + \int_{D_2} g_2(t) dt + \int_{D_3} g_3(t) dt \\ &\leq \int_{D_1} g_1(t) dt + |D_2| \max_{t \in D_2} g_2(t) + |D_3| \max_{t \in D_3} g_3(t). \end{aligned}$$

Die einzelnen Terme betrachten wir nun getrennt:

$$\begin{aligned} \int_0^{\cos \frac{C}{\underline{l}}} g_1(t) dt &\leq C_1^2 l^{3/2} \bar{l}^{3/2} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^5 \theta}{\theta^5} d\theta \\ &\leq C_1^2 l^{3/2} \bar{l}^{3/2}. \end{aligned}$$

Da g_2 auf dem angegebenen Definitionsbereich streng monoton fallend ist, finden wir:

$$\begin{aligned} |D_2| \max_{t \in D_2} g_2(t) &= \left(\cos \frac{C}{\bar{l}} - \cos \frac{C}{\underline{l}}\right) g_2\left(\cos \frac{C}{\bar{l}}\right) \\ &\leq C_1^{8/5} \left(1 - \cos \frac{C}{\bar{l}}\right) \underline{l}^{5/2} \bar{l}^{3/2} \\ &\leq C_1^2 \underline{l}^{3/2} \bar{l}^{3/2} \\ &= C_1^2 l^{3/2} \bar{l}^{3/2}. \end{aligned}$$

Die Funktion g_3 ist ebenfalls streng monoton fallend, daher ergibt sich hier:

$$\begin{aligned} |D_3| \max_{t \in D_3} g_3(t) &= (1 - \cos \frac{C}{l}) g_3 \left(\cos \frac{C}{l} \right) \\ &\leq (1 - \cos \frac{C}{l}) l^4 \\ &\leq C l^3 \\ &\leq C_1^{2/5} l^{3/2} \tilde{l}^{3/2}. \end{aligned}$$

Fassen wir diese Ergebnisse zusammen, so erhalten wir mit $C_2 := \max\{C_1^2, C_1^{2/5}\}$ schließlich:

$$\left| \int_{-1}^1 P_l''(t) P_{\tilde{l}}''(t) (1-t^2)^2 dt \right| \leq C_2 l^{3/2} \tilde{l}^{3/2}.$$

Dieses Ergebnis setzen wir nun in die Summe ein:

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \frac{9C_2}{4\pi} \sum_{l, \tilde{l}=1}^n l^{1/2} \tilde{l}^{1/2} \\ &\leq \frac{9C_2}{4\pi} \left(\sum_{l=1}^n l^{1/2} \right)^2 \\ &\leq \frac{9C_2}{4\pi} \left(\int_1^{n+1} l^{1/2} dl \right)^2 \\ &\leq \frac{3C_2}{\pi} n^3. \end{aligned}$$

□

8.2 Zur Optimalität der Norm von \mathbf{L}_n

In Abschnitt 2.3.4 haben wir für den vektoriellen Approximationsoperator die Normabschätzung

$$\|\mathbf{L}_n\|_\infty \leq C n^{3/2}$$

mit einer von $n \in \mathbb{N}$ unabhängigen Konstanten $C > 0$ gefunden. Wie wir bereits vorher schon erwähnt haben, ist die Frage, ob diese Abschätzung optimal ist, d.h. ob sie nicht verbessert werden kann bzgl. der Potenz von n , noch nicht geklärt. Sie ist aber entscheidend bei der Konvergenzuntersuchung der vektoriellen Methode.

Wir geben daher jetzt einige Indizien an, die dafür sprechen, dass die Lebesgue-Konstante von \mathbf{L}_n tatsächlich $\mathcal{O}(n^{3/2})$ ist:

Als erstes vergleichen wir den skalaren Approximationsoperator \mathcal{L}_n mit dem vektoriellen Operator \mathbf{L}_n . Für \mathbf{L}_n hatten wir in Lemma 2.44 folgende Darstellung hergeleitet:

$$(\mathbf{L}_n f)(\xi) = \sum_{r=0}^{2n+1} \sum_{s=1}^{n+1} \mu_r \nu_s \sum_{i=2}^3 \sum_{l=1}^n \frac{2l+1}{4\pi} \mathbf{p}_l^{(i)}(\xi, p_{r,s}) f(p_{r,s}). \quad (8.4)$$

