

Ich versichere, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst habe und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt habe. Alle Stellen der Arbeit, die anderen Werken im Wortlaut oder Sinn nach entnommen wurden, habe ich in jedem Fall unter Angabe der Quelle kenntlich gemacht.

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|------------------------------------|-----------|
| 1 | Einleitung | 3 |
| 2 | Grundlagen | 4 |
| 3 | Aperiodische Fahrpläne | 10 |
| 4 | Periodische Netzwerke | 11 |
| 4.1 | Grundlagen | 12 |
| 4.2 | Slack (Wartezeit) | 14 |
| 5 | Periodische Programme | 17 |
| 5.1 | Zielfunktion | 18 |
| 5.2 | Lösungsverfahren | 20 |
| 5.3 | Der reduzierter Suchbaum | 29 |
| 5.4 | Struktur | 36 |
| 6 | Schrankenlose Probleme | 38 |
| 6.1 | Lösungsverfahren | 38 |
| 6.2 | Alternatives Verfahren | 45 |
| 6.3 | Heuristik | 50 |
| 7 | Literaturverzeichnis | 54 |

1 Einleitung

Ein Fahrplan legt die Ankunfts- und Abfahrtszeiten der Fahrzeuge an den Haltestellen in einem öffentlichen Verkehrsnetz fest. Dabei können den An- und Abfahrten nicht einfach wahrlos irgendwelche Zeiten zugeordnet werden, denn es muss gewährleistet sein, dass die Fahrzeuge diese Zeiten einhalten können und die Fahrgäste sollen die Möglichkeit besitzen in andere Fahrzeuge umzusteigen. Außerdem ist zu beachten, dass öffentliche Verkehrsnetze meistens aus Linien bestehen. Das heißt, dass die Routen in regelmäßigen Abständen befahren werden sollen. Dabei können die Frequenzen, mit denen die einzelnen Routen befahren werden, unterschiedlich sein. In diesem Fall handelt es sich um einen sogenannten periodischen Fahrplan. Das Problem einen sinnvollen periodischen Fahrplan zu finden oder festzustellen, dass es keinen gibt, läßt sich auch mathematisch modellieren und lösen. Ein erstes Verfahren dazu haben Serafini und Ukovich präsentiert. Dieses Verfahren war allerdings für Fahrpläne mit unterschiedlichen Frequenzen nicht optimal bezüglich der Laufzeit. Ein anderes Verfahren mit kürzerer Laufzeit hat Karl Nachtigall in seinem Paper "Periodic network optimization with different arc frequencies" [1] vorgestellt. Außerdem geht Nachtigall auf das Problem ein, einen optimalen Fahrplan zu finden. In diesem Fall bedeutet ein optimaler Fahrplan ein Fahrplan, dessen Wartezeiten beim Umsteigen möglichst gering sind. Diese Arbeit orientiert sich an diesem Paper und soll hauptsächlich dessen Ergebnisse vorstellen. Dabei werden die einzelnen Ergebnisse mit teilweise eigenen Ansätzen hergeleitet. Außerdem werden einige weiterführende Überlegungen getroffen. Der Einfachheit halber wird ein Großteil der Notation des Papers beibehalten.

Die Arbeit gliedert sich wie folgt: Anfangs werden für den Rest der Arbeit wichtige graphentheoretische Grundlagen behandelt, bevor aufgezeigt wird, wie ein Fahrplan mathematisch modelliert wird. Danach werden die Grundlagen für periodische Netzwerke eingeführt. Außerdem wird genauer auf die Wartezeit eingegangen, da auch in dieser Arbeit optimale Fahrpläne bezüglich der Wartezeiten betrachtet werden. Im Abschnitt 5 wird dann anfangs eine Auswahl an möglichen Zielfunktionen gegeben, die man für die Suche nach

optimalen Fahrplänen verwenden kann. Danach wird ein mathematisches Programm aufgestellt für das anschließend das Lösungsverfahren vorgestellt wird. Im letzten Abschnitt geht es dann um einen Spezialfall, bei dem man einen lexikographisch optimalen Fahrplan sucht, wobei alle Fahr- und Wartezeiten der Fahrzeuge fest vorgegeben sind. Nachdem der Algorithmus von Nachtigall vorgestellt wurde, wird dann ein eigenes modifiziertes Verfahren vorgestellt.

2 Grundlagen

Bei der Suche nach Fahrplänen bedient man sich der Graphentheorie. Einen Überblick über die graphentheoretischen Grundlagen findet sich in [5]. In diesem Kapitel werden wir uns mit den graphentheoretischen Aspekten befassen, die für diese Arbeit relevant sind.

Ein *Ereignis-Aktivitätsnetzwerk* ist ein gerichteter, zusammenhängender Graph $\mathcal{N} = (\mathcal{E}, \mathcal{A})$, bei dem die Knoten aus \mathcal{E} jeweils für ein Ereignis stehen und die Kanten aus \mathcal{A} jeweils für eine Aktivität. Sind zwei Ereignisse durch eine Aktivität verbunden, so gibt es eine Kante zwischen den beiden entsprechenden Knoten. Die Kanten aus \mathcal{A} lassen sich jeweils auch schreiben als $(i, j) \cong a$ mit $i, j \in \mathcal{E}$, wobei i das Anfangsereignis ist, welches vor der Aktivität a geschieht, und j das Ereignis ist, das am Ende der Aktivität a passiert. Wir definieren als $\alpha : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{E}$ die Funktion, die jeder Kante ihr Anfangsereignis zuordnet und als $\omega : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{E}$ die Funktion, die jeder Kante ihr Endereignis zuordnet. Für $a \cong (i, j)$ ist somit $\alpha(a) = i$ und $\omega(a) = j$. Die Anzahl der Knoten wird hier mit n bezeichnet; die Anzahl der Kanten mit m .

Ein *Zykel* in einem gerichteten Graphen ist eine Teilmenge von \mathcal{A} , die in dem zugehörigen ungerichteten Graphen einen Kreis bilden würde.

Ein *spannender Baum* ist ein Teilgraph $T = (\mathcal{E}, \tilde{\mathcal{A}})$ von \mathcal{N} , mit $\tilde{\mathcal{A}} \subset \mathcal{A}$, der zusammenhängend ist, aber keinen Zykel besitzt. Die Kantenmenge $\tilde{\mathcal{A}}$ enthält dann $n - 1$ Kanten, die wir im Folgenden als Baumkanten bezeichnen. Die $r := m - n + 1$ Kanten aus $\mathcal{A} \setminus \tilde{\mathcal{A}}$ nennen wir Nichtbaumkanten. Da ein Baum zusammenhängend aber zyklfrei ist, gibt es zu jedem beliebigen Knotenpaar $\{c, d\}$ einen eindeutigen Weg P_{cd} . In dem Teilgraph $T + a := (\mathcal{E}, \tilde{\mathcal{A}} \cup \{a\})$

mit $a \cong (i, j)$ aus $\mathcal{A} \setminus \tilde{\mathcal{A}}$ gibt es dann für die Knoten i und j genau zwei Wege. Einmal den Weg P_{ij} und dann den Weg, der nur aus dem Knoten a besteht. $P_{ij} + a$ bilden damit in dem Teilgraphen $T + a$ einen Zykel. Für jede Nichtbaumkante $a \in \mathcal{A} \setminus \tilde{\mathcal{A}}$ gibt es einen eindeutigen Zykel. Die Menge der Kanten, die in dem Zykel einer Nichtbaumkante a vorkommen, bezeichnen wir mit C_a . Diese kann man noch zerlegen in die Menge der Vorwärtskanten C_a^+ , die alle Kanten enthält, die innerhalb des Zyklus in die selbe Richtung "zeigen" wie die Kante a , und die Menge der Rückwärtskanten C_a^- , die in die entgegengesetzte Richtung "zeigen". Die durch Nichtbaumkanten erzeugten Zykel sind die sogenannten *Elementarzykel*, die alle anderen vorkommenden Zykel aus dem Graphen \mathcal{N} durch Linearkombinationen erzeugen können. Die *Netzwerkmatrix* Γ zu diesem Baum T wird definiert als eine $r \times m$ -Matrix mit

$$\gamma_{ab} = \begin{cases} 0 & b \notin C_a \\ 1 & b \in C_a^+ \\ -1 & b \in C_a^- \end{cases}$$

Jede Zeile dieser Matrix steht also jeweils für einen der Elementarzykel, während die Spalten jeweils zu einer Kante aus \mathcal{A} gehören. Netzwerkmatrizen sind im allgemeinen nicht eindeutig, da die Reihenfolge der Kanten und Elementarzykel beliebig gewählt werden kann. Außerdem sind Netzwerkmatrizen abhängig davon, welchen spannenden Baum man wählt. Ordnet man die Spalten sinnvoll an, indem man erst alle Baumkanten wählt und dann die übrigen r Nichtbaumkanten in derselben Reihenfolge anordnet, wie deren zugehörige Elementarzykel, so hat Γ die Form $[N, E]$ mit einer $r \times (n - 1)$ -Matrix N und der $r \times r$ -Einheitsmatrix E . Netzwerkmatrizen haben außerdem die Eigenschaft, dass sie total unimodular sind. Eine total unimodulare Matrix ist eine Matrix, deren quadratische Submatrizen die Determinante 0, 1 oder -1 haben. Insbesondere sind sämtliche Einträge nur 0, 1 oder -1 .

Ein *Schnitt* (A, B) ist eine Partition der Menge der Knoten in die Mengen A und B , d.h. $A \cup B = \mathcal{E}$ und $A \cap B = \emptyset$. Die *Schnittmenge* ist die Menge der Kanten die diese Mengen verbinden, d.h alle $a \in \mathcal{A}$ für die gilt

$\alpha(a) \in A \wedge \omega(a) \in B$ oder $\alpha(a) \in B \wedge \omega(a) \in A$. Da ein spannender Baum T kreisfrei ist, besteht $T \setminus a := (\mathcal{E}, \tilde{\mathcal{A}} \setminus \{a\})$ für alle Baumkanten a aus zwei Zusammenhangskomponenten. Wir bezeichnen mit \mathcal{E}_a^+ die Menge der Knoten die in derselben Zusammenhangskomponente wie $\omega(a)$ sind und mit \mathcal{E}_a^- die Menge der Knoten die in derselben Zusammenhangskomponente wie $\alpha(a)$ sind. Offensichtlich ist $(\mathcal{E}_a^+, \mathcal{E}_a^-)$ ein Schnitt und dieser ist für jede Baumkante eindeutig. Die Schnittmenge $K_a := \{b \in \mathcal{A} \mid (\alpha(b) \in \mathcal{E}_a^+ \wedge \omega(b) \in \mathcal{E}_a^-) \vee (\alpha(b) \in \mathcal{E}_a^- \wedge \omega(b) \in \mathcal{E}_a^+)\}$ lässt sich unterteilen in die Menge der sogenannten *Vorwärtskanten* $K_a^+ := \{b \in \mathcal{A} \mid \alpha(b) \in \mathcal{E}_a^- \wedge \omega(b) \in \mathcal{E}_a^+\}$ und den *Rückwärtskanten* $K_a^- := \{b \in \mathcal{A} \mid \alpha(b) \in \mathcal{E}_a^+ \wedge \omega(b) \in \mathcal{E}_a^-\}$.

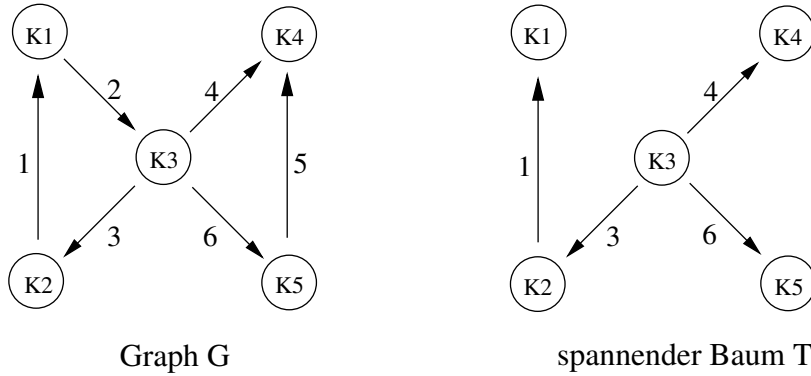


Abbildung 1: Beispielgraph

Beispiel. Als Beispiel betrachten wir den Graphen G aus der Abbildung 1 mit der Knotenmenge $\mathcal{E} = \{K1, K2, K3, K4, K5\}$ und der Kantenmenge $\mathcal{A} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Die Kantenmengen $\{1, 2, 3\}$ und $\{4, 5, 6\}$ sind jeweils ein Zykel. Der Teilgraph T mit der Kantenmenge $\tilde{\mathcal{A}} = \{1, 3, 4, 6\}$ ist ein möglicher spannender Baum. Für die Nichtbaumkante 2 ist der Elementarzykel $C_2 = \{1, 2, 3\}$, wobei $C_2^+ = \{1, 2, 3\}$ und $C_2^- = \emptyset$ ist. Für die Nichtbaumkante 5 ist $C_5 = \{4, 5, 6\}$ mit $C_5^+ = \{5, 6\}$ und $C_5^- = \{4\}$. Mit der Reihenfolge 1, 3, 4, 6, 2, 5 für die Kanten und 2, 5 für die Elementarzykel erhalten wir als Netzwerkmatrix

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Für die Baumkante 3 erhalten wir den Schnitt $(\mathcal{E}_3^+, \mathcal{E}_3^-)$ mit $\mathcal{E}_3^+ = \{K1, K2\}$ und $\mathcal{E}_3^- = \{K3, K4, K5\}$. Die daraus resultierende Schnittmenge ist dann $K_3 = \{2, 3\}$ mit $K_3^+ = \{3\}$ und $K_3^- = \{2\}$. Die anderen Schnitte ergeben sich entsprechend.

Definition. Eine Knotenbewertung ist eine Funktion $\pi : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ die jedem Knoten aus \mathcal{E} eine reelle Zahl zuordnet.

In einem Ereignis-Aktivitätsnetzwerk stehen die reellen Zahlen, die den Ereignissen zugeordnet werden, oftmals für Zeitpunkte an dem das Ereignis stattfinden soll. Bei den dazugehörigen Aktivitäten dieser Netzwerke geht man davon aus, dass diese Zeit in Anspruch nehmen. Für eine Aktivität $a \cong (i, j)$ ist die vorgesehene Zeit, die Zeit des Ereignisses j , welche am Ende der Aktivität steht, vermindert um die Zeit des Ereignisses i , welches am Anfang der Aktivität steht, also $x_a := \pi(j) - \pi(i)$. Man nennt x_a die *Spannung von a* und den Vektor $x \in \mathbb{R}^m$, der aus den einzelnen Spannungen der Kanten besteht, die *Spannung*. Die für den Vektor maßgebliche Reihenfolge der Kanten entspricht dabei derselben Reihenfolge wie sie bei der Netzwerkmatrix gewählt wurde.

Für die jeweiligen Spannungen x_a kann es in dem Ereignis-Aktivitätsnetzwerk sowohl obere als auch untere Schranken geben, so dass dann gelten muss $d_a^{min} \leq x_a \leq d_a^{max}$, wobei $d_a^{max} \in \mathbb{R}$ die obere Schranke ist und $d_a^{min} \in \mathbb{R}$ die untere Schranke. Der Einfachheit halber kann man auch schreiben $x_a \in [d_a^{min}, d_a^{max}]$. Die Differenz der oberen Schranke und der unteren Schranke bezeichnen wir mit $d_a := d_a^{max} - d_a^{min}$. Mit d^{min} und d^{max} bezeichnen wir die Vektoren, die aus den einzelnen Schranken d_a^{min} und d_a^{max} bestehen, sowie mit d den Vektor, der aus den einzelnen Differenzen d_a besteht. Für eine Spannung x können wir somit zusammenfassend schreiben $d^{min} \leq x \leq d^{max}$ bzw. $x \in [d^{min}, d^{max}]$.

Definition. Eine Knotenbewertung heißt zulässig, wenn für alle $a \cong (i, j) \in \mathcal{A}$ gilt $\pi(j) - \pi(i) \in [d_a^{min}, d_a^{max}]$. Eine Spannung x die $x_a \in [d_a^{min}, d_a^{max}]$ für alle $a \in \mathcal{A}$ erfüllt, heißt zulässige Spannung.

Beispiel. Die Abbildung 2 ist ein Beispiel für einen Graphen mit einer zulässigen Knotenbewertung bzw. Spannung.

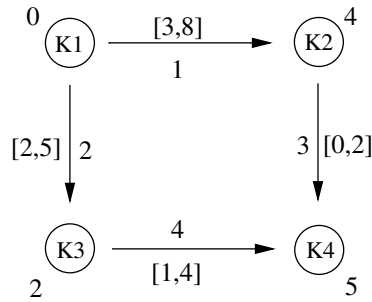


Abbildung 2: zulässige Knotenbewertung

Die Knoten haben die Werte $\pi(K1) = 0, \pi(K2) = 4, \pi(K3) = 2$ und $\pi(K4) = 5$ zugeordnet bekommen. Somit erhalten wir die Spannungen $x_1 = 4, x_2 = 2, x_3 = 1$ und $x_4 = 3$. Da für alle Kanten gilt $x_i \in [d_i^{min}, d_i^{max}]$, ist die Spannung bzw. die Knotenbewertung zulässig.

Für eine Spannung $x \in \mathbb{R}^m$ gilt für alle Zykel C des Graphen

$$x(C) := \sum_{a \in C^+} x_a - \sum_{a \in C^-} x_a = 0 \quad (1)$$

denn würde für einen Zykel $x(C) = c$ mit $c \neq 0$ gelten, würde man für einen beliebigen Anfangsknoten $i \in C$ mit Knotenbewertung π_i nach Durchlauf des Zyklus den Wert $\pi_i + c$ erhalten, was einen Widerspruch ergibt. Umgekehrt lässt sich auch zeigen, dass alle Vektoren des \mathbb{R}^m , die (1) für alle Zykel C erfüllen, eine zulässige Spannung sind. Da alle Zykel Linearkombinationen der Elementarzykel sind, ist (1) genau dann für alle Zykel erfüllt, wenn (1) für alle Elementarzykel erfüllt ist. Und weil nach der Definition der Netzwerkmatrix gerade

$$\sum_{b \in \mathcal{A}} \gamma_{ab} \cdot x_b = \sum_{b \in C_a^+} x_b - \sum_{b \in C_a^-} x_b \quad \forall a \in \mathcal{A} \setminus \tilde{\mathcal{A}}$$

gilt, kommen wir daher zu folgendem Satz.

