

**Untersuchung eines kinematischen
Dynamo-Problems
mittels FEM-BEM Kopplung**

Dissertation
zur Erlangung des mathematisch-naturwissenschaftlichen
Doktorgrades
“Doctor rerum naturalium”
der Georg-August-Universität Göttingen

vorgelegt von
Wiebke Lemster
aus Hamburg

Göttingen 2011

D7

Referent:

Professor Dr. Gert Lube

Koreferent:

Professor Dr. Thorsten Hohage

Tag der mündlichen Prüfung: 19.05.2011

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Physikalische Motivation und geschichtliche Wurzeln	1
1.2	Mathematische Methode	2
1.3	Gliederung	3
2	Formulierung des mathematischen Problems	5
2.1	Laminares Dynamo-Modell	5
2.1.1	Die Maxwell-Gleichungen	6
2.1.2	Analogien zu anderen partiellen Differentialgleichungen	11
2.1.3	Dynamo-Effekt	13
2.2	Turbulentes Dynamo-Modell	13
2.2.1	Motivation	13
2.2.2	Skalenzerlegung	14
2.2.3	Charakterisierung von Turbulenz	15
2.2.4	α -Modell	16
2.3	Potentialansätze für das Magnetfeld	17
2.3.1	Gebietszerlegung	17
2.3.2	Problem im Außengebiet Ω_E	18
2.3.3	Problem im Innengebiet Ω_c	19
2.3.4	Gekoppeltes Magnetodynamik-Problem	20

3	Variationsformulierung des kontinuierlichen Problems	21
3.1	Funktionsräume	21
3.1.1	Funktionsräume im Gebiet	22
3.1.2	Funktionsräume auf dem Rand	22
3.1.3	Räume für zeitabhängige Probleme	26
3.2	Randgleichungen	27
3.2.1	Calderòn-Gleichungen	28
3.2.2	Lösbarkeitsbedingungen für die Calderòn Gleichungen	30
3.3	Gekoppeltes Problem	31
4	Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung des kontinuierlichen Problems	35
4.1	Herleitung eines äquivalenten Problems	35
4.2	Definitionen	37
4.3	Nachprüfen der Eigenschaften der Operatoren	39
4.3.1	Eigenschaften der Randoperatoren	40
4.3.2	Lipschitz-Stetigkeit der Operatoren $S(t)$ und \mathcal{A}_{nl}	41
4.3.3	Monotonie des Operators $D(t)$	43
4.4	Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung des gekoppelten Problems	44
5	Semidiskretisierung im Ort	45
5.1	Nédélec-Elemente	45
5.1.1	Nédélec-Elemente auf Tetraedern	46
5.1.2	Nédélec-Elemente auf Hexaedern	49
5.1.3	Krummlinige Nédélec-Elemente	50
5.2	Galerkin-Formulierung	53
5.3	Diskretisierung der Nebenbedingung	55
5.3.1	Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung	55
5.3.2	Quasioptimalitätsabschätzung	57

6	Vollständige Diskretisierung	61
6.1	Diskretisierung in der Zeit	61
6.1.1	Implizites Euler-Verfahren	62
6.1.2	Hilfsmittel	63
6.1.3	Annahmen an die Daten	64
6.2	Existenz und Eindeutigkeit einer diskreten Lösung	65
6.3	Konvergenz	68
6.3.1	Der Projektor P_h zwischen kontinuierlichem und diskretem Problem	69
6.3.2	Konvergenzresultat	71
7	Implementierung	87
7.1	Inneres Problem	87
7.1.1	Details zur Implementierung	87
7.1.2	Testbeispiele für das Innenraumproblem	88
7.2	Äußeres Problem	94
7.2.1	Panel-Clustering Methode	94
7.2.2	Multipolentwicklung	95
7.3	Kopplung	96
7.3.1	Gekoppeltes Problem	96
7.3.2	Beispiel 1	96
7.3.3	Beispiel 2	101
7.3.4	Ausblick	105
8	Zusammenfassung und Ausblick	107
8.1	Zusammenfassung	107
8.2	Ausblick	108
	Literatur	111

IV

Symbolverzeichnis

117

Index

120

Kapitel 1

Einleitung

Aller Anfang ist leicht, und die letzten Stufen werden am schwersten und seltensten erstiegen.

Johann Wolfgang von Goethe (1749-1832),
deutscher Dichter

Ziel dieser Arbeit ist es, ein kinematisches Dynamo-Problem theoretisch zu untersuchen und einen Code für dieses Problem zu schreiben und zu testen.

1.1 Physikalische Motivation und geschichtliche Wurzeln

Viele astronomische Objekte wie Sterne und Planeten besitzen ein Magnetfeld. Die Magnetfelder der Sonne und des Mondes können mittels Satelliten gemessen werden. Die Erde besitzt ebenfalls ein Magnetfeld. Es gibt Tiere, die sich dieses zunutze machen und mit seiner Hilfe navigieren. Auch der Mensch hat sich lange Zeit mit Hilfe von Kompassen orientiert. Das Erdmagnetfeld schützt uns vor kosmischer Strahlung.

Es liegt nahe zu vermuten, dass die Erde ein Permanentmagnet ist. Das bedeutet, dass das Magnetfeld durch festes magnetisiertes Material erzeugt wird. Die Stärke des Erdmagnetfeldes ist allerdings größer als es bei einem Permanentmagneten möglich wäre. Es muss einen anderen Mechanismus geben. Dazu sollte der Aufbau der Erde näher betrachtet werden. Durch unterschiedliche Messmethoden, z.B. seismische Tests, ist dieser gut bekannt. Im Innersten gibt es einen festen Kern, der vorwiegend aus Eisen besteht. Dieser wird durch den flüssigen Kern umschlossen, welcher sich zum großen Teil aus flüssigen Metallen zusammensetzt. Auf dem äußeren Kern schwimmt der Erdmantel. Er enthält hauptsächlich leichte Elemente wie Silizium und Magnesium.

Das Magnetfeld der Erde wird zum größten Teil durch den sogenannten Dynamo-Effekt erzeugt. Dieser Effekt rührt von einer Bewegung eines elektrisch leitenden Materials her. Im Fall der Erde sind diese die Strömungen im äußeren Kern. In Sternen oder anderen Planeten gibt es ähnliche Mechanismen. Die Erde wird hier vor allem betrachtet, da hier alle relevanten Messgrößen ermittelt werden können.

Grundlage der Theorie von elektrischen und magnetischen Feldern sind die Maxwell-Gleichungen. Sie beschreiben alle nichtrelativistischen elektromagnetischen Phänomene. Die Gleichungen sind benannt nach dem schottischen Physiker James Clerk Maxwell (1831 - 1879). Sie wurden erstmals 1864 bei der Royal Society veröffentlicht. Maxwell kombinierte frühere Arbeiten von André-Marie Ampère (1775 - 1836), Johann Carl Friedrich Gauß (1777 - 1855), Michael Faraday (1791 - 1867) und anderen Physikern und schuf damit ein Gleichungssystem zur Beschreibung von elektromagnetischen Phänomenen.

Die Kopplung von Magnetfeld und Strömung, das heißt die Kopplung der Maxwell-Gleichungen mit den Navier-Stokes-Gleichungen, werden durch die Magnetohydrodynamik-Gleichungen (MHD-Gleichungen) beschrieben (vgl. z.B. [GLBL06]). In der vorliegenden Arbeit wird vereinfachend nur das *kinematische Dynamo-Problem* betrachtet. Hierbei wird ein Geschwindigkeitsfeld der Strömung im äußeren Kern vorgegeben und daraus das Magnetfeld berechnet. Dieses Problem wird auch *Magnetodynamik-Problem* genannt.

Hier soll eine Methode verwendet werden, die auch für verschiedene Geometrien, inklusive der Kugelgeometrie, richtig ist. Nach Wissen des Autors gibt es bis jetzt keine Arbeit, die das Magnetohydrodynamik-Problem auf dem Ganzraum unter Verwendung von finiten Elementen und Randelementen analysiert. Die Arbeiten [CZZ05] und [GLLN07] behandeln das Problem auf einem beschränkten Gebiet.

1.2 Mathematische Methode

Das kinematische Dynamo-Problem soll im Ganzraum des \mathbb{R}^3 gelöst werden. Dabei wird der Raum in ein beschränktes Gebiet (*Innenraum*) und den dazu komplementären *Außenraum* aufgeteilt. Zum Beispiel repräsentiert das beschränkte Gebiet die Erde oder die Sonne und der Außenraum das Weltall. Dabei wird der Einfluss anderer kosmischer Objekte vernachlässigt. Die Analyse des Problems ist nicht auf eine spezielle Geometrie beschränkt, sondern kann auch für nicht-kugelförmige Gebiete angewendet werden. Im Außenraum wird die elektrische Leitfähigkeit als Null angenommen, was zum Beispiel im Weltraum der Fall ist. Es bietet sich daher an, zwei unterschiedliche Modelle für den Innen- und Außenraum zu betrachten und diese mit geeigneten Randbedingungen auf dem gemeinsamen Rand zu koppeln.

Das Modell im Außenraum vereinfacht sich aufgrund der verschwindenden elektrischen Leitfähigkeit zur Laplace-Gleichung. Da es sich um ein unbeschränktes Gebiet handelt, eignet sich besonders die Randelementmethode (Boundary Element Method, BEM). Da-

bei wird die partielle Differentialgleichung in eine Integralgleichung auf dem Rand umgewandelt. Der Rand wird diskretisiert und die Gleichung gelöst. Aus dem Ergebnis kann numerisch die Lösung in jedem Punkt im Außenraum berechnet werden.

Im Innenraum ergibt sich ein nichtlineares Problem. Damit bietet sich eine Finite Element Methode an. Dabei wird das Gebiet in finite Elemente aufgeteilt und in jedem Element werden Ansatzfunktionen definiert, die in die Differentialgleichung eingesetzt werden und ein Gleichungssystem ergeben. Dieses wird numerisch gelöst.

Für die theoretische Untersuchung des kinematischen Dynamo-Problems wird als Erstes die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung des kontinuierlichen Problems sichergestellt. Dabei ist eine Schwierigkeit die Nichtlinearität des hier betrachteten inneren Problems. Das äußere und das innere Problem müssen gekoppelt werden. Als Zweites soll das Problem diskretisiert werden. Das Problem ist sowohl zeit- als auch ortsabhängig. Eine Diskretisierung im Ort soll mit den beiden oben beschriebenen Verfahren, FEM im Innenraum und BEM im Außenraum, vorgenommen werden. Dabei sind insbesondere die Existenz und die Eindeutigkeit des semidiskreten Problems von Bedeutung. Die Existenz einer eindeutigen Lösung des vollständig diskretisierten Problems muss ebenfalls überprüft werden. Eine Analyse des Konvergenzverhaltens bildet den Abschluss des theoretischen Teils der Arbeit. Diese Ergebnisse sollen mit einem selbstgeschriebenen FEM Code und einem BEM Code der Arbeitsgruppe von Olaf Steinbach von der TU Graz getestet werden.

In der vorliegenden Arbeit wird das *direkte* Magnetodynamik-Modell behandelt. Dabei wird das Geschwindigkeitsfeld der Strömung im Innenraum als bekannt vorausgesetzt und das Magnetfeld aus dem Modell berechnet. Im Fall der Erde können beide Größen gemessen werden. Im allgemeinen Fall, zum Beispiel bei anderen Planeten oder Sternen im astronomischen Kontext, kann bestenfalls das Magnetfeld ermittelt werden. Über das Magnetohydrodynamik-Modell kann dann eventuell auf das Geschwindigkeitsfeld im Inneren geschlossen werden. Hierbei handelt es sich um das zum direkten Modell gehörige *inverse* Problem.

1.3 Gliederung

Kapitel 2 bildet die Grundlage für den folgenden Teil der Arbeit. Die Maxwell-Gleichungen werden eingeführt und in geeigneter Weise modifiziert, sodass das oben motivierte Problem modelliert wird. Wie angedeutet, werden zwei unterschiedliche Probleme gekoppelt, das innere, kompliziertere Problem auf einem beschränkten Gebiet und das äußere Problem.

Es wird nicht die starke sondern die schwache Formulierung des Problems betrachtet. In Kapitel 3 wird diese hergeleitet. Hierfür werden geeignete Funktionenräume benötigt, welche am Anfang des Kapitels eingeführt werden. Im Innengebiet wird die übliche Vorgehensweise angewendet. Im Außengebiet wird ein Superpositionsansatz gewählt. Auf Grund der Einfachheit der äußeren Gleichung kann die Lösung mit Hilfe des Einfachschicht- und

des Doppelschichtpotentials ausgedrückt werden. Projiziert man diese auf den Rand und bezieht die Sprungbedingungen auf dem Rand mit ein, so ergeben sich die sogenannten Calderón-Gleichungen, bei denen der Randterm aus der Variationsformulierung des inneren Problems natürlich auftritt. Daher können beide Gleichungssysteme verbunden werden und es ergibt sich ein neues System von Gleichungen, welches auf eine Gleichung reduziert werden kann.

Nachdem das Problem formuliert ist, stellt sich die Frage der Wohldefiniertheit, das heißt, ob eine eindeutige Lösung existiert. Dieser Frage wird in Kapitel 4 nachgegangen. In diesem Kontext wird ein Ergebnis aus der Theorie nichtlinearer Evolutionsgleichungen verwendet. Dieses beruht vor allem auf der Monotonie und Hemistetigkeit der relevanten Operatoren.

Eine kurze Einführung in Nédélec-Elemente wird am Anfang von Kapitel 5 gegeben. Diese finiten Elemente werden für die Diskretisierung im Ort verwendet. Es wird eine Quasioptimalitätsabschätzung für das semidiskrete Problem bewiesen.

Kapitel 6 behandelt die Zeitdiskretisierung des Problems. Es wird das implizite Euler Verfahren verwendet. Die Wohldefiniertheit des Problems wird mit Hilfe des Hauptsatzes über stark monotone Operatoren bewiesen. Für das abschließende Konvergenzresultat wird ein Projektor eingeführt, der die Lösung des kontinuierlichen Problems auf die Lösung des diskreten Problems abbildet.

Numerische Tests zum Innenraum- und dem gekoppelten Problem werden in Kapitel 7 vorgestellt. Die verwendete schnelle Randelementmethode wird kurz skizziert.

Den Abschluß dieser Arbeit bildet Kapitel 8. Nach einer Zusammenfassung der Ergebnisse wird ein kleiner Ausblick auf das inverse Problem gegeben.

Kapitel 2

Formulierung des mathematischen Problems

Die ungelösten Probleme halten einen Geist lebendig und nicht die gelösten.

Erwin Guido Kolbenheyer (1878-1962),
deutscher Schriftsteller

In diesem Kapitel wird das Dynamo-Problem mathematisch formuliert. In Abschnitt 2.1 werden die Maxwell-Gleichungen hergeleitet. Das hier betrachtete Problem ist turbulent. Es wird eine Skalenzerlegung durchgeführt, um den Einfluss der kleinen Skalen zu modellieren (Abschnitt 2.2). In Abschnitt 2.3 wird der \mathbb{R}^3 in ein beschränktes Gebiet mit elektrischer Leitfähigkeit und ein unbeschränktes Gebiet mit verschwindender Leitfähigkeit aufgeteilt. Im Fall der Erde oder der Sonne entspricht das beschränkte Gebiet dem Planeten bzw. dem Stern und das Komplement dem All. Für das Innen- und das Außenraumproblem werden separate Potentialansätze für die magnetische Stromdichte bzw. für das magnetische Feld \mathbf{B} verwendet. Im Außenraum vereinfachen sich die Gleichungen zur Laplace-Gleichung.

2.1 Laminares Dynamo-Modell

In diesem Abschnitt wird das zu behandelnde Problem spezifiziert. Dazu werden zunächst die Maxwell-Gleichungen aufgestellt und deren Bedeutung näher untersucht. Die Ausführungen beruhen auf den Büchern [Dav01], [Dem04] und [Mof78].

2.1.1 Die Maxwell-Gleichungen

Elektrisches und magnetisches Feld Um die betrachteten Maxwell-Gleichungen besser zu verstehen, werden sie Schritt für Schritt hergeleitet. Es wird mit dem einfachsten Falle eines Magneten, dem Stabmagneten, begonnen. Der Stabmagnet ist ein Permanentmagnet. Die Magnetfeldlinien eines Stabmagneten sind in Abbildung 2.1 zu sehen. Magnetische Phänomene gehen auch immer mit elektrischen Phänomenen einher. Einige Parallelen und Zusammenhänge zwischen den elektrischen und den magnetischen Begriffen werden im Folgenden beschrieben. Eine elektrische Ladung Q im Koordinatenursprung übt auf eine

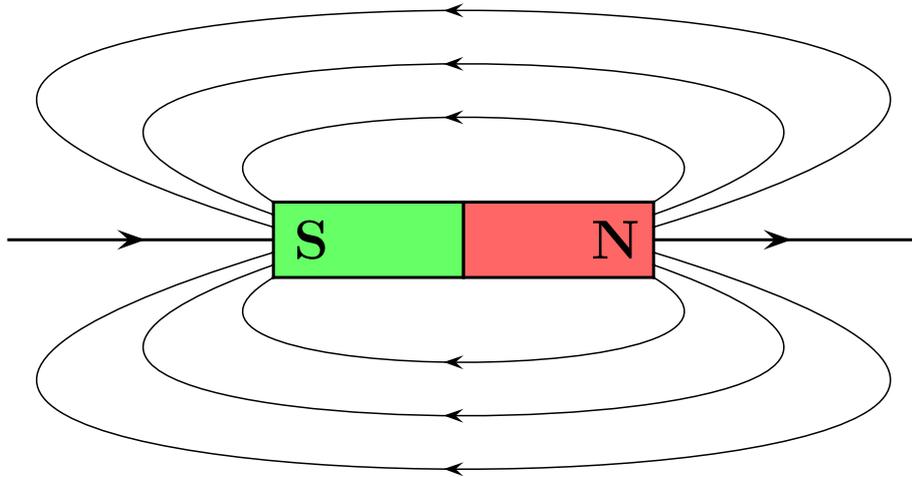


Abbildung 2.1: Magnetfeldlinien eines Stabmagneten. Die Tangenten an den Linien in einem Punkt P entsprechen der Richtung der Magnetfeldstärke im Punkt P .

Probeladung q am Ort \mathbf{r} die Kraft

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{r}$$

aus. Dies wird mit q normiert. Es ergibt sich die *elektrische Feldstärke* $\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q}$. Das zugehörige Feld wird *elektrisches Feld* genannt. Analog kann das Magnetfeld definiert werden. Es gibt in der Natur keine magnetische Monopole, das heißt Nord- und Südpol treten immer gemeinsam auf. Die magnetische Erregung wird mit \mathbf{H} bezeichnet und folgendermaßen definiert:

$$\mathbf{H} = \lim_{p_2 \rightarrow 0} \left(\frac{p_1}{4\pi\mu_0 r^2} \mathbf{r} \right),$$

wobei p_1 und p_2 die magnetischen Polstärken sind, was der Ladung im elektrischen Feld entspricht. Die Einheit von \mathbf{H} ist $\frac{A}{m}$, wobei A = Ampere die Maßeinheit der Stromstärke angibt und m für Meter steht. Als magnetische Feldstärke wird

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$

definiert. Die Einheit von \mathbf{B} ist $\frac{Vs}{m^2} =: Tesla = T$. Dabei ist $V = Volt$ die Maßeinheit für Spannung, m steht für Meter und s für Sekunde. In der früheren Literatur wird \mathbf{B} als magnetische Induktion oder als magnetische Flussdichte bezeichnet, während \mathbf{H} die magnetische Feldstärke war.

Magnetfelder stationärer Ströme Als Nächstes wird das Phänomen betrachtet, dass ein stromdurchflossener Leiter ein Magnetfeld besitzt. Der magnetische Kraftfluss

$$\Phi_{mag} = \int_A \mathbf{B} dA$$

ist ein Maß für die Zahl der magnetischen Feldlinien, die durch die Fläche A laufen. Da magnetische Feldlinien geschlossen sind, gilt somit für die geschlossene Oberfläche A eines Volumens V

$$0 \equiv \oint \mathbf{B} dA = \int_V \nabla \cdot \mathbf{B} dV \quad \Rightarrow \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.1)$$

Wäre das Integral nichtverschwindend, würde mehr magnetische Energie aus dem Volumen herauskommen als herein bzw. umgekehrt. Da dies nicht der Falls ist, gibt es keine magnetischen Quellen und Senken, die voneinander getrennt sind. Dies zeigt noch einmal, dass es keine magnetischen Monopole gibt. Die elektrische Spannung zwischen zwei Punkten P_1 und P_2 ergibt sich aus dem Linienintegral

$$U = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{E} ds.$$

Auf geschlossenen Pfaden ist diese identisch Null. Dies gilt nicht im magnetischen Kontext.

Gesetz 2.1 (Ampèresches Gesetz) Umschließt der Integrationsweg eine Fläche, die von einem Strom I durchflossen wird, so gilt

$$\oint \mathbf{H} ds = I \quad \text{beziehungsweise} \quad \oint \mathbf{B} ds = \mu_0 I.$$

Als Stromdichte \mathbf{j} wird der Strom definiert, der durch eine Querschnittsflächeneinheit senkrecht zu \mathbf{j} fließt. Der Gesamtstrom durch die Fläche A ist damit

$$I = \int_A \mathbf{j} dA.$$

Zusammen mit dem Ampèresches Gesetz ergibt sich mit dem Gaußschen Integrationsatz

$$\mu_0 \int_A \mathbf{j} dA = \mu_0 I = \oint \mathbf{B} ds = \int_A \nabla \times \mathbf{B} dA.$$

Dies gilt für beliebige Integrationswege und somit folgt

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}.$$

Beim elektrischen Feld gilt

$$0 = \oint \mathbf{E} \, ds = \int \nabla \times \mathbf{E} \, dA.$$

Da die Gleichung für beliebige Integrationswege erfüllt ist, ergibt sich

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0.$$

Die vorgestellten Gleichungen beschreiben zeitunabhängige, elektrische und magnetische Felder. Diese Gleichungen sind ein Teil der stationären Maxwell-Gleichungen.

Wie bereits erwähnt, rührt die Aufrechterhaltung des Erdmagnetfeldes von Bewegungen im äußeren Kern her. Ähnliches gilt für andere Planeten und Sterne. Ein Strömungsfeld von elektrisch leitendem Material, erzeugt ein Magnetfeld. Andererseits übt das Magnetfeld eine Kraft auf das Metall aus. Dieser Einfluss wurde bis jetzt nicht behandelt. Das Verhalten des Magnetfeldes ist abhängig von der Materie, die sich in ihm befindet. Dies wird ebenfalls untersucht. Am Schluß muss überprüft werden, welchen Einfluss zeitlich veränderliche Felder auf die Gleichungen haben.

Kräfte auf bewegte Ladungen Bewegte Ladungen erzeugen ein Magnetfeld. Andererseits beeinflusst das Magnetfeld die Bewegung eines sich frei bewegenden geladenen Teilchens. Zunächst wird die Situation eines stromdurchflossenen, festgehaltenen Leiters betrachtet. Geladene Teilchen bewegen sich auch ohne elektrisches Feld. Ladungsträger stoßen dabei ab und zu an Atome und Moleküle, sodass sich die Richtung der Geschwindigkeit statistisch gleichmäßig in alle Richtungen verteilt. Der Mittelwert der Geschwindigkeit und damit die Stromdichte ist identisch Null. Wird nun ein elektrisches Feld um die Ladungen herum erzeugt, so erhält jede Ladung eine Beschleunigung. Diese ergibt sich auf Grund der Kraft, die das elektrische Feld auf die Ladung ausübt (vgl. Seite 6), als

$$a = \frac{\mathbf{F}}{m} = \frac{q\mathbf{E}}{m}.$$

Während der mittleren Zeit t_s zwischen zwei aufeinander folgenden Stößen erhalten die Ladungen eine mittlere Zusatzgeschwindigkeit, auch *Driftgeschwindigkeit* genannt,

$$\mathbf{w}_D = \left(\frac{q\mathbf{E}}{m} \right) t_s.$$

Die Stromdichte ergibt sich dann auf folgende Weise:

$$\mathbf{j} = nq\mathbf{w}_D = \sigma\mathbf{E} \quad \text{mit} \quad \sigma = \frac{nq^2 t_s}{m}.$$

σ wird als *elektrische Leitfähigkeit* bezeichnet und ist materialabhängig. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit ist vor allem der Fall interessant, in dem sich Ladungsträger in einem Magnetfeld frei bewegen können. In diesem Fall lenkt das Magnetfeld die bewegten Ladungsträger aus ihrer ursprünglichen Geschwindigkeitsrichtung \mathbf{w} ab. Die zugehörige Kraft wird *Lorentzkraft* genannt und ist wie folgt definiert.

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{w} \times \mathbf{B}).$$

Die Lorentzkraft wirkt senkrecht auf die Bewegungsrichtung der Elektronen und senkrecht zum Magnetfeld. Mit Hilfe eines einfachen Versuchsaufbaus kann dies sichtbar gemacht werden. Dazu wird ein stromdurchflossener Leiter frei schwingbar in einen Hufeisenmagneten gehängt. Das Ergebnis ist in Abbildung 2.2 zu sehen.

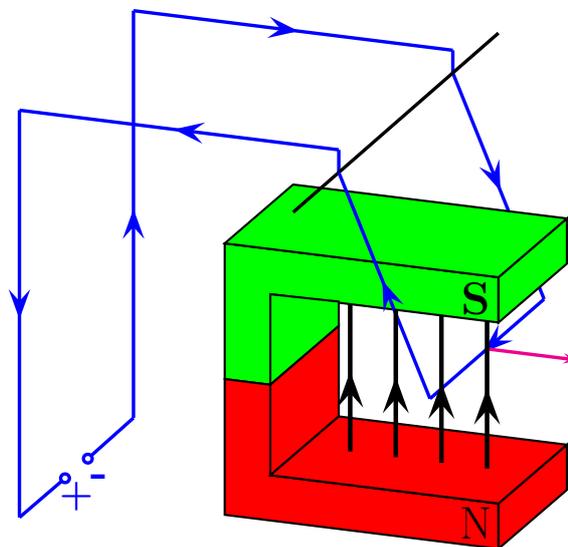


Abbildung 2.2: Die Lorentzkraft (\rightarrow) kann mit Hilfe der Linken-Hand-Regel berechnet werden. Der Daumen entspricht der Bewegungsrichtung der Elektronen (\rightarrow), der Zeigefinger den Magnetfeldlinien (\rightarrow). Bei einem rechtwinkligem Koordinatenkreuz aus Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger zeigt der Mittelfinger in Richtung der Lorentzkraft.

Falls zusätzlich ein elektrisches Feld existiert, wirkt die Kraft

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{w} \times \mathbf{B})$$

auf das geladene Teilchen. Somit ergibt sich analog zu den obigen Überlegungen die Driftgeschwindigkeit:

$$\mathbf{w}_D = at_s = \left(\frac{F}{m}\right) t_s = \frac{q}{m} (\mathbf{E} + \mathbf{w} \times \mathbf{B}) t_s.$$

Daraus kann wiederum das Ohmsche Gesetz abgeleitet werden.

Gesetz 2.2 (Ohmsches Gesetz)

$$\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{w} \times \mathbf{B}). \quad (2.2)$$

Materie im Magnetfeld Befindet sich eine Materie im Magnetfeld, so muss die Relation zwischen magnetischer Erregung und magnetischer Feldstärke in folgender Weise modifiziert werden:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu \mathbf{H},$$

wobei μ die relative Permeabilität ist. Der Einfachheit halber wird im Folgenden $\mu := \mu \mu_0$ gesetzt. Auch wenn sich Materie im Magnetfeld befindet, gibt es keine magnetischen Monopole und damit bleibt die Divergenzfreiheit der magnetischen Feldstärke vorhanden. Auch das Ampèresches Gesetz 2.1 bleibt erhalten, allerdings gilt

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \mathbf{B} = \mathbf{j}. \quad (2.3)$$

Instationäre Felder Die bisherigen Beschreibungen beziehen sich auf stationäre Magnetfelder. Für instationäre Magnetfelder können diese Formeln nicht in Reinform angewendet werden. Stattdessen werden folgende Änderungen an den Formeln vorgenommen.

Entlang eines Leiters in einem zeitlich veränderlichen Magnetfeld bildet sich eine Spannung aus. Dies wurde erstmals von Michael Faraday entdeckt. Nach ihm benennt sich das folgende Gesetz.

Gesetz 2.3 (Faradaysches Induktionsgesetz)

$$U_{ind} = - \frac{d\Phi_{mag}}{dt}.$$

Diese Spannung wird *Induktionsspannung* genannt. Mit der Definition des magnetischen Kraftflusses auf Seite 7 gilt

$$U_{ind} = - \frac{d}{dt} \int_A \mathbf{B} \, dA = - \int_A \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \, dA.$$

Die Spannung zwischen zwei Punkten ist das Linienintegral über das elektrische Feld (vgl. Seite 7). Somit folgt

$$- \int_A \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \, dA = U_{ind} = \oint \mathbf{E} \, ds = \int_A \nabla \times \mathbf{E} \, dA.$$

Dies hat Bestand für beliebige Flächen. Damit zeigt sich

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (2.4)$$

Die Gleichungen (2.1)-(2.4) ergeben zusammengefasst den Hauptteil der Maxwell- Gleichungen.

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \times \frac{1}{\mu} \mathbf{B} &= \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{w} \times \mathbf{B}), \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho_E}{\epsilon_0}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

(2.5) kann in dem hier betrachteten Kontext vernachlässigt werden, da ρ_E sehr klein ist (vgl. [Dav01] Abschnitt 2.5).

Es können drei unterschiedliche Probleme in Bezug auf die Zeitabhängigkeit unterschieden werden:

- der stationäre Fall,
- der zeitharmonische Fall und der
- instationäre Fall.

Der stationäre Fall tritt ein, wenn das Problem unabhängig von der Zeit ist. Die Wirkung des Magnetfeldes ist hierbei nur von der Position einer Ladung im Magnetfeld abhängig. Im zeitharmonischen Fall wird angenommen, dass sowohl das elektrische als auch das magnetische Feld eine periodische Veränderung in der Zeit unterliegen. Alle anderen Möglichkeiten werden unter dem Begriff instationäre Probleme zusammengefasst. Genau dieser Fall wird im Rahmen dieser Arbeit untersucht.

Es wird angenommen, dass sich der Zustand der Materie nicht wesentlich in der Zeit ändert. Die elektrische Leitfähigkeit σ und die magnetische Permeabilität μ können somit als stationär vorausgesetzt werden.

2.1.2 Analogien zu anderen partiellen Differentialgleichungen

Um einige Ähnlichkeiten dieses Problems zu weitgehend verstandenen Problemen aufzuzeigen, werden die Gleichungen zunächst auf zwei Gleichungen reduziert. Wird auf die

Gleichungen (2.3) und (2.2) der Rotations-Operator angewendet, so kann die Rotation des elektrischen Feldes ersetzt werden mit Hilfe von (2.4). Es ergibt sich für nichtverschwindende μ und σ

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times (\mathbf{w} \times \mathbf{B}) - \nabla \times \frac{1}{\sigma} \nabla \times \frac{1}{\mu} \mathbf{B}, \quad (2.6)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.7)$$

Unter Berücksichtigung der Divergenzfreiheit des Feldes \mathbf{A} , gilt folgende Vektoridentität

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = -\nabla^2 \mathbf{A} + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\Delta \mathbf{A} + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}).$$

Unter der Annahme konstanter elektrischer Leitfähigkeit σ und magnetischer Permeabilität μ ergibt sich die folgende Differentialgleichung für \mathbf{B}

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \frac{1}{\mu\sigma} \Delta \mathbf{B} - \nabla \times (\mathbf{w} \times \mathbf{B}) = 0. \quad (2.8)$$

Für ein verschwindendes Geschwindigkeitsfeld \mathbf{w} gilt entsprechend

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \frac{1}{\mu\sigma} \Delta \mathbf{B} = 0.$$

Die *Wärmetransportgleichung* für eine Temperatur T lautet

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \alpha \Delta T = 0.$$

Allerdings ist T skalar, während \mathbf{B} ein Vektor ist. Dies zeigt, dass das Magnetfeld durch ein Material in endlicher Geschwindigkeit diffundiert. Für eine zweite Analogie wird die Wirbeltransport-Gleichung aus der instationären, inkompressiblen Navier-Stokes Gleichung hergeleitet. Letztere lautet für die Geschwindigkeit \mathbf{w} und den Druck p

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{w} + \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{w} = -\nabla p.$$

Es gilt die folgende Vektoridentität

$$\mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{w} = (\nabla \times \mathbf{w}) \times \mathbf{w} + \frac{1}{2} \nabla |\mathbf{w}|^2.$$

Wird nun $\nabla \times \mathbf{w}$ durch die *Wirbelstärke* ω ersetzt, so ergibt sich

$$\mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{w} = \omega \times \mathbf{w} + \frac{1}{2} \nabla |\mathbf{w}|^2.$$

Wird der Term in die Navier-Stokes-Gleichung eingesetzt, so folgt nach Anwendung des Rotations-Operators auf die Gleichung, unter Berücksichtigung von $\nabla \times \nabla \mathbf{A} = 0$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \nu \nabla \times \Delta \mathbf{w} + \nabla \times (\omega \times \mathbf{w}) = 0.$$

Da $\nabla \times \Delta \mathbf{w} = \Delta (\nabla \times \mathbf{w})$, resultiert die sogenannte *Wirbeltransportgleichung*

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \nu \Delta \omega - \nabla \times (\mathbf{w} \times \omega) = 0. \quad (2.9)$$

Ein Vergleich von (2.8) und (2.9) zeigt eine fast perfekte Analogie. Sie ist nur fast perfekt, denn ω ist direkt mit \mathbf{w} verknüpft, während \mathbf{B} nicht implizit mit \mathbf{w} in Verbindung steht. Der Fall eines perfekten Leiters, d.h. kein elektrischer Widerstand und damit unendlicher Leitfähigkeit $\sigma = \infty$, entspricht dem Fall von reibungsfreien Fluiden.

2.1.3 Dynamo-Effekt

Der Begriff Dynamo soll hier erläutert werden. Um dies zu tun, wird die totale magnetische Energie $M(t)$ wie folgt definiert

$$M(t) = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{B}^2 dV.$$

Es wird angenommen, dass für die Anfangsenergie $M(0) = M_0 > 0$ gilt. Falls es kein Geschwindigkeitsfeld gibt, das heißt $\mathbf{w} = 0$, dann konvergiert die totale magnetische Energie gegen 0 für $t \rightarrow \infty$, dieses Phänomen heißt *ohmscher Abfall* des Magnetfeldes.

Eine Geschwindigkeit $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ *agiert als Dynamo*, falls $M(t) \not\rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$. Der Einfluss der Geschwindigkeit wirkt also dem ohmschen Abfall des Magnetfeldes entgegen. Es ist möglich, dass ein Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ als Dynamo nur für bestimmte Anfangsbedingungen \mathbf{B}_0 und Parameter μ und σ wirkt. Ein Geschwindigkeitsfeld $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ heißt *dynamotauglich*, falls es eine Anfangsbedingung \mathbf{B}_0 und Werte μ und σ gibt, so dass $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ als Dynamo agiert.

Eine Einführung in die Dynamotheorie findet sich zum Beispiel in [Dav01], [Mof78] und [Oss98].

2.2 Turbulentes Dynamo-Modell

Um eine Turbulenzmodellierung zu erhalten, werden zunächst einige Fakten über Variationen des Magnetfeldes und der Geschwindigkeit bei der Sonne wiedergegeben. Anschließend wird der sogenannte α -Effekt näher betrachtet.

2.2.1 Motivation

Das Magnetfeld der Sonne unterliegt einer schnelleren Veränderung als das der Erde. Daher wird als Motivation Ersteres betrachtet. Beobachtungen der Sonne haben ergeben, dass

sowohl die Geschwindigkeit \mathbf{w} als auch das Magnetfeld \mathbf{B} Fluktuationen mit unterschiedlichen Arten und Skalen aufweisen. Es gibt

- (i) Granulate mit Ausdehnungen von 1.000 km und einer Lebensdauer von einigen Minuten,
- (ii) Supergranulate mit Durchmesser von 3.000 km und einer Lebensdauer von ungefähr einem Tag,
- (iii) Riesenzellen mit Durchmesser von Sonnenradiusordnung, die einige Monate existieren,
- (iv) Sonnenflecken, deren Durchmesser zwischen 100 und 10.0000 km und Lebensdauer zwischen einigen Stunden und einigen Monaten variieren.

Daher ist es sinnvoll eine Skalen-Zerlegung vorzunehmen. Am Beispiel der Sonne kann das Hauptmagnetfeld folgendermaßen berechnet werden: Das Hauptfeld der Sonne unterliegt einer periodischen Veränderung mit einer Periode von 22 Jahre (vgl. z.B. [Mof78] Kapitel 5). Die Längenskala ist von der Ordnung des Sonnenradius. Als unterschiedliche Systeme zur Bestimmung des Hauptmagnetfeldes können die unterschiedlichen Durchgänge der Sonne durch ihren Zyklus verwendet werden. Entsprechend kann auch für Planeten und andere Sterne vorgegangen werden.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass es viele verschiedene Skalen gibt, die nicht alle aufgelöst werden können. In den Gleichungen (2.1)-(2.4) bzw. in (2.6)/(2.7) wird dieses nicht berücksichtigt. Das folgende Modell soll diesen Mangel beheben.

2.2.2 Skalenzerlegung

Mit \overline{F} wird das Hauptfeld bezeichnet, das heißt der Erwartungswert von F in einer Reihe von identischen Systemen, und mit F' die Fluktuation, das heißt die Differenz $F' = F - \overline{F}$. Für Vektorfelder \mathbf{F} wird ein Koordinatensystem mit Einheitsvektoren \mathbf{e}_i betrachtet. Sei $\mathbf{F}_i = F_i \mathbf{e}_i$. Dann ist das Hauptfeld durch $\overline{\mathbf{F}}_i := \overline{F}_i \mathbf{e}_i$ definiert. Es gibt eine große Auswahl von Mittelungsverfahren. Es werde eine gewählt, sodass die folgenden Reynolds-Relationen gelten (vgl. [Räd07]).

$$\overline{\overline{F}} = \overline{F}, \quad \overline{F'} = 0, \quad \overline{F + G} = \overline{F} + \overline{G}, \quad \overline{FG} = \overline{F} \overline{G}, \quad \overline{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{\partial \overline{F}}{\partial x}, \quad \overline{\frac{\partial F}{\partial t}} = \frac{\partial \overline{F}}{\partial t}.$$

Dabei sind F und G beliebige Felder. \mathbf{x} steht für eine beliebige Ortskoordinate. Werden die Gleichungen (2.2)-(2.4) gemittelt, so folgt mit $\mathbf{B} = \overline{\mathbf{B}} + \mathbf{B}'$ und $\mathbf{w} = \overline{\mathbf{w}} + \mathbf{w}'$

$$\begin{aligned} \nabla \times \overline{\mathbf{E}} &= \overline{\nabla \times \mathbf{E}} = -\frac{\partial \overline{\mathbf{B}}}{\partial t} = -\frac{\partial \overline{\mathbf{B}}}{\partial t}, \\ \nabla \times \frac{1}{\mu} \overline{\mathbf{B}} &= \overline{\nabla \times \frac{1}{\mu} \mathbf{B}} = \overline{\sigma (\mathbf{E} + \mathbf{w} \times \mathbf{B})} = \sigma (\overline{\mathbf{E}} + \overline{\mathbf{w} \times \mathbf{B}}), \\ &= \sigma (\overline{\mathbf{E}} + \overline{(\overline{\mathbf{w}} + \mathbf{w}') \times (\overline{\mathbf{B}} + \mathbf{B}')})) \\ &= \sigma (\overline{\mathbf{E}} + \overline{(\overline{\mathbf{w}} \times \overline{\mathbf{B}})} + \overline{(\overline{\mathbf{w}} \times \mathbf{B}')} + \overline{(\mathbf{w}' \times \overline{\mathbf{B}})} + \overline{(\mathbf{w}' \times \mathbf{B}')})) \\ &= \sigma (\overline{\mathbf{E}} + \overline{(\overline{\mathbf{w}} \times \overline{\mathbf{B}})} + \overline{(\mathbf{w}' \times \mathbf{B}')}). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Für den letzten Schritt wurden die Reynolds-Relationen komponentenweise angewendet. Analog gilt für die Kontinuitätsgleichung (2.1)

$$\nabla \cdot \overline{\mathbf{B}} = \nabla \cdot \overline{(\overline{\mathbf{B}} + \mathbf{B}')} = \overline{\nabla \cdot (\overline{\mathbf{B}} + \mathbf{B}')} = 0. \quad (2.11)$$

Der Term

$$\mathfrak{E} := \overline{\mathbf{w}' \times \mathbf{B}'}$$

heißt *elektromotive Kraft*. Diese muss geeignet modelliert werden. Um dies zu tun, werden einige Definitionen zur Charakterisierung von Turbulenz eingeführt.

