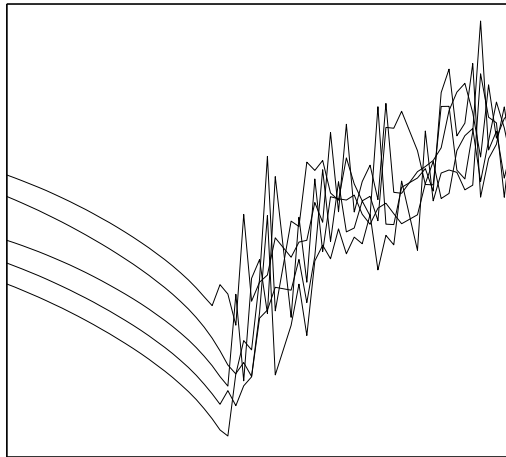


Residuale Stabilisierung für Finite Elemente Verfahren bei inkompressiblen Strömungen



Diplomarbeit

vorgelegt von
Lars Röhe
aus
Husum

angefertigt im
Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
der
Georg-August-Universität zu Göttingen
2007

Residuale Stabilisierung für Finite Elemente Verfahren bei inkompressiblen Strömungen

Diplomarbeit

vorgelegt von
Lars Röhe
aus
Husum

angefertigt im
Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
der
Georg-August-Universität zu Göttingen
2007

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Die Navier-Stokes Gleichungen als Modell	1
1.2	Überblick	2
2	Funktionalanalysis	5
2.1	Räume und Eigenschaften	5
2.1.1	Strukturen	5
2.1.2	Sobolev-Räume	6
2.2	Grundlegende Aussagen	10
2.2.1	Partielle Integration	10
2.2.2	Riesz'scher Darstellungssatz und Lax-Milgram	10
2.2.3	Satz vom abgeschlossenen Bild	12
2.3	Wichtige Hilfsmittel	13
3	Die Oseen Gleichungen als Gemischtes Problem	15
3.1	Variationsformulierung	15
3.2	Babuška-Brezzi Bedingung	17
3.3	Lösbarkeit des Oseen Problems	18
4	Finite Elemente Methoden bei gemischten Problemen	21
4.1	Ritz-Galerkin Verfahren	21
4.1.1	Umwandlung in ein Gleichungssystem	22
4.1.2	Lösbarkeit der diskretisierten Probleme	22
4.2	Zulässige Zerlegungen	24
4.3	Finite Elemente Räume	26
4.4	Interpolationsoperatoren	28
4.5	Stabilisierungen	31
4.5.1	Residuale Stabilisierung	31
4.5.2	Stabilisierung durch lokale Projektion	32
5	Stabilisierte Diskretisierungen der Stokes Gleichungen	35
5.1	Die Stokes Gleichungen	35
5.2	Galerkin-Least-Squares Verfahren	36
5.2.1	Stabilität	36
5.2.2	Eigenschaften der Stabilisierungsmethode	41
5.3	Pressure-Stabilization / Petrov-Galerkin Verfahren	43
6	Numerische Tests zu den Stokes Gleichungen	45
6.1	Galerkin-Least-Squares Verfahren	47
6.2	Pressure-Stabilization / Petrov-Galerkin Verfahren	49
6.3	Vergleich der Taylor-Hood Elemente mit den equal-order Elementen	50

7	Stabilisierte Diskretisierungen der Oseen Gleichungen	53
7.1	Die Oseen Gleichungen	53
7.2	Residuale Stabilisierung für Taylor-Hood Elemente	54
7.2.1	Die Stabilisierung	54
7.2.2	Abschätzungen	61
7.2.3	Parameterdesign	65
7.3	Residuale Stabilisierung für equal-order Elemente	67
8	Numerische Tests zu den Oseen Gleichungen	71
8.1	Taylor-Hood Elemente	73
8.2	Equal-order Elemente	80
8.3	Vergleich der Taylor-Hood Elemente mit den equal-order Elementen	84
9	Die inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen	87
9.1	Der instationäre Fall	87
9.2	Picard Iteration als Linearisierungsverfahren	88
9.3	Praktische Umsetzung der Picard Iteration	89
9.4	Numerische Tests zu den stationären, inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen	90
10	Fazit und Ausblick	95
10.1	Vergleich von residualer Stabilisierung und Stabilisierung durch lokale Projektion	95
10.2	Zusammenfassung und Ausblick	98
	Symbolverzeichnis	101
	Literaturverzeichnis	103

Kapitel 1

Einleitung

In der vorliegenden Arbeit werden Finite Elemente Verfahren zu den inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen vorgestellt. Die Anwendungsgebiete dieses physikalischen Modells sind vielfältig, allerdings gibt es bei der Approximation von Lösungen einige Schwierigkeiten. In verschiedenen Fällen zeigt die numerische Lösung unphysikalische Oszillationen, die durch Stabilisierungsverfahren verringert werden können. Aus diesem Grund sollen hier die Methoden der residualen Stabilisierung theoretisch analysiert und in der konkreten Anwendung anhand der Navier-Stokes Gleichungen getestet werden. Um eine bessere Vorstellung des Modells zu diesen Gleichungen zu bekommen, folgt zunächst eine Motivation des Problems aus physikalischer Sicht, wozu nähere Ausführungen in der Literatur bei [Chorin and Marsden, 1979] oder [Lions, 1996] zu finden sind. Nach dieser physikalischen Darstellung wird das weitere Vorgehen dieser Arbeit erläutert.

1.1 Die Navier-Stokes Gleichungen als Modell

Betrachtet wird die Bewegung einer Flüssigkeit in einem zwei- oder dreidimensionalen Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Mit $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = (u_1(\mathbf{x}, t), \dots, u_N(\mathbf{x}, t))^T$ für $N \in \{2, 3\}$ sei die Geschwindigkeit eines Flüssigkeitsteilchens am Ort \mathbf{x} zur Zeit t bezeichnet. Die erste Eigenschaft solcher Flüssigkeiten ist, dass die Masse im System erhalten bleibt. Es kann also keine Masse entstehen oder gar zerstört werden. Wenn mit $\rho(\mathbf{x}, t)$ die Dichte als Verhältnis von Masse und Volumen der Flüssigkeit bezeichnet ist, so liefert die sogenannte Kontinuitätsgleichung die folgende Bedingung für ein beliebiges Teilgebiet $W \subset \Omega$:

$$\int_W \frac{\partial \rho}{\partial t} d\mathbf{x} = \int_W -\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) d\mathbf{x}.$$

Die Formel sichert, dass bei einem Herausfließen von Masse aus dem Volumen W sich auch die Dichte ρ verändert. Auf dem gesamten Gebiet Ω lautet dies in differentieller Form $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$, wobei $\nabla \cdot \mathbf{v} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$ die Divergenz von \mathbf{v} bezeichnet.

In dieser Arbeit wird die vereinfachende Annahme getroffen, dass die betrachtete Flüssigkeit inkompressibel ist. Das bedeutet, dass $\rho(\mathbf{x}, t)$ in Zeit und Raum konstant ist. Eine solche Annahme liefert die Bedingung

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

was als Massenerhaltungsgleichung bezeichnet wird. Die nächste zu modellierende Eigenschaft solcher Flüssigkeiten ist die Impulserhaltung. Hierzu wird die Beschleunigung der Flüssigkeit $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$

betrachtet, die sie durch wirkende Kräfte des Systems selbst oder von außen erfährt. Es lässt sich zeigen, dass gilt

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_3} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}.$$

Innerhalb des Systems bewirkt die Beschleunigung einen Druck $\tilde{p}(\mathbf{x}, t)$. Da nach Newton Kraft gleich Masse mal Beschleunigung ist, ist eine Gleichung der Form

$$\int_W \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) d\mathbf{x} = \int_W \left(-\nabla \tilde{p} + \tilde{\mathbf{f}} \right) d\mathbf{x}$$

das Resultat, wobei $\tilde{\mathbf{f}}$ für die von außen einwirkenden Kräfte steht. Für diese Herleitung der Gleichung ist allerdings stillschweigend angenommen worden, dass ideale Flüssigkeiten betrachtet werden. Das heißt, dass die Flüssigkeitsteilchen untereinander keinen Impuls austauschen und dadurch auch keine Diffusion stattfinden kann. Angenommen, solche Diffusionsprozesse finden doch statt, so muss das Modell abgeändert werden. Eine physikalische Betrachtung, die den Rahmen dieser Einleitung sprengen würde, liefert die folgende modifizierte Gleichung:

$$\int_W \rho \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) d\mathbf{x} = \int_W (\mu \Delta \mathbf{u} - \nabla \tilde{p} + \mathbf{f}) d\mathbf{x},$$

wobei μ als bekannte, flüssigkeitsabhängige Konstante angenommen wird. Es bezeichnen hierbei $\Delta \mathbf{v} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial x_i^2}$ den Laplaceoperator von \mathbf{v} und $\nabla q = \left(\frac{\partial q}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial q}{\partial x_N} \right)^T$ den Gradienten von q . In differentieller Form liefert dies somit die Gleichung

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \nu \Delta \mathbf{u} - \nabla p + \mathbf{f},$$

in der $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ die kinematische Viskosität und $p = \frac{\tilde{p}}{\rho}$ den kinematischen Druck bezeichnen. Insgesamt sind an dieser Stelle die Navier-Stokes Gleichungen hergeleitet mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} && \text{auf } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 && \text{auf } \Omega. \end{aligned}$$

Für den Rand des Gebiets Ω wird in den folgenden Ausführungen häufig vereinfachend angenommen, dass sich die Flüssigkeit dort nicht bewegen soll, das heißt $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ auf $\partial\Omega$ gilt. Die Vorstellung dahinter sieht eine Art Wand am Rand des Gebiets vor, an der der Fluss gebremst wird. Direkt auf dieser Wand stehen die Flüssigkeitsteilchen, deshalb wird diese Bedingung auch Haftbedingung genannt. Im mathematischen Kontext ist homogener Dirichlet Rand eine Bezeichnung dafür.

1.2 Überblick

Die Numerische Strömungsmechanik (Computational Fluid Dynamics) beschäftigt sich als Teilgebiet der Mathematik mit der numerischen Lösung der Navier-Stokes Gleichungen. Eine Zeitdiskretisierung mit Zeitschritt Δt in Verbindung mit einer Linearisierung sind ein häufig gewählter Ansatz, welcher in Kapitel 9 erläutert wird. Diese Vorgehensweise führt auf Hilfsprobleme vom Typ der Oseen Gleichungen

$$\begin{aligned} -\nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \sigma \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} && \text{auf } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 && \text{auf } \Omega \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0} && \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{1.1}$$

wobei $\nabla \cdot \mathbf{b} = 0$ und $0 \leq \sigma \sim \frac{1}{\Delta t}$ gilt. Alle auftretenden Parameter haben eigene Bezeichnungen. Wie bereits durch Abschnitt 1.1 motiviert heißt ν Viskosität. Der vektorwertige Parameter \mathbf{b} wird Konvektion genannt und die durch die Zeitdiskretisierung hervorgerufene Konstante σ ist die Reaktionskonstante.

Dieses Problem stellt einen Kernpunkt der vorliegenden Arbeit dar. Um die eindeutige Lösbarkeit in Kapitel 3 zu sichern, wird in Kapitel 2 eine funktionalanalytische Grundlage für die theoretischen Betrachtungen entwickelt. Im Vordergrund stehen vor allem geeignete Funktionenräume, in denen eine Lösung von (1.1) gefunden werden kann.

Die numerischen Betrachtungen finden bezüglich Finiten Elemente Methoden statt, welche in Kapitel 4 eingeführt werden. Da die praktischen Tests einer Implementierung auf Basis der Programm-bibliothek `deal.II` (siehe [Bangerth et al., 2007b]) zugrunde liegen und diese Viereckselemente nutzt, ist auch die Einführung der Finiten Elemente besonders darauf abgestimmt. Als Abschluss des Kapitels folgen Ansätze von zwei verschiedenen Möglichkeiten der Stabilisierung.

Auf Grundlage dieser Kapitel sollen dann unterschiedliche Varianten der residualen Stabilisierung untersucht werden. Kapitel 5 liefert theoretische Betrachtungen zu den Stokes Gleichungen, welche ein Spezialfall der Oseen Gleichungen sind, in dem die Diffusion dominant ist. Um die Theorie zu prüfen, folgen in Kapitel 6 numerische Tests zu verschiedenen Finite Elemente Verfahren mit und ohne Einfluss von Stabilisierung. Als nächstes werden die vollen Oseen Gleichungen herangezogen und in Kapitel 7 mit Einfluss unterschiedlicher Stabilisierungen theoretisch betrachtet. Numerische Tests zum konvektionsdominanten Fall sind in Kapitel 8 angeführt und werden auch mit den Ergebnissen zum diffusionsdominanten Fall verglichen.

Kapitel 9 stellt sich dem Problem der Navier-Stokes Gleichungen und setzt insbesondere die Oseen Gleichungen in Verbindung zu dem anfangs physikalisch motivierten Problem. Numerische Tests zu dem bekannten Beispiel der Driven Cavity sind ebenfalls angeführt, wobei die Notwendigkeit der Stabilisierung untersucht wird. Abschließend soll mit Kapitel 10 die residuale Stabilisierung mit der Stabilisierung durch lokale Projektion verglichen werden. Dadurch können die Nachteile und Vorteile der speziellen Verfahren herausgearbeitet und betrachtet werden, was die Einordnung in einen allgemeineren Rahmen möglich macht. Darauf folgt eine Zusammenfassung der erarbeiteten Resultate dieser Arbeit sowie ein Ausblick auf eine mögliche Weiterentwicklung der vorgestellten Methoden.

Kapitel 2

Funktionalanalysis

Eines der Hauptgebiete der Funktionalanalysis ist es Räume zu Problemstellungen zu konstruieren, um darauf analytische Fragestellungen klären zu können. Genau aus diesem Grund wird in diesem Kapitel eine funktionalanalytische Grundlage gegeben, so dass die richtigen Funktionenräume bereitgestellt werden, um die auftretenden Probleme mathematisch betrachten zu können. Die Vorgehensweise dieses Kapitels ist übernommen aus dem Buch [Alt, 2002], welches ausführliche Beweise zu den hier zitierten Sätzen bereitstellt. Es gibt allerdings auch andere empfehlenswerte Bücher zu diesem Thema, wie zum Beispiel [Werner, 2004], [Zeidler, 1995a], [Zeidler, 1995b] oder [Dobrowolski, 2006].

2.1 Räume und Eigenschaften

In diesem Abschnitt werden spezielle Räume der Funktionalanalysis bereitgestellt, deren Eigenschaften zur theoretischen Betrachtung partieller Differentialgleichungen nötig sind.

2.1.1 Strukturen

Einführend sollen einige Begrifflichkeiten zu mathematischen Räumen im Allgemeinen definiert und erläutert werden.

Definition 2.1.1 (Normierter, linearer Raum; Norm):

Ein linearer Raum V über \mathbb{R} wird *normierter, linearer Raum* genannt, falls es eine Abbildung $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit

$$\begin{array}{ll} (i) \quad \|u\| \geq 0 & (ii) \quad \|u\| = 0 \iff u = 0 \\ (iii) \quad \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| & (iv) \quad \|\lambda u\| = |\lambda| \|u\| \end{array}$$

für alle $u, v \in V$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Als Schreibweise wird häufig $(V, \|\cdot\|)$ gebraucht, wobei die Abbildung $\|\cdot\|$ als *Norm* bezeichnet wird.

Definition 2.1.2 (Konvergenz, Cauchyfolge):

Eine Folge $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eines normierten, linearen Raumes $(V, \|\cdot\|)$ heißt *konvergent*, falls ein Element $u \in V$ existiert, so dass $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\| = 0$.

Die Folge heißt *Cauchyfolge*, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl N gibt, für die gilt $\|u_n - u_m\| \leq \varepsilon$ mit $n, m > N$.

Bemerkung 2.1.3:

Jede konvergente Folge ist auch eine Cauchyfolge, die Umkehrung gilt nicht.

Definition 2.1.4 (Vollständiger Raum, Banach-Raum):

Ein normierter, linearer Raum $(V, \|\cdot\|)$ heißt *vollständig*, wenn jede Cauchyfolge aus V in V konvergiert. Ein solcher Raum heißt auch *Banach-Raum*.

Definition 2.1.5 (Prä-Hilbert-Raum, Skalarprodukt):

Ein linearer Raum V über \mathbb{R} heißt *Prä-Hilbert-Raum*, wenn eine Abbildung $(\cdot, \cdot): V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ existiert mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} (i) \quad (u, u) &\geq 0 \text{ und } (u, u) = 0 \iff u = 0 & (ii) \quad (u, v) &= (v, u) \\ (iii) \quad (u_1 + u_2, v) &= (u_1, v) + (u_2, v) & (iv) \quad (\lambda u, v) &= \lambda(u, v) \end{aligned}$$

für alle $u, u_1, u_2, v \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Die Abbildung (\cdot, \cdot) wird dann *Skalarprodukt* genannt.

Bemerkung 2.1.6 (Hilbert-Raum):

Da jedes Skalarprodukt durch $\|u\| := \sqrt{(u, u)}$ eine Norm induziert, ist jeder Prä-Hilbert-Raum normierter, linearer Raum. Falls dieser zusätzlich bezüglich dieser Norm vollständig ist, heißt V *Hilbert-Raum* und wird bezeichnet mit $(V, (\cdot, \cdot))$.

Beispiel 2.1.7:

Ein wichtiges Beispiel für Hilbert-Räume ist der \mathbb{R}^N mit dem euklidischen Skalarprodukt, welches definiert ist über

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} := \sum_{i=1}^N x_i y_i.$$

Hier ist bereits zu erkennen, dass in dieser Arbeit der Fettdruck genutzt wird, um deutlich zu machen, dass etwas vektorwertiges gemeint ist.

2.1.2 Sobolev-Räume

Auf Basis dieser allgemeinen Begrifflichkeiten werden die geeigneten Räume für die Betrachtung partieller Differentialgleichungen eingeführt.

Definition 2.1.8 (Lebesgue-Räume):

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ eine beschränkte, Lebesgue-messbare Menge, wobei $|\Omega|$ das N -dimensionale Lebesgue-Maß bezeichnet. $L^p(\Omega)$ mit $1 \leq p < \infty$ ist dann der Raum aller messbaren Funktionen $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p} < \infty.$$

$L^\infty(\Omega)$ ist der Raum aller fast überall gleichmäßig beschränkten und Lebesgue-messbaren Funktionen $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ und wird versehen mit der Norm

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |u(x)| := \inf_{|N|=0} \left(\sup_{x \in \Omega \setminus N} |u(x)| \right).$$

Bei dieser Definition werden Funktionen, die sich nur auf einer Menge vom Maß Null unterscheiden, als gleich angesehen.

Satz 2.1.9:

Die Räume $L^p(\Omega)$ für $1 \leq p \leq \infty$ sind mit den Normen aus Definition 2.1.8 Banach-Räume.

Beweis:

Siehe [Alt, 2002] Satz 1.17 und Lemma 1.13. ■

Bemerkung 2.1.10:

Eine besonders wichtige Rolle in dieser Ausarbeitung spielt der Fall $p = 2$. Der Raum $L^2(\Omega)$ ist mit dem Skalarprodukt

$$(u, v) := \int_{\Omega} u(x)v(x) \, dx$$

ein Hilbert-Raum, bei dem bewusst der Index weggelassen worden ist. Ist ein anderes Skalarprodukt gemeint, so wird dies kenntlich gemacht. Auch bei der Norm wird die Kurzschreibweise $\|u\|_{0,\Omega} = \|u\|_{L^2(\Omega)}$ eingeführt. Handelt es sich um das gesamte Gebiet Ω , so entfällt dies ebenfalls als Index. Wenn dies nicht der Fall ist, so wird der betreffende Raum in den Index geschrieben.

Beweis:

Siehe [Alt, 2002] Bemerkung 1.12. ■

Definition 2.1.11 (Multiindex, Ordnung):

Ein Vektor $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ nicht negativer, ganzer Zahlen heißt *Multiindex*. Die Zahl $|\alpha| := \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ heißt *Ordnung* zu einem Multiindex.

Bemerkung 2.1.12:

Ein solcher Multiindex wird eingesetzt, um Differenzationsvorschriften abkürzend schreiben zu können. Die einzelnen Komponenten α_i geben dabei an, wie oft nach x_i differenziert wird. Bei einer hinreichend oft differenzierbaren Funktion $v: X \rightarrow \mathbb{R}$ liefert

$$D^\alpha v := \frac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

eine abkürzende Schreibweise dazu. Damit ist es sinnvoll $D^0 v := v$ zu setzen.

Definition 2.1.13 (Räume stetiger und stetig partiell differenzierbarer Funktionen):

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ eine offene, zusammenhängende Menge und damit ein Gebiet. Sei dazu $\bar{\Omega}$ ihr Abschluss. $C(\Omega)$ bezeichnet dann den Raum aller Funktionen $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, die für alle $x \in \Omega$ stetig sind. Der Raum $C^k(\Omega)$ für $1 \leq k \leq \infty$ bezeichnet den Raum der k -fach stetig differenzierbaren Funktionen $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Mit $C(\bar{\Omega})$ und $C^k(\bar{\Omega})$ werden diejenigen Räume bezeichnet, deren Funktionen die jeweiligen Aussagen auch auf $\bar{\Omega}$ fortsetzen lassen.

Satz 2.1.14:

Die Räume $(C(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{C(\bar{\Omega})})$ und $(C^k(\bar{\Omega}), \|\cdot\|_{C^k(\bar{\Omega})})$ mit den Normen

$$\|u\|_{C(\bar{\Omega})} := \max_{x \in \bar{\Omega}} |u(x)| \quad \text{und} \quad \|u\|_{C^k(\bar{\Omega})} := \max_{x \in \bar{\Omega}} \sum_{|\alpha| \leq k} |D^\alpha u(x)|$$

sind Banach-Räume.

Beweis:

Siehe [Alt, 2002] Abschnitt 1.2 und 1.5. ■

Definition 2.1.15 (Funktionenräume mit kompaktem Träger):

Sei Ω Gebiet im \mathbb{R}^N . Dann heißt die Menge $\text{supp}(u) := \{x \in \Omega \mid u(x) \neq 0\}$ für eine Funktion $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ *Träger* (oder Support) von u .

$C_0^k(\Omega)$ bezeichnet dann den Raum aller Funktionen aus $C^k(\Omega)$, die zusätzlich einen kompakten Träger besitzen.

Sobolev-Räume enthalten Funktionen, die mit einem verallgemeinerten Begriff der Differenzierbarkeit differenzierbar sind. Als Beschreibung dieses Begriffes wird der folgende Raum eingeführt, welcher diese verallgemeinerten Ableitungen enthält. Diese Ableitungen werden als schwache Ableitungen im Sinne der Definition 2.1.17 bezeichnet.

Definition 2.1.16 (Raum der lokal integrierbaren Funktionen):

Sei Ω ein Lebesgue-messbares Gebiet im \mathbb{R}^N . Dann ist $L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ der Raum der lokal integrierbaren Funktionen $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Eine solche Funktion heißt *lokal integrierbar*, falls sie auf allen kompakten Teilmengen von Ω im Sinne des Lebesgue-Integrals integrierbar ist.

Definition 2.1.17 (Schwache Ableitungen):

Sei $u \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ und α ein Multiindex. Falls eine Funktion $w \in L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ existiert, so dass

$$\int_{\Omega} u(x) D^{\alpha} v(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} w(x) v(x) dx$$

für alle $v \in C_0^{\infty}(\Omega)$ gilt, dann heißt w die *schwache Ableitung* von u mit der Ordnung α . Die Kurzbezeichnung dafür lautet $w = D^{\alpha} u$.

Über die Regel der partiellen Integration aus Satz 2.2.2 ist zu sehen, dass die sonst üblichen "starken" Ableitungen auch schwache Ableitungen sind.

Definition 2.1.18 (Sobolev-Räume):

Sei $1 \leq p \leq \infty$ und $k \in \mathbb{N}$. Der *Sobolev-Raum* $W^{k,p}(\Omega)$ enthält dann alle Funktionen $u \in L^p(\Omega)$, für die alle schwachen Ableitungen $D^{\alpha} u$ existieren mit $|\alpha| \leq k$ und zusätzlich in $L^p(\Omega)$ enthalten sind.

Satz 2.1.19:

Die Räume $(W^{k,p}(\Omega), \|\cdot\|_{k,p})$ für $1 \leq p \leq \infty$ und $k \in \mathbb{N}$ mit der Norm

$$\|u\|_{k,p} := \begin{cases} \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^{\alpha} u|^p dx \right)^{1/p} & \text{falls } 1 \leq p < \infty \\ \max_{|\alpha| \leq k} \|D^{\alpha} u\|_{L^{\infty}(\Omega)} & \text{falls } p = \infty \end{cases}$$

sind Banach-Räume.

Beweis:

Siehe [Alt, 2002] Abschnitt 1.23. ■

Bemerkung 2.1.20:

Eine besondere Rolle in dieser Ausarbeitung spielt der Fall $p = 2$ und daher soll als Kurzschreibweise $H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$ genutzt werden.

Satz 2.1.21:

Der Raum $(H^k(\Omega), (\cdot, \cdot)_{H^k(\Omega)})$ ist mit dem Skalarprodukt

$$(u, v)_{H^k(\Omega)} := \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D^{\alpha} u(x) D^{\alpha} v(x) dx$$

ein Hilbert-Raum. Wegen der Wichtigkeit dieses Raumes in den kommenden Kapiteln bezeichnet die Norm im Folgenden kurz

$$\|u\|_k := \|u\|_{k,2} = \sqrt{\|u\|_0^2 + \sum_{j=1}^k |u|_j^2},$$

wobei $\|\cdot\|_0$ aus Bemerkung 2.1.10 stammt und

$$|u|_j := \sqrt{\sum_{|\alpha|=j} \int_{\Omega} D^{\alpha} u(x) D^{\alpha} u(x) dx}$$

die sogenannte H^k -Seminorm definiert. Es sei hier darauf hingewiesen, dass $|\cdot|_1$ und $\|\cdot\|_1$ auf $H_0^1(\Omega)$ äquivalente Normen sind. Falls nicht klar sein sollte, auf welchem Gebiet diese Norm gemeint ist, so wird im Folgenden noch ein Index an die Normen für das Gebiet angefügt, wie auch in Bemerkung 2.1.10.

Beweis:

Mit der Einleitung von [Alt, 2002] zusammen mit dem Beweis zu Bemerkung 2.1.10 ergibt sich die Skalarprodukteigenschaft. Die Behauptung ergibt sich dann mit Hilfe von Satz 2.1.19. ■

Die nächste Definition liefert Sobolev-Räume, die auf dem Rand den Wert Null haben. Die Schwierigkeit dabei ist, dass mit Funktionen aus $L^p(\Omega)$ immer Äquivalenzklassen von Funktionen betrachtet werden. Hat bei einer solchen Funktion der Rand überall den Wert Null, so ist sie äquivalent und damit identisch zu einer Funktion mit ganz anderen Randwerten, weil sie sich nur durch eine Nullmenge unterscheiden. Aus diesem Grund muss eine andere Variante gewählt werden.

Definition 2.1.22 (Abschluss, Dichtheit):

Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein Banach-Raum und $U \subset V$. Der *Abschluss* von U in V bezeichnet dann die Menge aller Elemente $u \in V$, die Grenzwerte von Folgen $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus U bezüglich der Norm von V sind, das heißt $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u - u_n\| = 0$. Falls der Abschluss von U mit V übereinstimmt, so heißt U *dicht* in V .

Definition 2.1.23 (Sobolev-Räume $W_0^{k,p}(\Omega)$, bzw. $H_0^k(\Omega)$):

$W_0^{k,p}(\Omega)$ bezeichnet den Abschluss von $C_0^\infty(\Omega)$ in $W^{k,p}$ bezüglich dessen Norm. Als abkürzende Schreibweise wird hier $H_0^k(\Omega) := W_0^{k,2}(\Omega)$ gesetzt. Insbesondere liegt mit dieser Definition der Raum $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $H_0^1(\Omega)$.

Bemerkung 2.1.24:

In dieser Arbeit werden des öfteren vektorwertige Versionen der vorgestellten Räume benötigt. Wenn $(V, \|\cdot\|_V)$ ein normierter Raum ist, so besitzt der dazugehörige vektorwertige Raum $[V]^N$ für $N \in \mathbb{N}$ mittels Beispiel 2.1.7 die Norm $\|\mathbf{v}\|_{V^N} := \|\sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}\|_V$.

Auch das Skalarprodukt des Raumes $L^2(\Omega)$ soll hier für vektorwertige Funktionen definiert werden durch $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} dx$.

2.2 Grundlegende Aussagen

Neben den Räumen werden in dieser Arbeit auch grundlegende Resultate aus der Funktionalanalysis gebraucht. Diese sollen in diesem Abschnitt dargestellt werden.

2.2.1 Partielle Integration

Für die partielle Integration sind spezielle Anforderungen an die Gebiete Ω nötig, deren Ränder glatt genug sein müssen.

Definition 2.2.1 (Reguläre Gebiete, Lipschitz-Gebiet):

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ mit $N \geq 2$ ein beschränktes Gebiet mit dem Rand $\partial\Omega$. Dann gehört Ω zur Klasse $C^{k,1}$ für $k \in \mathbb{N}_0$, wenn es endlich viele lokale Koordinatensysteme K_1, \dots, K_r , Funktionen f_1, \dots, f_r und Konstanten $a, b > 0$ gibt mit den folgenden Eigenschaften.

- (i) Alle f_i sind auf dem $(N-1)$ -dimensionalen, abgeschlossenen Würfel

$$\bar{Q}_{N-1} = \{x = (x_1, \dots, x_{N-1}) \mid |x_i| \leq a, i = 1, \dots, N-1\}$$

k mal stetig differenzierbar mit Lipschitz-stetigen Ableitungen mit der Ordnung k .

- (ii) Zu jedem Punkt $P \in \partial\Omega$ gibt es ein $i \in \{1, \dots, r\}$, so dass P im Koordinatensystem K_i eine Darstellung $P = (x, f_i(x))$ für $x \in Q_{N-1}$ hat.

- (iii) Für das lokale Koordinatensystem K_i gilt

$$(x, x_N) \in \Omega \iff x \in \bar{Q}_{N-1}, f_i(x) < y_N < f_i(x) + b$$

$$(x, x_N) \notin \Omega \iff x \in \bar{Q}_{N-1}, f_i(x) - b < y_N < f_i(x).$$

Gehört ein Gebiet Ω zur Klasse $C^{0,1}$, so heißt es *Lipschitz-Gebiet*.

Satz 2.2.2 (Partielle Integration):

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein Lipschitz-Gebiet und $u, v \in C^1(\Omega)$. Dann gilt

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)v(x)dx = \int_{\partial\Omega} u(s)v(s)\nu_i(s)ds - \int_{\Omega} u(x)\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)dx,$$

wobei $\nu = (\nu_i)_{i=1, \dots, N}$ der äußere Normaleneinheitsvektor auf dem Rand $\partial\Omega$ ist.

Beweis:

Siehe [Alt, 2002] Satz A 6.8. ■

2.2.2 Riesz'scher Darstellungssatz und Lax-Milgram

Definition 2.2.3 (Lineare und beschränkte Operatoren):

Seien $(U, \|\cdot\|_U)$ und $(V, \|\cdot\|_V)$ lineare normierte Räume. Ein Operator $\mathcal{A}: V \rightarrow U$ heißt *linear*, falls $\mathcal{A}(\alpha u + v) = \alpha\mathcal{A}(u) + \mathcal{A}(v)$ für alle $u, v \in V$ und alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt. Zudem heißt der Operator \mathcal{A} *beschränkt*, falls eine positive Zahl C existiert, so dass $\|\mathcal{A}(u)\|_U \leq C\|u\|_V$ für alle $u \in V$ gilt. $\mathcal{L}(V, U)$ bezeichnet die Menge aller linearen und beschränkten Operatoren \mathcal{A} von V nach U und bekommt eine Norm durch $\|\mathcal{A}\| := \sup_{\|u\|_V=1} \|\mathcal{A}(u)\|_U$.

Definition 2.2.4 (Dualraum):

Sei $(V, \|\cdot\|_V)$ linearer, normierter Raum. Dann heißt $V^* := \mathcal{L}(V, \mathbb{R})$ der Dualraum zu V und besitzt nach Definition 2.2.3 auch eine Norm.

Lemma 2.2.5:

Der Dualraum V^* zu V ist ein Banach-Raum.

Beweis:

Mit Beispiel 2.1.7 folgt die Behauptung aus [Alt, 2002] Satz 3.3. ■

Satz 2.2.6 (Riesz'scher Darstellungssatz):

Sei $(V, (\cdot, \cdot))$ ein Hilbert-Raum. Dann gibt es zu jedem Element $u^* \in V^*$ genau ein Element $u \in V$, so dass u^* dargestellt werden kann mit Hilfe des Skalarproduktes durch

$$u^*(v) = (u, v)$$

für alle $v \in V$. Auf diese Weise ist auch der Dualraum mit dem ursprünglichen Raum zu identifizieren, indem jedem Element des Dualraumes sein durch diesen Satz zugeordnetes Element des eigentlichen Raumes zugeordnet wird. Es gilt sogar $\|u^*\|_{V^*} = \|u\|_V$.

Beweis:

Siehe [Alt, 2002] Satz 4.1. ■

Bemerkung 2.2.7:

Aus dem zitierten Beweis zum Riesz'schen Darstellungssatz geht ebenfalls hervor, dass für endlich dimensionale Räume V gilt $\dim V = \dim V^*$.

Die Anwendung des Riesz'schen Darstellungssatzes liefert den folgenden Satz.

Satz 2.2.8 (Lax-Milgram):

Sei $(V, (\cdot, \cdot))$ ein Hilbert-Raum und $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine Bilinearform, das heißt linear in beiden Argumenten. Falls es nun positive Konstanten $\gamma_0, C_0 < \infty$ gibt, wobei

$$\begin{array}{lll} (i) & a(u, u) \geq \gamma_0 \|u\|_V^2 & \text{(V-Elliptizität)} \\ (ii) & |a(u, v)| \leq C_0 \|u\|_V \|v\|_V & \text{(Beschränktheit)} \end{array}$$

für alle $u, v \in V$ erfüllt ist, so gilt die folgende Aussage. Es existiert zu jedem Element $f \in V^*$ genau ein Element $u \in V$ mit

$$a(u, v) = f(v)$$

für alle $v \in V$. Außerdem ist $\|u\|_V \leq \frac{1}{\gamma_0} \|f\|_{V^*}$.

Beweis:

Siehe [Alt, 2002] Satz 4.2. ■

2.2.3 Satz vom abgeschlossenen Bild

Der Satz vom abgeschlossenen Bild wird häufig als Grundlage zur theoretischen Lösbarkeit eines Problems gebraucht. Die Aussage wird hier kurz dargestellt.

Mit V, W sind im Folgenden immer Banach-Räume gemeint.

Definition 2.2.9 (Dualer Operator):

Sei $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(V, W)$. So heißt der durch

$$\langle \mathcal{B}^* w^*, v \rangle := \langle w^*, \mathcal{B}v \rangle$$

für $v \in V$ und $w^* \in W^*$ definierte Operator $\mathcal{B}^*: W^* \rightarrow V^*$ der zu \mathcal{B} *duale Operator*.

Lemma 2.2.10:

Zu $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(V, W)$ existiert genau ein dualer Operator.

Beweis:

Siehe [Alt, 2002] Satz 10.1. ■

Definition 2.2.11 (Bild, Kern):

Sei $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(V, W)$, dann heißt

$$\text{im}(\mathcal{B}) := \{\mathcal{B}(v) \mid v \in V\}$$

das *Bild* von \mathcal{B} . Der *Kern* von \mathcal{B} ist definiert durch

$$\text{ker}(\mathcal{B}) := \{v \in V \mid \mathcal{B}(v) = 0\}.$$

Definition 2.2.12 (Annihilator):

Seien $R \subset V$ und $S \subset V^*$, dann heißen

$$R^\circ := \{v^* \in V^* \mid v^*(u) = 0 \quad \forall u \in R\}$$

und

$$S_\circ := \{v \in V \mid u^*(v) = 0 \quad \forall u^* \in S\}$$

Annihilatoren von R bzw. S .

Satz 2.2.13 (Abgeschlossenes Bild):

Sei $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(V, W)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) $\text{im}(\mathcal{B})$ ist abgeschlossen
- (ii) $\text{im}(\mathcal{B}) = \text{ker}(\mathcal{B}^*)_\circ$
- (iii) $\text{im}(\mathcal{B}^*)$ ist abgeschlossen
- (iv) $\text{im}(\mathcal{B}^*) = \text{ker}(\mathcal{B})^\circ$

Beweis:

Siehe [Werner, 2004] Theorem IV.5.1. ■

2.3 Wichtige Hilfsmittel

Als Abschluss dieses Kapitels werden noch wichtige Ungleichungen bereitgestellt, die häufig für die Beweise in dieser Arbeit herangezogen werden.

Lemma 2.3.1 (Friedrichs-Ungleichung):

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen und beschränkt. Dann gibt es eine vom Gebiet Ω abhängige Konstante C_F mit

$$\|u\|_0 \leq C_F \|\nabla u\|_0$$

für alle Funktionen $u \in H_0^1(\Omega)$.

Beweis:

Siehe [Alt, 2002] Satz 4.7. In der Quelle wird die Ungleichung Poincaré-Ungleichung genannt, die Aussage ist allerdings gleich. ■

Lemma 2.3.2 (Cauchy-Schwarz-Ungleichung):

Sei $(V, (\cdot, \cdot))$ Hilbert-Raum, dann gilt

$$|(u, v)| \leq \|u\| \|v\|$$

für alle $u, v \in V$.

Beweis:

Siehe [Alt, 2002] Lemma 0.2. ■

Lemma 2.3.3 (Young-Ungleichung):

Seien $a, b \in \mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$, dann gilt für alle $\varepsilon > 0$

$$ab \leq \frac{1}{2\varepsilon} a^2 + \frac{\varepsilon}{2} b^2.$$

Beweis:

Siehe [Alt, 2002] Lemma 1.14. Hier wird im Laufe des Beweises zur Hölder-Ungleichung die Young-Ungleichung bewiesen. ■

Kapitel 3

Die Oseen Gleichungen als Gemischtes Problem

Die Funktionalanalysis aus Kapitel 2 soll nun auf die in Kapitel 1 motivierten Oseen Gleichungen (1.1) angewendet werden. Gesucht ist ein Paar (\mathbf{u}, p) , für das gilt

$$-\nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \sigma\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{auf } \Omega \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{auf } \Omega \quad (3.2)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{auf } \partial\Omega, \quad (3.3)$$

wobei $\nu > 0$, $\sigma \geq 0$ positive Konstanten sind und \mathbf{b} ein Vektorfeld der Dimension N bezeichnet, für den $\nabla \cdot \mathbf{b} = 0$ gilt.

Wenn hier der klassische Lösungsbegriff zum Einsatz kommen soll, so ist zu einem stetigen \mathbf{f} ein zweimal stetig differenzierbares \mathbf{u} und ein einmal stetig differenzierbares p gesucht. Wenn dabei spezielle Hölder-Räume genutzt werden, so ist das Resultat eine mathematisch befriedigende Theorie. Für nähere Ausführungen dazu siehe auch [Hackbusch, 1986] und [Gilbarg and Trudinger, 2000].

In dieser Arbeit kommt diese Theorie allerdings nicht zum Einsatz, weil sie für die Anwendung zu starke Anforderungen stellt. Wie in Abschnitt 1.1 erläutert wurde, stammt beispielsweise die rechte Seite \mathbf{f} aus äußeren Quelltermen und muss nicht stetig sein. Solche Fälle werden von der klassischen Theorie nicht abgedeckt. Aus diesem Grund wird auf eine verallgemeinerte, schwache Theorie aufgebaut, die die Gleichungen in einem integralen Sinne betrachtet. Dies ist aus physikalischer Sicht keine große Abschwächung der Aufgabenstellung, weil die Herleitung in Kapitel 1 schon im integralen Sinne durchgeführt worden ist.

3.1 Variationsformulierung

Für die nun folgenden Betrachtungen ist $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ immer ein beschränktes Lipschitz-Gebiet. Um eine neue Formulierung des Problems formal herzuleiten, sind zunächst alle Daten glatt angenommen mit $\mathbf{u}, \mathbf{f} \in [C^\infty(\Omega)]^N$ und $p \in C^\infty(\Omega)$. Die Multiplikation der i -ten Komponente der Gleichung (3.1) mit einer Testfunktion $v_i \in C_0^\infty$ und die Integration über das gesamte Gebiet Ω

liefert mit Hilfe der Regel der partiellen Integration aus Satz 2.2.2 für alle $i = 1, \dots, N$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f_i v_i d\mathbf{x} &= \int_{\Omega} \left(-\nu \sum_{j=1}^N \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} v_i + \sum_{j=1}^N b_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} v_i + \sigma u_i v_i + \frac{\partial p}{\partial x_i} v_i \right) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} \left(\nu \sum_{j=1}^N \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^N b_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} v_i + \sigma u_i v_i - p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} \left(\nu \nabla u_i \cdot \nabla v_i + (\mathbf{b} \cdot \nabla) u_i v_i + \sigma u_i v_i - p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Alle auftretenden Randterme aus der partiellen Integration verschwinden wegen $v_i \in C_0^\infty$. Wenn nun die Gleichungen über i summiert werden, so ergibt sich

$$\begin{aligned} (\mathbf{f}, \mathbf{v}) &= \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} f_i v_i d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} \left(\nu \sum_{i=1}^N \nabla u_i \cdot \nabla v_i + \sum_{i=1}^N (\mathbf{b} \cdot \nabla) u_i v_i + \sigma \sum_{i=1}^N u_i v_i - \sum_{i=1}^N p \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) d\mathbf{x} \\ &= \nu (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) + ((\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v}) + \sigma (\mathbf{u}, \mathbf{v}) - (\nabla \cdot \mathbf{v}, p) \end{aligned}$$

mit der Notation aus Bemerkung 2.1.24. Ähnlich kann mit der Gleichung 3.2 umgegangen werden, die mit einer Testfunktion $q \in C^\infty$ multipliziert und über Ω integriert wird. Es ergibt sich damit

$$(\nabla \cdot \mathbf{u}, q) = \int_{\Omega} (\nabla \cdot \mathbf{u}) q d\mathbf{x} = \int_{\Omega} 0 d\mathbf{x} = 0.$$

Abkürzenderweise sind definiert

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &:= \nu (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) + ((\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v}) + \sigma (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ b(\mathbf{u}, q) &:= -(\nabla \cdot \mathbf{u}, q) \end{aligned}$$

und nun also ein Paar (\mathbf{u}, p) gesucht, so dass für Testfunktionen \mathbf{v} und q die Gleichungen

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \\ b(\mathbf{u}, q) &= 0 \end{aligned} \tag{3.4}$$

erfüllt sind. Diese Gleichungen sind für $\mathbf{v} \in [C_0^\infty(\Omega)]^N$ hergeleitet worden. Sie gelten allerdings auch für alle $\mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^N$, denn $[C_0^\infty(\Omega)]^N$ liegt nach Definition 2.1.23 dicht in $[H_0^1(\Omega)]^N$ und für ein gegebenes $\mathbf{u} \in [H_0^1(\Omega)]^N$ hängen alle Ausdrücke stetig von $\mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^N$ ab. Ebenso verhält es sich mit p und q , denn $C^\infty(\Omega)$ geschnitten mit $L^2(\Omega)$ ist dicht in $L^2(\Omega)$. Nur die eindeutige Lösbarkeit von (3.4) ist mit diesem Raum nicht gesichert, weil für eine Lösung (\mathbf{u}, p) des Problems auch $(\mathbf{u}, p + \text{const})$ eine solche in (3.1) ist. Eine Normierung des Druckes ist daher nötig. Deshalb werden in dieser Arbeit die Funktionen für den Druck nur in dem Raum

$$L_*^2(\Omega) := \left\{ q \in L^2(\Omega) \mid \int_{\Omega} q d\mathbf{x} = 0 \right\}, \tag{3.5}$$

gesucht, wobei auch andere Räume denkbar wären. Mit diesen Überlegungen rechtfertigt sich nun die nächste Definition.

Definition 3.1.1 (Schwache Lösung der Oseen Gleichungen, Variationsformulierung): Das Paar $(\mathbf{u}, p) \in [H_0^1(\Omega)]^N \times L_*^2(\Omega)$ heißt *schwache Lösung von (1.1)*, wenn die *Variationsformulierung (3.4)* für alle Paare $(\mathbf{v}, q) \in [H_0^1(\Omega)]^N \times L_*^2(\Omega)$ erfüllt ist.

Die dritte Gleichung (3.3) ist über die Definition des Lösungsraumes $[H_0^1(\Omega)]^N$ in das Problem eingegangen. Ein Vorteil an dieser Formulierung ist, dass für eine Differentialgleichung zweiter Ordnung nur die Existenz der schwachen Ableitungen erster Ordnung notwendig ist. Für dieses Problem soll im folgenden Abschnitt die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung gezeigt werden.

3.2 Babuška-Brezzi Bedingung

An dieser Stelle wird ein allgemeiner Rahmen für gemischte Variationsprobleme aufgebaut, wozu die Quellen [Brezzi, 1974], [Girault and Raviart, 1986] Kapitel I Abschnitt 4 sowie wie auch [Babuška, 1973] die Grundlage liefern. Zu den Sätzen, die aus der Literatur übernommen werden können, wird jeweils nur die Quelle angegeben, um dieses Kapitel übersichtlicher zu halten. Ergänzende Ergebnisse werden vollständig bewiesen.

Seien V, W zwei reelle Hilbert-Räume und V^*, W^* die zugehörigen Dualräume. Im Folgenden wird als Notation das sogenannte Dualitätsprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle : V^* \times V \rightarrow \mathbb{R}$ gebraucht, welches für $u^* \in V^*$ und $v \in V$ durch $\langle u^*, v \rangle := u^*(v)$ definiert ist. Die Indizes an Normen und Skalarprodukten werden in den kommenden Abschnitten unterdrückt, solange durch den Zusammenhang deutlich bleibt, worum es sich handelt. Das erste Lemma ist Resultat der Anwendung des Satzes 2.2.13 vom abgeschlossenen Bild aus der Funktionalanalysis.

Lemma 3.2.1:

Seien $b: V \times W \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Bilinearform und $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(V, W^*)$, so dass für alle $v \in V$ und $w \in W$ gilt

$$\langle \mathcal{B}v, w \rangle = b(v, w).$$

Dann sind für alle Konstanten $\beta > 0$ die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) $\inf_{0 \neq w \in W} \sup_{0 \neq v \in V} \frac{b(v, w)}{\|w\| \|v\|} \geq \beta$
- (ii) $\|\mathcal{B}^*w\| \geq \beta \|w\| \quad \forall w \in W$
- (iii) $\exists \mathcal{I} \in \mathcal{L}(W^*, V): \mathcal{B}\mathcal{I} = 1 \text{ mit } \|\mathcal{I}\| \leq \beta^{-1}.$

Die 1 bezeichnet hier die Identität auf W^* .

Beweis:

Siehe [Brezzi, 1974] Theorem 0.1. ■

Wird dieses Lemma auf die Bilinearformen $b(v, w)$ und $b'(w, v) := b(v, w)$ angewandt, so liefert dies die folgende Bemerkung.

