

STABILISIERUNG DURCH LOKALE
PROJEKTION FÜR INKOMPRESSIBLE
STRÖMUNGSPROBLEME

Diplomarbeit

vorgelegt von
Johannes Löwe
aus
Göttingen

angefertigt im
Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
der
Georg-August-Universität zu Göttingen
2008

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	1
1 Grundlagen	3
1.1 Klassische Funktionenräume	3
1.2 Lebesgue-Räume	4
1.3 Sobolev-Räume	5
1.4 Vektorwertige Funktionen	9
1.5 Aussagen der linearen Funktionalanalysis	10
2 Variationsprobleme in Hilberträumen	13
2.1 Variationsprobleme	13
2.1.1 Galerkin-Verfahren	14
2.1.2 Fehlerabschätzung	15
2.2 Gemischte Variationsprobleme	16
2.2.1 Gemischtes Galerkin-Verfahren und Fehlerabschätzung	17
3 Navier-Stokes-Gleichungen	21
3.1 Die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen	21
3.2 Zeitdiskretisierung	22
3.2.1 Das θ -Schema	23
3.2.2 Die BDF-Verfahren	24
3.3 Linearisierung	24
3.3.1 Linearisierung durch Fixpunkt-Iteration	25
3.3.2 Einfache Newton-Iteration	26
3.4 Die verallgemeinerten Oseen-Gleichungen	26
3.5 Variationsformulierung und schwache Lösungen	27
3.6 Existenz und Eindeutigkeit von schwachen Lösungen	29
4 Finite-Elemente Methode	31
4.1 Triangulierung	31
4.1.1 Viereck- und Hexaederelemente	32
4.2 Finite-Elemente Räume	36
4.3 Interpolationsoperatoren	37
4.4 Divergenzstabile Raumpaare	38
5 Stabilisierte Diskretisierung des Oseen-Problems	41
5.1 Kurzübersicht: Residuale Stabilisierung	41
5.2 Stabilisierung durch lokale Projektion	43

5.3	Konvergenzanalyse für inf-sup stabile Elemente	43
5.3.1	Stabilisierung	45
5.3.2	Konvergenzanalyse	46
5.3.3	Parameterdesign für Taylor-Hood Elemente	51
5.4	Parameterdesign für equal-order Elemente	53
5.5	Die Divergenzstabilisierung	53
5.6	Der Zwei-Level-Ansatz	54
5.7	Implementierung der Projektionsstabilisierung	55
6	Numerische Resultate: Oseen	59
6.1	Implementierung mit deal.II	59
6.2	Informationen zu den Gittern	60
6.3	Problem 1: glatte Referenzlösung	60
6.4	Parameterdesign für Taylor-Hood Elemente	61
6.5	Parameterdesign für equal-order Elemente	66
6.6	h-Konvergenz	69
6.7	Vergleich der Stabilisierungsvarianten	72
7	Numerische Resultate: Navier-Stokes	75
7.1	Problem 2: stationäre 'lid driven cavity'	75
7.2	Darstellung der Lösungen	77
7.3	Stabilisierung des nicht-linearen Problems	78
7.4	h-Konvergenz und Vergleich mit Literaturwerten	80
7.5	Anpassung der Stabilisierungsparameter	84
	Fazit und Ausblick	87
	Literaturverzeichnis	89
	Danksagung	91

Einleitung

Ziel dieser Arbeit ist die numerische Simulation der inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen. Diese beschreiben das Strömungsverhalten von newtonschen Flüssigkeiten oder Gasen für Strömungsgeschwindigkeiten weit unterhalb der Schallgeschwindigkeit. Die entdimensionalisierten inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen lauten:

$$\begin{aligned}\partial_t \mathbf{u} - Re^{-1} \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0\end{aligned}$$

Es handelt sich um ein System nichtlinearer, partieller Differentialgleichungen. Gesucht sind das Geschwindigkeitsfeld \mathbf{u} und der Druck p zu gegebenem Quellterm \mathbf{f} . Die Reynoldszahl Re beeinflusst wesentlich das Verhalten der Lösung. Für viele praktische Anwendungen ist $Re \gg 1$ und das Problem singulär gestört. Die Zeitdiskretisierung und Linearisierung führen zu einer Folge linearer Gleichungen, den sogenannten Oseen-Gleichungen:

$$\begin{aligned}-Re^{-1} \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \mathbf{C} \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0\end{aligned}$$

Die Oseen-Gleichungen werden in ein gemischtes Variationsproblem überführt, dessen Galerkin-Diskretisierung einer speziellen Stabilitätsbedingung genügen muss. Im singulär gestörten Fall treten zudem unphysikalische Oszillationen in der Geschwindigkeitskomponente der diskreten Lösung auf und die Divergenzfreiheit wird zunehmend verletzt. Verfahren zur Verminderung dieser unerwünschten Effekte heißen Stabilisierungsverfahren. Viele dieser Verfahren basieren auf der Abänderung der Variationsformulierung.

Gegenstand dieser Arbeit ist die *Stabilisierung durch lokale Projektion*. Dabei handelt es sich um eine nicht konsistente, symmetrische Abänderung der Variationsformulierung. Im Gegensatz zur weit verbreiteten residualen Stabilisierung werden jedoch keine zusätzlichen Kopplungen zwischen Geschwindigkeit und Druck eingeführt. Es wird ein a-priori Konvergenzresultat für divergenz-stabile Finite-Elemente-Diskretisierungen bewiesen. Dieses Resultat führt zur Konstruktion eines Parameterdesigns für die Stabilisierung, das die Daten des Problems und die Diskretisierungsparameter h sowie die Elementordnung berücksichtigt.

Die Arbeit gliedert sich in folgende Teile: In Kapitel 1 werden funktionalanalytische Grundlagen behandelt. Dazu gehören die Räume klassisch und schwach differenzierbarer Funktionen sowie Aussagen der linearen Funktionalanalysis. In Kapitel 2 werden Variationsprobleme in Hilberträumen und ihre Approximation in endlichdimensionalen Teilräumen beschrieben. Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen sowie die Fehlerabschätzung

bei der Approximation werden für einfache und gemischte Variationsprobleme dargestellt. Insbesondere die speziellen Voraussetzungen für gemischte Variationsprobleme werden besprochen.

Die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen werden in Kapitel 3 behandelt. Die exemplarisch dargestellten Verfahren zur Zeitdiskretisierung und Linearisierung führen zu den Oseen-Gleichungen. Diese werden auf klassische Weise in ein gemischtes Variationsproblem überführt. Mit den zuvor bereitgestellten Mitteln wird unter geeigneten Voraussetzungen die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen bewiesen.

In Kapitel 4 werden die Konstruktion von Finiten-Elemente-Räumen für Viereck- und Hexaedergitter und wichtige Interpolationsoperatoren vorgestellt. Außerdem wird eine divergenz-stabile Diskretisierung des Oseen-Problems durch Taylor-Hood Elemente untersucht.

Die Stabilisierung durch lokale Projektion wird in Kapitel 5 eingeführt. Nach der Formulierung allgemein gehaltener Voraussetzungen wird eine a-priori Fehlerabschätzung bewiesen. Diese wird zur Konstruktion eines Parameterdesigns genutzt. Für die sogenannte Zwei-Level-Projektion werden die Voraussetzungen überprüft und die Vorgehensweise bei der Implementierung kurz erklärt.

Kapitel 6 beinhaltet numerische Resultate für die Zwei-Level-Projektion bei Taylor-Hood Elementen sowie für Elemente gleicher Ordnung. Es werden das Parameterdesign und das a-priori Konvergenzresultat am Oseen-Problem mit einer Referenzlösung überprüft.

Abschließend soll in Kapitel 7 auch die Auswirkung der Stabilisierung beim nichtlinearen Problem untersucht werden. Als Beispiel dient die zweidimensionale 'lid driven cavity' – ein klassisches Benchmark-Problem. Auf groben Gittern sollen durch Stabilisierung eine Verminderung von Oszillationen und eine bessere Übereinstimmung der Lösung mit fein aufgelösten Referenzrechnungen erzielt werden.

Kapitel 8 beinhaltet eine Zusammenfassung des Erreichten und einen Ausblick.

Kapitel 1

Grundlagen

In diesem Kapitel werden verschiedene Funktionenräume eingeführt. Dabei handelt es sich um die klassisch differenzierbaren Funktionen, die Lebesgue-Räume und die Sobolev-Räume. Für Sobolev-Räume werden einige Hilfsmittel wie der Spuroperator und die Regel der partiellen Integration bereitgestellt. Abschließend werden noch wichtige Definitionen und Sätze der linearen Funktionalanalysis zitiert.

1.1 Klassische Funktionenräume

Zunächst sollen die klassischen Funktionenräume eingeführt werden.

Definition 1.1: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränktes Gebiet und $m \geq 0$. Dann werden die Räume klassisch differenzierbarer Funktionen definiert:

$$C^m(\overline{\Omega}) = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ ist } m\text{-mal stetig differenzierbar auf } \Omega \right. \\ \left. \text{und für } |s| \leq m \text{ ist } \partial^s f \text{ auf } \overline{\Omega} \text{ stetig fortsetzbar} \right\}.$$

Dabei sind s ein Multiindex und $\partial^s f$ die partiellen Ableitungen von f , d.h.

$$s = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{N}_0^n, \quad |s| = s_1 + \dots + s_n, \quad \partial^s f(x) = \frac{\partial^{|s|}}{\partial x_1^{s_1} \dots \partial x_n^{s_n}} f(x).$$

Lemma 1.2: Der Raum $C^m(\overline{\Omega})$ ist mit der Norm

$$\|f\|_{C^m(\overline{\Omega})} := \sum_{|s| \leq m} \|\partial^s f\|_{\infty}$$

ein Banachraum.

Beweis: Siehe [Alt99] Lemma 1.8.

Definition 1.3: Es bezeichnet $C^\infty(\Omega)$ die Menge aller auf Ω unendlich oft differenzierbaren (glatten) Funktionen und

$$C_0^\infty(\Omega) := \{f \in C^\infty(\Omega) \mid \overline{\{x \in \Omega \mid f(x) \neq 0\}} \subset \Omega \text{ ist kompakt}\}$$

die Menge der glatten Funktionen mit kompaktem Träger in Ω .

Für einige der folgenden Aussagen müssen wir eine gewisse Regularität des Randes $\partial\Omega$ vom betrachteten Gebiet Ω fordern. Dazu werden jetzt die Begriffe *Lipschitz-Stetigkeit* und *Lipschitz-Rand* eingeführt.

Definition 1.4 (Lipschitz-Stetigkeit): Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränktes Gebiet. Der Raum der Lipschitz-stetigen Funktionen ist dann durch:

$$C^{0,1}(\overline{\Omega}) := \left\{ f \in C^0(\overline{\Omega}) : \sup_{x,y \in \overline{\Omega}, x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} < \infty \right\}$$

definiert.

Definition 1.5 (Lipschitz-Rand): Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränktes Gebiet. Dann hat Ω Lipschitz-Rand, oder Ω ist Lipschitz-Gebiet, falls sich $\partial\Omega$ durch endlich viele offene Mengen U^1, \dots, U^m überdecken lässt, so dass $\partial\Omega \cap U^j$ für $j = 1, \dots, m$ der Graph einer Lipschitz-stetigen Funktion ist und $\Omega \cap U^j$ jeweils auf einer Seite des Graphen liegt.

Lemma 1.6 (Partielle Integration): Seien $f, g \in C_0^\infty(\Omega)$ und s beliebiger Multiindex. Dann gilt die Regel der partiellen Integration:

$$\int_{\Omega} f (\partial^s g) \, dx = (-1)^{|s|} \int_{\Omega} (\partial^s f) g \, dx .$$

1.2 Lebesgue-Räume

Seien λ das Lebesgue-Maß auf dem \mathbb{R}^n , $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ messbar und $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ messbar.

Definition 1.7: Die Halbnormen $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ seien folgendermaßen definiert:

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p \, d\lambda \right)^{\frac{1}{p}} \quad 1 \leq p < \infty ,$$

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)| = \inf_{\lambda(N)=0} \sup_{x \in \Omega \setminus N} |f(x)| .$$

Dann sind die Räume

$$\mathcal{L}^p(\Omega) := \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ messbar und } \|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty \right\}$$

halbnormierte Räume.

Lemma 1.8: Die Relation \sim , definiert durch:

$$f \sim g \quad \text{in } \mathcal{L}^p(\Omega) \quad \iff \quad \|f - g\|_{L^p(\Omega)} = 0 ,$$

ist eine Äquivalenzrelation. Mit ihr werden die Quotientenräume $L^p(\Omega) := \mathcal{L}^p(\Omega)/\sim$ definiert.

Bemerkung 1.9: Bei den $f \in L^p(\Omega)$ handelt es sich um Äquivalenzklassen. Wir werden f trotzdem meist mit einer Funktion identifizieren. Die noch folgenden Einbettungsergebnisse werden es mitunter erlauben einen stetigen Repräsentanten heranzuziehen.

Lemma 1.10: Sei $1 \leq p \leq \infty$. Dann ist der Raum $L^p(\Omega)$ versehen mit der Norm $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ Banachraum.

Beweis: Siehe [Alt99], Lemma 1.11 und Satz 1.14 (Satz von Fischer-Riesz).

Lemma 1.11: Der Raum $L^2(\Omega)$ versehen mit dem Skalarprodukt

$$(f, g)_{L^2(\Omega)} := \int_{\Omega} f g \, d\lambda$$

ist Hilbertraum. Das Skalarprodukt induziert die zuvor definierte Norm.

Lemma 1.12 (Hölder-Ungleichung): Es seien $1 \leq p, q \leq \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $f \in L^p(\Omega)$ bzw. $g \in L^q(\Omega)$, dann ist $fg \in L^1(\Omega)$ und

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}. \quad (1.1)$$

Beweis: Siehe [Alt99], Lemma 1.12.

Definition 1.13: Der Raum der lokal integrierbaren Funktionen wird definiert durch:

$$L^1_{loc}(\Omega) := \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ messbar, } \forall K \subset \Omega \text{ kompakt : } \int_K |u(x)| \, dx < \infty \right\}.$$

1.3 Sobolev-Räume

Die klassischen Funktionenräume sind als Lösungsräume für partielle Differentialgleichungen ungeeignet, da sie hohe Regularitätsanforderungen an die Daten des Problems implizieren. Diese sind in praktischen Anwendungen selten gegeben. Der Ableitungsbegriff wird daher verallgemeinert und es werden Räume *schwach differenzierbarer* Funktionen eingeführt.

Definition 1.14 (Schwache Ableitungen): Sei $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ messbar und s Multiindex, dann heißt $f^{(s)} \in L^1_{loc}(\Omega)$ schwache Ableitung von f , falls gilt:

$$\int_{\Omega} f \, \partial^s \zeta \, d\lambda = (-1)^{|s|} \int_{\Omega} f^{(s)} \zeta \, d\lambda \quad \forall \zeta \in C_0^\infty(\Omega).$$

Bemerkung 1.15: Falls die klassische Ableitung existiert, stimmt sie fast überall mit der schwachen Ableitung überein. Deshalb schreiben wir wie bei klassischen Ableitungen auch für schwache Ableitungen $\partial^s f := f^{(s)}$. Es ist jedoch zu beachten, dass die schwachen Ableitungen nicht punktweise definiert sind.

Mit der Definition von schwachen Ableitungen können jetzt die Räume schwach differenzierbarer Funktionen einführen:

Definition 1.16 (Sobolev-Räume): Wir definieren für $k \in \mathbb{N}_0$ und $1 \leq p \leq \infty$:

$$W^{k,p}(\Omega) := \{f \in L^p(\Omega) \mid \text{für } |s| \leq k \text{ gibt es } \partial^s f \in L^p(\Omega)\}.$$

Die Räume $W^{k,p}(\Omega)$ heißen Sobolev-Räume.

Lemma 1.17: Mit den Normen

$$\|f\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \left(\sum_{|s| \leq k} \left(\|\partial^s f\|_{L^p(\Omega)} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{für } 1 \leq p < \infty$$

sowie

$$\|f\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} := \sum_{|s| \leq k} \|\partial^s f\|_{L^\infty(\Omega)}$$

sind die Sobolev-Räume $W^{k,p}(\Omega)$ Banachräume.

Für $1 \leq p < \infty$ hätten wir die Räume $W^{k,p}(\Omega)$ auch durch Vervollständigung von $C^\infty(\Omega)$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ erhalten können. Dieser Zusammenhang wird nun als Lemma formuliert:

Lemma 1.18: Für $1 \leq p < \infty$ liegt $W^{k,p}(\Omega) \cap C^\infty(\Omega)$ dicht in $W^{k,p}(\Omega)$.

Beweis: Siehe [Alt99], Satz 2.14.

Definition 1.19: Zu den Räumen $W^{k,p}(\Omega)$ werden die Halbnormen

$$|f|_{W^{k,p}(\Omega)} := \left(\sum_{|s|=k} \left(\|\partial^s f\|_{L^p(\Omega)} \right)^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{für } 1 \leq p < \infty$$

und

$$|f|_{W^{k,\infty}(\Omega)} := \sum_{|s|=k} \|\partial^s f\|_{L^\infty(\Omega)}$$

definiert. Diese werden auch Seminormen genannt.

Lemma 1.20: Die Räume $H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$ sind mit dem Skalarprodukt

$$(u, v)_{H^k(\Omega)} := \sum_{|s| \leq k} (\partial^s u, \partial^s v)_{L^2(\Omega)}$$

Hilberträume und die Norm $\|\cdot\|_{H^k(\Omega)}$ ist gerade durch

$$\|v\|_{H^k(\Omega)} = \sqrt{(v, v)_{H^k(\Omega)}}$$

gegeben.

Bei den Problemen, die wir in den Sobolev-Räumen $W^{k,p}(\Omega)$ lösen wollen, treten oft Nebenbedingungen in Form von Randbedingungen auf. Auf den Fall inhomogener Randbedingungen soll später noch eingegangen werden. Für homogene Randbedingungen führen wir zunächst Sobolev-Funktionen mit schwachen Randwerten 0 auf dem Rand von Ω ein.

Definition 1.21: Es sei $k \geq 0$ und $1 \leq p < \infty$. Dann bezeichne $W_0^{k,p}(\Omega)$ die Vervollständigung von $C_0^\infty(\Omega) \cap W_{k,p}(\Omega)$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{W_{k,p}(\Omega)}$. Per Definition sind die Räume $W_0^{k,p}(\Omega)$ Banachräume.

Lemma 1.22 (Poincaré-Friedrichs-Ungleichung): Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand und $1 < p < \infty$. Dann gilt:

$$\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) : \quad \|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C_P |u|_{W^{1,p}(\Omega)} . \quad (1.2)$$

Dabei hängt C_P nur vom Gebiet Ω ab.

Beweis: Siehe [Alt99], Satz 5.15.

Die Poincaré-Friedrichs-Ungleichung liefert unmittelbar die Folgerung:

Folgerung 1.23: Auf $W_0^{1,p}(\Omega)$ – d.h. im Fall homogener Randbedingungen – sind die Norm $\|\cdot\|_{W^{1,p}(\Omega)}$ und die Seminorm $|\cdot|_{W^{1,p}(\Omega)}$ äquivalent.

Lemma 1.24 (Einbettungssätze): Sei Ω ein beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand und $k > l \geq 0$ und $1 \leq p, q < \infty$. So existiert für

$$k - \frac{n}{p} \geq l - \frac{n}{q} \quad (1.3)$$

die stetige Einbettung:

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow W^{l,q}(\Omega) .$$

Für

$$k - \frac{n}{p} \geq l \quad (1.4)$$

existiert die stetige Einbettung:

$$W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^l(\Omega) .$$

Beide Einbettungen sind darüber hinaus kompakt, falls die Ungleichungen (1.3) bzw. (1.4) mit $>$ statt \geq gelten.

Beweis: Siehe [Alt99], Sätze 8.7 und 8.8.

Um in den Sobolev-Räumen inhomogene Randwertprobleme zu stellen, muss geklärt werden, wie Randwerte einer Sobolev-Funktion zu verstehen sind. Sobolev-Funktion sind nur bis auf Nullmengen punktweise definiert und beim Rand $\partial\Omega$ eines beschränkten Lipschitz-Gebiets $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ handelt es sich um eine Nullmenge im \mathbb{R}^n . Betrachten wir zunächst die Randwerte einer glatten Funktionen.

Definition 1.25: Eine glatte Funktion $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$ erfüllt die Dirichlet-Randbedingung $r \in C^\infty(\partial\Omega)$ punktweise, wenn gilt:

$$\forall x \in \partial\Omega : \quad f(x) = r(x) . \quad (1.5)$$

Mit der Definition des Spurooperators

$$\gamma_0 : C^\infty(\overline{\Omega}) \rightarrow C^\infty(\partial\Omega), \quad \forall x \in \partial\Omega : (\gamma_0(f))(x) := f(x)$$

kann die Bedingung (1.5) dann kurz als $\gamma_0(f) = r$ geschrieben werden.

Randwerte von Sobolev-Funktionen erhalten wir nun durch die Fortsetzung des Operators γ_0 auf Sobolev-Räume.

Satz 1.26 (Fortsetzung des Spurooperators): Seien Ω beschränktes Lipschitz-Gebiet und $1 \leq p \leq \infty$. Dann besitzt γ_0 genau eine stetige lineare Fortsetzung:

$$\gamma : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\partial\Omega) .$$

Auch diese Abbildung wird weiterhin Spuroperator genannt und $u|_{\partial\Omega} := \gamma(u)$ geschrieben. Die vorangegangene Definition für homogene Randwerte verträgt sich mit dem Spuroperator:

$$\text{Ker}(\gamma) = W_0^{1,p}(\Omega) .$$

Ein Beweis in etwas allgemeinerer Form ist in [GR86], Theorem 1.5. zu finden. Der Spuroperator γ ist mit dieser Definition nicht surjektiv. Das Bild des Spurooperators ist der Raum $W^{1-1/p,p}(\partial\Omega)$, der hier jedoch nicht allgemein eingeführt werden soll. Wir konzentrieren uns stattdessen auf einen speziellen Fall:

Definition 1.27: Da insbesondere der Hilbertraum $H^1(\Omega)$ als Lösungsraum interessant sein wird, soll hier der zugehörige Raum für Randwerte:

$$H^{1/2}(\partial\Omega) := \gamma(H^1(\Omega))$$

definiert werden.

Auf diese Weise bleibt viel von der Struktur des Raumes $H^{1/2}(\partial\Omega)$ verborgen. Er wird jedoch nur zur Beschreibung der Regularität der Randdaten von Problemen verwendet. Tatsächlich ist $H^{1/2}(\partial\Omega)$ Hilbertraum mit zum Beispiel

$$\|r\|_{1/2, \partial\Omega} := \inf_{\substack{v \in H^1(\Omega) \\ \gamma(v)=r}} \|v\|_{1,\Omega}$$

als Hilbertnorm.

Ein wichtiges Werkzeug für die Überführung von partiellen Differentialgleichungen in Variationsprobleme wird die partielle Integration sein:

Satz 1.28 (Regel der partiellen Integration): Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand. Außerdem seien $u \in W^{1,p}(\Omega)$ und $v \in W^{1,q}(\Omega)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt für $i = 1, \dots, n$:

$$\int_{\Omega} (u \partial_i v + v \partial_i u) = \int_{\partial\Omega} uv \nu_i . \quad (1.6)$$

Dabei ist $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_n) \in [L^\infty(\partial\Omega)]^n$ der äußere Einheits-Normalenvektor von Ω .

Beweis: Siehe [Alt99], Satz A 5.9.

1.4 Vektorwertige Funktionen

Vektorwertige Funktionen werden durch Produkte von Funktionenräumen beschrieben. Die Produkträume werden durch fette Notation gekennzeichnet. Zum Beispiel sei $\mathbf{v} \in \mathbf{W}^{k,p}(\Omega) := [W^{k,p}(\Omega)]^n$ ein schwach differenzierbares Vektorfeld auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Regularitätsaussagen sind also immer komponentenweise zu verstehen. Die Räume $\mathbf{W}^{k,p}(\Omega)$ sind mit der entsprechend Norm Banachräume, und die Räume $\mathbf{H}^k(\Omega)$ mit dem Skalarprodukt

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g})_{\mathbf{H}^k(\Omega)} := \sum_{i=1}^n (f_i, g_i)_{H^k(\Omega)}$$

Hilberträume.

Da im vektorwertigen Fall die Notation mit partiellen Ableitungen und Summen unübersichtlich wird, soll diese durch die Verwendung des *Nabla-Operators* vereinfacht werden:

$$\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^T.$$

Der Gradient, die Divergenz und der Laplace-Operator lassen sich dann schreiben als:

$$\begin{aligned} \text{grad } u &= \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)^T && \text{Gradient,} \\ \text{div } \mathbf{u} &= \nabla \cdot \mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_i} && \text{Divergenz,} \\ \Delta u &= \nabla \cdot \nabla u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} && \text{Laplace-Operator.} \end{aligned}$$

Angewendet auf vektorwertige Funktionen sind der Gradient und der Laplace-Operator komponentenweise zu verstehen.

Für Normen und Skalarprodukte werden die gebräuchlichen Abkürzungen:

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{k,G} &= \|\cdot\|_{H^k(G)} && \text{für } G \subset \Omega, \\ (u, v)_G &= (u, v)_{L^2(G)} && \text{für } G \subset \Omega \end{aligned}$$

verwendet. Für $G = \Omega$ wird der Index Ω und für $k = 0$ der Index 0 weggelassen.

Durch die verkürzte Notation lassen sich für vektorwertige Funktionen spezielle Varianten der partiellen Integration besonders kompakt formulieren:

Folgerung 1.29: Aus der Regel der partiellen Integration 1.28 folgt für $p \in H^1(\Omega)$ und $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$:

$$(\nabla p, \mathbf{v}) = -(\nabla \cdot \mathbf{v}, p), \tag{1.7}$$

sowie für $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^2(\Omega)$ und $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$:

$$(\Delta \mathbf{u}, \mathbf{v}) = -(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) . \quad (1.8)$$

Der Druck kann durch die Navier-Stokes-Gleichungen nur bis auf eine Konstante bestimmt werden, da er nur als Gradient in der Differentialgleichung auftritt. Deshalb wird ein Teilraum von $L^2(\Omega)$ mit zusätzlicher Normierung eingeführt:

$$L_0^2(\Omega) := \left\{ q \in L^2(\Omega) \mid (q, 1)_{L^2(\Omega)} = 0 \right\} . \quad (1.9)$$

$L_0^2(\Omega)$ kann wegen der Eigenschaft

$$\|q\|_{0,\Omega} = \inf_{c \in \mathbb{R}} \|q + c\|_{0,\Omega} = \|\bar{q}\|_{L^2(\Omega)/\mathbb{R}} \quad \forall q \in L_0^2(\Omega)$$

kanonisch mit $L^2(\Omega)/\mathbb{R}$ identifiziert werden, also gerade den Äquivalenzklassen von Funktionen, die nur bis auf eine additive Konstante bestimmt sind.

Es sei $\mathbf{Z} := \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \mid \nabla \cdot \mathbf{v} = 0\}$ und \mathbf{Z}^\perp das orthogonale Komplement von \mathbf{Z} bezüglich des zur Seminorm gehörenden Skalarprodukts $(\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})$ bzw. \mathbf{Z}^0 die polare Menge.

Lemma 1.30: *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ zusammenhängendes Lipschitz-Gebiet. Dann gilt:*

- 1) *grad ist ein Isomorphismus von $L_0^2(\Omega)$ auf \mathbf{Z}^0 ,*
- 2) *div ist ein Isomorphismus von \mathbf{Z}^\perp auf $L_0^2(\Omega)$.*

Beweis: Siehe [GR86], Korollar 2.4.

Bei der Vorgabe von Randbedingungen bei inkompressible Strömungsproblemen ist eine Kompatibilitätsbedingung zu beachten, die die Existenz eines divergenzfreien Vektorfeldes mit diesen Randwerten sichert:

Satz 1.31: *Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ zusammenhängendes Lipschitz-Gebiet und $\mathbf{g} \in \mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega)$ mit $\int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \, ds = 0$. Dann existiert ein $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ mit*

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ in } \Omega \quad \text{und} \quad \mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{g} . \quad (1.10)$$

Dabei ist \mathbf{u} bis auf Addition einer divergenzfreien Funktion aus $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ eindeutig bestimmt. Außerdem gilt:

$$\inf_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega) \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0}} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|_1 \leq C \|\mathbf{g}\|_{1/2, \partial\Omega} .$$

Beweis: Siehe [GR86], Lemma 2.2.

Eine analoge Aussage mit höherer Regularität $\mathbf{g} \in \mathbf{H}^{m-1/2}(\partial\Omega)$, $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^m(\Omega)$ bei hinreichend glattem Rand ist zumindest für 2D ebenfalls in [GR86] in Lemma 3.2 zu finden.

1.5 Aussagen der linearen Funktionalanalysis

In diesem Abschnitt werden einige Definitionen und Aussagen der linearen Funktionalanalysis gesammelt.

Definition 1.32: Mit $\mathcal{L}(X, Y) := \{A : X \rightarrow Y \mid A \text{ linear, stetig}\}$ bezeichnen wir die Menge der linearen stetigen Operatoren von X nach Y .

Lemma 1.33: Seien $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ normierte Räume. Dann ist auch $\mathcal{L}(X, Y)$ mit der Operatornorm:

$$\|A\|_{\mathcal{L}(X, Y)} := \sup_{0 \neq u \in X} \frac{\|Au\|_Y}{\|u\|_X}$$

normierter Raum. Ist zusätzlich Y Banachraum, so auch $\mathcal{L}(X, Y)$.

Beweis: Siehe [Alt99], Satz 3.3.

Definition 1.34: Wir bezeichnen mit $X^* := \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ den Dualraum zu einem normierten Raum X . Für $f \in X^*$ und $v \in X$ definieren wir das duale Produkt:

$$\langle f, v \rangle_{X^*, X} := f(v). \quad (1.11)$$

Satz 1.35 (Satz von Hahn-Banach): Sei U Unterraum des normierten Raums X und $f \in U^*$. Dann gibt es eine Fortsetzung $f' \in X^*$ von f mit:

$$\forall u \in U : f'(u) = f(u) \quad \text{und} \quad \|f'\| = \|f\|.$$

Beweis: Siehe [Alt99], Satz 4.2.

Satz 1.36 (Darstellungssatz von Riesz): Sei X reeller Hilbertraum und $f \in X^*$. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes $u \in X$ mit

$$\forall v \in X : \langle f, v \rangle_{X^*, X} = (u, v).$$

Die Abbildung $R : X^* \rightarrow X, f \mapsto u$ ist ein isometrischer Isomorphismus. R heißt Riesz-scher Darstellungoperator. Mit ihm lassen sich Elemente aus X und X^* identifizieren.

Beweis: Siehe [Alt99], Satz 4.6.

Definition 1.37 (Der duale Operator): Sei $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Dann ist der duale Operator $T^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$ definiert durch:

$$\langle T^*y, x \rangle_{X^*, X} = \langle y, Tx \rangle_{Y^*, Y} \quad \forall x \in X, y \in Y^*.$$

Definition 1.38: Sei $a : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ bilinear. Dann sei die Norm von a definiert durch:

$$\|a\| := \sup_{0 \neq x \in X, 0 \neq y \in Y} \frac{a(x, y)}{\|x\|_X \|y\|_Y}.$$

Im Fall $\|a\| = K < \infty$ ist die Bilinearform stetig.

Das folgende Lemma ermöglicht die Formulierung von Variationsproblemen als Operatorgleichungen in den Dualräumen.

Lemma 1.39: Sei $a : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Bilinearform. Dann gibt es genau einen Operator $A \in \mathcal{L}(X, Y^*)$, so dass für beliebige $u \in X$ und $v \in Y$ gilt:

$$a(u, v) = \langle Au, v \rangle_{Y^*, Y} \quad \text{und} \quad \|A\|_{\mathcal{L}(X, Y^*)} = \|a\| < \infty.$$

Satz 1.40: Seien X, Y reelle Hilberträume und $a : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Bilinearform. Sei $A \in \mathcal{L}(X, Y^*)$ der durch Lemma 1.39 zugeordnete Operator. Für $\gamma > 0$ sind äquivalent:

- i) $\inf_{0 \neq y \in Y} \sup_{0 \neq x \in X} \frac{a(x, y)}{\|x\| \|y\|} \geq \gamma,$
- ii) $\forall y \in Y : \|A^* y\| \geq \gamma \|y\|,$
- iii) $\exists S \in \mathcal{L}(Y^*, X)$ mit $AS = I_{Y^*}$ (Identität) und $\|S\| \leq \gamma^{-1}.$

Beweis: Siehe [Bre74], Theorem 0.1.

Falls $\dim(X) = \dim(Y) < \infty$ folgt damit schon, dass A Isomorphismus ist. Für den allgemeineren Fall muss eine stärkere Forderung gestellt werden.

Folgerung 1.41: Es gelten die Voraussetzungen aus Satz 1.40. Für $\gamma, \bar{\gamma} > 0$ sind dann äquivalent:

- i) $\inf_{0 \neq y \in Y} \sup_{0 \neq x \in X} \frac{a(x, y)}{\|x\| \|y\|} \geq \gamma$ und $\inf_{0 \neq x \in X} \sup_{0 \neq y \in Y} \frac{a(x, y)}{\|x\| \|y\|} \geq \bar{\gamma},$
- ii) $\forall y \in Y : \|A^* y\| \geq \gamma \|y\|$ und $\forall x \in X : \|Ax\| \geq \bar{\gamma} \|x\|,$
- iii) $A : X \rightarrow Y^*$ ist ein Isomorphismus mit $\|A^{-1}\| \leq \gamma^{-1}$ und $\|(A^*)^{-1}\| \leq \bar{\gamma}^{-1}.$

Beweis: Anwendung von Satz 1.40 auf $a(x, y)$ und $\bar{a}(y, x) := a(x, y)$ gleichzeitig liefert unmittelbar die Behauptung. \square

Definition 1.42 (Strikte Koerzitivität): Eine stetige Bilinearform $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ heißt strikt koerzitiv (oder X -elliptisch), falls es eine Konstante $\gamma > 0$ gibt, so dass

$$\forall v \in X : a(v, v) \geq \gamma \|v\|_X^2.$$

Bemerkung 1.43: Offenbar ist strikte Koerzitivität der Bilinearform $a(x, y)$ ein hinreichendes Kriterium für Eigenschaft i) aus Folgerung 1.41 mit $\gamma = \bar{\gamma} = \delta > 0.$

Kapitel 2

Variationsprobleme in Hilberträumen

Ein Zugang zum Lösen linearer, partieller Differentialgleichungen ist die Überführung in ein Variationsproblem, wodurch der Lösungsbegriff verallgemeinert wird. In diesem Kapitel werden Variationsprobleme in Hilberträumen eingeführt und ihre eindeutige Lösbarkeit sowie ihre Approximation behandelt. Eine wichtige Rolle werden gemischte Variationsprobleme spielen. Diese entstehen bei Problemen mit Nebenbedingung, wie es bei den Oseen-Gleichungen der Fall ist.

In diesem Kapitel bezeichnen X, Y reelle Hilberträume und X^*, Y^* jeweils ihre Dualräume.