2.2.3 Charakterisierung von Turbulenz

Definition 2.4 (Charakterisierung von Turbulenz)

- (1) Ein homogenes turbulentes Feld ist definiert durch die Tatsache, dass jeder von ihm berechnete Mittelwert unabhängig vom Ort ist.
- (2) Falls keine dominierende Richtung existiert, d.h. jede Hauptgröße invariant unter beliebiger Drehung an einer beliebigen Achse ist, so heißt das turbulente Feld isotrop.
- (3) Von einem spiegelsymmetrischen turbulenten Feld wird gesprochen, falls die von ihm erzeugten Hauptgrößen invariant unter Spiegelung an einer beliebigen Ebene sind.

Bemerkung 2.5

- (1) Die Definitionen (2) und (3) können in folgender Weise abgeschwächt werden: Ein Feld ist an einem Punkt isotrop, falls die Eigenschaft der Isotropie an diesem Punkt

erfüllt ist. Die Spiegelsymmetrie kann an eine bestimmte Ebene gekoppelt sein. So ist z.B. die solare Konvektionszone nur spiegelsymmetrisch bezüglich der Äquatorebene oder einer meridonalen Ebene.

- (2) Ist ein Feld homogen und an einem Punkt isotrop, so ist es im gesamten Feld isotrop. Falls ein Feld in einem Punkt isotrop und spiegelsymmetrisch bezüglich mindestens einer Ebene durch diesen Punkt ist, so ist es bezüglich jeder Ebene durch diesen Punkt spiegelsymmetrisch.
- (3) Es existieren homogene, isotrope Turbulenzfelder in der Natur. Die Frage ist, warum sie nicht spiegelsymmetrisch sein sollten. \square

2.2.4 α -Modell

Ein weit verbreiteter Ansatz niedrigster Ordnung für die elektromotive Kraft unter der Voraussetzung, dass \mathbf{w}' homogen und isotrop ist, ist der Folgende (vgl. z.B. [BKS08], [Räd07],[Dei71] und die Referenzen darin):

$$\mathfrak{E} = \alpha \bar{\mathbf{B}} - \beta \nabla \times \bar{\mathbf{B}}.$$

Falls \mathbf{w}' spiegelsymmetrisch ist, gilt $\alpha = 0$ (vgl. [Kra80]). Im Fall eines nicht- spiegelsymmetrischen Feldes entsteht eine zum Hauptfeld parallele ($\alpha > 0$) oder antiparallele ($\alpha < 0$) Stromdichte, die einen zusätzlichen Beitrag zum Magnetfeld liefert. Dieser Effekt wird α -Effekt genannt.

Für α wird der Ansatz von [CH96] gewählt, d.h. es gilt mit Konstanten R und $s \neq 0$

$$\alpha \approx \frac{Rf(x, t)}{1 + s |\bar{\mathbf{B}}(x, t)|^2}.$$

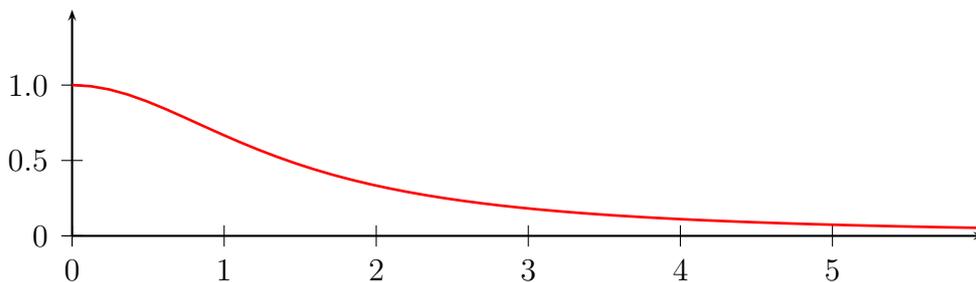


Abbildung 2.3: Verhalten von α in Abhängigkeit vom Betrag von \mathbf{B} ($s = 0.5$)

Die Funktion f approximiert in etwa das Quadrat der Fluktuation des Geschwindigkeitsfeldes, also $(\mathbf{w}')^2$. Wird für einen Augenblick der Einfluß von f vernachlässigt, so verhält sich

α wie in Abbildung 2.3, das heißt α ist besonders groß, wenn \mathbf{B} nahe bei 0 liegt. Andererseits wird α kleiner, je größer \mathbf{B} wird. Des Weiteren wird mit der reduzierten magnetischen Permeabilität $\mu := \frac{\mu}{1+\sigma\mu\beta}$ in dem Gebiet weitergerechnet, in dem die Turbulenz auftritt.

Zusammenfassend ergibt sich das folgende Problem:

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.12)$$

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \mathbf{B} = \sigma \left(\mathbf{E} + \mathbf{w} \times \mathbf{B} + \frac{Rf}{1+s|\mathbf{B}|^2} \mathbf{B} \right), \quad (2.13)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.14)$$

2.3 Potentialansätze für das Magnetfeld

Der Raum \mathbb{R}^3 wird aufgeteilt in ein beschränktes Gebiet und sein Komplement. In beiden Teilgebieten wird jeweils ein Potentialansatz für das Magnetfeld \mathbf{B} gemacht. Beides wird am Ende dieses Kapitels unter Beachtung von Kopplungsbedingungen zu einem Gleichungssystem zusammengefasst.

2.3.1 Gebietszerlegung

Das Ziel dieser Arbeit ist das bessere Verständnis eines Dynamo-Modells. Da dieses Phänomen insbesondere bei Sternen und Planeten auftritt, soll das Problem auf einer Sphäre gelöst werden. Die meisten Ausführungen sind auch für andere Geometrien richtig. Bei der numerischen Behandlung in Kapitel 7 werden die Testfälle auf Quader- bzw. mit Rechteckelementen approximierten Kugel- und Zylindergebieten gerechnet.

Der Raum wird folgendermaßen aufgeteilt: $\mathbb{R}^3 = \overline{\Omega_c} \cup \Omega_E$. Das beschränkte, konvexe Gebiet Ω_c besteht aus den drei disjunkten Gebieten Ω_i , $i = 1, 2, 3$. Dies entspricht der Einteilung der Erde, bei der der Radius von Ω_1 $0,19R_E$ gleichkommt, wobei $R_E \approx 6380km$ der Erdradius ist. Der Rand zwischen äußerem Kern und Mantel liegt bei ungefähr $0,55R_E$. Für die Teilgebiete Ω_i gelte $\partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_2 = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega_c = \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega_c = \emptyset$ (vgl. Abbildung 2.4). Bei den numerischen Tests in Kapitel 7 wird eine Einteilung von Ω_c in zwei Gebiete betrachtet. Ω_1 wird weggelassen. In Ω_c ist Materie mit der magnetischen Permeabilität μ_c und der elektrischen Leitfähigkeit σ vorhanden. Im Außenraum Ω_E gilt $\sigma = 0$. μ_0 ist die magnetische Permeabilität in Ω_E . Des Weiteren verschwinden \mathbf{w} und f außerhalb von Ω_c . Im Folgenden wird das Problem in Ω_c als *inneres Problem* und das Problem in Ω_E als *äußeres Problem* bezeichnet.

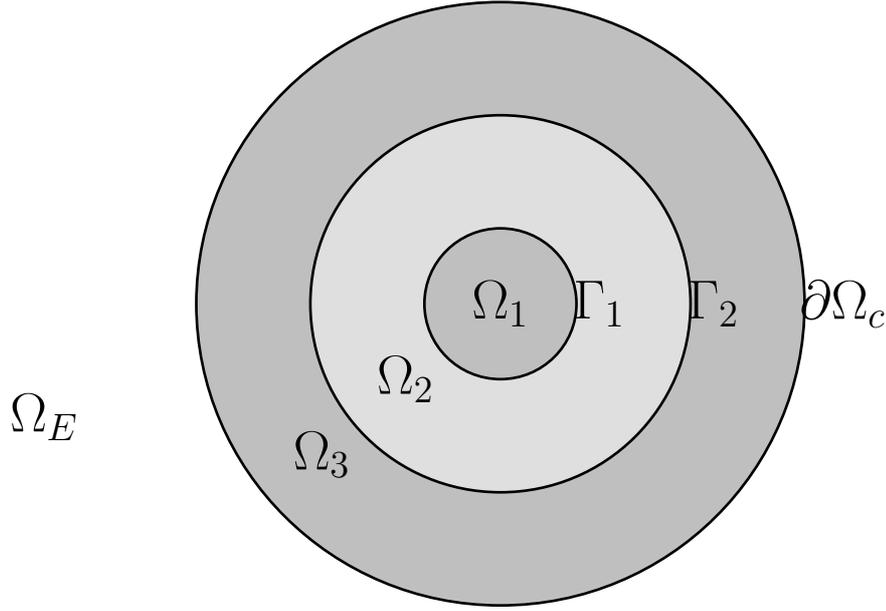


Abbildung 2.4: Zweidimensionale Ansicht der Aufteilung des Gebietes in eine Kugel und zwei Kugelschalen

2.3.2 Problem im Außengebiet Ω_E

Die Maxwell-Gleichungen für den Fall nichtvorhandener Leitfähigkeit (z.B. Vakuum) lauten

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.15)$$

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \mathbf{B} = 0, \quad (2.16)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.17)$$

Ferner ist eine Abklingbedingung zu stellen.

$$\mathbf{B} = o\left(\frac{1}{|x|}\right) \quad \text{für } |x| \rightarrow \infty.$$

Daher kann ein skalares Potential Φ eingeführt werden, so dass

$$\mathbf{B} = \nabla \Phi \Rightarrow \Delta \Phi = 0 \quad (2.18)$$

im Außenraum gilt. Φ ist nur bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt. Da es sich bei dem Außenraumproblem um die Laplace-Gleichung handelt, kann ein Potential-Ansatz für die Lösung gemacht werden. Dazu sei

$$U(x, y) := \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x - y|}, \quad x, y \in \mathbb{R}^3, \quad x \neq y, \quad (2.19)$$

$$T(x, y) := \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_y} U(x, y), \quad x, y \in \partial\Omega_c, \quad x \neq y,$$

die Fundamentallösung der Laplace-Gleichung bzw. deren Normalenableitung. Dann gilt

$$\Phi = - \underbrace{\int_{\partial\Omega_c} U(x, y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \Phi(y) ds(y)}_{\text{Einfachschichtpotential}} + \underbrace{\int_{\partial\Omega_c} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} U(x, y) \Phi(y) ds(y)}_{\text{Doppelschichtpotential}}.$$

Weitere Ausführungen finden sich im folgenden Kapitel 3.

2.3.3 Problem im Innengebiet Ω_c

Analog zum Außenraumproblem wird das Magnetfeld \mathbf{B} im Innenraum durch ein vektorwertiges Potential \mathbf{A} ausgedrückt:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}.$$

Eingesetzt in die Problemstellung ergeben sich die Gleichungen

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial(\nabla \times \mathbf{A})}{\partial t}, \quad (2.20)$$

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} = \sigma \left(\mathbf{E} + \mathbf{w} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \frac{Rf}{1 + s|\nabla \times \mathbf{A}|^2} \nabla \times \mathbf{A} \right). \quad (2.21)$$

Aus (2.20) folgt

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0.$$

Der Kern des Rotations-Operators besteht aus den Gradientenfeldern. Dies muss beachtet werden, wenn der Rotations-Operator eliminiert wird. Es muss eine Funktion aus dem Kern addiert werden, in diesem Fall $\nabla\phi_c$. Es folgt

$$\mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\phi_c. \quad (2.22)$$

Da diese Darstellung nicht eindeutig ist, müssen Bedingungen an \mathbf{A} gestellt werden. Wird zum Beispiel

$$\tilde{\mathbf{A}} := \mathbf{A} + \nabla\psi \quad \text{und} \quad \tilde{\phi} := \phi_c - \frac{\partial\psi}{\partial t}$$

gewählt, so folgt aus $\nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times \tilde{\mathbf{A}}$, dass Gleichung (2.21) auch für $\tilde{\mathbf{A}}$ erfüllt ist. Für Gleichung (2.22) gilt

$$\mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla\phi_c = - \frac{\partial \tilde{\mathbf{A}}}{\partial t} + \frac{\partial \nabla\psi}{\partial t} - \nabla\phi_c = - \frac{\partial \tilde{\mathbf{A}}}{\partial t} - \nabla\tilde{\phi} + \nabla\phi_c - \nabla\phi_c = - \frac{\partial \tilde{\mathbf{A}}}{\partial t} - \nabla\tilde{\phi}.$$

Wird ein geeichtes neues Potential \mathbf{u} durch

$$\mathbf{u} := \mathbf{A} + \int_{t_0}^t \nabla \phi_c ds$$

definiert, so folgt

$$\mathbf{u} = \mathbf{A} + \nabla \psi + \int_{t_0}^t \left(\nabla \phi_c - \frac{\partial \nabla \psi}{\partial t} \right) ds = \tilde{\mathbf{A}} + \int_{t_0}^t \nabla \tilde{\phi} ds.$$

Wird dies in Gleichung (2.22) eingesetzt, so ergibt sich

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi_c = -\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}.$$

Im Folgenden wird mit diesem geeichten Potential \mathbf{u} weitergerechnet.

2.3.4 Gekoppeltes Magnetodynamik-Problem

Zunächst werden die magnetische Permeabilität $\mu = \mu_0$ und die elektrische Leitfähigkeit $\sigma = 0$ im Außenraum als konstant angenommen. Es werden eine untere und eine obere Schranke für die Werte im Innenraum angenommen, das heißt $\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_2$ und $\mu_1 \leq \mu \leq \mu_2$. Es ergibt sich das kontinuierliche Problem

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{u} = -\sigma \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sigma \mathbf{w} \times (\nabla \times \mathbf{u}) + \sigma \frac{Rf}{1 + s |\nabla \times \mathbf{u}|^2} \nabla \times \mathbf{u} \quad \text{in } \Omega_c \times (0, T), \quad (2.23)$$

$$\Delta \Phi = 0 \quad \text{in } \Omega_E \times (0, T), \quad (2.24)$$

mit der Abklingbedingung

$$\Phi = o(1) \quad \text{für } |x| \rightarrow \infty. \quad (2.25)$$

Der Sprung von Skalaren ψ werde mit $[\psi] := \lim_{x \in \Omega_c} \psi - \lim_{x \in \Omega_E} \psi$ bezeichnet und derjenige von Vektoren \mathbf{v} mit $[\mathbf{v}] := \lim_{x \in \Omega_c} \mathbf{v} - \lim_{x \in \Omega_E} \mathbf{v}$. Dann liefern die Stetigkeits-Bedingungen $[\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}] = 0$ und $[\frac{1}{\mu} \mathbf{B} \times \mathbf{n}] = \mathbf{0}$ die Interface-Bedingungen

$$\left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{u} \right) \times \mathbf{n} = \left(\frac{1}{\mu_0} \nabla \Phi \right) \times \mathbf{n} \quad \text{auf } \partial \Omega_c, \quad (2.26)$$

$$(\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} \quad \text{auf } \partial \Omega_c. \quad (2.27)$$

Sie sichern, dass die normale Komponente von \mathbf{B} und die tangentielle Komponente von $\frac{1}{\mu} \mathbf{B}$ stetig auf $\partial \Omega_c$ sind. Des Weiteren werden Anfangsbedingungen gestellt.

Kapitel 3

Variationsformulierung des kontinuierlichen Problems

Science... never solves a problem without creating ten more.

George Bernard Shaw (1856 - 1950)
irischer Dramatiker, Politiker, Musikkritiker

Es soll eine Variationsformulierung des Problems (2.23)-(2.25) hergeleitet werden. Dazu werden die benötigten Sobolev- und Randräume eingeführt. Die Variationsformulierung wird durch die symmetrische Verbindung von FEM und BEM im diskreten Fall motiviert. Dazu wird ein symmetrischer Kopplungsansatz verwendet. Dieser wurde z.B. in [KS02] dargestellt. Des Weiteren werden Operatoren eingeführt, um die Notation zu vereinfachen. Im Folgenden soll $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\partial\Omega_c}$ als L^2 -Skalarprodukt auf dem Rand verstanden werden.

3.1 Funktionenräume

Für die Behandlung der Variationsformulierung werden Sobolev-Räume benötigt. Im Fall des Innenraums wird der Raum $H(\text{curl}; \Omega)$ verwendet, der am Anfang dieses Abschnittes definiert wird. Des Weiteren werden für die Behandlung des Außenraumes mittels Randelementmethoden Randräume benötigt. Diese werden inklusive einiger ihrer Eigenschaften ebenfalls eingeführt.

3.1.1 Funktionenräume im Gebiet

Zunächst werden die Räume $H(\text{curl}; \Omega)$ und $H(\text{div}; \Omega)$ eingeführt. $H(\text{curl}; \Omega)$ ist der Raum der quadratintegrierbaren Funktionen auf Ω_c , deren Rotation ebenfalls in $L^2(\Omega_c)$ liegt. Im Raum $H(\text{div}; \Omega)$ ist die Divergenz wieder quadratintegrierbar.

$$\begin{aligned} H_r &:= H(\text{curl}; \Omega_c) := \{A \in [L^2(\Omega_c)]^3 \mid \text{curl}A \in [L^2(\Omega_c)]^3\}, \\ H(\text{div}; \Omega_c) &:= \{A \in [L^2(\Omega_c)]^3 \mid \text{div}A \in L^2(\Omega_c)\}. \end{aligned}$$

Sie sind mit den Normen

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|_{H_r} &:= \|A\|_{H(\text{curl}; \Omega_c)} = \left(\|A\|_{L^2(\Omega_c)}^2 + \|\nabla \times A\|_{L^2(\Omega_c)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \|A\|_{H(\text{div}; \Omega_c)} &= \left(\|A\|_{L^2(\Omega_c)}^2 + \|\nabla \cdot A\|_{L^2(\Omega_c)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

versehen. Da die Rotation bzw. die Divergenz wieder quadratintegrierbar sind, sind die Normen wohldefiniert. Falls der Rand von Ω_c genügend glatt und das Gebiet beschränkt ist, ist

$$\|A\|_{H(\text{curl}, \text{div}; \Omega_c)} = \left(\|A\|^2 + \|\nabla \times A\|^2 + \|\nabla \cdot A\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

äquivalent zur $[H^1(\Omega_c)]^3$ -Norm (vgl. [FT78] Proposition 1.4).

3.1.2 Funktionenräume auf dem Rand

Zunächst soll der Raum $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)$ definiert werden. Das Potential im Außenraum wird in diesem Raum gesucht. Anschließend werden Spurooperatoren und Differentialoperatoren auf dem Rand definiert. Die nächsten Ausführungen sind dem Buch [Ste03a] entnommen.

Der Rand bildet eine zweidimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^3 . Um Sobolev-Räume auf ihr zu definieren, wird zunächst eine beliebige und überlappende stückweise Parametrisierung des Randes betrachtet:

$$\partial\Omega_c = \sum_{i=1}^l \Gamma_i, \quad \text{mit } \Gamma_i := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x = p_i(\tilde{x}) \text{ für } \tilde{x} \in U_i \subset \mathbb{R}^2\}.$$

Des Weiteren sei eine untergeordnete Zerlegung der Eins $\{\varphi_i\}_{i=1}^l$ von nicht negativen Distributionen $\varphi_i \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ gegeben, das heißt es gelte

$$\sum_{i=1}^l \varphi_i(x) = 1 \quad \text{für } x \in \partial\Omega_c \quad \text{und} \quad \varphi_i(x) = 0 \quad \text{für } x \in \partial\Omega_c \setminus \Gamma_i.$$

Für eine auf dem Rand $\partial\Omega_c$ definierte Funktion v gilt mit $v_i(x) := \varphi_i(x)v(x)$ die Darstellung

$$v(x) = \sum_{i=1}^l \varphi_i(x)v(x) = \sum_{i=1}^l v_i(x) \quad \text{für } x \in \partial\Omega_c.$$

Ziel ist es, die Funktion v in den lokalen Koordinaten der lokalen Parametrisierung auszu-drücken. Dazu werden Funktionen \tilde{v}_i definiert, die auf den Mengen $U_i \subset \mathbb{R}^2$ leben. Diese werden wie folgt festgelegt.

$$\tilde{v}_i(\tilde{x}) := \varphi(p_i(\tilde{x}))v_i(p_i(\tilde{x})) = \varphi_i(x)v(x) \quad \text{für } \tilde{x} \in U_i \subset \mathbb{R}^2.$$

Es können Sobolev-Räume bezüglich der beschränkten Gebiete $U_i \subset \mathbb{R}^2$ definiert werden. Der Sobolev-Raum $H^s(\partial\Omega_c)$, $0 \leq s \leq 1$, wird über die Norm

$$\|v\|_{H^s(\partial\Omega_c)} := \left(\sum_{i=1}^l \|\tilde{v}_i\|_{H^s(U_i)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

erklärt. Des Weiteren kann gezeigt werden, dass diese Norm für $0 < s < 1$ äquivalent zur Sobolev-Slobodeckii-Norm

$$\|v\|_{H^s(\partial\Omega_c)} = \left(\|v\|_{L^2(\partial\Omega_c)}^2 + \int_{\partial\Omega_c} \int_{\partial\Omega_c} \frac{[v(x) - v(y)]^2}{|x - y|^{2+2s}} ds_x ds_y \right)^{\frac{1}{2}}$$

ist. Der Dualraum von $H^s(\partial\Omega_c)$ wird mit $H^{-s}(\partial\Omega_c)$ bezeichnet. Das zugehörige Dualitätsprodukt ist

$$\langle v, w \rangle_{\partial\Omega_c} := \int_{\partial\Omega_c} v(x)w(x) ds_x.$$

Die Norm von $H^{-s}(\partial\Omega_c)$, $0 \leq s \leq 1$, wird wie folgt definiert.

$$\|w\|_{H^{-s}(\partial\Omega_c)} := \sup_{0 \neq v \in H^s(\partial\Omega_c)} \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\|_{H^s(\partial\Omega_c)}}.$$

Spurooperatoren

Es gibt mehrere Möglichkeiten eine Spur auf dem Rand zu definieren. Zum einen kann der Anteil des Vektors in tangentialer und der Anteil des Vektors in normaler Richtung betrachtet werden. In dem hier betrachteten Fall ist insbesondere die Spur der Rotation einer vektoriellen Funktion von Bedeutung. Um die Notation etwas zu vereinfachen, werden die folgenden Spurooperatoren eingeführt.

Definition 3.1 (Spurooperatoren)

Für $\mathbf{v} \in (C^\infty(\overline{\Omega}_c))^3$ wird $\mathbf{v} \times \mathbf{n}$ folgendermaßen definiert:

$$\gamma_t \mathbf{v} := \mathbf{v} \times \mathbf{n}|_{\partial\Omega_c}.$$

Das Vektorprodukt der Rotation mit dem Normaleneinheitsvektor

$$\gamma_N \mathbf{v} := (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{n}|_{\partial\Omega_c},$$

die tangentielle Komponente von \mathbf{v}

$$\gamma_D \mathbf{v} := \mathbf{n} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{n}|_{\partial\Omega_c})$$

und

$$\begin{aligned} \gamma_n : H(\operatorname{div}, \Omega_j) &\rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c) \quad , \quad j = c, E \\ \langle \gamma_n \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle_{\frac{1}{2}, \partial\Omega_c} &:= \int_{\Omega_j} (\mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{u}) \, dx \quad \forall \mathbf{u} \in H^1(\Omega_j) \end{aligned}$$

sind ebenfalls von Bedeutung. Falls zusätzlich ein oberer Index i auftritt, soll der Limes des Operators aus Ω_i betrachtet werden.

Für beschränkte Lipschitz-Gebiete in \mathbb{R}^3 kann γ_t stetig auf eine lineare Funktion von H_τ nach $\left[H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c) \right]^3$ erweitert werden.

Randdifferentialoperatoren

Bei der Randlelementmethode wird die Außenraumlösung einzig durch die Randwerte bestimmt. Es genügt daher, nur diese zu betrachten. Der Rand ist aber nur eine zweidimensionale Teilmenge des \mathbb{R}^3 . Analog zum gesamten Raum können auch auf dem Rand Differentialoperatoren definiert werden. Mit ihrer Hilfe werden analog zum Ganzraumfall Randräume eingeführt. Die Ausführungen dieses Abschnittes sind dem Buch [Mon03] Abschnitt 3.4 entnommen. Um Differentialoperatoren auf dem Rand zu definieren, wird der Raum

$$L_t^2(\partial\Omega_c) := \{ \mathbf{v} \in L^2(\partial\Omega_c) \mid \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ fast überall auf } \partial\Omega_c \}$$

eingeführt. Des Weiteren ist die Matrix

$$G = (G_{i,j}) = \left(\frac{\partial x}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial x}{\partial u_j} \right)$$

von Bedeutung, wobei x Koordinaten im Raum und (u_1, u_2) Koordinaten auf der Oberfläche sind. Die Inverse werde mit $g = (g_{i,j})$ bezeichnet. Der Oberflächengradient $\nabla_{\partial\Omega_c} : H^1(\partial\Omega_c) \rightarrow L_t^2(\partial\Omega_c)$ wird definiert durch

$$\nabla_{\partial\Omega_c} p = \sum_{1,j=1}^2 g^{i,j} \frac{\partial p}{\partial u_i} \frac{\partial x}{\partial u_j}.$$

Einen Zusammenhang zwischen dem Randgradienten und dem Raumgradienten liefert

$$\begin{aligned} (\nabla p)|_{\partial\Omega_c} &= \nabla_{\partial\Omega_c} p + \frac{\partial p}{\partial \mathbf{n}} \mathbf{n}, \\ (\mathbf{n} \times \nabla p|_{\partial\Omega_c}) \times \mathbf{n} &= \nabla_{\partial\Omega_c} p \text{ auf } \partial\Omega_c. \end{aligned}$$

Damit kann die Randdivergenz $\nabla_{\partial\Omega_c} : L_t^2(\partial\Omega_c) \rightarrow H^1(\partial\Omega_c)^*$ definiert werden:

$$\int_{\partial\Omega_c} \nabla_{\partial\Omega_c} \cdot \mathbf{v} p \, ds = - \int_{\partial\Omega_c} \mathbf{v} \cdot \nabla_{\partial\Omega_c} p \, ds \quad \forall p \in H^1(\partial\Omega_c).$$

Mit $|G| := \det(G)$ und $\mathbf{v} = A_1 \frac{\partial x}{\partial u_1} + A_2 \frac{\partial x}{\partial u_2}$ kann die Relation

$$\nabla_{\partial\Omega_c} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{|G|} \left(\frac{\partial}{\partial u_1} (|G| A_1) + \frac{\partial}{\partial u_2} (|G| A_2) \right)$$

aufgestellt werden. Analog zum Raum-Laplace-Operator wird der Oberflächen-Laplace-Operator $\Delta_{\partial\Omega_c} : H^1(\partial\Omega_c) \rightarrow H^1(\partial\Omega_c)^*$ als die Hintereinanderausführung von Gradient und Divergenz definiert, d.h. $\Delta_{\partial\Omega_c} = \nabla_{\partial\Omega_c} \cdot (\nabla_{\partial\Omega_c} p)$. Es fehlt noch der Rotationsoperator. Es wird zwischen der Vektor-Oberflächen-Rotation und der Skalar-Oberflächen-Rotation unterschieden. Die erste definiert einen Operator $\vec{\nabla}_{\partial\Omega_c} \times : H^1(\partial\Omega_c) \rightarrow L_t^2(\partial\Omega_c)$ durch

$$\vec{\nabla}_{\partial\Omega_c} \times p = -\mathbf{n} \times \nabla_{\partial\Omega_c} p|_{\partial\Omega_c}. \quad (3.1)$$

Die Skalar-Oberflächenrotation $\nabla_{\partial\Omega_c} \times : L_t^2(\partial\Omega_c) \rightarrow H^1(\partial\Omega_c)^*$ ergibt sich analog zur Oberflächen-Divergenz durch

$$\int_{\partial\Omega_c} \nabla_{\partial\Omega_c} \times \mathbf{v} p \, ds = \int_{\partial\Omega_c} \mathbf{v} \cdot \vec{\nabla}_{\partial\Omega_c} \times p \, ds \quad \forall p \in H^1(\partial\Omega_c). \quad (3.2)$$

Des Weiteren folgen die Relationen

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial\Omega_c} \times \mathbf{v} &= -\nabla_{\partial\Omega_c} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{v}|_{\partial\Omega_c}), \\ \nabla_{\partial\Omega_c} \cdot \mathbf{v} &= \nabla_{\partial\Omega_c} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{v}|_{\partial\Omega_c}) \\ \nabla_{\partial\Omega_c} \times \mathbf{v} &= (\mathbf{n} \cdot \nabla \times \mathbf{v}^*)|_{\partial\Omega_c} \end{aligned} \quad (3.3)$$

für eine geeignete Fortsetzung \mathbf{v}^* von \mathbf{v} .

3.1.3 Räume für zeitabhängige Probleme

Für zeit- und ortsabhängige Funktionen wird das Konzept vektorwertiger Funktionen $\mathbf{v} : (a, b) \rightarrow W$ betrachtet, wobei W ein Banach-Raum ist. Analog zum Ort können Lebesgue- und Sobolev-Räume für das Tupel (Ort, Zeit) eingeführt werden. Zunächst werden Räume stetiger und differenzierbarer Funktionen definiert.

Definition 3.2 (Stetige/ differenzierbare vektorwertige Funktionen)

Sei $-\infty < a < b < \infty$ und W Banach-Raum.

(1) Eine Funktion $\mathbf{v} : [a, b] \rightarrow W$ heißt stetig in $t_0 \in (a, b)$, falls

$$\lim_{\tau \rightarrow 0, t_0 + \tau \in [a, b]} \|\mathbf{v}(t_0 + \tau) - \mathbf{v}(t_0)\|_W = 0.$$

Sie heißt stetig auf $[a, b]$, falls sie in allen Punkten $t_0 \in [a, b]$ stetig ist. Die auf $[a, b]$ stetigen vektorwertigen Funktionen bilden den Raum $C([a, b]; W)$.

(2) Eine Funktion $\mathbf{v} : [a, b] \rightarrow W$ heißt in $t_0 \in [a, b]$ differenzierbar, falls ein $\tilde{\mathbf{v}} \in W$ existiert mit

$$\lim_{\tau \rightarrow 0, t_0 + \tau \in [a, b]} \left\| \frac{\mathbf{v}(t_0 + \tau) - \mathbf{v}(t_0)}{\tau} - \tilde{\mathbf{v}} \right\|_W = 0.$$

Dann wird $\mathbf{v}'(t) := \tilde{\mathbf{v}}$ gesetzt und die höheren Ableitungen $\mathbf{v}^{(m)}(t) = \frac{d^m \mathbf{v}}{dt^m}$ induktiv definiert. Die Funktion \mathbf{v} heißt m -fach differenzierbar, falls sie für alle $t_0 \in [a, b]$ differenzierbar ist. Der Raum der auf $[a, b]$ m -fach differenzierbaren Funktionen wird mit $C^m([a, b]; W)$ bezeichnet.

Bemerkung 3.3

Falls W ein Banach-Raum ist, so wird $C^m([0, T]; W)$ mit der Norm

$$\|\mathbf{v}\|_{C^m([0, T]; W)} := \sum_{i=0}^m \max_{0 \leq t \leq T} \|\mathbf{v}^{(i)}(t)\|_W$$

ein Banach-Raum. □

Die Lebesgue-Räume werden folgendermaßen eingeführt.

Definition 3.4 (Lebesgue-Räume vektorwertiger Funktionen)

Sei $0 < T < \infty$ und W ein Banach-Raum.

(1) Für $1 \leq q < \infty$ wird die Norm

$$\|\mathbf{v}\|_{L^q(0,T;W)} := \left(\int_0^T \|\mathbf{v}\|_W^q ds \right)^{\frac{1}{q}}$$

und damit der Lebesgue-Raum

$$L^q(0, T; W) := \left\{ \mathbf{v} : (0, T) \rightarrow W \mid \mathbf{v} \text{ ist messbar und } \|\mathbf{v}\|_{L^q(0,T;W)} < \infty \right\}.$$

definiert.

(2) Auf die gleiche Weise kann $L^\infty(0, T; W)$ eingeführt werden durch die Norm

$$\|\mathbf{v}\|_{L^\infty(0,T;W)} := \sup_{0 \leq t \leq T} \|\mathbf{v}\|_W.$$

Analog können die Sobolev-Räume für vektorwertige Funktionen eingeführt werden.

Definition 3.5 (Sobolev-Räume vektorwertiger Funktionen)

$W^{1,p}(0, T; W)$ ist der Raum aller $\mathbf{v} \in L^p(0, T; W)$, deren Ableitung \mathbf{v}' im schwachen Sinne existiert und für die gilt $\mathbf{v}' \in L^p(0, T; W)$. Des Weiteren wird

$$H^1(0, T; W) := W^{1,2}(0, T; W)$$

definiert.

3.2 Randgleichungen

Der zweite Abschnitt dieses Kapitels ist dem Außenraumproblem gewidmet. Mittels eines Superpositionsansatzes für das Außenraumpotential Φ werden die sogenannten Calderón-Gleichungen hergeleitet. Die benötigten Operatoren werden eingeführt.

Zunächst wird der Randterm betrachtet, der bei der partiellen Integration auftritt. Mit

Hilfe der Randbedingungen und einigen Eigenschaften aus dem Abschnitt 3.1 ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega_c} \left[\left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{u} \right) \times \mathbf{n} \right] \cdot \mathbf{v} \, ds &\stackrel{(2.26)}{=} \frac{1}{\mu_0} \int_{\partial\Omega_c} (\nabla \Phi \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, ds \\
&\stackrel{(3.1)}{=} \frac{1}{\mu_0} \int_{\partial\Omega_c} \left(\vec{\nabla}_{\partial\Omega_c} \times \Phi \right) \cdot \mathbf{v} \, ds \\
&\stackrel{(3.2)}{=} \frac{1}{\mu_0} \int_{\partial\Omega_c} \Phi (\nabla_{\partial\Omega_c} \times \mathbf{v}) \, ds \\
&\stackrel{(3.3)}{=} \frac{1}{\mu_0} \int_{\partial\Omega_c} \Phi (\mathbf{n} \cdot [\nabla \times \mathbf{v}]) \, ds.
\end{aligned}$$

Mit $T_n \mathbf{v}$ wird im Folgenden der Betrag der normalen Komponente der Rotation von \mathbf{v} angegeben, d.h. $T_n \mathbf{v} := (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}$. Damit zeigt sich

$$\int_{\partial\Omega_c} \left[\left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{u} \right) \times \mathbf{n} \right] \cdot \mathbf{v} \, ds = \frac{1}{\mu_0} \int_{\partial\Omega_c} \Phi T_n \mathbf{v} \, ds.$$

3.2.1 Calderòn-Gleichungen

Die Darstellungsformel für die Außenraumlösung kann mit der Fundamentallösung der Laplace-Gleichung $U(x, y)$ (vgl. (2.19)) folgendermaßen für $x \in \Omega_E$ geschrieben werden:

$$\begin{aligned}
\Phi(x) &= - \int_{\partial\Omega_c} U(x, y) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} \Phi(y) \, ds(y) + \int_{\partial\Omega_c} T(x, y) \Phi(y) \, ds(y) \\
&\stackrel{(2.27)}{=} - \int_{\partial\Omega_c} U(x, y) (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}(y) \, ds(y) + \int_{\partial\Omega_c} T(x, y) \Phi(y) \, ds(y) \\
\Phi(x) &= -\mathfrak{C} T_n \mathbf{u}(x) + \mathfrak{D} \Phi(x). \tag{3.4}
\end{aligned}$$

Dabei bezeichnen

$$\mathfrak{C} \phi(x) := \int_{\partial\Omega_c} U(x, y) \phi(y) \, ds(y) \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega_c$$

und

$$\mathfrak{D} \phi(x) := \int_{\partial\Omega_c} T(x, y) \phi(y) \, ds(y) \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial\Omega_c$$

das Einfachschicht- bzw. Doppelschicht-Potential. Als Nächstes werden einige Randintegraloperatoren definiert.

Definition 3.6 (Randintegraloperatoren)

Für $x \in \partial\Omega_c$ wird

$$\begin{aligned}(V\psi)(x) &:= \int_{\partial\Omega_c} U(x, y)\psi(y) ds(y), \\(K\psi)(x) &:= \int_{\partial\Omega_c} T(x, y)\psi(y) ds(y), \\(K'\psi)(x) &:= \int_{\partial\Omega_c} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} U(x, y)\psi(y) ds(y), \\(W\psi)(x) &:= -\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_x} \int_{\partial\Omega_c} T(x, y)\psi(y) ds(y)\end{aligned}$$

definiert.

Nach [Cos88] Theorem 1 besitzen die Operatoren folgende Eigenschaften:

Bemerkung 3.7 (Eigenschaften der Operatoren)

Falls Ω_c Lipschitz ist, sind die Operatoren

$$\begin{aligned}V &: H^{-\frac{1}{2}+\kappa}(\partial\Omega_c) \rightarrow H^{\frac{1}{2}+\kappa}(\partial\Omega_c), \\K &: H^{\frac{1}{2}+\kappa}(\partial\Omega_c) \rightarrow H^{\frac{1}{2}+\kappa}(\partial\Omega_c), \\K' &: H^{-\frac{1}{2}+\kappa}(\partial\Omega_c) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}+\kappa}(\partial\Omega_c), \\W &: H^{\frac{1}{2}+\kappa}(\partial\Omega_c) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}+\kappa}(\partial\Omega_c)\end{aligned}$$

für alle $\kappa \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ stetig und W ist stark elliptisch. □

Um die Operatoren mit dem Superpositionsansatz in Einklang zu bringen, wird die Spur des Einfach- bzw. Doppelschichtpotentials betrachtet. Die Spur von ϕ wird mit $\gamma_0\phi$ und die Normalenableitung auf dem Rand mit $\gamma_1\phi$ bezeichnet. Es ergeben sich folgende Relationen (vgl. [SS04] S.80).

Bemerkung 3.8

Es gilt

$$\begin{aligned}V\phi &= \gamma_0\mathfrak{E}\phi, & K\phi &= \gamma_0\mathfrak{A}\phi \\K'\phi &= \gamma_1\mathfrak{E}\phi, & W\phi &= -\gamma_1\mathfrak{A}\phi.\end{aligned}$$

□

Nach [SS04] Korollar 3.3.14 und Satz 3.3.15 gelten folgende Sprungrelationen für die Randintegraloperatoren. Dabei bezeichnet $+$ die Spurbildung vom äußeren und $-$ diejenige vom inneren Gebiet her.