Bemerkung 3.2.2:

Seien alle Voraussetzungen wie in Lemma 3.2.1 und β, β' echt positive Zahlen. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (i) $\inf_{0 \neq w \in W} \sup_{0 \neq v \in V} \frac{b(v, w)}{\|w\| \|v\|} \geq \beta$ und $\inf_{0 \neq v \in V} \sup_{0 \neq w \in W} \frac{b(v, w)}{\|w\| \|v\|} \geq \beta'$
- (ii) $\|\mathcal{B}v\| \geq \beta' \|v\| \quad \forall v \in V$ und $\|\mathcal{B}^*w\| \geq \beta \|w\| \quad \forall w \in W$
- (iii) \mathcal{B} ist Isomorphismus mit $\|\mathcal{B}^{-1}\| \leq \beta^{-1}$ und $\|\mathcal{B}^{*-1}\| \leq \beta'^{-1}.$

An dieser Stelle ist die Verbindung zu gemischten Problemen der Form

$$\text{Finde } (u, p) \in V \times Q \text{ mit: } \begin{aligned} a(u, v) + b(v, p) &= \langle \mathcal{F}, v \rangle & \forall v \in V \\ b(u, q) &= \langle \mathcal{G}, q \rangle & \forall q \in Q \end{aligned} \quad (3.6)$$

herzustellen. Die rechten Seiten sind Elemente aus den jeweiligen Dualräumen, also $\mathcal{F} \in V^*$ und $\mathcal{G} \in Q^*$. $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ und $b: V \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ sind stetige Bilinearformen, über die zwei lineare, beschränkte Operatoren $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V, V^*)$ und $\mathcal{B} \in \mathcal{L}(V, Q^*)$ definiert werden können mittels

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}u, v \rangle &= a(u, v) & \forall u, v \in V \\ \langle \mathcal{B}v, q \rangle &= b(v, q) & \forall v \in V, q \in Q. \end{aligned}$$

Somit ist ein zu (3.6) äquivalentes Problem aufgestellt mit

$$\text{Finde } (u, p) \in V \times Q \text{ mit: } \begin{aligned} \mathcal{A}u + \mathcal{B}^*p &= \mathcal{F} \\ \mathcal{B}u &= \mathcal{G}. \end{aligned}$$

Es werden notwendige und hinreichende Bedingungen für die eindeutige Lösbarkeit dieses Problems gesucht. Dies wäre genau dann der Fall, wenn der Operator $\Lambda \in \mathcal{L}(V \times Q, V^* \times Q^*)$ mit $\Lambda(v, q) := (\mathcal{A}v + \mathcal{B}^*q, \mathcal{B}v)$ ein Isomorphismus ist. Damit wird sich der nächste Satz beschäftigen. Er ist eine zentrale Aussage zur Behandlung gemischter Probleme und wurde von Babuška in [Babuška, 1973] und Brezzi in [Brezzi, 1974] unabhängig voneinander gefunden. Der Beweis nutzt im Wesentlichen die hier angeführten Aussagen. Als Vorbereitung seien noch eine Raumdefinition mit

$$V_0 := \ker(\mathcal{B}) = \{v \in V \mid b(v, q) = 0 \forall q \in Q\},$$

sowie die Definition der orthogonalen Projektion $\pi \in \mathcal{L}(V^*, V_0^*)$ durch

$$\langle \pi \mathcal{F}, v \rangle = \langle \mathcal{F}, v \rangle \quad \forall \mathcal{F} \in V^*, v \in V.$$

gegeben.

Satz 3.2.3:

Seien die Definitionen wie oben. Dann ist Λ genau dann ein Isomorphismus, wenn die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind

- (i) $\pi \mathcal{A}$ ist Isomorphismus von V_0 nach V_0^* ,
- (ii) es existiert eine Konstante $\beta > 0$ mit der gilt

$$\inf_{0 \neq q \in Q} \sup_{0 \neq v \in V} \frac{b(v, q)}{\|v\| \|q\|} \geq \beta. \quad (3.7)$$

Beweis:

Siehe [Brezzi, 1974] Theorem 1.1. ■

Definition 3.2.4 (BB-Bedingung):

Die Bedingung (ii) aus Satz 3.2.3 wird auch *Babuška-Brezzi Bedingung*, *BB-Bedingung* oder *Inf-Sup Bedingung* genannt.

3.3 Lösbarkeit des Oseen Problems

Lemma 3.3.1:

Es gelten die Voraussetzungen zu Satz 3.2.3 und zusätzlich, dass die stetige Bilinearform $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ V_0 -elliptisch ist. Es existiere also eine positive Konstante γ_0 , so dass für alle $v \in V_0$ gilt

$$a(v, v) \geq \gamma_0 \|v\|^2.$$

Das Problem (3.6) ist genau dann eindeutig lösbar, wenn die Bilinearform $b: V \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ die BB-Bedingung erfüllt.

Beweis:

Die Bilinearform a ist V_0 -elliptisch und wegen der Stetigkeit auch beschränkt. Daher kann hier das Lemma von Lax-Milgram aus Satz 2.2.8 angewendet werden und liefert, dass $\pi\mathcal{A}$ ein Isomorphismus von V_0 nach V_0^* ist. Der Rest folgt aus Satz 3.2.3. Vergleiche auch [Girault and Raviart, 1986] Kapitel I, Korollar 4.1. ■

Die konkrete Anwendung der letzten Aussage auf das Problem (3.4), welches mit den Definitionen von Abschnitt 3.1

$$\text{Finde } (\mathbf{u}, p) \in [H_0^1(\Omega)]^N \times L_*^2(\Omega) \text{ mit: } \begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \quad \forall v \in [H_0^1(\Omega)]^N \\ b(\mathbf{u}, q) &= 0 \quad \forall q \in L_*^2(\Omega) \end{aligned} \quad (3.8)$$

lautet, liefert das folgende Lemma.

Lemma 3.3.2:

Das Oseen Problem (3.8) erfüllt die Voraussetzungen von Lemma 3.3.1.

Beweis:

Es sind $\mathbf{V} = [H_0^1(\Omega)]^N$ und $Q = L_*^2(\Omega)$ Hilbert-Räume. Daher ist zu zeigen, dass die Bilinearform a auf dem Raum

$$\mathbf{V}_0 = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} \mid b(\mathbf{v}, q) = (\nabla \cdot \mathbf{v}, q) = 0 \forall q \in Q\}$$

elliptisch ist. Mit Hilfe der partiellen Integration aus Satz 2.2.2 und der Produktregel gilt für beliebige $\mathbf{v} \in \mathbf{V}_0$

$$\begin{aligned} ((\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} ((\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v} \, dx = \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^N b_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_i \, dx \\ &= - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^N v_i \frac{\partial (b_j v_i)}{\partial x_j} \, dx = - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^N \left(v_i \frac{\partial b_j}{\partial x_j} + b_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) v_i \, dx \\ &= - \int_{\Omega} \sum_{i=1}^N v_i^2 \sum_{j=1}^N \frac{\partial b_j}{\partial x_j} \, dx - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^N b_j v_i \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \, dx = -(\mathbf{v}, (\nabla \cdot \mathbf{b}) \mathbf{v}) - ((\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \mathbf{v}) \end{aligned}$$

und damit

$$((\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \mathbf{v}) = -\frac{1}{2}(\mathbf{v}, (\nabla \cdot \mathbf{b}) \mathbf{v}) = 0.$$

Der letzte Schritt gilt nach Voraussetzung $\nabla \cdot \mathbf{b} = 0$. Insgesamt liefert dies die \mathbf{V}_0 -Elliptizität

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \nu(\nabla \mathbf{v}, \nabla \mathbf{v}) + ((\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \mathbf{v}) + \sigma(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \nu |\mathbf{v}|_1^2 + \sigma \|\mathbf{v}\|_0^2 \geq \min(\nu, \sigma) \|\mathbf{v}\|_1^2.$$

Im Fall $\sigma = 0$ liefert Satz 2.1.21 die \mathbf{V}_0 -Elliptizität. Die Stetigkeit der Bilinearformen ergibt sich mit Hilfe der Cauchy-Schwarz-Ungleichung aus

$$\begin{aligned} |a(\mathbf{v}, \mathbf{w})| &= |\nu(\nabla \mathbf{v}, \nabla \mathbf{w}) + ((\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \mathbf{w}) + \sigma(\mathbf{v}, \mathbf{w})| \\ &\leq \nu |\mathbf{v}|_1 |\mathbf{w}|_1 + \|\mathbf{b}\|_\infty |\mathbf{v}|_1 \|\mathbf{w}\|_0 + \sigma \|\mathbf{v}\|_0 \|\mathbf{w}\|_0 \leq (\nu + \|\mathbf{b}\|_\infty + \sigma) \|\mathbf{v}\|_1 \|\mathbf{w}\|_1 \end{aligned}$$

und mit einem Vorgriff auf Lemma 4.4.4

$$|b(\mathbf{v}, q)| = |(\nabla \cdot \mathbf{v}, q)| \leq \sqrt{N} \|\mathbf{v}\|_1 \|q\|_0$$

für alle $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$ und $q \in Q$. Daraus folgt die Behauptung. ■

Bemerkung 3.3.3:

In dem Beweis zu Lemma 3.3.2 konnte gezeigt werden, dass unter den hier geforderten Voraussetzungen

$$((\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0$$

gilt. Dies wird auch in späteren Kapiteln genutzt werden.

Mit dem nächsten Lemma wird dieser Abschnitt vervollständigt und liefert als Resultat, dass das Oseen Problem in der Gestalt (3.8) tatsächlich eindeutig lösbar ist. Mit diesem Wissen folgt in den nächsten Kapiteln eine numerische Betrachtung zu diesem Problem.

Lemma 3.3.4:

Es existiert eine Konstante $\beta > 0$, so dass

$$\inf_{0 \neq q \in L_*^2(\Omega)} \sup_{\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in [H_0^1(\Omega)]^N} \frac{(q, \nabla \cdot \mathbf{v})}{\|q\|_0 |\mathbf{v}|_1} \geq \beta. \quad (3.9)$$

Beweis:

Ein vollständiger Beweis ist zu finden bei [Girault and Raviart, 1986] Kapitel I im Verlauf des Beweises von Theorem 5.1. ■

Kapitel 4

Finite Elemente Methoden bei gemischten Problemen

Nachdem in den vorausgegangenen Kapiteln die theoretische Betrachtung partieller Differentialgleichungen dargestellt wurde, soll an dieser Stelle die numerische Behandlung solcher Probleme erläutert werden. Für die numerische Approximation mittels Finiten Elemente Methoden wird die tatsächliche Lösung eines Problems in endlich dimensionalen Ansatzräumen angenähert. Sind diese Ansatzräume V_h Teilmengen der kontinuierlichen Räume V , so wird gesprochen von konformen Finite Elemente Methoden. In dieser Arbeit werden nur konforme Ansätze untersucht.

4.1 Ritz-Galerkin Verfahren

Sei ein gemischtes Problem auf zwei reellen Hilberträumen V, Q mit zwei stetigen Bilinearformen $a: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$, $b: V \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ und $\mathcal{F} \in V^*$, $\mathcal{G} \in Q^*$ der Form

$$\text{Finde } (u, p) \in V \times Q \text{ mit: } \begin{aligned} a(u, v) + b(v, p) &= \langle \mathcal{F}, v \rangle & \forall v \in V \\ b(u, q) &= \langle \mathcal{G}, q \rangle & \forall q \in Q. \end{aligned} \quad (4.1)$$

gegeben. V_h und Q_h bezeichnen endlich dimensionale Ansatzräume der kontinuierlichen Räume V und Q .

Definition 4.1.1 (Verallgemeinertes Ritz-Galerkin Verfahren):

Der Übergang von (4.1) zu dem Problem

$$\text{Finde } (u_h, p_h) \in V_h \times Q_h \text{ mit: } \begin{aligned} a_h(u_h, v_h) + b_h(v_h, p_h) &= \langle \mathcal{F}_h, v_h \rangle & \forall v_h \in V_h \\ b_h(u_h, q_h) &= \langle \mathcal{G}_h, q_h \rangle & \forall q_h \in Q_h \end{aligned}$$

nennt sich *verallgemeinertes Ritz-Galerkin Verfahren*.

Bemerkung 4.1.2:

Die Abänderungen der Bilinearformen und rechten Seiten von beispielsweise a zu a_h können durch Ergänzungen von Stabilisierungstermen begründet sein, was in den folgenden Kapiteln dieser Arbeit weiter erläutert wird. Streng genommen sind allerdings noch zusätzliche Abänderungen vorhanden, weil die Skalarprodukte in der konkreten Berechnung nicht exakt berechnet, sondern durch numerische Integration angenähert werden. Bei der richtigen Wahl der Quadraturformeln kann dieser Aspekt weitestgehend vernachlässigt werden, was durch [Strang and Fix, 1973] abgesichert ist. Wenn die Bilinearformen und rechten Seiten keine Abänderungen erfahren, nennt sich die Vorgehensweise Ritz-Galerkin Verfahren.

4.1.1 Umwandlung in ein Gleichungssystem

Es seien die Basen

$$\{\psi_1, \dots, \psi_{N_V}\} \subset V_h \qquad \{\varphi_1, \dots, \varphi_{N_Q}\} \subset Q_h$$

der endlich dimensionalen Ansatzräume gegeben. Wird das verallgemeinerte Ritz-Galerkin Verfahren betrachtet, so reicht es, als Testfunktionen die Basiselemente dieser Räume zu nehmen. Das Problem schreibt sich dann als

$$\text{Finde } (u_h, p_h) \in V_h \times Q_h \text{ mit:} \quad \begin{aligned} a_h(u_h, \psi_k) + b_h(\psi_k, p_h) &= \langle \mathcal{F}_h, \psi_k \rangle & k = 1, \dots, N_V \\ b_h(u_h, \varphi_k) &= \langle \mathcal{G}_h, \varphi_k \rangle & k = 1, \dots, N_Q \end{aligned} \quad (4.2)$$

und ist äquivalent zu dem verallgemeinerten Ritz-Galerkin Verfahren aus Definition 4.1.1. Mit Hilfe des Ansatzes $u_h = \sum_{i=1}^{N_V} u_i \psi_i$ und $p_h = \sum_{i=1}^{N_Q} p_i \varphi_i$ und den Definitionen

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &:= (a_h(\psi_i, \psi_k))_{k,i} & \mathbf{B} &:= (b_h(\psi_i, \varphi_k))_{k,i} \\ \bar{\mathbf{u}} &:= \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{N_V} \end{pmatrix} & \bar{\mathbf{p}} &:= \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_{N_Q} \end{pmatrix} \\ \bar{\mathbf{f}} &:= \begin{pmatrix} \langle \mathcal{F}_h, \psi_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathcal{F}_h, \psi_{N_V} \rangle \end{pmatrix} & \bar{\mathbf{g}} &:= \begin{pmatrix} \langle \mathcal{G}_h, \varphi_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathcal{G}_h, \varphi_{N_Q} \rangle \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

lässt sich die Aufgabe (4.2) als Gleichungssystem schreiben in Form von

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}^\top \\ \mathbf{B} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \bar{\mathbf{p}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{f}} \\ \bar{\mathbf{g}} \end{pmatrix}$$

Dieses Gleichungssystem entspricht dem Problem aus (4.2).

4.1.2 Lösbarkeit der diskretisierten Probleme

An dieser Stelle ist die Behandlung der eindeutigen Lösbarkeit der diskreten Probleme aus dem verallgemeinerten Ritz-Galerkin Verfahren wichtig. Es wird sich zeigen, dass mit Hilfe der Definitionen

$$\begin{aligned} B_h((u_h, p_h), (v_h, q_h)) &:= a_h(u_h, v_h) + b_h(v_h, p_h) + b_h(u_h, q_h) \\ \langle \bar{\mathcal{F}}_h, (v_h, q_h) \rangle &:= \langle \mathcal{F}_h, v_h \rangle + \langle \mathcal{G}_h, q_h \rangle \end{aligned}$$

der Übergang zu der Problemstellung

$$\text{Finde } (u_h, p_h) \in V_h \times Q_h \text{ mit: } B_h((u_h, p_h), (v_h, q_h)) = \langle \bar{\mathcal{F}}_h, (v_h, q_h) \rangle \quad (4.3)$$

für alle Paare $(v_h, q_h) \in V_h \times Q_h$ geeignet ist. Die Verbindung zu dem gemischten Problem (4.1) ergibt sich über das folgende Lemma.

Lemma 4.1.3:

Die Probleme (4.1) und (4.3) sind äquivalent.

Beweis:

\implies : Falls (u, p) eine Lösung des Problems (4.1) ist, folgt durch Summation der beiden Gleichungen, dass damit auch (4.3) erfüllt ist.

\impliedby : Falls nun (u, p) eine Lösung des Problems 4.3 ist, so ist durch Einsetzen der Testfunktionen $(v, 0)$ und $(0, q)$ zu sehen, dass diese Lösung auch das Problem (4.1) löst. ■

Als Vereinfachung von (4.1) wird im folgenden das Problem

$$\text{Finde } u_h \in V_h \text{ mit: } B_h(u_h, v_h) = \langle \bar{\mathcal{F}}_h, v_h \rangle \quad (4.4)$$

für alle $v_h \in V_h$ betrachtet, wobei $B_h: V_h \times V_h \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Bilinearform auf einem endlich dimensionalen Ansatzraum V_h des Hilbertraumes V und $\bar{\mathcal{F}}_h \in V_h^*$ ist. Es existiert also eine Konstante $M > 0$, so dass gilt

$$|B_h(v_h, w_h)| \leq M \|v_h\| \|w_h\|$$

für alle $v_h, w_h \in V_h$. Zusätzlich soll in diesem Abschnitt immer die BB-Bedingung für B_h erfüllt sein; es existiert also eine Konstante $\beta_h > 0$, so dass gilt

$$\inf_{0 \neq v_h \in V_h} \sup_{0 \neq w_h \in V_h} \frac{B_h(v_h, w_h)}{\|v_h\| \|w_h\|} \geq \beta_h.$$

Satz 4.1.4:

Unter den Voraussetzungen dieses Abschnittes hat das Problem (4.4) genau eine Lösung.

Beweis:

Sei $\Lambda: V_h \longrightarrow V_h^*$ der lineare Operator, der der Abbildungsvorschrift $v_h \longmapsto B_h(v_h, \cdot)$ genügt. Dieser ist injektiv, weil für alle Elemente $v_h \in \ker(\Lambda)$ mit

$$0 = \sup_{0 \neq w_h \in V_h} \frac{B_h(v_h, w_h)}{\|w_h\|} \geq \beta_h \|v_h\| \geq 0$$

folgt, dass $v_h = 0$ ist. Es gilt also $\ker(\Lambda) = \{0\}$. Damit lässt sich auch die Surjektivität folgern. Nach Bemerkung 2.2.7 lässt sich $\dim V_h = \dim V_h^*$ nutzen in Verbindung mit linearer Algebra. Danach gilt

$$\dim V_h^* = \dim V_h = \underbrace{\dim \ker(\Lambda)}_{=0} + \dim \text{im}(\Lambda) = \dim \text{im}(\Lambda)$$

und gibt somit $V_h^* = \text{im}(\Lambda)$. Insgesamt ist Λ damit ein Isomorphismus, was der Behauptung entspricht. ■

Wissenswert ist an dieser Stelle, wie nahe die Lösung des verallgemeinerten Ritz-Galerkin Verfahrens der exakten kommt. Dazu zunächst eine Definition und ein Lemma.

Definition 4.1.5 (Konsistenz):

Sei u die exakte Lösung der Differentialgleichung, zu der das gemischte Problem (4.1) konstruiert worden ist. Falls u auch die diskreten Gleichungen aus einem verallgemeinerten Ritz-Galerkin Verfahren löst, so heißt dieses *konsistent*. Es gilt also

$$B_h(u, v_h) = \langle \bar{\mathcal{F}}_h, v_h \rangle$$

für alle $v_h \in V_h$.

Lemma 4.1.6 (Galerkin-Orthogonalität):

Es sei ein konsistentes, verallgemeinertes Ritz-Galerkin Verfahren mit einer Bilinearform $B_h: V_h \times V_h \rightarrow \mathbb{R}$ und rechter Seite $\bar{F}_h \in V_h^*$ wie oben gegeben. Dann gilt für die exakte Lösung $u \in V$ und die diskrete Lösung $u_h \in V_h$

$$B_h(u - u_h, v_h) = 0$$

für alle $v_h \in V_h$.

Beweis:

Sei $v_h \in V_h$ beliebig aber fest. Dann gilt

$$B_h(u - u_h, v_h) = B_h(u, v_h) - B_h(u_h, v_h) = \langle \bar{F}_h, v_h \rangle - \langle \bar{F}_h, v_h \rangle = 0.$$

■

Damit lässt sich der folgende Satz zeigen.

Satz 4.1.7:

Seien die Voraussetzungen wie in Satz 4.1.4 mit einem konsistenten, verallgemeinerten Ritz-Galerkin Verfahren. Dann gilt für die exakte Lösung $u \in V$ und die diskrete Lösung $u_h \in V_h$

$$\|u - u_h\| \leq \left(1 + \frac{M}{\beta_h}\right) \inf_{0 \neq v_h \in V_h} \|u - v_h\|.$$

Beweis:

Mit der Galerkin-Orthogonalität und der Stetigkeit der Bilinearform folgt für alle $v_h, w_h \in V_h$

$$|B_h(u_h - v_h, w_h)| = |B_h(u_h - u, w_h) + B_h(u - v_h, w_h)| = |B_h(u - v_h, w_h)| \leq M \|u - v_h\| \|w_h\|.$$

Dies zusammen mit der BB-Bedingung liefert für $v_h \in V_h$

$$\|u_h - v_h\| \leq \frac{1}{\beta_h} \sup_{0 \neq w_h \in V_h} \frac{B_h(u_h - v_h, w_h)}{\|w_h\|} \leq \frac{M}{\beta_h} \|u - v_h\|$$

und mit Hilfe der Dreiecksungleichung dann die Behauptung durch

$$\|u - u_h\| \leq \|u - v_h\| + \|u_h - v_h\| \leq \left(1 + \frac{M}{\beta_h}\right) \|u - v_h\|$$

für alle $v_h \in V_h$. ■

Damit lässt sich die entwickelte Theorie zur Lösbarkeit der diskreten Probleme auf die vorgestellten gemischten Probleme anwenden und die Bedeutung der BB-Bedingung ist deutlich geworden. Wenn die Bilinearform B_h die BB-Bedingung erfüllt, so ist das diskrete Problem nach Satz 4.1.4 eindeutig lösbar.

4.2 Zulässige Zerlegungen

Ein entscheidender Bestandteil zur Erstellung geeigneter, endlichdimensionaler Ansatzräume V_h und Q_h zu V und Q in der Praxis ist die Zerlegung des gegebenen Gebiets Ω in endlich viele

Teilgebiete. Dort werden dann Funktionen betrachtet, die auf jedem dieser Teilgebiete mit Hilfe von Polynomen konstruiert werden. Das Gebiet soll hier bei zweidimensionalen Problemen in Vierecke zerlegt werden, bei dreidimensionalen Problemen in Hexaeder. Der Grund dafür ist, dass die späteren numerischen Experimente auf Grundlage der Programmbibliothek `deal.II` gemacht worden sind, welche Viereckselemente benutzt. Oft werden die Gebiete auch in Dreiecke zerlegt. Der Anschaulichkeit halber ist hier nur der zweidimensionale Fall vorgestellt. Insbesondere soll erläutert werden, wie ein Gebiet zu zerlegen ist, um eine befriedigende, mathematische Betrachtung zu erhalten. Hierzu hat sich die folgende Definition durchgesetzt, wobei an dieser Stelle auf [Braess, 2007] Kapitel III Abschnitt 2 und [Girault and Raviart, 1986] Kapitel I Abschnitt A hingewiesen sein soll. Sei dazu $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein polygonales Gebiet, so dass es in Dreiecke bzw. Vierecke zerlegt werden kann.

Definition 4.2.1 (Zulässige Zerlegungen):

Eine Zerlegung $\mathcal{T} = \{K_1, \dots, K_M\}$ von Ω in abgeschlossene Teilgebiete heißt *zulässig* genau dann, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

- (i) Das gesamte Gebiet Ω ist abgedeckt, das heißt $\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^M K_i$.
- (ii) Ist $K_i \cap K_j$ genau ein Punkt, so ist dieser Eckpunkt von K_i und von K_j .
- (iii) Enthält $K_i \cap K_j$ für $i \neq j$ mehr als einen Punkt, so ist diese Menge genau eine Kante von K_i und von K_j .

Der Durchmesser eines Teilgebiets K soll definiert sein über den Durchmesser h_K des kleinsten Kreises, in den das Teilgebiet K eingeschrieben werden kann, womit dann gesetzt wird

$$h := \max_{K \in \mathcal{T}} h_K.$$

Dieses h liefert die Möglichkeit, verschiedene Zerlegungen miteinander in Verbindung zu setzen und Familien $\{\mathcal{T}_h\}$ von Zerlegungen anzusehen. Für die nächste Definition ist ρ_K der Durchmesser des größten Kreises, der in das Teilgebiet K eingeschrieben werden kann. Eine Veranschaulichung dazu zeigt Abbildung 4.1.

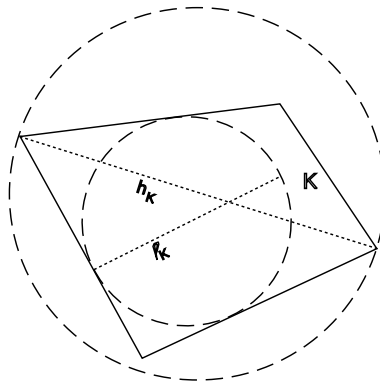


Abbildung 4.1: Zur Wahl von h_K und ρ_K für ein Viereck K

Definition 4.2.2 (Quasiuniforme und uniforme Zerlegungen, Uniformitätskonstante):

Sei $\{\mathcal{T}_h\}$ eine Familie von Zerlegungen.

- $\{\mathcal{T}_h\}$ heißt *quasiuniform*, falls es gleichmäßig für $0 < h \leq h_0$ eine *Uniformitätskonstante* $\lambda > 1$ gibt, so dass für alle Vierecke $K \in \mathcal{T}_h$ die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

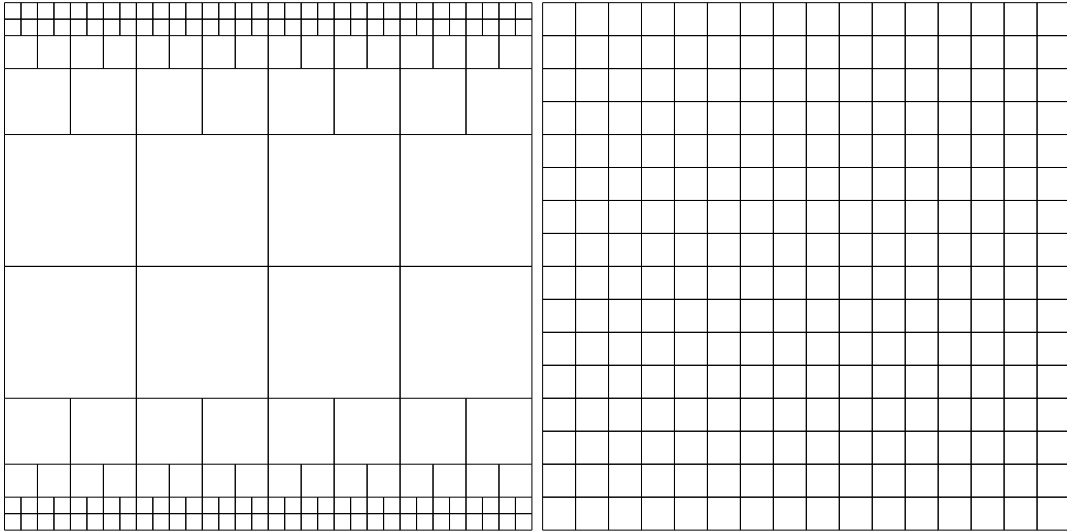


Abbildung 4.2: Zerlegungen: links: quasiuniform aber nicht uniform; rechts: regelmäßig, uniform

- (i) Für jedes Viereck K ist das Verhältnis von maximaler und minimaler Seitenlänge durch λ beschränkt.
 - (ii) Für jedes Viereck K gilt $\lambda \rho_K \geq h_K$.
 - (iii) Es existiert eine Zahl $\varphi_0 > 0$, so dass alle Winkel höchstens $\pi - \varphi_0$ groß sind.
- $\{\mathcal{T}_h\}$ heißt uniform, falls sie quasiuniform ist und für die Konstante λ aus der Definition zusätzlich gilt, dass $\lambda \rho_K \geq h$ für alle Vierecke K .

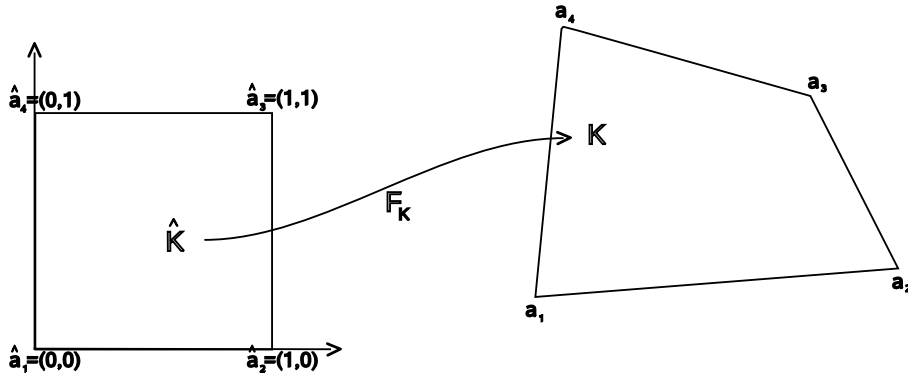
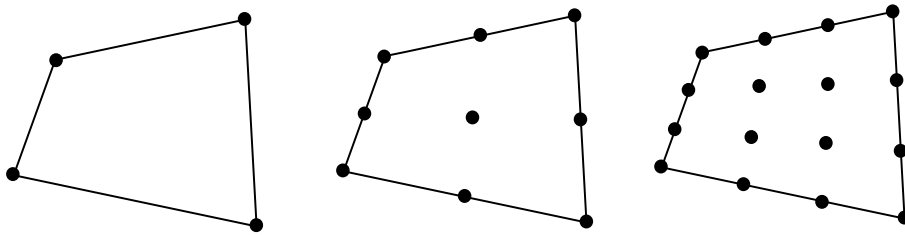
Als Beispiele für Familien von Zerlegungen ist in Abbildung 4.2 links eine quasiuniforme, nicht uniforme Familie angedeutet. Hier entstehen die einzelnen Zerlegungen durch Verfeinerungen an der oberen und unteren Kante. Jede einzelne dieser Zerlegungen erfüllt nicht die Eigenschaft (iii) der zulässigen Zerlegungen, denn es gibt hier Eckpunkte von Teilgebieten, die frei auf einer Kante eines anderen Teilgebiets liegen. Solche Punkte werden hängende Knoten genannt und sollen durch die Definition 4.2.1 von zulässigen Zerlegungen verhindert werden. Rechts hingegen ist ein Gitter nach der naheliegendsten Verfeinerung, welche eine uniforme Familie von zulässigen Zerlegungen hervorbringt. Diese Art von Verfeinerung wird im Folgenden regelmäßige Verfeinerung genannt. Die hier gebrauchte Definition von Quasiuniformität stellt mit den Punkten (i) und (iii) sicher, dass keine Vierecke zu Dreiecken entarten können. Die Eigenschaft (i) erlaubt keine verschwindenden Kantenlängen und (iii) verhindert Winkel von 180° .

4.3 Finite Elemente Räume

Ein bisher außer Acht gelassener Aspekt der Approximation von Lösungen gemischter Probleme sind die konkreten endlich dimensionalen Funktionenräume. Hierzu werden als Grundlage die Polynomräume

$$\mathbb{P}_k(K) := \left\{ p: K \rightarrow \mathbb{R} \mid p(\mathbf{x}) = \sum_{|\alpha| \leq k} \lambda_\alpha \mathbf{x}^\alpha \right\}$$

$$\mathbb{Q}_k(K) := \left\{ p: K \rightarrow \mathbb{R} \mid p(\mathbf{x}) = \sum_{\{\alpha \mid \alpha_i \leq k, i=1, \dots, N\}} \lambda_\alpha \mathbf{x}^\alpha \right\}$$

Abbildung 4.3: Mapping vom Einheitsquadrat \hat{K} in ein Referenzelement K Abbildung 4.4: Freiheitsgrade für verschiedene Vierecksinterpolationen: Q_1, Q_2, Q_3

für ein Gebiet $K \subset \mathbb{R}^N$ eingeführt, wobei α Multiindizes und $\lambda_\alpha \in \mathbb{R}$ freie Konstanten der Polynome sind. Die Ansatzfunktionen sollen auf jedem Teilgebiet einer gegebenen Triangulierung von Polynomen erzeugt sein. Ein möglicher Weg zur Umsetzung führt ein allgemeines Viereck der Zerlegung zurück auf das Einheitsquadrat $\hat{K} := [0, 1] \times [0, 1]$. Dazu kann genutzt werden, dass es für ein konvexes Viereck K genau eine invertierbare Funktion $F_K \in [Q_k(\hat{K})]^2$ gibt, welche \hat{K} auf K abbildet mit $F_K(\hat{a}_i) = a_i$ für $i = 1, \dots, 4$, wenn a_i die Eckpunkte von K und \hat{a}_i die Eckpunkte von \hat{K} bezeichnen. Eine solche Funktion F_K wird auch Mapping genannt und ist mit Abbildung 4.3 veranschaulicht. Für gegebene Funktionswerte lässt sich eine Funktion auf \hat{K} in einer nodalen Basis darstellen bei der Q_k genutzt wird. Die nötigen Stützstellen sind in der Abbildung 4.4 skizziert. Die konkrete Definition der Funktionenräume für die Ansatzfunktionen ist damit für eine Viereckszerlegung \mathcal{T}_h

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(k)_h &:= \left\{ \mathbf{v} \in [C(\Omega)]^N \mid \mathbf{v} \circ F_K \in [Q_k(\hat{K})]^N \forall K \in \mathcal{T}_h \right\} \\ Q(l)_h &:= \left\{ q \in C(\Omega) \mid q \circ F_K \in Q_l(\hat{K}) \forall K \in \mathcal{T}_h \right\}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Bemerkung 4.3.1:

- (i) Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass für allgemeine Viereckszerlegungen \mathcal{T}_h der Raum $\mathbf{V}(k)_h$ bzw. $Q(l)_h$ kein Polynomraum ist.
- (ii) Werden Dreieckszerlegungen betrachtet, so lässt sich die Vorgehensweise mit Hilfe des Raumes P_k durchführen. Die entstehenden Räume $\mathbf{V}(k)_h$ und $Q(l)_h$ sind dann Polynomräume.
- (iii) Die hier erläuterten Ansatzräume sind ein spezieller Weg um ein Finite Elemente Verfahren zu konstruieren. Es wird stetiges Q_k/Q_l -Element genannt. Eine Übersicht zu anderen Elementen ist zu finden bei [Braess, 2007] Kapitel II Abschnitt 5.

Ein besonderes stetiges Q_k/Q_l -Element ist das Taylor-Hood Element mit $l = k - 1$ für $k \geq 2$, welches in [Taylor and Hood, 1973] vorgestellt wurde. Dazu lässt sich folgender Satz zeigen.

Satz 4.3.2:

Es gibt eine von der Gitterweite h unabhängige Konstante β_0 , so dass gilt

$$\inf_{\substack{p \in Q^{(k-1)}_h \\ p \neq 0}} \sup_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbf{V}^{(k)}_h \\ \mathbf{v} \neq \mathbf{0}}} \frac{(\nabla \cdot \mathbf{v}, p)}{|\mathbf{v}|_1 \|p\|_0} \geq \beta_0. \quad (4.6)$$

Die BB-Bedingung ist erfüllt, das Element wird damit stabil genannt.

Beweis:

Siehe [Brezzi and Fortin, 1991] Abschnitt VI.6 und im Speziellen Bemerkung 6.2. ■

Bemerkung 4.3.3:

Aus diesem Satz geht ebenfalls hervor, dass alle Q_k/Q_l -Elemente mit $0 < l < k - 1$ ebenfalls die BB-Bedingung erfüllen, weil $Q(j)_h \subset Q(l)_h$ für $j < l$ und damit das Infimum höchstens größer wird.

Bei dem Aufbau dieser speziellen Finite Elemente Verfahren ist im Hintergrund nach folgender Definition vorgegangen worden.

Definition 4.3.4 (Finite Elemente):

Ein *Finites Element* ist ein Tripel (K, \mathcal{P}, Σ) mit drei Eigenschaften.

- (i) K ist ein konvexer Polyeder im \mathbb{R}^N . Die Teile des Randes ∂K , die auf einer Hyperfläche liegen, werden Seite genannt.
- (ii) Der Raum der Formfunktionen \mathcal{P} ist ein linearer auf K definierter Funktionenraum mit endlicher Dimension s .
- (iii) Σ ist eine Menge von s linear unabhängigen Funktionalen über \mathcal{P} . Jedes $p \in \mathcal{P}$ ist durch die Werte der s Funktionale aus Σ eindeutig bestimmt. Es kann Σ verstanden werden als die Menge der Freiheitsgrade oder nötigen Stützstellen auf K .

Bemerkung 4.3.5:

Werden im Folgenden Finite Elemente Räume genutzt, so ist immer vorausgesetzt, dass die homogenen Randbedingungen in die Räume eingearbeitet sind, also mit $k \geq 1$ beispielsweise $\mathbf{V}(k)_h = \mathbf{V}(k)_h \cap [H_0^1(\Omega)]^N$. Wie Interpolationsoperatoren auf diese Eigenschaft erweitert werden können, ist nachzulesen in [Scott and Zhang, 1990]. Für den Druckraum muss die Normiertheit des L_*^2 erhalten bleiben.

4.4 Interpolationsoperatoren

Satz 4.1.7 sagt aus, dass der Fehler einer Approximation durch Finite Elemente Verfahren abhängt von der Bestapproximation des verwendeten Finite Elemente Raumes V_h . Daher sollen hier Aussagen zu Interpolationen in den in Abschnitt (4.3) eingeführten Räumen $\mathbf{V}(k)_h$ und $Q(l)_h$ bereitgestellt werden. Die vorgestellten Interpolationsoperatoren sind immer linear und beschränkt und die kontinuierlichen Räume sind $\mathbf{V} = [H_0^1(\Omega)]^N$ und $Q = L_*^2(\Omega)$.

Definition 4.4.1 (\lesssim):

Es sei $a \lesssim b: \iff \exists C > 0: a \leq Cb$. Die Konstante C hängt dabei nicht von den relevanten Größen ab, wie im Folgenden zum Beispiel h_K .

Satz 4.4.2:

Sei K ein konvexes Element einer quasiuniformen Viereckszerlegung \mathcal{T}_h . Dann gibt es für $k, l \geq 1$ Interpolationsoperatoren $I_h: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}(k)_h$ und $J_h: Q \rightarrow Q(l)_h$, für die gilt

$$|\mathbf{v} - I_h(\mathbf{v})|_{m,K} \lesssim h_K^{k+1-m} \|\mathbf{v}\|_{k+1,\omega(K)} \quad (4.7)$$

für alle $\mathbf{v} \in [H^{k+1}(\Omega)]^N \cap \mathbf{V}$ und $m = 0, \dots, k+1$ sowie

$$|q - J_h(q)|_{m,K} \lesssim h_K^{l+1-m} \|q\|_{l+1,K} \quad (4.8)$$

für alle $q \in L_*^2(\Omega) \cap Q$ und $m = 0, \dots, l+1$. $\omega(K)$ bezeichnet hier eine geeignete Nachbarschaft des Teilgebiets K .

Beweis:

Siehe [Girault and Raviart, 1986] Abschnitt I Korollar A.5 für $p = q = 2$. ■

Die Eigenschaften solcher Interpolationsoperatoren lassen sich bei Taylor-Hood Elementen noch ausweiten, was der nächste Satz zum Inhalt hat.

Satz 4.4.3:

Seien die Voraussetzungen wie in Satz 4.4.2. Dann gibt es für ein Taylor-Hood Element mit Ordnung $k \geq 2$ einen Interpolationsoperator $I_h: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}(k)_h$, der die diskrete Divergenz erhält. Das heißt, es gilt

$$|\mathbf{v} - I_h(\mathbf{v})|_{m,K} \lesssim h_K^{k+1-m} \|\mathbf{v}\|_{k+1,\omega(K)}$$

für alle $\mathbf{v} \in [H^{k+1}(\Omega)]^N \cap \mathbf{V}$ und $m = 0, 1$. Außerdem gilt

$$(\nabla \cdot I_h(\mathbf{v}), q) = (\nabla \cdot \mathbf{v}, q)$$

für alle $q \in Q(k-1)_h$ und $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$. Hierbei ist $\omega(K)$ die Vereinigung benachbarter Teilgebiete des Teilgebiets K .

Beweis:

Für die Konstruktion des Operators siehe [Girault and Scott, 2003]. ■

Ein wichtiges erstes Resultat, welches sich aus solchen Interpolationseigenschaften gewinnen lässt, ist das kommende Lemma.

Lemma 4.4.4 (Inverse Ungleichungen):

Sei \mathcal{T}_h eine Familie uniformer Zerlegungen von $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Dann existiert für die Räume $\mathbf{V}(k)_h$

und $Q(l)_h$ eine Konstante μ abhängig von k, l und der Uniformitätskonstante, so dass gilt

$$\begin{aligned} \|\Delta \mathbf{v}_h\|_{0,K} &\leq \mu h_K^{-1} \|\nabla \mathbf{v}_h\|_{0,K} && \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}(k)_h \\ \frac{1}{\sqrt{N}} \|\nabla \cdot \mathbf{v}_h\|_{0,K} &\leq \|\nabla \mathbf{v}_h\|_{0,K} \leq \mu h_K^{-1} \|\mathbf{v}_h\|_{0,K} && \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}(k)_h \\ \|\nabla q_h\|_{0,K} &\leq \mu h_K^{-1} \|q_h\|_{0,K} && \forall q_h \in Q(l)_h \end{aligned}$$

für alle $K \in \mathcal{T}_h$.

Beweis:

Siehe [Braess, 2007] Kapitel II Satz 6.8. ■

Der Interpolationsoperator aus Satz 4.4.2 setzt $k \geq 1$ voraus. Einen Umgang mit $k = 0$ liefert ein Approximationsprozess von Clément, dessen Aussage im nächsten Satz zusammengefasst wird.

Satz 4.4.5:

Sei \mathcal{T}_h eine quasiuniforme Zerlegung von $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, dann existiert ein Interpolationsoperator $I_h: [H^1(\Omega)]^N \rightarrow \mathbf{V}(1)_h$ mit der Eigenschaft

$$\|\mathbf{v} - I_h(\mathbf{v})\|_{m,K} \lesssim h_K^{1-m} \|\mathbf{v}\|_{1,\omega(K)}$$

für alle $\mathbf{v} \in [H^1(\Omega)]^N$, $m = 0, 1$ und $K \in \mathcal{T}_h$. Die Bezeichnung $\omega(K)$ steht ähnlich wie in Satz 4.4.3 für eine geeignete Nachbarschaft des Teilgebiets K .

Beweis:

Für die Konstruktion des Operators siehe [Braess, 2007] Kapitel II Satz 6.9. ■

Bemerkung 4.4.6:

Alle hier vorgestellten Interpolationsoperatoren und auch die inverse Ungleichung sollten korrekter Weise in Abhängigkeit der Elementordnung k genutzt werden. Die Sätze 4.4.2 und 4.4.5 lassen sich erweitern durch [Schwab, 1998] Korollar 4.68 und Satz 4.4.4 durch [Schwab, 1998] Theorem 4.76. Der Teil, in dem dies für diese Arbeit interessant ist, gebraucht allerdings hauptsächlich den Interpolationsoperator aus Satz 4.4.3, bei dem diese Erweiterung mit mehr Schwierigkeiten verbunden ist. Die Konstruktion korrigiert einen üblichen Operator so, dass die diskrete Divergenz erhalten bleibt und trotzdem die Interpolationseigenschaften gelten. Um dies zu bekommen, geht die Konstante β_0 aus Satz 4.3.2 des verwendeten Taylor-Hood Elements ein, welche ebenfalls von der Elementordnung abhängt. Wie diese Abhängigkeit aussieht, ist dem Autor nicht bekannt. Daher wurden die Abhängigkeiten der Elementordnung für alle Aussagen unterdrückt.

Bemerkung 4.4.7:

Am Schluss dieses Abschnittes sei nochmals darauf hingewiesen, dass an dieser Stelle sehr spezielle Ansatzräume vorgestellt worden sind. In den folgenden Kapiteln werden Theorien eingeführt, welche auch mit anderen Ansatzräumen anwendbar sind; es müssen nur ähnliche Interpolationseigenschaften gezeigt werden. Wenn also im Folgenden von Ansatzräumen gesprochen wird, so ist an diese nur gefordert, dass die hier vorgestellten Interpolationsaussagen gelten.

4.5 Stabilisierungen

Wie bereits in Abschnitt 4.1 angedeutet, können die Bilinearformen a und b eines gemischten Problems bei einem verallgemeinerten Ritz-Galerkin Verfahrens und beim Übergang in endlich-dimensionale Ansatzräume zu a_h bzw. b_h abgeändert werden. Dies kann durch Stabilisierungen begründet sein, wovon nun Varianten vorgestellt werden. Dem zugrunde liegt hier immer ein Variationsproblem der Form

$$\text{Finde } (\mathbf{u}, p) \in \mathbf{V} \times Q \text{ mit: } \begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) &= \langle \mathcal{F}, \mathbf{v} \rangle & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \\ b(\mathbf{u}, q) &= \langle \mathcal{G}, q \rangle & \forall q \in Q, \end{aligned}$$

zu dem definiert wird

$$\begin{aligned} B(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}, q) &:= a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) \pm b(\mathbf{u}, q) \\ F(\mathbf{v}, q) &:= \langle \mathcal{F}, \mathbf{v} \rangle \pm \langle \mathcal{G}, q \rangle. \end{aligned}$$

Die Aufgabenstellung

$$\text{Finde } (\mathbf{u}, p) \in \mathbf{V} \times Q \text{ mit: } B(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}, q) = F(\mathbf{v}, q)$$

für alle Paare $(\mathbf{v}, q) \in \mathbf{V} \times Q$ ist mit der Beweistechnik aus Lemma 4.1.3 äquivalent zu dem obigen gemischten Problem. Da in der vorliegenden Arbeit die Verfahren nach dem Navier-Stokes Problem ausgerichtet sind, sei hier angenommen, dass das Variationsproblem zu den Oseen Gleichungen (1.1) erstellt wurde. Die Gleichungen lauten

$$\begin{aligned} L_{OS}(\mathbf{b}; \mathbf{u}, p) &:= & -\nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \sigma \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} & \text{auf } \Omega \\ L_{div}(\mathbf{u}, p) &:= & \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 & \text{auf } \Omega \\ & & \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

und es sind $\mathbf{V} = [H_0^1(\Omega)]^N$ und $Q = L_*^2(\Omega)$.

4.5.1 Residuale Stabilisierung

Die residuale Stabilisierung, welche in verschiedenen Varianten das Hauptthema der folgenden Kapitel sein wird, nutzt explizit die dem gemischten Problem zugrunde liegende Differentialgleichung. Über diese lässt sich für diesen Fall

$$\begin{aligned} B_h(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}, q) &:= B(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}, q) + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (L_{OS}(\mathbf{b}; \mathbf{u}, p), \Psi_K(\mathbf{v}, q))_K + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (L_{div}(\mathbf{u}, p), \tilde{\Psi}_K(\mathbf{v}, q))_K \\ F_h(\mathbf{v}, q) &:= F(\mathbf{v}, q) + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\mathbf{f}, \Psi_K(\mathbf{v}, q))_K \end{aligned}$$

definieren, was nach dem Übergang in endlich dimensionale Ansatzräume das Problem

$$\text{Finde } (\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h \text{ mit: } B_h(\mathbf{u}_h, p_h; \mathbf{v}_h, q_h) = F_h(\mathbf{v}_h, q_h)$$

für alle $(\mathbf{v}, q) \in \mathbf{V}_h \times Q_h$ liefert. $\Psi_K(\mathbf{v}, q)$ stellt eine Testfunktion der residualen Stabilisierung dar, die noch zu wählen ist. Der Name 'Residuale Stabilisierung' ist durch die Konstruktion des Stabilisierungstermes motiviert, weil im Grunde nur das Residuum mit einer Funktion $\Psi_K(\mathbf{v}, q)$ getestet und zur Variationsformulierung addiert wird. Dies entspricht dem Rahmen eines Petrov-Galerkin Verfahrens, was als Verallgemeinerung von den in Abschnitt 4.1 vorgestellten Ritz-Galerkin Verfahren bei [Großmann and Roos, 2005] in Abschnitt 3.3 behandelt wird. Ein Residuum kann natürlich ebenso bei der zweiten Gleichung betrachtet werden, wobei in diesem Fall keine zusätzliche rechte Seite auftritt. Einen Vorteil dieser Methode fasst der kommende Satz zusammen.