Satz ([6]). $x \in \mathbb{R}^m$ ist eine Spannung $\iff \Gamma x = 0$

Beweis.

$$\begin{aligned}
& x \in \mathbb{R}^m \text{ ist eine Spannung} \\
& \iff x(C) = 0 \text{ für alle Zykel } C \\
& \iff x(C_a) = 0 \text{ für alle Elementarzykel } C_a \\
& \iff \sum_{b \in C_a^+} x_b - \sum_{b \in C_a^-} x_b = 0 \quad \forall a \in \mathcal{A} \setminus \tilde{\mathcal{A}} \\
& \iff \begin{pmatrix} \gamma_{a1} \\ \gamma_{a2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \gamma_{ar} \end{pmatrix} \cdot x = 0 \quad \forall a \in \mathcal{A} \setminus \tilde{\mathcal{A}} \\
& \iff \Gamma \cdot x = 0
\end{aligned}$$

□

Die Menge der zulässigen Spannungen ist somit $\{x \in \mathbb{R}^m \mid \Gamma x = 0; d^{\min} \leq x \leq d^{\max}\}$.

Beispiel. Für den Graph aus Abbildung 1 betrachten wir die Knotenbewertung $\pi(K1) = 0, \pi(K2) = 5, \pi(K3) = 3, \pi(4) = 7$ und $\pi(K5) = 3$. Damit ergeben sich die Spannungen $x_1 = -5, x_2 = 3, x_3 = 2, x_4 = 4, x_5 = 4$ und $x_6 = 0$. Die Reihenfolge der Spannungen im Vektor x orientiert sich an der Netzwerkmatrix, somit ergibt sich in diesem Fall $x = (-5, 3, 4, 0, 2, 4)^t$. Mit diesem x gilt nun $\Gamma x = 0$.

Aus der Definition der zulässigen Knotenbewertung ergibt sich schon, dass jede Spannung, die zu einer zulässigen Knotenbewertung gehört, eine zulässige Spannung ist. Umgekehrt ist jede Knotenbewertung, die man aus einer zulässigen Spannung erhält, eine zulässige Knotenbewertung. Zu einer zulässigen Spannung erhält man leicht eine zugehörige Knotenbewertung, indem man einem beliebigen Knoten i eine beliebige Zeit $\pi(i)$ zuordnet und die Zeiten der restlichen Knoten einfach sukzessive anhand der Spannung errechnet. Das Problem eine zulässige Knotenbewertung zu finden, kann man daher auch lösen, indem man eine zulässige Spannung findet. Das es zu einer

Spannung unendlich viele Knotenbewertungen gibt ist dabei unerheblich, da sich Knotenbewertungen mit derselben Spannung bezüglich ihrer Zulässigkeit und Optimalität nicht unterscheiden.

3 Aperiodische Fahrpläne

Bevor wir uns mit den periodischen Fahrplänen auseinander setzen, betrachten wir erst den einfacheren Fall der aperiodischen Fahrpläne.

Für eine gegebene Menge Z an Fahrzeugen und deren Routen gilt es einen Fahrplan zu finden, der durchführbar ist und nach Möglichkeit auch optimal. Um dieses Problem zu modellieren, benutzt man das oben eingeführte Ereignis-Aktivitätsnetzwerk. Die Ankunft und die Abfahrt der Fahrzeuge an den Haltestellen ist dabei jeweils ein Ereignis. Die Fahrten der Fahrzeuge zwischen den Haltestellen, das Warten der Fahrzeuge an einer Haltestelle bis zur Abfahrt, sowie das Umsteigen von einem Fahrzeug in ein anderes sind jeweils eine Aktivität. Man kann die Knoten- und die Kantenmenge also noch weiter zerlegen:

- $\mathcal{E}_{arr} = \{(z, a, arr) \mid \text{Fahrzeug } z \text{ kommt an der Haltestelle } a \text{ an}\}$
- $\mathcal{E}_{dep} = \{(z, a, dep) \mid \text{Fahrzeug } z \text{ fährt an der Haltestelle } a \text{ ab}\}$
- $\mathcal{A}_{drive} = \{(z, a, dep), (z, b, arr) \mid z \text{ fährt von Haltest. } a \text{ nach Haltest. } b\}$
- $\mathcal{A}_{wait} = \{(z, a, arr), (z, a, dep) \mid \text{Fahrzeug } z \text{ wartet an Haltestelle } a\}$
- $\mathcal{A}_{change} = \{(z, a, arr), (\bar{z}, a, dep) \mid \text{Möglichkeit in } a \text{ von } z \text{ nach } \bar{z} \text{ umzusteigen}\}$

Beispiel. Das Fahrzeug z_1 fährt ab an Haltestation A und kommt an Haltestelle B an. Nach einer kurzen Haltezeit fährt z_1 von Haltestelle B ab und fährt schließlich zur Haltestelle C. Das Fahrzeug z_2 fährt an Haltestelle D ab, hält dann auch kurz an der Haltestelle B, bevor es dann zur Haltestelle E weiterfährt. An der Haltestelle B haben die Fahrgäste aus dem Fahrzeug z_2 die Möglichkeit in das Fahrzeug z_1 umzusteigen. Umgekehrt besteht diese Möglichkeit allerdings nicht. Die Abbildung 3 zeigt das zu dieser Situation zugehörige Ereignis-Aktivitätsnetzwerk.

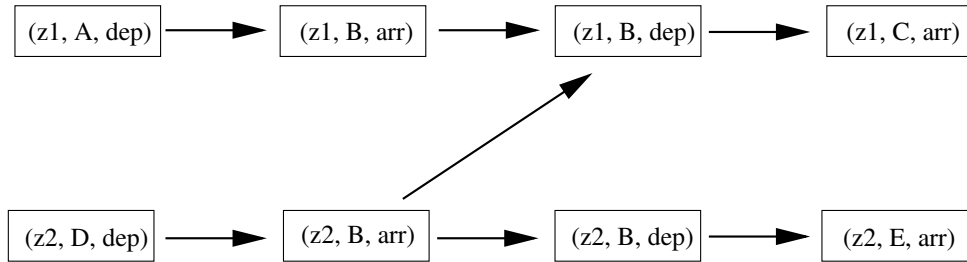


Abbildung 3: Modellierung

Eine Knotenbewertung, bei der jede An- und Abfahrt einen Zeitpunkt zugeordnet bekommt, ist dann ein Fahrplan. Allerdings ist nicht jeder Fahrplan zulässig. Die Aktivitäten des Netzwerkes können zeitlichen Beschränkungen unterliegen. Zum Beispiel benötigen Fahrzeuge für die Fahrten zwischen den Haltestellen technisch bedingte Mindestzeiten. Auch das Umsteigen von einem Fahrzeug in ein anderes benötigt jeweils eine gewisse Mindestzeit. Die zeitlichen Beschränkungen bilden die oberen und unteren Schranken in unserem Ereignis-Aktivitätsnetzwerk. Damit ein Fahrplan also zulässig ist muss gelten $\pi_j - \pi_i \in [d_a^{min}, d_a^{max}] \forall a \in \mathcal{A}$. Dabei sind $d_a^{min} = -\infty$ und $d_a^{max} = +\infty$ zulässig, falls es für eine Aktivität keine obere oder untere Schranke gibt.

Einen zulässigen aperiodischen Fahrplan kann man mit Hilfe eines kürzeste-Wege-Verfahrens ermitteln. Das Verfahren dazu ist beschrieben in [7]. Einen Überblick über kürzeste-Wege-Verfahren liefern Gondran und Minoux [5].

4 Periodische Netzwerke

Einen aperiodischen Fahrplan stellt man auf, wenn man alle Fahrzeug einzeln betrachtet und die Fahrzeuge untereinander in keiner Abhängigkeit stehen. Betrachtet man allerdings eine Menge von Linien, bei denen eine Route in einem gewissen Zeitabstand regelmäßig befahren wird, so ist es nicht sinnvoll jede einzelnen Fahrt zu betrachten, sondern man beschränkt sich nur auf die Linien. In diesem Fall betrachtet man alle Ankünfte bzw. Abfahrten einer Linie an einer Haltestelle nur noch als ein periodisches Ereignis. Fahrt beispielsweise

eine Linie alle 30 Minuten von Bahnhof a ab in Richtung Bahnhof b , so ist diese nur noch ein Ereignis mit einer Periode von 30 Minuten. In diesem Fall wird das Problem mit Hilfe eines periodischen Ereignis-Aktivitätsnetzwerkes modelliert.

4.1 Grundlagen

In einem periodischen Ereignis-Aktivitätsnetzwerk betrachtete man statt des einzelnen Ereignisses ein periodisches Ereignis i , das eine abzählbar unendliche Menge von Ereignissen $i(z)$ ist, die sich periodisch wiederholen. Das $z \in \mathbb{Z}$ gibt dabei an, das wievielte Ereignis es jeweils ist in Relation zu einem festen aber beliebig gewählten Ereignis $i(0)$. Die Periode, die jedes periodische Ereignis i hat, wird mit τ_i bezeichnet. Eine Knotenbewertung π ordnet jedem periodischen Ereignis i eine Zeit $\pi(i) \in \mathbb{R}$ zu. Damit ergibt sich dann für jedes einzelne Ereignis $i(z)$ die Zeit $\pi(i) + z\tau_i$.

Auch in einem periodischen Netzwerk kann jede Kante a eine obere Schranke d_a^{max} und eine untere Schranke d_a^{min} besitzen. Bei periodischen Fahrplänen entsprechen die Schranken der Fahr- und Warteaktivitäten denselben Schranken wie bei einem aperiodischen Fahrplan. Auch für die Umsteigeaktivitäten sind die Schranken dieselben. Die untere Schranke ist also auch hier die Zeit, die ein Passagier zum Wechseln der Haltestelle benötigt. Die obere Schranke kann eine Vorgabe des Verkehrsunternehmens sein, damit Umsteigesaktivitäten nicht zu lange dauern. Allerdings werden wir noch sehen, dass die Dauer einer Umsteigeaktivität davon abhängen kann mit welchem Zug der Linie man ankommt und diese damit nicht immer innerhalb der Schranken liegt. Dies ist aber insofern unerheblich, da man annimmt, dass die Passagiere ihre Fahrt so planen werden, dass sie eine möglichst kurze Umsteigedauer haben. Somit muss nur die kürzeste Umsteigedauer innerhalb der Schranken liegen.

Hat ein periodisches Netzwerk eine einheitliche Periode t und Schranken d^{min} und d^{max} , so ist eine Knotenbewertung zulässig, wenn es für alle Kanten $a \cong (i, j)$ eine Zahl $z_a \in \mathbb{Z}$ gibt, so dass $\pi(j) - \pi(i) + z_a t \in [d_a^{min}, d_a^{max}]$. Die jeweiligen z_a werden auch *Moduloparameter* genannt. Das Problem für solch ein Netzwerk eine zulässige Knotenbewertung zu finden oder zu zeigen, dass

es keine gibt, wird *Periodic Event Scheduling Problem (PESP)* genannt. Das PESP ist für $t > 2$ NP-schwer (siehe [2] und [3]). Einen Algorithmus zur Lösung des PESP haben Serafini und Ukovich gegeben [3]. Das *Extended Periodic Event Scheduling Problem (EPESP)* ist dann das Problem eine zulässige Knotenbewertung für ein periodisches Netzwerk mit unterschiedlichen Perioden zu finden, oder zu zeigen, dass keine existiert. Eine Knotenbewertung ist in diesem Fall zulässig, wenn es für alle Kanten $a \cong (i, j)$ Ereigniszahlen z_i, z_j gibt, so dass gilt $\pi(j) + z_j \tau_j - (\pi(i) + z_i \tau_i) \in [d_a^{\min}, d_a^{\max}]$. Das EPESP läßt sich mit Hilfe eines Algorithmus lösen, der im Folgenden vorgestellt und erläutert wird. Dieser baut auf dem Algorithmus zur Lösung des PESP auf, so dass stellenweise darauf eingegangen wird.

Während für ein Netzwerk mit einheitlicher Periode für jede Kante a jeweils nur ein Moduloparameter z_a benötigt wird, haben wir im Netzwerk mit unterschiedlichen Perioden zwei Ereigniszahlen z_i, z_j . Als nächstes wollen wir die zwei Ereigniszahlen z_i, z_j in den periodischen Netzwerken mit unterschiedlicher Periode auf ebenfalls einen Moduloparameter reduzieren.

Für jede Aktivität a wird die *Aktivperiode* zu a definiert als $\tau_a := \text{ggT}(\tau_i, \tau_j)$. Wir bezeichnen mit $\tau \in \mathbb{Z}^m$ den Vektor, der alle Aktivperioden enthält. Mit dem folgenden Lemma erhalten wir, dass $\tau_i \mathbb{Z} + \tau_j \mathbb{Z} = \tau_a \mathbb{Z}$ ist.

Lemma. Sei $a, b \in \mathbb{Z}$ und $c := \text{ggT}(a, b)$. Dann gilt $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = c\mathbb{Z}$

Beweis. Sei $x \in a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$, dann ist $x = y + z$ mit $y \in a\mathbb{Z}$ und $z \in b\mathbb{Z}$. Da $c = \text{ggT}(a, b)$ ist, gibt es $k, l \in \mathbb{Z}$ mit $a = c \cdot k$ und $b = c \cdot l$. Außerdem gibt es $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $y = a \cdot m$ und $z = b \cdot n$. Daraus folgt dann $x = y + z = a \cdot m + b \cdot n = c \cdot k \cdot m + c \cdot l \cdot n = c \cdot (k \cdot m + l \cdot n)$. Somit ist $x \in c\mathbb{Z}$, da $(k \cdot m + l \cdot n) \in \mathbb{Z}$ ist.

Sei $x \in c\mathbb{Z}$. Dann gibt es ein $d \in \mathbb{Z}$ mit $x = c \cdot d$. Die Zahlen a, b lassen sich wieder darstellen als $a = c \cdot k$ und $b = c \cdot l$ mit $k, l \in \mathbb{Z}$, wobei k und l teilerfremd sind. Aus dem ersten Teil des Beweises folgt, dass $k\mathbb{Z} + l\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ ist. Wir nehmen an, dass $k\mathbb{Z} + l\mathbb{Z} \neq \mathbb{Z}$ ist. Da die Summe zweier Ideale offensichtlich wieder ein Ideal ist und alle Ideale in \mathbb{Z} von der Form $f\mathbb{Z}$ sind mit $f \in \mathbb{N}$ (siehe [8]), ist $k\mathbb{Z} + l\mathbb{Z} = g\mathbb{Z}$ mit entsprechendem $g \in \mathbb{N}_{>1}$. Daraus folgt, dass $k, l \in g\mathbb{Z}$ sind und somit sind k und l jeweils Vielfache von g , was ein

Widerspruch dazu ist, dass k und l teilerfremd sind. Es gilt also $k\mathbb{Z} + l\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ und somit gibt es $m, n \in \mathbb{Z}$, so dass $k \cdot m + l \cdot n = 1$ ist. Daher lässt sich x auch darstellen als $x = c \cdot d \cdot (k \cdot m + l \cdot n) = a \cdot m \cdot d + b \cdot n \cdot d \in a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$. \square

Für beliebige Ereigniszahlen z_i, z_j gibt es daher jeweils ein entsprechendes z_a , so dass $z_j\tau_j - z_i\tau_i = z_a\tau_a$. Somit ist also eine Knotenbewertung eines periodischen Netzwerkes mit unterschiedlichen Perioden zulässig, wenn es für alle Kanten $a \cong (i, j)$ ein z_a gibt, so dass $\pi(j) - \pi(i) + z_a\tau_a \in [d_a^{min}, d_a^{max}]$. Die Menge der zulässigen Spannungen ist somit

$$X := \{x \in \mathbb{R}^m \mid \Gamma x = 0; \exists z_a \in \mathbb{Z} : d_a^{min} \leq x_a + z_a\tau_a \leq d_a^{max} \forall a \in \mathcal{A}\}$$

Wir definieren mit $\mathcal{G} := \{\sum_{a=1}^m z_a\tau_a e_a \mid z_a \in \mathbb{Z}\}$, wobei e_a der a -te Einheitsvektor sein soll, die Menge aller Vektoren, deren Einträge jeweils Vielfache der entsprechenden Aktivperioden sind. Es ist leicht einzusehen, dass \mathcal{G} eine Gruppe bezüglich der Addition bildet. Nutzen wir nun noch die Äquivalenz $d^{min} \leq x + p \leq d^{max} \iff 0 \leq x + p - d^{min} \leq d$, so können wir X auch schreiben als $X = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \Gamma x = 0; \exists p \in \mathcal{G} : 0 \leq x + p - d^{min} \leq d\}$.

4.2 Slack (Wartezeit)

Neben einem zulässigen Fahrplan wird ein Fahrplan gesucht, der die Wartezeiten der Fahrgäste minimiert. Dazu müssen wir erstmal die Wartezeit mathematisch modellieren.

Die Wartezeit ist bekanntermaßen die Zeit, die ein Passagier, nach Ankunft seines Zuges und nach dem Wechsel der Haltestelle, warten muss, bis sein Anschlußzug abfährt. Wir gehen nun davon aus, dass ein Passagier von der Linie A in ein Fahrzeug der Linie B umsteigen will. Die Ankunft eines Zuges der Linie A ist ein Ereignis $i(k)$ aus der zugehörigen Ereignismenge i mit entsprechender Ereigniszahl $k \in \mathbb{Z}$. Die Ankunftszeit beträgt daher $\pi(i) + k\tau_i$. Nach der Ankunft muss der Passagier die Haltestelle wechseln. Diese Umsteigeaktivität $a \cong (i, j)$ benötigt eine gewisse Mindestzeit. Diese bildet gerade die untere Schranke d_a^{min} der Aktivität. Der Passagier kann also nur die Züge der Linie B benutzen, die nach $\pi(i) + k\tau_i + d_a^{min}$ abfahren. Das sind alle die Züge mit Abfahrt $j(z)$, für die gilt $\pi(j) + z\tau_j \geq \pi(i) + k\tau_i + d_a^{min}$. Da der

Passagier den erstmöglichen Anschlußzug nehmen wird, beträgt die Wartezeit also die kleinste positive Differenz von $\pi(j) + z\tau_j$ und $\pi(i) + k\tau_i + d_a^{min}$. Formal lässt sich die Wartezeit s der Umsteigeaktivität a für ein fest gewähltes k darstellen als:

$$s_{a,k} := \min_{z \in \mathbb{Z}} \left\{ \pi(j) + z\tau_j - (\pi(i) + k\tau_i + d_a^{min}) \mid \pi(j) + z\tau_j \geq \pi(i) + k\tau_i + d_a^{min} \right\}$$

Mit Hilfe der Modulo-Funktion

$$[\cdot]_{\tau_a} := \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto [x]_{\tau_a} := \min_{z \in \mathbb{Z}} \{x + z\tau_a \mid x + z\tau_a \geq 0\} \end{cases}$$

und der Spannung von a finden wir einen kürzeren und übersichtlicheren Ausdruck für die Wartezeit

$$s_{a,k}(x) = [x_a - k\tau_i - d_a^{min}]_{\tau_j}$$

Im weiteren Verlauf werden wir nun anstatt Wartezeit den üblicheren Begriff *Slack* verwenden. Da die Perioden τ_i und τ_j unterschiedlich sein können, hängt der Slack $s_{a,k}$ einer Aktivität von der Ereigniszahl k des Anfangsereignisses ab. Als nächstes wollen wir den Slack einer Umsteigeaktivität genauer untersuchen und den minimalen, maximalen und durchschnittlichen Slack bestimmen. Dazu benötigen wir die beiden folgenden Lemmata.

