# Wann darf man Runden?
## Niveaumengenansatz für die nichtlineare ganzzahlige Programmierung

**Diplomarbeit**

vorgelegt von

Ruth Hübner

aus

München

angefertigt
im Institut für Numerische und Angewandte Mathematik
der Georg-August-Universität zu Göttingen
2010

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Nichtlineare ganzzahlige Optimierung

Unter ganzzahliger Optimierung versteht man ein Optimierungsproblem, bei dem gefordert wird, dass die Variablen ausschließlich ganzzahlige Werte annehmen dürfen. Probleme dieser Art treten in der Praxis häufig auf: Man findet sie zum Beispiel im betriebswirtschaftlichen Bereich als Investitions- und Produktionsprogramm-Planungsprobleme (vgl. T. Ellinger [18], S. 149).

*Beispiel.* Ein Beispiel für ein Problem zur gewinnmaximalen Produktionsprogramm-Planung könnte dabei folgendermaßen aussehen (vgl. ebd. [18], S. 187): Eine Firma kann $n$ verschiedene Produkte herstellen und benötigt dazu $m$ verschiedene Produktionsfaktoren (z. B. Kapazitäten auf Produktionsmaschinen, Mitarbeiterstunden, Lagerplatz etc.).

Als Problem der linearen ganzzahligen Programmierung (ILP) könnte das Problem dann folgendermaßen aussehen: Man möchte den Gesamtgewinn maximieren. Dieser ergibt sich aus der Formel „Gesamtgewinn = Erlöse - variable Kosten - fixe Kosten“ und hat dabei Nebenbedingungen einzuhalten, die verhindern sollen, dass die effektiv verbrauchte Menge eines Produktionsfaktors seine verfügbare Gesamtmenge überschreitet.

$$
\begin{aligned}
\text{(ILP)} \qquad \max \quad & \sum_{j=1}^{n} p_j \cdot x_j - \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} r_{ij} \cdot x_j \cdot \pi_i - K_f \\
s.d. \quad & \sum_{j=1}^{n} r_{ij} \cdot x_j \leq r_i^0 \quad \forall i = 1, \ldots, m \\
& x_j \in \mathbb{N}_0 \quad \forall j = 1, \ldots, n
\end{aligned}
$$

Dabei ist

| | |
|---|---|
| $p_j$ | der Absatzpreis von Produkt $j$ je Mengeneinheit, |
| $x_j$ | die produzierte Menge von Produkt $j$, |
| $r_{ij}$ | der Verbrauch von Faktor $i$ für eine Mengeneinheit von Produkt $j$, |
| $\pi_i$ | der Beschaffungspreis von Faktor $i$ je Mengeneinheit, |
| $K_f$ | die fixen Kosten und |
| $r_i^0$ | die verfügbare Gesamtmenge an Faktor $i$. |

Indem man fordert, dass die produzierte Menge der einzelnen Produkte (die $x_j$) ganzzahlig ist, erzeugt man ein lineares ganzzahliges Optimierungsproblem.

Wie man an diesem Beispiel sehen kann, entspricht eine Ganzzahligkeitsforderung einer zusätzlichen Einschränkung des zulässigen Bereichs. Im Allgemeinen kann man wohl zu Recht behaupten, dass die linearen Optimierungsprobleme dadurch schwieriger zu lösen sind. So ist das allgemeine lineare ganzzahlige Programm $\max\{cx|\ Ax \leq b; x \in \mathbb{Z}^n\}$ $\mathcal{NP}$-vollständig. Das liegt daran, dass schon das Problem, für eine gegebene rationale Matrix $Y$ und einen gegebenen rationalen Vektor $b$ zu entscheiden, ob $Ax \leq b$ eine ganzzahlige Lösung $x$ hat, $\mathcal{NP}$-vollständig ist (vgl. Schrijver [16], S. 227). Im Vergleich dazu lässt sich ein lineares Optimierungsproblem $\max\{cx|\ Ax \leq b\}$ in $O(n^{3,5}L^2)$ lösen, wenn $n$ die Dimension des Problems und $L$ die Bit-Anzahl des Inputs ist (vgl. Karmarkar [10]).

Grundsätzlich gilt, dass viele der Lösungsstrategien für lineare Programmierung verloren gehen, wenn man zusätzlich Ganzzahligkeit der Variablen fordert. So lässt sich zum Beispiel das Konzept der LP-Dualität nicht auf die ganzzahlige lineare Optimierung übertragen (vgl. Schrijver [16], S. 227). Auch das Simplex- oder das Innere-Punkte-Verfahren von Karmarkar lassen sich nicht übertragen.

Allerdings hat man es in der Praxis nicht nur mit linearen ganzzahligen Problemen, sondern auch mit nichtlinearen ganzzahligen Problemen zu tun.

*Beispiel.* So könnte man sich bei dem oben angeführten Beispiel vorstellen, dass der Absatzpreis $p_j(x_)$ von $x_j$ abhängt, wenn ein großes Angebot zum Beispiel den Preis drückt oder eine geringe Produktionsmenge den Preis in die Höhe treibt. Genauso könnte es auch Sinn ergeben zu erlauben, dass der Verbrauch von Faktor $i$ für $x_j$ Mengeneinheiten von Produkt $j$ nicht linear von $x_j$ abhängt, sondern allgemein von der Form $r_{ij}(x_j)$ ist. Aber auch der Beschaffungspreis $\pi_i$ von Faktor $i$ je Mengeneinheit könnte, zum Beispiel wenn die Zulieferer Rabatte gewähren, von der gesammten Verbrauchsmenge $\sum_{j=1}^n r_{ij}(x_j)$ abhängen. Insgesamt erhält man das folgende nichtlineare ganzzahlige Programm (INLP): (vgl. T. Ellinger [18], S. 183)

$$\text{(INLP)} \qquad \begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=1}^{n} p_j(x_j) \cdot x_j - \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} r_{ij}(x_j) \cdot \pi_i \left( \sum_{j=1}^{n} r_{ij}(x_j) \right) - K_f \\ s.d. \quad & \sum_{j=1}^{n} r_{ij}(x_j) \leq r_i^0 \quad \forall i = 1, \dots, m \\ & x_j \in \mathbb{N}_0 \quad \forall j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Das große Problem der nichtlinearen im Vergleich zur linearen ganzzahligen Programmierung ist vor allem, dass sie noch nicht so gut erforscht ist (vgl. Hemmecke u. a. [8], S. 561). Außerdem ist sie natürlich eine Verallgemeinerung und schon allein deshalb ist nicht zu erwarten, dass sie einfacher ist. Ein Problem besteht darin, dass die Zielfunktion beliebig kompliziert werden kann. Da sie nicht mehr stetig sein muss, kann das soweit gehen, dass man eine Funktion optimieren möchte, die auf jedem Punkt des $\mathbb{R}^n$ einen anderen Wert annimmt. Aber auch für „angenehmere“ Probleme fallen einige Lösungstechniken weg: Man kann bei nichtlinearen Funktionen zum Beispiel nicht mehr unbedingt eine Richtung des steilsten Abstiegs feststellen.

Natürlich ist der Begriff „nichtlineare ganzzahlige Programmierung“ sehr weit gefasst, so dass sich die meisten Ergebnisse zu diesem Gebiet auf Spezialfälle beschränken. Hemmecke u. a. [8] liefern einen Überblick über die wichtigsten Ergebnisse und Algorithmen zu nichtlinearen ganzzahligen Programmen und auch die Grundlage für die folgende Darstellung:

Häufig beschränkt man sich auf den Fall, dass die Zielfunktion nichtlinear ist, die Nebenbedingungen aber linear. Solch ein *mixed-integer nonlinear programming problem* (MINLP) wäre dann von der Form

$$\begin{array}{lll} \text{(MINLP)} \qquad & \max / \min & f(x_1, \ldots, x_n) \\ & s.d. & Ax \leq b \\ & & x \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{Z}^{n_2} \end{array}$$

Schon die rein kontinuierliche Variante dieses Problems ($n_2 = 0$) ist $\mathcal{NP}$-schwer (vgl. ebd. [8], S. 563). Ist die Dimension $n = n_1 + n_2$ allerdings fest und die Zielfuntion $f$ für alle zulässigen Lösungen nichtnegativ, so gibt es einen FPTAS (*fully polynomial time approximation scheme*) für das Maximierungsproblem (vgl. ebd. [8], S. 597). Ist nur die Dimension fest (die Zielfunktion also nicht unbedingt überall nichtnegativ), so gibt es einen Algorithmus, der in polynomialer Zeit läuft und für einen gegebenen Fehler $\epsilon$ eine zulässige Lösung $x_\epsilon \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{Z}^{n_2}$ liefert, für die gilt

$$|f(x_\epsilon) - f(x_{max})| \leq \epsilon \, |f(x_{max}) - f(x_{min})| \, .$$

Es gibt auch den umgekehrten Fall, dass die Zielfunktion linear ist und die Nebenbedingungen zum Beispiel quadratisch sind. Allerdings hat dieser Fall für die vorliegende Arbeit keine Bedeutung, weshalb er nicht weiter betrachtet werden soll.

Ist die Dimension des nichtlinearen ganzzahligen Problems fest, gibt es aber Fälle, in denen das Problem in polynomialer Zeit gelöst werden kann:
Konvexe Zielfunktionen können auf den ganzzahligen Punkten eines Polytops in polynomialer Zeit maximiert werden (vgl. ebd. [8], S. 564).
Sind $f, g_1, \ldots, g_m$ quasi-konvexe Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten (wobei $l$ die Höchstgrenze der binären Kodierungslängen aller Koeffizienten ist) und Grad kleiner oder

gleich $d \geq 2$, gibt es einen Algorithmus, der einen Minimierer $x^* \in \mathbb{Z}^n$ für

$$\begin{array}{ll} \min & f(x_1, \ldots, x_n) \\ s.d. & g_1(x_1, \ldots, x_n) \leq 0 \\ & \vdots \\ & g_m(x_1, \ldots, x_n) \leq 0 \\ & x \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

liefert oder zurückgibt, dass dieses Problem nicht lösbar ist und in $O(m) l^{O(1)} d^{O(n)} 2^{O(n^3)}$ läuft. (Das heißt in fester Dimension $n$ ist die Laufzeit polynomial.) (vgl. Heinz [7])

Auch für den Fall, dass die Dimension nicht fest ist, gibt es vor allem für den Fall der konvexen Maximierung/ Minimierung bereits einige Ergebnisse:

- Probleme der konvexen ganzzahligen Maximierung können häufig auf die Lösung von polynomial vielen linearen ganzzahligen Programmmen reduziert werden (vgl. Hemmecke u. a. [8], S. 565).

- Das Problem

  $$\min\{f(x) : \; Ax = b, \; l \leq x \leq u, \; x \in \mathbb{Z}^n\}$$

  mit einer separabel konvexen Zielfunktion $f$ (d.h. $f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)$ für konvexe Funktionen $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für alle $i = 1, \ldots, n$.) kann (unter bestimmten Voraussetzungen an die Matrix $A$) in polynomialer Zeit gelöst werden (vgl. ebd. [8], S. 579).

- Für das Problem

  $$\begin{array}{ll} \min & f(x, y) \\ s.d. & g(x, y) \leq 0 \\ & l \leq y \leq u \\ & x \in \mathbb{R}^{n_1}, \; y \in \mathbb{Z}^{n_2} \end{array}$$

  mit $n = n_1 + n_2$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ zweimal stetig-differenzierbare konvexe Funktionen, gibt es einige praktische, gut anwendbare Algorithmen:

  - eine Erweiterung des Branch-and-Bound Algorithmus für lineare gemischt-ganzzahlige Probleme von Gupta und Ravindran [6]

- den Outer-Approximation (OA) Algorithmus, der für das gemischt-ganzzahlige Problem eine optimale Lösung liefert (vgl. Duran und Grossmann [3] und [4]) und nahverwandt damit

- den Extended Cutting Plane (ECP) Algorithmus von Westerlund und Pettersson [19].

• Auch für den in der Praxis ebenfalls häufigen Fall der quadratischen Minimierung, das heißt für Probleme der Art (mixed-integer quadratically constrained programming)

$$\begin{array}{lll} (MIQCP) & \min & q_0(x) \\ & s.d. & q(x) \leq 0 \\ & & l \leq x \leq u \\ & & x \in \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{Z}^{n_2}, \end{array}$$

wobei $q_0 : \mathbb{R}^{n_1+n_2} \to \mathbb{R}$ und $q : \mathbb{R}^{n_1+n_2} \to \mathbb{R}^m$ quadratisch sind, gibt es eine Vielzahl von Algorithmen und Approximationen (vgl. Hemmecke u. a. [8], S. 601).

In der vorliegenden Arbeit soll ein anderer Ansatz verfolgt werden: Ausgehend von der Hoffnung, dass das zugehörige kontinuierliche Problem leichter zu lösen ist als ein nichtlineares ganzzahliges Programm, wollen wir Bedingungen an die Zielfunktion finden, die dazu führen, dass eine optimale Lösung des ganzzahligen Programms durch Auf- oder Abrunden aller Komponenten einer endlichen optimalen Lösung des kontinuierlichen Gegenstücks gefunden werden kann. Lässt sich das kontinuierliche Gegenstück leichter lösen als das ganzzahlige Problem, gewinnt man dadurch einen Lösungsweg. Und selbst wenn man im Allgemeinen, abhängig von der Komplexität des kontinuierlichen Problems, nicht weiß, ob diese Lösung über einen „Umweg“ schneller ist, so liefert der Ansatz auf jeden Fall eine zweite Lösungsstrategie, wenn das ganzzahlige Problem nicht ohne weiteres gelöst werden kann. Die Bedingungen an die Zielfunktion werden geometrische Forderungen an die Form der Niveaumengen der Zielfunktion sein. In Abschnitt 2.2 wird die allgemeine Beweisidee und das daraus resultierende Vorgehen zur Lösung eines nichtlinearen ganzzahligen Optimierungsproblems vorgestellt. Ausgehend davon werden dann in den Kapiteln 3, 4 und 5 drei verschiedene geometrische Formen vorgestellt, für die diese Art des Vorgehens anwendbar ist und daher eine optimale Lösung des ganzzahligen Problems liefert. Im abschließenden Kapitel 6 wird ein Ausblick auf mögliche Weiterentwicklungen gegeben.

# 2 Grundlagen

Bevor in Abschnitt 2.2 die grundlegende Idee dieser Arbeit vorgestellt wird, werden wir in Teil 2.1 einige Definitionen bereitstellen, die wir im Folgenden brauchen werden.

## 2.1 Definitionen

Wie bereits eingangs erwähnt, beschäftigt sich diese Arbeit mit Lösungsansätzen für spezielle ganzzahlige Optimierungsprobleme.

**Definition 2.1.** Ein ganzzahliges Optimierungsproblem (IP) hat die folgende Form:

$$\begin{array}{lll} (\mathrm{IP}) & \min & f(x) \\ & s.d. & x \in S \cap \mathbb{Z}^n \end{array}$$

mit $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Wenn eine optimale Lösung von (IP) existiert, wird sie mit $x^*_{(\mathrm{IP})}$ bezeichnet und ihr Zielfunktionswert mit $z^*_{(\mathrm{IP})}$.

Dabei werden wir versuchen eine optimale Lösung $x^*_{(\mathrm{IP})}$ zu finden, indem wir das „zugehörige" kontinuierliche Problem lösen. Dies werden wir die Relaxation von (IP) nennen:

**Definition 2.2.** (Aus Schöbel [13], S. 97) Sei

$$\begin{array}{lll} (P) & \min & f(x) \\ & s.d. & x \in P \end{array}$$

ein Optimierungsproblem. Dann heißt

$$\begin{array}{lll} (P') & \min & f'(x) \\ & s.d. & x \in P' \end{array}$$

Relaxation von $(P)$, falls $P' \supset P$ und $f'(x) \leq f(x)\ \forall x \in P$.

*Bemerkung* 2.3. (Aus ebd. [13], S. 98) Sei $(P')$ eine Relaxation von $(P)$, $x^*$ optimal für $(P)$ und $x'$ optimal für $(P')$. Dann gilt:

- $f'(x') \leq f(x^*)$. Also ist $f'(x')$ eine untere Schranke für den optimalen Zielfunktionswert von $(P)$.
- Ist $x' \in P$, dann ist $x'$ optimal für $(P)$.

Zu (IP) aus Definition 2.1 werden wir im Folgenden die Relaxation

$$\begin{array}{lll} \text{(RP)} & \min & f(x) \\ & s.d. & x \in S \end{array}$$

verwenden. Diese ist ab jetzt immer gemeint, wenn die Rede von „Relaxation“ ist.

**Lemma 2.4.** *(RP) ist eine Relaxation von (IP).*

*Beweis.*
- $S \supset S \cap \mathbb{Z}^n$
- $f(x) = f(x)\ \forall x \in S \cap \mathbb{Z}^n$

□

Durch die Lösung des relaxierten Problems (RP) gewinnt man zwar eine untere Schranke für den optimalen Zielfunktionswert von (IP), allerdings können die optimalen Lösungen beliebig weit auseinander liegen. In der folgenden Arbeit sollen deshalb Spezialfälle untersucht werden, in denen man eine optimale Lösung von (IP) bekommen kann, indem man (RP) löst und lediglich die ganzzahligen Punkte betrachtet, die durch „Runden“ der optimalen Lösung von (RP) entstehen.

**Definition 2.5.** Zu einem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ sei $\text{Round}(x)$ die Menge der maximal $2^n$ Punkte, die sich ergeben, wenn man jede Komponente von $x$ auf- oder abrundet. Mit $[x]$ sei dagegen die ganzzahlige Zahl bezeichnet, die entsteht, wenn man $x$ kaufmännisch rundet (nach DIN 1333).

*Beispiel.* Hat man beispielsweise ein $x = (0.7, 1.5, 3)$ gegeben, ist

$$\text{Round}(x) = \{(0,1,3), (1,1,3), (1,2,3)\}$$

und $[x] = (1,2,3)$.

*Bemerkung* 2.6. Sind $k$ Komponenten von $x$ ganzzahlig, gibt es $2^{(n-k)}$ Punkte in $\text{Round}(x)$.

## 2.2 Beweisidee

Wie bereits erwähnt sollen im Folgenden hinreichende Bedingungen an die Zielfunktion eines (IP) untersucht werden, so dass eine optimale Lösung $x^*_{(\mathrm{IP})}$ des (IP) in $\mathrm{Round}(x^*)$ liegt, wenn $x^*$ die optimale Lösung von (RP) ist. Wir gehen deshalb im Folgenden stets davon aus, dass $\mathrm{Round}(x^*) \neq \{x^*\}$, da sonst (vgl. 2.6) $x^* \in \mathbb{Z}^n$ wäre und damit automatisch auch eine Lösung von (IP).

Die hinreichende Bedingung soll von der Art sein, dass sie verlangt, dass die (nichtleeren) Niveaumengen $N_{\leq}(z) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leq z\}$ bis zu einem bestimmten $z$ eine vorgegebene geometrische Form „$A(x^*)$“ haben. Um zu beweisen, dass $x^*_{(\mathrm{IP})} \in \mathrm{Round}(x^*)$ liegt, müssen Sätze wie der folgende bewiesen werden:

**Satz 2.7.** *Sei $x^*$ eine endliche Optimallösung von*

$$\begin{array}{lll} (RP) & \min & f(x) \\ & s.d & x \in \mathbb{R}^n, \end{array}$$

*so dass die Niveaumengen $N_{\leq}(z)$ der Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ für alle $z \in \mathbb{R}$ mit*

$$f(x^*) \leq z \leq \widetilde{z} = \min\{f(x) : \ x \in \mathrm{Round}(x^*)\}$$

*von der Form $A(x^*)$ sind, so liegt eine optimale Lösung von*

$$\begin{array}{lll} (IP) & \min & f(x) \\ & s.d. & x \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

*in* $\mathrm{Round}(x^*)$.

Indem man fordert, dass nur Niveaumengen $N_{\leq}(z)$ mit $f(x^*) \leq z$ die Form $A(x^*)$ haben müssen, verhindert man, dass man Forderungen an leere Niveaumengen stellt. Die Einschränkung $z \leq \widetilde{z}$ führt zu einer größeren Zahl an Zielfunktionen, die die Voraussetzungen des Satzes erfüllen und wir werden sehen, dass sie ausreicht um die Aussage zu zeigen.

Um Sätze der Art 2.7 zu beweisen, werden wir im Folgenden nach diesem Schema vorgehen:

Sei $x^*$ eine endliche Optimallösung von (RP). Wir möchten zeigen, dass es für alle $x \in \mathbb{Z}^n$ immer einen Punkt $\hat{x} \in \mathrm{Round}(x^*)$ gibt, so dass $f(\hat{x}) \leq f(x)$, das heißt mindestens einen Punkt aus $\mathrm{Round}(x^*)$ mit nichtschlechterem Zielfunktionswert. Dann weiß man, dass es, wenn es eine Optimallösung gibt, dann auch immer eine, die in Round($x^*$) liegt. Das hat den Vorteil, dass Round($x^*$) nur endlich viele Punkte enthält (vgl. 2.6) und man dann eine optimale Lösung finden kann, indem man diese endlich vielen Punkte durchprobiert, um den mit dem kleinsten Zielfunktionswert zu ermitteln.

*Bemerkung* 2.8. Um (IP) zu lösen, geht man folgendermaßen vor:

- Man bestimmt eine optimale Lösung $x^*$ von (RP), die die Voraussetzungen erfüllt.
- Man berechnet die Zielfunktionswerte für alle $x \in$ Round($x^*$).
- Das $x \in$ Round($x^*$) mit dem kleinsten Zielfunktionswert ist die Optimallösung von (IP).

*Bemerkung* 2.9. Im Allgemeinen kann man aus der Tatsache, dass (RP) eine endliche Optimallösung hat noch nicht folgern, dass auch (IP) eine solche besitzt. Ein Gegenbeispiel ist in Abbildung 2.1 zu sehen:

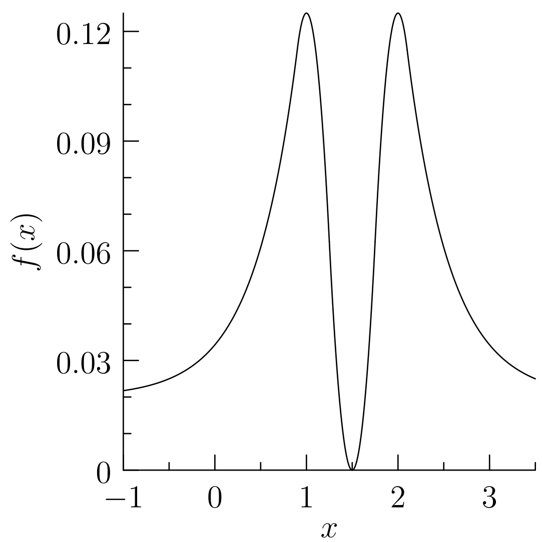


Abbildung 2.1: Ein Beispiel für eine Funktion $f$, für die (RP) eine endliche Optimallösung besitzt, (IP) jedoch nicht.

Die hier dargestellte Funktion nimmt ihr Minimum für $x = 1.5$ an. In diesem Punkt ist ihr Funktionswert 0. Das heißt die Optimallösung von (RP) ist 1.5 mit optimalem Zielfunktionswert 0. Bei 1 und 2 liegen dagegen aber die Maxima der Funktion. Da diese für $x \to \pm\infty$ gegen 0.02 konvergiert, existiert keine endliche Optimallösung von (IP).

Wie in 2.7 erklärt, zeigt man aber im Folgenden stets, dass es ein $\hat{x} \in \text{Round}(x^*)$ gibt, so dass $f(\hat{x}) \leq f(x)$ für alle $x \in \mathbb{Z}^n$. Damit ist $\widetilde{x} = \text{argmin}_{x \in \text{Round}(x^*)}\{f(x)\}$ automatisch eine Optimallösung von (IP), da für diesen Punkt stets gilt: $f(\widetilde{x}) \leq f(x)$ für alle $x \in \mathbb{Z}^n$.

*Bemerkung* 2.10. Wir werden in der Voraussetzung der Sätze stets fordern, dass (RP) eine endliche Optimallösung hat. Der Grund hierfür ist, dass das hier vorgestellte Verfahren eine solche benötigt. Trotzdem soll an dieser Stelle angemerkt werden, dass nur weil (RP) keine endliche Optimallösung hat, (IP) nicht dennoch eine haben kann. Ein Beispiel für eine solche Situation ist in Abbildung 2.2 dargestellt.

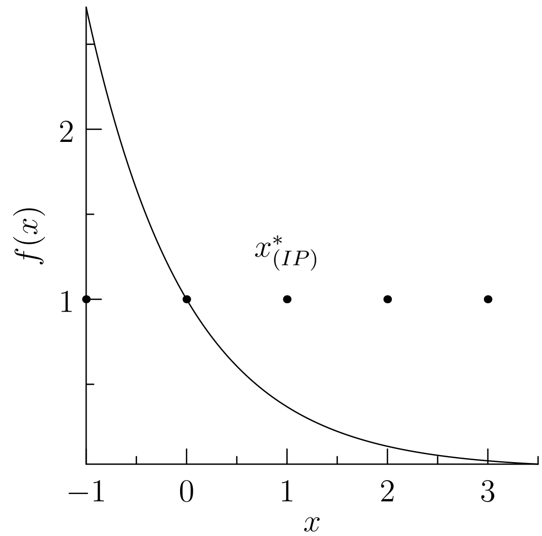


Abbildung 2.2: Ein Beispiel für eine Funktion $f$ für die (IP) eiine endliche Optimallösung besitzt, (RP) jedoch nicht.

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist dabei folgendermaßen definiert:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{wenn } x \in \mathbb{Z} \\ e^{-x} & \text{wenn } x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Also ist zum Beispiel $x^*_{(\text{IP})} = 1$ eine endliche Optimallösung von (IP) (genauso wie jede andere Zahl aus $\mathbb{Z}$). (RP) besitzt dagegen keine endliche Optimallösung, da die Zielfunktionswerte für $x \to \infty$ gegen 0 konvergieren und damit immer kleiner werden.

*Bemerkung* 2.11. Nicht immer ist das in Bemerkung 2.8 beschriebene Verfahren hilfreich. Betrachtet man zum Beispiel binäre Probleme

$$\begin{array}{lll} \text{(BP)} & \min & f(x) \\ & \text{s.d} & x \in \{0,1\}^n, \end{array}$$

dann ist die Relaxation dazu

$$\text{(RP)} \qquad \begin{array}{ll} \min & f(x) \\ \text{s.d.} & x \in [0,1]^n \end{array}$$

und $\mathrm{Round}(x^*) = \{0,1\}^n$. Das heißt, man gewinnt durch die Lösung der Relaxation keinerlei Information.

Allerdings wird man in 3 sehen, dass es Spezialfälle gibt, in denen man nicht nur zeigen kann, dass eine Optimallösung von (IP) in $\mathrm{Round}(x^*)$ liegt, sondern sogar, dass sie $[x^*]$ ist. In diesem Fall ist es auch für binäre Probleme hilfreich, die Relaxation zu lösen.

# 3 Kreisförmige Niveaumengen

## 3.1 Motivation

Wie bereits erwähnt, suchen wir jetzt also Spezialfälle ganzzahliger Optimierungsprobleme, bei denen eine Optimallösung stets in Round$(x^*)$ liegt, wenn $x^*$ eine endliche Optimallösung der Relaxation (RP) ist. Die zugrunde liegende geometrische Vorstellung, soll hier im Fall $n = 2$ gezeigt werden.
Sei

$$\begin{array}{lll} \text{(IP)} & \min & f(x) \\ & \text{s.d.} & x \in \mathbb{Z}^2 \end{array}$$

das gegebene (IP) und

$$\begin{array}{lll} \text{(RP)} & \min & f(x) \\ & \text{s.d} & x \in \mathbb{R}^2 \end{array}$$

seine Relaxation. Angenommen, (RP) besitzt eine endliche Optimallösung $x^* \in \mathbb{R}^2$. Sei weiterhin erfüllt, dass sich $N_{\leq}(z)$ für alle $f(x^*) \leq z \leq \widetilde{z} = \min\{f(x) : x \in \text{Round}(x^*)\}$ als $K(x^*, r(z)) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \ ||x - x^*||_2 \leq r(z)\}$ schreiben lässt. Da für Niveaumengen stets gilt $N_{\leq}(z^1) \subseteq N_{\leq}(z^2)$, wenn $z^1 \leq z^2$, sind die Niveaumengen Kreise um $x^*$, deren Radius $r(z)$ für steigendes $z$ wächst. Dann möchte man anschaulich zeigen, dass es nicht möglich ist einen Kreis um $x^*$ zu legen, der einen ganzzahligen Punkt $x \in \mathbb{Z}^2 \setminus \text{Round}(x^*)$ enthält, aber keinen Punkt aus Round$(x^*)$. Das heißt, der erste ganzzahlige Punkt, der von den konzentrischen, wachsenden Kreisen (den Niveaumengen für steigendes $z$) erreicht wird ist ein Punkt aus Round$(x^*)$. Dieser Zusammenhang ist beispielhaft in Abbildung 3.1 dargestellt.

Hier sind einige Niveaumengen eingezeichnet unter anderem die erste Niveaumenge, in der ein ganzzahliger Punkt (hier mit $\widetilde{x}$ bezeichnet) liegt. Angedeutet ist außerdem der erste Kreis, der einen (hier sogar zwei) ganzzahligen Punkt enthalten würde, der nicht aus Round$(x^*)$ ist. Allerdings wird man im Folgenden sehen, dass es ausreicht zu fordern,

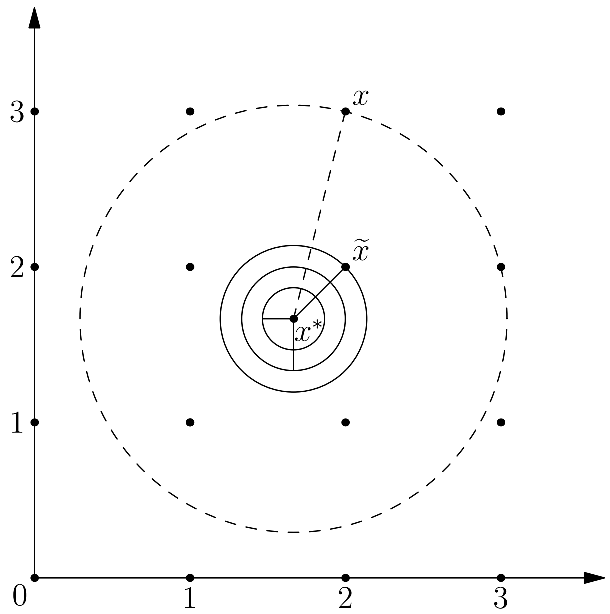


Abbildung 3.1: Motivation kreisförmige Mengen zu betrachten

dass die Niveaumengen für $z \leq \widetilde{z} = f(\widetilde{x})$ kreisförmig sind. Das heißt die Niveaumengen müssen sich nicht weiter kreisförmig ausbreiten.

Diese Motivation soll jetzt auf $n$ Dimensionen verallgemeinert und bewiesen werden.

## 3.2 Definition und Beweis

**Definition 3.1.** Sei $x \in \mathbb{R}^n$ ein beliebiger Punkt und $r \in \mathbb{R}_0^+$ eine reelle Zahl. Dann definiert man den Ball um $x$ mit Radius $r$:

$$K(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \ ||y - x||_2 \leq r\}.$$

(Das heißt $K(x, 0) = \{x\}$.)

Damit können wir schon den ersten Satz der Art 2.7 zeigen:

**Satz 3.2.** *Sei $x^*$ eine endliche Optimallösung von*

$$\begin{array}{lll} (RP) & \min & f(x) \\ & s.d & x \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

*so dass die Niveaumengen* $N_{\leq}(z)$ *der Funktion* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *für alle* $z \in \mathbb{R}$ *mit*

$$f(x^*) \leq z \leq \widetilde{z} = \min\{f(x) : \ x \in \mathrm{Round}(x^*)\}$$

*Bälle* $K(x^*, r)$ *sind, so liegt eine optimale Lösung von*

$$\begin{array}{lll} (IP) & \min & f(x) \\ & s.d. & x \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

*in* $\mathrm{Round}(x^*)$.