Satz 4.5.1:

Die Methode der residualen Stabilisierung ist konsistent. Falls also die Lösung der Oseen Gleichungen (\mathbf{u}, p) ist, dann erfüllt diese auch

$$B_h(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}_h, q_h) = F_h(\mathbf{v}_h, q_h)$$

für alle Paare $(\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h$.

Beweis:

Nach Abschnitt 3.1 und Lemma 4.1.3 ist bereits bekannt, dass (\mathbf{u}, p) auch der Variationsformulierung

$$B(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}_h, q_h) = F(\mathbf{v}_h, q_h)$$

für alle Paare $(\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h$ genügt. Außerdem erfüllt (\mathbf{u}, p) als Lösung der Oseen Gleichungen speziell die Gleichungen auf allen $K \in \mathcal{T}_h$. Damit verschwinden die Stabilisierungsterme und die Behauptung ist erfüllt. Damit diese Aussage gilt, wurden \mathbf{u} zweimal und p einmal stetig differenzierbar angenommen. Diese starken Anforderungen sind nicht notwendig, allerdings muss die Lösung mindestens in $[H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)]^N \times H^1(\Omega)$ enthalten sein, damit dieser Beweis funktioniert. ■

Bemerkung 4.5.2:

Dem Q_1/Q_k - bzw. dem P_1/P_k -Element für $k \in \mathbb{N}$ kommt bei dieser Form der Stabilisierung eine besondere Rolle zu. Für diese Art von Approximation gilt $\Delta \mathbf{u}_h = 0$, was die Addition des starken Residuums fraglich erscheinen lässt und eine getrennte Betrachtung erforderlich machen könnte. Die Beweistechniken in den kommenden Kapiteln sind allerdings auch für diese Elemente anwendbar und in den später folgenden Tabellen 8.3 und 8.4 zeigt sich, dass auch für die dort angeführten praktischen Experimente zum Q_1/Q_1 -Element keine gesonderte Rolle nötig ist.

4.5.2 Stabilisierung durch lokale Projektion

Eine andere Variante der Stabilisierung stellt [Matthies et al., 2007] in einem allgemeineren Kontext vor, welche ebenfalls in dieser Arbeit angeführt werden soll.

Sei dazu \mathbf{Y}_h ein diskreter Ansatzraum der Dimension n , für den ein Interpolationsoperator I_h wie in den Sätzen 4.4.2 und 4.4.5 existiert mit

$$\|\mathbf{y} - I_h(\mathbf{y})\|_{0,K} + h_K |\mathbf{y} - I_h(\mathbf{y})|_{1,K} \lesssim h_K^m \|\mathbf{y}\|_{m,\omega(K)}$$

für alle $\mathbf{y} \in [H^m(\Omega)]^n$, $K \in \mathcal{T}_h$ und $1 \leq m \leq k+1$. Alle Bezeichnungen sind wie in den vorherigen Abschnitten gewählt, wobei der Gebietszerlegung \mathcal{T}_h besondere Beachtung zugeteilt wird. Zu ihr sei eine quasiuniforme Zerlegung \mathcal{M}_h des Gebiets in sogenannte Makroelemente M gewählt, wobei ein $M \in \mathcal{M}_h$ die Vereinigung einer oder mehrerer Zellen $K \in \mathcal{T}_h$ darstellt. Eine zusätzliche Forderung ist, dass mit einem beliebigen $M \in \mathcal{M}_h$ und dessen Durchmesser h_M gilt

$$h_K \sim h_M$$

für alle $K \in \mathcal{T}_h$ mit $K \subset M$. Auf dieser Zerlegung wird ein Finite Elemente Raum \mathbf{D}_h definiert, welcher unstetige Funktionen enthält und dazu $\mathbf{D}_h(M) := \{\mathbf{x}_h|_M \mid \mathbf{x}_h \in \mathbf{D}_h\}$ für alle $M \in \mathcal{M}_h$.

An dieser Stelle kann eine Projektion $\pi_h: [L^2(\Omega)]^n \rightarrow \mathbf{D}_h$ für alle $M \in \mathcal{M}_h$ durch spezielle lokale Projektionen $\pi_M: [L^2(M)]^n \rightarrow \mathbf{D}_h(M)$ definiert und ein Fluktuationsoperator $\kappa_h^{\mathbf{Y}_h} := id - \pi_h$

von $[L^2(M)]^n$ nach $[L^2(M)]^n$ betrachtet werden. Mit dieser Wahl soll für den Operator $\kappa_h^{\mathbf{Y}_h}$ gelten, dass bei einem beliebigen $M \in \mathcal{M}_h$

$$\left\| \kappa_h^{\mathbf{Y}_h} \mathbf{x} \right\|_{0,M} \lesssim h_M^m |\mathbf{x}|_{m,M} \quad (4.9)$$

für alle $\mathbf{x} \in [H^m(M)]^n$ und $0 \leq m \leq k$ erfüllt ist.

Eine weitere Forderung, die für die analytischen Betrachtungen dieser Methoden wichtig ist, betrifft die Wahl des unstetigen Finite-Elemente Raumes \mathbf{D}_h . Für diesen wird eine lokale BB-Bedingung durch die Existenz einer Konstanten $\beta_{LPS} > 0$ mit

$$\inf_{0 \neq \mathbf{x}_h \in \mathbf{D}_h(M)} \sup_{0 \neq \mathbf{y}_h \in \mathbf{Y}_h(M)} \frac{(\mathbf{y}_h, \mathbf{x}_h)_M}{\|\mathbf{y}_h\|_{0,M} \|\mathbf{x}_h\|_{0,M}} \geq \beta_{LPS}$$

für alle $M \in \mathcal{M}_h$ gefordert. Auf die genauen theoretischen Ausführungen und Motivationen der einzelnen Komponenten wird hier nicht weiter eingegangen. Für genaue Ausführungen sei auf [Matthies et al., 2007], [Rapin and Löwe, 2007] und [Lube et al., 2007] verwiesen.

Die Definition von

$$\begin{aligned} B_h(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}, q) &:= B(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}, q) + \sum_{M \in \mathcal{M}_h} \delta_M(\kappa_h^{\mathbf{V}_h}((\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{u}), \kappa_h^{\mathbf{V}_h}((\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{u}))_M \\ &\quad + \sum_{M \in \mathcal{M}_h} \gamma_M(\kappa_h^{Q_h}(\nabla \cdot \mathbf{u}), \kappa_h^{Q_h}(\nabla \cdot \mathbf{u}))_M + \sum_{M \in \mathcal{M}_h} \tau_M(\kappa_h^{\mathbf{V}_h}(\nabla p), \kappa_h^{\mathbf{V}_h}(\nabla p))_M \\ F_h(\mathbf{v}, q) &:= F(\mathbf{v}, q), \end{aligned}$$

führt analog zur residualen Stabilisierung auf Probleme der Form

$$\text{Finde } (\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h \text{ mit: } B_h(\mathbf{u}_h, p_h; \mathbf{v}_h, q_h) = F_h(\mathbf{v}_h, q_h)$$

für alle $(\mathbf{v}, q) \in \mathbf{V}_h \times Q_h$. Die Parameter δ_M der Stromlinienstabilisierung (LPS(SU)), τ_M der Druckstabilisierung (LPS(P)) und γ_M der Divergenzstabilisierung (LPS(DIV)) müssen in geeigneter Weise gewählt werden, was in den bereits oben zitierten Quellen erläutert ist.

Bemerkung 4.5.3:

- Im Gegensatz zur residualen Stabilisierung ist bei den Stabilisierungen durch lokale Projektion im allgemeinen Fall keine Konsistenz gegeben. Also kann auch die Galerkin-Orthogonalität aus Lemma 4.1.6 nicht erwartet werden, was ein wichtiges Hilfsmittel der theoretischen Betrachtungen darstellt. Dies könnte die Quelle eines zusätzlichen Fehlers in der Approximation sein, allerdings kann dieser Term in der Theorie mit einer ausreichenden Ordnung der Maschenweite h kontrolliert werden. Dies folgt direkt aus der Forderung in 4.9 und ist nachzulesen bei [Matthies et al., 2007] Lemma 2.10.
- Die Stabilisierung durch lokale Projektion liefert in jedem Fall per Konstruktion einen symmetrischen Stabilisierungsanteil ohne eine zusätzliche rechte Seite. Dies bewirkt Vorteile bei speziellen Vorkonditionierungsstrategien zum Lösen der aus den Problemen entstehenden linearen Gleichungssysteme, wie in der Diplomarbeit [Heister, 2008] erläutert ist.

Um zu sehen, dass eine solche Kombinationen von Finite Elemente Räumen \mathbf{Y}_h , \mathbf{D}_h und einer Projektion π_h existieren, sei an dieser Stelle auf [Matthies et al., 2007] Abschnitt 3.2 verwiesen. Dort ist für π_h die L^2 -Projektion gewählt worden und die Zerlegung in Makroelemente ist das einmal gröbere Gitter $\mathcal{M}_h = \mathcal{T}_{2h}$, wobei dann für den zweidimensionalen Fall jedes Makroelement genau vier Zellen der ursprünglichen Zerlegung umfasst. Für den Geschwindigkeitsansatzraum fällt die Wahl mit $k \in \mathbb{N}$ auf

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_h &:= \mathbf{V}(k)_h \quad \text{und} \\ \mathbf{D}_h &:= \left\{ \mathbf{v} \in [L^2(\Omega)]^n \mid v \circ F_M \in [\mathbb{Q}_{k-1}(\hat{M})]^n \forall M \in \mathcal{T}_{2h} \right\} \end{aligned}$$

mit Hilfe der Notationen aus (4.5). Analog wird dies für den Druckraum definiert.

Bemerkung 4.5.4:

Die vorliegende Arbeit beinhaltet hauptsächlich Methoden der residualen Stabilisierung. Allerdings soll in Kapitel 10 ein Vergleich zur gerade vorgestellten Zwei-Level Methode der Stabilisierung durch lokale Projektion stattfinden, deren Name sich aus der Wahl der Makroelement Zerlegung ergibt. Für diesen Vergleich werden numerische Ergebnissen aus der Diplomarbeit [Löwe, 2008] zitiert, welche sich mit dieser Stabilisierung beschäftigt.

Bemerkung 4.5.5:

Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass die konkrete Wahl der Komponenten zur Stabilisierung hier nur als Beispiel zu sehen ist. Eine andere Variante sieht als Makroelement Zerlegung die ursprüngliche Zerlegung des Gebiets selbst an, welche den Namen Ein-Level Methode trägt. Auch für diesen Fall ist eine theoretisch befriedigende Betrachtung nach [Matthies et al., 2007] möglich, die Diplomarbeit [Schmaljohann, 2007] liefert numerische Tests dazu.

Kapitel 5

Stabilisierte Diskretisierungen der Stokes Gleichungen

5.1 Die Stokes Gleichungen

Die Stokes Gleichungen ergeben sich theoretisch aus den Oseen Gleichungen (1.1) mit $\mathbf{b} = \mathbf{0}$. Physikalisch sind sie motiviert durch die Navier-Stokes Gleichungen, wenn der nichtlineare Term $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ zu vernachlässigen ist. Wie aus Abschnitt 1.1 bekannt ist, kann dieser Term nur vernachlässigt werden, falls alle Bewegungen von der Flüssigkeit selbst bestimmt sind; wenn die innere Reibung sehr hoch ist. Dies ist der Fall, wenn die Flüssigkeiten sehr hohe Viskositäten ν aufzeigen, wie beispielsweise zäher Honig oder Gletschereis. Solche Probleme sind zwar sehr speziell, es lassen sich aber schon hier Schwierigkeiten bei der numerischen Lösung betrachten. Die Stokes Gleichungen sind

$$\begin{aligned} -\nu\Delta\mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} && \text{auf } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 && \text{auf } \Omega \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0} && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{5.1}$$

mit einem hinreichend glatten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ für $N \in \{2, 3\}$, so dass eine Zerlegung in Dreiecke und Vierecke möglich ist, wie in Abschnitt 4.2 erläutert wurde. Die Funktionenräume seien hier gewählt durch

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &:= [H_0^1(\Omega)]^N \\ Q &:= L_*^2(\Omega). \end{aligned}$$

Nach Kapitel 3.1 muss eine schwache Lösung $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{V} \times Q$

$$\begin{aligned} \nu(\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{v}) - (\nabla \cdot \mathbf{v}, p) &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \\ -(\nabla \cdot \mathbf{u}, q) &= 0 \end{aligned} \tag{5.2}$$

für alle $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ und $q \in Q$ erfüllen. Ein dazu äquivalentes Problem

$$\text{Finde } (\mathbf{u}, p) \in \mathbf{V} \times Q \text{ mit: } B(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}, q) = F(\mathbf{v}, q) \tag{5.3}$$

für alle $(\mathbf{v}, q) \in \mathbf{V} \times Q$ ist über Lemma 4.1.3 zu bekommen mit den Definitionen

$$\begin{aligned} B(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}, q) &:= \nu(\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{v}) - (\nabla \cdot \mathbf{v}, p) - (\nabla \cdot \mathbf{u}, q) \\ F(\mathbf{v}, q) &:= (\mathbf{f}, \mathbf{v}). \end{aligned}$$

Bemerkung 5.1.1:

Weil die Stokes Gleichungen ein Spezialfall der Oseen Gleichungen darstellen hat die Aufgabe (5.3) nach Abschnitt 3.3 genau eine Lösung $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{V} \times Q$.

Für die numerische Lösung der Stokes Gleichungen seien $\mathbf{V}_h \subset \mathbf{V}$ und $Q_h \subset Q$ konforme Finite Elemente Räume, in denen die Lösung anzunähern ist. Falls diese diskreten Ansatzräume \mathbf{V}_h und Q_h der BB-Bedingung

$$\inf_{0 \neq q_h \in Q_h} \sup_{0 \neq \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{(\nabla \cdot \mathbf{v}_h, q_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_1 \|q_h\|_0} \geq \beta$$

genügen, so gäbe es mit Hilfe von Satz 3.3.1 auch für die diskrete Aufgabe genau eine Lösung. In Satz 4.3.2 konnte ersehen werden, dass es Finite Elemente Räume gibt, die diese Bedingung von sich aus erfüllen. Allerdings gilt dies bei weitem nicht für alle beliebigen Raumpaare. Beispielsweise für die Finite Elemente Räume Q_k/Q_k , die equal-order Elemente heißen, ist es gerade nicht der Fall. Deshalb soll nun die residuale Stabilisierung zum Einsatz kommen, um auch solche Raumpaare zur Approximation zuzulassen. Bei der erstmaligen Veröffentlichung solcher Methoden wurde dazu Tertullian zitiert mit 'Certum est, quia impossibile est', siehe [Hughes et al., 1986].

5.2 Galerkin-Least-Squares Verfahren

Von Hughes & Franca wurde im Jahre 1987 eine Methode veröffentlicht, die Galerkin-Least-Squares (GLS) genannt wird (siehe [Hughes and Franca, 1987]). Es lassen sich dazu die Schreibweisen aus Abschnitt 4.5.1 benutzen, indem als Testfunktion $\Psi_K(\mathbf{v}_h, q_h) := -\delta h_K^2 L_{OS}(\mathbf{0}; \mathbf{v}_h, q_h)$ eingesetzt wird, was einen symmetrischen Stabilisierungsterm zur Folge hat. Hierbei ist h_K der Durchmesser einer Zelle $K \in \mathcal{T}_h$ und $\delta \in \mathbb{R}$ ein noch zu wählender Parameter. Die Definitionen lauten damit

$$B_h(\mathbf{w}_h, r_h; \mathbf{v}_h, q_h) := B(\mathbf{w}_h, r_h; \mathbf{v}_h, q_h) - \delta \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 (-\nu \Delta \mathbf{w}_h + \nabla r_h, -\nu \Delta \mathbf{v}_h + \nabla q_h)_K$$

und passend dazu

$$F_h(\mathbf{v}_h, q_h) := F(\mathbf{v}_h, q_h) - \delta \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 (\mathbf{f}, -\nu \Delta \mathbf{v}_h + \nabla q_h)_K.$$

An Stelle von (5.3) wird als Aufgabe das verallgemeinerte Ritz-Galerkin Verfahren

$$\text{Finde } (\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h \text{ mit: } B_h(\mathbf{u}_h, p_h; \mathbf{v}_h, q_h) = F_h(\mathbf{v}_h, q_h) \quad (5.4)$$

für alle $(\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h$ betrachtet.

Bemerkung 5.2.1:

Da die GLS-Formulierung auf der Grundlage der residualen Stabilisierung aus Abschnitt 4.5.1 beruht, ist die Methode konsistent. Eine Lösung von (5.1) erfüllt also auch (5.4).

5.2.1 Stabilität

Der nun folgende Satz zeigt mit der Unterstützung von Satz 4.1.4 die eindeutige Lösbarkeit des neu aufgestellten Problems (5.4). Das Bemerkenswerte daran ist, dass hier alle denkbaren Raumpaare Q_k/Q_l als Ansatzräume der Aufgabe möglich sind und auf die Erfüllung der BB-Bedingung verzichtet werden kann.

Satz 5.2.2:

Sei $0 < \delta < \frac{\mu}{\nu}$. Dann gilt:

$$\sup_{\substack{(\mathbf{w}_h, r_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h \\ (\mathbf{w}_h, r_h) \neq (\mathbf{0}, 0)}} \frac{B_h(\mathbf{v}_h, q_h; \mathbf{w}_h, r_h)}{\|\mathbf{w}_h\|_1 + \|r_h\|_0} \gtrsim \|\mathbf{v}_h\|_1 + \|q_h\|_0$$

für alle $(\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h$.

Das μ ist dabei die Konstante aus Lemma 4.4.4, der inversen Ungleichung. Eine Hilfe im Beweis stellt das folgende Lemma dar.

Lemma 5.2.3 (Verfürth):

Es gibt positive Konstanten C_1, C_2 , so dass:

$$\sup_{\mathbf{0} \neq \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \frac{(\nabla \cdot \mathbf{v}_h, q_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_1} \geq C_1 \|q_h\|_0 - C_2 \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\nabla q_h\|_{0,K}^2 \right)^{1/2}$$

für alle $q_h \in Q_h$.

Beweis:

Sei $q_h \in Q_h$ beliebig aber fest. Zu diesem q_h ist nun ein \mathbf{v}_h gesucht, für das gilt

$$\frac{(\nabla \cdot \mathbf{v}_h, q_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_1} \geq C_1 \|q_h\|_0 - C_2 \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\nabla q_h\|_{0,K}^2 \right)^{1/2},$$

wobei natürlich darauf zu achten ist, dass die Konstanten nicht von q_h und \mathbf{v}_h abhängig sein dürfen. Die BB-Bedingung auf den ursprünglichen Räumen ist mit Satz 4.3.2 gegeben. Aus diesem Grund existiert ein $\mathbf{z} \in \mathbf{V}$, für das gilt

$$\frac{(\nabla \cdot \mathbf{z}, q_h)}{\|\mathbf{z}\|_1} \geq \beta \|q_h\|_0, \quad (5.5)$$

weil konforme Finite Elemente Räume gewählt worden sind. An dieser Stelle soll der Interpolationsoperator von Clément aus Satz 4.4.5 zum Einsatz kommen. Damit gibt es einen linearen Operator $I_h^k: \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}_h$ mit der Interpolationseigenschaft

$$\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^{-2} \|\mathbf{z} - I_h^k(\mathbf{z})\|_{0,K}^2 \right)^{1/2} \leq C_{Cl} \|\mathbf{z}\|_1 \quad (5.6)$$

und der Beschränktheit

$$\|I_h^k(\mathbf{z})\|_1 \leq C_B \|\mathbf{z}\|_1, \quad (5.7)$$

wobei C_{Cl} und C_B positive Konstanten sind. Nun ist zu zeigen, dass $\mathbf{v}_h := I_h^k(\mathbf{z})$ die Behauptung

erfüllt. Über die BB-Bedingung in (5.5) und die partielle Integration aus Satz 2.2.2 gilt

$$\begin{aligned}
(\nabla \cdot \mathbf{v}_h, q_h) &= (\nabla \cdot (\mathbf{v}_h - \mathbf{z}), q_h) + (\nabla \cdot \mathbf{z}, q_h) \\
&\geq (\nabla \cdot (\mathbf{v}_h - \mathbf{z}), q_h) + \beta \|\mathbf{z}\|_1 \|q_h\|_0 \\
&= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\mathbf{z} - \mathbf{v}_h, \nabla q_h)_K + \beta \|\mathbf{z}\|_1 \|q_h\|_0 \\
&= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (h_K^{-1} (\mathbf{z} - \mathbf{v}_h), h_K \nabla q_h)_K + \beta \|\mathbf{z}\|_1 \|q_h\|_0 \\
&\geq - \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^{-2} \|\mathbf{z} - \mathbf{v}_h\|_{0,K}^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\nabla q_h\|_{0,K}^2 \right)^{1/2} + \beta \|\mathbf{z}\|_1 \|q_h\|_0 \\
&\geq - C_{Cl} \|\mathbf{z}\|_1 \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\nabla q_h\|_{0,K}^2 \right)^{1/2} + \beta \|\mathbf{z}\|_1 \|q_h\|_0 \\
&= \left(\beta \|q_h\|_0 - C_{Cl} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\nabla q_h\|_{0,K}^2 \right)^{1/2} \right) \|\mathbf{z}\|_1.
\end{aligned}$$

Hierbei wurden ebenfalls noch die Stetigkeit von q_h , Cauchy-Schwarz (Lemma 2.3.2) und (5.6) benutzt. Insgesamt ergibt sich so

$$\frac{(\nabla \cdot \mathbf{v}_h, q_h)}{\|\mathbf{z}\|_1} \geq \beta \|q_h\|_0 - C_{Cl} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\nabla q_h\|_{0,K}^2 \right)^{1/2}$$

und mit der Beschränktheit des Clément Operators aus (5.7) die Behauptung, weil gilt

$$\frac{(\nabla \cdot \mathbf{v}_h, q_h)}{\|\mathbf{v}_h\|_1} \geq \frac{(\nabla \cdot \mathbf{v}_h, q_h)}{C_B \|\mathbf{z}\|_1} \geq C_B^{-1} \beta \|q_h\|_0 - C_B^{-1} C_{Cl} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\nabla q_h\|_{0,K}^2 \right)^{1/2}.$$

Es existiert also zu jedem q_h ein \mathbf{v}_h , dass die Eigenschaft aus der Behauptung erfüllt und daher gilt sie mit dem Supremum. \blacksquare

Damit soll nun Satz 5.2.2 bewiesen werden.

Beweis:

Auch für diesen Beweis sei ein $(\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h$ vorgegeben, zu dem ein Element (\mathbf{w}_h, r_h) zu suchen ist, für welches die Ungleichung gilt. Lemma 5.2.3 arbeitet auf endlich dimensionalen Ansatzräumen, daher kann zu q_h ein $\mathbf{z}_h \in \mathbf{V}_h$ herangezogen werden, für welches das Supremum wie in der Behauptung tatsächlich angenommen wird. Eine Umskalierung von \mathbf{z}_h ändert nichts an dieser Supremumseigenschaft, daher ist es möglich eine Skalierung vorzugeben, so dass gilt

$$\|\mathbf{z}_h\|_1 = \|q_h\|_0. \tag{5.8}$$

Somit ist prinzipiell schon das gesuchte Element mit $(\mathbf{w}_h, r_h) := (\mathbf{v}_h - \lambda \mathbf{z}_h, -q_h)$ gefunden, es ist nur noch nachzuweisen, dass die Behauptung tatsächlich erfüllt ist. Dafür sind verschiedene Abschätzungen durchzuführen, wobei die Beziehung

$$\|\nabla \mathbf{z}_h\|_0 = |\mathbf{z}_h|_1 \leq \|\mathbf{z}_h\|_1 \tag{5.9}$$

gebraucht wird. Um die Arbeit aus Lemma 5.2.3 zu nutzen, gilt mit der Ungleichung von Cauchy-

Schwarz aus Lemma 2.3.2, (5.8), (5.9) und der inversen Ungleichung aus Lemma 4.4.4

$$\begin{aligned}
& B_h(\mathbf{v}_h, q_h; -\mathbf{z}_h, 0) \\
&= -\nu(\nabla\mathbf{v}_h, \nabla\mathbf{z}_h) + (\nabla \cdot \mathbf{z}_h, q_h) - (\nabla \cdot \mathbf{v}_h, 0) - \delta \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 (-\nu\Delta\mathbf{v}_h + \nabla q_h, \nu\Delta\mathbf{z}_h + \nabla 0)_K \\
&= -\nu(\nabla\mathbf{v}_h, \nabla\mathbf{z}_h) + (\nabla \cdot \mathbf{z}_h, q_h) - \delta \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 (-\nu\Delta\mathbf{v}_h + \nabla q_h, \nu\Delta\mathbf{z}_h)_K \\
&\geq -\nu \|\nabla\mathbf{v}_h\|_0 \|\nabla\mathbf{z}_h\|_0 + (\nabla \cdot \mathbf{z}_h, q_h) + \delta\nu^2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 (\Delta\mathbf{v}_h, \Delta\mathbf{z}_h)_K - \delta\nu \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 (\nabla q_h, \Delta\mathbf{z}_h)_K \\
&\geq -\nu \|\nabla\mathbf{v}_h\|_0 \|\nabla\mathbf{z}_h\|_0 + C_1 \|q_h\|_0 \|\mathbf{z}_h\|_1 - C_2 \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\nabla q_h\|_{0,K}^2 \right)^{1/2} \|\mathbf{z}_h\|_1 \\
&\quad + \delta\nu^2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 (\Delta\mathbf{v}_h, \Delta\mathbf{z}_h)_K - \delta\nu \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 (\nabla q_h, \Delta\mathbf{z}_h)_K \\
&= -\nu \|\nabla\mathbf{v}_h\|_0 \|\nabla\mathbf{z}_h\|_0 + C_1 \|q_h\|_0^2 - C_2 \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\nabla q_h\|_{0,K}^2 \right)^{1/2} \|q_h\|_0 \\
&\quad + \delta\nu^2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 (\Delta\mathbf{v}_h, \Delta\mathbf{z}_h)_K - \delta\nu \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 (\nabla q_h, \Delta\mathbf{z}_h)_K \\
&\geq -\nu \|\nabla\mathbf{v}_h\|_0 \|\nabla\mathbf{z}_h\|_0 + C_1 \|q_h\|_0^2 - C_2 \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\nabla q_h\|_{0,K}^2 \right)^{1/2} \|q_h\|_0 \\
&\quad - \delta\nu^2 \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\Delta\mathbf{v}_h\|_{0,K}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\Delta\mathbf{z}_h\|_{0,K}^2 \right)^{1/2} \\
&\quad - \delta\nu \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\nabla q_h\|_{0,K}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\Delta\mathbf{z}_h\|_{0,K}^2 \right)^{1/2} \\
&\geq -\nu \|\nabla\mathbf{v}_h\|_0 \|\nabla\mathbf{z}_h\|_0 + C_1 \|q_h\|_0^2 - C_2 \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\nabla q_h\|_{0,K}^2 \right)^{1/2} \|q_h\|_0 \\
&\quad - \delta\nu^2 \mu^{-1} \|\nabla\mathbf{v}_h\|_0 \|\nabla\mathbf{z}_h\|_0 - \delta\nu \mu^{-1/2} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\nabla q_h\|_{0,K}^2 \right)^{1/2} \|\nabla\mathbf{z}_h\|_0 \\
&\geq -(\nu + \delta\nu^2 \mu^{-1}) \|\nabla\mathbf{v}_h\|_0 \|\nabla\mathbf{z}_h\|_0 + C_1 \|q_h\|_0^2 - \underbrace{(C_2 + \delta\nu \mu^{-1/2})}_{C_4} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\nabla q_h\|_{0,K}^2 \right)^{1/2} \|q_h\|_0 \\
&\geq -\underbrace{(\nu + \delta\nu^2 \mu^{-1})}_{C_3} \|\nabla\mathbf{v}_h\|_0 \|q_h\|_0 + C_1 \|q_h\|_0^2 - C_4 \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\nabla q_h\|_{0,K}^2 \right)^{1/2} \|q_h\|_0 \\
&\geq -\frac{C_3}{2\varepsilon} \|\nabla\mathbf{v}_h\|_0^2 - \frac{C_3\varepsilon}{2} \|q_h\|_0^2 + C_1 \|q_h\|_0^2 - \frac{C_4}{2\varepsilon} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\nabla q_h\|_{0,K}^2 - \frac{C_4\varepsilon}{2} \|q_h\|_0^2 \\
&\geq -\underbrace{\frac{C_3}{2\varepsilon}}_{C_5} \|\mathbf{v}_h\|_1^2 + \underbrace{\left(C_1 - \frac{\varepsilon}{2}(C_3 + C_4) \right)}_{C_6} \|q_h\|_0^2 - \underbrace{\frac{C_4}{2\varepsilon}}_{C_7} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\nabla q_h\|_{0,K}^2.
\end{aligned}$$

Das ε stammt aus der Young-Ungleichung in Lemma 2.3.3, wobei nur $\varepsilon > 0$ gelten muss, was eine freie Wahl erlaubt. Zu fordern ist, dass die Konstanten C_5 , C_6 und C_7 echt positiv sind, was durch

die Wahl

$$0 < \varepsilon < \frac{2C_1}{C_3 + C_4}$$

abgesichert ist.

Die Voraussetzung $0 < \delta < \frac{\mu}{\nu}$ ist bis zu diesem Zeitpunkt noch nicht genutzt. Dies geht in die folgende Betrachtung von $B_h(\mathbf{v}_h, q_h; \mathbf{v}_h, -q_h)$ ein, wo benutzt wird, dass gilt

$$\|\nabla \mathbf{v}_h\|_0^2 \geq \underbrace{\frac{1}{1 + C_F^2}}_{C_P :=} \|\mathbf{v}_h\|_1^2, \quad (5.10)$$

was eine Anwendung der Friedrichs-Ungleichung aus Lemma 2.3.1 ist. Mit der inversen Ungleichung und (5.10) gilt

$$\begin{aligned} B_h(\mathbf{v}_h, q_h; \mathbf{v}_h, -q_h) &= \nu(\nabla \mathbf{v}_h, \nabla \mathbf{v}_h) - (\nabla \cdot \mathbf{v}_h, q_h) + (\nabla \cdot \mathbf{v}_h, q_h) \\ &\quad - \delta \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 (-\nu \Delta \mathbf{v}_h + \nabla q_h, -\nu \Delta \mathbf{v}_h - \nabla q_h)_K \\ &= \nu \|\nabla \mathbf{v}_h\|_0^2 + \delta \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\nabla q_h\|_{0,K}^2 - \delta \nu^2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\Delta \mathbf{v}_h\|_{0,K}^2 \\ &\geq (\nu - \delta \nu^2 \mu^{-1}) \|\nabla \mathbf{v}_h\|_0^2 + \delta \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\nabla q_h\|_{0,K}^2 \\ &\geq (\nu - \delta \nu^2 \mu^{-1}) C_P \|\mathbf{v}_h\|_1^2 + \delta \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\nabla q_h\|_{0,K}^2 \\ &\geq \underbrace{\min\{(\nu - \delta \nu^2 \mu^{-1}) C_P, \delta\}}_{C_8 :=} \left(\|\mathbf{v}_h\|_1^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\nabla q_h\|_{0,K}^2 \right), \end{aligned}$$

wobei C_8 echt positiv ist. An dieser Stelle soll nachgeprüft werden, ob die Wahl eines Elementes mit $(\mathbf{w}_h, r_h) := (\mathbf{v}_h - \lambda \mathbf{z}_h, -q_h)$ die Abschätzung aus der Behauptung erfüllt, wobei für λ gelte, dass $0 < \lambda < \min\{C_8 C_5^{-1}, C_8 C_7^{-1}\}$. Damit folgt dann

$$\begin{aligned} B_h(\mathbf{v}_h, q_h; \mathbf{w}_h, r_h) &= B_h(\mathbf{v}_h, q_h; \mathbf{v}_h - \lambda \mathbf{z}_h, -q_h) \\ &= B_h(\mathbf{v}_h, q_h; \mathbf{v}_h, -q_h) + \lambda B_h(\mathbf{v}_h, q_h; -\mathbf{z}_h, 0) \\ &\geq C_8 \left(\|\mathbf{v}_h\|_1^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\nabla q_h\|_{0,K}^2 \right) \\ &\quad + \lambda \left(-C_5 \|\mathbf{v}_h\|_1^2 + C_6 \|q_h\|_0^2 - C_7 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\nabla q_h\|_{0,K}^2 \right) \\ &= (C_8 - \lambda C_5) \|\mathbf{v}_h\|_1^2 + \lambda C_6 \|q_h\|_0^2 + (C_8 - \lambda C_7) \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\nabla q_h\|_{0,K}^2 \\ &\geq \frac{1}{2} \underbrace{\min\{C_8 - \lambda C_5, \lambda C_6\}}_{C :=} \cdot 2 \left(\|\mathbf{v}_h\|_1^2 + \|q_h\|_0^2 \right) \geq C (\|\mathbf{v}_h\|_1 + \|q_h\|_0)^2 \end{aligned}$$

und C ist ebenfalls eine positive Konstante. Mit Hilfe der Dreiecksungleichung und (5.8) ergibt sich zusätzlich

$$\|\mathbf{w}_h\|_1 + \|r_h\|_0 \leq \|\mathbf{v}_h\|_1 + \lambda \|\mathbf{z}_h\|_1 + \|q_h\|_0 \leq (1 + \lambda)(\|\mathbf{v}_h\|_1 + \|q_h\|_0)$$

und zusammengesetzt die Behauptung. ■

5.2.2 Eigenschaften der Stabilisierungsmethode

An dieser Stelle soll eine Abschätzung gefunden werden, die Aufschluss darüber gibt, wie nahe diese Strategie tatsächlich an die Lösung des eigentlichen Problems (5.1) bzw. (5.2) kommt. Es lässt sich die folgende a-priori Fehlerabschätzung zeigen.

Satz 5.2.4:

Sei $0 < \delta < \frac{\nu}{\nu}$ und $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{V} \times Q$ die Lösung von (5.2). Falls die Lösung genügend Regularität besitzt mit $(\mathbf{u}, p) \in [H^{k+1}(\Omega)]^N \times H^{l+1}(\Omega)$, so gilt die Abschätzung

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_1 + \|p - p_h\|_0 \lesssim h^k \|\mathbf{u}\|_{k+1} + h^{l+1} \|p\|_{l+1},$$

wobei (\mathbf{u}_h, p_h) die Lösung des regularisierten Problems (5.4) darstellt. Die Konstanten k und l stehen hier für den Polynomgrad der Ansatzräume \mathbf{V}_h und Q_h .

Beweis:

Hierzu seien Interpolationsoperatoren I_h und J_h nach Abschnitt 4.4 gegeben, mit denen die Kurzschreibweisen $\tilde{\mathbf{u}} := I_h(\mathbf{u}) \in \mathbf{V}_h$ als Interpolation von \mathbf{u} und $\tilde{p} := J_h(p) \in Q_h$ als Interpolation von p definiert werden. Satz 5.2.2 gibt an dieser Stelle die Existenz eines Elementes $(\mathbf{v}, q) \in \mathbf{V}_h \times Q_h$, so dass mit einer positiven Konstanten C gilt

$$\|\mathbf{v}\|_1 + \|q\|_0 \leq C \quad (5.11)$$

und

$$\|\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h\|_1 + \|\tilde{p} - p_h\|_0 \leq B_h(\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h, \tilde{p} - p_h; \mathbf{v}, q). \quad (5.12)$$

Nach Bemerkung 5.2.1 ist die stabilisierte Methode konsistent. Das heißt also, dass die Lösung von (5.2) auch die Methode löst. Über die Galerkin-Orthogonalität aus Lemma 4.1.6 ergibt sich so

$$B_h(\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h, \tilde{p} - p_h; \mathbf{v}, q) = B_h(\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}, \tilde{p} - p; \mathbf{v}, q). \quad (5.13)$$

An dieser Stelle liefert eine Abschätzung der rechten Seite der Gleichung (5.13)

$$\begin{aligned} & B_h(\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}, \tilde{p} - p; \mathbf{v}, q) \\ &= \nu(\nabla(\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h), \nabla \mathbf{v}) - (\nabla \cdot \mathbf{v}, \tilde{p} - p_h) - (\nabla \cdot (\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h), q) \\ &\quad - \delta \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 (-\nu \Delta(\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h) + \nabla(\tilde{p} - p_h), -\nu \Delta \mathbf{v} + \nabla q)_K \\ &\leq \nu \|\nabla(\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h)\|_0 \|\nabla \mathbf{v}\|_0 + \|\nabla \mathbf{v}\|_0 \|\tilde{p} - p_h\|_0 + \|\nabla(\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h)\|_0 \|q\|_0 \\ &\quad + \delta \nu^2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K \|\Delta(\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h)\|_{0,K} h_K \|\Delta \mathbf{v}\|_{0,K} + \delta \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K \|\nabla(\tilde{p} - p_h)\|_{0,K} h_K \|\nabla q\|_{0,K} \\ &\quad + \delta \nu \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K \|\Delta(\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h)\|_{0,K} h_K \|\nabla q\|_{0,K} + \delta \nu \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K \|\nabla(\tilde{p} - p_h)\|_{0,K} h_K \|\Delta \mathbf{v}\|_{0,K}, \end{aligned}$$

wobei Cauchy-Schwarz verwendet wurde. Das nächste Ziel ist, jeden einzelnen Summanden mit

$(\|\mathbf{v}\|_1^2 + \|q\|_0^2)^{1/2}$ zu kontrollieren. Der Weg dahin führt über

$$\begin{aligned}
& B_h(\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}, \tilde{p} - p; \mathbf{v}, q) \\
& \leq \nu \|\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h\|_1 \|\mathbf{v}\|_1 + \|\mathbf{v}\|_1 \|\tilde{p} - p_h\|_0 + \|\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h\|_1 \|q\|_0 \\
& \quad + \delta \nu^2 \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\Delta(\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h)\|_{0,K}^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\Delta \mathbf{v}\|_{0,K}^2 \right)^{1/2} \\
& \quad + \delta \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\nabla(\tilde{p} - p_h)\|_{0,K}^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\nabla q\|_{0,K}^2 \right)^{1/2} \\
& \quad + \delta \nu \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\Delta(\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h)\|_{0,K}^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\nabla q\|_{0,K}^2 \right)^{1/2} \\
& \quad + \delta \nu \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\nabla(\tilde{p} - p_h)\|_{0,K}^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\Delta \mathbf{v}\|_{0,K}^2 \right)^{1/2} \\
& \lesssim \left(\|\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}\|_1^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\Delta(\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u})\|_{0,K}^2 + \|\tilde{p} - p\|_0^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\nabla(\tilde{p} - p)\|_{0,K}^2 \right)^{1/2} \\
& \quad \cdot \left(\|\mathbf{v}\|_1^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\Delta \mathbf{v}\|_{0,K}^2 + \|q\|_0^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\nabla q\|_{0,K}^2 \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Wenn nun die Inverse Ungleichung für den Geschwindigkeitsraum und den Druckraum genutzt wird, so ergibt sich

$$\left(\|\mathbf{v}\|_1^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\Delta \mathbf{v}\|_{0,K}^2 + \|q\|_0^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\nabla q\|_{0,K}^2 \right)^{1/2} \lesssim (\|\mathbf{v}\|_1^2 + \|q\|_0^2)^{1/2}.$$

Zusammen mit der Abschätzung darüber, (5.11), (5.12) und (5.13) liefert dies

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_1 + \|p - p_h\|_0 & \lesssim (\|\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}_h\|_1 + \|\tilde{p} - p_h\|_0) \\
& \lesssim \left(\|\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u}\|_1 + \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\Delta(\tilde{\mathbf{u}} - \mathbf{u})\|_{0,K}^2 \right)^{1/2} \right. \\
& \quad \left. + \|\tilde{p} - p\|_0 + \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 \|\nabla(\tilde{p} - p)\|_{0,K}^2 \right)^{1/2} \right).
\end{aligned}$$

Dieser letzte Ausdruck lässt sich über die Eigenschaften des Interpolationsoperators (4.7) und (4.8) vereinfachen und ergibt damit die Behauptung

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_1 + \|p - p_h\|_0 \lesssim h^k \|\mathbf{u}\|_{k+1} + h^{l+1} \|p\|_{l+1}.$$

■

Insgesamt ist damit erreicht, bei etwas mehr Aufwand sehr viele Finite Elemente Räume für die Stokes Gleichungen zu stabilisieren. Dies ist eines der ersten Stabilisierungsverfahren, die entwickelt wurden. Eine Übersicht zu den ersten Verfahren gibt es in [Franca et al., 1993].

5.3 Pressure-Stabilization / Petrov-Galerkin Verfahren

Eine andere Variante der Stabilisierung ist die Pressure-Stabilization / Petrov-Galerkin (PSPG) Methode, die weniger aufwendig ist. Das equal-order Element erfüllt die BB-Bedingung nicht, weil der Druckansatzraum zu reichhaltig für den Geschwindigkeitsansatzraum ist. Dies hat Oszillationen vor allem in der Druckapproximation zur Folge. Daher liegt die Vermutung nahe, dass in der Testfunktion $\Psi_K(\mathbf{v}_h, q_h)$ der residualen Stabilisierung auf die Abhängigkeit von \mathbf{v}_h verzichtet werden kann. Die Beweistechniken zu dieser Methode sind ähnlich denen aus Abschnitt 5.2, weshalb hier nur die Ergebnisse dargestellt werden. Für nähere Ausführungen sei auf [Hughes et al., 1986] verwiesen. Die Variationsformulierung der Stokes Gleichungen sei

$$\text{Finde } (\mathbf{u}, p) \in \mathbf{V} \times Q \text{ mit: } B(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}, q) = F(\mathbf{v}, q)$$

für alle $(\mathbf{v}, q) \in \mathbf{V} \times Q$ mit

$$\begin{aligned} B(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}, q) &:= \nu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) - (\nabla \cdot \mathbf{v}, p) + (\nabla \cdot \mathbf{u}, q) \\ F(\mathbf{v}, q) &:= (\mathbf{f}, \mathbf{v}). \end{aligned}$$

Hierzu sei angemerkt, dass der Anteil der Massenerhaltungsgleichung auf den Impulserhaltungsteil addiert wurde, im Gegensatz zur Subtraktion in der Formulierung bei GLS. Das verallgemeinerte Ritz-Galerkin Verfahren mit der Stabilisierung lautet dann

$$\text{Finde } (\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h \text{ mit: } B_h(\mathbf{u}_h, p_h; \mathbf{v}_h, q_h) = F_h(\mathbf{v}_h, q_h) \quad (5.14)$$

für alle $(\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h$ mit

$$\begin{aligned} B_h(\mathbf{w}_h, r_h; \mathbf{v}_h, q_h) &:= B(\mathbf{w}_h, r_h; \mathbf{v}_h, q_h) + \tau \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 (-\nu \Delta \mathbf{w}_h + \nabla r_h, \nabla q_h)_K \\ F_h(\mathbf{v}_h, q_h) &:= F(\mathbf{v}_h, q_h) + \tau \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 (\mathbf{f}, \nabla q_h)_K. \end{aligned}$$

Für die theoretische Betrachtung ist die Definition einer gitter- und problemabhängigen Norm $\|\cdot\| : \mathbf{V} \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ hilfreich durch

$$\|(\mathbf{v}, q)\| := \sqrt{\nu |\mathbf{v}|_1^2 + \tau \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 |q|_{1,K}^2}.$$

Bezüglich dieser Norm lässt sich für B_h Elliptizität zeigen, womit das Problem nach dem Lemma von Lax-Milgram aus Satz 2.2.8 eindeutig lösbar ist. Zum Fehler der Methode kann eine ähnliche Abschätzung gezeigt werden, wie für GLS in Satz 5.2.4.

Satz 5.3.1:

Sei $0 < \tau \lesssim \frac{\mu}{\nu}$ und $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{V} \times Q$ die Lösung von (5.2). Falls die Lösung genügend Regularität besitzt mit $(\mathbf{u}, p) \in [H^{k+1}(\Omega)]^N \times H^{l+1}(\Omega)$, so gilt die Abschätzung

$$\|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h)\| \lesssim h^k \|\mathbf{u}\|_{k+1} + h^{l+1} \|p\|_{l+1},$$

wobei (\mathbf{u}_h, p_h) die Lösung des regularisierten Problems (5.14) darstellt. Die Konstante k steht hier für den Polynomgrad des Ansatzraumes \mathbf{V}_h , was l für den Ansatzraum Q_h ist.

Beweis:

Siehe [Hughes et al., 1986] Theorem 4.1. ■

Kapitel 6

Numerische Tests zu den Stokes Gleichungen

Für die numerischen Tests in dieser Arbeit wurden die vorgestellten Verfahren in C++ implementiert. Grundlage dafür ist die Programmbibliothek `deal.II` (a finite element Differential Equations Analysis Library), welche im Jahr 2007 den Wilkinson Preis für numerische Software erlangt hat. Genauere Auskünfte zu `deal.II` sind zu finden in den Quellen [Bangerth et al., 2007b] und [Bangerth et al., 2007a]. Wie bereits in Abschnitt 4.1.1 erläutert wurde, kommt es bei der Umsetzung Finites Elementes Verfahren zu großen Gleichungssystemen. Um diese zu lösen, wurde der direkte Löser UMFPACK (Unsymmetric MultiFrontal PACKage) für schwach besetzte Matrizen verwendet, über den nähere Informationen unter [Davis, 2004] und [Davis and Duff, 1997] zu finden sind.

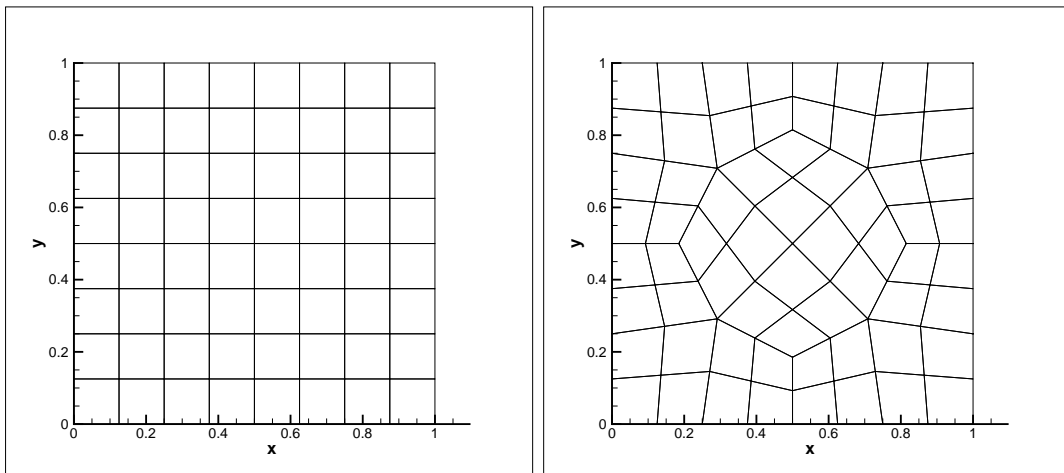
Zu den Stokes Gleichungen wird hier ein Beispiel aus [Gelhard et al., 2005] angeführt, welches nicht polynomiell ist und nicht in einem der vorgestellten, endlich dimensionalen Ansatzräume enthalten ist. Auf $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ sei die exakte Lösung $(\mathbf{u} = (u_1, u_2), p)$ zur Viskosität $\nu = 1$ gewählt durch

Beispiel 6.0.1:

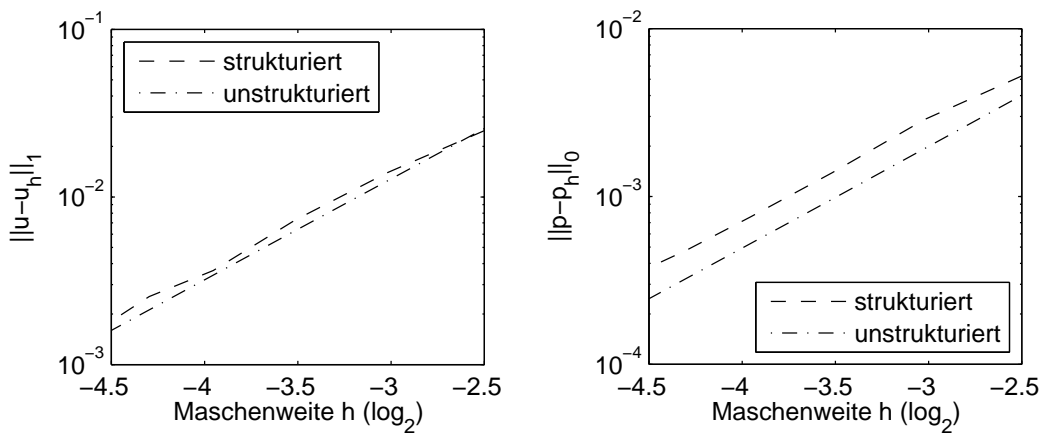
$$\begin{aligned}u_1(x, y) &= \sin(\pi x) \\u_2(x, y) &= -\pi y \cos(\pi x) \\p(x, y) &= \sin(\pi x) \cos(\pi y).\end{aligned}$$

Das Variieren der Viskosität ν findet hier nicht statt, weil dies lediglich eine Umskalierung der Daten mit $\tilde{p} = \nu^{-1}p$ und $\tilde{\mathbf{f}} = \nu^{-1}\mathbf{f}$ bedeutet und die Voraussetzungen für \mathbf{u} aus physikalischer Sicht unverändert bleiben. Eine mathematische Sicht dieser Problemstellung ist zu finden bei [Olshanskii and Reusken, 2004], wozu die sogenannte GradDiv Stabilisierung verwendet wird, die hier erst in Kapitel 7 eingeführt werden soll. Die rechte Seite \mathbf{f} ist mit Hilfe der Impulserhaltungsgleichung aus (5.1) berechnet worden, die Massenerhaltungsgleichung ist von sich aus erfüllt. Der inhomogene Dirichlet Rand, der nicht zu den Randbedingungen aus (5.1) passt, ist durch Elimination in das lineare Gleichungssystem eingearbeitet.