2.1 Variationsprobleme

Sei $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Bilinearform und $f \in X^*$. Gegenstand der folgenden Untersuchungen soll folgendes Problem sein:

$$\text{Finde } u \in X : \quad a(u, v) = \langle f, v \rangle \quad \forall v \in X . \quad (2.1)$$

Ein Problem dieser Form heißt Variationsproblem. Sei $A : X \rightarrow X^*$ der durch Lemma 1.39 mit der Bilinearform a identifizierte Operator. Dann lässt sich das Problem 2.1 auch in Operatorform schreiben:

$$\text{Finde } u \in X : \quad Au = f \quad \text{in } X^* .$$

Das folgende Lemma formuliert ein hinreichendes Kriterium für die eindeutige Lösbarkeit des Variationsproblems.

Lemma 2.1 (Lax-Milgram): *Es sei $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Bilinearform und $f \in X^*$. Ist a zusätzlich strikt koerzitiv, so hat das Problem (2.1) genau eine Lösung $u \in X$. Für*

diese gilt:

$$\|u\|_X \leq \frac{1}{\gamma} \|f\|_{X^*} .$$

Beweis: Die Aussage folgt mit Bemerkung (1.43) aus Folgerung (1.41). □

Jetzt soll das Variationsproblem im endlichdimensionalen Unterraum $X_h \subset X$ der Dimension $\dim(X_h) = m < \infty$ approximiert werden. Gesucht sind ein konkretes Verfahren und eine Fehlerabschätzung.

2.1.1 Galerkin-Verfahren

Definition 2.2: Als Galerkin-Verfahren zum Problem (2.1) wird das Problem:

$$\text{Finde } u_h \in X_h : \quad a(u_h, v_h) = \langle f, v_h \rangle \quad \forall v_h \in X_h \quad (2.2)$$

bezeichnet.

Da sich die strikte Koerzitivität von a auf beliebige Unterräume $X_h \subseteq X$ überträgt, folgt Existenz und Eindeutigkeit der diskreten Lösungen u_h weiterhin mit Lemma 2.1.

Durch Subtraktion von (2.1) und (2.2) mit Testfunktionen $v_h \in X_h$ folgt:

$$\forall v_h \in X_h : \quad a(u - u_h, v_h) = 0 ,$$

die sogenannte Galerkin-Orthogonalität. Falls a symmetrisch, positiv definit ist, so entspricht u_h der besten Approximation von u in X_h bezüglich des durch a induzierten Skalarprodukts $(u, v)_a := a(u, v)$.

Lemma 2.3: Sei $\{\phi_1, \dots, \phi_m\}$ eine Basis von X_h . Dann ist das Galerkin-Verfahren (2.2) äquivalent zu:

$$\text{Finde } u_h \in X_h : \quad a(u_h, \phi_i) = \langle f, \phi_i \rangle \quad \text{für } i = 1, \dots, m . \quad (2.3)$$

Beweis: Die Äquivalenz folgt unmittelbar aus der Linearität von a und f . □

Durch die Einschränkung der Testfunktionen auf eine Basis von X_h lässt sich (2.3) als lineares Gleichungssystem schreiben. Sei wieder $\{\phi_1, \dots, \phi_m\}$ eine Basis von X_h . Dann lässt sich u_h in Koordinaten bezüglich dieser Basis schreiben:

$$u_h = \sum_{j=1}^m u_j \phi_j , \quad \vec{u} = (u_1, \dots, u_m) .$$

Damit erhalten wir durch Ausnutzung der Linearität von a in der ersten Komponente:

$$a(u_h, \phi_i) = a \left(\sum_{j=1}^m u_j \phi_j, \phi_i \right) = \sum_{j=1}^m u_j a(\phi_j, \phi_i) . \quad (2.4)$$

Mit den folgenden Definitionen für die *Systemmatrix* $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ und die rechte Seite $F \in \mathbb{R}^m$:

$$A = (a(\phi_j, \phi_i))_{i,j=1,\dots,m} \quad \text{und} \quad F = (\langle f, \phi_i \rangle)_{i=1,\dots,m}$$

lässt sich (2.3) also äquivalent als Gleichungssystem

$$A\vec{u} = F$$

im \mathbb{R}^m schreiben. A ist die Matrixdarstellung des mit a identifizierten Operators $A: X_h \rightarrow X_h^*$ bezüglich der Basis $\{\phi_1, \dots, \phi_m\}$. Diese Mehrdeutigkeit des Bezeichners ist hier beabsichtigt. Strikte Koerzitivität von a spiegelt sich dabei in positiver Definitheit der Matrix A wieder:

$$\vec{v}^T A \vec{v} = a(v, v) \geq \delta \|v\|_X \geq \delta C_h \|\vec{v}\|_2 > 0,$$

wobei C_h die Konstante aus der Abschätzung der Normen $\|\cdot\|_X$ und $\|\cdot\|_2$ ist, diese sind auf dem endlichdimensionalen Raum X_h äquivalent.

2.1.2 Fehlerabschätzung

In diesem Abschnitt sollen Resultate zur Fehlerabschätzung bei der Approximation von Variationsproblemen dargestellt werden. Da bisher weder der Hilbertraum X noch der Approximationsraum X_h genau charakterisiert wurden wird die Fehlerabschätzung auf die beste Approximation in Hilberträumen zurückgeführt. Konkrete Räume zur Approximation in den Räumen $L^2(\Omega)$ und $H^1(\Omega)$ werden in Kapitel 4 vorgestellt.

Lemma 2.4 (Lemma von Cea): *Die Bilinearform a sei strikt koerzitiv mit der Konstanten δ , $K := \|a\|$ und u Lösung des kontinuierlichen Variationsproblems (2.1). Für die Lösung u_h von (2.2) gilt dann die Fehlerabschätzung:*

$$\|u - u_h\|_X \leq \frac{K}{\delta} \inf_{v_h \in X_h} \|u - v_h\|_X.$$

Beweis: Die strikte Koerzitivität, Stetigkeit und die Galerkin-Orthogonalität liefern für beliebiges $v_h \in X_h$:

$$\delta \|u - u_h\|_X^2 \leq a(u - u_h, u - u_h) = a(u - u_h, u - v_h) \leq K \|u - u_h\|_X \|u - v_h\|_X.$$

Division mit $\delta \|u - u_h\|_X$ und Übergang zum Infimum liefert die Behauptung. \square

Die Forderung nach strikter Koerzitivität lässt sich etwas abschwächen.

Definition 2.5 (LBB-Bedingung): *Wir sagen, a genügt der diskreten Babuška-Brezzi-Bedingung, falls gilt:*

$$\inf_{0 \neq u \in X_h} \sup_{0 \neq v \in X_h} \frac{a(u, v)}{\|u\|_X \|v\|_X} = \gamma_h > 0.$$

Die Bedingung wird auch diskrete inf-sup Bedingung genannt.

Lemma 2.6 (LBB Fehlerabschätzung): Die stetige Bilinearform a erfülle die diskrete Babuška-Brezzi-Bedingung. Seien u, u_h wie gehabt Lösungen von (2.1) bzw. (2.2). Dann gilt die Fehlerabschätzung:

$$\|u - u_h\|_X \leq \left(1 + \frac{K}{\gamma_h}\right) \inf_{v \in X_h} \|u - v\|_X. \quad (2.5)$$

Beweis: Wir zerlegen den Fehler mit der Dreiecksungleichung in einen Interpolationsfehler und einen Diskretisierungsfehler:

$$\|u - u_h\|_X \leq \|u - v_h\|_X + \|v_h - u_h\|_X \quad (2.6)$$

mit beliebigem $v_h \in X_h$. Zur Abschätzung des Diskretisierungsfehlers wird nun die inf-sup Bedingung verwendet:

$$\begin{aligned} \|v_h - u_h\|_X &\leq \frac{1}{\gamma_h} \sup_{0 \neq w_h \in X_h} \frac{a(v_h - u_h, w_h)}{\|w_h\|_X} \\ &= \frac{1}{\gamma_h} \sup_{0 \neq w_h \in X_h} \frac{a(v_h - u, w_h)}{\|w_h\|_X} \\ &\leq \frac{1}{\gamma_h} \sup_{0 \neq w_h \in X_h} \frac{K \|v_h - u\|_X \|w_h\|_X}{\|w_h\|_X} = \frac{K}{\gamma_h} \|u - v_h\|_X. \end{aligned}$$

Einsetzen in (2.6) und Übergang zum Infimum liefert die Behauptung. \square

Auch wenn wir dieses Resultat nicht direkt verwenden werden, so wird der Beweis zur Fehlerabschätzung der stabilisierten Diskretisierung des Oseen-Problems ganz ähnlich verlaufen – wenn auch deutlich aufwendiger.

Bemerkung 2.7: Die Bedingung $\gamma_h > 0$ sichert die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung für jedes einzelne h . Damit die Fehlerabschätzung aus Lemma 2.6 optimal ist, müssen die γ_h gleichmäßig in h nach unten beschränkt sein. Es existiere also ein γ_0 , so dass

$$\forall h > 0 : \quad \gamma_h \geq \gamma_0 > 0$$

gilt. Dann ist $1 + \frac{K}{\gamma_h} \leq 1 + \frac{K}{\gamma_0}$ und somit die Fehlerabschätzung vollständig auf die beste Approximation im Hilbertraum X_h zurückgeführt. Eine solche Diskretisierung wird als *inf-sup stabil* bezeichnet.

2.2 Gemischte Variationsprobleme

Sogenannte gemischte Variationsprobleme entstehen aus einfachen Variationsproblemen durch Hinzufügen einer linearen Nebenbedingung und die Einführung eines sogenannten Lagrange'schen Multiplikators. Die Darstellung basiert auf [Bre74].

Definition 2.8: Seien X, Y Hilberträume, $a : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ und $b : X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Bilinearformen, $f \in X^*$, $g \in Y^*$, $\alpha = \|a\|$, $\beta = \|b\|$. Dann wird

$$\text{Finde } (u, p) \in X \times Y : \quad \begin{aligned} a(u, v) + b(v, p) &= \langle f, v \rangle \\ b(u, q) &= \langle g, q \rangle \end{aligned} \quad \forall (v, q) \in X \times Y \quad (2.7)$$

als gemischtes Variationsproblem bezeichnet.

Die Voraussetzungen der vorangegangenen Definition sollen für den Rest dieses Abschnittes weiter gelten. Seien $A \in \mathcal{L}(X, X^*), B \in \mathcal{L}(X, Y^*)$ die durch Lemma 1.39 definierten Operatoren zu a bzw. b und B^* der zu B adjungierte Operator. Dann definieren wir $\Lambda : X \times Y \rightarrow X^* \times Y^*$ als

$$\Lambda(v, q) = (Av + B^*q, Bv) .$$

So kann auch das gemischte Variationsproblem (2.7) in Operatorform geschrieben werden:

$$\text{Finde } (u, p) \in X \times Y : \quad \Lambda(u, p) = (f, g) \quad \text{in } X^* \times Y^* .$$

Es bezeichne $Z := \text{Ker}(B) \subset X$ den Kern von B . Ausführlicher heißt das:

$$Z = \{v \in X \mid Bv = 0 \text{ in } Y^*\} = \{v \in X \mid b(v, q) = 0 \quad \forall q \in Y\} .$$

Alle $v \in Z$ erfüllen also die homogene Nebenbedingung. Auf dieser Menge muss die Bilinearform a die Eindeutigkeit der Lösung u sicherstellen. Weiterhin muss dann der Multiplikator p durch die Bilinearform b eindeutig bestimmt werden können. Der nachfolgende Satz formuliert ein hinreichendes Kriterium für diese Eigenschaften und damit die eindeutige Lösbarkeit des gemischten Variationsproblems.

Satz 2.9: *Es gelten die gerade getroffenen Definitionen. Falls zusätzlich*

$$\exists \delta > 0 \quad \forall v \in Z : \quad a(v, v) \geq \delta \|v\|^2 \quad (Z\text{-Elliptizität}) , \quad (2.8)$$

$$\exists \gamma > 0 : \quad \inf_{0 \neq v \in Y} \sup_{0 \neq q \in X} \frac{b(v, q)}{\|v\|_X \|q\|_Y} \geq \gamma > 0 \quad (inf-sup) \quad (2.9)$$

erfüllt sind, so ist Λ Isomorphismus. Es gilt dann:

$$\|\Lambda^{-1}\| \leq M(\alpha, \delta, \gamma) := \max \left(\frac{1}{\delta} + \frac{1 + \frac{\alpha}{\delta}}{\gamma}, \left(1 + \frac{\alpha}{\gamma}\right) \cdot \frac{1 + \frac{\alpha}{\delta}}{\gamma} \right) .$$

Beweis: Siehe [Bre74], Korollar 1.1 und Proposition 1.1.

Bemerkung 2.10: Wir können Z^* mit einem abgeschlossenen Teilraum von X^* identifizieren. Sei $\pi : X^* \rightarrow Z^*$ die orthogonale Projektion von X^* auf Z^* . Die strikte Koerzitivität von a kann dann abgeschwächt werden zu der Forderung, dass πA Isomorphismus auf Z ist, siehe [Bre74], Theorem 1.1.

2.2.1 Gemischtes Galerkin-Verfahren und Fehlerabschätzung

Das Problem (2.7) soll in endlichdimensionalen Teilräumen approximiert werden. Seien $X_h \subset X, Y_h \subset Y$ also endlichdimensionale Unterräume mit $\dim(X_h) = m_x$ bzw. $\dim(Y_h) = m_y$.

Definition 2.11 (Gemischtes Galerkin-Verfahren): Wir bezeichnen

$$\begin{aligned} \text{Finde } (u_h, p_h) \in X_h \times Y_h : \\ a(u_h, v_h) + b(v_h, p_h) = \langle f, v_h \rangle \\ b(u_h, q_h) = \langle g, q_h \rangle \quad \forall (v_h, q_h) \in X_h \times Y_h \end{aligned} \quad (2.10)$$

als gemischtes Galerkin-Verfahren.

Bemerkung 2.12: Betrachten wir $Z_h = \{v_h \in X_h \mid b(v_h, q) = 0 \quad \forall q \in Y_h\}$, so ist im Allgemeinen $Z_h \not\subseteq Z$. D.h. die Koerzitivität aus dem kontinuierlichen Fall überträgt sich nicht automatisch auf den diskreten Fall. Außerdem wird die Nebenbedingung nur schwach erfüllt. Es handelt sich in diesem Sinne also um eine nicht konforme Methode. Inwieweit das folgende Approximationsresultat der Nebenbedingung Rechnung trägt, ist am konkreten Problem zu überprüfen.

Satz 2.13: Neben den allgemeinen Voraussetzungen dieses Abschnitts gelten die Voraussetzungen:

$$\exists \delta_h > 0, \forall v \in Z_h : \quad a(v, v) \geq \delta \|v\|^2 \quad (Z_h\text{-Elliptizität}), \quad (2.11)$$

$$\exists \gamma_h > 0 : \quad \inf_{0 \neq v \in Y_h} \sup_{0 \neq q \in X_h} \frac{b(v, q)}{\|v\|_X \|q\|_Y} \geq \gamma_h > 0 \quad (\text{inf-sup}). \quad (2.12)$$

Dann ist das Problem (2.10) eindeutig lösbar und es gilt die Fehlerabschätzung:

$$\|u - u_h\|_X + \|p - p_h\|_Y \leq \Upsilon_h \left(\inf_{v \in X_h} \|u - v\|_X + \inf_{q \in Y_h} \|p - q\|_Y \right)$$

mit

$$\Upsilon_h = M(\alpha, \delta_h, \gamma_h)(\alpha + \beta) + 1.$$

Beweis: Siehe [Bre74], Korollar 2.1.

Die Erfüllung der Z_h -Elliptizität ist normalerweise unproblematisch. Wesentlich wird die diskrete inf-sup Stabilität bezüglich der Bilinearform b für die Approximationsräume sein. Dadurch wird die Wahl der Räume, für die das gemischte Galerkin-Verfahren anwendbar ist, eingeschränkt. Dieses Resultat geht auf Ladyzhenskaya, Babuška, Brezzi zurück und liefert die mathematische Erklärung, warum einige frühere Versuche zur Diskretisierung gemischter Probleme scheiterten.

Bemerkung 2.14: Sei $\mathbf{X} = X \times Y$. Λ ist Operator zur Bilinearform $\zeta : \mathbf{X} \times \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\zeta((u, p), (v, q)) = a(u, v) + b(v, p) \pm b(u, q).$$

Das gemischte Variationsproblem (2.7) ist dann äquivalent zu:

$$\text{Finde } (u, p) \in \mathbf{X} : \quad \zeta((u, p), (v, q)) = \langle f, v \rangle \pm \langle g, q \rangle \quad \forall (v, q) \in \mathbf{X}.$$

Existenz, Eindeutigkeit und Fehlerabschätzung bei der Approximation in endlichdimensionalen Teilräumen lassen sich dann wie im Fall einfacher Variationsaufgaben behandeln.

Das gemischte Galerkin-Verfahren (2.10) führt nach einer Wahl von Basen für X_h und Y_h auf ein lineares Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ \pm B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ \pm G \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Das selbe Problem entsteht bei Anwendung des Galerkin-Verfahrens auf die Produkt-Bilinearform ζ , wenn die Basen von X_h und Y_h zu einer Basis von $X_h \times Y_h$ kombiniert und entsprechend sortiert werden.

Die Wahl des Vorzeichens für die Nebenbedingung hat entscheidenden Einfluss auf die Eigenschaften des Systems. Bei der Wahl $+B$ im linken, unteren Block handelt es sich bei (2.13) um ein Sattelpunkt-Problem mit indefiniter Matrix. Mit $-B$ ist die Matrix positiv definit. Für iterative Löser und zur Konstruktion von Vorkonditionierern kann die eine oder andere Wahl besser geeignet sein.

Kapitel 3

Navier-Stokes-Gleichungen

Bevor im nächsten Kapitel die Diskretisierung von Funktionenräumen besprochen wird, ist dieses Kapitel den Navier-Stokes-Gleichungen gewidmet. Diese Anordnung wurde gewählt, da die Konstruktion geeigneter Approximationsräume die vollständige Formulierung des Problems mit seinen Daten und Lösungsräumen erfordert.

Die numerische Berechnung von Lösungen der instationären Navier-Stokes Gleichungen wird durch Zeitdiskretisierung und Linearisierung auf eine Folge von linearen Hilfsproblemen zurückgeführt. Die Zeitdiskretisierung und Linearisierung soll nur exemplarisch vorgeführt werden, die Konvergenz und Fehlerabschätzungen zu den gewählten Verfahren werden nicht behandelt. Am Ende dieses Kapitels stehen die Oseen-Gleichungen und deren Variationsformulierung sowie Aussagen zur Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen.

3.1 Die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen

Die Navier-Stokes-Gleichungen beschreiben die Strömung in newtonschen Flüssigkeiten oder Gasen in einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \{2, 3\}$ und über dem Zeitintervall $(0, T]$. Strömungen weit unterhalb der jeweiligen Schallgeschwindigkeit sind nahezu inkompressibel, d.h. die Dichte ist fast konstant. Sie lassen sich durch die inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen beschreiben. Die Gleichungen sind dimensionsbehaftet, können jedoch durch geeignete Normierung entdimensionalisiert werden. Die entdimensionalisierten, instationären, inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen lauten:

$$\partial_t \mathbf{u} - Re^{-1} \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \nabla p = f \quad \text{in } (0, T] \times \Omega \quad (3.1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{in } (0, T] \times \Omega \quad (3.1b)$$

Es fehlen noch Randbedingungen

$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = \mathbf{g} \quad \text{auf } (0, T] \times \partial\Omega \quad (3.2)$$

und ein Anfangswert

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 \quad \text{auf } \{0\} \times \Omega. \quad (3.3)$$

Es handelt sich um ein zeitabhängiges, nichtlineares, partielles Differentialgleichungssystem. Der wesentliche Parameter ist die dimensionslose Größe $Re = \frac{LU}{\nu}$, die Reynoldszahl. Dabei ist L eine charakteristische Länge, z.B. der Gebietsdurchmesser, und U eine charakteristische Geschwindigkeit, z.B. $U = \|\mathbf{u}\|_\infty$. Bei ν handelt es sich um die kinematische Viskosität. Die Reynoldszahl bestimmt wesentlich den Charakter der Lösungen. Für die weitere Darstellung werden Länge und Geschwindigkeit mit 1 normiert und es gilt $Re^{-1} = \nu$.

Bei konstanten Koeffizienten strebt für $0 < Re < Re_0$ die Lösung gegen einen stationären Grenzwert. Für $Re > Re_0$ entwickeln sich zunächst periodische Lösungen, die bei noch größeren Reynoldszahlen chaotisch werden. Die Bestimmung der kritischen Reynoldszahlen ist eine wichtige numerische Anwendung. Periodische Strömungen können starke Wechselwirkungen mit umströmten, dynamischen Strukturen - z.B. Brücken oder Hochhäusern - entwickeln. Die numerische Simulation muss insbesondere das Frequenzverhalten von Strömungen zuverlässig vorhersagen können

3.2 Zeitdiskretisierung

Zur vollständigen Diskretisierung gibt es verschiedene Möglichkeiten. Es kann zuerst eine Diskretisierung des Orts vorgenommen werden. So entsteht ein endlichdimensionales, nichtlineares, gewöhnliches Differentialgleichungssystem, welches durch Standardverfahren gelöst werden kann. Diese Herangehensweise heißt Linienmethode (method of lines, MOL). Ein Nachteil ist, dass die Ortsdiskretisierung über das gesamte Zeitintervall festgelegt ist und schon zu Beginn der Rechnung gewählt werden muss. Die Ortsdiskretisierung kann also das kurzfristige zeitliche Verhalten der Lösung nicht berücksichtigen.

Die hier verfolgte Lösungsstrategie sieht zunächst eine Semidiskretisierung in der Zeit vor. Eine Zeitschrittweitensteuerung auf Basis eines Prädiktor-Korrektor-Verfahrens kann den lokalen zeitlichen Diskretisierungsfehler kontrollieren. Die anschließende Ortsdiskretisierung kann durch Gitteradaption den räumlichen Diskretisierungsfehler dem zeitlichen anpassen. Gegebenenfalls kann das Ortsgitter aus Effizienzgründen für mehrere Schritte beibehalten werden.

Zur Vereinfachung der Darstellung der Zeitdiskretisierung werden die Navier-Stokes-Gleichungen in Räumen divergenzfreier Funktionen betrachtet. So fallen zunächst die Nebenbedingung und der Druck aus der Betrachtung heraus. Das Ausgangsproblem ist durch:

$$\partial_t \mathbf{u}(t) = \underbrace{\mathbf{f}(t) + \nu \Delta \mathbf{u}(t) - (\mathbf{u}(t) \cdot \nabla) \mathbf{u}(t)}_{=: h(\mathbf{u}(t), t)} \quad \text{für } t \in (0, T] \quad (3.4)$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 \quad (3.5)$$

gegeben und soll auf dem Zeitgitter $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = T$ approximiert gelöst werden. Funktionswerte zu den vollen Zeitschritten werden durch $\mathbf{u}^m = \mathbf{u}(t_m)$ abgekürzt und $\tau_m = t_{m+1} - t_m$ bezeichne die zugehörige Zeitschrittweite.

3.2.1 Das θ -Schema

Es sei $0 \leq \theta \leq 1$. Die Integration der Differentialgleichung (3.4) über das Zeitintervall $[t_m, t_{m+1}]$ liefert:

$$\mathbf{u}(t_{m+1}) - \mathbf{u}(t_m) = \underbrace{\int_{t_m}^{t_{m+1}} h(\mathbf{u}(s), s) ds}_{\approx \tau_m h^{m+\theta}}. \quad (3.6)$$

Das Integral auf der rechten Seite kann durch eine Quadraturformel approximiert werden. Es wird eine durch θ parametrisierte Quadraturformel mit einer Stützstelle gewählt:

$$h^{m+\theta} := h(\mathbf{u}^{m+\theta}, t_{m+\theta})$$

mit

$$t_{m+\theta} := \theta t_{m+1} + (1 - \theta)t_m \quad \text{und} \quad \mathbf{u}^{m+\theta} := \theta \mathbf{u}^{m+1} + (1 - \theta)\mathbf{u}^m. \quad (3.7)$$

Die Wahl $\theta = 0$ führt zur linken Eckpunktregel (*explizites Euler-Verfahren*), während $\theta = 1$ zur rechten Eckpunktregel (*implizites Euler-Verfahren*) führt. Zunächst ergibt sich folgender Verfahrensschritt:

$$\frac{\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}^m}{\tau_m} = h(\mathbf{u}^{m+\theta}, t_{m+\theta}). \quad (3.8)$$

Für $\theta = 0$ kann die rechte Seite mit dem bekannten Wert $\mathbf{u}^{m+0} = \mathbf{u}^m$ ausgewertet und somit \mathbf{u}^{m+1} direkt berechnet werden. Falls $\theta \neq 0$ ist, kann (3.7) nach \mathbf{u}^{m+1} umgestellt werden:

$$\mathbf{u}^{m+1} = \frac{\mathbf{u}^{m+\theta} - (1 - \theta)\mathbf{u}^m}{\theta}. \quad (3.9)$$

Durch Einsetzen in (3.8) und Umstellen nach $\mathbf{u}^{m+\theta}$ folgt:

$$\frac{\mathbf{u}^{m+\theta}}{\theta\tau_m} = h(\mathbf{u}^{m+\theta}, t_{m+\theta}) + \frac{\mathbf{u}^m}{\theta\tau_m}. \quad (3.10)$$

Die Lösung zum Zeitpunkt t_{m+1} ist durch die lineare Extrapolation (3.9) gegeben. Das Verfahren besteht also aus einem impliziten Eulerschritt mit reduzierter Schrittweite $\theta\tau_m$ und anschließender expliziter Extrapolation auf die volle Schrittweite. Der Parameter θ steuert den impliziten und expliziten Anteil. Für $\theta = \frac{1}{2}$ besitzt das θ -Schema einen lokalen Zeitdiskretisierungsfehler zweiter Ordnung, hat aber keinerlei dämpfende Eigenschaften.

Wir übertragen das Verfahren auf die Navier-Stokes-Gleichungen und führen die Nebenbedingungen zum Zeitpunkt t_{m+1} und den Druck als Lagrange-Multiplikator wieder ein. Die Nebenbedingungen $\nabla \cdot \mathbf{u}^{m+1} = 0$ in Ω und $\mathbf{u}^{m+1} = \mathbf{g}^{m+1}$ auf $\partial\Omega$ werden für $\theta \neq 0$ ebenfalls mit der Identität (3.9) umgestellt.

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{u}^{m+\theta}}{\theta\tau_m} - \nu\Delta\mathbf{u}^{m+\theta} + (\mathbf{u}^{m+\theta} \cdot \nabla)\mathbf{u}^{m+\theta} + \nabla p^* &= \mathbf{f}(t_{m+\theta}) + \frac{\mathbf{u}^m}{\theta\tau_m} && \text{in } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{u}^{m+\theta} &= (1 - \theta)\nabla \cdot \mathbf{u}^m && \text{in } \Omega \\ \mathbf{u}^{m+\theta} &= \theta\mathbf{g}^{m+1} + (1 - \theta)\mathbf{u}^m && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

Die Zeitableitung wurde also durch einen Reaktionsterm und eine modifizierte rechte Seite ersetzt. Bei Divergenzfreiem \mathbf{u}_0 ist auch für alle $\mathbf{u}^{m+\theta}$ die Divergenzbedingung homogen zu erfüllen. Es bleibt in jedem Schritt ein stationäres, nichtlineares partielles Differentialgleichungssystem zu lösen.

3.2.2 Die BDF-Verfahren

Um ohne großen Mehraufwand Verfahren höherer Ordnung zu erhalten, eignen sich besonders lineare Mehrschrittverfahren. Ein Klasse dieser Verfahren sind die BDF(k)-Verfahren (*backward differentiation formula*). Zur Konstruktion wird ein Interpolationspolynom vom Grad k durch die letzten k bekannten Werte $\mathbf{u}^m, \dots, \mathbf{u}^{m-k+1}$ und den neuen unbekanntem Wert \mathbf{u}^{m+1} gelegt. Dann wird gefordert, dass die Ableitung des Interpolationspolynoms zum Zeitpunkt t_{m+1} die Differentialgleichung erfüllt. Vereinfacht – für konstante Zeitschrittweite τ_m – ist zum Beispiel beim BDF(2)-Verfahren die Zeitableitung des Interpolationspolynoms an der Stelle t_{m+1} :

$$\partial_t \mathbf{u}^{m+1} = \frac{3\mathbf{u}^{m+1} - 4\mathbf{u}^m + \mathbf{u}^{m-1}}{2\tau_m}.$$

Es ergibt sich:

$$\frac{3\mathbf{u}^{m+1}}{2\tau_m} = h(\mathbf{u}^{m+1}, t_{m+1}) + \frac{4\mathbf{u}^m - \mathbf{u}^{m-1}}{2\tau_m}$$

als Verfahrensschritt. Dieser lässt sich analog zum θ -Schema auf die Navier-Stokes-Gleichungen anwenden. Bei den BDF-Verfahren handelt es sich um Mehrschrittverfahren, sie benötigen eine Startphase, in der ausgehend von \mathbf{u}^0 die Werte $\mathbf{u}^1, \dots, \mathbf{u}^{k-1}$ mit ausreichender Konsistenzordnung berechnet werden, bevor das k -Schritt-Verfahren gestartet werden kann.

Anmerkungen zur Zeitdiskretisierung

Die Zeitdiskretisierungsverfahren können mit einer automatischen Zeitschrittweitensteuerung versehen werden, um sich auf die zeitabhängige Struktur der Lösung einzustellen. Bei Konvergenz gegen einen stationären Grenzwert kann so während der Rechnung die Zeitschrittweite sukzessive vergrößert, und damit die Schrittzahl deutlich reduziert werden. Für eine robuste Zeitschrittweitensteuerung des vorgestellten θ -Schemas mit $\theta = \frac{1}{2}$ sei an dieser Stelle auf [Bix89] verwiesen.

3.3 Linearisierung

Die beiden vorgestellten Zeitdiskretisierungsverfahren führen auf eine Folge stationärer Probleme. Diese sind ähnlich zu den ursprünglichen stationären Navier-Stokes-Gleichungen, besitzen jedoch einen zusätzlichen Reaktionsterm mit konstantem Koeffizienten $c = \mathcal{O}(\frac{1}{\tau})$ und eine modifizierte rechte Seite, die jedoch weiterhin mit \mathbf{f} bezeichnet

wird:

$$-\nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + c\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega \quad (3.11a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (3.11b)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \quad \text{auf } \partial\Omega \quad (3.11c)$$

Zwei Standardverfahren zum Lösen nichtlinearer Gleichungssysteme sind die Fixpunktiteration und das Newton-Verfahren. Diese beiden Verfahren sollen nachfolgend kurz vorgestellt werden. Über die Konvergenz der Verfahren können kaum brauchbare Aussagen getroffen werden, oder die hinreichenden Kriterien für Konvergenz sind in praktischen Beispielen selten gegeben. Insbesondere das Newton-Verfahren konvergiert in der hier dargestellten Version selten. Es existieren Globalisierungsstrategien, wie z.B. Line-Search- oder Trust-Region-Verfahren, die deutlich robustere Konvergenzeigenschaften besitzen, die aber hier nicht dargestellt werden können. Die zu lösenden linearen Hilfsprobleme sind jedoch im wesentlichen die gleichen wie bei den einfachen Verfahren.

3.3.1 Linearisierung durch Fixpunkt-Iteration

Sei ein \mathbf{u}_0 als Startwert gegeben. Die klassische Fixpunkt-Iteration (auch Picard-Iteration) ist durch die Folge linearer Probleme:

$$\begin{aligned} &-\nu\Delta\mathbf{u}_{n+1} + (\mathbf{u}_n \cdot \nabla)\mathbf{u}_{n+1} + \alpha\mathbf{u}_{n+1} + \nabla p_{n+1} = \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega \\ \text{Finde } \mathbf{u}_{n+1}, p_{n+1} \text{ mit:} & \quad \quad \quad \nabla \cdot \mathbf{u}_{n+1} = 0 \quad \text{in } \Omega \\ & \quad \quad \quad \mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{g} \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

gegeben. Ein theoretisches Konvergenzresultat ist in [GR86] Theorem 2.4 und Bemerkung 2.2 zu finden. Als Konvergenzkriterium kann eine a-posteriori Fehlerabschätzung für die Fixpunktiteration verwendet werden. Wir werden das Verfahren jedoch etwas abwandeln. Wir setzen $\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \mathbf{w}_{n+1}$ bzw. $p_{n+1} = p_n + r_{n+1}$ und führen einen Dämpfungsparameter $0 < \omega \leq 1$ ein. Wir erhalten durch Ausnutzung von Linearität:

$$\begin{aligned} &-\nu\Delta\mathbf{w}_{n+1} + (\mathbf{u}_n \cdot \nabla)\mathbf{w}_{n+1} + \alpha\mathbf{w}_{n+1} + \nabla r_{n+1} \\ & \quad \quad \quad = \omega(\mathbf{f} - (-\nu\Delta\mathbf{u}_n + (\mathbf{u}_n \cdot \nabla)\mathbf{u}_n + \alpha\mathbf{u}_n + \nabla p_n)) \quad \text{in } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{w}_{n+1} &= -\nabla \cdot \mathbf{u}_n \quad \text{in } \Omega \\ \mathbf{w}_{n+1} &= \mathbf{g} - \mathbf{u}_n \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Auf der rechten Seite der ersten Gleichung tritt das Residuum der nichtlinearen Gleichung für \mathbf{u}_n auf. Dessen Norm kann als Abbruchkriterium für die Iteration verwendet werden. Der Dämpfungsparameter ω wird nur für das nichtlineare Residuum verwendet. Die anderen beiden Residuen – Divergenzbedingung und Randwerte – sind bereits nach dem ersten Iterationsschritt gleich 0 und ändern sich dann nicht weiter.

Für die einfache Fixpunktiteration ist im Allgemeinen bestenfalls lineare Konvergenz zu erwarten. Dämpfungsparameter $\omega < 1$ vergrößern erfahrungsgemäß den Konvergenzradius, verschlechtern gleichzeitig jedoch auch den Kontraktionsfaktor. Eine Gegenüberstellung von Iterationszahlen für ein Navier-Stokes-Problem bei verschiedenen Reynoldszahlen und Dämpfungsparametern ist auf Seite 80 in Tabelle 7.1 zu finden.