Bemerkung 3.9

Sei $\partial\Omega_c$ stückweise C^2 , ϕ stückweise C^1 auf $\partial\Omega_c$ und $\rho \in \{+, -\}$. Dann gilt

$$(a) \quad \gamma_1^\rho \mathfrak{E}\phi = - \left(\rho \frac{1}{2} \phi - K' \phi \right) \quad \text{fast überall auf } \partial\Omega_c. \quad (3.5)$$

$$(b) \quad \gamma_0^\rho \mathfrak{E}\phi = \rho \frac{1}{2} \phi + K \phi \quad \text{in } L^2(\Omega_c). \quad (3.6)$$

□

Nach diesem Überblick über einige Randintegraloperatoren sollen diese auf den Superpositionsansatz angewendet werden. Dazu werden die Spuren $\gamma_0^+ \Phi$ und $\gamma_1^+ \Phi$ von (3.4) gebildet. Mit den Sprungbedingungen (3.5), (3.6) und der Randbedingung (2.27) entsteht folgendes Gleichungssystem:

Satz 3.10 (Calderón-Gleichungen)

Die Calderón-Gleichungen für die Cauchy-Daten $(\Phi, T_n \mathbf{u})$ lauten

$$\begin{aligned} (VT_n \mathbf{u})(x) &= -\frac{1}{2} \Phi(x) + (K\Phi)(x), \\ (W\Phi)(x) &= -\frac{1}{2} T_n \mathbf{u}(x) - (K' T_n \mathbf{u})(x). \end{aligned} \quad (3.7)$$

3.2.2 Lösbarkeitsbedingungen für die Calderón Gleichungen

Φ soll so gewählt werden, dass $\mathbf{B} = \nabla \Phi$ (vgl. (2.18)). Damit ist Φ nur bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt. Daher wird

$$\int_{\partial\Omega_c} \Phi \, ds = 0$$

als Normierungsbedingung gefordert. Des Weiteren wird an Stelle der Calderón-Gleichung (3.7) die mit $\omega = 0$ erweiterte Randintegralgleichung

$$(W\Phi)(x) + \omega = -\frac{1}{2} T_n \mathbf{u}(x) - (K' T_n \mathbf{u})(x)$$

betrachtet.

3.3 Gekoppeltes Problem

Ausgangspunkt ist das Problem für den Innenraum (2.23):

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{u} = -\sigma \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \sigma \mathbf{w} \times (\nabla \times \mathbf{u}) + \sigma \frac{Rf}{1+s|\nabla \times \mathbf{u}|^2} \nabla \times \mathbf{u} \quad \text{in } \Omega_c \times (0, T),$$

Multiplikation mit einer Testfunktion $\mathbf{v} \in H_r$, Integration über das Innenraumgebiet Ω_c und partielle Integration des $\nabla \times \nabla \times$ -Terms (vgl. z.B. [BC01a]) liefert das folgende Problem

Problem 3.11 (Kontinuierliches Problem für den Innenraum)

Zur Startlösung $\mathbf{u}^0 \in H_r$ finde $\mathbf{u} \in H^1(0, T; H_r)$ so, dass für alle Testfunktionen $\mathbf{v} \in H_r$ und fast alle $t \in (0, T)$ gilt

$$\begin{aligned} 0 = & \left(\sigma \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \mathbf{v} \right) + \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{u}, \nabla \times \mathbf{v} \right) - \left\langle \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{u} \right) \times \mathbf{n}, \mathbf{v} \right\rangle_{\partial \Omega_c} - (\sigma \mathbf{w} \times (\nabla \times \mathbf{u}), \mathbf{v}) \\ & - R \left(\sigma \frac{f}{1+s|\nabla \times \mathbf{u}|^2} \nabla \times \mathbf{u}, \mathbf{v} \right) \end{aligned} \quad (3.8)$$

In diesem Abschnitt wird dieses mit Hilfe der vorangegangenen Ausführungen modifiziert. Es werden neuen Bezeichnungen für die Operatoren eingeführt, um den Überblick zu erleichtern.

Es ergibt sich mit Satz 3.10 das folgende Problem:

Problem 3.12 (Gekoppeltes kontinuierliches Problem - Drei Gleichungen)

Finde $(\mathbf{u}, \Phi, \omega) \in H^1(0, T; H_r) \times L^2(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\partial \Omega_c)) \times L^\infty(0, T; \mathbb{R})$ so, dass für alle Testfunktionen $(\mathbf{v}, \psi) \in H_r \times H^{\frac{1}{2}}(\partial \Omega_c)$ und fast alle $t \in (0, T)$ gilt

$$\begin{aligned} 0 = & \left(\sigma \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \mathbf{v} \right) + \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{u}, \nabla \times \mathbf{v} \right) + \frac{1}{\mu_0} \left\langle \left(VT_n \mathbf{u} - \frac{1}{2} \Phi - K \Phi \right), T_n \mathbf{v} \right\rangle_{\partial \Omega_c} \\ & - (\sigma \mathbf{w} \times (\nabla \times \mathbf{u}), \mathbf{v}) - R \left(\sigma \frac{f}{1+s|\nabla \times \mathbf{u}|^2} \nabla \times \mathbf{u}, \mathbf{v} \right) \\ 0 = & \left\langle \psi, \left(W \Phi + \frac{1}{2} T_n \mathbf{u} + K' T_n \mathbf{u} \right) \right\rangle_{\partial \Omega_c} + \omega \langle \psi, 1 \rangle_{\partial \Omega_c} \\ 0 = & \langle \Phi, 1 \rangle_{\partial \Omega_c}. \end{aligned}$$

Da $\omega = 0$, kann die Konstante durch die letzte Gleichung ersetzt werden, d.h.

$$\omega = \langle \Phi, 1 \rangle_{\partial\Omega_c}.$$

Das Resultat ist das folgende Problem.

Problem 3.13 (Gekoppeltes kontinuierliches Problem - Zwei Gleichungen)

Finde $(\mathbf{u}, \Phi) \in H^1(0, T; H_r) \times L^2(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c))$ so, dass für alle Testfunktionen $(\mathbf{v}, \psi) \in H_r \times H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)$ und fast alle $t \in (0, T)$ gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\sigma \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \mathbf{v} \right) + \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{u}, \nabla \times \mathbf{v} \right) + \frac{1}{\mu_0} \left\langle \left(VT_n \mathbf{u} - \frac{1}{2} \Phi - K \Phi \right), T_n \mathbf{v} \right\rangle_{\partial\Omega_c} \\ &\quad - (\sigma \mathbf{w} \times (\nabla \times \mathbf{u}), \mathbf{v}) - R \left(\sigma \frac{f}{1 + s |\nabla \times \mathbf{u}|^2} \nabla \times \mathbf{u}, \mathbf{v} \right) \\ 0 &= \left\langle \left(W \Phi + \frac{1}{2} T_n \mathbf{u} + K' T_n \mathbf{u} \right), \psi \right\rangle_{\partial\Omega_c} + \langle \Phi, 1 \rangle_{\partial\Omega_c} \langle \psi, 1 \rangle_{\partial\Omega_c}. \end{aligned}$$

Um die Notation zu vereinfachen, werden folgende Linear- bzw. Bilinearformen eingeführt:

$$\begin{aligned} a_t(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &:= \left(\sigma \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \mathbf{v} \right), \\ \tilde{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &:= \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{u}, \nabla \times \mathbf{v} \right) - (\sigma \mathbf{w} \times (\nabla \times \mathbf{u}), \mathbf{v}), \\ a_{nl}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &:= -R \left(\sigma \frac{f}{1 + s |\nabla \times \mathbf{u}|^2} \nabla \times \mathbf{u}, \mathbf{v} \right), \\ a_V(\mathbf{u}, \phi, \mathbf{v}) &:= \frac{1}{\mu_0} \left\langle \left(VT_n \mathbf{u} - \frac{1}{2} \phi - K \phi \right), T_n \mathbf{v} \right\rangle_{\partial\Omega_c}, \\ a_D(\mathbf{u}, \phi, \psi) &:= \left\langle \left(W \phi + \frac{1}{2} T_n \mathbf{u} + K' T_n \mathbf{u} \right), \psi \right\rangle_{\partial\Omega_c} + \langle \phi, 1 \rangle_{\partial\Omega_c} \langle \psi, 1 \rangle_{\partial\Omega_c}. \end{aligned}$$

Damit kann das Problem 3.13 folgendermaßen geschrieben werden:

Problem 3.14 (Kontinuierliches Sattelpunktproblem - Linearformen)

Finde $(\mathbf{u}, \Phi) \in H_t$ so, dass für alle Testfunktionen $(\mathbf{v}, \psi) \in H_r \times H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)$ und fast alle $t \in (0, T)$ gilt

$$\begin{aligned} a_t(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \tilde{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + a_{nl}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + a_V(\mathbf{u}, \Phi, \mathbf{v}) &= 0 \\ a_D(\mathbf{u}, \Phi, \psi) &= 0. \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Lax-Milgram (vgl. z.B. [Alt02] Satz 4.2) kann einem linearen Funktional ein Operator zugeordnet werden. Daher werden folgende Operatoren eingeführt:

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{A}_t \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &:= a_t(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \\ \langle \tilde{\mathcal{A}} \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &:= \tilde{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), \\ \langle \mathcal{D} \phi, \psi \rangle &:= \langle W \phi, \psi \rangle_{\partial \Omega_c} + \langle \phi, 1 \rangle_{\partial \Omega_c} \langle \psi, 1 \rangle_{\partial \Omega_c}, \\ \langle \mathcal{V} \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &:= \langle V T_n \mathbf{u}, T_n \mathbf{v} \rangle_{\partial \Omega_c}, \\ \langle \mathcal{K} \phi, \mathbf{v} \rangle &:= \left\langle \left(\frac{1}{2} Id + K \right) \phi, T_n \mathbf{v} \right\rangle_{\partial \Omega_c}.\end{aligned}$$

Um die Notation zu vereinfachen, wird der Operator \mathcal{A}_{nl} so definiert, dass $\langle \mathcal{A}_{nl}(\mathbf{u}), \mathbf{v} \rangle = a_{nl}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$. Mit dem Raum

$$H_t := H^1(0, T; H_r) \times L^2\left(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\partial \Omega_c)\right),$$

entsteht aus dem Problem 3.14 in Operatorschreibweise

Problem 3.15 (Kontinuierliches Sattelpunktproblem - Operatorschreibweise)

Finde $(\mathbf{u}, \Phi) \in H_t$ so, dass für alle Testfunktionen $(\mathbf{v}, \psi) \in H_r \times H^{\frac{1}{2}}(\partial \Omega_c)$ und fast alle $t \in (0, T)$ gilt

$$\mathcal{A}_t \mathbf{u} + \tilde{\mathcal{A}} \mathbf{u} + \mathcal{A}_{nl}(\mathbf{u}) + \frac{1}{\mu_0} \mathcal{V} \mathbf{u} - \frac{1}{\mu_0} \mathcal{K} \Phi = 0 \quad (3.9)$$

$$\mathcal{D} \Phi + \mathcal{K}' \mathbf{u} = 0. \quad (3.10)$$

Nach Bemerkung 3.7 ist der Operator W stark elliptisch. Es kann gezeigt werden, dass der Operator \mathcal{D} elliptisch ist (vgl. z.B. [Ste03a] Satz 6.7). Nach dem Satz von Lax-Milgram (vgl. z.B. [Alt02] Satz 4.2) ist der Operator somit invertierbar. Das Problem 3.15 kann entsprechend modifiziert werden. Mit dem Operator

$$\tilde{\mathcal{S}} := \tilde{\mathcal{A}} + \frac{1}{\mu_0} \mathcal{V} + \frac{1}{\mu_0} \mathcal{K} \mathcal{D}^{-1} \mathcal{K}'$$

ergibt sich das folgende kontinuierliche Problem in Operatorschreibweise

Problem 3.16 (Kontinuierliches reduziertes Problem - Operatorschreibweise)

Zur Startlösung $\mathbf{u}^0 \in H_r$ finde $\mathbf{u} \in H^1(0, T; H_r)$ so, dass für fast alle $t \in (0, T)$ gilt

$$\tilde{\mathcal{S}} \mathbf{u} + \mathcal{A}_t \mathbf{u} + \mathcal{A}_{nl}(\mathbf{u}) = 0.$$

Kapitel 4

Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung des kontinuierlichen Problems

A proof is a proof. What kind of a proof? It's a proof. A proof is a proof. And when you have a good proof, it's because it's proven.

Jean Chretien (†1934),
kanadischer Politiker

In Kapitel 3 wurde die Variationsformulierung des kontinuierlichen Problems hergeleitet. In diesem Kapitel wird die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung dieses Problems bewiesen. Dazu wird ein Satz aus der Theorie der Evolutionsgleichungen verwendet. Wesentlich ist, dass der Operator monoton und hemistetig ist. Dafür wird die Lösung mit einer zeitabhängigen Funktion skaliert.

4.1 Herleitung eines äquivalenten Problems

In diesem Abschnitt soll ein äquivalentes Problem hergeleitet werden, dessen Operatoren koerzitiv sind. Die ursprünglichen Operatoren erfüllen eine Garding-Ungleichung. Dies wird ausgenutzt, um das Problem in geeigneter Weise zu modifizieren.

Für die Untersuchung der Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung dieses Problems werden einige Bedingungen an die Operatoren gestellt. Zunächst ist es wichtig, dass diese nach unten beschränkt sind. Dies liefert folgende Lemma.

Lemma 4.1 (*Garding-Ungleichung*)

$\tilde{\mathcal{A}} + \mathcal{A}_{nl}$ erfüllt eine Garding-Ungleichung.

$$\left\langle \tilde{\mathcal{A}}\mathbf{v} + \mathcal{A}_{nl}(\mathbf{v}), \mathbf{v} \right\rangle + \kappa \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_c)}^2 \geq \delta \|\mathbf{v}\|_{H_r}^2. \quad (4.1)$$

Beweis:

Für die Garding-Ungleichung werde

$$\begin{aligned} \left\langle \tilde{\mathcal{A}}\mathbf{v} + \mathcal{A}_{nl}(\mathbf{v}), \mathbf{v} \right\rangle &\geq \frac{1}{\mu_2} \|\nabla \times \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_c)}^2 - \sigma_2 \|\mathbf{w}\|_{L^\infty(\Omega_c)} \|\nabla \times \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_c)} \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_c)} \\ &\quad - \sigma_2 |R| \|f\|_{L^\infty(\Omega_c)} \|\nabla \times \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_c)} \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_c)} \\ &\geq \left(\frac{1}{\mu_2} - c_k \right) \|\nabla \times \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_c)}^2 \\ &\quad - \sigma_2^2 \left(\frac{\|\mathbf{w}\|_{L^\infty(\Omega_c)}^2}{2c_k} + \frac{R^2 \|f\|_{L^\infty(\Omega_c)}^2}{2c_k} \right) \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_c)}^2. \end{aligned}$$

betrachtet. Daraus folgt mit

$$\kappa := 2\sigma_2^2 \left(\frac{\|\mathbf{w}\|_{L^\infty(\Omega_c)}^2}{2c_k} + \frac{R^2 \|f\|_{L^\infty(\Omega_c)}^2}{2c_k} \right) \text{ und } \delta := \min \left\{ \frac{1}{\mu_2} - c_k, \frac{\kappa}{2} \right\}$$

die gesuchte Ungleichung. \square

Dies genügt aber nicht ganz. Für die Anwendung von Theorem 4.7 ist es erforderlich, dass der Operator koerzitiv ist, wie sich im nächsten und übernächsten Abschnitt zeigen wird. Dazu wird die Gleichung mit einer Exponentialfunktion in der Zeit $e^{-\kappa t}$ multipliziert. Es zeigt sich

Bemerkung 4.2 (*Äquivalente Probleme*)

Mit

$$\hat{\mathbf{u}}(t) := e^{-\kappa t} \mathbf{u}(t), \quad \hat{\Phi}(t) := e^{-\kappa t} \Phi(t) \text{ und } \hat{s}(t) := e^{2\kappa t} s, \quad (4.2)$$

ist das Problem

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\sigma \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial t} + \sigma \kappa \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{v} \right) + \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \hat{\mathbf{u}}, \nabla \times \mathbf{v} \right) + \frac{1}{\mu_0} \left\langle \left(VT_n \hat{\mathbf{u}} - \frac{1}{2} \hat{\phi}_E - K \hat{\phi}_E \right), T_n \mathbf{v} \right\rangle_{\partial \Omega_c} \\ &\quad - (\sigma \mathbf{w} \times (\nabla \times \hat{\mathbf{u}}), \mathbf{v}) - R \left(\sigma \frac{f}{1 + \hat{s} |\nabla \times \hat{\mathbf{u}}|^2} \nabla \times \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{v} \right) \\ 0 &= \left\langle \left(D \hat{\phi}_E + \frac{1}{2} T_n \hat{\mathbf{u}} + K' T_n \hat{\mathbf{u}} \right), \psi \right\rangle_{\partial \Omega_c} + \left\langle \hat{\phi}_E, 1 \right\rangle_{\partial \Omega_c} \langle \psi, 1 \rangle_{\partial \Omega_c}. \end{aligned}$$

äquivalent zu dem Problem 3.13. \square

Im Folgenden werden die $\hat{\cdot}$ -Symbole weggelassen und der Operator $\tilde{\mathcal{A}}$ wird folgendermaßen abgeändert:

$$\langle \mathcal{A}\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle := a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := (\sigma\kappa\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{u}, \nabla \times \mathbf{v} \right) - (\sigma\mathbf{w} \times (\nabla \times \mathbf{u}), \mathbf{v}).$$

Statt \tilde{S} wird nun der Operator S verwendet, der anstelle des Operators $\tilde{\mathcal{A}}$ den Operator \mathcal{A} hat.

$$S := \left(\mathcal{A} + \frac{1}{\mu_0} \mathcal{V} + \frac{1}{\mu_0} \mathcal{K} \mathcal{D}^{-1} \mathcal{K}' \right).$$

Alle anderen Operatoren bleiben unverändert. Damit ergibt sich das neue Problem in Operator Schreibweise

Problem 4.3 (Äquivalentes kontinuierliches reduziertes Problem)

Zur Startlösung $\mathbf{u}^0 \in H_r$ finde $\mathbf{u} \in H^1(0, T; H_r)$ so, dass für fast alle $t \in (0, T)$ gilt

$$S\mathbf{u} + \mathcal{A}_t\mathbf{u} + \mathcal{A}_{nl}(\mathbf{u}) = 0.$$

4.2 Definitionen

Am Ende dieses Abschnittes wird ein Ergebnis aus der Theorie nichtlinearer Evolutionsgleichungen eingeführt, das auf das Problem 4.3 angewendet werden soll. Für diesen Satz werden noch einige Begriffe benötigt, die hier eingeführt werden.

Definition 4.4 (Hemistetigkeit)

Sei X ein reflexiver, reeller Banach-Raum. Ein Operator $D : X \rightarrow X^*$ heißt hemistetig genau dann, wenn die Abbildung

$$t \mapsto \langle D(u + tv), w \rangle_X$$

für alle u, v und $w \in X$ stetig im Intervall $[0, 1]$ ist.

Neben diesem Stetigkeitsbegriff werden folgende Eigenschaften von Operatoren gebraucht.

Definition 4.5 (Monotonie und Koerzitivität)

Sei X ein reflexiver, reeller Banach-Raum. Ein Operator $D : X \rightarrow X^*$ heißt

(a) *monoton genau dann, wenn für alle $u, v \in X$ gilt*

$$\langle Du - Dv, u - v \rangle_X \geq 0.$$

(b) *koerzitiv genau dann, wenn*

$$\lim_{\|u\|_X \rightarrow \infty} \frac{\langle Du, u \rangle_X}{\|u\|_X} = \infty.$$

(c) *stark monoton genau dann, wenn es eine Konstante $c > 0$ gibt, so dass für alle $u, v \in X$ gilt*

$$\langle Du - Dv, u - v \rangle_X \geq c \|u - v\|_X^2.$$

Einen Zusammenhang zwischen einigen dieser Begriffe bietet die folgende Bemerkung, deren Aussagen im dritten Kapitel von [Růž04] oder in [Zei90] (z.B. Figure 27.1) zu finden sind.

Bemerkung 4.6 (Zusammenhang der Begriffe)

Sei X ein reflexiver, reeller Banach-Raum und $D : X \rightarrow X^*$ ein Operator. Dann gilt:

(a) *Falls D monoton ist, so ist D lokal beschränkt.*

(b) *Falls D stark monoton ist, so ist D koerzitiv.*

(c) *Falls D linear und beschränkt ist, so ist D hemistetig.*

(d) *Falls D Lipschitz-stetig ist, so ist D hemistetig.* □

Für die Existenz und Eindeutigkeit wird folgendes Resultat (vgl. [Zei90] Theorem 30.A) verwendet.

Satz 4.7 (Lösungen von nichtlinearen Evolutionsgleichungen)

Sei $V \subset X \subset V^*$ ein Gelfand-Tripel. Gegeben sei der Operator $D(t) : V \rightarrow V^*$, $t \in [0, T]$, der folgende Bedingungen für $p, q \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ geeignet erfüllt:

(a) *$D(t)$ sei monoton und hemistetig.*

(b) $D(t)$ ist koerzitiv und es existieren Konstanten $M > 0$ und $\Lambda \geq 0$, so dass für alle $v \in V$ gilt

$$\langle D(t)v, v \rangle \geq M \|v\|_V^p - \Lambda.$$

(c) Es gibt eine Funktion $K_1 \in L^q(0, T)$ und eine Konstante $K_2 > 0$, so dass für alle $v \in V$ gilt

$$\|D(t)v\|_{V^*} \leq K_1(t) + K_2 \|v\|_V^{p-1}.$$

(d) Die Funktion $t \mapsto D(t)$ ist Lebesgue-integrierbar, d.h. die Funktion

$$t \mapsto \langle D(t)u, v \rangle$$

ist messbar auf $(0, T)$ für alle $u, v \in V$.

Dann existiert eine Lösung des Problems

Finde zu $u_0 \in X^*$ und $F \in L^q(0, T; V^*)$ ein $u \in \{v \in L^p(0, T; V) \mid \exists v' \in L^q(0, T; V^*)\}$ mit

$$u(0) = u_0$$

$$\frac{d}{dt}u(t) + D(t)u(t) = F(t) \text{ in } V^* \text{ für fast alle } t \in [0, T].$$

Diese Lösung ist eindeutig.

4.3 Nachprüfen der Eigenschaften der Operatoren

Um den Beweis etwas übersichtlicher zu gestalten werden die Eigenschaften der Operatoren in diesem Abschnitt einzeln bewiesen. Dazu werden zunächst die Randintegraloperatoren näher betrachtet, gefolgt von den linearen Anteilen und am Schluss dem nichtlinearen Anteil.

Als Erstes werden Bedingungen an die Daten gestellt. Diese sichern die Koerzitivität bzw. die Beschränktheit der Operatoren und machen die Notation einfacher.

Annahme 4.8 (Annahmen an die Daten)

(V1) Es existieren je eine obere und eine untere Schranke für die Maximumsnorm von \mathbf{w}

und f , d.h

$$\begin{aligned} 0 \leq c_{Uu} &\leq \|\mathbf{w}(t)\|_{L^\infty(\Omega_c)} \leq c_{Uo} \text{ für alle } t \in [0, T], \\ 0 \leq c_{Fu} &\leq \|f(t)\|_{L^\infty(\Omega_c)} \leq c_{Fo} \text{ für alle } t \in [0, T]. \end{aligned}$$

(V2) Es gilt

$$\|\mathbf{w}(t)\|_{L^\infty(\Omega_c)}^2 + |R|^2 \|f(t)\|_{L^\infty(\Omega_c)}^2 \geq C_{UF} > 0.$$

Als Zweites ist zu klären, welche Operatoren den Operatoren aus dem Satz 4.7 entsprechen. Die rechte Seite verschwindet in diesem Fall, das heißt $F \equiv 0$. Der Operator $D(t)$ enthält alle andern Terme außer der Zeitableitung. Damit gilt

$$D(t)(\mathbf{u}) := \left(\underbrace{\mathcal{A} + \frac{1}{\mu_0} \mathcal{V} + \frac{1}{\mu_0} \mathcal{K} \mathcal{D}^{-1} \mathcal{K}'}_{=S} \right) \mathbf{u} + \mathcal{A}_{nl}(\mathbf{u}).$$

4.3.1 Eigenschaften der Randoperatoren

Als Erstes folgt aus Bemerkung 3.7 die Beschränktheit der Randintegraloperatoren.

Lemma 4.9 (Beschränktheit der Randintegraloperatoren)

Die Operatoren

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &: L^2(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)) \rightarrow L^2(0, T; H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)), \\ \mathcal{V} &: L^2(0, T; H_r) \rightarrow L^2(0, T; H_r^*) \quad \text{und} \\ \mathcal{K} &: L^2(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)) \rightarrow L^2(0, T; H_r^*) \end{aligned}$$

sind beschränkt.

Beweis:

Zunächst wird das Einfachschichtpotential betrachtet. Dazu wird $\|T_n \mathbf{v}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)} \leq c \|\mathbf{v}\|_{H_r}$ verwendet (vgl. z.B. [BC01a]).

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{V} \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &= \langle V T_n \mathbf{u}, T_n \mathbf{v} \rangle_{\partial\Omega_c} \\ &\leq \|V T_n \mathbf{u}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)} \|T_n \mathbf{v}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)} \\ &\leq c \|T_n \mathbf{u}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)} \|T_n \mathbf{v}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)} \\ &\leq c \|\mathbf{u}\|_{H_r} \|\mathbf{v}\|_{H_r}. \end{aligned}$$

Für die beiden anderen Operatoren kann analog die Beschränktheit gezeigt werden, indem diese auf die Bemerkung 3.7 zurückgeführt wird. \square

Für den gesamten Randterm ergibt sich

$$\frac{1}{\mu_0} \langle (\mathcal{V} + \mathcal{K}\mathcal{D}^{-1}\mathcal{K}') \mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}} \rangle \leq c \|\mathbf{v}\|_{H_r} \|\tilde{\mathbf{v}}\|_{H_r}.$$

Die Konstante wird im folgenden mit c_R bezeichnet.

Als Zweites soll nun eine Beschränktheit nach unten, das heißt eine Art Koerzitivität gezeigt werden. Dazu ist zu bemerken, dass der Operator V elliptisch ist und W auf dem Raum $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)$ ohne die Konstanten koerzitiv ist mit Koerzitivitätskonstanten λ_V und λ_W (vgl. z.B. [SS04] Satz 3.5.3 oder [Ste03a] Satz 6.5 und Satz 6.7). Des Weiteren ist der hypersinguläre Operator W selbstadjungiert und beschränkt und damit auch \mathcal{D} (vgl. Definition auf Seite 33). Nach [Ste03a] Lemma 3.3. ist damit auch der inverse Operator \mathcal{D}^{-1} elliptisch, wobei die Koerzitivitätskonstante der Kehrwert der Koerzitivitätskonstante von \mathcal{D} ist. Des Weiteren ist zu vermerken, dass \mathcal{K} und \mathcal{K}' zueinander adjungierte Operatoren sind. Damit folgt

$$\langle \mathcal{K}\mathcal{D}^{-1}\mathcal{K}'\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathcal{D}^{-1}\mathcal{K}'\mathbf{v}, \mathcal{K}'\mathbf{v} \rangle \geq \lambda_W^{-1} \|\mathcal{K}'\mathbf{v}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2.$$

Somit ist der Randterm elliptisch. Um die Notation zu vereinfachen, werden $\lambda_D := \frac{1}{\mu_0} \lambda_W^{-1}$ und $\lambda_V := \frac{1}{\mu_0} \lambda_V$ definiert.

Bemerkung 4.10

Es gilt

$$\frac{1}{\mu_0} \langle (\mathcal{V} + \mathcal{K}\mathcal{D}^{-1}\mathcal{K}') \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq \lambda_V \|\mathbf{v}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 + \lambda_D \|\mathcal{K}'\mathbf{v}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 \geq 0. \quad \square$$

4.3.2 Lipschitz-Stetigkeit der Operatoren $S(t)$ und \mathcal{A}_{nl}

Als Erstes wird wieder die Beschränktheit untersucht.

Bemerkung 4.11 (Beschränktheit von S)

$$\begin{aligned} \langle S(t)\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}} \rangle &\leq \sigma_2 \kappa \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_c)} \|\tilde{\mathbf{v}}\|_{L^2(\Omega_c)} + \sigma_2 \|\mathbf{w}\|_{L^\infty(\Omega_c)} \|\nabla \times \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_c)} \|\tilde{\mathbf{v}}\|_{L^2(\Omega_c)} \\ &\quad + \frac{1}{\mu_1} \|\nabla \times \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_c)} \|\nabla \times \tilde{\mathbf{v}}\|_{L^2(\Omega_c)} + c_R \|\mathbf{v}\|_{H_r} \|\tilde{\mathbf{v}}\|_{H_r} \\ &\leq \max \left\{ \sigma_2 \kappa, \frac{1}{\mu_1}, \sigma_2 \|\mathbf{w}\|_{L^\infty(\Omega_c)}, c_R \right\} \|\mathbf{v}\|_{H_r} \|\tilde{\mathbf{v}}\|_{H_r}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Damit ist $S(t)$ beschränkt. \square

Zusammen mit dem nichtlinearen Anteil folgt die Beschränktheit von $D(t)\mathbf{v}$.

Bemerkung 4.12 (Beschränktheit von $D(t)\mathbf{v}$)

Nach der Bemerkung 4.11 gilt für alle $\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}} \in L^2(0, T; H_r)$

$$\langle D(t)\mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}} \rangle \leq \underbrace{\sigma_2 \max \left\{ \eta, \frac{1}{\mu_1 \sigma_2}, \|\mathbf{w}\|_{L^\infty(\Omega_c)}, \frac{c_R}{\sigma_2}, |R| \|f\|_{L^\infty(\Omega_c)} \right\}}_{=: c_d(t)} \|\mathbf{v}\|_{H_r} \|\tilde{\mathbf{v}}\|_{H_r} \quad (4.4)$$

und damit $\|D(t)\mathbf{v}\|_{H_r^*} \leq c_d(t) \|\mathbf{v}\|_{H_r}$. Die Funktion $c_d(t)$ ist Lebesgue-integrierbar. \square

Als Zweites soll die Lipschitz-Stetigkeit des Operators D gezeigt werden. S ist linear und beschränkt und damit auch Lipschitz-stetig. Des Weiteren kann folgende Abschätzung für den nichtlinearen Term gezeigt werden, wobei die Norm die L^2 -Norm bezeichnet.

Lemma 4.13 (Lipschitz-Stetigkeit des nichtlinearen Terms)

Seien $\mathbf{u}, \tilde{\mathbf{u}} \in L^2(0, T; H_r)$ und $\mathbf{v} \in H_r$, dann gilt

$$\left(\frac{1}{1 + s |\mathbf{u}|^2} \mathbf{u} - \frac{1}{1 + s |\tilde{\mathbf{u}}|^2} \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v} \right) \leq 3 \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}\|_{L^2(\Omega_c)} \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega_c)}.$$

Beweis:

Als Erstes wird die Lipschitz-stetige Hilfsfunktion $\psi(t) := \frac{1}{1+t^2}$ definiert. Für beliebiges $t \in \mathbb{R}$ gilt

$$|\psi(t)| \leq 1. \quad (4.5)$$

Die Lipschitz-Stetigkeit von $\psi(t)t$, $t \in \mathbb{R}$ folgt aus der stetigen Differenzierbarkeit der Funktion.

$$\left| \frac{d}{dt} \frac{t}{1+t^2} \right| = \left| \frac{1+t^2 - 2t^2}{(1+t^2)^2} \right| = \left| \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} \right| \leq \left| \frac{1+t^2}{(1+t^2)^2} \right| = \left| \frac{1}{1+t^2} \right| \leq 1, \quad (4.6)$$

d.h.

$$|\psi(t)t - \psi(s)s| \leq |t - s|.$$

Nun soll die Lipschitz-Stetigkeit des nichtlinearen Anteils betrachtet werden. Dazu wird

$$\begin{aligned} (\psi(|\mathbf{u}|)\mathbf{u} - \psi(|\tilde{\mathbf{u}}|)\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) &= (\psi(|\mathbf{u}|)(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}) + (\psi(|\mathbf{u}|) - \psi(|\tilde{\mathbf{u}}|))\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) \\ &= \int_{\Omega_c} \psi(|\mathbf{u}|)(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}) \mathbf{v} \, dx + \int_{\Omega_c} (\psi(|\mathbf{u}|) - \psi(|\tilde{\mathbf{u}}|)) \tilde{\mathbf{u}} \mathbf{v} \, dx \\ &\leq \int_{\Omega_c} |\psi(|\mathbf{u}|)| |\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}| |\mathbf{v}| \, dx + \int_{\Omega_c} |\psi(|\mathbf{u}|) - \psi(|\tilde{\mathbf{u}}|)| |\tilde{\mathbf{u}}| |\mathbf{v}| \, dx \\ &\stackrel{(4.5)}{=} \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}\| \|\mathbf{v}\| + \int_{\Omega_c} [\psi(|\mathbf{u}|) \{|\tilde{\mathbf{u}}| - |\mathbf{u}|\} + \psi(|\mathbf{u}|) |\mathbf{u}| - \psi(|\tilde{\mathbf{u}}|) |\tilde{\mathbf{u}}|] |\mathbf{v}| \, dx \\ &\leq \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}\| \|\mathbf{v}\| + \int_{\Omega_c} |\psi(|\mathbf{u}|)| \||\mathbf{u}| - |\tilde{\mathbf{u}}|\| |\mathbf{v}| \, dx + \int_{\Omega_c} |\psi(|\mathbf{u}|) |\mathbf{u}| - \psi(|\tilde{\mathbf{u}}|) |\tilde{\mathbf{u}}| |\mathbf{v}| \, dx \\ &\stackrel{(4.5), (4.6)}{\leq} \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}\| \|\mathbf{v}\| + \||\mathbf{u}| - |\tilde{\mathbf{u}}|\| \|\mathbf{v}\| + \||\mathbf{u}| - |\tilde{\mathbf{u}}|\| \|\mathbf{v}\| \end{aligned}$$

betrachtet. Die zweite Dreiecksungleichung $\|\mathbf{u}\| - \|\tilde{\mathbf{u}}\| \leq \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}\|$ und die Abschätzung von Cauchy-Schwarz liefern die Behauptung. \square

Die folgende Abschätzung ergibt sich aus den vorherigen Ergebnissen.

Bemerkung 4.14 (Lipschitz-Stetigkeit von $D(t)$)

Aus Bemerkung 4.12 und Lemma 4.13 ergibt sich die Lipschitz-Stetigkeit von $D := S + \mathcal{A}_{nl}$. Seien $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \tilde{\mathbf{v}} \in L^2(0, T; H_r)$

$$\begin{aligned} & \langle S(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) + \mathcal{A}_{nl}(\mathbf{v}_1) - \mathcal{A}_{nl}(\mathbf{v}_2), \tilde{\mathbf{v}} \rangle \\ & \leq \underbrace{\max \left\{ \sigma_2 \eta, \frac{1}{\mu_1}, \sigma_2 \|\mathbf{v}\|_{L^\infty(\Omega_c)}, c_R, 3\sigma_2 |R| \|f\|_{L^\infty(\Omega_c)} \right\}}_{=:L} \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_{H_r} \|\tilde{\mathbf{v}}\|_{H_r}. \quad \square \end{aligned}$$

4.3.3 Monotonie des Operators $D(t)$

Nun fehlt noch eine Abschätzung nach unten. Dazu wird Bemerkung 4.10 verwendet.

Bemerkung 4.15 (Monotonie von $D(t)$)

Der Operator S ist linear. Es ist also insbesondere nur der nichtlineare Anteil von Interesse. Da dieser aber mit einem Minuszeichen in die Gleichung eingeht, kann er nach unten über die Lipschitz-Stetigkeit abgeschätzt werden. Damit gilt für den Operator $D(t)$

$$\begin{aligned} \langle D(t)(\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}), (\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}) \rangle & \geq \frac{1}{\mu_2} \|\nabla \times (\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}})\|_{L^2(\Omega_c)}^2 + \sigma_1 \kappa \|\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}\|_{L^2(\Omega_c)}^2 \\ & \quad - \sigma_2 \|\mathbf{w}\|_{L^\infty(\Omega_c)} \|\nabla \times (\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}})\|_{L^2(\Omega_c)} \|\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}\|_{L^2(\Omega_c)} \\ & \quad - 3\sigma_2 |R| \|f\|_{L^\infty(\Omega_c)} \|\nabla \times (\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}})\|_{L^2(\Omega_c)} \|\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}\|_{L^2(\Omega_c)} \\ & \quad + \lambda_V \|\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 + \lambda_D \|\mathcal{K}'(\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}})\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 \\ & \geq \left(\frac{1}{\mu_2} - c_k \right) \|\nabla \times (\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}})\|_{L^2(\Omega_c)}^2 + \left(\sigma_1 \kappa - \frac{9\kappa}{2} \right) \|\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}\|_{L^2(\Omega_c)}^2 \\ & \quad + \lambda_V \|\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 + \lambda_D \|\mathcal{K}'(\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}})\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 \\ & \geq \min \left\{ \frac{1}{\mu_2} - c_k, \sigma_1 \kappa - \frac{9\kappa}{2} \right\} \|\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}\|_{H_r}^2 + \lambda_V \|\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 \\ & \quad + \lambda_D \|\mathcal{K}'(\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}})\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2, \end{aligned}$$

wobei c_k so gewählt wird, dass $\frac{1}{\mu_2} - c_k > 0$. \square

Wird die Konstante $C_K(t) := \min \left\{ \frac{1}{\mu_2} - c_k, \sigma_1 \kappa - \frac{9\kappa}{2} \right\} > 0$ definiert, so ergibt sich

$$\langle D(t)(\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}), \mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}} \rangle \geq C_K(t) \|\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}\|_{H_r}^2,$$

indem die Randterme nach unten mit Null abgeschätzt werden. Damit ist der Operator D insbesondere stark monoton.

4.4 Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung des gekoppelten Problems

Als Fazit der vorangegangenen Abschnitte wird hier nun die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung des Problems 4.3 bewiesen. Das Problem hatte folgende Gestalt:

Problem (Wiederholung: Äquivalentes kontinuierliches reduziertes Problem)

Zur Startlösung $\mathbf{u}^0 \in H_r$ finde $\mathbf{u} \in H^1(0, T; H_r)$ so, dass für fast alle $t \in (0, T)$ gilt

$$\mathcal{A}_t \mathbf{u} + \left(\mathcal{A} + \frac{1}{\mu_0} \mathcal{V} + \frac{1}{\mu_0} \mathcal{K} \mathcal{D}^{-1} \mathcal{K}' \right) \mathbf{u} + \mathcal{A}_{nl}(\mathbf{u}) = 0.$$

Folgendes Ergebnis ist die Hauptaussage dieses Abschnittes:

Satz 4.16 (Eindeutige Lösbarkeit des kontinuierlichen Problems)

Das Problem 4.3 besitzt eine eindeutige Lösung.

Beweis:

Nachzuprüfen sind die Voraussetzungen von Satz 4.7. Dass $(H_r, L^2(\Omega_c), H_r^*)$ ein Gelfand-Tripel bildet, ist einfach zu zeigen.

- (a) Die Monotonie von $D(t)$ folgt aus Bemerkung 4.15. Da S linear und beschränkt bzw. $\mathcal{A}_{nl}(t)$ nach Lemma 4.13 Lipschitz-stetig ist, ist $D(t)$ hemistetig (vgl. Bemerkung 4.6).
- (b) Die Koerzitivität von $D(t)$ folgt aus Bemerkung 4.15 ebenso wie die Abschätzung. Dabei wird statt der Lipschitz-Stetigkeit von \mathcal{A}_{nl} die Beschränktheit in der Abschätzung verwendet.
- (c) Die Bedingung folgt aus Bemerkung 4.12.
- (d) Die Bedingung folgt ebenfalls aus Bemerkung 4.12.

Da $F \equiv 0$ und damit die Anforderungen erfüllt, muss \mathbf{u}_0 so gewählt werden, dass $\mathbf{u}_0 \in L^2(\Omega_c)$. Damit kann Satz 4.7 angewendet werden und es gibt genau eine Lösung \mathbf{u} von Problem 4.3. \square

Kapitel 5

Semidiskretisierung im Ort

Life defies our phrases, it is infinitely continuous and subtle and shaded, whilst our verbal terms are discrete, rude and few.