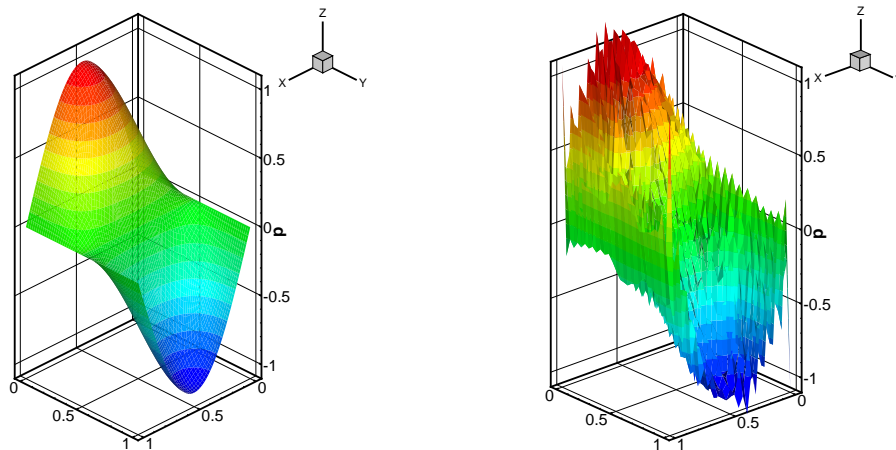
Der erste numerische Test soll den Gittern gewidmet sein. Es können strukturierte oder aber unstrukturierte Gitter gemäß Abbildung 6.1 verwendet werden, welche sich in ihren Eigenschaften für das Verfahren unterscheiden. Abbildung 6.2 zeigt, dass die Fehlerwerte auf strukturierten Gittern besser sind als auf unstrukturierten. Aus diesem Grund werden alle folgenden numerischen

Abbildung 6.1: Strukturiertes und unstrukturiertes Gitter mit jeweils $h \approx 1/8$

Tests auf unstrukturierten Gittern durchgeführt, um Verbesserungen der Fehler und damit unter Umständen der Fehlerordnungen durch die Regelmäßigkeit der Zerlegungen vorzubeugen.

Abbildung 6.2: Stetiges Q_2/Q_1 -Element auf strukturierten und unstrukturierten Gittern

Für die Rechnungen in Abbildung 6.2 ist das stetige Q_2/Q_1 -Element benutzt worden, welches nach Satz 4.3.2 die BB-Bedingung erfüllt. Wird allerdings ein Element gebraucht, das dieser Bedingung nicht genügt, so treten vor allem im Druck unphysikalische Oszillationen auf. Dies wird durch Abbildung 6.3 veranschaulicht. Um solchen Oszillationen entgegen zu wirken, kommen Stabilisierungsverfahren zum Einsatz und werden nun vom numerischen Standpunkt aus betrachtet.

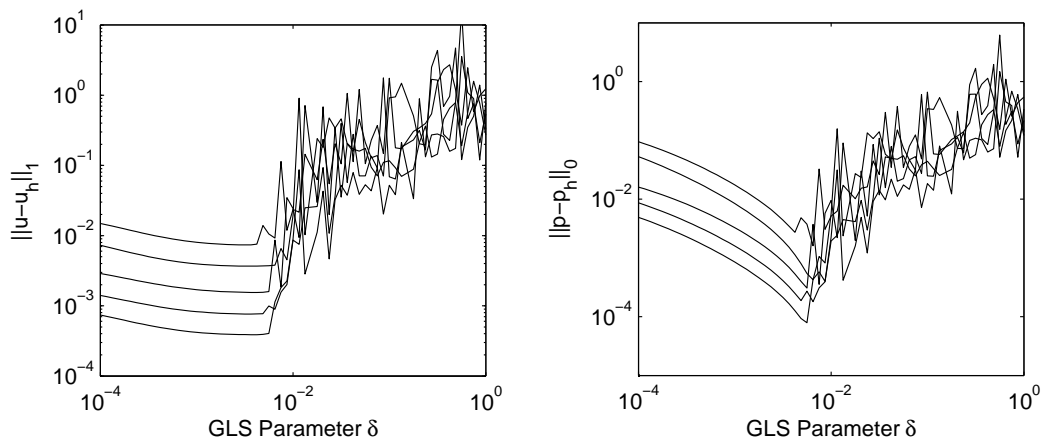
Abbildung 6.3: Exakte Lösung des Druckes p und Approximation des Druckes mit Oszillationen

6.1 Galerkin-Least-Squares Verfahren

Die in Abschnitt 5.2 eingeführte Methode GLS aus (5.4) zur Stabilisierung sieht vor, der Variationsformulierung einen Term

$$\delta \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 (-\Delta \mathbf{w}_h + \nabla r_h, -\Delta \mathbf{v}_h + \nabla q_h)_K$$

hinzuzufügen. Dabei ist bisher völlig unklar, wie der Parameter δ zu wählen ist und wie sensibel das Verfahren auf Veränderungen dieses Parameters reagiert.

Abbildung 6.4: Stetiges $\mathbf{Q}_2/\mathbf{Q}_2$ -Element für Gitter mit $h \approx 1/16, 1/22, 1/32, 1/48, 1/64$

Eine Antwort auf diese Frage liefert Abbildung 6.4, die Resultate zum stetigen $\mathbf{Q}_2/\mathbf{Q}_2$ -Element zeigt. Aufgetragen ist der H^1 -Fehler der Geschwindigkeit und der L^2 -Fehler des Druckes gegen den Stabilisierungsparameter δ auf verschiedenen feinen Gittern, wobei die feinsten Gitter die besten Ergebnisse liefern. Die Plots sind in zwei verschiedene Bereiche einzuteilen: zum einen ein ruhiger Fehlerverlauf bei etwa $\delta \leq 5 \cdot 10^{-3}$ und zum anderen ein sehr unvohersehbarer Fehlerverlauf bei etwa $\delta \geq 5 \cdot 10^{-3}$. Bei $\delta \leq 5 \cdot 10^{-3}$ fällt besonders auf, dass der Fehler in der Geschwindigkeit \mathbf{u}

deutlich unsensibler auf Variationen von δ reagiert. Die Instabilität des Q_2/Q_2 -Elementes macht sich vor allem im Druckfehler bemerkbar, der mit kleiner werdendem δ sehr schnell schlechter wird. Der beste Bereich für den Parameter in Bezug auf die Fehlerwerte liegt sehr nahe an dem Übergang zum Bereich des unvorhersehbaren Fehlerverlaufs. Dies ist für die Anwendung dieses Verfahrens nachteilig, weil schon geringe Abweichungen vom optimalen δ Fehlerschwankungen im Bereich von Zehnerpotenzen bewirken können. Im Bereich für $\delta \geq 5 \cdot 10^{-3}$ treten Fehlerwerte auf, die vergleichbar mit guten Fehlerwerten sind, wobei es oft zu Ausreißen mit deutlich schlechteren Werten kommt. Ausreißer zu besseren Werten sind dagegen überhaupt nicht zu entdecken. Die Graphen zu den anderen Fehlergrößen der Geschwindigkeit wie $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_0$ oder $\|\nabla \cdot \mathbf{u}_h\|_0$ sind nicht gezeigt, weil diese Größen durch den angeführten H^1 -Fehler kontrolliert werden können. Die Verläufe dieser Fehler sehen ebenso wie dieser aus und sie werden dominiert durch den Seminormfehler $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_1$.

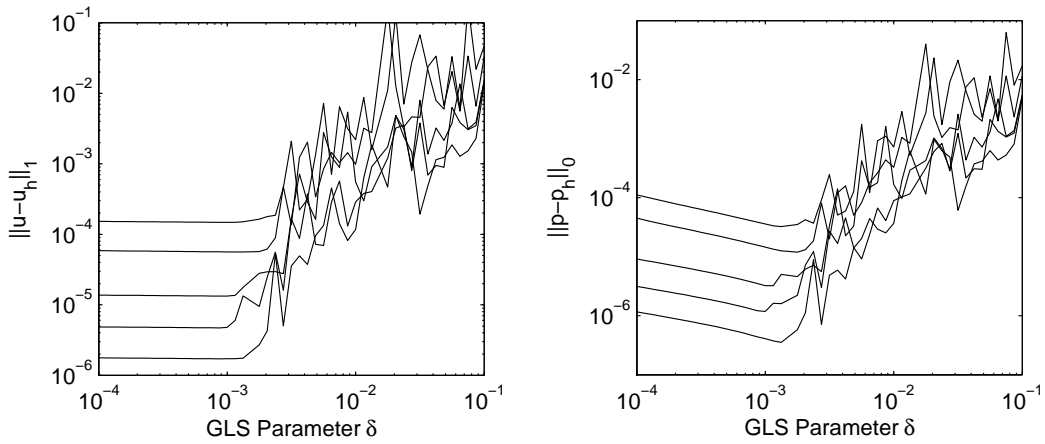


Abbildung 6.5: Stetiges Q_3/Q_3 -Element für Gitter mit $h \approx 1/16, 1/22, 1/32, 1/48, 1/64$

Die Auswirkungen der Änderung der Elementordnung zeigt die Abbildung 6.5, in der das stetige Q_3/Q_3 -Element genutzt wurde. Die Erläuterungen von Abbildung 6.4 sind auch hier zutreffend und eine Wahl des Parameters δ fällt schwer.

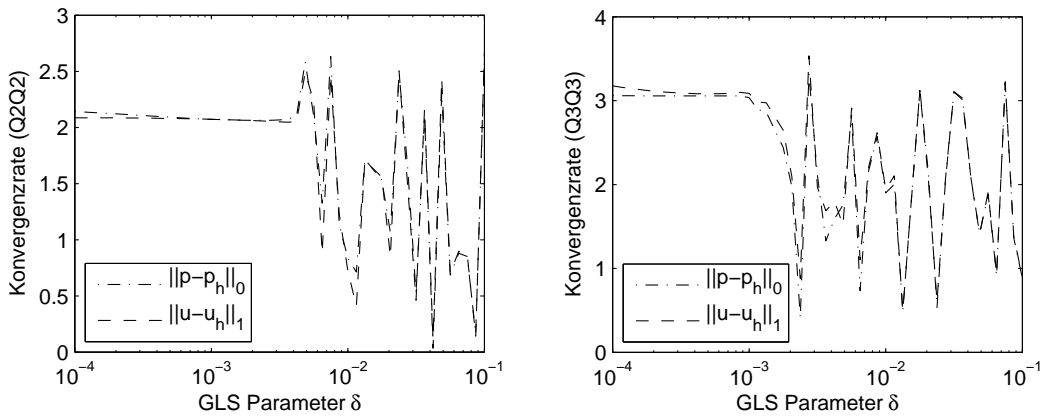


Abbildung 6.6: Konvergenzraten für Druck- und Geschwindigkeitsfehler bei verschiedenen Elementen

Um einen Vergleich zu Satz 5.2.4 anstellen zu können, kann Abbildung 6.6 betrachtet werden.

Hier sind die Konvergenzraten der im Satz angeführten Fehlergrößen über die Variation von δ aufgetragen. Bei einem Q_k/Q_k -Element wird für beide Fehler eine Ordnung k erwartet. Zwar steht vor dem Druck ein h^{k+1} , dies kann aber nicht ausgenutzt werden, weil die niedrigere Ordnung k aus der Geschwindigkeit dominiert. Abbildung 6.6 zeigt in den stabilen Bereichen diese Ordnungen sehr gut. Sobald der Parameter δ allerdings eine bestimmte Grenze überschreitet, ist für die Ordnung keine Aussage mehr zu treffen. Auch dieses Verhalten passt zur Aussage von Satz 5.2.4, weil dort $\delta < \frac{\mu}{\nu}$ gefordert wird. Bei Überschreitung dieser Schranke steht keine Aussage zur Ordnung mehr zur Verfügung. Weitere numerische Betrachtungen zu GLS Methoden sind zu finden bei [Barth et al., 2004].

6.2 Pressure-Stabilization / Petrov-Galerkin Verfahren

Die nächsten numerischen Untersuchungen sind der PSPG Methode gewidmet, die in Abschnitt 5.3 vorgestellt wurde. Hier ist nach (5.14) vorgesehen, einen Stabilisationsterm der Form

$$\tau \sum_{K \in \mathcal{T}_h} h_K^2 (-\Delta \mathbf{w}_h + \nabla r_h, \nabla q_h)_K$$

auf die Variationsformulierung zu addieren. Ebenso wie im vorigen Abschnitt ist die Wahl des

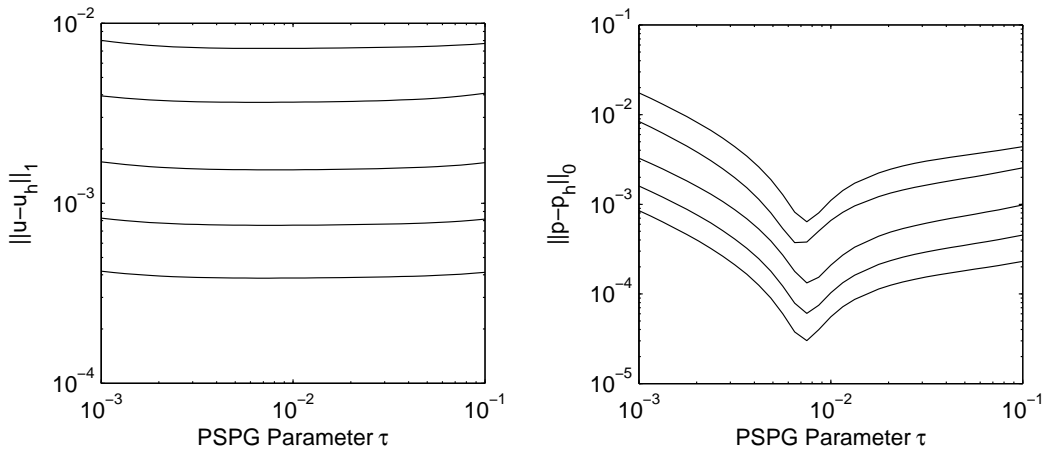
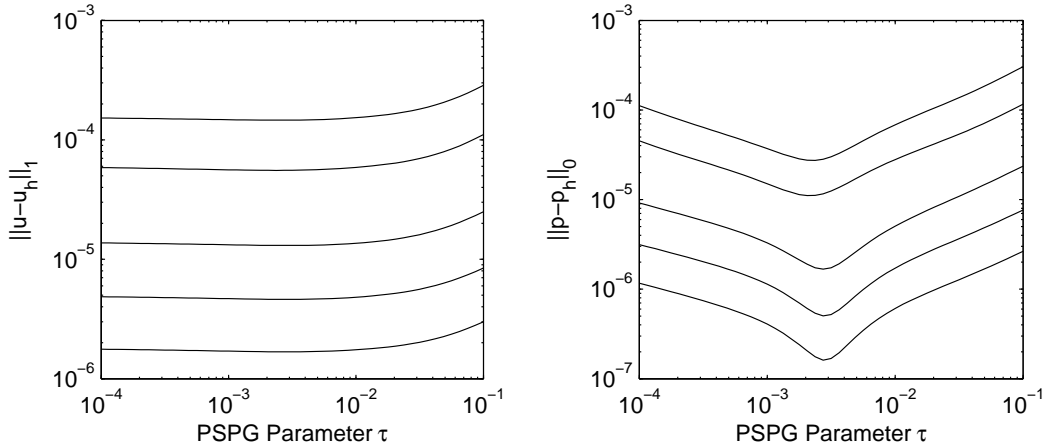


Abbildung 6.7: Stetiges Q_2/Q_2 -Element für Gitter mit $h \approx 1/16, 1/22, 1/32, 1/48, 1/64$

Parameters τ unklar. Zur Klärung sind die Abbildungen 6.7 und 6.8 angeführt, welche zeigen, dass eine Parameterwahl hier leichter fällt, als in Abschnitt 6.1 zur GLS Methode. Besonders der Geschwindigkeitsfehler zeigt sich äußerst unsensibel auf Variation von τ ; der Druckfehler ist stärker davon abhängig. Auch bei diesem Verfahren ist für zu große τ aus theoretischer Sicht keine Aussage mehr zur Ordnung zu machen, allerdings ist der optimale Parameter weit genug entfernt von diesem Bereich, was eine Parameterwahl möglich macht. Aus den Abbildungen 6.7 und 6.8 ist gut zu erkennen, dass diese Wahl unabhängig von h aber in Abhängigkeit zur Elementordnung zu treffen ist. Dies kann dadurch erklärt werden, dass die Konstante μ aus der inversen Ungleichung in Lemma 4.4.4 wesentlich in die Sätze aus Abschnitt 5.3 eingeht und dieses μ ebenfalls von der Elementordnung abhängt. Auch hier sind die Plots zu den anderen relevanten Fehlergrößen in der Geschwindigkeit $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_0$, $\|\nabla \cdot \mathbf{u}_h\|_0$ und $|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_1$ weggelassen worden, weil ihr Verhalten dem des angeführten H^1 -Fehlers entspricht; der dominante Fehler ist der H^1 -Seminormfehler.

Die Konvergenzordnungen bei optimaler Parameterwahl sind in Abbildung 6.9 zu erkennen und in Übereinstimmung mit der Aussage aus Satz 5.3.1. Es werden die erwarteten Ordnungen erreicht und nicht wesentlich überschritten.

Abbildung 6.8: Stetiges Q_3/Q_3 -Element für Gitter mit $h \approx 1/16, 1/22, 1/32, 1/48, 1/64$

6.3 Vergleich der Taylor-Hood Elemente mit den equal-order Elementen

Die bisher gezeigten Resultate waren zu stabilisierten Finite Elemente Verfahren für die Stokes Gleichungen bei einer Viskosität $\nu = 1$. Nach Satz 3.3.1 ist allerdings eine Stabilisierung für Elementpaare mit erfüllter BB-Bedingung wie den Taylor-Hood Elementen aus Satz 4.3.2 nicht nötig. Die Abbildung 6.9 soll nun klären, inwieweit eine equal-order Approximation den Vorteil der zusätzlichen Ordnung im Druckraum in Verbindung mit der Stabilisierung nutzen kann. Zu erkennen ist, dass die Fehler in der Geschwindigkeit \mathbf{u} beinahe identisch sind. Höchstens der Divergenzfehler $\|\nabla \cdot \mathbf{u}\|_0$ zeigt leichte Vorteile für die equal-order Approximation, allerdings nicht für die Fehlerordnung. Der Druckfehler $\|p - p_h\|_0$ ist stärker beeinflusst durch die zusätzliche Elementordnung, hier sind sogar leichte Vorteile in der Konvergenzordnung zu sehen. Der numerische Aufwand der equal-order Approximation im Vergleich zur Taylor-Hood Approximation ist allerdings sehr hoch. Zunächst sind aus der Elementordnung des Druckansatzraumes mehr Freiheitsgrade zu berücksichtigen und zusätzlich die Stabilisierungsterme zu assemblieren, welche auch mehr Kopplungen der Komponenten bewirken. Zudem ist im Abschnitt 6.2 zu erkennen, dass die optimale Parameterwahl ebenfalls Aufwand und Unsicherheit bedeuten kann.

	Q_2/Q_2	Q_3/Q_3	Q_4/Q_4
τ_{opt}	$6.4938 \cdot 10^{-3}$	$2.3714 \cdot 10^{-3}$	$1.3335 \cdot 10^{-3}$

Tabelle 6.1: Optimale Parameter τ_{opt} für PSPG Stabilisierung

Für die Rechnungen in Abbildung 6.9 sind optimale Parameter τ_{opt} für die verschiedenen Elemente mit Hilfe von Rechnungen wie in Abschnitt 6.2 gewählt worden. Diese sind zu finden in Tabelle 6.1 und zeigen eine deutliche Abhängigkeit in k bei einer equal-order Approximation mit dem Element Q_k/Q_k . Für die herausgefundenen Werte in Tabelle 6.1 würde als Näherung des optimalen Parameters $\tau_{opt} = 2.2k^{-2} \cdot 10^{-2}$ passen, obwohl die noch folgenden Resultate in Abschnitt 7.3 durch (7.20) eher ein Verhalten mit k^{-4} voraussagen. Die dort angeführten Resultate entsprechen genau diesem Fall für $\mathbf{b} = 0, \sigma = 0, \nu = 1, \gamma_K = 0$ und $\tau = \vartheta_K h_K^{-2} \sim k^{-4}$.

Den Rechnungen in Abbildung 6.10 liegt die gerade motivierte Parameterwahl $\tau_{opt} = 2.2k^{-2} \cdot 10^{-2}$ für die PSPG Stabilisierung bei equal-order Elementen zugrunde. In diesen Plots ist zu erkennen, dass alle relevanten Fehlergrößen anscheinend auch in der Elementordnung k einer Regelmäßigkeit

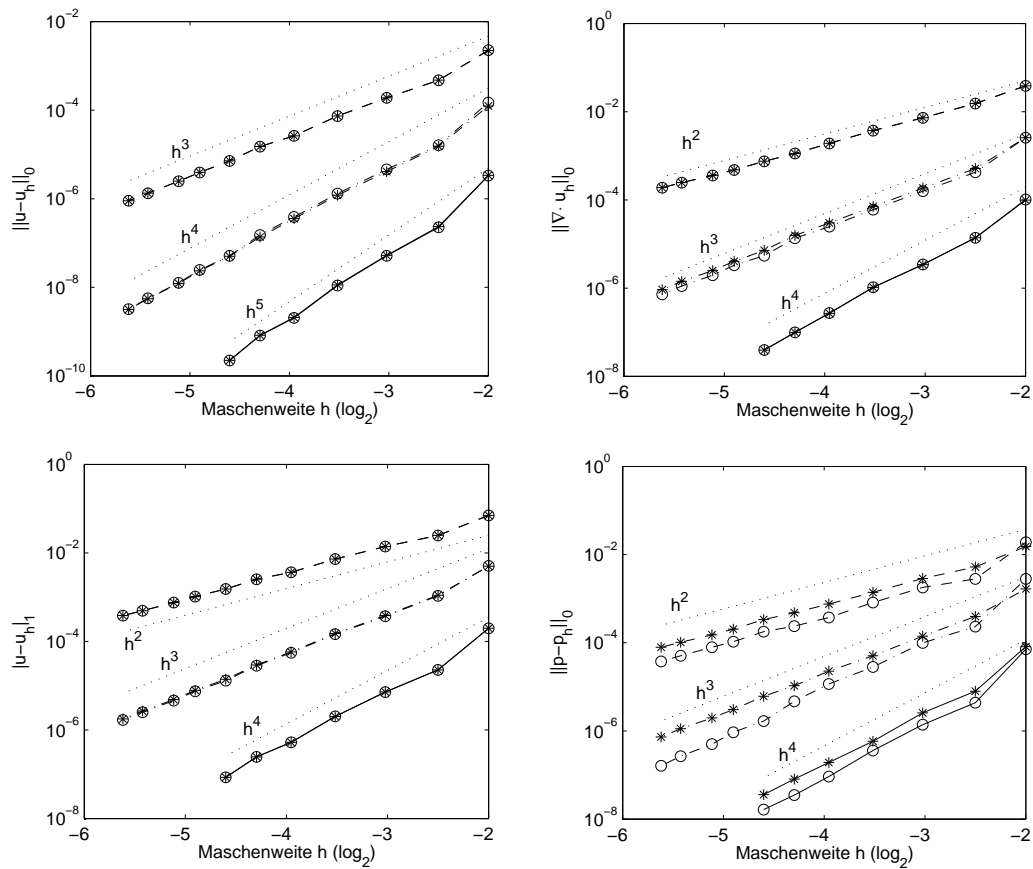


Abbildung 6.9: Konvergenzplots der relevanten Fehlergrößen bei Taylor-Hood Elementen im Vergleich zu PSPG stabilisierten equal-order Elementen mit optimalen Parametern (Taylor-Hood Elemente Q_k/Q_{k-1} sind durch Sterne * gekennzeichnet, equal-order Elemente durch Kreise o. Die gestrichelten Linien stehen für $k = 2$, Punkt-Strich für $k = 3$ und durchgezogen für $k = 4$.)

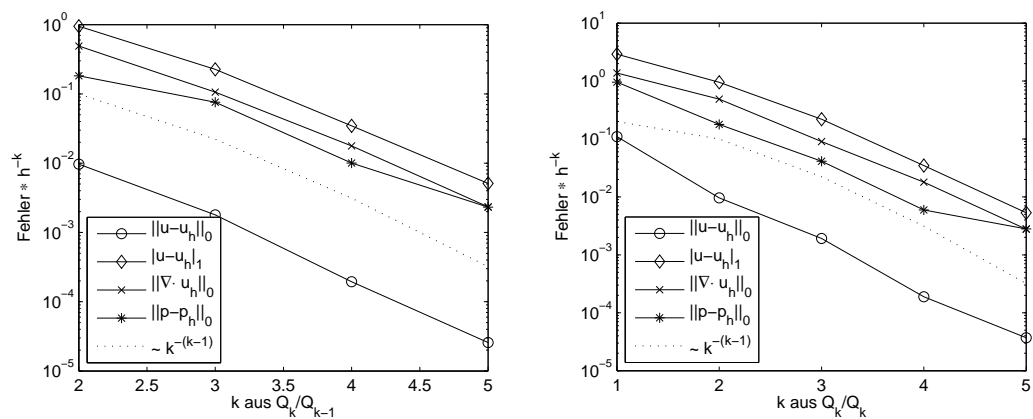


Abbildung 6.10: Abhängigkeit der relevanten Fehlergrößen bei herausgeteilter h -Ordnung von der Elementordnung bei Taylor-Hood und equal-order Approximationen für ein Gitter mit $h \approx 1/16$

unterliegen. Diese Beobachtung ist in den vergangenen Abschnitten theoretisch nicht vorausgesagt worden, weil die Elementordnung bei den Abschätzungen in Kapitel 5 immer vernachlässigt worden ist. In Abschnitt 7.3 wird dies betrachtet und mit Satz 7.3.3 ein Verhalten wie h^k/k^{k-1} vorausgesagt, welches in den Plots durch die gepunktete Linie angedeutet worden ist. Weil relativ wenig Punkte berechnet worden sind, ist eine Asymptotik schwer zu ersehen. Für die betrachteten Punkte könnte dieses Verhalten jedoch richtig sein.

Kapitel 7

Stabilisierte Diskretisierungen der Oseen Gleichungen

7.1 Die Oseen Gleichungen

In diesem Kapitel werden Stabilisierungen zu den Oseen Gleichungen betrachtet. Wie bereits in Abschnitt 1.2 erläutert wurde, sind diese Gleichungen nicht physikalisch motiviert. Sie sind ein Hilfsproblem zur Lösung der Navier-Stokes Gleichungen und daher mathematisch von Interesse. Das Oseen Problem lautet

$$\begin{aligned} -\nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \sigma\mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} & \text{auf } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 & \text{auf } \Omega \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0} & \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{7.1}$$

mit einem beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ für $N \in \{2, 3\}$ mit polygonalem oder polyhedralem Rand $\partial\Omega$. Die Randanforderungen sind zu erfüllen, um das Gebiet wie in Abschnitt 4.2 triangulieren zu können; diese Triangulation wird mit \mathcal{T}_h bezeichnet. Die Parameter dieses Problems sind die kinematische Viskosität $0 < \nu \in \mathbb{R}$, der Konvektionsvektor $\mathbf{b} \in [H^1(\Omega)]^N$ mit $\nabla \cdot \mathbf{b} = 0$ und die Reaktionskonstante $0 \leq \sigma \in \mathbb{R}$. Aus Abschnitt 3.2 ist bereits bekannt, dass dieses Problem eine eindeutige schwache Lösung besitzt. Mit Hilfe der Numerik soll nun eine Approximation (\mathbf{u}_h, p_h) an diese Lösung (\mathbf{u}, p) gefunden werden. Die Kurzschreibweisen

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &:= [H_0^1(\Omega)]^N \text{ und} \\ Q &:= L_*^2(\Omega) \end{aligned}$$

führen nach Abschnitt 3.1 in die richtigen kontinuierlichen Räume für eine mathematische Betrachtung dieses Problems. Um die schwache Formulierung von (7.1) zu betrachten, ist zu setzen

$$\begin{aligned} B(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}, q) &:= \nu(\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{v}) + ((\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \sigma(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - (\nabla \cdot \mathbf{v}, p) + (\nabla \cdot \mathbf{u}, q) \text{ und} \\ F(\mathbf{v}, q) &:= (\mathbf{f}, \mathbf{v}). \end{aligned}$$

Damit lautet eine zum Oseen-Problem äquivalente Aufgabenstellung

$$\text{Finde } (\mathbf{u}, p) \in \mathbf{V} \times Q \text{ mit: } B(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}, q) = F(\mathbf{v}, q) \tag{7.2}$$

für alle Paare $(\mathbf{v}, q) \in \mathbf{V} \times Q$. Die Äquivalenz zu dem in Abschnitt 3.1 hergeleiteten Problem ist analog zu Satz 4.1.3 zu beweisen.

7.2 Residuale Stabilisierung für Taylor-Hood Elemente

Satz 4.3.2 liefert, dass das Taylor-Hood Element die BB-Bedingung erfüllt. Es gilt also für $k \geq 1$

$$\inf_{0 \neq p \in Q^{(k-1)}_h} \sup_{0 \neq \mathbf{v} \in \mathbf{V}^{(k)}_h} \frac{(\nabla \cdot \mathbf{v}, p)}{\|\mathbf{v}\|_1 \|p\|_0} \geq \beta_0, \quad (7.3)$$

mit einer von h unabhängigen Konstante β_0 .

In diesem Abschnitt soll ein Parameterdesign für verschiedene Arten der residualen Stabilisierung bei diesem Element entwickelt werden, siehe auch [Matthies and Lube, 2007]. Um mehr Übersicht zu erhalten, sind im Folgenden die Indizes an den Räumen unterdrückt und stattdessen \mathbf{V}_h/Q_h genutzt. Das diskrete Problem lautet damit

$$\text{Finde } (\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h \text{ mit: } B(\mathbf{u}_h, p_h; \mathbf{v}_h, q_h) = F(\mathbf{v}_h, q_h) \quad (7.4)$$

für alle $(\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h$.

7.2.1 Die Stabilisierung

Bei der Lösung von Problemen des Typs (7.4) können unphysikalische Oszillationen auftreten. Dies kann begründet sein durch die Verletzung der BB-Bedingung, was bereits aus den Betrachtungen der Stokes Gleichungen in den Kapiteln 5 und 6 hervorgegangen ist. Eine andere Quelle solcher Oszillationen kann aber auch eine dominante Konvektion sein. Als Kriterium für solche Fälle ist zu prüfen, ob die sogenannte lokale Reynoldszahl

$$Re_K := \frac{\|\mathbf{b}\|_\infty h_K}{\nu} \quad (7.5)$$

sehr groß wird. Das ist der Fall, wenn die Konvektion gemessen durch $\|\mathbf{b}\|_\infty$ multipliziert mit dem Durchmesser h_K der betrachteten Zelle deutlich größer ist als die Viskosität ν . Diese Oszillationen werden durch verschiedene Arten von Stabilisierungen verhindert. Hier sollen die SUPG (Streamline-Upwind / Petrov-Galerkin), die PSPG (Pressure-Stabilization / Petrov-Galerkin) und die GradDiv Stabilisierung Anwendung finden, indem die entsprechenden Terme der Variationsformulierung hinzugefügt werden. Es sind alles Stabilisierungsmethoden, die in den vorgestellten Rahmen der residualen Stabilisierung aus Abschnitt 4.5.1 passen. Die Definitionen lauten dazu insgesamt

$$\begin{aligned} B_h(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}, q) &:= B(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}, q) + \underbrace{\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \gamma (\nabla \cdot \mathbf{u}, \nabla \cdot \mathbf{v})_K}_{\text{GradDiv}} \\ &+ \underbrace{\sum_{K \in \mathcal{T}_h} (-\nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \sigma \mathbf{u} + \nabla p, \delta_K (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \tau_K \nabla p)_K}_{\text{SUPG + PSPG}} \\ F_h(\mathbf{v}, q) &:= F(\mathbf{v}, q) + \underbrace{\sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\mathbf{f}, \delta_K (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \tau_K \nabla p)_K}_{\text{SUPG + PSPG}}. \end{aligned}$$

Ab sofort ist das zu betrachtende Problem also

$$\text{Finde } (\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h \text{ mit: } B_h(\mathbf{u}_h, p_h; \mathbf{v}_h, q_h) = F_h(\mathbf{v}_h, q_h) \quad (7.6)$$

für alle $(\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h$.

Von Interesse ist an dieser Stelle eine Aussage zur Lösbarkeit dieses Problems. Um hierüber Auskunft zu geben, wird eine gitter- und problemabhängige Norm definiert mit

$$||[\mathbf{v}]||^2 := \nu |\mathbf{v}|_1^2 + \sigma \|\mathbf{v}\|_0^2 + \gamma \|\nabla \cdot \mathbf{v}\|_0^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \|(\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{v}\|_{0,K}^2 \quad \text{und} \quad (7.7)$$

$$||(\mathbf{v}, q)||^2 := ||[\mathbf{v}]||^2 + \alpha \|q\|_0^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K |q|_{1,K}^2. \quad (7.8)$$

Die Analysis dieses Abschnitts gebraucht im Gegensatz zu Abschnitt 5.2 nicht die üblichen Normen der Funktionenräume, sondern diese Triplenorm. Dies bietet den Vorteil, dass die Konstante β_S aus Satz 7.2.2 unabhängig von den Problemgrößen ν und h gewählt werden kann. Deshalb kann anhand der Triplenorm gesehen werden, in welchen Bereichen Schwierigkeiten mit der Fehlerkontrolle, wie beispielsweise bei kleinen ν in der H^1 -Seminorm, zu erwarten sind. In Abschnitt 5.2 war dies in der Wahl der Konstanten zu Satz 5.2.2 untergegangen. Aus diesem Grund soll in diesem Abschnitt eine genauere Auskunft über die Konstanten gegeben und die Abhängigkeiten genauer untersucht werden. Der Parameter α aus der Normdefinition ist eine Konstante, die Auskunft darüber gibt, wie stark die L^2 -Norm des Druckes kontrolliert werden kann. Wünschenswert ist hier ein möglichst großer Wert, der in einem Beweis zur eindeutigen Lösbarkeit und damit zur Stabilität des Problems gefunden werden muss. Der Beweis zu Satz 7.2.2 gibt später mit (7.15) nähere Informationen dazu. Um das vorgestellte Problem mit analytischen Hilfsmitteln zu betrachten, sind noch Voraussetzungen an die Parameter aus den Stabilisierungen nötig, die durch die folgenden Beweise begründet sind. Zunächst soll es eine Konstante Φ geben mit

$$\Phi := \sqrt{\nu + \sigma C_F^2} + 2\|\mathbf{b}\|_{0,\infty} \min\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}}, \frac{C_F}{\sqrt{\nu}}\right) + \sqrt{N}\gamma, \quad (7.9)$$

wobei C_F für die Konstante der Friedrichs-Ungleichung aus Lemma 2.3.1 steht. Weiter soll gelten, dass

$$0 \leq \gamma, \quad \text{und} \quad 0 \leq \tau_K \leq \delta_K \leq \min\left(\frac{4}{45} \min\left(\frac{1}{\sigma}, \frac{C_F^2}{\nu}\right), \frac{1}{40} \frac{h_K^2 \beta_0^2}{\mu^2 \Phi^2}\right). \quad (7.10)$$

wobei β_0 die Konstante aus (7.3) ist und μ aus der inversen Ungleichung in Lemma 4.4.4 stammt. Mit diesen Voraussetzungen kann die eindeutige Lösbarkeit des Problems (7.6) in Verbindung mit Satz 2.2.8 durch das nächste Lemma relativ einfach gezeigt werden.

Lemma 7.2.1:

Sei (7.10) erfüllt. Dann gilt unter der Forderung $\vartheta_K := \delta_K = \tau_K$

$$B_h(\mathbf{v}_h, q_h; \mathbf{v}_h, q_h) \geq \frac{1}{2} \left(\nu |\mathbf{v}_h|_1^2 + \sigma \|\mathbf{v}_h\|_0^2 + \gamma \|\nabla \cdot \mathbf{v}_h\|_0^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \vartheta_K \|(\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{v}_h + \nabla q_h\|_{0,K}^2 \right)$$

für alle $(\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h$. Die Bilinearform B_h ist also $(\mathbf{V}_h \times Q_h)$ -elliptisch.

Beweis:

Zunächst seien einige Abkürzungen definiert durch

$$\begin{aligned} X^2 &:= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \vartheta_K \|(\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{v}_h + \nabla q_h\|_{0,K}^2, & A^2 &:= \nu |\mathbf{v}_h|_1^2 + \sigma \|\mathbf{v}_h\|_0^2, \\ Y^2 &:= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \vartheta_K \|-\nu \Delta \mathbf{v}_h + \sigma \mathbf{v}_h\|_{0,K}^2, & Z^2 &:= \gamma \|\nabla \cdot \mathbf{v}_h\|_0^2. \end{aligned}$$

Damit gilt für ein beliebiges $(\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h$, dass

$$\begin{aligned} B_h(\mathbf{v}_h, q_h; \mathbf{v}_h, q_h) &= \nu |\mathbf{v}_h|_1^2 + \sigma \|\mathbf{v}_h\|_0^2 + \gamma \|\nabla \cdot \mathbf{v}_h\|_0^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \vartheta_K \|(\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{v}_h + \nabla q_h\|_{0,K}^2 \\ &\quad + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \vartheta_K (-\nu \Delta \mathbf{v}_h + \sigma \mathbf{v}_h, (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{v}_h + \nabla q_h)_K \\ &\geq A^2 + X^2 + Z^2 - XY, \end{aligned}$$

wobei die Cauchy-Schwarz-Ungleichung aus Lemma 2.3.2 und Bemerkung 3.3.3 gebraucht wurden. Außerdem gilt $Y \leq A$, denn mit Hilfe der Dreiecks-, der Young- und der inversen Ungleichung ergibt sich

$$\begin{aligned} Y^2 &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \vartheta_K \|-\nu \Delta \mathbf{v}_h + \sigma \mathbf{v}_h\|_{0,K}^2 \leq 2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \vartheta_K \left(\nu^2 \|\Delta \mathbf{v}_h\|_{0,K}^2 + \sigma^2 \|\mathbf{v}_h\|_{0,K}^2 \right) \\ &\leq 2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \vartheta_K \left(\frac{\nu^2 \mu^2}{h_K^2} |\mathbf{v}_h|_{1,K}^2 + \sigma^2 \|\mathbf{v}_h\|_{0,K}^2 \right) \leq 2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{1}{40} \frac{\nu^2}{\Phi^2} |\mathbf{v}_h|_{1,K}^2 + \frac{4}{45} \sigma \|\mathbf{v}_h\|_{0,K}^2 \right) \\ &\leq \frac{8}{45} \left(\nu |\mathbf{v}_h|_{1,K}^2 + \sigma \|\mathbf{v}_h\|_{0,K}^2 \right) \leq A^2, \end{aligned}$$

wobei die Wahl von $\vartheta_K = \delta_K = \tau_K$ mit (7.10) genutzt werden konnte und angenommen worden ist, dass $\beta_0 \leq 1$. Dies kann nach (7.3) immer gefordert werden. Die Young-Ungleichung führt dann zur Behauptung, denn

$$B_h(\mathbf{v}_h, q_h; \mathbf{v}_h, q_h) \geq A^2 + X^2 + Z^2 - XY \geq A^2 + X^2 + Z^2 - \frac{1}{2} (X^2 + A^2) \geq \frac{1}{2} (A^2 + X^2 + Z^2). \quad \blacksquare$$

Der eben geführte Beweis ist relativ einfach und liefert tatsächlich die gewünschte eindeutige Lösbarkeit der Aufgabenstellung. Allerdings gilt dies nur bezüglich der Norm auf der rechten Seite der Behauptung. Dies hat einige offene Fragen zur Folge. Zum ersten ist vollkommen offen geblieben, ob der Druck auch in der L^2 -Norm kontrolliert werden kann. Lemma 7.2.1 bietet nur eine Aussage zur Kontrolle des Druckgradienten. Zum zweiten können die Stabilisierungsparameter δ_K und τ_K nicht getrennt voneinander gewählt werden. Wäre es zum Beispiel möglich eine Stabilisierung wegzulassen, bedeutete dies eine Verringerung der Rechenzeit. Dieses Lemma bietet dazu keinen Freiraum. Aus diesen Gründen wird mit Satz 7.2.2 ein alternativer Weg gefunden, mit dem diese Fragen beantwortet werden.

Satz 7.2.2:

Sei (7.10) erfüllt. Dann existiert eine echt positive Konstante β_S unabhängig von der Gitterweite h und der Viskosität ν , so dass gilt

$$\inf_{(\mathbf{0},0) \neq (\mathbf{v}_h, q_h)} \sup_{(\mathbf{0},0) \neq (\mathbf{w}_h, r_h)} \frac{B_h(\mathbf{v}_h, q_h; \mathbf{w}_h, r_h)}{\|(\mathbf{v}_h, q_h)\| \|(\mathbf{w}_h, r_h)\|} \geq \beta_S > 0 \quad (7.11)$$

über dem Raum $\mathbf{V}_h \times Q_h$, wobei das Infimum und das Supremum angenommen werden.

Beweis:

Sei $(\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h$ beliebig aber fest. Zu diesem Element ist ein Element $(\mathbf{w}_h, r_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h$ gesucht, welches mit einer passenden Konstanten die Behauptung erfüllt.

Dies lässt sich in vier Schritten vollziehen.

- (i) Zunächst wird geprüft, inwieweit $B_h((\mathbf{v}_h, q_h), (\mathbf{v}_h, q_h))$ durch $\|(\mathbf{v}_h, q_h)\|$ kontrolliert werden kann.
- (ii) Weil ein Element $\mathbf{z}_h \in \mathbf{V}_h$ mit $|\mathbf{z}_h|_1 = \|q_h\|_0$ existiert lässt sich ein Korrekturterm durch Abschätzen von $B_h((\mathbf{v}_h, q_h), (-\mathbf{z}_h, 0))$ gewinnen.
- (iii) Mit der Wahl des Elementes $(\mathbf{w}_h, r_h) = (\mathbf{v}_h, q_h) + \lambda(-\mathbf{z}_h, 0)$ ergibt sich mit Hilfe von (i) und (ii) $B_h((\mathbf{v}_h, q_h), (\mathbf{w}_h, r_h)) \gtrsim \|(\mathbf{v}_h, q_h)\|^2$.
- (iv) Zum Schluss muss noch $\|(\mathbf{w}_h, r_h)\|$ gegen $\|(\mathbf{v}_h, q_h)\|$ abgeschätzt werden, um die gesamte Behauptung zu erhalten.

Um die Übersichtlichkeit zu steigern, werden zunächst wieder einige Abkürzungdefinitionen angeführt:

$$\begin{aligned}
X^2 &:= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \|(\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{v}_h\|_{0,K}^2, & A^2 &:= \nu |\mathbf{v}_h|_1^2 + \sigma \|\mathbf{v}_h\|_0^2, \\
Y^2 &:= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \|-\nu \Delta \mathbf{v}_h + \sigma \mathbf{v}_h + \nabla q_h\|_{0,K}^2, & B^2 &:= \|q_h\|_0^2, \\
D^2 &:= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K \|\nabla q_h\|_{0,K}^2, & Z^2 &:= \gamma \|\nabla \cdot \mathbf{v}_h\|_0^2, \\
E^2 &:= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K \|-\nu \Delta \mathbf{v}_h + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{v}_h + \sigma \mathbf{v}_h\|_{0,K}^2.
\end{aligned}$$

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass diese Definitionen sich zwar so nahe wie möglich an die vorangegangenen zu Lemma 7.2.1 halten, jedoch nicht die gleichen sind.