3.3.2 Einfache Newton-Iteration

Sei wieder ein \mathbf{u}_0 als Startwert gegeben. Das Newton-Verfahren für das nichtlineare Gleichungssystem $F(\mathbf{u}, p) = f$ ist durch die Folge linearer Probleme:

$$\text{Finde } \mathbf{w}_{n+1}, r_{n+1} \text{ mit: } F'(\mathbf{u}_n, p_n)(\mathbf{w}_{n+1}, r_{n+1}) = f - F(\mathbf{u}_n, p_n)$$

und dem Schritt $(\mathbf{u}_{n+1}, p_{n+1}) = (\mathbf{u}_n, p_n) + (\mathbf{w}_{n+1}, r_{n+1})$ gegeben. Um das Verfahren auf die Navier-Stokes-Gleichungen (3.11) anzuwenden, wird die Ableitung des nichtlinearen Konvektionsterms benötigt:

$$\lim_{t \rightarrow 0, t \neq 0} \frac{((\mathbf{u} + t\mathbf{v}) \cdot \nabla)(\mathbf{u} + t\mathbf{v}) - (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}}{t} = (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{v}. \quad (3.12)$$

Wir erhalten als einzelnen Newtonschritt:

$$\begin{aligned} -\nu \Delta \mathbf{w}_{n+1} + (\mathbf{u}_n \cdot \nabla)\mathbf{w}_{n+1} + (\mathbf{w}_{n+1} \cdot \nabla)\mathbf{u}_n + \alpha \mathbf{w}_{n+1} + \nabla r_{n+1} \\ = \omega(\mathbf{f} - (-\nu \Delta \mathbf{u}_n + (\mathbf{u}_n \cdot \nabla)\mathbf{u}_n + \alpha \mathbf{u}_n + \nabla p_n)) \quad \text{in } \Omega \\ \nabla \cdot \mathbf{w}_{n+1} = -\nabla \cdot \mathbf{u}_n \quad \text{in } \Omega \\ \mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{g} - \mathbf{u}_n \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Auch hier wurde wieder $0 < \omega \leq 1$ als Dämpfungsparameter eingeführt. Bezüglich der Residuen in der zweiten und dritten Gleichung gelten die gleichen Aussagen wie für die Fixpunkt-Iteration, daher werden diese wiederum nicht gedämpft.

Das ungedämpfte Newton-Verfahren erreicht unter geeigneten Voraussetzungen quadratische Konvergenz, der Konvergenzradius ist jedoch häufig sehr klein. In der Praxis ist eine Kombination der Fixpunktiteration zu Beginn und einigen Newton-Schritten am Ende sinnvoll.

3.4 Die verallgemeinerten Oseen-Gleichungen

Die Zeitdiskretisierung und Linearisierung der instationären Navier-Stokes-Gleichungen führte zu einer Folge von linearen Problemen. Bei diesen Problemen handelt es sich um verallgemeinerte Oseen-Probleme:

$$-\nu \Delta \mathbf{u} + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \mathbf{C}\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega \quad (3.13a)$$

$$\text{Finde } \mathbf{u}, p \text{ mit: } \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (3.13b)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{g} \quad \text{auf } \partial\Omega. \quad (3.13c)$$

Dabei wurden die Reaktionsterme zusammengefasst zu:

$$\mathbf{C}\mathbf{u} := \gamma(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{b} + c\mathbf{u},$$

wobei \mathbf{C} eine Matrix ist. Der Parameter γ kann die Werte $\gamma = 0$ bei Fixpunkt-Iteration bzw. $\gamma = 1$ bei Newton-Iteration annehmen. Außerdem ist $c = \mathcal{O}(\frac{1}{\tau})$, wobei τ die Zeitschrittweite ist, falls dem Problem ein instationäres Problem zugrunde liegt, sonst ist $c = 0$.

3.5 Variationsformulierung und schwache Lösungen

Die Betrachtung soll zunächst auf homogene Dirichlet-Randwerte eingeschränkt werden. Nach Multiplikation der partiellen Differentialgleichung (3.13a) mit Testfunktionen \mathbf{v} mit homogenen Dirichlet-Randwerten bzw. (3.13b) mit Testfunktionen q und formaler partieller Integration gemäß Folgerung 1.29 folgt:

Finde (\mathbf{u}, p) mit:

$$\begin{aligned} (\nu \nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) + ((\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\mathbf{C} \mathbf{u}, \mathbf{v}) - (\nabla \cdot \mathbf{v}, p) &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \\ (\nabla \cdot \mathbf{u}, q) &= 0 & \forall q \in Q \end{aligned} \quad (3.14)$$

als gemischtes Variationsproblem. Randintegrale treten dabei nicht auf, da die Testfunktionen auf dem Rand verschwinden. Die Randwerte werden direkt in den Lösungsraum eingearbeitet, wodurch die Räume für Lösung und Testfunktionen identisch sind.

$$\mathbf{V} := \mathbf{H}_0^1(\Omega) = [H_0^1(\Omega)]^n \quad \text{und} \quad Q := L_0^2(\Omega) = \left\{ q \in L^2(\Omega) \mid (q, 1)_{L^2(\Omega)} = 0 \right\} \quad (3.15)$$

Für die Daten des Problems wird folgende Regularität gefordert. Es sei $\nu \in L^\infty(\Omega)$, $\mathbf{b} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, $\mathbf{C} \in [L^\infty(\Omega)]^{n \times n}$ und $\mathbf{f} \in \mathbf{H}^{-1}(\Omega)$.

Definition 3.1: Eine Lösung $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{V} \times Q$ von (3.14) heißt schwache Lösung des Oseen-Problems mit homogenen Dirichlet-Randwerten.

Falls es eine klassische Lösung der Oseen-Gleichungen (3.13) gibt, so ist diese auch schwache Lösung. Durch die hohe Regularität der klassischen Lösung kann die partielle Integration zur Überführung in das Variationsproblem angewendet werden. Andererseits erlaubt die niedrige Regularität einer schwachen Lösung die Umkehrung der partiellen Integration hin zur starken Formulierung nicht. Es handelt sich also um eine mit dem klassischen Lösungsbegriff verträgliche Verallgemeinerung.

Mit den Definitionen folgender Bi- bzw. Trilinearformen:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = a_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + a_1(\mathbf{b}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad (3.16)$$

$$a_0(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\nu \nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v}) + (\mathbf{C} \mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad (3.17)$$

$$a_1(\mathbf{b}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = ((\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad (3.18)$$

$$b(\mathbf{v}, p) = -(\nabla \cdot \mathbf{v}, p) \quad (3.19)$$

lässt sich das Variationsproblem (3.14) wie in Kapitel 2 als gemischtes Variationsproblem schreiben:

$$\text{Finde } (\mathbf{u}, p) \in \mathbf{V} \times Q \text{ mit:} \quad \begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \\ b(\mathbf{u}, q) &= 0 & \forall q \in Q \end{aligned} \quad (3.20)$$

Zunächst soll die Stetigkeit der Bilinearformen a und b nachgewiesen werden. Dies wird in mehreren Schritten erfolgen.

Lemma 3.2: Die Trilinearform a_1 hat folgende Eigenschaften. Für beliebige $\mathbf{b} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ und $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ gilt:

$$|a_1(\mathbf{b}, \mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq M_1 \|\mathbf{b}\|_1 \|\mathbf{u}\|_1 \|\mathbf{v}\|_1$$

und

$$a_1(\mathbf{b}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) = -\frac{1}{2}((\nabla \cdot \mathbf{b})\mathbf{v}, \mathbf{v}) .$$

Beweis: Für die Raumdimensionen $n = 2$ bzw. $n = 3$ folgt aus Lemma 1.24 die stetige Einbettung von $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$. Es folgt:

$$\begin{aligned} |a_1(\mathbf{b}, \mathbf{u}, \mathbf{v})| &= \left| \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} b_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} v_i \, dx \right| \leq \sum_{i,j=1}^n \left| \int_{\Omega} b_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} v_i \, dx \right| \\ &\leq \sum_{i,j=1}^n \|b_j\|_{L^4(\Omega)} \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)} \|v_i\|_{L^4(\Omega)} \\ &\leq M'_1 \sum_{i,j=1}^n \|b_j\|_1 \|u_i\|_1 \|v_i\|_1 \leq M_1 \|\mathbf{b}\|_1 \|\mathbf{u}\|_1 \|\mathbf{v}\|_1 . \end{aligned}$$

Der zweite Teil der Behauptung folgt aus der Regel der partiellen Integration:

$$\begin{aligned} a_1(\mathbf{b}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} b_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_i \, dx = - \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} v_i \frac{\partial (b_j v_i)}{\partial x_j} \, dx \\ &= - \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} b_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_i \, dx - \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial b_j}{\partial x_j} v_i^2 \, dx \\ &= -a_1(\mathbf{b}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) - ((\nabla \cdot \mathbf{b})\mathbf{v}, \mathbf{v}) . \end{aligned}$$

Addition von $a_1(\mathbf{b}, \mathbf{v}, \mathbf{v})$ und anschließende Division mit 2 liefert die Behauptung. \square

Lemma 3.3: Es sei $\nu_{\infty} := \|\nu\|_{\infty}$ und $c_{\infty} < \infty$ mit:

$$\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n : \quad \|(\mathbf{C} - (\nabla \cdot \mathbf{b})\mathbf{I}_n) \vec{v}\|_2 \leq c_{\infty} \|\vec{v}\|_2 \quad (3.21)$$

fast überall in Ω . Dann gibt es $\alpha, \beta > 0$, so dass für beliebige $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}$ und $q \in Q$

$$|a(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq \alpha \|\mathbf{u}\|_1 \|\mathbf{v}\|_1 \quad \text{und} \quad |b(\mathbf{v}, q)| \leq \beta \|\mathbf{v}\|_1 \|q\|_0$$

gilt.

Beweis: Mit der Konstanten M_1 aus 3.2 folgt für die Bilinearform a :

$$\begin{aligned} |a(\mathbf{u}, \mathbf{v})| &\leq |a_0(\mathbf{u}, \mathbf{v})| + |a_1(\mathbf{b}, \mathbf{u}, \mathbf{v})| \\ &\leq \nu_{\infty} \|\mathbf{u}\|_1 \|\mathbf{v}\|_1 + c_{\infty} \|\mathbf{u}\|_0 \|\mathbf{v}\|_0 + M_1 \|\mathbf{b}\|_1 \|\mathbf{u}\|_1 \|\mathbf{v}\|_1 \\ &\leq (\nu_{\infty} + c_{\infty} + M \|\mathbf{b}\|_1) \|\mathbf{u}\|_1 \|\mathbf{v}\|_1 , \end{aligned}$$

und für die Bilinearform b :

$$|b(\mathbf{v}, q)| = \left| \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i}, q \right)_{L^2(\Omega)} \right| \leq \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right\|_0 \|q\|_0 \leq \sqrt{n} \|\mathbf{v}\|_1 \|q\|_0 .$$

\square

Für die Analysis des stabilisierten Problems wird später die Darstellung mit der Produktbilinearform gewählt. Das Variationsproblem lautet dann:

$$\text{Finde } (\mathbf{u}, p) \in \mathbf{V} \times Q \text{ mit : } \quad A(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}, q) = L(\mathbf{v}, q) \quad \forall (\mathbf{v}, q) \in \mathbf{V} \times Q \quad (3.22)$$

mit den Bilinearformen $A : (\mathbf{V} \times Q) \times (\mathbf{V} \times Q) \rightarrow \mathbb{R}$ und $L : \mathbf{V} \times Q \rightarrow \mathbb{R}$ die durch

$$\begin{aligned} A(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}, q) &:= a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) - b(\mathbf{u}, q) \\ L(\mathbf{v}, q) &:= \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle \end{aligned}$$

definiert sind. Hier wurde die Nebenbedingung subtrahiert, um ein positiv definites System zu erhalten – vergleiche Bemerkung 2.14.

3.6 Existenz und Eindeutigkeit von schwachen Lösungen

Es soll nun die Existenz und Eindeutigkeit von schwachen Lösungen der Oseengleichungen untersucht werden. Dazu soll Satz 2.9 verwendet werden. Die Stetigkeit der Bilinearformen wurde bereits behandelt. Es bleibt einerseits die \mathbf{Z} -Elliptizität und andererseits die inf-sup Bedingung zu überprüfen. Bei

$$\mathbf{Z} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} \mid b(\mathbf{v}, q) = 0 \text{ für alle } q \in Q\}$$

handelt es sich die schwach divergenzfreien Vektorfelder. Da das Vektorfeld \mathbf{b} zum Beispiel aus dem vorherigen Schritt einer Fixpunkt-Iteration stammt, kann keine punktweise Divergenzfreiheit angenommen werden. Für die Daten des Problems sollen aber folgende Abschätzungen gelten. Es gebe $c_0 \geq 0$ mit:

$$\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n : \quad \vec{v}^T \left(\mathbf{C} - \frac{1}{2}(\nabla \cdot \mathbf{b})\mathbf{I}_n \right) \vec{v} \geq c_0 \vec{v}^T \vec{v} \quad \text{fast überall in } \Omega. \quad (3.23)$$

Entscheidenden Anteil an dieser Voraussetzung hat der Koeffizient $c > 0$ aus der Zeitdiskretisierung, der sich antiproportional zur Zeitschrittweite verhält. Er trägt zu \mathbf{C} den Anteil $c\mathbf{I}_n$ bei, während die Divergenz von \mathbf{b} für $h \rightarrow 0$ klein werden sollte. Falls $c = 0$ ist, also im stationären Fall, kann für das Newtonverfahren diese Bedingung praktisch nicht erfüllt werden. \mathbf{C} enthält den Gradienten von \mathbf{b} , der keiner Symmetrie- oder Definitheitsbeschränkung unterliegt. Weiter sei $\nu_0 := \text{ess inf}_{x \in \Omega} |\nu(x)| > 0$.

Satz 3.4: *Das Variationsproblem (3.14) hat unter den gerade besprochenen Voraussetzungen eine eindeutige Lösung $(\mathbf{u}, p) \in \mathbf{V} \times Q$.*

Beweis: Für beliebiges $\mathbf{v} \in \mathbf{Z}$ gilt:

$$\begin{aligned} a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) &= a_0(\mathbf{v}, \mathbf{v}) + a_1(\mathbf{b}, \mathbf{v}, \mathbf{v}) \\ &= (\nu \nabla \mathbf{v}, \nabla \mathbf{v}) + (\mathbf{C} \mathbf{v}, \mathbf{v}) - \frac{1}{2}((\nabla \cdot \mathbf{b})\mathbf{v}, \mathbf{v}) \\ &= (\sqrt{\nu} \nabla \mathbf{v}, \sqrt{\nu} \nabla \mathbf{v}) + ((\mathbf{C} - \frac{1}{2}(\nabla \cdot \mathbf{b})\mathbf{I}_n)\mathbf{v}, \mathbf{v}) \\ &\geq |\sqrt{\nu} \mathbf{v}|_1^2 + c_0 \|\mathbf{v}\|_0^2 =: \|[\mathbf{v}]\|_*^2 \end{aligned}$$

Die Bilinearform a ist also \mathbf{Z} -elliptisch.

Die inf-sup Bedingung zur Bilinearform b folgt aus Lemma 1.30. Nach diesem Lemma existiert zu jedem $q \in Q$ ein $\mathbf{w} \in \mathbf{Z}^\perp$ mit der Eigenschaft:

$$\nabla \cdot \mathbf{w} = q \quad \text{und} \quad |\mathbf{w}|_1 \leq C \|q\|_0 .$$

Die Konstante C ist dabei unabhängig von q . Es folgt:

$$\sup_{0 \neq \mathbf{v} \in \mathbf{V}} \frac{b(\mathbf{v}, q)}{|\mathbf{v}|_1} \geq \frac{b(\mathbf{w}, q)}{|\mathbf{w}|_1} = \frac{(\nabla \cdot \mathbf{w}, q)}{|\mathbf{w}|_1} = \frac{\|q\|_0^2}{|\mathbf{w}|_1} \geq \frac{1}{C} \|q\|_0$$

Es sind also beide Voraussetzungen von Satz 2.9 erfüllt, woraus die Behauptung folgt. \square

Das inhomogene Dirichlet-Randwertproblem

Die Einschränkung auf homogene Randwerte soll nun aufgehoben werden. Stattdessen erfülle $\mathbf{g} \in \mathbf{H}^{1/2}(\partial\Omega)$ die Bedingung:

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \, ds = 0 .$$

Unter Zuhilfenahme von Satz 1.31 über die divergenzfreie Fortsetzung von Randwerten folgt die Existenz eines \mathbf{u}_* mit

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_* = 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{u}_*|_{\partial\Omega} = \mathbf{g} .$$

Durch die Zerlegung $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{u}_*$ und Linearität folgt die Äquivalenz des Variationsproblems (3.20) zu:

$$\text{Finde } (\tilde{\mathbf{u}}, p) \in \mathbf{V} \times Q \text{ mit: } \begin{array}{ll} a(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + b(\mathbf{v}, p) = \langle \mathbf{f}, \mathbf{v} \rangle - a(\mathbf{u}_*, \mathbf{v}) & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \\ b(\tilde{\mathbf{u}}, q) = 0 & \forall q \in Q \end{array} .$$

Dieses Problem hat eine eindeutige Lösung, wodurch die Existenz der eindeutigen Lösung $(\mathbf{u}, p) = (\mathbf{u}_* + \tilde{\mathbf{u}}, p) \in [\mathbf{u}_* + \mathbf{V}] \times Q$ des inhomogenen Randwert-Problems folgt.

Kapitel 4

Finite-Elemente Methode

Im vorherigen Abschnitt wurde die Fehlerabschätzung bei der Approximation von Variationsproblemen auf die Interpolationseigenschaft der Approximationsräume zurückgeführt. Geeignete Räume sollen jetzt für die Hilbert-Räume $V = H_0^1(\Omega)$ und $Q = L^2(\Omega)$ konstruiert werden. Ein wichtiger Punkt wird dabei die Erfüllung der diskreten inf-sup Bedingung für die spezielle Bilinearform b bei inkompressiblen Strömungsproblemen sein.

Hinsichtlich der effizienten Behandlung der entstehenden linearen Gleichungssysteme ist es vorteilhaft, wenn die Systemmatrix möglichst viele Null-Einträge besitzt, da diese nicht extra abgespeichert werden müssen. Solche sogenannte *schwachbesetzte* Matrizen sind speichereffizient und reduzieren die Kosten für Matrix-Vektor-Produkte erheblich. Um dieses Ziel zu erreichen, werden die Träger der Basisfunktionen möglichst klein und lokal gehalten, damit sie sich möglichst wenig überlappen. Basisfunktionen mit disjunkten Trägern erzeugen keinen Eintrag in der Systemmatrix.

Vom beschränkten Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \{2, 3\}$ wird jetzt zusätzlich gefordert, dass es polyedrisch berandet ist. Diese Eigenschaft erlaubt es, das Gebiet exakt zu zerlegen, ohne Fehler am Rand zu machen. Krummlinige Ränder können im Allgemeinen nicht exakt durch die Triangulierung aufgelöst werden und es entsteht ein zusätzlicher Konsistenzfehler. Die Ordnung dieses Fehlers kann bei hinreichender Randglätte durch eine Randapproximation höherer Ordnung verbessert werden.

Die folgende Darstellung basiert in weiten Teilen auf [GR86] Anhang A, Seiten 95-109.

4.1 Triangulierung

Zur Konstruktion von Finite-Elemente Funktionenräumen wird eine Zerlegung des Gebiets Ω in Teilgebiete benötigt. Es handelt sich um eine gitterbasierte Methode, wie zum Beispiel auch bei Finite-Volumen-Methoden. Es existieren aber auch gitterfreie Methoden, wie zum Beispiel die Klasse der Partikel-Verfahren.

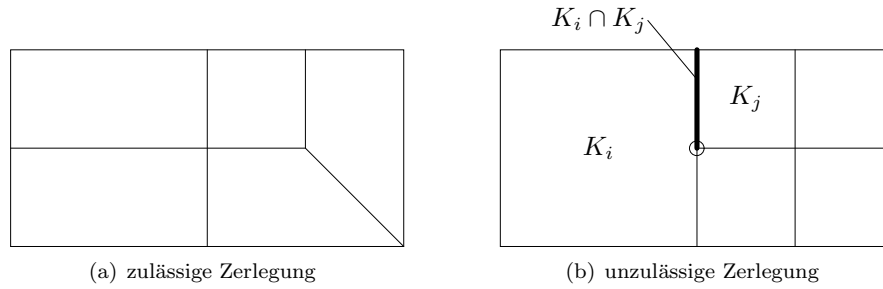


Abbildung 4.1: Beispiele für Zerlegungen

Definition 4.1 (Triangulierung): Eine Zerlegung $\mathcal{T} = \{K_i\}_{i=1,\dots,m}$ des Gebiets Ω in endlich viele abgeschlossene, konvexe, polyedrische Teilgebiete K_i mit

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}} K$$

wird Triangulierung genannt.

Definition 4.2 (Zulässige Zerlegung): Eine Zerlegung \mathcal{T} von Ω heißt zulässig, falls der Durchschnitt zweier verschiedener $K_i, K_j \in \mathcal{T}$ leer, genau eine gemeinsame Seitenfläche (nur falls $n = 3$), Kante ($n \geq 2$) oder Ecke ist.

Unzulässige Zerlegungen führen zu sogenannten hängenden Knoten, wie in Abbildung 4.1 dargestellt ist. Diese erschweren die Konstruktion stetiger, diskreter Funktionenräume auf solchen Gittern. In vielen Software-Implementierungen sind hängende Knoten vorgesehen und die Stetigkeit wird durch zusätzliche lineare Einschränkungen der Freiheitsgrade erreicht. Die theoretische Untersuchung z.B. der diskreten inf-sup Bedingung für auf diese Weise konstruierte Funktionenräume ist jedoch sehr aufwendig bzw. stellen sich diese als nicht inf-sup stabil heraus.

4.1.1 Viereck- und Hexaederelemente

Finite Elemente können auf verschiedenen Zelltypen definiert werden. Die einfachsten Elemente sind simpliziale Elemente (Dreiecke, Tetraeder). Diese erlauben jedoch keine anisotrope Verfeinerung zum Rand des Gebiets, ohne dass dabei die Innenwinkel ausarten. Als Alternative bieten sich Vierecks- und Hexaederelemente an. In drei Raumdimensionen gibt es noch weitere Mischformen wie Prismen oder Pyramiden. Alle diese Formen lassen sich auch zusammen in einer Zerlegung verwenden.

Erfahrungsgemäß besitzen Vierecks- und Hexaederelemente etwas bessere Eigenschaften als die entsprechenden simplizialen Elemente, sind aber stärker von der Elementqualität abhängig. Auch die automatische Generierung von reinen Hexaedergittern für komplexe Geometrie ist noch immer ein schwieriges Problem. Die Darstellung in diesem Kapitel wird sich auf Vierecks- und Hexaederelemente beschränken, da alle in dieser Arbeit dargestellten numerischen Resultate auf diesen Elementen basieren. Analoge Aussagen gelten auch für simpliziale Elemente.

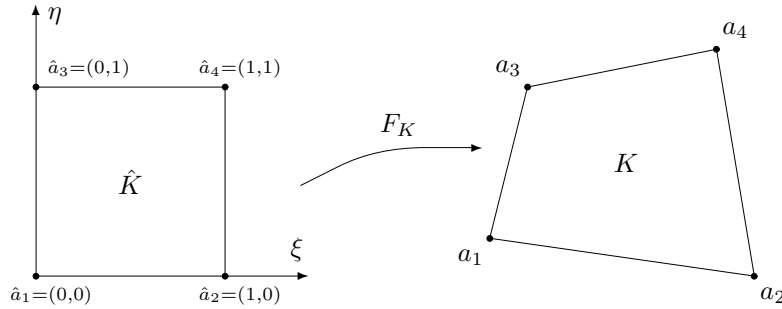


Abbildung 4.2: Referenzelement und bilinear transformiertes Element

Als Referenzelement wird der n -dimensionale Einheitsquader $\hat{K} = [0, 1]^n$ verwendet. Die Ecken von \hat{K} werden mit \hat{a}_j , $1 \leq j \leq 2^n$ bezeichnet und seien lexikographisch geordnet. Seien a_j die Ecken eines beliebigen konvexen Vierecks/Hexaeders K in geeigneter Numerierung. Dann gibt es genau eine invertierbare multilineare Abbildung $F_K : \hat{K} \rightarrow K$ mit:

$$F_K(\hat{a}_j) = a_j \quad \text{für } 1 \leq j \leq 2^n .$$

Für Vierecke ist diese durch

$$F_K(\xi, \eta) = (1 - \xi)(1 - \eta) a_1 + \xi(1 - \eta) a_2 + (1 - \xi)\eta a_3 + \xi\eta a_4$$

gegeben. Dabei handelt es sich gerade um die Lagrangedarstellung zu den Stützstellen \hat{a}_j mit den Koeffizienten a_j . Für Hexaeder lässt sich die Transformation analog darstellen.

Die Abbildung F_K ist im Allgemeinen nicht affin linear – außer K ist ein Parallelogramm/Parallelepiped. Für $n = 3$ sind zwar die Kanten von K gerade Strecken, die Seitenflächen liegen aber nicht in einer Ebene. Bei einem Hexaederelement handelt es sich also im Allgemeinen nicht um ein Polytop. Die Forderung, dass Ω polyedrisch berandet ist, könnte also etwas abgeschwächt werden.

Gesucht sind nun geeignete Parameter um die Qualität der einzelnen Gitterzellen zu beschreiben.

Definition 4.3 (Gitterparameter h_K und ρ_K): Zur Beschreibung der Regularität eines Vierecks-/Hexaederelements werden zwei Größen herangezogen:

$$h_K = \text{diam}(K) ,$$

der Durchmesser des Elements K und

$$\rho_K = 2 \min_{1 \leq i \leq 2^n} \sup \{ \text{diam}(B) \mid \text{Ball } B \subset S_i \} .$$

Dabei sind S_i die von den n an die Ecke a_i angrenzenden Kanten aufgespannten n -Simplizes – in 2d Dreiecke (siehe Abb. 4.3) und in 3d entsprechend Tetraeder (siehe

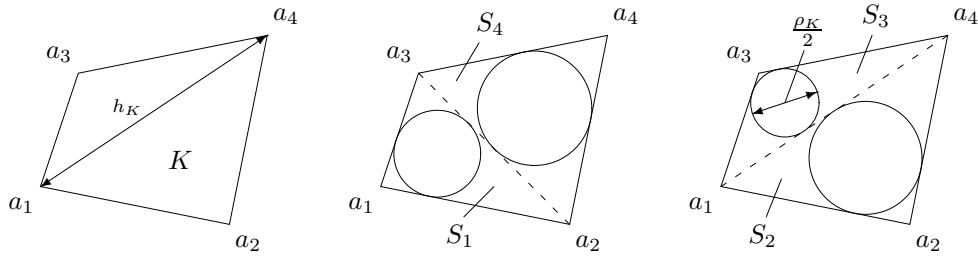


Abbildung 4.3: Gitterparameter h_K und ρ_K

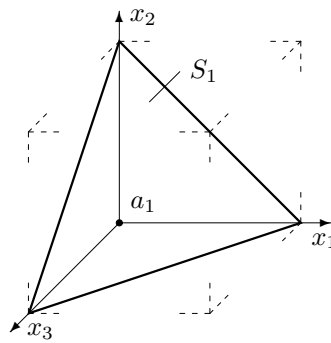


Abbildung 4.4: Konstruktion von S_1 am Referenzelement in 3d

Abb. 4.4). Als Maß für die Qualität eines Elements kann

$$\sigma_K = \frac{h_K}{\rho_K}$$

verwendet werden.

Wir werden nun Familien von Triangulierungen $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ betrachten, wobei für $K \in \mathcal{T}_h$ die Eigenschaft $h_K \leq h$ gelten soll. Die Triangulierungen werden mit $h \rightarrow 0$ immer feiner.

Bemerkung 4.4: Um auf dem Standardweg optimale Interpolationsfehlerabschätzungen zu erhalten, werden die Integrale durch Anwendung der Transformationsformel auf das Referenzelement zurückgezogen und folgende Abschätzungen verwendet:

$$\begin{aligned} \|DF_K\|_{\infty, \hat{K}} &\leq C_1 h_k & \|J_F\|_{\infty, \hat{K}} &\leq C_2 h_K^2 \\ \|DF_K^{-1}\|_{\infty, K} &\leq C_3 h_k \rho_K^{-2} = \sigma_K^2 h_k^{-1} & \|J_F^{-1}\|_{\infty, K} &\leq C_4 \rho_K^{-2} = \sigma_K^2 h_k^{-2} \end{aligned}$$

Dabei ist DF_K die Jacobi-Matrix zu F_K und $J_F := \det(DF_K)$ die Funktionaldeterminante. Die Konstanten C_1, \dots, C_4 sind unabhängig vom Element K .

Entscheidend für die Herleitung der Interpolationseigenschaft ist die Beschränkung des Parameters σ_K . Dies gibt Anlass zur folgenden Definition:

Definition 4.5 (Isotrope Zerlegungen): Ein Familie $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ von Zerlegungen heißt isotrop (oder auch regulär), falls es ein $\sigma > 0$ gibt, so dass

$$\forall h > 0, \forall K \in \mathcal{T}_h : \quad \sigma_K \leq \sigma .$$

Anschaulich verhindert die Beschränkung von σ_K , dass die Elemente zu Dreiecken degenerieren oder ihr Seitenverhältnis beliebig variiert. Regularität bezieht sich auf jedes einzelne Element, erlaubt jedoch beliebige Größenunterschiede zwischen den Elementen. Diese Eigenschaft ist oft erwünscht, z.B. um Singularitäten in der Lösung aufzulösen, erlaubt jedoch keine globale Fehlerabschätzung in h .

Definition 4.6 (Quasi-uniforme Zerlegungen): Ein Familie $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ von Zerlegungen heißt quasi-uniform, falls es $\sigma, \tau > 0$ gibt, so dass

$$\forall h > 0, \forall K \in \mathcal{T}_h : \quad \tau h \leq h_K \leq \sigma \rho_K .$$

Insbesondere ist eine quasi-uniforme Familie auch isotrop.

Quasi-Uniformität beschränkt zusätzlich den Größenunterschied zwischen größtem und kleinstem Element der Zerlegung.

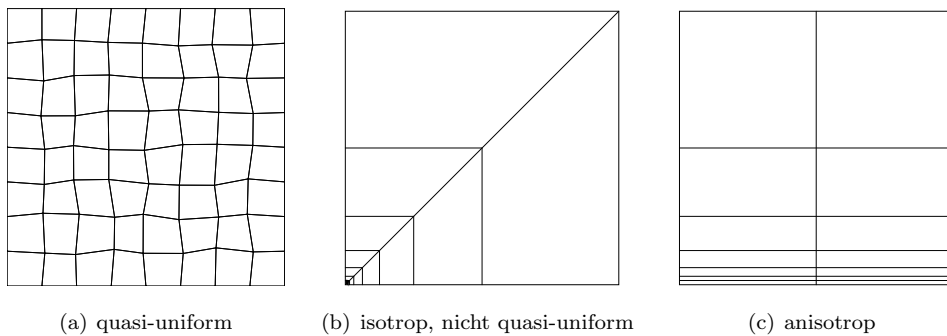


Abbildung 4.5: Beispiele für Zerlegungen

In Abbildung 4.5 sind Gitter einer quasi-uniformen Familie, einer isotropen aber nicht quasi-uniformen Familie und einer anisotropen Familie dargestellt. Die Isotropie der zweiten Zerlegung ist daran zu erkennen, dass es bis auf Ähnlichkeit nur zwei verschiedene Vierecke gibt – Trapeze mit festem Seitenverhältnis und das Quadrat in der linken, unteren Ecke. Bei Fortsetzung der Verfeinerung in Richtung der Ecke entstehen jedoch immer kleinere Elemente, während die Feinheit der Zerlegung durch das größte Element bestimmt wird – die Familie ist also nicht quasi-uniform. Die Verwendung solcher – zu einem Randpunkt hin verfeinerten Gitter – kann bei einspringenden Ecken oder unstetigen Randdaten, die die Regularität der Lösung lokal verschlechtern, sinnvoll sein.

Im anisotropen Beispiel geht bei Verfeinerung zum Rand hin für die Zellen am Rand $\sigma_K \rightarrow 0$. Gerade solche Gitter werden eingesetzt, um Grenzschichten in Strömungen aufzulösen, deren Lage jedoch schon bei der Gittergenerierung bekannt sein muss. Grenzschichten bilden sich bei Strömungen oft parallel zu einer Wand. In Wandnähe kann das

asymptotische Verhalten der Lösung in wandnormaler Richtung analytisch beschrieben werden. Mit diesen Informationen können der Abstand des wandnächsten Knotens und die Verteilung der weiteren Knoten optimiert werden.

4.2 Finite-Elemente Räume

Abstrakt ist ein Finites-Element durch ein Tripel (K, \mathcal{P}, Σ) definiert. Dabei sind K ein konvexes, polyedrisches Gebiet, \mathcal{P} ein endlichdimensionaler, linearer Funktionenraum und Σ eine Basis des Dualraums \mathcal{P}' . Σ wird als die Menge der *Freiheitsgrade* bezeichnet. Falls Auswertungsfunktionale in einer unisolventen Stützstellenmenge als Basis Σ verwendet werden, so entspricht ein Freiheitsgrad gerade einem Funktionswert an einer Stützstelle. Versehen wir \mathcal{P} mit der Lagrange-Basis zu diesen Stützstellen, so lassen sich die Freiheitsgrade kanonisch mit den Koeffizienten bezüglich dieser Basis identifizieren, sie wird dann *nodale Basis* genannt.

Im Folgenden wird auf den abstrakten Unterbau durch Finite-Elemente verzichtet und es werden direkt die Funktionenräume auf ganz Ω definiert. Wegen der Isomorphie von \mathcal{P} und \mathcal{P}' werden wir manchmal auch die Basisfunktionen selbst als Freiheitsgrade bezeichnen.

Definition 4.7: Für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ sei $\mathbf{x}^\alpha := \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}$ und damit

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_k(K) &:= \text{span} \{ K \rightarrow \mathbb{R}, \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}_0^d, |\alpha| \leq k \} , \\ \mathcal{Q}_k(K) &:= \text{span} \left\{ K \rightarrow \mathbb{R}, \mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}^\alpha \mid \alpha \in \mathbb{N}_0^d, \max_{1 \leq i \leq n} \{\alpha_i\} \leq k \right\} . \end{aligned}$$

der Standardpolynomraum bzw. der Tensorpolynomraum. Dann lassen sich die gebräuchlichen Finiten-Element-Räume (kurz FE-Räume) definieren durch:

$$\mathcal{P}_{-k, \mathcal{T}_h} = \{ q \in L^2(\Omega) \mid q|_K \circ F_K \in \mathcal{P}_k(\hat{K}) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \} \quad (4.1)$$

und

$$\mathcal{Q}_{k, \mathcal{T}_h} = \{ q \in L^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}) \mid q|_K \circ F_K \in \mathcal{Q}_k(\hat{K}) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \} \quad (4.2)$$

$$\mathcal{Q}_{-k, \mathcal{T}_h} = \{ q \in L^2(\Omega) \mid q|_K \circ F_K \in \mathcal{Q}_k(\hat{K}) \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \} \quad (4.3)$$

Dabei wird anstelle von \mathcal{T}_h meist nur h geschrieben, also z.B. $\mathcal{Q}_{k,h}$. Wir schreiben \mathcal{R} falls \mathcal{P} oder \mathcal{Q} gemeint sein kann.

Elementweise unstetige FE-Räume sind in der Notation durch den negativen Polynomgrad angedeutet. Einen stetigen durch \mathcal{P}_k erzeugten FE-Raum gibt es auf Viereck- und Hexaedergittern nicht, da pro Zelle zu wenige Basisfunktionen zur Verfügung stehen, um Stetigkeit über die Elementgrenzen hinweg zu erreichen.

Es ist insbesondere zu beachten, dass die gerade definierten FE-Räume keine Polynomräume sind – außer K ist Parallelogramm/Parallelepiped. Das liegt daran, dass F_K^{-1} nicht polynomiell ist. Zur Verdeutlichung wäre $\mathcal{Q}_{k,h}^{\text{mapped}}$ als Bezeichnung sinnvoll, ist jedoch unüblich und lang.