William James (1842 - 1910),
amerikanischer Philosoph

Im vorherigen Kapitel wurde die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung des schwachen, skalierten Problems bewiesen. Um dies nun numerisch zu untersuchen, muss es in Ort und Zeit diskretisiert werden. Dieses Kapitel widmet sich der Diskretisierung im Ort. Es werden Nédélec-Elemente verwendet. Eine Beschreibung dieser findet sich in Abschnitt 5.1. Im folgenden Abschnitt 5.2 wird das zugehörige Galerkin-Problem formuliert und eine Quasioptimalitätsabschätzung bewiesen. Das kontinuierliche Problem 4.3 ist aus zwei Gleichungen durch Invertierung des hypersingulären Randintegraloperators entstanden. Um eine vollständige Diskretisierung im Ort zu erhalten, muss auch die Nebenbedingung diskretisiert werden. Dies geschieht in Abschnitt 5.3. Für das so entstandene Problem wird ebenfalls eine Quasioptimalitätsabschätzung und die Existenz einer eindeutigen Lösung gezeigt.

5.1 Nédélec-Elemente

Finite Elemente sind ein beliebtes Mittel, um partielle Differentialgleichungen zu diskretisieren. Dabei gibt es eine große Anzahl an Varianten. In der Strömungsphysik werden z.B. gerne Lagrange-Elemente verwendet. Für den hier vorliegenden Fall sind Nédélec-Elemente besser geeignet. Nédélec-Elemente sind rotations-konform, das heißt eine Lösung liegt in H_r . Des Weiteren besitzt ein Nédélec-Raum einige Eigenschaften, die auch H_r besitzt. Dazu werde das diskrete DeRham-Diagramm (Abbildung 5.1) betrachtet:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\mathbb{R} & \xrightarrow{id} & H^1(\Omega) & \xrightarrow{\nabla} & H(\text{curl}, \Omega) & \xrightarrow{\nabla \times} & H(\text{div}, \Omega) & \xrightarrow{\nabla \cdot} & L_2(\Omega) & \xrightarrow{0} & \{0\} \\
& & \cup & & \cup & & \cup & & \cup & & \\
\mathbb{R} & \xrightarrow{id} & W_h & \xrightarrow{\nabla} & X_h & \xrightarrow{\nabla \times} & Q_h & \xrightarrow{\nabla \cdot} & S_h & \xrightarrow{0} & \{0\}
\end{array}$$

Abbildung 5.1: Kontinuierliches und diskretes DeRham-Diagramm

Im Kontinuierlichen gilt

$$X_1 \xrightarrow{\chi_1} X_2 \xrightarrow{\chi_2} X_3 \Rightarrow \text{Bild}(\chi_1) = \text{Kern}(\chi_2).$$

Bei geeigneter Wahl der diskreten Räume, gilt dies auch im Diskreten. Dazu werden konforme Finite Element Methoden verwendet. Der Raum X_h der Nédélec-Elemente erfüllt diese Bedingung. Für Q_h wären es Raviart-Thomas-Elemente. Im Folgenden werden Nédélec-Elemente auf Tetraedern und Hexaedern definiert und ein kleiner Abriss über krummlinige Elemente gegeben. Die Ausführungen dieses Abschnittes beruhen auf [Mon03], welches wiederum auf der Arbeit [Néd80] von Nédélec beruht.

5.1.1 Nédélec-Elemente auf Tetraedern

Es gibt zwei Arten von Nédélec-Elementen auf Tetraedern. Die Elemente erster Art benötigen weniger Freiheitsgrade als die Elemente zweiter Art. Dafür haben die letzteren bessere Approximationseigenschaften in der $(L^2(\Omega))^3$ -Norm. Für die Elemente erste Art wird der Raum

$$S_k := \left\{ \mathbf{p} \in (\tilde{P}_k)^3 \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{p} = 0 \right\}$$

eingeführt. Dieser Unterraum der homogenen Polynome vom Grad k in drei Dimensionen, $(\tilde{P}_k)^3$, zusammen mit dem Raum der Polynome mit Grad höchstens $k-1$ in drei Dimensionen, $(P_{k-1})^3$, ergibt den wichtigen Raum

$$R_k := (P_{k-1})^3 \oplus S_k.$$

Dieser Raum tritt bei der folgenden Helmholtz-Zerlegung von Polynomräumen auf. Es gilt (vgl. [Mon03] Lemma 5.27):

$$(P_k)^3 = R_k \oplus \nabla \tilde{P}_{k+1}.$$

Mit \hat{K} soll im Folgenden das Referenz-Element bezeichnet werden. Für jedes K der Triangulierung τ_h existiert eine affine Abbildung $F_k : \hat{K} \rightarrow K$ mit

$$F_K \hat{\mathbf{x}} = B_K \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}_K,$$

wobei B_K eine nichtsinguläre 3x3-Matrix und \mathbf{b}_K ein Vektor sind.

Definition 5.1 (Nédélec-Elemente erster Art auf Tetraedern)

Die Nédélec-Elemente erster Art auf Tetraedern bestehen aus

- dem Referenz-Element $\hat{K} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}_{+,0}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 \leq 1\}$,
- dem Polynomraum $P_{\hat{K}} = R_k$ und
- den Freiheitsgraden auf Kanten \hat{e} mit Tangentialeinheitsvektor $\hat{\tau}$, auf Flächen \hat{f} mit Normaleneinheitsvektor $\hat{\nu}$ und im Inneren von \hat{K} . Es gilt

$$\sum_{\hat{K}} = M_{\hat{e}}(\hat{\mathbf{u}}) \cup M_{\hat{f}}(\hat{\mathbf{u}}) \cup M_{\hat{K}}(\hat{\mathbf{u}})$$

mit den unten angegebenen Freiheitsgraden.

Die Freiheitsgrade für $\hat{\mathbf{u}} \in \left(H^{\frac{1}{2}+\delta}(\hat{K})\right)^3$, $\delta > 0$, mit $\nabla \times \hat{\mathbf{u}} \in (L^p(K))^3$ für ein $p > 2$, sind wohldefiniert und sehen wie folgt aus:

- auf den Kanten:

$$M_{\hat{e}}(\hat{\mathbf{u}}) = \left\{ \int_{\hat{e}} \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\tau} q \, ds \mid \text{für alle } q \in P_{k-1}(\hat{e}) \text{ und alle Kanten } \hat{e} \right\},$$

- auf den Flächen

$$M_{\hat{f}}(\hat{\mathbf{u}}) = \left\{ \frac{1}{\text{vol}_2(\hat{f})} \int_{\hat{f}} \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{q}} \, dA \mid \text{für alle } \hat{\mathbf{q}} \in (P_{k-2}(\hat{f}))^3, \hat{\mathbf{q}} \cdot \hat{\nu} = 0 \right. \\ \left. \text{und alle Flächen } \hat{f} \right\},$$

- im Volumen:

$$M_{\hat{K}}(\hat{\mathbf{u}}) = \left\{ \int_{\hat{K}} \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{q}} \, dV \mid \text{für alle } \hat{\mathbf{q}} \in (P_{k-3}(\hat{K}))^3 \right\}.$$

Eine Abbildung der Elemente erster und zweiter Ordnung findet sich in Abbildung 5.2.

Um die zweite Art der Nédélec-Elemente auf Tetraedern zu beschreiben, werden die Räume

$$D_k := (P_{k-1})^3 \oplus \tilde{P}_{k-1} \mathbf{x} \quad \text{und} \quad D_{k-1}(f) := (P_{k-2}(f))^2 \oplus \tilde{P}_{k-1}(f) \mathbf{x}$$

benötigt.

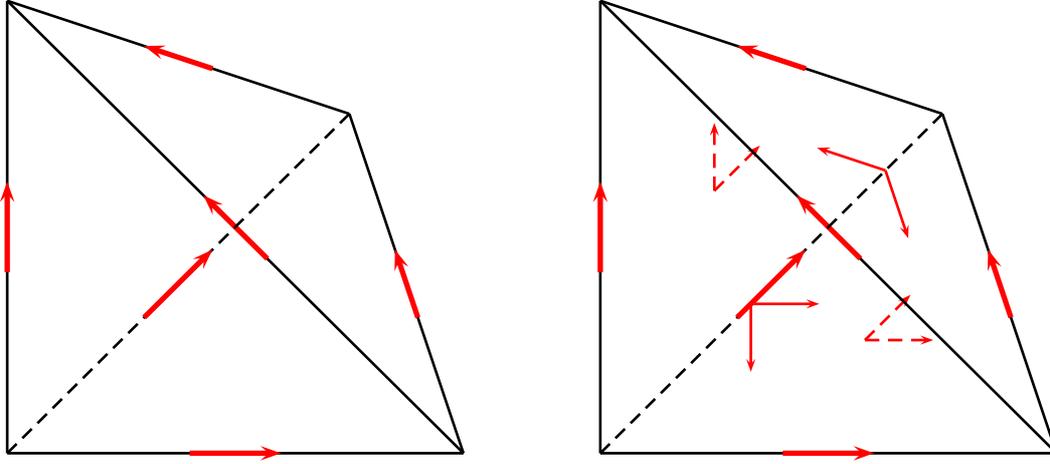


Abbildung 5.2: Freiheitsgrade der Nédélec-Tetraeder-Elemente der Ordnung $k = 1$ und $k = 2$.

Definition 5.2 (Nédélec-Elemente zweiter Art auf Tetraedern)

Die Nédélec-Elemente zweiter Art auf Tetraedern bestehen aus

- dem Referenz-Element $\hat{K} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}_{+,0}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 \leq 1\}$,
- dem Polynomraum $P_{\hat{K}} = (P_k)^3$ und
- den Freiheitsgrade auf Kanten \hat{e} mit Tangentialeinheitsvektor $\hat{\tau}$, auf Flächen \hat{f} mit Normaleneinheitsvektor $\hat{\nu}$ und im Inneren von \hat{K} . Es gilt

$$\sum_{\hat{K}} = M_{\hat{e}}(\hat{u}) \cup M_{\hat{f}}(\hat{u}) \cup M_{\hat{K}}(\hat{u})$$

mit den unten angegebenen Freiheitsgraden.

Die Freiheitsgrade für $\hat{u} \in \left(H^{\frac{1}{2}+\delta}(\hat{K})\right)^3$, $\delta > 0$, mit $\nabla \times \hat{u} \in (L^p(K))^3$ für ein $p > 2$, sind wohldefiniert und sehen wie folgt aus:

- auf den Kanten:

$$M_{\hat{e}}(\hat{u}) = \left\{ \int_{\hat{e}} \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\tau} q \, ds \mid \text{für alle } q \in P_k(\hat{e}) \text{ und alle Kanten } \hat{e} \right\},$$

- auf den Flächen

$$M_{\hat{f}}(\hat{\mathbf{u}}) = \left\{ \int_{\hat{f}} \hat{\mathbf{u}} \times \boldsymbol{\nu} \cdot \hat{\mathbf{q}} \, dA \mid \text{für alle } \hat{\mathbf{q}} \in D_{k-1}(\hat{f}) \text{ und alle Flächen } \hat{f} \right\},$$

- im Volumen:

$$M_{\hat{K}}(\hat{\mathbf{u}}) = \left\{ \int_{\hat{K}} \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{q}} \, dV \mid \text{für alle } \hat{\mathbf{q}} \in D_{k-2}(\hat{K}) \right\}.$$

5.1.2 Nédélec-Elemente auf Hexaedern

Formal gesehen werden für eine natürliche Zahl $k \geq 1$ die rotations-konformen Elemente $(\hat{K}, P_{\hat{K}}, \sum_{\hat{K}})$ folgendermaßen definiert:

Definition 5.3 (Nédélec-Elemente auf Hexaedern)

Die Nédélec-Elemente auf Hexaedern bestehen aus

- dem Referenz-Element $\hat{K} = (0, 1)^3$,
- dem Polynomraum $P_{\hat{K}} = Q_{k-1,k,k} \times Q_{k,k-1,k} \times Q_{k,k,k-1}$ und
- den Freiheitsgrade auf Kanten \hat{e} mit Tangentialeinheitsvektor $\hat{\boldsymbol{\tau}}$, auf Flächen \hat{f} mit Normaleneinheitsvektor $\hat{\boldsymbol{\nu}}$ und im Inneren von \hat{K} . Es gilt

$$\sum_{\hat{K}} = M_{\hat{e}}(\hat{\mathbf{u}}) \cup M_{\hat{f}}(\hat{\mathbf{u}}) \cup M_{\hat{K}}(\hat{\mathbf{u}})$$

mit den unten angegebenen Freiheitsgraden.

Die Freiheitsgrade für $\hat{\mathbf{u}} \in \left(H^{\frac{1}{2}+\delta}(\hat{K}) \right)^3$, $\delta > 0$, mit $\nabla \times \hat{\mathbf{u}} \in (L^p(K))^3$ für ein $p > 2$, sind wohldefiniert und sehen wie folgt aus:

- auf den Kanten:

$$M_{\hat{e}}(\hat{\mathbf{u}}) = \left\{ \int_{\hat{e}} \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}} q \, ds \mid \text{für alle } q \in P_{k-1}(\hat{e}) \text{ und alle Kanten } \hat{e} \right\},$$

- auf den Flächen

$$M_{\hat{f}}(\hat{\mathbf{u}}) = \left\{ \int_{\hat{f}} \hat{\mathbf{u}} \times \hat{\boldsymbol{\nu}} \cdot \hat{\mathbf{q}} \, dA \mid \text{für alle } \hat{\mathbf{q}} \in Q_{k-2,k-1}(\hat{f}) \times Q_{k-1,k-2}(\hat{f}) \right. \\ \left. \text{und alle Flächen } \hat{f} \right\},$$

- im Volumen:

$$M_{\hat{K}}(\hat{\mathbf{u}}) = \left\{ \int_{\hat{K}} \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\mathbf{q}} \, dV \mid \text{für alle } \hat{\mathbf{q}} \in Q_{k-1,k-2,k-2} \times Q_{k-2,k-1,k-2} \times Q_{k-2,k-2,k-1} \right\}.$$

Eine Darstellung der Elemente erster und zweiter Ordnung findet sich in Abbildung 5.3, wobei beim Element zweiter Ordnung nur die Freiheitsgrade in x_2 -Richtung angegeben sind. Der Interpolationsfehler von Hexaeder-Nédélec-Elemente hat die folgende Form (vgl. [Néd80])

Bemerkung 5.4

Sei K ein Element aus der Triangulierung \mathcal{T}_h . Dann gilt

$$\begin{aligned} \|u - \Pi_h u\|_{(L^2(K))^3} &\lesssim h^k |u|_{(H^{1+k}(K))^3} \\ |\nabla \times (u - \Pi_h u)|_{(L^2(K))^3} &\lesssim h^k |u|_{(H^{1+k}(K))^3}. \end{aligned} \quad \square$$

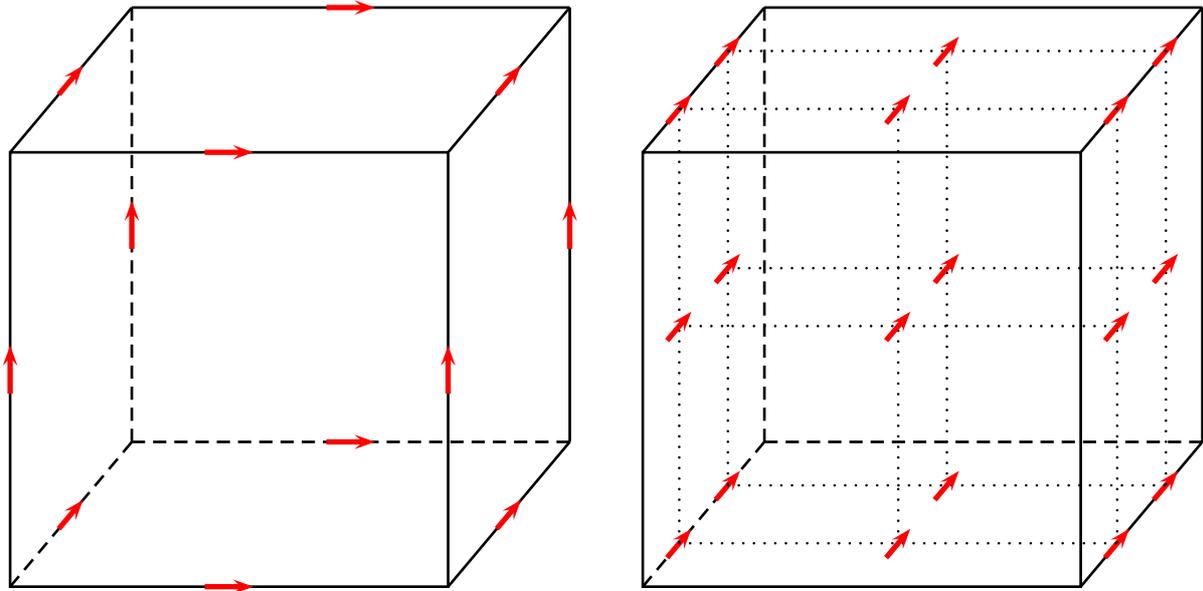


Abbildung 5.3: Freiheitsgrade der Nédélec-Hexaeder-Elemente der Ordnung $k = 1$ und $k = 2$. Im Fall $k = 2$ sind nur die Freiheitsgrade in x_2 -Richtung dargestellt.

5.1.3 Krummlinige Nédélec-Elemente

Eine der ersten Schritte in Richtung von krummlinigen Kanten-Elementen ist wohl die Arbeit [Ber89] von Bernardi. Es werden einige allgemeine Eigenschaften von Elementen bewiesen und auf Nédélec-Elemente angewendet. Hier wird die Methode aus dem Buch [Mon03] von Monk vorgestellt, die auf der Idee der Arbeit [Dub90] von Dubois beruht. Die Ergebnisse sind allerdings nur für lowest-order Elemente und Tetraeder verifiziert.

Es wird angenommen, dass der Rand des Gebietes aus zwei disjunkten zusammenhängenden Komponenten besteht. Γ sei der Rand eines Lipschitz-Gebietes, während Σ C^2 -regulär ist. Der polynomielle Rand interessiert nicht weiter, da dieser exakt trianguliert werden kann. Es geht hier also um den Rand Σ . Zunächst kann folgendes Ergebnis festgehalten werden.

Bemerkung 5.5

Es existiert $\delta > 0$ und eine Umgebung

$$U_\delta := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \text{dist}(x, \Sigma) \leq \delta\}$$

von Σ , so dass jedem Punkt $x \in U_\delta$ eine eindeutige Projektion Px auf Σ zugeordnet werden kann. \square

Mit Hilfe dieser Projektion P soll nun die Funktion F_K (vgl. Abschnitt 5.1.1) so definiert werden, dass das Gebiet exakt trianguliert wird. Dazu sei Ω überdeckt von einer Familie von krummlinigen Gittern \mathcal{T}_h , $h > 0$, die folgende Bedingungen erfüllen:

- (1) Die Elemente $K \in \mathcal{T}_h$ seien disjunkt und besitzen höchstens den Durchmesser h .
- (2) Alle Elemente $K \in \mathcal{T}_h$, die weniger als zwei Punkte mit dem Rand gemeinsam haben, sind Tetraeder, d.h. sie können mit Hilfe einer affin-linearen Funktion aus dem Referenz-Element \hat{K} gebildet werden.
- (3) Elemente, die eine Kante oder eine Seite mit dem Rand Σ gemeinsam haben, werden mit Hilfe der Funktion F_K aus dem Referenz-Element \hat{K} gebildet.
- (4) Die Triangulierung sei regulär.

Durch ein genügend kleines h kann der Fall verhindert werden, in dem zwei Seiten eines Elementes $K \in \mathcal{T}_h$ auf Σ liegen. Dadurch kann ebenfalls sicher gestellt werden, dass die Elemente, die mehr als einen Punkt mit dem Rand gemeinsam haben, in der Umgebung U_δ liegen. Zu untersuchen sind die beiden Fälle, dass ein Element eine Kante bzw. eine Seite mit dem Rand gemeinsam hat.

- (1) Das Element hat eine Kante mit dem Rand gemeinsam. Seien \mathbf{a}_1 und \mathbf{a}_2 die Eckpunkte des Tetraeders auf dem Rand. Mit $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]$ werde die gerade Kante zwischen \mathbf{a}_1 und \mathbf{a}_2 bezeichnet. Dann ist die Kante auf dem Rand definiert durch

$$P([\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2]) = \{\mathbf{x} \in \Sigma \mid \mathbf{x} = P(t\mathbf{a}_1 + (1-t)\mathbf{a}_2) \text{ für } 0 \leq t \leq 1\}.$$

Um die Abbildung $F_K : \hat{K} \rightarrow K$ zu definieren, seien $\hat{\lambda}_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, die baryzentrischen Koordinaten des Referenz-Elementes. Dann ist F_K durch folgende Vorschrift gegeben (vgl. [Mon03], [Dub90])

$$F_K(\hat{\mathbf{x}}) = (1 - \hat{\lambda}_3 - \hat{\lambda}_4)P\left(\frac{\hat{\lambda}_1\mathbf{a}_1 + \hat{\lambda}_2\mathbf{a}_2}{\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2}\right) + \hat{\lambda}_3\mathbf{a}_3 + \hat{\lambda}_4\mathbf{a}_4.$$

- (2) Das Element hat eine Seite mit dem Rand gemeinsam. Seien \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 und \mathbf{a}_3 die Eckpunkte des Tetraeders auf dem Rand. Mit $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]$ werde die gerade Seite, die von \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 und \mathbf{a}_3 aufgespannt wird, bezeichnet. Dann ist die Seite auf dem Rand

$$P([\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]) = \{\mathbf{x} \in \Sigma \mid \mathbf{x} = P(\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \lambda_3 \mathbf{a}_3) \text{ für } 0 \leq \lambda_i, i = 1, 2, 3, \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1\}.$$

Um die Abbildung $F_K : \hat{K} \rightarrow K$ zu definieren, seien $\hat{\lambda}_i, i = 1, 2, 3, 4$, die baryzentrischen Koordinaten des Referenz-Elementes. Dann ist F_K durch folgende Vorschrift gegeben (vgl. [Mon03], [Dub90])

$$F_K(\hat{\mathbf{x}}) = (1 - \hat{\lambda}_4)P\left(\frac{\hat{\lambda}_1 \mathbf{a}_1 + \hat{\lambda}_2 \mathbf{a}_2 + \hat{\lambda}_3 \mathbf{a}_3}{\hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2 + \hat{\lambda}_3}\right) + \hat{\lambda}_4 \mathbf{a}_4.$$

Mit Hilfe dieser Definition werden Überlappungen von Elementen verhindert. Ferner wird dafür gesorgt, dass alle Teile von Σ überdeckt sind. Des Weiteren ist diese Abbildungsvorschrift unabhängig von jenem Tetraeder, welcher diese Seite bzw. Kante enthält.

Analog zu Abschnitt 5.1.1 kann nun der Raum R_1 definiert werden. Es wird hier nur R_1 betrachtet, da sich auf lowest-order Elemente eingeschränkt wurde.

$$R_1(K) := \{\mathbf{v} : K \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid \exists \hat{\mathbf{v}} \in R_1, \text{ so dass } \forall \hat{\mathbf{x}} \in \hat{K} \text{ gilt } \mathbf{v}(F_K(\hat{\mathbf{x}})) = (dF_K(\hat{\mathbf{x}}))^{-T} \hat{\mathbf{v}}(\hat{\mathbf{x}})\},$$

wobei dF_K die Jakobimatrix von F_K ist. Die Freiheitsgrade werden wie auch in Abschnitt 5.1.1 gewählt

$$M_e(\mathbf{v}) = \left\{ \int_e \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau} ds \mid \text{für alle Kanten } \hat{e} \right\}.$$

Dabei ist der Tangentialvektor $\boldsymbol{\tau}$ mit $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ durch folgende Bedingung verknüpft (vgl. [Mon03] (3.80)):

$$\boldsymbol{\tau}(F_K(\mathbf{x})) = \frac{dF_K \hat{\boldsymbol{\tau}}}{|dF_K \hat{\boldsymbol{\tau}}|}(\mathbf{x}).$$

Mit diesen Definitionen ist das Element $(K, M_e, R_1(K))$ unisolvent und H_r -konform. Des Weiteren ergibt sich folgendes Approximationsresultat (vgl. [Dub90] Theorem 3.2.)

Lemma 5.6

Das Gitter sei regulär und quasiuniform. r_h sei der Interpolationsoperator von H_r in den Raum

$$W_h(\Omega) := \{\mathbf{v} \in H_r \mid \mathbf{v}|_K \in R_1(K) \text{ für alle } K \in \mathcal{T}_h\}.$$

Dann gilt für $\mathbf{v} \in W_r^2(\Omega) := \{\mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^3 \mid \nabla \times \mathbf{v} \in (H^1(\Omega))^3\}$ die Abschätzung

$$\|\mathbf{v} - r_h \mathbf{v}\|_{H_r} \leq ch \left(\|\mathbf{v}\|_{(H^1(\Omega))^3} + \|\nabla \times \mathbf{v}\|_{(H^1(\Omega))^3} \right).$$

5.2 Galerkin-Formulierung

In diesem Abschnitt wird die Galerkin-Formulierung des kontinuierlichen Problems 4.3

Problem (Wiederholung: Äquivalentes kontinuierliches reduziertes Problem)
 Zur Startlösung $\mathbf{u}^0 \in H_r$ finde $\mathbf{u} \in H^1(0, T; H_r)$ so, dass für fast alle $t \in (0, T)$ gilt

$$\mathcal{A}_t \mathbf{u} + S\mathbf{u} + \mathcal{A}_{nl}\mathbf{u} = 0.$$

mit dem Operator

$$S := \mathcal{A} + \frac{1}{\mu_0} \mathcal{V} + \frac{1}{\mu_0} \mathcal{K} \mathcal{D}^{-1} \mathcal{K}'$$

betrachtet. Nach Bemerkung 4.15 ist $\mathcal{A} + \mathcal{A}_{nl}$ stark monoton.

$$\begin{aligned} \langle S(\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}) + \mathcal{A}_{nl}\mathbf{v} - \mathcal{A}_{nl}\tilde{\mathbf{v}}, \mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}} \rangle &\geq \lambda_V \|\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 + \lambda_D \|\mathcal{K}'(\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}})\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 \\ &+ \underbrace{\min \left\{ \frac{1}{\mu_2} - c_k, \sigma_2 \kappa - \sigma_2^2 \left(\frac{\|\mathbf{w}\|_{L^\infty(\Omega_c)}^2}{2c_k} + \frac{9|R|\|f\|_{L^\infty(\Omega_c)}^2}{2c_k} \right) \right\}}_{=: c_{sm}} \|\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}\|_{H_r}^2. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Des Weiteren ist $\mathcal{A} + \mathcal{A}_{nl}$ Lipschitz-stetig (vgl. Bemerkung 4.14). Da diese Eigenschaften auch für den diskreten Operator zutreffen, können diese Eigenschaften für den Existenz- und Eindeutigkeitsbeweis verwendet werden, der sich im nächsten Abschnitt befindet. In diesem Abschnitt wird eine Quasioptimalitätsabschätzung für den Fehler der Galerkin-Formulierung gezeigt.

Für das innere Potential wird der Raum X_h verwendet, der durch Nédélec-Elemente der Ordnung k definiert wird. Das Galerkin Variationsproblem von Problem 4.3 ist dann

Problem 5.7 (Galerkin Variationsproblem)

Zur Startlösung $\mathbf{u}^0 \in X_h$ finde $\mathbf{u}_h \in H^1(0, T; X_h)$ so, dass für fast alle $t \in (0, T)$ und alle $\mathbf{v}_h \in X_h$ gilt

$$(\mathcal{A}_t \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + (S\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + (\mathcal{A}_{nl}\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = 0.$$

Es werden zwei Quasioptimalitätsabschätzungen angegeben, wobei zunächst mit dem kontinuierlichen Randoperator begonnen wird. Im nächsten Abschnitt wird die Nebenbedingung diskretisiert und die Ungleichung dementsprechend angepasst.

Lemma 5.8 (Quasioptimalitätsabschätzung)

Für den Fehler zwischen der Lösung von Problem 4.3 und Problem 5.7 gilt

$$\begin{aligned}
& \|(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)(t)\|_{L^2(\Omega_c)}^2 + \frac{c_{sm}}{\sigma_1} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^2(0,T;H_r)}^2 + \frac{2\lambda_V}{\sigma_1} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^2(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c))}^2 \\
& \quad + \frac{2\lambda_D}{\sigma_1} \|\mathcal{K}'(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\|_{L^2(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c))}^2 \\
\leq & 2\frac{\sigma_2}{\sigma_1} \|\xi(0)\|_{L^2(\Omega_c)}^2 + 2\|\eta(t)\|_{L^2(\Omega_c)}^2 + \frac{4\sigma_2^2}{\sigma_1 c_{sm}} \|\partial_t \eta\|_{L^2(0,T;H_r)}^2 + \left(\frac{4L^2}{\sigma_1 c_{sm}} + 2\frac{c_{sm}}{\sigma_1} \right) \|\eta\|_{L^2(0,T;H_r)}^2 \\
& \quad + \frac{2\lambda_V}{\sigma_1} \|\eta\|_{L^2(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c))}^2 + \frac{2\lambda_D}{\sigma_1} \|\mathcal{K}'\eta\|_{L^2(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c))}^2
\end{aligned}$$

für alle $t \in [0, T]$ mit $\xi := \pi_h \mathbf{u} - \mathbf{u}_h$ und $\eta := \mathbf{u} - \pi_h \mathbf{u}$.

Beweis:

Sei $\pi_h : H_r \rightarrow X_h$ eine Interpolante. Die Fehleranteile werden wie folgt definiert: $\xi := \pi_h \mathbf{u} - \mathbf{u}_h$ und $\eta := \mathbf{u} - \pi_h \mathbf{u}$. Aus der diskreten Gleichung ergibt sich für alle $\mathbf{v}_h \in X_h$

$$\left(\sigma \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h), \mathbf{v}_h \right) + \langle S(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) + \mathcal{A}_{nl} \mathbf{u} - \mathcal{A}_{nl} \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \rangle = 0.$$

Als Testfunktion wird ξ eingesetzt und es wird eine Nullergänzung gemacht. Es ergibt sich

$$(\sigma \partial_t \xi, \xi) + \langle S\xi + \mathcal{A}_{nl}(\pi_h \mathbf{u}) - \mathcal{A}_{nl} \mathbf{u}_h, \xi \rangle = -(\sigma \partial_t \eta, \xi) - \langle S\eta + \mathcal{A}_{nl} \mathbf{u} - \mathcal{A}_{nl}(\pi_h \mathbf{u}), \xi \rangle.$$

Auf Grund der starken Monotonie (5.1) und der Lipschitz-Stetigkeit von $S + \mathcal{A}_{nl}$ (Bemerkung 4.14) folgt

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\sqrt{\sigma} \xi(t)\|_{L^2(\Omega_c)}^2 + c_{sm} \|\xi(t)\|_{H_r}^2 + \lambda_V \|\xi(t)\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 + \lambda_D \|\mathcal{K}' \xi(t)\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 \\
& \leq \sigma_2 \|\partial_t \eta(t)\|_{H_r^*} \|\xi(t)\|_{H_r} + L \|\eta(t)\|_{H_r} \|\xi(t)\|_{H_r} \\
& \leq \frac{\sigma_2^2}{c_{sm}} \|\partial_t \eta(t)\|_{H_r^*}^2 + \frac{c_{sm}}{4} \|\xi(t)\|_{H_r}^2 + \frac{L^2}{c_{sm}} \|\eta(t)\|_{H_r}^2 + \frac{c_{sm}}{4} \|\xi(t)\|_{H_r}^2.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \|\sqrt{\sigma} \xi(t)\|_{L^2(\Omega_c)}^2 + c_{sm} \|\xi(t)\|_{H_r}^2 + 2\lambda_V \|\xi(t)\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 + 2\lambda_D \|\mathcal{K}' \xi(t)\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 \\
& \leq \frac{2\sigma_2^2}{c_{sm}} \|\partial_t \eta(t)\|_{H_r^*}^2 + \frac{2L^2}{c_{sm}} \|\eta(t)\|_{H_r}^2.
\end{aligned}$$

Integration über $[0, t]$ liefert

$$\begin{aligned}
& \sigma_1 \|\xi(t)\|_{L^2(\Omega_c)}^2 + c_{sm} \|\xi\|_{L^2(0,T;H_r)}^2 + 2\lambda_V \|\xi\|_{L^2(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c))}^2 + 2\lambda_D \|\mathcal{K}' \xi\|_{L^2(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c))}^2 \\
& \leq \sigma_2 \|\xi(0)\|_{L^2(\Omega_c)}^2 + \frac{2\sigma_2^2}{c_{sm}} \|\partial_t \eta\|_{L^2(0,T;H_r)}^2 + \frac{2L^2}{c_{sm}} \|\eta\|_{L^2(0,T;H_r)}^2.
\end{aligned}$$

Wird die Dreiecksungleichung auf den Fehler $\mathbf{u} - \mathbf{u}_h$ angewendet, so kann daraus die obige Behauptung abgeleitet werden. \square

5.3 Diskretisierung der Nebenbedingung

Wie bereits erwähnt muss die Nebenbedingung diskretisiert werden. Dies geschieht in diesem letzten Abschnitt. Die Existenz einer eindeutigen Lösung des semidiskreten Problems wird untersucht und eine Quasioptimalitätsabschätzung analog zum letzten Abschnitt bewiesen.

5.3.1 Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung

Es soll eine Quasioptimalitätsabschätzung für die Lösung des approximierten diskreten Operators hergeleitet werden. Dafür wird zunächst der approximierte Operator S_h definiert und eine Abschätzung für den Fehler $S - S_h$ hergeleitet. Der erste Schritt besteht darin, die Nebenbedingungen zu diskretisieren. Im kontinuierlichen Fall besäße sie die Form

$$\langle \mathcal{D}\Phi, \psi \rangle = \langle \mathcal{K}'\psi, \mathbf{u} \rangle \quad \forall \psi \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c).$$

Die Randfunktionen werden im Raum $W_h \subset H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)$ gesucht, wobei W_h aus den nodalen Elementen der Ordnung k auf dem Rand besteht. Es wird $\Phi_h \in W_h$ gesucht, sodass

$$\langle \mathcal{D}\Phi_h, \psi_h \rangle = \langle \mathcal{K}'\psi_h, \mathbf{u} \rangle \quad \forall \psi_h \in W_h. \quad (5.2)$$

Um dies kenntlich zu machen, wird $\mathcal{D}_h := \mathcal{D}$ und $\mathcal{K}'_h := \mathcal{K}'$ gesetzt, falls die diskreten Nebenbedingungen verwendet werden. Damit wird der neue Lösungsoperator $S_h : H_r \rightarrow H_r^*$ durch

$$\langle S_h \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle := a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \frac{1}{\mu_0} \langle (\mathcal{V} + \mathcal{K}\mathcal{D}_h^{-1}\mathcal{K}'_h) \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in H_r$$

definiert. Es ergibt sich das folgende approximierte Problem.

Problem 5.9 (Approximiertes Problem, semidiskret im Ort)

Zur Startlösung $\mathbf{u}^0 \in X_h$ finde für alle $t \in [0, T]$ ein $\tilde{\mathbf{u}}_h \in H^1(0, T; X_h)$ so, dass für alle $\mathbf{v}_h \in X_h$ gilt

$$\langle (S_h + \mathcal{A}_{nl} + \mathcal{A}_t) \tilde{\mathbf{u}}_h, \mathbf{v}_h \rangle = 0.$$

Als Erstes muss die Existenz einer eindeutigen Lösung dieses Problems untersucht werden. Im zweiten Schritt wird eine Fehlerabschätzung für den Fehler zur Lösung des kontinuierlichen Problems hergeleitet werden. Die Existenz einer eindeutigen Lösung folgt aus dem Hauptsatz über maximal monotone Operatoren (vgl. [Zei90] Theorem 31.A), der 1967 von Komura bewiesen wurde.

Satz 5.10 (Hauptsatz über maximal monotone Operatoren)

Sei $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ ein Operator auf dem reellen Hilbert-Raum H mit folgenden Eigenschaften:

- (a) A ist monoton.
- (b) $\text{Bild}(I + A) = H$.

Dann existiert für jedes $\mathbf{u}_0 \in D(A)$ genau eine stetige Funktion $\mathbf{u} : [0, \infty) \rightarrow H$, so dass für alle $t \in [0, \infty)$ gilt

$$\begin{aligned}\mathbf{u}'(t) + A\mathbf{u}(t) &= 0 \\ \mathbf{u}(0) &= \mathbf{u}_0,\end{aligned}$$

wobei die Ableitung $\mathbf{u}'(t)$ im Sinne von $\frac{1}{h}(\mathbf{u}(t+h) - \mathbf{u}(t)) \rightarrow \mathbf{u}'(t)$ in H gemeint ist.

Bemerkung 5.11

Die beiden Bedingungen (a) und (b) aus Satz 5.10 sind äquivalent dazu, dass A maximal monoton ist, d.h.

$$(b - A\mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v}) \geq 0 \quad \forall \mathbf{v} \in D(A)$$

(vgl. [Zei90] Proposition 31.5). Des Weiteren gilt nach [Zei90] Proposition 32.7, dass ein monotoner, hemistetiger Operator auf einem reellen reflexiven Banach-Raum maximal monoton ist. \square

Damit kann auch die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung des hier betrachteten Problems gezeigt werden.

Satz 5.12 (Eindeutige Lösbarkeit des approximierten Problems)

Das Problem 5.9 besitzt eine eindeutige Lösung.

Beweis:

Der Raum X_h ist als abgeschlossener Unterraum des Hilbert-Raumes H_r wieder ein Hilbert-Raum. Für den Operator A in Satz 5.10 wird der Operator $S_h + \mathcal{A}_{nl}$ gewählt. Dieser ist koerzitiv und Lipschitz-stetig. Damit erfüllt er nach Bemerkung 5.11 die Voraussetzungen von Satz 5.10. \square

5.3.2 Quasioptimalitätsabschätzung

Zunächst wird der Fehler betrachtet, der durch die Diskretisierung der Nebenbedingung entsteht. Es zeigt sich, dass (vgl. Ausführungen zum stationären Fall in [KS02]) für die Differenz vom kontinuierlichen und dem approximierten Operator eine von der Außenraumlösung abhängige Abschätzung gilt.

Lemma 5.13

Für alle $\mathbf{v} \in H_r$ gilt

$$\|(S - S_h) \mathbf{v}\|_{H_r^*} \leq c \inf_{\psi_h \in W_h} \|\Phi_{\mathbf{v}} - \psi_h\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)} \quad \text{mit } \Phi_{\mathbf{v}} = \mathcal{D}^{-1} \mathcal{K}' \mathbf{v}. \quad (5.3)$$

Beweis:

Analog zu $\Phi_{\mathbf{v}}$ wird $\Phi_{\mathbf{v},h} := \mathcal{D}_h^{-1} \mathcal{K}'_h \mathbf{v}$ definiert. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \|(S - S_h) \mathbf{v}\|_{H_r^*} &= \sup_{0 \neq \tilde{\mathbf{v}} \in H_r} \frac{\langle (S - S_h) \mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}} \rangle}{\|\tilde{\mathbf{v}}\|_{H_r}} \\ &= \sup_{0 \neq \tilde{\mathbf{v}} \in H_r} \frac{\frac{1}{\mu_0} \langle (\mathcal{K} \mathcal{D}^{-1} \mathcal{K}') \mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}} \rangle - \frac{1}{\mu_0} \langle (\mathcal{K} \mathcal{D}_h^{-1} \mathcal{K}'_h) \mathbf{v}, \tilde{\mathbf{v}} \rangle}{\|\tilde{\mathbf{v}}\|_{H_r}} \\ &\leq c \|\Phi_{\mathbf{v}} - \Phi_{\mathbf{v},h}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)} \leq \underbrace{\tilde{c}}_{=: c_{OA}} \inf_{\psi_h \in W_h} \|\Phi_{\mathbf{v}} - \psi_h\|_{H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}. \quad \square \end{aligned}$$

Analog zu Lemma 5.8 kann eine Quasioptimalitätsabschätzung gezeigt werden.