(i):

Es gilt mit der Bemerkung 3.3.3

$$\begin{aligned}
B_h((\mathbf{v}_h, q_h), (\mathbf{v}_h, q_h)) &= B((\mathbf{v}_h, q_h), (\mathbf{v}_h, q_h)) + \gamma \|\nabla \cdot \mathbf{v}_h\|_0^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \|(\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{v}_h\|_{0,K}^2 \\
&\quad + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K |q_h|_{1,K}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K (-\nu \Delta \mathbf{v}_h + \sigma \mathbf{v}_h + \nabla q_h, (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{v}_h)_K \\
&\quad + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K (-\nu \Delta \mathbf{v}_h + \sigma \mathbf{v}_h + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{v}_h, \nabla q_h)_K \\
&\geq \|[\mathbf{v}_h]\|^2 + D^2 - XY - DE \\
&\geq \|[\mathbf{v}_h]\|^2 + D^2 - \frac{16}{58} X^2 - \frac{29}{32} Y^2 - \frac{29}{30} D^2 - \frac{15}{58} E^2,
\end{aligned}$$

weil nach der Young-Ungleichung aus Lemma 2.3.3 gilt

$$XY \leq \frac{16}{2 \cdot 29} X^2 + \frac{29}{2 \cdot 16} Y^2, \quad DE \leq \frac{29}{2 \cdot 15} D^2 + \frac{15}{2 \cdot 29} E^2.$$

Nun werden die Bestandteile einzeln betrachtet. Mit (7.10) ergibt sich

$$\begin{aligned}
E^2 &\leq 2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\tau_K \|-\nu \Delta \mathbf{v}_h + \sigma \mathbf{v}_h\|_{0,K}^2 + \tau_K \|(\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{v}_h\|_{0,K}^2) \\
&\leq 2X^2 + 4 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K \|-\nu \Delta \mathbf{v}_h\|_{0,K}^2 + 4 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K \|\sigma \mathbf{v}_h\|_{0,K}^2 \\
&\leq 2X^2 + 4 \underbrace{\left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \frac{\mu^2}{h_K^2} \nu^2 |\mathbf{v}_h|_{1,K}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \sigma^2 \|\mathbf{v}_h\|_{0,K}^2 \right)}_{\Lambda :=}
\end{aligned}$$

und durch die inverse Ungleichung analog dazu

$$\begin{aligned} Y^2 &\leq 2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \|\nabla q_h\|_{0,K}^2 + 4\Lambda \\ &= 2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \frac{\mu^2}{h_K^2} \|q_h\|_{0,K}^2 + 4\Lambda. \end{aligned} \quad (7.12)$$

An dieser Stelle wird Λ gesondert abgeschätzt. Es ergibt sich mit (7.9), (7.10) und $\beta_0 \leq 1$

$$\begin{aligned} \Lambda &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \frac{\mu^2}{h_K^2} \nu^2 |\mathbf{v}_h|_{1,K}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \sigma^2 \|\mathbf{v}_h\|_{0,K}^2 \\ &\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{40} \frac{\beta_0^2}{\Phi^2} \nu^2 |\mathbf{v}_h|_{1,K}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{4}{45} \frac{\sigma^2}{\sigma} \|\mathbf{v}_h\|_{0,K}^2 \\ &\leq \frac{1}{40} \nu |\mathbf{v}_h|_1^2 + \frac{4}{45} \sigma \|\mathbf{v}_h\|_{0,K}^2 \leq \frac{4}{45} A^2 \left(\leq \frac{8}{47} A^2 \right). \end{aligned}$$

Die Annahme $\beta_0 \leq 1$ ist immer möglich, weil bei $\beta_0 > 1$ einfach $\beta_0 = 1$ gesetzt werden kann. Die Aussage wird dadurch nicht verändert. Insgesamt gilt damit

$$\begin{aligned} B_h((\mathbf{v}_h, q_h), (\mathbf{v}_h, q_h)) &\geq A^2 + X^2 + Z^2 + D^2 - \frac{16}{58} X^2 - \frac{29}{32} Y^2 - \frac{29}{30} D^2 - \frac{15}{58} E^2 \\ &\geq A^2 + \left(1 - \frac{16}{58} - \frac{2 \cdot 15}{58}\right) X^2 + Z^2 + \frac{1}{30} D^2 - \left(\frac{29}{32} + \frac{15}{58}\right) 4\Lambda - \frac{2 \cdot 29}{32} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \frac{\mu^2}{h_K^2} \|q_h\|_{0,K}^2 \\ &\geq \frac{6}{29} A^2 + \frac{6}{29} X^2 + Z^2 + \frac{1}{30} D^2 - \frac{29}{16} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \frac{\mu^2}{h_K^2} \|q_h\|_{0,K}^2 \\ &\geq \frac{6}{29} |\mathbf{v}_h|_1^2 + \frac{1}{30} D^2 - \frac{29}{16} \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \frac{\mu^2}{h_K^2} \|q_h\|_{0,K}^2. \end{aligned}$$

(ii):

Da nur inf-sup stabile Raumpaare angenommen sind, existiert nach der BB-Bedingung (7.3) ein $\mathbf{z}_h \in \mathbf{V}_h$, so dass

$$|\mathbf{z}_h|_1 = \|q_h\|_0 = B \quad \text{und zugleich} \quad (\nabla \cdot \mathbf{z}_h, q_h) \geq \beta_0 |\mathbf{z}_h|_1 \|q_h\|_0 = \beta_0 B^2.$$

Damit gilt weiter

$$B_h((\mathbf{v}_h, q_h), (-\mathbf{z}_h, 0)) \geq \beta_0 B^2 - \sum_{i=1}^4 T_i,$$

wobei

$$\begin{aligned} T_1 &:= \nu(\nabla \mathbf{v}_h, \nabla \mathbf{z}_h) + \sigma(\mathbf{v}_h, \mathbf{z}_h) - ((\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{z}_h, \mathbf{v}_h), \\ T_2 &:= \gamma(\nabla \cdot \mathbf{v}_h, \nabla \cdot \mathbf{z}_h), \\ T_3 &:= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K (-\nu \Delta \mathbf{v}_h + \sigma \mathbf{v}_h + \nabla q_h, (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{z}_h)_K, \\ T_4 &:= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K ((\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{v}_h, (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{z}_h)_K. \end{aligned}$$

Hier ist ausgenutzt worden, dass wegen der Nullrandbedingung, partieller Integration und der Bedingung $(\nabla \cdot \mathbf{b}, \mathbf{v}_h) = 0$ für alle $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$ gilt, dass $((\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{v}_h, \mathbf{z}_h) = -((\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{z}_h, \mathbf{v}_h)$. Im

Folgenden werden die einzelnen T_i getrennt betrachtet. T_1 lässt sich mit Hilfe der Cauchy-Schwarz-Ungleichung in Lemma 2.3.2 abschätzen durch

$$\begin{aligned} |T_1| &\leq \nu |\mathbf{v}_h|_1 |\mathbf{z}_h|_1 + \sigma \|\mathbf{v}_h\|_0 \|\mathbf{z}_h\|_0 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\mathbf{b}\|_{0,\infty,K} \|\mathbf{v}_h\|_{0,K} |\mathbf{z}_h|_{1,K} \\ &\leq (\nu |\mathbf{v}_h|_1^2 + \sigma \|\mathbf{v}_h\|_0^2)^{1/2} (\nu |\mathbf{z}_h|_1^2 + \sigma C_F^2 |\mathbf{z}_h|_1^2)^{1/2} + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\mathbf{b}\|_{0,\infty,K} \|\mathbf{v}_h\|_{0,K} |\mathbf{z}_h|_{1,K} \\ &\leq \sqrt{\nu + \sigma C_F^2} AB + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\mathbf{b}\|_{0,\infty,K} \|\mathbf{v}_h\|_{0,K} |\mathbf{z}_h|_{1,K}, \end{aligned}$$

wobei noch die letzte Summe vereinfacht werden soll. Es gilt

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\mathbf{b}\|_{0,\infty,K} \|\mathbf{v}_h\|_{0,K} |\mathbf{z}_h|_{1,K} \leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{\|\mathbf{b}\|_{0,\infty,K}}{\sqrt{\sigma}} (\sqrt{\sigma} \|\mathbf{v}_h\|_{0,K}) |\mathbf{z}_h|_{1,K} \leq \|\mathbf{b}\|_{0,\infty} \frac{1}{\sqrt{\sigma}} AB$$

oder

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\mathbf{b}\|_{0,\infty,K} \|\mathbf{v}_h\|_{0,K} |\mathbf{z}_h|_{1,K} \leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{\|\mathbf{b}\|_{0,\infty,K}}{\sqrt{\nu}} (\sqrt{\nu} \|\mathbf{v}_h\|_{0,K}) |\mathbf{z}_h|_{1,K} \leq \|\mathbf{b}\|_{0,\infty} \frac{C_F}{\sqrt{\nu}} AB,$$

womit sich insgesamt schreiben lässt

$$|T_1| \leq \sqrt{\nu + \sigma C_F^2} AB + \|\mathbf{b}\|_{0,\infty} \min\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}}, \frac{C_F}{\sqrt{\nu}}\right) AB.$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} |T_2| &\leq \sqrt{\gamma} \|\nabla \cdot \mathbf{v}_h\|_0 \sqrt{\gamma} \|\nabla \cdot \mathbf{z}_h\|_0 \leq Z \sqrt{N\gamma} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} |\mathbf{z}_h|_{1,K}^2 \right)^{1/2} = \sqrt{N\gamma} ZB \\ |T_3| &\leq \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \|\mathbf{v}_h\|_{0,K}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \|(\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{z}_h\|_{0,K}^2 \right)^{1/2} \\ &\leq Y \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \|\mathbf{b}\|_{0,\infty,K}^2 |\mathbf{z}_h|_{1,K}^2 \right)^{1/2} \leq \left(\max_{K \in \mathcal{T}_h} (\|\mathbf{b}\|_{0,\infty,K} \sqrt{\delta_K}) \right) YB. \end{aligned}$$

Unter (7.12) ist bereits gezeigt worden, dass $Y^2 \leq 2 \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \frac{\mu^2}{h_K^2} \|q_h\|_{0,K}^2 + \frac{16}{45} A^2$. Damit ergibt sich ebenso $Y \leq \sqrt{2} \max_{K \in \mathcal{T}_h} (\sqrt{\delta_K} \frac{\mu}{h_K}) B + \sqrt{\frac{16}{45}} A$, weshalb mit Hilfe von (7.10) eine Nebenrechnung liefert, dass

$$\begin{aligned} \sqrt{2} \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\sqrt{\delta_K} \frac{\mu}{h_K} \right) \max_{K \in \mathcal{T}_h} (\|\mathbf{b}\|_{0,\infty,K} \sqrt{\delta_K}) &\leq \sqrt{\frac{2}{40}} \frac{\beta_0}{\Phi} \sqrt{\frac{4}{45}} \|\mathbf{b}\|_{0,\infty} \min\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}}, \frac{C_F}{\sqrt{\nu}}\right) \\ &\leq \frac{1}{30} \frac{\beta_0}{\Phi} \leq \frac{1}{30} \beta_0. \end{aligned}$$

Die Anwendung dieses Resultates ergibt

$$|T_3| \leq \sqrt{\frac{16}{45}} \max_{K \in \mathcal{T}_h} (\|\mathbf{b}\|_{0,\infty,K} \sqrt{\delta_K}) AB + \frac{1}{30} \beta_0 B^2.$$

Als letzter Summand bleibt noch T_4 zu betrachten. Hier gilt

$$\begin{aligned} |T_4| &\leq \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \|(\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{v}_h\|_{0,K}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \|(\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{z}_h\|_{0,K}^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \max_{K \in \mathcal{T}_h} (\|\mathbf{b}\|_{0,\infty,K} \sqrt{\delta_K}) XB. \end{aligned}$$

An dieser Stelle lässt sich die Summe über die T_i nochmals betrachten und liefert

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^4 T_i &\leq \sum_{i=1}^4 |T_i| \\
&\leq \left(\sqrt{\nu} + \sigma C_F^2 + \|\mathbf{b}\|_{0,\infty} \min\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}}, \frac{C_F}{\sqrt{\nu}}\right) + \sqrt{\frac{16}{45}} \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\|\mathbf{b}\|_{0,\infty,K} \sqrt{\delta_K} \right) \right) AB \\
&\quad + \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\|\mathbf{b}\|_{0,\infty,K} \sqrt{\delta_K} \right) XB + \sqrt{N\gamma} ZB + \frac{1}{30} \beta_0 B^2 \\
&\leq (A + X + Z) \Phi B + \frac{1}{30} \beta_0 B^2,
\end{aligned}$$

denn es darf mit (7.10) geschrieben werden, dass

$$\max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\|\mathbf{b}\|_{0,\infty,K} \sqrt{\delta_K} \right) \leq \sqrt{\frac{4}{45}} \|\mathbf{b}\|_{0,\infty} \min\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}}, \frac{C_F}{\sqrt{\nu}}\right) (\leq \Phi). \quad (7.13)$$

Zusammenfassend gilt durch Anwendung der Young-Ungleichung aus Lemma 2.3.3

$$\begin{aligned}
B_h((\mathbf{v}_h, q_h), (-\mathbf{z}_h, 0)) &\geq \beta_0 B^2 - (A + X + Z) \Phi B - \frac{1}{30} \beta_0 B^2 \\
&\geq \frac{29}{30} \beta_0 B^2 - \frac{\sqrt{\beta_0}}{\sqrt{\beta_0}} A \Phi B - \frac{\sqrt{\beta_0}}{\sqrt{\beta_0}} X \Phi B - \frac{\sqrt{\beta_0}}{\sqrt{\beta_0}} Z \Phi B \\
&\geq \frac{29}{30} \beta_0 B^2 - \frac{3 \cdot 1}{10} \beta_0 B^2 - \frac{5 \Phi^2}{2 \beta_0} (A^2 + X^2 + Z^2) \\
&= \frac{2}{3} \beta_0 B^2 - \frac{5 \Phi^2}{2 \beta_0} |[\mathbf{v}_h]|^2.
\end{aligned}$$

(iii):

Immernoch gilt es, ein zur Behauptung passendes Element $(\mathbf{w}_h, r_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h$ zu finden. An dieser Stelle ist es gefunden und lässt sich definieren durch $(\mathbf{w}_h, r_h) := (\mathbf{v}_h, q_h) + \lambda(-\mathbf{z}_h, 0)$. Mit Hilfe von (i) und (ii) gilt damit

$$\begin{aligned}
B_h((\mathbf{v}_h, q_h), (\mathbf{w}_h, r_h)) &= B_h((\mathbf{v}_h, q_h), (\mathbf{v}_h, q_h)) + \lambda B_h((\mathbf{v}_h, q_h), (-\mathbf{z}_h, 0)) \\
&\geq \frac{6}{29} |[\mathbf{v}_h]|^2 + \frac{1}{30} D^2 - \frac{29}{16} \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\delta_K \frac{\mu^2}{h_K^2} \right) B^2 + \lambda \left(\frac{2}{3} \beta_0 B^2 - \frac{5 \Phi^2}{2 \beta_0} |[\mathbf{v}_h]|^2 \right) \\
&\geq \left(\frac{6}{29} - \frac{5 \lambda \Phi^2}{2 \beta_0} \right) |[\mathbf{v}_h]|^2 + \frac{1}{30} D^2 + \left(\frac{2 \lambda \beta_0}{3 \alpha} - \frac{29}{16} \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{\delta_K \mu^2}{\alpha h_K^2} \right) \right) \alpha B^2.
\end{aligned}$$

Die Konstante λ ist noch frei zu wählen. Deshalb darf gefordert werden, dass gilt

$$\frac{6}{29} - \frac{5 \lambda \Phi^2}{2 \beta_0} \stackrel{!}{=} \frac{1}{30} \quad \iff \quad \lambda \beta_0 = \frac{151}{2175} \frac{\beta_0^2}{\Phi^2}. \quad (7.14)$$

Ebenso kann eine Wahl für α getroffen werden, womit gesichert ist, dass

$$\frac{2 \lambda \beta_0}{3 \alpha} - \frac{29}{16} \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\frac{\delta_K \mu^2}{\alpha h_K^2} \right) \stackrel{!}{=} \frac{1}{30} \quad \iff \quad \alpha = \frac{604}{435} \frac{\beta_0^2}{\Phi^2} - \frac{435}{8} \max_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\delta_K \frac{\mu^2}{h_K^2} \right) \geq \frac{811}{27840} \frac{\beta_0^2}{\Phi^2},$$

wobei (7.10) genutzt wurde. Es gibt ebenfalls eine Schranke nach oben durch

$$\frac{811}{27840} \frac{\beta_0^2}{\Phi^2} \leq \alpha \leq \frac{604}{435} \frac{\beta_0^2}{\Phi^2} \quad (7.15)$$

und schließlich damit

$$A_s((\mathbf{v}_h, q_h), (\mathbf{w}_h, r_h)) \geq \frac{1}{30} \|\|(\mathbf{v}_h, q_h)\|\|^2.$$

(iv):

Angelangt beim letzten Punkt muss $\|\|(\mathbf{w}_h, r_h)\|\|$ durch $\|\|(\mathbf{v}_h, q_h)\|\|$ kontrolliert werden können. Es gilt

$$\|\|(\mathbf{w}_h, r_h)\|\| \leq \|\|(\mathbf{v}_h, q_h)\|\| + \lambda \|\|(-\mathbf{z}_h, 0)\|\|,$$

wodurch ausreichend ist, $\|\|(-\mathbf{z}_h, 0)\|\|$ zu kontrollieren. Hierzu gilt über (7.13)

$$\begin{aligned} \|\|(-\mathbf{z}_h, 0)\|\|^2 &= \nu |\mathbf{z}_h|_1^2 + \sigma \|\mathbf{z}_h\|_0^2 + \gamma \|\nabla \cdot \mathbf{z}_h\|_0^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \|(\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{z}_h\|_{0,K}^2 \\ &\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\nu + \sigma C_F^2 + N\gamma + \|\mathbf{b}\|_{0,\infty,K}^2 \delta_K) |\mathbf{z}_h|_{1,K}^2 \\ &\leq \Phi^2 B^2 \leq \frac{\Phi^2}{\alpha} \|\|(\mathbf{v}_h, q_h)\|\|^2, \end{aligned}$$

wodurch sich ergibt, dass

$$\|\|(\mathbf{w}_h, r_h)\|\| \leq \left(1 + \frac{\lambda\Phi}{\sqrt{\alpha}}\right) \|\|(\mathbf{v}_h, q_h)\|\|.$$

Wenn die Wahl von λ und α aus (7.14) und (7.15) herangezogen wird, ergibt sich

$$Q := 1 + \frac{\lambda\Phi}{\sqrt{\alpha}} \leq 1 + \frac{151}{2175} \frac{\beta_0}{\Phi^2} \Phi \sqrt{\frac{27840}{811} \frac{\Phi^2}{\beta_0^2}} = 1 + \frac{1208}{2175} \sqrt{\frac{435}{811}} < \sqrt{2}$$

und damit insgesamt

$$B_h((\mathbf{v}_h, q_h), (\mathbf{w}_h, r_h)) \geq \frac{1}{30Q} \|\|(\mathbf{v}_h, q_h)\|\| \|\|(\mathbf{w}_h, r_h)\|\|.$$

Damit ist eine Inf-Sup-Konstante $\beta_S := \frac{1}{30Q} > \frac{\sqrt{2}}{60}$ wie gefordert gefunden, welche unabhängig von h und ν ist. \blacksquare

Bemerkung 7.2.3:

Nach Satz 7.2.2 kann im Gegensatz zum vorher angeführten Lemma 7.2.1 tatsächlich eine Aussage zur Kontrolle des Druckes in der L^2 -Norm getroffen werden, weil mit (7.15) eine Schranke nach oben und nach unten gefunden werden konnte. Ebenso ist die Wahl des Parameters zur PSPG Stabilisierung τ_K getrennt von der SUPG Stabilisierung behandelt worden. Es wurde lediglich $\tau_K \leq \delta_K$ genutzt.

7.2.2 Abschätzungen

An dieser Stelle soll eine Abschätzung zum Interpolationsfehler gegeben werden, wozu folgendes Lemma hilfreich ist.

Lemma 7.2.4:

Sei $\mathbf{u} \in [H^{k+1}(\Omega)]^N \cap \mathbf{V}$ und $p \in H^{l+1}(\Omega) \cap Q$. Die Interpolationen seien wie in Satz 4.4.3 bzw. Satz 4.4.2 gewählt. Dann gilt

$$\frac{B_h(\mathbf{u} - I_h(\mathbf{u}), p - J_h(p); \mathbf{v}_h, q_h)}{\|(\mathbf{v}_h, q_h)\|} \lesssim \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} M_K^u h_K^{2k} \|\mathbf{u}\|_{k+1, \omega(K)}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} M_K^p h_K^{2l} \|p\|_{l+1, K}^2 \right)^{1/2},$$

wobei

$$\begin{aligned} \widetilde{M}_K^u &= \nu + \sigma h_K^2 + N\gamma + \frac{\|\mathbf{b}\|_{0, \infty, K}^2 h_K^2}{\nu + \sigma h_K^2 + \delta_K \|\mathbf{b}\|_{0, \infty, K}^2} + \delta_K \|\mathbf{b}\|_{0, \infty, K}^2 + \frac{\delta_K \nu^2 \mu^2}{h_K^2} + \delta_K \sigma^2 h_K^2 \\ \widetilde{M}_K^p &= \delta_K + \frac{N h_K^2}{\nu + N\gamma}. \end{aligned}$$

Beweis:

Der Übersichtlichkeit halber sei im Folgenden $\mathbf{v} := \mathbf{u} - I_h(\mathbf{u})$ und $q := p - J_h(p)$. Dann gilt mit der Definition von B_h und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung, dass

$$\begin{aligned} B_h(\mathbf{v}, q; \mathbf{v}_h, q_h) &= \nu(\nabla \mathbf{v}, \nabla \mathbf{v}_h) + \sigma(\mathbf{v}, \mathbf{v}_h) + ((\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \mathbf{v}_h) + (q_h, \nabla \cdot \mathbf{v}) - (q, \nabla \cdot \mathbf{v}_h) \\ &\quad + \gamma(\nabla \cdot \mathbf{v}, \nabla \cdot \mathbf{v}_h) + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K ((\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{v}, (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{v}_h)_K + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K (\nabla q, \nabla q_h)_K \\ &\quad + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K (-\nu \Delta \mathbf{v} + \sigma \mathbf{v} + \nabla q, (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{v}_h)_K \\ &\quad + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K (-\nu \Delta \mathbf{v} + \sigma \mathbf{v} + \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{v}, \nabla q_h)_K \\ &\leq \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}, \end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &:= \left(\nu \|\mathbf{v}\|_1^2 + \sigma \|\mathbf{v}\|_0^2 + \gamma \|\nabla \cdot \mathbf{v}\|_0^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K |q|_{1, K}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \|(\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{v}\|_{0, K}^2 \right)^{1/2} \\ &\quad \times \left(\|[\mathbf{v}_h]\|^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K |q_h|_{1, K}^2 \right)^{1/2} \\ \mathbf{B} &:= |(q_h, \nabla \cdot \mathbf{v})| + |(q, \nabla \cdot \mathbf{v}_h)| + |((\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \mathbf{v}_h)| \\ \mathbf{C} &:= \left| \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K (-\nu \Delta \mathbf{v} + \sigma \mathbf{v} + \nabla q, (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{v}_h)_K \right| + \left| \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K (-\nu \Delta \mathbf{v} + \sigma \mathbf{v} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \nabla q_h)_K \right|. \end{aligned}$$

Es werden nun \mathbf{A} , \mathbf{B} , und \mathbf{C} getrennt voneinander behandelt.

Zu \mathbf{A} :

Für den ersten Faktor gilt mit den Interpolationseigenschaften

$$\begin{aligned} &\nu \|\mathbf{v}\|_1^2 + \sigma \|\mathbf{v}\|_0^2 + \gamma \|\nabla \cdot \mathbf{v}\|_0^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K |q|_{1, K}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \|(\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{v}\|_{0, K}^2 \\ &\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\nu + N\gamma + \delta_K \|\mathbf{b}\|_{0, \infty, K}^2 \right) |\mathbf{v}|_{1, K}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sigma \|\mathbf{v}\|_{0, K}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K |q|_{1, K}^2 \\ &\lesssim \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left(\nu + \sigma h_K^2 + N\gamma + \delta_K \|\mathbf{b}\|_{0, \infty, K}^2 \right) h_K^{2k} \|\mathbf{u}\|_{k+1, \omega(K)}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \underbrace{\tau_K}_{\leq \delta_K} h_K^{2l} \|p\|_{l+1, K}^2. \end{aligned}$$

Der zweite Faktor kann direkt durch $|||(\mathbf{v}_h, q_h)|||$ abgeschätzt werden.

Zu **B**:

Der erste Summand lässt sich wegen der speziellen Interpolation aus Satz 4.4.3 sehr gut vereinfachen, denn

$$|(q_h, \nabla \cdot \mathbf{v})| = 0.$$

Der zweite Summand lässt sich auf zwei verschiedene Weisen abschätzen. Beide Möglichkeiten benutzen Cauchy-Schwarz und (4.8) durch

$$\begin{aligned} |(q, \nabla \cdot \mathbf{v}_h)| &\leq \sqrt{\gamma}^{-1} \|q\|_0 \sqrt{\gamma} \|\nabla \cdot \mathbf{v}_h\|_0 \\ &\lesssim \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \gamma^{-1} h_K^{2l+2} \|p\|_{l+1, K}^2 \right)^{1/2} |||(\mathbf{v}_h, q_h)||| \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} |(q, \nabla \cdot \mathbf{v}_h)| &\leq \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} N \nu^{-1} \|q\|_{0, K}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \nu |\mathbf{v}_h|_{1, K}^2 \right)^{1/2} \\ &\lesssim \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} N \nu^{-1} h_K^{2l+2} \|p\|_{l+1, K}^2 \right)^{1/2} |||(\mathbf{v}_h, q_h)|||. \end{aligned}$$

Es werden an dieser Stelle beide Schätzungen genutzt, indem immer auf die bessere gesetzt wird. Deshalb lässt sich hier insgesamt schreiben

$$|(q, \nabla \cdot \mathbf{v}_h)| \lesssim \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{N h_K^2}{\nu + N \gamma} h_K^{2l} \|p\|_{l+1, K}^2 \right)^{1/2} |||(\mathbf{v}_h, q_h)|||.$$

Hier kam lediglich zum Einsatz, dass gilt

$$\min \left(\frac{N}{\nu}, \frac{1}{\gamma} \right) \leq \frac{2}{\frac{\nu}{N} + \gamma} \leq \frac{2N}{\nu + N\gamma}.$$

Auch bei dem dritten Summanden aus **B** finden sich mehrere Vereinfachungsmöglichkeiten. Es gilt durch Cauchy-Schwarz und die Interpolationseigenschaft (4.7)

$$\begin{aligned} |((\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \mathbf{v}_h)| &\leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\mathbf{b}\|_{0, \infty, K} |\mathbf{v}|_{1, K} \|\mathbf{v}_h\|_{0, K} \\ &\leq \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{\|\mathbf{b}\|_{0, \infty, K}^2}{\sigma} |\mathbf{v}|_{1, K}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sigma \|\mathbf{v}_h\|_{0, K}^2 \right)^{1/2} \\ &\lesssim \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{\|\mathbf{b}\|_{0, \infty, K}^2}{\sigma} h_K^{2k} \|\mathbf{u}\|_{k+1, \omega(K)}^2 \right)^{1/2} |||(\mathbf{v}_h, q_h)|||, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} |((\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \mathbf{v}_h)| &= |((\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{v}_h, \mathbf{v})| \leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\mathbf{b}\|_{0, \infty, K} |\mathbf{v}_h|_{1, K} \|\mathbf{v}\|_{0, K} \\ &\leq \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{\|\mathbf{b}\|_{0, \infty, K}^2}{\nu} \|\mathbf{v}\|_{0, K}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \nu |\mathbf{v}_h|_{1, K}^2 \right)^{1/2} \\ &\lesssim \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{\|\mathbf{b}\|_{0, \infty, K}^2}{\nu} h_K^{2k} \|\mathbf{u}\|_{k+1, \omega(K)}^2 \right)^{1/2} |||(\mathbf{v}_h, q_h)|||. \end{aligned}$$

Eine weitere Variante gibt

$$\begin{aligned}
|((\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \mathbf{v}_h)| &= |((\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{v}_h, \mathbf{v})| \leq \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|(\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{v}_h\|_{0,K} \|\mathbf{v}\|_{0,K} \\
&\leq \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{1}{\delta_K} \|\mathbf{v}\|_{0,K}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \|(\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{v}_h\|_{0,K}^2 \right)^{1/2} \\
&\lesssim \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{h_K^2}{\delta_K} h_K^{2k} \|\mathbf{u}\|_{k+1,\omega(K)}^2 \right)^{1/2} \|(\mathbf{v}_h, q_h)\|.
\end{aligned}$$

Bei den letzten beiden Versionen kam zusätzlich noch partielle Integration zum Einsatz. Wieder werden alle Abschätzungen genutzt und es ergibt sich

$$|((\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \mathbf{v}_h)| \lesssim \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \frac{\|\mathbf{b}\|_{0,\infty,K}^2 h_K^2}{\nu + \sigma h_K^2 + \delta_K \|\mathbf{b}\|_{0,\infty,K}^2} h_K^{2k} \|\mathbf{u}\|_{k+1,\omega(K)}^2 \right)^{1/2} \|(\mathbf{v}_h, q_h)\|.$$

Zu **C**:

Nach Cauchy-Schwarz, der inversen Ungleichung und den Interpolationseigenschaften (4.7), (4.8) gilt

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K (-\nu \Delta \mathbf{v} + \sigma \mathbf{v} + \nabla q, (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{v}_h)_K \right| \\
&\leq \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \|-\nu \Delta \mathbf{v} + \sigma \mathbf{v} + \nabla q\|_{0,K}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \|(\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{v}_h\|_{0,K}^2 \right)^{1/2} \\
&\lesssim \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \nu^2 \|\Delta \mathbf{v}\|_{0,K}^2 + \delta_K \sigma^2 \|\mathbf{v}\|_{0,K}^2 + \delta_K \|\nabla q\|_{0,K}^2 \right)^{1/2} \|(\mathbf{v}_h, q_h)\| \\
&\lesssim \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\frac{\delta_K \nu^2 \mu^2}{h_K^2} + \delta_K \sigma^2 h_K^2 \right] h_K^{2k} \|\mathbf{u}\|_{k+1,\omega(K)}^2 + \delta_K h_K^{2l} \|p\|_{l+1,K}^2 \right)^{1/2} \|(\mathbf{v}_h, q_h)\|.
\end{aligned}$$

Analog dazu lässt sich auch die zweite Summe in **C** abschätzen, wenn zusätzlich genutzt wird, dass $\tau_K \leq \delta_K$ nach (7.10) gilt. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K (-\nu \Delta \mathbf{v} + \sigma \mathbf{v} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \nabla q_h)_K \right| \\
&\lesssim \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \left[\frac{\delta_K \nu^2 \mu^2}{h_K^2} + \delta_K \sigma^2 h_K^2 + \delta_K \|\mathbf{b}\|_{0,\infty,K}^2 \right] h_K^{2k} \|\mathbf{u}\|_{k+1,\omega(K)}^2 \right)^{1/2} \|(\mathbf{v}_h, q_h)\|.
\end{aligned}$$

An dieser Stelle gibt **A** + **B** + **C** die Behauptung. ■

Dieses Lemma bietet die Grundlage, um eine a-priori Fehlerabschätzung für die Triplenorm zu zeigen.

Satz 7.2.5:

Sei $(\mathbf{u}, p) \in ([H^{k+1}(\Omega)]^N \cap \mathbf{V}) \times (H^{l+1}(\Omega) \cap Q)$ die Lösung von (7.2) und $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h$ die Lösung von (7.6). Mit (7.15) und (7.10) gilt dann

$$\|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h)\|^2 \lesssim \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \widetilde{M}_K^u h_K^{2k} \|\mathbf{u}\|_{k+1, \omega(K)}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \widetilde{M}_K^p h_K^{2l} \|p\|_{l+1, K}^2$$

mit \widetilde{M}_K^u und \widetilde{M}_K^p aus Satz 7.2.4.

Beweis:

Ein bei solchen Problemen üblicher Weg ist mit Hilfe der Dreiecksungleichung

$$\|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h)\| \leq \|(\mathbf{u} - I_h(\mathbf{u}), p - J_h(p))\| + \|(I_h(\mathbf{u}) - \mathbf{u}_h, J_h(p) - p_h)\|$$

zu folgern. Wegen Satz 7.2.2 existiert ein Element $(\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h$, für das gilt

$$\begin{aligned} \|(I_h(\mathbf{u}) - \mathbf{u}_h, J_h(p) - p_h)\|^2 &\lesssim \left(\frac{B_h(I_h(\mathbf{u}) - \mathbf{u}_h, J_h(p) - p_h; \mathbf{v}_h, q_h)}{\|(\mathbf{v}_h, q_h)\|} \right)^2 \\ &= \left(\frac{B_h(I_h(\mathbf{u}) - \mathbf{u}, J_h(p) - p; \mathbf{v}_h, q_h)}{\|(\mathbf{v}_h, q_h)\|} \right)^2 \\ &\lesssim \sum_{K \in \mathcal{T}_h} M_K^u h_K^{2k} \|\mathbf{u}\|_{k+1, \omega(K)}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} M_K^p h_K^{2l} \|p\|_{l+1, K}^2, \end{aligned}$$

wobei Lemma 7.2.4 mit seinen Parametern M_K^u und M_K^p zum Einsatz gekommen ist. Außerdem ist ausgenutzt worden, dass die Methode der residualen Stabilisierung nach Satz 4.5.1 ein konsistentes, verallgemeinertes Ritz-Galerkin Verfahren liefert und damit die Galerkin-Orthogonalität aus Satz 4.1.6 erfüllt.

Für den anderen Summanden sei der Übersichtlichkeit halber $\mathbf{v} := \mathbf{u} - I_h(\mathbf{u})$ sowie $q := p - J_h(p)$ gesetzt. Mit Hilfe der Interpolationseigenschaften ergibt sich

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{v}, q)\|^2 &= \nu |\mathbf{v}|_1^2 + \sigma \|\mathbf{v}\|_0^2 + \gamma \|\nabla \cdot \mathbf{v}\|_0^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \delta_K \|\nabla \cdot \mathbf{v}\|_{0, K}^2 + \alpha \|q\|_0^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K |q|_{1, K}^2 \\ &\lesssim \sum_{K \in \mathcal{T}_h} [\nu + \sigma h_K^2 + N\gamma + \delta_K \|\mathbf{b}\|_{0, \infty, K}^2] h_K^{2k} \|\mathbf{u}\|_{k+1, \omega(K)}^2 \\ &\quad + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} [\alpha h_K^2 + \tau_K] h_K^{2l} \|p\|_{l+1, K}^2. \end{aligned}$$

Mittels (7.15) und (7.9) gilt weiter

$$\alpha h_K^2 \lesssim \frac{h_K^2}{\Phi^2} \lesssim \frac{N h_K^2}{\nu + N\gamma}$$

und deshalb nach $\tau_K \leq \delta_K$

$$\|(\mathbf{u} - I_h(\mathbf{u}), p - J_h(p))\| \lesssim \sum_{K \in \mathcal{T}_h} M_K^u h_K^{2k} \|\mathbf{u}\|_{k+1, \omega(K)}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} M_K^p h_K^{2l} \|p\|_{l+1, K}^2.$$

Dies liefert insgesamt die Behauptung. ■

7.2.3 Parameterdesign

An dieser Stelle soll motiviert werden, wie die Parameter γ , δ_K und τ_K aus der Stabilisierung zu wählen sind.

Zunächst wird dazu γ aus der GradDiv-Stabilisierung näher betrachtet. Die gerade bewiesene a-priori Fehlerabschätzung legt nahe, dass gilt $\gamma \geq 0$. Andernfalls wäre keine Kontrolle über den Druckterm gewährleistet, falls $\nu \searrow 0$. Außerdem ist die Konstante Φ aus (7.9), die stark in den Beweis von Satz 7.2.2 eingeht, abhängig von γ . Es gilt $\Phi^2 \sim \nu + \sigma C_F^2 + \|\mathbf{b}\|_{0,\infty}^2 \min(\frac{C_F^2}{\nu}, \frac{1}{\sigma}) + N\gamma$. Das γ sollte am besten keinen Einfluss auf die Größe von Φ haben, weshalb es in der Größenordnung der ausbalancierten, σ -abhängigen Terme gewählt wird. Es ist

$$\sigma C_F^2 = \|\mathbf{b}\|_{0,\infty}^2 \frac{1}{\sigma} \quad \iff \quad \sigma = \frac{\|\mathbf{b}\|_{0,\infty}}{C_F}.$$

Für dieses σ gilt $\Phi^2 \sim \nu + \|\mathbf{b}\|_{0,\infty} C_F + N\gamma$, weshalb gewählt wird

$$N\gamma \sim \nu + \|\mathbf{b}\|_{0,\infty} C_F.$$

Damit folgt für Φ , dass gilt

$$\Phi^2 \sim \nu + \|\mathbf{b}\|_{0,\infty} C_F + \sigma C_F^2 + \|\mathbf{b}\|_{0,\infty}^2 \min\left(\frac{C_F^2}{\nu}, \frac{1}{\sigma}\right).$$

Der Parameter δ_K ist durch die starken Anforderungen aus Satz 7.2.2 nicht mehr sehr frei zu wählen. Aus (7.10) ergibt sich nach γ auch eine Wahl für δ_K und τ_K durch

$$\begin{aligned} 0 \leq \tau_K \leq \delta_K &\sim \frac{\min(\frac{1}{\sigma}, 1) h_K^2}{\nu + \|\mathbf{b}\|_{0,\infty} C_F + \sigma C_F^2 + \|\mathbf{b}\|_{0,\infty}^2 \min(\frac{C_F^2}{\nu}, \frac{1}{\sigma})} \\ 0 \leq \gamma &\sim \left(\nu + \|\mathbf{b}\|_{0,\infty} C_F\right) \frac{1}{N}. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Als Erweiterung zu Satz 7.2.5 ergibt sich damit der nächste Satz.

Satz 7.2.6:

Sei $(\mathbf{u}, p) \in ([H^{k+1}(\Omega)]^N \cap \mathbf{V}) \times (H^{l+1}(\Omega) \cap Q)$ die Lösung von (7.2) und $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h$ die Lösung von (7.6). Mit (7.10) und der Parameterwahl aus (7.16) gilt dann

$$\|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h)\|^2 \lesssim \sum_{K \in \mathcal{T}_h} M_K^u h_K^{2k} \|\mathbf{u}\|_{k+1, \omega(K)}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} M_K^p h_K^{2(l+1)} \|p\|_{l+1, K}^2$$

mit

$$M_K^u = \nu + \sigma h_K^2 + C_F \|\mathbf{b}\|_{0,\infty} + \frac{\|\mathbf{b}\|_{0,\infty}^2 h_K^2}{\nu + \sigma h_K^2}, \quad M_K^p = \frac{N}{\nu + \|\mathbf{b}\|_{0,\infty} C_F}.$$

Beweis:

Die Behauptung folgt aus Satz 7.2.5 nach Einsetzen des Parameterdesigns (7.16) in \widetilde{M}_K^u und \widetilde{M}_K^p . M_K^p aus der Behauptung folgt durch

$$\delta_K \lesssim \frac{h_K^2}{\nu + C_F \|\mathbf{b}\|_{0,\infty}} \lesssim \frac{N h_K^2}{\nu + C_F \|\mathbf{b}\|_{0,\infty}}.$$

Um M_K^u zu erhalten wird genutzt, dass

$$0 \leq \delta_K \|\mathbf{b}\|_{0,\infty, K}^2 \lesssim \frac{\|\mathbf{b}\|_{0,\infty}^2 h_K^2}{\nu} \quad \text{sowie auch} \quad 0 \leq \delta_K \|\mathbf{b}\|_{0,\infty, K}^2 \lesssim \frac{\|\mathbf{b}\|_{0,\infty}^2}{\sigma}$$

und damit insgesamt $\delta_K \lesssim \frac{\|\mathbf{b}\|_{0,\infty}^2 h_K^2}{\nu + \sigma h_K^2}$. Ebenso gilt

$$\frac{\delta_K \nu^2 \mu^2}{h_K^2} \lesssim \frac{\nu^2}{\nu} = \nu \quad \text{und} \quad \delta_K \sigma^2 h_K^2 \lesssim \frac{\sigma^2 h_K^2}{\sigma} = \sigma h_K^2.$$

Das Zusammenfügen der einzelnen Abschätzungen liefert die Behauptung. \blacksquare

Bemerkung 7.2.7:

- Das Parameterdesign (7.16) und die dazugehörigen Resultate für Taylor-Hood Elemente sind eine Erweiterung der Ergebnisse aus [Lube and Rapin, 2006], wo ebenfalls Betrachtungen für diese Fälle gemacht worden sind. In (7.16) kann der PSPG Parameter τ_K getrennt von dem SUPG Parameter δ_K behandelt werden. In [Gelhard et al., 2005] ist auf Basis von numerischen Resultaten die Vermutung geäußert worden, dass eine Wahl $\tau_K = 0$ optimal sein könnte, allerdings bisher unter den hier betrachteten Voraussetzungen nicht gezeigt worden. Dies ist nun möglich und wird im Rahmen der numerischen Resultate in Abschnitt 8.1 untersucht.
- Der Nachteil an der hier vorgestellten Theorie ist die Vernachlässigung der Abhängigkeiten bezüglich der Elementordnung k bei Taylor-Hood Elementen $\mathbf{Q}_k/\mathbf{Q}_{k-1}$. Dies ist untergegangen in den Interpolationsoperatoren und der inversen Ungleichung aus Abschnitt 4.4. Ausführungen dazu sind bereits in Bemerkung 4.4.6 gemacht worden.

Bemerkung 7.2.8:

Das Parameterdesign von δ_K hätte auch aus der Beschaffenheit von \widetilde{M}_K^u aus Satz 7.2.4 bzw. 7.2.5 motiviert werden können. Dies würde ein Design zur Folge haben, welches dem zu equal-order Elementen aus [Lube and Rapin, 2006] bzw. (7.20) entspricht. Allerdings erfüllt dieses Design nicht mehr die Anforderungen an die Parameter aus (7.10) und passt daher nicht zu der hier vorgestellten Theorie.

7.3 Residuale Stabilisierung für equal-order Elemente

In dem vorangegangenen Abschnitt sind lediglich Taylor-Hood Elemente betrachtet worden, doch auch bei allen anderen Raumpaaren $\mathbf{Q}_r/\mathbf{Q}_s$ ist eine residuale Stabilisierung möglich. Die ausführliche Behandlung dieser Thematik ist zu finden bei [Lube and Rapin, 2006]; hier soll ein kurzer Überblick der Resultate gegeben werden. Das diskrete Problem für ein $\mathbf{Q}_r/\mathbf{Q}_s$ Element \mathbf{V}_h/Q_h lautet

$$\text{Finde } (\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h \text{ mit: } B_h(\mathbf{u}_h, p_h; \mathbf{v}_h, q_h) = F_h(\mathbf{v}_h, q_h) \quad (7.17)$$

für alle $(\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h$, wobei

$$\begin{aligned} B_h(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}, q) &:= B(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}, q) + \underbrace{\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \gamma_K (\nabla \cdot \mathbf{u}, \nabla \cdot \mathbf{v})_K}_{\text{GradDiv}} \\ &+ \underbrace{\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \vartheta_K (-\nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \sigma \mathbf{u} + \nabla p, (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p)_K}_{\text{SUPG + PSPG}} \\ F_h(\mathbf{v}, q) &:= F(\mathbf{v}, q) + \underbrace{\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \vartheta_K (\mathbf{f}, (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p)_K}_{\text{SUPG + PSPG}} \end{aligned}$$

und γ_K, ϑ_K zu wählende Stabilisierungsparameter sind. An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, dass die Stabilisierungsparameter für die SUPG- und die PSPG-Stabilisierung gleichgesetzt worden

sind und beide durch ϑ_K dargestellt werden. Ähnlich wie in Abschnitt 7.2 ist auch hier eine Norm $\|\cdot\|$ nötig, die vom Problem und vom Gitter abhängt. Sie ist definiert durch

$$\|(\mathbf{v}, q)\|^2 := \nu \|\mathbf{v}\|_1^2 + \sigma \|\mathbf{v}\|_0^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \gamma_K \|\nabla \cdot \mathbf{v}\|_{0,K}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \vartheta_K \|(\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla q\|_{0,K}^2, \quad (7.18)$$

$$\|(\mathbf{v}, q)\|^2 := \|\mathbf{v}\|^2 + \alpha \|q\|_0^2.$$

Unter der Forderung

$$0 \lesssim \frac{h_K^2}{r^2} \leq \vartheta_K \leq \frac{1}{2} \min \left(\frac{h_K^2}{\tilde{\mu} \nu r^4}, \frac{1}{\sigma} \right) \quad \text{und} \quad 0 \leq \vartheta_K \|\mathbf{b}\|_{0,\infty,K}^2 \leq \gamma_K \quad (7.19)$$

mit der Elementordnung r des Geschwindigkeitsansatzraumes und der von r unabhängigen Konstanten $\tilde{\mu} = \mu r^{-2}$ der inversen Ungleichung aus Lemma 4.4.4 lässt sich der nächste Satz zeigen.

Satz 7.3.1:

Sei (7.19) erfüllt. Dann existiert eine echt positive Konstante β_S unabhängig von der Gitterweite h , der Viskosität ν und den Elementordnungen r und s , so dass gilt

$$\inf_{(\mathbf{0},0) \neq (\mathbf{v}_h, q_h)} \sup_{(\mathbf{0},0) \neq (\mathbf{w}_h, t_h)} \frac{B_h(\mathbf{v}_h, q_h; \mathbf{w}_h, t_h)}{\|(\mathbf{v}_h, q_h)\| \|(\mathbf{w}_h, t_h)\|} \geq \beta_S > 0$$

über dem Raum $\mathbf{V}_h \times Q_h$, wobei das Infimum und das Supremum angenommen werden.

Beweis:

Siehe [Lube and Rapin, 2006] Lemma 2.2. ■

Nach diesem Satz ist das Problem (7.17) eindeutig lösbar und es gibt eine a-priori Fehlerabschätzung, welche nun formuliert wird.

Satz 7.3.2:

Sei $(\mathbf{u}, p) \in ([H^{k+1}(\Omega)]^N \cap \mathbf{V}) \times (H^{l+1}(\Omega) \cap Q)$ die Lösung von (7.2) und $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h$ die Lösung von (7.17). Dann gilt unter den Voraussetzungen von Satz 7.3.1

$$\|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h)\|^2 \lesssim \sum_{K \in \mathcal{T}_h} M_K^u \frac{h_K^{2m^u}}{r^{2k}} \|\mathbf{u}\|_{k+1,K}^2 + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} M_K^p \frac{h_K^{2m^p}}{s^{2l}} \|p\|_{l+1,K}^2$$

mit $m^u := \min(r, k)$, $m^p := \min(s, l)$ und zwei Parametern

$$M_K^u = M_K^u(h_K, r, \vartheta_K, \gamma_K, \nu, \mathbf{b}, c) \quad \text{und} \quad M_K^p = M_K^p(h_K, s, \vartheta_K, \gamma_K, \nu, \mathbf{b}, c).$$

Beweis:

Siehe [Lube and Rapin, 2006] Korollar 3.1. ■

Werden an dieser Stelle zur Interpolation equal-order Elemente mit $r = s$ gewählt, so lassen sich die Parameter ϑ_K und γ_K aus der speziellen Beschaffenheit von M_K^u und M_K^p motivieren. Nach Abschnitt 3.1 aus [Lube and Rapin, 2006] ergibt sich für die Parameter

$$\begin{aligned} \vartheta_K &\sim \frac{h_K^2}{r \|\mathbf{b}\|_{0,\infty,K} h_K + \sigma h_K^2 + r^4 \nu} \\ \gamma_K &\sim \frac{\|\mathbf{b}\|_{0,\infty,K} h_K}{r} + \frac{\sigma h_K^2}{r^2} + r^2 \nu, \end{aligned} \quad (7.20)$$

womit sich die a-priori Fehlerabschätzung aus Satz 7.3.2 wie folgt schreiben lässt.

Satz 7.3.3:

Seien die Voraussetzungen zu Satz 7.3.2 erfüllt, dann gilt mit der Parameterwahl (7.20) zu $r = s$

$$\|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h)\|^2 \lesssim \sum_{K \in \mathcal{T}_h} M_K \frac{h_K^{2 \min(r, k)}}{r^{2(k-1)}} \left(\|\mathbf{u}\|_{k+1, K}^2 + \|p\|_{l+1, K}^2 \right)$$

mit

$$M_K = \nu r^2 + \frac{\|\mathbf{b}\|_{0, \infty, K} h_K}{r} + \frac{\sigma h_K^2}{r^2}.$$

Beweis:

Siehe [Lube and Rapin, 2006] Korollar 3.2. ■

Bemerkung 7.3.4:

Im konvektionsdominanten Fall ist dieses Ergebnis noch zu verfeinern. Hier gilt, dass die lokale Reynoldszahl aus (7.5) sehr groß ist. Damit ist die Beziehung $\nu \leq \|\mathbf{b}\|_{0, \infty} h_K$ gültig und lässt sich in M_K einarbeiten durch

$$M_K = \nu r^2 + \frac{\|\mathbf{b}\|_{0, \infty, K} h_K}{r} + \frac{\sigma h_K^2}{r^2} \leq h_K \left(\|\mathbf{b}\|_{0, \infty} r^2 + \frac{\|\mathbf{b}\|_{0, \infty}}{r} + \frac{\sigma h_K}{r^2} \right).$$

In diesem Fall ist mit Satz 7.3.3 also eine zusätzliche halbe Ordnung für h in der Tripelnorm zu erwarten.