4.3 Interpolationsoperatoren

Die in diesem Abschnitt angeführten Interpolationsfehlerabschätzungen beinhalten die Gitterweite h und auch die Elementordnung k . In den zitierten Quellen ist meist nur die Abschätzung bezüglich h enthalten. Diese können jedoch mit Abschätzungen aus [Sch98] kombiniert werden, um die hier angegebenen Abschätzungen zu erhalten, die auch die polynomielle Ordnung berücksichtigen.

Definition 4.8 (L^2 -Projektion): *Es sei $\mathcal{R}_{k,h}$, $k \in \mathbb{Z}$ einer der zuvor auf Ω eingeführten stetigen oder unstetigen FE-Räume. Die L^2 -Projektion $\pi : L^2(\Omega) \rightarrow \mathcal{R}_{k,h}$ ist definiert durch*

$$\forall w_h \in \mathcal{R}_{k,h} : \quad (v - \pi v, w_h)_{L^2(\Omega)} = 0 .$$

Bei der L^2 -Projektion handelt es sich um ein spezielles Variationsproblem im endlich-dimensionalen Hilbertraum $\mathcal{R}_{k,h}$. Dieses kann wie in Abschnitt 2.1.1 beschrieben in ein lineares Gleichungssystem überführt werden. Die dadurch zur Basis $\{\phi_1, \dots, \phi_m\}$ von $\mathcal{R}_{k,h}$ definierte Matrix

$$M = ((\phi_j, \phi_i)_{L^2(\Omega)})_{i,j=1,\dots,m}$$

heißt *Massematrix*. Sie ist symmetrisch, positiv definit.

Handelt es sich um einen unstetigen FE-Raum mit einer Basis, so dass die Träger $\text{supp}(\phi_j)$ für jedes j in genau einem $K \in \mathcal{T}_h$ enthalten ist, und sind die Basisfunktionen nach Elementen sortiert, so hat M Blockdiagonalgestalt. Zur Berechnung der L^2 -Projektion muss dann nicht ein $m \times m$ Gleichungssystem sondern für jede Zelle ein lokales, viel kleineres Gleichungssystem gelöst werden. Daher wird die L^2 -Projektion in unstetigen FE-Räume auch *lokale L^2 -Projektion* genannt.

Lemma 4.9: *Sei $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq l \leq k+1$ und $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ eine isotrope Gitterfamilie. Für die L^2 -Projektion $\pi : L^2(\Omega) \rightarrow \mathcal{Q}_{\pm k,h}$ gilt dann die lokale Interpolationsfehlerabschätzung:*

$$\forall v \in H^l(\Omega), \forall K \in \mathcal{T}_h : \quad \|v - \pi v\|_{m,K} \leq C \frac{h_K^{l-m}}{k^{l-m}} |v|_{l,K} \quad m \in \{0, 1\} . \quad (4.4)$$

Beweis: Siehe [GR86], Lemma A.5.

Für die Interpolation mit stetigen FE-Räumen und unter Beibehaltung von homogenen Dirichlet-Randwerten wird folgendes Resultat verwendet.

Lemma 4.10 (Scott-Interpolationsoperator): *Seien $k \in \mathbb{N}$ und $1 \leq l \leq k+1$. Dann existiert ein Interpolationsoperator $I_{h,k} : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathcal{Q}_{k,h} \cap H_0^1(\Omega)$ mit der Eigenschaft:*

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) \cap H^l(\Omega), \forall K \in \mathcal{T}_h : \quad \|v - I_{h,k} v\|_{m,K} \leq C \frac{h_K^{l-m}}{k^{l-m}} \|v\|_{l, \Lambda(K)} \quad \text{für } 0 \leq m \leq l . \quad (4.5)$$

Bei $\Lambda(K)$ handelt es sich um eine Umgebung von K , die alle zu K benachbarten Elemente umfasst:

$$\Lambda(K) := \bigcup \{K' \mid K' \in \mathcal{T}_h, K' \cap K \neq \emptyset\}.$$

Beweis: Siehe [SZ90].

Eine weitere wichtige Abschätzung ist die inverse Ungleichung.

Lemma 4.11 (Inverse Ungleichung): *Es sei \mathcal{T}_h (lokal) quasi-uniform. Dann gibt es eine Konstante $\mu_{inv} > 0$ unabhängig von h und K so dass gilt:*

$$\forall v \in \mathcal{Q}_{k,h} : \quad |v|_{1,K} \leq \mu_{inv} \frac{k^2}{h_K} \|v\|_{0,K}.$$

Beweis: Siehe [GR86], Lemma A.6.

4.4 Divergenzstabile Raumpaare

Für die Diskretisierung von inkompressiblen Strömungsproblemen werden zwei FE-Räume benötigt. Einerseits \mathbf{V}_h für die Geschwindigkeit und andererseits Q_h für den Druck. Die Galerkin-Formulierung zum kontinuierlichen Variationsproblem (3.22) lautet dann:

$$\text{Finde } (\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h \text{ mit:} \quad \begin{aligned} a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) &= \langle \mathbf{f}, \mathbf{v}_h \rangle & \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \\ b(\mathbf{u}_h, q_h) &= 0 & \forall q_h \in Q_h \end{aligned} \quad (4.6)$$

Nur wenn für das verwendete Raumpaar \mathbf{V}_h/Q_h die diskrete inf-sup Bedingung (2.12) mit der Bilinearform b gilt, wird mit der klassischen Galerkin-Formulierung eine stabile Approximation des Drucks erreicht. In diesem Fall wird von einem divergenzstabilen Raumpaar gesprochen. Die kontinuierlichen Lösungsräume erfüllen die inf-sup Bedingung, was der dazu äquivalenten Aussage von Lemma 1.30 entspricht.

Die ersten Versuche einer Diskretisierung mit stetigen Elementen gleicher Ordnung (engl. *equal-order*) scheiterten, da B^T einen nichttrivialen Kern besitzt (mit B dem b zugeordneten Operator). Diese Elemente lassen sich jedoch durch geeignete Stabilisierung des Drucks trotzdem verwenden. Gesucht ist jedoch ein unmittelbar divergenzstabiles Raumpaar.

Um einen nicht-trivialen Kern von B^T zu vermeiden, muss der Druckraum verkleinert werden. Ein Kandidat ist das Q_1/P_0 -Element. Dieses Raumpaar ist zusätzlich dadurch motiviert, dass die Ordnung des Differentialoperators für die Geschwindigkeit um eins höher ist, als die des Differentialoperators für den Druck. Es ist jedoch nicht inf-sup stabil. Auf einfachen kartesischen Gittern besitzt B^T wiederum einen nichttrivialen Kern der einen *Schachbrett-Druck* enthält. Doch selbst nach Elimination des Kerns kann eine schwache Instabilität nachweisen werden. Die inf-sup-Konstante verhält sich proportional zur Gitterweite h wodurch die Konvergenz in der Fehlerabschätzung aufgehoben wird. Die Elimination des Kerns reicht nicht aus, um die inf-sup Bedingung gleichmäßig in h zu erfüllen, da es sich bei ihr nicht um eine rein algebraische Eigenschaft handelt. Eine ausführliche Betrachtung ist in [Bra03] auf den Seiten 153-157 zu finden. Dennoch liefert

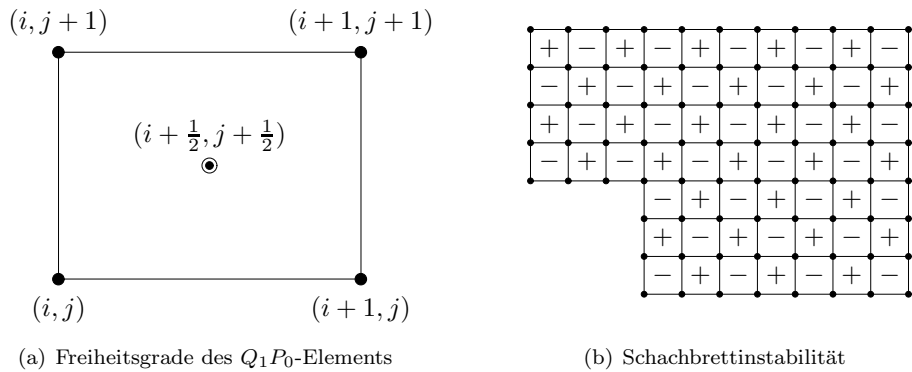


Abbildung 4.6: Freiheitsgrade des Q_1/P_0 -Elements und Schachbrettinstabilität

das Q_1/P_0 Element in vielen praktischen Rechnungen gute Resultate. Für Gitter, die sich aus einer speziellen Makroelementstruktur zusammensetzen, konnte eine gleichmäßige inf-sup Stabilität nachgewiesen werden.

Als inf-sup stabil (auf allgemeinen Gittern) hat sich die Familie der Q_k/Q_{k-1} -Elemente für $k \geq 2$ herausgestellt. Eine allgemeine Beweistechnik, die auf einer überlappenden Makroelementpartition basiert, wobei die inf-sup Bedingung auf den Makroelementen gelten soll, ist in [Ste90] zu finden. Das Elementpaar Q_k/Q_{k-1} ist schon auf Makroelementen aus zwei benachbarten Zellen inf-sup stabil, wodurch die für den Beweis benötigte Makroelementpartition für allgemeine Gitter leicht zu konstruieren ist.

Die Paarung mit dem unstetigen polynomiellen Druck $Q_k/P_{-(k-1)}$ ist ebenfalls inf-sup stabil, erreicht jedoch auf allgemeinen Gittern bei der Interpolation nicht die optimale Konvergenzordnung. Die Interpolationseigenschaft der $P_{-(k-1)}$ -Elemente wurde in [ABF02] genauer untersucht und auch in dieser Arbeit soll im Abschnitt zu numerischen Resultaten eine Reduktion der Konvergenzordnung gezeigt werden.

Kapitel 5

Stabilisierte Diskretisierung des Oseen-Problems

Eine Stabilisierung des Oseen-Problems ist aus verschiedenen Gründen wichtig. Bei der Verletzung der diskreten inf-sup Bedingung treten bei der Anwendung des Galerkin-Verfahrens (4.6), wie im Abschnitt 4.4 erläutert, Instabilitäten im Druck auf. Außerdem treten im konvektionsdominanten Fall, d.h. für $\nu \rightarrow 0$ falsche Oszillationen in der Geschwindigkeit auf. Ein weiteres Problem ist die nur schwach erfüllte Nebenbedingung, Lösungen des voll diskretisierten Oseen-Problems sind in der Regel nicht punktweise divergenzfrei. Insbesondere bei Taylor-Hood Elementen ist der Druckraum klein und die Divergenzfreiheit wird nur durch wenige Funktionen getestet.

Stabilisierungsverfahren sind Verfahren zur Verminderung der falschen Oszillationen oder Stärkung der Nebenbedingung. In diesem Kapitel soll zunächst ein kurzer Überblick über die residualbasierte Stabilisierung gegeben werden. Dann wird die Stabilisierung durch lokale Projektion für inf-sup stabile Elemente, die das Hauptthema dieser Arbeit ist, vorgestellt und unter geeigneten, allgemeinen Voraussetzungen ein a-priori Konvergenzresultat bewiesen. Dieses wird zur Konstruktion eines Parameterdesigns für die zu wählenden Stabilisierungsparameter verwendet. Das Kapitel wird mit der Beschreibung des Zwei-Level-Ansatzes zur Stabilisierung durch lokale Projektion und Ausführungen zur praktischen Implementierung abgeschlossen.

5.1 Kurzübersicht: Residuale Stabilisierung

Eine weit verbreitete Technik zur Stabilisierung des Oseen-Problems ist die residualbasierte Stabilisierung (RBS). Sie ist eine Kombination von SUPG (streamline upwind/Petrov Galerkin), PSPG (pressure stabilization/Petrov Galerkin) und Grad-Div-Stabilisierung. Die Druckstabilisierung durch PSPG wurde zuerst in [HFB86] für equal-order Elemente beim Stokes Problem untersucht, um die inf-sup Bedingung zu umgehen. Für das Navier-Stokes Problem wurde diese um die Stromlinienstabilisierung mit SUPG

ergänzt, die erstmals in [BH82] vorgestellt wurde. Dass eine zusätzliche Stabilisierung der Divergenz-Nebenbedingung erforderlich ist, wurde in verschiedenen unabhängigen Quellen festgestellt.

Bei der residual basierten Stabilisierung werden elementweise die Residuum der partiellen Differentialgleichungen mit bestimmten gewichteten Größen getestet. Die Variationsformulierung wird auf folgende Weise abgeändert:

$$\text{Finde } (\mathbf{u}, p) : \quad A(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}, q) + S_{rbs}(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}, q) = L(\mathbf{v}, q) + L_{rbs}(\mathbf{v}, q) \quad \forall (\mathbf{v}, q) .$$

Dabei sind die zusätzlichen Terme durch

$$S_{rbs}(\mathbf{u}, p; \mathbf{v}, q) := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \underbrace{(L_{Os}(\mathbf{u}, p), \delta_K^u(\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \delta_K^p \nabla q)_K}_{\text{SUPG} + \text{PSPG}} + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \underbrace{\gamma_K (\nabla \cdot \mathbf{u}, \nabla \cdot \mathbf{v})_K}_{\text{Grad-Div}} ,$$

$$L_{rbs}(\mathbf{v}, q) := \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \overbrace{(\mathbf{f}, \delta_K^u(\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \delta_K^p \nabla q)_K}$$

definiert. Bei $\mathbf{f} - L_{Os}(\mathbf{u}, p)$ handelt es sich um das Residuum der Oseen-Gleichung. Die Divergenzstabilisierung ist ein *Interior-Penalty*-Verfahren mit quadratischem Strafterm, kann jedoch auch als residuale Stabilisierung verstanden werden. Die optimale Wahl der Parameter $\gamma_K, \delta_K^u, \delta_K^p$ hängt von der Wahl der FE-Räume und den Daten des Problems ab. Für equal-order und Taylor-Hood Elemente wurde in [LR06] unter Beschränkungen der Stabilisierungsparameter die Stabilität der Methode nachgewiesen und Konvergenz mit optimaler Ordnung bezüglich bestimmter gitterabhängigen Normen gezeigt. Eine gewisse Schwierigkeit bereitet die zusätzliche Kopplung zwischen Geschwindigkeit und Druck. Eine vollständige Entkopplung der SUPG und PSPG Stabilisierungen ist daher nicht möglich.

Bei höherer Regularität der Lösung, es werden zellweise $\Delta \mathbf{u}$ und ∇p als schwache Ableitungen benötigt, handelt es sich um ein konsistentes Verfahren. Das Konvergenzresultat beinhaltet Kontrolle über die L^2 -Norm der Divergenz. Nachteilig wirkt sich die zusätzliche Kopplung zwischen der Geschwindigkeit \mathbf{u} und dem Druck p aus. Werden weitere unbekannte Größen und Gleichungen zum Problem hinzugenommen, z.B. die Temperatur T bei einem thermisch gekoppelten System, so treten durch Verwendung des Residuums auch für diese weitere Kopplungen auf. Die Konvergenzanalyse muss dann neu betrachtet werden und wird zunehmend komplex.

Die residual basierte Stabilisierung beinhaltet viele Terme und erfordert insbesondere die Auswertung von zweiten Ableitungen bei der Berechnung des Residuums, ist aber leicht in bestehende Implementierungen zu integrieren. Durch die residuale Stabilisierung ändert sich die Struktur der Matrix des Sattelpunktproblems zu:

$$\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{RBS} \begin{pmatrix} A_1 & B_1^T \\ B_2 & C \end{pmatrix} .$$

Die Systemmatrix verliert an Symmetrie und die Konstruktion von effizienten Vorkonditionierern wird aufwendiger. Wird für inf-sup stabile Elemente auf die Druckstabilisierung verzichtet, so gilt $B_2 = B$ und $C = 0$.

5.2 Stabilisierung durch lokale Projektion

Die Stabilisierung durch lokale Projektion kann als VMS-Methode (engl. *variational multiscale method*) verstanden werden. Der VMS-Ansatz basiert auf einer orthogonalen Skalenseparation in große und kleine aufgelöste Skalen und sehr kleine – durch die Diskretisierung nicht aufgelöste – Skalen. Unter der Annahme, dass die sehr kleinen Skalen keinen direkten Einfluss auf die großen Skalen haben, kann ihr Einfluss auf die kleinen aufgelösten Skalen durch künstliche Diffusion modelliert werden. Ein physikalisch motiviertes Turbulenzmodell – dann allerdings auf die Navier-Stokes-Gleichungen angewendet – ist in der Regel nichtlinear.

Zur Beschreibung der großen Skalen im FE-Raum gibt es mehrere Möglichkeiten. Hier werden sie durch lokale Projektion π in einen gröberen, unstetigen FE-Raum definiert. Die kleinen Skalen sind dann durch den Fluktuationsoperator $\kappa = id - \pi$ festgelegt. Die Verwendung lokaler Projektion ermöglicht – im Gegensatz zur globalen Projektion in einen stetigen FE-Raum – eine effiziente Implementierung des Verfahrens. Zwei Möglichkeiten zur Interpretation von *größer* in FE-Räumen sind die Reduktion der polynomiellen Ordnung und die Vergrößerung des Gitters. Die in dieser Arbeit für numerische Rechnungen verwendete Zwei-Level-Methode nutzt eine Kombination von beidem zur Definition der großen Skalen.

Die Arbeit [MST07] fasst verschieden Varianten der Stabilisierung durch lokale Projektion in einem einheitlichen Rahmen zusammen und leitet eine a-priori Fehlerabschätzung her. Dort wurde jedoch nur die equal-order Diskretisierung berücksichtigt. Die Ergebnisse wurden, unter Mitwirken des Autors der vorliegenden Arbeit, in [RL07] auf inf-sup stabile Diskretisierungen erweitert und in [LRL07] mit den Ergebnissen für equal-order Diskretisierungen verglichen. Die Ergebnisse dieser beiden Arbeiten werden hier ausführlich dargestellt und durch umfangreiche numerische Tests überprüft.

5.3 Konvergenzanalyse für inf-sup stabile Elemente

Zur Definition der Stabilisierung durch lokale Projektion für inf-sup stabile Finite-Elemente werden die Räume $\mathbf{V}_h/[D_h^u]^n$, Q_h/D_h^p benötigt. Bei \mathbf{V}_h/Q_h handelt es sich um das Elementpaar der Lösungsräume, für das die diskrete inf-sup Bedingung:

$$\exists \beta_0 > 0 : \quad \inf_{0 \neq \mathbf{v} \in \mathbf{V}_h} \sup_{0 \neq q \in Q_h} \frac{b(\mathbf{v}, q)}{\|\mathbf{v}\|_1 \|q\|_0} \geq \beta_0 \quad (5.1)$$

gleichmäßig in h gelte. Mit k_u und k_p seien die polynomiellen Ordnungen der Räume V_h bzw. Q_h bezeichnet. D_h^u und D_h^p sind die Grobräume, die zur Definition der Skalenseparation genutzt werden. Zunächst werden drei möglichst allgemein gehaltene Voraussetzungen für die Konvergenzanalyse formuliert. Die erste Voraussetzung fordert geeignete Interpolationseigenschaften der diskreten Lösungsräume \mathbf{V}_h und Q_h .

Voraussetzung (1.a): Es existiere ein Interpolationsoperator $i_h^u : H_0^1(\Omega) \rightarrow V_h \cap H_0^1(\Omega)$,

für den die Interpolationsfehlerabschätzung:

$$\forall 1 \leq l \leq k_u + 1, \forall w \in H^l(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \forall K \in \mathcal{T}_h : \\ \|w - i_h^u w\|_{m,K} \leq C \frac{h_K^{l-m}}{k_u^{l-m}} \|w\|_{l,\Lambda(K)} \quad m \in \{0, 1\} \quad (5.2)$$

gilt. Insbesondere werden dabei die homogenen Randwerte erhalten.

Voraussetzung (1.b): Es existiere ein Interpolationsoperator $i_h^p : L_0^2(\Omega) \rightarrow Q_h \cap L_0^2(\Omega)$, für den die Interpolationsfehlerabschätzung:

$$\forall 0 \leq l \leq k_p + 1, \forall w \in H^l(\Omega) \cap L_0^2(\Omega), \forall K \in \mathcal{T}_h : \\ \|w - i_h^p w\|_{m,K} \leq C \frac{h_K^{l-m}}{k_p^{l-m}} \|w\|_{l,K} \quad m \in \{0, 1\} \quad (5.3)$$

gilt. Diesmal wird die Integralnormierung erhalten.

Die zweite Voraussetzung ist eine Interpolationseigenschaft des Fluktationsoperators. Diese sichert, dass es sich bei den Fluktuationen tatsächlich um kleine Skalen handelt. Sie wird insbesondere bei der Abschätzung des Konsistenzfehlers benötigt.

Voraussetzung (2): Es seien $\pi_h^{u/p} : L^2(\Omega) \rightarrow D_h^u/D_h^p$ die lokalen L^2 -Projektionen in die beiden Grobräume und

$$\kappa_h^{u/p} := id - \pi_h^{u/p} : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$$

die dazu definierten Fluktationsoperatoren. κ_h^u erfülle die Interpolationseigenschaft:

$$\forall w \in H^l(M), \forall M \in \mathcal{M}_h, 0 \leq l \leq k_u : \quad \|\kappa_h^u(w)\|_{0,M} \leq C_\kappa \frac{h_M^l}{k_u^l} |w|_{l,M} . \quad (5.4)$$

Für vektorwertige Größen werden die Operatoren komponentenweise angewendet und fette Notation κ_h^u verwendet. Für den Fluktationsoperator κ_h^p wird keine solche Forderung gestellt.

Die dritte Voraussetzung ermöglicht die Konstruktion eines speziellen Interpolationsoperators, der orthogonal zum Grobraum arbeitet.

Voraussetzung (3): Für das Raumpaar V_h/D_h^u gelte die inf-sup Bedingung:

$$\exists \beta_u > 0, \forall M \in \mathcal{M}_h : \quad \inf_{w_h \in D_h^u} \sup_{v_h \in V_h} \frac{(v_h, w_h)_M}{\|v_h\|_{0,M} \|w_h\|_{0,M}} \geq \beta_u . \quad (5.5)$$

Für das Raumpaar Q_h/D_h^p gelte die entsprechende Aussage mit einem $\beta_p > 0$.

Bemerkung 5.1: Die Voraussetzungen 2 und 3 stellen unterschiedliche Anforderungen an die Grobräume. Damit die inf-sup Bedingung gilt, dürfen die Grobräume nicht zu reichhaltig sein. Notwendig ist das Dimensionskriterium $\dim(V_h) \geq \dim(D_h^u)$ für die Geschwindigkeitsräume und analog für die Druckräume. Gleichzeitig muss der Grobraum jedoch reichhaltig genug sein, um die Interpolationseigenschaft aus Voraussetzung 2 zu erfüllen. Es gibt verschiedene Ansätze, um die Voraussetzungen zu erfüllen. In Abschnitt 5.6 wird der sogenannte Zwei-Level-Ansatz näher untersucht.

Um die Anzahl generischer Konstanten zu verringern wird die Notation:

$$a \lesssim b \quad :\iff \quad \exists C > 0 : a < Cb$$

eingeführt. Falls es sich bei a und b um variable Größen handelt, soll die Konstante unabhängig von den wesentlichen Variablen (z.B. der Gitterweite, des Polynomgrads und den Daten des Problems) sein.

5.3.1 Stabilisierung

Die Stabilisierung durch lokale Projektion soll eine symmetrische Abänderung der ursprünglichen Variationsformulierung durch eine Bilinearform S_h sein. Die stabilisierte Variationsformulierung lautet also:

$$\begin{aligned} \text{Finde } (\mathbf{u}_h, p_h) = \mathbf{U}_h \in \mathbf{V}_h \times Q_h \text{ mit :} \\ (A + S_h)(\mathbf{U}_h; \mathbf{W}_h) = L(\mathbf{W}_h) \quad \forall \mathbf{W}_h \in \mathbf{V}_h \times Q_h . \end{aligned} \quad (5.6)$$

In dieser Arbeit soll eine Stabilisierung betrachtet werden, die auf den gleichen Termen wie die residuale Stabilisierung basiert. Dabei handelt es sich um die Stromlinienableitung der Geschwindigkeit, die Divergenz der Geschwindigkeit und den Gradienten des Drucks. Bei der Stabilisierung durch lokale Projektion werden jedoch nur die durch $\kappa_h^{u/p}$ definierten Fluktuationen dieser Terme erfasst. Die Definition von S_h lautet:

$$\begin{aligned} S_h(\mathbf{u}_h, p_h; \mathbf{v}_h, q_h) := \sum_{M \in \mathcal{M}_h} \left[\underbrace{\tau_M(\kappa_h^u((\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{u}), \kappa_h^u((\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{v}))}_M}_{\text{LPS-su}} \right. \\ \left. + \underbrace{\mu_M(\kappa_h^p(\nabla \cdot \mathbf{u}_h), \kappa_h^p(\nabla \cdot \mathbf{v}_h))}_M + \underbrace{\alpha_M(\kappa_h^u(\nabla p), \kappa_h^u(\nabla q))}_M \right] . \end{aligned}$$

Bei τ_M , μ_M und α_M handelt es sich um Stabilisierungsparameter, deren Konstruktion durch die a-priori Analysis motiviert werden wird. Als eine Alternative zur Stabilisierung der Stromlinienableitung kann der volle Gradient der Geschwindigkeit stabilisiert werden. Dabei handelt es sich jedoch um eine Matrix, was den Aufwand deutlich erhöht. Außerdem ist die Erfahrung, dass die Stabilisierung in Stromlinienrichtung und *crosswind*-Richtung unterschiedliche Skalierungen erfordert.

Zunächst werden einige wichtige Eigenschaften der Bilinearform S_h bewiesen.

Lemma 5.2: *Für die Bilinearform $S_h : (\mathbf{V} \times Q) \times (\mathbf{V} \times Q) \rightarrow \mathbb{R}$ gilt:*

$$\begin{aligned} S_h(\mathbf{v}, q; \mathbf{w}, r) &\leq S_h(\mathbf{v}, q; \mathbf{v}, q)^{\frac{1}{2}} S_h(\mathbf{w}, r; \mathbf{w}, r)^{\frac{1}{2}} \\ S_h(\mathbf{v}, q; \mathbf{v}, q) &\geq 0 \end{aligned}$$

für alle $(\mathbf{v}, q), (\mathbf{w}, r) \in \mathbf{V} \times Q$; und

$$S_h(\mathbf{v}, q; \mathbf{v}, q) \leq \underbrace{C_\kappa^2 \max_{M \in \mathcal{M}_h} (\tau_M \|\mathbf{b}\|_{\infty, M}^2 + \mu_M)}_{=: C_{S,u}^2} |\mathbf{v}|_1^2 + \underbrace{C_\kappa^2 \left(\max_{M \in \mathcal{M}_h} \alpha_M \right)}_{=: C_{S,p}^2} |q|_1^2$$

für alle $(\mathbf{v}, q) \in \mathbf{V} \times [Q \cap H^1(\Omega)]$. Bei der Abschätzung nach oben ist wegen der Verwendung des Gradienten des Drucks für diesen die höhere Regularität nötig.

Beweis: Die erste Ungleichung folgt aus der Cauchy-Schwarz Ungleichung, und die zweite Ungleichung ist offensichtlich erfüllt. Die dritte Abschätzung folgt direkt aus der Voraussetzung 2 mit $l = 0$. \square

Bemerkung 5.3: Damit die Konstanten $C_{S,u}$ und $C_{S,p}$ gleichmäßig beschränkt bleiben, muss für die Stabilisierungsparameter $\mu_M, \alpha_M = \mathcal{O}(1)$ und $\tau_M = \mathcal{O}(\|\mathbf{b}\|_{\infty, M}^{-2})$ gelten. Diese Beschränkungen lassen jedoch genug Spielraum für die spätere Wahl der Parameter.

Für einige Abschätzungen werden spezielle Interpolationsoperatoren benötigt, die orthogonal zu einem der Grobräume arbeiten. Bei der Stabilisierung werden nur der vektorwertige Raum $[D_h^u]^n$ und der skalare Raum D_h^p genutzt.

Lemma 5.4: *Under den Voraussetzungen 1.a/1.b und 3 gibt es Interpolationsoperatoren*

$$\mathbf{j}_h^u : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}_h \cap \mathbf{V} \quad \text{und} \quad j_h^p : Q \rightarrow Q_h \cap Q$$

mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} - \mathbf{j}_h^u \mathbf{v}, \mathbf{w}_h) &= 0 & \forall \mathbf{w}_h \in [D_h^u]^n, \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \\ \|\mathbf{v} - \mathbf{j}_h^u \mathbf{v}\|_{0,M} + \frac{h_M}{k_u^2} \|\mathbf{v} - \mathbf{j}_h^u \mathbf{v}\|_{1,M} &\lesssim \frac{h_M^l}{k_u^l} \|\mathbf{v}\|_{l, \Lambda(M)} & \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \cap \mathbf{H}^l(\Omega), 1 \leq l \leq k_u + 1 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} (q - j_h^p q, r_h) &= 0 & \forall r_h \in D_h^p, \forall q \in Q \\ \|q - j_h^p q\|_{0,M} + \frac{h_M}{k_p^2} \|q - j_h^p q\|_{1,M} &\lesssim \frac{h_M^l}{k_p^l} \|q\|_{l, \Lambda(M)} & \forall q \in Q \cap H^l(\Omega), 1 \leq l \leq k_p + 1. \end{aligned}$$

Beweis: Der Beweis verläuft völlig analog zum Beweis von Theorem 2.2 in [MST07] und verwendet die Interpolationsoperatoren i_h^u und i_h^p aus den Voraussetzungen 1.a und 1.b sowie die inf-sup Bedingung aus Voraussetzung 3. Der Verlust einer zusätzlichen Ordnungspotenz bei der H^1 -Seminorm ist auf die Verwendung der inversen Ungleichung (4.11) zurückzuführen und scheint an dieser Stelle suboptimal.

5.3.2 Konvergenzanalyse

Die Konvergenzanalyse wird bezüglich folgender gitterabhängiger Tripelnorm betrachtet:

$$\|(\mathbf{v}, q)\|^2 := |[\mathbf{v}, q]|^2 + \delta \|q\|_0^2 \quad (5.7)$$

$$|[\mathbf{v}, q]|^2 := \|\sqrt{\nu} \nabla \mathbf{v}\|_0^2 + c_0 \|\mathbf{v}\|_0^2 + S_h(\mathbf{v}, q; \mathbf{v}, q) \quad (5.8)$$

Nur der Anteil der Stabilisierung ist dabei gitterabhängig. Der Parameter $\delta > 0$ zur Kontrolle der L^2 -Norm des Drucks wird im folgenden Lemma zur Stabilität des stabilisierten Variationsproblems bestimmt.

Lemma 5.5 (Stabilität): *Es gilt:*

$$\inf_{(\mathbf{v}, q) \in \mathbf{V}_h \times Q_h} \sup_{(\mathbf{w}, r) \in \mathbf{V}_h \times Q_h} \frac{(A + S_h)(\mathbf{v}, q; \mathbf{w}, r)}{\|\mathbf{v}, q\| \|\mathbf{w}, r\|} \geq \gamma > 0 \quad (5.9)$$

mit der inf-sup Konstanten:

$$\gamma = \frac{1}{3 + \frac{2}{\beta_0}(\nu_\infty + c_\infty C_P^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (5.10)$$

und δ aus der Tripelnorm zur Kontrolle über die L^2 -Norm vom Druck:

$$\delta = \frac{\beta_0^2}{2\nu_\infty + 2 \min\left\{\frac{1}{c_0}, \frac{C_P^2}{\nu_0}\right\} \left(C_P^2 c_\infty^2 + \|\mathbf{b}\|_{0,\infty}^2\right) + 2C_{S,u}}. \quad (5.11)$$

Beweis: Es sei $\mathbf{V}_h := (\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h$ beliebig. Symmetrisches Einsetzen in die Bilinearform erzeugt Kontrolle über einen Teil der Tripelnorm:

$$\begin{aligned} (A + S_h)(\mathbf{V}_h; \mathbf{V}_h) &\geq (\nu \nabla \mathbf{v}_h, \nabla \mathbf{v}_h) + (\mathbf{C} \mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) + ((\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) + S_h(\mathbf{V}_h; \mathbf{V}_h) \\ &\geq \|\sqrt{\nu} \nabla \mathbf{v}_h\|_0^2 + c_0 \|\mathbf{v}_h\|_0^2 + S_h(\mathbf{V}_h; \mathbf{V}_h) = \|\mathbf{V}_h\|_0^2. \end{aligned}$$

Wegen der diskreten inf-sup Bedingung (5.1) gibt es für jedes $q_h \in Q_h$ ein $\mathbf{w}_h \in \mathbf{V}_h$ mit:

$$-(\nabla \cdot \mathbf{w}_h, q_h) = (q_h, q_h) = \|q_h\|_0^2, \quad \|\mathbf{w}_h\|_1 \leq \frac{1}{\beta_0} \|q_h\|_0.$$

Jetzt wird \mathbf{V}_h mit $(\mathbf{w}_h, 0)$ getestet:

$$\begin{aligned} (A + S_h)(\mathbf{V}_h; \mathbf{w}_h, 0) &= (\nu \nabla \mathbf{v}_h, \nabla \mathbf{w}_h) + (\mathbf{C} \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) \\ &\quad + ((\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) + S_h(\mathbf{V}_h; \mathbf{w}_h, 0) + \|q_h\|_0^2. \end{aligned}$$

Somit ist auch Kontrolle über die L^2 -Norm des Drucks generiert. Die ersten vier Terme müssen gegen die bisherige Kontrolle über $\|\mathbf{v}_h, q_h\|_0^2$ abgeschätzt werden. Dazu wird mehrfach die binomische Ungleichung:

$$\forall \epsilon > 0: \quad 2ab \leq \epsilon a^2 + \epsilon^{-1} b^2$$

und die Poincare-Ungleichung $\|\mathbf{w}\|_0 \leq C_P \|\mathbf{w}\|_1$ aus Lemma 1.22 verwendet. Für den ersten Term gilt:

$$\begin{aligned} (\nu \nabla \mathbf{v}_h, \nabla \mathbf{w}_h) &\leq \|\sqrt{\nu} \nabla \mathbf{v}_h\|_0 \sqrt{\nu_\infty} \|\mathbf{w}_h\|_1 \\ &\leq \frac{\sqrt{\nu_\infty}}{\beta_0} \|\sqrt{\nu} \nabla \mathbf{v}_h\|_0 \|q_h\|_0 \\ &\leq \frac{2}{\beta_0^2} \nu_\infty \|\sqrt{\nu} \nabla \mathbf{v}_h\|_0^2 + \frac{\|q_h\|_0^2}{8}. \end{aligned}$$

Der zweite und dritte Term lässt sich nach partieller Integration abschätzen:

$$\begin{aligned} (\mathbf{C} \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) + ((\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) &= ((\mathbf{C} - (\nabla \cdot \mathbf{b}) \mathbf{I}) \mathbf{v}_h, \mathbf{w}_h) - (\mathbf{v}_h, (\mathbf{b} \cdot \nabla) \mathbf{w}_h) \\ &\leq c_\infty \|\mathbf{v}_h\|_0 \|\mathbf{w}_h\|_0 + \|\mathbf{b}\|_{0,\infty} \|\mathbf{v}_h\|_0 \|\mathbf{w}_h\|_1 \\ &\leq \frac{c_\infty C_P}{\beta_0} \|\mathbf{v}_h\|_0 \|q_h\|_0 + \frac{1}{\beta_0} \|\mathbf{b}\|_{0,\infty} \|\mathbf{v}_h\|_0 \|q_h\|_0 \\ &\leq \frac{2}{\beta_0^2} \left(c_\infty^2 C_P^2 + \|\mathbf{b}\|_{0,\infty}^2 \right) \|\mathbf{v}_h\|_0^2 + \frac{\|q_h\|_0^2}{4}. \end{aligned}$$

Für den letzten Term werden die Ergebnisse aus Lemma 5.2 mit der dort definierten Konstanten $C_{S,u}$ verwendet:

$$\begin{aligned}
S_h(\mathbf{V}_h; \mathbf{w}_h, 0) &\leq S_h(\mathbf{V}_h; \mathbf{V}_h)^{\frac{1}{2}} S_h(\mathbf{w}_h, 0; \mathbf{w}_h, 0)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sqrt{C_{S,u}} S_h(\mathbf{V}_h; \mathbf{V}_h)^{\frac{1}{2}} |\mathbf{w}_h|_1 \\
&\leq \frac{\sqrt{C_{S,u}}}{\beta_0} S_h(\mathbf{V}_h; \mathbf{V}_h)^{\frac{1}{2}} \|q_h\|_0 \\
&\leq \frac{2}{\beta_0^2} C_{S,u} S_h(\mathbf{V}_h; \mathbf{V}_h) + \frac{\|q_h\|_0^2}{8}.
\end{aligned}$$

Es lässt sich $\|\mathbf{v}_h\|_0^2$ auf zwei Weisen gegen die Tripelnorm abschätzen und es folgt:

$$\|\mathbf{v}_h\|_0^2 \leq \min \left\{ \frac{1}{c_0}, \frac{C_P^2}{\nu_0} \right\} |[\mathbf{v}_h, q_h]|^2.$$

Die Terme $\|\sqrt{\nu} \nabla \mathbf{v}_h\|_0^2$ und $S_h(\mathbf{V}_h; \mathbf{V}_h)$ sind direkt Teile der Tripelnorm. Daraus folgt:

$$(A + S_h)(\mathbf{V}_h; \mathbf{w}_h, 0) \geq -\frac{1}{\delta} |[\mathbf{V}_h]|^2 + \frac{1}{2} \|q_h\|_0^2$$

mit δ aus der Behauptung.