Lemma. Für $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{N}$ mit $ggT(\tau_1, \tau_2) = \tau$ nimmt die Folge $([k\tau_1]_{\tau_2})_{k \in \mathbb{Z}}$ genau die Werte $0, \tau, 2\tau, \dots, ((\tau_2/\tau) - 1)\tau$ an. (Wobei die Reihenfolge eine andere sein kann)

Beweis. Es gibt $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $\tau_1 = a\tau$ und $\tau_2 = b\tau$. Aus der Gleichung $b\tau_1 = ba\tau = a\tau_2$ folgt dann

$$[(k+b)\tau_1]_{\tau_2} = [k\tau_1 + b\tau_1]_{\tau_2} = [k\tau_1 + a\tau_2]_{\tau_2} = [k\tau_1]_{\tau_2}$$

Da dies für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt, hat die Folge $([k\tau_1]_{\tau_2})_{k \in \mathbb{Z}}$ die Periode $b = \tau_2/\tau$. Es sei $D := \{0, \tau, 2\tau, \dots, ((\tau_2/\tau) - 1)\tau\} \subset \tau\mathbb{Z}$. Da $\tau_1\mathbb{Z} + \tau_2\mathbb{Z} = \tau\mathbb{Z}$ ist, gibt es für jedes $d \in D$ ein $\tilde{k} \in \mathbb{Z}$ und ein $\tilde{z} \in \mathbb{Z}$ mit $\tilde{k}\tau_1 + \tilde{z}\tau_2 = d$. Da für alle $d \in D$ gilt $0 \leq d < \tau_2$, ist $[\tilde{k}\tau_1]_{\tau_2} = \min_{z \in \mathbb{Z}} \{\tilde{k}\tau_1 + z\tau_2 \mid \tilde{k}\tau_1 + z\tau_2 \geq 0\} = d$. Die Folge nimmt also alle Werte aus D an. Da $|D| = \tau_2/\tau$ ist, nimmt sie auch nur diese Werte an. \square

Lemma ([1]). Für $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{N}$ mit $ggT(\tau_1, \tau_2) = \tau$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ hat die Folge

$$([\alpha + k\tau_1]_{\tau_2})_{k \in \mathbb{Z}}$$

die Periode $q_2 := \tau_2/\tau$ und enthält genau die Zahlen $[\alpha]_{\tau} < [\alpha]_{\tau} + \tau < \dots < [\alpha]_{\tau} + (q_2 - 1)\tau$. (Wobei die Reihenfolge eine andere sein kann)

Beweis. Mit der gleichen Überlegung wie im vorherigen Beweis erhalten wir, dass die Folge $([\alpha + k\tau_1]_{\tau_2})_{k \in \mathbb{Z}}$ die Periode τ_2/τ hat. Da die Folge $([k\tau_1]_{\tau_2})_{k \in \mathbb{Z}}$ gerade die $\frac{\tau_2}{\tau}$ Werte $0, \tau, 2\tau, \dots, ((\tau_2/\tau) - 1)\tau$ annimmt, folgt daraus, dass die Folge $([\alpha + k\tau_1]_{\tau_2})_{k \in \mathbb{Z}}$ die Werte $[\alpha]_{\tau} < [\alpha]_{\tau} + \tau < \dots < [\alpha]_{\tau} + (q_2 - 1)\tau$ hat. \square

Die Folge des Slacks $(s_{a,k})_{k \in \mathbb{Z}}$ hat also nach dem Lemma die Periode $q_j := \tau_j/\tau_a$ und enthält die Zahlen $[x_a - d_a^{min}]_{\tau_a} + r\tau_a$ mit $0 \leq r \leq q_j - 1$. Aus dieser Folge des Slacks der Aktivität a läßt sich direkt der minimale und auch der maximale Slack ablesen.

$$s_a^{max}(x) = [x_a - d_a^{min}]_{\tau_a} + (q_j - 1)\tau_a = [x_a - d_a^{min}]_{\tau_a} + (\tau_j - \tau_a)$$

$$s_a^{min}(x) = [x_a - d_a^{min}]_{\tau_a}$$

Auch den durchschnittlichen Slack kann man mit dem arithmetische Mittel ermitteln.

$$s_a^{av}(x) = \frac{1}{q_j} \sum_{r=0}^{q_j-1} ([x_a - d_a^{min}]_{\tau_a} + r\tau_a) = [x_a - d_a^{min}]_{\tau_a} + \frac{1}{2}(\tau_j - \tau_a)$$

Für denn Fall, dass das Netzwerk eine einheitliche Periode t hat, ergibt sich für jede Umsteigeaktivität a der von der Ereigniszahl k unabhängige Slack $s_a = [x_a - d_a^{min}]_t$.

Beispiel. Die Ereignismengen 1 und 2 haben die Periode $\tau_1 = 10$ und $\tau_2 = 6$. Daraus ergibt sich für die Aktivität $a \cong (1, 2)$ die Aktivperiode $\tau_a = 2$. Die untere Schranke sei $d_a^{min} = 1$. Ordnet man der Ereignismenge 1 den Wert $\pi(1) = 0$ zu, sowie der Ereignismenge 2 ebenfalls den Wert $\pi(2) = 0$, so ergibt

sich für den minimalen Slack $s_a^{min} = [\pi(2) - \pi(1) - d_a^{min}]_{\tau_a} = [0 - 0 - 1]_2 = 1$. Als maximalen Slack erhalten wir $s_a^{max} = [\pi(2) - \pi(1) - d_a^{min}]_{\tau_a} + (\tau_2 - \tau_1) = [0 - 0 - 1]_2 + 6 - 2 = 5$ und als durchschnittlichen Slack $s_a^{av} = 3$. Eine Veranschaulichung des Slacks liefert die Abbildung 4. Die Rechtecke sollen hierbei den unterschiedlichen Slack verdeutlichen, der für diese Aktivität entsteht.

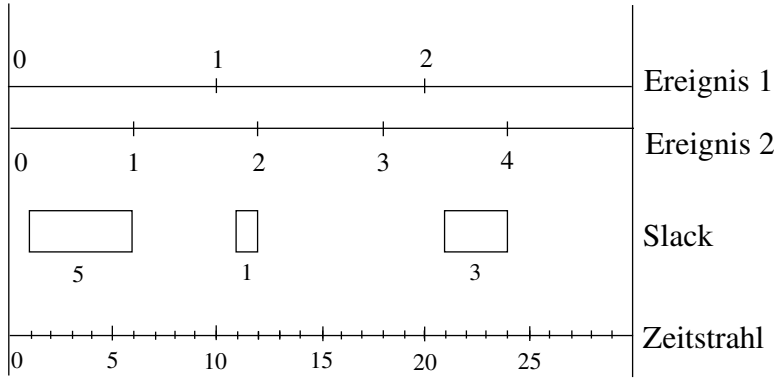


Abbildung 4: Slacks

5 Periodische Programme

Im Folgenden bezeichnen wir mit $[\cdot]_{\tau}$ die erweiterte Modulofunktion

$$[\cdot]_{\tau} := \begin{cases} \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m \\ x_a \mapsto [x]_{\tau_a} := \min_{z \in \mathbb{Z}} \{x + z\tau_a \mid x + z\tau_a \geq 0\} \end{cases}$$

die jedem Eintrag x_a eines Vektors $x \in \mathbb{R}^m$ den Wert $[x_a]_{\tau_a}$ zuordnet.

Wie gesehen ist $X = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \Gamma x = 0; \exists p \in \mathcal{G} : 0 \leq x + p - d^{min} \leq d\}$ die Menge aller zulässiger Spannungen mit $\mathcal{G} = \{\sum_{a=1}^m z_a \tau_a e_a \mid z_a \in \mathbb{Z}\}$. Wegen

$$\begin{aligned} & \exists p \in \mathcal{G} : 0 \leq x + p - d^{min} \leq d \\ & \iff \min\{x_a + p_a - d_a^{min} \mid x_a + p_a - d_a^{min} \geq 0\} \leq d_a \quad \forall a \in \mathcal{A} \quad (2) \\ & \iff [x - d^{min}]_{\tau} \leq d \end{aligned}$$

erhalten wir $X = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \Gamma x = 0; [x - d^{min}]_{\tau} \leq d\}$.

5.1 Zielfunktion

Für eine Zielfunktion F können wir damit das periodische Programm wie folgt formulieren:

$$\begin{aligned} \min F(x), \text{ so dass} \\ \Gamma x = 0 \\ [x - d^{min}]_\tau \leq d \end{aligned}$$

Für beliebiges $p \in \mathcal{G}$ gilt offensichtlich $[x - d^{min}]_\tau = [x + p - d^{min}]_\tau$. Jede Zielfunktion F , in der die Güte einer Spannung bezüglich dessen Slacks gemessen wird, ist p -periodisch, da sämtliche Slackwerte eindeutig durch $[x - d^{min}]_\tau$ bestimmt sind. Das eine Funktion F p -periodisch ist bedeutet, dass für alle $p \in \mathcal{G}$ gilt $F(x) = F(x + p)$. Dies ist unabhängig davon, ob der minimale, durchschnittliche oder maximale Slack minimiert werden soll.

Welche Zielfunktion verwendet wird hängt davon ab, was genau man optimieren möchte. Soll zum Beispiel erreicht werden, dass der längste Slack eines Fahrplans möglichst kurz ist, so wählt man als Zielfunktion $F(x) := \max_{a \in \mathcal{A}_{change}} s_a^{max}(x)$. In diesem Fall wird zwischen den einzelnen Umsteigeaktivitäten nicht unterschieden. Allerdings werden die Umsteigemöglichkeiten nicht alle gleich häufig benutzt, so dass man eventuell den wichtigeren Umsteigeaktivitäten eine höhere Priorität bei der Minimierung des Slacks geben möchte und dafür einen größeren Slack bei den unwichtigen Umsteigeaktivitäten in Kauf nimmt. Möchte man dieses berücksichtigen, so kann man jeder Umsteigeaktivität a ein relatives Gewicht w_a zuordnen, das die Priorität der Umsteigeaktivität im Verhältnis zu den anderen widerspiegelt. Die Zielfunktion würde man hier definieren als $F(x) := \sum_{a \in \mathcal{A}_{change}} w_a s_a^{av}(x)$. In diesem Fall wäre F eine periodisch-lineare Zielfunktion. Ob man hier den durchschnittlichen Slack wählt oder einen anderen ist dabei beliebig.

Man kann allerdings auch eine Lösung suchen, bei der die wichtigste Umsteigeaktivität den kleinstmöglichen Slack hat, die zweitwichtigsten Umsteigeaktivität den kleinstmöglichen noch zu erreichenden Slack und so weiter. In diesem Fall gilt es eine Spannung zu finden, die den lexikografisch kleinsten "Slackvektor" ergibt. Was genau darunter zu verstehen ist werden wir an

dieser Stelle ein wenig genauer beschreiben, da dies im nächsten Kapitel eine besondere Rolle spielen wird. Im weiteren Verlauf gehen wir der Einfachheit halber davon aus, dass jeweils der minimale Slack minimiert werden soll. Hat man festgelegt, wie wichtig die einzelnen Kanten sind, so erhält man automatisch eine Ordnung auf \mathcal{A}_{change} . Benennen wir die wichtigste Kante mit a_1 , die zweitwichtigste mit a_2 und so weiter, so gilt $a_1 < a_2 < \dots < a_l$, wobei l die Anzahl der Umsteigeaktivitäten sein soll. Für jede Spannung x sind die Slacks der Umsteigeaktivitäten eindeutig. Somit gibt es eine Funktion $F : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^l; x \mapsto s^{min}(x)$, die jeder Spannung einen Vektor des \mathbb{R}^l zuordnet, dessen Einträge gerade die Slackzeiten der Umsteigeaktivitäten sind. Wir können dabei ohne Einschränkungen davon ausgehen, dass die i -te Zeile jeweils den Slack der Umsteigeaktivität a_i repräsentiert. Damit es einen lexikographisch optimalen "Slackvektor" geben kann, muss es auf dem \mathbb{R}^l eine Ordnung geben. Diese ergibt sich direkt aus der Ordnung von \mathcal{A}_{change} . Sind g und $h \in \mathbb{R}^l$, so gilt $g < h$ wenn es ein $k \in \{1, 2, \dots, l\}$ gibt mit $g_i = h_i$ für alle $i < k$ und $g_k < h_k$.

Um das an einem Beispiel zu verdeutlichen nehmen wir vier Vektoren a, b, c, d des \mathbb{R}^4 .

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 15 \\ 9 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad d = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ordnet man diese vier Vektoren lexikographisch an, so gilt

$$a < c < d < b$$

Eine Spannung x ist besser als eine Spannung y , wenn der zu x zugehörige "Slackvektor" lexikographisch kleiner ist, als der "Slackvektor" der Spannung y . Für eine lexikographisch optimale Lösung gilt es daher die folgende Zielfunktion zu minimieren $F : \mathbb{R}^m \rightarrow (\mathbb{R}^l, \leq)$ mit $F(x) := s^{min}(x)$.

Eine lexikographisch optimale Lösung scheint für die Praxis kaum sinnvoll, da hierbei für die unwichtigeren Umsteigeaktivitäten sehr hohe Wartezeiten entstehen können. Auch in unserem Beispiel sieht man, dass a der lexikographisch beste Vektor ist, obwohl bei c die erste Umsteigeaktivität nur 1

Minute schlechter ist als bei a und ansonsten alle anderen Umsteigeaktivitäten einen wesentlich kürzeren Slack aufweisen. Allerdings ist es teilweise möglich schneller eine optimale Lösung zu finden als bei anderen Zielfunktionen, und diese kann man dann notfalls manuell nachbessern.

5.2 Lösungsverfahren

Für jede p -periodische Zielfunktion F , die auf eine total geordnete Menge abbildet, erhalten wir mit (2) die Gleichung

$$\begin{aligned} & \inf \{F(x) \mid \Gamma x = 0; [x - d^{min}]_{\tau} \leq d\} \\ & = \inf_{p \in \mathcal{G}} \inf \{F(x) \mid \Gamma x = 0; 0 \leq x - d^{min} + p \leq d\} \end{aligned}$$

Für ein festes $p \in \mathcal{G}$ läßt sich das Problem wie bei einem aperiodischen Fahrplan lösen. Dies ist jeweils in polynomieller Zeit möglich. Allerdings hat \mathcal{G} unendlich viele Elemente, so dass man nicht einfach alle möglichen p durchgehen kann. Wir müssen nun ausnutzen, dass unsere Zielfunktion p -periodisch ist, damit wir eine endliche Teilmenge von \mathcal{G} finden, mit der wir eine optimale Lösung errechnen können.

Wir definieren auf X die Relation $x \sim \tilde{x} \iff x - \tilde{x} \in \mathcal{G}$. Da \mathcal{G} eine Gruppe ist, ist leicht einzusehen, dass \sim eine Äquivalenzrelation ist. Für zwei äquivalente Spannungen x, \tilde{x} gilt insbesondere $x - \tilde{x} \in \bar{\mathcal{G}}$ mit $\bar{\mathcal{G}} := \{p \in \mathcal{G} \mid \Gamma p = 0\}$, denn es ist $\Gamma(x - \tilde{x}) = \Gamma x - \Gamma \tilde{x} = 0$. Somit erhalten wir die Äquivalenzklassen $[\tilde{x}] = \{x \in X \mid \exists p \in \bar{\mathcal{G}} : x = \tilde{x} + p\}$. Alle Elemente einer Äquivalenzklasse haben offensichtlich denselben Slack und auch denselben Zielfunktionswert, da F p -periodisch ist. Findet man für das EPESP eine optimale Spannung, so sind alle Elemente der zugehörigen Äquivalenzklasse auch optimale Spannungen. Es reicht daher statt X eine Teilmenge von X zu betrachten, in der von jeder Äquivalenzklasse mindestens ein Repräsentant enthalten ist.

Wir gehen nun erstmal davon aus, dass wir ein Netzwerk mit einheitlicher Periode t haben. Für eine beliebige zulässige Spannung x haben wir für eine beliebige Baumkante a den Moduloparameter z_a . Ändern wir nun die

Spannung dieser Baumkante auf $\tilde{x}_a = x_a + \tilde{z}_a t$ mit beliebigen $\tilde{z}_a \in \mathbb{Z}$, so ergibt sich als neuer Moduloparameter $z_a - \tilde{z}_a$, denn $\tilde{x}_a + (z_a - \tilde{z}_a)t = x_a + \tilde{z}_a t + (z_a - \tilde{z}_a)t = x_a + z_a t \in [d_a^{\min}, d_a^{\max}]$. Lassen wir die Spannungen der übrigen Baumkanten gleich, so erhalten wir nun für eine beliebige Knotenbewertung π zur Spannung x eine neue Knotenbewertung.

$$\tilde{\pi}(i) = \begin{cases} \pi(i) & i \in \mathcal{E}_a^- \\ \pi(i) + \tilde{z}_a t & i \in \mathcal{E}_a^+ \end{cases}$$

Hiermit ergibt sich als neue Spannung

$$\tilde{x}_b = \begin{cases} x_b + \tilde{z}_a t & b \in K_a^+ \\ x_b - \tilde{z}_a t & b \in K_a^- \\ x_b & \text{sonst} \end{cases}$$

Diese neue Spannung \tilde{x} ist wieder zulässig, denn für alle $b \in K_a^+$ gilt $[\tilde{x}_b]_t = [x_b + \tilde{z}_a t]_t = [x_b]_t \in [d_b^{\min}, d_b^{\max}]$ und für alle $b \in K_a^-$ gilt $[\tilde{x}_b]_t = [x_b - \tilde{z}_a t]_t = [x_b]_t \in [d_b^{\min}, d_b^{\max}]$.

\mathcal{G} ist in diesem Fall aufgrund der einheitlichen Periode t gerade $t\mathbb{Z}^m$. Da die Differenz der einzelnen Kantenspannungen von x und \tilde{x} entweder Null oder $\pm \tilde{z}_a t$ beträgt, was ein Vielfaches von t ist, ist $x - \tilde{x} \in \mathcal{G}$. Die Spannungen x und \tilde{x} sind also äquivalent. Setzen wir für $\tilde{z}_a = z_a$, so erhalten wir eine äquivalente Spannung \tilde{x} mit Moduloparameter 0.

Ausgehend von \tilde{x} finden wir mit der obigen Überlegung eine äquivalente Spannung \hat{x} die für eine andere beliebige Baumkante \hat{a} den Moduloparameter $z_{\hat{a}} = 0$ besitzt. Da $K_{\hat{a}}$ außer \hat{a} nur Nichtbaumkanten enthält, bleibt $\hat{x}_a = \tilde{x}_a$ und somit bleibt der Moduloparameter $z_a = 0$. Induktiv folgt, dass jede zulässige Lösung äquivalent zu einer Spannung ist, die für alle Baumkanten a die Moduloparameter $z_a = 0$ hat.