Bei Sloan und Womersley finden wir für den skalaren Operator ([59], (4.13)):

$$(\mathcal{L}_n F)(\xi) = \sum_{r=0}^{2n+1} \sum_{s=1}^{n+1} \mu_r \nu_s F(p_{r,s}) \tilde{G}_n(\xi \cdot p_{r,s}). \quad (8.5)$$

Die Funktion \tilde{G}_n ist hierbei ein reproduzierender Kern für \mathbb{P}_n und wie folgt definiert:

$$\tilde{G}_n(t) := \sum_{l=0}^n \frac{2l+1}{4\pi} P_l(t), \quad t \in [-1, 1]. \quad (8.6)$$

Vergleichen wir nun die Darstellungen (8.4) und (8.5) der beiden Operatoren, so sehen wir, dass die Summe über die Legendre-Tensoren $\mathbf{p}_l^{(i)}$ im vektoriellen Fall das Gegenstück zum reproduzierenden Kern \tilde{G}_n beim skalaren Fall bildet. Weiterhin sind es diese Anteile, die hauptsächlich die Lebesgue-Konstante der Operatoren bestimmen.

Nach Satz 2.30 treten bei den Legendre-Tensoren sowohl erste als auch zweite Ableitungen der Legendre-Polynome auf. In der Definition (8.6) des reproduzierenden Kerns \tilde{G}_n finden wir jedoch keine Ableitungen, sondern nur die Legendre-Polynome P_l . Nach Szegö ([57], Theorem 7.32.4) gilt:

$$\left\{ \left(\frac{d}{dx} \right)^k P_n(x) \right\}_{x=\cos(\theta)} = \begin{cases} \theta^{-k-1/2} \mathcal{O}(n^{k-1/2}) & cn^{-1} \leq \theta \leq \pi/2 \\ \mathcal{O}(n^{2k}) & 0 \leq \theta \leq cn^{-1} \end{cases}. \quad (8.7)$$

Daher ist durch das Auftreten der Ableitungen im vektoriellen Fall eine höhere n -Potenz in der Lebesgue-Konstante zu erwarten.

Betrachten wir nun den Beweis zu Satz 2.45 noch einmal genauer: Die entscheidenden Abschätzungen finden wir in Lemma 8.2 und 8.3. Es stellt sich nun die Frage, wie "scharf" diese Abschätzungen sind. Im Beweis zu Lemma 8.2 haben wir

$$|P_l(t)| \leq |P_l(1)| = 1 \quad \text{und} \quad |P'_l(t)| \leq |P'_l(1)| = \frac{l(l+1)}{2}$$

verwendet. Vergleichen wir mit (8.7), so sehen wir, dass die Ergebnisse in Lemma 8.2 nicht optimal sind. Im Beweis zu Lemma 8.3 haben wir jedoch die scharfen Abschätzungen von Szegö verwendet (vgl. (8.3)), daher sind diese Ergebnisse optimal und können nicht verbessert werden. Da aber gerade

$$\sum_{l, \tilde{l}=1}^n \frac{(2l+1)(2\tilde{l}+1)}{16\pi^2 l(l+1)\tilde{l}(\tilde{l}+1)} \left| 4\pi \int_{-1}^1 P_l''(t) P_{\tilde{l}}''(t) (1-t^2)^2 dt \right|$$

in Lemma 8.3 durch das doppelte Auftreten der zweiten Ableitungen entscheidend die Normabschätzung von \mathbf{L}_n bestimmt, ist dies ein starkes Indiz dafür, dass $\mathcal{O}(n^{3/2})$ tatsächlich nicht verbessert werden kann.

8.3 Zur Implementation der vektoriellen Größen

Wir gehen in diesem Abschnitt auf die Implementation der Größen aus unserem volldiskreten, vektoriellen Galerkin-Verfahren in Abschnitt 4.3 ein. Damit sind die vektoriellen Kugelflächenfunktionen $y_{l,k}^{(i)}$ vom Typ $i = 2, 3$ und die Matrizen $\mathbf{B}_{r',s'}^{n'}$ und $\mathbf{C}_{r',s'}^{n'}$ gemeint. Wir beginnen mit den vektoriellen Kugelflächenfunktionen vom Typ $i = 2$:

Wir implementieren diese Vektorfelder nach (4.17), d.h. wir müssen uns hauptsächlich um die Implementation von Legendre-Funktionen und deren Ableitungen kümmern. Für die Legendre-Funktionen verweisen wir auf Algorithmus 15.3.3 bei Fengler [12] und für die zugehörigen Ableitungen auf Algorithmus 15.3.6.