Sei $0 < \eta < 1$. Für das zu Beginn beliebig gewählte Element $(\mathbf{v}_h, q_h) = \mathbf{V}_h$ wird nun mit $\mathbf{W}_h := (\mathbf{v}_h + \eta \delta \mathbf{w}_h, q_h)$ getestet:

$$\begin{aligned}
(A + S_h)(\mathbf{V}_h; \mathbf{W}_h) &\geq (1 - \eta) |[\mathbf{V}_h]|^2 + \frac{\eta \delta}{2} \|q_h\|_0^2 \\
&\geq \frac{1}{3} \left(|[\mathbf{V}_h]|^2 + \delta \|q_h\|_0^2 \right) = \frac{1}{3} \|\mathbf{V}_h\|^2.
\end{aligned}$$

Durch die Wahl $\eta = \frac{2}{3}$ wurden die einzelnen Terme ausgeglichen. Im letzten Schritt muss die Norm der zu beliebigem \mathbf{V}_h konstruierten Testfunktion \mathbf{W}_h abgeschätzt werden:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{W}_h\| &\leq \|(\mathbf{v}_h, q_h)\| + \eta \delta \|(\mathbf{w}_h, 0)\| \\
&\leq \|(\mathbf{v}_h, q_h)\| + \eta \delta \left(\|\sqrt{\nu} \nabla \mathbf{w}_h\|_0^2 + c_0 \|\mathbf{w}_h\|^2 + S_h(\mathbf{w}_h, 0; \mathbf{w}_h, 0) \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|(\mathbf{v}_h, q_h)\| + \eta \left(\frac{\nu_\infty + c_0 C_P^2 + C_{S,u}}{\beta_0^2} \right)^{\frac{1}{2}} \delta \|q_h\|_0 \\
&\leq \underbrace{\left(1 + \frac{2}{3\beta_0} (\nu_\infty + c_0 C_P^2 + C_{S,u})^{\frac{1}{2}} \right)}_{=(3\gamma)^{-1}} \|(\mathbf{v}_h, q_h)\|.
\end{aligned}$$

Insgesamt folgt die zur Behauptung äquivalente Aussage:

$$\begin{aligned}
\forall \mathbf{V}_h, \exists \mathbf{W}_h : \quad (A + S_h)(\mathbf{V}_h; \mathbf{W}_h) &\geq \frac{1}{3} \|\mathbf{V}_h\|^2 \\
&\geq \gamma \|\mathbf{V}_h\| \|\mathbf{W}_h\|.
\end{aligned}$$

□

Für feste Daten liefert dieses Stabilitätsresultat bereits die eindeutige Lösbarkeit des stabilisierten Variationsproblems 5.6. Die Stabilitätskonstante γ hängt von den Daten des Problems ab. Mit $\nu_\infty, c_\infty \rightarrow \infty$ geht $\gamma \rightarrow 0$ und somit Stabilität verloren. Für $\nu_\infty, c_\infty \rightarrow 0$ bleibt das Verfahren bezüglich der Tripelnorm stabil, es geht jedoch die Kontrolle über die Seminorm der Geschwindigkeit und wegen $\delta \rightarrow 0$ auch die Kontrolle über die L^2 -Norm des Drucks verloren. Die Kontrolle über die Fluktuationen der Gradienten des Drucks bleibt aber auch für diesen Fall erhalten.

Bei der Stabilisierung durch lokale Projektion handelt es sich um ein nicht konsistentes Verfahren. Der Konsistenzfehler muss bestimmt und abgeschätzt werden.

Lemma 5.6: *Es sei $\mathbf{U} \in \mathbf{V} \times [Q \cap H^1(\Omega)]$ schwache Lösung des Oseen-Problems 3.22 und \mathbf{U}_h Lösung des stabilisierten Variationsproblems 5.6. Dann gilt die gestörte Galerkin-Orthogonalität:*

$$\forall \mathbf{W}_h \in \mathbf{V}_h \times Q_h : \quad (A + S_h)(\mathbf{U} - \mathbf{U}_h; \mathbf{W}_h) = S_h(\mathbf{U}; \mathbf{W}_h). \quad (5.12)$$

Beweis: Einsetzen der Variationsformulierung und Ausnutzen von Linearität liefert

$$\begin{aligned} (A + S_h)(\mathbf{U} - \mathbf{U}_h; \mathbf{W}_h) &= A(\mathbf{U}; \mathbf{W}_h) + S_h(\mathbf{U}; \mathbf{W}_h) - (A + S_h)(\mathbf{U}_h; \mathbf{W}_h) \\ &= L(\mathbf{W}_h) + S_h(\mathbf{U}; \mathbf{W}_h) - L(\mathbf{W}_h) \\ &= S_h(\mathbf{U}; \mathbf{W}_h), \end{aligned}$$

und damit die Behauptung. \square

Lemma 5.7: *Es gelte $\mathbf{U} \in \mathbf{V} \times Q$ mit $(\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{u} \in \mathbf{H}^{l_u}(\Omega)$, $p \in H^{l_p+1}(\Omega)$ und $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Der Konsistenzfehler lässt sich dann für beliebige Testfunktionen $\mathbf{W}_h \in \mathbf{V}_h \times Q_h$ durch:*

$$S_h(\mathbf{U}; \mathbf{W}_h) \lesssim \left(\sum_{M \in \mathcal{M}_h} \tau_M \frac{h_M^{2l_u}}{k_u^{2l_u}} |(\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{u}|_{l_u, M}^2 + \alpha_M \frac{h_M^{2l_p}}{k_p^{2l_p}} |p|_{l_p+1, M}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{W}_h\| \quad (5.13)$$

abschätzen.

Beweis: Aus Lemma 5.2 folgt:

$$S_h(\mathbf{U}, \mathbf{W}_h) \leq S_h(\mathbf{U}, \mathbf{U})^{\frac{1}{2}} S_h(\mathbf{W}_h, \mathbf{W}_h)^{\frac{1}{2}} \leq S_h(\mathbf{U}, \mathbf{U})^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{W}_h\|.$$

Mit Voraussetzung 2 und $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ folgt:

$$\begin{aligned} S_h(\mathbf{U}, \mathbf{U}) &= \sum_{M \in \mathcal{M}_h} \left[\tau_M \|\kappa_h^u((\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{u})\|_{0, M}^2 + \alpha_M \|\kappa_h^u(\nabla p)\|_{0, M}^2 \right] \\ &\lesssim \sum_{M \in \mathcal{M}_h} \left[\tau_M \frac{h_M^{2l_u}}{k_u^{2l_u}} |(\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{u}|_{l_u, M}^2 + \alpha_M \frac{h_M^{2l_p}}{k_p^{2l_p}} |p|_{l_p+1, M}^2 \right]. \end{aligned}$$

Beide Abschätzungen zusammen ergeben die Behauptung. Der Term der Divergenzstabilisierung fällt wegen Konsistenz weg. \square

Das a-priori Konvergenzresultat wird auf dem Standardweg durch Kombination von Stabilität und Konsistenz gewonnen.

Satz 5.8 (a-priori Fehlerabschätzung): Es seien (\mathbf{u}, p) schwache Lösung des Oseen-Problems und (\mathbf{u}_h, p_h) Lösung des stabilisierten Problems 5.6. Außerdem seien $\mathbf{u} \in \mathbf{V} \cap \mathbf{H}^{l_u+1}(\Omega)$, $p \in Q \cap H^{l_p+1}(\Omega)$ und $(\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{u} \in \mathbf{H}^{l_u}(\Omega)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \|\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h\|\|^2 &\lesssim \sum_{M \in \mathcal{M}_h} \frac{h_M^{2l_p}}{k_p^{2l_p-2}} C_{p,M} \|p\|_{l_p+1, \Lambda(M)}^2 \\ &\quad + \sum_{M \in \mathcal{M}_h} \frac{h_M^{2l_u}}{k_u^{2l_u-2}} \left[\frac{\tau_M}{k_u^2} |(\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{u}|_{l_u, M}^2 + C_{u,M} \|\mathbf{u}\|_{l_u+1, \Lambda(M)}^2 \right] \end{aligned}$$

mit den Konstanten:

$$C_{u,M} = \nu_\infty + \mu_M + \tau_M \|\mathbf{b}\|_{\infty, M}^2 + \left(\tau_M^{-1} + c_0 + \frac{c_\infty}{c_0} \right) \frac{h_M^2}{k_u^4} + \delta^{-1} \quad (5.14)$$

und

$$C_{p,M} = \alpha_M + (\delta + \mu_M^{-1}) \frac{h_M^2}{k_p^4}. \quad (5.15)$$

Beweis: Der Fehler wird mit der Dreiecksungleichung in einen Interpolationsfehler und einen Diskretisierungsfehler zerlegt:

$$\|\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h\|\| \leq \underbrace{\|\|\mathbf{u} - \mathbf{j}_h^u \mathbf{u}, p - j_h^p p\|\|}_{*} + \underbrace{\|\|\mathbf{j}_h^u \mathbf{u} - \mathbf{u}_h, j_h^p p - p_h\|\|}_{**}. \quad (5.16)$$

Der erste Term wird mit den Interpolationseigenschaften von \mathbf{j}_h^u, j_h^p aus Lemma 5.4 abgeschätzt:

$$\begin{aligned} \underbrace{\|\|\mathbf{u} - \mathbf{j}_h^u \mathbf{u}, p - j_h^p p\|\|}_{*}^2 &\lesssim \sum_{M \in \mathcal{M}_h} \left[\left(\frac{h_M^2}{k_p^4} \delta + \alpha_M \right) \frac{h_M^{2l_p}}{k_p^{2l_p-2}} \|p\|_{l_p+1, \Lambda(M)}^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\nu_\infty + \frac{h_M^2}{k_u^4} c_0 + \mu_M + \tau_M \|\mathbf{b}\|_{\infty, M}^2 \right) \frac{h_M^{2l_u}}{k_u^{2l_u-2}} \|\mathbf{u}\|_{l_u+1, \Lambda(M)}^2 \right] \end{aligned}$$

Um den zweiten Term abzuschätzen nutzen wir das Stabilitätsresultat aus Lemma 5.5:

$$\begin{aligned} \underbrace{\|\|\mathbf{j}_h^u \mathbf{u} - \mathbf{u}_h, j_h^p p - p_h\|\|}_{**} &\leq \frac{1}{\gamma} \sup_{\mathbf{W}_h \in \mathbf{V}_h \times Q_h} \frac{(A + S_h)(\mathbf{j}_h^u \mathbf{u} - \mathbf{u}_h, j_h^p p - p_h; \mathbf{W}_h)}{\|\|\mathbf{W}_h\|\|} \\ &\leq \frac{1}{\gamma} \sup_{\mathbf{W}_h \in \mathbf{V}_h \times Q_h} \left(\frac{(A + S_h)(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, p - p_h; \mathbf{W}_h)}{\|\|\mathbf{W}_h\|\|} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(A + S_h)(\mathbf{j}_h^u \mathbf{u} - \mathbf{u}, j_h^p p - p; \mathbf{W}_h)}{\|\|\mathbf{W}_h\|\|} \right). \end{aligned}$$

Der erste Term ist der Konsistenzfehler und wurde bereits in Lemma 5.6 und 5.7 behandelt.

Der zweite Term wird für beliebige $(\mathbf{w}_h, r_h) = \mathbf{W}_h \in \mathbf{V}_h \times Q_h$ einzeln abgeschätzt. Hilfsmittel sind die partielle Integration und die spezielle Orthogonalität des Interpolati-

onsfehlers:

$$\begin{aligned}
& (A + S_h)(\mathbf{j}_h^u \mathbf{u} - \mathbf{u}, j_h^p p - p; \mathbf{W}_h) \\
&= (\nu \nabla(\mathbf{j}_h^u \mathbf{u} - \mathbf{u}), \nabla \mathbf{w}_h) + (\mathbf{C}(\mathbf{j}_h^u \mathbf{u} - \mathbf{u}), \mathbf{w}_h) + ((\mathbf{b} \cdot \nabla)(\mathbf{j}_h^u \mathbf{u} - \mathbf{u}), \mathbf{w}_h) \\
&\quad + (j_h^p p - p; \nabla \cdot \mathbf{w}_h) + (r_h, \nabla \cdot (\mathbf{j}_h^u \mathbf{u} - \mathbf{u})) + S_h(\mathbf{j}_h^u \mathbf{u} - \mathbf{u}, j_h^p p - p; \mathbf{W}_h).
\end{aligned}$$

Im einzelnen:

$$\begin{aligned}
& (\nu \nabla(\mathbf{j}_h^u \mathbf{u} - \mathbf{u}), \nabla \mathbf{w}_h) + (\mathbf{C}(\mathbf{j}_h^u \mathbf{u} - \mathbf{u}), \mathbf{w}_h) + ((\mathbf{b} \cdot \nabla)(\mathbf{j}_h^u \mathbf{u} - \mathbf{u}), \mathbf{w}_h) \\
&= (\nu \nabla(\mathbf{j}_h^u \mathbf{u} - \mathbf{u}), \nabla \mathbf{w}_h) + ((\mathbf{C} - (\nabla \cdot \mathbf{b})\mathbf{I})(\mathbf{j}_h^u \mathbf{u} - \mathbf{u}), \mathbf{w}_h) + (\mathbf{j}_h^u \mathbf{u} - \mathbf{u}, \kappa_h^u((\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{w}_h)) \\
&\lesssim \left(\sum_{M \in \mathcal{M}_h} \frac{h_M^{2l_u}}{k_u^{2l_u-2}} \left(\nu_\infty + \frac{c_\infty^2}{c_0} \frac{h_M^2}{k_u^4} + \tau_M^{-1} \frac{h_M^2}{k_u^4} \right) \|\mathbf{u}\|_{l_u+1, \Lambda(M)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{W}_h\|
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
& |(j_h^p p - p, \nabla \cdot \mathbf{w}_h)| = |(j_h^p p - p; \kappa_h^p(\nabla \cdot \mathbf{w}_h))| \\
&\lesssim \left(\sum_{M \in \mathcal{M}_h} \mu_M^{-1} \frac{h_M^{2l_p+2}}{k_p^{2l_p+2}} \|p\|_{l_p+1, \Lambda(M)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{W}_h\| \quad (5.17)
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
& |(r_h, \nabla \cdot (\mathbf{j}_h^u \mathbf{u} - \mathbf{u}))| \lesssim \sum_{M \in \mathcal{M}_h} \|r_h\|_{0, M} |\mathbf{j}_h^u \mathbf{u} - \mathbf{u}|_{1, M} \\
&\lesssim \left(\sum_{M \in \mathcal{M}_h} \delta^{-1} \frac{h_M^{2l_u}}{k_u^{2l_u-2}} \|\mathbf{u}\|_{l_u+1, \Lambda(M)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{W}_h\| \quad (5.18)
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
& |S_h(\mathbf{j}_h^u \mathbf{u} - \mathbf{u}, j_h^p p - p; \mathbf{W}_h)| \leq S_h(\mathbf{j}_h^u \mathbf{u} - \mathbf{u}, j_h^p p - p; \mathbf{j}_h^u \mathbf{u} - \mathbf{u}, j_h^p p - p)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{W}_h\| \\
&\lesssim \left(\sum_{M \in \mathcal{M}_h} \frac{h_M^{2l_u}}{k_u^{2l_u-2}} \left(\mu_M + \tau_M \|\mathbf{b}\|_{\infty, M}^2 \right) \|\mathbf{u}\|_{l_u+1, \Lambda(M)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{W}_h\| \\
&\quad + \left(\sum_{M \in \mathcal{M}_h} \alpha_M \frac{h_M^{2l_p}}{k_p^{2l_p-2}} \|p\|_{l_p+1, \Lambda(M)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{W}_h\|. \quad (5.19)
\end{aligned}$$

Die Kombination aller Abschätzungen führt zur Behauptung. \square

5.3.3 Parameterdesign für Taylor-Hood Elemente

Für die Diskretisierung mit inf-sup stabilen Taylor-Hood Elementen Q_k/Q_{k-1} sollen noch die Parameter τ_M, μ_M und α_M optimal gewählt werden. Es seien also $k = k_u = k_p + 1$ und $l = l_u = l_p + 1$. Um insgesamt eine Konvergenzrate von $h_M^l k^{-l+1}$ zu erhalten, muss $C_{p, M} \sim h_M^2 k^{-2}$ gelten. Dieser Faktor wird für die folgenden Betrachtungen aus $C_{p, M}$ ausgeklammert.

Zur Minimierung des Fehlers werden die von den Stabilisierungsparametern abhängigen Terme in den Konstanten $C_{u,M}$ und $C_{p,M}$ ausbalanciert. Zunächst gilt für μ_M :

$$\mu_M \stackrel{!}{\sim} \mu_M^{-1} \frac{1}{k^2} \implies \mu_M \sim \frac{1}{k}.$$

Analoges Vorgehen für τ_M liefert:

$$\tau_M \|\mathbf{b}\|_{\infty,M}^2 \stackrel{!}{\sim} \tau_M^{-1} \frac{h_M^2}{k^4} \implies \tau_M \sim \frac{h_M}{\|\mathbf{b}\|_{\infty,M} k^2}.$$

Die Skalierung mit $\|\mathbf{b}\|_{\infty,M}^{-1}$ täuscht vor, dass bei kleiner Konvektion viel stabilisiert werden müsse. Der Stabilisierungsterm selbst ist jedoch quadratisch in \mathbf{b} und verschwindet für $\|\mathbf{b}\|_{\infty,M} \rightarrow 0$ auch beim vorgeschlagenen Parameterdesign und kann für $\|\mathbf{b}\|_{\infty,M} = 0$ durch $\tau_M = 0$ fortgesetzt werden. Ebenso wird in der a-priori Fehlerabschätzung jedes Vorkommen von τ_M durch einen in \mathbf{b} quadratischen Term begleitet. Zur Beschränkung des Stabilisierungsparameters für $\|\mathbf{b}\|_{\infty,M} \rightarrow 0$ kann er in diesem Fall an die Viskosität gekoppelt werden:

$$\tau_M^{-1} \frac{h_M^2}{k^4} \stackrel{!}{\sim} \nu_\infty \implies \tau_M \sim \frac{h_M^2}{\nu_\infty k^4}.$$

Eine Kombination von beiden Parameterdesigns liefert:

$$\tau_M \sim \frac{h_M^2}{\nu_\infty k^4 + h_M \|\mathbf{b}\|_{\infty,M} k^2}. \quad (5.20)$$

Dadurch wird insbesondere eine Skalierung von τ_M mit h_M^2 im diffusionsdominanten Fall und mit h_M im konvektionsdominanten Fall unterschieden.

Für den Druck-Stabilisierungsparameter folg zunächst nur eine asymptotische obere Schranke:

$$\alpha_M \lesssim (\delta k^{-1} + 1) \frac{h_M^2}{k^3}.$$

Eine untere Schranke für die Druckstabilisierung

Die bisherige Fehlerabschätzung enthält δ^{-1} und liefert keine untere Schranke für die Parameter α_M der Druckstabilisierung. Für stetigen Druck kann die entsprechende Abschätzung des Fehlerterms (5.18), bei der δ^{-1} auftaucht, durch partielle Integration alternativ vorgenommen werden:

$$\begin{aligned} |(r_h, \nabla \cdot (\mathbf{j}_h \mathbf{u} - \mathbf{u}))| &= |(\nabla r_h, \mathbf{j}_h \mathbf{u} - \mathbf{u})| = |(\boldsymbol{\kappa}_h^u(\nabla r_h), \mathbf{j}_h \mathbf{u} - \mathbf{u})| \\ &\lesssim \left(\sum_{M \in \mathcal{M}_h} \frac{h_M^{2l_u+2}}{k_u^{2l_u+2}} \alpha_M^{-1} \|\mathbf{u}\|_{l_u+1, \Lambda(M)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|\mathbf{W}_h\|. \end{aligned}$$

Die Konstante $C_{u,M}$ enthält dann den modifizierten Term:

$$C_{u,M} = \dots + \min \left\{ \delta^{-1}, \alpha_M^{-1} \frac{h_M^2}{k_u^4} \right\}.$$

Erst für $\delta \rightarrow 0$ kann so eine untere Schranke für die Parameter α_M der Druckstabilisierung motiviert werden. Dann folgt

$$\alpha_M \frac{k^2}{h_M^2} \stackrel{!}{\sim} \alpha_M^{-1} \frac{h_M^2}{k^4} \implies \alpha_M \sim \frac{h_M^2}{k^3}.$$

Diese Skalierung wird auch der zuvor bestimmten oberen Schranke gerecht und kann generell verwendet werden. Das vollständige Parameterdesign lautet somit:

$$\mu_M \sim \frac{1}{k}, \quad \alpha_M \sim \frac{h_M^2}{k^3}, \quad \tau_M \sim \frac{h_M^2}{\nu_\infty k^4 + h_M \|\mathbf{b}\|_{\infty, M} k^2}. \quad (5.21)$$

Bemerkung 5.9: Mit numerischen Resultaten wird für Taylor-Hood Elemente gezeigt, dass die Skalierung der Parameter in der Elementordnung anscheinend nicht korrekt erfasst ist. Unter der Annahme, dass die Abhängigkeit von der Elementordnung in 5.4 nicht scharf ist, und der zusätzliche Verlust in der Potenz der Elementordnung bei der Seminorm tatsächlich nicht auftritt, ändert sich das Parameterdesign für Taylor-Hood und equal-order Elemente.

5.4 Parameterdesign für equal-order Elemente

Die a-priori Konvergenzanalyse in [LRL07] für equal-order Elemente mit den selben Stabilisierungstermen führt für equal-order Elemente bei dem Parameterdesign:

$$\mu_M \sim \alpha_M \sim \frac{h_M}{k^2}, \quad \tau_M \sim \frac{h_M}{\|\mathbf{b}\|_{\infty, M} k^2} \quad (5.22)$$

im konvektionsdominanten Fall zu einer Konvergenzrate von $h_M^{l+1/2} k^{-l}$. Die Skalierung von τ_M kann jedoch analog zu (5.20) abgeändert werden.

5.5 Die Divergenzstabilisierung

Da die Divergenzstabilisierung konsistent ist, wurde in der Konvergenzanalyse für den Fluktuationoperator κ_h^p keine Interpolationseigenschaft vorausgesetzt. Dadurch ist die Wahl $D_h^p = \{0\}$ möglich, die die geforderte inf-sup Bedingung in Voraussetzung 3 trivialerweise erfüllt. Dann gilt $\pi_h^p \equiv 0$ und somit $\kappa_h^p = id$, was zur Grad-Div-Stabilisierung führt. Da diese Form der Stabilisierung ebenfalls symmetrisch und einfach zu implementieren ist, wird sie verwendet.

Aber auch die Grad-Div-Stabilisierung kann – zumindest falls keine Druckstabilisierung verwendet wird – als Projektionsstabilisierung verstanden werden. Entscheidenden Anteil an der Umformung hat die Nebenbedingung:

$$b(\mathbf{u}_h, q_h) = -(\nabla \cdot \mathbf{u}_h, q_h) = 0 \quad \forall q_h \in Q_h. \quad (5.23)$$

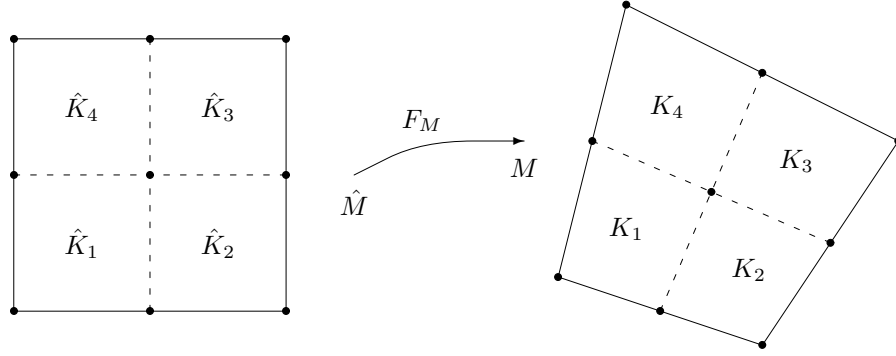


Abbildung 5.1: Makromapping

Es bezeichne $\hat{\pi}_h^p : L^2(\Omega) \rightarrow Q_h$ die globale L^2 -Projektion auf den Druckraum Q_h . Dann ist (5.23) äquivalent zu $\hat{\pi}_h^p(\nabla \cdot \mathbf{u}_h) \equiv 0$. Daraus folgt für diskret divergenzfreie $\mathbf{u}_h \in \mathbf{Z}_h$ und beliebige $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$:

$$\begin{aligned}
 (\nabla \cdot \mathbf{u}_h, \nabla \cdot \mathbf{v}_h) &= (\nabla \cdot \mathbf{u}_h, \nabla \cdot \mathbf{v}_h) + (\hat{\pi}_h^p(\nabla \cdot \mathbf{u}_h), \nabla \cdot \mathbf{v}_h) \\
 &= ((id - \hat{\pi}_h^p)(\nabla \cdot \mathbf{u}_h), \nabla \cdot \mathbf{v}_h) \\
 &= ((id - \hat{\pi}_h^p)(\nabla \cdot \mathbf{u}_h), (id - \hat{\pi}_h^p)(\nabla \cdot \mathbf{v}_h)) \\
 &= (\hat{\kappa}_h^p(\nabla \cdot \mathbf{u}_h), \hat{\kappa}_h^p(\nabla \cdot \mathbf{v}_h)) .
 \end{aligned}$$

D.h. auf dem Druckraum ist die Grad-Div-Stabilisierung redundant zur Nebenbedingung. Dadurch wird die Grad-Div-Stabilisierung äquivalent zu einer Projektionsstabilisierung der Divergenz, bei der die Fluktuationen $\hat{\kappa}_h^p$ durch die globale L^2 -Projektion $\hat{\pi}_h^p$ in den Druckraum definiert werden. Bei unstetigem Druckraum Q_h kann die Projektion lokalisiert werden und eine Interpretation als Ein-Level-Methode wird möglich.

Bei Vorhandensein einer Druckstabilisierung gilt (5.23) nicht mehr und die dargestellte Interpretation ist nicht mehr möglich.

5.6 Der Zwei-Level-Ansatz

Als Lösungsraum für Geschwindigkeit und Druck wird das divergenzstabile Raumpaar $\mathcal{Q}_{k,h}/\mathcal{Q}_{k-1,h}$ auf Vierecks- bzw. Hexaedergittern gewählt – siehe Abschnitt 4.4. Für die Stromlinien- und Druckstabilisierung wird ein Fluktuationsoperator auf dem Geschwindigkeitsraum benötigt. Wie bereits besprochen sollen die Fluktuationen $\kappa_h^u = id - \pi_h^u$ durch orthogonale Projektion auf einen größeren FE-Raum gewonnen werden. Zur Implementierung und numerischen Überprüfung der Analysis wurde ein Zwei-Level Ansatz gewählt.

Ein gegebenes Gitter wird als Makrogitter \mathcal{M}_h verwendet. Das feine Gitter \mathcal{T}_h wird durch einmalige, regelmäßige Verfeinerung gewonnen, was durch die Schreibweise $\mathcal{M}_h = \mathcal{T}_{2h}$ verdeutlicht werden soll. Die Makroelemente bestehen somit aus jeweils vier (in 2D) bzw.

acht (in 3D) benachbarten Elementen, vergleiche Abbildung 5.1. Als Raumpaare wird

$$V_h/D_h^u = \mathcal{Q}_{k,h}/\mathcal{Q}_{-(k-1),2h}$$

betrachtet.

Die Interpolationseigenschaft von V_h entspricht Lemma 4.10 und die Interpolationseigenschaft von π_h^u nach D_h^u entspricht Lemma 4.9. Die inf-sup Bedingung zwischen V_h und D_h^u wurde in [MST07] bewiesen und in [RL07] auf die Abhängigkeit von der polynomiellen Ordnung untersucht.

Ein Beispiel für eine Ein-Level-Methode, bei der V_h durch Anreicherung mit Blasenfunktionen gebildet wird, und entsprechende Konstruktionen für simpliciale Elemente sind in [MST07] zu finden.

Bemerkung 5.10: Bei der Zwei-Level-Methode ist $h_M \approx 2h_K$. Im Vergleich zu Konvergenzresultaten für Ein-Level-Methoden oder auch bei der residualen Stabilisierung die bezüglich h_K gelten, verliert die Zwei-Level-Methode in der Analysis einen Faktor 2^k . In der Praxis ist dieser Faktor nicht zu beobachten.

5.7 Implementierung der Projektionsstabilisierung

Die Implementierung der Stabilisierung soll an einem allgemeinen Beispiel beschrieben werden, bei dem die zu stabilisierende Größe durch ein beliebiges lineares Funktional $[\cdot]$ gegeben ist. Zum Beispiel werden bei der Druckstabilisierung die Fluktuationen des Gradienten $[p] := \nabla p$ stabilisiert. Es wird ein lokaler Stabilisierungsparameter δ_M verwendet. Bei der Stabilisierung wird die ursprünglichen Variationsformulierung um die Bilinearform

$$S_{\text{Ips}}(p, q) := \sum_{M \in \mathcal{M}_h} \delta_M (\kappa([p]), \kappa([q]))_M$$

ergänzt. Es sei $\{\phi_1, \dots, \phi_n\}$ eine Basis des diskreten Lösungsraumes und $\{\psi_1, \dots, \psi_m\}$ eine Basis des verwendeten Grobraumes. Bei der Überführung in ein lineares Gleichungssystem muss folgende Matrix aufgestellt werden:

$$S := (S_{\text{Ips}}(\phi_j, \phi_i))_{i,j} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Die Berechnung wird in einer Schleife über die Makroelemente $M \in \mathcal{M}_h$ ausgeführt. Auf jedem Makroelement werden nur die Basisfunktionen berücksichtigt, deren Träger einen nichtleeren Durchschnitt mit der Makrozelle besitzen. Diese werden für jedes Makroelement lokal neu durchnummeriert. In der nachfolgenden Notation folgen die Indizes i, j bzw. k, l der lokalen Numerierung der Basen von $V_h(M)$ bzw. $D_h(M)$, wodurch sich zunächst lokale Zell-Matrizen ergeben. Vor dem Transfer in die globale Systemmatrix wird die lokale Numerierung wieder in die globale übersetzt.

Der zu berechnende Term wird zunächst umgestellt:

$$\begin{aligned} (\kappa([\phi_j]), \kappa([\phi_i]))_M &= ([\phi_j] - \pi([\phi_j]), [\phi_i] - \pi([\phi_i]))_M \\ &= ([\phi_j] - \pi([\phi_j]), [\phi_i])_M \\ &= ([\phi_j], [\phi_i])_M - (\pi([\phi_j]), [\phi_i])_M. \end{aligned} \tag{5.24}$$

Die darin enthaltene lokale L^2 -Projektion π ist definiert durch:

$$(\pi([\phi_j]), \psi_k)_M = ([\phi_j], \psi_k)_M \quad \forall k = 1, \dots, m .$$

Diese Variationsprobleme lassen sich wie gewohnt als lineare Gleichungssysteme schreiben. Dazu werden die folgenden Definitionen benötigt:

$$\pi([\phi_j]) = \sum_{l=1}^m P_{M,l,j} \psi_l , \quad M_{\psi,M} := \left((\psi_l, \psi_k)_M \right)_{k,l}, \quad T_M := \left(([\phi_j], \psi_k)_M \right)_{k,j} .$$

Bei $M_{\psi,M}$ handelt es sich um die lokale Massematrix zur Basis des Grobraums. Bei T_M handelt es sich um eine Transfermatrix, die die Integration der zu stabilisierenden Größe mit Testfunktionen aus dem Grobraum darstellt. Für die Koeffizientenmatrix P_M der lokalen Projektionen in den Grobraum gilt dann:

$$M_{\psi,M} P_M = T_M \quad \implies \quad P_M = M_{\psi,M}^{-1} T_M$$

Mit ihr lässt sich die lokale Projektion π im zweiten Term von (5.24) ersetzen.

$$\begin{aligned} (\pi([\phi_j]), [\phi_i])_M &= \sum_{l=1}^m P_{M,l,j} (\psi_l, [\phi_i])_M \\ &= \sum_{l=1}^m ([\phi_i], \psi_l)_M P_{M,l,j} \\ &= \sum_{l=1}^m (T_M)_{l,i} \left(M_{\psi,M}^{-1} T_M \right)_{l,j} = \left(T_M^t M_{\psi,M}^{-1} T_M \right)_{i,j} \end{aligned}$$

Zusammen mit der Definition der lokalen Steifigkeitsmatrizen:

$$K_M := \left(([\phi_j], [\phi_i])_M \right)_{i,j}$$

folgt die Matrixdarstellung der Stabilisierung:

$$S = \sum_{M \in \mathcal{M}_h} \delta_M \left(K_M - T_M^t M_{\psi,M}^{-1} T_M \right) .$$

Der Übergang von lokalen zu globalen Indizes wurde dabei in der Notation unterdrückt.