Kapitel 8

Numerische Tests zu den Oseen Gleichungen

Bei den numerischen Tests zu den Oseen Gleichungen sollen die Ergebnisse aus Kapitel 6 zu den Stokes Gleichungen erweitert werden, indem die gleichen Werkzeuge verwendet werden. Gelöst werden die Oseen Gleichungen

$$\begin{aligned} -\nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \sigma\mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} && \text{auf } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 && \text{auf } \Omega \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0} && \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

wobei $\nu > 0$ die Viskositätskonstante, $\sigma \geq 0$ die Reaktionskonstante und \mathbf{b} der Konvektionsvektor sind. Wie bereits bei (7.5) angedeutet, sind Oszillationen in der numerischen Approximation bei sogenannten konvektionsdominanten Problemen durch Stabilisierung zu vermindern. Solche Fälle können durch Verkleinern der Viskosität hervorgerufen werden. Es sind also im Folgenden vor allem Probleme mit kleinen Viskositäten ν interessant. Die Beispiele, die untersucht werden, sind zum einen das bereits in Kapitel 6 aus [Gelhard et al., 2005] angeführte

Beispiel 8.0.1:

$$\begin{aligned} u_1(x, y) &= \sin(\pi x) \\ u_2(x, y) &= -\pi y \cos(\pi x) \\ p(x, y) &= \sin(\pi x) \cos(\pi y), \end{aligned}$$

wobei $\mathbf{b} = (u_1, u_2)^T$ gesetzt ist und $(\mathbf{u} = (u_1, u_2), p)$ die Referenzlösung darstellt. Die Reaktionskonstante σ und die Viskosität ν bleiben frei wählbar. Eine Veranschaulichung des Druckes ist bereits in Abbildung 6.3 gegeben worden, die Geschwindigkeit soll hier durch Abbildung 8.1 veranschaulicht werden. Beispiel 8.0.1 wird besonders zur Kalibrierung der Stabilisierungsparameter genutzt. Der inhomogene Dirichlet Rand, der nicht zu den Randbedingungen aus den hier angeführten Oseen Gleichungen passt, ist durch Elimination in das lineare Gleichungssystem eingearbeitet.

Zum anderen sind Rechnungen zu einem Problem mit stationären Wirbeln gemacht. Es lautet

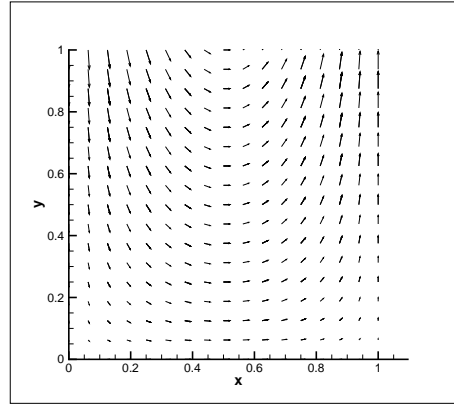


Abbildung 8.1: Beispiel 8.0.1: Vektorfeld der Referenzgeschwindigkeit

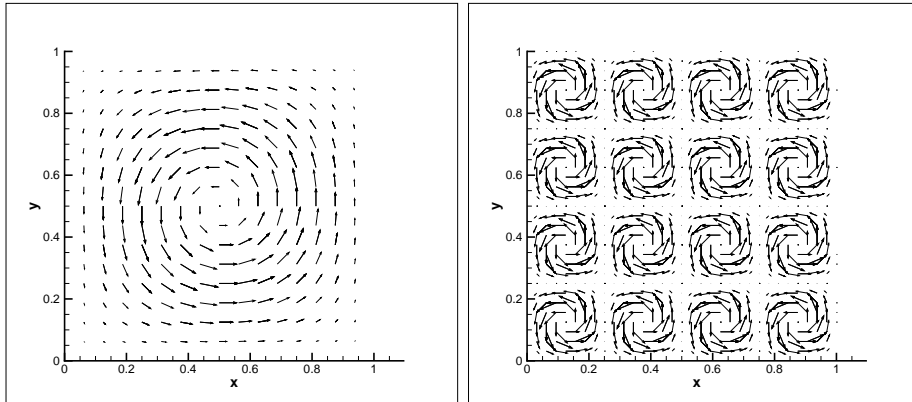
Beispiel 8.0.2:

$$\begin{aligned} u_1(x, y) &= \sin^2(\omega\pi x) \sin(2\omega\pi y) \\ u_2(x, y) &= -\sin(2\omega\pi x) \sin^2(\omega\pi y) \\ p(x, y) &= \cos(\omega\pi x) \sin(\omega\pi y) + p_0, \end{aligned}$$

mit $\mathbf{b} = (u_1, u_2)^T$, $\sigma = 0$ und der Referenzlösung $(\mathbf{u} = (u_1, u_2), p)$. Die Konstante p_0 ist nach der in dieser Arbeit gewählten Drucknormierung in (3.5) so zu bestimmen, dass gilt $\int_{\Omega} p \, d\mathbf{x} = 0$. Mit $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ ergibt sich daher

$$p_0 = \frac{\sin(\omega\pi)(\cos(\omega\pi) - 1)}{\omega^2\pi^2}.$$

Der Parameter ω aus der Referenzlösung soll frei wählbar bleiben. Er bestimmt die Anzahl der stationären Wirbel in dem Gebiet Ω , was in Abbildung 8.2 für $\omega = 1$ und $\omega = 4$ dargestellt ist.

Abbildung 8.2: Beispiel 8.0.2: Vektorfeld der Referenzgeschwindigkeit für $\omega = 1$ links und $\omega = 4$ rechts

Zunächst soll die Aufmerksamkeit auf das Beispiel 8.0.1 gerichtet sein. Die erste Untersuchung ist der Viskosität und der Reaktion gewidmet. Insbesondere ist von Interesse, wann das Problem konvektionsdominant ist, wie klein die Viskosität ν für ein solches Problem gewählt werden muss und ob die Reaktionskonstante dies beeinflusst. Eine Antwort darauf liefert Abbildung 8.3, in der

Konturdiagramme zu sehen sind. Auf der x-Achse ist ν und auf der y-Achse σ logarithmisch aufgetragen. Die Farben zeigen den jeweiligen Logarithmus des Fehlers, wobei die dunklen Bereiche für gute Fehlerwerte stehen. Gerechnet wurde das Beispiel 8.0.1 mit dem Taylor-Hood Element Q_2/Q_1 . Die oberen beiden Diagramme zeigen die Fehler der Geschwindigkeit und dort ist zu erkennen, dass das Problem für $\nu \leq 10^{-3}$ und $\sigma \leq 10^1$ in den konvektionsdominanten Fall übergegangen ist. Dies rechtfertigt die Wahl $\nu = 10^{-6}$ und $\sigma = 1$ für die folgenden Rechnungen. Die unteren Diagramme aus Abbildung 8.3 zeigen links den Druckfehler und rechts den Geschwindigkeitsanteil der Tripelnorm aus (7.7), die beide sehr unsensibel auf die Variation von ν und σ reagieren. Erst bei sehr großen σ wird der Druckfehler schlechter. Der Tripelnormfehler wird in natürlicher Weise mit steigenden Viskositäts- und Reaktionswerten schlechter, weil diese als Konstanten in die Definition der Norm eingehen. Der Fehler der Divergenz ist hier nicht angeführt, weil ν und σ kaum Einfluss gezeigt haben.

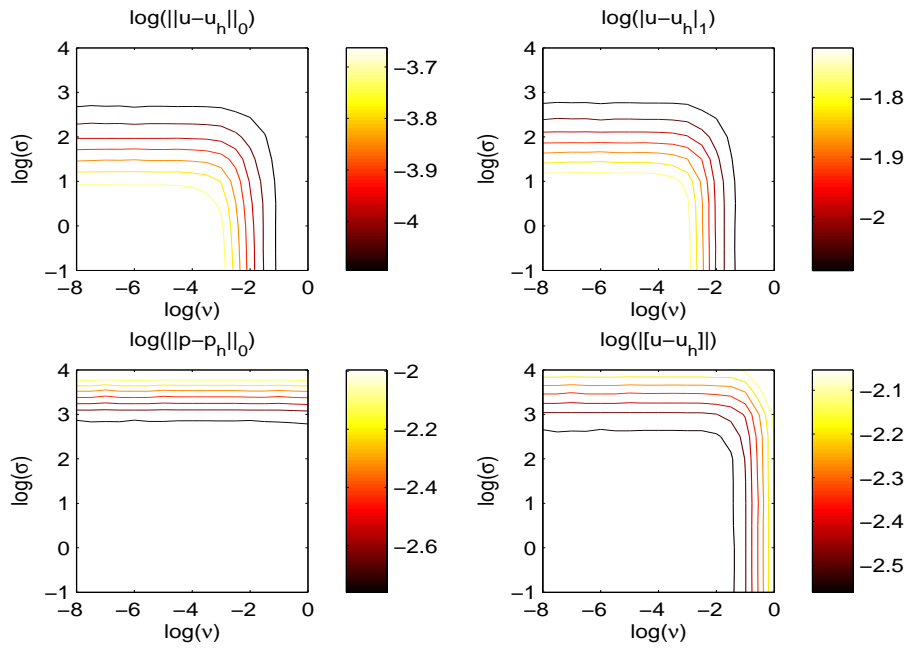


Abbildung 8.3: Beispiel 8.0.1: Abhängigkeit der Fehler von der Viskositätskonstante ν und der Reaktionskonstante σ in logarithmischer Darstellung mit Q_2/Q_1 -Element bei optimaler Stabilisierung auf einem Gitter mit $h \approx 1/16$

8.1 Taylor-Hood Elemente

Als nächstes soll die Theorie aus Kapitel 7.2 in der Praxis getestet werden. Dort ist mit (7.16) ein Parameterdesign für Taylor-Hood Elemente bei PSPG, SUPG und GradDiv Stabilisierung durch die Parameter τ_K , δ_K und γ entwickelt worden. Es lautet

$$\tau_K = \tau^* \frac{\min\left(\frac{1}{\sigma}, 1\right) h_K^2}{\nu + \|\mathbf{b}\|_{0,\infty} + \sigma + \|\mathbf{b}\|_{0,\infty}^2 \min\left(\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\sigma}\right)}, \quad \delta_K = \delta^* \frac{\min\left(\frac{1}{\sigma}, 1\right) h_K^2}{\nu + \|\mathbf{b}\|_{0,\infty} + \sigma + \|\mathbf{b}\|_{0,\infty}^2 \min\left(\frac{1}{\nu}, \frac{1}{\sigma}\right)}$$

$$0 \leq \gamma = \gamma^* \left(\nu + \|\mathbf{b}\|_{0,\infty} \right),$$

wobei $0 \leq \tau^* \leq \delta^*$ und γ^* noch zu wählende Konstanten sind, die möglichst wenig Abhängigkeit der im Design auftretenden Größen aufzeigen sollten.

In Bemerkung 7.2.7 ist die Vermutung geäußert worden, dass eine Wahl $\tau^* = 0$ optimal sein könnte, was durch Abbildung 8.4 bestätigt wird. Hier lässt sich gut erkennen, dass sowohl der Druckfehler in der L^2 -Norm als auch der Fehler des Geschwindigkeitsanteils der Tripelnorm aus (7.7) keinen Gewinn aus der Stabilisierung ziehen können. Dieser Test soll das Weglassen dieser Stabilisierung in den folgenden Rechnungen rechtfertigen.

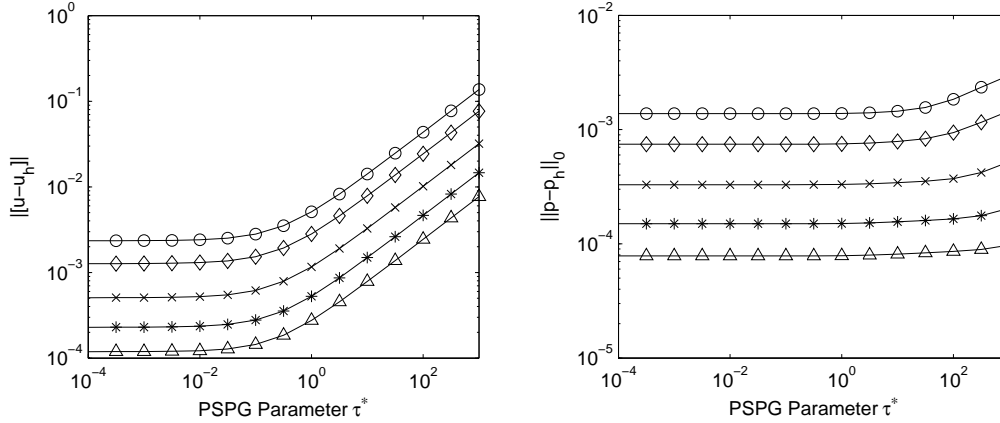


Abbildung 8.4: Beispiel 8.0.1: Einfluss der PSPG Stabilisierung durch τ^* auf die Geschwindigkeitsanteile der Tripelnorm und den Druckfehler beim Q_2/Q_1 -Element für $\nu = 10^{-6}$ und $\sigma = 1$

Es bleibt also die Abhängigkeit der relevanten Fehler von der Variation der Parameter δ^* und γ^* zu prüfen. In Abbildung 8.5 ist dies links auf einem Gitter mit $h \approx 1/16$ und rechts mit $h \approx 1/64$ zu sehen. Es lassen sich hier große Bereiche mit guten Fehlerwerten erkennen, was eine Wahl der Konstanten auf jedem einzelnen Gitter möglich macht. Allerdings ist bei dem Parameter δ^* zur SUPG Stabilisierung zu beachten, dass die Achsen links und rechts unterschiedlich gewählt werden mussten. Die Bereiche der optimalen Fehlerwerte wandern also mit einer Verfeinerung der Gitter durch Verkleinern von h . Das Parameterdesign in (7.16) ist demnach nicht optimal. Bemerkung 7.2.8 hat hierzu schon einen neuen Ansatz vorgestellt, indem ein Parameterdesign ähnlich zum equal-order Fall aus (7.20) für die SUPG Stabilisierung angewendet werden soll. Es sei

$$\delta_K = \delta^* \frac{h_K^2}{k^4 \nu + k \|\mathbf{b}\|_{0,\infty,K} h_K + \sigma h_K^2} \quad \text{und} \quad \gamma_K = \gamma^* (\nu + \|\mathbf{b}\|_{0,\infty}), \quad (8.1)$$

wobei auch die Elementordnung k mit in die Betrachtung eingeht, obwohl diese in der Theorie zu Taylor-Hood in Abschnitt 7.2 nicht berücksichtigt wurde.

Abbildung 8.6 zeigt hierzu die Abhängigkeiten der relevanten Fehler vom GradDiv Parameter γ^* bei $\delta^* = 0.1$ in der linken Grafik und vom SUPG Parameter δ^* bei $\gamma^* = 0.1778$ in der rechten Grafik auf jeweils zwei verschiedenen Gittern. Es ist zu erkennen, dass die Fehlerverläufe der zusammengehörigen Fehler sehr genau untereinander liegen. Die Parameter γ^* und δ^* können also unabhängig von h bei einem optimalen Fehler gewählt werden. Hier sollen auf Grundlage dieser Rechnungen die optimalen Parameter durch

$$\delta_{opt}^* = 0.1 \quad \text{und} \quad \gamma_{opt}^* = 0.1778 \quad (8.2)$$

gewählt sein. Das Setzen von $\gamma_{opt}^* = 0.1778$ ist hauptsächlich durch den H^1 -Seminormfehler motiviert, weil die Divergenz zwar mit zusätzlicher Stabilisierung besser wird, allerdings nur noch schwach profitieren kann. Der Druckfehler zeigt sich über den gesamten Bereich unsensibel. Im Fall der SUPG Stabilisierung zeigt das Variieren von δ^* deutlich weniger Einfluss auf die Fehlerwerte. Durch eine Verschlechterung des Divergenzfehlers kann eine Verbesserung des H^1 -Seminormfehlers

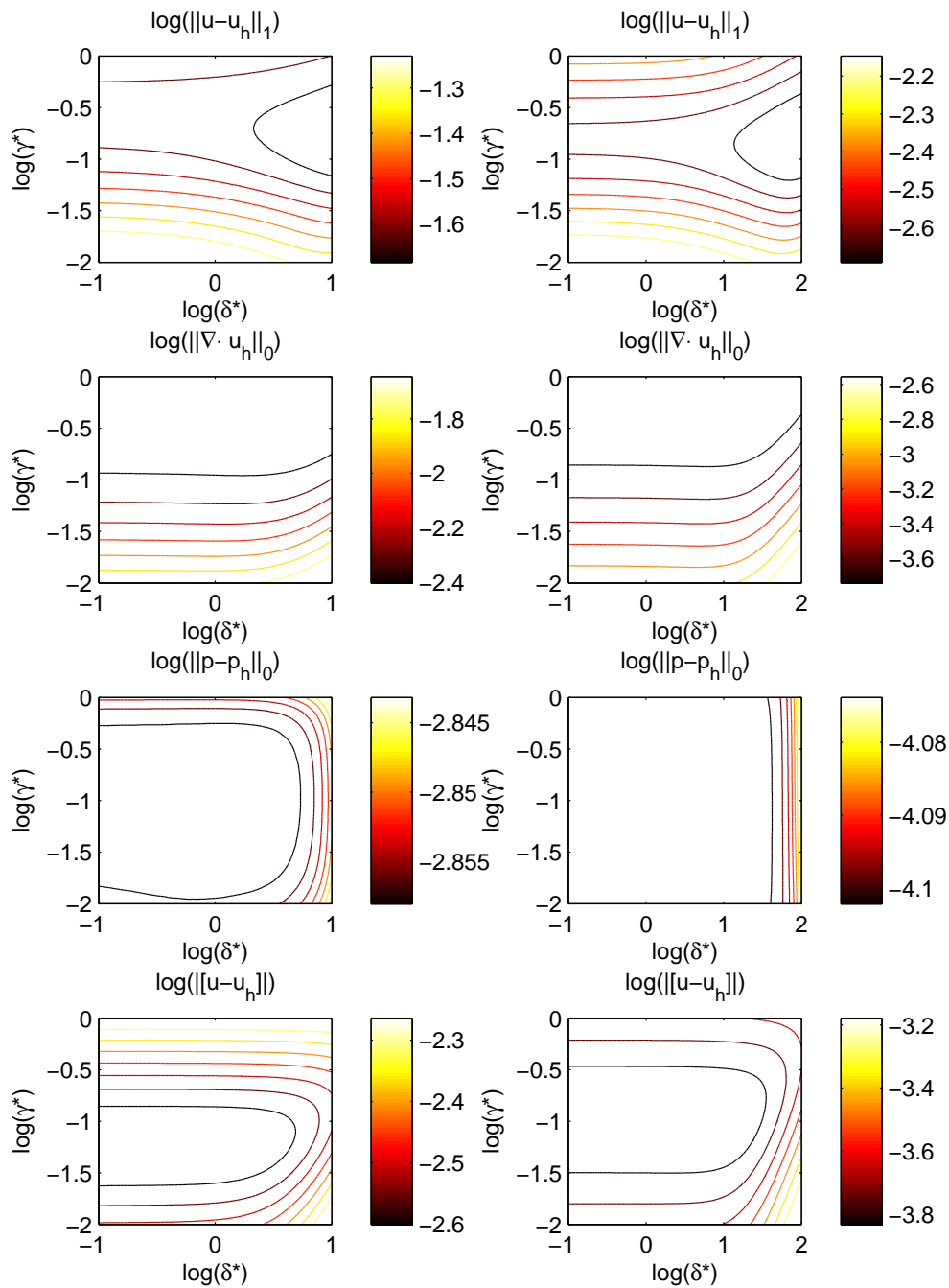


Abbildung 8.5: Beispiel 8.0.1: Abhängigkeit der relevanten Fehlergrößen von den Stabilisierungsparametern mit Q_2/Q_1 -Element für $\nu = 10^{-6}$ und $\sigma = 1$. links: Gitter mit $h \approx 1/16$, rechts: Gitter mit $h \approx 1/64$ (Achtung: Verschiedene x-Achsen!)

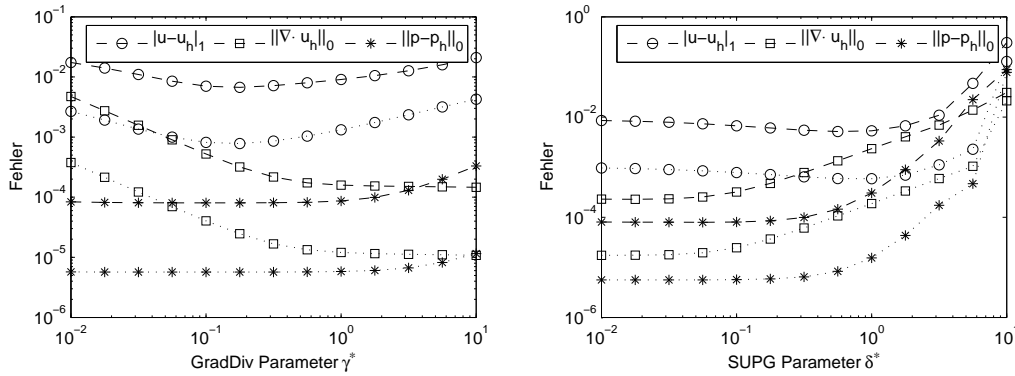


Abbildung 8.6: Beispiel 8.0.1: Abhängigkeit der relevanten Fehlergrößen von den Stabilisierungsparametern mit Q_2/Q_1 -Element für $\nu = 10^{-6}$ und $\sigma = 1$ bei dem Parameterdesign aus (8.1) (Gestrichelten Linien stehen für ein Gitter mit $h \approx 1/34$, die gepunkteten Linien $h \approx 1/138$)

erreicht werden, weshalb $\delta_{opt}^* = 0.1$ als Kompromiss gesetzt ist. Diese Wahl eignet sich auch für Elemente höherer Ordnung, was für das Q_4/Q_3 -Element durch Abbildung 8.7 begründet sein soll. Diese Diagramme legen die Vermutung nahe, dass die Parameterwahl auch unabhängig von der Elementordnung getroffen werden kann. Es sei allerdings angemerkt, dass ein Faktor k aus der Ordnung in einer solchen Darstellung schwer zu erkennen ist und deshalb eine solche Folgerung mit Vorsicht zu gebrauchen ist. Ebenso sei an dieser Stelle nochmals darauf hingewiesen, dass das Parameterdesign (8.1) die Voraussetzung (7.10) zur Lösbarkeit des Problems nicht erfüllt. Allerdings zeigt diese Wahl hier ein optimales Verhalten und ist auch mit Bemerkung 7.2.8 aus der Theorie zu motivieren. Dies soll die weitere Verwendung der Parameterwahl in dieser Arbeit rechtfertigen.

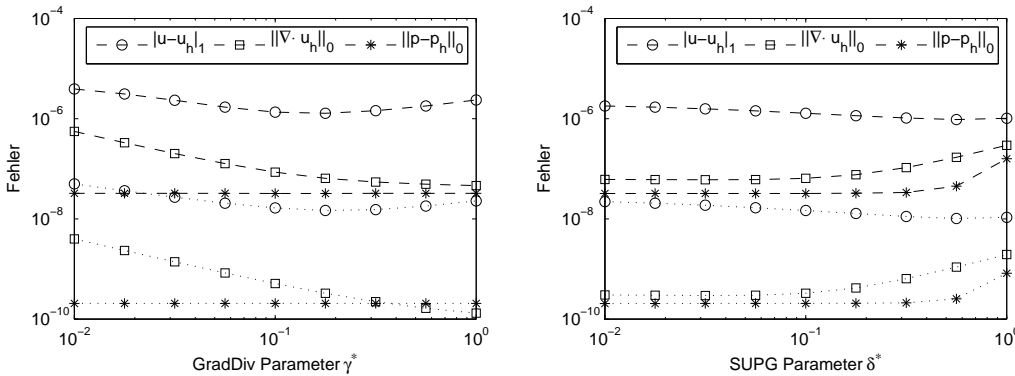


Abbildung 8.7: Beispiel 8.0.1: Abhängigkeit der relevanten Fehlergrößen von den Stabilisierungsparametern mit Q_4/Q_3 -Element für $\nu = 10^{-6}$ und $\sigma = 1$ bei dem Parameterdesign aus (8.1) (Gestrichelten Linien stehen für ein Gitter mit $h \approx 1/34$, die gepunkteten Linien $h \approx 1/138$)

Mit diesen Parametern ist die Abbildung 8.8 erstellt worden. Sie zeigt das Konvergenzverhalten der relevanten Fehler in h . In Abschnitt 7.2 ist hierzu eine Ordnung von k in der Tripelnorm aus (7.7) vorausgesagt worden, falls ein Q_k/Q_{k-1} -Element genutzt wird. Die H^1 -Seminorm der Geschwindigkeit erfüllt diese Ordnung zwar nicht, wird aber dafür mit $\sqrt{\nu}$ gewichtet. So kann sie die Tripelnorm im konvektionsdominanten Fall nicht dominieren und verschlechtert die Ordnung nicht, was in Tabelle 8.3 nachzuprüfen ist. Falls h klein genug ist, erreicht auch die Seminorm eine

Ordnung von k , was an den Stokes Gleichungen in Kapitel 6 numerisch gesehen werden kann. Die anderen relevanten Fehler erfüllen die aus der Theorie vorausgesagte Ordnung der Tripelnorm, die L^2 -Norm der Geschwindigkeit ist sogar besser.

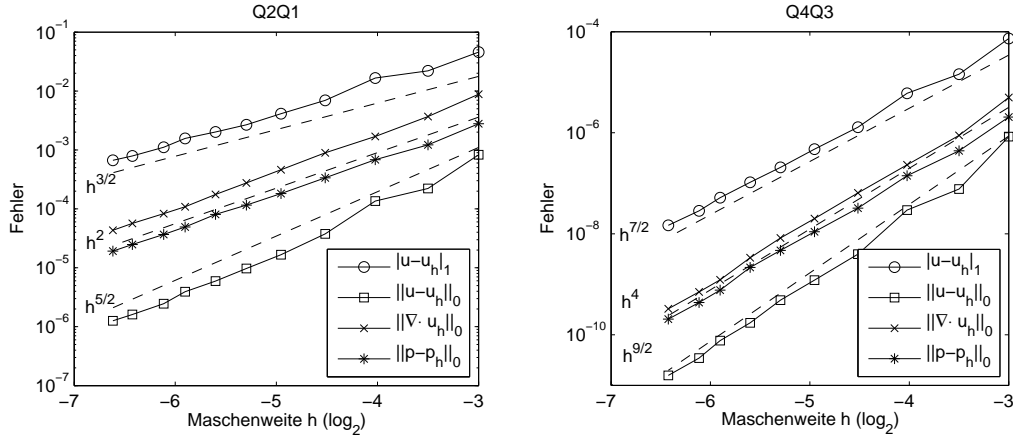


Abbildung 8.8: Beispiel 8.0.1: Konvergenzverhalten der relevanten Fehlergrößen in h bei Taylor-Hood Elementen für $\nu = 10^{-6}$ und $\sigma = 1$

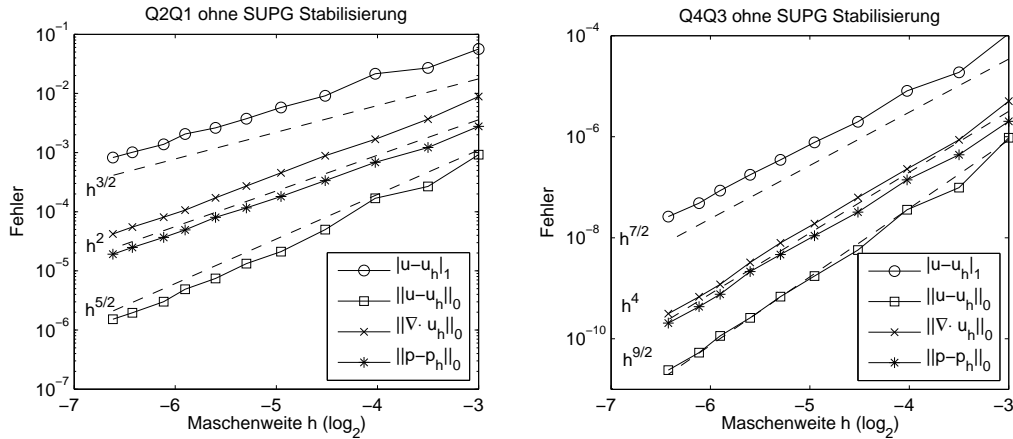


Abbildung 8.9: Beispiel 8.0.1: Konvergenzverhalten der relevanten Fehlergrößen in h bei Taylor-Hood Elementen für $\nu = 10^{-6}$ und $\sigma = 1$ ohne SUPG Stabilisierung bei $\gamma^* = \gamma_{opt}^*$

Schon vorher in den Abbildungen 8.5 und 8.6 konnte gesehen werden, dass sich für kleine SUPG Parameter δ^* die Fehler kaum verändern und trotzdem gute Werte erreicht werden. Daher liegt die Frage nahe, wieviel die SUPG Stabilisierung in diesem Fall bringt. Abbildung 8.8 ist deshalb ohne diese Stabilisierung bei gleichem GradDiv Parameter γ^* erstellt worden. Das Resultat ist nur schwer von den SUPG stabilisierten Rechnungen zu unterscheiden, die Fehler zeigen nur minimale Verschlechterungen. Da der Aufwand für eine SUPG Stabilisierung groß ist, scheint die GradDiv Stabilisierung allein eine gute Wahl bei Taylor-Hood Elementen zu sein, auch wenn dies von der Theorie in Abschnitt 7.2 nicht abgedeckt werden kann. Resultate zu weiteren untersuchten Taylor-Hood Elementen ohne SUPG Stabilisierung sind in der zu einem späteren Zeitpunkt folgenden Tabelle 8.3 zusammengefasst. Die entsprechenden Werte mit der vollen Stabilisierung unterscheiden sich kaum von den dort angeführten.

Abschließend zu diesem Beispiel soll untersucht werden, ob die Fehlerwerte durch die hier behandelten Stabilisierungen verbessert werden können. Auskunft darüber gibt Tabelle 8.1 zum

τ^*	δ^*	γ^*	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ _0$	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ _1$	$\ \nabla \cdot \mathbf{u}_h\ _0$	$\ p - p_h\ _0$	$\ [\mathbf{u} - \mathbf{u}_h]\ $
0	0	0	$1.33 \cdot 10^{-3}$	$4.33 \cdot 10^{-1}$	$3.61 \cdot 10^{-1}$	$7.26 \cdot 10^{-4}$	$1.40 \cdot 10^{-3}$
0.01	0.1	0.1778	$2.89 \cdot 10^{-5}$	$6.70 \cdot 10^{-3}$	$3.18 \cdot 10^{-4}$	$8.03 \cdot 10^{-5}$	$3.63 \cdot 10^{-4}$
0	0.1	0.1778	$2.89 \cdot 10^{-5}$	$6.70 \cdot 10^{-3}$	$3.18 \cdot 10^{-4}$	$8.03 \cdot 10^{-5}$	$2.90 \cdot 10^{-4}$
0	0	0.1778	$3.69 \cdot 10^{-5}$	$8.93 \cdot 10^{-3}$	$2.34 \cdot 10^{-4}$	$8.07 \cdot 10^{-5}$	$1.79 \cdot 10^{-4}$
0	0.1	0	$7.61 \cdot 10^{-4}$	$1.70 \cdot 10^{-1}$	$1.64 \cdot 10^{-1}$	$5.06 \cdot 10^{-4}$	$4.03 \cdot 10^{-3}$

Tabelle 8.1: Beispiel 8.0.1: Fehlerwerte zu verschiedenen Stabilisierungen bei dem Q_2/Q_1 -Element mit $\nu = 10^{-6}$ und $\sigma = 1$ auf einem Gitter mit $h \approx 1/34$. (Parameter τ^* für PSPG, δ^* für SUPG und γ^* für GradDiv)

Q_2/Q_1 -Element bei Rechnungen auf einem Gitter mit $h \approx 1/34$. Die erste Zeile zeigt mit dem unstabilierten Fall die schlechtesten Fehler. Die zweite und dritte Zeile unterscheiden sich durch die zusätzliche PSPG Stabilisierung, liefern aber gleiche Ergebnisse. Als nächstes ist die GradDiv Stabilisierung allein zur Anwendung gekommen, was kaum Verschlechterung der Werte bewirkt. Dies steht im Gegensatz zum Fall der SUPG Stabilisierung als einziger Anwendung in der darauf folgenden Zeile.

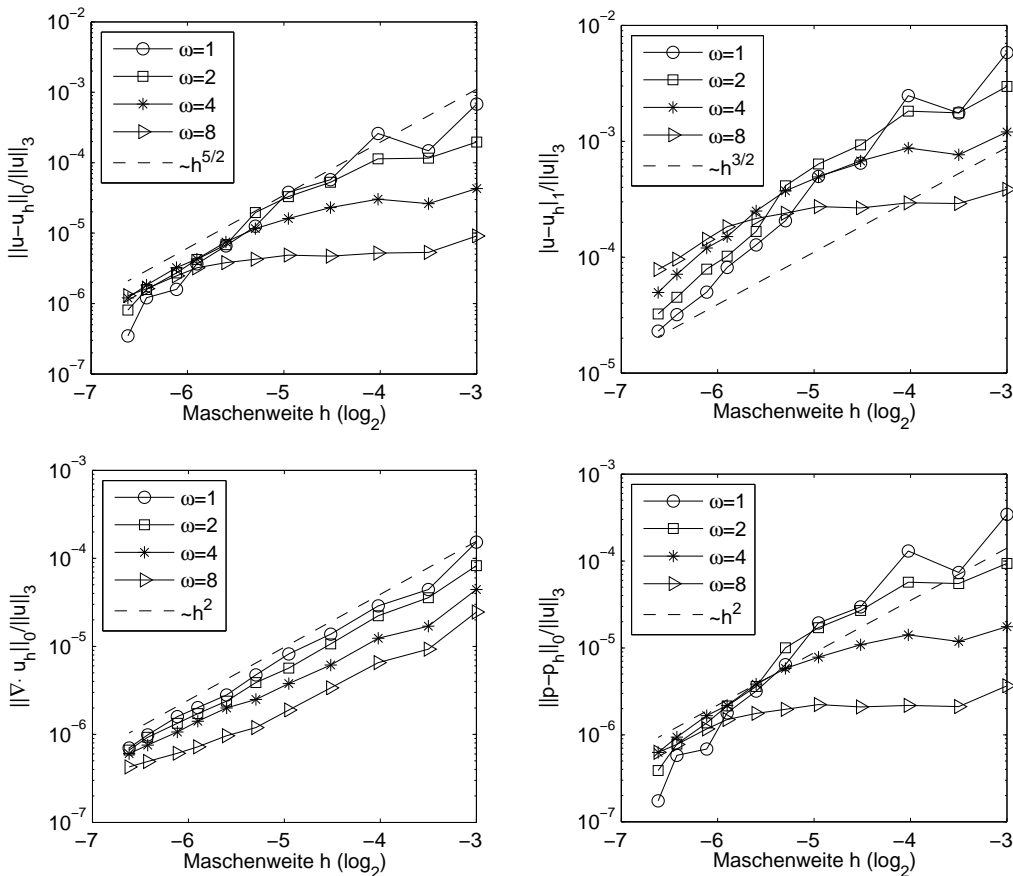


Abbildung 8.10: Beispiel 8.0.2: Konvergenzverhalten der relevanten Fehlergrößen in h bei dem Q_2/Q_1 -Element für $\nu = 10^{-6}$ und $\sigma = 0$ mit verschiedenen ω (Fehler mit H^3 -Norm der Referenzlösung normiert)

Mit diesem Wissen soll das Beispiel 8.0.2 untersucht werden. Hier gibt es einen Parameter ω in der Referenzlösung, der die Schwierigkeit des Problems beeinflussen kann. Um erkennen zu können,

wie die Fehler tatsächlich durch ω im Konvergenzverhalten verändert werden, ist eine Normierung der Fehler sinnvoll. Da durch Vergrößern des Parameters die Anzahl der Wirbel in Ω erhöht wird, sind die Gradienten und damit die H^1 -Seminorm der Geschwindigkeit größer. Fehlerplots zu verschiedenen ω lägen sehr weit auseinander und wären schwer miteinander zu vergleichen. Als Normierungsfaktor wird in dieser Arbeit die H^{k+1} -Norm der Referenzgeschwindigkeit $\|\mathbf{u}\|_{k+1}$ für ein Element Q_k/Q_{k-1} benutzt, weil diese nach der Theorie in Satz 7.2.6 die Fehler gewichtet. Die Berechnung erfolgt über die Seminormen mit Hinzunahme der Bemerkung 2.1.24 durch

$$|\mathbf{u}|_j = \sqrt{\sum_{i=0}^j \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{\partial^j}{\partial x^i \partial y^{j-i}} u_1(x, y) \right)^2 + \left(\frac{\partial^j}{\partial x^i \partial y^{j-i}} u_2(x, y) \right)^2 dx dy} = \sqrt{\frac{1}{8} 4^j (j+3) \pi^j \omega^j} \quad (8.3)$$

und setzt sich dann über Satz 2.1.21 zur vollen H^{k+1} -Norm zusammen, wobei der Fall $j = 0$ der L^2 -Norm entspricht.

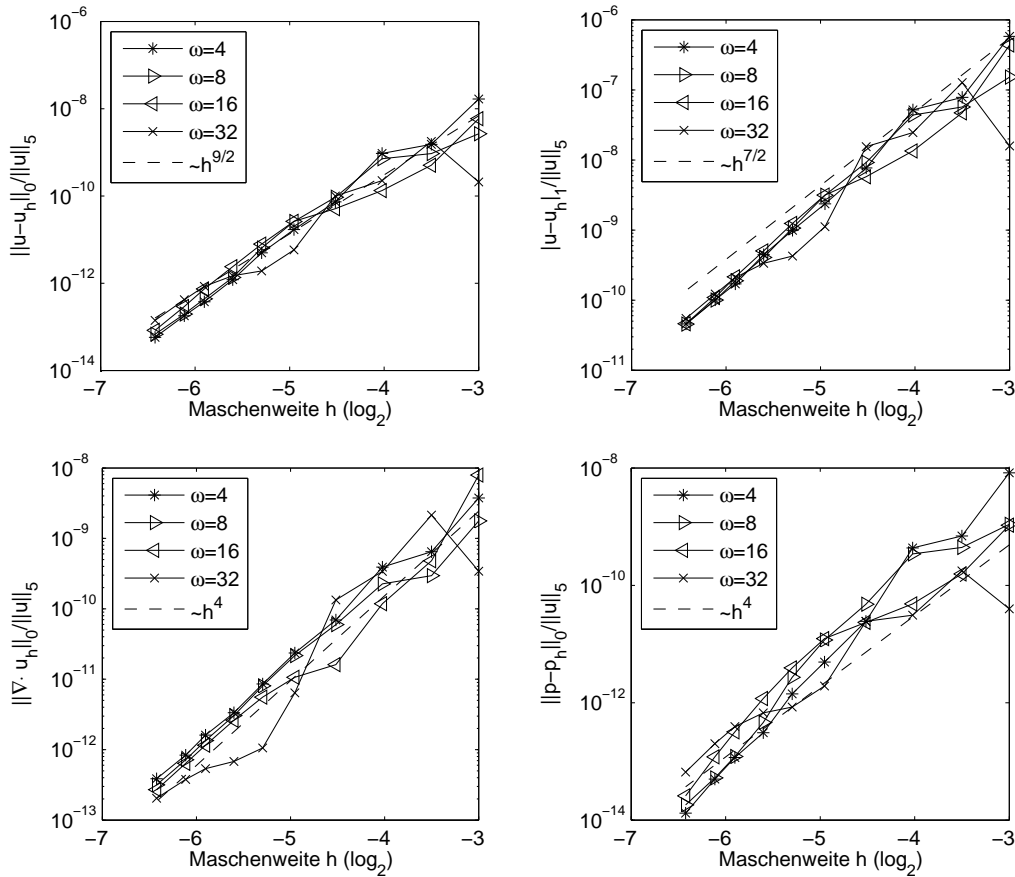


Abbildung 8.11: Beispiel 8.0.2: Konvergenzverhalten der relevanten Fehlergrößen in h bei dem Q_4/Q_3 -Element für $\nu = 10^{-6}$ und $\sigma = 0$ mit verschiedenen ω (Fehler mit H^5 -Norm der Referenzlösung normiert)

Abbildung 8.10 zeigt das Konvergenzverhalten verschiedener Fehler in Abhängigkeit des Parameters ω bei dem Q_2/Q_1 -Element, wobei nur die GradDiv Stabilisierung mit der zuvor motivierten optimalen Wahl $\gamma_{opt}^* = 0.1778$ benutzt wurde. Es ist zu erkennen, dass bei größeren ω die erhoffte Konvergenzordnung erst bei feineren Gittern erreicht wird. Für $\omega = 16$ kann hier keine Konvergenz mehr festgestellt werden, weshalb dieser Fall nicht mit aufgenommen worden ist. Die gestrichelten

Referenzlinien entsprechen den Ordnungen, die nach den Tests zu Beispiel 8.0.1 erwartet werden. Es zeigt sich, dass die jeweiligen Fehler diese Ordnung erreichen und teilweise sogar besser sind. Der H^1 -Seminormfehler beispielsweise zeigt in dieser Darstellung über die feinsten gerechneten Gitter sogar eine Ordnung von 2 für $\omega \leq 4$, auch wenn dies nicht durch die Theorie in Abschnitt 7.2 gestützt werden kann.

Die Abbildung 8.11 enthält das Konvergenzverhalten der relevanten Fehler bei dem Q_4/Q_3 -Element zu verschiedenen Werten von ω . Hier ist der erste angeführte Wert $\omega = 4$ im Gegensatz zu Abbildung 8.10, bei der mit $\omega = 1$ begonnen wurde. Da diese Fehlerlinien übereinanderliegen, sind sie weggelassen worden. Es ist zu erkennen, dass die nach Beispiel 8.0.1 vermuteten Konvergenzordnungen erreicht werden und für größere ω immer feinere Gitter für die Ordnung nötig sind. Dieses Verhalten passt zu den Betrachtungen zum Q_2/Q_1 -Element.

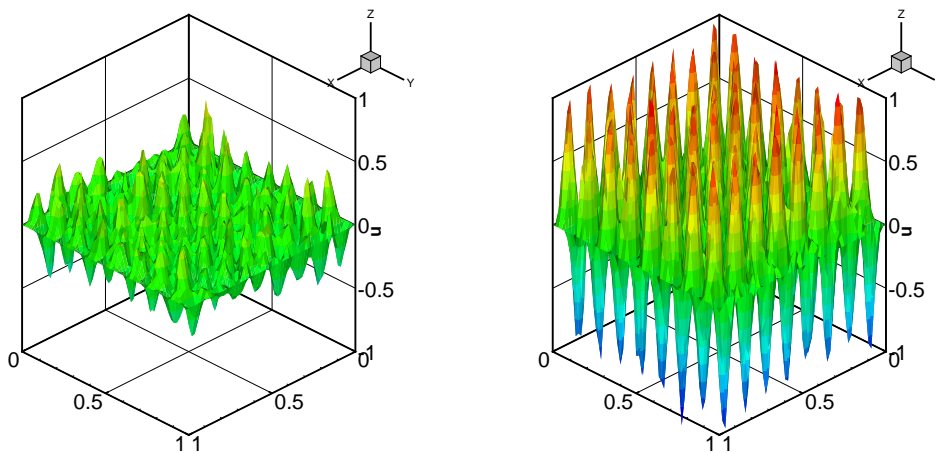


Abbildung 8.12: Beispiel 8.0.2: Berechnete u_1 -Komponente für links $\gamma^* = 1.778 \cdot 10^{-1}$ und rechts $\gamma^* = 3.162 \cdot 10^{-3}$ bei $\nu = 10^{-6}$, $\sigma = 0$ und $\omega = 8$

Auch bei Beispiel 8.0.2 kann also mit den Parametern von Beispiel 8.0.1 gearbeitet werden. Es stellt sich allerdings die Frage, ob diese Wahl auch hier optimal ist. Dazu sei wieder das Q_2/Q_1 -Element betrachtet, welches für $\omega = 8$ in der Darstellung aus Abbildung 8.10 kein asymptotisches Verhalten zeigen kann. Die Abbildung 8.12 zeigt dazu auf der linken Seite die berechnete Lösung auf einem Gitter mit $h \approx 1/34$, welche mit dem optimalen Stabilisierungsparameter zum ersten Beispiel gerechnet wurde. Es zeigt sich, dass die Wirbel nicht wiedergegeben werden können; die Stabilisierung 'verschmiert' die feine Struktur der Lösung, indem dem Problem künstliche Diffusion zugefügt wird. Auf der rechten Seite ist die Rechnung mit dem für diesen Fall optimalen Wert $\gamma^* = 3.162 \cdot 10^{-3}$ wiederholt worden und das Ergebnis ist deutlich besser. Die berechnete Lösung ist gut mit der Referenzlösung vergleichbar. Bei feinen Strukturen ist die glättende Wirkung der Stabilisierung also mit Vorsicht zu gebrauchen.

8.2 Equal-order Elemente

An dieser Stelle soll untersucht werden, wie sich die equal-order Elemente im konvektionsdominanten Fall verhalten. Dazu ist zur Kalibrierung wieder Beispiel 8.0.1 angeführt, wobei zunächst sichergestellt wird, ob das in Abschnitt 7.3 entwickelte Parameterdesign aus (7.20) eine gute Wahl ist. Hier sind die Stabilisierungsparameter für die SUPG und die PSPG Stabilisierung gleichgesetzt worden und durch ϑ_K repräsentiert. Zusätzlich kommt eine GradDiv Stabilisierung durch γ_K wie

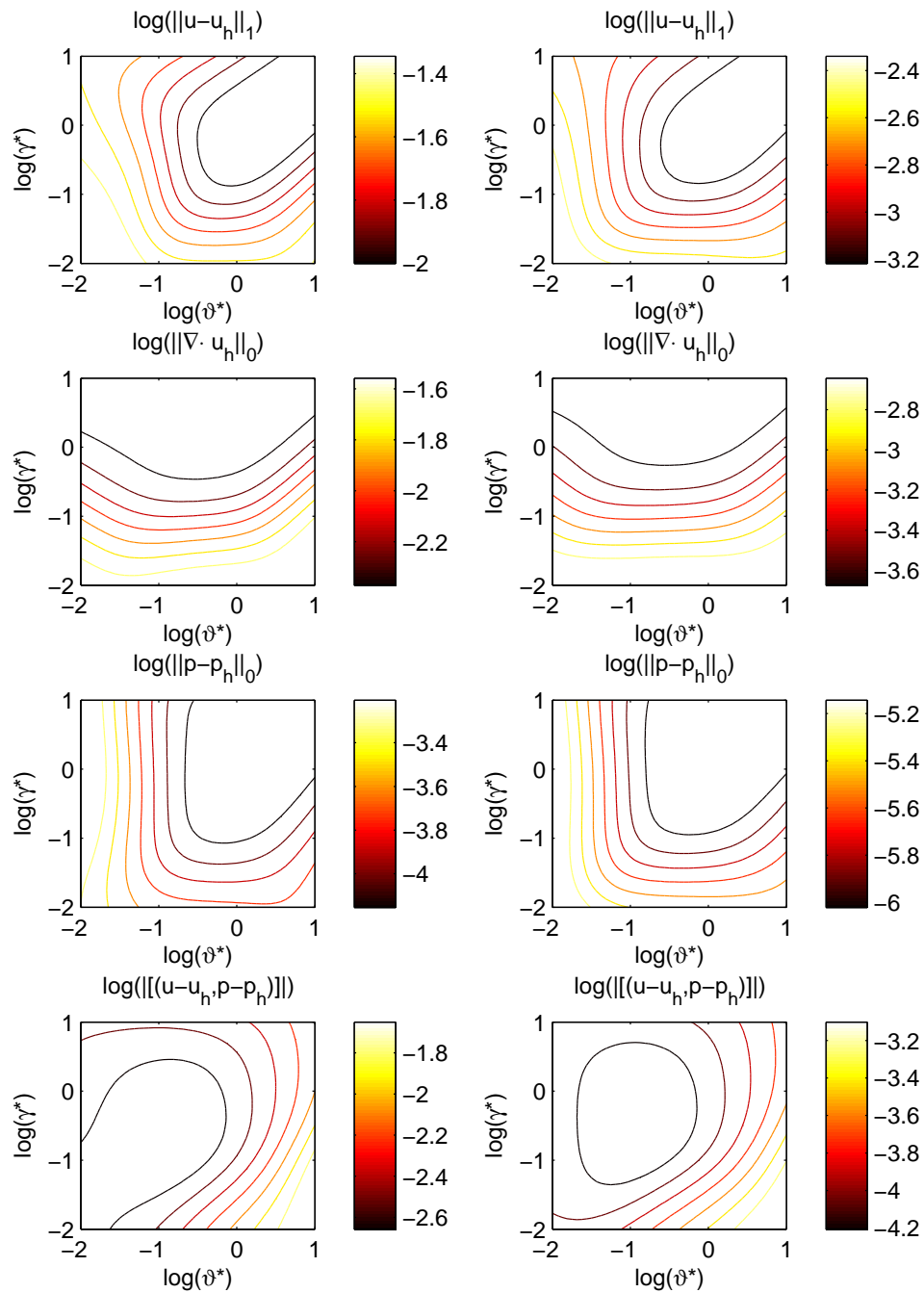


Abbildung 8.13: Beispiel 8.0.1: Abhängigkeit der relevanten Fehlergrößen von den Stabilisierungsparametern mit Q_2/Q_2 -Element für $\nu = 10^{-6}$ und $\sigma = 1$. links: Gitter mit $h \approx 1/16$, rechts: Gitter mit $h \approx 1/64$

zuvor zum Einsatz. Das Parameterdesign schreibt sich mit

$$\vartheta_K = \vartheta^* \frac{h_K^2}{\sigma h_K^2 + k \|\mathbf{b}\|_{0,\infty,K} h_K + k^4 \nu} \quad \text{und} \quad \gamma_K = \gamma^* \left(\frac{\|\mathbf{b}\|_{0,\infty,K} h_K}{k} + \frac{\sigma h_K^2}{k^2} + k^2 \nu \right),$$

wobei analog zum letzten Abschnitt über ϑ^* und γ^* variiert werden soll.