Diese Algorithmen gelten allerdings nur für $\cos \theta \neq \pm 1$, d.h. sie gelten nicht am Nord- bzw. Südpol der Sphäre. Da wir die vektoriellen Kugelflächenfunktionen jedoch nur an den Quadraturpunkten der Gauß-Rechteck-Regel auswerten, können wir die zitierten Algorithmen verwenden, da Nord- und Südpol nie Quadraturpunkte sind.

Vektorielle Kugelflächenfunktionen vom Typ $i = 3$ ergeben sich dann aus

$$y_{l,k}^{(3)}(\eta) = \eta \times y_{l,k}^{(2)}(\eta).$$

Ebenfalls können die Hilfsgrößen $\alpha_k^{(i)}$ und $\beta_k^{(i)}$ mit Hilfe der Algorithmen 15.3.3, 15.3.6 von Fengler und Formel (4.17) bestimmt werden.

Kommen wir also zur Implementation der Matrizen $\mathbf{B}_{r',s'}^{n'}$ und $\mathbf{C}_{r',s'}^{n'}$. Beginnen wir mit $\mathbf{C}_{r',s'}^{n'}$ und betrachten Definition (4.15), so stellen wir fest, dass wir wieder nur vektorielle Kugelflächenfunktionen vom Typ $i = 2$ an den Stützstellen der Gauß-Rechteck-Regel bestimmen müssen, was mit Fenglers Algorithmen kein Problem

ist. Daher gehen wir sofort über zur Implementation von $\mathbf{B}_{r's'}^{n'}$. In (4.14) sehen wir, dass wir jetzt vektoriellen Kugelflächenfunktionen am Nordpol berechnen müssen, was mit Fengers Algorithmen nicht möglich ist. Wir formen daher mit Hilfe des Additionstheorems (Satz 2.29) um:

$$\mathbf{B}_{r's'}^{n'} = \sum_{i=2}^3 \sum_{l=1}^{n'} \tilde{G}_{(i,i)}(l) \mathbf{p}_l^{(i)}(\hat{n}, p_{r's'}). \quad (8.8)$$

Die veränderten Faktoren sind hierbei wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{(2,2)}(l) &:= \frac{l}{2l+3} + \frac{l+1}{2l-1} \\ \tilde{G}_{(3,3)}(l) &:= 1. \end{aligned}$$

Wir müssen nun also die Legendre-Tensoren vom Typ $i = 2, 3$ implementieren. Nach Satz 2.30 ergeben sich auf Grund der Skalarprodukte $\hat{n} \cdot p_{r's'}$ keine Berechnungsprobleme wie vor der Umformung. Das Hauptproblem bildet also die Implementation der ersten und zweiten Ableitung der Legendre-Polynome. Für die erste Ableitung finden wir wieder bei Fengler einen Algorithmus (15.3.2), der die Rekursionsformel

$$P_n'(t) = \frac{ntP_n(t) - nP_{n-1}(t)}{t^2 - 1}$$

ausnutzt. Die Legendre-Polynome P_n können mit Hilfe der Rekursion

$$P_n(t) = \frac{(2n-1)tP_{n-1}(t) - (n-1)P_{n-2}(t)}{n}$$

bestimmt werden (siehe Fengler, Algorithmus 15.3.1). Zur Berechnung der zweiten Ableitungen P_n'' verwenden wir schließlich eine Rekursionsformel, die bei Freedon, Gervens und Schreiner (siehe [14] Formel (3.2.9)) gefunden werden kann:

$$P_n''(t) = \frac{2tP_n'(t) - n(n+1)P_n(t)}{1-t^2}.$$

Literaturverzeichnis

- [1] ATKINSON K.E., *Numerical Integration on the Sphere*, J. Austral. Math. Soc. (Series B) 23, S.332-347, 1982
- [2] BERMAN D.L. , *On a class of linear operators*, Dokl. Akad. Nauk SSSR 85 (1952), 13-16 (in Russisch), Math. Reviews 14, 57
- [3] BROUWER L.E.J., *Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten*, Mathematische Annalen 71, 1911
- [4] CAKONI F. UND COLTON D., *Open problems in the qualitative approach to inverse electromagnetic scattering theory*, Euro. Jnl of Applied Mathematics, 16 (2005), Seite 411-425
- [5] CAKONI F., *Recent Developments in the Qualitative Approach to Inverse Electromagnetic Scattering Theory*, J. Comput. Appl. Math., 204 (2007), Seite 242-255
- [6] COLTON D., HADDAR H. UND MONK P., *The Linear Sampling Method for solving the electromagnetic inverse scattering problem*, SIAM J. Sci. Comp., 24 (2002) Seite 719-731
- [7] COLTON D. UND KRESS R., *Inverse Acoustic and Electromagnetic Scattering Theory*, Applied Mathematical Sciences 93, Springer-Verlag, Heidelberg 1998, 2nd Edition
- [8] COLTON D. UND SLEEMAN B.D., *Uniqueness theorems for the inverse problem of acoustic scattering*, IMA J. Appl. Math., 31 (1983), Seite 253-259
- [9] CONDON E.U. UND SHORTLEY G.H., *Theory of Atomic Spectra*, Cambridge University Press, 1935
- [10] DAUGAVET I.K. , *Some applications of the Marcinkiewicz-Berman identity*, Vestnik Leningrad Univ., Math. 1, 321-327 (1974)
- [11] EDMONDS A.R., *Angular Momentum in Quantum Mechanics*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey 1957

-
- [12] FENGLER M.J., *Vector Spherical Harmonics and Vector Wavelet Based Non-Linear Galerkin Schemes for Solving the Incompressible Navier-Stokes Equation on the Sphere*, Dissertation, Shaker Verlag, Kaiserslautern, 2005
- [13] FISCHER C., *Multistatisches Radar zur Lokalisierung von Objekten im Boden*, Dissertation, Universität Karlsruhe, 2003
- [14] FREEDEN W., GERVENS T. UND SCHREINER M., *Constructive Approximation on the Sphere*, Oxford Science Publications, 1998
- [15] GANESH M. UND GRAHAM I.G., *A high-order algorithm for obstacle scattering in three dimensions*, J. comp. Physics 198, 2004, S. 211-242
- [16] GANESH M., GRAHAM I.G. UND SIVALOGANATHAN J., *A new spectral boundary integral collocation method for three-dimensional potential problems*, SIAM J. Numer. Anal. 35, S.778-804 (1998)
- [17] GANESH M. UND HAWKINS S.C., *A spectrally accurate algorithm for electromagnetic scattering in three dimensions*, Numer. Algorithms, 43 (2006), S. 25-60
- [18] GANESH M. UND HAWKINS S.C., *An efficient surface integral equation method for the time-harmonic Maxwell equations*, Proceedings of the 13th biennial conference on Computational Techniques and Applications (CTAC), submitted
- [19] GANESH M. UND HAWKINS S.C., *A hybrid high-order algorithm for radar cross section computations*, SIAM J Sci. Comp., 2007, to appear
- [20] GERVENS T., *Vektorkugelfunktionen mit Anwendungen in der Theorie der elastischen Verformungen für die Kugel*, Dissertation, RWTH Aachen, 1989
- [21] GRAHAM I.G. UND SLOAN I.H., *Fully discrete spectral boundary integral methods for Helmholtz problems on smooth closed surfaces in \mathbb{R}^3* , Numer. Math. (2002) 92, S. 289-323
- [22] GINTIDES D., *Local uniqueness for the inverse scattering problem in acoustics via the Faber-Krahn inequality*, Inverse Problems, 21 (2005), Seite 1195-1205
- [23] GRINBERG N., *The factorization method in inverse obstacle scattering*, Habilitationsschrift, Universität Karlsruhe, 2004
- [24] GRONWALL T.H., *On the degree of convergence of Laplac's series*, Trans. Amer. Math. Soc., 15 (1914), Seite 1-30
- [25] HÄHNER P., *An Inverse Problem in Elastostatics*, Inverse Problems, 15 (1999), Seite 961-975