Die Integrale bei der Berechnung von T_M und K_M können in Integrale über die Zellen $K \subset M$ zerlegt werden. Bei Verwendung einer Quadraturformel mit ausreichend hoher Ordnung werden dann alle Integrale exakt berechnet. Die lokalen Massematrizen $M_{\psi,M}$ sind symmetrisch, positiv definit und können effizient mit einer Cholesky-Zerlegung invertiert werden.

Bemerkung 5.11: Eine besonders effiziente Implementierung ist dann möglich, wenn die Basis $\{\psi_1, \dots, \psi_m\}$ des Grobraumes L^2 -orthogonal ist, da dann die lokalen Massematrizen Diagonalmatrizen sind und leicht invertiert werden können. Der Aufwand wird so in die Konstruktion der Basis verschoben, die jedoch auf gleichem Gitter mehrmals verwendet werden kann. Bei affin transformierten Elementen kann die Legendre-Basis auf dem Referenzelement verwendet werden, da die Orthogonalität unter affiner Transformation erhalten bleibt.

Element	Stabilisierung	$\text{nz}(A)$	$\text{nz}(B)$	$\text{nz}(C)$	total
Q_2/Q_1	–	2101250	807518	0	3716286
Q_2/Q_1	Grad-Div	4202500	807518	0	5817536
Q_2/Q_1	LPS-su	4724738	807518	0	6339774
Q_2/Q_1	LPS-div	9426968	807518	0	11042004
Q_2/Q_1	LPS-su + GD	6825988	807518	0	8441024
Q2Q2	–	2101250	2098658	0	6298566
Q2Q2	LPS-p	2101250	2098658	2362369	8660935
Q2Q2	LPS-(su+div+p)	9449476	2098658	2362369	16009161
Q2Q2	LPS-(su+p) + GD	6825988	2098658	2362369	13385673
Q3Q2	–	7380482	3969506	0	15319494
Q3Q2	Grad-Div	14760964	3969506	0	22699976
Q3Q2	LPS-su	18886658	3969506	0	26825670
Q3Q2	LPS-su + GD	26267140	3969506	0	34206152

Tabelle 5.1: Vergleich der Anzahl der Matrixeinträge für verschiedene Stabilisierungen auf einem Gitter mit $h \approx \frac{1}{64}$

Auswirkungen auf die Systemmatrix

Durch die lokale Projektion erhöht sich die Anzahl der Kopplungen in der Stabilisierungsmatrix gegenüber der Systemmatrix. In der Systemmatrix sind nur Basisfunktionen gekoppelt, deren Träger einen nichtleeren Durchschnitt besitzen. In der Stabilisierungsmatrix sind auch diejenigen Basisfunktionen gekoppelt, für die es ein Makroelement gibt, so dass die Träger beider Basisfunktionen einen nichtleeren Durchschnitt mit dem Makroelement besitzen.

Tabelle 5.1 zeigt die Anzahl der nicht-Null-Einträge in den einzelnen Blöcken der Systemmatrix für unterschiedliche Stabilisierungsvarianten vor der Einarbeitung von Dirichlet-Randwerten. Ausgangspunkt war die Diskretisierung des Einheitsquadrats durch Q_2/Q_1 - bzw. Q_2/Q_2 -Elemente bei einer Gitterweite $h \approx \frac{1}{64}$. Die Anzahl der Freiheitsgrade beträgt 148739 ($n_u = 132098, n_p = 16641$) bzw. 198147 ($n_u = 132098, n_p = 66049$).

Der Vergleich ohne Stabilisierung zeigt, dass das equal-order Element allein durch die größere Anzahl an Freiheitsgraden für den Druck gegenüber dem Taylor-Hood Element ca. 70% mehr Matrixeinträge benötigt. Diese Diskretisierung ist jedoch nicht stabil. Wird die erforderliche Druckstabilisierung durch LPS-p hinzugenommen, werden sogar 133% mehr Einträge benötigt. Die Anzahl der Freiheitsgrade ist dabei nur um 33% größer.

Die Matrix A hat ohne Stabilisierung Blockdiagonalgestalt, da die verschiedenen Geschwindigkeitskomponenten nicht direkt miteinander gekoppelt sind. Durch Grad-Div-Stabilisierung ohne lokale Projektion wird das Besetzungsmuster von A auf alle Blöcke ausgedehnt, da nun die Geschwindigkeitskomponenten auch untereinander gekoppelt sind. Die Anzahl der Matrixeinträge verdoppelt sich genau. In 3D ist entsprechend eine Verdreifachung zu beobachten (drei Diagonalblöcke gegenüber neun Blöcken insgesamt).

Die Stromlinienstabilisierung LPS-su erhält die Blockdiagonalgestalt von A , erhöht jedoch die Anzahl der Kopplungen durch die Projektion auf den Makroelementen. Der Faktor

der Steigerung ist hier sowohl vom Polynomgrad, als auch von der Dimension abhängig und im Beispiel etwa 2.25 (eine obere Schranke für diesen Faktor ist 4 in 2D bzw. 8 in 3D begründet durch die Anzahl der Elemente pro Makroelement). Die Divergenzstabilisierung durch lokale Projektion LPS-div verdoppelt (verdreifacht in 3D) die Anzahl der Einträge nochmals, da wie bei Grad-Div Stabilisierung die Blockdiagonalgestalt verloren geht. Im Beispiel bedeutet das bezogen auf A eine Steigerung der Anzahl der Einträge um den Faktor 4.5. Das Besetzungsmuster von LPS-su ist in dem von LPS-div enthalten.

Da wie besprochen die Grad-Div Stabilisierung die gleichen Konvergenzresultate wie LPS-div liefert und zudem noch stärkere Kontrolle der Divergenz in der Tripelnorm erlaubt, ist LPS-su + Grad-Div die bevorzugte Kombination von Stabilisierungen. Die Ergänzungen zum ursprünglichen Besetzungsmuster sind für Grad-Div und LPS-su disjunkt – Ergänzungen in den nicht-diagonal Blöcken für Grad-Div und auf der Diagonalen für LPS-su. Diese Beobachtung gilt gleichermaßen für Taylor-Hood und equal-order Elemente.

An dieser Stelle sei kurz vorweggenommen, dass die numerischen Experimente zeigen, dass beim Taylor-Hood Element der Einfluss der Stromlinienstabilisierung sehr gering ist. Wird dort auf die Stromlinienstabilisierung verzichtet, so enthält die Systemmatrix für das Taylor-Hood Element und das betrachtete Gitter ca. 6.3 Mio. Einträge. Beim equal-order Element kann auf keine der Stabilisierungen verzichtet werden und es werden ca. 13.4 Mio. Einträge, also mehr als doppelt so viele, benötigt. Die Kosten zum Lösen des Gleichungssystems werden jedoch nicht allein durch die Dimension (Anzahl der Freiheitsgrade) oder die Anzahl der Matrixeinträge bestimmt. Bei einem iterativen Lösungsverfahren dominiert die Systemmatrix jedoch den Speicherverbrauch. Zum Vergleich sind in Tabelle 5.1 auch die Werte für das Q_3/Q_2 -Element auf dem gleichem Gitter angegeben. Bei Stabilisierung durch LPS-su und Grad-Div benötigt die Systemmatrix dann ca. 400 MB Speicherplatz.

Kapitel 6

Numerische Resultate: Oseen

In diesem Kapitel werden numerische Resultate zum Oseen-Problem bei Verwendung der Zwei-Level-Projektion vorgestellt. An einem Beispiel mit glatter Referenzlösung werden das Parameterdesign und Konvergenzresultat überprüft.

6.1 Implementierung mit deal.II

Aufbauend auf der Finite-Elemente-Bibliothek deal.II [BHK] wurde eine Software zur numerischen Berechnung von Lösungen der inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen implementiert. Bei deal.II handelt es sich um eine in C++ programmierte Bibliothek, die durch die Verwendung von sogenannten Templates eine generische Verwendung, z.B. weitestgehend dimensionsunabhängig, ermöglicht. In deal.II enthalten sind unter anderem Werkzeuge zur Gittermanipulation, Implementierungen von verschiedenen FE-Räumen mit zellweisem Zugriff auf die Basisfunktionen, Quadraturformeln zur numerischen Integration über die Zellen und eine Sammlung von Klassen für die lineare Algebra, wie z.B. zur Verwaltung schwach besetzter Matrizen.

Zum Lösen der aufgestellten linearen Gleichungssysteme wurde UMFPACK [Dav04], ein direkter Löser für schwach besetzte Matrizen, verwendet. Dieser stellte hinsichtlich der Gitterauflösung den Flaschenhals dar. Die direkte Faktorisierung der Systemmatrizen ist sehr speicherintensiv und die verfügbaren 4 GB Arbeitsspeicher auf dem genutzten zwei-Prozessor System (mit AMD Opteron™ Prozessoren 248, 2.2 Ghz) begrenzten die Problemgröße. Die größten handhabbaren Probleme hatten ca. 600 Tausend Freiheitsgrade und 40 Millionen Matrixeinträge für zwei Raumdimensionen. In 3D lag die Grenze wegen der stärkeren Kopplungen schon bei etwa 100 Tausend Freiheitsgraden, was einem Würfel mit 16^3 Zellen und einer Diskretisierung mit Q_2/Q_1 -Elementen entspricht. Da diese Auflösung für eine Konvergenzbetrachtung nicht ausreicht, werden nur Untersuchungen zu zweidimensionalen Problemen dargestellt. Ein effizienter Löser z.B. basierend auf einem Mehrgitter- oder Gebietszerlegungsverfahren stand nicht zur Verfügung.

Die Implementierung eines Löasers für die unstabilierte Variationsformulierung der Oseen-

Gleichungen aufbauend auf `deal.II` ist mit geringem Aufwand möglich. Die Implementierung der Stabilisierung durch Zwei-Level-Projektion, wie in 5.7 beschrieben, war aufwendiger, wurde durch die flexiblen Architektur der Bibliothek jedoch gut unterstützt. Auf hohe Laufzeiteffizienz wurde bei der Implementierung nicht geachtet, da der direkte Löser die Problemgröße ohnehin beschränkte.

6.2 Informationen zu den Gittern

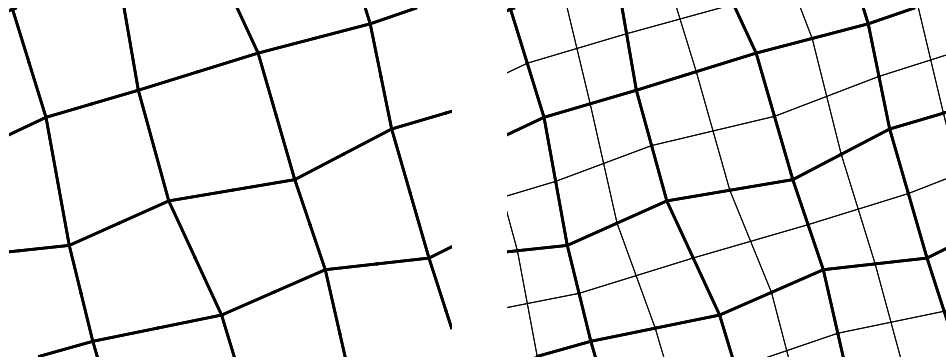


Abbildung 6.1: Ausschnitt von Makrogitter und Feingitter

Es werden Gitter einer unstrukturierten, quasi-uniformen Gitterfamilie als Makroelementgitter verwendet, die insbesondere nicht durch regelmäßige Verfeinerung eines Ausgangsgitters entstand. Durch regelmäßige Verfeinerung konvergieren die Transformationen der Elemente gegen affine Transformationen. Auf durch affine Transformationen erzeugten Gittern können für die Q_k -Elemente häufig Superkonvergenzeffekte beobachtet werden. Diese werden auf einer unstrukturierten Familie mit gleichbleibendem nicht-affinem Anteil in den Transformationen vermieden. Insbesondere soll auch gezeigt werden, dass das Raumpaar $Q_k/P_{-(k-1)}$ auf diesen Gittern keine ausreichende Interpolationseigenschaft besitzt. Ausgehend von einem Makroelementgitter wird durch einmalige regelmäßige Verfeinerung die Zwei-Level-Struktur hergestellt, die für die Stabilisierung benötigt wird.

6.3 Problem 1: glatte Referenzlösung

Zur Überprüfung der Analysis werden einige numerische Untersuchungen durchgeführt. Dazu wird auf dem Einheitsquadrat $(0, 1)^2$ eine glatte Referenzlösung vorgegeben und die rechte Seite und die Randwerte passend konstruiert. Die Referenzlösung ist gegeben durch:

$$\mathbf{u}(x, y) = (\sin(\pi x), -\pi y \cos(\pi x))^T, \quad p(x, y) = \sin(\pi x) \cos(\pi y). \quad (6.1)$$

Die Lösung ist unabhängig von den weiteren Daten ν, c des Problems – es ändert sich jedoch die konstruierte rechte Seite abhängig von den Daten. Für das Oseen-Problem wird

als Konvektionsfeld $\mathbf{b} = \mathbf{u}$ die Lösung selbst eingesetzt. Dadurch wird das asymptotische Verhalten einer Fixpunktiteration für das nichtlineare Navier-Stokes Problem modelliert.

Für ν werden insbesondere die beiden Fälle $\nu = 1$ für den diffusionsdominanten und $\nu = 10^{-6}$ für den konvektionsdominanten Fall betrachtet. Außerdem wird $c = 1$ gesetzt. An diesem Problem werden die Stabilisierungsparameter kalibriert und das Parameterdesign überprüft. Da die Lösung glatt ist, können auch die Konvergenzresultate für Elemente höherer Ordnung überprüft werden.

Der Fehler wird nicht direkt mit der in der Analysis verwendeten Tripelnorm $|||\cdot|||$ gemessen. Stattdessen werden die einzelnen Fehlerterme $|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_1$, $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_0$, $\|\nabla \cdot \mathbf{u}_h\|_0$ und $\|p - p_h\|_0$ betrachtet. Diese erreichen meist unterschiedliche Konvergenzraten. Durch Beachtung der unterschiedlichen Skalierungen dieser Fehlerterme in der Tripelnorm kann dann auch auf deren Konvergenzrate geschlossen werden. Der zusätzliche Term, der durch die Stabilisierung entsteht, hängt von den Stabilisierungsparametern ab und ist bei Variation der Parameter wenig aussagekräftig. Er wird daher nur in einem einzelnen Fall betrachtet.

6.4 Parameterdesign für Taylor-Hood Elemente

In Abschnitt 5.3.3 wurde mit dem a-priori Konvergenzresultat durch Ausgleich der Fehlerterme ein Parameterdesign für Taylor-Hood Elemente Q_k/Q_{k-1} bestimmt. Dieses sieht folgende Wahl der Parameter vor:

$$\alpha_M \sim \frac{h_M^2}{k^3}, \quad \mu_M = \mu_0 \frac{1}{k}, \quad \tau_M = \tau_0 \frac{h_M^2}{\nu_\infty k^4 + h_M \|\mathbf{b}\|_{\infty, M} k^2}. \quad (6.2)$$

Da das Taylor-Hood Element inf-sup stabil ist und erfahrungsgemäß keine Oszillationen im Druck auftreten, wird zunächst $\alpha_M = 0$ gesetzt und über die beiden Parameter τ_0 und μ_0 für Stromlinien- bzw. Divergenzstabilisierung variiert. Es werden die Isolinien der verschiedenen Fehler in Abhängigkeit von den beiden Stabilisierungsparametern τ_0 und μ_0 dargestellt. Die Achsen der Parameter sind logarithmisch und auch die Isolinien sind logarithmisch verteilt. Als Parameterbereich wurde jeweils das Intervall von 10^{-2} bis 10^2 gewählt. Eine solche Darstellung wird im Folgenden Konturplot genannt.

Abbildung 6.2 zeigt einen typischen Konturplot für das Q_2/Q_1 -Element bei $\nu = 10^{-6}$ und $c = 1$ für die Gitterweite $h \approx \frac{1}{32}$. Folgende Beobachtungen sind zu machen. Der Fehler in der Divergenz der diskreten Lösung wird fast ausschließlich durch die Divergenzstabilisierung beeinflusst. Für $\mu_0 \geq 1$ ist jedoch keine weitere Verbesserung zu erkennen. Der Fehler des Drucks ist über einen großen Parameterbereich unabhängig von der Stabilisierung, verschlechtert sich jedoch bei Überstabilisierung. Die Fehler der Geschwindigkeit in der H^1 -Seminorm und der L^2 -Norm verhalten sich sehr ähnlich. Bei beiden ist ein in alle Richtungen beschränkter optimaler Bereich zu erkennen. Bei der Stromlinienstabilisierung ist der Anstieg der Fehler für $\tau_0 \rightarrow 0$ jedoch sehr gering. Dieser Aspekt wird später noch genauer untersucht. Durch die Konturplots motiviert, werden $\tau_0 = 10^{-1/2}$ und $\mu_0 = 10^{-1/4}$ als optimale Parameter gewählt (markiert durch ein x), wodurch alle Fehler minimiert werden.

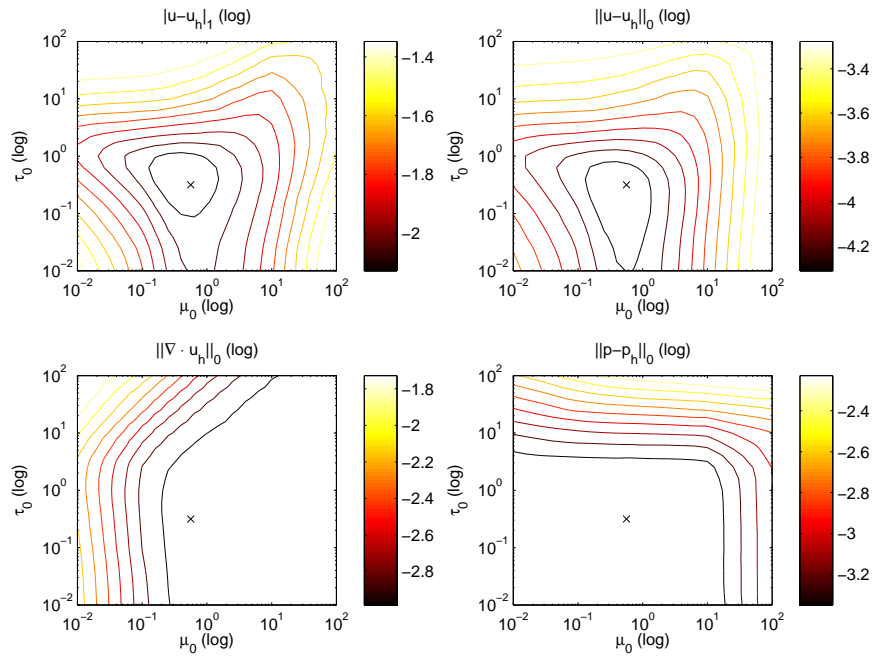


Abbildung 6.2: Konturplots für das Q_2/Q_1 -Element bei $\nu = 10^{-6}$, $c = 1$, $h \approx \frac{1}{32}$

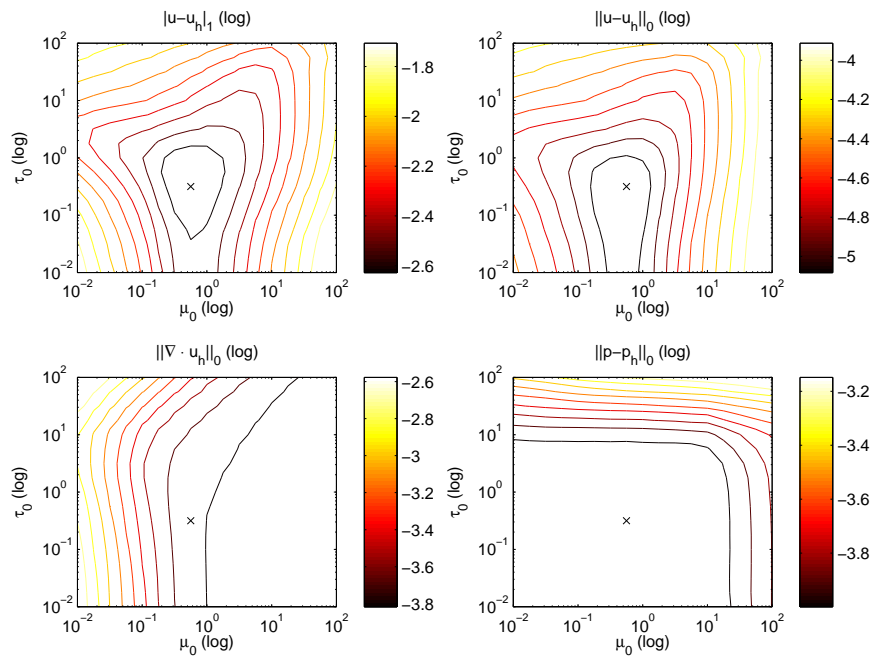


Abbildung 6.3: Konturplots für das Q_2/Q_1 -Element bei $\nu = 10^{-6}$, $c = 1$, $h \approx \frac{1}{64}$

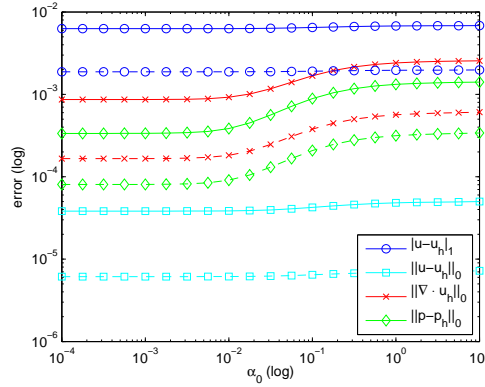


Abbildung 6.4: Einfluss der Druckstabilisierung beim Q_2/Q_1 -Element für Gitterweiten $h \approx \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$ und bei $\nu = 10^{-6}$, $c = 1$.

Für den Konturplot in Abbildung 6.3 wurde nur ein feineres Gitter mit $h \approx \frac{1}{64}$ verwendet und alle anderen Parameter unverändert beibehalten. Die Fehler sind wegen des feineren Gitters kleiner, die Konturlinien zeigen jedoch das gleiche Bild wie auf dem groben Gitter. Die Lage des optimalen Parameterbereichs hat sich nicht geändert, was ein erster Hinweis darauf ist, dass das Parameterdesign bezüglich der lokalen Gitterweite h_M richtig skaliert. Der optimale Parameterbereich hat sich jedoch noch stärker nach unten, d.h. für kleiner Stromlinienstabilisierung, geöffnet.

Als nächstes soll für die Druckstabilisierung gezeigt werden, dass die Wahl $\alpha_M = \alpha_0 h_M^2$ über einen großen Wertebereich für α_0 sinnvoll ist. In Abbildung 6.4 wurden für das Q_2/Q_1 -Element und zwei Gitter mit $h \approx \frac{1}{32}$ und $h \approx \frac{1}{64}$ die Fehler gegen den Druckstabilisierungsparameter $\alpha_0 \in [10^{-4}, 10^1]$ aufgetragen. Die Fehlerlinien für die beiden unterschiedlich feinen Gitter sind nahezu parallel, d.h. die Ordnung der Konvergenz ändert sich über den gesamten Bereich nicht. Die Skalierung mit h_M^2 scheint korrekt zu sein. Für $\alpha_M > 10^{-2}$ macht sich anscheinend die gröbere Auflösung des Projektionsraums bemerkbar und der Fehler im Druck verschlechtert sich. Durch die direkte Kopplung der Divergenz an den Druck über die Bilinearform b verschlechtert sich auch der Fehler in der Divergenz. Minimale Fehlerwerte werden für $\alpha_0 = 0$ erreicht. Das spiegelt auch die bisherige Erfahrung mit inf-sup stabilen Elementen z.B. beim Stokes-Problem wieder. Die H^1 -Seminorm und die L^2 -Norm des Geschwindigkeitsfehlers zeigen über den gesamten dargestellten Parameterbereich keine Abhängigkeit von der Druckstabilisierung.

Die Wahl der Parameter τ_0 und μ_0 basierte auf den Konturplots für zwei Gitterweiten und auf einem beschränkten Parameterbereich. Das Verhalten der Fehler soll jetzt für beide Parameter noch einmal getrennt und über einen größeren Parameterbereich dargestellt werden. Der Parameterbereich wurde auf das Intervall $[10^{-4}, 10^4]$ ausgedehnt und ein größeres Gitter mit $h \approx \frac{1}{16}$ hinzugenommen. Da die H^1 -Seminorm und die L^2 -Norm für die Geschwindigkeit ähnliches Verhalten zeigen, wird von beiden nur noch der Fehler in der H^1 -Seminorm $|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h|_1$ dargestellt.

Abbildung 6.5 (links) zeigt die Abhängigkeit der Fehler vom Parameter der Stromlinienstabilisierung τ_0 bei fixierter Divergenzstabilisierung mit $\mu_0 = 10^{-1/4}$. Es ist sichtbar, dass

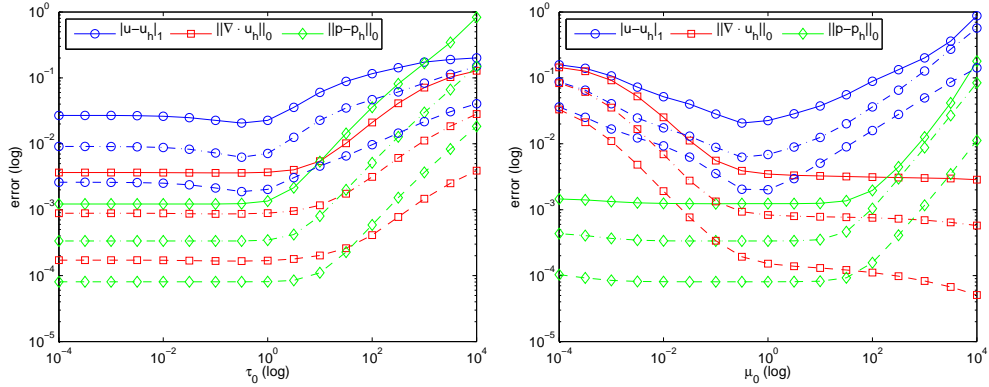


Abbildung 6.5: Einfluss der Geschwindigkeitsstabilisierungen beim Q_2/Q_1 -Element für Gitterweiten $h \approx \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$ bei $\nu = 10^{-6}$, $c = 1$.

für $\tau_0 \leq 1$ die Stromlinienstabilisierung keinen Einfluss auf die Divergenz bzw. den Druck hat. Für $\tau_0 \geq 1$ steigen beide Fehler jedoch stark an. Das Minimum für den Fehler in der H^1 -Seminorm ist nicht besonders ausgeprägt und der flache Verlauf der Fehler setzt sich wie im Konturplot bereits angedeutet bis $\tau_0 = 0$ fort. Auf die Stromlinienstabilisierung könnte in diesem Beispiel also verzichtet werden.

Im rechten Teil der Abbildung ist die Abhängigkeit der Fehler vom Parameter der Divergenzstabilisierung μ_0 dargestellt, diesmal mit festgehaltenem $\tau_0 = 10^{-1/2}$. Das Bild unterscheidet sich wesentlich von dem für die Stromlinienstabilisierung. Der L^2 -Fehler des Drucks verschlechtert sich erst bei starker Überstabilisierung mit $\mu_0 > 10^2$ und ist ansonsten unabhängig von μ_0 . Die L^2 -Norm der Divergenz kann um etwa zwei Größenordnungen verringert werden, für $\tau_0 \geq 1$ ist der Verlauf jedoch sehr flach. Für die H^1 -Seminorm des Geschwindigkeitsfehlers fällt die Verbesserung nicht ganz so stark aus, jedoch deutlicher als bei der Stromlinienstabilisierung. Das Minimum bei $\tau_0 \approx 10^{-1/4}$ aus den Konturplots wird erneut bestätigt. Die Charakteristiken der Verläufe der Fehlerkurven ist unabhängig von der Feinheit des jeweils verwendeten Gitters. Insgesamt stimmen damit die Ergebnisse hinsichtlich der Gitterweite h_M bisher sehr gut mit der Analysis überein.

Die Abhängigkeit der Stabilisierungsparameter von der Elementordnung konnte in der Konvergenzanalyse nicht in allen Teilen voll berücksichtigt werden. Rechnungen mit Elementen bis zur Ordnung Q_5/Q_4 sollen daher zeigen, inwieweit das vorgeschlagene Parameterdesign brauchbar ist.

Abbildung 6.6 zeigt die Abhängigkeit der H^1 -Seminorm des Geschwindigkeitsfehlers und der L^2 -Norm des Druckfehlers von den Stabilisierungsparametern für Elemente unterschiedlicher Ordnung. Die Seminorm war ein guter Indikator für beide Stabilisierungsparameter. Die Fehlerkurven für Elemente gerader bzw. ungerader Ordnung weichen im Detail etwas voneinander ab. Eine Erklärung für dieses Phänomen ist nicht bekannt. Der flache Verlauf der Fehler für geringe Stromlinienstabilisierung tritt auch bei Elementen höherer Ordnung auf. Die Ordnungsabhängigkeit von τ_M scheint nicht ganz erfasst zu sein, für Elemente höherer Ordnung beginnt der Bereich der Überstabilisierung früher. Bei der Divergenzstabilisierung fällt eine Bewertung schwer. Der Unterschied zwischen gerader

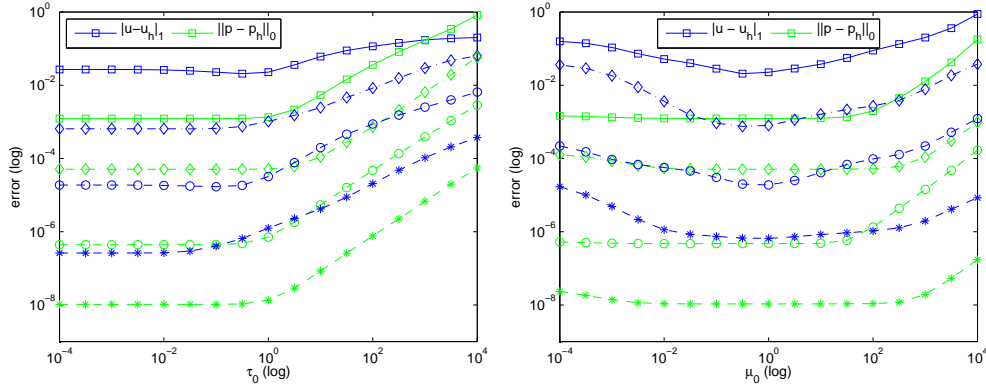


Abbildung 6.6: Abhängigkeit der Fehler von den Stabilisierungsparametern für Q_2/Q_1 (\square), Q_3/Q_2 (\diamond), Q_4/Q_3 (\circ), Q_5/Q_4 (\star) bei $h \approx \frac{1}{16}$

und ungerade Ordnung sowie der weit ausgedehnte Optimalbereich beim Q_5/Q_4 -Element lässt keine brauchbaren Rückschlüsse über eine eventuell vorhandene Ordnungsabhängigkeit zu. Die optimierte Parameterwahl von $\mu_0 = 10^{-1/4}$ kann für alle Elemente beibehalten werden. Der Parameter der Stromlinienstabilisierung τ_0 wird für Elemente höherer Ordnung kleiner gewählt, um die scheinbar fehlende Ordnungsabhängigkeit auszugleichen.

Abschließend soll noch die Abhängigkeit der Fehler von der Viskosität ν und dem Reaktionskoeffizienten c ermittelt werden. Abbildung 6.7 zeigt einen Konturplot für diese beiden Parameter. Für die Geschwindigkeitsfehler ist der Übergang vom diffusionsdominanten zum konvektionsdominanten Fall im Bereich von $\nu = 10^{-1}$ bis $\nu = 10^{-4}$ zu beobachten. Die größeren Fehler in der Geschwindigkeit im konvektionsdominanten Bereich sind auf die Reduktion der Konvergenzordnung zurückzuführen. Für den Reaktionskoeffizienten c , der sich antiproportional zur Schrittweite eines gedachten instationären Problems verhält, ist der Übergang zwischen $c = 10$ und $c = 10^4$ zu beobachten. Für eine gute Approximation der Geschwindigkeit reicht es, wenn einer der Koeffizienten ν oder c groß genug ist. Die Fehler bleiben im konvektionsdominanten Fall für $\nu, c \rightarrow 0$ durch die Stabilisierung beschränkt und sogar der Fall $\nu = c = 0$ lässt sich numerisch lösen. Die zuvor betrachtete Kombination von $\nu = 10^{-6}$ und $c = 1$ ist deutlich im konvektionsdominanten Fall angesiedelt (Markierung mit x).

Bei den Konturlinien für die L^2 -Norm der Divergenz muss der kleine Wertebereich beachtet werden. Praktisch ist der Divergenzfehler komplett unabhängig von beiden Koeffizienten. An der L^2 -Norm des Druckfehlers ist die Instabilität für $\nu > 10$ bzw. $c > 10^4$ zu sehen. Diese impliziert eine untere Schranke an die Zeitschrittweite. Eine ausführlichere Betrachtung müsste an einem echten instationären Problem vorgenommen werden.

Die Ergebnisse zum Parameterdesign bei Taylor-Hood Elementen sind trotz der verbleibenden Abhängigkeit von der Elementordnung, die durch die Analysis nicht vollständig erfasst werden konnte, sehr zufriedenstellend. Die dargestellten Ergebnisse verwenden zur Divergenzstabilisierung die residuale Variante ohne Projektion. Diese ist ebenfalls symmetrisch und kommt wie im Abschnitt 5.7 dargestellt im Gegensatz zur Zwei-Level-Projektion mit wesentlich weniger Matrixeinträgen aus. Die Ergebnisse zur Divergenzstabilisierung

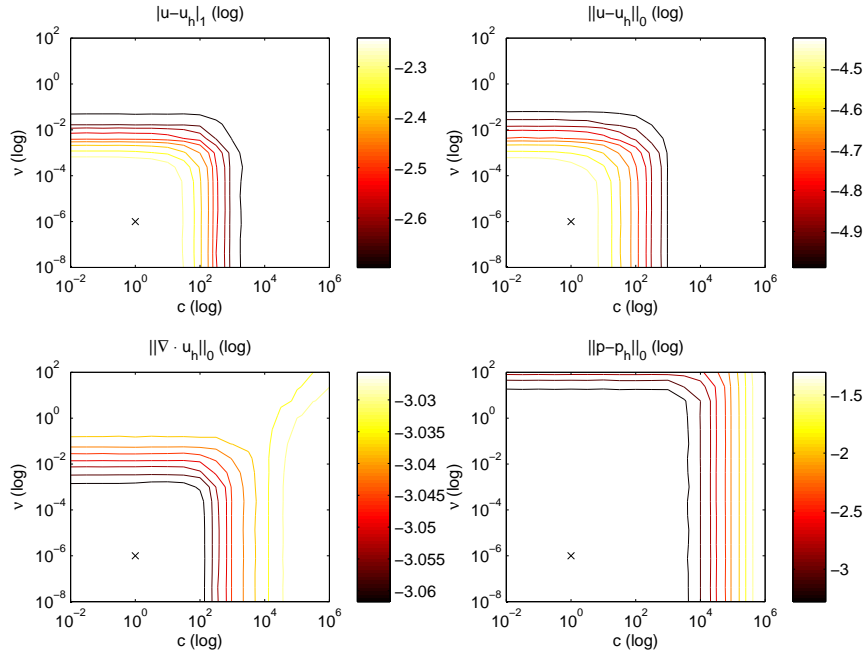


Abbildung 6.7: Abhängigkeit der Fehler beim Q_2/Q_1 -Element von ν und c bei einer Gitterweite von $h \approx \frac{1}{32}$

mit lokaler Projektion sind mit den hier gezeigten vergleichbar, rechtfertigen den Mehraufwand jedoch nicht. Der geringe Einfluss der Stromlinienstabilisierung konnte am gleichen Beispiel in [Rö07] auch für residuale Stabilisierung mit SUPG gezeigt werden.