*Beweis.* Sei $x \in \mathbb{Z}^n$ ein beliebiger Punkt mit Zielfunktionswert $z = f(x)$. Da $x^*$ eine Optimallösung von (RP) ist, gilt $f(x^*) \leq z$.
Sei $\widetilde{x} = \mathrm{argmin}_{x \in \mathrm{Round}(x^*)}\{f(x)\}$. Das heißt $f(\widetilde{x}) = \widetilde{z}$. Dann gilt entweder:
1. Fall: $\widetilde{z} \leq z \Rightarrow \ f(\widetilde{x}) \leq f(x)$ oder
2. Fall: $\widetilde{z} > z$:
In diesem Fall ist

$$\begin{array}{ll} (1) & x \notin \mathrm{Round}(x^*) \text{ und} \\ (2) & N_{\leq}(z) = K(x^*, r) \quad \text{mit } r \geq ||x - x^*||_2 \,. \end{array}$$

Sei

$$y_i := \begin{cases} \lceil x_i^* \rceil & \text{wenn } x_i > x_i^* \\ \lfloor x_i^* \rfloor & \text{wenn } x_i < x_i^* \\ x_i^* & \text{wenn } x_i = x_i^*. \end{cases}$$

Dann ist $y \in \mathrm{Round}(x^*)$ und $|x_i - x_i^*| \geq |y_i - x_i^*|$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$, da $x \in \mathbb{Z}^n$. Da $x \notin \mathrm{Round}(x^*)$ folgt $y \neq x$. Das bedeutet aber, dass es ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ gibt, so dass $\left|x_j - x_j^*\right| > \left|y_j - x_j^*\right|$.

*Beweis.* Sei $j$ der Index für den gilt: $y_j \neq x_j$. Nach Definition von $y$ gilt: $sgn(x_j - x_j^*) = sgn(y_j - x_j^*)$.
Sei $\left|x_j - x_j^*\right| = x_j - x_j^*$. Das heißt $x_j > x_j^*$ und damit auch $x_j > y_j > x_j^*$.
Also ist $x_j - x_j^* > y_j - x_j^* \Rightarrow \left|x_j - x_j^*\right| > \left|y_j - x_j^*\right|$.
Sei $\left|x_j - x_j^*\right| = x_j^* - x_j$. Dann ist $x_j < x_j^*$ und damit auch $x_j < y_j < x_j^*$.
Und deshalb ist $x_j^* - x_j > x_j^* - y_j \Rightarrow \left|x_j - x_j^*\right| > \left|y_j - x_j^*\right|$.

q.e.d.

Dann ist $||y - x^*||_2 < ||x - x^*||_2 \leq r$ und daher $y \in K(x^*, r) = N_{\leq}(z)$. Das heißt $f(y) \leq z < \widetilde{z}$.
Da aber $y \in \text{Round}(x^*)$, gilt nach Definition von $\widetilde{z}$:

$$\widetilde{z} \leq f(y) \leq z < \widetilde{z} \quad \lightning$$

Also kann es kein $x \in \mathbb{Z}^n$ mit $f(x) < \widetilde{z}$ geben.

Und somit gilt $f(\widetilde{x}) \leq f(x) \; \forall x \in \mathbb{Z}^n$ und $x^*_{IP} = \widetilde{x}$. □

*Bemerkung* 3.3. Es ist nicht nötig, dass (RP) genau eine endliche Optimallösung hat. Hat man eine endliche Optimallösung gefunden, die die Voraussetzungen erfüllt, braucht man nicht einmal zu wissen, ob es noch mehr als diese eine gibt. Das liegt daran, dass man fordert, dass auch die Niveaumenge $N_{\leq}(f(x^*))$ ein Ball ist: Ist $x^*$ nicht die einzige Optimallösung, gibt es $r \in \mathbb{R}^+$, so dass $K(x^*, r)$ die Menge aller Optimallösungen von (RP) ist. Eventuell liegen in diesem Ball bereits ganzzahlige Lösungen - dann hätte (IP) den gleichen Zielfunktionswert wie (RP). Wichtig ist wieder die Aussage: wenn ein ganzzahliger Punkt in diesem Ball liegt, dann auch einer aus Round($x^*$).

Hat (RP) mehrere Optimallösungen, müssen nicht alle die Voraussetzung erfüllen, dass die Niveaumengen in Bezug auf sie Bälle sind, wie das Beispiel in Abbildung 3.2 zeigt.

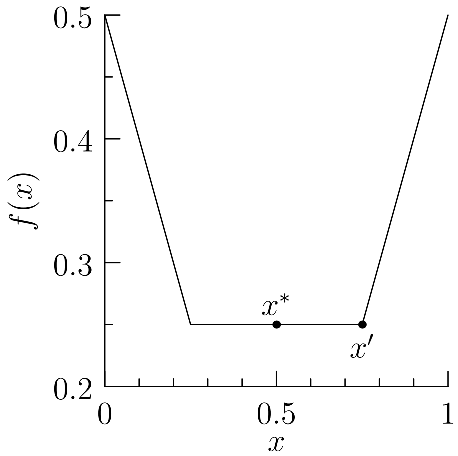


Abbildung 3.2: Die Voraussetzungen müssen nicht bezüglich allen Optimallösungen erfüllt sein.

Bezüglich $x^* = 0.5$ sind die Niveaumengen kreisförmig. Wählt man stattdessen $x' = 0.75$ (eine weitere endliche Optimallösung von (RP)), sind die Niveaumengen nicht kreisförmig.

An Abbildung 3.1 sieht man außerdem eine Besonderheit für den Fall, dass die Niveaumengen (bis $\widetilde{z}$) Bälle sind:

**Lemma 3.4.** *Man braucht die Punkte aus* Round$(x^*)$ *nicht durch zu probieren, um heraus zu finden, an welchem Punkt die Zielfunktion $f$ minimal ist, da stets gilt:*

$$x^*_{IP} = [x^*] .$$

*Beweis.* Man möchte zeigen, dass $f([x^*]) \leq f(x)$ für alle $x \in \text{Round}(x^*)$.
Nach Definition von $\widetilde{z}$ gilt: $f([x^*]) \geq \widetilde{z} \quad (1)$.
Außerdem erfüllt $f$ dass $N_{\leq}(\widetilde{z}) = K(x^*, r)$ mit $r \geq ||x^* - \widetilde{x}||_2$,
wenn $\widetilde{x} = \text{argmin}_{x \in \text{Round}(x^*)}\{f(x)\}$.
Nach Definition von $[x^*]$ gilt für alle $x \in \text{Round}(x^*)$: $|[x^*]_i - x^*_i| \leq |x_i - x^*_i|$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$.
$\Rightarrow \quad ||[x^*] - x^*||_2 \leq ||x - x^*||_2$ für alle $x \in \text{Round}(x^*)$.
$\Rightarrow \quad ||[x^*] - x^*||_2 \leq ||\widetilde{x} - x^*||_2$ und das heißt $[x^*] \in N_{\leq}(\widetilde{z})$.
Also ist $f([x^*]) \leq \widetilde{z}$.
Mit (1) folgt $f([x^*]) = \widetilde{z} = \min\{f(x) : \; x \in \text{Round}(x^*)\}$. □

## 3.3 Verallgemeinerung auf beliebige p-Normen

Die euklidische Norm $||x - y||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$ ist ein Spezialfall der allgemeinen $p$-Norm.

**Definition 3.5.** (Aus Schöbel [14], S.44) Auf dem $\mathbb{R}^n$ sind die $p$-Normen für $1 \leq p < \infty$ definiert als

$$||x||_p := \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

und für $p = \infty$ als

$$||x||_\infty := \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| , \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Auch für eine beliebige $p$-Norm kann man einen „Ball“ definieren. Dieser soll im Folgenden mit $p$-Ball bezeichnet werden, obwohl er nur für die euklidische Norm dem entspricht, was man im Alltag mit „Ball“ meint.

**Definition 3.6.** Sei $x \in \mathbb{R}^n$ ein beliebiger Punkt und $r \in \mathbb{R}_0^+$ eine reelle Zahl. Dann definiert man für $1 \leq p \leq \infty$ den $p$-Ball um $x$ mit Radius $r$:

$$K_p(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \; ||y - x||_p \leq r\}.$$

Für diese verallgemeinerten $p$-Bälle kann man ebenfalls zeigen, dass eine Optimallösung von (IP) in Round$(x^*)$ liegt:

**Satz 3.7.** *Sei $x^*$ eine endliche Optimallösung von*

$$\begin{array}{lll} (RP) & \min & f(x) \\ & s.d & x \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

*so dass die Niveaumengen $N_{\leq}(z)$ der Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ für alle*

$$f(x^*) \leq z \leq \widetilde{z} = \min\{f(x) : \; x \in \mathrm{Round}(x^*)\}$$

*$p$-Bälle $K_p(x^*, r)$ sind, so liegt eine optimale Lösung von*

$$\begin{array}{lll} (IP) & \min & f(x) \\ & s.d. & x \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

*in* Round$(x^*)$.

*Beweis.* Sei $x \in \mathbb{Z}^n$ ein beliebiger Punkt mit Zielfunktionswert $z = f(x)$. Da $x^*$ eine Optimallösung von (RP) ist, gilt $f(x^*) \leq z$.
Sei $\widetilde{x} = \mathrm{argmin}_{x \in \mathrm{Round}(x^*)}\{f(x)\}$.
Dann gilt entweder:
1. Fall: $\widetilde{z} \leq z \Rightarrow \; f(\widetilde{x}) \leq f(x)$ oder
2. Fall: $\widetilde{z} > z$:
Dann ist

$$\begin{array}{ll} (1) & x \notin \mathrm{Round}(x^*) \text{ und} \\ (2) & N_{\leq}(z) = K_p(x^*, r) \quad \text{und } r \geq ||x - x^*||_p \, . \end{array}$$

Sei

$$y_i := \begin{cases} \lceil x_i^* \rceil & \text{wenn } x_i > x_i^* \\ \lfloor x_i^* \rfloor & \text{wenn } x_i < x_i^* \\ x_i^* & \text{wenn } x_i = x_i^*. \end{cases}$$

Dann ist $y \in \mathrm{Round}(x^*)$ und $|x_i - x_i^*| \geq |y_i - x_i^*|$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$, da $x \in \mathbb{Z}^n$.
Da $x \notin \mathrm{Round}(x^*)$ folgt $y \neq x$. Das bedeutet aber, dass es ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ gibt, so dass $\left|x_j - x_j^*\right| > \left|y_j - x_j^*\right|$. (Beweis wie im Beweis von Satz 3.2).

Sei $1 \leq p < \infty$:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad & |x_i - x_i^*|^p \geq |y_i - x_i^*|^p \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \text{da } p > 0 \\
\text{und} \quad & \left|x_j - x_j^*\right|^p > \left|y_j - x_j^*\right|^p, \quad \text{da } p > 0. \\
\Rightarrow \quad & \sum_{i=1}^{n} |x_i - x_i^*|^p > \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i^*|^p \\
\Rightarrow \quad & \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i - x_i^*|^p\right)^{1/p} > \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i^*|^p\right)^{1/p}, \quad \text{da } \frac{1}{p} > 0.
\end{aligned}$$

Dann ist $||y - x^*||_p < ||x - x^*||_p \leq r$ und daher $y \in K_p(x^*, r) = N_{\leq}(z)$. Das heißt $f(y) \leq z < \widetilde{z}$.
Da aber $y \in \text{Round}(x^*)$, gilt nach Definition von $\widetilde{z}$:

$$\widetilde{z} \leq f(y) \leq z < \widetilde{z} \quad \lightning$$

Also kann es kein $x \in \mathbb{Z}^n$ mit $f(x) < \widetilde{z}$ geben.

Ist dagegen $p = \infty$ und sei $k = \text{argmax}_{1 \leq i \leq n} |y_i - x_i^*|$,

$$\Rightarrow \quad |x_k - x_k^*| \geq |y_k - x_k^*| = \max_{1 \leq i \leq n} |y_i - x_i^*| = ||y - x^*||_\infty .$$

Deswegen ist auch hier

$$r \geq ||x - x^*||_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - x_i^*| \geq |x_k - x_k^*| \geq ||y - x^*||_\infty .$$

Und damit ist $y \in K_\infty(x^*, r) = N_{\leq}(z)$. Das heißt $f(y) \leq z < \widetilde{z}$.
Da aber $y \in \text{Round}(x^*)$, gilt nach Definition von $\widetilde{z}$:

$$\widetilde{z} \leq f(x) \leq z < \widetilde{z} \quad \lightning$$

Das heißt es kann kein $x \in \mathbb{Z}^n$ mit $f(x) < \widetilde{z}$ geben.

Und somit gilt für $1 \leq p \leq \infty$: $f(\widetilde{x}) \leq f(x)\ \forall x \in \mathbb{Z}^n$ und $x_{IP}^* = \widetilde{x}$. □

**Lemma 3.8.** *Auch für allgemeine p-Bälle gilt: Man braucht die Punkte aus* Round$(x^*)$ *nicht durch zu probieren, da wieder gilt:* $x_{IP}^* = [x^*]$.

*Beweis.* Analog zum Beweis zu Lemma 3.4. □

**Korollar 3.9.** *Eine Optimallösung $x^*_{(IP)}$ von*

$$\begin{array}{lll}(IP(x)) & \min & ||x-y||_p \\ & s.d. & y \in \mathbb{Z}^n\end{array}$$

*liegt in* Round$(x)$.

*Beweis.* Die Voraussetzungen von Satz 3.7 sind erfüllt, da gilt:

$$\begin{aligned}N_{\leq}(z) &= \{y \in \mathbb{R}^n : \ ||x-y||_p \leq z\} \\ &= K_p(x,z)\end{aligned}$$

für alle $z \in \mathbb{R}$. Das heißt $\forall z \geq 0 = ||x-x||_p$ sind die Niveaumengen $p$-Bälle um $x$. Da $x$ außerdem offensichtlich die Optimallösung von (RP) ist, ist Satz 3.7 anwendbar und damit ist $x^*_{(\mathrm{IP})} \in \mathrm{Round}(x)$. □

Allerdings kann man Satz 3.7 nicht auf alle Normen verallgemeinern:

*Bemerkung* 3.10. Analog zu Definition 3.6 kann man für jede beliebige Norm $||\cdot||$ einen Ball definieren durch $B_{||\cdot||}(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \ ||y-x|| \leq r\}$. Aber nicht für alle diese Bälle gilt ein Satz wie 3.7.

*Beweis.* Aus Schöbel [15]: Ist $B \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe, kompakte, zum Ursprung punktsymmetrische Menge, die den Ursprung in ihrem Inneren enthält, dann ist

$$\gamma_B : \begin{cases}\mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \inf\{\lambda \geq 0 : \ x \in \lambda B\}\end{cases}$$

eine Norm.

In Abbildung 3.3 links ist so eine Menge $B$ zu sehen. Sie ist gegeben durch:

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in [-1.5, 1.5], \ y \in [\frac{x}{3} - 0.2, \ \frac{x}{3} + 0.2]\}$$

Damit kann man sich das folgende Beispiel konstruieren: Gegeben sei ein (IP) mit einer Zielfunktion, die ein globales Minimum bei $x^* = (0.5, 0.5)$ hat und deren Niveaumengen für alle $z$ mit $f(x^*) \leq z \leq \tilde{z} = \min\{f(x) : \ x \in \mathrm{Round}(x^*)\}$ Kreise $K_{\gamma_B}(x^*, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \ \gamma_B(y - x^*) \leq r\}$ sind. Dann sieht man an der Zeichnung, dass die Optimallösungen von (IP) $(-1,0)$ und $(2,1)$ sind. Das heißt es gilt: $x^*_{(\mathrm{IP})} \notin \mathrm{Round}(x^*_{(\mathrm{RP})})$. □

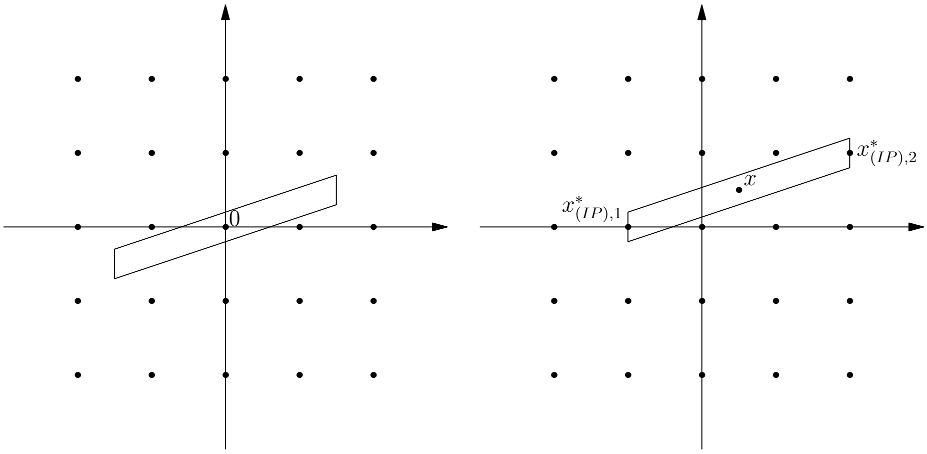


Abbildung 3.3: Links: $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \in [-1.5, 1.5], \ y \in [\frac{1}{3} \cdot x - 0.1, \ \frac{1}{3} \cdot x + 0.2]\}$,
Rechts: $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ \gamma_B((0.5, 0.5) - (x,y)) \leq 1\}$

## 3.4 Beispiele für Funktionen mit kreisförmigen Niveaumengen

Um Satz 3.2 anwenden zu können, muss man sich überlegen, wie man feststellen kann, ob die Niveaumengen einer Funktion Bälle sind.

In diesem Abschnitt soll nur auf Funktionen eingegangen werden, deren Niveaumengen 2-Bälle sind. Das heißt, man geht wieder von dem Fall der euklidischen Norm aus.

### 3.4.1 Im eindimensionalen Fall

Die Definition eines Kreises führt im $\mathbb{R}$ zu folgender Einschränkung:

$$K(x,r) \ = \ \{y \in \mathbb{R} : \ |x - y| \leq r\} \ = \ [x - r, x + r]$$

Offensichtlich haben quadratische Funktionen kreisförmige Niveaumengen - vgl. Abbildung 3.4.

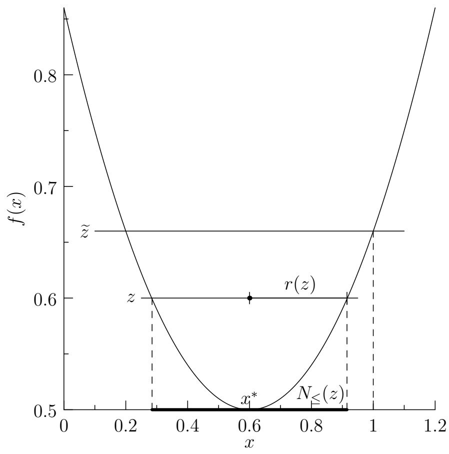


Abbildung 3.4: Die Funktion $f(x) = (x - 0.6)^2 + 0.5$

Allerdings fordert man in Satz 3.2 nur, dass die Niveaumengen bis $\widetilde{z}$ kreisförmig sind. In Abbildung 3.5 sind zwei andere Funktionen dargestellt, die diese Forderung erfüllen:

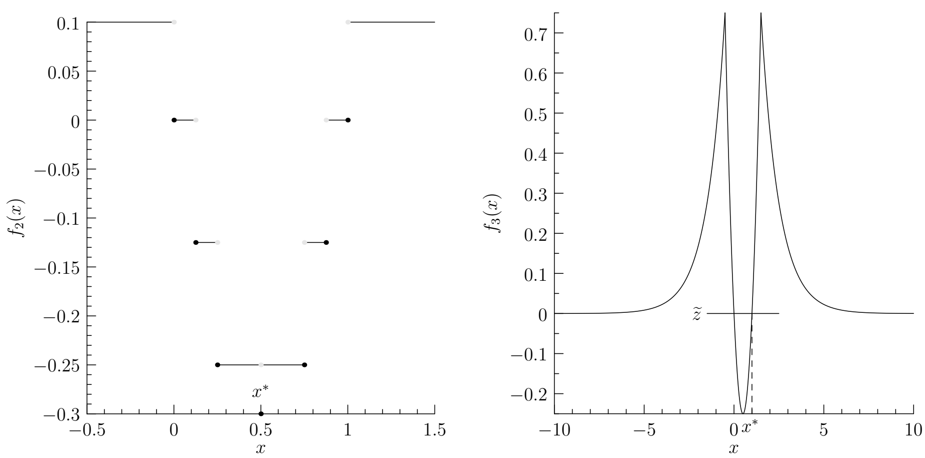


Abbildung 3.5: Andere Beispiele für Funktionen, die zu kreisförmigen Niveaumengen bis $\widetilde{z}$ führen.

Links:

$$f_2(x) = \begin{cases} -0.3 & \text{wenn } x = 0.5 \\ -0.25 & \text{wenn } 0.25 \leq x < 0.5 \text{ oder } 0.5 < x \leq 0.75 \\ -0.125 & \text{wenn } 0.125 \leq x < 0.25 \text{ oder } 0.75 < x \leq 0.875 \\ 0 & \text{wenn } 0 \leq x < 0.125 \text{ oder } 0.875 < x \leq 1 \\ 0.1 & \text{wenn } x < 0 \text{ oder } x > 1 \end{cases}$$

Diese Funktion ist nicht stetig, aber die Niveaumengen sind kreisförmig für $z \leq \widetilde{z} = 0$. Die rechte Funktion ist gegeben durch

$$f_3(x) = \begin{cases} 0.75 * exp(0.5) * exp(x) & \text{wenn } x \leq -0.5 \\ (x - 0.5)^2 - 0.25 & \text{wenn } -0.5 \leq x \leq 1.5 \\ 0.75 * exp(1.5) * exp(-x) & \text{wenn } x \geq 1.5. \end{cases}$$

Sie ist nicht differenzierbar und fällt für $x \to \pm\infty$ gegen 0 ab, aber auch sie erfüllt die Forderung nach kreisförmigen Niveaumengen bis $\widetilde{z} = f_3(0) = f_3(1) = 0$.

Allgemein lassen sich die Forderungen an eine Funktion, deren Niveaumengen bis $\widetilde{z}$ kreisförmig sein sollen, folgendermaßen zusammenfassen:

**Lemma 3.11.** *Für eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*
*1. (a) Das kontinuierliche Optimierungsproblem*

$$\begin{array}{lll} (RP) & \min & f(x) \\ & s.d. & x \in \mathbb{R} \end{array}$$

*besitzt eine endliche Optimallösung $x^*$ und*
*(b) die Niveaumengen $N_{\leq}(z)$ von $f$ sind für alle $z$ mit*

$$f(x^*) \leq z \leq \widetilde{z} = \min\{f(x) : x \in \{\lfloor x^* \rfloor, \lceil x^* \rceil\}\}$$

*von der Form $[x^* - r, x^* + r]$.*

*2.(i) $f$ hat ein globales Minimum bei $x^*$.*
*(ii) $f(x^* - r) = f(x^* + r)\ \forall\, r \leq \min\{x^* - \lfloor x^* \rfloor, \lceil x^* \rceil - x^*\}$.*
*(iii) $f(x^* + a) \leq f(x^* + b)\ \forall\, a, b$ mit $0 \leq a < b \leq \min\{x^* - \lfloor x^* \rfloor, \lceil x^* \rceil - x^*\}$.*
*(iv) $\exists\, \hat{R} \geq \min\{x^* - \lfloor x^* \rfloor, \lceil x^* \rceil - x^*\}$, so dass $f(x^* + R) > \widetilde{z}$ und $f(x^* - R) > \widetilde{z}$ für alle $R > \hat{R}$ und $f(x^* + r) = \widetilde{z}$ bzw. $f(x^* - r) = \widetilde{z}$ für alle $r$ mit*

$$\min\{x^* - \lfloor x^* \rfloor, \lceil x^* \rceil - x^*\} \leq r \leq \hat{R}.$$

*(v) Für alle $z$ mit $f(x^*) \leq z < \widetilde{z}$ existiert ein $x \in \mathbb{R}$, so dass*

$$|x - x^*| = \max_{y \in \mathbb{R}}\{|y - x^*| : f(y) \leq z\}.$$

*Beweis.* Dieses Lemma ist ein Spezialfall von Lemma 3.15 für $n = 1$ und $p = 2$. □

*Bemerkung* 3.12. Man muss also nicht fordern, dass die Funktion $f$ stetig ist. Allerdings ist beruht das Verfahren zur Lösung von (IP) auf einer bekannten Lösung von (RP). Fordert man von der Zielfunktion keine Stetigkeit, ist es unter Umständen aber auch schon schwierig die Relaxation zu lösen, so dass das Verfahren eventuell keinen Vorteil bringt.

### 3.4.2 Für allgemeine Dimensionen

Der einfachste und offensichtliche Fall von Funktionen, deren Niveaumengen Bälle sind, sind sicherlich auch für $n > 1$ quadratische Funktionen.

**Lemma 3.13.** *Die Funktion*

$$\begin{aligned} f \;:\; & \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto a \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^*)^2 + b \end{aligned}$$

*hat für* $a > 0,\ a, b \in \mathbb{R},\ x^* \in \mathbb{R}^n$ *Niveaumengen, die Bälle um* $x^*$ *sind.*

Außerdem ist $x^*$ die Optimallösung von (RP), somit ist auf Funktionen dieser Art Satz 3.2 anwendbar.

*Beweis.* Genau genommen fordert man wieder nur, dass die Niveaumengen für
$z \geq f(x^*) = b$ Bälle sind.
Sei daher $z \geq b$. Dann existiert ein $y \in \mathbb{R}^n$, so dass $f(y) = z$.

*Beweis.* Sei

$$y_i = \begin{cases} x_1^* + \sqrt{\frac{z-b}{a}} & \text{wenn } i = 1 \\ x_i^* & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann ist $f(y) = a \cdot \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i^*)^2 + b = a \cdot \frac{z-b}{a} + b = z$.

q.e.d.

Dann gilt: $N_{\leq}(z) = K(x^*, ||y - x^*||_2)$.

*Beweis.* (A) Sei $x \in \mathbb{R}^n$, so dass $||x - x^*||_2 \leq ||y - x^*||_2$. Dann ist

$$a \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^*)^2 + b = a \cdot ||x - x^*||_2^2 + b \leq a \cdot ||y - x^*||_2^2 + b$$

(da $a > 0$) und damit:

$$f(x) = a \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_i^*)^2 + b \leq a \cdot ||y - x^*||_2^2 + b = z.$$

Deswegen ist $x$ so dass $||x - x^*||_2 \leq ||y - x^*||_2$ in $N_{\leq}(z)$.
(B) Sei dagegen $x' \in \mathbb{R}^n$, so dass $||x' - x^*||_2 > ||y - x^*||_2$. Dann ist

$$a \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i' - x_i^*)^2 + b = a \cdot \left|\left|x' - x^*\right|\right|_2^2 + b > a \cdot ||y - x^*||_2^2 + b$$

(da $a > 0$) und damit:

$$f(x') = a \cdot \sum_{i=1}^{n} (x_i' - x_i^*)^2 + b > a \cdot ||y - x^*||_2^2 + b = z.$$

Somit ist $x'$ mit $||x' - x^*||_2 > ||y - x^*||_2$ nicht in $N_{\leq}(z)$.

q.e.d.

Das bedeutet die Niveaumengen sind von $f$ für alle $z \geq f(x^*)$ Bälle. □

Analog zum Fall $n = 1$ sind es aber wieder nicht nur die quadratischen Funktionen, die den Voraussetzungen von Satz 3.2 genügen:

**Lemma 3.14.** *Für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*
*1. (a) Das kontinuierliche Optimierungsproblem*

$$\begin{array}{lll} (RP) & \min & f(x) \\ & s.d. & x \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

*besitzt eine endliche Optimallösung $x^*$ und*
*(b) die Niveaumengen $N_{\leq}(z)$ sind für alle $z$, für die gilt*

$$f(x^*) \leq z \leq \widetilde{z} = \min\{f(x) : x \in \text{Round}(x^*)\},$$

*von der Form $K(x^*, r) = \{y : ||x^* - y||_2 \leq r\}$ für ein $r = r(z) \in \mathbb{R}_0^+$.*

*2. (i) $f$ hat ein globales Minimum bei $x^*$.*
*(ii) $f(y_1) = f(y_2)\ \forall\ y_1, y_2$ mit $||x^* - y_1||_2 = ||x^* - y_2||_2 \leq \min_{x \in \text{Round}(x^*)}\{||x - x^*||_2\}$.*
*(iii) $f(y_1) \leq f(y_2)\ \forall\ y_1, y_2$ mit $||x^* - y_1||_2 < ||x^* - y_2||_2 \leq \min_{x \in \text{Round}(x^*)}\{||x - x^*||_2\}$.*
*(iv) $\exists\ \hat{R} \geq \min_{x \in \text{Round}(x^*)}\{||x - x^*||_2\}$, so dass $f(y_1) > \widetilde{z}$ für alle $y_1$ mit $||y_1 - x^*||_2 > \hat{R}$ und $f(y_2) = \widetilde{z}\ \forall\ y_2$ mit $\min_{x \in \text{Round}(x^*)}\{||x - x^*||_2\} \leq ||x^* - y_2||_2 \leq \hat{R}$.*
*(v) Für alle $z$ mit $f(x^*) \leq z < \widetilde{z}$ existiert ein $x \in \mathbb{R}^n$, so dass*

$$||x - x^*||_2 = \max_{y \in \mathbb{R}^n}\{||y - x^*||_2 :\ f(y) \leq z\}.$$

*Beweis.* Dieses Lemma ist ein Spezialfall von Lemma 3.15 für $p = 2$. □

### 3.4.3 Für allgemeine Dimensionen und allgemeine p-Normen

Die Überlegungen, die für die euklidische Norm und den Fall $n = 1$ gemacht wurden, lassen sich nicht hinsichtlich beliebiger Dimensionen, sondern auch wieder hinsichtlich beliebiger $p$-Normen verallgemeinern.

**Lemma 3.15.** *Für eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*
*1. (a) Das kontinuierliche Optimierungsproblem*

$$\begin{array}{lll} (RP) & \min & f(x) \\ & s.d. & x \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

*besitzt eine endliche Optimallösung $x^*$ und*
*(b) die Niveaumengen $N_{\leq}(z)$ sind für alle $z$, für die gilt*

$$f(x^*) \leq z \leq \widetilde{z} = \min\{f(x) : x \in \text{Round}(x^*)\},$$

*von der Form $K_p(x^*, r) = \{y :\ ||x^* - y||_p \leq r\}$ für ein $r = r(z) \in \mathbb{R}_0^+$.*

*2. (i) $f$ hat ein globales Minimum bei $x^*$.*
*(ii) $f(y_1) = f(y_2)\ \forall\ y_1, y_2$ mit $||x^* - y_1||_p = ||x^* - y_2||_p \leq \min_{x \in \text{Round}(x^*)}\{||x - x^*||_p\}$.*
*(iii) $f(y_1) \leq f(y_2)\ \forall\ y_1, y_2$ mit $||x^* - y_1||_p < ||x^* - y_2||_p \leq \min_{x \in \text{Round}(x^*)}\{||x - x^*||_p\}$.*
*(iv) $\exists\ \hat{R} \geq \min_{x \in \text{Round}(x^*)}\{||x - x^*||_p\}$, so dass $f(y_1) > \widetilde{z}$ für alle $y_1$ mit $||y_1 - x^*||_p > \hat{R}$ und $f(y_2) = \widetilde{z}\ \forall\ y_2$ mit $\min_{x \in \text{Round}(x^*)}\{||x - x^*||_p\} \leq ||x^* - y_2||_p \leq \hat{R}$.*
*(v) Für alle $z$ mit $f(x^*) \leq z < \widetilde{z}$ existiert ein $x \in \mathbb{R}^n$, so dass*

$$||x - x^*||_p = \max_{y \in \mathbb{R}^n}\{||y - x^*||_p :\ f(y) \leq z\}.$$

*Beweis.* „$2 \Rightarrow 1$":
(a) Nach (i) gilt: $f(x^*) \leq f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Damit ist $x^*$ eine (endliche) Optimallösung von (RP).