Haben wir nun ein Netzwerk mit unterschiedlichen Perioden, kann man im Allgemeinen die Moduloparameter der Baumkanten nicht gleich auf Null setzen. Dies ist einer der entscheidenden Punkte, in denen sich das EPESP vom PESP unterscheidet. Für eine beliebige zulässige Spannung x betrachten wir wieder eine beliebige Baumkante a mit Moduloparameter z_a . Ändern wir

auch hier die Spannung dieser Baumkante auf $\tilde{x}_a = x_a + \tilde{z}_a \tau_a$ mit beliebigen $\tilde{z}_a \in \mathbb{Z}$, so erhalten wir wieder $z_a - \tilde{z}_a$ als neuen Moduloparameter und als neue Spannung

$$\tilde{x}_b = \begin{cases} x_b + \tilde{z}_a \tau_a & b \in K_a^+ \\ x_b - \tilde{z}_a \tau_a & b \in K_a^- \\ x_b & \text{sonst} \end{cases}$$

Für $b \in K_a$ gilt allerdings $[\tilde{x}]_{\tau_b} = [x \pm \tilde{z}_a \tau_a]_{\tau_b} \in [d_b^{\min}, d_b^{\max}]$ im allgemeinen *nicht*, da τ_a und τ_b verschieden sein können. Somit ist die Spannung \tilde{x} nicht immer zulässig und auch nicht immer äquivalent zur Spannung x .

Wählen wir allerdings \tilde{z}_a so, dass $\tilde{z}_a \tau_a$ ein Vielfaches von τ_b ist, so gilt

$[\tilde{x}_b]_{\tau_b} = [x_b \pm \tilde{z}_a \tau_a]_{\tau_b} = [x_b \pm c \tau_b]_{\tau_b} = [x_b]_{\tau_b} \in [d_b^{\min}, d_b^{\max}]$ (mit entsprechendem $c \in \mathbb{Z}$). Damit die neue Spannung \tilde{x} zulässig ist, muss $\tilde{z}_a \tau_a$ ein Vielfaches aller Aktivperioden der Kanten aus K_a sein. Wir definieren $\hat{\tau}(a) := kgV\{\tau_b \mid b \in K_a\}$. Für $\tilde{z}_a = c \frac{\hat{\tau}(a)}{\tau_a}$ mit beliebigem $c \in \mathbb{Z}$ erhalten wir die neue Spannung

$$\tilde{x}_b = \begin{cases} x_b + c \hat{\tau}(a) & b \in K_a^+ \\ x_b - c \hat{\tau}(a) & b \in K_a^- \\ x_b & \text{sonst} \end{cases}$$

Diese neue Spannung ist zulässig und auch äquivalent zur Spannung x , da die Differenz der einzelnen Kantenspannungen entweder Null oder ein Vielfaches der jeweiligen Aktivperiode ist und somit gilt $\tilde{x} - x \in \mathcal{G}$. Man kann also zu jeder beliebigen Spannung eine äquivalente Spannung finden, so dass der Moduloparameter z_a einer Baumkante a einen der Werte von null bis $\hat{\tau}(a)/\tau_a - 1$ annimmt, d.h $z_a \in \{0, \dots, \hat{\tau}(a)/\tau_a - 1\}$. Induktiv erhält man auch hier eine äquivalente Spannung deren Moduloparameter für jede Baumkante a einen der Werte $0, \dots, \hat{\tau}(a)/\tau_a - 1$ annimmt. Ist die Aktivperiode einer Baumkante a ein Vielfaches aller Aktivperioden der Kanten aus K_a , so ist der Moduloparameter 0. Es ist durchaus möglich dies für einige Baumkanten zu erreichen, indem man seinen spannenden Baum entsprechend wählt.

Wir haben nun erreicht, dass wir die Menge der Moduloparameter einschränken können und die zugehörigen Spannungen trotzdem alle Äquivalenzklasse repräsentieren.

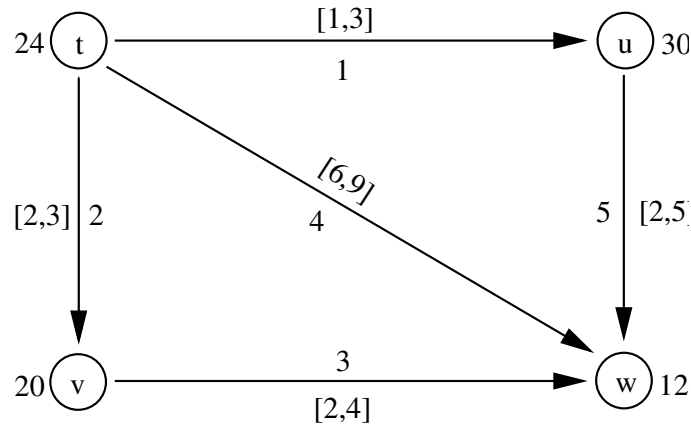


Abbildung 5: Periodisches Netzwerk

Beispiel. Wir betrachten das periodische Netzwerk aus Abbildung 5. Die Zahlen neben den Knoten stehen jeweils für die Perioden. Daraus ergeben sich die Aktivperioden $\tau_1 = 6, \tau_2 = 4, \tau_3 = 4, \tau_4 = 12$ und $\tau_5 = 6$. Die Kanten $\{1, 2, 3\}$ sollen die Baumkanten sein. Die zugehörige Netzwerkmatrix dann ist

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Kante 1 hat als Schnittmenge $K_1 = \{1, 5\}$. Somit ergibt sich $\hat{\tau}(1) = \text{kgV}(\tau_1, \tau_5) = \text{kgV}(6, 6) = 6$ und daraus wiederum $\hat{\tau}(1)/\tau_1 = 1$. Der Moduloparamter z_1 der Kante 1 kann daher auf den Wert 0 eingeschränkt werden. Für die Kante 2 mit Schnittmenge $K_2 = \{2, 4, 5\}$ erhalten wir $\hat{\tau}(2) = \text{kgV}(4, 12, 6) = 12$. Da $\hat{\tau}(2)/\tau_2 = 3$ ergibt, erhalten wir für z_2 die Werte $\{0, 1, 2\}$. Bei der Kante 3 mit Schnittmenge $K_3 = \{3, 4, 5\}$ kann man den Moduloparamter z_3 ebenfalls auf die Werte $\{0, 1, 2\}$ einschränken.

An diesem Beispiel läßt sich auch gut erkennen, dass die Wahl des spannenden Baums einen Einfluss darauf haben kann, wie sehr man die Moduloparamter der Baumkanten eingrenzen kann. Würden wir in diesem Beispiel als spannenden Baum die Kanten $\{1, 2, 4\}$ wählen, so könnte man jeweils den Moduloparamter auf 0 einschränken. Das man einen spannenden Baum findet bei dem alle Moduloparamter auf 0 eingeschränkt werden können, ist aber nicht für alle Netzwerke möglich. Ein Gegenbeispiel wäre ein Netzwerk dessen Aktivperioden aus paarweise teilerfremden Zahlen besteht.

Für die Spannungen, deren Moduloparameter der obigen Einschränkung unterliegen, kann man die zulässigen Moduloparamater der Nichtbaumkanten mit Hilfe eines kürzeste-Wege-Verfahrens ermitteln. Mit zulässigen Moduloparameter bezeichnen wir die Moduloparameter, zu denen es zulässige Lösungen gibt. Für $k = n, \dots, m$ betrachten wir nun jeweils das Netzwerk $\mathcal{N}_k = (\mathcal{E}, \mathcal{A}_k)$, wobei \mathcal{A}_k alle Baumkanten enthält, sowie die Nichtbaumkanten, die zu den ersten $k - n + 1$ Zeilen von Γ gehören. Wir nehmen an, dass es für feste Moduloparameter z_1, \dots, z_{k-1} eine Spannung x in dem Netzwerk \mathcal{N}_{k-1} gibt, für die gilt

$$\forall i \in \{1, \dots, k-1\} : l_i := d_i^{\min} - z_i \tau_i \leq x_i \leq d_i^{\max} - z_i \tau_i =: u_i$$

Für die Kante k sei $\alpha(k) = u$ und $\omega(k) = v$.

Eine Spannung x des Netzwerks \mathcal{N}_k ist genau dann gültig, wenn für jeden Zykel C in \mathcal{N}_k gilt

$$x(C) := \sum_{a \in C^+} x_a - \sum_{a \in C^-} x_a = 0$$

Sei $\mathcal{D} := \{C \mid C \text{ Zykel in } \mathcal{N}_k \wedge k \in C^+\}$ die Menge aller Zykel, die k enthalten und dieselbe Richtung haben. Dann folgt für alle $C \in \mathcal{D}$

$$\begin{aligned} 0 &= x(C) = \sum_{a \in C^+} x_a - \sum_{a \in C^-} x_a \\ \iff x_k &= - \sum_{a \in (C^+ \setminus \{k\})} x_a + \sum_{a \in C^-} x_a \\ \iff x_k &\leq - \sum_{a \in (C^+ \setminus \{k\})} x_a + \sum_{a \in C^-} (d_a^{\max} - z_a \tau_a) \\ \iff x_k &\leq - \sum_{a \in (C^+ \setminus \{k\})} (d_a^{\min} - z_a \tau_a) + \sum_{a \in C^-} (d_a^{\max} - z_a \tau_a) \\ \iff x_k &\leq \sum_{a \in (C^+ \setminus \{k\})} -l_a + \sum_{a \in C^-} u_a \end{aligned}$$

Für alle $C \in \mathcal{D}$ definieren wir nun $\tilde{x}(C) := \sum_{a \in (C^+ \setminus \{k\})} -l_a + \sum_{a \in C^-} u_a$. Dann gilt, dass $x_k \leq \min\{\tilde{x}(C) \mid C \in \mathcal{D}\}$. Der Einfachheit halber reicht es hier die Zykel zu betrachten, in denen k in positiver Richtung liegt. Für

die entgegengesetzt verlaufenden Zykel erhält man nämlich jeweils dieselbe Abschätzung. Sei $\tilde{\mathcal{A}}_{k-1}$ eine Menge von Kanten für die gilt: $\forall a \cong (i, j) \in \mathcal{A}_{k-1} \exists! \tilde{a} \in \tilde{\mathcal{A}}_{k-1}$ mit $\tilde{a} \cong (j, i)$. Zu jeder Kante aus \mathcal{A}_{k-1} gibt es also genau eine Kante aus $\tilde{\mathcal{A}}$, die in die entgegengesetzte Richtung zeigt. Betrachten wir das Hilfsnetzwerk $[\mathcal{E}, \mathcal{A}_{k-1} \cup \tilde{\mathcal{A}}_{k-1}]$ in dem jede Kante $a \in \mathcal{A}_{k-1}$ die Länge u_a hat und jede Kante \tilde{a} aus $\tilde{\mathcal{A}}_{k-1}$ die Länge $-l_a$, so ist $\tilde{x}(C)$ gerade die Länge des Weges von u nach v , den der Zykel C in dem Netzwerk $[\mathcal{E}, \mathcal{A}_{k-1} \cup \tilde{\mathcal{A}}_{k-1}]$ beschreibt. Umgekehrt gibt es zu jedem Weg von u nach v einen Zykel, der aus dem Weg und der Kante k besteht. Damit ist dann $\min\{\tilde{x}(C) \mid C \in \mathcal{D}\}$ die Länge des kürzesten Weges von u nach v in dem Netzwerk $[\mathcal{E}, \mathcal{A}_{k-1} \cup \tilde{\mathcal{A}}_{k-1}]$. Den kürzesten Weg bezeichnen wir im weiteren Verlauf mit \mathcal{H}_{uv} . Wir können also $\min\{\tilde{x}(C) \mid C \in \mathcal{D}\}$ mit einem kürzeste-Wege-Verfahren errechnen. Desweiteren folgt

$$\begin{aligned}
0 &= x(C) = \sum_{a \in C^+} x_a - \sum_{a \in C^-} x_a \\
\iff x_k &= - \sum_{a \in (C^+ \setminus \{k\})} x_a + \sum_{a \in C^-} x_a \\
\iff x_k &\geq - \sum_{a \in (C^+ \setminus \{k\})} x_a + \sum_{a \in C^-} (d_a^{\min} - z_a \tau_a) \\
\iff x_k &\geq - \sum_{a \in (C^+ \setminus \{k\})} (d_a^{\max} - z_a \tau_a) + \sum_{a \in C^-} (d_a^{\min} - z_a \tau_a) \\
\iff x_k &\geq \sum_{a \in (C^+ \setminus \{k\})} -u_a + \sum_{a \in C^-} l_a
\end{aligned}$$

Mit $\hat{x}(C) := \sum_{a \in (C^+ \setminus \{k\})} -u_a + \sum_{a \in C^-} l_a$ erhalten wir dann $x_k \geq \max\{\hat{x}(C) \mid C \in \mathcal{D}\}$. In diesem Fall ist $-\hat{x}(C)$ gerade die Länge des Weges von v nach u , den der Zykel C bildet. Somit ist dann $\max\{\hat{x}(C) \mid C \in \mathcal{D}\} = -\min\{-\hat{x}(C) \mid C \in \mathcal{D}\} = -\mathcal{H}_{vu}$ und läßt sich daher auch mit Hilfe eines kürzesten Wege Verfahren errechnen.

Für x_k haben wir also als untere Schranke $-\mathcal{H}_{vu}$ und als obere Schranke \mathcal{H}_{uv} , so dass gelten muss $-\mathcal{H}_{vu} \leq x_k \leq \mathcal{H}_{uv}$. Durch diese Einschränkung wird klar, dass es nicht für alle Moduloparameter z_k eine Spannung geben kann, die $d_k^{\min} \leq x_k + z_k \tau_k \leq d_k^{\max}$ erfüllt. Damit es für ein z_k überhaupt eine gültige Spannung geben kann, muss es die beiden folgenden Bedingungen erfüllen:

$$\begin{aligned}
d_k^{min} \leq x_k + z_k \tau_k \leq \mathcal{H}_{uv} + z_k \tau_k &\implies d_k^{min} - \mathcal{H}_{uv} \leq z_k \tau_k \\
d_k^{max} \geq x_k + z_k \tau_k \geq -\mathcal{H}_{vu} + z_k \tau_k &\implies d_k^{max} + \mathcal{H}_{vu} \geq -z_k \tau_k
\end{aligned}$$

Diese Bedingungen sind nicht nur notwendige Bedingungen, sondern auch hinreichende Bedingungen. Das heißt, dass es für einen Moduloparameter z_k genau dann eine Spannung in dem Netzwerk \mathcal{N}_k gibt, wenn er $d_k^{min} - \mathcal{H}_{uv} \leq z_k \tau_k \leq d_k^{max} + \mathcal{H}_{vu}$ erfüllt. Die Menge $\{z \in \mathbb{Z} \mid [(d_k^{min} - \mathcal{H}_{uv})/\tau_k] \leq z \leq [(d_k^{max} + \mathcal{H}_{vu})/\tau_k]\}$ ist somit die Menge der zulässigen Moduloparameter z_k . Da $-\mathcal{H}_{vu}$ und \mathcal{H}_{uv} jeweils endliche Werte sind, ist auch diese Menge endlich oder sogar leer.

Wir können also für die Baumkanten die Moduloparameter eingrenzen und dann nach und nach für die Nichtbaumkanten die zulässigen Moduloparameter bestimmen. Diese Vorgehensweise läßt sich auch durch einen "Suchbaum" veranschaulichen (siehe Abbildung 6). Mit diesem Verfahren erhalten wir eine Lösung des EPESP, denn entweder gibt es keinen zulässigen Moduloparameter und somit auch keine zulässige Lösung, oder wir erhalten eine endliche Teilmenge $\hat{\mathcal{G}}$ von \mathcal{G} für die das Problem

$$\inf_{p \in \hat{\mathcal{G}}} \inf \{F(x) \mid \Gamma x = 0; 0 \leq x - d^{min} + p \leq d\}$$

berechenbar ist. Das hier $\hat{X} := \{x \in X \mid \exists p \in \hat{\mathcal{G}} : 0 \leq x - d^{min} + p \leq d\}$ nur eine Teilmenge von X ist, spielt keine Rolle, da es wie gesehen zu jedem $x \in X$ eine äquivalente Spannung in \hat{X} gibt. Für ein PESP ist \hat{X} ein Repräsentantensystem. Das heißt, dass \hat{X} aus jeder Äquivalenzklasse genau ein Element enthält. Für ein EPESP ist \hat{X} im Allgemeinen kein Repräsentantensystem. Darauf werden wir am Ende des Kapitels noch einmal zurückkommen.

Beispiel. Für unser vorheriges Beispiel erhalten wir mit diesem Verfahren den Suchbaum aus Abbildung 6. Zur Verdeutlichung wollen wir das Verfahren einmal für die Moduloparameter $(0, 1, 1, 1, 1)$ und $(0, 1, 1, 1, 2)$ vorführen. Ausgehend von den Moduloparametern $z_1 = 0, z_2 = 1$ und $z_3 = 1$ für die Baumkanten, suchen wir alle $z_4 \in \mathbb{Z}$ für die es im Netzwerk \mathcal{N}_4 eine

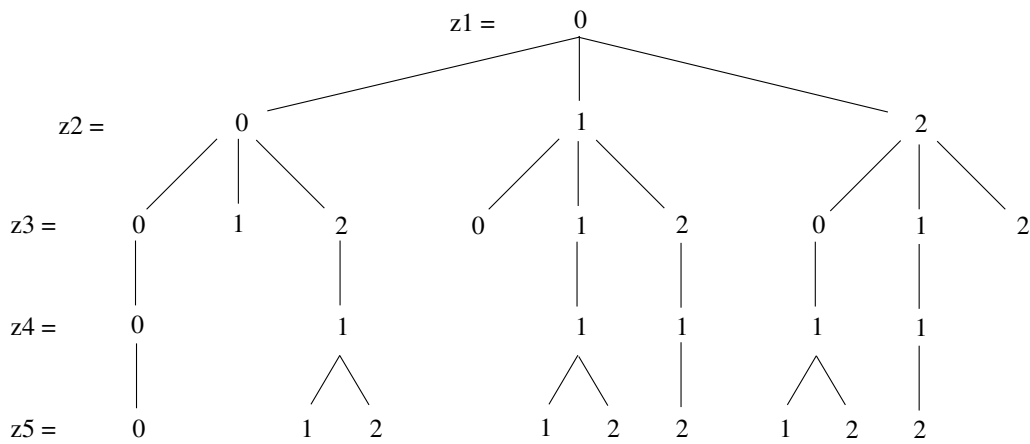


Abbildung 6: Suchbaum

gültige Spannung gibt. Da die Moduloparameter der Kanten $\{1, 2, 3\}$ fest sind, bekommen wir für die Spannung die unteren Schranken $l_1 = 1, l_2 = -2, l_3 = -2$ und als obere Schranken $u_1 = 3, u_2 = -1, u_3 = 0$. Das es für die Kanten $\{1, 2, 3\}$ eine zulässige Spannung im Netzwerk \mathcal{N}_3 gibt dürfte klar sein, da dieses Netzwerk gerade der spannende Baum ist und keine Zykel enthält. Das beschriebene Hilfsnetzwerk, in dem jede Kante $a \in \{1, 2, 3\}$ als Gewicht u_a erhält und die entgegengesetzten Kanten \tilde{a} das Gewicht $-l_a$ erhalten, ist abgebildet in Abbildung 7.