- [26] HEINE E., *Handbuch der Kugelfunktionen*, G. Reimer, 1878
- [27] HOHAGE T., *Fast numerical solution of the electromagnetic medium scattering problem and applications to the inverse problem*, J. Comp. Phys., 214 (2006), Seite 224-238
- [28] IVANYSHYN O. UND JOHANSSON T., *Nonlinear integral equations methods for the reconstruction of an acoustically sound-soft obstacle*, erscheint in Journal of Integral Equations, 2007
- [29] IVANYSHYN O. UND KRESS R., *Nonlinear Integral Equations In Inverse Obstacle Scattering*, In: Mathematical Methods in Scattering Theory and Bio-medical Engineering (Fotiatis, Massalas, eds). World Scientific, Singapore, Seite 39-50 (2006)
- [30] JÄNICH K., *Vektoranalysis*, Springer-Verlag, 1992
- [31] JOHANSSON T. UND SLEEMAN B.D., *Reconstruction of an acoustically sound-soft obstacle from one incident field and the far field pattern*, erscheint in IMA J. Appl. Math., 2007
- [32] KIRSCH A., *Characterization of the shape of a scattering obstacle using the spectral data of the far field operator*, Inverse Problems, 14 (1998), Seite 1489-1512
- [33] KIRSCH A., *The Factorization Method for Maxwell's Equations*, Inverse Problems, 20 (2004), Seite 117-134
- [34] KOUNCHEV O., *Multivariate Polysplines*, Academic Press, 2001
- [35] KRESS R., *Minimizing the Condition Number of Boundary Integral Operators in Acoustic and Electromagnetic Scattering*, Q. J. Mech. Appl. Math., 38 (1985), Seite 323-341
- [36] KRESS R., *On the Spectrum of the Magnetostatic Integral Operator*, In: Inverse Scattering and Potential Problems in Mathematical Physics (Kleinmann, Kreß, Martensen, eds), Peter Lay, Frankfurt, S. 95-105, 1995
- [37] KRESS R., *Linear Integral Equations*, Applied Mathematical Sciences 82, Springer-Verlag, Heidelberg, 2nd Edition (1999).
- [38] KRESS R. UND RUNDELL W., *Nonlinear integral equations and the iterative solution for an inverse boundary value problem*, Inverse Problems 21, Seite 1207-1223 (2005)
- [39] LAGALLY M., FRANZ W., *Vorlesung über Vektorrechnung*, Akad. Verlagsgesellschaft, 1964

-
- [40] LANGER S., *Preconditioned Newton methods for ill-posed problems*, Dissertation, Göttingen 2007
- [41] LAPLACE P.S. DE, *Theorie des attractions des spheroides et de la figure des planetes*, Mem de L'Acad., Paris, 1785
- [42] LEBEDEV N.N., *Spezielle Funktionen und ihre Anwendungen*, Bibliographisches Institut, 1973
- [43] LEGENDRE A.M., *Recherches sur l'attraction des spheroides homogenes*, Mem. math. phys. a l'Acad. Aci. par. divers savantes, 10, S.411-434, 1785
- [44] LENSE J., *Kugelfunktionen*, Leipzig Akad. Verlagsgesellschaft, Mathematik und ihre Anwendungen in Physik und Technik, Reihe A, Bd. 23, 1954
- [45] MONK P., *Finite Element Methods for Maxwell's Equations*, Oxford Science Publications, 2003
- [46] MÜLLER C., *Spherical Harmonics*, Lecture Notes in Mathematics, 17, Springer, 1966
- [47] NEUMANN F., *Ueber eine neue Eigenschaft der Laplace'schen $Y^{(n)}$ und ihre Anwendung zur analytischen Darstellung derjenigen Phänomene, welche Functionen der geographischen Länge und Breite sind*, Ast. Nachrichten 15, Seite 567ff, 1838
- [48] NEUMANN F., *Vorlesungen über die Theorie des Potentials und der Kugelfunktionen*, Teubner, 1887
- [49] NESTEL F.S., *Zur numerischen Lösung einiger Integralgleichungen auf der Sphäre*, Dissertation, Erlangen 1996
- [50] PIKE E.R., SABATIER P.C. EDS., *Scattering*, Academic Press, 2002
- [51] POTTHAST R., *Frechet differentiability of boundary integral operators in inverse acoustic scattering*, Inverse Problems 10 (1994), 431-447
- [52] RAGOZIN D., *Constructive polynomial approximation on spheres and projective spaces*, Trans. Am. Math. Soc. 162, S.157-170, 1971
- [53] REIMER M., *Constructive Theory of Multivariate Functions*, BI Wissenschaftsverlag, Mannheim, Wien, Zürich, 1990
- [54] REIMER M., *Hyperinterpolation on the sphere at the minimal projection order*, J. Approx. Theory 104, S.272-286, 2000
- [55] RÜHS F., *Funktionentheorie*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1976