(b) Sei $z$, so dass $f(x^*) \leq z < \widetilde{z}$. Dann existiert (nach (v)):

$$\hat{x} = \underset{y \in \mathbb{R}^n}{\operatorname{argmax}} \{||y - x^*||_p : \ f(y) \leq z\}.$$

Dann ist $r(z) = ||\hat{x} - x^*||_p$, das heißt: $N_{\leq}(z) = K_p(x^*, ||\hat{x} - x^*||_p)$:

> *Beweis.* „$\subseteq$":
> Sei $y \in N_{\leq}(z) \Leftrightarrow \ f(y) \leq z$. Damit ist (nach Definition von $\hat{x}$) $||y - x^*||_p \leq ||\hat{x} - x^*||_p$ und somit $y \in K_p(x^*, ||\hat{x} - x^*||_p)$.
> „$\supseteq$":
> Sei $y \in K_p(x^*, ||\hat{x} - x^*||_p)$. Da $f(\hat{x}) \leq z < \widetilde{z}$ ist, ist (nach (iv)) $||\hat{x} - x^*||_p < \min_{x \in \text{Round}(x^*)}\{||x - x^*||_p\}$. Nachdem $y \in K_p(x^*, ||\hat{x} - x^*||_p)$, gilt $||y - x^*||_p \leq ||\hat{x} - x^*||_p$ und damit (nach (ii) und(iii)) $f(y) \leq f(\hat{x}) \leq z$. Somit ist $y \in N_{\leq}(z)$.
>
> q.e.d.

Sei $z = \widetilde{z}$: Dann ist $N_{\leq}(\widetilde{z}) = K_p(x^*, \hat{R})$:

> *Beweis.* $f(y_1) > \widetilde{z}$ für alle $y_1$ mit $||y_1 - x^*||_p > \hat{R}$ (nach (iv)).
> $f(y_2) = \widetilde{z}$ für alle $y_2$ mit $\min_{x \in \text{Round}(x^*)}\{||x - x^*||_p\} \leq ||y_2 - x^*||_p \leq \hat{R}$ (nach (iv)).
> Sei $y_3$, so dass $||y_3 - x^*||_p < \min_{x \in \text{Round}(x^*)}\{||x - x^*||_p\}$, dann ist $f(y_3) \leq f(\hat{x})$ mit $\hat{x} = \operatorname{argmin}_{x \in \text{Round}(x^*)}\{||x - x^*||_p\}$ (nach (iii)) und $f(\hat{x}) = \widetilde{z}$, da $\min_{x \in \text{Round}(x^*)}\{||x - x^*||_p\} = ||\hat{x} - x^*||_p \leq \hat{R}$ und somit nach (iv).
>
> q.e.d.

„$1 \Rightarrow 2$":
(i) Nach (a) ist $x^*$ eine Optimallösung von (RP) und daher gilt $f(x^*) \leq f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Also ist $x^*$ ein globales Minimum von $f$.

Hilfsbehauptung: Wenn $||y - x^*||_p \leq \min_{x \in \text{Round}(x^*)}\{||x - x^*||_p\}$ ist, dann ist $f(y) \leq \widetilde{z}$.

> *Beweis.* Sei $\widetilde{x} = \operatorname{argmin}_{x \in \text{Round}(x^*)}\{f(x)\}$. Dann ist $\widetilde{z} = f(\widetilde{x})$.
> Also ist $N_{\leq}(\widetilde{z}) = K_p(x^*, r)$ und $||\widetilde{x} - x^*||_p \leq r$.
> $||y - x^*||_p \leq \min_{x \in \text{Round}(x^*)}\{||x - x^*||_p\} \leq ||\widetilde{x} - x^*||_p \leq r$.

Also ist $y \in K_p(x^*, r) = N_{\leq}(\widetilde{z})$ und damit $f(y) \leq \widetilde{z}$.

q.e.d.

(ii) Seien $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$, so dass $||y_1 - x^*||_p = ||y_2 - x^*||_p \leq \min_{x \in \text{Round}(x^*)}\{||x - x^*||_p\}$.
Dann ist also (vgl. Hilfsbehauptung) $f(y_1) \leq \widetilde{z}$.
Das heißt $N_{\leq}(f(y_1)) = K_p(x^*, r(f(y_1)))$ mit $||y_2 - x^*||_p = ||y_1 - x^*||_p \leq r(f(y_1))$.
Also ist auch $y_2 \in N_{\leq}(f(y_1))$ und damit $f(y_2) \leq f(y_1)$.
Analog (durch Vertauschung von $y_1$ und $y_2$) folgt aber auch: $f(y_1) \leq f(y_2)$.
Also ist $f(y_1) = f(y_2)$.

(iii) Seien $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$, so dass $||x^* - y_1||_p < ||x^* - y_2||_p \leq \min_{x \in \text{Round}(x^*)}\{||x - x^*||_p\}$.
Dann gilt: $N_{\leq}(f(y_2)) = K_p(x^*, r(f(y_2)))$, da nach der Hilfsbehauptung $f(y_2) \leq \widetilde{z}$ ist.
Da $||x^* - y_1||_p < ||x^* - y_2||_p \leq r(f(y_2))$, ist $y_1 \in N_{\leq}(f(y_2))$ und damit $f(y_1) \leq f(y_2)$.

(iv) Hilfsbehauptung: $f(\hat{x}) = \widetilde{z}$, wenn $\hat{x} = \text{argmin}_{x \in \text{Round}(x^*)}\{||x - x^*||_p\}$:

*Beweis.* $\widetilde{z} = \min_{x \in \text{Round}(x^*)}\{f(x)\} = f(\widetilde{x})$ mit $\widetilde{x} = \text{argmin}_{x \in \text{Round}(x^*)}\{f(x)\}$. Somit ist $\widetilde{z} \leq f(\hat{x})$, da $\hat{x} \in \text{Round}(x^*)$. Außerdem ist $N_{\leq}(\widetilde{z}) = K_p(x^*, r(\widetilde{z}))$ mit $||\widetilde{x} - x^*||_p \leq r(\widetilde{z})$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad ||\hat{x} - x^*||_p &\leq ||\widetilde{x} - x^*||_p \quad \text{da } \widetilde{x} \in \text{Round}(x^*) \\ &\leq r(\widetilde{z}) \end{aligned}$$

Also ist $\hat{x} \in N_{\leq}(\widetilde{z}) \Leftrightarrow f(\hat{x}) \leq \widetilde{z}$.
Zusammen folgt $f(\hat{x}) = \widetilde{z}$.

q.e.d.

Sei $r(\widetilde{z})$ der Radius der Niveaumenge $N_{\leq}(\widetilde{z})$, das heißt: $N_{\leq}(\widetilde{z}) = K_p(x^*, r(\widetilde{z}))$.
Da $f(\hat{x}) = \widetilde{z}$ ist, gilt:

$$\min_{x \in \text{Round}(x^*)}\{||x - x^*||_p\} = ||\hat{x} - x^*||_p \leq r(\widetilde{z}).$$

Nach Definition gilt $f(y) > \widetilde{z}$ für alle $y$ mit $||y - x^*||_p > r(\widetilde{z}) \quad (1)$
und $f(y') \leq \widetilde{z}$ für alle $y'$ mit $||y' - x^*||_p \leq r(\widetilde{z})$.

Angenommen, es existiert ein $y$ mit $\min_{x \in \text{Round}(x^*)}\{||x - x^*||_p\} \leq ||y - x^*||_p \leq r(\widetilde{z})$, so dass $f(y) < \widetilde{z}$. Dann wäre $N_{\leq}(f(y)) = K_p(x^*, r(f(y)))$ mit $||y - x^*||_p \leq r(f(y))$. Da dann auch $\min_{x \in \text{Round}(x^*)}\{||x - x^*||_p\} \leq ||y - x^*||_p \leq r(f(y))$ wäre,
wäre $\hat{x} \in K_p(x^*, r(f(y))) = N_{\leq}(f(y))$ und damit $f(\hat{x}) \leq f(y)$. Da allerdings $\widetilde{z} = f(\hat{x})$ ist, würde

$$\widetilde{z} = f(\hat{x}) \leq f(y) < \widetilde{z} \quad \lightning$$

gelten. Deshalb muss $f(y) = \widetilde{z}$ sein, für alle $y$ mit

$$\min_{x \in \mathrm{Round}(x^*)} \{||x - x^*||_p\} \leq ||y - x^*||_p \leq r(\widetilde{z}) \quad (2).$$

Definiert man also $\hat{R} = r(\widetilde{z})$, dann gilt:
(nach (1)): $f(y) > \widetilde{z}$ für alle $y$ mit $||y - x^*||_p > \hat{R}$ und
(nach (2)): $f(y) = \widetilde{z}$ für alle $y$ mit $\min_{x \in \mathrm{Round}(x^*)} \{||x - x^*||_p\} \leq ||y - x^*||_p \leq \hat{R}$.

(v) Sei $z$, so dass $f(x^*) \leq z < \widetilde{z}$, dann ist $N_{\leq}(z) = K_p(x^*, r(z))$. Deswegen gilt für alle $y$ mit $||y - x^*||_p = r(z)$: $f(y) \leq z$. Andererseits gilt für alle $y'$ mit $||y' - x^*||_p > r(z)$: $f(y') > z$. Sei also $x' \in \mathbb{R}^n$, so dass $||x' - x^*||_p = r(z)$. (So ein $x'$ existiert, da $r(z) \geq 0$ und die $p$-Norm stetig ist.) Dann ist $||x' - x^*||_p = \max_{x \in \mathbb{R}^n} \{||x - x^*||_p\} : f(y) \leq z\}$. $\square$

# 4 Quasikreisförmige Niveaumengen

## 4.1 Motivation

Wir wollen im Folgenden die Vorüberlegung für kreisförmige Niveaumengen im $\mathbb{R}^2$ verallgemeinern: wir fordern nicht mehr, dass die Niveaumengen Kreise sind, sondern lediglich, dass sie sich zwischen zwei Kreisen einschließen lassen. Das heißt, es gibt einen Kreis $K_1(x^*, r)$ und einen Kreis $K_2(x^*, R)$, so dass für die Niveaumenge $N_{\leq}(z)$ gilt: $K_1(x^*, r) \subseteq N_{\leq}(z) \subseteq K_2(x^*, R)$, solange $R - r$ nicht „zu groß" wird. Diese Situation ist in Abbildung 4.1 dargestellt. Wir werden sehen, dass auch dann gilt, dass eine Optimallösung von (IP) in Round$(x^*)$ liegt, wenn $x^*$ eine endliche Optimallösung von (RP) ist.

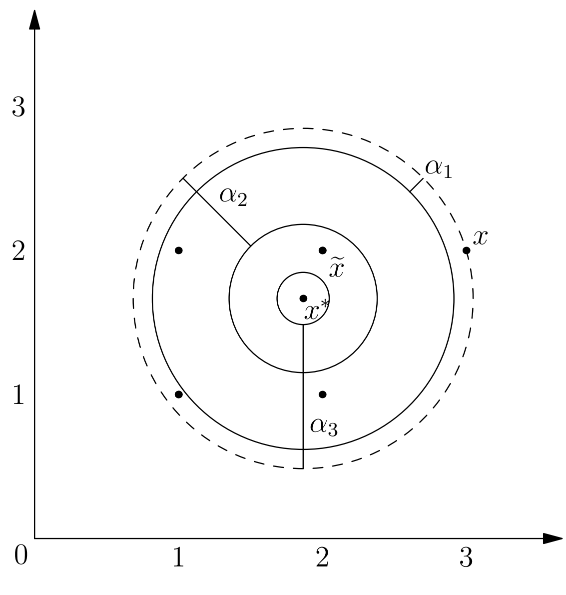


Abbildung 4.1: Motivation quasikreisförmige Mengen zu betrachten

In Abbildung 4.1 soll $x^*$ eine Optimallösung von (RP) sein und $x = \operatorname{argmin}_{y \in \mathbb{Z}^2 \setminus \operatorname{Round}(x^*)} ||x^* - y||_2$. Der gestrichelte Kreis $K_2(x^*, R)$ enthält eine Menge $N_{\leq}(z)$ mit $x \in N_{\leq}(z)$. Je nachdem, wie man $\alpha$ wählt, ist dann $K_1(x^*, r)$ verschieden groß. Hier sind die Kreise für drei verschiedene $\alpha$ eingezeichnet. Man sieht, dass für $\alpha_1$ und $\alpha_2$ mindestens ein Punkt $\widetilde{x} \in \operatorname{Round}(x^*)$ in $K_1(x^*, r) \subseteq N_{\leq}(z)$ ist. Wählt man $\alpha$ allerdings zu groß (vgl. $\alpha_3$), kann es passieren, dass ein Punkt aus $\mathbb{Z}^2 \setminus \operatorname{Round}(x^*)$ in $N_{\leq}(z)$ liegt, aber keiner aus $\operatorname{Round}(x^*)$. In diesem Fall würde $x$ einen kleineren Zielfunktionswert liefern als alle Punkte aus $\operatorname{Round}(x^*)$. Deshalb möchte man $\alpha$ so klein wählen, dass das nicht passieren kann.

Im Folgenden sollen diese Überlegungen formalisiert und bewiesen werden.

## 4.2 Definition und Beweis

**Definition 4.1.** $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt $\alpha$-quasikreisförmig mit Mittelpunkt $x$, wenn es $r \in \mathbb{R}_0^+$ und $R \in \mathbb{R}^+$ gibt, so dass $K(x, r) \subseteq M$ und $M \subseteq K(x, R)$, wobei $R - r$ höchstens $\alpha$ ist, für ein $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

*Beispiel.* Die beiden Bilder in Abbildung 4.2 zeigen Beispiele für $\alpha$-quasikreisförmige Mengen $M$ mit Mittelpunkt $x$.

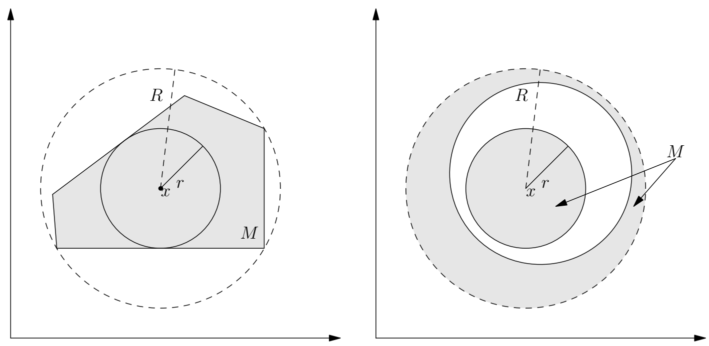


Abbildung 4.2: Beispiele für quasikreisförmige Mengen

Für Satz 4.3 benötigen wir noch die folgende Definition.

**Definition 4.2.** Mit $d(x, M)$ sei der euklidische Abstand des Punktes $x \in \mathbb{R}^n$ von der Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ bezeichnet.

Also

$$d(x, M) = \min_{y \in M} ||x - y||_2 .$$

**Satz 4.3.** *Sei $x^*$ eine endliche Optimallösung von*

$$\begin{array}{lll} (RP) & \min & f(x) \\ & s.d. & x \in \mathbb{R}^n, \end{array}$$

*so dass die Niveaumengen $N_{\leq}(z)$ der Funktion $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ für alle $z \in \mathbb{R}$ mit*

$$f(x^*) \leq z \leq \widetilde{z} = \min\{f(x): x \in \text{Round}(x^*)\}$$

*$\alpha$-quasikreisförmig mit Mittelpunkt $x^*$ und*

$$\alpha := \min_{x^* \in \mathbb{R}^n} \{d(x^*, \mathbb{Z}^n \setminus \text{Round}(x^*)) - d(x^*, \mathbb{Z}^n)\}$$

*sind, so liegt eine optimale Lösung von*

$$\begin{array}{lll} (IP) & \min & f(x) \\ & s.d. & x \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

*in* Round($x^*$).

*Beweis.* **1.** Zuerst wollen wir überprüfen, ob $\alpha \in \mathbb{R}^+$ erfüllt ist.
Offensichtlich gilt

$$d(x, \mathbb{Z}^n \setminus \text{Round}(x^*)) \geq d(x, \mathbb{Z}^n) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Also ist $\alpha \geq 0$.

Außerdem folgt $\hat{x} = \text{argmin}_{y \in \mathbb{Z}^n} ||x^* - y||_2 \in \text{Round}(x^*)$ nach Korollar 3.9.
Und somit ist $\alpha > 0$.

**2.** Nun folgt der eigentliche Beweis.
Sei $x \in \mathbb{Z}^n$ ein beliebiger Punkt mit Zielfunktionswert $z = f(x)$. Da $x^*$ eine Optimallösung von (RP) ist, gilt $f(x^*) \leq z$.
Sei $\widetilde{x} = \text{argmin}_{x \in \text{Round}(x^*)}\{f(x)\}$, das heißt $f(\widetilde{x}) = \widetilde{z}$.
Dann gilt entweder:
1. Fall: $\widetilde{z} \leq z \Rightarrow \ f(\widetilde{x}) \leq f(x)$, oder:

2. Fall: $\widetilde{z} > z$:
In diesem Fall

(1) ist $x \notin \text{Round}(x^*)$ und

(2) es existieren $r \in \mathbb{R}_0^+,\ R \in \mathbb{R}^+$mit $K(x^*, r) \subseteq N_{\leq}(z) \subseteq K(x^*, R)$ und $R - r \leq \alpha$.

Nach Definition von $\alpha$ gilt:

$$\alpha \leq d(x^*, \mathbb{Z}^n \setminus \text{Round}(x^*)) - d(x^*, \mathbb{Z}^n).$$

Mit der Definition von $\hat{x}$ aus **1.** gilt:

$$\alpha \leq d(x^*, \mathbb{Z}^n \setminus \text{Round}(x^*)) - ||x^* - \hat{x}||_2 .$$

Dann ist

$$\begin{array}{rcll} ||x^* - \hat{x}||_2 & \leq & d(x^*, \mathbb{Z}^n \setminus \text{Round}(x^*)) - \alpha & \\ & \leq & ||x^* - x||_2 - \alpha & \text{da } x \in \mathbb{Z}^n \setminus \text{Round}(x^*) \\ & \leq & R - \alpha & \text{da } x \in N_{\leq}(z) \subseteq K(x^*, R) \\ & \leq & r & \text{da } R - r \leq \alpha. \end{array}$$

Das heißt $\hat{x} \in K(x^*, r) \subseteq N_{\leq}(z)$. Damit ist $f(\hat{x}) \leq z < \widetilde{z}$. Da aber $\hat{x} \in \text{Round}(x^*)$, gilt auch $\widetilde{z} = f(\widetilde{x}) \leq f(\hat{x})$.
Zusammen: $\widetilde{z} \leq f(\hat{x}) \leq z < \widetilde{z}$ ↯.
Somit muss $\widetilde{z} = f(\widetilde{x}) \leq f(x)$ für alle $x \in \mathbb{Z}^n$ sein und damit $x_{IP}^* = \widetilde{x}$. □

*Bemerkung* 4.4. Auch hier ist es nicht nötig alle Optimallösungen von (RP) zu kennen, so lange man eine findet, die den Voraussetzungen des Satzes genügt.

*Bemerkung* 4.5. In dem Fall quasikreisförmiger Niveaumengen muss man tatsächlich alle Punkte in Round$(x^*)$ als Optimallösung in Betracht ziehen und darf nicht einfach nur kaufmännisch runden, wie das Beispiel in Abbildung 4.3 zeigt.

Hier ist $x^* = (1.8, 1.52)$ und $\widetilde{x} = [x^*] = (2, 2)$.
Daher gilt: $||x^* - \widetilde{x}||_2 = \sqrt{(0.2)^2 + (0.48)^2} = 0.52$.
Für $x' = (2, 1)$ ist dagegen $||x^* - x'||_2 = \sqrt{(0.2)^2 + (0.52)^2} = \frac{\sqrt{194}}{25} \approx 0.557$.
Sei $R = \frac{\sqrt{194}}{25}$ und $r = 0.5$. Erfüllt die Menge $N_{\leq}(f(x'))$ außerdem, dass
$K(x^*, r) \subseteq N_{\leq}(f(x')) \subseteq K(x^*, R)$ und $\widetilde{x} \notin N_{\leq}(f(x'))$, dann gilt
$R - r \approx 0.057 < \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) \approx 0.618$. So ist $N_{\leq}(f(x'))$ quasikreisförmig mit dem geforderten $\alpha$ und man kann eine Folge von Niveaumengen für kleinere $z$ konstruieren, so dass diese auch quasikreisförmig sind. Damit sind die Voraussetzungen für Satz 4.3 erfüllt und es gibt eine Optimallösung in Round$(x^*)$. Diese Optimallösung ist hier $x' = (2, 1)$ und nicht $\widetilde{x} = [x^*] = (2, 2)$.

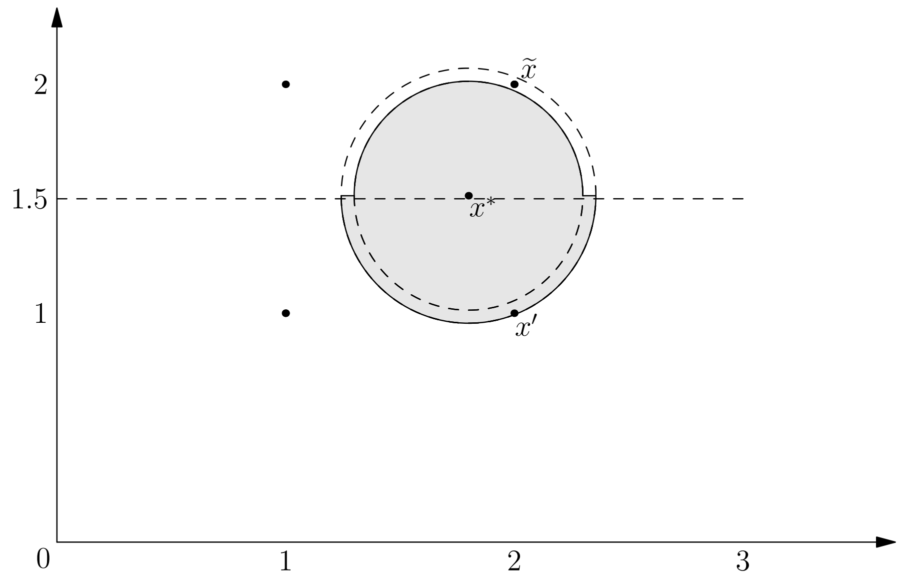


Abbildung 4.3: Gegenbeispiel, dass $\widetilde{x} \neq [x^*]$ sein kann

## 4.3 Bestimmung von $\alpha$

Um zu entscheiden, ob eine Funktion die Voraussetzungen von Satz 4.3 erfüllt, benötigt man einen Wert für $\alpha$.

Man sieht sofort, dass für $n = 1$ gilt:

$$\alpha = \min_{x \in \mathbb{R}} \{d(x, \mathbb{Z} \setminus \operatorname{Round}(x)) - d(x, \mathbb{Z})\} = 1.$$

Das heißt wir gehen in diesem Abschnitt davon aus, dass $n \geq 2$ ist und werden zuerst eine einfache Schranke für $\alpha$ beweisen.

**Lemma 4.6.** *Es gilt:*

$$\begin{aligned} \alpha &= \min_{x \in \mathbb{R}^n} \{d(x, \mathbb{Z}^n \setminus \operatorname{Round}(x)) - d(x, \mathbb{Z}^n)\} \\ &> 1 - \frac{1}{2}\sqrt{n}. \end{aligned}$$

*Beweis.* Es gilt:

$$\begin{aligned}\alpha &= \min_{x\in\mathbb{R}^n}\{d(x,\mathbb{Z}^n\setminus \mathrm{Round}(x)) - d(x,\mathbb{Z}^n)\}\\ &\geq \min_{x\in\mathbb{R}^n}\{\min_{y\in\mathbb{Z}^n\setminus \mathrm{Round}(x)} ||y-x||_2\} - \max_{x\in\mathbb{R}^n}\{\min_{y\in\mathbb{Z}^n} ||y-x||_2\}.\end{aligned}$$

Mit Gleichheit, wenn $\min_{x\in\mathbb{R}^n}\{\min_{y\in\mathbb{Z}^n\setminus \mathrm{Round}(x)} ||y-x||_2\}$ und $\max_{x\in\mathbb{R}^n}\{\min_{y\in\mathbb{Z}^n} ||y-x||_2\}$ für das gleiche $x \in \mathbb{R}^n$ angenommen werden.

Für $y \in \mathbb{Z}^n\setminus \mathrm{Round}(x)$ gilt: $1 \leq ||y-x||_2$. Dieser Wert wird angenommen, wenn $x \in \mathbb{Z}^n$ (d.h. $\mathrm{Round}(x) = \{x\}$) und $y_i = x_i$ für alle $i = 1,\ldots,n$, $i \neq j$ für ein $j \in \{1,\ldots,n\}$ und $|y_j - x_j| = 1$. (1)
Ist $||x-y||_2 < 1$ folgt, dass für alle $i \in \{1,\ldots,n\}$ gilt: $|x_i - y_i| < 1$. Dann ist $y$ aber in $\mathrm{Round}(x)$.
Also ist $\min_{x\in\mathbb{R}^n}\{\min_{y\in\mathbb{Z}^n\setminus \mathrm{Round}(x)} ||y-x||_2\} = 1$.

Andererseits ist $d(x,\mathbb{Z}^n)$ maximal, wenn $x$ in allen Koordinaten nicht ganzzahlig ist und zu allen Punkten in $\mathrm{Round}(x)$ den gleichen Abstand hat:
1. $d(x,\mathbb{Z}^n) = d(x,\mathrm{Round}(x))$ (vgl. Teil 1 im Beweis zu 4.3).
2. $d(x,\mathrm{Round}(x)) = \min_{y\in\mathrm{Round}(x)} ||y-x||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i-y_i)^2}$. Ist dann $x_j \in \mathbb{Z}$ für ein $j \in \{1,\ldots,n\}$, so ist $y_j = x_j$ für alle $y \in \mathrm{Round}(x)$ und deshalb $x_j - y_j = 0$. Das bedeutet $d(x,\mathbb{Z}^n)$ wird größer, wenn $x$ in allen Koordinaten nicht ganzzahlig ist.
3. Hat $x$ zu allen Punkten in $\mathrm{Round}(x)$ den gleichen Abstand, kann man $x$ um $d(x,\mathbb{Z}^n)$ zu verändern nur so verschieben, dass sich der Abstand zu mindestens einem der Punkte aus $\mathrm{Round}(x)$ verkleinert. Dadurch wird aber $d(x,\mathbb{Z}^n)$ kleiner.

Also ist $d(x,\mathbb{Z}^n)$ zum Beispiel für $x = (\frac{1}{2},\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2}) \in \mathbb{R}^n$ maximal.
Dann ist

$$\begin{aligned}||y-x||_2 &= \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{1}{4}} \quad \forall y \in \mathrm{Round}(x)\\ &= \frac{1}{2}\sqrt{n}.\end{aligned}$$

Damit ist $\max_{x\in\mathbb{R}^n}\{\min_{y\in\mathbb{Z}^n} ||y-x||_2\} = \frac{1}{2}\sqrt{n}$.

Im Vergleich mit dem ersten Teil (1) sieht man außerdem, dass das Minimum und das Maximum an zwei verschiedenen Punkten angenommen werden.

Insgesamt gilt somit

$$\begin{aligned}\alpha &> \min_{x\in\mathbb{R}^n}\{\min_{y\in\mathbb{Z}^n\setminus \mathrm{Round}(x)} ||y-x||_2\} - \max_{x\in\mathbb{R}^n}\{\min_{y\in\mathbb{Z}^n} ||y-x||_2\}\\ &= 1-\frac{1}{2}\sqrt{n}.\end{aligned}$$

□

*Bemerkung* 4.7. Diese Schranke für $\alpha$ ist nur für $n \in \{2,3\}$ sinnvoll:
Für $n = 2$ ergibt sich: $\alpha > 1 - \frac{1}{2}\sqrt{2} \approx 0.293$.
Für $n = 3$: $\alpha > 1 - \frac{1}{2}\sqrt{3} \approx 0.134$.
Für $n = 4$: $\alpha > 1 - \frac{1}{2}\sqrt{4} = 0$. Diese Voraussetzung an $\alpha$ steckt bereits in 4.1 und ist somit ohne Aussage.
Für $n > 4$ ist $1 - \frac{1}{2}\sqrt{n} < 0$ und liefert daher auch keine neuen Informationen mehr.

Um $\alpha$ exakt zu bestimmen muss folgendes Optimierungsproblem gelöst werden:

$$\begin{array}{ll}\min & (\min\limits_{y\in\mathbb{Z}^n\setminus \mathrm{Round}(x)}\{||x-y||_2\} - \min\limits_{y\in\mathbb{Z}^n}\{||x-y||_2\})\\ \text{s.d.} & x\in\mathbb{R}^n.\end{array}$$

Beziehungsweise

$$(P_\alpha) \qquad \begin{array}{l}\min\ b(x)-a(x)\\ \text{s.d. } x\in\mathbb{R}^n\end{array}$$

mit

$$b(x) = \begin{array}{l}\min\ ||x-y||_2\\ \text{s.d. } y\in\mathbb{Z}^n\setminus \mathrm{Round}(x)\end{array}$$

und

$$a(x) = \begin{array}{l}\min\ ||x-y||_2\\ \text{s.d. } y\in\mathbb{Z}^n.\end{array}$$

Die Bedeutung von $a(x)$ und $b(x)$ im Fall $n = 2$ ist in Abbildung 4.4 dargestellt: dort sind für drei verschiedene $x_i$ jeweils $a(x_i)$ und $b(x_i)$ eingezeichnet.

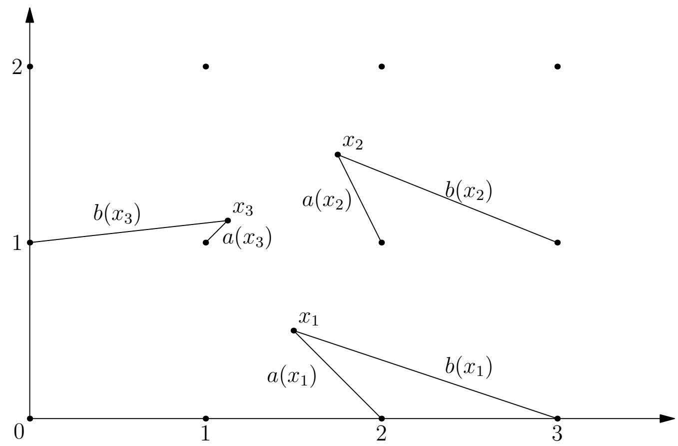


Abbildung 4.4: Veranschaulichung von $a(x)$ und $b(x)$

**Satz 4.8.** *Eine Optimallösung von* $(P_\alpha)$ *ist* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *mit* $x_i \in \mathbb{Z}$ *für ein* $i \in \{1, \ldots, n\}$ *und* $x_j = \lfloor x_j \rfloor + 0.5$ *für* $j \in \{1, \ldots, n\} \backslash \{i\}$. *Der optimale Zielfunktionswert ist* $\alpha = \frac{1}{2}(\sqrt{n+3} - \sqrt{n-1})$.

*Beweis.* **Teil 1:** $x \in \mathbb{Z}^n$ **ausschließen**
Ist $x \in \mathbb{Z}^n$, gilt offensichtlich $\alpha = 1$. Sei im Folgenden $x \notin \mathbb{Z}^n$.
Damit ist $\text{Round}(x) \neq \{x\}$.

**Teil 2:** $a(x)$ **umformulieren**
Nach Korollar 3.9 gilt $\hat{x} = \text{argmin}_{y \in \mathbb{Z}^n} ||x - y||_2 \in \text{Round}(x)$.
Das heißt

$$\begin{aligned} a(x) \quad := \quad & \min \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \\ & \text{s.d. } y_i \in \{\lfloor x_i \rfloor, \lceil x_i \rceil\} \quad \forall i = 1, \ldots, n \end{aligned}$$

Sei $a_i = \min\{x_i - \lfloor x_i \rfloor, \lceil x_i \rceil - x_i\}$ für alle $i = 1, \ldots, n$.
$(\Rightarrow \ 0 \leq a_i \leq 0.5 \ \forall i \in \{1, \ldots, n\})$
Damit ist $a(x) = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$.