Satz 5.14 (Quasioptimalitätsabschätzung für den approximierten Operator)

Für den Fehler zwischen der Lösung von Problem 4.3 und Problem 5.9 gelten die Aussagen für alle $t \in [0, T]$

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{u}(t) - \tilde{\mathbf{u}}_h(t)\|_{L^2(\Omega_c)}^2 + \frac{c_{sm}}{\sigma_1} \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h\|_{L^2(0,T;H_r)}^2 + \frac{\lambda_V}{\sigma_1} \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h\|_{L^2(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c))}^2 \\ &\quad + \frac{\lambda_D}{\sigma_1} \|\mathcal{K}'(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h)\|_{L^2(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c))}^2 \\ &\leq \left(\frac{2\sigma_2}{\sigma_1} + \frac{2\sigma_2 c_z}{\sigma_1 c_{sm}} \right) \|\pi_h \mathbf{u}(0) - \mathbf{u}_h(0)\|_{L^2(\Omega_c)}^2 + \left(2 + \frac{2c_z}{c_{sm}} \right) \|\mathbf{u}(t) - \pi_h \mathbf{u}(t)\|_{L^2(\Omega_c)}^2 \\ &\quad + \left(\frac{4\sigma_2^2}{\sigma_1 c_{sm}} + \frac{4\sigma_2^2 c_z}{\sigma_1^2 c_{sm}} \right) \|\partial_t (\mathbf{u} - \pi_h \mathbf{u})\|_{L^2(0,T;H_r)}^2 + \frac{2c_{OA}^2}{\sigma_1} \inf_{\psi_h \in W_h} \|\Phi - \psi_h\|_{L^2(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c))}^2 \\ &\quad + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \|\mathbf{u}_h(0) - \tilde{\mathbf{u}}_h(0)\|_{L^2(\Omega_c)}^2 + \left(\left(\frac{4L^2}{\sigma_1 c_{sm}} + 2 \frac{c_{sm}}{\sigma_1} \right) \left(1 + \frac{c_z}{c_{sm}} \right) \right) \|\mathbf{u} - \pi_h \mathbf{u}\|_{L^2(0,T;H_r)}^2 \\ &\quad + \left(\frac{2\lambda_V}{\sigma_1} + \frac{2\lambda_V c_z}{\sigma_1^2} \right) \|\mathbf{u} - \pi_h \mathbf{u}\|_{L^2(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c))}^2 \\ &\quad + \left(\frac{2\lambda_D}{\sigma_1} + \frac{2\lambda_D c_z}{\sigma_1^2} \right) \|\mathcal{K}'(\mathbf{u} - \pi_h \mathbf{u})\|_{L^2(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c))}^2. \end{aligned}$$

Beweis:

Als erstes wird der Fehler zwischen \mathbf{u}_h und $\tilde{\mathbf{u}}_h$ betrachtet. Mit Lemma 5.8 ergibt sich somit eine Abschätzung für $\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h$. Wird von der Gleichung für \mathbf{u}_h die diskrete Gleichung für $\tilde{\mathbf{u}}_h$ abgezogen, so ergibt sich für alle $\mathbf{v}_h \in X_h$

$$\left(\sigma \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{u}_h - \tilde{\mathbf{u}}_h), \mathbf{v}_h \right) + \langle (S + \mathcal{A}_{nl}) \mathbf{u}_h - (S_h + \mathcal{A}_{nl}) \tilde{\mathbf{u}}_h, \mathbf{v}_h \rangle = 0.$$

Als Testfunktion wird $\chi := \mathbf{u}_h - \tilde{\mathbf{u}}_h$ eingesetzt und es wird eine Nullergänzung gemacht. Es ergibt sich

$$0 = (\sigma \partial_t \chi, \chi) + \langle (S - S_h) \mathbf{u}_h + S_h (\mathbf{u}_h - \tilde{\mathbf{u}}_h) + \mathcal{A}_{nl} \mathbf{u}_h - \mathcal{A}_{nl} \tilde{\mathbf{u}}_h, \chi \rangle.$$

Auf Grund der starken Monotonie von $S_h + \mathcal{A}_{nl}$ folgt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\sqrt{\sigma} \chi\|_{L^2(\Omega_c)}^2 + c_{sm} \|\chi\|_{H_r}^2 + \lambda_V \|\chi\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 + \lambda_D \|\mathcal{K}' \chi\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 \\ \leq (\sigma \partial_t \chi, \chi) + \langle S \chi, \chi \rangle + \langle \mathcal{A}_{nl} \mathbf{u}_h - \mathcal{A}_{nl} \tilde{\mathbf{u}}_h, \chi \rangle = - \langle (S - S_h) \mathbf{u}_h, \chi \rangle \\ \leq \|(S - S_h) \mathbf{u}_h\|_{H_r^*} \|\chi\|_{H_r} \leq \frac{1}{2c_{sm}} \|(S - S_h) \mathbf{u}_h\|_{H_r^*}^2 + \frac{c_{sm}}{2} \|\chi\|_{H_r}^2. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|\sqrt{\sigma} \chi(t)\|_{L^2(\Omega_c)}^2 + c_{sm} \|\chi(t)\|_{H_r}^2 + 2\lambda_V \|\chi(t)\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 + 2\lambda_D \|\mathcal{K}' \chi(t)\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 \\ \leq \frac{1}{c_{sm}} \|(S - S_h) \mathbf{u}_h(t)\|_{H_r^*}^2. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Integration über $[0, t]$ und Lemma 5.13 liefern

$$\begin{aligned} \sigma_1 \|\chi(t)\|_{L^2(\Omega_c)}^2 + c_{sm} \|\chi\|_{L^2(0,T;H_r)}^2 + \frac{2\lambda_V}{\sigma_1} \|\chi\|_{L^2(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c))}^2 + \frac{2\lambda_D}{\sigma_1} \|\mathcal{K}'(\chi)\|_{L^2(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c))}^2 \\ \leq \sigma_2 \|\chi(0)\|_{L^2(\Omega_c)}^2 + \frac{1}{c_{sm}} \|(S - S_h) \mathbf{u}_h\|_{L^2(0,T;H_r^*)}^2 \\ \leq \sigma_2 \|\chi(0)\|_{L^2(\Omega_c)}^2 + \frac{2}{c_{sm}} \|(S - S_h) \mathbf{u}\|_{L^2(0,T;H_r^*)}^2 + \frac{2}{c_{sm}} \|(S - S_h) (\mathbf{u}_h - \mathbf{u})\|_{L^2(0,T;H_r^*)}^2 \\ \leq \sigma_2 \|\chi(0)\|_{L^2(\Omega_c)}^2 + \frac{2c_{OA}^2}{c_{sm}} \inf_{\psi_h \in W_h} \|\Phi - \psi_h\|_{L^2(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c))}^2 + \underbrace{\frac{2\|S - S_h\|}{c_{sm}}}_{=: c_z} \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}\|_{L^2(0,T;H_r)}^2. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
& \|\mathbf{u}(t) - \tilde{\mathbf{u}}_h(t)\|_{L^2(\Omega_c)}^2 + \frac{c_{sm}}{\sigma_1} \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h\|_{L^2(0,T;H_r)}^2 + \frac{2\lambda_V}{\sigma_1} \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h\|_{L^2(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c))}^2 \\
& \quad + \frac{2\lambda_D}{\sigma_1} \|\mathcal{K}'(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h)\|_{L^2(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c))}^2 \\
& \leq \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h(t)\|_{L^2(\Omega_c)}^2 + \frac{c_{sm}}{\sigma_1} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^2(0,T;H_r)}^2 + \frac{2\lambda_V}{\sigma_1} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^2(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c))}^2 \\
& \quad + \frac{2\lambda_D}{\sigma_1} \|\mathcal{K}'(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\|_{L^2(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c))}^2 + \|\mathbf{u}_h(t) - \tilde{\mathbf{u}}_h(t)\|_{L^2(\Omega_c)}^2 + \frac{c_{sm}}{\sigma_1} \|\mathbf{u}_h - \tilde{\mathbf{u}}_h\|_{L^2(0,T;H_r)}^2 \\
& \quad + \frac{2\lambda_V}{\sigma_1} \|\mathbf{u}_h - \tilde{\mathbf{u}}_h\|_{L^2(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c))}^2 + \frac{2\lambda_D}{\sigma_1} \|\mathcal{K}'(\mathbf{u}_h - \tilde{\mathbf{u}}_h)\|_{L^2(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c))}^2.
\end{aligned}$$

Mit den Abschätzungen der letzten Seite für $\chi = \mathbf{u}_h - \tilde{\mathbf{u}}_h$ folgt

$$\begin{aligned}
& \|\mathbf{u}(t) - \tilde{\mathbf{u}}_h(t)\|_{L^2(\Omega_c)}^2 + \frac{c_{sm}}{\sigma_1} \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h\|_{L^2(0,T;H_r)}^2 + \frac{2\lambda_V}{\sigma_1} \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h\|_{L^2(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c))}^2 \\
& \quad + \frac{2\lambda_D}{\sigma_1} \|\mathcal{K}'(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h)\|_{L^2(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c))}^2 \\
& \leq \|\mathbf{u}(t) - \mathbf{u}_h(t)\|_{L^2(\Omega_c)}^2 + \frac{c_{sm}}{\sigma_1} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^2(0,T;H_r)}^2 + \frac{2\lambda_V}{\sigma_1} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{L^2(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c))}^2 \\
& \quad + \frac{2\lambda_D}{\sigma_1} \|\mathcal{K}'(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)\|_{L^2(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c))}^2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \|\mathbf{u}_h(0) - \tilde{\mathbf{u}}_h(0)\|_{L^2(\Omega_c)}^2 \\
& \quad + \frac{2c_{OA}^2}{\sigma_1 c_{sm}} \inf_{\psi_h \in W_h} \|\Phi - \psi_h\|_{L^2(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c))}^2 + \frac{c_z}{\sigma_1} \|\mathbf{u}_h - \mathbf{u}\|_{L^2(0,T;H_r)}^2.
\end{aligned}$$

Aus der Quasioptimalitätsabschätzung (vgl. Lemma 5.8) für das Galerkin-Problem ergibt sich

$$\begin{aligned}
& \|\mathbf{u}(t) - \tilde{\mathbf{u}}_h(t)\|_{L^2(\Omega_c)}^2 + \frac{c_{sm}}{\sigma_1} \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h\|_{L^2(0,T;H_r)}^2 + \frac{\lambda_V}{\sigma_1} \|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h\|_{L^2(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c))}^2 \\
& \quad + \frac{\lambda_D}{\sigma_1} \|\mathcal{K}'(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_h)\|_{L^2(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c))}^2 \\
& \leq \left(\frac{2\sigma_2}{\sigma_1} + \frac{2\sigma_2 c_z}{\sigma_1 c_{sm}} \right) \|\pi_h \mathbf{u}(0) - \mathbf{u}_h(0)\|_{L^2(\Omega_c)}^2 + \left(2 + \frac{2c_z}{c_{sm}} \right) \|\mathbf{u}(t) - \pi_h \mathbf{u}(t)\|_{L^2(\Omega_c)}^2 \\
& \quad + \left(\frac{4\sigma_2^2}{\sigma_1 c_{sm}} + \frac{4\sigma_2^2 c_z}{\sigma_1^2 c_{sm}} \right) \|\partial_t(\mathbf{u} - \pi_h \mathbf{u})\|_{L^2(0,T;H_r)}^2 + \frac{2c_{OA}^2}{\sigma_1} \inf_{\psi_h \in W_h} \|\Phi - \psi_h\|_{L^2(0,T;H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c))}^2 \\
& \quad + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \|\mathbf{u}_h(0) - \tilde{\mathbf{u}}_h(0)\|_{L^2(\Omega_c)}^2 + \left(\left(\frac{4L^2}{\sigma_1 c_{sm}} + 2\frac{c_{sm}}{\sigma_1} \right) \left(1 + \frac{c_z}{c_{sm}} \right) \right) \|\mathbf{u} - \pi_h \mathbf{u}\|_{L^2(0,T;H_r)}^2 \\
& \quad + \left(\frac{2\lambda_V}{\sigma_1} + \frac{2\lambda_V c_z}{\sigma_1^2} \right) \|\mathbf{u} - \pi_h \mathbf{u}\|_{L^2(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c))}^2 \\
& \quad + \left(\frac{2\lambda_D}{\sigma_1} + \frac{2\lambda_D c_z}{\sigma_1^2} \right) \|\mathcal{K}'(\mathbf{u} - \pi_h \mathbf{u})\|_{L^2(0,T;H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c))}^2.
\end{aligned}$$

□

Kapitel 6

Vollständige Diskretisierung

Ich betrachte es aber als durchaus möglich, dass die Physik nicht auf dem Feldbegriff begründet werden kann, d.h. auf kontinuierlichen Gebilden. Dann bleibt von meinem ganzen Luftschloss inklusive Gravitationstheorie nichts bestehen.

Albert Einstein (1879-1955),
theoretischer Physiker

Im vorherigen Kapitel wurde das Problem im Ort diskretisiert. In diesem Kapitel geht es um die zeitliche Diskretisierung. Dazu wird das implizite Euler-Verfahren verwendet (Abschnitt 6.1). Anschließend wird in Abschnitt 6.2 die Wohldefiniertheit des vollständig diskretisierten Problems bewiesen. Am Ende dieses Kapitels wird in 6.3 ein Projektor P_h zwischen dem kontinuierlichen und dem diskreten Problem definiert. Mit seiner Hilfe kann ein Konvergenzresultat gezeigt werden. Falls in diesem Kapitel Normen ohne Indizes vorkommen, so handelt es sich um die L^2 -Norm.

6.1 Diskretisierung in der Zeit

Der erste Abschnitt liefert die Grundlagen für den Existenz- und Eindeutigkeitsbeweis und die Konvergenzaussage, die in den folgenden beiden Abschnitten behandelt werden. Zunächst wird die verwendete Zeitdiskretisierung beschrieben. Anschließend wird eine diskrete Gronwall-Ungleichung bewiesen.

Ausgangspunkt der Untersuchungen ist das semidiskrete Problem 5.9:

Problem (Wiederholung: Approximiertes Problem, semidiskret im Ort)

Finde für alle $t \in [0, T]$ ein $\tilde{\mathbf{u}}_h \in X_h$ so, dass für alle $\mathbf{v}_h \in X_h$ gilt

$$\langle (S_h + \mathcal{A}_{nl} + \mathcal{A}_t) \tilde{\mathbf{u}}_h, \mathbf{v}_h \rangle = 0.$$

6.1.1 Implizites Euler-Verfahren

Das semidiskrete Problem wird mittels implizitem Euler Verfahren diskretisiert. Im Intervall $[0, T]$ werden M Stützstellen t_i und die Intervalllängen $\tau_n = t_n - t_{n-1}$ von $I_n = [t_{n-1}, t_n]$ definiert. Das Maximum aller τ_n wird mit τ_{max} bezeichnet. Das vektorielle Potential des Magnetfeldes zum Zeitpunkt t_n wird mit \mathbf{u}^n bezeichnet, d.h. $\mathbf{u}^n(\cdot) := \mathbf{u}(\cdot, t_n)$. Es wird angenommen, dass vor dem Zeitpunkt $t = 0$ ein stationärer Zustand herrscht, d.h. $\mathbf{u}^{-n} = \mathbf{u}^0$ für alle natürlichen Zahlen n . Des Weiteren werden der Differenzenquotient mit

$$\Delta_{\tau_n} \mathbf{u}^n := \frac{\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}}{\tau_n}$$

und der zeitliche Mittelwert mit

$$\bar{\mathbf{u}}^n := \frac{1}{\tau_n} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \mathbf{u}(\cdot, s) ds$$

bezeichnet. Für die anderen auftretenden Größen gelten die Bezeichnungen analog. Das so diskretisierte Problem ist nichtlinear. Die Existenz einer diskreten Lösung wird im nächsten Abschnitt gezeigt. Die neuen Operatoren seien

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}^n \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &:= (\sigma \kappa \mathbf{u}, \mathbf{v}) + \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{u}, \nabla \times \mathbf{v} \right) - (\sigma \mathbf{w}^n \times (\nabla \times \mathbf{u}), \mathbf{v}), \\ \langle \mathcal{A}_{nl}^n \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle &:= -R \left(\sigma \frac{f^n}{1 + s |\nabla \times \mathbf{u}^n|^2} \nabla \times \mathbf{u}, \mathbf{v} \right). \end{aligned}$$

Wie in (5.2) wird die Nebenbedingung diskretisiert. Allerdings ist das Außenraumproblem nicht explizit zeitabhängig. Der Operator S_h^n ergibt sich durch

$$\langle S_h^n \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle := \left(\frac{1}{\tau_n} \mathbf{u}, \mathbf{v} \right) + \langle \mathcal{A}^n \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \frac{1}{\mu_0} \langle (\mathcal{V} + \mathcal{K} \mathcal{D}_h^{-1} \mathcal{K}'_h) \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v} \in X_h.$$

Das vollständig diskretisierte Problem besitzt dann folgende Gestalt

Problem 6.1 (Vollständig diskretisiertes approximiertes Problem)

Gegeben sei $\tilde{\mathbf{u}}_h^0$. Finde für alle $n = 1, \dots, M$ ein $\tilde{\mathbf{u}}_h^n \in X_h$ so, dass für alle $\mathbf{v}_h \in X_h$ gilt

$$\langle (S_h^n + \mathcal{A}_{nl}^n) \tilde{\mathbf{u}}_h^n, \mathbf{v}_h \rangle = \frac{1}{\tau_n} \langle \tilde{\mathbf{u}}_h^{n-1}, \mathbf{v}_h \rangle.$$

6.1.2 Hilfsmittel

Die folgenden Ausführungen sind Vorbereitungen für die Analysis des diskreten Problems. Dabei wird vereinfachend angenommen, dass das Gebiet polyedrische Ränder besitzt.

Sehr wichtig ist die diskrete Gronwall-Ungleichung. Im Kontinuierlichen konnte eine Funktion g , die durch ein Integral, das die Funktion g enthält, beschränkt ist, unabhängig von g durch die Gronwall-Ungleichung abgeschätzt werden. Diese ist in vielfältigen Varianten in der Literatur zu finden (vgl. z.B. [Pac01] und deren Referenzen). Ein diskretes Analogon bietet die folgende Bemerkung.

Bemerkung 6.2 (Diskrete Gronwall-Ungleichung)

Sei $\{z_n\}_{n=1}^{N(\tau)}$ eine Folge nichtnegativer reeller Zahlen, für die

$$z_n \leq C_1 + C_2 \sum_{j=0}^{n-1} \tau_j z_j \quad \mathbf{n} = 1, \dots, N(\tau)$$

mit von τ_i unabhängigen, positiven Konstanten C_1 und C_2 erfüllt ist, und $\tau_0 \leq \tau_{max}$. Dann gilt

$$z_n \leq (\tau_0 C_2 z_0 + C_1) \prod_{i=1}^{n-1} (1 + \tau_i C_2) \quad \mathbf{n} = 1, \dots, N(\tau). \quad \square$$

Beweis durch vollständige Induktion nach n :

Für den Induktionsanfang wird der Fall $n = 1$ betrachtet.

$$z_1 \leq C_1 + C_2 \tau_0 z_0 = (C_1 + \tau_0 C_2 z_0) \prod_{i=1}^0 (1 + \tau_i C_2).$$

Für den Induktionsschluss gelte zum Einen

$$z_n \leq C_1 + C_2 \sum_{j=0}^{n-1} \tau_j z_j \quad (6.1)$$

für alle $k \leq n$. Zum Anderen folge aus dieser Ungleichung

$$z_n \leq (\tau_0 C_2 z_0 + C_1) \prod_{i=1}^{n-1} (1 + \tau_i C_2). \quad (6.2)$$

Nun sei folgende Ungleichung erfüllt:

$$z_{n+1} \leq C_1 + C_2 \sum_{j=0}^n \tau_j z_j.$$

Durch Abschätzen von z_n durch 6.1 und einige einfache Operationen folgt

$$\begin{aligned} z_{n+1} &\leq C_1 + C_2 \sum_{j=0}^{n-1} \tau_j z_j + C_2 \tau_n z_n \leq C_1 + C_1 C_2 \tau_n + C_2 \sum_{j=0}^{n-1} \tau_j z_j + C_2 \tau_n C_2 \sum_{j=0}^{n-1} \tau_j z_j \\ &= C_1 (1 + \tau_n C_2) + C_2 \sum_{j=0}^{n-1} \tau_j z_j (1 + C_2 \tau_n) = (1 + \tau_n C_2) \left[C_1 + C_2 \sum_{j=0}^{n-1} \tau_j z_j \right]. \end{aligned}$$

Auf Grund der Positivität aller auftretenden Größen ergibt sich mit der Induktionsvoraussetzung (6.1)

$$\frac{z_{n+1}}{(1 + \tau_n C_2)} \leq (\tau_0 C_2 z_0 + C_1) \prod_{i=1}^{n-1} (1 + \tau_i C_2).$$

Nach Multiplikation mit dem Nenner der linken Seite zeigt sich

$$z_{n+1} \leq (1 + \tau_n C_2) (\tau_0 C_2 z_0 + C_1) \prod_{i=1}^{n-1} (1 + \tau_i C_2) = (\tau_0 C_2 z_0 + C_1) \prod_{i=1}^n (1 + \tau_i C_2). \quad \square$$

6.1.3 Annahmen an die Daten

In den folgenden Ausführungen wird $\mathbf{w} \in H^1(0, t; L^\infty(\Omega_c))$ und $f \in H^1(0, T; L^\infty(\Omega_c))$ angenommen. D.h. es existieren Konstanten w_M und f_M , so dass für $(x, t) \in \Omega \times (0, T)$ gilt

$$|\mathbf{w}(x, t)|, |\mathbf{w}_t(x, t)| = \left| \frac{\partial \mathbf{w}(x, t)}{\partial t} \right| \leq w_M, \quad (6.3)$$

$$|f(x, t)|, |f_t(x, t)| = \left| \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} \right| \leq f_M. \quad (6.4)$$

6.2 Existenz und Eindeutigkeit einer diskreten Lösung

In diesem Abschnitt wird die Wohldefiniertheit des vollständig diskretisierten Problems beweisen. Dafür wird der Hauptsatz über stark monotone Operatoren verwendet. Die Abschätzungen der Operatoren erfolgen ähnlich wie im kontinuierlichen und semidiskreten Fall. Nebenbei fällt noch eine Abschätzung für die diskrete Lösung gegen den Anfangswert ab.

Der Hauptsatz über stark monotone Operatoren wurde 1960 von Zantonello bewiesen.

Satz 6.3 (Hauptsatz über stark monotone Operatoren)

Sei X ein reeller Hilbert-Raum. Des Weiteren sei $A : X \rightarrow X^*$ stark monoton und Lipschitz-stetig. Dann existiert für jedes $b \in X^*$ genau eine Lösung $\mathbf{u} \in X$ von

$$A\mathbf{u} = b.$$

Dieses Resultat wird nun verwendet, um die Wohlgestellttheit des vollständig diskretisierten Problems zu beweisen.

Satz 6.4 (Existenz und Eindeutigkeit des vollständig diskretisierten Problems)

Das Problem 6.1 ist eindeutig lösbar, falls τ_n hinreichend klein ist, und es gilt

$$\max_{1 \leq n \leq M} \|\mathbf{u}_h^n\|^2 + \sum_{n=1}^k \tau_n \left(\|\nabla \times \mathbf{u}_h^n\|^2 + c \|\mathbf{u}_h^n\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 + c \|\mathcal{K}'\mathbf{u}_h^n\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 \right) \leq c \|\mathbf{u}_h^0\|^2$$

mit einer von h und τ_{max} unabhängigen Konstante c .

Beweis der Existenz und Eindeutigkeit:

Es wird Satz 6.3 verwendet. Dazu ist nachzuprüfen, ob X_h ein reeller Hilbert-Raum ist und ob der Operator $S_h^n + \mathcal{A}_{nl}^n$ stark monoton und Lipschitz-stetig ist.

X_h ist als abgeschlossener Teilraum von H_r wieder ein Hilbert-Raum. Die beiden anderen Eigenschaften folgen aus Berechnungen, die ähnlich wie im kontinuierlichen Fall verlaufen.

Zunächst wird die starke Monotonie betrachtet

$$\begin{aligned}
& \langle (S_h^n + \mathcal{A}_{nl}^n)(\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}), \mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}} \rangle \\
& \geq \frac{1}{\mu_2} \|\nabla \times (\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}})\|_{L^2(\Omega_c)}^2 - \sigma_2 \|\mathbf{w}^n\|_{L^\infty(\Omega_c)} \|\nabla \times (\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}})\|_{L^2(\Omega_c)} \|\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}\|_{L^2(\Omega_c)} \\
& \quad + \sigma_1 \kappa \|\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}\|_{L^2(\Omega_c)}^2 + \frac{1}{\tau_n} \|\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}\|_{L^2(\Omega_c)}^2 + \lambda_V \|\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 \\
& \quad - 3\sigma_2 |R| \|f^n\|_{L^\infty(\Omega_c)} \|\nabla \times (\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}})\|_{L^2(\Omega_c)} \|\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}\|_{L^2(\Omega_c)} + \lambda_D \|\mathcal{K}'(\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}})\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 \\
& \geq \left(\frac{1}{\mu_2} - c_k\right) \|\nabla \times (\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}})\|_{L^2(\Omega_c)}^2 - 9\frac{\kappa}{2} \|\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}\|_{L^2(\Omega_c)}^2 + \left(\frac{1}{\tau_n} + \sigma_1 \kappa\right) \|\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}\|_{L^2(\Omega_c)}^2 \\
& \quad + \lambda_V \|\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 + \lambda_D \|\mathcal{K}'(\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}})\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 \\
& \geq \min \left\{ \frac{1}{\mu_2} - c_k, \frac{1}{\tau_n} + \sigma_1 \kappa - \frac{9\kappa}{2} \right\} \|\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}\|_{H_r}^2 + \lambda_V \|\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 \\
& \quad + \lambda_D \|\mathcal{K}'(\mathbf{v} - \tilde{\mathbf{v}})\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2.
\end{aligned}$$

Werden c_k und τ_n so klein gewählt, dass $\frac{1}{\mu_2} - c_k$ und $\frac{1}{\tau_n} + \sigma_1 \kappa - \frac{9\kappa}{2}$ positiv sind, so ist der Operator stark monoton. Die Lipschitz-Stetigkeit des Operators $S_h^n + \mathcal{A}_{nl}^n$ ergibt sich wie folgt:

$$\begin{aligned}
& \langle S_h^n(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) + \mathcal{A}_{nl}^n \mathbf{v}_1 - \mathcal{A}_{nl}^n \mathbf{v}_2, \tilde{\mathbf{v}} \rangle \\
& = \left(\frac{1}{\tau_n} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2), \tilde{\mathbf{v}} \right) + (\sigma \kappa (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2), \tilde{\mathbf{v}}) + \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2), \nabla \times \tilde{\mathbf{v}} \right) \\
& \quad - (\sigma \mathbf{w}^n \times (\nabla \times (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)), \tilde{\mathbf{v}}) + \frac{1}{\mu_0} \langle (\mathcal{V} + \mathcal{K} \mathcal{D}_h^{-1} \mathcal{K}'_h) (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2), \tilde{\mathbf{v}} \rangle \\
& \quad - R \left(\sigma \frac{f^n}{1 + s |\nabla \times \mathbf{v}_1|^2} \nabla \times \mathbf{v}_1, \tilde{\mathbf{v}} \right) + R \left(\sigma \frac{f^n}{1 + s |\nabla \times \mathbf{v}_2|^2} \nabla \times \mathbf{v}_2, \tilde{\mathbf{v}} \right) \\
& \leq \max \left\{ \frac{1}{\tau_n}, \sigma_2 \kappa, \frac{1}{\mu_1}, \sigma_2 \|\mathbf{w}^n\|_{L^\infty(\Omega_c)}, c_R, 3\sigma_2 |R| \|f^n\|_{L^\infty(\Omega_c)} \right\} \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_{H_r} \|\tilde{\mathbf{v}}\|_{H_r}. \quad \square
\end{aligned}$$

Beweis der Abschätzung:

Wird die beliebige Testfunktion \mathbf{v}_h in Problem 6.1 durch $\tau_n \mathbf{u}_h^n$ ersetzt, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
& (\sigma \Delta_{\tau_n} \mathbf{u}_h^n, \tau_n \mathbf{u}_h^n) + \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{u}_h^n, \nabla \times \tau_n \mathbf{u}_h^n \right) + \frac{1}{\mu_0} \langle (\mathcal{V} + \mathcal{K} \mathcal{D}_h^{-1} \mathcal{K}'_h) \mathbf{u}_h^n, \tau_n \mathbf{u}_h^n \rangle \\
& = (\sigma \mathbf{w}_h^n \times (\nabla \times \mathbf{u}_h^n), \tau_n \mathbf{u}_h^n) + R \left(\frac{\sigma f_h^n}{1 + s |\nabla \times \mathbf{u}_h^n|^2} \nabla \times \mathbf{u}_h^n, \tau_n \mathbf{u}_h^n \right).
\end{aligned}$$

Ausnutzung der Beschränktheit der rechten Seite und die Koerzitivität des Randterms

ergeben

$$\begin{aligned} & \left\| \sqrt{\sigma} \mathbf{u}_h^n \right\|^2 - (\sigma \mathbf{u}_h^{n-1}, \mathbf{u}_h^n) + \frac{1}{\mu_2} \tau_n \|\nabla \times \mathbf{u}_h^n\|^2 + \tau_n \lambda_V \|\mathbf{u}_h^n\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 + \tau_n \lambda_D \|\mathcal{K}' \mathbf{u}_h^n\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 \\ & \leq \sigma_2 \tau_n \|\mathbf{w}_h^n \times (\nabla \times \mathbf{u}_h^n)\| \|\mathbf{u}_h^n\| + R \sigma_2 \tau_n \left\| \frac{f_h^n}{1 + s |\nabla \times \mathbf{u}_h^n|^2} \nabla \times \mathbf{u}_h^n \right\| \|\mathbf{u}_h^n\|. \end{aligned}$$

Durch Anwendung der Cauchy-Schwarz- und der Young-Ungleichung folgt

$$\begin{aligned} & \left\| \sqrt{\sigma} \mathbf{u}_h^n \right\|^2 - \left\| \sqrt{\sigma} \mathbf{u}_h^{n-1} \right\| \left\| \sqrt{\sigma} \mathbf{u}_h^n \right\| + \frac{1}{\mu_2} \tau_n \|\nabla \times \mathbf{u}_h^n\|^2 + \tau_n \lambda_V \|\mathbf{u}_h^n\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 \\ & \quad + \tau_n \lambda_D \|\mathcal{K}' \mathbf{u}_h^n\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 \\ & \leq \frac{\tau_n}{2\mu_2} \|\nabla \times \mathbf{u}_h^n\|^2 + \tau_n \sigma_2^2 \mu_2 \|\mathbf{w}_h^n\|_{L^\infty(\Omega_c)}^2 \|\mathbf{u}_h^n\|^2 + \tau_n R^2 \sigma_2^2 \mu_2 \|f_h^n\|_{L^\infty(\Omega_c)}^2 \|\mathbf{u}_h^n\|^2. \end{aligned}$$

Der Rotationsterm wird auf die linke Seite gebracht und mittels der Young-Ungleichung kann der zweite Term auf der linken Seite aufgeteilt werden. Multiplikation der Ungleichung mit 2 ergibt Folgendes.

$$\begin{aligned} & \left\| \sqrt{\sigma} \mathbf{u}_h^n \right\|^2 - \left\| \sqrt{\sigma} \mathbf{u}_h^{n-1} \right\|^2 + \frac{\tau_n}{\mu_2} \|\nabla \times \mathbf{u}_h^n\|^2 + 2\tau_n \left(\lambda_V \|\mathbf{u}_h^n\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 + \lambda_D \|\mathcal{K}' \mathbf{u}_h^n\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 \right) \\ & \leq 2 \underbrace{\left(\tau_n \sigma_2^2 \mu_2 \|\mathbf{w}_h^n\|_{L^\infty(\Omega_c)}^2 + \tau_n R^2 \sigma_2^2 \mu_2 \|f_h^n\|_{L^\infty(\Omega_c)}^2 \right)}_{=: C_d \tau_n} \|\mathbf{u}_h^n\|^2. \end{aligned}$$

Wird diese Gleichung für $n = 1, \dots, k$ aufaddiert, so liefert dies:

$$\begin{aligned} & \sigma_1 \|\mathbf{u}_h^k\|^2 + \sum_{n=1}^k \frac{1}{\mu_2} \tau_n \|\nabla \times \mathbf{u}_h^n\|^2 + \sum_{n=1}^k 2\tau_n \lambda_V \|\mathbf{u}_h^n\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 + \sum_{n=1}^k 2\tau_n \lambda_D \|\mathcal{K}' \mathbf{u}_h^n\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 \\ & \leq \sigma_2 \|\mathbf{u}_h^0\|^2 + C_d \sum_{n=1}^k \tau_n \|\mathbf{u}_h^n\|^2. \end{aligned}$$

Dies hat schon Ähnlichkeiten mit der Voraussetzung der diskreten Gronwall-Ungleichung. Auf der linken Seite steht der Term mit größtem Index, k , und auf der rechten Seite werden die Terme mit kleinerem Indizes aufaddiert. Doch bevor die Gronwall-Ungleichung angewendet wird, wird die linke Seite normiert.

$$\begin{aligned} & \underbrace{\min \left\{ \sigma_1 - C_d \tau_n, \frac{1}{\mu_2} \right\}}_{=: c_1} \left[\|\mathbf{u}_h^k\|^2 + \sum_{n=1}^k \tau_n \|\nabla \times \mathbf{u}_h^n\|^2 \right] \\ & \quad + \underbrace{2 \min \{ \lambda_V, \lambda_D \}}_{=: \lambda} \sum_{n=1}^k \tau_n \left[\|\mathbf{u}_h^n\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 + \|\mathcal{K}' \mathbf{u}_h^n\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 \right] \\ & \leq \sigma_2 \|\mathbf{u}_h^0\|^2 + C_d \sum_{n=1}^{k-1} \tau_n \|\mathbf{u}_h^n\|^2. \end{aligned}$$

Es wird $\tau_n < \frac{\sigma_1}{4\sigma_2^2\mu_2(w_M^2 + R^2f_M^2)}$ vorausgesetzt. Dann gilt

$$c_1 = \min\left\{\frac{\sigma_1}{2}, \frac{1}{\mu_2}\right\} > 0.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} c_1 \left[\|\mathbf{u}_h^k\|^2 + \sum_{n=1}^k \tau_n \|\nabla \times \mathbf{u}_h^n\|^2 \right] + \lambda \sum_{n=1}^k \tau_n \left(\|\mathbf{u}_h^n\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 + \|\mathcal{K}'\mathbf{u}_h^n\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 \right) \\ \leq \sigma_2 \|\mathbf{u}_h^0\|^2 + C_d \sum_{n=1}^{k-1} \tau_n \|\mathbf{u}_h^n\|^2. \end{aligned}$$

Wird die Gleichung durch C_1 geteilt, so ergibt sich auf Grund der Positivität der Konstante:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_h^k\|^2 + \sum_{n=1}^k \tau_n \|\nabla \times \mathbf{u}_h^n\|^2 + \frac{\lambda}{c_1} \sum_{n=1}^k \tau_n \left(\|\mathbf{u}_h^n\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 + \|\mathcal{K}'\mathbf{u}_h^n\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 \right) \\ \leq \frac{\sigma_2}{c_1} \|\mathbf{u}_h^0\|^2 + \frac{C_d}{c_1} \sum_{n=1}^{k-1} \tau_n \|\mathbf{u}_h^n\|^2. \end{aligned}$$

Nun kann die diskrete Gronwall-Ungleichung angewendet werden.

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_h^k\|^2 + \sum_{n=1}^k \tau_n \left[\|\nabla \times \mathbf{u}_h^n\|^2 + \frac{\lambda}{c_1} \left(\|\mathbf{u}_h^n\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 + \|\mathcal{K}'\mathbf{u}_h^n\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 \right) \right] \\ \leq \prod_{i=1}^{k-1} \left(\frac{C_d\tau_i}{c_1} + 1 \right) \left(\frac{C_d\tau_{max}}{c_1} \|\mathbf{u}_h^0\|^2 + \frac{\sigma_2}{c_1} \|\mathbf{u}_h^0\|^2 \right). \end{aligned}$$

Damit gilt insbesondere

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq n \leq M} \|\mathbf{u}_h^n\|^2 + \sum_{n=1}^M \tau_n \left[\|\nabla \times \mathbf{u}_h^n\|^2 + \frac{\lambda}{c_1} \|\mathbf{u}_h^n\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 + \frac{\lambda}{c_1} \|\mathcal{K}'\mathbf{u}_h^n\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 \right] \\ \leq \prod_{i=1}^{M-1} \left(\frac{C_d\tau_i}{c_1} + 1 \right) \left(\frac{C_d\tau_{max}}{c_1} + \frac{\sigma_2}{c_1} \right) \|\mathbf{u}_h^0\|^2. \end{aligned}$$

Die Unabhängigkeit der Konstante von h und τ_{max} folgt aus obiger Annahme an die Zeitschrittweite für alle $i = 1, \dots, M-1$

$$C_d\tau_i \leq 2\sigma_2^2\mu_2(w_M^2 + R^2f_M^2)\tau_i < \frac{\sigma_1}{2}. \quad \square$$

6.3 Konvergenz

Zunächst wird ein Projektor P_h eingeführt, der die kontinuierliche Lösung auf eine ortsdiskrete Funktion abbildet. P_h wird analysiert und spielt in dem folgenden Beweis der Konvergenz des Finite-Element-Verfahrens eine essentielle Rolle.

6.3.1 Der Projektor P_h zwischen kontinuierlichem und diskretem Problem

Der Projektor $P_h : H_r \rightarrow X_h$ wird durch die folgende Gleichungen definiert.

$$\begin{aligned} (P_h \mathbf{u}, \mathbf{v}_h) + \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times P_h \mathbf{u}, \nabla \times \mathbf{v}_h \right) + \frac{1}{\mu_0} \langle (\mathcal{V} + \mathcal{K} \mathcal{D}_h^{-1} \mathcal{K}') P_h \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \\ (\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) + \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{u}, \nabla \times \mathbf{v}_h \right) + \frac{1}{\mu_0} \langle (\mathcal{V} + \mathcal{K} \mathcal{D}^{-1} \mathcal{K}') \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \quad \forall \mathbf{v}_h \in X_h \end{aligned} \quad (6.5)$$

Eine Abschätzung für die Norm von $P_h \mathbf{u}$ liefert das folgende Lemma.

Lemma 6.5

Für jedes $\mathbf{u} \in H_r$ sei $P_h \mathbf{u}$ die Projektion von \mathbf{u} wie in (6.5) definiert, dann gilt

$$\|P_h \mathbf{u}\|_{H_r}^2 + 2\lambda_V \|P_h \mathbf{u}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 + 2\lambda_D \|\mathcal{K}' P_h \mathbf{u}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 \lesssim \|\mathbf{u}\|_{H_r}^2.$$

Beweis:

Wird $P_h \mathbf{u}$ als Testfunktion \mathbf{v}_h in (6.5) eingesetzt, so zeigt sich (vgl. auch (4.3)):

$$\begin{aligned} \|P_h \mathbf{u}\|^2 + \frac{1}{\mu_2} \|\nabla \times P_h \mathbf{u}\|^2 + \lambda_V \|P_h \mathbf{u}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 + \lambda_D \|\mathcal{K}' P_h \mathbf{u}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 \\ \leq \|\mathbf{u}\| \|P_h \mathbf{u}\| + \frac{1}{\mu_1} \|\nabla \times \mathbf{u}\| \|\nabla \times P_h \mathbf{u}\| + \frac{1}{\mu_0} \langle (\mathcal{V} + \mathcal{K} \mathcal{D}^{-1} \mathcal{K}') \mathbf{u}, P_h \mathbf{u} \rangle \\ \leq \|\mathbf{u}\|^2 + \frac{1}{4} \|P_h \mathbf{u}\|^2 + \frac{\mu_2}{2\mu_1^2} \|\nabla \times \mathbf{u}\|^2 + \frac{1}{2\mu_2} \|\nabla \times P_h \mathbf{u}\|^2 + c_R \|\mathbf{u}\| \|P_h \mathbf{u}\|. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Young-Ungleichung ergibt sich

$$\begin{aligned} \|P_h \mathbf{u}\|^2 + \frac{1}{\mu_2} \|\nabla \times P_h \mathbf{u}\|^2 + 2\lambda_V \|P_h \mathbf{u}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 + 2\lambda_D \|\mathcal{K}' P_h \mathbf{u}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 \\ \leq (2 + 2c_R^2) \|\mathbf{u}\|^2 + \frac{\mu_2}{\mu_1^2} \|\nabla \times \mathbf{u}\|^2. \end{aligned}$$

Da μ_2 positiv ist, folgt die Behauptung.

$$\begin{aligned} \|P_h \mathbf{u}\|^2 + \|\nabla \times P_h \mathbf{u}\|^2 + 2\lambda_V \|P_h \mathbf{u}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 + 2\lambda_D \|\mathcal{K}' P_h \mathbf{u}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 \\ \leq \frac{\max \left\{ 2 + 2c_R^2, \frac{\mu_2}{\mu_1^2} \right\}}{\min \left\{ 1, \frac{1}{\mu_2} \right\}} (\|\mathbf{u}\|^2 + \|\nabla \times \mathbf{u}\|^2). \quad \square \end{aligned}$$

Für das Konvergenzresultat wird eine Abschätzung der H_r -Norm von $\mathbf{u} - P_h \mathbf{u}$ benötigt. Das folgende Lemma liefert ein erstes Resultat in diese Richtung.