Abbildung 8.13 lässt erkennen, wie sich das Parameterdesign für das Q_2/Q_2 -Element verhält. Es sind links Rechnungen auf einem groben Gitter und rechts Rechnungen auf einem feinen Gitter bei gleichen Achsen zur Variation der Stabilisierungsparameter gezeigt. Zu erkennen ist, dass sich das Verhalten auf unterschiedlichen Gitter kaum unterscheidet. Das Design ist also von h unabhängig und es darf eine Wahl für die Parameter getroffen werden. Hier soll diese Wahl

$$\gamma_{opt}^* = 1 \quad \text{und} \quad \vartheta_{opt}^* = 1 \tag{8.4}$$

sein, weil sie in allen relevanten Fehlergrößen einen guten Fehlerwert verspricht. Die Ausnahme bildet der Tripelnormanteil ohne den L^2 -Druckfehler aus (7.18) ganz unten in Abbildung 8.13. Hier allerdings ist vor allem der Fehler aus den Stabilisierungen dominant und sollte deshalb bei der Parameterwahl möglichst wenig Einfluss haben.

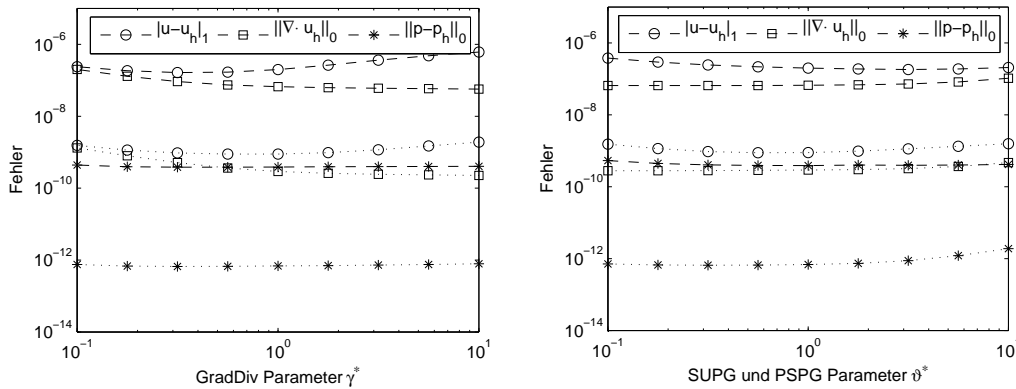


Abbildung 8.14: Beispiel 8.0.1: Abhängigkeit der relevanten Fehlergrößen von den Stabilisierungsparametern mit Q_4/Q_4 -Element für $\nu = 10^{-6}$ und $\sigma = 1$ bei dem Parameterdesign aus (7.20). Die gestrichelten Linien entsprechen Rechnungen auf einem Gitter mit $h \approx 1/34$, die gepunkteten Linien $h \approx 1/138$

Das Verhalten anderer equal-order Elemente Q_k/Q_k ist ebenfalls untersucht worden und es zeigen sich kaum Veränderungen zum Einfluss der Stabilisierungen auf die Fehler bezüglich der optimalen Parameterwahl. Abbildung 8.14 zeigt dazu das Q_4/Q_4 -Element und die Abhängigkeiten der Fehler auf Variation der Stabilisierungsparameter γ^* mit $\vartheta^* = 1$ und ϑ^* mit $\gamma^* = 1$. Es ist erkennbar, dass Veränderungen der Parameter in diesem Bereich wenig Einfluss auf die Fehler haben und die Wahl vom Q_2/Q_2 -Element im optimalen Bereich liegt. Die Folgerung, dass die Parameterwahl hier optimal bezüglich der Elementordnung ist, kann auf Grundlage dieser Untersuchung allerdings nicht sicher gemacht werden. Die Fehlerverläufe bei Parametervariation sind zu unsensibel, um eine Aussage treffen zu können.

Für Abbildung 8.15 sind Rechnungen bei den gerade motivierten optimalen Stabilisierungsparametern gemacht worden. Zu erkennen ist das Konvergenzverhalten der relevanten Fehlergrößen in h bei verschiedenen equal-order Elementen. Dies ist in guter Übereinstimmung zu den vorausgesagten Ordnungen aus Satz 7.3.3. Alle aufgezeigten Fehler sind mit unterschiedlichen Gewichtungen in der Tripelnorm aus 7.18 enthalten. Aus dieser Aussage allein konnte nichts über die einzelnen Fehlerordnungen ausgesagt werden, hier genügen aber alle Fehler dieser Ordnung. Der L^2 -Druckfehler

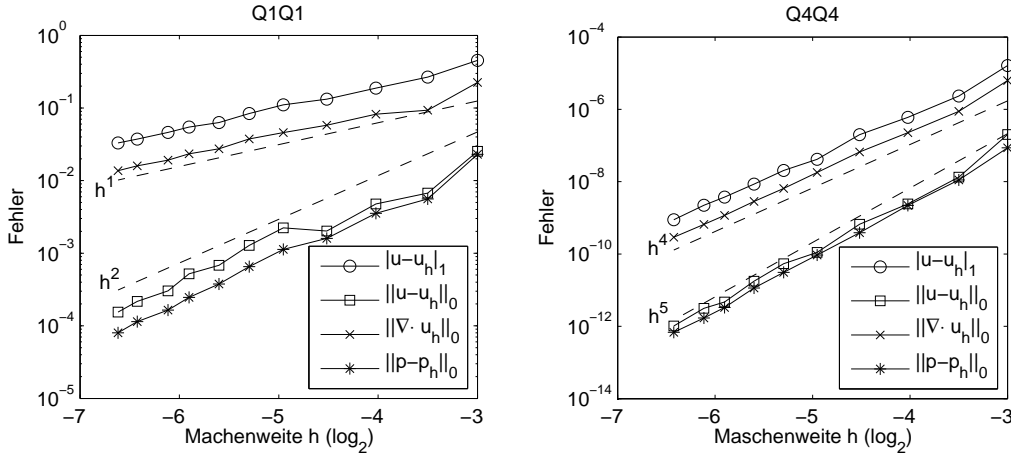


Abbildung 8.15: Beispiel 8.0.1: Konvergenzverhalten der relevanten Fehlergrößen in h bei equal-order Elementen für $\nu = 10^{-6}$ und $\sigma = 1$

und der L^2 -Geschwindigkeitsfehler sind sogar besser. Es soll an dieser Stelle ebenfalls angemerkt sein, dass dem angeführten Q_1/Q_1 -Element aus Abbildung 8.15 zwar nach Bemerkung 4.5.2 eine spezielle Rolle in der theoretischen Betrachtung zufällt, es allerdings trotzdem in den Ordnungen zu den anderen equal-order Elementen passt. Die Resultate zu den ebenfalls untersuchten Elementen Q_2/Q_2 und Q_3/Q_3 sind in der noch folgenden Tabelle 8.3 zusammengefasst.

τ^*	δ^*	γ^*	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ _0$	$ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h _1$	$\ \nabla \cdot \mathbf{u}_h\ $	$\ p - p_h\ _0$	$\ [\mathbf{u} - \mathbf{u}_h]\ $
0	0	0	$5.11 \cdot 10^{-1}$	$7.88 \cdot 10^{+1}$	$3.21 \cdot 10^{+1}$	$9.53 \cdot 10^{+3}$	$5.17 \cdot 10^{-1}$
1	1	1	$1.43 \cdot 10^{-5}$	$1.08 \cdot 10^{-3}$	$2.56 \cdot 10^{-4}$	$9.16 \cdot 10^{-6}$	$1.16 \cdot 10^{-4}$
0	1	1	$1.64 \cdot 10^{+0}$	$2.19 \cdot 10^{+2}$	$9.60 \cdot 10^{+1}$	$4.23 \cdot 10^{+2}$	$2.59 \cdot 10^{+1}$
1	0	1	$6.07 \cdot 10^{-5}$	$2.30 \cdot 10^{-2}$	$5.77 \cdot 10^{-4}$	$2.15 \cdot 10^{-5}$	$1.46 \cdot 10^{-4}$
1	1	0	$2.45 \cdot 10^{-5}$	$2.40 \cdot 10^{-2}$	$2.39 \cdot 10^{-2}$	$9.75 \cdot 10^{-6}$	$5.08 \cdot 10^{-3}$

Tabelle 8.2: Beispiel 8.0.1: Fehlerwerte zu verschiedenen Stabilisierungen bei dem Q_2/Q_2 -Element mit $\nu = 10^{-6}$ und $\sigma = 1$ auf einem Gitter mit $h \approx 1/34$. (Parameter τ^* für PSPG, δ^* für SUPG und γ^* für GradDiv)

Die Tabelle 8.2 soll abschließend zur Behandlung von Beispiel 8.0.1 im Vergleich zu Tabelle 8.1 zeigen, wie groß die Verbesserung der Fehlerwerte durch die einzelnen Stabilisierungen im equal-order Fall sind. Der PSPG Parameter und der SUPG Parameter sind für diese Rechnungen im Gegensatz zur Theorie in Abschnitt 7.3 getrennt voneinander untersucht und mit τ^* bzw. δ^* bezeichnet worden. Es zeigt sich, dass jede Stabilisierung zumindest einen Fehler deutlich verbessern kann. Durch die Verletzung der BB-Bedingung bei den equal-order Elementen fällt dies besonders bei der Druckstabilisierung auf. Allerdings liefert SUPG bessere H^1 -Normwerte der Geschwindigkeit und GradDiv bessere Divergenzfehlerwerte. Der Einfluss ist größer als in den vorherigen Tests zu den Taylor-Hood Elementen in Abschnitt 8.1.

An dieser Stelle sollen die gerade motivierten, optimalen Parameter auf das Beispiel 8.0.2 angewendet werden. Es sei nochmals darauf hingewiesen, dass nach den in Abschnitt 8.1 vorgestellten Resultaten diese Parameter nicht für alle ω optimal sein müssen, allerdings kann dieser Einfluss hier nicht erschöpfend betrachtet werden. Es interessiert hier der Einfluss der Wirbelanzahl im Gebiet Ω auf das Konvergenzverhalten der Fehler, was durch die Zahl ω aus der Referenzlösung gesteuert wird. Ebenso wie in Abschnitt 8.1 findet eine Normierung der Fehler mit der H^{k+1} -Norm der Lösung statt, um die Diagramme übersichtlicher zu machen. Die Berechnung ist mit (8.3) nachzuvollziehen. Die Abbildung 8.16 zeigt für das Q_2/Q_2 -Element, dass die jeweiligen Fehler

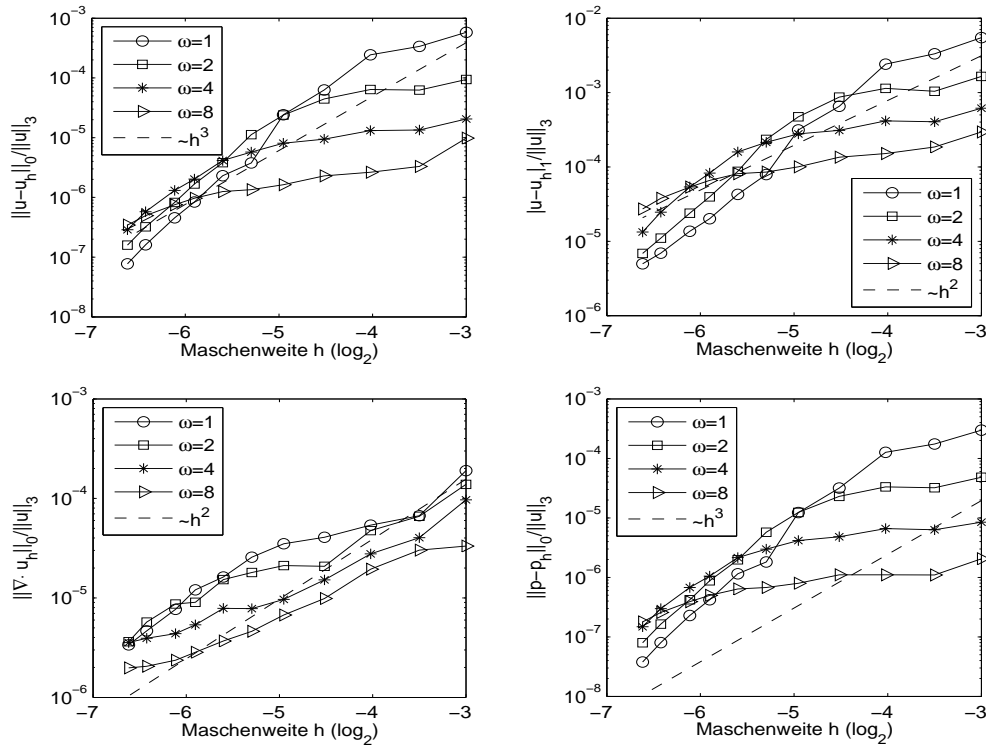


Abbildung 8.16: Beispiel 8.0.2: Konvergenzverhalten der relevanten Fehlergrößen in h bei dem Q_2/Q_2 -Element für $\nu = 10^{-6}$ und $\sigma = 0$ mit verschiedenen ω (Fehler mit H^3 -Norm der Referenzlösung normiert)

ihren asymptotischen Bereich für größere ω erst auf feinen Gittern erreichen. Dieses Verhalten ist auch in den Tests zu den Taylor-Hood Elementen beobachtet worden. Bei $\omega = 8$ lässt sich auf den verwendeten Gittern keine Aussage zur Asymptotik der Fehler machen, was ebenfalls zu den vorherigen Ergebnissen aus Abbildung 8.10 passt.

Auch die Rechnungen, die in Abbildung 8.17 zum Q_4/Q_4 -Element dargestellt sind, lassen sich gut mit denen aus 8.11 zum Q_4/Q_3 -Element vergleichen. Die nach den Tests zu Beispiel 8.0.1 erwarteten Ordnungen werden auch für große Werte von ω ab einem ausreichend feinen Gitter erreicht. Bei größeren Gittern kann keine Aussage zu der Verbesserung der Fehler bei Verfeinerung gemacht werden. Die Fehlerkurven zu $\omega = 1$ und $\omega = 2$ sind auch in dieser Abbildung der Übersichtlichkeit halber weggelassen worden. Insgesamt lässt sich aber sagen, dass eine Erhöhung der Elementordnung dazu beiträgt, dass ein asymptotisches Verhalten der Fehler schon auf größeren Gittern zu beobachten ist. Bei dem Q_2/Q_2 -Element ist bei $\omega = 8$ noch keine Fehlerordnung zu erkennen, wohl aber bei dem Q_4/Q_4 -Element. Dieses Verhalten entspricht den Erwartungen an die Methode.

8.3 Vergleich der Taylor-Hood Elemente mit den equal-order Elementen

In den Abschnitten 8.1 und 8.2 sind numerische Resultate zu den Taylor-Hood Elementen und den equal-order Elementen aufgezeigt worden, die im Folgenden einem Vergleich unterzogen werden.

In Tabelle 8.3 sind die Rechnungen zu Beispiel 8.0.1 aus den Abbildungen 8.9 und 8.15 zusammengefasst und um weitere ergänzt worden. Sie enthält die Ordnungen der relevanten Fehler zu

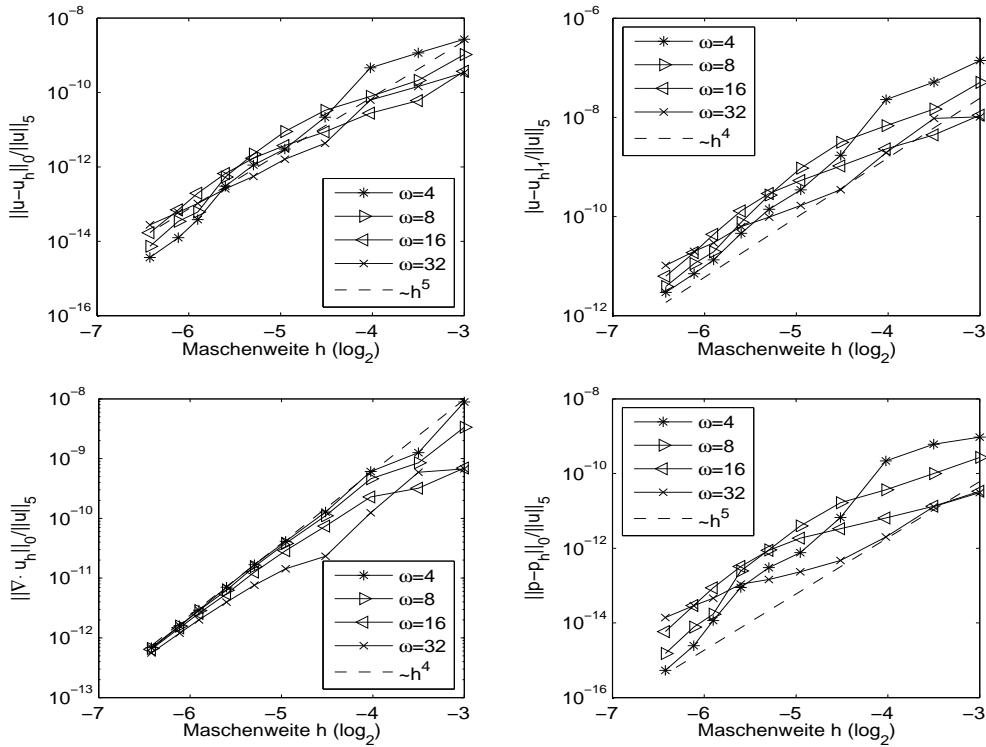


Abbildung 8.17: Beispiel 8.0.2: Konvergenzverhalten der relevanten Fehlergrößen in h bei dem Q_4/Q_4 -Element für $\nu = 10^{-6}$ und $\sigma = 0$ mit verschiedenen ω (Fehler mit H^5 -Norm der Referenzlösung normiert)

	$\ u - u_h\ _0$	$\ u - u_h\ _1$	$\ \nabla \cdot u_h\ $	$\ p - p_h\ _0$	$[(u - u_h, p - p_h)]$ bzw. $\ u - u_h\ $
Q_1/Q_1	2.3002	1.0387	1.0593	2.2778	1.5508
Q_2/Q_1	2.5491	1.6877	2.1192	1.9683	2.1222
Q_2/Q_2	2.9669	2.0072	2.0932	3.0299	2.4954
Q_3/Q_2	3.3602	2.3902	3.0134	2.9627	3.0149
Q_3/Q_3	4.0263	3.0535	3.0935	4.0145	3.4813
Q_4/Q_3	4.3510	3.4374	4.0237	3.8549	4.0300
Q_4/Q_4	4.9184	4.0202	4.1181	4.9148	4.4676

Tabelle 8.3: Beispiel 8.0.1: Ordnungen in h bei verschiedenen Elementen im konvektionsdominanten Fall bei $\nu = 10^{-6}$ und $\sigma = 1$.

verschiedenen Elementen. Die letzte Spalte zeigt hier für Taylor-Hood Elemente die Fehler des Geschwindigkeitsanteils der Tripelnorm aus (7.7). Im Fall der equal-order Elemente ist zusätzlich der Fehler zu den Druckgradienten enthalten, weshalb eine Abhängigkeit von $p - p_h$ nach (7.18) notiert wurde. In der Theorie aus Kapitel 7 sind Aussagen zur Konvergenzordnung der jeweiligen vollen Tripelnorm gezeigt worden, welche sich aus den Fehlern der beiden letzten Spalten mit einem unbekanntem Gewichtungsfaktor für den Druckfehler zusammensetzen lässt. Es ist abzulesen, dass die durch die Theorie vorausgesagten Ordnungen von allen Elementen erreicht werden. Im equal-order Fall ist sogar die vermutete, zusätzliche halbe Ordnung zu erkennen, auf die in Bemerkung 7.3.4 hingewiesen wurde. Über die anderen Ordnungen ist aus der Theorie keine Aussage zu machen. Die Tabelle 8.3 lässt vermuten, dass die equal-order Elemente in der H^1 -Semi- und in der L^2 -Norm der Geschwindigkeit eine leicht bessere Ordnung liefern als eine Approximation mittels Taylor-Hood Elemente. Bei dem L^2 -Druckfehler ist dies sogar deutlicher ausgeprägt, wogegen der

Divergenzfehler vergleichbare Ergebnisse liefert.

	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ _0$	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ _1$	$\ \nabla \cdot \mathbf{u}_h\ $	$\ p - p_h\ _0$	$\ [(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h)]\ $ bzw. $\ [\mathbf{u} - \mathbf{u}_h]\ $
Q_1/Q_1	2.1421	1.2761	1.2089	1.6802	1.3125
Q_2/Q_1	3.0286	2.0209	2.0960	2.0375	2.0210
Q_2/Q_2	3.0327	2.0204	2.0993	2.2683	2.0205
Q_3/Q_2	4.0936	3.0867	3.0537	3.0004	3.0868
Q_3/Q_3	4.1412	3.1076	3.1237	3.6846	3.1077
Q_4/Q_3	5.0848	4.0923	4.2070	4.1090	4.0924
Q_4/Q_4	5.0772	4.0911	4.2137	4.4103	4.0911

Tabelle 8.4: Beispiel 8.0.1: Ordnungen in h bei verschiedenen Elementen im diffusionsdominanten Fall der Stokes Gleichungen aus Kapitel 6 bei $\nu = 1$, $\sigma = 0$ und $\mathbf{b} = \mathbf{0}$.

Die Tabelle 8.4 fasst Rechnungen aus Kapitel 6 zu den Stokes Gleichungen bei den betrachteten Elementen zusammen. Hierzu lässt sich sagen, dass der Unterschied zwischen der Taylor-Hood und der equal-order Approximation deutlich geringer ausfällt als im konvektionsdominanten Fall. Nur der Druckfehler zeigt eine leicht verbesserte Ordnung. Die Stokes Gleichungen modellieren ein diffusionsdominantes Problem, weil die Reynoldszahl aus (7.5) verschwindet und die Viskosität ν groß ist, was auch in Abschnitt 1.1 erläutert wird. Die Betrachtung der Tabellen 8.3 und 8.4 legt eine differenzierte Behandlung dieser beiden Fälle nahe, wie schon in der Theorie aus Kapitel 5 und 7 dargelegt.

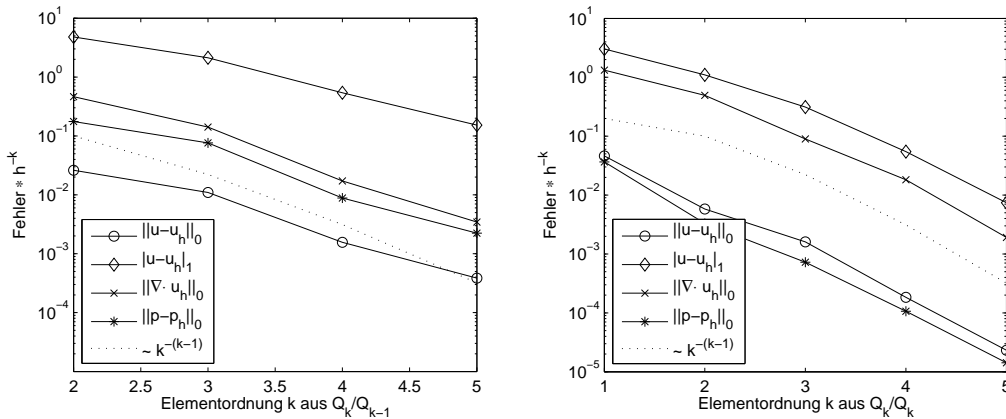


Abbildung 8.18: Beispiel 8.0.1: Abhängigkeit der relevanten Fehlergrößen bei herausgeteilter h -Ordnung von der Elementordnung bei Taylor-Hood und equal-order Approximationen für ein Gitter mit $h \approx 1/34$ bei $\nu = 10^{-6}$ und $\sigma = 1$

Abschließend zu diesem Abschnitt soll in Anlehnung an Abschnitt 6.3 die Verbesserung der Fehlerwerte durch Erhöhung der Elementordnung untersucht werden. Dieses ist durch die Abbildung 8.18 veranschaulicht und zeigt für den konvektionsdominanten Fall auf der linken Seite die Taylor-Hood und auf der rechten Seite die equal-order Approximation bei Beispiel 8.0.1. Geplottet sind die relevanten Fehler bei herausgeteilter h -Ordnung, wie in der Grafik angedeutet. Die Referenzlinie entspricht dem aus Satz 7.3.3 erwarteten Verhalten für equal-order Elemente. Bei Taylor-Hood Elementen ist eine solche Aussage in der Theorie nicht gezeigt worden, wurde aber dennoch in das Diagramm aufgenommen. Es zeigt sich, dass das Fehlerverhalten auf der rechten Seite der Referenzlinie gut entspricht. Auf der linken Seite ist dies aus diesen Rechnungen nicht ersichtlich, allerdings, wie bereits erwähnt, auch nicht aus der Theorie gestützt.

Kapitel 9

Die inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen

In diesem Kapitel sollen die erarbeiteten Ergebnisse auf die in Kapitel 1 zur Motivation dieser Arbeit angeführten inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen angewendet und eine Möglichkeit der numerischen Approximation vorgestellt werden. Die Vorgehensweise führt auf die Lösung endlich vieler Probleme vom Typ der Oseen Gleichungen. Im Anschluss daran sind numerische Tests zum stationären Navier-Stokes Problem angeführt.

9.1 Der instationäre Fall

Die instationären, inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} && \text{auf } (0, T) \times \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 && \text{auf } (0, T) \times \Omega \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0} && \text{auf } (0, T) \times \partial \Omega \\ \mathbf{u}(x, 0) &= \mathbf{u}^0(x) && \text{auf } \Omega, \end{aligned} \tag{9.1}$$

wobei die Funktion $\mathbf{u}^0 \in [H_0^1(\Omega)]^N$ mit $\nabla \cdot \mathbf{u}^0 = 0$ die Anfangsbedingung darstellt. Das Gebiet $(0, T) \times \Omega$ ist für $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ mit $N \in \{2, 3\}$ als Raumzeitzyylinder aufzufassen, weshalb die Geschwindigkeit und der Druck zeitabhängig angenommen werden. Die in der Realität auftretenden Probleme sind meist instationäre für den Fall $N = 3$. Die Lösbarkeit dieser Gleichungen ist im allgemeinen Fall noch nicht geklärt und zählt nach dem 'Clay Mathematics Institute' zu den wichtigsten, ungelösten, mathematischen Problemen, wobei eine Übersicht zur speziellen Problematik der Navier-Stokes Gleichungen in [Fefferman, 2000] nachzulesen ist. In den folgenden Betrachtungen wird also vereinfachend die eindeutige Lösbarkeit von (9.1) angenommen.

Für eine numerische Betrachtung von Problemen dieser Art ist eine Zeitdiskretisierung nötig. Sei also $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = T$ eine Zerlegung des Zeitintervalls $[0, T]$ und sei die Zeitschrittweite definiert als $\Delta t_i := t_{i+1} - t_i$ für $i = 0, \dots, m - 1$. An dieser Stelle wird ein Theta-Schema angewendet mittels

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{i+\theta} &:= \theta \mathbf{u}(t_{i+1}) + (1 - \theta) \mathbf{u}(t_i) \\ t_{i+\theta} &:= \theta t_{i+1} + (1 - \theta) t_i, \end{aligned}$$

wobei die Ortsabhängigkeit der Übersichtlichkeit halber unterdrückt wird. Dies wird auch in den folgenden Überlegungen der Fall sein. Damit lässt sich für eine numerische Behandlung der Zeitableitung näherungsweise schreiben, dass gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t_{i+1}) - \mathbf{u}(t_i) &= \int_{t_i}^{t_{i+1}} \nu \Delta \mathbf{u}(t) - (\mathbf{u}(t) \cdot \nabla) \mathbf{u}(t) - \nabla p(t) + \mathbf{f}(t) dt \\ &\approx \Delta t_i (\nu \Delta \mathbf{u}^{i+\theta} - (\mathbf{u}^{i+\theta} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{i+\theta} - \nabla p(t_{i+1}) + \mathbf{f}(t_{i+\theta})) \\ \nabla \cdot \mathbf{u}(t_{i+1}) &= 0. \end{aligned} \quad (9.2)$$

Für den Druck ist an dieser Stelle keine Linearkombination nötig. Die theoretischen Betrachtungen laufen über die Variationsformulierung auf dem Raum der divergenzfreien Funktionen $H_{0,div}^1(\Omega) := \{v \in H_0^1(\Omega) \mid \nabla \cdot v = 0\}$ und lassen so den Druck unbetrachtet, um ihn danach als Lagrange-Multiplikator zum Zeitpunkt t_{i+1} zusammen mit der Divergenzbedingung wieder einzubinden. Der Vorteil dieser Vorgehensweise ist, dass kein Startdruck $p(t_0)$ gewählt werden muss. Wenn durch $\theta \mathbf{u}(t_{i+1}) = \mathbf{u}^{i+\theta} - (1-\theta)\mathbf{u}(t_i)$ in (9.2) $\mathbf{u}(t_{i+1})$ eliminiert wird, so kann das Problem

$$\begin{aligned} -\nu \Delta \mathbf{u}^{i+\theta} + (\mathbf{u}^{i+\theta} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{i+\theta} + \frac{1}{\theta \Delta t_i} \mathbf{u}^{i+\theta} + \nabla p(t_{i+1}) &= \mathbf{f}(t_{i+\theta}) + \frac{1}{\theta \Delta t_i} \mathbf{u}(t_i) && \text{auf } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^{i+\theta} &= (1-\theta) \nabla \cdot \mathbf{u}(t_i) = 0 && \text{auf } \Omega \\ \mathbf{u}^{i+\theta} &= \mathbf{0} && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

betrachtet werden, um die verschiedenen Zeitschritte der Lösung nach Rücksubstitution von $\theta \mathbf{u}(t_{i+1}) = \mathbf{u}^{i+\theta} - (1-\theta)\mathbf{u}(t_i)$ mit Hilfe von stationären, nichtlinearen Aufgaben zu erhalten. Eine Übersicht zu Zeitdiskretisierungsverfahren ist bei [Quarteroni and Valli, 1997] in Abschnitt 13.4 und [Gresho et al., 1989] zu finden. Nähere Auskünfte zu den Vorteilen dieser Methode gibt [Bixler, 1989] für den Spezialfall $\theta = \frac{1}{2}$.

9.2 Picard Iteration als Linearisierungsverfahren

So wie in Abschnitt 9.1 die instationären auf die stationären Navier-Stokes Gleichungen mit Reaktionsterm zurückgeführt wurden, sollen hier die nichtlinearen auf lineare Probleme vom Typ der Oseen Gleichungen zurückgeführt werden. Eine Übersicht zu solchen Linearisierungsstrategien ist zu finden bei [Codina, 1993] Abschnitt 1.4. Das zu betrachtende Problem lautet mit einer nach den vorherigen Überlegungen angepassten rechten Seite \mathbf{f} und einer Reaktionskonstante $\sigma = \frac{1}{\theta \Delta t_i}$ in einer Variationsformulierung wie in Abschnitt 3.1

$$\text{Finde } (\mathbf{u}, p) \in \mathbf{V} \times Q \text{ mit: } \begin{aligned} \nu(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) + ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v}) + \sigma(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - (\nabla \cdot \mathbf{v}, p) &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \\ (\nabla \cdot \mathbf{u}, q) &= 0 \end{aligned} \quad (9.3)$$

für alle $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ und alle $q \in Q$. Der Ansatz der Picard Iteration ist, bei gegebenem $\mathbf{u}_0 \in \mathbf{V}$ für $i = 1, 2, \dots$ die Probleme

$$\text{Finde } (\mathbf{u}_i, p_i) \in \mathbf{V} \times Q \text{ mit: } \begin{aligned} \nu(\nabla \mathbf{u}_i, \nabla \mathbf{v}) + ((\mathbf{u}_{i-1} \cdot \nabla) \mathbf{u}_i, \mathbf{v}) + \sigma(\mathbf{u}_i, \mathbf{v}) - (\nabla \cdot \mathbf{v}, p_i) &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}) \\ (\nabla \cdot \mathbf{u}_i, q) &= 0 \end{aligned} \quad (9.4)$$

für alle $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ und alle $q \in Q$ zu lösen. Dazu werden einige theoretische Aussagen angeführt.

Satz 9.2.1:

Sei $\mathbf{f} \in \mathbf{V}$, dann existiert mindestens eine Lösung $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{V} \times Q$ von (9.3). Seien weiter

$$\|\mathbf{f}\|_o := \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}} \frac{(\mathbf{f}, \mathbf{v})}{|\mathbf{v}|_1} \quad \text{und} \quad \eta := \sup_{\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}} \frac{((\mathbf{w} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v})}{|\mathbf{w}|_1 |\mathbf{u}|_1 |\mathbf{v}|_1}.$$

Dann ist diese Lösung auch eindeutig, falls gilt

$$\frac{\eta}{\nu^2} \|\mathbf{f}\|_o < 1. \quad (9.5)$$

Beweis:

Siehe [Girault and Raviart, 1986] Abschnitt IV Theorem 2.1 und Theorem 2.2. ■

Satz 9.2.2:

Seien $\mathbf{f}, \mathbf{u}_{i-1} \in \mathbf{V}$, dann existiert genau eine Lösung $(\mathbf{u}_i, p_i) \in \mathbf{V} \times Q$ von (9.4). Falls zusätzlich die Bedingung (9.5) gilt, so konvergiert die Folge $(\mathbf{u}_i, p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ in $\mathbf{V} \times Q$ gegen die eindeutige Lösung $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{V} \times Q$ von (9.3) für $i \rightarrow \infty$.

Beweis:

Siehe [Roos et al., 1996] Abschnitt IV Theorem 1.2. ■

9.3 Praktische Umsetzung der Picard Iteration

Mit dieser theoretischen Grundlage ist also die Konvergenz der Picard Iteration unter der Voraussetzung (9.5) gesichert. Die Bedingung lässt zwar nur sehr spezielle Fälle zu, das Verfahren zeigt sich allerdings in der Praxis stabil. Bei der praktischen Umsetzung soll eine gedämpfte Variante mit Relaxationsparameter $\xi_i > 0$ verwendet werden. Die zu lösenden Probleme sind hier

Finde $(\mathbf{w}_i, r_i) \in \mathbf{V} \times Q$ mit :

$$\begin{aligned} \nu(\nabla \mathbf{w}_i, \nabla \mathbf{v}) + ((\mathbf{u}_{i-1} \cdot \nabla) \mathbf{w}_i, \mathbf{v}) + \sigma(\mathbf{w}_i, \mathbf{v}) - (\nabla \cdot \mathbf{v}, r_i) &= \xi_i \mathbf{F}(\mathbf{u}_{i-1}, p_{i-1}, \mathbf{v}) \\ (\nabla \cdot \mathbf{w}_i, q) &= 0 \end{aligned} \quad (9.6)$$

für alle $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ und alle $q \in Q$ mit

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}_{i-1}, p_{i-1}, \mathbf{v}) := (\mathbf{f}, \mathbf{v}) - \nu(\nabla \mathbf{u}_{i-1}, \nabla \mathbf{v}) - ((\mathbf{u}_{i-1} \cdot \nabla) \mathbf{u}_{i-1}, \mathbf{v}) - \sigma(\mathbf{u}_{i-1}, \mathbf{v}) + (\nabla \cdot \mathbf{v}, p_{i-1}).$$

Danach kann durch

$$\mathbf{u}_i := \mathbf{u}_{i-1} + \mathbf{w}_i \quad \text{und} \quad p_i := p_{i-1} + r_i$$

die Lösung des aktuellen Schritts berechnet werden. Diese Vorgehensweise bietet den Vorteil, das Residuum der nichtlinearen Gleichung aus dem vorherigen Schritt durch $\mathbf{F}(\mathbf{u}_{i-1}, p_{i-1}, \mathbf{v})$ für ein Abbruchkriterium nutzen zu können. Allerdings muss bei dieser Methode dafür gesorgt werden, dass \mathbf{u}_0 wirklich die Divergenzbedingung erfüllt. Eine Möglichkeit dazu bietet die Lösung des Stokes Problems aus Kapitel 5 als ersten Schritt, um dann in diesem Kontext fortzufahren.

Bemerkung 9.3.1:

- Werden diese Probleme analog zu Abschnitt 4.1.1 in Gleichungssysteme umgewandelt, so muss nicht in jedem Schritt die komplette Matrix neu aufgestellt werden. Die einzigen sich

ändernden Teile sind der konvektionsabhängige Anteil und die rechte Seite, womit ein Ersparnis an Rechenaufwand erreicht werden kann. Ist allerdings eine aufwendige Stabilisierung wie in den Kapiteln 7 und 8 notwendig, so ist dieser Vorteil nicht mehr zu nutzen. Beispielsweise der SUPG Stabilisierungsanteil muss in jedem Schritt vollständig neu erstellt werden, für den PSPG Anteil ist dies leicht einzuschränken. Falls die Gewichtungsfaktoren für die Stabilisierungsterme über ein Parameterdesign wie in (7.20) von der Konvektion abhängen, so sind alle Terme neu zu berechnen. Die GradDiv Stabilisierung ist davon weniger abhängig. Fällt die Wahl des Gewichtungsparameters unabhängig von der Konvektion aus, so müssen für einen neuen Schritt keine Terme zusätzlich assembliert werden. Auch auf ein Update der rechten Seite durch die Stabilisierung kann verzichtet werden.

- Die Stabilisierungen finden nicht bezüglich der Gleichungen (9.6) des Defektes \mathbf{w}_i statt, sondern werden zu den Problemen (9.4) erstellt. Die resultierenden rechten Seiten werden auch mit dem Dämpfungsparameter ξ_i multipliziert.

9.4 Numerische Tests zu den stationären, inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen

Nach den theoretischen Betrachtungen einer Lösungsmöglichkeit zu den Navier-Stokes Gleichungen sollen nun numerische Resultate zum stationären Fall dargestellt werden. Der stationäre Fall entspricht dem Kontext dieses Kapitels für $\Delta t_i \rightarrow \infty$ für alle $i = 0, \dots, m - 1$, womit für die Reaktionskonstante gilt $\sigma = 0$ und die Iteration für die Zeitdiskretisierung aus Abschnitt 9.1 entfällt.

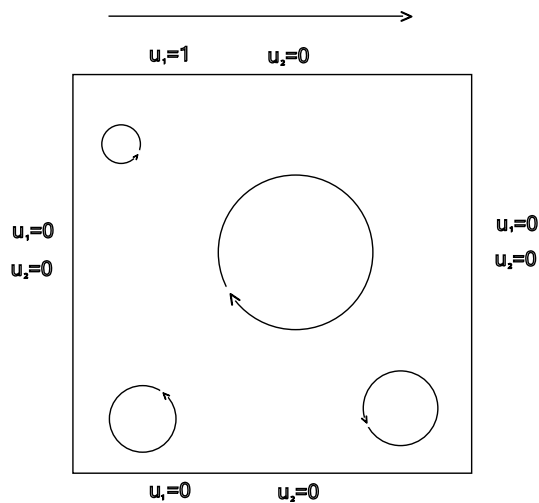


Abbildung 9.1: Geometrie der Driven Cavity mit einigen, angedeuteten Wirbeln der Lösung

Beispiel 9.4.1:

Für die folgenden Rechnungen ist die sogenannte Driven Cavity herangezogen worden, welche als Testbeispiel dieser Probleme sehr häufig gewählt wird. Die Geometrie ist in Abbildung 9.1 für ein Gebiet Ω skizziert, welches in diesem Fall $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ entspricht. Es wird eine turbulenzarme Flüssigkeit in einem quadratischen Hohlraum modelliert, dessen obere Wand sich mit einer konstanten Geschwindigkeit von links nach rechts bewegt und so die Flüssigkeit antreibt. Die Eckpunkte der Wand bewegen sich nicht mit; an diesen Punkten ist als Randwert 0 vorgeschrieben. Weitere Kräfte von außen sollen nicht auf das System einwirken, weshalb die rechte Seite $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ gewählt ist. Die exakte Lösung zu diesem Aufbau ist analytisch nicht bekannt, es ist deshalb nur

das grobe Verhalten der Flüssigkeit in Abbildung 9.1 dargestellt. Es wird ein großer Wirbel in der Nähe des Zentrums von Ω erwartet, welcher einige kleinere Wirbel in den Ecken antreibt. Die Geschwindigkeit am Rand ist auf 1 normiert, weshalb in diesem Fall für die Reynoldszahl $Re = \nu^{-1}$ gilt. Im allgemeinen Fall hängt sie zusätzlich von der charakteristischen Größe des Gebiets Ω und von der maximalen Geschwindigkeit der modellierten Teilchen ab. Da beides bei diesem Beispiel 1 ist, gilt die Vereinfachung. Der inhomogene Dirichlet Rand, der nicht zu den Randbedingungen aus (9.1) passt, ist auf algebraischer Ebene durch Elimination in das lineare Gleichungssystem eingearbeitet.

Aus der Literatur sind viele numerisch berechnete Werte zur Stromfunktion der Driven Cavity bei verschiedenen Reynoldszahlen bekannt, von denen einige als Vergleichswerte für diese Arbeit herangezogen werden. Falls $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ die Lösung zur Driven Cavity bezeichnet, so errechnet sich die Stromfunktion Ψ aus der Laplace Gleichung

$$-\Delta\Psi = \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y},$$

wobei sich mit den Randbedingungen aus Abbildung 9.1 ergibt, dass ein homogener Dirichlet Rand für Ψ vorgeschrieben werden kann. Ebenfalls soll die Wirbelstärke ω in die Betrachtungen eingehen, welche hier als dritte Komponente der Rotation des erweiterten Geschwindigkeitsfeldes durch

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left(\nabla \times \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y}$$

berechnet wird. Eine ausführliche Beschreibung der Stromfunktion und der Wirbelstärke bei speziell diesem Beispiel ist in [Ghia et al., 1982] zu finden.

	$h \approx \backslash Re$	100	400	1000	3200	5000	7500
Q_2/Q_1 , stabilisiert	1/64	29	47	56	61	68	71
Q_2/Q_1 , unstabilisiert	1/64	29	47	56	60	69	/
Q_2/Q_1 , stabilisiert	1/276	27	43	51	55	56	68
Q_2/Q_1 , unstabilisiert	1/276	27	43	51	55	56	69
Q_4/Q_3 , stabilisiert	1/64	28	45	54	59	60	73
Q_4/Q_4 , stabilisiert	1/64	28	46	54	59	69	72

Tabelle 9.1: Iterationszahlen der Picard Iteration mit $\xi_i = 0.6$ und einem Abbruchkriterium von 10^{-10} als Toleranz für die Norm des Residuums.

Die in diesem Abschnitt folgenden Rechnungen sind mit der gedämpften Picard Iteration aus (9.6) erstellt worden. Der Relaxationsparameter ist $\xi_i = 0.6$ für alle i und das Verfahren wird abgebrochen, falls für das Residuum im i -ten Schritt gilt $\|\mathbf{F}(\mathbf{u}_i, p_i, \mathbf{v})\|_0 \leq 10^{-10}$. Als erstes wird ein Experiment zum Einfluss der Reynoldszahl Re und der Stabilisierung auf die Anzahl der benötigten Iterationen angeführt. Tabelle 9.1 zeigt dazu einen Anstieg der Iterationszahlen bei steigender Reynoldszahl für alle angeführten Variationen. Auf dem groben Gitter konnte im unstabilisierten Fall bei $Re = 7500$ keine Konvergenz des Verfahrens beobachtet werden, bei noch größeren Gittern trat dieser Effekt schon für kleinere Reynoldszahlen auf. Eine zusätzliche Stabilisierung macht eine Rechnung auch auf solchen Gittern möglich. Die dazu gewählten Parameter entsprechen den in Kapitel 8 motivierten. Im Taylor-Hood Fall ist dies (8.2) ohne die SUPG Stabilisierung und im Fall der equal-order Approximation wird (8.4) gewählt. Wie bereits in Kapitel 8 erwähnt, müssen die Parameter für dieses Beispiel nicht optimal sein. Allerdings zeigen die Tests, dass ein Arbeiten mit dieser Wahl möglich ist. Falls die Maschenweite allerdings klein genug ist, so unterscheiden sich die Iterationszahlen kaum und eine Stabilisierung ist ebenfalls nicht mehr nötig.

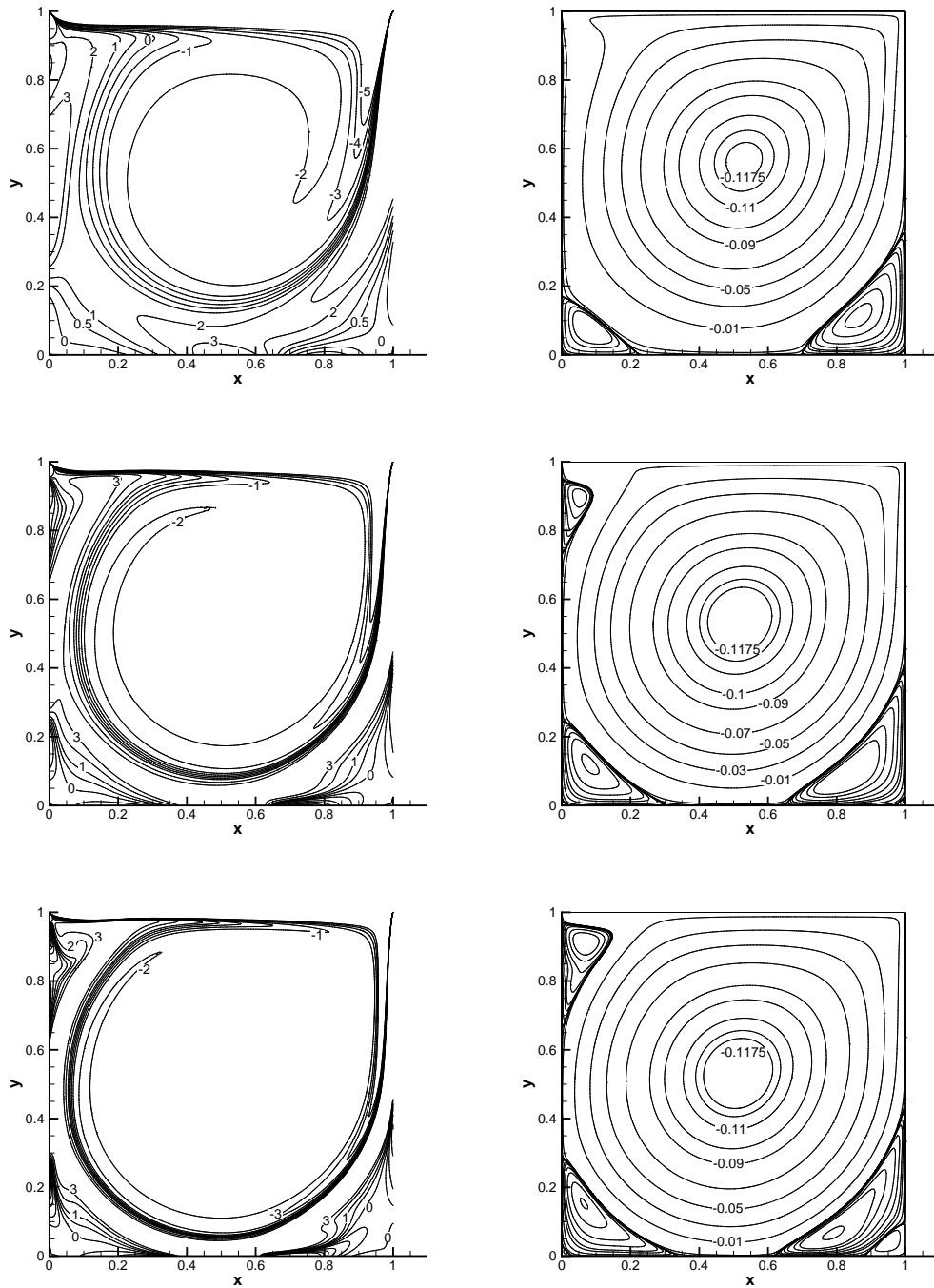


Abbildung 9.2: Konturlinien der Wirbelstärke ω links und der Stromfunktion Ψ rechts zu den Reynoldszahlen 1000, 3200 und 7500 (von oben nach unten) (Rechnungen mit Q_2/Q_1 -Element auf einem Gitter mit $h \approx 1/276$, unstabilisiert)

Um diese Aussage zu stärken sind in Abbildung 9.2 die Konturlinien der Wirbelstärke und der Stromfunktion bei verschiedenen Reynoldszahlen aufgezeigt, welche mit dem Q_2/Q_1 -Element auf einem Gitter mit $h \approx 1/276$ unstabilisiert berechnet worden sind. Die Auswahl der Konturlinien ist aus [Ghia et al., 1982] übernommen und lassen sich gut mit den dazugehörigen Abbildungen vergleichen.