**Teil 3 a: Zulässigen Bereich von** $b(x)$ **einschränken (im Fall** $n = 2$**):**
Für $b(x)$ kommen nur die folgenden Punkte in Betracht:
$x \in B = \{(\lfloor x_1 \rfloor - 1, \lfloor x_2 \rfloor), (\lfloor x_1 \rfloor - 1, \lceil x_2 \rceil), (\lfloor x_1 \rfloor, \lfloor x_2 \rfloor - 1),$

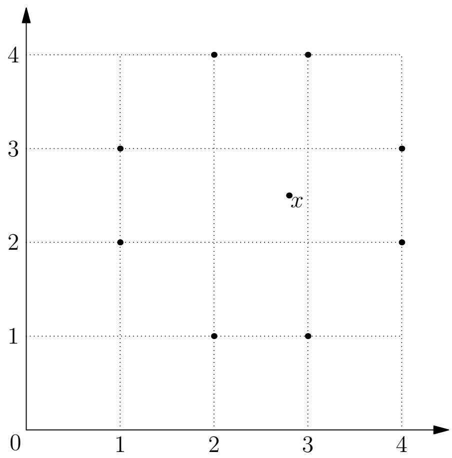


Abbildung 4.5: Die schwarzen Punkte bilden $B$

$(\lfloor x_1 \rfloor, \lceil x_2 \rceil + 1), (\lceil x_1 \rceil, \lfloor x_2 \rfloor - 1), (\lceil x_1 \rceil, \lceil x_2 \rceil + 1), (\lceil x_1 \rceil + 1, \lfloor x_2 \rfloor), (\lceil x_1 \rceil + 1, \lceil x_2 \rceil)\}$
(vgl. Abbildung 4.5)
Denn sei $z \in \mathbb{Z}^2 \backslash (\mathrm{Round}(x) \cup B)$. Dann existiert ein $y \in B$, s.d. $|x_i - y_i| < |x_i - z_i|$ für ein $i \in \{1, 2\}$ und $|x_j - y_j| \leq |x_j - z_j|$ für $j \in \{1, 2\} \backslash \{i\}$.
Dann ist aber $||x - y||_2 \leq ||x - z||_2$.

**Teil 3 b: Zulässigen Bereich von $b(x)$ einschränken (für beliebiges $n \in \mathbb{N}$):**
Auch im allgemeinen Fall kommen nur die Punkte in Betracht, die in nur einer Koordinate nicht mit $\lfloor x_i \rfloor$ oder $\lceil x_i \rceil$ übereinstimmen:

$$B = \{y \in \mathbb{Z}^n : \; y_j \in \{\lfloor x_j \rfloor - 1, \; \lceil x_j \rceil + 1\} \text{ für ein } j \in \{1, \dots, n\} \text{ und}$$
$$y_i \in \{\lfloor x_i \rfloor, \; \lceil x_i \rceil\} \; \forall i \in \{1, \dots, n\} \backslash \{j\}\}$$

*Beweis.* Sei $z \in \mathbb{Z}^n \backslash (\mathrm{Round}(x) \cup B)$. Dann gilt $z_i \leq \lfloor x_i \rfloor$ oder $z_i \geq \lceil x_i \rceil$ für alle $i = 1, \dots, n$.
Da aber $z \notin \mathrm{Round}(x)$, gibt es mindestens ein

$$j \in I = \{i : \; z_i \leq \lfloor x_i \rfloor - 1 \vee z_i \geq \lceil x_i \rceil + 1\}.$$

Außerdem ist $z \notin B$ und damit gibt es mindestens zwei $j_1, j_2 \in I$. Definiere $k = \mathrm{argmin}_i \{i \in I\}$.
Sei für $i \neq k$:

$$y_i := \begin{cases} \lfloor x_i \rfloor & \text{wenn } z_i \leq \lfloor x_i \rfloor \\ \lceil x_i \rceil & \text{wenn } z_i \geq \lceil x_i \rceil \end{cases}$$

und

$$y_k := \begin{cases} \lfloor x_k \rfloor - 1 & \text{wenn } z_k \leq \lfloor x_k \rfloor - 1 \\ \lceil x_k \rceil + 1 & \text{wenn } z_k \geq \lceil x_k \rceil + 1. \end{cases}$$

Dann ist $|x_k - y_k| \leq |x_k - z_k|$, $|x_j - y_j| < |x_j - z_j|$ für alle $j \in I \backslash \{k\}$ (also für mindestens ein $j$) und $|x_i - y_i| \leq |x_i - z_i|$ für alle anderen $i \in \{1, \ldots, n\} \backslash I$. Damit ist $||x - y||_2 < ||x - z||_2$.

q.e.d.

Somit ist

$$\begin{aligned} b(x) \quad = \quad & \min \; ||x - y||_2 \\ & \text{s.d. } y \in B. \end{aligned}$$

**Teil 4: $b(x)$ umformulieren**

$$||x - y||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

Da $y_1 \in \{\lfloor x_1 \rfloor - 1, \lfloor x_1 \rfloor, \lceil x_1 \rceil, \lceil x_1 \rceil + 1\}$, gibt es für den Betrag des ersten Summanden nur die folgenden Möglichkeiten:

$$|x_1 - y_1| = \begin{cases} x_1 - \lfloor x_1 \rfloor + 1 \\ x_1 - \lfloor x_1 \rfloor \\ \lceil x_1 \rceil - x_1 \\ \lceil x_1 \rceil - x_1 + 1 \end{cases}$$

Ist $x_1 \in \mathbb{Z}$, dann ist $\lfloor x_1 \rfloor = x_1 = \lceil x_1 \rceil \Rightarrow \; a_1 = 0$ und $|x_1 - y_1| = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \quad (I).$

Sei jetzt $x_1 \notin \mathbb{Z}$.
Für den Fall, dass $a_1 = \min\{x_1 - \lfloor x_1 \rfloor, \lceil x_1 \rceil - x_1\} = x_1 - \lfloor x_1 \rfloor$, folgt

$$\lceil x_1 \rceil - x_1 = \lfloor x_1 \rfloor + 1 - x_1 = 1 - a_1.$$

Damit gilt:

$$|x_1 - y_1| = \begin{cases} x_1 - \lfloor x_1 \rfloor + 1 = a_1 + 1 \\ x_1 - \lfloor x_1 \rfloor = a_1 \\ \lceil x_1 \rceil - x_1 = 1 - a_1 \\ \lceil x_1 \rceil - x_1 + 1 = 2 - a_1. \end{cases}$$

Ist dagegen $a_1 = \min\{x_1 - \lfloor x_1 \rfloor, \lceil x_1 \rceil - x_1\} = \lceil x_1 \rceil - x_1$, folgt

$$x_1 - \lfloor x_1 \rfloor = x_1 - \lceil x_1 \rceil + 1 = 1 - a_1.$$

Damit gilt:

$$|x_1 - y_1| = \begin{cases} x_1 - \lfloor x_1 \rfloor + 1 = 2 - a_1 \\ x_1 - \lfloor x_1 \rfloor = 1 - a_1 \\ \lceil x_1 \rceil - x_1 = a_1 \\ \lceil x_1 \rceil - x_1 + 1 = a_1 + 1. \end{cases}$$

Es gibt also in beiden Fällen nur die gleichen vier Möglichkeiten.
Analog gibt es für $|x_i - y_i|$ für $i = 2, \ldots, n$ die folgenden vier Möglichkeiten:

$$|x_i - y_i| = \begin{cases} a_i + 1 \\ a_i \\ 1 - a_i \\ 2 - a_i. \end{cases}$$

(Wenn $a_i = 0$ gibt es für $|x_i - y_i|$ nur die Möglichkeiten 1 oder 0 (vgl. $(I)$).)
Es gilt:
1. $a_i \leq 0.5 \quad \Rightarrow \ 2 \cdot a_i \leq 1 \quad \Rightarrow \ a_i \leq 1 - a_i$
2. $1 - a_i \leq a_i + 1$
3. $2 \cdot a_i \leq 1 \quad \Rightarrow \ 2 \cdot a_i + 1 \leq 2 \quad \Rightarrow \ 1 + a_i \leq 2 - a_i$

Insgesamt: $a_i \leq 1 - a_i \leq a_i + 1 \leq 2 - a_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$.

Dabei ist $|x_i - y_i| = a_i$ und $|x_i - y_i| = 1 - a_i$, wenn $y_i \in \{\lfloor x_i \rfloor, \lceil x_i \rceil\}$.
Um $\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2}$ zu minimieren, möchte man also $y \in B$ so wählen, dass $|x_i - y_i| = a_i$ für alle $i$. Dann wäre aber $y \in \mathrm{Round}(x)$. Daher muss ein Summand $|x_k - y_k|$ „etwas größer“ sein: er kann nicht $1 - a_k$ sein, da auch dann $y_k \in \{\lfloor x_k \rfloor, \lceil x_k \rceil\}$ wäre. Deswegen wählt man $|x_k - y_k| = 1 + a_k$ für ein $k \in \{1, \ldots, n\}$ und für alle anderen $i$: $|x_i - y_i| = a_i$.
(Bei den Minimierern treten die Fälle $|x_i - y_i| = 2 - a_i$ und $|x_i - y_i| = 1 - a_i$ nicht auf. Das heißt man kann davon ausgehen, dass es ab hier nur noch die Möglichkeiten $|x_i - y_i| = a_i$ oder $|x_i - y_i| = a_i + 1$ gibt. Das führt für $a_i = 0$ zu den Alternativen $|x_i - y_i| = 0$ oder $|x_i - y_i| = 1$, wie oben. Dann braucht man ab hier keine Unterscheidung mehr, ob $a_i = 0$ ist oder nicht.)

Damit ist

$$
\begin{aligned}
&\min_{k\in\{1,\dots,n\}}\left\{\sqrt{\left(\sum_{i\in\{1,\dots,n\}\setminus\{k\}} a_i^2\right)+(1+a_k)^2}\right\}\\
=\;&\min_{k\in\{1,\dots,n\}}\left\{\sqrt{\left(\sum_{i\in\{1,\dots,n\}\setminus\{k\}} a_i^2\right)+1+a_k^2+2\cdot a_k}\right\}\\
=\;&\sqrt{\min_{k\in\{1,\dots,n\}}\left\{\left(\sum_{i\in\{1,\dots,n\}\setminus\{k\}} a_i^2\right)+a_k^2+1+2\cdot a_k\right\}}\\
=\;&\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)+1+2\cdot\min_{k\in\{1,\dots,n\}}\{a_k\}}.
\end{aligned}
$$

**Teil 5: $(P_\alpha)$ lösen**

Damit ist die Optimallösung des folgenden Problems auch eine optimale Lösung von $(P_\alpha)$:

$$
\begin{aligned}
\min\;&\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2+1+2\cdot\min_k\{a_k\}}-\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\\
\text{s.d. }&a_i=\min\{x_i-\lfloor x_i\rfloor,\lceil x_i\rceil-x_i\}\quad\forall i\in\{1,\dots,n\}\\
&x\in\mathbb{R}^n.
\end{aligned}
$$

Da $x\in\mathbb{R}^n$ beliebig ist und auf die Zielfunktion nur über die $a_i$'s Einfluss nimmt, kann man für die Bestimmung des optimalen Zielfunktionswerts auch das folgende Problem lösen:

$$
\begin{aligned}
\min\;&\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2+1+2\cdot\min_k\{a_k\}}-\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}\\
\text{s.d. }&0\le a_i\le 0.5\quad\forall i\in\{1,\dots,n\}.
\end{aligned}
$$

Das heißt man löst das Problem zuerst ohne Berücksichtigung der Tatsache, dass die $a_i$'s eigentlich von $x$ abhängen. Hat man dieses Problem gelöst, kann man mit Hilfe der Definition der $a_i$'s ein $x$ bestimmen, das zu den optimalen $a_i$'s führt.

Da in dem Problem kein $a_i$ ausgezeichnet ist, kann man außerdem ohne Einschränkung annehmen, dass $a_1 \leq a_j$ für alle $j = 2, \ldots, n$ ist. Dann muss also das folgende Problem gelöst werden:

$$\begin{aligned} \min & \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 1 + 2 \cdot a_1} - \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \\ \text{s.d. } & a_1 \leq a_j \quad \forall j \in \{2, \ldots, n\} \\ & 0 \leq a_i \leq 0.5 \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}. \end{aligned}$$

**Veranschaulichung im Fall $n = 2$:**
Man sucht das Minimum einer Funktion

$$f(a_1, a_2) = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 1 + 2 \cdot a_1} - \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

auf dem Dreieck $\{(a_1, a_2) \in [0, 0.5] \times [0, 0.5] : \; a_1 \leq a_2\}$:

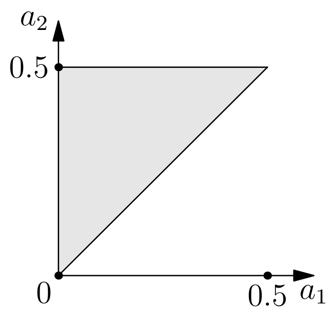


Abbildung 4.6: Auf diesem Dreieck soll $f(a_1, a_2)$ minimiert werden

Eine notwendige Bedingung für ein Extremum einer differenzierbaren Funktion im Inneren des Dreiecks ist, dass der Gradient verschwindet.

$$\begin{aligned} grad(f) = \Bigg( & \frac{1}{2} \left(a_1^2 + a_2^2 + 1 + 2 \cdot a_1\right)^{-1/2} \cdot (2 \cdot a_1 + 2) - \frac{1}{2} \left(a_1^2 + a_2^2\right)^{-1/2} \cdot 2 \cdot a_1, \\ & \frac{1}{2} \left(a_1^2 + a_2^2 + 1 + 2 \cdot a_1\right)^{-1/2} \cdot 2 \cdot a_2 - \frac{1}{2} \left(a_1^2 + a_2^2\right)^{-1/2} \cdot 2 \cdot a_2 \Bigg) \end{aligned}$$

Dabei ist $f$ differenzierbar, weil man davon ausgeht, dass $x \notin \mathbb{Z}^2$ ist, das heißt, dass nicht $a_1$ und $a_2$ gleichzeitig 0 werden können.

**Verallgemeinerung auf $n$ Dimensionen:**
Im $\mathbb{R}^n$ sucht man das Minimum einer Funktion

$$f(a_1,\dots,a_n) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 1 + 2\cdot a_1} - \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}$$

auf der Menge $\{(a_1,\dots,a_n) \in [0,0.5]^n : \ a_1 \leq a_j \ \forall j \in \{2,\dots,n\}\}$.
Eine notwendige Bedingung für ein Extremum der differenzierbaren Funktion im Inneren ist auch hier, dass der Gradient verschwindet. Wieder ist $f$ differenzierbar, weil $x \notin \mathbb{Z}^n$ ist und deshalb nicht alle $a_i$'s gleichzeitig Null werden.

$$\begin{aligned} grad(f) \quad = \quad & \Bigg( \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 1 + 2\cdot a_1\right)^{-1/2} \cdot (2\cdot a_1 + 2) - \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{-1/2} \cdot 2\cdot a_1, \\ & \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 1 + 2\cdot a_1\right)^{-1/2} \cdot 2\cdot a_2 - \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{-1/2} \cdot 2\cdot a_2, \\ & \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 1 + 2\cdot a_1\right)^{-1/2} \cdot 2\cdot a_3 - \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{-1/2} \cdot 2\cdot a_3, \\ & \vdots \\ & \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 1 + 2\cdot a_1\right)^{-1/2} \cdot 2\cdot a_n - \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{-1/2} \cdot 2\cdot a_n \Bigg) \end{aligned}$$

Damit ist $(grad(f))_j = 0$ für $j \in \{2,\dots,n\}$ äquivalent zu

$$\begin{aligned} 1.\quad & a_j = 0, \text{ oder} \\ 2.\quad & \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 1 + 2\cdot a_1}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}} \\ & \Leftrightarrow \ \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 1 + 2\cdot a_1 \\ & \Leftrightarrow \ 0 = 1 + 2\cdot a_1 \quad \lightning \text{ da } a_1 \geq 0. \end{aligned}$$

Somit muss $a_j = 0$ sein für alle $j \in \{2,\dots,n\}$ und das bedeutet (da $a_1 \leq a_j$ für alle $j \in \{1,\dots,n\}$) $a_i = 0 \ \forall i \in \{1,\dots,n\}$, beziehungsweise $x \in \mathbb{Z}^n$. Da das aber auf dem Rand der Menge liegt, gibt es kein Extremum im Inneren: Die Menge

$$A := \{(a_1,\dots,a_n) : \ 0 \leq a_i \leq 0.5 \ \forall i \in \{1,\dots,n\}, \ a_1 \leq a_j \ \forall j \in \{2,\dots,n\}\}$$

ist eine beschränkte und abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und daher kompakt (Satz von Heine-Borel, vgl. Forster [5], S. 30). Da $f : A \to \mathbb{R}$ stetig ist, nimmt sie auf $A$ ihr Maximum und ihr Minimum an. Besäße $f$ im Inneren von $A$ ein lokales Extremum, gelte dort allerdings $grad(f) = 0$, da $f$ partiell differenzierbar ist (vgl. ebd. [5], S. 78). Deshalb muss ein Extremum auf dem Rand von $A$ liegen.

**Fall 1:** $a_1 = 0.5$.
Dann sind, wegen der Voraussetzung $a_1 \leq a_j$ für alle $j = 1, \ldots, n$, auch alle $a_j = 0.5$.
Damit ist

$$\begin{aligned}
\alpha &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 1 + 2 \cdot \min_k a_k} - \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \\
&= \sqrt{n \cdot 0.25 + 1 + 1} - \sqrt{n \cdot 0.25} \\
&= \frac{1}{2}(\sqrt{n+8} - \sqrt{n}).
\end{aligned}$$

**Fall 2:** $0 < a_1 < 0.5$.
Da wir schon gezeigt haben, dass wir nur noch das Innere untersuchen müssen, wissen wir, dass es ein $k \in \{2, \ldots, n\}$ gibt mit $a_k = a_1$ oder $a_k = 0.5$. Ohne Einschränkung nehmen wir an, dass $k = 2$ ist.
**Fall 2.1:** $a_2 = a_1$.
Dann wird das Optimierungsproblem zu

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sqrt{\sum_{i=3}^{n} a_i^2 + (1 + a_1)^2 + a_1^2} - \sqrt{\sum_{i=3}^{n} a_i^2 + 2 \cdot a_1^2} \\
s.d. \quad & a_1 \leq a_j \leq 0.5 \quad \forall j \in \{3, \ldots, n\} \\
& 0 < a_1 < 0.5
\end{aligned}$$

und der Gradient zu

$$\begin{aligned} grad(f) \quad = \quad & \Bigg( (1 + 2 \cdot a_1) \cdot \left( \sum_{i=3}^{n} a_i^2 + (1+a_1)^2 + a_1^2 \right)^{-1/2} - 2 \cdot a_1 \cdot \left( \sum_{i=3}^{n} a_i^2 + 2 \cdot a_1^2 \right)^{-1/2}, \\ & a_3 \cdot \left( \sum_{i=3}^{n} a_i^2 + (1+a_1)^2 + a_1^2 \right)^{-1/2} - a_3 \cdot \left( \sum_{i=3}^{n} a_i^2 + 2 \cdot a_1^2 \right)^{-1/2}, \\ & \vdots \\ & a_n \cdot \left( \sum_{i=3}^{n} a_i^2 + (1+a_1)^2 + a_1^2 \right)^{-1/2} - a_n \cdot \left( \sum_{i=3}^{n} a_i^2 + 2 \cdot a_1^2 \right)^{-1/2} \Bigg). \end{aligned}$$

Damit der Gradient verschwindet, muss entweder

$$a_3 = 0 \quad \lightning \quad \text{da } 0 < a_1 \leq a_3$$

oder

$$\begin{aligned} \sum_{i=3}^{n} a_i^2 + (1+a_1)^2 + a_1^2 &= \sum_{i=3}^{n} a_i^2 + 2 \cdot a_1^2 \\ \Leftrightarrow \quad (1+a_1)^2 &= a_1^2 \quad \lightning \end{aligned}$$

sein. Also kann der Gradient nicht Null werden und wir müssen wieder (vgl. oben) den Rand dieses Gebietes weiter betrachten um ein Extremum zu finden.

**Fall 2.2:** $a_2 = 0.5$.
Hier wird das Problem zu

$$\begin{aligned} \min \quad & \sqrt{\sum_{i=3}^{n} a_i^2 + (1+a_1)^2 + 0.5^2} - \sqrt{\sum_{i=3}^{n} a_i^2 + a_1^2 + 0.5^2} \\ s.d. \quad & a_1 \leq a_j \leq 0.5 \quad \forall j \in \{3, \ldots, n\} \\ & 0 < a_1 < 0.5 \end{aligned}$$

und der Gradient zu

$$
\begin{aligned}
grad(f) \;=\; & \left( (1+a_1)\cdot\left(\sum_{i=3}^{n} a_i^2 + (1+a_1)^2 + 0.25\right)^{-1/2} - a_1\cdot\left(\sum_{i=3}^{n} a_i^2 + a_1^2 + 0.25\right)^{-1/2}, \right. \\
& a_3\cdot\left(\sum_{i=3}^{n} a_i^2 + (1+a_1)^2 + 0.25\right)^{-1/2} - a_3\cdot\left(\sum_{i=3}^{n} a_i^2 + a_1^2 + 0.25\right)^{-1/2}, \\
& \vdots \\
& \left. a_n\cdot\left(\sum_{i=3}^{n} a_i^2 + (1+a_1)^2 + 0.25\right)^{-1/2} - a_n\cdot\left(\sum_{i=3}^{n} a_i^2 + a_1^2 + 0.25\right)^{-1/2} \right).
\end{aligned}
$$

Damit der Gradient verschwindet, muss wieder entweder

$$a_3 = 0 \quad \lightning \;\; \text{da } 0 < a_1 \le a_3$$

oder

$$\sum_{i=3}^{n} a_i^2 + (1+a_1)^2 + 0.25 = \sum_{i=3}^{n} a_i^2 + a_1^2 + 0.25 \quad \lightning$$

sein. Also kann auch hier der Gradient nicht 0 werden und wir müssen den Rand dieses Gebietes weiter betrachten, um ein Extremum zu finden.

Wir müssen somit in beiden Fällen (2.1 und 2.2) noch ein weiteres $a_i$ ($i \in \{3,\dots,n\}$) festsetzen (o.E: $i = 3$). Im Allgemeinen seien für ein $k$ mit $3 \le k < n$ ohne Einschränkung $a_2 \in \{a_1, 0.5\}, \dots, a_k \in \{a_1, 0.5\}$ festgesetzt.
Sei dann $l_1 = \#\{2 \le i \le k : \;\; a_i = a_1\}$ und $l_2 = \#\{2 \le i \le k : \;\; a_i = 0.5\}$. Dann ist $l_1 + l_2 = k - 1$ und das Optimierungsproblem wird zu

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sqrt{\sum_{i=k+1}^{n} a_i^2 + (1+a_1)^2 + l_1\cdot a_1^2 + l_2\cdot 0.5^2} - \sqrt{\sum_{i=k+1}^{n} a_i^2 + (l_1+1)\cdot a_1^2 + l_2\cdot 0.5^2} \\
s.d. \quad & a_1 \le a_j \le 0.5 \quad \forall j \in \{k+1,\dots,n\} \\
& 0 < a_1 < 0.5
\end{aligned}
$$

und der Gradient zu

$$
\begin{aligned}
grad(f) \quad = \quad & \Bigg( (1+(1+l_1)\cdot a_1)\cdot \left(\sum_{i=k+1}^{n} a_i^2 + (1+a_1)^2 + l_1\cdot a_1^2 + 0.25\cdot l_2\right)^{-1/2} \\
& -(l_1+1)\cdot a_1 \cdot \left(\sum_{i=k+1}^{n} a_i^2 + (l_1+1)\cdot a_1^2 + 0.25\cdot l_2\right)^{-1/2}, \\
& a_{k+1}\cdot \left(\sum_{i=k+1}^{n} a_i^2 + (1+a_1)^2 + l_1\cdot a_1^2 + 0.25\cdot l_2\right)^{-1/2} \\
& -a_{k+1}\cdot \left(\sum_{i=k+1}^{n} a_i^2 + (l_1+1)\cdot a_1^2 + 0.25\cdot l_2\right)^{-1/2}, \\
& \vdots \\
& a_n\cdot \left(\sum_{i=k+1}^{n} a_i^2 + (1+a_1)^2 + l_1\cdot a_1^2 + 0.25\cdot l_2\right)^{-1/2} \\
& -a_n\cdot \left(\sum_{i=k+1}^{n} a_i^2 + (l_1+1)\cdot a_1^2 + 0.25\cdot l_2\right)^{-1/2} \Bigg).
\end{aligned}
$$

Damit der Gradient verschwindet, muss entweder

$$a_{k+1} = 0 \quad ⚡ \quad \text{da } 0 < a_1 \leq a_{k+1}$$

oder

$$\sum_{i=k+1}^{n} a_i^2 + (1+a_1)^2 + l_1\cdot a_1^2 + 0.25\cdot l_2 = \sum_{i=k+1}^{n} a_i^2 + (l_1+1)\cdot a_1^2 + 0.25\cdot l_2 \quad ⚡$$

sein. Das heißt auch hier verschwindet der Gradient nicht.

Als letztes bleibt nur noch $k = n$ und das Optimierungsproblem

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sqrt{(1+a_1)^2 + l_1\cdot a_1^2 + 0.25\cdot l_2} - \sqrt{(l_1+1)\cdot a_1^2 + 0.25\cdot l_2} \\
s.d. \quad & 0 < a_1 < 0.5,
\end{aligned}
$$

wobei $l_1 + l_2 = n - 1$ ist. Damit kann man das Problem auch umschreiben als

$$
\begin{aligned}
\min \quad & \sqrt{(1+a_1)^2 + l_1\cdot a_1^2 + 0.25\cdot (n-1-l_1)} - \sqrt{(l_1+1)\cdot a_1^2 + 0.25\cdot (n-1-l_1)} \\
s.d. \quad & 0 < a_1 < 0.5
\end{aligned}
$$

mit $l_1 \in \mathbb{N}$ und $0 \le l_1 \le n-1$.
Das entspricht für jedes feste $a_1$ dem Problem

$$\begin{array}{ll} \min & \sqrt{c_1 + l_1 \cdot c_2 + 0.25 \cdot (n-1-l_1)} - \sqrt{l_1 \cdot c_1 + c_1' + 0.25 \cdot (n-1-l_1)} \\ s.d. & 0 \le l_1 \le n-1 \\ & l_1 \in \mathbb{N} \end{array}$$

mit $c_1 = (1+a_1)^2 > c_1' = a_1^2$. Damit ist die Ableitung der Zielfunktion

$$\frac{c_2 - 0.25}{2\sqrt{c_1 + l_1 \cdot c_2 + 0.25 \cdot (n-1-l_1)}} - \frac{c_2 - 0.25}{2\sqrt{c_1' + l_1 \cdot c_2 + 0.25 \cdot (n-1-l_1)}}$$

stets negativ und die Zielfunktion monoton fallend. Also wird für jedes $a_1$ das Minimum angenommen, wenn $l_1$ möglichst groß ist, das heißt für $l_1 = n-1$.

Somit wird das Problem zu

$$\begin{array}{ll} \min & \sqrt{(1+a_1)^2 + (n-1) \cdot a_1^2 + 0.25 \cdot (n-1-(n-1)))} \\ & -\sqrt{(n-1+1) \cdot a_1^2 + 0.25 \cdot (n-1-(n-1))} \\ s.d. & 0 < a_1 < 0.5, \end{array}$$

beziehungsweise zu

$$\begin{array}{ll} \min & \sqrt{1 + 2a_1 + na_1^2} - \sqrt{n} \cdot a_1 \\ s.d. & 0 < a_1 < 0.5. \end{array}$$

Die Zielfunktion ist differenzierbar auf $(0, 0.5)$ und die Ableitung nach $a_1$ ist

$$\frac{1 + na_1}{\sqrt{1 + 2a_1 + na_1^2}} - \sqrt{n}.$$

Da $n > 1$ ist, ist $1 + 2na_1 + n^2a_1^2 < n + 2na_1 + n^2a_1^2$ und damit auch

$$\frac{1 + 2na_1 + n^2a_1^2}{1 + 2a_1 + na_1^2} < n,$$

beziehungsweise

$$\frac{1 + na_1}{\sqrt{1 + 2a_1 + na_1^2}} < \sqrt{n}.$$

Also ist die Ableitung stets negativ. Das heißt, dass ein Minimum der Zielfunktion auf dem Rand angenommen wird.

**Fall 3:** $a_1 = 0$
Damit wird das Optimierungsproblem zu

$$\begin{aligned} \min \quad & \sqrt{\sum_{i=2}^{n} a_i^2 + 1} - \sqrt{\sum_{i=2}^{n} a_i^2} \\ \text{s.d.} \quad & 0 \leq a_i \leq 0.5 \quad \forall i \in \{2, \ldots, n\} \end{aligned}$$

und die notwendige Bedingung für ein Extremum in $(0, 0.5)^{n-1}$ zu:

$$\begin{aligned} & \left( \frac{1}{2} \left( \sum_{i=2}^{n} a_i^2 + 1 \right)^{-1/2} \cdot 2 \cdot a_2 - \frac{1}{2} \left( \sum_{i=2}^{n} a_i^2 \right)^{-1/2} \cdot 2 \cdot a_2, \right. \\ & \left. \ldots, \frac{1}{2} \left( \sum_{i=2}^{n} a_i^2 + 1 \right)^{-1/2} \cdot 2 \cdot a_n - \frac{1}{2} \left( \sum_{i=2}^{n} a_i^2 \right)^{-1/2} \cdot 2 \cdot a_n \right) \\ = \; & (0, \ldots, 0). \end{aligned}$$

Das bedeutet für $i = 2$: $a_2 = 0$ oder

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=2}^{n} a_i^2 + 1}} &= \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=2}^{n} a_i^2}} \\ \Leftrightarrow \quad \sum_{i=2}^{n} a_i^2 &= \sum_{i=2}^{n} a_i^2 + 1 \quad ↯ \end{aligned}$$

Somit muss wieder $a_2 = 0$ sein.
Damit folgt für $i = 3$: $a_3 = 0$, oder

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=3}^{n} a_i^2 + 1}} &= \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=3}^{n} a_i^2}} \\ \Leftrightarrow \quad \sum_{i=3}^{n} a_i^2 &= \sum_{i=3}^{n} a_i^2 + 1 \quad ↯ \end{aligned}$$

Daher muss auch $a_3 = 0$ sein.

So geht es weiter bis $i = n$:

$$\begin{aligned}
& \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2+1}} &= \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2}} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2+1}} &= \frac{a_n}{a_n^2} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2+1}} &= 1 \\
\Leftrightarrow\ & a_n = a_n + 1 \quad \lightning
\end{aligned}$$

Das heißt, es gibt wieder kein Extremum im Inneren.

Damit untersucht man jetzt den Fall, dass $a_1 = 0$ und $a_2$ festgewählt ist (entweder $a_2 = 0$ oder $a_2 = 0.5$).
Damit wird das Optimierungsproblem zu

$$\begin{aligned}
\min \quad & \sqrt{\sum_{i=3}^{n} a_i^2 + 1 + a_2^2} - \sqrt{\sum_{i=3}^{n} a_i^2 + a_2^2} \\
\text{s.d.} \quad & 0 \leq a_i \leq 0.5 \quad \forall i \in \{3, \ldots, n\}
\end{aligned}$$

und die Bedingung für ein Extremum in $(0, 0.5)^{n-2}$ zu:

$$\begin{aligned}
&\left( \frac{1}{2} \left( \sum_{i=3}^{n} a_i^2 + 1 + a_2^2 \right)^{-1/2} \cdot (2 \cdot a_3) - \frac{1}{2} \left( \sum_{i=3}^{n} a_i^2 + a_2^2 \right)^{-1/2} \cdot (2 \cdot a_3), \right. \\
&\frac{1}{2} \left( \sum_{i=3}^{n} a_i^2 + 1 + a_2^2 \right)^{-1/2} \cdot (2 \cdot a_4) - \frac{1}{2} \left( \sum_{i=3}^{n} a_i^2 + a_2^2 \right)^{-1/2} \cdot (2 \cdot a_4), \ldots, \\
&\left. \frac{1}{2} \left( \sum_{i=3}^{n} a_i^2 + 1 + a_2^2 \right)^{-1/2} \cdot (2 \cdot a_n) - \frac{1}{2} \left( \sum_{i=3}^{n} a_i^2 + a_2^2 \right)^{-1/2} \cdot (2 \cdot a_n) \right) \\
&= (0, \ldots, 0).
\end{aligned}$$

Wieder können diese $(n-2)$ Gleichungen nur erfüllt sein, wenn $a_3 = \ldots = a_{n-1} = 0$

sind. Dann muss aber für $i = n$ gelten:

$$\begin{aligned}
& \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2+1}} = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2}} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2+1}} = \frac{a_n}{a_n^2} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2+1}} = 1 \\
\Leftrightarrow\ & a_n = a_n + 1 \quad \lightning .
\end{aligned}$$

Das heißt, es gibt wieder kein Extremum im Inneren.