Lemma 6.6

Eine Fehlerabschätzung zwischen den Lösungen des kontinuierlichen Problems 4.3 \mathbf{u} und $P_h \mathbf{u}$ liefert

$$\|\mathbf{u} - P_h \mathbf{u}\|_{H_r} \leq \left(2 + c_R + \frac{1}{\mu_2}\right) \inf_{\mathbf{v}_h \in X_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{H_r}.$$

Beweis:

Auf Grund der Koerzitivität der Randterme und nach (6.5) gilt für ein beliebiges $\mathbf{v}_h \in X_h$

$$\begin{aligned} \|P_h \mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{H_r}^2 &\leq \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times (P_h \mathbf{u} - \mathbf{v}_h), \nabla \times (P_h \mathbf{u} - \mathbf{v}_h) \right) + (P_h \mathbf{u} - \mathbf{v}_h, P_h \mathbf{u} - \mathbf{v}_h) \\ &\quad + \frac{1}{\mu_0} \langle (\mathcal{V} + \mathcal{K} \mathcal{D}_h^{-1} \mathcal{K}'_h) (P_h \mathbf{u} - \mathbf{v}_h), P_h \mathbf{u} - \mathbf{v}_h \rangle \\ &= (P_h \mathbf{u}, P_h \mathbf{u} - \mathbf{v}_h) - (\mathbf{v}_h, P_h \mathbf{u} - \mathbf{v}_h) + \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times P_h \mathbf{u}, \nabla \times (P_h \mathbf{u} - \mathbf{v}_h) \right) \\ &\quad - \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{v}_h, \nabla \times (P_h \mathbf{u} - \mathbf{v}_h) \right) + \frac{1}{\mu_0} \langle (\mathcal{V} + \mathcal{K} \mathcal{D}_h^{-1} \mathcal{K}'_h) P_h \mathbf{u}, P_h \mathbf{u} - \mathbf{v}_h \rangle \\ &\quad - \frac{1}{\mu_0} \langle (\mathcal{V} + \mathcal{K} \mathcal{D}_h^{-1} \mathcal{K}'_h) \mathbf{v}_h, P_h \mathbf{u} - \mathbf{v}_h \rangle \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \|P_h \mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{H_r}^2 &\leq (\mathbf{u}, v - \mathbf{v}_h) - (\mathbf{v}_h, P_h \mathbf{u} - \mathbf{v}_h) + \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{u}, \nabla \times (v - \mathbf{v}_h) \right) \\ &\quad - \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{v}_h, \nabla \times (P_h \mathbf{u} - \mathbf{v}_h) \right) + \frac{1}{\mu_0} \langle (\mathcal{V} + \mathcal{K} \mathcal{D}^{-1} \mathcal{K}') \mathbf{u}, P_h \mathbf{u} - \mathbf{v}_h \rangle \\ &\quad - \frac{1}{\mu_0} \langle (\mathcal{V} + \mathcal{K} \mathcal{D}_h^{-1} \mathcal{K}'_h) \mathbf{v}_h, P_h \mathbf{u} - \mathbf{v}_h \rangle \\ &= (\mathbf{u} - \mathbf{v}_h, P_h \mathbf{u} - \mathbf{v}_h) + \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times (\mathbf{u} - \mathbf{v}_h), \nabla \times (P_h \mathbf{u} - \mathbf{v}_h) \right) \\ &\quad + \frac{1}{\mu_0} \langle (\mathcal{V} + \mathcal{K} \mathcal{D}^{-1} \mathcal{K}') \mathbf{u}, P_h \mathbf{u} - \mathbf{v}_h \rangle - \frac{1}{\mu_0} \langle (\mathcal{V} + \mathcal{K} \mathcal{D}_h^{-1} \mathcal{K}'_h) \mathbf{v}_h, P_h \mathbf{u} - \mathbf{v}_h \rangle. \end{aligned}$$

Mit der Definition $\tilde{\mathbf{v}}_h := P_h \mathbf{u} - \mathbf{v}_h$ und der Dreiecksungleichung ergibt sich

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - P_h \mathbf{u}\|_{H_r} &\leq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{H_r} + \|\mathbf{v}_h - P_h \mathbf{u}\|_{H_r} \\ &\leq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{H_r} + \frac{(\mathbf{u} - \mathbf{v}_h, \tilde{\mathbf{v}}_h) + \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times (\mathbf{u} - \mathbf{v}_h), \nabla \times \tilde{\mathbf{v}}_h \right)}{\|\tilde{\mathbf{v}}_h\|_{H_r}} \\ &\quad + \frac{\frac{1}{\mu_0} \langle (\mathcal{V} + \mathcal{K} \mathcal{D}^{-1} \mathcal{K}') \mathbf{u}, \tilde{\mathbf{v}}_h \rangle - \frac{1}{\mu_0} \langle (\mathcal{V} + \mathcal{K} \mathcal{D}_h^{-1} \mathcal{K}'_h) \mathbf{v}_h, \tilde{\mathbf{v}}_h \rangle}{\|\tilde{\mathbf{v}}_h\|_{H_r}} \\ &\leq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_{H_r} + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\| + \frac{1}{\mu_2} \|\nabla \times (\mathbf{u} - \mathbf{v}_h)\| + c_R \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|. \end{aligned}$$

Die Behauptung folgt, da \mathbf{v}_h beliebig gewählt wurde. \square

Mit den vorherigen Ergebnissen kann nun eine Fehlerabschätzung von $\mathbf{u} - P_h \mathbf{u}$ angegeben werden.

Lemma 6.7

Sei $\mathbf{u} \in H_r$ so gegeben, dass $\mathbf{u} \in H^{k+1}(K)$. Dann gilt für die Projektion \mathbf{u}_h von \mathbf{u} wie in (6.5):

$$\|\mathbf{u} - P_h \mathbf{u}\|_{H_r} \lesssim h^k \|\mathbf{u}\|_{(H^{k+1}(K))^3}.$$

Beweis:

Die Behauptung folgt aus Bemerkung 5.4 und Lemma 6.6. \square

6.3.2 Konvergenzresultat

Der folgende Satz ist das Hauptresultat dieses Abschnitts.

Satz 6.8 (Konvergenzresultat)

Sei $\mathbf{u} \in H^2(0, T; H_r)$ Lösung des kontinuierlichen Problems 4.3, so dass $\mathbf{u} \in H^1(0, T; H^{l+1}(\Omega))$ für $0 \leq l < 1$. Des Weiteren sei \mathbf{u}_h^n die Lösung der Finite Element Approximation. Dann gilt folgende Abschätzung.

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq n \leq M} \|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}^n\|^2 + \sum_{n=1}^M \tau_n \|\nabla \times (\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}^n)\|^2 + c \sum_{n=1}^M \tau_n \|\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}^n\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 \\ & \quad + c \sum_{n=1}^M \tau_n \|\mathcal{K}'(\mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}^n)\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 \\ & \lesssim h^{2l} \|\mathbf{u}\|_{H^1(0, T; H^{l+1}(\Omega))}^2 + \tau_{max}^2 \|\mathbf{u}\|_{H^2(0, T; H_r)}^2. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Beweis:

Der Beweis gliedert sich in vier Teile. In den ersten drei Teilen werden die Terme

$$\mathbf{u}^n - \bar{\mathbf{u}}^n, \bar{\mathbf{u}}^n - P_h \bar{\mathbf{u}}^n \text{ und } P_h \bar{\mathbf{u}}^n - \mathbf{u}_h^n$$

abgeschätzt, wobei $\bar{\mathbf{u}}^n$ den zeitlichen Mittelwert über das Intervall $I_n = (t_{n-1}, t_n)$ bezeichnet (vgl. Abschnitt 6.1.1). Im letzten Teil werden die Ergebnisse der ersten drei Teile zur Abschätzung (6.6) zusammengesetzt. Des Weiteren bezeichnet eine Norm ohne Index die L^2 -Norm auf Ω_c .

(1) Abschätzung von $\mathbf{u}^n - \bar{\mathbf{u}}^n$: Zunächst wird folgende Abschätzung gezeigt:

$$\|\mathbf{u}^n - \bar{\mathbf{u}}^n\|^2 \leq \int_{\Omega} \left[\int_{t_{n-1}}^{t_n} \mathbf{u}_t(s) ds \right]^2 dx.$$

Im Folgenden wird ein Einbettungssatz verwendet, der in der Literatur weit verbreitet ist (vgl. z.B. [Emm04] Satz 8.1.9). Der Sobolev-Raum $H^1(0, T; V)$ ist stetig in den Raum der stetigen Funktionen $\mathcal{C}([0, T], H)$ eingebettet, wenn $V \subset H \subset V^*$ ein Gelfand-Tripel bilden. Wird die zeitliche Ableitung von \mathbf{u} mit \mathbf{u}_t bezeichnet, so kann mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung die obige Ungleichung bewiesen werden.

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}^n - \bar{\mathbf{u}}^n\|^2 &\leq \int_{\Omega} [\mathbf{u}_t(\tilde{s})\tau_n]^2 dx \quad \text{für ein } \tilde{s} \in [t_{n-1}, t_n] \\ &\leq \tau_n^2 \underbrace{\max_{\tilde{s} \in [t_{n-1}, t_n]} \|\mathbf{u}_t\|^2}_{=\|\mathbf{u}_t\|_{C([t_{n-1}, t_n]; L^2(\Omega_c))}^2} \leq \tau_n^2 C \|\mathbf{u}_t\|_{H^1(t_{n-1}, t_n; L^2(\Omega_c))}^2 \leq C\tau_n^2 \|\mathbf{u}\|_{H^2(t_{n-1}, t_n; L^2(\Omega_c))}^2. \end{aligned}$$

Die Abschätzungen gilt auch für den Term $\nabla \times (\mathbf{u}^n - \bar{\mathbf{u}}^n)$. Der Randterm ist sowohl beschränkt als auch koerzitiv. Damit gilt

$$\lambda_V \|\mathbf{v}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 + \lambda_D \|\mathcal{K}'\mathbf{v}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 \leq \frac{1}{\mu_0} \langle (\mathcal{V} + \mathcal{K}\mathcal{D}^{-1}\mathcal{K}') \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \leq c_R \|\mathbf{v}\|^2. \quad (6.7)$$

Dies gilt für beliebige $\mathbf{v} \in H_r$ und damit insbesondere für $\mathbf{u}^n - \bar{\mathbf{u}}^n$. Es folgt

$$\begin{aligned} &\max_{1 \leq n \leq M} \|\mathbf{u}^n - \bar{\mathbf{u}}^n\|^2 + \sum_{n=1}^M \tau_n \|\nabla \times (\mathbf{u}^n - \bar{\mathbf{u}}^n)\|^2 + \lambda_V \sum_{n=1}^M \tau_n \|\mathbf{u}^n - \bar{\mathbf{u}}^n\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 \\ &\quad + \lambda_D \sum_{n=1}^M \tau_n \|\mathcal{K}'(\mathbf{u}^n - \bar{\mathbf{u}}^n)\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 \\ &\leq C \max_{1 \leq n \leq M} \tau_n^2 \|\mathbf{u}\|_{H^2(t_{n-1}, t_n; L^2(\Omega_c))}^2 + C \sum_{n=1}^M \tau_n^3 \|\nabla \times \mathbf{u}\|_{H^2(t_{n-1}, t_n; L^2(\Omega_c))}^2 \\ &\quad + c_R \sum_{n=1}^M \tau_n^3 \|\mathbf{u}\|_{H^2(t_{n-1}, t_n; L^2(\Omega_c))}^2 \end{aligned}$$

Das Maximum einer Menge von positiven Werten ist kleiner als die Summe aller dieser

Werte.

$$\begin{aligned}
& \max_{1 \leq n \leq M} \|\mathbf{u}^n - \bar{\mathbf{u}}^n\|^2 + \sum_{n=1}^M \tau_n \|\nabla \times (\mathbf{u}^n - \bar{\mathbf{u}}^n)\|^2 + \lambda_V \sum_{n=1}^M \tau_n \|\mathbf{u}^n - \bar{\mathbf{u}}^n\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 \\
& \quad + \lambda_D \sum_{n=1}^M \tau_n \|\mathcal{K}'(\mathbf{u}^n - \bar{\mathbf{u}}^n)\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 \\
& \lesssim \sum_{n=1}^M \tau_n^2 \left(\|\mathbf{u}\|_{H^2(t_{n-1}, t_n; L^2(\Omega_c))}^2 + \|\nabla \times \mathbf{u}\|_{H^2(t_{n-1}, t_n; L^2(\Omega_c))}^2 \right) + \tau_{max}^3 \|\mathbf{u}\|_{H^2(0, T; H_r)}^2 \\
& = \tau_{max}^2 \|\mathbf{u}\|_{H^2(0, T; H_r)}^2.
\end{aligned}$$

(2) Abschätzung von $\bar{\mathbf{u}}^n - P_h \bar{\mathbf{u}}^n$: Grundlegend für diese Abschätzung ist (6.7). Es gilt

$$\begin{aligned}
& \max_{1 \leq n \leq M} \|\bar{\mathbf{u}}^n - P_h \bar{\mathbf{u}}^n\|^2 + \sum_{n=1}^M \tau_n \|\nabla \times (\bar{\mathbf{u}}^n - P_h \bar{\mathbf{u}}^n)\|^2 + \lambda_V \sum_{n=1}^M \tau_n \|\bar{\mathbf{u}}^n - P_h \bar{\mathbf{u}}^n\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 \\
& \quad + \lambda_D \sum_{n=1}^M \tau_n \|\mathcal{K}'(\bar{\mathbf{u}}^n - P_h \bar{\mathbf{u}}^n)\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 \\
& \lesssim \sum_{n=1}^M \|\bar{\mathbf{u}}^n - P_h \bar{\mathbf{u}}^n\|_{H_r}^2
\end{aligned}$$

Wird Lemma 6.7 verwendet, so folgt

$$\begin{aligned}
& \max_{1 \leq n \leq M} \|\bar{\mathbf{u}}^n - P_h \bar{\mathbf{u}}^n\|^2 + \sum_{n=1}^M \tau_n \|\nabla \times (\bar{\mathbf{u}}^n - P_h \bar{\mathbf{u}}^n)\|^2 + \lambda_V \sum_{n=1}^M \tau_n \|\bar{\mathbf{u}}^n - P_h \bar{\mathbf{u}}^n\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 \\
& \quad + \lambda_D \sum_{n=1}^M \tau_n \|\mathcal{K}'(\bar{\mathbf{u}}^n - P_h \bar{\mathbf{u}}^n)\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 \\
& \lesssim \sum_{n=1}^M h^{2l} \|\bar{\mathbf{u}}^n\|_{(H^{l+1}(K))^3} \\
& \leq \sum_{n=1}^M h^{2l} \max_{\xi \in [t_{n-1}, t_n]} \|\mathbf{u}(\xi)\|_{(H^{l+1}(K))^3}^2 \\
& \leq \sum_{n=1}^M h^{2l} \|\mathbf{u}\|_{C(t_{n-1}, t_n; H^{l+1}(\Omega_c))}^2.
\end{aligned}$$

Mit dem Einbettungssatz aus (1) kann die linke Seite gegen $Ch^{2l} \|\mathbf{u}\|_{H^1(0, T; H^{l+1}(\Omega_c))}^2$ abgeschätzt werden.

(3) Abschätzung von $P_h \bar{\mathbf{u}}^n - \mathbf{u}_h^n$: Als Erstes wird in (a) eine Gleichung hergeleitet, die es ermöglicht, eine Abschätzung der relevanten Terme zu erhalten. Nach der Behandlung der Randterme in (b), werden in (c) die Terme der rechten Seite einzeln abgeschätzt. In (d) wird alles kombiniert.

(a) Ausgangspunkt ist das kontinuierliche Problem 4.3. Die Testfunktion \mathbf{v} wird durch $\frac{1}{\tau_n} \mathbf{v}_h \in X_h \subset H_r$ ersetzt. Für alle $\mathbf{v}_h \in X_h$ gilt somit

$$\begin{aligned} & \tau_n^{-1} (\sigma \mathbf{u}'(t), \mathbf{v}_h) + \tau_n^{-1} \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{u}(t), \nabla \times \mathbf{v}_h \right) + \tau_n^{-1} \frac{1}{\mu_0} \langle (\mathcal{V} + \mathcal{K} \mathcal{D}^{-1} \mathcal{K}') \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \\ & = \tau_n^{-1} (\sigma \mathbf{w}(t) \times (\nabla \times \mathbf{u}(t)), \mathbf{v}_h) + R \tau_n^{-1} \left(\frac{\sigma f(t) \nabla \times \mathbf{u}(t)}{1 + s |\nabla \times \mathbf{u}(t)|^2}, \mathbf{v}_h \right). \end{aligned}$$

Dies wird über $[t_{n-1}, t_n]$ integriert.

$$\begin{aligned} & \tau_n^{-1} (\sigma (\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1}), \mathbf{v}_h) + \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \bar{\mathbf{u}}^n, \nabla \times \mathbf{v}_h \right) + \frac{1}{\mu_0} \langle (\mathcal{V} + \mathcal{K} \mathcal{D}^{-1} \mathcal{K}') \bar{\mathbf{u}}^n, \mathbf{v}_h \rangle \\ & = \left(\overline{\sigma \mathbf{w} \times (\nabla \times \mathbf{u})}^n, \mathbf{v}_h \right) + R \left(\overline{\frac{\sigma f(t)}{1 + s |\nabla \times \mathbf{u}|^2}} \nabla \times \mathbf{u}, \mathbf{v}_h \right) \quad \forall \mathbf{v}_h \in X_h. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Der erste Term im letzten Skalarprodukt auf der rechten Seite wird mit $\bar{f}_{\mathbf{u}}^n$ bezeichnet. Wird von (6.8) das vollständig diskretisierte Problem 6.1 subtrahiert, so ergibt sich für alle $\mathbf{v}_h \in X_h$

$$\begin{aligned} & (\Delta_{\tau_n} \sigma (\mathbf{u}^n - \mathbf{u}_h^n), \mathbf{v}_h) + \left(\frac{1}{\mu} (\nabla \times \bar{\mathbf{u}}^n - \nabla \times \mathbf{u}_h^n), \nabla \times \mathbf{v}_h \right) + \frac{1}{\mu_0} \langle (\mathcal{V} + \mathcal{K} \mathcal{D}^{-1} \mathcal{K}') \bar{\mathbf{u}}^n, \mathbf{v}_h \rangle \\ & \quad - \frac{1}{\mu_0} \langle (\mathcal{V} + \mathcal{K} \mathcal{D}_h^{-1} \mathcal{K}'_h) \mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h \rangle \\ & = \left(\overline{\sigma \mathbf{w} \times (\nabla \times \mathbf{u})}^n - \sigma \mathbf{w}_h^n \times \mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h \right) + R \left(\bar{f}_{\mathbf{u}}^n - \frac{\sigma f_h^n}{1 + s |\nabla \times \mathbf{u}_h^n|^2} \nabla \times \mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h \right). \end{aligned} \quad (6.9)$$

Zur Erinnerung: $\Delta_{\tau_n} \mathbf{u}^n$ bezeichnet den rückwärtigen Differenzenquotienten. Einige elementare Umformungen liefern

$$\begin{aligned} & (\Delta_{\tau_n} \sigma (P_h \bar{\mathbf{u}}^n - \mathbf{u}_h^n), \mathbf{v}_h) + (\Delta_{\tau_n} \sigma (\mathbf{u}^n - P_h \bar{\mathbf{u}}^n), \mathbf{v}_h) + \left(\frac{1}{\mu} (\nabla \times \bar{\mathbf{u}}^n - \nabla \times P_h \bar{\mathbf{u}}^n), \nabla \times \mathbf{v}_h \right) \\ & \quad + \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times (P_h \bar{\mathbf{u}}^n - \mathbf{u}_h^n), \nabla \times \mathbf{v}_h \right) + \frac{1}{\mu_0} \langle (\mathcal{V} + \mathcal{K} \mathcal{D}^{-1} \mathcal{K}') \bar{\mathbf{u}}^n, \mathbf{v}_h \rangle \\ & \quad - \frac{1}{\mu_0} \langle (\mathcal{V} + \mathcal{K} \mathcal{D}_h^{-1} \mathcal{K}'_h) \mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h \rangle \\ & = \left(\overline{\sigma \mathbf{w} \times (\nabla \times \mathbf{u})}^n - \sigma \mathbf{w}^n \times (\nabla \times \mathbf{u}_h^n), \mathbf{v}_h \right) + (\sigma (\mathbf{w}^n - \mathbf{w}_h^n) \times (\nabla \times \mathbf{u}_h^n), \mathbf{v}_h) \\ & \quad + R \left(\bar{f}_{\mathbf{u}}^n - \frac{\sigma f_h^n}{1 + s |\nabla \times \mathbf{u}_h^n|^2} \nabla \times \mathbf{u}_h^n, \mathbf{v}_h \right). \end{aligned}$$

Wird die Differenz $P_h \bar{\mathbf{u}}^n - \mathbf{u}_h^n$ mit b_h^n bezeichnet und als Testfunktion $\mathbf{v}_h := \tau_n b_h^n$ gewählt, so folgt

$$\begin{aligned}
& \tau_n (\Delta_{\tau_n} \sigma b_h^n, b_h^n) + \tau_n \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times b_h^n, \nabla \times b_h^n \right) + \frac{\tau_n}{\mu_0} \langle (\mathcal{V} + \mathcal{K} \mathcal{D}^{-1} \mathcal{K}') \bar{\mathbf{u}}^n, b_h^n \rangle \\
& \quad - \frac{\tau_n}{\mu_0} \langle (\mathcal{V} + \mathcal{K} \mathcal{D}_h^{-1} \mathcal{K}') \mathbf{u}_h^n, b_h^n \rangle \\
& = \tau_n (\Delta_{\tau_n} \sigma (P_h \bar{\mathbf{u}}^n - \mathbf{u}^n), b_h^n) + \tau_n \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times P_h \bar{\mathbf{u}}^n - \frac{1}{\mu} \nabla \times \bar{\mathbf{u}}^n, \nabla \times b_h^n \right) \\
& \quad + \tau_n \left(\overline{\sigma \mathbf{w} \times (\nabla \times \mathbf{u})}^n - \sigma \mathbf{w}^n \times (\nabla \times \mathbf{u}_h^n), b_h^n \right) + \tau_n (\sigma (\mathbf{w}^n - \mathbf{w}_h^n) \times (\nabla \times \mathbf{u}_h^n), b_h^n) \\
& \quad + \tau_n R \left(\bar{f}_{\mathbf{u}}^n - \frac{\sigma f_h^n}{1 + s |\nabla \times \mathbf{u}_h^n|^2} \nabla \times \mathbf{u}_h^n, b_h^n \right). \tag{6.10}
\end{aligned}$$

(b) Um die beiden Randterme zu untersuchen, sei an (6.5) erinnert. Es ergibt sich nach einigen Umformungen die folgende Gleichung für alle $\mathbf{v}_h \in X_h$.

$$\begin{aligned}
& (P_h \bar{\mathbf{u}}^n - \bar{\mathbf{u}}^n, \mathbf{v}_h) + \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times P_h \bar{\mathbf{u}}^n - \frac{1}{\mu} \nabla \times \bar{\mathbf{u}}^n, \nabla \times \mathbf{v}_h \right) \\
& = \frac{1}{\mu_0} \langle (\mathcal{V} + \mathcal{K} \mathcal{D}^{-1} \mathcal{K}') \bar{\mathbf{u}}^n, \mathbf{v} \rangle - \frac{1}{\mu_0} \langle (\mathcal{V} + \mathcal{K} \mathcal{D}_h^{-1} \mathcal{K}') P_h \bar{\mathbf{u}}^n, \mathbf{v} \rangle.
\end{aligned}$$

Wird die beliebige Testfunktion \mathbf{v}_h durch $b_h^n \in X_h$ ersetzt und die Gleichung mit τ_n multipliziert, so kann die folgende Gleichung abgeleitet werden.

$$\begin{aligned}
\frac{\tau_n}{\mu_0} \langle (\mathcal{V} + \mathcal{K} \mathcal{D}^{-1} \mathcal{K}') \bar{\mathbf{u}}^n, b_h^n \rangle & = \frac{\tau_n}{\mu_0} \langle (\mathcal{V} + \mathcal{K} \mathcal{D}_h^{-1} \mathcal{K}') P_h \bar{\mathbf{u}}^n, b_h^n \rangle + \tau_n (P_h \bar{\mathbf{u}}^n - \bar{\mathbf{u}}^n, b_h^n) \\
& \quad - \tau_n \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times P_h \bar{\mathbf{u}}^n - \frac{1}{\mu} \nabla \times \bar{\mathbf{u}}^n, \nabla \times b_h^n \right). \tag{6.11}
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen von (6.11) in (6.10) ergibt sich

$$\begin{aligned}
& \left\| \sqrt{\sigma} b_h^n \right\|^2 - (\sigma b_h^{n-1}, b_h^n) + \tau_n \left\| \frac{1}{\sqrt{\mu}} \nabla \times b_h^n \right\|^2 \\
& = \tau_n (\Delta_{\tau_n} \sigma (P_h \bar{\mathbf{u}}^n - \mathbf{u}^n), b_h^n) + \tau_n \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times P_h \bar{\mathbf{u}}^n - \frac{1}{\mu} \nabla \times \bar{\mathbf{u}}^n, \nabla \times b_h^n \right) \\
& \quad - \tau_n (P_h \bar{\mathbf{u}}^n - \bar{\mathbf{u}}^n, b_h^n) + \tau_n \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times P_h \bar{\mathbf{u}}^n - \frac{1}{\mu} \nabla \times \bar{\mathbf{u}}^n, \nabla \times b_h^n \right) \\
& \quad - \frac{\tau_n}{\mu_0} \langle (\mathcal{V} + \mathcal{K} \mathcal{D}_h^{-1} \mathcal{K}') P_h \bar{\mathbf{u}}^n, b_h^n \rangle + \frac{\tau_n}{\mu_0} \langle (\mathcal{V} - \mathcal{K} \mathcal{D}_h^{-1} \mathcal{K}') \mathbf{u}_h^n, b_h^n \rangle \\
& \quad + \tau_n \left(\overline{\sigma \mathbf{w} \times (\nabla \times \mathbf{u})}^n - \sigma \mathbf{w}^n \times (\nabla \times \mathbf{u}_h^n), b_h^n \right) + \tau_n (\sigma (\mathbf{w}^n - \mathbf{w}_h^n) \times (\nabla \times \mathbf{u}_h^n), b_h^n) \\
& \quad + R \tau_n \left(\bar{f}_{\mathbf{u}}^n - \frac{\sigma f_h^n}{1 + s |\nabla \times \mathbf{u}_h^n|^2} \nabla \times \mathbf{u}_h^n, b_h^n \right). \tag{6.12}
\end{aligned}$$

Aus einer Nullergänzung beim nichtlinearen Anteil resultiert folgende Gleichung

$$\begin{aligned}
& \left\| \sqrt{\sigma} b_h^n \right\|^2 - (\sigma b_h^{n-1}, b_h^n) + \tau_n \left\| \frac{1}{\sqrt{\mu}} \nabla \times b_h^n \right\|^2 \\
&= \tau_n (\Delta_{\tau_n} \sigma (P_h \bar{\mathbf{u}}^n - \mathbf{u}^n), b_h^n) - \tau_n (P_h \bar{\mathbf{u}}^n - \bar{\mathbf{u}}^n, b_h^n) - \frac{\tau_n}{\mu_0} \langle (\mathcal{V} + \mathcal{K} \mathcal{D}_h^{-1} \mathcal{K}'_h) b_h^n, b_h^n \rangle \\
&\quad + \tau_n \left(\overline{\sigma \mathbf{w} \times (\nabla \times \mathbf{u})}^n - \sigma \mathbf{w}^n \times (\nabla \times \mathbf{u}_h^n), b_h^n \right) \\
&\quad + \tau_n \left(\sigma (\mathbf{w}^n - \mathbf{w}_h^n) \times (\nabla \times \mathbf{u}_h^n) + R \frac{\sigma (f^n - f_h^n)}{1 + s |\nabla \times \mathbf{u}_h^n|^2} \nabla \times \mathbf{u}_h^n, b_h^n \right) \\
&\quad + R \tau_n \left(\bar{f}_{\mathbf{u}}^n - \frac{\sigma f^n}{1 + s |\nabla \times \mathbf{u}_h^n|^2} \nabla \times \mathbf{u}_h^n, b_h^n \right) \\
&\equiv: (J_1) + (J_2) + (J_3) + (J_4) + (J_5) + (J_6). \tag{6.13}
\end{aligned}$$

(c) Im Folgenden werden die Terme (J_j) für $j = 1, \dots, 6$ nacheinander abgeschätzt.

(J_1) Die Cauchy-Schwarz-Ungleichung liefert

$$\tau_n (P_h \bar{\mathbf{u}}^n - \bar{\mathbf{u}}^n, b_h^n) \leq \tau_n \frac{1}{\sqrt{\sigma_1}} \|P_h \bar{\mathbf{u}}^n - \bar{\mathbf{u}}^n\| \|\sqrt{\sigma} b_h^n\|.$$

(J_2) Zunächst wird nur das erste Argument des Skalarprodukts

$$\Delta_{\tau_n} (P_h \bar{\mathbf{u}}^n - \mathbf{u}^n) = \frac{P_h \bar{\mathbf{u}}^n - \mathbf{u}^n - P_h \bar{\mathbf{u}}^{n-1} + \mathbf{u}^{n-1}}{\tau_n}$$

betrachtet. Im Anschluss wird dann der gesamte Term abgeschätzt. Da P_h linear ist, kann Folgendes gezeigt werden:

$$\begin{aligned}
& \Delta_{\tau_n} (P_h \bar{\mathbf{u}}^n - \mathbf{u}^n) \\
&= \frac{P_h \bar{\mathbf{u}}^n - P_h \bar{\mathbf{u}}^{n-1} - (P_h \mathbf{u}^n - P_h \mathbf{u}^{n-1}) + (P_h \mathbf{u}^n - P_h \mathbf{u}^{n-1}) - (\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1})}{\tau_n} \\
&= \frac{1}{\tau_n} [P_h (\bar{\mathbf{u}}^n - \bar{\mathbf{u}}^{n-1} - (\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1})) + (P_h \mathbf{u}^n - P_h \mathbf{u}^{n-1}) - (\mathbf{u}^n - \mathbf{u}^{n-1})] \\
&= P_h \Delta_{\tau_n} (\bar{\mathbf{u}}^n - \mathbf{u}^n) + \Delta_{\tau_n} (P_h \mathbf{u}^n - \mathbf{u}^n) \\
&= P_h \Delta_{\tau_n} (\bar{\mathbf{u}}^n - \mathbf{u}^n) + \frac{1}{\tau_n} \int_{t_{n-1}}^{t_n} (P_h \mathbf{u}_t(s) - \mathbf{u}_t(s)) ds.
\end{aligned}$$

Für den ersten Term gilt zunächst

$$|P_h \Delta_{\tau_n} (\bar{\mathbf{u}}^n - \mathbf{u}^n)| = \left| \frac{1}{\tau_n^2} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{s-\tau_n}^s \int_s^\mu P_h \mathbf{u}_{tt}(\lambda) d\lambda d\mu ds \right|$$

Einige Umformungen liefern

$$\begin{aligned}
|P_h \Delta_{\tau_n} (\bar{\mathbf{u}}^n - \mathbf{u}^n)| &\leq \frac{1}{\tau_n^2} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{s-\tau_n}^s \left(\int_s^\mu 1^2 d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_s^\mu |P_h \mathbf{u}_{tt}(\lambda)|^2 d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} d\mu ds \\
&= \frac{1}{\tau_n^2} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{s-\tau_n}^s (\mu - s)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} |P_h \mathbf{u}_{tt}(\lambda)|^2 d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} d\mu ds \\
&= \frac{1}{\tau_n^2} \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} |P_h \mathbf{u}_{tt}(\lambda)|^2 d\lambda \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} \left[\frac{2}{3} (\mu - s)^{\frac{3}{2}} \right]_{s-\tau_n}^s ds \right) \\
&= \frac{1}{\tau_n^2} \|P_h \mathbf{u}_{tt}\|_{L^2(I_n)} \tau_n \frac{2}{3} \tau_n^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \sqrt{\tau_n} \|P_h \mathbf{u}_{tt}\|_{L^2(I_n)}.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Hölder-Ungleichung ergibt sich für den zweiten Term

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{\tau_n} \int_{t_{n-1}}^{t_n} (P_h \mathbf{u}_t(s) - \mathbf{u}_t(s)) ds \right| &\leq \frac{1}{\tau_n} \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} 1^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} |P_h \mathbf{u}_t(s) - \mathbf{u}_t(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\tau_n}} \|P_h \mathbf{u}_t - \mathbf{u}_t\|_{L^2(I_n)}.
\end{aligned}$$

Zusammen folgt für den Term (J_2)

$$\begin{aligned}
\tau_n (\sigma \Delta_{\tau_n} (P_h \bar{\mathbf{u}}^n - \mathbf{u}^n), b_h^n) &\leq \tau_n \sqrt{\sigma_2} \|\Delta_{\tau_n} (P_h \bar{\mathbf{u}}^n - \mathbf{u}^n)\| \|\sqrt{\sigma} b_h^n\| \\
&\leq \tau_n \sqrt{\sigma_2} \frac{2}{3} \sqrt{\tau_n} \|P_h \mathbf{u}_{tt}\|_{L^2(I_n; L^2(\Omega_c))} \|\sqrt{\sigma} b_h^n\| \\
&\quad + \sqrt{\tau_n} \sqrt{\sigma_2} \|P_h \mathbf{u}_t - \mathbf{u}_t\|_{L^2(I_n; L^2(\Omega_c))} \|\sqrt{\sigma} b_h^n\|.
\end{aligned}$$

(J_3) Auf Grund der Elliptizität des Randterms ergibt sich

$$-\frac{1}{\mu_0} \langle (\mathcal{V} + \mathcal{K} \mathcal{D}_h^{-1} \mathcal{K}'_h) b_h^n, b_h^n \rangle \leq -\lambda_V \|b_h^n\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 - \lambda_D \|\mathcal{K}' b_h^n\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2.$$

(J_4) Es wird der erste Term des Skalarproduktes betrachtet.

$$\begin{aligned}
&\overline{\mathbf{w} \times (\nabla \times \mathbf{u})^n} - \mathbf{w}^n \times (\nabla \times \mathbf{u}_h^n) \\
&= \frac{1}{\tau_n} \int_{t_{n-1}}^{t_n} [\mathbf{w} \times (\nabla \times \mathbf{u}) - \mathbf{w}^n \times (\nabla \times \mathbf{u}_h^n)] ds \\
&= \frac{1}{\tau_n} \int_{t_{n-1}}^{t_n} [(\mathbf{w} - \mathbf{w}^n) \times (\nabla \times \mathbf{u}) + \mathbf{w}^n \times \{\nabla \times (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^n)\}] ds \\
&= \frac{1}{\tau_n} \int_{t_{n-1}}^{t_n} (\mathbf{w} - \mathbf{w}^n) \times (\nabla \times \mathbf{u}) ds \\
&\quad + \frac{1}{\tau_n} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \mathbf{w}^n \times \left\{ \nabla \times \left(\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}^n + \bar{\mathbf{u}}^n - P_h \bar{\mathbf{u}}^n + \underbrace{P_h \bar{\mathbf{u}}^n - \mathbf{u}_h^n}_{=b_h^n} \right) \right\} ds.
\end{aligned}$$

Die letzten beide Ausdrücke sind nicht zeitabhängig. Damit folgt

$$\begin{aligned} & \overline{\mathbf{w} \times (\nabla \times \mathbf{u})}^n - \mathbf{w}^n \times (\nabla \times \mathbf{u}_h^n) \\ &= \frac{1}{\tau_n} \int_{t_{n-1}}^{t_n} (\mathbf{w} - \mathbf{w}^n) \times (\nabla \times \mathbf{u}) \, ds + \frac{1}{\tau_n} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \mathbf{w}^n \times \{\nabla \times (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}^n)\} \, ds \\ & \quad + \mathbf{w}^n \times \nabla \times (\bar{\mathbf{u}}^n - P_h \bar{\mathbf{u}}^n) + \mathbf{w}^n \times (\nabla \times b_h^n). \end{aligned}$$

Der erste Term kann mit Hilfe der Taylorentwicklung von \mathbf{w} abgeschätzt werden. Aus der Analysis ist bekannt, dass

$$|\mathbf{w}(t_n) - \mathbf{w}(t)| = \left| \int_t^{t_n} \mathbf{w}_t(s) \, ds \right| \leq \int_{t_{n-1}}^{t_n} |\mathbf{w}_t(s)| \, ds \quad \forall t \in (t_{n-1}, t_n). \quad (6.14)$$

Mit (6.3) gilt

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\tau_n} \int_{t_{n-1}}^{t_n} (\mathbf{w} - \mathbf{w}^n) \times (\nabla \times \mathbf{u}) \, ds \right| \leq \frac{1}{\tau_n} \int_{t_{n-1}}^{t_n} |\mathbf{w} - \mathbf{w}^n| |\nabla \times \mathbf{u}| \, ds \\ & \leq \frac{1}{\tau_n} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left| \int_{t_{n-1}}^{t_n} |\mathbf{w}_t(s)| \, ds \right| |\nabla \times \mathbf{u}| \, ds \leq \frac{1}{\tau_n} w_M \tau_n \int_{t_{n-1}}^{t_n} |\nabla \times \mathbf{u}| \, ds \\ & \leq w_M \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} 1^2 \, ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} |\nabla \times \mathbf{u}|^2 \, ds \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{\tau_n} w_M \|\nabla \times \mathbf{u}\|_{L^2(I_n)}. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Für den zweiten Term wird zunächst der Mittelwertsatz der Integralrechnung betrachtet. Danach existiert $\tilde{t} \in (t_{n-1}, t_n)$ mit

$$\nabla \times \bar{\mathbf{u}}^n = \frac{1}{\tau_n} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \nabla \times \mathbf{u}(s) \, ds = \nabla \times \mathbf{u}(\tilde{t}).$$