6.5 Parameterdesign für equal-order Elemente

Das Parameterdesign für equal-order Elemente basiert auf [LRL07] und wurde bereits im Abschnitt 5.4 beschrieben, soll hier aber noch einmal wiederholt werden:

$$\mu_M = \mu_0 \frac{h_M}{k}, \quad \alpha_M = \alpha_0 \frac{h_M}{k}, \quad \tau_M = \tau_0 \frac{h_M^2}{\nu_\infty k^4 + h_M \|\mathbf{b}\|_{\infty, M} k^2}.$$

Es werden die selben Stabilisierungsterme wie für das Taylor-Hood Element verwendet. Auch dieses Parameterdesign soll am Q_2/Q_2 -Element in etwas geringerem Umfang untersucht werden. Die Variation der Elementordnung wird für equal-order Elemente nicht betrachtet.

Da die Druckstabilisierung wegen der Instabilität des equal-order Elements zwingend erforderlich ist, wurde zunächst im diffusionsdominanten Fall mit $\nu = 1, c = 1$ der Druckstabilisierungsparameter $\alpha_0 = 10^{-2}$ ohne die anderen beiden Stabilisierungen ermittelt. Mit dieser Wahl wurde dann im konvektionsdominanten Fall (d.h. $\nu = 10^{-6}, c = 1$) für ein Gitter mit $h \approx \frac{1}{32}$ ein Konturplot für die beiden anderen Parameter τ_0 und μ_0 erstellt,

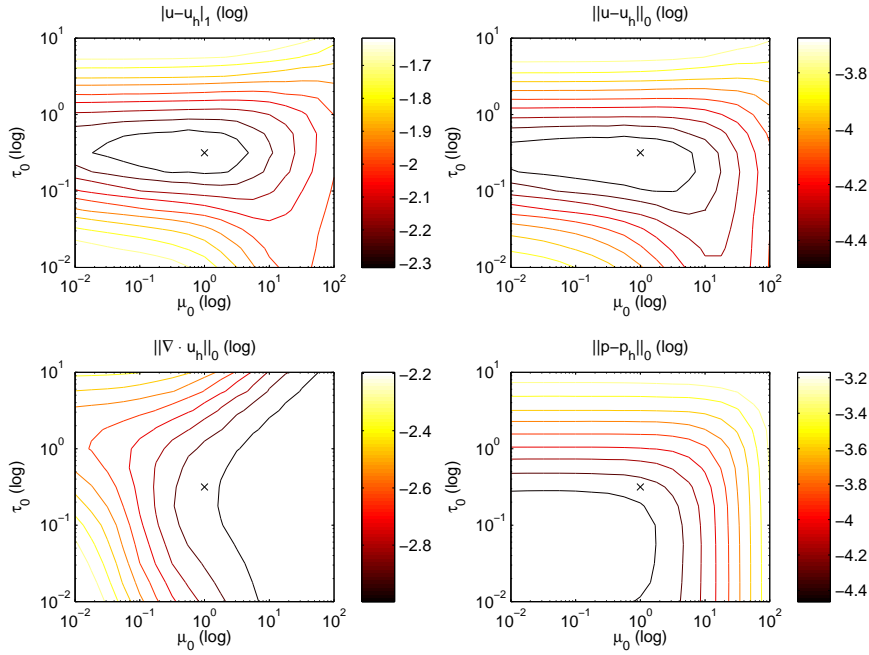


Abbildung 6.8: Konturplot für das Q_2/Q_2 -Element bei $\nu = 10^{-6}$, $h = 1/32$

siehe Abbildung 6.8. Es fällt auf, dass diesmal die Stromlinienstabilisierung einen deutlich stärkeren Einfluss auf die Fehler der Geschwindigkeit hat und der Fehler im Druck schon bei kleineren Stabilisierungsparametern ansteigt. Auf die Darstellung eines Konturplots für ein feineres Gitter wird verzichtet. Die Überprüfung der Skalierung mit h_M wird aber wie zuvor für beide Parameter getrennt untersucht. Als Parameter für weitere Rechnungen werden $\tau_0 = 10^{-1/2}$ und $\mu_0 = 1$ gewählt (markiert durch ein x). Für die Stromlinienstabilisierung ist das genau der selbe Wert wie beim Taylor-Hood Element, wobei auch das Parameterdesign für τ_M das selbe ist.

Da der Druckstabilisierungsparameter im diffusionsdominanten Fall ohne Geschwindigkeitsstabilisierung ermittelt wurde, muss dieser noch einmal mit voller Stabilisierung und auch im konvektionsdominanten Fall bestätigt werden. Abbildung 6.9 zeigt die Ergebnisse und bestätigt sowohl die Skalierung mit h_M als auch die vorherige Wahl von $\alpha_0 = 10^{-2}$. Für $\nu = 1$ im diffusionsdominanten Fall beschränkt sich der Einfluss der Druckstabilisierung weitestgehend auf den Druck selbst. Für $\nu = 10^{-6}$ werden alle Fehler, insbesondere auch die in der Geschwindigkeit, beeinflusst.

Analog zum Taylor-Hood Element werden auch für das Q_2/Q_2 -Element die Abhängigkeiten der Fehler von der Stromlinien- und Divergenzstabilisierung getrennt und über einen großen Parameterbereich untersucht. Abbildung 6.10 zeigt die Resultate für Gitter mit $h \approx \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$. Für beide Parameter τ_0 und μ_0 wird die Skalierung in h_M gut erfasst. Die Stromlinienstabilisierung verringert den Fehler in der Seminorm diesmal um etwa eine ganze Größenordnung. Der stabilisierende Einfluss der Divergenzstabilisierung bleibt jedoch auf die Divergenz begrenzt. Es werden für das equal-order Element also neben der Druckstabilisierung auch beide Geschwindigkeitsstabilisierungen benötigt, um die Fehler

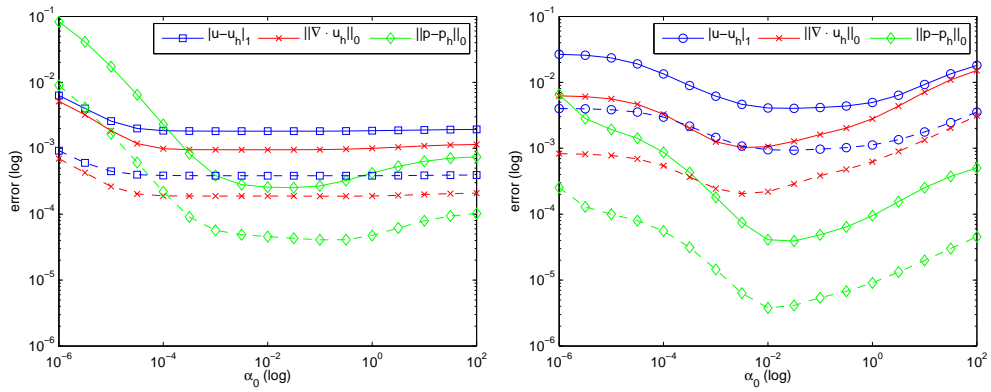


Abbildung 6.9: Einfluss der Druckstabilisierung beim Q_2/Q_2 -Element für $h \approx \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$
 links: $\nu = 1$ diffusionsdominant, rechts: $\nu = 10^{-6}$ konvektionsdominant

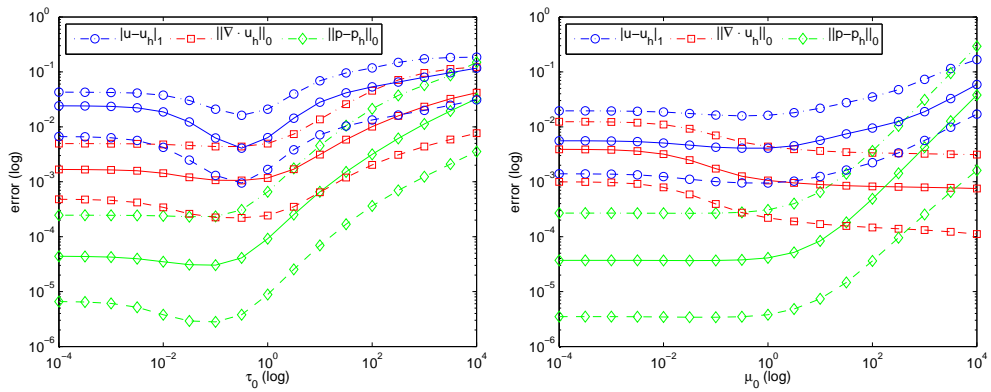


Abbildung 6.10: Einfluss der Geschwindigkeitsstabilisierung beim Q_2/Q_2 -Element
 für Gitterweiten $h \approx \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$ bei $\nu = 10^{-6}, c = 1$

zu minimieren.

6.6 h-Konvergenz

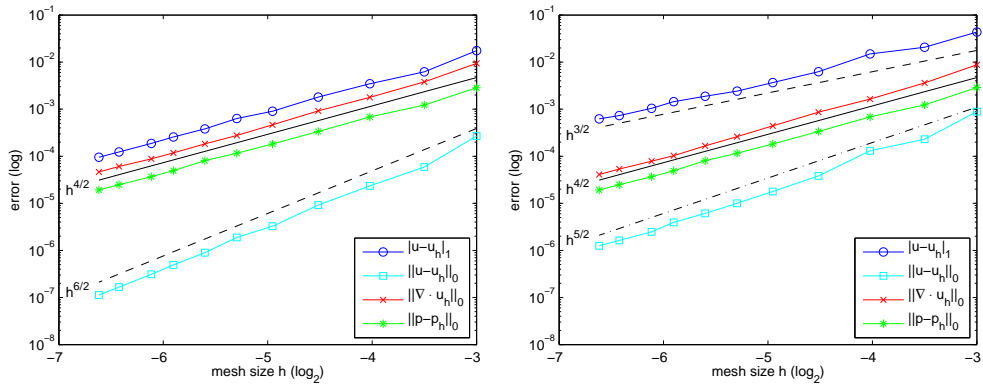
Mit der glatten Referenzlösung können theoretisch hohe Konvergenzraten für Elemente höherer Ordnung erreicht werden. Für $c = 1$ und $\nu = 1$ bzw. $\nu = 10^{-6}$ soll das Konvergenzverhalten für die Taylor-Hood Elemente Q_2/Q_1 , Q_3/Q_2 und Q_4/Q_3 sowie das equal-order Element Q_2/Q_2 untersucht werden. Die Stabilisierungsparameter werden wie in den beiden vorherigen Abschnitten besprochen gewählt.

Abbildung 6.11 zeigt die Ergebnisse für Taylor-Hood Elemente. Im diffusionsdominanten Fall (links) erreichen alle Fehler die optimale Konvergenzordnung bezüglich der verwendeten Elementordnung. Zum Vergleich sind für das Q_k/Q_{k-1} -Element Referenzgeraden mit den Steigungen $k + 1$ und k eingezeichnet. Im konvektionsdominanten Fall ändern sich die Fehler in der Divergenz und im Druck nicht. Die Seminorm und die L^2 -Norm des Geschwindigkeitsfehlers erreichen jedoch nicht mehr die volle Ordnung. Als Vergleich dienen diesmal Referenzgeraden mit den Steigungen $k - \frac{1}{2}$, k und $k + \frac{1}{2}$. Die Analysis sieht vor, dass für das Q_k/Q_{k-1} -Element die Tripelnorm mit der Ordnung k konvergiert. Für die Anteile $\|\nabla \cdot \mathbf{u}_h\|_0$ und $\|p - p_h\|_0$, die in der Tripelnorm mit konstantem Gewichtungsfaktor enthalten sind, wird genau diese Ordnung erreicht. Die L^2 -Norm des Geschwindigkeitsfehlers ist trotz Verschlechterung weiterhin besser als Ordnung k . Die H^1 -Seminorm ist die einzige mit schlechterer Ordnung, wird jedoch in der Tripelnorm mit $\sqrt{\nu}$ skaliert und dominiert die Tripelnorm nicht. Insgesamt erfüllen die numerischen Ergebnisse für Taylor-Hood Elemente das a-priori Konvergenzresultat.

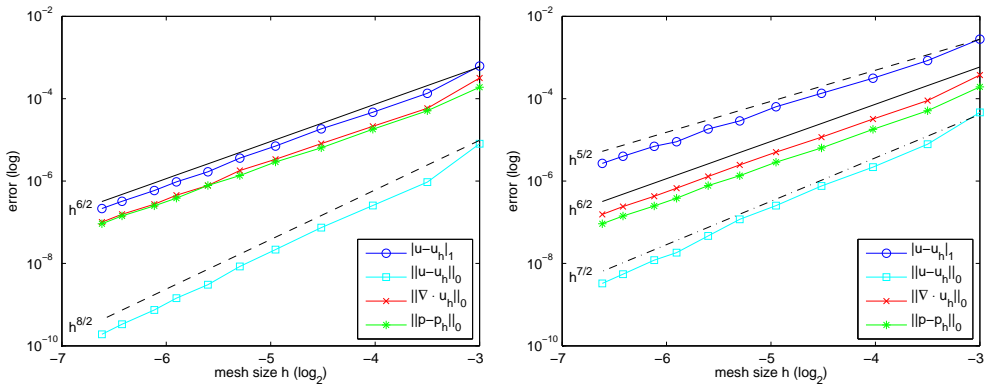
In Abbildung 6.12 ist die h -Konvergenz für das equal-order Element Q_2/Q_2 dargestellt. Für $\nu = 1$ profitiert der Druck nicht von der zusätzlichen Ordnung, was auch durch Konvergenzresultate für das Stokes-Problem vorhergesagt wird. Für $\nu = 10^{-6}$ erreichen die Fehler in Geschwindigkeit und Druck maximale Konvergenzraten. Die Analysis für equal-order Elemente in [LRL07] sieht eine Konvergenzordnung von $k + \frac{1}{2}$ für die Tripelnorm im konvektionsdominanten Fall vor. Deshalb wurde für das Q_2/Q_2 -Element auch der Anteil $S_h(U - U_h, U - U_h)^{1/2}$ in die Abbildung mit aufgenommen, der tatsächlich diese Ordnung erreicht. Die H^1 -Seminorm wird mit $\sqrt{\nu}$ skaliert und spielt damit keine Rolle. Der Fehler der Divergenz wird mit dem Stabilisierungsparameter $\mu_M \sim h_M$ skaliert und erhält so die zusätzliche halbe Ordnung. Die Ordnung der Fehler von Geschwindigkeit und Druck in der L^2 -Norm übertreffen das Konvergenzresultat sogar um eine halbe Ordnung.

Die Konvergenzraten bezüglich h sind in Tabelle 6.1 noch einmal zusammengefasst. Für $\nu = 1$ entsprechen die Ordnungen den Erwartungen, das equal-order Element erreicht kaum bessere Resultate als das Taylor-Hood Element. Für $\nu = 10^{-6}$ ist beim equal-order Element – im Gegensatz zum Taylor-Hood Element – keine Reduktion der Konvergenzordnung für die Fehler in der Geschwindigkeit zu beobachten und der Druck erreicht die theoretisch maximale Ordnung. Dieses Resultat ist etwas überraschend, da es trotz singulärer Störung des Problems und Stabilisierung der bestmöglichen Interpolationseigenschaft des Q_2/Q_2 -Elements entspricht.

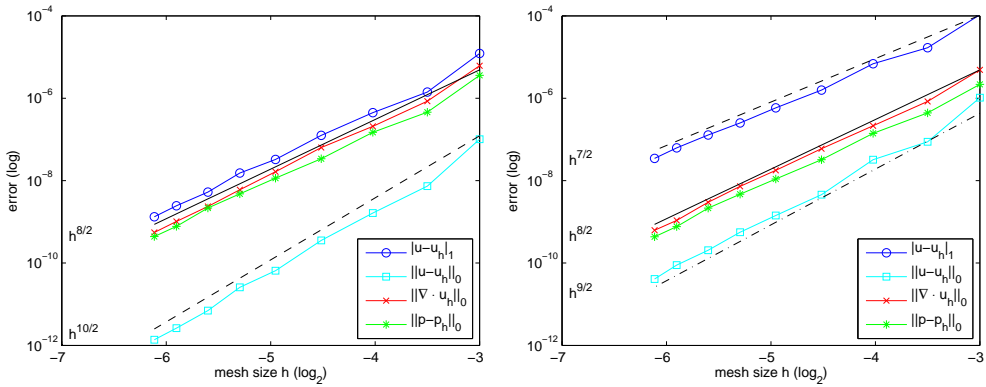
Abbildung 6.13 zeigt die h -Konvergenz für das Q_2/P_{-1} -Element für $\nu = 1$ und $\nu = 10^{-6}$.



(a) Q_2/Q_1 -Element



(b) Q_3/Q_2 -Element



(c) Q_4/Q_3 -Element

Abbildung 6.11: h -Konvergenz für $\nu = 1$ (links) bzw. $\nu = 10^{-6}$ (rechts) für die Taylor-Hood Elemente

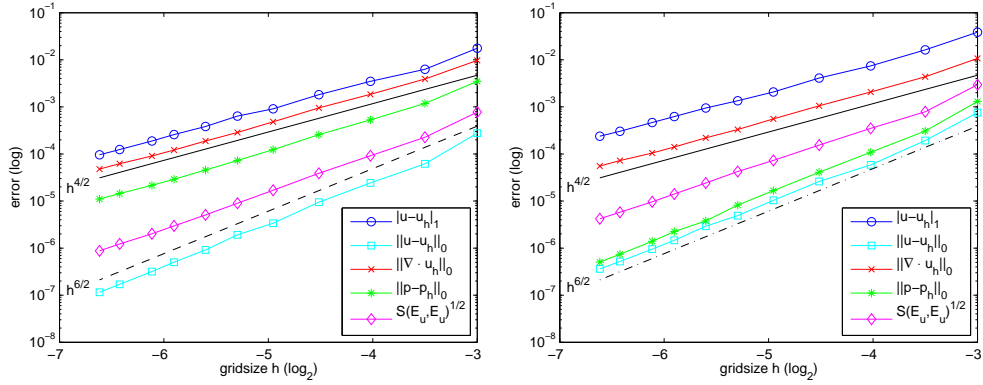


Abbildung 6.12: h -Konvergenz für $\nu = 1$ (links) bzw. $\nu = 10^{-6}$ (rechts) für das Q_2/Q_2 -Element

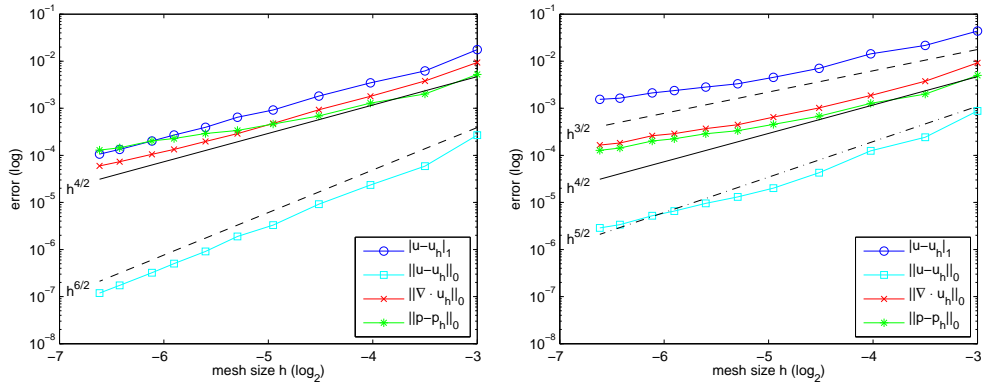


Abbildung 6.13: h -Konvergenz für $\nu = 1$ (links) bzw. $\nu = 10^{-6}$ (rechts) für das Q_2/P_{-1} -Element

Element	ν	$\ u - u_h\ _1$	$\ u - u_h\ _0$	$\ \nabla \cdot u_h\ _0$	$\ p - p_h\ _0$
Q2Q2	1	2.0249	3.0310	2.1017	2.2962
Q2Q2	1e-6	1.9844	3.0108	2.0640	3.0504
Q2Q1	1	2.0223	3.0201	2.0994	1.9736
Q3Q2	1	3.0961	4.1158	3.0887	3.0044
Q4Q3	1	4.0313	4.9377	4.0820	4.0830
Q2Q1	1e-6	1.6764	2.5645	2.1369	1.9777
Q3Q2	1e-6	2.6629	3.6300	3.0271	2.9874
Q4Q3	1e-6	3.6707	4.5310	4.0212	3.9910

Tabelle 6.1: Konvergenzordnungen in den verschiedenen Fehlern für einige Elementpaare im diffusions- bzw. konvektionsdominanten Fall

	τ_0	μ_0	α_0	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ _1$	$\ \mathbf{u} - \mathbf{u}_h\ _0$	$\ \nabla \cdot \mathbf{u}_h\ _0$	$\ p - p_h\ _0$
Q_2/Q_1	–	–	–	2.56e-1	5.42e-4	2.02e-1	2.31e-4
	0.316	0.562	–	1.88e-3	6.14e-6	1.66e-4	8.06e-5
	0.316	0.562	0.01	1.89e-3	6.26e-6	2.70e-4	1.44e-4
	–	0.562	–	2.61e-3	7.42e-6	1.72e-4	8.05e-5
	10.000	–	–	1.85e-2	7.14e-5	1.55e-2	9.94e-5
Q_2/Q_2	–	–	–	2.38e+1	5.35e-2	1.45e+1	1.66e+3
	–	–	0.01	1.64e-2	3.50e-5	9.09e-3	8.27e-6
	0.316	1.000	0.01	9.48e-4	2.92e-6	2.19e-4	3.78e-6
	0.316	–	0.01	1.40e-3	3.60e-6	9.98e-4	3.51e-6
	–	31.623	0.01	2.58e-3	6.79e-6	1.62e-4	1.34e-5

Tabelle 6.2: Vergleich von Q_2/Q_1 und Q_2/Q_2 mit verschiedenen Parameterkombinationen bei $\nu = 10^{-6}$, $h = \frac{1}{64}$

Die Referenzgeraden sind die gleichen wie beim Q_2/Q_1 -Element. Im diffusionsdominanten Fall erreicht die L^2 -Norm vom Druckfehler nicht die Ordnung 2. Die Fehler von der Geschwindigkeit sind davon jedoch unbeeinflusst. Anders sieht es im konvektionsdominanten Fall aus. Dort sind alle Fehler an den Druck gekoppelt und schlechter als beim Q_2/Q_1 -Element. Die Ergebnisse passen zu denen aus [ABF02], wo jedoch nur das Stokes-Problem als gemischtes Problem betrachtet wurde. Die gleiche Beobachtung konnte auch beim Q_3/P_{-2} -Element gemacht werden. Auf regelmäßig verfeinerten Gittern ist dieser Effekt nicht zu beobachten. In der Praxis kann jedoch nicht davon ausgegangen werden, dass ein Gitter, das die ggf. komplexe Geometrie des Gebiets beschreibt, noch mehrere Male verfeinert werden kann. Die Verwendung der $Q_k/P_{-(k-1)}$ -Elemente auf unstrukturierten Gittern kann daher nicht empfohlen werden.

6.7 Vergleich der Stabilisierungsvarianten

Bei der Untersuchung des Einflusses der verschiedenen Stabilisierungsparameter war beim Taylor-Hood Element aufgefallen, dass die Stromlinienstabilisierung die Fehler kaum verringerte. Deshalb sollen noch Resultate für verschiedene Auswahlen an Stabilisierungsparametern gezeigt werden.

Tabelle 6.2 zeigt die Ergebnisse. Mit dem Q_2/Q_1 -Element kann ganz ohne Stabilisierung gerechnet werden, dann jedoch mit relativ großen Fehlern. Die Druckstabilisierung hat keinen oder nur negativen Einfluss auf die Fehler. Auf die Stromlinienstabilisierung kann bei vergleichbaren Fehlern verzichtet werden. Wenn auf die Divergenzstabilisierung verzichtet wird, muss als Ausgleich der Parameter τ_0 für die Stromlinienstabilisierung deutlich größer gewählt werden, um die Fehler zu minimieren. Insbesondere der Divergenzfehler bleibt jedoch um etwa zwei Größenordnungen größer.

Beim unstabilisierten Q_2/Q_2 -Element wird die Instabilität des Drucks sichtbar, der Fehler von $1.66e+3$ macht ihn völlig unbrauchbar. Die Druckstabilisierung behebt dieses Problem, alle Fehler profitieren aber von der vollen Stabilisierung. Wird auf eine der Geschwindigkeitsstabilisierungen verzichtet, so verschlechtern sich auch bei neuer Parameterwahl für die verbleibende Stabilisierung die Fehler. Diesmal ist es jedoch die Stromlinienstabilisierung, mit der allein die besseren Resultate erzielt werden können.

Kapitel 7

Numerische Resultate: Navier-Stokes

In diesem Kapitel sollen Resultate zur numerischen Behandlung eines nicht-linearen Navier-Stokes-Problems gezeigt werden. Als Lösungsverfahren wurde die in Abschnitt 3.3 beschriebene gedämpfte Fixpunkt-Iteration verwendet, die das nicht-lineare Problem auf eine Folge linearer Oseen-Probleme zurückführt. Es wird unter anderem die Konvergenz der Fixpunkt-Iteration in Abhängigkeit von Stabilisierung und Dämpfungsparameter betrachtet und die Qualität von Lösungen auf groben und feinen Gittern mithilfe von bestimmten Kenngrößen, für die in verschiedenen Quellen Referenzwerte angegeben sind, verglichen.

7.1 Problem 2: stationäre 'lid driven cavity'

Ein klassisches Benchmarkproblem ist die 'lid driven cavity' in zwei bzw. drei Raumdimensionen. Hier soll der zweidimensionale Fall untersucht werden. Gesucht ist eine Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen mit rechter Seite $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ auf dem Einheitsquadrat $\Omega = (0, 1)^2$. Eine Seitwärtsbewegung der oberen Wand – durch die Dirichlet-Randbedingung

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{cases} (1, 0) & \text{falls } y = 1 \\ (0, 0) & \text{sonst} \end{cases}$$

vorgeschrieben – treibt einen Hauptwirbel im Zentrum des Gebiets und ggf. mehrere untergeordnete, gegenläufige Wirbel in den Ecken des Gebiets an. Abbildung 7.1 zeigt die Geometrie des Problems. Die Randbedingungen sind unstetig in den Ecken $(0, 1)$ und $(1, 1)$ von Ω und führen zu einer Lösung mit niedriger Regularität.

Obwohl das Problem in zwei Dimensionen aus verschiedenen Gründen unphysikalisch ist, wurde es häufig als Benchmark-Problem verwendet und die Eigenschaften des Problems wurden ausführlich untersucht. Die Frage, für welche Reynoldszahlen noch stationäre

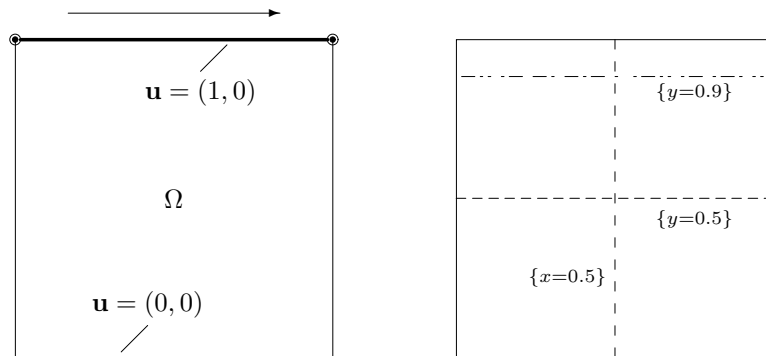


Abbildung 7.1: Geometrie der 'driven cavity'

Lösungen berechnet werden können, ist dennoch nicht abschließend geklärt. Einige Quellen deuten darauf hin, dass die kritische Reynoldszahl, ab der keine stationären Lösungen mehr berechnet werden können, bereits zwischen 7000 und 8000 zu finden ist. [PA95] und [FJGP97] geben diese mit 7763 bzw. 7998.5 an. In anderen Quellen werden jedoch Ergebnisse zu stationären Lösungen für höhere Reynoldszahlen veröffentlicht, in [ECG04] sogar bis zu $Re = 21000$. Diese Ergebnisse wurden durch Pseudo-Zeitschritt-Verfahren berechnet. In dieser Arbeit werden nur Reynoldszahlen bis 7500 betrachtet und die stationäre Fixpunktiteration bis zu einem Residuum von 10^{-12} ausiteriert.

Für die numerischen Rechnungen muss geklärt werden, welche Randwerte in den beiden oberen Ecken gefordert werden sollen. Handelt es sich um den Wert $(1, 0)$, so ergibt sich wegen Stetigkeit der Elemente auf kleinen Bereichen des Randes um die Ecken ein Geschwindigkeitsfeld, das nicht tangential zum Rand ist. Es strömt an der linken oberen Ecke eine kleine Menge des modellierten Mediums in das Gebiet hinein und an der rechten oberen Ecke heraus. Dieser Fall wird 'leaky cavity' (undicht) genannt. Auf unstrukturierten Gittern wird so die benötigte Kompatibilitätsbedingung

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{g} \cdot \mathbf{n} \, ds = 0$$

jedoch leicht verletzt. Deshalb werden in den folgenden Rechnungen in beiden Ecken die Randwerte auf $(0, 0)$ gesetzt. Dann gilt $\mathbf{g} \cdot \mathbf{n} = 0$ sogar punktweise, was zu der Bezeichnung 'non-leaky cavity' (dicht) führt.

Die Unstetigkeit der Randwerte hat starken Einfluss auf die Regularität der Lösung. In den beiden oberen Ecken des Gebiets befinden sich Singularitäten in der Rotation des Geschwindigkeitsfeldes und im Druck. Da wegen der niedrigen Regularität ohnehin keine hohe Konvergenzrate zu erwarten ist, wurden nur Rechnungen mit dem Q_2/Q_1 -Element durchgeführt.

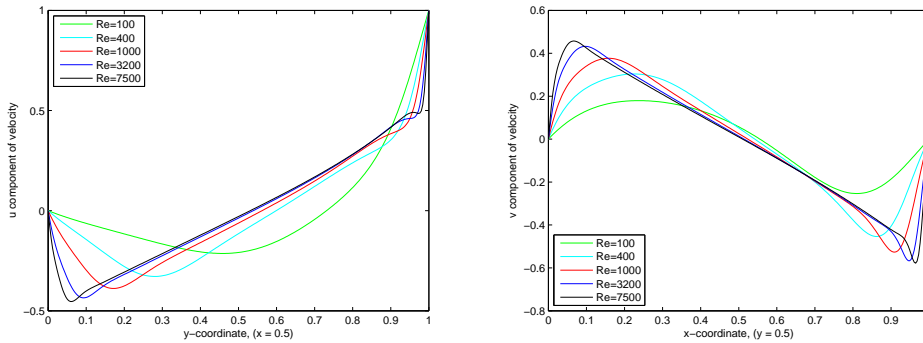


Abbildung 7.2: u bzw. v Komponente der Geschwindigkeit auf den Querschnitten $y = 0.5$ bzw. $x = 0.5$ des Gebiets für verschiedene Reynoldszahlen.

7.2 Darstellung der Lösungen

Es werden verschiedene Größen der Lösung und von ihr abgeleitete Größen graphisch dargestellt. Unter anderem wird die u - bzw. v -Komponente der Geschwindigkeit $\mathbf{u} = (u, v)$ auf den beiden Querschnitten $y = 0.5$ bzw. $x = 0.5$ durch die Mitte des Gebiets betrachtet. Von besonderem Interesse sind die Minima und Maxima sowie deren Positionen bei unterschiedlichen Reynoldszahlen.

Abbildung 7.2 zeigt die Geschwindigkeitskomponenten auf den Querschnitten von Lösungen mit Q_2/Q_1 -Elementen auf einem feinen Gitter mit $h = 1/256$ für Reynoldszahlen $Re \in \{100, 400, 1000, 7500\}$. Für größere Reynoldszahlen sind die Grenzschichten steiler – werden jedoch durch das feine Gitter aufgelöst. Bei dieser Gitterweite treten für die verwendeten Reynoldszahlen im ganzen Gebiet keine Oszillationen auf und es ist keine Stabilisierung notwendig.

Zur visuellen Darstellung der stationären Strömung eignen sich besonders Stromlinien. Dabei handelt es sich um charakteristische Kurven, die in jedem Punkt tangential zum Strömungsfeld verlaufen. Diese können durch numerische Integration des Geschwindigkeitsfelds oder als Isolinien der sogenannten Stromfunktion Ψ gewonnen werden. Die Stromfunktion ist nur bis auf Addition einer Konstanten eindeutig bestimmt. Die Isolinien einer Funktion verlaufen orthogonal zum Gradienten. Es gilt also die Beziehung:

$$\nabla\Psi = \left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}, \frac{\partial\Psi}{\partial y} \right)^T \stackrel{!}{=} (-v, u)^T = \mathbf{u}^\perp.$$

Die Stromfunktion ist Lösung der Poisson-Gleichung:

$$\begin{aligned} -\Delta\Psi &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} && \text{in } \Omega \\ \Psi &= 0 && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{7.1}$$

Bei der driven cavity sind für die Stromfunktion konstante Dirichlet-Randwerte vorzuschreiben, da keine Stromlinien den Rand des Gebiets kreuzen. Zur Normierung der Stromfunktion wurden homogene Dirichlet-Randwerte gewählt. Das Poisson-Problem (7.1) kann

als Variationsproblem formuliert und mit der Finiten-Elemente-Methode numerisch gelöst werden. Dabei wurde zur Diskretisierung das gleiche Gitter wie beim Navier-Stokes-Problem verwendet und der Polynomgrad um eins höher als der des Geschwindigkeitsraums gewählt, so dass die rechte Seite im Bild des Laplace-Operators liegt.

Abbildung 7.3 zeigt Isolinien der Stromfunktion für die bereits zuvor verwendeten Reynoldszahlen. Das Minimum der Stromfunktion zeigt das Zentrum des Hauptwirbels an, dieses wandert mit steigender Reynoldszahl in die Mitte des Gebiets. Schon für $Re = 100$ sind sekundäre Wirbel in den beiden unteren Ecken zu sehen und ab $Re = 3200$ auch ein sekundärer Wirbel links oben bzw. bei $Re = 7500$ ein tertiärer Wirbel rechts unten. Diese sekundären und tertiären Wirbel sind sehr schwach und bei einer Diskretisierung mit zu viel künstlicher Diffusion oder auf groben Gitter fehlen diese kleinen Strukturen in der diskreten Lösung.

7.3 Stabilisierung des nicht-linearen Problems

Bei der Stabilisierung des nicht-linearen Problems muss darauf geachtet werden, dass das Residuum bei den Linearisierungen in der Defekt-Korrektur-Variante die Stabilisierungsterme enthält, so dass auch der Grenzwert stabilisiert ist. Da es sich bei der Stromlinienstabilisierung um einen nicht-linearen Term handelt, ist für das Newton-Verfahren ein zusätzlicher Term bei der Ableitung zu berücksichtigen. Wird dieser vernachlässigt, kann eine Reduktion der Konvergenzordnung auf lineare Konvergenz beim Newton-Verfahren beobachtet werden.