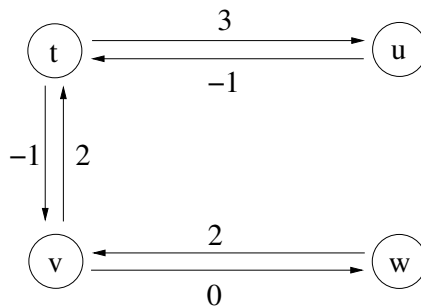


Abbildung 7: Hilfsnetzwerk 1

Mit Hilfe eines kürzeste-Wege-Verfahren erhalten wir als Länge für den kürzesten Weg von t nach w den Wert $\mathcal{H}_{tw} = -1$ und für den kürzesten Weg von w nach t den Wert $\mathcal{H}_{wt} = 4$. Für z_4 erhalten wir nun die Bedingung

$6 - (-1) \leq 12z_4 \leq 9 + 4$. Somit ergibt sich, dass es nur für $z_4 = 1$ eine zulässige Spannung im Netzwerk \mathcal{N}_4 gibt. Veranschaulicht ist dies in Abbildung 8.

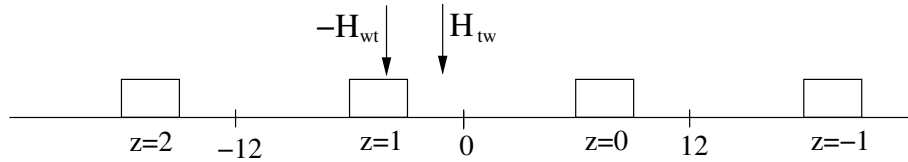


Abbildung 8: zulässiger Moduloparameter

Entsprechend verhält es sich nun für den Moduloparameter z_5 . Mit den Moduloparametern $(0, 1, 1, 1)$ erhalten wir für die Kanten $\{1, 2, 3\}$ die selben Schranken wie eben. Für die Kante 4 bekommen wir damit die Schranken $l_4 = -6$ und $u_4 = -3$. Mit diesen Schranken erhalten wir das Hilfsnetzwerk, welches in Abbildung 9 zu sehen ist.

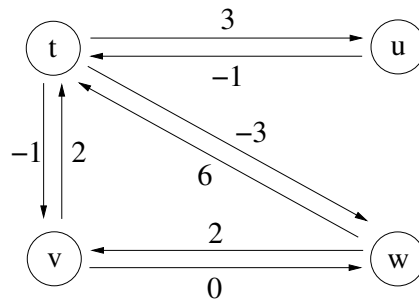


Abbildung 9: Hilfsnetzwerk 2

Die Länge des kürzesten Weges von u nach w beträgt $\mathcal{H}_{uw} = -4$ und die Länge des kürzesten Weges von w nach u beträgt $\mathcal{H}_{wu} = 7$. Für den Moduloparamter z_5 bekommen wir daher die Bedingung $2 - (-4) \leq 6z_5 \leq 5 + 7$. Daraus folgt dann, dass es, ausgehend von den Moduloparametern $(0, 1, 1, 1)$, nur für die Moduloparameter $z_5 = 1$ und $z_5 = 2$ zulässige Spannungen gibt. Für die Moduloparameter $(0, 1, 1, 1)$ erhalten wir $p = (0, 4, 4, 12, 6)^t$ und für $(0, 1, 1, 1, 2)$ ergibt sich $p = (0, 4, 4, 12, 12)^t$. Zu diesen p 's läßt sich jeweils eine optimale Lösung finden. Das Problem entspricht dann wie schon erwähnt dem eines aperiodischen Fahrplans und läßt sich in polynomieller Zeit lösen.

Wie gezeigt wurde, kann man die Moduloparameter der Baumkanten beim

PESP jeweils auf Null einschränken. Der Suchbaum hat daher nur die Tiefe r . Der Suchbaum des EPESP kann hingegen die Tiefe m besitzen. Außerdem ergeben sich mit diesem Verfahren redundante Moduloparameter. Auf die redundanten Moduloparameter wird am Ende des Kapitels noch einmal eingegangen. Im Folgenden werden wir nun das Problem soweit reduzieren, so dass wir auch für das EPESP einen Suchbaum mit Tiefe r erhalten, der keine redundanten Moduloparameter mehr enthält.

5.3 Der reduzierter Suchbaum

Wir betrachten nun statt den zulässigen Spannungen die Menge der Slacks. Da es zu jeder Äquivalenzklasse auf X genau einen Slack gibt, können wir auch alternativ nach einem optimalen Slack suchen. Die Spannungen der Äquivalenzklasse, die zu diesem optimalen Slack gehört, sind dann alle optimal. Jedes $x \in X$ hat ein eindeutiges $p_x \in \mathcal{G}$, für das gilt $0 \leq x + p_x - d^{\min} \leq d$ und mit diesem eindeutigen p_x ist $y := x + p_x - d^{\min}$ gerade der Slack der Spannung x . Somit ist $Y := \{y \mid \exists x \in X : y = x + p_x - d^{\min}\}$ die Menge aller Slacks. Für die Suche nach einem optimalen Slack ist diese Darstellung allerdings unbrauchbar, da sie von X abhängig ist. Wir definieren $\tilde{Y} := \{y \mid \exists \sigma \in \Gamma\mathcal{G} : \Gamma y = -\Gamma d^{\min} + \sigma, 0 \leq y \leq d\}$. Für beliebiges $y \in Y$ gilt $\Gamma y = \Gamma(x + p_x - d^{\min}) = \Gamma p_x - \Gamma d^{\min}$ und $0 \leq y \leq d$ und somit ist $y \in \tilde{Y}$. Daraus folgt $Y \subset \tilde{Y}$. Zu jedem beliebigen $y \in \tilde{Y}$ gibt es ein $\sigma \in \Gamma\mathcal{G}$, so dass gilt $\Gamma y = \sigma - \Gamma d^{\min}$ und für jedes $\sigma \in \Gamma\mathcal{G}$ gibt es ein $p \in \mathcal{G}$, so dass $\sigma = \Gamma p$ gilt. Es gibt folglich ein $p \in \mathcal{G}$ mit $\Gamma y = \Gamma p - \Gamma d^{\min}$. Definieren wir $x := y - p + d^{\min}$, so ist dieses x eine zulässige Spannung, denn $\Gamma x = \Gamma(y - p + d^{\min}) = \Gamma y - \Gamma p + \Gamma d^{\min} = 0$ und $0 \leq x + p - d^{\min} \leq d$. Da aufgrund der Eindeutigkeit $p = p_x$ gilt, ist y der Slack zur Spannung x . Somit ist $y \in Y$ und $\tilde{Y} \subset Y$, woraus letztendlich resultiert, dass $Y = \tilde{Y}$ ist. Daher ist \tilde{Y} eine andere Beschreibung für die Menge der Slacks, die unabhängig von X ist.

Da F p -periodisch ist gilt für jede Spannung x und dessen Slack y_x $F(x) = F(y_x + d^{\min})$. Daher erhalten wir die Gleichung:

$$\begin{aligned}
& \inf_{p \in \mathcal{G}} \inf \{F(x) \mid \Gamma x = 0; 0 \leq x - d^{min} + p \leq d\} \\
& = \inf_{\sigma \in \Gamma \mathcal{G}} \inf \{F(y + d^{min}) \mid \Gamma y = \sigma - \Gamma d^{min}; 0 \leq y \leq d\}
\end{aligned} \tag{3}$$

Gesucht ist nun die Menge $\{\sigma \in \Gamma \mathcal{G} \mid \exists y : \Gamma y = \sigma \text{ und } d^{min} \leq y \leq d^{max}\} =: \mathcal{L}$.

Für alle $\sigma \in \mathcal{L}$ gelten die folgenden Äquivalenzen:

$$\begin{aligned}
& \exists y : \Gamma(y + d^{min}) - \sigma = 0 \text{ und } 0 \leq y \leq d \\
\iff & \exists y : [N, E] \left(y + d^{min} - \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma \end{pmatrix} \right) = 0 \text{ und } 0 \leq y \leq d \\
\iff & \exists w : \Gamma w = 0 \text{ und } 0 \leq w - d^{min} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma \end{pmatrix} \leq d
\end{aligned}$$

Bei der ersten Äquivalenz nutzt man aus, dass Γ die Form $[N, E]$ hat. Die zweite Äquivalenz erhält man, indem man $w = y + d^{min} - \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma \end{pmatrix}$ setzt bzw. $y = w - d^{min} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma \end{pmatrix}$. Es folgt also, dass $\mathcal{L} = \{\sigma \in \Gamma \mathcal{G} \mid \exists w : \Gamma w = 0 \text{ und } d^{min} \leq w + \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma \end{pmatrix} \leq d^{max}\}$ ist.

Es sei

$$T := \begin{pmatrix} \tau_1 & & 0 \\ & \dots & \\ 0 & & \tau_m \end{pmatrix}$$

dann ist $\Gamma \mathcal{G} = \{(\Gamma \cdot T) \cdot z \mid z \in \mathbb{Z}^m\}$.

Definition. Eine rationale $r \times m$ Matrix mit vollem Zeilenrang r hat die Hermitesche Normalenform, wenn sie die Form $[R, 0]$ hat, wobei R eine untere Dreiecksmatrix ist, die keine negativen Einträge hat und in der jede Zeile ein eindeutiges maximales Element besitzt, welches gerade der Diagonaleintrag der Zeile ist.

Die Einträge der Matrix R werden wir mit η_{ij} bezeichnen und die Spalten mit η_j . Jede rationale $r \times m$ Matrix mit vollem Zeilenrang r lässt sich mit Hilfe elementarer Spaltenumformungen auf die Hermitesche Normalenform bringen (siehe [4]). Also können wir auch die Matrix ΓT in die Hermitesche Normalenform $[R, 0]$ mit entsprechender $r \times r$ -Matrix R überbringen. Auch wenn ΓT eine Abbildung von \mathbb{Z}^m nach \mathbb{Z}^r ist, ändert sich dadurch das Bild nicht, da es sich um elementare Spaltenumformungen handelt. Somit erhalten wir

$$\Gamma \mathcal{G} = \{(\Gamma \cdot T) \cdot z \mid z \in \mathbb{Z}^m\} = \{[R, 0] \cdot \tilde{z} \mid \tilde{z} \in \mathbb{Z}^m\} = \{R \cdot \hat{z} \mid \hat{z} \in \mathbb{Z}^r\}$$

Da alle $\sigma \in \mathcal{L}$ Elemente aus $\{R \cdot \hat{z} \mid \hat{z} \in \mathbb{Z}^r\}$ sind, sich also schreiben lassen als $\sigma = \hat{z}_1 \eta_{1,1} + \hat{z}_2 \eta_{2,1} + \dots + \hat{z}_r \eta_{r,1}$ mit entsprechendem $\hat{z} \in \mathbb{Z}^r$, können wir statt $\begin{pmatrix} 0 \\ \sigma \end{pmatrix}$ auch $\begin{pmatrix} 0 \\ \hat{z}_1 \eta_{1,1} \\ \vdots \\ \hat{z}_1 \eta_{r,1} + \dots + \hat{z}_r \eta_{r,r} \end{pmatrix}$ schreiben. Wir erhalten also

alle σ aus \mathcal{L} indem wir zulässige Werte für $\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_r$ finden, so dass $0 \leq w - d^{\min} + \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma \end{pmatrix} \leq d$ erfüllt ist. Diese können wir, ähnlich wie bei der Suche nach den Moduloparametern der Nichtbaumkanten, sukzessive errechnen.

Betrachten wir zuerst das Netzwerk \mathcal{N}_n , dass aus den Baumkanten und der Nichtbaumkante $b_1 \cong (u, v)$, dessen Elementarzykel zur ersten Zeile von Γ gehört, besteht. Es ist offensichtlich, dass es ein $w \in \mathbb{R}^{n-1}$ gibt, so dass für alle Baumkanten a gilt $d_a^{\min} \leq w_a \leq d_a^{\max}$. Mit dem Verfahren, das wir auch bei der Suche nach den zulässigen Moduloparametern angewandt haben, erhalten wir nun für die zulässigen \hat{z}_1 die notwendigen und hinreichenden Bedingungen $d_{b_1}^{\min} - \hat{z}_1 \eta_{1,1} \leq \mathcal{H}_{uv}$ und $d_{b_1}^{\max} - \hat{z}_1 \eta_{1,1} \leq -\mathcal{H}_{vu}$. Somit ist $\{\hat{z}_1 \in \mathbb{Z} \mid \lfloor (d_{b_1}^{\min} - \mathcal{H}_{uv}) / \eta_{1,1} \rfloor \leq \hat{z}_1 \leq \lfloor (d_{b_1}^{\max} + \mathcal{H}_{vu}) / \eta_{1,1} \rfloor\}$ die Menge der zulässigen Werte für \hat{z}_1 .

Für $k = 2, \dots, r$ betrachten wir dann weiter das Netzwerk \mathcal{N}_{n-1+k} . Wir bezeichnen mit Γ_{n-2+k} die Netzwerkmatrix, die zu dem Netzwerk \mathcal{N}_{n-2+k}

gehört. Für fest gewählte $(\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_{k-1})$ ergeben sich nun die neuen Grenzen

$$l_{b_i} := d_{b_i}^{min} - (\hat{z}_1 \eta_{i,1} + \dots + \hat{z}_i \eta_{i,i-1})$$

und

$$u_{b_i} := d_{b_i}^{max} - (\hat{z}_1 \eta_{i,1} + \dots + \hat{z}_i \eta_{i,i-1})$$

Wir nehmen an, dass es für $(\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_{k-1})$ einen Vektor $w \in \mathbb{R}^{n-2+k}$ mit $\Gamma_{n-2+k} w = 0$ gibt, so dass für alle Baumkanten a gilt $d_a^{min} \leq w_a \leq d_a^{max}$ und für alle Nichtbaumkanten b_i , $i \in \{1, \dots, k-1\}$ gilt $l_{b_i} \leq w_{b_i} \leq u_{b_i}$. Für $b_k \cong (c, d)$ ist dann $\{\hat{z}_k \in \mathbb{Z} \mid \lceil (l_k - \mathcal{H}_{uw}) / \eta_{k,k} \rceil \leq \hat{z}_k \leq \lfloor (u_k + \mathcal{H}_{vu}) / \eta_{k,k} \rfloor\}$ die Menge aller zulässigen Moduloparameter \hat{z}_k .

Auch hier ergibt die Suche nach den gültigen \hat{z} -Werten einen Suchbaum und dieser ist ebenfalls endlich.

Beispiel. In unserem Beispiel erhalten wir für die Netzwerkmatrix Γ die folgende Hermitesche Normalenform:

$$\Gamma T = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -4 & 12 & 0 \\ 6 & -4 & -4 & 0 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = [R, 0]$$

Für die Baumkanten $\{1, 2, 3\}$ gelten jeweils die bekannten Schranken d_i^{min} und d_i^{max} . Mit dem Hilfsnetzwerk zum Netzwerk \mathcal{N}_3 (siehe Abbildung 10) erhalten wir $\mathcal{H}_{tw} = 7$ und $\mathcal{H}_{tv} = -4$. Für \hat{z}_1 ergibt sich daher die Bedingung $6 - 7 \leq 4\hat{z}_1 \leq 9 - 4$ und daraus folgt, dass $\{0, 1\}$ die Menge der gültigen Parameter für \hat{z}_1 ist.

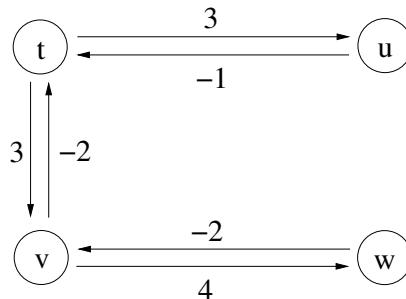


Abbildung 10: Hilfsnetzwerk 1

Ausgehend von $\hat{z}_1 = 1$ erhalten wir für die Kante 4 die Grenzen $l_4 = 6 - 4 = 2$ und $u_4 = 9 - 4 = 5$. Das daraus resultierende Hilfsnetzwerk ist in Abbildung 11 dargestellt.

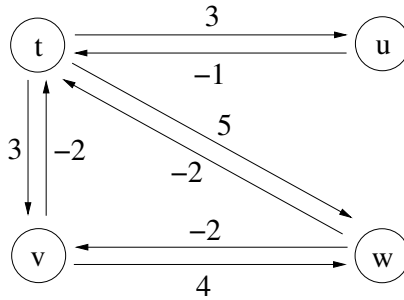


Abbildung 11: Hilfsnetzwerk 2

Außerdem erhalten wir für die Kante 5 die neuen Grenzen $l_5 = 2 - 4 = -2$ und $u_5 = 5 - 4 = 1$. Es ergeben sich die Werte $\mathcal{H}_{uw} = 4$ und $\mathcal{H}_{wu} = -1$. Somit muss \hat{z}_2 die Bedingung $-2 - 4 \leq 6\hat{z}_2 \leq 1 - 1$ erfüllen. Damit ist $\{-1, 0\}$ die Menge der gültigen Parameter für \hat{z}_2 .

Für $\hat{z}_1 = 0$ ist 0 der einzig zulässige Parameter für \hat{z}_2 . Der zugehörige reduzierte Suchbaum ist in Abbildung 12 dargestellt.

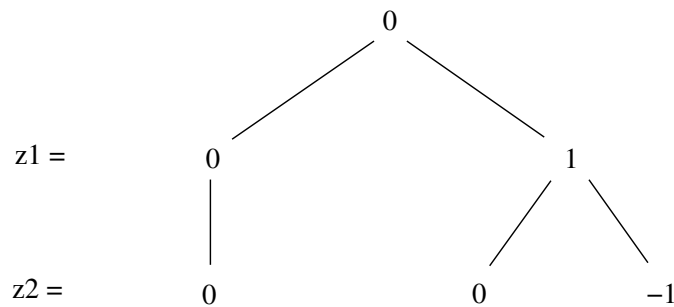


Abbildung 12: reduzierter Suchbaum

Da wir nur Werte für die Variablen \hat{z}_1 bis \hat{z}_r suchen, hat der Suchbaum nur die Tiefe r . Gibt es kein zulässiges $\hat{z} \in \mathbb{Z}^r$, so ist $\mathcal{L} = \emptyset$ und somit folgt auch, dass $X = \emptyset$ ist. Gibt es zulässige $\hat{z} \in \mathbb{Z}^r$, so erhalten wir eine endliche Menge \mathcal{L} und können nun das folgende Problem lösen.

$$\inf_{\sigma \in \mathcal{L}} \inf \{F(y + d^{min}) \mid \Gamma y = \sigma - \Gamma d^{min}; 0 \leq y \leq d\}$$

Dazu müsste man aber alle $\sigma \in \mathcal{L}$ bestimmen, also den kompletten Suchbaum entwickeln. Dies läßt sich mit Hilfe des folgenden Branch and Bound Algorithmus umgehen, mit dem man versucht frühzeitig die "Äste" des Suchbaumes zu finden, die zu keiner optimalen Lösung führen, so dass man nicht alle σ aus \mathcal{L} finden muss.