Als nächstes wählt man auch $a_3$ fest ($a_3 = 0$ oder $a_3 = 0.5$) und verfährt induktiv so weiter, bis man überprüfen möchte, ob

$$\sqrt{a_n^2 + 1 + c} - \sqrt{a_n^2 + c}$$

ein Extremum auf $(0, 0.5)$ hat (mit $c = \sum_{i=2}^{n-1} a_i^2$ eine Konstante).
Dazu betrachtet man wieder die Ableitung:

$$\frac{1}{2}(a_n^2 + 1 + c)^{-1/2} \cdot 2 \cdot a_n - \frac{1}{2}(a_n^2 + c)^{-1/2} \cdot 2 \cdot a_n \stackrel{!}{=} 0$$

Ist $a_n \neq 0$, dann muss gelten:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\ & \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2+1+c}} = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2+c}} \\
\Rightarrow\ & a_n^2 \cdot (a_n^2 + c) = a_n^2 \cdot (a_n^2 + 1 + c)
\end{aligned}$$

Dies ist, wenn überhaupt (wenn $c \neq 0$), nur möglich, wenn $a_n = 0$, und somit gibt es auch hier kein Extremum im Inneren.

Daher müssen nur noch die Extrempunkte $(a_1, \ldots, a_n) \in \{0, 0.5\}^n$ untersucht werden:
1. $a_i = 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$: Dann ist $x \in \mathbb{Z}^n$ und damit $\alpha = 1$.
2. $a_{j_1} = a_{j_2} = \ldots = a_{j_k} = 0.5$ für $k$ Indizes $j_1, \ldots, j_k \in \{1, \ldots, n\}$ und $a_i = 0$ für $i \in \{1, \ldots, n\} \backslash \{j_1, \ldots, j_k\}$ für $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
\alpha &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 1 + 2 \min_j a_j} - \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \\
&= \sqrt{k \cdot 0.25 + 1} - \sqrt{k \cdot 0.25} \\
&= \frac{1}{2}\left(\sqrt{k+4} - \sqrt{k}\right).
\end{aligned}$$

Dabei ist $\sqrt{k+4}-\sqrt{k}$ monoton fallend und deshalb wird das Minimum für $k=n-1$ angenommen. Für dieses $k=n-1$ ist $\alpha=\frac{1}{2}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-1}\right)$.
3. $a_i=0.5$ für alle $i\in\{1,\dots,n\}$. Dann ist $\alpha=\frac{1}{2}(\sqrt{n+8}-\sqrt{n})$. (vgl. Fall 1)

Allerdings gilt: $\sqrt{n+3}-\sqrt{n-1}<\sqrt{n+8}-\sqrt{n}$

*Beweis.*

$$
\begin{aligned}
& 1 \;<\; n \\
\Rightarrow\;& -4\cdot n \;<\; -4 \\
\Rightarrow\;& n^2-2n+1 \;<\; n^2+2n-3 \\
\Rightarrow\;& n-1 \;<\; \sqrt{(n+3)\cdot(n-1)} \\
\Rightarrow\;& 8\cdot n \;<\; 6+2\cdot n+6\cdot\sqrt{(n+3)\cdot(n-1)} \\
\Rightarrow\;& n^2+8\cdot n \;<\; 9+n^2+3\cdot n-n-3+6\cdot\sqrt{(n+3)\cdot(n-1)} \\
\Rightarrow\;& n^2+8\cdot n \;<\; 9+6\cdot\sqrt{(n+3)\cdot(n-1)}+(n+3)\cdot(n-1) \\
\Rightarrow\;& \sqrt{(n+8)\cdot n} \;<\; 3+\sqrt{(n+3)\cdot(n-1)} \\
\Rightarrow\;& 2-2\cdot\sqrt{(n+3)\cdot(n-1)} \;<\; 8-2\cdot\sqrt{(n+8)\cdot n} \\
\Rightarrow\;& n+3-2\cdot\sqrt{(n+3)\cdot(n-1)}+n-1 \;<\; n+8-2\cdot\sqrt{(n+8)\cdot n}+n \\
\Rightarrow\;& \sqrt{n+3}-\sqrt{n-1} \;<\; \sqrt{n+8}-\sqrt{n}
\end{aligned}
$$

q.e.d.

Also ist $\alpha$ minimal, wenn ein $a_i=0$ und alle anderen $a_j=0.5$ für $j\in\{1,\dots,n\}\backslash\{i\}$.

**Teil 6: Bestimmung eines $x\in\mathbb{R}^n$, für den das optimale $\alpha$ angenommen wird**
Folglich ist $\alpha=\frac{1}{2}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-1})$ eine Optimallösung von $(P_\alpha)$ und damit

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n}\{d(x,\mathbb{Z}^n\backslash\operatorname{Round}(x))-d(x,\mathbb{Z}^n)\} \;=\; \frac{1}{2}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-1}).$$

**Veranschaulichung für $n=2$:**
Wie aus der Herleitung bereits ersichtlich wird dieser Wert zum Beispiel für $x=(1.5,2)$ angenommen:
$\operatorname{Round}(x)=\{(1,2),(2,2)\}$,
$d(x,\mathbb{Z}^2\backslash\operatorname{Round}(x))=\sqrt{1+0.5^2}=\frac{1}{2}\sqrt{5}$ und $d(x,\mathbb{Z}^2) \;=\; 0.5$ (Vgl. Abbildung 4.7)

**Verallgemeinerung auf $n$ Dimensionen:**
Allgemein wird das optimale $\alpha$ immer dann angenommen, wenn ein

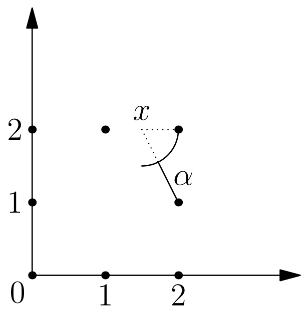


Abbildung 4.7: Mögliche Situation für das minimale $\alpha$

$a_i = \min\{x_i - \lfloor x_i \rfloor, \lceil x_i \rceil - x_i\} = 0$, also wenn $x_i \in \mathbb{Z}$ für ein $i \in \{1, \dots, n\}$ und $a_j = \min\{x_j - \lfloor x_j \rfloor, \lceil x_j \rceil - x_j\} = 0.5$, das heißt $x_j - \lfloor x_j \rfloor = \lceil x_j \rceil - x_j$ für alle $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i\}$.
Das ist der Fall, wenn $x_j = \lfloor x_j \rfloor + 0.5$ (beziehungsweise $x_j = \lceil x_j \rceil - 0.5$). □

*Bemerkung* 4.9. Der Vergleich mit der in 4.6 gefundenen Schranke ergibt für $n = 2$:
Schranke: $1 - \frac{1}{2}\sqrt{2} \approx 0.2929$
Exakter Wert: $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) \approx 0.618$
Wie in 4.6 bewiesen, gilt $1 - \frac{1}{2}\sqrt{2} < \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$ und man sieht, dass man durch diese Schranke, die, wie bereits erwähnt, sowieso nur für kleine $n$ sinnvoll ist, schon für $n = 2$ einiges verschenkt.

In Abbildung 4.8 sind für $n \in [2, 30]$ die Werte von $\frac{1}{2}(\sqrt{n+3} - \sqrt{n-1})$ aufgetragen. Zum Vergleich ist dazu auch die Kurve von $1 - \frac{1}{2}\sqrt{n}$ für $n \in [2, 4]$ eingezeichnet.

Einen Eindruck der Größe von $\alpha = \frac{1}{2}(\sqrt{n+3} - \sqrt{n-1})$ soll auch die folgende (gerundete) Wertetabelle liefern. (Wieder wurde zum Vergleich für $n \in \{2, 3, 4\}$ auch der Wert der Schranke eingetragen.)

| $n$ | 2 | 3 | 4 | 5 | 10 | 20 | 30 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $1 - \frac{1}{2}\sqrt{n}$ | 0.2929 | 0.1340 | 0 | | | | |
| $\alpha$ | 0.6180 | 0. 5176 | 0.4569 | 0.4142 | 0.3028 | 0.2185 | 0.1797 |

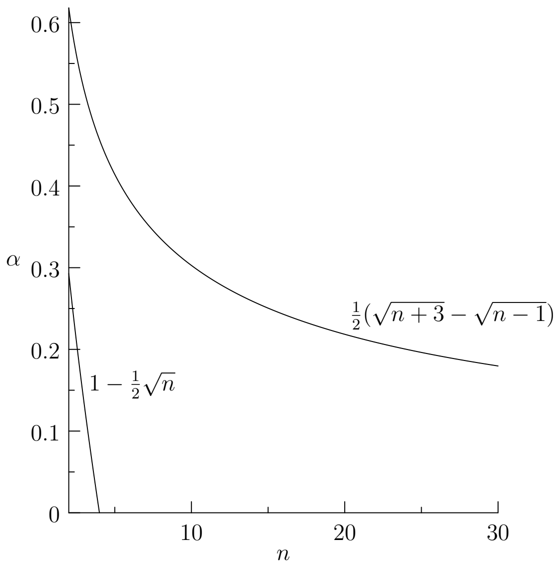


Abbildung 4.8: Verlauf der unteren Schranke und des exakten Wertes von $\alpha$ für wachsende $n$.

## 4.4 Verallgemeinerung auf beliebige p-Normen

Wie in 3.3 dargestellt, lassen sich Kreise beziehungsweise Bälle auf $p$-Bälle verallgemeinern. Das legt die Idee nahe auch das Konzept der Quasikreisförmigkeit auf beliebige $p$-Normen zu übertragen.

**Definition 4.10.** Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt $(\alpha, p)$-quasikreisförmig mit Mittelpunkt $x$, wenn es $r \in \mathbb{R}_0^+$ und $R \in \mathbb{R}^+$ gibt, so dass $K_p(x, r) \subseteq M$ und $M \subseteq K_p(x, R)$, wobei $R - r \leq \alpha$ für ein $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

*Beispiel.* Die Bilder in Abbildung 4.9 zeigen Beispiele für $(\alpha, p)$-quasikreisförmige Mengen $M$ mit Mittelpunkt $x$.
Dabei ist $M_1$ $(0.584, \infty)$-quasikreisförmig und $M_2$ ist $(0.5, 3)$-quasikreisförmig.

Analog zu Satz 4.3 benötigen wir auch hier den Abstand eines Punktes von einer Menge.

**Definition 4.11.** Mit $d_p(x, M)$ sei der $p$-Abstand des Punktes $x \in \mathbb{R}^n$ von der Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ bezeichnet.

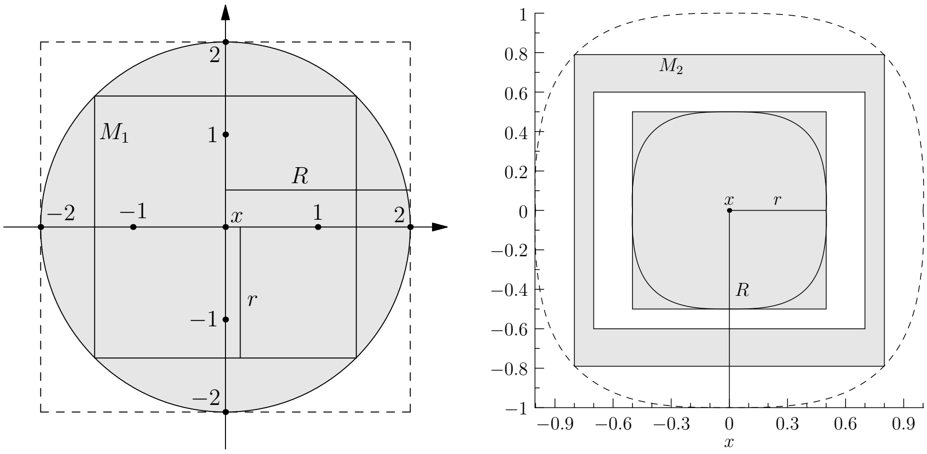


Abbildung 4.9: $M_1$ ist $(0.584, \infty)$-quasikreisförmig und $M_2$ ist $(0.5, 3)$-quasikreisförmig

Also:

$$d_p(x, M) = \min_{y \in M} ||x - y||_p \,.$$

Dann gilt für die Verallgemeinerung auf $(\alpha, p)$-quasikreisförmige Niveaumengen der folgende Satz:

**Satz 4.12.** *Sei $x^*$ eine endliche Optimallösung von*

$$\begin{array}{lll} (RP) & \min & f(x) \\ & s.d & x \in \mathbb{R}^n, \end{array}$$

*so dass die Niveaumengen $N_{\leq}(z)$ der Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ für alle*

$$f(x^*) \leq z \leq \widetilde{z} = \min\{f(x) : \ x \in \mathrm{Round}(x^*)\}$$

*$(\alpha, p)$-quasikreisförmig sind mit Mittelpunkt $x^*$ und*

$$\alpha = \min_{x^* \in \mathbb{R}^n} \{d_p(x^*, \mathbb{Z}^n \setminus \mathrm{Round}(x^*)) - d_p(x^*, \mathbb{Z}^n)\}$$

*so liegt eine optimale Lösung von*

$$\begin{array}{lll} (IP) & \min & f(x) \\ & s.d. & x \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

*in* Round($x^*$).

*Beweis.* (Dieser Beweis bezieht sich auf den Beweis von Satz 4.3).

**1.** Auch hier gilt:

$$d_p(x, \mathbb{Z}^n \setminus \operatorname{Round}(x^*)) \geq d_p(x, \mathbb{Z}^n) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Das heißt $\alpha \geq 0$.
Außerdem gilt $\hat{x} = \operatorname{argmin}_{y \in \mathbb{Z}^n} ||x^* - y||_p \in \operatorname{Round}(x^*)$, nach Korollar 3.9.
Und somit ist $\alpha > 0$.

**2.** Nun folgt der eigentliche Beweis. Sei $x \in \mathbb{Z}^n$ ein beliebiger Punkt mit Zielfunktionswert $z = f(x)$ und $\widetilde{x} = \operatorname{argmin}_{x \in \operatorname{Round}(x^*)}\{f(x)\}$.
Dann gilt entweder:
1. Fall: $\widetilde{z} \leq z \Rightarrow \; f(\widetilde{x}) \leq f(x)$, oder:
2. Fall: $\widetilde{z} > z$:
Dann

(1) ist $x \notin \operatorname{Round}(x^*)$ und
(2) es gibt $r \in \mathbb{R}_0^+,\; R \in \mathbb{R}^+$ mit $K_p(x^*, r) \subseteq N_{\leq}(z) \subseteq K_p(x^*, R) \quad$ und $R - r \leq \alpha$.

Nach Definition von $\alpha$ gilt:

$$\alpha \leq d_p(x^*, \mathbb{Z}^n \setminus \operatorname{Round}(x^*)) - d_p(x^*, \mathbb{Z}^n).$$

Mit der Definition von $\hat{x}$ aus **1.** gilt:

$$\alpha \leq d_p(x^*, \mathbb{Z}^n \setminus \operatorname{Round}(x^*)) - ||x^* - \hat{x}||_p\,.$$

Dann ist

$$\begin{array}{rcll} ||x^* - \hat{x}||_p & \leq & d_p(x^*, \mathbb{Z}^n \setminus \operatorname{Round}(x^*)) - \alpha & \\ & \leq & ||x^* - x||_p - \alpha & \text{da } x \in \mathbb{Z}^n \setminus \operatorname{Round}(x^*) \\ & \leq & R - \alpha & \text{da } x \in N_{\leq}(z) \subseteq K_p(x^*, R) \\ & \leq & r & \text{da } R - r \leq \alpha. \end{array}$$

Somit ist $\hat{x} \in K_p(x^*, r) \subseteq N_{\leq}(z)$ und damit $f(\hat{x}) \leq z < \widetilde{z}$. Da aber $\hat{x} \in \operatorname{Round}(x^*)$, gilt auch $\widetilde{z} = f(\widetilde{x}) \leq f(\hat{x})$.
Zusammen gilt: $\widetilde{z} \leq f(\hat{x}) \leq z < \widetilde{z}$ ↯.
Deswegen muss $\widetilde{z} = f(\widetilde{x}) \leq f(x)$ für alle $x \in \mathbb{Z}^n$ sein und damit $x^*_{IP} = \widetilde{x}$. □

Um zu überprüfen, ob ein gegebenes (IP) den Voraussetzungen von Satz 4.12 genügt, benötigt man auch für allgemeine $p$-Normen eine Abschätzung für $\alpha$.

**Lemma 4.13.** *Für* $1 \leq p < \infty$ *gilt:*

$$\begin{aligned}\alpha &= \min_{x \in \mathbb{R}^n} \{d_p(x, \mathbb{Z}^n \setminus \operatorname{Round}(x)) - d_p(x, \mathbb{Z}^n)\} \\ &> 1 - \frac{1}{2}\sqrt[p]{n}.\end{aligned}$$

*Beweis.* Dieser Beweis läuft wie der Beweis von Lemma 4.6. □

*Bemerkung* 4.14. Da $\alpha$ nach Definition stets größer als 0 ist, kann man sich überlegen, für welche Tupel $(n, p)$ diese Schranke eine zusätzliche Information enthält:

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{1}{2} n^{1/p} > 0 \\ \Leftrightarrow\quad & 2 > n^{1/p} \\ \Leftrightarrow\quad & 2^p > n \end{aligned}$$

(Man sieht, dass sich für $p = 2$ wieder Bemerkung 4.7 ergibt.)

Für die $\infty$-Norm kann der exakte Wert von $\alpha$ recht schnell und offensichtlich aus der Berechnung der Schranke hergeleitet werden.

**Lemma 4.15.** *Für* $p = \infty$ *gilt:*

$$\begin{aligned}\alpha &= \min_{x \in \mathbb{R}^n} \{d_\infty(x, \mathbb{Z}^n \setminus \operatorname{Round}(x)) - d_\infty(x, \mathbb{Z}^n)\} \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

*Beweis.* **Teil 1:**
Es gilt:

$$\begin{aligned}\alpha &= \min_{x \in \mathbb{R}^n} \{d_\infty(x, \mathbb{Z}^n \setminus \operatorname{Round}(x)) - d_\infty(x, \mathbb{Z}^n)\} \\ &\geq \min_{x \in \mathbb{R}^n} \{ \min_{y \in \mathbb{Z}^n \setminus \operatorname{Round}(x)} ||y - x||_\infty \} - \max_{x \in \mathbb{R}^n} \{ \min_{y \in \mathbb{Z}^n} ||y - x||_\infty \}.\end{aligned}$$

Für $y \in \mathbb{Z}^n \setminus \operatorname{Round}(x)$ gilt: $1 \leq ||y - x||_\infty$. Dieser Wert wird angenommen, wenn $x \in \mathbb{Z}^n$ (also $\operatorname{Round}(x) = \{x\}$) und $y_i = x_i$ für alle $i = 1, \ldots, n$, $i \neq j$ für ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ und $|y_j - x_j| = 1$.
Ist $||x - y||_\infty = \max_{i \in \{1,\ldots,n\}} |x_i - y_i| < 1$ folgt, dass für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ gilt: $|x_i - y_i| < 1$. Dann ist $y$ aber in $\operatorname{Round}(x)$.
Deswegen ist $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \{\min_{y \in \mathbb{Z}^n \setminus \operatorname{Round}(x)} ||y - x||_\infty\} = 1$.

Bemerkung: $\min_{y\in\mathbb{Z}^n\setminus\,\mathrm{Round}(x)} ||y-x||_\infty = 1$ gilt für alle $x$ mit mindestens einer ganzzahligen Koordinate.

Außerdem gilt $\max_{x\in\mathbb{R}^n}\{\min_{y\in\mathbb{Z}^n} ||y-x||_\infty\} \leq 0.5$.

*Beweis.* Zu jedem $x \in \mathbb{R}^n$ gibt es $y \in \mathbb{Z}^n$ mit

$$y_i = \begin{cases} \lfloor x_i \rfloor & \text{wenn } x_i - \lfloor x_i \rfloor \leq \lceil x_i \rceil - x_i \\ \lceil x_i \rceil & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $|x_i - y_i| = \min\{x_i - \lfloor x_i \rfloor, \lceil x_i \rceil - x_i\} \leq 0.5$.

q.e.d.

Damit gilt

$$\begin{aligned} \alpha &= \min_{x\in\mathbb{R}^n}\{d_\infty(x,\mathbb{Z}^n\setminus\mathrm{Round}(x)) - d_\infty(x,\mathbb{Z}^n)\} \\ &\geq \min_{x\in\mathbb{R}^n}\{\min_{y\in\mathbb{Z}^n\setminus\mathrm{Round}(x)} ||y-x||_\infty\} - \max_{x\in\mathbb{R}^n}\{\min_{y\in\mathbb{Z}^n} ||y-x||_\infty\} \\ &= 1 - \max_{x\in\mathbb{R}^n}\{\min_{y\in\mathbb{Z}^n} ||y-x||_\infty\} \\ &\geq 1 - 0.5 \\ &= 0.5. \end{aligned}$$

**Teil 2:**
Andererseits gilt zum Beispiel für $x = (\frac{1}{2}, 1, \ldots, 1)$:

$$\begin{aligned} d_\infty(x,\mathbb{Z}^n\setminus\mathrm{Round}(x)) &= \min_{y\in\mathbb{Z}^n\setminus\mathrm{Round}(x)} ||y-x||_\infty \\ &= ||(1,0,1,\ldots,1) - x||_\infty \\ &= 1 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} d_\infty(x,\mathbb{Z}^n) &= \min_{y\in\mathbb{Z}^n} ||y-x||_\infty \\ &= ||(1,\ldots,1) - x||_\infty \\ &= 0.5. \end{aligned}$$

Also gilt für dieses $x$: $d_\infty(x,\mathbb{Z}^n\setminus\mathrm{Round}(x)) - d_\infty(x,\mathbb{Z}^n) = 1 - 0.5 = 0.5$ und so ist $\alpha \leq 0.5$.

Zusammen folgt: $\alpha = \min_{x\in\mathbb{R}^n}\{d_\infty(x,\mathbb{Z}^n\setminus\mathrm{Round}(x)) - d_\infty(x,\mathbb{Z}^n)\} = 0.5$. $\square$

Um auch für andere Werte von $p$ den exakten Wert für $\alpha$ zu bestimmen, muss man das Optimierungsproblem

$$\begin{array}{ll} \min & \left( \min\limits_{y \in \mathbb{Z}^n \setminus \operatorname{Round}(x)} \{||x-y||_p\} - \min\limits_{y \in \mathbb{Z}^n} \{||x-y||_p\} \right) \\ s.d. & x \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

lösen. Auch hier kann man dieses Problem wieder umschreiben als

$$\begin{array}{ll} (P_\alpha)_p & \min\ b(x) - a(x) \\ & \text{s.d. } x \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

mit

$$\begin{aligned} b(x) &= \min \sum_{i=1}^{n} ||x_i - y_i||_p \\ & \quad \text{s.d. } y \in \mathbb{Z}^n \setminus \operatorname{Round}(x) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} a(x) &= \min \sum_{i=1}^{n} ||x_i - y_i||_p \\ & \quad \text{s.d. } y \in \mathbb{Z}^n. \end{aligned}$$

Dann ist $\alpha_p$ der optimale Zielfunktionswert von $(P_\alpha)_p$.

Analog zu dem Beweis von Satz 4.8 kann man auch dieses Problem vereinfachen.

**Satz 4.16.** *Für $p = 1$ gilt:*

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \min_{x \in \mathbb{R}^n} \{d_1(x, \mathbb{Z}^n \setminus \operatorname{Round}(x)) - d_1(x, \mathbb{Z}^n)\} \\ &= 1 \end{aligned}$$

*für alle $x \in \mathbb{R}^n$.*

*Und für allgemeine $p \in \mathbb{N}$ mit $1 < p < \infty$ gilt: $\alpha_p = \min\{\alpha'_p, 1\}$ mit*

$$\begin{array}{rll} \alpha'_p = & \min & \left( \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p + (1+a_1)^p - a_1^p \right)^{1/p} - \left( \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^p \right)^{1/p} \\ & s.d. & a_1 \leq a_j \forall j \in \{2, \ldots, n\} \\ & & 0 \leq a_i \leq 0.5 \quad \forall i. \end{array}$$

*Beweis.* Dieser Beweis läuft im Wesentlichen wie der Beweis zu Satz 4.8.

**Teil 1: $x \in \mathbb{Z}^n$ ausschließen**
Ist $x \in \mathbb{Z}^n$, so ist

$$\begin{aligned}
\alpha_p(x) &= \min_{y \in \mathbb{Z}^n \setminus \{x\}} \{||x-y||_p\} - \min_{y \in \mathbb{Z}^n} \{||x-y||_p\} \\
&= \min_{y \in \mathbb{Z}^n \setminus \{x\}} \left( \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Sei also im Folgenden $x \notin \mathbb{Z}^n$.

**Teil 2: $a(x)$ umformulieren**
Nach Korollar 3.9 gilt $\hat{x} = \operatorname{argmin}_{y \in \mathbb{Z}^n} ||x-y||_p \in \operatorname{Round}(x)$ und deshalb schreiben wir $a(x)$ um als:

$$\begin{aligned}
a(x) &= \min \left( \sum_{i=1}^{n} a_i^p \right)^{1/p} \\
&\quad \text{s.d. } a_i = \min\{x_i - \lfloor x_i \rfloor, \lceil x_i \rceil - x_i\} \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}.
\end{aligned}$$

**Teil 3: Zulässigen Bereich von $b(x)$ einschränken**
Für $b(x)$ kommen wieder nur die Punkte in Betracht, die in nur einer Koordinate nicht mit $\lfloor x_i \rfloor$ oder $\lceil x_i \rceil$ übereinstimmen:

$$\begin{aligned}
B = \{y \in \mathbb{Z}^n : \; & y_j \in \{\lfloor x_j \rfloor - 1, \; \lceil x_j \rceil + 1\} \text{ für ein } j \in \{1, \ldots, n\} \text{ und} \\
& y_i \in \{\lfloor x_i \rfloor, \; \lceil x_i \rceil\} \; \forall i \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{j\}\}.
\end{aligned}$$

(Analog zum Hilfsbeweis im Beweis zu Satz 4.8).

**Teil 4: Beweis beenden für $p = 1$**
Für $p = 1$ ist

$$\begin{aligned}
b(x) &= \min \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \\
&\quad \text{s.d. } y_j \in \{\lfloor x_j \rfloor - 1, \lceil x_j \rceil + 1\} \;\; \text{für ein } j \in \{1, \ldots, n\} \\
&\qquad y_i \in \{\lfloor x_i \rfloor, \lceil x_i \rceil\} \; \forall i \neq j.
\end{aligned}$$

Das Minimum wird angenommen, wenn wir $j = \text{argmin}_i\{a_i\}$ wählen und für alle $i \neq j$ $y_i$ so festsetzen, dass $|x_i - y_i| = a_i$, da dann gilt:

$$\begin{aligned} & a_j \leq a_i \quad \forall i \neq j \\ \Leftrightarrow \quad & a_j + 1 \leq a_i + 1 \quad \forall i \neq j \\ \Leftrightarrow \quad & \min\{x_j - \lfloor x_j \rfloor + 1, \lceil x_j \rceil - x_j + 1\} \leq \min\{x_i - \lfloor x_i \rfloor + 1, \lceil x_i \rceil - x_i + 1\} \quad \forall i \neq j. \end{aligned}$$

Dann wird $b(x)$ zu:

$$\begin{aligned} b(x) &= \sum_{i \neq j} a_i + a_j + 1 \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_i + 1. \end{aligned}$$

Und damit ist

$$\begin{array}{ll} (P_\alpha)_p \qquad & \min\ b(x) - a(x) \\ & \text{s.d. } x \in \mathbb{R}^n \end{array}$$

äquivalent zu

$$\begin{array}{l} \min \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i + 1 - \sum_{i=1}^{n} a_i \\ \text{s.d. } a_i = \min\{x_i - \lfloor x_i \rfloor, \lceil x_i \rceil - x_i\} \quad \forall i \\ \quad x \in \mathbb{R}^n. \end{array}$$

Das heißt für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ ist $d_1(x, \mathbb{Z}^n \setminus \text{Round}(x)) - d_1(x, \mathbb{Z}^n) = 1$ und deshalb wird für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ der optimale Zielfunktionswert $\alpha = 1$ angenommen.

**Teil 5: Problem weiter vereinfachen für** $1 < p < \infty$
Aus Teil 3 wissen wir, dass wir den zulässigen Bereich von $b(x)$ auf $B$ einschränken können:

$$\begin{array}{rll} b(x) = & \min & ||x - y||_p \\ & \text{s.d} & y \in B. \end{array}$$

Analog zu dem Beweis von Satz 4.8 gibt es auch hier für $|x_i - y_i|$ nur die folgenden vier

Möglichkeiten:

$$|x_i - y_i| = \begin{cases} a_i + 1 \\ a_i \\ 1 - a_i \\ 2 - a_i. \end{cases}$$

(Wenn $a_i = 0$ gibt es wieder nur die Möglichkeiten $|x_i - y_i| = 1$ oder $|x_i - y_i| = 0$.) und es gilt $a_i \leq 1 - a_i \leq a_i + 1 \leq 2 - a_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$. Dabei ist $|x_i - y_i| = a_i$ oder $|x_i - y_i| = 1 - a_i$, wenn $y_i \in \{\lfloor x_i \rfloor, \lceil x_i \rceil\}$. Um $(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^p)^{1/p}$ zu minimieren, wählt man also $y \in B$ so, dass $|x_k - y_k| = 1 + a_k$ für ein $k \in \{1, \ldots, n\}$ und für alle anderen $i$ gilt: $|x_i - y_i| = a_i$.

Für $p \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned} & \min_k \left\{ \left( \left( \sum_{i \neq k} a_i^p \right) + (1 + a_k)^p \right)^{1/p} \right\} \\ = \; & \min_k \left\{ \left( \left( \sum_{i=1}^n a_i^p \right) + (1 + a_k)^p - a_k^p \right)^{1/p} \right\} \\ = \; & \left( \left( \sum_{i=1}^n a_i^p \right) + \min_k \left[ (1 + a_k)^p - a_k^p \right] \right)^{1/p} \\ = \; & \left( \left( \sum_{i=1}^n a_i^p \right) + (1 + \min_k a_k)^p - (\min_k a_k)^p \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Wobei die letzte Gleichheit gilt, weil für $p \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned} (1 + a_i)^p &= \sum_{l=0}^p \binom{p}{l} 1^{p-l} a_i^l \\ &= \sum_{l=0}^p \binom{p}{l} a_i^l. \end{aligned}$$

Also ist

$$(1 + a_i)^p - a_i^p = \sum_{l=0}^{p-1} \binom{p}{l} a_i^l.$$

Ist dann $a_i \leq a_j$ folgt $a_i^l \leq a_j^l$ für alle $l \in \{0, \ldots, p-1\}$ und damit auch

$$\sum_{l=0}^{p-1} \binom{p}{l} a_i^l \leq \sum_{l=0}^{p-1} \binom{p}{l} a_j^l.$$

$$\Leftrightarrow \ (1 + a_i)^p - a_i^p \leq (1 + a_j)^p - a_j^p$$

$(P_\alpha)_p$ hat damit den gleichen optimalen Zielfunktionswert wie das folgende Problem:

$$\begin{array}{ll} \min & \left( \sum_{i=1}^{n} a_i^p + (1 + \min_k a_k)^p - (\min_k a_k)^p \right)^{1/p} - \left( \sum_{i=1}^{n} a_i^p \right)^{1/p} \\ \text{s.d.} & a_i = \min\{x_i - \lfloor x_i \rfloor \, , \, \lceil x_i \rceil - x_i\} \quad \forall i \\ & x \in \mathbb{R}^n. \end{array}$$

Wieder kann man dieses Problem vereinfachen, indem man die Abhängigkeit von $x$ vorübergehend ignoriert und stattdessen das folgende Problem löst:

$$\begin{array}{ll} \min & \left( \sum_{i=1}^{n} a_i^p + (1 + \min_k a_k)^p - (\min_k a_k)^p \right)^{1/p} - \left( \sum_{i=1}^{n} a_i^p \right)^{1/p} \\ \text{s.d.} & 0 \leq a_i \leq 0.5 \quad \forall i. \end{array}$$

Außerdem nehmen wir wieder ohne Einschränkung an, dass $a_1 \leq a_j$ für alle $j = 2, \ldots, n$ ist. Dann muss das folgende Problem gelöst werden:

$$\begin{array}{ll} \min & \alpha_p' = \left( \sum_{i=1}^{n} a_i^p + (1 + a_1)^p - a_1^p \right)^{1/p} - \left( \sum_{i=1}^{n} a_i^p \right)^{1/p} \\ \text{s.d.} & a_1 \leq a_j \quad \forall j \in \{2, \ldots, n\} \\ & 0 \leq a_i \leq 0.5 \quad \forall i. \end{array}$$

Zusammen mit Teil 1 gilt dann: $\alpha_p = \min\{\alpha_p', 1\}$. $\square$

Diese Problem kann man jetzt für vorgegebene $n$ und $p$ explizit lösen: man sucht Punkte im Inneren, für die der Gradient der Zielfunktion verschwindet, und untersucht außerdem den Rand des zulässigen Bereichs (vgl. die explizite Lösung für $p = 2$).