Noch genauere Einblicke liefert die Tabelle 9.2. Hier sind durch das Minimum der Stromfunktion Ψ_{min} die Zentren der Hauptwirbel zu verschiedenen Reynoldszahlen ermittelt worden. Die letzten zwei Spalten zeigen die Koordinaten der Zentren und $\omega_{v.c.}$ bezeichnet den Wert der Wirbelstärke an dieser Stelle. Zu diesen Kennzahlen sind Vergleichswerte aus der Literatur herangezogen worden, wobei [Ghia et al., 1982] die wohl meist zitierte Quelle dazu ist. Diesen Werten sollte allerdings eine geringere Genauigkeit zugeteilt werden als denen aus [Erturk et al., 2005], wo eine detaillierte Übersicht und ein kritischer Vergleich von Werten aus der Literatur gegeben wird. Die Versuchsreihe (iv) aus Tabelle 9.2 zeigt Werte zu Rechnungen auf dem hier feinsten Gitter ohne Einsatz einer Stabilisierung, welche sich bis auf viele Stellen mit den Werten aus [Erturk et al., 2005] vergleichen lassen. Auch in die anderen Literaturwerte fügen sich diese Resultate ein. Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass die Stromfunktion Ψ und die Wirbelstärke ω nur an den Gitterpunkten ausgewertet wurden. Die Versuchsreihen (i) bis (iii) zeigen, dass auf größeren Gittern bereits eine hohe Genauigkeit erreicht werden kann, wenn eine Stabilisierung angewendet wird. Tabelle 9.1 hatte hierzu gezeigt, dass ohne Stabilisierung noch nicht einmal die Konvergenz erwartet werden kann.

Bemerkung 9.4.2:

In Kapitel 8 ist erläutert worden, dass im konvektionsdominanten Fall eine Stabilisierung notwendig wird. Abbildung 8.3 hat hierzu gezeigt, dass für Beispiel 8.0.1 ein solcher Fall bei einer Viskosität von $\nu \leq 10^{-3}$ eintritt. Die Reynoldszahlen, die in diesem Kapitel untersucht worden sind, könnten also konvektionsdominante Probleme hervorrufen. Allerdings ist dies nicht mit Sicherheit zu sagen, weil immer gilt $\nu \geq 1/7500$. Kleinere Viskositäten sind hier zur Driven Cavity nicht betrachtet worden, weil die Lösung für den stationären Fall dann nicht mehr eindeutig ist. Ein möglicher Richtwert einer Reynoldszahl, ab welcher die Lösung der Driven Cavity instationär wird, ist nach [Fortin et al., 1997] $Re = 7998.5$.

Re	Quelle	Ψ_{min}	$\omega_{v.c.}$	x -Koordinate	y -Koordinate
100	(i)	-0.103527	-3.16858	0.6170	0.7348
	(ii)	-0.103516	-3.16985	0.6152	0.7395
	(iii)	-0.103520	-3.16959	0.6157	0.7383
	(iv)	-0.103520	-3.15643	0.6149	0.7362
	[Zhang, 1990]	-0.103500		0.6172	0.7383
	[Zhang, 2003]	-0.103511	-3.16875	0.6172	0.7344
	[Ghia et al., 1982]	-0.103423	-3.16646	0.6172	0.7344
400	(i)	-0.113930	-2.29733	0.5525	0.6071
	(ii)	-0.113985	-2.29721	0.5525	0.6071
	(iii)	-0.113988	-2.29384	0.5558	0.6043
	(iv)	-0.113989	-2.29458	0.5548	0.6060
	[Zhang, 1990]	-0.114100		0.5547	0.6055
	[Ghia et al., 1982]	-0.113909	-2.29469	0.5547	0.6055
	1000	(i)	-0.118654	-2.06522	0.5349
(ii)		-0.118924	-2.06766	0.5303	0.5657
(iii)		-0.118939	-2.06785	0.5315	0.5658
(iv)		-0.118936	-2.06783	0.5292	0.5655
[Erturk et al., 2005]		-0.118942	-2.06721	0.5300	0.5650
[Zhang, 1990]		-0.119300		0.5313	0.5664
[Zhang, 2003]		-0.118806	-2.06678	0.5313	0.5625
[Ghia et al., 1982]		-0.117929	-2.04968	0.5313	0.5625
3200	(i)	-0.121105	-1.95340	0.5196	0.5394
	(ii)	-0.121728	-1.96015	0.5196	0.5394
	(iii)	-0.121841	-1.96158	0.5163	0.5391
	(iv)	-0.121825	-1.96135	0.5172	0.5406
	[Zhang, 1990]	-0.123000		0.5195	0.5469
	[Zhang, 2003]	-0.120157	-1.94893	0.5156	0.5391
	[Ghia et al., 1982]	-0.120377	-1.98860	0.5165	0.5469
5000	(i)	-0.121647	-1.93427	0.5196	0.5394
	(ii)	-0.122072	-1.93861	0.5150	0.5348
	(iii)	-0.122248	-1.94126	0.5162	0.5360
	(iv)	-0.122234	-1.94038	0.5161	0.5369
	[Erturk et al., 2005]	-0.122233	-1.94073	0.5150	0.5350
	[Zhang, 1990]	-0.124000		0.5156	0.5352
	[Ghia et al., 1982]	-0.118966	-1.86016	0.5117	0.5352
7500	(i)	-0.122477	-1.92628	0.5189	0.5267
	(ii)	-0.122161	-1.92393	0.5148	0.5306
	(iii)	-0.122386	-1.92692	0.5127	0.5326
	(iv)	-0.122410	-1.92740	0.5150	0.5331
	[Erturk et al., 2005]	-0.122386	-1.92697	0.5133	0.5317
	[Zhang, 1990]	-0.125300		0.5117	0.5313
	[Ghia et al., 1982]	-0.119976	-1.87987	0.5117	0.5322

Tabelle 9.2: (i): $h \approx 1/64$, $\mathbb{Q}_2/\mathbb{Q}_1$, stabilisiert; (ii): $h \approx 1/64$, $\mathbb{Q}_4/\mathbb{Q}_3$, stabilisiert; (iii): $h \approx 1/64$, $\mathbb{Q}_4/\mathbb{Q}_4$, stabilisiert; (iv): $h \approx 1/276$, $\mathbb{Q}_2/\mathbb{Q}_1$, unstabilisiert

Kapitel 10

Fazit und Ausblick

In diesem Kapitel wird versucht, die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit zu werten und in einen allgemeineren Kontext einzuordnen. Dies soll vor allem ein Vergleich zu dem Zwei-Level Ansatz der Stabilisierung durch lokale Projektion liefern. Die parallel laufende Diplomarbeit [Löwe, 2008] beschäftigt sich ausführlich mit der über Bemerkung 4.5.4 eingeführten Methode und nutzt den gleichen Rahmen der Implementierung zur numerischen Untersuchung. Daher lässt sich ein Vergleich gut durchführen. Abschließend wird eine Zusammenfassung und ein Ausblick auf Weiterentwicklungen gegeben.

10.1 Vergleich von residualer Stabilisierung und Stabilisierung durch lokale Projektion

Ein theoretischer Vergleich von residualer Stabilisierung und Stabilisierung durch lokale Projektion ist in [Braack et al., 2007] Abschnitt 7 und [Lube, 2006] nachzulesen, deren Aussagen im Folgenden durch numerische Experimente gestärkt werden.

In dieser Arbeit sind verschiedene Methoden der residualen Stabilisierung betrachtet worden, zu denen eine weitestgehend vollständige analytische Betrachtung dargestellt werden konnte. Ähnliche theoretische Grundlagen sind zur Zwei-Level Methode der Stabilisierung durch lokale Projektion in [Löwe, 2008] erläutert. Auch bei diesen Verfahren kann auf a-priori Fehlerabschätzungen bezüglich einer Tripelnorm zurückgegriffen werden, welche bis auf die Anteile der Stabilisierung mit der Norm aus (7.18) oder (7.7) übereinstimmt. Ein Unterschied in der theoretischen Betrachtung liegt vor allem darin, dass bei der residualen Stabilisierung obere Schranken an den Stabilisierungsparameter zu fordern sind. Für diese Arbeit ist dies konkret in (7.10) und (7.19) passiert, wobei die GradDiv Stabilisierung hier eine andere Rolle einnimmt. Sie kann nach [Rapin and Löwe, 2007] auch als Stabilisierung durch lokale Projektion aufgefasst werden, indem gegen den Nullraum projiziert wird. Für diese Verfahren ist eine obere Schranke bei den Parametern nicht notwendig.

Um die unterschiedlichen theoretischen Gegebenheiten praktisch zu betrachten, ist das Beispiel 8.0.2 zu den Oseen Gleichungen mit 8 Wirbeln auf einem Gitter mit $h \approx 1/34$ herangezogen worden, für den die optimale GradDiv Stabilisierung bei $\gamma^* = 3.162 \cdot 10^{-3}$ ermittelt wurde (siehe Abbildung 8.12). Abbildung 10.1 zeigt den zusätzlichen Einfluss der SUPG Stabilisierung und der Stromlinienstabilisierung durch lokale Projektion (LPS(SU)) auf die relevanten Fehler. Es ist zu erkennen, dass beide Methoden nur eine minimale Verbesserung der Fehler bewirken können, was für die residualen Verfahren den Betrachtungen aus Abschnitt 8.1 entspricht. In [Löwe, 2008] ist dieses Verhalten auch für die 2-Level Methode beobachtet worden. Was aber Abbildung 10.1

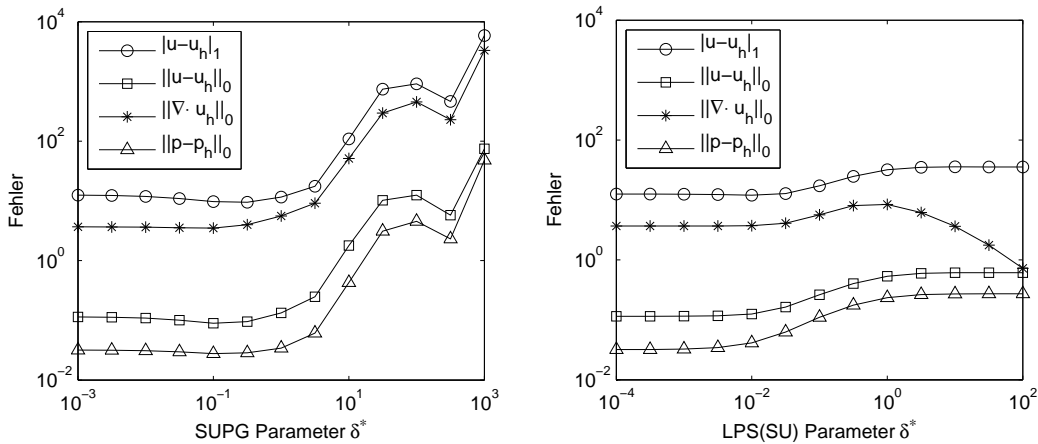


Abbildung 10.1: Beispiel 8.0.2: Abhängigkeit der relevanten Fehler von den Stabilisierungsparametern von SUPG und LPS(SU) bei optimaler GradDiv Stabilisierung mit $\gamma^* = 3.162 \cdot 10^{-3}$ für $\nu = 10^{-6}$ und $\sigma = 0$

zusätzlich zeigt, sind die Folgen von Überstabilisierungen. LPS scheint hier die Fehler nur gering zu verschlechtern um dann auf einem bestimmten Niveau zu stagnieren, wogegen SUPG immer größere Fehler hervorruft.

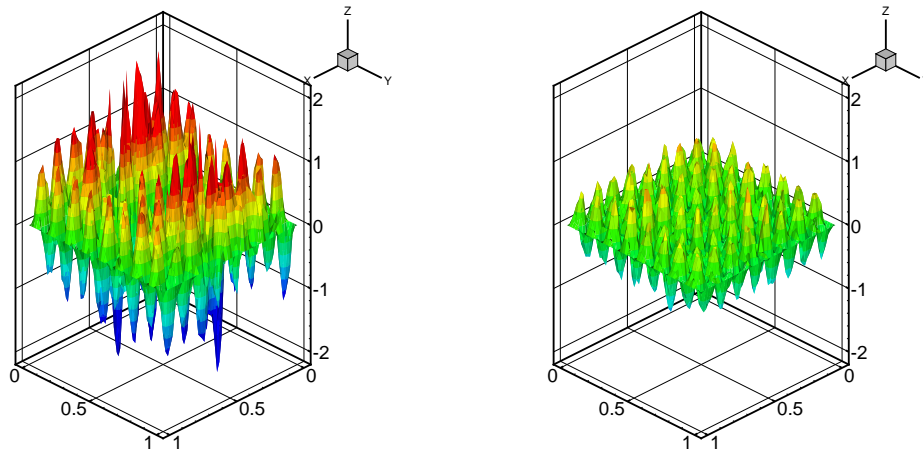


Abbildung 10.2: Beispiel 8.0.2: Mit Faktor 20 überstabilisierte Approximationen bei SUPG (links) und LPS(SU) (rechts) mit optimaler GradDiv Stabilisierung für $\nu = 10^{-6}$ und $\sigma = 0$

Ein genaueres Verständnis dieses Verhaltens liefert Abbildung 10.2. Hier sind die optimalen Parameter für SUPG und LPS(SU) mit 0.3162 und 0.01 aus Abbildung 10.1 abgelesen und jeweils mit einem Faktor 20 multipliziert worden. Die resultierenden Approximationen der ersten Geschwindigkeitskomponente sind für SUPG links und für LPS(SU) rechts dargestellt; die optimale Approximation ist aus Abbildung 8.12 zum Vergleich heranzuziehen, wobei die unterschiedlichen Skalierungen beachtet werden müssen. Auf der linken Seite ist zu erkennen, dass starke Oszillationen entstehen. Auf der rechten Seite hingegen verschmiert die Stabilisierung die Struktur der Referenzlösung, womit auch das Fehlerverhalten aus Abbildung 10.1 erklärt werden kann. Für LPS(SU) sind die Fehler beschränkt durch die Normen der Referenzlösung, weil die Wirbel der Lösung immer mehr verschmiert und damit gegen Null gehen. Daher ist auch das Fehlerverhalten der Divergenz verständlich, weil auch die Nullfunktion die Divergenzbedingung erfüllt. Die Zwei-

Level Methode dämpft also die feinen Strukturen der Referenzlösung, bei der SUPG Stabilisierung ist hingegen kein allgemeiner Trend zu beobachten.

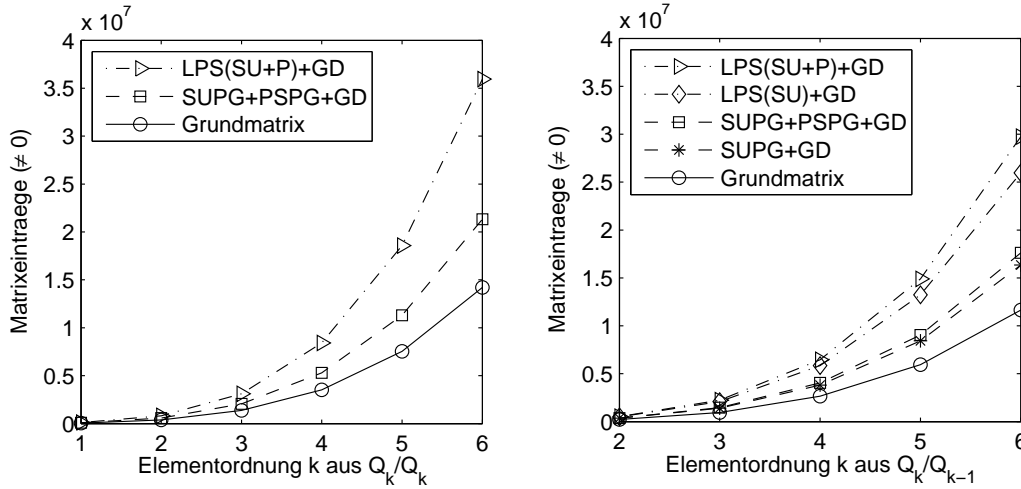


Abbildung 10.3: Anzahl der Matrixeinträge ungleich Null bei verschiedenen Arten von Stabilisierungen auf einem Gitter mit $h \approx 1/34$

Ein weiterer Unterschied der Stabilisierungsmethoden ist die Anzahl der zu assemblierenden Matrixeinträge. Die Abbildung 10.3 veranschaulicht die Entwicklung dieser Zahl für steigende Elementordnung links bei equal-order, rechts bei Taylor-Hood Elementen. Dabei ist zu erkennen, dass alle angeführten Stabilisierungen zusätzliche Matrixeinträge benötigen, der Anstieg bei der 2-Level Methode allerdings sehr stark ausfällt.

Um dieses Verhalten genauer zu untersuchen, soll die Struktur der zu assemblierenden Matrix genauer betrachtet werden. Analog zu Abschnitt 4.1.1 ist bei Methoden mit Stabilisierung eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 & \mathbf{C} \end{pmatrix}$$

zu erwarten, wobei verschiedene Verfahren auf verschiedene Blöcke dieser Matrix einwirken. In Abbildung 10.4 ist dazu links oben ein Schema der Matrix zum equal-order Element Q_2/Q_2 dargestellt, in der die Blockstruktur zu erkennen ist. \mathbf{C} ist in diesem Fall $\mathbf{0}$, weil der Druck in der Variationsformulierung nicht mit der Testfunktion aus dem Druckraum gekoppelt ist. Rechts daneben ist die Matrix bei zusätzlicher GradDiv Stabilisierung gezeigt, welche ausschließlich auf dem \mathbf{A} -Block agiert. Dort hat dies zusätzliche Einträge zur Folge, weil die verschiedenen Komponenten der Geschwindigkeit untereinander gekoppelt werden. Anders verhält es sich bei der SUPG Stabilisierung, welche zusammen mit der PSPG Stabilisierung unten links behandelt ist. SUPG verändert nach Konstruktion den \mathbf{A} - und \mathbf{B}_1 -Block, schafft dabei aber keine neuen Einträge. Alle Kopplungen waren schon vorher vorhanden. Die PSPG Stabilisierung, welche auf dem \mathbf{B}_2 - und dem \mathbf{C} -Block agiert, verhält sich dazu ähnlich, da lediglich neue Einträge in \mathbf{C} nötig sind. Das Schema unten rechts zeigt schließlich den Einfluss der Stromlinien- und Druckstabilisierung durch lokale Projektion, wobei jeweils nur auf einen Block, nämlich \mathbf{A} bzw. \mathbf{C} , zugegriffen wird. Zu erkennen ist ein deutlicher Zuwachs an Matrixeinträgen. Durch die verwendete Makroelementzerlegung des Gebiets werden benachbarte Zellen miteinander gekoppelt; die Matrixeinträge können so vervierfacht werden. Insgesamt ist also der Aufwand für die lokale Projektion bei steigender Elementordnung höher einzustufen auch wenn bei der residualen Stabilisierung eine Auswertung von zweiten Ableitungen zusätzlich nötig wird.

In diesem Abschnitt unerwähnt ist die Symmetrie der Stabilisierungsterme durch lokale Projektion, was einen Vorteil gegenüber der residualen Verfahren darstellt und schon im zweiten Punkt

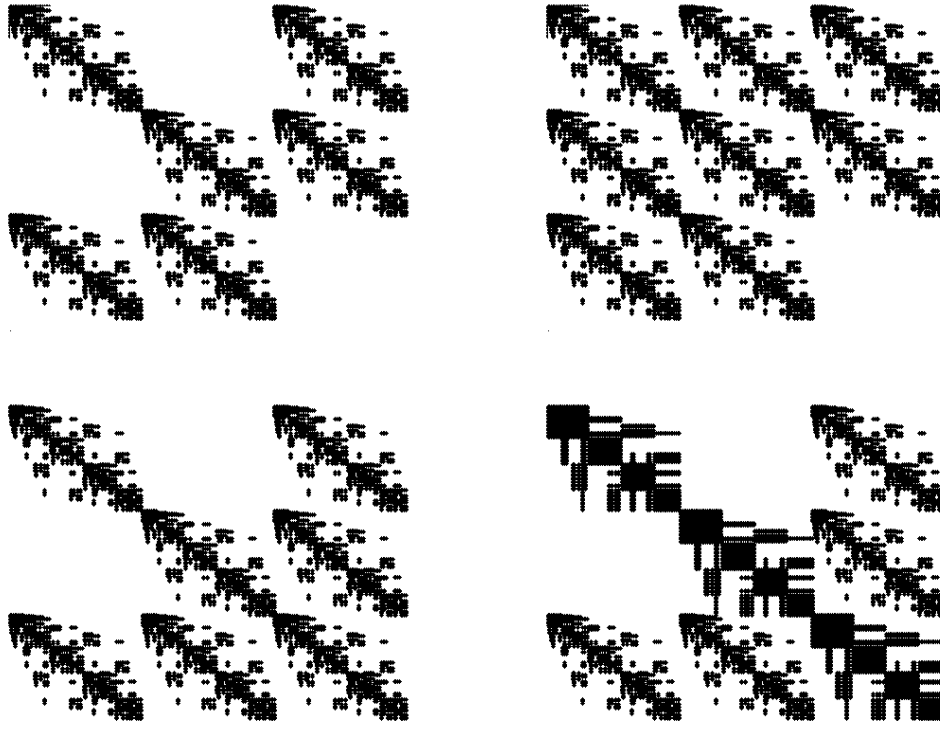


Abbildung 10.4: Besetzungsmuster der Matrix beim Q_2/Q_2 -Element unstabilisiert, mit GradDiv, mit SUPG+PSPG und mit LPS(SU+P) (von links oben nach rechts unten)

der Bemerkung 4.5.3 angedeutet wurde. Allerdings ist dies nicht nur auf den \mathbf{A} -Block zu beziehen, sondern ebenso auf die \mathbf{B} -Blöcke. Ohne Stabilisierung gilt $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_2^\top$, was durch SUPG und/oder PSPG verloren geht. Der Druck und die Geschwindigkeit werden unsymmetrisch miteinander gekoppelt. Überhaupt werden bei der residualen Stabilisierung sehr viele Daten der zugrunde liegenden Differentialgleichung miteinander in Verbindung gebracht, wodurch das Design der Stabilisierungsparameter in Abhängigkeiten zu deutlich mehr Größen steht als bei den Projektionsmethoden. Dies ist insbesondere bei Iterationen wie zur Zeitdiskretisierung hinderlich, weil pro Iterationsschritt jeweils die Stabilisierungsterme neu assembliert werden müssen.

Der letzte numerische Test soll beantworten, ob ein Verfahren bessere Fehler liefert als das andere. Bei Taylor-Hood Elementen ist bereits in Abbildung 10.2 erkennbar gewesen, dass der Einfluss der Stabilisierung hauptsächlich auf die GradDiv Stabilisierung zurückzuführen ist und zusätzliche Verfahren kaum Verbesserungen der Fehler bewirken können. Aus diesem Grund zeigt Abbildung 10.5 das Q_2/Q_2 -Element als Beispiel für den equal-order Fall bei einem konvektionsdominanten Problem. Es ist zu erkennen, dass die Konvergenzordnungen der einzelnen Fehler einander entsprechen. Die tatsächlichen Fehler sind bei der residualen Stabilisierung alle geringfügig besser, die Druckfehler unterscheiden sich sogar um einen Faktor 10.

10.2 Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit sind die inkompressiblen Navier-Stokes Gleichungen in Kapitel 1 physikalisch motiviert und im Folgenden aus Sicht der angewandten Mathematik betrachtet worden. Bei der numerischen Approximation von Lösungen zu diesen Gleichungen mittels Finiter Elemente

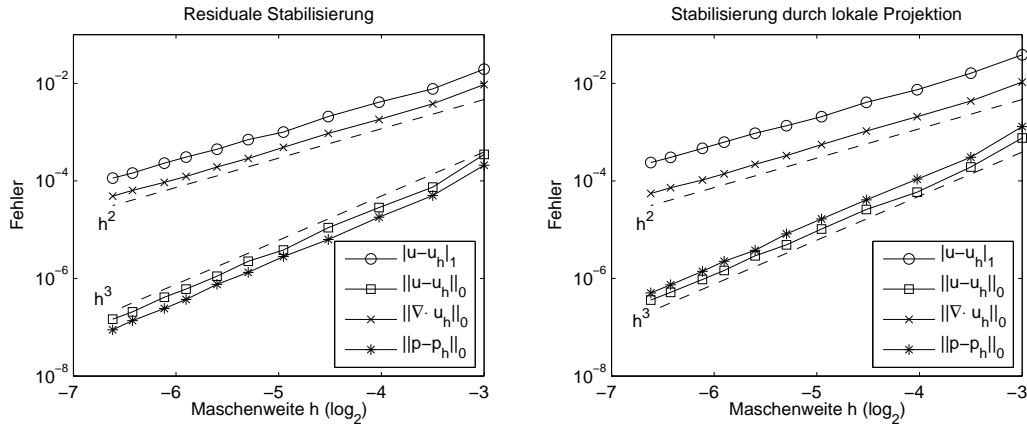


Abbildung 10.5: Beispiel 8.0.1: Konvergenzverhalten der relevanten Fehlergrößen in h bei dem Q_2/Q_2 -Element für $\nu = 10^{-6}$ und $\sigma = 1$ für volle residuale Stabilisierung und volle Stabilisierung durch lokale Projektion (jeweils optimal)

ist mit unphysikalischen Oszillationen zu rechnen, welche durch Stabilisierungsverfahren verringert werden. Dazu konnten in dieser Arbeit speziell Methoden der residualen Stabilisierung theoretisch und praktisch untersucht werden.

Genauer wurde in Kapitel 2 eine funktionalanalytische Grundlage gegeben, um ein Hilfsproblem zur Lösung der Navier-Stokes Gleichungen als gemischtes Problem auffassen zu können und dessen eindeutige Lösbarkeit in Kapitel 3 zu sichern. Dieses Hilfsproblem sind die Oseen Gleichungen, welche aus einer Zeitdiskretisierung und einer Linearisierung des Navier-Stokes Problems resultieren und einen wichtigen Punkt der Arbeit einnehmen. Darauf aufbauend beschäftigte sich das Kapitel 4 mit der numerischen Betrachtung der Lösbarkeit und führte die Methode der Finiten Elemente sowie Ansätze von Stabilisierungsverfahren ein.

Die darauf folgenden vier Kapitel bilden das Herzstück der vorliegenden Arbeit. Die genaue Untersuchung der Methoden der residualen Stabilisierung konnte beginnen und dies zunächst an den Stokes Gleichungen und damit für den diffusionsdominanten Fall. Es konnte die Stabilität und eine a-priori Fehlerabschätzung zur Galerkin-Least-Squares (GLS) Methode gezeigt werden und über Kapitel 6 im praktischen Vergleich zur Pressure-Stabilization / Petrov-Galerkin (PSPG) und ohne Stabilisierung betrachtet werden. Es zeigte sich, dass bei Taylor-Hood Elementen ohne Stabilisierung im Vergleich gute Resultate erzielt werden.

In Kapitel 7 wurden die Oseen Gleichungen herangezogen und theoretisch mit den verschiedenen Varianten der residualen Stabilisierung untersucht. Für Taylor-Hood Elemente gelang eine Trennung der einzelnen Stabilisierungsanteile im Beweis zur Stabilität des Problems mit einer Verbesserung der Resultate aus [Matthies and Lube, 2007] sowie eine darauf aufbauende a-priori Fehlerabschätzung. Numerische Tests in Kapitel 8 zeigten, dass bei einer Taylor-Hood Approximation die GradDiv Stabilisierung ausreichend ist, was im Gegensatz zu den equal-order Elementen deutlich weniger Aufwand bei nur leicht schlechteren Fehlerordnungen bedeutet.

Die eigentliche Motivation dieser Arbeit aufgreifend wurde sich im 9ten Kapitel mit dem Benchmarkproblem Driven Cavity beschäftigt. Auch in diesem Fall war wenig Stabilisierung ausreichend, um gute Resultate zu erzielen. Es konnte eine gute Übereinstimmung zu Werten aus der Literatur erzielt werden.

Schließlich konnten in Kapitel 10 einige numerische Tests zum Vergleich der residualen Stabilisierung mit der Zwei-Level Methode der Stabilisierung durch lokale Projektion angeführt werden. Diese zeigten Nachteile auf beiden Seiten und einen eindeutigen Favoriten zu benennen fiel schwer.

Allerdings ist unter Umständen eine andere Variante der lokalen Projektion fähig, die Schwachstellen der hier zum Vergleich herangezogenen Methode auszubessern, weil insgesamt die Vorteile der residualen weitestgehend konserviert und viele Nachteile vermieden wurden. Dies bleibt abzuwarten.

Einen weiteren interessanten Punkt stellt die grundsätzliche Notwendigkeit der Stabilisierung dar. Es hat sich in dieser Arbeit gezeigt, dass bei Taylor-Hood Elementen schon sehr wenig Stabilisierung ausreicht, um gute Ergebnisse zu erzielen. Bei dem Benchmark Problem der Driven Cavity, war diese Tendenz noch deutlicher. Für kleine Reynoldszahlen ist eine Stabilisierung bei gültiger BB-Bedingung nicht nötig und bei sehr hohen Reynoldszahlen ist keine eindeutige Lösung mehr vorhanden und das Problem wird turbulent. Diese Fälle sind in dieser Arbeit nicht betrachtet worden, allerdings muss für solche Probleme ein sogenanntes Turbulenzmodell verwendet werden und macht eine Stabilisierung wahrscheinlich überflüssig. Ein zu untersuchendes Feld könnte hier die Interpretation von Stabilisierungsmethoden als Turbulenzmodell sein. Eine Möglichkeit dazu bietet das Auffassen der Methoden im Rahmen der Variationellen Multiskalen Methoden, wie es für die Stabilisierung durch lokale Projektion bereits in [Braack and Burman, 2006] getan wurde.

Auch für die spezielle Thematik der vorliegenden Arbeit halten die Navier-Stokes Gleichungen also weiter viele offene Fragen zur wissenschaftlichen Betrachtung bereit. Damit bleiben sie als eines der ungelösten, mathematischen Probleme nicht nur für das 'Clay Mathematics Institute' interessant.

Symbolverzeichnis

Partielle Differentialgleichungen

$\Delta \mathbf{v}$ Laplaceoperator von \mathbf{v} , Seite 2

∇q Gradient von q , Seite 2

$\nabla \cdot \mathbf{v}$ Divergenz von \mathbf{v} , Seite 1

ν Kinematische Viskosität, Seite 2

$Re_{(K)}$ (Lokale) Reynoldszahl, Seite 54

σ Reaktion, Seite 3

\mathbf{b} Konvektionsvektor, Seite 3

Ω Betrachtetes Gebiet, Seite 10

N Dimension des Gebiets Ω , Seite 1

Räume und Normen

$C(\Omega)$ Raum der stetigen Funktionen, Seite 7

$C^k(\Omega)$ Raum der k mal stetig partiell differenzierbaren Funktionen, Seite 7

$C_0^k(\Omega)$ Untermenge von $C^k(\Omega)$ der Funktionen mit kompaktem Träger, Seite 8

$\|\cdot\|_{C(\Omega)}$ Maximumsnorm, Seite 7

$\|\cdot\|_{C^k(\Omega)}$ Maximumsnorm, Seite 7

$L^p(\Omega)$ Lebesgue-Räume, Seite 6

$\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ Norm der Lebesgue-Räume, Seite 6

$(\cdot, \cdot)_{(\Omega)}$ Skalarprodukt des L^2 auf Ω , Seite 7

$\|\cdot\|_{0(\Omega)}$ Die L^2 -Norm $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$, Seite 7

$L_{\text{loc}}^1(\Omega)$ Raum der lokal integrierbaren Funktionen, Seite 8

$L_*^2(\Omega)$ Unterraum von $L^2(\Omega)$ der Funktionen mit Integralmittel von Null, Seite 16

$W^{k,p}(\Omega)$ Sobolevraum, Seite 8

$W_0^{k,p}(\Omega)$ Unterraum von $W^{k,p}(\Omega)$ der Funktionen mit Nullrand, Seite 9

$\|\cdot\|_{k,p(\Omega)}$ Norm der Sobolev-Räume, Seite 8

- $H_{(0)}^k(\Omega)$ Kurzschreibweise für $W_{(0)}^{k,2}(\Omega)$, Seite 8
 $\|\cdot\|_{k(\Omega)}$ Kurzschreibweise für $\|\cdot\|_{k,2(\Omega)}$, Seite 9
 $|\cdot|_{k(\Omega)}$ Seminorm der Sobolev-Räume, Seite 9
 $\mathcal{L}(V,U)$ Raum der linearen und beschränkten Operatoren von V nach U , Seite 10
 V^* Dualraum zu V , Seite 11
 $\text{im}(\mathcal{B})$ Bild eines Operators \mathcal{B} , Seite 12
 $\text{ker}(\mathcal{B})$ Kern eines Operators \mathcal{B} , Seite 12
 $\mathbb{P}_k(\Omega)$ Raum der Polynome auf Ω vom Grad $\leq k$, Seite 26
 $\mathbb{Q}_k(\Omega)$ Raum der Polynome zu Viereckselementen, Seite 26
 $[V]^N$ Der vektorwertige Raum der Dimension N zu einem Funktionenraum V , Seite 9

Finite Elemente

- \mathcal{T}_h Zerlegung eines Gebiets Ω , Seite 25
 K Teilgebiet in \mathcal{T}_h , Seite 25
 h_K Durchmesser von K , Seite 25
 h Maximum aller h_K , Seite 25
 I_h Interpolationsoperator der Geschwindigkeit, Seite 29
 J_h Interpolationsoperator des Drucks, Seite 29
 $\mathbb{Q}_k/\mathbb{Q}_l$ Stetiges $\mathbb{Q}_k/\mathbb{Q}_l$ -Element, Seite 27

Stabilisierungsparameter und sonstige Bezeichnungen

- δ GLS Stabilisierungsparameter, Seite 36
 τ PSPG Stabilisierungsparameter bei Stokes, Seite 43
 $\gamma_{(K)}$ GradDiv Stabilisierungsparameter, Seite 54
 δ_K SUPG Stabilisierungsparameter, Seite 54
 τ_K PSPG Stabilisierungsparameter, Seite 54
 ϑ_K SUPG+PSPG Stabilisierungsparameter, Seite 55
 β Konstante der BB-Bedingung, Seite 18
 C_F Friedrichs-Konstante, Seite 13
 μ Konstante der inversen Ungleichung, Seite 30
 \lesssim Bezeichnung für \leq mit zusätzlicher Konstanten, Seite 29

Literaturverzeichnis

- [Alt, 2002] Alt, H. (2002). *Lineare Funktionalanalysis: eine anwendungsorientierte Einführung*. Springer, Berlin [u.a.].
- [Babuška, 1973] Babuška, I. (1973). The Finite Element Method with Lagrangian Multipliers. *Num. Math.*, 20:179–192.
- [Bangerth et al., 2007a] Bangerth, W., Hartmann, R., and Kanschat, G. (2007a). deal.II — a General Purpose Object Oriented Finite Element Library. *ACM Trans. Math. Software*, 33(4). to appear.
- [Bangerth et al., 2007b] Bangerth, W., Hartmann, R., and Kanschat, G. (2007b). deal.II *Differential Equations Analysis Library, Technical Reference*. <http://www.dealii.org>.
- [Barth et al., 2004] Barth, T., Bochev, P., Gunzburger, M., and Shadid, J. (2004). A Taxonomy of Consistently Stabilized Finite Element Methods for the Stokes Problem. *SIAM J. Sci. Comput.*, 25(5):1585–1607.
- [Bixler, 1989] Bixler, N. (1989). An Improved Time Integrator for Finite Element Analysis. *Comm. Appl. Num. Meth.*, 5:69–78.
- [Braack and Burman, 2006] Braack, M. and Burman, E. (2006). Local Projection Stabilization for the Oseen Problem and its Interpretation as a Variational Multiscale Method. *SIAM, J. Numer. Anal.*, 43(6):2544–2566.
- [Braack et al., 2007] Braack, M., Burman, E., John, V., and Lube, G. (2007). Stabilized Finite Element Methods for the Generalized Oseen Problem. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 196:853–866.
- [Braess, 2007] Braess, D. (2007). *Finite Elemente*. Springer, Berlin, Heidelberg.
- [Brezzi, 1974] Brezzi, F. (1974). On the Existence, Uniqueness and Approximation of Saddle-Point Problems Arising from Lagrangian Multipliers. *R.A.I.R.O., Anal. Numer.*, 8 R2:129–151.
- [Brezzi and Fortin, 1991] Brezzi, F. and Fortin, M. (1991). *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*. Springer, New York [u.a.].
- [Chorin and Marsden, 1979] Chorin, A. and Marsden, J. (1979). *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*. Springer, New York [u.a.].
- [Codina, 1993] Codina, R. (1993). A Finite Element Formulation for Viscous Incompressible Flows. *Monografia CIMNE*, 16.
- [Davis, 2004] Davis, T. (2004). Algorithm 832: UMFPACK V4.3—an Unsymmetric-Pattern Multifrontal Method. *ACM Trans. Math. Softw.*, 30(2):196–199.
- [Davis and Duff, 1997] Davis, T. and Duff, I. (1997). An Unsymmetric-Pattern Multifrontal Method for Sparse LU Factorization. *SIAM J. Mat. An. App.*, 18(1):140–158.

- [Dobrowolski, 2006] Dobrowolski, M. (2006). *Angewandte Funktionalanalysis*. Springer, Berlin, Heidelberg.
- [Erturk et al., 2005] Erturk, E., Corke, T., and Gökçöl, C. (2005). Numerical Solutions of 2-D Steady Incompressible Driven Cavity Flow at High Reynolds Numbers. *Int. J. Num. Meth. i. F.*, 48:747–774.
- [Fefferman, 2000] Fefferman, C. (2000). Existence and smoothness of the Navier-Stokes Equation. *CM*, pages 1–5.
- [Fortin et al., 1997] Fortin, A., Jardak, M., Gervais, J., and Pierre, R. (1997). Localization of Hopf Bifurcations in Fluid Flow Problems. *Int. J. Numer. Methods Fluids*, 24:1185–1210.
- [Franca et al., 1993] Franca, L., Hughes, T., and Stenberg, R. (1993). Stabilized Finite Element Methods for the Stokes Problem. *Incomp. Comp. Fluid Dyn.*, (4):87–107.
- [Gelhard et al., 2005] Gelhard, T., Lube, G., Olshanskii, M., and Starcke, J.-H. (2005). Stabilized Finite Element Schemes with LBB-Stable Elements for Incompressible Flows. *J. Comput. Appl. Math.*, 177(2):243–267.
- [Ghia et al., 1982] Ghia, U., Ghia, K., and Shin, C. (1982). High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method. *J. Comput. Phys.*, 48:387–411.
- [Gilbarg and Trudinger, 2000] Gilbarg, D. and Trudinger, N. (2000). *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer, Berlin [u.a.].
- [Girault and Raviart, 1986] Girault, V. and Raviart, P.-A. (1986). *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations*. Springer, Berlin [u.a.].
- [Girault and Scott, 2003] Girault, V. and Scott, L. (2003). A Quasi-Local Interpolation Operator Preserving the Discrete Divergence. *Calcolo*, 40:1–19.
- [Gresho et al., 1989] Gresho, P., Lee, R., and Sani, R. (1989). On the Time Dependent Solution of the Incompressible Navier-Stokes Equations in Two- and Three-Dimensions. *Comm. Appl. Num. Meth.*, 5:69–78.
- [Großmann and Roos, 2005] Großmann, C. and Roos, H. (2005). *Numerische Behandlung partieller Differentialgleichungen*. Teubner, Wiesbaden.
- [Hackbusch, 1986] Hackbusch, W. (1986). *Theorie und Numerik elliptischer Differentialgleichungen*. Teubner Studienbücher, Stuttgart.
- [Heister, 2008] Heister, T. (2008). Vorkonditionierungsstrategien für das stabilisierte Oseen-Problem. NAM, Georg-August-Universität zu Göttingen.
- [Hughes and Franca, 1987] Hughes, T. and Franca, L. (1987). A New Finite Element Formulation for Computational Fluid Dynamics. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 65:85–96.
- [Hughes et al., 1986] Hughes, T., Franca, L., and Balestra, M. (1986). A New Finite Element Formulation for Computational Fluid Dynamics: V. Circumventing the Babuška-Brezzi Condition: A Stable Petrov-Galerkin Formulation of the Stokes Problem Accommodating Equal-Order Interpolations. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 59:85–99.
- [Lions, 1996] Lions, P. (1996). *Mathematical Topics in Fluid Mechanics, Vol 1*. Oxford Science, New York [u.a.].
- [Lube, 2006] Lube, G. (2006). Stabilized FEM for Incompressible Flow. Critical Review and New Trends. *ECCOMAS CFD*, pages 1–20.

- [Lube and Rapin, 2006] Lube, G. and Rapin, G. (2006). Residual-Based Stabilized Higher-Order FEM for a Generalized Oseen Problem. *Mth. Models Methods. Appl. Sc.*, 16(7):949–966.
- [Lube et al., 2007] Lube, G., Rapin, G., and Löwe, J. (2007). Local Projection Stabilization for Incompressible Flows: Equal-Order Vs. Inf-Sup Stable Interpolation. *submitted*.
- [Löwe, 2008] Löwe, J. (2008). Stabilisierung durch lokale Projektion für inkompressible Strömungsprobleme. NAM, Georg-August-Universität zu Göttingen.
- [Matthies and Lube, 2007] Matthies, G. and Lube, G. (2007). On Streamline-Diffusion Methods for inf-sup Stable Discretisations of the Generalised Oseen Problem. *Tech. rep., Georg-August Universität Göttingen*.
- [Matthies et al., 2007] Matthies, G., Skrzypacz, P., and Tobiska, L. (2007). A Unified Convergence Analysis for Local Projection Stabilisations Applied to the Oseen Problem. *R.A.I.R.O., Math. Model. Numer. Anal.*, 41:713–742.
- [Olshanskii and Reusken, 2004] Olshanskii, M. and Reusken, A. (2004). Grad-div Stabilization for Stokes Equations. *Math. Comput.*, 73(248):1699–1718.
- [Quarteroni and Valli, 1997] Quarteroni, A. and Valli, A. (1997). *Numerical Approximation of Partial Differential Equations*. Springer, Berlin [u.a.].
- [Rapin and Löwe, 2007] Rapin, G. and Löwe, J. (2007). Local Projection Stabilizations for Inf-Sup Stable Finite Elements Applied to the Oseen Problem. *submitted*.
- [Roos et al., 1996] Roos, H.-G., Stynes, M., and Tobiska, L. (1996). *Numerical Methods for Singularly Perturbed Differential Equations*. Springer, Berlin [u.a.].
- [Schmaljohann, 2007] Schmaljohann, S. (2007). Lokale Projektionsstabilisierung für das Oseen-Problem. Fakultät für Mathematik, Ruhr-Universität Bochum.
- [Schwab, 1998] Schwab, C. (1998). *P- and hp- Finite Element Methods: Theory and Applications in Solid and Fluid Mechanics*. Clarendon Press, Oxford [u.a.].
- [Scott and Zhang, 1990] Scott, L. and Zhang, S. (1990). Finite Element Interpolation of Nonsmooth Functions Satisfying Boundary Conditions. *Math. Comp.*, 54(190):483–493.
- [Strang and Fix, 1973] Strang, G. and Fix, G. (1973). *An Analysis of the Finite Element Method*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- [Taylor and Hood, 1973] Taylor, C. and Hood, P. (1973). A Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations Using the Finite Element Technique. *Internat. J. Comput. & Fluids*, 1(1):73–100.
- [Werner, 2004] Werner, D. (2004). *Funktionalanalysis*. Springer, Berlin, Heidelberg.
- [Zeidler, 1995a] Zeidler, E. (1995a). *Applied Functional Analysis, Applications to Mathematical Physics*. Appl. Math. Sciences 108, Springer, New York [u.a.].
- [Zeidler, 1995b] Zeidler, E. (1995b). *Applied Functional Analysis, Main Principles and Their Applications*. Appl. Math. Sciences 109, Springer, New York [u.a.].
- [Zhang, 2003] Zhang, J. (2003). Numerical Simulation of 2D Square Driven Cavity Using Fourth Order Compact Finite Difference Schemes. *Comput. Math. Appl.*, 45:43–52.
- [Zhang, 1990] Zhang, L. (1990). A Second-Order Upwinding Finite Difference Scheme for the Steady Navier-Stokes Equations in Primitive Variables in a Driven Cavity with a Multigrid Solver. *R.A.I.R.O., Math. Model. Numer. Anal.*, 24:133–150.

Danksagung

Abschließend möchte ich mich bei den Menschen bedanken, die mich bei der Erstellung dieser Arbeit und in der vorausgegangenen Zeit des Studiums unterstützt haben.

Ein besonderer Dank gilt dabei Herrn Professor Gert Lube für die Vergabe des Themas und die ständige Betreuung. Herr Lube nahm sich immer Zeit für mich und ließ mich teilhaben an den aktuellen wissenschaftlichen Entwicklungen rund um die Thematik dieser Arbeit. Dieses direkte Mitwirken an der derzeitigen Forschung war eine Erfahrung, für die ich ihm und Herrn Doktor Gerd Rapin sehr dankbar bin und die zusätzlich die Motivation zum Vorantreiben der Arbeit stark erhöht hat.

Keinesfalls unerwähnt lassen möchte ich den Rest der Arbeitsgruppe. Wenn es etwas zu tun gab, waren immer ~~de~~aler zur Stelle, die einen mit dem Nötigen versorgen konnten oder mit einem zusammen nach Wissen gebaggert haben. Wenn aber eine Pause nötig war, dann wurde versucht den Grill anzumachen. Trotz einiger Anstrengungen war es dadurch eine unheimlich schöne Zeit, die mir wirklich Spaß gemacht hat. Ein herzlicher Dank geht deshalb an FAJ, Allen E. Raiser, Tier mit Hose, Mamu, Winnie und Grünanlagen.

Ein weiteres großes Dankeschön geht an Julia, die durch ihre Korrekturen stark zur Lesbarkeit der Arbeit beigetragen hat und mir beibringen konnte, auch öfter mal den Duden um Rat zu fragen.

Zu guter Letzt danke ich allen, die mich sonst noch unterstützt haben und hier unerwähnt geblieben sind. Insbesondere danke ich aber meiner Familie, die immer zu mir gehalten hat und ohne die das ganze Studium so nicht möglich gewesen wäre.

Vielen Dank.