Für beliebiges $1 \leq k \leq r$ sei $\mathcal{G}_k := \{\sum_{i=1}^k \eta_i z_i \mid z_i \in \mathbb{Z}\}$ und $\tilde{\mathcal{G}}_k := \{\sum_{i=k+1}^r \eta_i z_i \mid z_i \in \mathbb{Z}\}$ ($\Gamma \mathcal{G} = \mathcal{G}_k + \tilde{\mathcal{G}}_k$). Mit $P(\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_k, 0, \dots, 0)$ bezeichnen wir das Problem für gegebene $\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_k$ eine optimale Lösung für

$$\inf_{\sigma \in \mathcal{G}_k} \inf \{F(y + d^{min}) \mid \Gamma y = \sigma^k - \Gamma d^{min} + \sigma; 0 \leq y \leq d\}$$

zu finden, wobei $\sigma^k = \sum_{i=1}^k \eta_i \hat{z}_i \in \mathcal{G}_k$ ein fester Wert ist. Jedes Problem P steht für genau einen Knoten im Suchbaum.

Für den Algorithmus setzen wir als Input $\mathcal{Q} = \{P(0, \dots, 0)\}$, $\bar{s} := \infty$, $z^{inc} = nil$ und $y^{inc} = nil$. Mit y^{inc} bezeichnen wir die bisher beste bekannte Lösung und mit z^{inc} die dazugehörigen Parameter.

1. Ist $\mathcal{Q} = \emptyset$ dann endet der Algorithmus. Output: $y^* := y^{inc}$, $z^* := z^{inc}$ und $\sigma^* := \Gamma z^{inc}$
2. Wähle Problem $P(\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_k, 0, \dots, 0) \in \mathcal{Q}$ und setze $\mathcal{Q} := \mathcal{Q} \setminus \{P(\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_k, 0, \dots, 0)\}$
3. $k < r$: Führe Relaxation von $P(\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_k, 0, \dots, 0)$ aus. Gilt $s_R \geq \bar{s}$, wobei s_R der optimale Zielfunktionswert der Relaxation ist, dann gehe zu 2. Ist $s_R < \bar{s}$, dann suche zulässige Parameter für \hat{z}_{k+1} und setze $\mathcal{Q} := \mathcal{Q} \cup \{P(\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_{k+1}, 0, \dots, 0) \mid \hat{z}_{k+1} \text{ zulässiger Parameter}\}$.
 $k = r$: Löse Problem $P(\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_r)$. Ist $F(y_r) \geq \bar{s}$, wobei y_r die optimale Lösung des Problems ist, dann gehe zu 2. Ist $F(y_r) < \bar{s}$, dann setze $z^{inc} := (\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_r)^t$, $y^{inc} := y_r$ und $\bar{s} := F(y_r)$.

In diesem Algorithmus haben wir dabei jeweils die folgende Relaxation benutzt. Jedes Problem $P(\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_k, 0, \dots, 0)$ entspricht wie gesehen dem

Problem

$$\inf\{F(y + d^{min}) \mid \Gamma y = \sigma^k - \Gamma d^{min} + \sigma; 0 \leq y \leq d; \sigma \in \tilde{\mathcal{G}}_k\}$$

Die Relaxation bekommen wir nun, indem wir für $\hat{z}_{k+1}, \dots, \hat{z}_r$ auch reelle Werte zulassen. Wir erhalten damit als untere Schranke für das Problem

$$s_R := \inf\{F(y + d^{min}) \mid \Gamma y = \sigma^k - \Gamma d^{min} + \sum_{i=k+1}^r \hat{z}_i \eta_i; 0 \leq y \leq d; \hat{z}_i \in \mathbb{R}\}$$

Da R eine untere Dreiecksmatrix ist, ist die $(r - k) \times (r - k)$ - Submatrix \hat{R} , die $\tilde{\mathcal{G}}_k$ erzeugt, regulär. Wir erhalten damit $\{\sum_{i=k+1}^r \hat{z}_i \eta_i \mid \hat{z}_i \in \mathbb{R}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \hat{x} \end{pmatrix} \mid \hat{x} \in \mathbb{R}^{r-k} \right\}$. Die Relaxation entspricht damit dem Problem

$$\inf\{F(y + d^{min}) \mid \Gamma^k y = -\Gamma^k d^{min} + \begin{pmatrix} \sigma_1^k \\ \vdots \\ \sigma_k^k \end{pmatrix}; d^{min} \leq y \leq d^{max}\}$$

wobei Γ^k die Submatrix von Γ ist, die nur aus den ersten k Zeilen von Γ besteht. Einen optimalen Zielfunktionswert dafür zu finden ist in polynomieller Zeit möglich.

Nach Möglichkeit versucht man bei Branch and Bound Verfahren für die Probleme auch Heuristiken zu finden, so dass man möglichst schnell gute obere Schranken findet. Es ist klar, dass eine Heuristiken nur dann eine obere Schranke liefern kann, wenn das Problem auch eine zulässige Lösung besitzt. Solange allerdings nicht sämtliche Werte $\hat{z}_1, \dots, \hat{z}_r$ fest sind, kann man für die einzelnen Probleme keine Heuristik finden, die genau dann eine obere Schranke liefert, wenn das Problem eine Lösung besitzt. Die möglichen Heuristiken können daher nicht immer eine obere Schranke für lösbare Probleme liefern. Von daher ist es sinnvoll bei diesem Branch and Bound Verfahren die Teifensuche zu verwenden, bei der man möglichst schnell zulässige Lösungen findet und somit obere Schranken erhält.

Das Branch and Bound-Verfahren ist in der Form auch für die Moduloparametersuche im nicht reduzierten Suchbaum verwendbar. Dies ist beim PESP interessant, da man bei diesem Problem den Suchbaum nicht reduzieren

muss. Allerdings hat man bei der Moduloparametersuche für ein Problem $P(z_1, \dots, z_k, 0, \dots, 0)$ die Relaxation

$$\inf\{F(x) \mid \Gamma x = 0; 0 \leq x_i + \tau_i z_i \leq d_i \forall i = 1, \dots, k\}$$

Wenden wir nun den Algorithmus an, so erhalten wir entweder keine Lösung und somit gibt es keine zulässige Spannung, oder wir erhalten eine optimale Lösung y^* , sowie das dazugehörige σ^* für das y^* zulässig ist und die Parameter z^* . Erhalten wir eine optimale Lösung, so haben wir aufgrund der Gleichung (3) den optimalen Zielfunktionswert unseres ursprünglichen Problems. Eine optimale Spannung dafür erhalten wir, indem wir ein $p \in \mathcal{G}$ finden, für das gilt $\Gamma p = \sigma^*$, denn dann ist $x^* := y^* + d^{min} - p$ eine zulässige optimale Lösung. Wir erhalten die Hermitesche Normalenform von ΓT durch elementare Spaltenumformungen. Es gibt daher eine reguläre ganzzahlige Matrix B für die gilt $\Gamma T B = [R, 0]$. Damit gilt $\Gamma T B \begin{pmatrix} z^* \\ 0 \end{pmatrix} = [R, 0] \begin{pmatrix} z^* \\ 0 \end{pmatrix} = R z^* = \sigma^*$. Es sei $\hat{p} := T B \begin{pmatrix} z^* \\ 0 \end{pmatrix}$, dann ist $\hat{p} \in \mathcal{G}$, da $B \begin{pmatrix} z^* \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^m$, und $\Gamma \hat{p} = \sigma^*$. Wir bekommen somit die optimale Lösung $x^* := y^* + d^{min} - \hat{p}$. Sämtliche Spannungen der Äquivalenzklasse $[x^*]$ sind außerdem optimale Spannungen.

5.4 Struktur

Wir wollen nun abschließend nochmal einen kleinen Überblick geben, wobei hauptsächlich auf die Struktur des Problems eingegangen wird. Wie gesehen, ist $x \sim \tilde{x} \iff x - \tilde{x} \in \mathcal{G}$ eine Äquivalenzrelation auf X und es gilt sogar $x \sim \tilde{x} \iff x - \tilde{x} \in \bar{\mathcal{G}}$ mit $\bar{\mathcal{G}} := \{p \in \mathcal{G} \mid \Gamma p = 0\}$. Wir definieren nun auf \mathcal{G} die Relation $p \sim \tilde{p} \iff p - \tilde{p} \in \bar{\mathcal{G}}$. Auch hier ist leicht einzusehen, dass dies eine Äquivalenzrelation ist, da \mathcal{G} eine Gruppe ist. Außerdem haben wir auch hier eine alternative Definition der Äquivalenzrelation, denn es gilt $\Gamma(p - \tilde{p}) = 0 \iff \Gamma p = \Gamma \tilde{p}$ und somit ist $p \sim \tilde{p} \iff \Gamma p = \Gamma \tilde{p}$. Wir erhalten die Äquivalenzklassen $[\tilde{p}] = \{p \mid \Gamma p = \Gamma \tilde{p}; p \in \mathcal{G}\}$.

Es sei $X_p := \{x \in \mathbb{R}^m \mid \Gamma x = 0; 0 \leq x + p - d^{min} \leq d\}$ die Menge aller zulässigen Spannungen zu einem festen $p \in \mathcal{G}$. Ist $p \sim \tilde{p}$, so gilt für jedes Element

$x \in X_p$, dass $\tilde{x} := x + p - \tilde{p} \in X_{\tilde{p}}$ ist, denn $\Gamma \tilde{x} = \Gamma(x + p - \tilde{p}) = \Gamma x + \Gamma(p - \tilde{p}) = 0$ und $0 \leq \tilde{x} + \tilde{p} - d^{\min} \leq d \iff 0 \leq x + p - d^{\min} \leq d$. Somit gilt also $\{[x] \mid x \in X_p\} = \{[x] \mid x \in X_{\tilde{p}}\}$. Da jede Spannung aus X_p ein äquivalente Spannung in $X_{\tilde{p}}$ hat, sollte daher die Teilmenge $\hat{\mathcal{G}}$ auf die man sich beschränkt nach Möglichkeit höchstens ein Element aus jeder Äquivalenzklasse enthalten. Bei einem PESP mit Periode t haben alle $p \in \hat{\mathcal{G}}$, die wir mit dem Suchbaum erhalten, die Form $\begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix} t$ mit einem $z \in \mathbb{Z}^r$. Somit hat auch jede Differenz zweier Elemente aus $\hat{\mathcal{G}}$ die Form $\begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix} t$ mit entsprechendem $z \in \mathbb{Z}^r$. Da die Netzwerkmatrix die Form $\Gamma = [N, E]$ besitzt, ist $\Gamma \begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix} t = 0$ genau dann, wenn $z = 0$ ist. Daraus folgt, dass $\hat{\mathcal{G}}$ beim PESP keine äquivalenten Elemente aus \mathcal{G} besitzt. Somit ist $\hat{X} = \bigcup_{p \in \hat{\mathcal{G}}} X_p$ ein Repräsentatensystem von X . Wie man an unserem Beispiel sehen kann, gilt dies im Allgemeinen nicht für das EPESP. Für die drei Elemente aus \mathcal{G} , die sich aus den Modulparametern $(0, 0, 0, 0, 0)^t$, $(0, 1, 2, 1, 2)^t$ und $(0, 2, 1, 1, 2)^t$ ergeben, gilt jeweils $\Gamma p = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Für die Modulparameter $(0, 0, 2, 1, 1)^t$, $(0, 1, 1, 1, 1)^t$ und $(0, 2, 0, 1, 1)^t$ erhalten wir $\Gamma p = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ und für die Modulparameter $(0, 0, 2, 1, 2)^t$, $(0, 1, 1, 1, 2)^t$ und $(0, 2, 0, 1, 2)^t$ ist $\Gamma p = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ (siehe Abbildung 6). Der Grund dafür ist, dass Γ nicht injektiv ist. Die Menge $\hat{X} = \bigcup_{p \in \hat{\mathcal{G}}} X_p$ ist somit kein Repräsentatensystem, sondern enthält aus jeder Äquivalenzklasse genau drei Spannungen. Der Suchbaum ist damit redundant und nicht optimal. Für das EPESP behilft man sich damit, dass man statt einer optimalen Spannung einen optimalen Slack sucht. Man nutzt hier aus, dass jede Äquivalenzklasse auf X genau einen eindeutigen Slack besitzt und es zu jedem Slack genau eine Äquivalenzklasse gibt. Aus dem optimalen Slack ergibt sich dann auch die Äquivalenzklasse der optimalen Spannungen. Das es bei der Suche nach den Elementen von \mathcal{L} keine redundanten Parameter liegt daran, dass es sich bei der Matrix R um eine reguläre Matrix handelt. In unserem Beispiel

erhalten wir als zulässige σ die Menge $\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$. Diese repräsentieren jeweils eine der Äquivalenzklassen auf \mathcal{G} für die $X_p \neq \emptyset$ ist.

6 Schrankenlose Probleme

In diesem Kapitel wollen wir uns mit periodischen Netzwerken beschäftigen, bei denen die Fahrzeiten und Wartezeiten der Fahrzeuge fest vorgegeben sind. Außerdem soll es keinerlei zeitliche Beschränkungen für die Umsteigeaktivitäten geben. Sucht man bezüglich des Slacks einen lexikographisch optimalen Fahrplan, so kann man diesen in polynomialer Zeit bestimmen. Was eine lexikographisch optimale Lösung ist, wurde bereits im Abschnitt 5 besprochen.

6.1 Lösungsverfahren

Da alle Fahrzeiten und Wartezeiten der Fahrzeuge schon feststehen, benötigt man nur die Startzeit der Linie an ihrem Startbahnhof. Ordnet man diesem Ereignis eine Zeit zu, so ergeben sich alle anderen Ankunfts- und Abfahrtszeiten dieser Linie automatisch. Daher reicht es ein reduziertes Netzwerk $\bar{\mathcal{N}}$ zu betrachten. In unserem reduzierten Netzwerk gibt es für jede Linie genau einen Knoten $i \in \bar{\mathcal{E}}$. Die einzelnen Ankunfts- und Abfahrereignisse werden nicht mehr betrachtet und auch alle Fahr- und Warteaktivitäten fallen weg. Sämtliche Kanten aus $\bar{\mathcal{A}}$ stehen daher für Umsteigeaktivitäten. Gibt es zur Linie L_i an einem beliebigen Bahnhof eine Umsteigemöglichkeit zur Linie L_j , so wird diese Umsteigeaktivität durch eine gerichtete Kante $(i, j) \in \bar{\mathcal{A}}$ modelliert. Die Anzahl der Knoten bezeichnen wir weiterhin mit n , sowie die Anzahl der Kanten mit m . Die Netzwerkmatrix soll auch hier Γ sein.

Einen Fahrplan erhalten wir hier, indem wir wieder jedem Knoten $i \in \bar{\mathcal{E}}$ eine Zeit $\pi(i) \in \mathbb{R}$ zuordnen. Da es keine zeitlichen Beschränkungen für die Spannungen x_a gibt, ist jeder Fahrplan automatisch auch ein zulässiger Fahrplan. Für die Suche nach einer optimalen Spannung $x \in \mathbb{R}^m$ haben wir also nur die Bedingung $\Gamma x = 0$.

Da wir in diesem reduzierten Netzwerk nur die Startzeit einer Linie in ihrem Startbahnhof haben, sich die Umsteigemöglichkeit aber in einem anderen Bahnhof befinden kann, müssen wir für den Slack die Dauer berücksichtigen, die die beiden Linien benötigen, um von ihrem Startbahnhof zu dem Bahnhof mit der Umsteigemöglichkeit zu gelangen. Sei s der Bahnhof in dem die Umsteigemöglichkeit besteht, dann bezeichnen wir mit t_j^s und t_i^s die Zeitspanne, die die Linien i und j von ihren jeweiligen Startbahnhöfen zum Bahnhof s benötigen. Außerdem bezeichnen wir mit w_j^s die Wartezeit der Linie j im Bahnhof s , sowie mit δ_a^s die Zeitspanne, die ein Passagier für die Umsteigeaktivität a benötigt. Mit $d_a^{min} := t_i^s - t_j^s - w_j^s + \delta_a^s$ erhalten wir als minimalen Slack $[x_a - d_a^{min}]_{\tau_a}$. Damit können wir ein allgemeines Programm zur Minimierung des Slacks aufstellen:

$$\min F(x)$$

$$\text{so dass } \Gamma x = 0$$

Wie in Abschnitt 5 bereits gezeigt, läßt sich auf $\bar{\mathcal{A}} = \{1, \dots, m\}$ eine Ordnung definieren, bei der die Kanten bzw. die Umsteigeaktivitäten nach ihrer Priorität angeordnet sind.

$$a_1 < a_2 < \dots < a_m$$

Mit der Zielfunktion $F : \mathbb{R}^m \rightarrow (\mathbb{R}^m, \leq)$ mit $F(x) := (s_a^{min}(x_a))_{a \in \bar{\mathcal{A}}}$ kann nun eine lexikographisch optimale Lösung gefunden werden. Die Ordnung auf \mathbb{R}^m ergibt sich dabei durch die Ordnung auf $\bar{\mathcal{A}}$ und mit dieser Ordnung läßt sich das Minimierungsproblem auch formulieren als

$$\min_{\leq} \{x - d^{min} + p \geq 0 \mid \Gamma x = 0; p \in \mathcal{G}\}$$

Dies kann man auch hier lösen, indem man den optimalen Slack findet. Wie in Abschnitt 5 ergibt sich dann das neue Minimierungsproblem:

$$\min_{\leq} \{y \geq 0 \mid \Gamma y = -\Gamma d^{min} + \Gamma p; p \in \mathcal{G}\} \quad (4)$$

Für $r := m - n + 1$ ist Γ eine $r \times m$ -Matrix mit $\text{Rang}(\Gamma)=r$, da Netzwerkmatrizen immer vollen Rang haben. Also hat Γ r linear unabhängige

Spalten. Ordnet man die Spalten der Netzwerkmatrix entsprechend an, so erhält man eine Netzwerkmatrix der Form $\Gamma = [N, B]$ mit einer $r \times (n - 1)$ -Matrix N und einer regulären $r \times r$ -Matrix B . Für beliebiges $w \in \mathbb{Z}^r$ ist daher $\begin{pmatrix} 0 \\ B^{-1}w \end{pmatrix}$ eine Lösung der Gleichung $\Gamma y = w$, denn

$$\Gamma \begin{pmatrix} 0 \\ B^{-1}w \end{pmatrix} = N0 + BB^{-1}w = w$$

Da B als Submatrix von Γ total unimodular ist, ist auch die Inverse B^{-1} total unimodular und damit ganzzahlig. Somit ist auch $\begin{pmatrix} 0 \\ B^{-1}w \end{pmatrix}$ ganzzahlig. Um also für die Gleichung $\Gamma y = -\Gamma d^{min} + \Gamma p$ einen zulässigen ganzzahligen Vektor y zu finden, kann man unabhängig von der Wahl von $p \in \mathcal{G}$ den Slack y_a aller Kanten, die zu den Spalten der Submatrix N gehören, auf Null setzen. Die Idee ist nun, eine reguläre Submatrix B zu finden, so dass die zu der Submatrix N gehörenden Kanten möglichst wichtig sind, damit man für diese Umsteigeaktivitäten als Slack null erhält.