## 4.5 Beispiele quasikreisförmiger Mengen

Um entscheiden zu können, ob ein gegebenes ganzzahliges Optimierungsproblem die Voraussetzungen von Satz 4.12 erfüllt, wollen wir in diesem Abschnitt verschiedene Mengen identifizieren, die quasikreisförmig sind, sowie Eigenschaften von Mengen finden, die äquivalent zur Quasikreisförmigkeit der Menge sind.

Ausgehend von dem Ziel, dass man für eine bestimmte Optimallösung $x^*$ von (RP) entscheiden möchte, ob die Niveaumengen bezüglich dieser Lösung quasikreisförmig (mit $\alpha$ wie in Satz 4.12) sind oder nicht, sollen im Folgenden $x^*$ und $\alpha$ als gegeben vorausgesetzt werden.

### 4.5.1 Im eindimensionalen Fall

Damit eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ quasikreisförmig heißt, muss gelten

$$K(x,r) \subseteq M \subseteq K(x,R)$$

mit

$$R - r \;\leq\; \alpha \;=\; \min_{x\in\mathbb{R}}\{d(x,\mathbb{Z}\backslash \operatorname{Round}(x)) - d(x,\mathbb{Z})\} \;=\; 1.$$

Also muss für $M \subseteq \mathbb{R}$ gelten:

$$[x-r, x+r] \subseteq M \subseteq [x-r-1, x+r+1],$$

damit $M$ quasikreisförmig ist.

*Bemerkung* 4.17. Im eindimensionalen Fall sind alle $p$-Normen gleich: $||x||_p = |x|$. Damit gelten die folgenden Aussagen für beliebiges $p$.

Da alle kreisförmigen Mengen auch für beliebige $\alpha$ quasikreisförmig sind, gilt:

**Lemma 4.18.** *Sei eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben, so dass gilt:*
*(Sei wieder $\widetilde{z} = \min\{f(x) : x \in \{\lfloor x^* \rfloor, \lceil x^* \rceil\}\}$.)*
*(i) $f$ hat ein globales Minimum bei $x^*$.*
*(ii) $f(x^* - r) = f(x^* + r)\ \forall\, r \leq \min\{x^* - \lfloor x^* \rfloor, \lceil x^* \rceil - x^*\}$.*
*(iii) $f(x^* + a) \leq f(x^* + b)\ \forall\, a, b$ mit $0 \leq a < b \leq \min\{x^* - \lfloor x^* \rfloor, \lceil x^* \rceil - x^*\}$.*
*(iv) $\exists\, \hat{R} \geq \min\{x^* - \lfloor x^* \rfloor, \lceil x^* \rceil - x^*\}$, so dass $f(x^* + R) > \widetilde{z}$ und $f(x^* - R) > \widetilde{z}$ für alle $R > \hat{R}$ und $f(x^* + r) = \widetilde{z}$ bzw. $f(x^* - r) = \widetilde{z}$ für alle $r$ mit $\min\{x^* - \lfloor x^* \rfloor, \lceil x^* \rceil - x^*\} \leq r \leq \hat{R}$.*

*(v) Für alle $z$ mit $f(x^*) \leq z < \widetilde{z}$ existiert ein $x \in \mathbb{R}$, so dass*
$|x - x^*| = \max_{y \in \mathbb{R}}\{|y - x^*| : \ f(y) \leq z\}$.

*Dann sind die Niveaumengen $N_{\leq}(z)$ für alle $f(x^*) \leq z \leq \widetilde{z}$ quasikreisförmig, das heißt es gilt: $[x^* - r, x^* + r] \subseteq N_{\leq}(z) \subseteq [x^* - r - 1, x^* + r + 1]$.*

*Beweis.* Nach Lemma 3.11 gilt für jede Funktion $f$, die diese Forderungen erfüllt, dass $N_{\leq}(z)$ für alle $f(x^*) \leq z \leq \widetilde{z}$ von der Form $[x^* - r, x^* + r]$ ist. □

Allerdings werden zwei wichtige Forderungen aufgehoben, wenn $N_{\leq}(z)$ nicht mehr kreisförmig, sondern nur noch quasikreisförmig sein soll:

1. Die Niveaumengen müssen nicht mehr zusammenhängend sein.

2. Die Niveaumengen müssen nicht mehr symmetrisch um $x^*$ sein.

In Abbildung 4.10 sind zwei Funktionen dargestellt, deren Niveaumengen bis $\widetilde{z}$ quasikreisförmig sind.

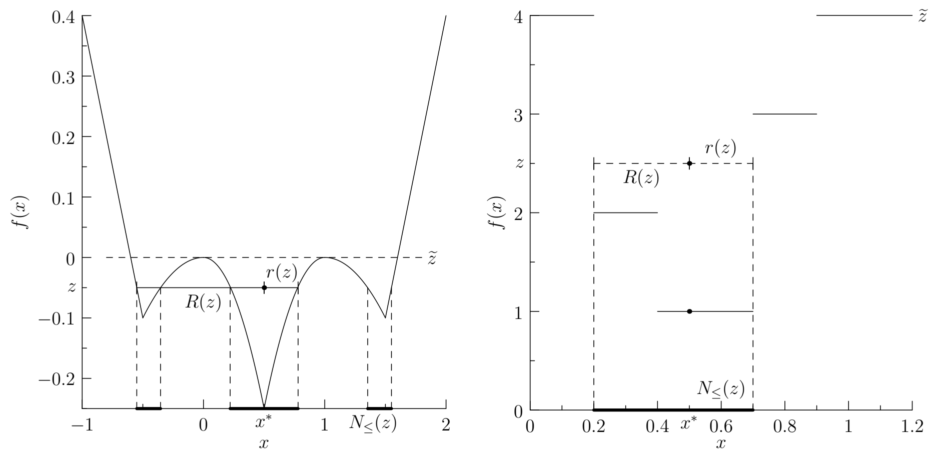


Abbildung 4.10: Beispiele für Funktionen, deren Niveaumengen bis $\widetilde{z}$ quasikreisförmig sind

Allgemein kann man folgende Aussage treffen, wann die Niveaumengen einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bis $\widetilde{z}$ quasikreisförmig sind.

**Lemma 4.19.** *Für eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*
*1. (a) Das kontinuierliche Optimierungsproblem*

$$\begin{array}{lll} (RP) & \min & f(x) \\ & s.d. & x \in \mathbb{R} \end{array}$$

*besitzt eine endliche Optimallösung $x^*$ und*
*(b) für alle $z$ mit $f(x^*) \leq z \leq \widetilde{z} = \min\{f(x) : x \in \{\lfloor x^* \rfloor, \lceil x^* \rceil\}\}$ existiert ein $r \in \mathbb{R}_0^+$, so dass gilt $[x^* - r, x^* + r] \subseteq N_{\leq}(z) \subseteq [x^* - r - 1, x^* + r + 1]$.*

*2. (i) $f$ hat ein globales Minimum bei $x^*$.*
*(ii) $\exists\ \hat{R}$ mit $f(x) > \widetilde{z}$ für alle $x$ mit $|x - x^*| > \hat{R} + 1$ und $f(x) \leq \widetilde{z}$ für alle $x$ mit $|x - x^*| \leq \hat{R}$.*
*(iii) Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) \leq \widetilde{z}$ gilt: $f(y) \leq f(x)$ für alle $y$, für die gilt*

$$|y - x^*| \leq \max\{|x - x^*| - 1, 0\}.$$

*Beweis.* Offensichtlich ist (a) äquivalent zu (i).

„$\Rightarrow$“:
(ii) $\widetilde{z} \leq \widetilde{z}$, damit existiert ein $r \in \mathbb{R}_0^+$ mit $[x^* - r, x^* + r] \subseteq N_{\leq}(\widetilde{z})$, das heißt $f(x) \leq \widetilde{z}$ für alle $x$ mit $|x - x^*| \leq r$ und $N_{\leq}(\widetilde{z}) \subseteq [x^* - r - 1, x^* + r + 1]$. Damit ist $x \notin N_{\leq}(\widetilde{z})$ für alle $x$, so dass $|x - x^*| > r + 1$ und das bedeutet $f(x) > \widetilde{z}$ für diese $x$.
Man definiert also $\hat{R} = r$.

(iii) Sei $x \in \mathbb{R}$, so dass $f(x) \leq \widetilde{z}$. Dann existiert ein $r \in \mathbb{R}_0^+$, so dass

$$[x^* - r, x^* + r] \subseteq N_{\leq}(f(x)) \subseteq [x^* - r - 1, x^* + r + 1].$$

Da $x \in N_{\leq}(f(x))$ gilt $|x - x^*| \leq r + 1$ und damit $|x - x^*| - 1 \leq r$.
Somit ist $y \in N_{\leq}(f(x))$ für alle $y$ mit $|y - x^*| \leq |x - x^*| - 1 \leq r$, falls $|x - x^*| - 1 > 0$.
Ist $|x - x^*| - 1 \leq 0$, erfüllt nur $y = x^*$ die Forderung $|x^* - y| \leq 0$. Für $x^*$ gilt aber: $f(x^*) \leq f(x)$, da $x^*$ eine endliche Optimallösung von (RP) ist.

„$\Leftarrow$“:
(b) Sei $z = \widetilde{z}$, dann ist nach Definition von $\hat{R}$:

$$[x^* - \hat{R}, x^* + \hat{R}] \subseteq N_{\leq}(\widetilde{z}) \subseteq [x^* - \hat{R} - 1, x^* + \hat{R} + 1].$$

Sei $z$, so dass $f(x^*) \leq z < \widetilde{z}$, dann gibt es mindestens ein $x$ mit $f(x) \leq z$.
Bestimme $\hat{x} = \operatorname{argmax}_{x:\, f(x) \leq z} |x - x^*|$ und definiere $r = \max\{|\hat{x} - x^*| - 1, 0\}$.
Für dieses $r$ gilt nach Definition: $N_{\leq}(z) \subseteq [x^* - r - 1, x^* + r + 1]$.
Außerdem ist $f(\hat{x}) \leq z < \widetilde{z}$ und deshalb gilt: $f(y) \leq f(\hat{x}) \leq z$ für alle $y$ mit $|y - x^*| \leq \max\{|x^* - \hat{x}| - 1, 0\} = r$ (nach (iii)).
Damit ist $[x^* - r, x^* + r] \subseteq N_{\leq}(z)$. □

### 4.5.2 Für allgemeine Dimensionen

Im Folgenden sollen Aussagen darüber getroffen werden ob Mengen $(\alpha, 2)$-quasikreisförmig sind oder nicht. Das heißt ab jetzt ist wieder $p = 2$. Zuerst sollen zwei einfache Fälle behandelt werden:

**Lemma 4.20.** *Sphären sind immer $\alpha$-quasikreisförmig bezüglich ihres Mittelpunkts zu jedem $\alpha \in \mathbb{R}^+$.*

*Beweis.* Trivial. □

Allerdings lässt sich dieses Lemma noch etwas verallgemeinern: Auch offene Kugeln, das heißt Mengen der Form $K_o(x_0, R) = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x - x_0||_2 < R\}$ sind $\alpha$-quasikreisförmig bezüglich ihres Mittelpunkts $x_0$ zu jedem $\alpha \in \mathbb{R}^+$.

**Lemma 4.21.** *Gilt*

$$\max_{i \in \{1,\dots,n\}} \left( \max_{x \in M}\{x_i\} - \min_{x \in M}\{x_i\} \right) \leq \frac{2\alpha}{\sqrt{n}}$$

*dann ist $M$ $\alpha$-quasikreisförmig bezüglich $x^*$ mit*

$$x_i^* = \frac{1}{2} \left( \max_{x \in M}\{x_i\} + \min_{x \in M}\{x_i\} \right)$$

*wenn $x^* \in M$ liegt.*

*Beweis.* Da $x^* \in M$ liegt, gilt $K(x^*, 0) \subseteq M$.

Sei $y \in M$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
||x * -y||_2 &= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i^* - y_i)^2} \\
&\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\left(\max_{x\in M}\{x_i\} + \min_{x\in M}\{x_i\}\right) - \max_{x\in M}\{x_i\}\right)^2} \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\left(\min_{x\in M}\{x_i\} - \max_{x\in M}\{x_i\}\right)\right)^2} \\
&\leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\alpha}{\sqrt{n}}\right)^2} \\
&= \alpha.
\end{aligned}$$

Wählt man also $R = \alpha$, gilt $M \subseteq K(x^*, R)$ und da $R - r = \alpha - 0 \leq \alpha$ ist, ist $M$ $\alpha$-quasikreisförmig. □

### 4.5.3 Ausschlusskriterien

Hier sollen einige Kriterien untersucht werden, die zur Folge haben, dass eine Menge nicht quasikreisförmig ist. Dafür zeigt man, dass es kein $x^*$ gibt, so dass die Menge bezüglich $x^*$ quasikreisförmig ist. Sei dazu $M$ eine Teilmenge des $\mathbb{R}^n$.

*Bemerkung* 4.22. Ist $M = \mathbb{R}^n$, kann man kein $R \in \mathbb{R}^+$ finden, so dass $M \subseteq K(x^*, R)$ für irgendein $x^* \in \mathbb{R}^n$. Somit ist der gesamte $\mathbb{R}^n$ nicht $\alpha$-quasikreisförmig, egal zu welchem $\alpha$.

**Lemma 4.23.** *Gibt es zwei Indizes $i$ und $j$ in $\{1, \dots, n\}$, so dass*

$$\left|\left(\max_{x\in M}\{x_i\} - \min_{x\in M}\{x_i\}\right) - \left(\max_{x\in M}\{x_j\} - \min_{x\in M}\{x_j\}\right)\right| > 2 \cdot \alpha,$$

*dann kann $M$ nicht $\alpha$-quasikreisförmig sein.*

*Beispiel.* Im folgenden Beispiel sieht man eine Menge, die nicht quasikreisförmig sein kann (vorausgesetzt $\alpha$ ist nicht zu groß).

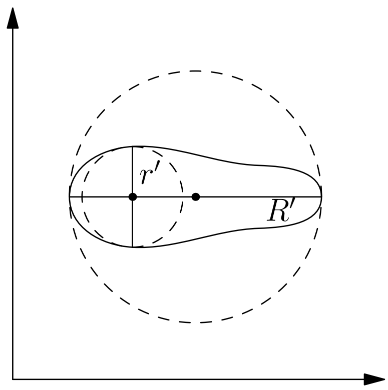


Abbildung 4.11: Beispiel für eine Menge, die nicht quasikreisförmig sein kann

*Beweis.* Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$\max_{x\in M}\{x_i\} - \min_{x\in M}\{x_i\} \;>\; \max_{x\in M}\{x_j\} - \min_{x\in M}\{x_j\}.$$

Sei $x^* \in M$ ein beliebiger Punkt, für den man untersuchen möchte, ob $M$ bezüglich seiner $\alpha$-quasikreisförmig ist.
Das heißt, man sucht $r \in \mathbb{R}_0^+$, so dass $K(x^*, r) \subseteq M$.
Also muss $r \le \frac{1}{2}(\max_{x\in M}\{x_j\} - \min_{x\in M}\{x_j\})$ sein.

*Beweis.* Annahme: Sei $r > \frac{1}{2}(\max_{x\in M}\{x_j\} - \min_{x\in M}\{x_j\})$.
1. Fall: $x_j^* \le \frac{1}{2}(\max_{x\in M}\{x_j\} + \min_{x\in M}\{x_j\})$.
Dann definiert man $(y_1)_k = \begin{cases} x_k^* & \text{falls } k \neq j \\ x_j^* - r & \text{falls } k = j. \end{cases}$
Damit ist $y_1 \in K(x^*, r)$, denn $||y_1 - x^*||_2 = \sqrt{(x_j^* - r - x_j^*)^2} = r$.
Da $K(x^*, r) \subseteq M$, ist $y_1$ auch in $M$.
Aber es gilt:

$$\begin{aligned} (y_1)_j &= x_j^* - r \\ &\le \frac{1}{2}(\min_{x\in M}\{x_j\} + \max_{x\in M}\{x_j\}) - r \\ &< \frac{1}{2}(\min_{x\in M}\{x_j\} + \max_{x\in M}\{x_j\}) - \frac{1}{2}(\max_{x\in M}\{x_j\} - \min_{x\in M}\{x_j\}) \\ &= \min_{x\in M}\{x_j\} \quad \lightning. \end{aligned}$$

2. Fall: $x_j^* > \frac{1}{2}(\min_{x\in M}\{x_j\} + \max_{x\in M}\{x_j\})$.

Dann definiert man $(y_2)_k = \begin{cases} x_k^* & \text{falls } k \neq j \\ x_j^* + r & \text{falls } k = j. \end{cases}$

Damit ist $y_2 \in K(x^*, r)$, denn $||y_2 - x^*||_2 = \sqrt{(x_j^* + r - x_j^*)^2} = r$.

Da $K(x^*, r) \subseteq M$, ist $y_2$ in $M$.

Aber es gilt:

$$\begin{aligned}
(y_2)_j &= x_j^* + r \\
&> \frac{1}{2}(\min_{x\in M}\{x_j\} + \max_{x\in M}\{x_j\}) + r \\
&> \frac{1}{2}(\min_{x\in M}\{x_j\} + \max_{x\in M}\{x_j\}) + \frac{1}{2}(\max_{x\in M}\{x_j\} - \min_{x\in M}\{x_j\}) \\
&= \max_{x\in M}\{x_j\} \quad ↯ .
\end{aligned}$$

q.e.d.

Außerdem sucht man ein $R \in \mathbb{R}^+$, so dass $M \subseteq K(x^*, R)$.
Dann muss $R \geq \frac{1}{2}(\max_{x\in M}\{x_i\} - \min_{x\in M}\{x_i\})$ sein.

*Beweis.* Annahme: Sei $R < \frac{1}{2}(\max_{x\in M}\{x_i\} - \min_{x\in M}\{x_i\})$.

1. Fall: $x_i^* \leq \frac{1}{2}(\max_{x\in M}\{x_i\} + \min_{x\in M}\{x_i\})$. Dann ist $x_i^* \leq \max_{x\in M}\{x_i\}$.
Sei $y_1 = \text{argmax}_{x\in M}\{x_i\}$, also der Punkt aus $M$, mit der größten $x_i$-Koordinate.
Dann gilt:

$$\begin{aligned}
|(y_1)_i - x_i^*| &= \left|\max_{x\in M}\{x_i\} - x_i^*\right| \\
&= \max_{x\in M}\{x_i\} - x_i^* \\
&\geq \max_{x\in M}\{x_i\} - \frac{1}{2}(\max_{x\in M}\{x_i\} - \min_{x\in M}\{x_i\}) \\
&= \frac{1}{2}(\max_{x\in M}\{x_i\} - \min_{x\in M}\{x_i\}) \\
&> R.
\end{aligned}$$

Daher ist auch $||y_1 - x^*||_2 > R$. Dann ist aber $y_1 \notin K(x^*, R)$.
Hier führt also die Annahme $R < \frac{1}{2}(\max_{x\in M}\{x_i\} - \min_{x\in M}\{x_i\})$ zu einem Widerspruch.

2. Fall: $x_i^* > \frac{1}{2}(\max_{x\in M}\{x_i\} - \min_{x\in M}\{x_i\})$. Dann ist $x_i^* \geq \min_{x\in M}\{x_i\}$.
Sei $y_2 = \text{argmin}_{x\in M}\{x_i\}$.

Dann gilt:

$$\begin{aligned}|(y_2)_i - x_i^*| &= x_i^* - \min_{x\in M}\{x_i\} \\ &> \frac{1}{2}(\max_{x\in M}\{x_i\} + \min_{x\in M}\{x_i\}) - \min_{x\in M}\{x_i\} \\ &= \frac{1}{2}(\max_{x\in M}\{x_i\} - \min_{x\in M}\{x_i\}) \\ &> R.\end{aligned}$$

Somit ist auch $||y_2 - x^*||_2 > R$. Dann ist aber $y_2 \notin K(x^*, R)$.
Auch hier führt also die Annahme $R < \frac{1}{2}(\max_{x\in M}\{x_i\} - \min_{x\in M}\{x_i\})$ zu einem Widerspruch.

q.e.d.

Zusammen folgt:

$$\begin{aligned}R - r &\geq \frac{1}{2}(\max_{x\in M}\{x_i\} - \min_{x\in M}\{x_i\}) - \frac{1}{2}(\max_{x\in M}\{x_j\} - \min_{x\in M}\{x_j\}) \\ &= \frac{1}{2}[(\max_{x\in M}\{x_i\} - \min_{x\in M}\{x_i\}) - (\max_{x\in M}\{x_j\} - \min_{x\in M}\{x_j\})] \\ &> \frac{1}{2}\cdot 2\cdot\alpha \\ &= \alpha.\end{aligned}$$

Deswegen kann $M$ nicht $\alpha$-quasikreisförmig bezüglich $x^*$ sein. Da aber $x^*$ beliebig gewählt war, kann $M$ bezüglich keines Punktes $\alpha$-quasikreisförmig sein. □

*Folgerung.* Gibt es eine Koordinate, in der $M$ unbeschränkt ist, das heißt $\min_{x\in M}\{x_i\} = -\infty$ oder $\max_{x\in M}\{x_i\} = \infty$ für ein $i \in \{1, \ldots, n\}$, so gibt es kein $\alpha$ für das $M$ $\alpha$-quasikreisförmig sein kann.

Lemma 4.23 sagt aus, dass die Ausbreitung entlang zweier Koordinatenachsen nicht „zu unterschiedlich“ sein darf.
Da Bälle aber in alle Richtungen die gleiche Ausdehnung haben, kann man das Lemma folgendermaßen verallgemeinern:

*Folgerung.* Gibt es zwei aufeinander senkrecht stehende Richtungen $v_1,\ v_2 \in \mathbb{R}^n$ für die gilt:

$$\left|\max_{\substack{z_1,z_2\in M\\ z_2=z_1+c\cdot v_1}} ||z_2 - z_1||_2 - \max_{\substack{z_1,z_2\in M\\ z_2=z_1+c\cdot v_2}} ||z_2 - z_1||_2\right| > 2\cdot\alpha$$

Dann kann $M$ nicht quasikreisförmig sein. (vgl. Abbildung 4.12)

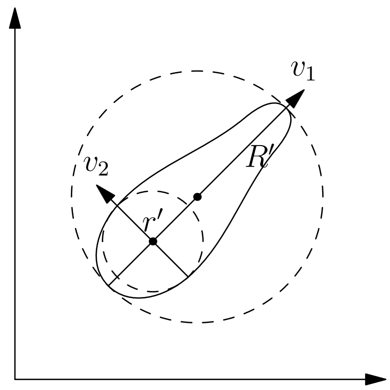


Abbildung 4.12: Beispiel für eine Menge, die nicht quasikreisförmig sein kann

### 4.5.4 Polygone

In diesem Abschnitt sollen Quasikreisförmigkeits-Aussagen für Polygone gefunden werden.

**Definition 4.24.** (Vgl. Coxeter [2], S. 1) Ein $p$-gon bezeichnet eine geschlossene Kurve aus $p$ Strecken (den so genannten Seiten) $A_1A_2,\ A_2A_3, \ldots, A_pA_1$. Dabei sind $A_1, \ldots, A_p$ Punkte, die man Ecken nennt. Häufig meint man mit der Bezeichnung „Polygon" neben der Kurve auch noch das Innere des Polygons. Hier sollen die Punkte $A_1, \ldots, A_p$ im $\mathbb{R}^2$ liegen, dass heißt wir betrachten nur planare Polygone. Außerdem werden wir fordern, dass die Polygone konvex und einfach sind. Einfach bedeutet dabei, dass der Schnitt zweier Kanten entweder leer oder eine Ecke ist und jede Ecke zu höchstens zwei Kanten gehört.

Des Weiteren werden wir voraussetzen, dass ein Polygon mindestens drei Ecken hat.

**Definition 4.25.** (Aus ebd. [2], S. 2) Ein Polygon wird gleichseitig genannt, wenn die Seiten alle die gleiche Länge haben, und gleichwinklig, wenn seine Winkel alle gleich groß sind.
Ist ein planares Polygon gleichseitig und gleichwinklig, nennt man es regelmäßig.

Für regelmäßige Polygone gelten die folgenden Aussagen:

- Ein regelmäßiges Polygon hat ein Zentrum. Von diesem haben alle Ecken den gleichen Abstand $r_U$ und alle Seiten den gleichen Abstand $r_I$. Das heißt, es gibt zwei konzentrische Kreise: den Umkreis, der alle Ecken berührt und den Radius $r_U$ hat, und den Inkreis, der alle Seiten berührt und den Radius $r_I$ hat. (aus ebd. [2], S. 2)

- Wenn $a_n$ die Länge einer Seite ist, gilt:

$$r_I = \frac{a_n}{2} \cot\left(\frac{180°}{n}\right) = r_U \cos\left(\frac{180°}{n}\right)$$

und

$$r_U = \frac{a_n}{2 \cdot \sin(180°/n)}.$$

(aus Stöcker [17], S. 78)

*Bemerkung* 4.26. Aus der Definition von Um- und Inkreis folgt direkt, dass der Umkreis der kleinste Kreis ist, der das regelmäßige Polygon vollständig enthält, und der Inkreis der größte Kreis, der komplett in dem Polygon enthalten ist.

*Beispiel.* Ein Beispiel für ein regelmäßiges Polygon ist das regelmäßige 5-Eck mit den Ecken $A_1, \ldots, A_5$ und dem Zentrum $Z$ wie in Abbildung 4.13.

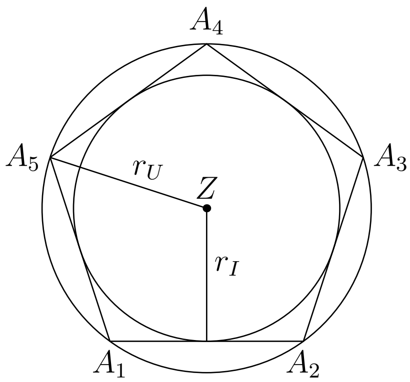


Abbildung 4.13: Ein regelmäßiges Fünfeck

**Lemma 4.27.** *Jedes regelmäßige n-gon mit vorgegebenem Umkreisradius $r_U$ ist quasikreisförmig, wenn gilt:*

$$n \geq \frac{180°}{\arccos\left(1 - \frac{1}{2 \cdot r_U}\sqrt{5} + \frac{1}{2 \cdot r_U}\right)}$$

*Beweis.* Aus den oben genannten Eigenschaften eines regelmäßigen Polygons $M$ folgt:
Der größte Kreis $K_1(x, r)$, für den gilt $K_1(x, r) \subseteq M$, ist der Inkreis, das heißt $K_1(Z, r_I)$, wenn $Z$ das Zentrum bezeichnet.
Der kleinste Kreis $K_2(y, R)$, für den gilt $M \subseteq K_2(y, R)$, ist der Umkreis, das heißt $K_2(Z, r_U)$.
Da beide Kreise konzentrisch mit Mittelpunkt $Z$ sind, braucht man sie nicht mehr auf

einen gemeinsamen Mittelpunkt zu verschieben und weiß, dass bezüglich jedes anderen Mittelpunkts $Z'$ die Differnz $R - r$ größer wäre.
Ist $M$ also quasikreisförmig bezüglich eines Punktes $x \in M$, dann auch bezüglich $Z$.

Damit $M$ bezüglich $Z$ $\alpha$-quasikreisförmig mit $\alpha = \sqrt{5} - 1$ (vgl. 4.8 für $n = 2$) ist, muss gelten $r_u - r_i \leq \alpha$:

$$\begin{aligned} & r_i = r_u \cdot \cos\left(\frac{180°}{n}\right) \\ \Rightarrow \quad & r_u - r_i = r_u \cdot \left[1 - \cos\left(\frac{180°}{n}\right)\right] \overset{!}{\leq} \alpha \end{aligned}$$

Das ist erfüllt, wenn

$$\begin{aligned} & n \geq \frac{180°}{\arccos\left(1 - \frac{1}{2 \cdot r_U}\sqrt{5} + \frac{1}{2 \cdot r_U}\right)} \\ \Rightarrow \quad & \arccos\left(1 - \frac{1}{2 \cdot r_U}\sqrt{5} + \frac{1}{2 \cdot r_U}\right) \geq \frac{180°}{n} \\ \Rightarrow \quad & 1 - \frac{1}{2 \cdot r_U}\left(\sqrt{5} - 1\right) \leq \cos\left(\frac{180°}{n}\right) \\ \Rightarrow \quad & 1 - \frac{\alpha}{r_U} \leq \cos\left(\frac{180°}{n}\right). \end{aligned}$$

□

Die folgende Tabelle soll helfen einen Eindruck der Größenordnung von $n$ für verschiedene $r_U$ zu bekommen:

| $r_U$ | 1 | $\alpha = \sqrt{5} - 1$ | 2 | 3 | 5 | 10 | 50 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $n \geq$ | 3 | 3 | 4 | 5 | 7 | 9 | 20 | 29 |

Dabei entspricht $n \geq 3$ für $r_U \leq 1$ und $r_U = \alpha$ der Aussage:
Ist der Umkreisradius $r_U \leq \alpha$ sind alle regelmäßigen Polygone quasikreisförmig.
Begründung:
Sei $r_U \leq \alpha$, dann gilt:

$$\begin{aligned} r_U - r_I &= r_U \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{180°}{n}\right)\right) \\ &\leq \alpha \cdot \left(1 - \cos\left(\frac{180°}{n}\right)\right) \\ &\leq \alpha \quad \text{da } \cos\left(\frac{180°}{n}\right) \geq 0 \; \forall n \geq 3. \end{aligned}$$

Für unregelmäßige Polygone gilt das folgende Lemma:

**Lemma 4.28.** *Ist $r \in \mathbb{R}$ mit $r > \sqrt{5} - 1 + \epsilon$ für ein $\epsilon > 0$, so gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ ein einfaches, planares, konvexes $n$-Eck $M$ mit $M \subseteq K(x, r)$ für ein $x \in M$, das nicht quasikreisförmig (bezüglich $\alpha = \sqrt{5} - 1$) ist.*

*Beweis.* Um ein solches einfaches, planares, konvexes $n$-Eck zu konstruieren gehen wir folgendermaßen vor: (sämtliche Konstruktionen laufen im $\mathbb{R}^2$)
Schritt 1: Man gibt eine Seite der Länge $2r$ vor und wählt als $A_1$ und $A_2$ die beiden Endpunkte dieser Seite.
Schritt 2: $x$ sei der Mittelpunkt dieser Seite.
Schritt 3: Man wählt $y$, so dass $||x - y||_2 = \epsilon$ und $||A_1 - y||_2 = ||A_2 - y||_2$.
Schritt 4: $b$ sei der Kreisbogen (mit Mittelpunkt $N$ und Radius $\rho$) durch die 3 Punkte $A_1$, $A_2$ und $y$.
Schritt 5: Man teilt diesen Kreisbogen in $n - 1$ gleichgroße Teilabschnitte: die so konstruierten $n - 2$ Punkte bilden zusammen mit $A_1$ und $A_2$ das $n$-Eck $M$. (Vgl. Abbildung 4.14).