Zur Berechnung der im Folgenden dargestellten Ergebnisse wurde durchweg die Fixpunkt-Iteration verwendet. Da es sich um ein stationäres Problem ohne zusätzlichen linearen Term aus der Zeitdiskretisierung handelt, scheiterte das Newton-Verfahren schon für moderate Reynoldszahlen.

Tabelle 7.1 zeigt die Abhängigkeit der Iterationszahl von der Reynoldszahl und dem Dämpfungsparameter ω für das Elementpaar Q_2/Q_1 mit den beiden Gitterweiten $h = 1/16, 1/32$ und mit bzw. ohne Stabilisierung. Als Stabilisierungsparameter wurde die optimale Wahl vom linearen Problem übernommen. Abbruchbedingung für die Iteration war die Reduktion des nichtlinearen Residuums auf 10^{-12} .

Auf groben Gittern konvergiert das unstabilisierte Verfahren für große Reynoldszahlen nicht. Je nach Dämpfungsparameter divergiert die Lösungsfolge (–) oder das Residuum stagniert (o). In einigen Fällen war zwar Konvergenz zu beobachten, die Folge der Residuen verlief aber nicht monoton (*). Bei regulärer Konvergenz ist die Iterationszahl beinahe unabhängig von h . Die kleinsten Iterationszahlen liefert der jeweils größtmögliche Dämpfungsparameter, bei dem reguläre Konvergenz erreicht wird.

Mit Stabilisierung konvergierte die Fixpunkt-Iteration für die betrachteten Reynoldszahlen bei jeder Kombination von h und ω , insbesondere also auch für $\omega = 1$ also ohne Relaxation. Für Kombinationen, bei denen schon unstabilisiert Konvergenz erreicht wurde, verringert sich die Iterationszahl kaum. Die zusätzliche Nichtlinearität durch LPS-SU scheint wenig problematisch zu sein.

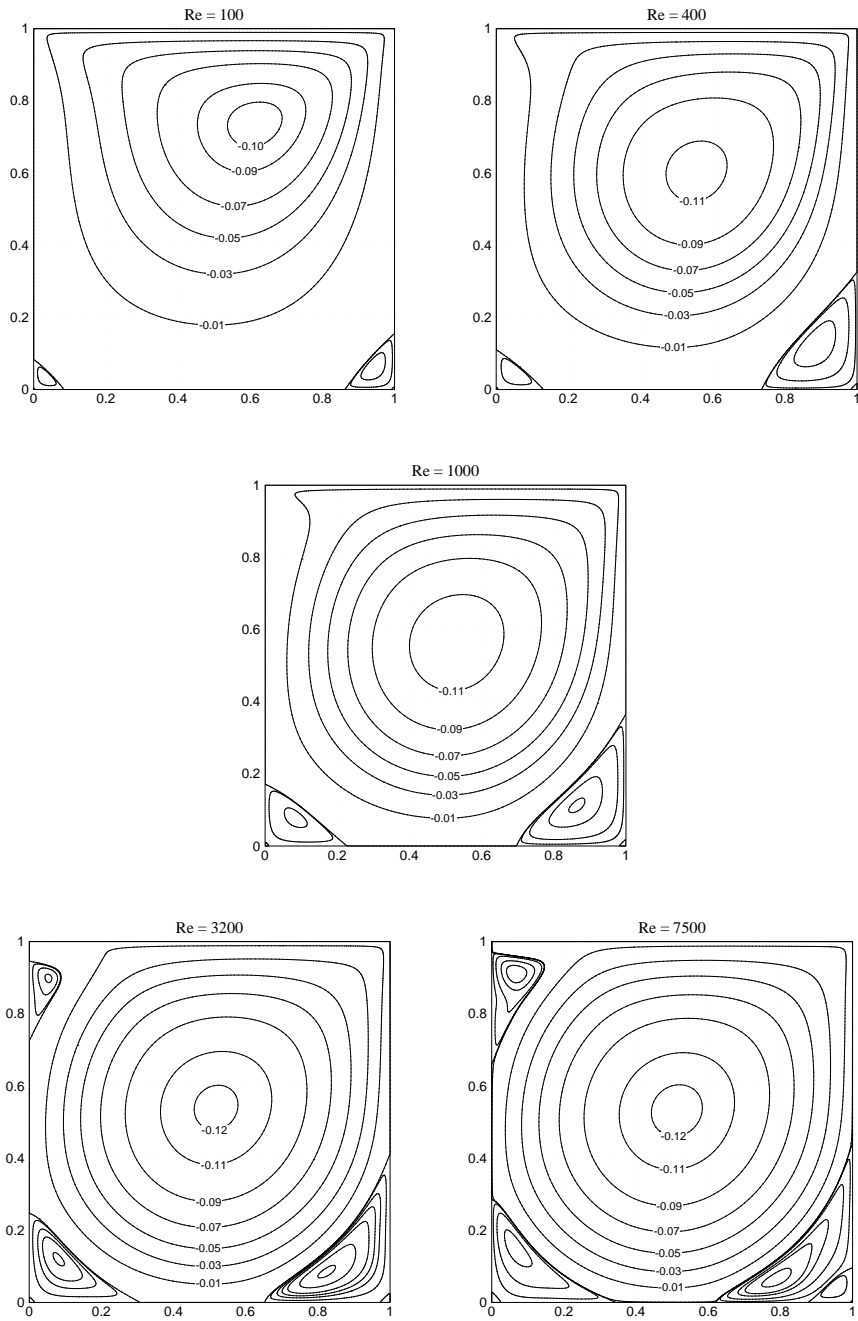


Abbildung 7.3: Isolinien der Stromfunktion

$h = 1/16$, unstabilisiert					$h = 1/16$, stabilisiert				
$Re \mid \omega$	1.00	0.80	0.50	0.25	$Re \mid \omega$	1.00	0.80	0.50	0.25
100	18	25	48	104	100	18	25	48	104
400	36	48	80	164	400	35	46	77	158
1000	55	55	92	185	1000	39	51	86	175
3200	–	–	*257	201	3200	43	56	94	190
7500	–	–	–	–	7500	49	55	91	183

$h = 1/32$, unstabilisiert					$h = 1/32$, stabilisiert				
$Re \mid \omega$	1.00	0.80	0.50	0.25	$Re \mid \omega$	1.00	0.80	0.50	0.25
100	17	25	47	101	100	17	25	47	101
400	35	46	78	158	400	35	46	78	158
1000	42	54	90	182	1000	42	54	90	181
3200	o	67	98	195	3200	50	58	96	194
7500	–	o	*176	251	7500	*113	66	109	221

Tabelle 7.1: Iterationszahlen der Fixpunkt-Iteration

7.4 h -Konvergenz und Vergleich mit Literaturwerten

Die Tabellen 7.2 und 7.3 zeigen die Konvergenz wichtiger Kenngrößen für die Reynoldszahlen 100, 1000 und 7500 bei Verwendung von Q_2/Q_1 Elementen auf Gittern mit $h = \frac{1}{16}$ bis $h = \frac{1}{256}$ einmal mit und einmal ohne Stabilisierung. Es handelt sich um das Minimum der Stromfunktion Ψ_{min} , die Rotation ω_c vom Geschwindigkeitsfeld im Zentrum des Hauptwirbels, sowie die Extrema der Geschwindigkeitskomponenten auf den beiden Querschnitten durch die Gebietsmitte ($u_{min}, v_{max}, v_{min}$).

Die unstabilisierten Lösungen sind auf feinen Gittern sehr gut auskonvergiert. Die Stabilisierung hat keinen Einfluss auf den Grenzwert, durch die zusätzliche Diffusion werden die Beträge aller Kenngrößen jedoch systematisch unterschätzt. Auf den groben Gittern, für die teilweise unstabilisiert keine Lösungen berechnet werden konnten, sind die Werte jedoch bereits sehr gut.

Die Untersuchung der h -Konvergenz zeigt, dass für alle dargestellten Reynoldszahlen die Werte bis auf mehrere Stellen auskonvergiert sind. Zur Bewertung der Ergebnisse wurden Vergleichswerte aus verschiedenen Quellen herangezogen. Die als am zuverlässigsten eingeschätzten Ergebnisse sind in [ECG04] und [BPD98] zu finden. Außerdem wurden noch Ergebnisse aus [Zha90] hinzugenommen.

Die Vergleichswerte wurden durch verschiedene Verfahren berechnet. [ECG04] verwendet ein zentrales Differenzen-Schema zweiter Ordnung für die Ψ - ω -Formulierung (*stream-function vorticity formulation*) der Navier-Stokes-Gleichungen auf Gittern mit bis zu 601×601 Knoten und anschließende Richardson Extrapolation der Kenngrößen. [BPD98] verwendet eine Spektrale Methode mit Chebyshev-Polynomen bis zur Ordnung $N = 160$ und Subtraktion der Singularitäten um die Genauigkeit zu erhöhen. [Zha90] verwendet ein *upwinding* Finite-Differenzen-Schema zweiter Ordnung für die Formulierung in Geschwindigkeit und Druck auf Gittern mit bis zu 257×257 Knoten und ist damit am ehesten mit

h^{-1}	Ψ_{min}	ω	u_{min}	v_{max}	v_{min}
$Re = 100$					
16	-0.1035030920	-3.159564	-0.21385115	0.17948040	-0.25309913
22	-0.1035154010	-3.174083	-0.21417235	0.17958510	-0.25390668
32	-0.1035191289	-3.153498	-0.21405684	0.17955346	-0.25380136
46	-0.1035197495	-3.173885	-0.21403606	0.17956638	-0.25375897
64	-0.1035206273	-3.164575	-0.21403900	0.17956752	-0.25377230
90	-0.1035201398	-3.176061	-0.21404061	0.17956921	-0.25377411
128	-0.1035206402	-3.169346	-0.21403935	0.17956976	-0.25377685
180	-0.1035208632	-3.165988	-0.21403925	0.17956931	-0.25377600
256	-0.1035208423	-3.165666	-0.21403899	0.17956917	-0.25377563
$Re = 1000$					
16	-0.1188497489	-2.044687	-0.39174836	0.37906934	-0.52714464
22	-0.1189754478	-2.061280	-0.38932371	0.37699135	-0.52784572
32	-0.1189680547	-2.065622	-0.38864582	0.37712507	-0.52766377
46	-0.1189460974	-2.065009	-0.38870621	0.37697065	-0.52718536
64	-0.1189410472	-2.065147	-0.38855844	0.37692108	-0.52697928
90	-0.1189388289	-2.066890	-0.38858548	0.37692302	-0.52700900
128	-0.1189369872	-2.068097	-0.38857088	0.37691890	-0.52702394
180	-0.1189366153	-2.067694	-0.38856647	0.37691938	-0.52701553
256	-0.1189362819	-2.067718	-0.38856803	0.37691644	-0.52701336
$Re = 7500$					
16	-	-	-	-	-
22	-	-	-	-	-
32	-0.1270862516	-1.969554	-0.47202642	0.48030038	-0.61632443
46	-0.1235475969	-1.911369	-0.45925942	0.46367035	-0.58734479
64	-0.1227712904	-1.931622	-0.45619770	0.46003535	-0.58218291
90	-0.1225150106	-1.932184	-0.45523425	0.45888834	-0.58126468
128	-0.1224140813	-1.924588	-0.45489633	0.45848305	-0.58061889
180	-0.1223940201	-1.926640	-0.45480831	0.45839639	-0.58043591
256	-0.1223862887	-1.926912	-0.45478062	0.45836448	-0.58043426

Tabelle 7.2: h -Konvergenz in den Kenngrößen (unstabilisiert)

h^{-1}	Ψ_{min}	ω	u_{min}	v_{max}	v_{min}
<i>Re = 100</i>					
16	-0.1034138472	-3.172746	-0.21340268	0.17930875	-0.25226175
22	-0.1034545487	-3.173017	-0.21377361	0.17937568	-0.25365301
32	-0.1035086667	-3.152117	-0.21398936	0.17950863	-0.25376167
46	-0.1035161813	-3.175522	-0.21400559	0.17954691	-0.25374322
64	-0.1035187691	-3.165515	-0.21402890	0.17956003	-0.25377034
90	-0.1035195515	-3.176296	-0.21403899	0.17956783	-0.25377046
128	-0.1035204611	-3.169234	-0.21403906	0.17956897	-0.25377659
180	-0.1035208362	-3.166104	-0.21403909	0.17956914	-0.25377636
256	-0.1035208242	-3.165708	-0.21403886	0.17956909	-0.25377557
<i>Re = 1000</i>					
16	-0.1170003971	-2.046617	-0.37320336	0.36500084	-0.50076342
22	-0.1174113859	-2.041970	-0.37901732	0.36919309	-0.51162979
32	-0.1183101440	-2.065271	-0.38512061	0.37404248	-0.52295025
46	-0.1185194999	-2.057416	-0.38667457	0.37518882	-0.52441870
64	-0.1187125288	-2.064176	-0.38767643	0.37601498	-0.52577296
90	-0.1188296320	-2.066245	-0.38816059	0.37649295	-0.52642819
128	-0.1188881797	-2.067298	-0.38839852	0.37672548	-0.52678700
180	-0.1189198340	-2.067530	-0.38851000	0.37685108	-0.52694332
256	-0.1189320167	-2.067696	-0.38855318	0.37689960	-0.52699464
<i>Re = 7500</i>					
16	-0.1162333168	-1.758641	-0.41529268	0.40934909	-0.53022779
22	-0.1171274265	-1.830362	-0.42255160	0.42291186	-0.53095916
32	-0.1193148378	-1.862104	-0.43940268	0.43748714	-0.56559663
46	-0.1191452475	-1.884852	-0.43794850	0.44319935	-0.56057517
64	-0.1204170569	-1.898038	-0.44563917	0.44969937	-0.56533172
90	-0.1213847684	-1.913305	-0.45065261	0.45401151	-0.57474763
128	-0.1217413773	-1.917777	-0.45218604	0.45572500	-0.57651797
180	-0.1220242877	-1.921912	-0.45340624	0.45687464	-0.57839659
256	-0.1221648979	-1.923808	-0.45393890	0.45746037	-0.57924035

Tabelle 7.3: h -Konvergenz in den Kenngrößen (stabilisiert)

Re	Ref.	u_{min}	y_{min}	v_{max}	x_{max}	v_{min}	x_{min}
100	a)	-0.213989	0.45703	0.179509	0.23828	-0.253762	0.80859
	b)	-0.214039	0.45703	0.179569	0.23828	-0.253776	0.80859
	[BPD98]	-0.214042	0.4581	0.179573	0.2370	-0.253803	0.8104
	[Zha90]	-0.21411	0.45898	0.17946	0.23633	-0.25391	0.81055
1000	a)	-0.385121	0.17578	0.374042	0.16016	-0.522950	0.90625
	b)	-0.388568	0.17188	0.376916	0.15625	-0.527013	0.91016
	[BPD98]	-0.388570	0.1717	0.376945	0.1578	-0.527077	0.9092
	[Zha90]	-0.39009	0.16992	0.37847	0.15820	-0.52839	0.90820
7500	a)	-0.439403	0.07031	0.437487	0.07813	-0.565597	0.96484
	b)	-0.454781	0.06250	0.458364	0.06641	-0.580434	0.96484
	[Zha90]	-0.46413	0.06445	0.47129	0.06836	-0.58878	0.96289

Tabelle 7.4: Minima, Maxima und Position auf den zentralen Querschnitten
a) Q_2Q_1 , $h \approx 1/32$ (stabilisiert), b) Q_2Q_1 , $h \approx 1/256$ (unstabilisiert)

Re	Ref.	Ψ_{min}	ω_c	x_c	y_c
100	a)	-0.1035087	-3.152117	0.6139	0.7363
	b)	-0.1035208	-3.165667	0.6159	0.7374
	[Zha90]	-0.1035	-	0.6172	0.7383
1000	a)	-0.1183101	-2.065271	0.5314	0.5676
	b)	-0.1189363	-2.067718	0.5308	0.5651
	[BPD98]	-0.1189366	-2.067750	0.5308	0.5652
	[ECG04]	-0.118942	-2.067213	0.5300	0.5650
	[Zha90]	-0.1193	-	0.5313	0.5664
7500	a)	-0.1193149	-1.862104	0.5192	0.5293
	b)	-0.1223863	-1.926912	0.5122	0.5321
	[ECG04]	-0.122386	-1.926969	0.5133	0.5317
	[Zha90]	-0.1253	-	0.5177	0.5313

Tabelle 7.5: Minimum der Stromfunktion und Rotation im Zentrum des Hauptwirbels
a) Q_2Q_1 , $h \approx 1/32$ (stabilisiert), b) Q_2Q_1 , $h \approx 1/256$ (unstabilisiert)

dem in dieser Arbeit verwendeten Verfahren zu vergleichen.

Exemplarisch werden die Ergebnisse von Rechnungen mit zwei unterschiedlichen Diskretisierungen (Q_2Q_1 , $h \approx 1/32$ stabilisiert und Q_2Q_1 , $h \approx 1/256$ unstabilisiert) für Reynoldszahlen 100, 1000 und 7500 mit den Referenzwerten aus der Literatur verglichen. Es werden, soweit verfügbar, die gleichen Größen wie schon bei der h -Konvergenz betrachtet.

Tabelle 7.4 listet die Extrema der Geschwindigkeitskomponenten sowie deren Positionen auf den Querschnitten durch die Gebietsmitte auf. Auf dem feinen Gitter mit $h \approx 1/256$ ist für $Re = 100, 1000$ die Übereinstimmung mit den Referenzwerten aus [BPD98] sehr gut. Die Werte aus [Zha90] weichen ebenfalls kaum von diesen ab. Die Werte der stabilisierten Lösung auf dem groben Gitter mit $h \approx 1/32$ sind in Relation zum geringen Rechenaufwand sehr gut und weichen für $Re = 7500$ nur um maximal 4.8% von den Werten der fein aufgelösten Rechnungen ab.

In Tabelle 7.5 werden die Werte für das Minimum der Stromfunktion und dessen Position

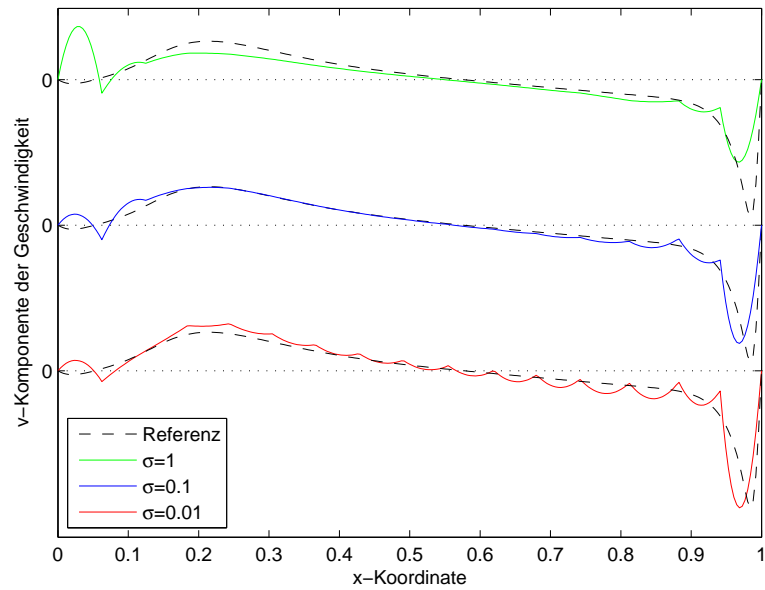


Abbildung 7.4: v -Komponente des Geschwindigkeitsfeldes auf dem Querschnitt $y = 0.9$

sowie die Rotation im Zentrum des Hauptwirbels verglichen. Die Auflösung der Position ist durch die Gitterauflösung begrenzt und eine Übereinstimmung bis auf wenige Tausendstel ist im Vergleich zur kleinsten Gitterweite von $\frac{1}{256} \approx 0.004$ als sehr gut einzustufen. Bemerkenswert ist die Übereinstimmung der feinen Lösung mit den extrapolierten Werten aus [ECG04] selbst für $Re = 7500$.

7.5 Anpassung der Stabilisierungsparameter

Die Ergebnisse der Rechnungen mit der driven cavity deuten darauf hin, dass die verwendeten Stabilisierungsparameter zu groß gewählt wurden. Es soll exemplarisch gezeigt werden, dass durch eine andere Wahl der Parameter die Übereinstimmung der stabilisierten Lösung auf groben Gittern mit einer fein aufgelösten Referenzrechnung verbessert werden kann.

Da sich auf groben Gittern Oszillationen hauptsächlich nahe der oberen Kante des Gebiets befinden, wird die v -Komponente des Geschwindigkeitsfeldes auf dem Querschnitt $y = 0.9$ betrachtet. Für $h = \frac{1}{16}$ werden verschiedene stabilisierte Lösungen berechnet. Dazu wird das ursprüngliche Parametertupel mit einem gemeinsamen Faktor $\sigma \in \{1, 0.1, 0.01\}$ skaliert.

Abbildung 7.4 zeigt die so erhaltenen Werte zusammen mit den Referenzwerten. Die ursprüngliche Parameterwahl reduziert die Oszillationen, verschmiert aber die Grenzschicht und gibt die Lösung auch weiter von der Grenzschicht entfernt nicht akkurat wieder. Das

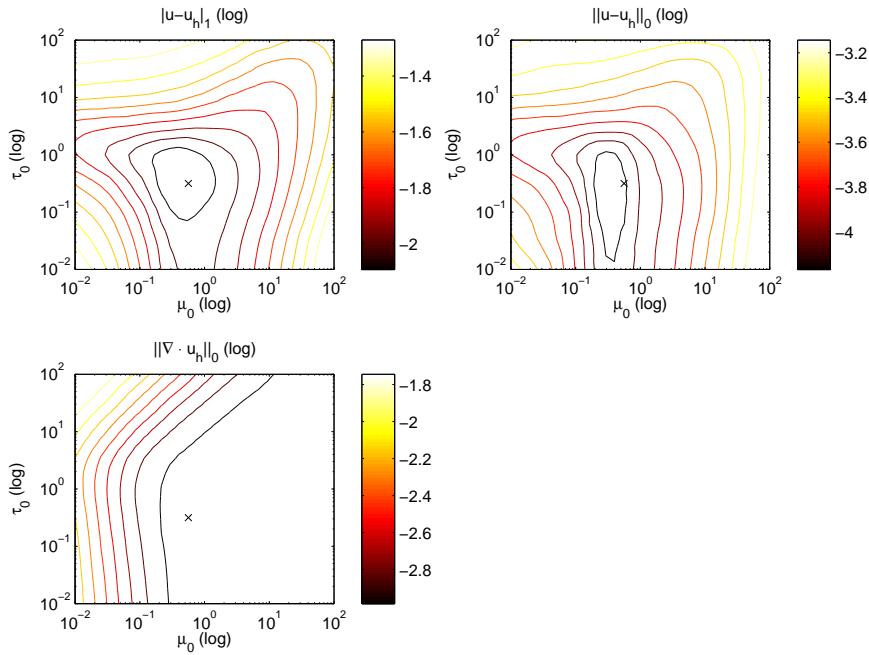


Abbildung 7.5: Konturplots für das Q_2/Q_1 -Element bei $\nu = 10^{-6}$, $c = 0$, $h \approx \frac{1}{32}$

beste Resultat wird für $\sigma = 0.1$ erzielt. Die Grenzschicht bleibt weitestgehend erhalten, Oszillationen werden deutlich vermindert und die Lösung wird insgesamt gut wiedergegeben. Die Beobachtung, dass die Stromlinienstabilisierung für das Taylor-Hood Element nur geringen Einfluss hat, gilt genauso für die driven cavity.

Zwei Gründe für die Verschiebung der Optimalparameter sind denkbar. Der Übergang zum nicht-linearen Problem könnte Auswirkungen auf die Wirksamkeit der Stabilisierung haben, oder die niedrige Regularität der Lösung der driven cavity mit den Singularitäten und Grenzschichten hat Einfluss auf die optimale Wahl der Parameter. Um die erste Vermutung zu überprüfen, wurde das Problem 1 mit glatter Referenzlösung (6.1) auch als nicht-lineares Problem behandelt. Der Reaktionskoeffizient wurde jedoch auf $c = 0$ gesetzt, um den linearen Anteil zu reduzieren und zur driven cavity vergleichbar zu sein. Im linearen Fall hatte der Übergang von $c = 1$ auf $c = 0$ keine Auswirkungen.

Abbildung 7.5 zeigt die Abhängigkeit der Fehler (ohne die L^2 -Norm des Druckfehlers, diese wurde nicht berechnet) von den Stabilisierungsparametern für das Q_2/Q_1 -Element bei $\nu = 10^{-6}$, $h \approx \frac{1}{32}$ und entspricht damit der Konfiguration des Kontuplots in Abbildung 6.2 für das lineare Problem. Die absoluten Fehlerwerte und das Verhalten der Fehler über den Parameterbereich hat sich kaum geändert, zum Vergleich ist die optimale Parameterwahl vom linearen Problem auch in Abbildung 7.5 markiert. Ein geänderte Parameterwahl für das nicht-lineare Problem ist hier nicht nötig.

An einem anderen linearen Testproblem mit einer Referenzlösung die im Gegensatz zu Problem 1 auch kleiner Strukturen (ein sich mehrfach wiederholendes Wirbelmuster) enthält, konnten jedoch wie bei der driven cavity kleinere optimale Parameter ermittelt werden.

Anscheinend trifft also die zweite Vermutung zu, und es besteht eine implizite Abhängigkeit der optimalen Parameter von der Lösung des Problems und ihrer Regularität, die nicht durch die im Parameterdesign enthaltenen Daten erfasst wird.

Fazit und Ausblick

In dieser Arbeit wurde für die Stabilisierung durch lokale Projektion bei inf-sup stabilen Elementen ein a-priori Konvergenzresultat bewiesen. Das durch die Analysis motivierte Parameterdesign zeigt deutliche Unterschiede zum Parameterdesign für equal-order Elemente. Die Analysis zur Stabilisierung durch lokale Projektion in verschiedenen Varianten schließt damit zur gut untersuchten Analysis bei residual basierter Stabilisierung auf.

Am linearen Problem mit glatter Referenzlösung konnte die Effektivität der Stabilisierung durch lokale Projektion mit dem Zwei-Level-Ansatz unter Beweis gestellt werden. Das Konvergenzverhalten und das Parameterdesign aus dem theoretischen Teil konnten – mit Einschränkungen bezüglich der Elementordnung – in verschiedenen numerischen Tests bestätigt werden. Die Ergebnisse sind vergleichbar mit denen zum Ein-Level-Ansatz [Sch07] und zur residual basierten Stabilisierung [Rö07]. Die Taylor-Hood Elemente zeigten sich dabei als weniger abhängig von der Stabilisierung, Grad-Div Stabilisierung allein reichte für gute Resultate anscheinend aus.

Die Implementierung der Zwei-Level-Methode war unproblematisch und hinsichtlich der Laufzeiteffizienz bei moderater Elementordnung mit der residual basierten Stabilisierung konkurrenzfähig. Ein genauer praktischer Vergleich auch mit der Ein-Level-Methode steht noch aus.

Die Zwei-Level-Methode (und evtl. auch die Ein-Level-Methode) hat nachweislich Probleme bei skalaren Konvektions-Diffusions-Problemen mit exponentiellen Grenzschichten am Ausströmrand. Diese treten in Strömungen so nicht auf. Hier gibt es Wandgrenzschichten. Am Beispiel der driven cavity war zu sehen, dass diese Grenzschichten bei laminaren, stationären Strömungen deutlich schwächer sind und schon auf moderat feinen Gittern aufgelöst werden. Trotzdem bleibt der Nachteil, dass durch lokale Projektionsstabilisierung weniger Kontrolle in der Tripelnorm, als z.B. bei residualer Stabilisierung, vorhanden ist. Das Konvergenzresultat in der Tripelnorm ist also praktisch recht schwach, da der Stabilisierungsanteil einen großen Kern hat. Dies könnte auch bei Strömungsproblemen zu Problemen führen. Außerdem sollte genauer untersucht werden, inwieweit die Stromlinienableitung eine geeignete Größe für die Stabilisierung ist, weil Grenzschichten meist orthogonal zur Stromrichtung auftreten.

Die Grad-Div Stabilisierung, die – wie in dieser Arbeit dargestellt – selbst äquivalent zu einer Stabilisierung durch Projektion ist, ist hilfreich bei der Konstruktion von Vorkonditionierern für iterative Löser beim Oseen-Problem [Hei08]. Auch beim nicht-linearen Problem beschleunigt sie als linearer Anteil die Konvergenz der Fixpunkt-Iteration, bzw.

vergrößert deren Konvergenzradius. Falls ungestabilisierte Rechnungen möglich waren, so lieferten sie jedoch fast immer deutlich bessere Ergebnisse als die gestabilisierten, bei der durch die zusätzliche Diffusion die Grenzschichten zu sehr verschmiert waren. Bei noch größeren Reynoldszahlen sind die Lösungen dann zeitabhängig und gegebenenfalls turbulent. Das verwendete Turbulenzmodell muss bei den linearen Problemen berücksichtigt werden. Es handelt sich dann nicht um einfache Oseen-Probleme, sondern z.B. um ein gekoppeltes nichtlineares System mit zusätzlicher turbulenter Viskosität oder eine variationelle Multiskalen-Methode.

Insgesamt lieferte die parallel zur Diplomarbeit vorangetriebene Implementierung bis hin zum stationären Navier-Stokes-Problem sehr gute Ergebnisse. Für die *driven cavity* konnten relevante Kenngrößen sehr genau, teilweise auf dem Niveau von extrapolierten Werten aus anderen Quellen, berechnet werden. Eine weitere Evaluation an anderen stationären und insbesondere auch instationären laminaren Problemen wird den Einfluss von Stabilisierung klären müssen. Besondere Aufmerksamkeit verlangt dabei die Zeitdiskretisierung. Wirbelstrukturen in zeitabhängigen Lösungen über große Zeitskalen aufrecht zu erhalten, ist ein bis heute ungelöstes Problem. Die ggf. nötige Stabilisierung auf ein Minimum zu reduzieren, scheint ein vielversprechender Ansatz zu sein, dem die Stabilisierung durch lokale Projektion dadurch Rechnung trägt, dass sie nur auf den kleinsten Skalen operiert.

Literaturverzeichnis

- [ABF02] D. N. Arnold, D. Boffi, and R. S. Falk. Approximation by Quadrilateral Finite Elements. *Mathematics of Computation*, 71(239):909–922 (electronic), 2002.
- [Alt99] H. W. Alt. *Lineare Funktionalanalysis: Eine anwendungsorientierte Einführung*. Springer-Lehrbuch. Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [BH82] A. N. Brooks and T. J. R. Hughes. Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 32:199–259, 1982.
- [BHK] W. Bangerth, R. Hartmann, and G. Kanschat. *deal.II Differential Equations Analysis Library, Technical Reference*. <http://www.dealii.org>.
- [Bix89] N. E. Bixler. An improved time integrator for finite element analysis. *Communications in Applied Numerical Methods*, 5(2):69–78, 1989.
- [BPD98] O. Botella, R. Peyret, and Y. Daoqi. Benchmark spectral results on the lid-driven cavity flow. *Computers and Fluids*, 27:421–433(13), 1 May 1998.
- [Bra03] D. Braess. *Finite Elemente – Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie*. Springer, Berlin, 3rd edition, 2003.
- [Bre74] F. Brezzi. On the Existence, Uniqueness and Approximation of Saddle-point Problems Arising from Lagrangian Multipliers. *RAIRO Analyse Numérique*, 8:129–151, 1974.
- [Dav04] T. A. Davis. Algorithm 832: UMFPACK V4.3 – An Unsymmetric-Pattern Multifrontal Method. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 30(2):196–199, 2004.
- [ECG04] E. Erturk, T. C. Corke, and C. Gokcol. Numerical Solutions of 2-D Steady Incompressible Driven Cavity Flow at High Reynolds Numbers. *ArXiv Computer Science e-prints*, 2004.
- [FJGP97] A. Fortin, M. Jardak, J. J. Gervais, and R. Pierre. Localization of Hopf bifurcations in fluid flow problems. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 24:1185–1210, 1997.

- [GR86] V. Girault and P.-A. Raviart. *Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations: Theory and Algorithms*. Springer Series in Computational Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [Hei08] T. Heister. Vorkonditionierungsstrategien für das stabilisierte Oseen-Problem. Diplomarbeit, Georg-August-Universität Göttingen, 2008.
- [HFB86] T. J. R. Hughes, L. P. Franca, and M. Balestra. A new finite element formulation for computational fluid dynamics: V. Circumventing the Babuška-Brezzi condition: A stable Petrov-Galerkin formulation of the Stokes problem accommodating equal-order interpolations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 59(1):85–99, 1986.
- [LR06] G. Lube and G. Rapin. Residual-based Stabilized Higher-order FEM for a Generalized Oseen Problem. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 16 (7):949–966, 2006.
- [LRL07] G. Lube, G. Rapin, and J. Löwe. Local Projection Stabilization for Incompressible Flows: Equal-Order vs. Inf-Sup Stable Interpolation. *ETNA*, 2007.
- [MST07] G. Matthies, P. Skrzypacz, and L. Tobiska. A Unified Convergence Analysis for Local Projection Stabilisation Applied to the Oseen Problem. *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 2007.
- [PA95] M. Poliashenko and C. K. Aidun. A Direct Method for Computation of Simple Bifurcations. *Journal of Computational Physics*, 121(2):246–260, 1995.
- [RL07] G. Rapin and J. Löwe. Local Projection Stabilization for Inf-Sup Stable Finite Elements Applied to the Oseen Problem. *submitted*, 2007.
- [Rö07] L. Röhe. Residuale Stabilisierung für Finite-Elemente Verfahren bei inkompressiblen Strömungen. Diplomarbeit, Georg-August-Universität Göttingen, 2007.
- [Sch98] C. Schwab. *p- and hp- Finite Element Methods: Theory and Applications in Solid and Fluid Mechanics*. Clarendon Press, 1998.
- [Sch07] S. Schmaljohann. Lokale Projektionsstabilisierung für das Oseen-Problem. Diplomarbeit, Ruhr-Universität Bochum, 2007.
- [Ste90] R. Stenberg. Error Analysis of some Finite Element Methods for the Stokes Problem. *Mathematics of Computation*, 54:495–508, 1990.
- [SZ90] L. R. Scott and S. Zhang. Finite Element Interpolation of Nonsmooth Functions Satisfying Boundary Conditions. *Mathematics of Computation*, 54(190):483–493, 1990.
- [Zha90] L. B. Zhang. A Second-order Upwinding Finite Difference Scheme for the Steady Navier-Stokes Equations in Primitive Variables in a Driven Cavity with a Multigrid Solver. *RAIRO Analyse Numérique*, 24:133–155, 1990.

Danksagung

Ein jegliches hat seine Zeit, und alles Vorhaben unter dem Himmel hat seine Stunde.

Ich möchte denen danken, die die Entstehung dieser Arbeit begleitet oder überhaupt erst ermöglicht haben, insbesondere meinem Betreuer Professor Dr. Gert Lube. Danke.