Dazu definieren wir eine Ordnung auf der Potenzmenge der Spalten von Γ , und führen den Begriff des Matroiden ein (siehe auch [5]). Sei $M = \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m\}$ die Menge der Spalten von Γ . Da jede Spalte der Netzwerkmatrix Γ zu einer Umsteigeaktivität $a \in \bar{\mathcal{A}}$ gehört, können wir die Ordnung von $\bar{\mathcal{A}}$ auf X übertragen.

$$\gamma_{a_1} < \gamma_{a_2} < \dots < \gamma_{a_m}$$

Betrachten wir die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ von M , so ergibt sich durch die Ordnung von M eine Ordnung für $\mathcal{P}(M)$. Seien $S = \{s_1 < \dots < s_p\}$ und $\bar{S} = \{\bar{s}_1 < \dots < \bar{s}_q\}$ beliebige Elemente aus $\mathcal{P}(M)$, mit $s_i, \bar{s}_j \in X$, $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq q$, dann gilt $S < \bar{S}$, wenn es ein k gibt mit $s_1 = \bar{s}_1, \dots, s_k = \bar{s}_k$ und $s_{k+1} < \bar{s}_{k+1}$ gibt oder wenn $p < q$ und $s_1 = \bar{s}_1, \dots, s_p = \bar{s}_p$ gilt.

Definition. Sei M eine endliche Menge und $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(M)$ eine Teilmenge von der Potenzmenge von M . Das Paar (M, \mathcal{F}) ist ein *Unabhängigkeitssystem* wenn es folgende Eigenschaft erfüllt:

$$A \in \mathcal{F} \text{ und } B \subseteq A \implies B \in \mathcal{F}$$

Sei M wie oben die Menge aller Spalten von Γ und $\mathcal{F} := \{\tilde{M} \subset M \mid \tilde{M} \text{ ist linear unabhängig}\}$ die Menge aller Teilmengen von M , deren Elemente linear unabhängig sind. Da jede Teilmenge einer linear unabhängigen Menge auch wieder linear unabhängig ist, ist (M, \mathcal{F}) ein Unabhängigkeitssystem.

Definition. Ein *Matroid* ist ein Unabhängigkeitssystem (M, \mathcal{F}) , wenn es Folgendes erfüllt:

$$A, B \in \mathcal{F}, |B| < |A| \implies \exists a \in A \setminus B \text{ mit } (B \cup a) \in \mathcal{F}$$

(M, \mathcal{F}) ist auch ein Matroid. Einen ausführlichen Beweis dazu findet sich in [9]. Wir bezeichnen diesen Matroiden mit $\mathcal{M}(\Gamma)$.

Durch die Ordnung auf der Potenzmenge von M gibt es eine Teilmenge $E^* \in \mathcal{M}(\Gamma)$, die \leq -maximal ist, für die also gilt $E \leq E^*, \forall E \in \mathcal{M}(\Gamma)$. Diese eindeutige Menge E^* läßt sich leicht mit Hilfe des folgenden Greedy-Algorithmus bestimmen.

1. Sortiere die Elemente aus M nach ihrer Ordnung, also $\gamma_{a_1} < \gamma_{a_2} < \dots < \gamma_{a_m}$
2. Setze $E_0 := \emptyset$
3. Für $k = 1$ bis m definiere jeweils

$$E_k := \begin{cases} E_{k-1} \cup \{\gamma_{a_{m-k+1}}\} & \text{wenn } E_{k-1} \cup \{\gamma_{a_{m-k+1}}\} \in \mathcal{M}(\Gamma) \\ E_{k-1} & \text{sonst} \end{cases}$$

4. Setze $E^* := E_m$

Das dieser Algorithmus die \leq -maximale Menge E^* liefert, wurde von Edmonds bewiesen (siehe [10])

Lemma ([1]). Sei y^* die optimale Lösung von (4), E^* die eindeutige \leq -maximale Menge von $\mathcal{M}(\Gamma)$ und es sei $D^* := \{i \mid \gamma_i \in E^*\}$, dann gilt für alle $i \in F^* := \{1, \dots, m\} \setminus D^*$, dass $y_i^* = 0$.

Beweis. Wir können die Spalten der Netzwerkmatrix so umordnen, dass gilt $E^* = \{\gamma_n, \dots, \gamma_m\}$. Außerdem können wir die Kanten $\{1, \dots, m\}$ untereinander so umbenennen, dass jeweils die Kante i wieder zur i -ten Spalte der umgeordneten Netzwerkmatrix gehört. Wir nehmen also ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass $E^* = \{\gamma_n, \dots, \gamma_m\}$ ist und somit $D^* = \{n, \dots, m\}$ und $F^* = \{1, \dots, n-1\}$. Da die Spalten aus E^* linear unabhängige Vektoren des \mathbb{R}^r sind, ist E^* eine Basis des \mathbb{R}^r . Daher lassen sich alle Elemente aus $M \setminus E^* = \{\gamma_i \mid i \in F^*\}$ darstellen als $\gamma_i = \sum_{j \in D^*} \alpha_{ij} \gamma_j$. Hierbei gilt

$$\alpha_{ij} \neq 0 \implies \gamma_i < \gamma_j \implies i < j \text{ bezüglich der Ordnung} \quad (5)$$

Wäre das nicht der Fall, so wäre $\tilde{E} := (E^* \cup \{\gamma_i\}) \setminus \{\gamma_j\}$ nach dem Austauschsatz eine linear unabhängige Menge und somit $\tilde{E} \in \mathcal{M}(\Gamma)$. Allerdings ist $\tilde{E} > E^*$ und das wäre ein Widerspruch zur Maximalität von E^* bezüglich $\mathcal{M}(\Gamma)$.

Da wir annehmen, dass (4) lösbar ist, gibt es ein p^* mit $\Gamma y^* = -\Gamma d^{\min} + \Gamma p^* := c$. Wir nehmen an, dass es ein $u \in F^*$ gibt mit $y_u^* \neq 0$. Ohne Einschränkung nehmen wir an, dass $u = 1$ ist. Wir definieren nun

$$y_j := \begin{cases} 0, & \text{wenn } j = 1 \\ y_j^* & \text{wenn } 2 \leq j \leq n-1, \\ y_j^* + y_1^* \alpha_{1j}, & \text{sonst} \end{cases}$$

Für dieses y gilt

$$\begin{aligned} \Gamma y &= 0 \cdot \gamma_1 + \sum_{k=2}^{n-1} y_k^* \gamma_k + \sum_{k=n}^m (y_k^* + y_1^* \alpha_{1k}) \gamma_k \\ &= \sum_{k=2}^m y_k^* \gamma_k + y_1^* \cdot \sum_{k=n}^m \alpha_{1k} \gamma_k = \sum_{k=1}^m y_k^* \gamma_k = \Gamma y^* = c \end{aligned}$$

Wir definieren

$$\sigma := \begin{cases} \sigma_j = 0 & \text{wenn } y_j = 0 \\ \sigma_j = \min\{\beta \in \tau_j \mathbb{Z} \mid y_j + \beta \geq 0\} & \text{wenn } y_j \neq 0 \end{cases}$$

Wie man aus der Definition schon sieht ist $\sigma \in \mathcal{G}$. Es ist $y + \sigma$ eine zulässige Lösung, denn $\Gamma(y + \sigma) = c + \Gamma \sigma$ mit $\sigma \in \mathcal{G}$. Außerdem ist $y + \sigma \geq 0$ nach

der Definition von σ . Falls $\alpha_{1j} = 0$ ist für ein $j \in D^*$, so ist $y_j = y_j^*$. Es gilt $y_j^* = \min\{y_j^* + \beta \geq 0 \mid \beta \in \tau_j \mathbb{Z}\} \forall j \in \{1, \dots, m\}$, denn sonst wäre y^* nicht optimal. Deshalb ist $\sigma_j = 0$ und somit $y_j + \sigma_j = y_j^*$.

Daher muss $\alpha_{1j} \neq 0$ gelten für alle $j \in D^*$ mit $y_j + \sigma_j \neq y_j^*$. In diesen Fällen gilt mit (5) $\gamma_1 < \gamma_j$. Da $y_1 + \sigma_1 = 0 < y_1^*$ ist, folgt somit $y + \sigma < y^*$, was ein Widerspruch zur Annahme ist. \square

Hat man mit Hilfe des Greedy Algorithmus das \leq -maximale Element E^* gefunden, so kann man den Slack der Kanten F^* auf null setzen. Wir gehen hier wieder davon aus, dass durch Vertauschung der Spalten der Netzwerkmatrix $E^* = \{\gamma_n, \dots, \gamma_m\}$ ist. Die Netzwerkmatrix hat dann die Form $\Gamma = [N, B]$, wobei B aus den linear unabhängigen Spalten von E^* besteht und somit invertierbar ist. Für $y = \begin{pmatrix} y_N \\ y_B \end{pmatrix}$ bekommen wir dann mit den Äquivalenzumformungen

$$\begin{aligned} \Gamma y &= -\Gamma d^{\min} + \Gamma p; p \in \mathcal{G} \\ \iff [N, B] \begin{pmatrix} y_N \\ y_B \end{pmatrix} &= -\Gamma d^{\min} + \Gamma p; p \in \mathcal{G} \\ \iff B y_B &= -\Gamma d^{\min} + \Gamma p - N y_N; p \in \mathcal{G} \\ \iff y_B &= -B^{-1} \Gamma d^{\min} + B^{-1} \Gamma p - B^{-1} N y_N; p \in \mathcal{G} \end{aligned}$$

eine äquivalente Bedingung für einen zulässigen Slack.

Da wir nun wissen, dass für die optimale Lösung $y_N^* = 0$ gilt, reduziert sich das Minimierungsproblem (4) auf:

$$\min_{\leq} \{y_B \mid y_B = -B^{-1} \Gamma d^{\min} + \sigma; \sigma \in B^{-1} \Gamma \mathcal{G}\} \quad (6)$$

Wir gehen ohne Einschränkungen davon aus, dass die Einträge von y_B nach ihrer Priorität angeordnet sind. Es ist $B^{-1} \Gamma \mathcal{G}$ eine Untergruppe des \mathbb{Z}^r und für $B^{-1} \Gamma T$ sei $[R, 0]$ die hermitesche Normalform, wobei

$$T := \begin{pmatrix} \tau_1 & & 0 \\ & \dots & \\ 0 & & \tau_m \end{pmatrix}$$

Dann gilt aufgrund der elementaren Spaltenumformungen:

$$B^{-1}\Gamma\mathcal{G} = \{(B^{-1}\Gamma T) \cdot z \mid z \in \mathbb{Z}^m\} = \{R\tilde{z} \mid \tilde{z} \in \mathbb{Z}^r\}$$

Mit $b := -B^{-1}\Gamma d^{min}$ erhält man die folgende zu (6) äquivalente Formulierung

$$\begin{aligned} \min_{\leq} y_B, \quad & \text{so dass} \\ y_n &= b_1 + z_1\eta_{11} \\ y_{n+1} &= b_2 + z_1\eta_{21} + z_2\eta_{22} \\ &\dots \\ &\dots \\ y_m &= b_r + z_1\eta_{r,1} + z_2\eta_{r,2} + \dots + z_r\eta_r \\ y_n, \dots, y_m &\geq 0; \quad z_1, \dots, z_r \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Die Werte für y_n, \dots, y_m der optimalen Lösung y^* lassen sich somit leicht errechnen, indem man nacheinander die Variablen z_1 bis z_r bestimmt. Ausgehend von diesem optimalen Slack können wir nun eine optimale Spannung finden. Da die Hermitesche Normalenform von $B^{-1}\Gamma T$ durch elementare Spaltenumformung gewonnen wurde, gibt es eine reguläre, ganzzahlige Matrix C , für die gilt $B^{-1}\Gamma TC = [R, 0]$. Mit den Werten z_1^*, \dots, z_r^* , die wir bei der Berechnung von y^* erhalten, definieren wir $p^* := TC \begin{pmatrix} z^* \\ 0 \end{pmatrix}$. Es ist $p^* \in \mathcal{G}$, da

$C \begin{pmatrix} z^* \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^m$ und für dieses p^* gilt $\Gamma y^* = -\Gamma d^{min} + \Gamma p^*$. Eine optimale Spannung ist somit $x^* = y^* + d^{min} - p$.

Da die Berechnung von E^* und die Berechnung des obigen Programms in polynomieller Zeit geschieht, läßt sich also für unbeschränkte Probleme eine lexikographisch optimale Lösung in polynomieller Zeit bestimmen.

Beispiel. Gegeben sei das Netzwerk aus Abbildung 13. Auf der Kantenmenge $\{1, \dots, 6\}$ gilt die Ordnung $1 < 2 < \dots < 6$. Es gilt außerdem $d^{min} = (2, 1, 3, 3, 1, 4)^t$ und $\tau = (12, 4, 6, 4, 8, 12)^t$. Mit dem spannenden Baum $[\mathcal{E}, \{1, 3, 4, 6\}]$ und der Kantenreihenfolge 1, 2, 3, 4, 5, 6 erhalten wir die

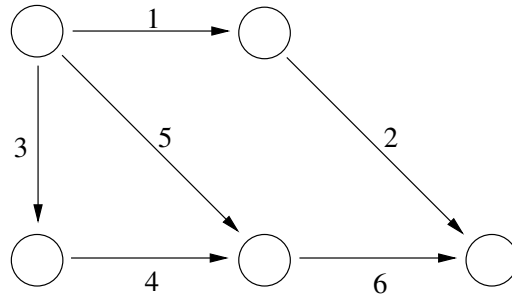


Abbildung 13: Beispielgraph

Netzwerkmatrix

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Da sich die Ordnung der Kanten auf die Ordnung der Spalten überträgt, ist $\gamma_1 < \gamma_2 < \dots < \gamma_6$ die Ordnung von M . Mit dem Greedy-Algorithmus erhalten wir $E^* = \{\gamma_5, \gamma_6\}$. Für den optimale Slack y^* gilt daher $y_1^* = y_2^* = y_3^* = y_4^* = 0$. Außerdem ist $B = (\gamma_5, \gamma_6) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Damit ergibt sich $-B^{-1}\Gamma d^{min} = \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \end{pmatrix} := b$ und $B^{-1}\Gamma T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 & -4 & 8 & 0 \\ -12 & -4 & 6 & 4 & 0 & 12 \end{pmatrix}$. Für $B^{-1}\Gamma T$ ist dann die hermitesche Normalenform $[R, 0]$ mit $R = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. Für y_5^* erhalten wir damit das Minimierungsproblem $\min\{5 + 2z_1 \mid 5 + 2z_1 \geq 0; z_1 \in \mathbb{Z}\}$. Mit $z_1 = -2$ ist hier $y_5^* = 1$. Damit folgt nun für y_6^* das Minimierungsproblem $\min\{-7 + (-2) \cdot 2 + 4z_2 \mid -7 + (-2) \cdot 2 + 4z_2 \geq 0; z_2 \in \mathbb{Z}\}$. Hier ist $y_6^* = 1$ mit $z_2 = 3$.

6.2 Alternatives Verfahren

In dem eben gezeigten Verfahren geht man von einem beliebigen spannenden Baum aus und sucht in der zugehörigen Netzwerkmatrix die maximale Menge an linear unabhängigen Spalten. Durch die richtige Wahl des spannenden

Baums lässt sich das Verfahren allerdings noch ein wenig vereinfachen. In diesem Abschnitt gehen wir stets davon aus, dass die Kanten aus \mathcal{A} nach ihrer Priorität benannt sind. Also Kante 1 ist die wichtigste Kante, Kante 2 die zweitwichtigste und so weiter. Außerdem haben alle Kanten ein Gewicht. Für jede Kante i soll das Gewicht gerade i betragen. Ein minimal spannender Baum ist ein Baum, dessen Kantengewichte in der Summe minimal sind. Wir können nun mit dem Algorithmus von Kruskal einen minimal spannenden Baum finden.

1. Sortiere die Kanten des Graphen nach ihrem Gewicht, also $1 < 2 < \dots < m$.
2. Setze $\mathcal{W} := \emptyset$
3. Für $k = 1$ bis m definiere jeweils

$$\mathcal{W}_k := \begin{cases} \mathcal{W}_{k-1} \cup \{k\} & \text{wenn } (\mathcal{E}, \mathcal{W}_{k-1} \cup \{k\}) \text{ kreisfrei} \\ \mathcal{W}_{k-1} & \text{sonst} \end{cases}$$

4. Setze $\mathcal{W}^* := \mathcal{W}_m$

$(\mathcal{E}, \mathcal{W}^*)$ ist dann ein minimal spannender Baum des Graphen \mathcal{G} (siehe [5]). Dieser ist sogar eindeutig, da alle Kantengewichte unterschiedlich sind. Im folgenden Lemma wird gezeigt, dass die Spalten der Netzwerkmatrix, die zu den Nichtbaumkanten gehören, also die Menge $\{\gamma_i \mid i \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{W}^*\}$, dem maximalen Element E^* entspricht. In diesem Fall besteht dann E^* aus den Spalten der Einheitsmatrix. Da man sich diese Aussage recht leicht intuitiv klar machen kann, wollen wir vor dem Lemma dazu ein ausführliches Beispiel geben.

Beispiel. Gegeben sei der Graph G aus der Abbildung 14. Mit dem Algorithmus von Kruskal erhalten wir $\mathcal{W}^* = \{1, 2, 4, 6\}$. Der sich ergebende minimale spannende Baum ist in Abbildung 15 dargestellt.