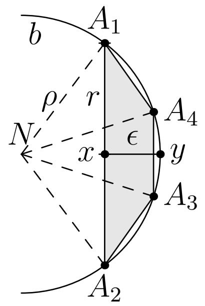


Abbildung 4.14: Konstruktion des unregelmäßigen n-Ecks $M$: hier für $n = 4$

Für dieses $n$-Eck $M$ gilt:

1. $M$ ist offensichtlich planar, da alle Punkte im $\mathbb{R}^2$ liegen.

2. Da wir $M$ als konvexe Hülle der $A_1, \ldots, A_n$ definieren, ist es außerdem einfach und konvex.

Es bleibt also noch zu zeigen:

1. $M \subseteq K(x, r)$ für ein $x \in M$.

2. $M$ ist nicht $(\sqrt{5} - 1)$-quasikreisförmig.

Da $\epsilon < r$ gilt:

$$\begin{aligned}\rho^2 &= r^2 + (\rho - \epsilon)^2 \\ &= r^2 + \rho^2 - 2\rho\epsilon + \epsilon^2 \\ \Rightarrow \rho &= \frac{r^2 + \epsilon^2}{2\epsilon} > \frac{2\epsilon^2}{2\epsilon} = \epsilon.\end{aligned}$$

Somit liegen $N$ und $y$ auf verschiedenen Seiten von $x$, d.h. $sgn(N_x - x_x) = sgn(x_x - y_x)$ (wie in Abbildung 4.14 dargestellt). Ohne Einschränkung sei $y_x > x_x$ und $(A_1)_y > (A_2)_y$.

Dann gilt $\forall p \in b$ mit $p_x \geq x_x$: $p_x \leq y_x$ und $(A_2)_y \leq p_y \leq (A_1)_y$.
$\Rightarrow$ für alle $A_i$ gilt: $x_x \leq (A_i)_x \leq y_x$ und $(A_2)_y \leq (A_i)_y \leq (A_1)_y$.
Da $M$ die konvexe Hülle der $A_i$ ist gilt:

$$\max_{z\in M}\{z_x\} \leq y_x \quad \text{und} \quad \min_{z\in M}\{z_x\} = x_x, \text{ sowie}$$

$$\max_{z\in M}\{z_y\} = (A_1)_y \quad \text{und} \quad \min_{z\in M}\{z_y\} = (A_2)_y.$$

Das heißt:
1. $x \in M$ und $M \subseteq K(x,r)$
2. $|(\max_{z\in M}\{z_x\} - \min_{z\in M}\{z_x\}) - (\max_{z\in M}\{z_y\} - \min_{z\in M}\{z_y\})|$

$$\begin{aligned} &= \left|\left(\max_{z\in M}\{z_x\} - x_x\right) - (A_{1,y} - A_{2,y})\right| \\ &= \left|\underbrace{\left(\max_{z\in M}\{z_x\} - x_x\right)}_{\leq\epsilon<r} - 2r\right| \\ &= 2r - \left(\max_{z\in M}\{z_x\} - x_x\right) \\ &\geq 2r - \epsilon \\ &> 2\left(\sqrt{5} - 1 + \epsilon\right) - \epsilon \\ &> \sqrt{5} - 1\end{aligned}$$

Also kann $M$ nach Lemma 4.23 nicht quasikreisförmig bezüglich $\alpha = \sqrt{5} - 1$ sein. $\square$

# 5 Cross-shaped Niveaumengen

Die dritte Form $A(x^*)$, die in dieser Arbeit vorgestellt werden soll, unterscheidet sich deutlich von den ersten beiden, da sie nicht auf konzentrisch wachsenden Bällen beruht. Aber auch Niveaumengen dieser dritten Form führen dazu, dass man die Lösung des (IP) durch „Runden“ einer optimalen Lösung des (RP) bekommt.

## 5.1 Definition

Bevor definiert werden kann, was im Folgenden mit „cross-shaped“ gemeint sein soll, benötigen wir die folgende Definition.

**Definition 5.1.** Zu einem gegebenen Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ ist $\mathrm{box}_x(y)$ für ein $y \in \mathbb{R}^n$ definiert als die Box, die durch die (maximal) $2^n$ Punkte

$$r_i = (r_{i1}, \ldots, r_{in}) \quad \text{mit} \quad r_{ij} \in \{x_j, y_j\} \; \forall j = 1, \ldots, n$$

begrenzt ist.

*Beispiel.* Ein Beispiel für $n = 2$ ist in Abbildung 5.1 zu sehen.

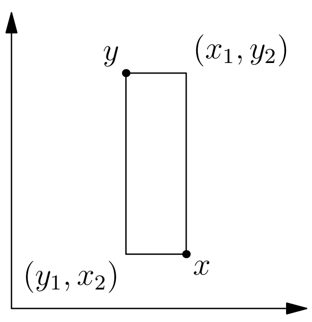


Abbildung 5.1: $\mathrm{box}_x(y)$

Da die Verbindungsstrecke zwischen $x$ und $y$ die Diagonale der Box (beziehungsweise ihre Verallgemeinerung im $\mathbb{R}^n$) ist, gilt die folgende Aussage:

*Bemerkung* 5.2. Die Strecke $\lambda x + (1-\lambda)y$ für $\lambda \in (0,1)$ liegt immer in $\mathrm{box}_x(y)$.

*Beweis.* Für ein beliebiges $\lambda \in (0,1)$ sei $z(\lambda) := \lambda x + (1-\lambda)y$.
Dann gilt für $1 \leq i \leq n$: $z(\lambda)_i = \lambda x_i + (1-\lambda)y_i$, daher ist

$$z(\lambda)_i \in \begin{cases} [x_i, y_i] & \text{falls } x_i \leq y_i \\ [y_i, x_i] & \text{falls } x_i > y_i. \end{cases}$$

Also ist $z(\lambda) \in \mathrm{box}_x(y)$. □

*Bemerkung* 5.3. Die Anzahl der Eckpunkte der Box ist immer $2^k$ mit $0 \leq k \leq n$. Wobei $k < n \Leftrightarrow$ es gibt Koordinaten $1 \leq i \leq n$, so dass $x_i = y_i$.

Mit Hilfe von Definition 5.1 kann nun definiert werden, was „cross-shaped" bedeuten soll.

**Definition 5.4.** Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **cross-shaped** bezüglich $x \in M$, wenn $\forall y \in M$ gilt: $\mathrm{box}_x(y) \subseteq M$.

*Beispiel.* An dem folgenden Beispiel für $n = 2$ kann man erkennen, woher die Bezeichnung cross-shaped (angelehnt an star-shaped) kommt:

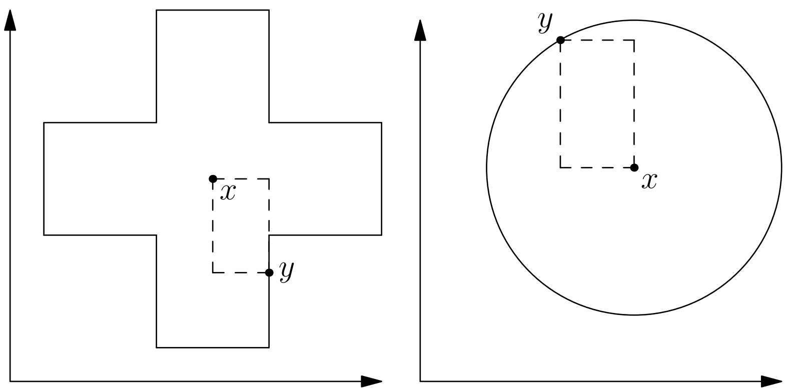


Abbildung 5.2: Beispiele für Mengen, die cross-shaped sind

Allerdings ist dies nicht die einzige Möglichkeit für eine cross-shaped Menge, wie das zweite Bild zeigt.

## 5.2 Vergleich mit anderen Mengenspezifizierungen

Um den Begriff „cross-shaped“ einzuordnen, soll er zuerst mit den bekannten Begriffen „star-shaped“ und konvex verglichen werden. Anschließend wird gezeigt, dass alle $l_1$-Sterne cross-shaped sind und alle cross-shaped Mengen $l_1$-Sterne.

**Definition 5.5.** (Aus Königsberger [12], S. 185.)
Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt sternförmig (star-shaped) bezüglich $x \in M$, falls für alle $y \in M$ die Strecke $\lambda x + (1 - \lambda)y$ in $M$ liegt.

**Lemma 5.6.** *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine gegebene Menge, dann gelten die folgenden Aussagen:*

1. *Ist $M$ cross-shaped bezüglich $x \in M$, so auch star-shaped bezüglich $x$.*
2. *Ist $M$ konvex, so auch star-shaped (bezüglich jedes Punkts $x \in M$).*
3. *Ist $M$ star-shaped, muss sie nicht konvex sein.*
4. *Ist $M$ konvex, muss sie nicht cross-shaped sein.*
5. *Ist $M$ star-shaped, muss sie nicht cross-shaped sein.*
6. *Ist $M$ cross-shaped, muss sie nicht konvex sein.*

*Beweis.* Zu 1.
Ist $M$ cross-shaped bezüglich $x \in M$, so gilt nach Definition 5.4 für jeden Punkt $y \in M$, dass $\mathrm{box}_x(y) \subseteq M$.
Nach Bemerkung 5.2 liegt die Strecke $\lambda x + (1 - \lambda)y$ für $\lambda \in (0, 1)$ immer in $\mathrm{box}_x(y) \subseteq M$.

Zu 2.
Ist $M$ konvex, bedeutet das, dass für alle Paare von zwei Punkten $x, y \in M$ auch alle Punkte $\lambda x + (1 - \lambda)y$ für $0 \leq \lambda \leq 1$ in $M$ liegen.
Sei also $x \in M$ ein beliebiger Punkt, für den man zeigen möchte, dass $M$ bezüglich $x$ star-shaped ist. Dann muss man für alle $y \in M$ zeigen, dass $\lambda x + (1 - \lambda)y \in M$. Da aber $x$ und $y \in M$ und $M$ konvex, liegt $\lambda x + (1 - \lambda)y \in M$.

Zu 3.
Ein Gegenbeispiel ist in Abbildung 5.3 links zu sehen.

Zu 4.
Ein Gegenbeispiel ist in Abbidlung 5.3 rechts zu sehen.

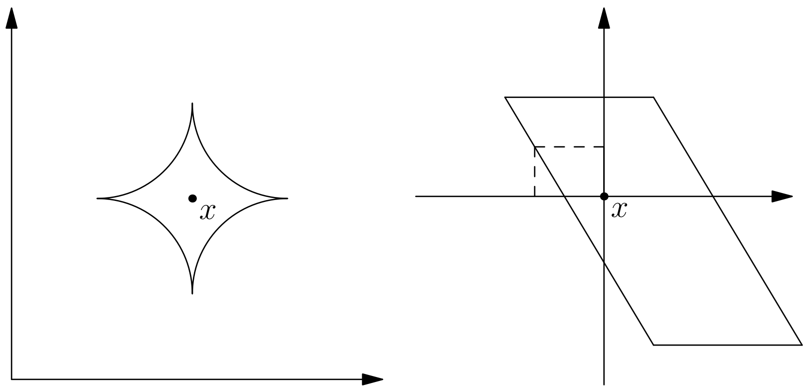


Abbildung 5.3: Gegenbeispiele für eine Menge, die cross-shaped und star-shaped, aber nicht konvex ist (links) und für eine Menge, die konvex, aber nicht cross-shaped ist

Zu 5.
Auch hier ist das Beispiel aus Abbildung 5.3 rechts ein Gegenbeispiel, da nach 2. folgt, dass alle konvexen Mengen auch star-shaped sind.

Zu 6.
In Abbildung 5.2 wurde bereits ein Beispiel für eine Menge gezeigt, die cross-shaped, aber nicht konvex ist. □

In der Geometrie kennt man die Definition eines $d$-Sterns:

**Definition 5.7.** (Vgl. Boltyanski u. a. [1])
Sei eine Norm $d$ gegeben. Dann ist das $d$-Segment $[a, b]_d$ von zwei Punkten $a$, $b$ definiert als die Menge aller Punkte $x$, für die $d(a - x) + d(b - x) = d(a - b)$ gilt.

Eine Menge $M$ ist ein $d$-Stern, wenn es einen Punkt $m \in M$ gibt, so dass $[m, b]_d \subseteq M$ für alle $b \in M$.

**Lemma 5.8.** *1. Ist die Norm $d = l_2$, so ist die Aussage: $M$ ist ein $l_2$-Stern mit $m = x$ äquivalent zu: $M$ ist star-shaped bezüglich $x$.*

*2. Ist die Norm $d = l_1$, so ist die Aussage: $M$ ist ein $l_1$-Stern mit $m = x$ äquivalent zu: $M$ ist cross-shaped bezüglich $x$.*

*Beweis.* Zu 1.: Sei $d = l_2$.

Um zu zeigen, dass die Äquivalenz gilt, muss man zeigen, dass

$$[x,b]_{l_2} = \{z \in \mathbb{R}^n : \; z = \lambda x + (1-\lambda)b, \; 0 \leq \lambda \leq 1\}.$$

Sei also $z = \lambda x + (1-\lambda)b$.
Dann ist

$$\begin{aligned} ||x-z||_2 + ||z-b||_2 &= ||(1-\lambda)x - (1-\lambda)b||_2 + ||\lambda x - \lambda b||_2 \\ &= (1-\lambda)\,||x-b||_2 + \lambda\,||x-b||_2 = ||x-b||_2 \end{aligned}$$

Daher ist $z \in [x,b]_{l_2}$ und somit $\{z \in \mathbb{R}^n : \; z = \lambda x + (1-\lambda)b, \; 0 \leq \lambda \leq 1\} \subseteq [x,b]_{l_2}$.

Sei andererseits $z \in [x,b]_{l_2}$, d.h. $||x-z||_2 + ||z-b||_2 = ||x-b||_2$.
Wenn $(a,b)$ das Skalarprodukt von $a$ und $b$ ist, dann ist das äquivalent zu

$$||x||_2^2 - 2(x,z) + 2\,||z||_2^2 - 2(z,b) + ||b||_2^2 + 2\cdot ||x-z||_2\,||z-b||_2 = ||x||_2^2 - 2(x,b) + ||b||_2^2$$

$$\Leftrightarrow \; -2(x,z) + 2\,||z||_2^2 - 2(z,b) + 2\cdot ||x-z||_2\,||z-b||_2 = -2(x,b)$$

$$\Leftrightarrow \; -(x,b) + (x,z) - ||z||_2^2 + (z,b) = ||x-z||_2\,||z-b||_2\,.$$

Da $||x-z||_2\,||z-b||_2 \geq 0$, ist das äquivalent zu

$$\left| -(x,b) + (x,z) - ||z||_2^2 + (z,b) \right| = ||x-z||_2\,||z-b||_2$$

$$\Leftrightarrow \; |(x-z, z-b)| = ||x-z||_2\,||z-b||_2\,.$$

Das ist aber äquivalent dazu, dass $x-z$ und $z-b$ linear abhängig sind. (Vgl. Kersten [11], S. 131) Dann müssen sie auch linear abhängig von $x-b$ sein.
Deswegen kann man schreiben: $x - z = \sigma\cdot(x-b)$ und $z - b = \epsilon\cdot(x-b)$.

$$\Rightarrow \; |\sigma|\,||x-b||_2 + |\epsilon|\cdot ||x-b||_2 = ||x-b||_2$$

Also ist $|\epsilon| = 1 - |\sigma|$.
Und es gilt: $(I)$ $x - z = \sigma\cdot(x-b)$, das heißt $z = x - \sigma x + \sigma b = (1-\sigma)\cdot x + \sigma b$.
Angenommen: $\sigma > 1 \;\Rightarrow\; |\epsilon| < 0 \;\lightning\; \Rightarrow \; \sigma \leq 1$.
Angenommen: $\sigma < 0 \;\Rightarrow\; |\epsilon| = 1 + \sigma$. Dann ist $z - b = (1+\sigma)(x-b)$.
Daher ist $z = (1+\sigma)x - \sigma b$.
Mit $(I)$: $x - \sigma x + \sigma b = x + \sigma x - \sigma b$. Somit folgt $x = b$ und dann ist
$||x-z||_2 + ||z-b||_2 = ||0||_2 = 0$, also $z = x = b$.
Ansonsten ist $\sigma \geq 0$.
Deswegen kann man $z$ schreiben als $z = \sigma b + (1-\sigma)x$ mit $\sigma \in [0,1]$.
Und somit gilt $[x,b]_{l_2} \subseteq \{z \in \mathbb{R}^n : \; z = \lambda x + (1-\lambda)b, \; 0 \leq \lambda \leq 1\}$.

Zusammen folgt $[x,b]_{l_2} = \{z \in \mathbb{R}^n : \ z = \lambda x + (1-\lambda)b, \ 0 \leq \lambda \leq 1\}$ und damit die Äquivalenz der beiden Aussagen.

Zu 2.: Sei $d = l_1$.
Um zu zeigen, dass die Äquivalenz gilt, muss man zeigen, dass

$$[x,b]_{l_1} = \mathrm{box}_x(b).$$

Dabei ist $[x,b]_{l_1} = \{y : \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| + \sum_{i=1}^n |b_i - y_i| = \sum_{i=1}^n |x_i - b_i|\}$
und $\mathrm{box}_x(b) = \{y : y_i \in \begin{cases} [x_i, b_i] & \text{falls } x_i \leq b_i \\ [b_i, x_i] & \text{falls } b_i < x_i \end{cases}\}$.

Sei $y \in \mathrm{box}_x(b)$, dann gilt $y_i \in \begin{cases} [x_i, b_i] & \text{falls } x_i \leq b_i \\ [b_i, x_i] & \text{falls } b_i < x_i \end{cases}$ für alle $i = 1, \ldots, n$.
$\Rightarrow \ |x_i - b_i| = |x_i - y_i| + |b_i - y_i|$
$\Rightarrow \ \sum_{i=1}^n (|x_i - y_i| + |b_i - y_i|) = \sum_{i=1}^n |x_i - b_i|$
Somit ist $\mathrm{box}_x(b) \subseteq [x,b]_{l_1}$.

Sei andererseits $y \in [x,b]_{l_1}$.
Angenommen, es existiert ein $j$ mit $y_j \notin [x_j, b_j]$ (ohne Einschränkung sei hier angenommen, dass $x_j \leq b_j$).
Dann ist entweder $y_j = x_j - \delta$ oder $y_j = b_j + \delta$ mit $\delta > 0$.
1. Fall: $y_j = x_j - \delta$: Dann ist

$$\begin{aligned} |x_j - y_j| + |b_j - y_j| &= \delta + |b_j - y_j| \\ &= \delta + |b_j - x_j + \delta| \\ &= \delta + (b_j - x_j) + \delta, \quad \text{da } x_j \leq b_j \\ &= 2\delta + |x_j - b_j|. \end{aligned}$$

2. Fall: $y_j = b_j + \delta$: Dann ist

$$\begin{aligned} |x_j - y_j| + |b_j - y_j| &= |x_j - b_j - \delta| + |b_j - b_j - \delta| \\ &= |x_j - b_j - \delta| + \delta \\ &= \delta + b_j - x_j + \delta, \quad \text{da } x_j < b_j + \delta \\ &= 2\delta + |x_j - b_j| \end{aligned}$$

$\Rightarrow \ |x_j - y_j| + |b_j - y_j| = |x_j - b_j| + 2\delta$.
Da aber $y \in [x,b]_{l_1}$, gilt $\sum_{i=1}^n (|x_i - y_i| + |b_i - y_i|) = \sum_{i=1}^n |x_i - b_i|$.
Es muss also ein $k \in \{1, \ldots, n\}$ geben, so dass $|x_k - y_k| + |b_k - y_k| < |x_k - b_k|$. Das

widerspricht der Dreiecksungleichung.
Daher ist $y_i \in \begin{cases} [x_i, b_i] & \text{falls } x_i \leq b_i \\ [b_i, x_i] & \text{falls } b_i < x_i \end{cases}$ für alle $i = 1, \ldots, n$ und somit $y \in \mathrm{box}_x(b)$.

Zusammen folgt, dass $[x, b]_{l_1} = \mathrm{box}_x(b)$, und damit die Äquivalenz.

□

*Bemerkung* 5.9. Aussage 1. aus diesem Lemma findet sich (ohne Beweis) auch in Boltyanski u. a. [1].

Statt als cross-shaped, könnte man $M$ also auch als $l_1$-Stern bezeichnen. Für diese Arbeit werden wir im Folgenden trotzdem bei der Bezeichnung „cross-shaped“ bleiben.

## 5.3 Beweis

Wie bereits angedeutet, sind cross-shaped Mengen deshalb interessant für diese Arbeit, weil Niveaumengen, die cross-shaped sind, dazu führen, dass eine optimale Lösung von (IP) durch Runden einer Optimallösung von (RP) gewonnen werden kann.

**Satz 5.10.** *Sei $x^*$ eine endliche Optimallösung von*

$$\begin{array}{lll} (RP) & \min & f(x) \\ & s.d & x \in \mathbb{R}^n, \end{array}$$

*so dass die Niveaumengen $N_{\leq}(z)$ der Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ für alle $z \in \mathbb{R}$ mit*

$$f(x^*) \leq z \leq \widetilde{z} = \min\{f(x) : \ x \in \mathrm{Round}(x^*)\}$$

*cross-shaped bezüglich $x^*$ sind, so liegt eine optimale Lösung von*

$$\begin{array}{lll} (IP) & \min & f(x) \\ & s.d. & x \in \mathbb{Z}^n \end{array}$$

*in* $\mathrm{Round}(x^*)$.

*Beweis.* Sei $x \in \mathbb{Z}^n$ ein beliebiger Punkt und sei $z := f(x)$.
Ziel: Man möchte einen Punkt $y \in \mathrm{Round}(x^*)$ konstruieren mit $f(y) \leq z$.
Sei $\widetilde{x} := \mathrm{argmin}_{x \in \mathrm{Round}(x^*)}\{f(x)\}$, d.h. $f(\widetilde{x}) = \widetilde{z}$.

Dann gilt entweder:
1. Fall: $\widetilde{z} \leq z \Rightarrow f(\widetilde{x}) \leq f(x)$ oder
2. Fall: $\widetilde{z} > z$:
Dann ist nach Voraussetzung $N_{\leq}(z)$ cross-shaped bezüglich $x^*$ und trivialerweise $x \in N_{\leq}(z)$. Also ist $\mathrm{box}_{x^*}(x) \subseteq N_{\leq}(z)$.
Sei

$$y_i := \begin{cases} \lceil x_i^* \rceil & \text{wenn } x_i > x_i^* \\ \lfloor x_i^* \rfloor & \text{wenn } x_i < x_i^* \\ x_i^* & \text{wenn } x_i = x_i^*. \end{cases}$$

Dann ist $y \in \mathrm{Round}(x^*)$ und $y \in \mathrm{box}_{x^*}(x)$, da

- $\forall i$ mit $x_i \geq x_i^*$ ist $x_i^* \leq y_i \leq x_i$, d.h. $y_i \in [x_i^*, x_i]$.
- $\forall i$ mit $x_i^* > x_i$ ist $x_i \leq y_i \leq x_i^*$, d.h. $y_i \in [x_i, x_i^*]$.

Daher ist $y \in \mathrm{box}_{x^*}(x) \subseteq N_{\leq}(z)$.
Das heißt aber, dass

$$\begin{aligned} f(y) &\leq z \quad \text{da } y \in N_{\leq}(z) \\ &< \widetilde{z} \quad \text{da wir im 2. Fall sind} \\ &= f(\widetilde{x}) = \min\{f(x) : x \in \mathrm{Round}(x^*)\} \quad \text{nach Definition von } \widetilde{z} \\ &\leq f(y) \quad \text{da } y \in \mathrm{Round}(x^*). \end{aligned}$$

Also führt die Annahme $\widetilde{z} > z$ zu einem Widerspruch und es gilt $\widetilde{z} \leq f(x)$ für alle $x \in \mathbb{Z}^n$.
Damit ist $x_{IP}^* = \widetilde{x}$. □

*Bemerkung* 5.11. In diesem Fall muss man tatsächlich alle Punkte in $\mathrm{Round}(x^*)$ als Optimallösung in Betracht ziehen und darf nicht einfach nur kaufmännisch runden, wie das Beispiel in Abbildung 5.4 zeigt.

Hier ist $x^* = (1.33, 1.33)$ und $\widetilde{x} = (2, 2)$. Man sieht, dass die Niveaumenge $N_{\leq}(f(\widetilde{x}))$ cross-shaped ist und kann eine Folge von Niveaumengen für kleinere $z$ konstruieren, so dass diese auch cross-shaped sind.

Damit sind die Voraussetzungen für Satz 5.10 erfüllt und es gibt eine Optimallösung in $\mathrm{Round}(x^*)$. Diese Optimallösung $\widetilde{x}$ ist hier $(2, 2)$ und nicht $[x^*] = (1, 1)$.

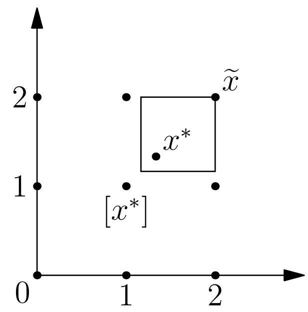


Abbildung 5.4: Gegenbeispiel, dass $\widetilde{x} \neq [x^*]$ sein kann

Allerdings kann man eine weitere Forderung an die Form der Niveaumenge stellen, so dass dann gilt $\widetilde{x} = [x^*]$.

**Definition 5.12.** Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt „achsensymmetrisch bezüglich $x$“, wenn für alle $y \in M$ gilt: $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ ist $z \in \mathbb{R}^n$ mit

$$z_j = \begin{cases} y_j & \forall j \neq i \\ 2x_j - y_j & j = i \end{cases}$$

ein Element von $M$.

*Bemerkung* 5.13. Für $x = (0, \dots, 0)$ entspricht dies der üblichen Definition von „achsensymmetrisch“.

**Lemma 5.14.** *Sind die Niveaumengen in Satz 5.10 für $f(x^*) \leq z \leq \widetilde{z}$ nicht nur cross-shaped, sondern auch achsensymmetrisch bezüglich $x^*$, braucht man die Punkte aus* Round$(x^*)$ *nicht durch zu probieren, da stets gilt: $x^*_{IP} = [x^*]$.*

*Beweis.* (Eine Veranschaulichung der Benennungen befindet sich am Ende des Beweises: vgl. Abbildung 5.5.)

Da $[x^*] \in \text{Round}(x^*)$ gilt $f([x^*]) \geq \widetilde{z}$.

Sei $\widetilde{x} = \text{argmin}_{x \in \text{Round}(x^*)}\{f(x)\}$, d.h. $f(\widetilde{x}) = \widetilde{z}$. Wegen den Voraussetzungen des Lemmas ist $N_{\leq}(\widetilde{z})$ cross-shaped und achsensymmetrisch bezüglich $x^*$.

Außerdem gilt (nach Definition von $[x^*]$):

$$|\widetilde{x}_i - x^*_i| \geq |[x^*]_i - x^*_i| \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}. \quad (1)$$

Definiere $y \in \mathbb{R}^n$ durch:

$$y_i = \begin{cases} \widetilde{x}_i & \text{wenn } [x^*]_i = \widetilde{x}_i \\ 2x_i^* - \widetilde{x}_i & \text{sonst.} \end{cases}$$

Das heißt: $y$ entsteht durch wiederholte Spiegelung einzelner Koordinaten von $\widetilde{x}$ an $x^*$. Da $N_\leq(\widetilde{z})$ achsensymmetrisch bezüglich $x^*$ ist und $\widetilde{x} \in N_\leq(\widetilde{z})$ führt jede dieser Spiegelungen (einzeln nach einander ausgeführt) wieder zu einem Punkt, der in $N_\leq(\widetilde{z})$ liegt. Dann ist also auch $y \in N_\leq(\widetilde{z})$.

Somit ist $\text{box}_{x^*}(y) \subseteq N_\leq(\widetilde{z})$, da diese cross-shaped ist.

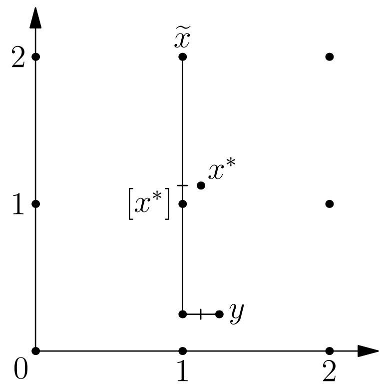


Abbildung 5.5: Veranschaulichung der Benennungen

Sei $i \in \{1, \ldots, n\}$, so dass $[x^*]_i = \widetilde{x}_i$, dann ist $y_i = [x^*]_i$ und damit $[x^*]_i \in [y_i, x_i^*]$.
Sei $i \in \{1, \ldots, n\}$, so dass $[x^*]_i \neq \widetilde{x}_i$, dann gilt:

$$\begin{aligned} |y_i - x_i^*| &= |2x_i^* - \widetilde{x}_i - x_i^*| \\ &= |x_i^* - \widetilde{x}_i| \\ &\geq |[x^*]_i - x_i^*| \quad \text{wegen (1).} \end{aligned}$$

Außerdem ist $sgn(y_i - x_i^*) = sgn([x^*]_i - x_i^*)$:

*Beweis.* 1. Möglichkeit: $[x^*]_i = \widetilde{x}_i$, dann ist $y_i - x_i^* = [x^*]_i - x_i^*$.
2. Möglichkeit: $[x^*]_i \neq \widetilde{x}_i$, dann ist $y_i - x_i^* = x_i^* - \widetilde{x}_i$.
Möglichkeit 2.1.: $x_i^* \geq \widetilde{x}_i \Rightarrow$ 1. $sgn(y_i - x_i^*) = 1$ und 2. $x_i^* \leq [x^*]_i$ (da $[x^*]_i \neq \widetilde{x}_i$, aber $[x^*]$ und $\widetilde{x}$ beide in $\text{Round}(x^*)$), also ist $sgn([x^*]_i - x_i^*) = 1$.
Möglichkeit 2.2.: $x_i^* \leq \widetilde{x}_i \Rightarrow$ 1. $sgn(y_i - x_i^*) = -1$ und 2. $x_i^* \geq [x^*]_i$, das heißt $sgn([x^*]_i - x_i^*) = -1$.

q.e.d.

Und damit ist $[x^*]_i \in \begin{cases} [y_i, x_i^*] & \text{wenn } y_i \leq x_i^* \\ [x_i^*, y_i] & \text{sonst.} \end{cases}$
Deswegen ist $[x^*] \in \text{box}_{x^*}(y)$ und damit in $N_{\leq}(\widetilde{z})$. Das heißt $f([x^*]) \leq \widetilde{z}$.

Mit dem Anfang folgt: $f([x^*]) = \widetilde{z}$. □

*Bemerkung* 5.15. Bei quasikreisförmigen Niveaumengen führt auch die zusätzliche Forderung achsensymmetrischer Mengen nicht dazu, dass $x^*_{IP} = [x^*]$. Ein Gegenbeispiel sieht man in Abbildung 5.6. Hier ist $x^* = (0.8, 0.8)$, das heißt $[x^*] = (1, 1)$. Die Niveaumenge ist gegeben durch:

$$N_{\leq}(z) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ ||(x, y) - x^*||_2 \leq 0.25 \ \vee \ \frac{2}{3} \leq ||(x, y) - x^*||_2 \leq 1.2\}.$$

Damit ist $N_{\leq}(z)$ quasikreisförmig, da $1.2 - 0.25 = 0.95 < \sqrt{5} - 1$ und achsensymmetrisch bezüglich $x^*$. Trotzdem haben $x_1, x_2$ und $x_3$ einen Zielfunktionswert kleiner oder gleich $z$ und $f([x^*]) > z$, da $[x^*] \notin N_{\leq}(z)$. Also ist $x^*_{IP} \in \{x_1, x_2, x_3\}$ und nicht $[x^*]$.