Angewendet auf den zweiten Term ergibt sich

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\tau_n} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \mathbf{w}^n \times \{\nabla \times (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}^n)\} \, ds \right| = \left| \frac{1}{\tau_n} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \mathbf{w}^n \times \{\nabla \times (\mathbf{u} - \mathbf{u}(\tilde{t}))\} \, ds \right| \\ & \leq \frac{1}{\tau_n} \int_{t_{n-1}}^{t_n} |\mathbf{w}^n| |\nabla \times (\mathbf{u} - \mathbf{u}(\tilde{t}))| \, ds \stackrel{(6.14)}{\leq} \frac{1}{\tau_n} w_M \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left| \int_{t_{n-1}}^{t_n} |\nabla \times \mathbf{u}_t| \, d\tilde{s} \right| \, ds \\ & \leq w_M \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} 1^2 \, ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{t_{n-1}}^{t_n} |\nabla \times \mathbf{u}_t|^2 \, ds \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\tau_n} w_M \|\nabla \times \mathbf{u}_t\|_{L^2(I_n)}. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Für den gesamten Term (J_4) folgt somit

$$\begin{aligned} & \tau_n \left(\overline{\sigma \mathbf{w} \times (\nabla \times \mathbf{u})}^n - \mathbf{w}^n \times (\nabla \times \mathbf{u}_h^n), b_h^n \right) \\ & \leq \tau_n \sqrt{\sigma_2} w_M \left\| \sqrt{\sigma} b_h^n \right\| \left(\sqrt{\tau_n} \|\nabla \times \mathbf{u}\|_{L^2(I_n; L^2(\Omega_c))} + \sqrt{\tau_n} \|\nabla \times \mathbf{u}_t\|_{L^2(I_n; L^2(\Omega_c))} \right) \\ & \quad + \|\nabla \times (\bar{\mathbf{u}}^n - P_h \bar{\mathbf{u}}^n)\| + \|\nabla \times b_h^n\|. \end{aligned}$$

(J_5) Falls die Ränder exakt trianguliert werden, gilt $\mathbf{w}^n = \mathbf{w}_h^n$ bzw. $f^n = f_h^n$ in Ω und damit (J_5) $\equiv 0$. Dies wird im Folgenden angenommen. Falls dies nicht der Fall ist, ergibt sich ein weiterer Term bei der Abschätzung.

$$\begin{aligned} & \tau_n \left(\sigma(\mathbf{w}^n - \mathbf{w}_h^n) \times (\nabla \times \mathbf{u}_h^n) + R \frac{\sigma(f^n - f_h^n)}{1 + s |\nabla \times \mathbf{u}_h^n|^2} \nabla \times \mathbf{u}_h^n, b_h^n \right) \\ & \leq \tau_n \sqrt{\sigma_2} \left(\|\mathbf{w}^n - \mathbf{w}_h^n\|_{L^\infty(\Omega_c)} + R \|f^n - f_h^n\|_{L^\infty(\Omega_c)} \right) \|\nabla \times \mathbf{u}_h^n\| \|\sqrt{\sigma} b_h^n\|. \end{aligned}$$

(J_6) Der letzte Term wird abgeschätzt. Zunächst wird

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sigma} \bar{f}_\mathbf{u}^n - \frac{f^n \nabla \times \mathbf{u}_h^n}{1 + s |\nabla \times \mathbf{u}_h^n|^2} = \frac{1}{\tau_n} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{f \nabla \times \mathbf{u}}{1 + s |\nabla \times \mathbf{u}|^2} - \frac{f^n \nabla \times \mathbf{u}_h^n}{1 + s |\mathbf{u}_h^n|^2} ds \\ & = \frac{1}{\tau_n} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{f \nabla \times \mathbf{u}}{1 + s |\nabla \times \mathbf{u}|^2} - \frac{f^n \nabla \times \mathbf{u}}{1 + s |\nabla \times \mathbf{u}|^2} + \frac{f^n \nabla \times \mathbf{u}}{1 + s |\nabla \times \mathbf{u}|^2} - \frac{f^n \nabla \times \mathbf{u}_h^n}{1 + s |\nabla \times \mathbf{u}_h^n|^2} ds \\ & = \frac{1}{\tau_n} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{f^n \nabla \times \mathbf{u}}{1 + s |\nabla \times \mathbf{u}|^2} - \frac{f^n \nabla \times \mathbf{u}_h^n}{1 + s |\nabla \times \mathbf{u}_h^n|^2} ds + \frac{1}{\tau_n} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{(f - f^n) \nabla \times \mathbf{u}}{1 + s |\nabla \times \mathbf{u}|^2} ds \end{aligned}$$

betrachtet. Analog zu (6.15) ergibt sich folgende Abschätzung.

$$\left| \frac{1}{\tau_n} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{(f - f^n) \nabla \times \mathbf{u}}{1 + s |\nabla \times \mathbf{u}|^2} ds \right| \leq 2\sqrt{\tau_n} f_M \|\nabla \times \mathbf{u}\|_{L^2(I_n)}.$$

Des Weiteren folgt mit der Idee aus dem Beweis von Lemma 4.13

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sigma}{\tau_n} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{f^n \nabla \times \mathbf{u}}{1 + s |\nabla \times \mathbf{u}|^2} - \frac{f^n \nabla \times \mathbf{u}_h^n}{1 + s |\nabla \times \mathbf{u}_h^n|^2} ds, b_h^n \right) \\ & = \frac{1}{\tau_n} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left(\frac{\sigma f^n \nabla \times \mathbf{u}}{1 + s |\nabla \times \mathbf{u}|^2} - \frac{\sigma f^n \nabla \times \mathbf{u}_h^n}{1 + s |\nabla \times \mathbf{u}_h^n|^2}, b_h^n \right) ds \\ & \leq \frac{3\sqrt{\sigma_2} f_M}{\tau_n} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\nabla \times \mathbf{u} - \sqrt{\sigma} \nabla \times \mathbf{u}_h^n\| \|b_h^n\| ds \\ & \leq \frac{3\sqrt{\sigma_2} f_M}{\tau_n} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \|\sqrt{\sigma} b_h^n\| \left(\|\nabla \times \mathbf{u} - \nabla \times \bar{\mathbf{u}}^n\| \right. \\ & \quad \left. + \|\nabla \times \bar{\mathbf{u}}^n - \nabla \times P_h \bar{\mathbf{u}}^n\| + \|\nabla \times P_h \bar{\mathbf{u}}^n - \nabla \times \mathbf{u}_h^n\| \right) ds \end{aligned}$$

Für den Term (J_6) ergibt sich die folgende Abschätzung.

$$\begin{aligned} & R \tau_n \left(\bar{f}_\mathbf{u}^n - \frac{\sigma f^n}{1 + s |\nabla \times \mathbf{u}_h^{n-1}|^2} \nabla \times \mathbf{u}_h^n, b_h^n \right) \\ & \leq 2R \tau_n^{\frac{3}{2}} \sqrt{\sigma_2} f_M \|\nabla \times \mathbf{u}\|_{L^2(I_n; L^2(\Omega_c))} \|\sqrt{\sigma} b_h^n\| + 3R \sqrt{\sigma_2} f_M \tau_n \|\nabla \times b_h^n\| \|\sqrt{\sigma} b_h^n\| \\ & \quad + 3R \sqrt{\sigma_2} f_M \|\nabla \times \mathbf{u} - \nabla \times \bar{\mathbf{u}}^n\|_{L^2(I_n; L^2(\Omega_c))} \|\sqrt{\sigma} b_h^n\| \\ & \quad + 3R \sqrt{\sigma_2} f_M \tau_n \|\nabla \times (\bar{\mathbf{u}}^n - P_h \bar{\mathbf{u}}^n)\| \|\sqrt{\sigma} b_h^n\|. \end{aligned}$$

(d) Werden diese Abschätzungen von (J_1) - (J_6) in (6.12) eingesetzt, so ergibt sich

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \|\sqrt{\sigma} b_h^n\|^2 - \frac{1}{2} \|\sqrt{\sigma} b_h^{n-1}\|^2 + \tau_n \left\| \frac{1}{\sqrt{\mu}} \nabla \times b_h^n \right\|^2 + \tau_n \lambda_V \|b_h^n\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 \\
& \quad + \tau_n \lambda_D \|\mathcal{K}' b_h^n\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 \\
& \leq \|\sqrt{\sigma} b_h^n\| \tau_n \sqrt{\sigma_2} \left(\frac{2}{3} \sqrt{\tau_n} \|P_h \mathbf{u}_{tt}\|_{L^2(I_n; L^2(\Omega_c))} + \frac{1}{\sqrt{\tau_n}} \|P_h \mathbf{u}_t - \mathbf{u}_t\|_{L^2(I_n; L^2(\Omega_c))} \right) \\
& \quad + \tau_n \frac{1}{\sqrt{\sigma_1}} \|P_h \bar{\mathbf{u}}^n - \bar{\mathbf{u}}^n\| \|\sqrt{\sigma} b_h^n\| + \tau_n \sqrt{\sigma_2} w_M (\sqrt{\tau_n} \|\nabla \times \mathbf{u}\|_{L^2(I_n; L^2(\Omega_c))}) \\
& \quad + \sqrt{\tau_n} \|\nabla \times \mathbf{u}_t\|_{L^2(I_n; L^2(\Omega_c))} + \|\nabla \times (\bar{\mathbf{u}}^n - P_h \bar{\mathbf{u}}^n)\| + \|\nabla \times b_h^n\| \|\sqrt{\sigma} b_h^n\| \\
& \quad + 2R \tau_n^{\frac{3}{2}} \sqrt{\sigma_2} f_M \|\nabla \times \mathbf{u}\|_{L^2(I_n; L^2(\Omega_c))} \|\sqrt{\sigma} b_h^n\| \\
& \quad + 3R \sqrt{\sigma_2} f_M \tau_n \|\nabla \times b_h^n\| \|\sqrt{\sigma} b_h^n\| \\
& \quad + 3R \sqrt{\sigma_2} f_M \|\nabla \times \mathbf{u} - \nabla \times \bar{\mathbf{u}}^n\|_{L^2(I_n; L^2(\Omega_c))} \|\sqrt{\sigma} b_h^n\| \\
& \quad + 3R \sqrt{\sigma_2} f_M \tau_n \|\nabla \times (\bar{\mathbf{u}}^n - P_h \bar{\mathbf{u}}^n)\| \|\sqrt{\sigma} b_h^n\|
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \|\sqrt{\sigma} b_h^n\|^2 - \frac{1}{2} \|\sqrt{\sigma} b_h^{n-1}\|^2 + \tau_n \left\| \frac{1}{\sqrt{\mu}} \nabla \times b_h^n \right\|^2 + \tau_n \lambda_V \|b_h^n\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 \\
& \quad + \tau_n \lambda_D \|\mathcal{K}' b_h^n\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 \\
& \leq \frac{2}{3} \tau_n^{\frac{3}{2}} \sqrt{\sigma_2} \|P_h \mathbf{u}_{tt}\|_{L^2(I_n; L^2(\Omega_c))} \|\sqrt{\sigma} b_h^n\| + \sqrt{\tau_n} \sqrt{\sigma_2} \|\sqrt{\sigma} b_h^n\| \|P_h \mathbf{u}_t - \mathbf{u}_t\|_{L^2(I_n; L^2(\Omega_c))} \\
& \quad + \tau_n \frac{1}{\sqrt{\sigma_1}} \|P_h \bar{\mathbf{u}}^n - \bar{\mathbf{u}}^n\| \|\sqrt{\sigma} b_h^n\| \\
& \quad + w_M \tau_n^{\frac{3}{2}} \sqrt{\sigma_2} \|\nabla \times \mathbf{u}_t\|_{L^2(I_n; L^2(\Omega_c))} \|\sqrt{\sigma} b_h^n\| \\
& \quad + (w_M + R f_M) \tau_n^{\frac{3}{2}} \sqrt{\sigma_2} \|\nabla \times \mathbf{u}\|_{L^2(I_n; L^2(\Omega_c))} \|\sqrt{\sigma} b_h^n\| \\
& \quad + (w_M + 3R f_M) \tau_n \sqrt{\sigma_2} \|\nabla \times (\bar{\mathbf{u}}^n - P_h \bar{\mathbf{u}}^n)\| \|\sqrt{\sigma} b_h^n\| \\
& \quad + (w_M + 3R f_M) \tau_n \sqrt{\sigma_2} \|\nabla \times b_h^n\| \|\sqrt{\sigma} b_h^n\| \\
& \quad + 3R f_M \sqrt{\sigma_2} \|\nabla \times \mathbf{u} - \nabla \times \bar{\mathbf{u}}^n\|_{L^2(I_n; L^2(\Omega_c))} \|\sqrt{\sigma} b_h^n\|.
\end{aligned}$$

In jedem Term auf der rechten Seite tritt $\|b_h^n\|$ auf. Die Young-Ungleichung wird angewendet, um die anderen Terme von diesen zu trennen. Dabei wird verwendet, dass

$(w_M + 3Rf_M)^2 \leq 2w_M^2 + 18R^2f_M^2$. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \|\sqrt{\sigma}b_h^n\|^2 - \frac{1}{2} \|\sqrt{\sigma}b_h^{n-1}\|^2 + \tau_n \left\| \frac{1}{\sqrt{\mu}} \nabla \times b_h^n \right\|^2 + \tau_n \lambda_V \|b_h^n\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 \\
& \quad + \tau_n \lambda_D \|\mathcal{K}'b_h^n\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 \\
& \leq \frac{3}{21} \tau_n \sigma_2 \mu_2 w_M^2 \|\sqrt{\sigma}b_h^n\|^2 + \frac{7}{3} \frac{\tau_n^2}{\mu_2 w_M^2} \|P_h \mathbf{u}_{tt}\|_{L^2(I_n; L^2(\Omega_c))}^2 \\
& \quad + \frac{21}{4} \frac{1}{\mu_2 w_M^2} \|P_h \mathbf{u}_t - \mathbf{u}_t\|_{L^2(I_n; L^2(\Omega_c))}^2 + \frac{21}{4} \frac{\tau_n}{\sigma_1 \sigma_2 \mu_2 w_M^2} \|P_h \bar{\mathbf{u}}^n - \bar{\mathbf{u}}^n\|^2 \\
& \quad + \frac{17}{21} \sigma_2 \mu_2 (w_M^2 + 9R^2 f_M^2) \tau_n \|\sqrt{\sigma}b_h^n\|^2 + \frac{21}{4} \frac{\tau_n^2}{\mu_2} \|\nabla \times \mathbf{u}_t\|_{L^2(I_n; L^2(\Omega_c))}^2 \\
& \quad + \frac{21}{2} \frac{\tau_n^2}{\mu_2} \|\nabla \times \mathbf{u}\|_{L^2(I_n; L^2(\Omega_c))}^2 + \frac{21}{2} \frac{\tau_n}{\mu_2} \|\nabla \times (\bar{\mathbf{u}}^n - P_h \bar{\mathbf{u}}^n)\|^2 + \frac{3}{4} \tau_n \left\| \frac{1}{\sqrt{\mu}} \nabla \times b_h^n \right\|^2 \\
& \quad + \frac{9}{21} \sigma_2 \mu_2 R^2 f_M^2 \tau_n \|\sqrt{\sigma}b_h^n\|^2 + \frac{21}{4} \frac{1}{\tau_n \mu_2} \|\nabla \times (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})\|_{L^2(I_n; L^2(\Omega_c))}^2.
\end{aligned}$$

Der Rotationsterm $\left\| \frac{1}{\sqrt{\mu}} \nabla \times b_h^n \right\|^2$ wird auf die linke Seite gebracht. Die Terme von $\sqrt{\sigma}b_h^n$ auf der rechten Seite addieren sich zu $\sigma_2 \mu_2 (w_M^2 + 9R^2 f_M^2) \tau_n$. Summation über $n = 1, \dots, k$ ergibt mit $c_\alpha := \frac{21}{4} \frac{1}{\mu_2}$ und $\tau_{max} := \max_{k \in \{1, \dots, M\}} \tau_k$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \|\sqrt{\sigma}b_h^k\|^2 + \sum_{n=1}^k \tau_n \frac{1}{4\mu_2} \|\nabla \times b_h^n\|^2 + \sum_{n=1}^k \tau_n \lambda_V \|b_h^n\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 \\
& \quad + \sum_{n=1}^k \tau_n \lambda_D \|\mathcal{K}'b_h^n\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 \\
& \leq \frac{\sigma_2}{2} \|b_h^0\|^2 + \sum_{n=1}^k \sigma_2 \mu_2 (w_M^2 + 9R^2 f_M^2) \tau_n \|\sqrt{\sigma}b_h^n\|^2 + \tau_{max}^2 \frac{4}{9} \frac{c_\alpha}{w_M^2} \|P_h \mathbf{u}_{tt}\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega_c))}^2 \\
& \quad + \frac{c_\alpha}{w_M^2} \|P_h \mathbf{u}_t - \mathbf{u}_t\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega_c))}^2 + \sum_{n=1}^k \tau_n \frac{c_\alpha}{\sigma_1 \sigma_2 w_M^2} \|P_h \bar{\mathbf{u}}^n - \bar{\mathbf{u}}^n\|^2 \\
& \quad + \tau_{max}^2 c_\alpha \|\nabla \times \mathbf{u}_t\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega_c))}^2 + 2\tau_{max}^2 c_\alpha \|\nabla \times \mathbf{u}\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega_c))}^2 \\
& \quad + 2c_\alpha \sum_{n=1}^k \tau_n \|\nabla \times (\bar{\mathbf{u}}^n - P_h \bar{\mathbf{u}}^n)\|^2 + c_\alpha \sum_{n=1}^k \frac{1}{\tau_n} \|\nabla \times (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}^n)\|_{L^2(I_n; L^2(\Omega_c))}^2.
\end{aligned}$$

Mit Lemma 6.5 und Lemma 6.7, Ausführung aus Abschnitt (2) dieses Beweises und einigen

anderen einfachen Abschätzungen ergibt sich

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \|\sqrt{\sigma} b_h^k\|^2 + \sum_{n=1}^k \tau_n \frac{1}{4\mu_2} \|\nabla \times b_h^n\|^2 + \lambda_V \sum_{n=1}^k \tau_n \|b_h^n\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 \\
& \quad + \lambda_D \sum_{n=1}^k \tau_n \|\mathcal{K}' b_h^n\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 \\
& \lesssim \frac{\sigma_2}{2} \|b_h^0\|^2 + \sum_{n=1}^k \sigma_2 \mu_2 (w_M^2 + 9R^2 f_M^2) \tau_n \|\sqrt{\sigma} b_h^n\|^2 \\
& \quad + \tau_{max}^2 \frac{4}{9} \frac{c_\alpha}{w_M^2} \|\mathbf{u}_{tt}\|_{L^2(0,T;H_r)}^2 + \frac{c_\alpha}{w_M^2} h^{2l} \|\mathbf{u}_t\|_{L^2(0,T;H^{l+1}(\Omega_c))}^2 \\
& \quad + \tau_{max} \max \left\{ 2c_\alpha, \frac{c_\alpha}{\sigma_1 \sigma_2 w_M^2} \right\} h^{2l} \|\mathbf{u}\|_{H^1(0,T;H^{l+1}(\Omega_c))}^2 + 2\tau_{max}^2 c_\alpha \|\nabla \times \mathbf{u}\|_{H^1(0,T;L^2(\Omega_c))}^2 \\
& \quad + c_\alpha \sum_{n=1}^k \frac{1}{\tau_n} \|\nabla \times (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}^n)\|_{L^2(I_n;L^2(\Omega_c))}^2.
\end{aligned}$$

Es gilt (vgl. Ausführungen in Abschnitt (1) des Beweises)

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=1}^k \frac{1}{\tau_n} \|\nabla \times (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}^n)\|_{L^2(I_n;L^2(\Omega_c))}^2 = \sum_{n=1}^k \frac{1}{\tau_n} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \int_{\Omega_c} [\nabla \times (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}^n)]^2 dx ds \\
& = \sum_{n=1}^k \frac{1}{\tau_n} \int_{\Omega_c} \int_{t_{n-1}}^{t_n} [\nabla \times (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}^n)]^2 ds dx \\
& \leq \sum_{n=1}^k \frac{1}{\tau_n} \int_{\Omega_c} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left[\int_{t_{n-1}}^{t_n} \nabla \times \mathbf{u}_t(s) ds \right]^2 ds dx \\
& \leq \sum_{n=1}^k \frac{1}{\tau_n} \int_{\Omega_c} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \left[\int_{t_{n-1}}^{t_n} \max_{\tilde{s} \in [t_{n-1}, t_n]} \nabla \times \mathbf{u}_t(\tilde{s}) ds \right]^2 ds dx \\
& \leq \sum_{n=1}^k \frac{1}{\tau_n} \int_{\Omega_c} \tau_n \left[\tau_n \max_{\tilde{s} \in [t_{n-1}, t_n]} \nabla \times \mathbf{u}_t(\tilde{s}) \right]^2 dx \\
& \leq \sum_{n=1}^k \tau_n^2 \|\nabla \times \mathbf{u}_t\|_{C(I_n;L^2(\Omega_c))}^2 \lesssim \sum_{n=1}^k \tau_n^2 \|\nabla \times \mathbf{u}_t\|_{H^1(I_n;L^2(\Omega_c))}^2 \\
& = \sum_{n=1}^k \tau_n^2 \|\nabla \times \mathbf{u}\|_{H^2(I_n;L^2(\Omega_c))}^2 \leq \tau_{max}^2 \|\nabla \times \mathbf{u}\|_{H^2(0,T;L^2(\Omega_c))}^2.
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left\| \sqrt{\sigma} b_h^k \right\|^2 + \sum_{n=1}^k \tau_n \frac{1}{4\mu_2} \left\| \nabla \times b_h^n \right\|^2 + \lambda_V \sum_{n=1}^k \tau_n \left\| b_h^n \right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 \\
& \quad + \lambda_D \sum_{n=1}^k \tau_n \left\| \mathcal{K}' b_h^n \right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 \\
& \lesssim \frac{\sigma_2}{2} \left\| b_h^0 \right\|_{H_r}^2 + \sum_{n=1}^{k-1} \tau_n \sigma_2 \mu_2 (w_M^2 + 9R^2 f_M^2) \left\| \sqrt{\sigma} b_h^n \right\|^2 + \underbrace{\tau_k \sigma_2 \mu_2 (w_M^2 + 9R^2 f_M^2)}_{=: c_t \tau_k} \left\| \sqrt{\sigma} b_h^k \right\|^2 \\
& \quad + \tau_{max}^2 c_\alpha \left(\frac{4}{9w_M^2} + 2 \right) \left\| \mathbf{u} \right\|_{H^2(0,T;H_r)}^2 \\
& \quad + c_\alpha h^{2l} \left(\frac{1}{w_M^2} + \tau_{max} \max\left\{2, \frac{1}{\sigma_1 \sigma_2 w_M^2}\right\} \right) \left\| \mathbf{u} \right\|_{H^1(0,T;H^{l+1}(\Omega_c))}^2.
\end{aligned}$$

Wird τ_s , $s \in \{1, \dots, M\}$, so gewählt, dass $c_t \tau_{max} \leq \frac{1}{4}$ ist, so folgt

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4} \left\| \sqrt{\sigma} b_h^k \right\|^2 + \frac{1}{4\mu_2} \sum_{n=1}^k \tau_n \left\| \nabla \times b_h^n \right\|^2 + \lambda_V \sum_{n=1}^k \tau_n \left\| b_h^n \right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 \\
& \quad + \lambda_D \sum_{n=1}^k \tau_n \left\| \mathcal{K}' b_h^n \right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 \\
& \lesssim \frac{\sigma_2}{2} \left\| b_h^0 \right\|_{H_r}^2 + \tau_{max}^2 c_\alpha \left(\frac{4}{9w_M^2} + 2 \right) \left\| \mathbf{u} \right\|_{H^2(0,T;H_r)}^2 \\
& \quad + c_\alpha h^{2l} \left(\frac{1}{w_M^2} + \tau_{max} \max\left\{2, \frac{1}{\sigma_1 \sigma_2 w_M^2}\right\} \right) \left\| \mathbf{u} \right\|_{H^1(0,T;H^{l+1}(\Omega_c))}^2 + c_t \sum_{n=1}^{k-1} \tau_n \left\| \sqrt{\sigma} b_h^n \right\|^2.
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der diskreten Gronwall-Ungleichung (vgl. Bemerkung 6.2) ergibt sich die folgende Abschätzung.

$$\begin{aligned}
& \left\| \sqrt{\sigma} b_h^k \right\|^2 + \frac{1}{\mu_2} \sum_{n=1}^k \tau_n \left\| \nabla \times b_h^n \right\|^2 + 4\lambda_V \sum_{n=1}^k \tau_n \left\| b_h^n \right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 \\
& \quad + 4\lambda_D \sum_{n=1}^k \tau_n \left\| \mathcal{K}' b_h^n \right\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 \\
& \lesssim \prod_{i=1}^k (1 + 4\tau_i c_t) \left[4\tau_{max} c_t \sigma_2 \left\| b_h^0 \right\|_{H_r}^2 + \frac{\sigma_2}{2} \left\| b_h^0 \right\|_{H_r}^2 + \tau_{max}^2 c_\alpha \left(\frac{4}{9w_M^2} + 2 \right) \left\| \mathbf{u} \right\|_{H^2(0,T;H_r)}^2 \right. \\
& \quad \left. + c_\alpha h^{2l} \left(\frac{1}{w_M^2} + \tau_{max} \max\left\{2, \frac{1}{\sigma_1 \sigma_2 w_M^2}\right\} \right) \left\| \mathbf{u} \right\|_{H^1(0,T;H^{l+1}(\Omega_c))}^2 \right].
\end{aligned}$$

Wird für k die Anzahl der Teilintervalle M eingesetzt, so folgt

$$\begin{aligned}
& \|b_h^k\|^2 + \frac{1}{\mu_2 \sigma_1} \sum_{n=1}^M \tau_n \|\nabla \times b_h^n\|^2 + \frac{4\lambda_V}{\sigma_1} \sum_{n=1}^M \tau_n \|b_h^n\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 \\
& \quad + \frac{4\lambda_D}{\sigma_1} \sum_{n=1}^M \tau_n \|\mathcal{K}' b_h^n\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 \\
& \lesssim (1 + 4\tau_{max} c_t)^{M-1} \left[\frac{3\sigma_2}{2\sigma_1} \|b_h^0\|_{H_r}^2 + \frac{\tau_{max}^2 c_\alpha}{\sigma_1} \left(\frac{4}{9w_M^2} + 2 \right) \|\mathbf{u}\|_{H^2(0,T;H_r)}^2 \right. \\
& \quad \left. + \frac{c_\alpha}{\sigma_1} h^{2l} \left(\frac{1}{w_M^2} + \tau_{max} \max\left\{2, \frac{1}{\sigma_1 \sigma_2 w_M^2}\right\} \right) \|\mathbf{u}\|_{H^1(0,T;H^{l+1}(\Omega_c))}^2 \right].
\end{aligned}$$

Schließlich ergibt sich mit den Konstanten

$$\begin{aligned}
C_e & := \frac{c_\alpha (1 + 4\tau_{max} c_t)^{M-1}}{\sigma_1 \min\left\{1, \frac{1}{\mu_2}\right\}} \max\left\{\frac{3\sigma_2}{2c_\alpha}, \frac{4}{9w_M^2} + 2, \frac{1}{w_M^2} + \tau_{max} \max\left\{2, \frac{1}{\sigma_1 \sigma_2 w_M^2}\right\}\right\} \text{ und} \\
\lambda & := \frac{\min\left\{\frac{4\lambda_V}{\sigma_1}, \frac{4\lambda_D}{\sigma_1}\right\}}{\min\left\{1, \frac{1}{\mu_2}\right\}}
\end{aligned}$$

die Abschätzung

$$\begin{aligned}
& \max_{1 \leq n \leq M} \|b_h^n\|^2 + \sum_{n=1}^M \tau_n \|\nabla \times b_h^n\|^2 + \lambda \sum_{n=1}^M \tau_n \left(\|b_h^n\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 + \|\mathcal{K}' b_h^n\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 \right) \\
& \lesssim C_e \left(\|b_h^0\|_{H_r}^2 + \tau_{max}^2 \|\mathbf{u}\|_{H^2(0,T;H_r)}^2 + h^{2l} \|\mathbf{u}\|_{H^1(0,T;H^{l+1}(\Omega_c))}^2 \right).
\end{aligned}$$

b_h^0 kann folgendermaßen mit Hilfe von Lemma 6.7 abgeschätzt werden:

$$\|b_h^0\|_{H_r} = \|P_h \bar{\mathbf{u}}^0 - \mathbf{u}_h^0\|_{H_r} \lesssim h^l \|\mathbf{u}\|_{H^{l+1}(\Omega_c)},$$

wobei $\bar{\mathbf{u}}^0 = \mathbf{u}(\cdot, 0) = \mathbf{u}_h^0$ ist.

(4) Endabschätzung: In (1), (2) und (3) sind die einzelnen Terme $\mathbf{u}^n - \bar{\mathbf{u}}^n$, $\bar{\mathbf{u}}^n - P_h \bar{\mathbf{u}}^n$ und

$P_h \bar{\mathbf{u}}^n - \mathbf{u}_h^n$ abgeschätzt worden. Somit gilt

$$\begin{aligned}
& \max_{1 \leq n \leq M} \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}_h^n\|^2 + \sum_{n=1}^M \tau_n \|\nabla \times (\mathbf{u}^n - \mathbf{u}_h^n)\|^2 + \sum_{n=1}^M \tau_n \lambda \|\mathbf{u}^n - \bar{\mathbf{u}}^n\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 \\
& \quad + \lambda \sum_{n=1}^M \tau_n \|\mathcal{K}'(\mathbf{u}^n - \bar{\mathbf{u}}^n)\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 \\
& \leq 3 \max_{1 \leq n \leq M} \|\mathbf{u}^n - \bar{\mathbf{u}}^n\|^2 + 3 \sum_{n=1}^M \tau_n \|\nabla \times (\mathbf{u}^n - \bar{\mathbf{u}}^n)\|^2 + \sum_{n=1}^M \tau_n \lambda \|P_h \bar{\mathbf{u}}^n - \mathbf{u}_h^n\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 \\
& \quad + \lambda \sum_{n=1}^M \tau_n \|\mathcal{K}'(P_h \bar{\mathbf{u}}^n - \mathbf{u}_h^n)\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 \\
& \quad + 3 \max_{1 \leq n \leq M} \|\bar{\mathbf{u}}^n - P_h \bar{\mathbf{u}}^n\|^2 + 3 \sum_{n=1}^M \tau_n \|\nabla \times (\bar{\mathbf{u}}^n - P_h \bar{\mathbf{u}}^n)\|^2 \\
& \quad + \sum_{n=1}^M \tau_n \lambda \|\bar{\mathbf{u}}^n - P_h \bar{\mathbf{u}}^n\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 + \lambda \sum_{n=1}^M \tau_n \|\mathcal{K}'(\bar{\mathbf{u}}^n - P_h \bar{\mathbf{u}}^n)\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 + 3 \max_{1 \leq n \leq M} \|b_h^n\|^2 \\
& \quad + 3 \sum_{n=1}^M \tau_n \|\nabla \times b_h^n\|^2 + \lambda \sum_{n=1}^M \tau_n \|b_h^n\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 + \lambda \sum_{n=1}^M \tau_n \|\mathcal{K}' b_h^n\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2.
\end{aligned}$$

Die Ergebnisse aus (1), (2) und (3) liefern

$$\begin{aligned}
& \max_{1 \leq n \leq M} \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}_h^n\|^2 + \sum_{n=1}^M \tau_n \|\nabla \times (\mathbf{u}^n - \mathbf{u}_h^n)\|^2 + \lambda \sum_{n=1}^M \tau_n \|\mathbf{u}^n - \mathbf{u}_h^n\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 \\
& \quad + \lambda \sum_{n=1}^M \tau_n \|\mathcal{K}'(\mathbf{u}^n - \mathbf{u}_h^n)\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)}^2 \\
& \lesssim \tau_{max}^2 \|\mathbf{u}\|_{H^2(0,T;H_r)}^2 + h^{2l} \|\mathbf{u}\|_{H^1(0,T;H^{l+1}(\Omega_c))}^2 + \tau_{max}^2 \|\mathbf{u}\|_{H^2(0,T;H_r)}^2 + h^{2l} \|\mathbf{u}\|_{H^1(0,T;H^{l+1}(\Omega_c))}^2.
\end{aligned}$$

□

Kapitel 7

Implementierung

Theorie und Praxis sind eins und bleiben doch zwei, wie Materie und Geist, wie Seele und Leib, wie Mann und Weib, wie Denken und Schauen.

Bogumil Goltz (1801 - 1870),
westpreußischer Dichter und Erzähler

Um die theoretischen Ergebnisse der vorherigen Kapitel zu validieren, werden einige numerische Test durchgeführt. Es wurde ein C++ Programm für dieses Problem geschrieben. Als Erstes wurde das innere Problem separat getestet, um die Richtigkeit desselben zu überprüfen. Dafür wurden vier unterschiedliche Probleme untersucht. Das BEM-Verfahren, das verwendet wird, wird kurz skizziert. Es werden für das gekoppelte Problem zwei Beispiele gerechnet.

7.1 Inneres Problem

Um das Programm für das innere Problem zu testen, werden Nédélec Elemente verwendet. Sie werden ein wenig motiviert und eingeführt. Das allgemeine Setting wird beschrieben und die Ergebnisse der Tests dargestellt.

7.1.1 Details zur Implementierung

Zur Implementierung des Innenraumproblems wurde die auf C++ beruhende Bibliothek deal.II verwendet. Diese Bibliothek ist zur Implementierung von Finite Elemente Verfahren

entwickelt worden. Daher sind die wichtigsten Funktionen bereits vorprogrammiert. Es sind Nédélec-Elemente der niedrigsten Ordnung vorhanden, diese werden hier verwendet.

7.1.2 Testbeispiele für das Innenraumproblem

Um das Programm zu überprüfen, werden die Lösungen vorgegeben und eine zusätzliche rechte Seite (*rhs*) wird implementiert. Ausgangspunkt ist die Formulierung des Problems 3.11.

$$0 = \left(\sigma \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \mathbf{v} \right) + \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{u}, \nabla \times \mathbf{v} \right) - \left\langle \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{u} \right) \times \mathbf{n}, \mathbf{v} \right\rangle_{\partial \Omega_c} - (\sigma \mathbf{w} \times (\nabla \times \mathbf{u}), \mathbf{v}) \\ - R \left(\sigma \frac{f}{1 + s |\nabla \times \mathbf{u}|^2} \nabla \times \mathbf{u}, \mathbf{v} \right)$$

Es wird sich hier auf das lineare Problem beschränkt, das heißt $R = 0$. Für die Zeitdiskretisierung wird das implizite Euler-Verfahren verwendet. Die Randbedingungen werden schwach eingearbeitet. Der Term aus der vektoriellen Randbedingung tritt explizit auf. Die exakte Lösung wird eingesetzt und der Term auf die rechte Seite gebracht. Die skalare Randbedingung wird mit Hilfe einer Penalty-Methode zum Problem addiert. Sei $\tilde{\mathbf{u}}$ die exakte Lösung und \mathbf{u}^{n-1} die Lösung aus dem letzten Zeitschritt, so wird das folgende System betrachtet:

$$\left(\frac{\sigma}{\tau_n} \mathbf{u}, \mathbf{v} \right) + \kappa (\sigma \mathbf{u}, \mathbf{v}) + \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{u}, \nabla \times \mathbf{v} \right) - (\sigma \mathbf{w} \times (\nabla \times \mathbf{u}), \mathbf{v}) \\ + \omega \langle (\nabla \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}, (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \rangle_{\partial \Omega_c} \\ = \left(\frac{\sigma \mathbf{u}^{n-1}}{\tau_n}, \mathbf{v} \right) + (rhs, \mathbf{v}) + \left\langle \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \tilde{\mathbf{u}} \right) \times \mathbf{n}, \mathbf{v} \right\rangle_{\partial \Omega_c} + \omega \langle (\nabla \times \tilde{\mathbf{u}}) \cdot \mathbf{n}, (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} \rangle_{\partial \Omega_c}. \quad (7.1)$$

μ und σ werden konstant als 1 gewählt. Die Zeitschrittweite ist konstant bei 0,1. ω ist ebenfalls konstant und hat den Wert $\frac{1}{h}$.

Das Gebiet ist der Quader $[-1, 1]^3$. Es wird auf drei verschiedenen Gittern gerechnet. Das grobe Gitter besitzt 1944 Freiheitsgrade, das mittlere 13872 und das feine Gitter hat 104544 Freiheitsgrade. h ist $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ bzw. $\frac{1}{16}$. Als Löser wird GMRES mit Jacobi-Vorkonditionierer verwendet.

Da es sich um stationäre Probleme handelt, wird gerechnet bis sich ein stationärer Zustand einstellt.

Testbeispiel 1

Lösung Die Lösung des ersten Testbeispiels ist linear.

$$u(\vec{\mathbf{x}}, t) := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung ist unabhängig von Ort und Zeit. Es ist egal welche Geschwindigkeit verwendet wird, da die Rotation der Lösung verschwindet und der Konvektionsterm damit ebenfalls Null ist. Das Geschwindigkeitsfeld hat die folgende Gestalt:

$$w(\vec{\mathbf{x}}, t) := \begin{cases} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} (16x^4 - 8x^2 + 1) (64y^3 - 16y) (64z^3 - 16z) \\ - (64x^3 - 16x) (16y^4 - 8y^2 + 1) (64z^3 - 16z) \\ \frac{1}{2} (64x^3 - 16x) (64y^3 - 16y) (16z^4 - 8z^2 + 1) \end{pmatrix} & \text{in } [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]^3 \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dieses Geschwindigkeitsfeld ist divergenzfrei und nimmt auf dem Rand des Quaders $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^3$ den Wert Null an. Als Abbruchkriterium für den Löser wird der Betrag des Residuums betrachtet. Ist dieser kleiner als $4 \cdot 10^{-7}$, so bricht der Löser ab.

Auswertung Es wird mit Elementen niedrigster Ordnung gerechnet. Es ist daher zu erwarten, dass konstante Beispiele exakt gelöst werden. Dies wird durch dieses Beispiel bestätigt.

Testbeispiel 2

Lösung Die Lösung des zweiten Testbeispiels ist

$$u(\vec{\mathbf{x}}, t) := \begin{pmatrix} y \\ z \\ x \end{pmatrix}.$$

Die Lösung ist unabhängig von der Zeit. Die Rotation ist konstant.

$$\nabla \times u(\vec{\mathbf{x}}, t) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Als Geschwindigkeitsfeld wird das gleiche Vektorfeld wie in Testbeispiel 1 verwendet. Das Abbruchkriterium ist $5 \cdot 10^{-8}$.

h	DOF	rel. L^2 -Fehler	rel. L^∞ -Fehler	rel. L^2 -Fehler Rot.
$\frac{1}{4}$	1944	$7.0191983 \cdot 10^{-16}$	$3.275158 \cdot 10^{-15}$	$1.53411125 \cdot 10^{-29}$
$\frac{1}{8}$	13872	$8.0422688 \cdot 10^{-16}$	$3.663736 \cdot 10^{-15}$	$3.70745417 \cdot 10^{-29}$
$\frac{1}{16}$	104544	$1.43789711 \cdot 10^{-16}$	$6.328271 \cdot 10^{-15}$	$154307083 \cdot 10^{-28}$

Tabelle 7.1: Fehler von Testbeispiel 1

Konvergenz Das Beispiel wird auch auf dem groben Gitter exakt gelöst. Die Werte für die beiden anderen Gitter unterscheiden sich nur unwesentlich und liegen in dergleichen Größenordnung.

Auswertung Es ist nicht zu erwarten, dass Beispiele mit linearen Lösungen mit Elementen niedrigster Ordnung exakt gelöst werden. Vermutlich liegt es an der speziellen Struktur dieses Beispiels, dass so gute Ergebnisse erzielt werden. Der L^2 -Fehler der Rotation ist ebenfalls fast Null. Es ist zu erwarten, dass Beispiele mit konstanter Rotation ebenfalls einen verschwindenden L^2 -Fehler der Rotation haben werden.