Die Baumkanten sind also $\{1, 2, 4, 6\}$ und die Kanten $\{3, 5, 7, 8\}$ sind die Nichtbaumkanten. Wenn wir die Zeilen und Spalten der Netzwerkmatrix nach den Prioritäten der Kanten ordnen, so erhalten wir die Matrix

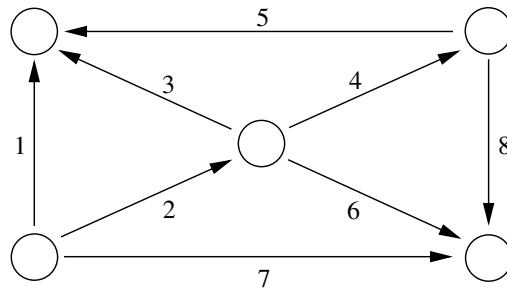


Abbildung 14: Graph G

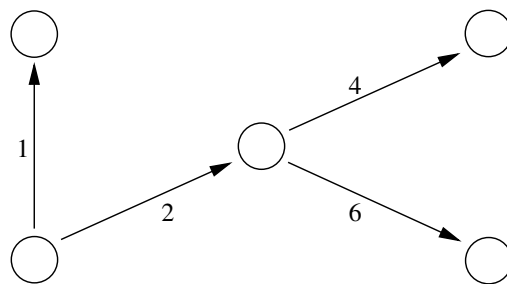


Abbildung 15: minimal spannender Baum T

$$\Gamma = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die erste Zeile in Γ gehört zum Elementarzykel, den man erhält, wenn zum spannenden Baum T die Kante 3 hinzugefügt wird. Man kann sehen, dass alle Einträge in der ersten Zeile, die nach der dritten Spalte kommen, gleich Null sind. Der Grund dafür ist, dass der Elementarzykel zur Kante 3 nur aus den Kanten $\{1, 2, 3\}$ bestehen kann. Dadurch, dass die Kante 3 nicht zu den Baumkanten gehört, muss nach dem Algorithmus von Kruskal der Teilgraph $[\mathcal{E}, \{1, 2, 3\}]$ einen Zykel besitzen, der durch die Hinzunahme der Kante 3 entstanden ist. Da die Elementarzykel im Graphen G eindeutig sind, ist der Zykel des Teilgraphen gerade der zur Kante 3 zugehörige Elementarzykel und somit kann der Zykel nur aus den Kanten $\{1, 2, 3\}$ bestehen.

Mit der gleichen Überlegung schließt man, dass der Elementarzykel zur Kante 5

nur aus den Kanten $\{1, 2, 4, 5\}$ bestehen kann und man sieht auch hier, dass in der zweiten Zeile von Γ die Einträge nach der fünften Spalte alle Null sind. Man kommt zu der Einsicht, dass die Einträge einer Zeile nach der Spalte alle gleich Null sind, die zu der Kante gehört, die zu dem entsprechenden Elementarzykel der Zeile gehört. In der entsprechenden Spalte selbst, ist der Eintrag jeweils 1.

Wendet man nun den Greedy-Algorithmus an, um das maximale Element E^* bezüglich des Matroiden $\mathcal{M}(\Gamma)$ zu finden, so ist sofort klar, dass die Spalten 7 und 8 zum maximalen Element gehören. Da die Spalten jeweils nur Einträge in den letzten zwei Zeilen haben, muss die nächste Spalte, die zu E^* gehört, einen von Null verschiedenen Eintrag in der ersten oder zweiten Zeile haben, damit sie zu den beiden Spalten linear unabhängig ist. In der ersten Zeile sind wie oben gesehen die Spalte $\{\gamma_4, \gamma_5, \gamma_6, \gamma_7, \gamma_8\}$ gleich Null und in der zweiten Zeile die Spalten $\{\gamma_6, \gamma_7, \gamma_8\}$. Somit ist Spalte γ_5 die nächste Spalte in dem Greedy-Algorithmus, die einen von Null verschiedenen Eintrag in einer der beiden Zeilen hat. Offensichtlich sind die Spalten $\{\gamma_5, \gamma_7, \gamma_8\}$ auch linear unabhängig. Die letzte Spalte muss dann in der ersten Zeile einen von Null verschiedenen Eintrag haben. Die nächste in dem Greedy-Verfahren vorkommende Spalte, die einen von Null verschiedenen Eintrag in der ersten Zeile hat, ist die dritte Spalte, die auch linear unabhängig ist von den anderen Spalten. Somit ist die Spaltenmenge $\{\gamma_3, \gamma_5, \gamma_7, \gamma_8\}$ das maximale Element in dem Matroiden. Die zugehörigen Kanten sind gerade die Nichtbaumkanten. Ordnen wir nun die Spalten erst nach Baumkanten und Nichtbaumkanten und dann jeweils nach ihrer Priorität, also in der Reihenfolge 1, 2, 4, 6, 3, 5, 7, 8, so erhalten wir die Matrix

$$\tilde{\Gamma} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Wir haben nun die Netzwerkmatrix in der typischen Form $\Gamma = [N, E]$ mit einer $r \times (n - 1)$ - Matrix N und einer $r \times r$ - Einheitsmatrix E . Die Spalten, die die Einheitsmatrix bilden, sind gerade das maximale Element.

Lemma. Für einen Graphen sei \mathcal{W} die Menge der Kanten, die den minimalen Baum aufspannen. E^* sei die maximale Menge des Matroiden $\mathcal{M}(\Gamma)$, wobei Γ die Netzwerkmatrix zum minimal spannenden Baum T ist, deren Spalten nach der Priorität der Kanten angeordnet sind.

Dann ist $\{i | \gamma_i \in E^*\} = \bar{\mathcal{A}} \setminus \mathcal{W}$ und die Spalten des maximalen Elements E^* bilden bei richtiger Anordnung eine $r \times r$ -Einheitsmatrix.

Beweis. Im Folgenden bezeichnen wir mit j_i die Kante, dessen Elementarzykel zur i -ten Zeile gehört und mit C_i die Menge aller Kanten dieses Elementarzykels. Wir nehmen ohne Einschränkungen an, dass $j_{i+1} > j_i$ für alle $i \in \{1, \dots, r-1\}$ gilt. Für beliebiges $i \in \{1, \dots, r\}$ ist j_i eine Nichtbaumkante und somit enthält nach dem Algorithmus von Kruskal der Teilgraph $(\mathcal{E}, \mathcal{W}_{j_{i-1}} \cup \{j_i\})$ einen Elementarzykel. Da die Elementarzykel in dem Graphen eindeutig sind, ist dieser Zykel gerade C_i . Somit ist $C_i \subset (\{1, \dots, j_i\} \setminus \{j_1, \dots, j_{i-1}\})$. Daraus wiederum folgt, dass für die i -te Zeile $\gamma_{i,j} = 0 \ \forall j > j_i$ gilt. Offensichtlich ist $\gamma_{i,j_i} = 1$, denn j_i ist natürlich in dem von ihm erzeugten Elementarzykel enthalten.

Wie weiter oben schon erwähnt, findet man das maximale Element E^* mit dem Algorithmus von Greedy. Es sei $\tilde{E}_k \subset E^*$ die Teilmenge von E^* , die die ersten k Spalten enthält, die sich aus dem Greedy-Algorithmus ergeben. Die Behauptung ist nun, dass für alle $k \in \{1, \dots, r\}$ gilt $\tilde{E}_k = \{\gamma_{j_r}, \dots, \gamma_{j_{r-k+1}}\}$. Dies zeigen wir durch Induktion.

Sei also nun $k = 1$. Für $j_r = m$ ist offensichtlich $E_1 = \{\gamma_{j_r}\}$. Für $j_r < m$ ist ebenfalls $E_1 = \{\gamma_{j_r}\}$. Nach dem Algorithmus von Kruskal kann eine beliebige Kante l mit $l > j_r$ in keinem Elementarzykel enthalten sein und deshalb ist γ_l jeweils der Nullvektor. Somit ist γ_l linear abhängig und $\{\gamma_l\}$ ist kein Element von $\mathcal{M}(\Gamma)$. Damit ist die Behauptung für $k = 1$ bewiesen.

Sei nun die Behauptung bewiesen für ein $k \in \{1, \dots, r-1\}$. Zu zeigen ist, dass diese Aussage auch für $k+1$ gilt. Nach Induktionsvoraussetzung ist $\tilde{E}_k = \{\gamma_{j_{r-k+1}}, \dots, \gamma_{j_r}\}$. Da γ_{j_i} gerade der i -te Einheitsvektor ist für alle $i \in \{1, \dots, r\}$, ist $\tilde{E}_k = \{e_{r-k+1}, \dots, e_r\}$. Mit obiger Aussage gilt für alle t mit $t > j_{r-k}$, dass $\gamma_{l,t} = 0 \ \forall l \in \{1, \dots, r-k\}$. Daraus folgt, dass $\gamma_t \in \text{span}\{e_{r-k+1}, \dots, e_r\}$ und somit ist γ_t linear abhängig von E_k . Insbe-

sondere gilt dieses für alle γ_t mit $t \in \{j_{r-k} + 1, \dots, j_{r-k+1}\}$ und somit gilt für diese t , dass $\gamma_t \notin E_{k+1}$. Allerdings gilt $\gamma_{r-k, j_{r-k}} = 1$ und somit ist $\gamma_{j_{r-k}} \notin \text{span}\{e_{r-k+1}, \dots, e_r\}$. Daher ist $\gamma_{j_{r-k}}$ linear unabhängig von den Spalten aus \tilde{E}_k . Nach dem Greedy-Algorithmus ist nun $\tilde{E}_{k+1} = \{\gamma_{j_r}, \gamma_{j_{r-1}}, \dots, \gamma_{j_{r-k}}\}$. Die Behauptung ist somit bewiesen. Mit dieser Aussage folgt nun, dass $E^* = \{\gamma_{j_1}, \dots, \gamma_{j_r}\}$ ist und somit $E^* = \bar{\mathcal{A}} \setminus \mathcal{W}$.

Da $E^* = \{\gamma_{j_1}, \dots, \gamma_{j_r}\} = \{e_1, \dots, e_r\}$ bilden die Spalten eine $r \times r$ -Einheitsmatrix. \square

Bei der Wahl des minimal spannenden Baumes kennt man also das maximale Element E^* sofort und weiß, dass der Slack der Baumkanten bei der optimale Lösung null betragen muss. Außerdem erhalten wir statt (6) die einfachere Formulierung

$$\min_{\leq} \{y_B \mid y_B = \Gamma d^{\min} + \sigma; \sigma \in \Gamma \mathcal{G}\}$$

da die Matrix B aus (6) in diesem Fall die Einheitsmatrix ist.

Beispiel. Für unser Netzwerk aus Abbildung 13 erhalten wir mit dem Algorithmus von Kruskal den spannenden Baum $[\mathcal{E}, \{1, 2, 3, 4\}]$. Ohne den Greedy-Algorithmus anwenden zu müssen, ist nun bekannt, dass $E^* = \{\gamma_5, \gamma_6\}$ ist und somit der optimale Slack für die Baumkanten $\{1, 2, 3, 4\}$ null beträgt. Außerdem ist in diesem Fall B^{-1} die Einheitsmatrix.

6.3 Heuristik

Ausgehend vom minimal spannenden Baum läßt sich mit Hilfe einer Heuristik schnell eine Knotenbewertung finden, bei der die Kanten des minimal spannenden Baums die Wartezeit Null haben.

- Wähle beliebiges $x \in \mathcal{W}^*$. Setze $\pi(\alpha(x)) = 0, \pi(\omega(x)) = d_x^{\min}, \mathcal{W}^* = \mathcal{W}^* \setminus \{x\}, S = \{\alpha(x), \omega(x)\}$ und $T = \mathcal{E} \setminus \{\alpha(x), \omega(x)\}$
- Für $k = 2$ bis $n - 1$ wähle $x \in \mathcal{W}^*$ mit $\alpha(x) \in S \wedge \omega(x) \in T$ oder $\omega(x) \in S \wedge \alpha(x) \in T$. Falls $\alpha(x) \in T$ setze $\pi(\alpha(x)) = \pi(\omega(x)) - d_x^{\min}, T = T \setminus \{\alpha(x)\}$ und $S = S \cup \{\alpha(x)\}$

Falls $\omega(x) \in T$ setze $\pi(\omega(x)) = \pi(\alpha(x)) + d_x^{min}$, $T = T \setminus \{\omega(x)\}$ und $S = S \cup \{\omega(x)\}$.

Außerdem setze $\mathcal{W}^* = \mathcal{W}^* \setminus \{x\}$.

Bei der Heuristik wird also ausgehend vom Anfangsereignis einer Baumkante den übrigen Ereignissen sukzessive ein Wert zugeordnet. Da die Knotenbewertung für jede Kante des minimal spannenden Baumes die Spannung $x_a = d_a^{min}$ liefert, haben die Kanten die Wartezeit Null. Allerdings liefert diese Heuristik im Allgemeinen keine optimale Lösung, wie aus dem folgenden Beispiel zu entnehmen ist.

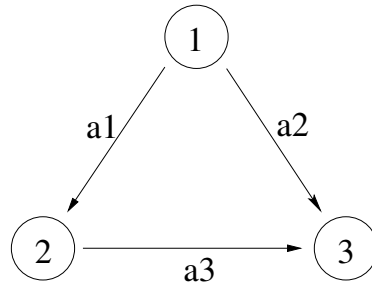


Abbildung 16: Graph G

Beispiel. Gegeben sei der Graph G aus Abbildung 16 mit den folgenden Daten. Die Umsteigedauer ist $d_a^{min} = 2$ für alle drei Kanten. Die Perioden der Knoten sind $\tau_1 = 15, \tau_2 = 21$ und $\tau_3 = 35$. Somit ergeben sich die Aktivperioden $\tau_{a_1} = 3, \tau_{a_2} = 5$ und $\tau_{a_3} = 7$. Die Kanten haben die Ordnung $a_1 < a_2 < a_3$.

Mit der Ordnung bilden die Kanten $\{a_1, a_2\}$ den minimal spannenden Baum von \mathcal{G} . Den Anfangsknoten von a_1 , also Knoten 1, können wir einen beliebigen Wert c zuordnen. Der Einfachheit halber sei hier $\pi(1) = 0$. Nach der Heuristik setzen wir dann $\pi(2) = \pi(1) + d_{a_1}^{min} = 2$ und für den dritten Knoten $\pi(3) = \pi(1) + d_{a_2}^{min} = 2$. Für die Kanten a_1 und a_2 erhalten wir damit jeweils die Spannung $x_{a_1} = x_{a_2} = 2$ und somit als Slack $[x_{a_1} - d_{a_1}^{min}]_3 = [0]_3 = 0$ und $[x_{a_2} - d_{a_2}^{min}]_5 = [0]_5 = 0$. Für die Kante a_3 beträgt die Spannung $x_{a_3} = 0$ und somit ist der Slack $[x_{a_3} - d_{a_3}^{min}]_7 = [-2]_7 = 5$.

Allerdings liefert die Knotenbewertung $\pi(1) = 0, \pi(2) = 2$ und $\pi(3) = 2$ für

jede Kante den Slack null. Daher ist die durch die Heuristik gefundene Lösung nicht optimal.

In einigen speziellen Fällen liefert diese Heuristik aber eine optimale Lösung. Im ersten Fall sind alle Aktivperioden gleich. Das ist dann der Fall, wenn alle Ereignisse die gleiche Periode haben. Es kann aber auch vorkommen, wenn in einem periodischen Netzwerk eine Periode sehr dominant ist und die übrigen Perioden Vielfache von dieser sind.

Für alle Baumkanten a mit Slack null gilt in diesem Fall $y_a = [x_a - d_a^{min}]_\tau = 0 \iff [x_a]_\tau = d_a^{min} \iff \exists z_a \in \mathbb{Z} : x_a + \tau z_a = d_a^{min} \iff \exists z_a \in \mathbb{Z} : x_a = -\tau z_a + d_a^{min}$

Sei i eine beliebige Nichtbaumkante, dann folgt aus der Bedingung $\Gamma x = 0$

$$\begin{aligned} x(C_i) &:= \sum_{a \in C_i^+} x_a - \sum_{a \in C_i^-} x_a = 0 \\ \iff x_i &= - \sum_{a \in C_i^+ \setminus \{i\}} x_a + \sum_{a \in C_i^-} x_a \\ x_i &= - \sum_{a \in C_i^+ \setminus \{i\}} (d_a^{min} - \tau z_a) + \sum_{a \in C_i^-} (d_a^{min} - \tau z_a) \end{aligned}$$

Für die Kante i erhalten wir daher den Slack

$$\begin{aligned} y_i &= [x_i - d_i^{min}]_\tau \\ &= \left[- \sum_{a \in C_i^+ \setminus \{i\}} (d_a^{min} - \tau z_a) + \sum_{a \in C_i^-} (d_a^{min} - \tau z_a) - d_i^{min} \right]_\tau \\ &= \left[- \sum_{a \in C_i^+} d_a^{min} + \sum_{a \in C_i^-} d_a^{min} + \tau \tilde{z} \right]_\tau \\ &= [\Gamma \cdot_i d^{min}]_\tau \end{aligned}$$

Dies gilt unabhängig von den gewählten z_a . Haben die Baumkanten also den Slack null, so beträgt der Slack der Kante i immer $y_i = [\Gamma \cdot_i d^{min}]_\tau$. Damit hat sowohl der optimale Fahrplan, als auch der durch die Heuristik gefundene Fahrplan für die Kante i denselben Slack. Da das für alle Nichtbaumkanten gilt folgt daher, dass der von der Heuristik gefundene Fahrplan optimal ist.

Ein weiterer Fall liegt vor, wenn die Aktivperiode jeder Nichtbaumkante i ein Teiler der Aktivperioden der Kanten aus C_i ist. Da für sämtliche $c \in \mathbb{Z}$ gilt, dass $[a + cz\tau]_\tau = [a]_\tau$, erhalten wir genauso wie eben für jede Nichtbaumkante i den Slack $y_i = [\Gamma_i d^{min}]_\tau$, wenn der Slack der Baumkanten jeweils Null beträgt. Somit gilt auch hier, dass die Heuristik einen optimalen Fahrplan findet.

7 Literaturverzeichnis

- [1] Karl Nachtigall, Periodic network optimization with different arc frequencies, Discrete Applied Mathematics 69 (1996) 1-17
- [2] Karl Nachtigall, Periodic Network Optimization and Fixed Interval Timetables. Habilitationsschrift, Universität Hildesheim, 1998. Auch als Institutsbericht (IB) 112-99/02 des Deutschen Instituts für Luft- und Raumfahrt, Braunschweig 1999
- [3] P. Serafini and W. Ukovich, A mathematical model for periodic scheduling Problems, SIAM J. Discrete Math. 2(4): 550-581,1989
- [4] Martin Grötschel, Laszlo Lovasz, Alexander Schrijver, Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization, Springer Verlag Berlin Heidelberg 1988
- [5] M. Gondran and M.Minoux, Graphs and Algorithms, John Wiley and Sons 1984
- [6] Anita Schöbel, Vorlesung Netzwerkoptimierung WS 07/08, Georg-August Universität Göttingen
- [7] R.T. Rockafellar, Network Flows and Monotropic Optimization, John Wiley and Sons 1984
- [8] Ralf Mayer, Vorlesung Analytische Geometrie und lineare Algebra 2 SS 07, Georg-August Universität Göttingen
- [9] <http://www.mathematik-netz.de/pdf/Matroide.pdf> S.15-16
- [10] J. Edmonds, Matroids and the greedy algorithm, Math.Programming (1971) 127-136