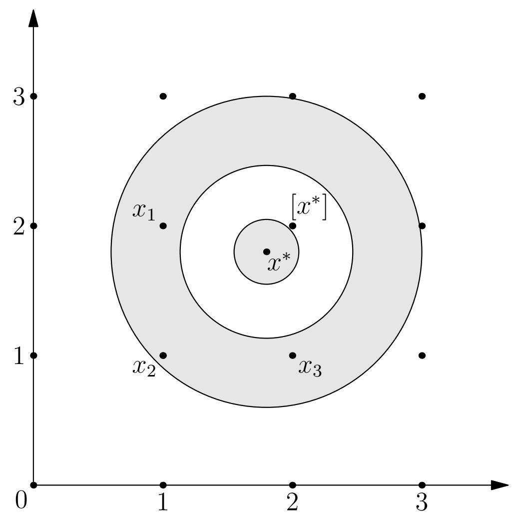


Abbildung 5.6: Im Fall quasikreisförmiger, achsensymmetrischer (bezüglich $x^*$) Niveaumengen kann $x^*_{IP} \neq [x^*]$ sein.

## 5.4 Beispiele für cross-shaped Mengen

Da man für eine bestimmte Optimallösung $x^*$ von (RP) entscheiden möchte, ob die Niveaumengen bezüglich dieser Lösung cross-shaped sind oder nicht, geht man im Folgenden davon aus, dass $x^*$ und $\alpha$ gegeben sind.

### 5.4.1 Im eindimensionalen Fall

Ist $n = 1$ wird $\text{box}_x(y)$ zu $[x, y]$ beziehungsweise $[y, x]$. Das bedeutet, dass jedes zusammenhängende Intervall, dass $x$ enthält, in $\mathbb{R}$ cross-shaped bezüglich $x$ ist.

Also sucht man jetzt Funktionen, deren Niveaumengen (bis $\widetilde{z}$), zusammenhänge Intervalle sind, die $x^*$ enthalten - wenn $x^*$ eine Optimallösung von (RP) ist, das heißt ein globales Minimum dieser Funktion.

**Definition 5.16.** (Aus Horst [9], S. 56) Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt quasikonvex, falls für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ und alle $\lambda \in (0, 1)$ gilt

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \max\{f(x_1), f(x_2)\}.$$

*Bemerkung* 5.17. Jede konvexe Funktion ist auch quasikonvex: Ist $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex, dann gilt für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ und für alle $\lambda \in (0, 1)$:

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2) \leq \max\{f(x_1), f(x_2)\}.$$

**Lemma 5.18.** *Für eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*
*1. (a) Das kontinuierliche Optimierungsproblem*

$$\begin{array}{lll} (RP) & \min & f(x) \\ & s.d. & x \in \mathbb{R} \end{array}$$

*besitzt eine endliche Optimallösung $x^*$ und*
*(b) $N_{\leq}(z)$ ist für alle $z \geq f(x^*)$ ein zusammenhängendes Intervall, das $x^*$ enhält.*

*2. (i) $f$ hat ein globales Minimum bei $x^*$ und*
*(ii) $f$ ist quasikonvex.*

*Beweis.* „$\Rightarrow$ :“
(i) Folgt direkt aus (a).
(ii) Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ und $z = \max\{f(x_1), f(x_2)\}$. Dann sind $x_1, x_2 \in N_{\leq}(z)$.
Da diese Niveaumenge zusammenhängend ist (da $f(x_1) \geq f(x^*)$ und $f(x_2) \geq f(x^*)$), gilt für alle $\lambda \in [0,1]$:

$$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in N_{\leq}(z).$$

Somit ist $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq z = \max\{f(x_1), f(x_2)\}$.

„$\Leftarrow$ :“
(a) Folgt direkt aus (i).
(b) $x^*$ ist ein globales Minimum, also gilt $f(x^*) \leq f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Das heißt: $x^* \in N_{\leq}(f(x))$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Daher ist $x^* \in N_{\leq}(z)$ für alle $z \geq f(x^*)$.
Sei $z \geq f(x^*)$ und seien $x_1, x_2 \in N_{\leq}(z)$ beliebig. Dann gilt (wegen (ii))

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \max\{f(x_1), f(x_2)\} \leq z \quad \forall \lambda \in [0,1].$$

Deswegen liegt $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in N_{\leq}(z)$ für alle $\lambda \in [0,1]$ und damit ist $N_{\leq}(z)$ zusammenhängend. □

*Bemerkung* 5.19. Man sieht, dass die quasikonvexen Funktionen die cross-shaped Bedingung im Fall $n = 1$ erfüllen. Allerdings gilt die Äquivalenz nur, weil hier die Bedingung zusätzlich verschärft wurde: es wird gefordert, dass alle Niveaumengen cross-shaped sein sollen. Eigentlich würde es aber reichen, wenn alle $N_{\leq}(z)$ für $z \leq \widetilde{z}$ cross-shaped sind.

Deshalb kann man Lemma 5.18 folgendermaßen verallgemeinern:

**Lemma 5.20.** *Für eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*
*1. (a) Das kontinuierliche Optimierungsproblem*

$$\begin{array}{lll} (RP) & \min & f(x) \\ & s.d. & x \in \mathbb{R} \end{array}$$

*besitzt eine endliche Optimallösung $x^*$ und*
*(b) $N_{\leq}(z)$ ist für alle $f(x^*) \leq z \leq \widetilde{z}$ ein zusammenhängendes Intervall, das $x^*$ enhält.*

*2. (i) $f$ hat ein globales Minimum bei $x^*$.*
*(ii) Für je zwei Punkte $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $\max\{f(x_1), f(x_2)\} \leq \widetilde{z}$ und alle $\lambda \in [0,1]$ gilt:*

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \max\{f(x_1), f(x_2)\}.$$

*(iii) Existiert $y_1 \leq x^*$ mit $f(y_1) > \widetilde{z}$, dann ist $f(x) > \widetilde{z}$ für alle $x \leq y_1$.*
*(iv) Existiert $y_2 \geq x^*$ mit $f(y_2) > \widetilde{z}$, dann ist $f(x) > \widetilde{z}$ für alle $x \geq y_2$.*

*Beweis.* „$\Rightarrow$ :“
(i) Folgt direkt aus (a).
(ii) Wie beim Beweis von 5.18.
(iii) Wenn $y_1 \leq x^*$ gilt, so dass $f(y_1) > \widetilde{z}$ ist, dann ist $y \notin N_{\leq}(\widetilde{z})$. Da diese Niveaumenge zusammenhängend ist, kann kein $x \in \mathbb{R}$ mit $x \leq y$ in $N_{\leq}(\widetilde{z})$ sein.
(iv) Analog zu (iii).

„$\Leftarrow$ :“
(a) Folgt direkt aus (i).
(b) $x^* \in N_{\leq}(z)$ für alle $z \geq f(x^*)$ folgt wie beim Beweis von 5.18. Sei $z$, so dass $f(x^*) \leq z \leq \widetilde{z}$. Seien $x_1, x_2 \in N_{\leq}(z)$, dann auch $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$ für alle $\lambda \in [0,1]$ (nach (ii)). □

*Beispiel.* In Abbildung 5.7 wird veranschaulicht, wie Funktionen aussehen können, die den Forderungen dieses Lemmas entsprechen.

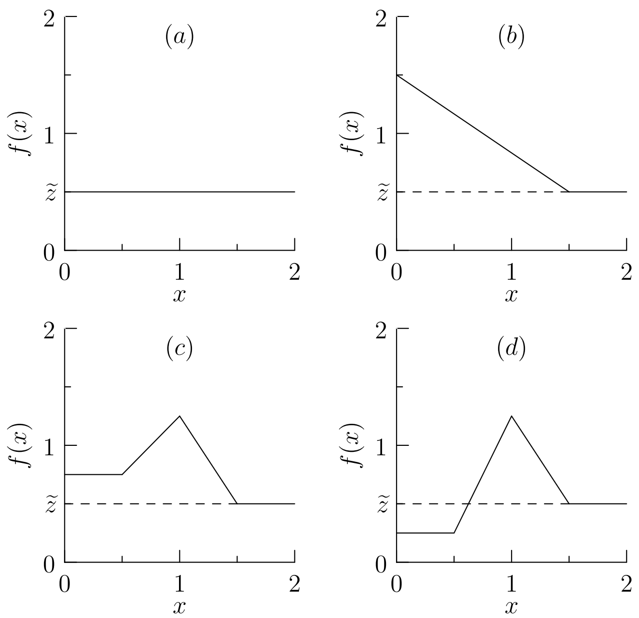


Abbildung 5.7: Die Funktionen (a), (b) und (c) erfüllen die Voraussetzungen des Lemmas. Funktion (d) nicht.

Dabei ist

- (a) konvex und damit auch quasikonvex.
- (b) quasikonvex.
- (c) nicht quasikonvex, erfüllt aber trotzdem die Voraussetzungen des Lemmas.
- (d) nicht quasikonvex und erfüllt auch nicht die Voraussetzungen des Lemmas.

### 5.4.2 Für allgemeine Dimensionen

Zuerst sollen auch hier Sphären untersucht werden.

*Bemerkung* 5.21. Sphären sind immer cross-shaped bezüglich ihres Mittelpunkts.

*Beweis.* Sei $S \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Sphäre mit Mittelpunkt $x^*$ und Radius $R$ und sei $y \in S$. Dann ist $||y - x^*||_2 \leq R$, also

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i^*)^2 \leq R^2.$$

Sei $z \in \mathrm{box}_{x^*}(y)$.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad \forall i = 1, \ldots, n \text{ gilt } |z_i - x_i^*| \leq |y_i - x_i^*| \\
&\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} (z_i - x_i^*)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i^*)^2 \leq R^2 \\
&\Rightarrow \quad ||z - x^*||_2 \leq R \quad \forall z \in \mathrm{box}_{x^*}(y) \\
&\Rightarrow \quad \mathrm{box}_{x^*}(y) \subseteq S
\end{aligned}$$

□

*Bemerkung* 5.22. Genauso kann man auch zeigen, dass alle offenen Sphären, das heißt alle Mengen der Form $\{x \in \mathbb{R}^n : ||x - x^*||_2 < R\}$, cross-shaped bezüglich ihres Mittelpunkts $x^*$ sind.

In Lemma 5.14 hatten wir gezeigt, dass man bei Niveaumengen, die nicht nur cross-shaped, sondern auch achsensymmetrisch bezüglich $x^*$ sind, die Punkte aus $\mathrm{Round}(x^*)$ gar nicht durch zu probieren braucht, da stets gilt: $x_{IP}^* = [x^*]$. Jetzt wollen wir zeigen, dass konvexe Mengen, die bezüglich $x^*$ achsensymmetrisch sind, automatisch auch cross-shaped bezüglich $x^*$ sind.

**Lemma 5.23.** *Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ achsensymmetrisch bezüglich eines Punktes $x \in M$ und konvex, dann ist $M$ bezüglich $x$ cross-shaped.*

*Beweis.* Zu zeigen ist: Sei $y \in M$, dann sind alle $z \in \mathbb{R}^n$ mit $z_i \in \{y_i, x_i\}$ $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ in $M$. Damit ist dann auch $box_x(y) \subseteq M$, da es sich dabei um die konvexe Hülle dieser $z$ handelt und $M$ konvex ist.

Sei also $y = (y_1, \dots, y_n) \in M$ und sei $i \in \{1, \dots, n\}$ beliebig. Definiert man für dieses $i$: $z^i := (y_1, \dots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \dots, y_n)$, dann kann man $z^i$ auch schreiben als: $z^i = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y'$ mit $y' = (y_1, \dots, y_{i-1}, 2x_i - y_i, y_{i+1}, \dots, y_n) \in M$, da $M$ achsensymmetrisch bezüglich $x$ ist. Somit ist auch $z^i \in M$, da $M$ konvex ist und $z^i$ als Konvexkombination zweier Elemente aus $M$ geschrieben werden kann.
Durch Wahl verschiedener $i$ und wiederholter Anwendung dieser Methode kann man zeigen, dass alle $z$ mit $z_i \in \{y_i, x_i\}$ $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ in $M$ liegen. Daher ist (vgl. oben) $M$ cross-shaped bezüglich $x$. $\square$

Damit lässt sich leicht folgendes Lemma zeigen:

**Lemma 5.24.** *Die Einheitsbälle der p-Normen sind cross-shaped bezüglich des Ursprungs.*

*Beweis.* Da es sich bei den $p$-Normen um Normen handelt (vgl. Schöbel [14]) sind ihre Einheitsbälle konvex (vgl. Schöbel [15]).

Außerdem sind ihre Einheitsbälle achsensymmetrisch (bezüglich des Ursprungs), da

$$||x||_p = \left( \sum_{i=1}^{n} |x_i| \right)^{1/p} = ||(x_1, \dots, x_{i-1}, -x_1, x_{i+1}, \dots, x_n)||_p$$

für alle $p$ mit $1 \leq p < \infty$. Genauso gilt:

$$||x||_\infty = \max_{i=1,\dots,n} |x_i| = ||(x_1, \dots, x_{i-1}, -x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)||_\infty$$

Und damit sind sie mit Lemma 5.23 cross-shaped bezüglich des Ursprung. $\square$

Der Vorteil bei diesen Mengen ist, dass sie nicht nur cross-shaped, sondern auch achsensymmetrisch sind, so dass nach 5.14 stets gilt: $x^*_{IP} = [x^*]$.

*Bemerkung* 5.25. Natürlich gilt diese Aussage nicht nur für die Einheitsbälle, sondern für alle Bälle $K_p(0,z) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ ||x||_p \leq z\}$, sowie für verschobene Bälle $K_p(x_0,z) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ ||x - x_0||_p \leq z\}$ - diese sind dann cross-shaped bezüglich $x_0$.

Allerdings ist es durchaus nicht so, dass eine Menge immer achsensymmetrisch sein muss, damit sie cross-shaped ist, wie das folgende Beispiel zeigt:

**Lemma 5.26.** *Der Einheitsball der $\infty$-Norm ist bezüglich jedes Punktes $x \in \mathbb{R}^n$ mit $||x||_\infty \leq 1$ cross-shaped.*

*Beweis.* $K_\infty(0,1)$ ist der Einheitsball der $\infty$-Norm. Sei $x = (x_1, \dots, x_n)$ mit $||x||_\infty \leq 1$, dann ist $x \in K_\infty(0,1)$.

Sei $y = (y_1, \dots, y_n) \in K_\infty(0,1)$. Dann gilt für alle $i = 1, \dots, n$: $x_i \leq 1$ und $y_i \leq 1$.

Für die Eckpunkte $z$ von $\text{box}_x(y)$ gilt dann: $z_i \in \{x_i, y_i\}$ für alle $i \in \{1, \dots, n\}$ und damit: $z_i \leq 1 \ \forall i \in \{1, \dots, n\}$. Also sind auch alle Eckpunkte in $K_\infty(0,1)$ und damit auch $\text{box}_x(y) \subseteq K_\infty(0,1)$, da er als Einheitsball konvex ist (vgl. oben). □

Eigentlich ist man (zumindest in dieser Arbeit) nicht nur an cross-shaped Mengen interessiert, sondern auch an Funktionen, deren Niveaumengen cross-shaped sind. Ein Beispiel für eine Familie von Funktionen, die dies erfüllen, liefert die folgende Definition.

**Definition 5.27.** (Aus Hemmecke u. a. [8], S. 577) Eine Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ heißt separabel konvex, wenn sich $f$ schreiben lässt als

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)$$

mit konvexen Funktionen $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für alle $i = 1, \dots, n$.

**Lemma 5.28.** *Ist $f$ separabel konvex, dann sind die Niveaumengen $N_\leq(z)$ cross-shaped bezüglich $x^*_{(RP)}$ für alle $z \geq f(x^*_{(RP)})$.*

*Beweis.* Sei $x^*_{(\text{RP})}$ ein Punkt, an dem das globale Minimum angenommen wird, das heißt $f(x^*_{(\text{RP})}) \leq f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt aber auch für alle $i = 1, \dots, n$, dass $f_i((x^*_{(\text{RP})})_i) \leq f_i(x) \ \forall x \in \mathbb{R}$.

Sei $z \geq f(x^*_{(\text{RP})})$, also die Niveaumenge $N_\leq(z) \neq \emptyset$, da $x^*_{(\text{RP})} \in N_\leq(z)$. Wir wollen jetzt zeigen, dass die Niveaumenge dann auch cross-shaped bezüglich $x^*_{(\text{RP})}$ ist.

Ist $N_{\leq}(z) = \{x^*_{(\mathrm{RP})}\}$ ist dies offensichtlich der Fall. Sei daher noch ein weiterer Punkt $y \in N_{\leq}(z)$. Dann lässt sich jeder Punkt aus $\mathrm{box}_{x^*_{(\mathrm{RP})}}(y)$ schreiben als

$$p = (\lambda_1 (x^*_{(\mathrm{RP})})_1 + (1-\lambda_1) y_1, \ldots, \lambda_n (x^*_{(\mathrm{RP})})_n + (1-\lambda_n) y_n)$$

mit $\lambda_i \in [0,1]$ für alle $i = 1, \ldots, n$.

Für diese $p$ gilt aber:

$$\begin{aligned}
f(p) &= \sum_{i=1}^{n} f_i(\lambda_i (x^*_{(\mathrm{RP})})_i + (1-\lambda_i) y_i) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i((x^*_{(\mathrm{RP})})_i) + (1-\lambda_i) f_i(y_i) \quad \text{da } f_i \text{ konvex} \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} f_i(y_i) \quad \text{da } f_i((x^*_{(\mathrm{RP})})_i) \leq f_i(y_i) \\
&= f(y) \\
&\leq z \quad \text{da } y \in N_{\leq}(z)
\end{aligned}$$

Somit ist auch $p \in N_{\leq}(z)$ und damit $\mathrm{box}_{x^*_{(\mathrm{RP})}} \subseteq N_{\leq}(z)$.

Das heißt: $N_{\leq}(z)$ ist für alle $z \geq f(x^*_{(\mathrm{RP})})$ cross-shaped bezüglich $x^*_{(\mathrm{RP})}$. $\square$

# 6 Ausblick

Ausgehend von den in dieser Arbeit vorgestellten Ergebnissen gibt es eine Reihe von möglichen Richtungen, in die man weiterdenken kann. Hier soll abschließend noch auf drei dieser Möglichkeiten eingegangen werden.

In den Kapiteln 3 bis 5 wurden drei verschiedene Anforderungen an die Niveaumengen der Zielfunktion vorgestellt, für die das Verfahren zur Bestimmung einer Optimallösung des (IP) anwendbar ist. Doch natürlich werden mit den drei hier vorgestellten geometrischen Formen nicht alle Funktionen abgedeckt, für die dieses Verfahren eine korrekte Lösung liefert. Betrachtet man beispielsweise die folgende Funktion:

*Beispiel.* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0.75 - 1.5x & \text{wenn } x \leq 0.5 \\ -0.5 + x & \text{wenn } 0.5 < x \leq 1 \\ 2 - 1.5x & \text{wenn } 1 < x \leq 1.5 \\ -1.75 + x & \text{wenn } 1.5 < x \leq 2 \\ 3.25 - 1.5x & \text{wenn } 2 < x \leq 2.5 \\ -4.25 + 1.5x & \text{wenn } 2.5 < x \leq 3 \\ 3.25 - x & \text{wenn } 3 < x \leq 3.5 \\ -5.5 + 1.5x & \text{wenn } 3.5 < x \end{cases}$$

(vgl. Abbildung 6.1). Dann ist (mit den in den vorangegangenen Kapiteln verwendeten Bezeichnungen): $x^* = 2.5$, $f(x^*) = -0.5$ und $\widetilde{z} = 0.25$. Sei beispielsweise $z = 0$ (also $f(x^*) < z < \widetilde{z}$). Dann ist

$$N_{\leq}(0) = \left\{ \{0.5\} \cup \left[\frac{4}{3}, 1.75\right] \cup \left[\frac{13}{6}, \frac{17}{6}\right] \cup \left[3.25, \frac{11}{6}\right] \right\}.$$

Da diese Menge nicht zusammenhängend ist, kann sie weder kreisförmig, noch cross-shaped sein. Damit sie quasikreisförmig wäre, müssten wir $r \in \mathbb{R}_0^+$ finden, so dass $K(x^*, r) \subseteq N_{\leq}(0) \subseteq K(x^*, r+1)$. Da $x^* = 2.5$ ist, ist $r = \frac{1}{3}$ $(= \left|\frac{13}{6} - x^*\right| = \left|\frac{17}{6} - x^*\right|)$. Allerdings ist $0.5 \in N_{\leq}(0)$ und $0.5 < x^* - \frac{1}{3} - 1 = \frac{7}{6}$. Also ist $f$ auch nicht quasikreisförmig. Damit erfüllt sie für keinen der Sätze 3.2, 4.3 oder 5.10 die Voraussetzungen.

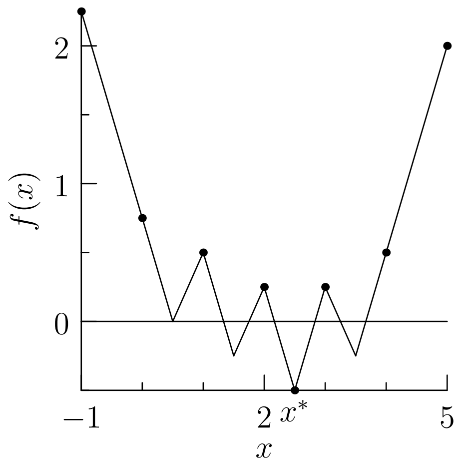


Abbildung 6.1: Die Funktion $f(x)$ für $-1 \leq x \leq 5$.

Trotzdem gilt: $x^*_{(\mathrm{IP})} \in \mathrm{Round}(x^*)$, da für die ganzzahligen Punkte gilt:

$$\begin{aligned} f(x) &\geq 0.75 \quad \forall \quad x \leq 0 \\ f(x) &\geq 0.5 \quad \forall \quad x \geq 4 \\ f(1) &= 0.5 \\ f(2) &= 0.25 \\ f(3) &= 0.25. \end{aligned}$$

Also ist $x^*_{(\mathrm{IP})} \in \{2, 3\} = \mathrm{Round}(x^*)$.

Man könnte also entweder versuchen ein notwendiges Kritierium zu finden, das dazu führt, dass das in dieser Arbeit vorgestellte Verfahren anwendbar ist oder in einem ersten Schritt weitere geometrische Formen identifizieren, die diesen Effekt haben. Natürlich wäre es auch denkbar, sich andere Voraussetzungen an die Niveaumengen einer Funktion (d.h. nicht zwingend geometrische Formen) oder sogar nur an die Funktion zu überlegen.

Wichtig für die praktische Anwendbarkeit wäre zu überlegen, wie man die Ergebnisse, die wir in dieser Arbeit gewonnen haben, auf Probleme mit Nebenbedingungen, das heißt auf Probleme der Form

$$\begin{array}{lll} (\mathrm{IP}) & \min & f(x) \\ & s.d. & x \in S \cap \mathbb{Z}^n \end{array}$$

übertragen kann, wenn $S \subsetneq \mathbb{R}^n$.

Zwei einfache Ergebnisse kann man direkt aus den Ergebnissen dieser Arbeit folgern:
**1.:** Offensichtlich ist zum Beispiel das folgende Ergebnis für Mengen, die cross-shaped sind:
Sind $A$ und $B$ nichtleere Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ und beide bezüglich des Punktes $x$ cross-shaped, dann ist auch $A \cap B$ cross-shaped bezüglich $x$.

*Beweis.* Da $A$ bezüglich $x$ cross-shaped ist, gilt $x \in A$ und analog $x \in B$. Also ist $A \cap B \neq \emptyset$.
Sei $y \in A \cap B$ ein beliebiger Punkt. Dann ist $y \in A$ und deshalb $\text{box}_x(y) \subset A$ und genauso $y \in B$ und daher $\text{box}_x(y) \subset B$. Damit gilt $\text{box}_x(y) \subset A \cap B$. Also ist $A \cap B$ auch cross-shaped bezüglich $x$. □

Das heißt auf ein ganzzahliges Optimierungsproblem, bei dem der zulässige Bereich bezüglich einer optimalen Lösung $x^*$ von (RP) cross-shaped ist und $\text{Round}(x^*)$ enthält und bei dem die Niveaumengen der Zielfunktion für alle $z$ mit $f(x^*) \leq z \leq \widetilde{z}$ cross-shaped bezüglich des gleichen Punktes $x^*$ sind, ist Satz 5.10 anwendbar.

**2.:** Allgemein gilt: Sei $x^*$ eine endliche Optimallösung von

$$\begin{array}{lll}(\text{RP}) & \min & f(x)\\ & \text{s.d} & x \in \mathbb{R}^n,\end{array}$$

so dass die Niveaumengen $N_{\leq}(z)$ der Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ für alle $z \in \mathbb{R}$ mit

$$f(x^*) \leq z \leq \widetilde{z} = \min\{f(x) : \; x \in \text{Round}(x^*)\}$$

von der Form $A(x^*)$ sind und $\text{Round}(x^*) \subseteq S$, so liegt eine optimale Lösung von

$$\begin{array}{lll}(\text{IP}) & \min & f(x)\\ & \text{s.d.} & x \in \mathbb{Z}^n \cap S\end{array}$$

in $\text{Round}(x^*)$.

$$(\text{Wenn } A(x^*) \begin{cases}\text{kreisförmig ist}\\ \alpha-\text{quasikreisförmig mit } \alpha = \min_{x^* \in \mathbb{R}^n}\{d(x^*, \mathbb{Z}^n \setminus \text{Round}\, x^*) - d(x^*, \mathbb{Z}^n)\} \text{ ist}\\ \text{cross-shaped bezüglich } x^* \text{ ist.)}\end{cases}$$

Begründung: Für diese drei Formen $A(x^*)$ haben wir im Laufe dieser Arbeit gezeigt, dass eine optimale Lösung von

$$\begin{array}{lll}(\text{IP})' & \min & f(x)\\ & \text{s.d.} & x \in \mathbb{Z}^n\end{array}$$

in Round($x^*$) liegt. Dabei ist (IP)$'$ eine Relaxation von (IP) und da außerdem gilt Round($x^*$) $\subseteq S$, ist die Optimallösung von (IP)$'$ auch zulässig und daher auch eine Optimallösung für (IP) (vgl. 2.3).

Allgemeine Aussagen, wie man Nebenbedingungen in die Ergebnisse dieser Arbeit einbinden könnte fehlen allerdings noch. Könnte man Nebenbedingungen mit einbeziehen, wäre in einem nächsten Schritt zu untersuchen, ob es für bestimmte ganzzahlige Probleme, die zum Beispiel in der Praxis häufig auftreten, möglich ist nachzuweisen, dass sie die Voraussetzungen erfüllen und das Verfahren deshalb auf sie anwendbar ist.

Interessant wäre es sicherlich auch, zu untersuchen ob dieses Verfahren auch für gemischt-ganzzahlige Probleme anwendbar ist. Ein gemischt-ganzzahliges Optimierungsproblem ist ein Problem, bei dem man fordert, dass ein Teil der Variablen ausschließlich ganzzahlige Werte annehmen darf:

$$\begin{array}{lll}\text{(MIP)} & \min & f(x,y) \\ & s.d. & (x,y) \in S \cap (\mathbb{Z}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2})\,.\end{array}$$

Betrachtet man zum Beispiel wie in 3.1 den Fall einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit kreisförmigen Niveaumengen (also zum Beispiel die Funktion $f(x) = ||x - x^*||_2$ mit $x^* = \left(\frac{5}{3}, 1.5\right)$) mit der zusätzlichen Einschränkung, dass $x_1 \in \mathbb{Z}$ liegen muss:

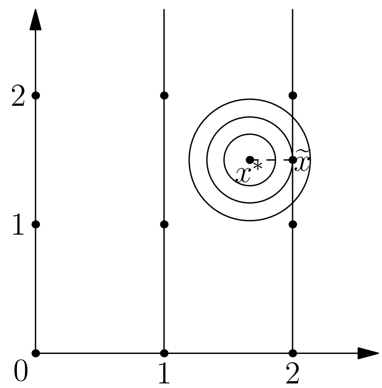


Abbildung 6.2: Beispiel für die Anwendbarkeit auf gemischt-ganzzahlige Probleme

Man sieht, dass für die optimale Lösung $\widetilde{x}$ des gemischt-ganzzahligen Problems

$$\begin{array}{lll}\text{(MIP)} & \min & ||x - x^*||_2 \\ & s.d. & x \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}\end{array}$$

gilt: $\widetilde{x} = ([x_1^*], x_2^*)$. Das heißt: auch hier erhält man eine Lösung des gemischt-ganzzahligen Problems durch Runden der Optimallösung des kontinuierlichen Problems, mit dem Unterschied, dass man nur die Koordinaten rundet, für die Ganzzahligkeit gefordert wurde.

Es wäre also interessant, ausgehend von dieser Motivation, zu untersuchen, inwieweit man auch die anderen Ergebnisse dieser Arbeit auf gemischt-ganzzahlige Probleme übertragen kann.

# Abbildungsverzeichnis

# Literaturverzeichnis

[1] Boltyanski, V. ; Martini, H. ; Soltan, P.S.: Star-Shaped Sets in Normed Spaces. In: *Discrete & Computational Geometry* (1996), Nr. 15, S. 63–71

[2] Coxeter, H.S.M.: *Regular Polytopes*. 1. Auflage. London : Methuen & Co. LTD., 1948

[3] Duran, M. A. ; Grossmann, I. E.: An outer-approximation algorithm for a class of mixed-integer nonlinear programs. In: *Mathematical Programming* 36 (1986), Nr. 3, S. 307–339

[4] Duran, M. A. ; Grossmann, I. E.: An outer-approximation algorithm for a class of mixed-integer nonlinear programs. In: *Mathematical Programming* 39 (1987), Nr. 3

[5] Forster, O.: *Analysis 2*. 6. neu bearbeitete und erweiterte Auflage. Wiesbaden : Vieweg Verlag, 2005

[6] Gupta, O. K. ; Ravindran, A.: Branch-and-Bound experiments in convex nonlinear integer programming. In: *Management Science* 31 (1985), Nr. 12

[7] Heinz, S.: Complexity of integer quasiconvex polynomial optimization. In: *Journal of Complexity* 21 (2005), Nr. 4, S. 543–556

[8] Hemmecke, R. ; Köppe, M. ; Lee, J. ; Weismantel, R.: *Nonlinear Integer Programming*. Kap. 15, S. 561–618. In: Jünger, M. (Hrsg.) ; Liebling, T. (Hrsg.) ; Naddef, D. (Hrsg.) ; Nemhauser, G. (Hrsg.) ; Pulleyblank, W. (Hrsg.) ; Reinelt, G. (Hrsg.) ; Rinaldi, G. (Hrsg.) ; Wolsey, L. (Hrsg.): *50 Years of Integer Programming 1958-2008*. Berlin : Springer-Verlag, 2010

[9] Horst, R.: *Nichtlineare Optimierung*. München : Carl Hanser Verlag, 1979

[10] Karmarkar, N.: A new polynomial-time algorithm for linear programming. In: *Combinatorica* 4 (1984), Nr. 4, S. 373–395

[11] KERSTEN, I.: *Analytische Geometrie und Lineare Algebra I.* 1. Auflage. Göttingen : Universitätsverlag Göttingen, 2005

[12] KÖNIGSBERGER, K.: *Analysis 2.* 4. Auflage. Berlin : Springer-Verlag, 2004

[13] SCHÖBEL, A.: *Vorlesung „Optimierung“.* Sommersemester 2005. – an der Georg-August-Universität Göttingen

[14] SCHÖBEL, A.: *Vorlesung „Numerik I“.* Wintersemester 2006/2007. – an der Georg-August-Universität Göttingen

[15] SCHÖBEL, A.: *Vorlesung „Robuste Optimierung“.* Wintersemester 2009/2010. – an der Georg-August-Universität Göttingen

[16] SCHRIJVER, A.: *Theory of linear and integer programming.* 1. Auflage. Chichester : John Wiley & Sons, 1986

[17] STÖCKER, H.: *Taschenbuch mathematischer Formeln und moderner Verfahren.* 4. korrigierte Auflage. Frankfurt am Main : Verlag Harri Deutsch, 1999

[18] T. ELLINGER, R. L.: *Operations Research - Eine Einführung.* 6. durchgesehene Auflage. Berlin : Springer-Verlag, 2003

[19] WESTERLUND, T. ; PETTERSSON, F.: An extended cutting plane method for solving convex MINLP problems. In: *Computers & Chemical Engineering* 19 (1995)