-
- [56] SERRANHO, P.M., *A hybrid method for inverse obstacle scattering problems*, Dissertation, Göttingen 2007
- [57] SZEGÖ G., *Orthogonal Polynomials*, American Math. Society, Providence, Rhode Island, 1967 (Third Edition)
- [58] SLOAN I.H., *Polynomial interpolation and hyperinterpolation over general regions*, J. Approx. Theory 83, 1995, S. 238-254
- [59] SLOAN I.H. UND WOMERSLEY R.S., *Constructive approximation on the sphere*, J. Approx. Theory 103 (2000), S. 91-118
- [60] SONG J.M., LU C.C, CHEW W.C. UND LEE S.W., *Fast Illinois Solver Code(FISC)*, IEEE Antennas Propag. Mag. 40, S.27-34, 1998
- [61] STROUD A.H., *Approximate calculation of Multiple Integrals*, Prentice-Hall, New Jersey, 1971
- [62] THORNE K.S., *Multipole Expansions of Gravitational Radiation*, Rev. Mod. Phys., 52, S.299-339, 1980
- [63] WERNER J., *Numerische Mathematik 1*, Vieweg Studium; Bd. 32: Aufbaukurs Mathematik, 1992
- [64] WIENERT L., *Die numerische Approximation von Randintegraloperatoren für die Helmholtzgleichung im \mathbb{R}^3* , Dissertation, Göttingen 1990

Danksagung

Am Ende dieser Arbeit möchte ich mich bei allen bedanken, die mich während meines Studiums und bei der Anfertigung dieser Arbeit unterstützt haben.

Ein besonderer Dank gilt meinem Doktorvater Herrn Prof. Dr. Rainer Kreß für die interessante Themenstellung, sowie für die hilfreiche und stets freundliche Betreuung. Immer wenn es nötig war, halfen seine guten Ratschläge weiter, wobei er mir trotzdem immer genug Freiraum für meine eigenen Ideen gelassen hat. Bedanken möchte ich mich auch bei Herrn Prof. Dr. Thorsten Hohage, der das Korreferat übernommen hat.

Weiter danke ich meiner Familie und meinen Freunden für die Unterstützung während der Promotionszeit. Hier möchte ich besonders meine Eltern erwähnen, die mir mein Studium ermöglicht haben. Wichtig waren auch die Aufmunterungen von Anika Kühl und Susi und Alex Weißmann, wenn ich mit der Arbeit nicht weiter kam. Für die hilfreichen Diskussionen danke ich meinen Studienkollegen Achim Wübker und Stefan Langer.

Ein großes Dankeschön gilt auch Gertrud Schwarte, die durch ihre kritischen Deutsch-Korrekturen die neue deutsche Rechtschreibung in dieser Arbeit "durchgesetzt" hat.

Zuletzt möchte ich noch die finanzielle Unterstützung durch das Institut für Numerische und Angewandte Mathematik der Georg-August-Universität zu Göttingen und das Graduiertenkolleg "Identifikation in mathematischen Modellen" erwähnen.

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name	Martin Pieper
geboren	10. November 1977 in Geseke (NRW)
Familienstand	ledig
Staatsangehörigkeit	deutsch

Schulausbildung

08.1984 - 07.1988	Pankratiusschule Störmede
08.1988 - 06.1997	Gymnasium Antonianum Geseke Abschluss: Allgemeine Hochschulreife

Studium

10.1998 - 07.2003	Studium an der Georg-August-Universität zu Göttingen Hauptfach: Mathematik, Nebenfach: Theoretische Physik Diplomarbeit: "Zur Faktorisierungsmethode in der Impedanztomographie" Abschluss: Diplom in Mathematik
08.2003 - 07.2007	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Numerische und Angewandte Mathematik Promotionsstudium Mathematik

Sonstiges

07.1997 - 10.1998	Wehrdienst beim TrspBtl 801 in Lipperbruch
-------------------	--