Testbeispiel 3

Lösung Die beiden ersten Beispiele waren bezüglich der Konvergenz nicht sehr aussagekräftig. Daher werden zwei weitere Beispiele betrachtet, die etwas komplizierter sind. Die Lösung des dritten Testbeispiels ist

$$u(\vec{x}, t) := \begin{pmatrix} 2y^2 - 2z \\ z^2 + x \\ -x^2 + 3y \end{pmatrix}.$$

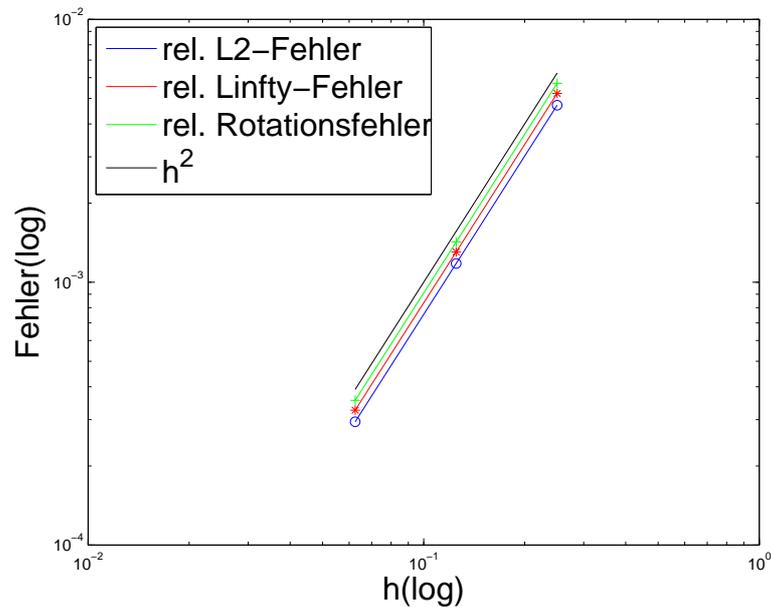
Die Lösung ist unabhängig von der Zeit. Die Rotation ist

$$\nabla \times u(\vec{x}, t) = \begin{pmatrix} 3 - 2z \\ 2x - 2 \\ 1 - 4y \end{pmatrix}.$$

Als Geschwindigkeitsfeld wird das gleiche Vektorfeld wie in Testbeispiel 1 verwendet. Das Abbruchkriterium für den Löser ist $8 \cdot 10^{-8}$.

Konvergenz Für den L^2 - und den L^∞ -Fehler kann eine quadratische Konvergenz beobachtet werden. Der L^2 -Norm der Rotation konvergiert ebenfalls quadratisch.

Auswertung Die Ergebnisse sind besser als es zu erwarten war. Für den L^2 -Fehler ist lineare Konvergenz zu erwarten. Es liegt wahrscheinlich an der speziellen Gestalt des Problems.

Abbildung 7.1: Relativer L^2 - und L^∞ - Fehler von Beispiel 3

Testbeispiel 4

Lösung Die Lösung des dritten Testbeispiels ist

$$u(\vec{x}, t) := \begin{pmatrix} x + z \\ xy \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung ist unabhängig von der Zeit. Die Rotation ist

$$\nabla \times u(\vec{x}, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ y \end{pmatrix}.$$

Dieser Fall ist schon etwas interessanter. Daher werden zwei verschiedene divergenzfreie Geschwindigkeitsfelder verwendet, die außerhalb des Quaders $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]^3$ auf Null gesetzt

werden:

$$w_1(\vec{\mathbf{x}}, t) := \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(16x^4 - 8x^2 + 1)(64y^3 - 16y)(64z^3 - 16z) \\ -(64x^3 - 16x)(16y^4 - 8y^2 + 1)(64z^3 - 16z) \\ \frac{1}{2}(64x^3 - 16x)(64y^3 - 16y)(16z^4 - 8z^2 + 1) \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$w_2(\vec{\mathbf{x}}, t) := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left(e^{x^2-1/4} - (x^2 + \frac{3}{4}) \right) \left(2ye^{y^2-1/4} - 2y \right) \left(2ze^{z^2-1/4} - 2z \right) \\ \frac{1}{2} \left(2xe^{x^2-1/4} - 2x \right) \left(e^{y^2-1/4} - (y^2 + \frac{3}{4}) \right) \left(2ze^{z^2-1/4} - 2z \right) \\ - \left(2xe^{x^2-1/4} - 2x \right) \left(2ye^{y^2-1/4} - 2y \right) \left(e^{z^2-1/4} - (z^2 + \frac{3}{4}) \right) \end{pmatrix}.$$

Das Abbruchkriterium des Lösers ist $8 \cdot 10^{-8}$.

Konvergenz Der Unterschied der beiden Ergebnisse ist minimal. Zumindest in diesem Beispiel ist der Einfluss des Konvektionsterms also vernachlässigbar. Für den L^2 - und den L^∞ -Fehler kann eine lineare Konvergenz beobachtet werden. Der L^2 -Norm der Rotation konvergiert in beiden Fällen sogar quadratisch. Für die H_r Norm

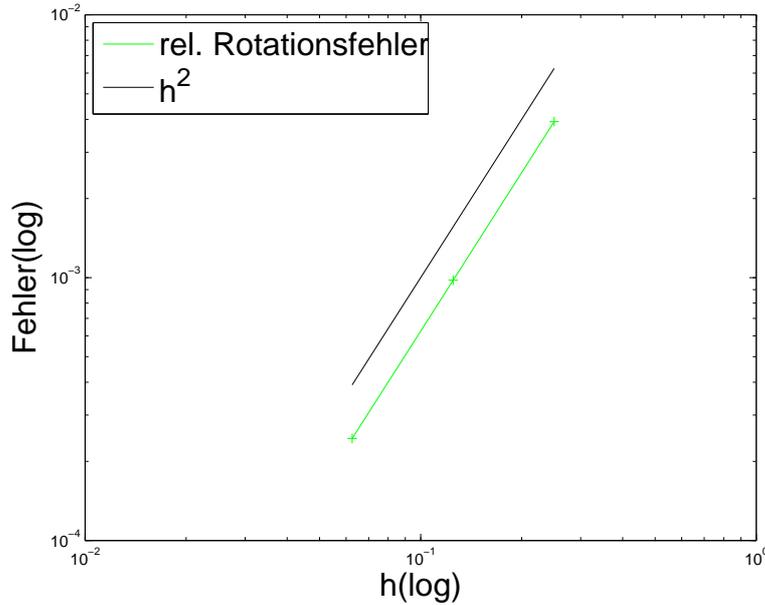
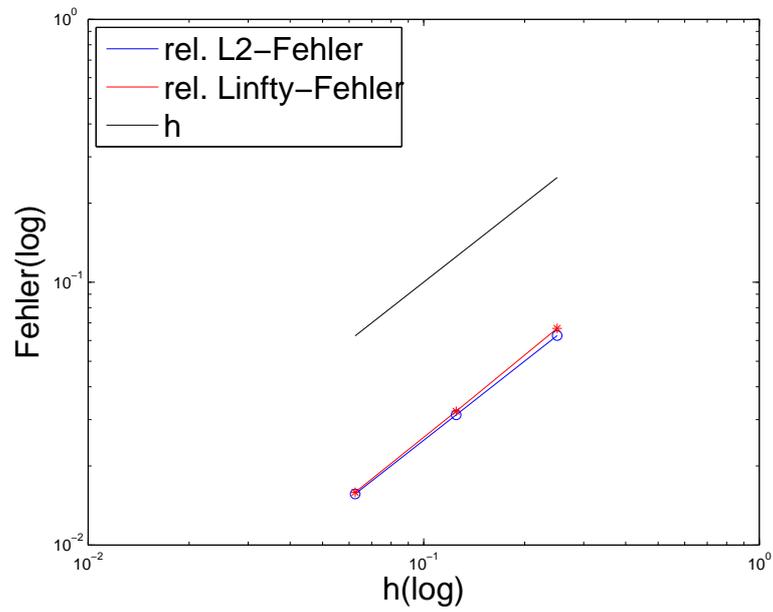
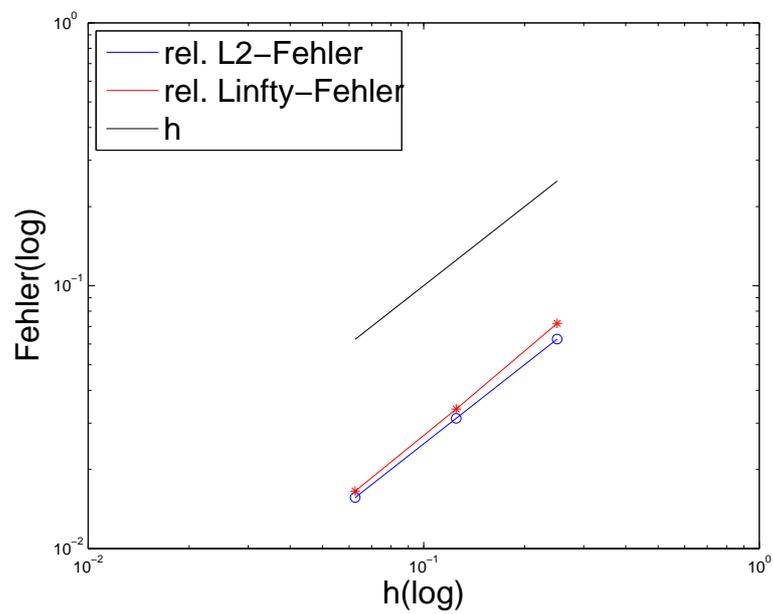


Abbildung 7.2: Relativer L^2 -Fehler der Rotation von Beispiel 4a und 4b

$$\|\mathbf{u}\|_{H_r} = \left(\|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega_c)}^2 + \|\nabla \times \mathbf{u}\|_{L^2(\Omega_c)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

ergibt sich somit ebenfalls lineare Konvergenz.

Abbildung 7.3: Relativer L^2 - und L^∞ - Fehler von Beispiel 4aAbbildung 7.4: Relativer L^2 - und L^∞ - Fehler von Beispiel 4b

Zusammenfassung

Es wurden vier unterschiedliche Beispiele gerechnet. Dabei wurde das konstante Beispiel exakt gelöst, wie es bei Elementen niedrigster Ordnung zu erwarten war. Ist die Rotation konstant, so wird diese ebenfalls exakt berechnet. Die beiden letzten Beispiele zeigen für den L^2 -Fehler mindestens lineare Konvergenz. Dies deckt sich mit den Ergebnissen aus dem Kapitel 6. Für den L^2 -Fehler der Rotation ergibt sich durchweg quadratische Konvergenz. Insgesamt konvergiert die Lösung in der H_r -Norm also linear.

Der Einfluss des Geschwindigkeitsfeldes ist sehr gering. Er wirkt sich nur auf die Laufzeit aus, nicht auf die Konvergenzordnung.

7.2 Äußeres Problem

Wie bereits mehrfach erwähnt, wird für das äußere Problem die Boundary Element Methode (BEM) verwendet. Dazu wurde uns von Professor Steinbachs Gruppe aus Graz ein Code zur Verfügung gestellt, dessen Anbindung an den FEM-Code mit Hilfe von Dr. Günther Of ermöglicht wurde. Der BEM-Code ist in C geschrieben. Der FEM-Code in C++. Der BEM-Code wurde für die Veröffentlichungen [OSW06] und [OKS09] verwendet. Die verwendete Methode wird kurz skizziert.

Die Boundary Element Methode benötigt einen Speicherbedarf von $O(N^2)$, wobei N die Anzahl der BEM-Freiheitsgrade ist. Die Matrix ist vollbesetzt. Um den Speicherbedarf zu verringern, wurden schnelle Randelementmethoden entwickelt. Eine, die sogenannte Panel-Clustering-Methode wird verwendet und soll hier vorgestellt werden. Der Speicherbedarf dieser Methode beträgt $O(N \log^\kappa N)$, $\kappa \approx 4 - 6$ abhängig vom Problem. Grundlegend wird das zu berechnende Integral in zwei Teile aufgeteilt. Zum Einen ist da das Nahfeld, das explizit berechnet wird, und zum Anderen das Fernfeld, wo der Kern des Integrals durch eine Reihendarstellung approximiert wird. Die Ausführungen beruhen auf [SS04] Kapitel 7 und auf [Ste03a] Kapitel 14.

7.2.1 Panel-Clustering Methode

Der Einfachheit halber wird angenommen, dass das BEM-Gebiet aus einem Quadrat besteht. Dieser wird in eine entsprechende Anzahl A , z.B. 4, von Quadrern aufgeteilt. Dies wird so oft wiederholt bis die Kantenlänge der Quader proportional zur Maschenweite des Gitters ist. Die Anzahl der Verfeinerungen ist L . Die Quader im j -ten Schritt werden mit Q_i^j , $i = 1, \dots, jA$, bezeichnet. Dabei gelte

$$\bar{Q}_i^{j-1} = \bigcup_{k=A(i-1)+1}^{Ai} \bar{Q}_k^j, \quad i = 1, \dots, A^{j-1}.$$

Zu jeder Box Q_i^j wird ein Cluster Υ_i^j definiert. Dieser beinhaltet die Randelemente τ_l , deren Mittelpunkt x_l in der Box Q_i^j liegen.

$$\bar{\Upsilon}_i^j := \bigcup_{x_l \in Q_i^j} \bar{\tau}_l.$$

Es gibt auch andere Wege die Zugehörigkeit eines Randelementes zu einem Cluster festzulegen. Wie für die Boxen gilt auch für die Cluster

$$\bar{\Upsilon}_i^{j-1} = \bigcup_{k=A(i-1)+1}^{Ai} \bar{\Upsilon}_i^j, \quad i = 1, \dots, A^{j-1}, \quad j = L, \dots, 1.$$

Der Clusterdurchmesser

$$\text{diam}(\Upsilon_i^j) := \sup_{x, y \in \Upsilon_i^j} |x - y|$$

ist ein Maß für die Größe des Clusters Υ_i^j . Der Abstand zweier Cluster ist

$$\text{dist}(\Upsilon_i^j, \Upsilon_k^l) := \inf_{(x, y) \in \Upsilon_i^j \times \Upsilon_k^l} |x - y|.$$

Zwei Cluster heißen zulässig, falls

$$\text{dist}(\Upsilon_i^j, \Upsilon_k^l) \geq \eta \max \{ \text{diam}(\Upsilon_i^j), \text{diam}(\Upsilon_k^l) \}$$

ist, wobei $\eta > 1$ eine vorgegebene Konstante ist. Diese Definition wird nun verwendet, um das Nahfeld und das Fernfeld zu definieren. Als Nahfeld wird die Menge der Clusterpaare bezeichnet, die nicht zulässig sind. Das Fernfeld besteht aus allen zulässigen Clusterpaaren.

7.2.2 Multipolentwicklung

Die Multipolentwicklung ist die Reihendarstellung zum Beispiel eines Potentials, bei der Multipolmomente verwendet werden. Multipolmomente enthalten üblicherweise Winkelabhängigkeiten und Vielfache des Abstandes zum Ursprung oder deren Inverse. Grundsätzlich liefert die Multipolentwicklung eine exakte Beschreibung des Potentials und konvergiert, falls der Quellterm und der Beobachtungspunkt weit auseinander liegen und einer der beiden nahe dem Ursprung liegt. Eine explizite Darstellung der Koeffizienten und Entwicklungsfunktionen des Einfachschichtoperators findet sich zum Beispiel in [SS04] Abschnitt 7.1.3.2 oder in [OSW06].

7.3 Kopplung

In diesem Abschnitt wird die Kopplung der beiden Verfahren beschrieben. Des Weiteren werden zwei Beispiele vorgestellt. Das Erste zeigt das Verhalten des Codes am Beispiel einer stromdurchflossenen Spule. Beim zweiten Beispiel wird eine Rotationsbewegung im Inneren einer Kugel vorgegeben. Am Ende wird ein kurzer Ausblick auf mögliche weitere Tests und Verbesserungen gegeben.

7.3.1 Gekoppeltes Problem

Das kontinuierliche Problem, das der numerischen Kopplung zugrunde liegt, ist das Folgende: Finde $(\mathbf{u}, \phi, t) \in H_r \times H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c) \times H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)$ so, dass

$$\begin{aligned} (S\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \frac{1}{\mu_0} \langle \phi, T_n \mathbf{v} \rangle_{\partial\Omega_c} &= \text{Rhs} \\ \langle T_n \mathbf{u}, \psi \rangle_{\partial\Omega_c} + \langle \mathcal{D}\phi, \psi \rangle_{\partial\Omega_c} + \langle (-\frac{1}{2}Id + \mathcal{K}')t, \psi \rangle_{\partial\Omega_c} &= 0 \\ \langle (\frac{1}{2}Id - \mathcal{K})\phi, \tau \rangle_{\partial\Omega_c} + \langle \mathcal{V}t, \tau \rangle_{\partial\Omega_c} &= 0 \end{aligned}$$

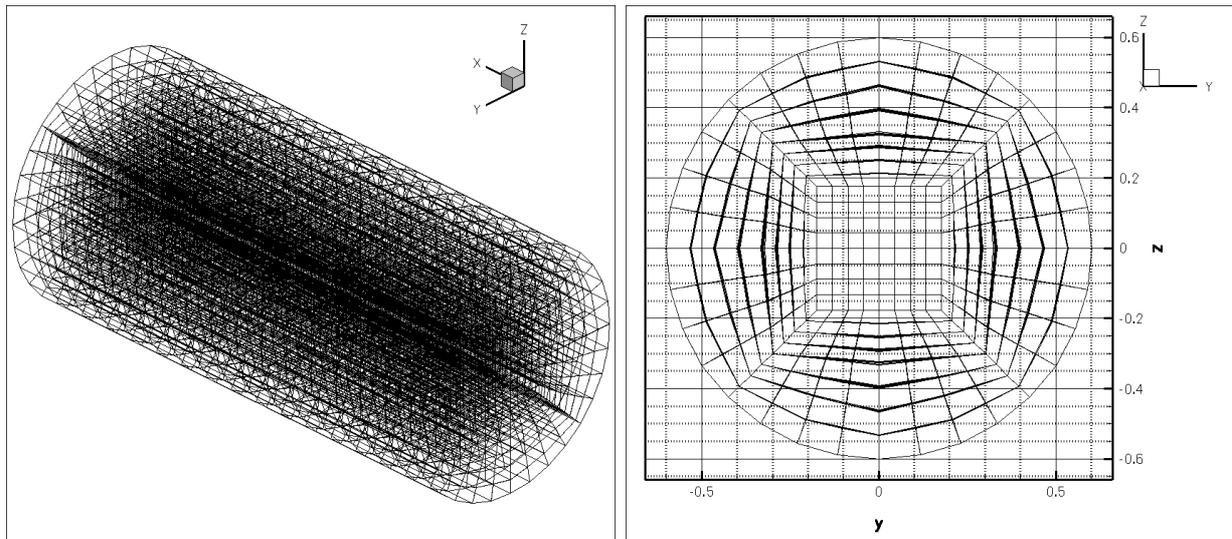
für alle $(\mathbf{v}, \psi, \tau) \in H_r \times H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c) \times H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega_c)$. Dazu muss die Matrix \mathcal{T} mit $\mathcal{T}_{i,j} = \frac{1}{\mu_0} \langle \phi_i, T_n \varphi_j \rangle_{\partial\Omega_c}$ aufgestellt werden. Dabei ist ϕ_i eine Basisfunktion des BEM-Lösungsraums und φ_i Basisfunktion des FEM-Lösungsraums. Diese Matrix koppelt den FEM und den BEM Teil.

7.3.2 Beispiel 1

Beim ersten Beispiel ist das FEM-Gebiet ein Zylinder und der Außenraum ist das BEM-Gebiet. Der Radius des Zylinders beträgt 0.6 Längeneinheiten. Seine Länge ist 2.4 Längeneinheiten. Es wird mit 16544 FEM- und 1154 BEM-Freiheitsgraden gerechnet. Dies entspricht 5120 FEM-Elementen und 2304 BEM-Dreiecken. Das Gitter ist in Abbildung 7.5 zu sehen.

Es wird ein Strömungsfeld mit der Geschwindigkeit

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ -y \end{pmatrix}$$

Abbildung 7.5: Gitter des Zylinders (a) gesamt (b) in der yz -Ebene

in einem Hohlzylinder

$$Z := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid -0.5 \leq x \leq 0.5, 0.2 \leq y^2 + z^2 \leq 0.25 \right\}$$

vorgegeben. Abbildung 7.6 zeigt den Hohlzylinder im zylinderförmigen FEM-Gebiet. Dieses Beispiel soll das Magnetfeld einer stromdurchflossenen Spule simulieren. Dabei ist der Hohlzylinder Z die Spule. Innerhalb des Hohlzylinders Z und dem von ihm umschlossenen Volumen wird die magnetische Permeabilität auf 1000 und die magnetische Leitfähigkeit auf 10 ersetzt. Damit gilt

$$\mu(\mathbf{x}) := \begin{cases} 1000 & \text{für } \mathbf{x} \text{ im Hohlzylinder } Z \text{ und seinem Inneren} \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und}$$

$$\sigma(\mathbf{x}) := \begin{cases} 1000 & \text{für } \mathbf{x} \text{ im Hohlzylinder } Z \text{ und seinem Inneren} \\ 10^{-3} & \text{für } \mathbf{x} \text{ im FEM-Gebiet ohne den Hohlzylinder } Z \text{ und sein Inneres} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Werte im Hohlzylinder und seinem Inneren entsprechen ungefähr den Werten von Baustahl. Durch Metall im Inneren einer Spule wird das Magnetfeld verstärkt. Das Magnetfeld einer stromdurchflossenen Spule entspricht dem eines Stabmagneten. Es ist ein Magnetfeldlinienbild wie in Abbildung 2.1 auf Seite 6 zu erwarten.

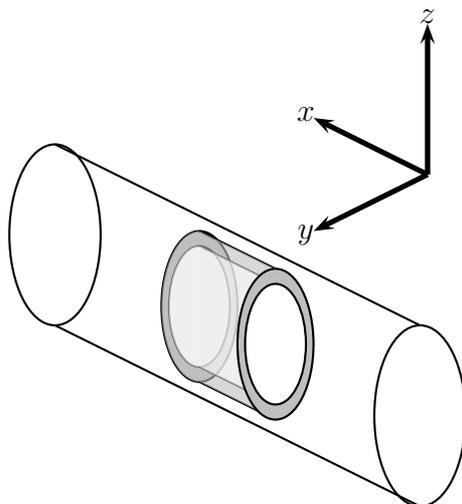


Abbildung 7.6: Hohlzylinder (grau) im zylinderförmigen FEM-Gebiet

Die Startlösung für das Potential \mathbf{u} ist

$$\mathbf{u}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ -y \end{pmatrix}.$$

Die Ergebnisse werden mit Tecplot dargestellt. Tecplot 360 ist eine Software zum Visualisieren von Strömungen und numerischen Simulationen. Es enthält auch nützliche Funktionen, wie die Berechnung der Rotation, gemittelten und interpolierten Werten, etc.. Für die Darstellung der BEM-Lösung wurden 10.000 Punkte verwendet. Die Koordinaten sind in der Ebenen $y = 0$ verteilt:

$$\begin{pmatrix} -10 + 0.2i \\ 0 \\ -10 + 0.2j \end{pmatrix}, \quad i, j \in \{0, \dots, 99\}.$$

Die Punkte sind in der Ebenen äquidistant angeordnet. Der BEM-Code aus Graz bietet eine Routine, um den Gradienten des Potentials im Außenraum, also das Magnetfeld, zu berechnen. Um die Lösung zu visualisieren interpoliert Tecplot diese und die Feldlinien können in der Ebene gezeichnet werden. Dazu werden Ausgangspunkte gewählt und Tecplot zeichnet die Bewegungslinie eines Magneten, der in das Magnetfeld gebracht wird. Dabei berechnet Tecplot sowohl die Bewegungsrichtung vom Ausgangspunkt aus, als auch den Weg, den der Magnet zu diesem Punkt gebracht hätte. Die Linien zeigen also an jedem Punkt die Richtung des Magnetfeldes an. Tecplot stellt eine Routine zur Verfügung, die es ermöglicht mehrere Linien gleichzeitig zu wählen. Es werden zwei Koordinaten gewählt

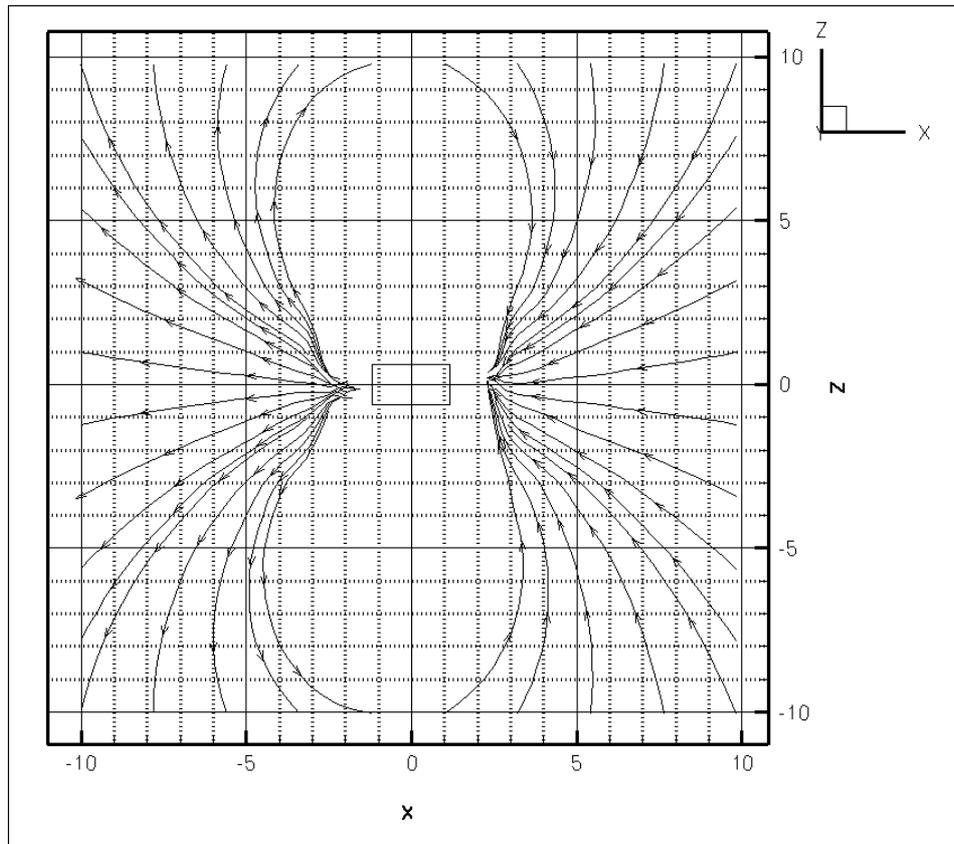


Abbildung 7.7: Magnetfeldlinien der BEM-Lösung in der Ebene $y = 0$. Der Hohlzylinder Z ist durch das Rechteck in der Mitte gekennzeichnet.

und zehn Punkte auf der Verbindungsline, die äquidistant verteilt sind, werden als Ausgangspunkte verwendet.

Abbildung 7.7 zeigt die BEM-Lösung. Es wurden fünf Koordinatenpaare verwendet:

$$\begin{pmatrix} 9.8 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}, \text{ und } \begin{pmatrix} 9.8 \\ 0 \\ 9.8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}, \text{ und } \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 9.8 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 9.8 \end{pmatrix}, \text{ und } \begin{pmatrix} 9.8 \\ 0 \\ 9.8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}, \text{ und } \begin{pmatrix} 9.8 \\ 0 \\ -10 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{ und } \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}, \text{ und } \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Es soll auf das Verhalten im Außenraum geachtet werden. Das Magnetfeld verhält sich wie das Magnetfeld eines Stabmagneten, wie es zu erwarten gewesen ist.

Abbildung 7.8 zeigt die Rotation der FEM-Lösung an verschiedenen Schnitten parallel zur Ebene $x = 0$ im Zylinder.

Die blaue Färbung zeigt einen negativen Wert für die x -Komponente des Magnetfeldes an. Im Inneren des Hohlzylinders Z ist sie betragsmäßig sehr hoch (vgl. Abbildung 7.8 (d)-(f)). Dies rührt daher, dass alle Magnetfeldlinien durch das Innere der Spule laufen und das Magnetfeld dementsprechend groß ist. Parallel zum Zylinder verläuft das Magnetfeld außerhalb in umgedrehter Richtung, was durch die rote Farbe kenntlich gemacht ist.

Die Schnitte 7.8 (a)-(c) enthalten den Hohlzylinder Z nicht. Der Bereich, in dem die x -Komponente des Magnetfelds einen negativen Wert hat, wird größer je weiter der Schnitt vom Zylinder entfernt ist. Der Betrag nimmt rapide ab. Das Magnetfeld fächert sich auf. Am Rand ist eine rote Färbung erkennbar.

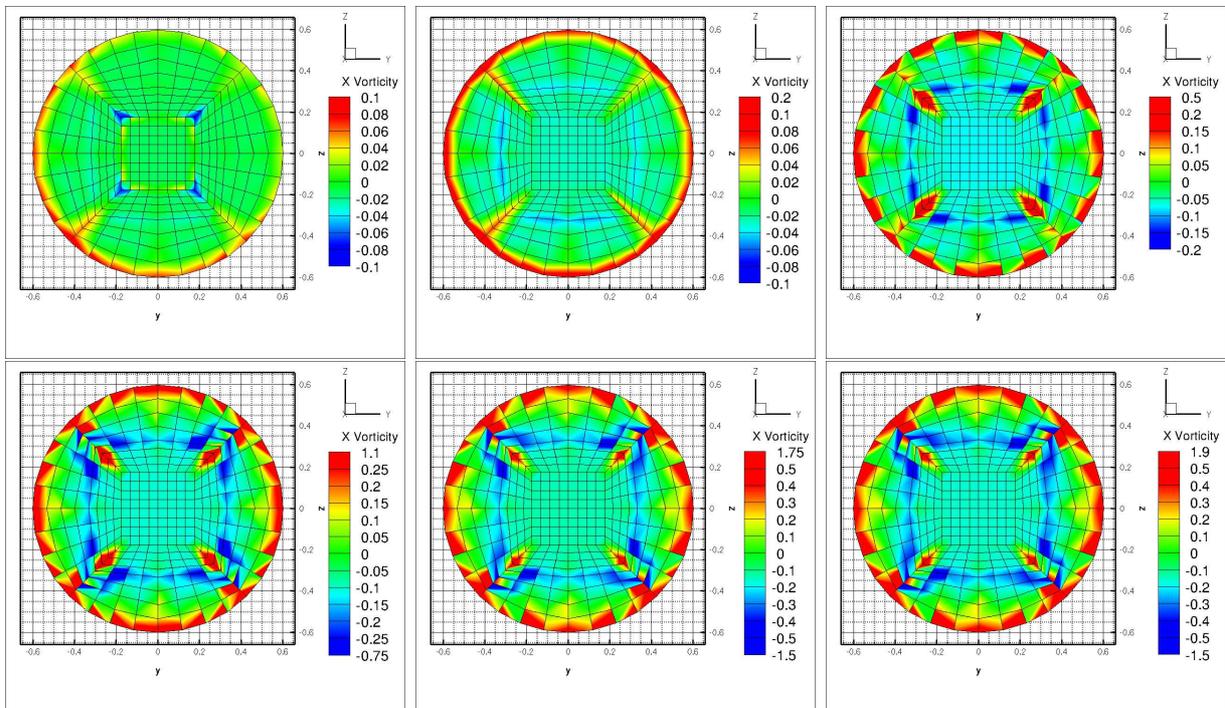


Abbildung 7.8: Magnetfeld in x -Richtung im Zylinder an den Schnittebenen (a) $x=-1.2$, (b) $x=-1$, (c) $x=-0.65$, (d) $x=-0.5$, (e) $x=-0.3$ und (f) $x=0$. Die Skalen variieren zwischen den Abbildungen.

Grundsätzlich zeigt die Lösung das zu erwartende Verhalten. Es ergibt sich ungefähr das Magnetfeld einer stromdurchflossenen Spule. Leider gibt es noch einige Artefakte. Als Fehlerquellen sind zum Einen das Gitter zu nennen. Dieses ist relativ grob und der Zylinder kann damit nicht genügend gut aufgelöst werden. Auch handelt es sich nicht um einen exakten Zylinder. Zum Anderen sind die numerischen Differentiationen, die von Tecplot und dem Code aus Graz durchgeführt werden, eine mögliche Fehlerquelle.

Leider ist es nicht möglich, σ verschwindend klein zu wählen. Der Löser bricht dann nach 100.000 Iterationen ab. Die Rechnungen dauern auf diesem groben Gitter schon relativ lange. Daher wäre es angebracht das Problem vorzukonditionieren. Allerdings gestaltet sich dies auf Grund der Kopplung mit der schnellen Randelementmethode als schwierig.

7.3.3 Beispiel 2

Das FEM-Gebiet beim zweiten Beispiel ist eine durch Quaderelemente approximierte Kugel

$$K := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq 3 \right\}$$

mit Radius 3. Die Elemente sind keine exakten Würfel, sondern Pyramidenstümpfe (vgl. Abbildung 7.9). Das Gitter wird von deal.II erzeugt. Auf dem Außenraum der Kugel wird mit Randelementen gerechnet. Diese Geometrie besitzt 87632 FEM- und 1538 BEM-Freiheitsgrade. Das entspricht 28672 FEM-Elementen und 3072 BEM-Dreiecken.

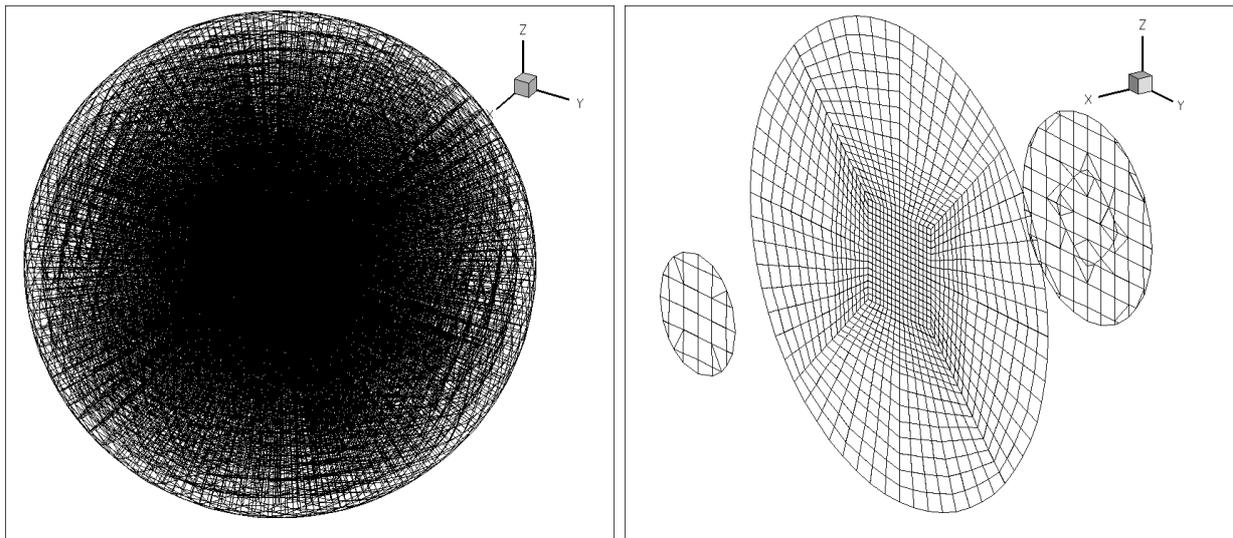


Abbildung 7.9: Gitter der Kugel (a) gesamt (b) Schnitte bei $x=-2.7$, $x=0$ und $x=2.9$.

Es wird zeitabhängig gerechnet und nach 700 Zeitschritten mit Zeitschrittweite 0.01 abgebrochen. Es wird ein Strömungsfeld mit einer Geschwindigkeit

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin^2(2\pi y) \sin(2\pi z)(0.25 - x^2) \\ -\sin(2\pi y) \sin^2(2\pi z)(0.25 - x^2) \end{pmatrix}$$

im Würfel $W = [-0.5, 0.5]^3$ vorgegeben. An den Rändern des Würfels verschwindet die Geschwindigkeit. Innerhalb des Würfels wird die magnetische Permeabilität auf 1000 und

die magnetische Leitfähigkeit auf 10 gesetzt. Diese Werte entsprechen ungefähr den Werten von Baustahl. μ und σ werden im FEM-Gebiet außerhalb des Würfel W auf 10^{-3} gesetzt, das heißt

$$\mu(\mathbf{x}) := \begin{cases} 1000 & \text{für } \mathbf{x} \in W \\ 1 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{und} \quad \sigma(\mathbf{x}) := \begin{cases} 1000 & \text{für } \mathbf{x} \in W \\ 10^{-3} & \text{für } \mathbf{x} \in K \setminus W \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Startlösung für das Potential \mathbf{u} ist

$$\mathbf{u}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ -y \end{pmatrix}.$$

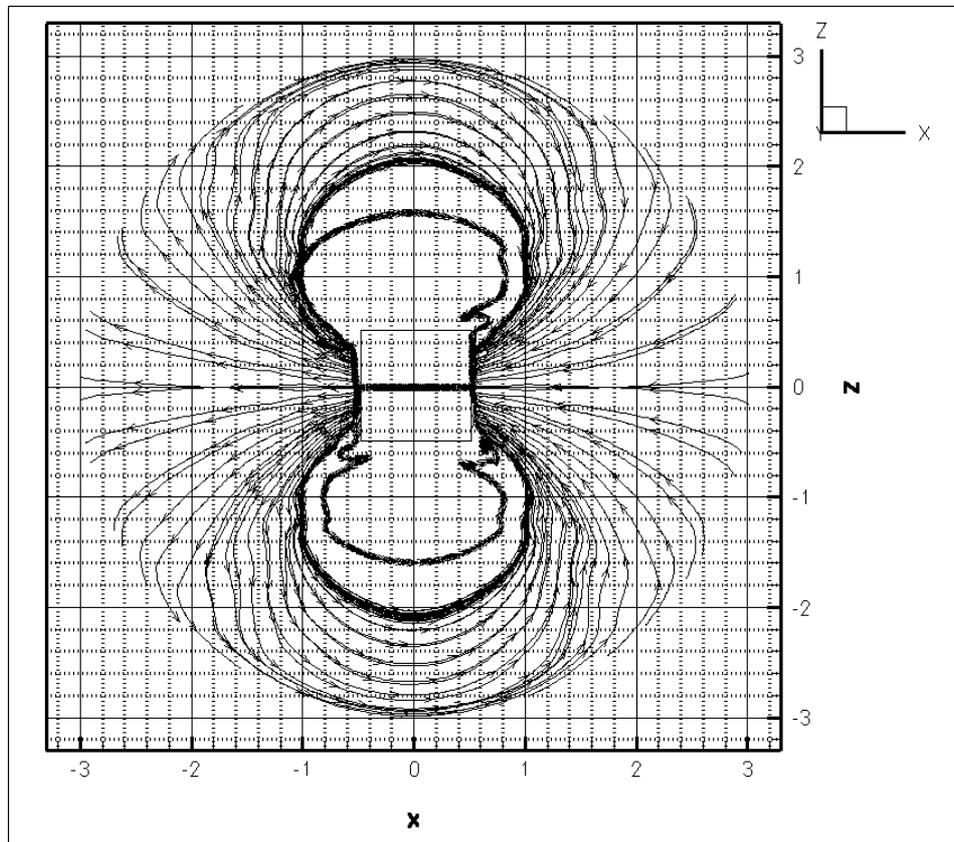


Abbildung 7.10: Magnetfeldlinien in der Kugel in der xz -Ebene. Der Bereich, in dem das Strömungsfeld vorgegeben wird, ist mit dem Quader in der Mitte gekennzeichnet.

Das Beispiel ist sehr ähnlich dem obigen Beispiel. Es sind daher ähnliche Ergebnisse zu erwarten. Die erste Abbildung 7.10 zeigt Magnetfeldlinien im Innenraum zum Zeitpunkt

$t = 2.7$. Wie im vorherigen Beispiel wurden wieder Ausgangspunkte für die Linien gewählt, wobei jeweils 50 Linien zwischen den beiden Punkten gezeichnet wurden.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \pm 1.41 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \pm 1.41 \end{pmatrix}.$$

Es ist sehr deutlich, dass sich das Magnetfeld außen ähnlich dem Magnetfeld eines Stabmagneten verhält. In Abbildung 7.11 und 7.12 ist das Magnetfeld in x -Richtung bzw. in y -Richtung dargestellt.

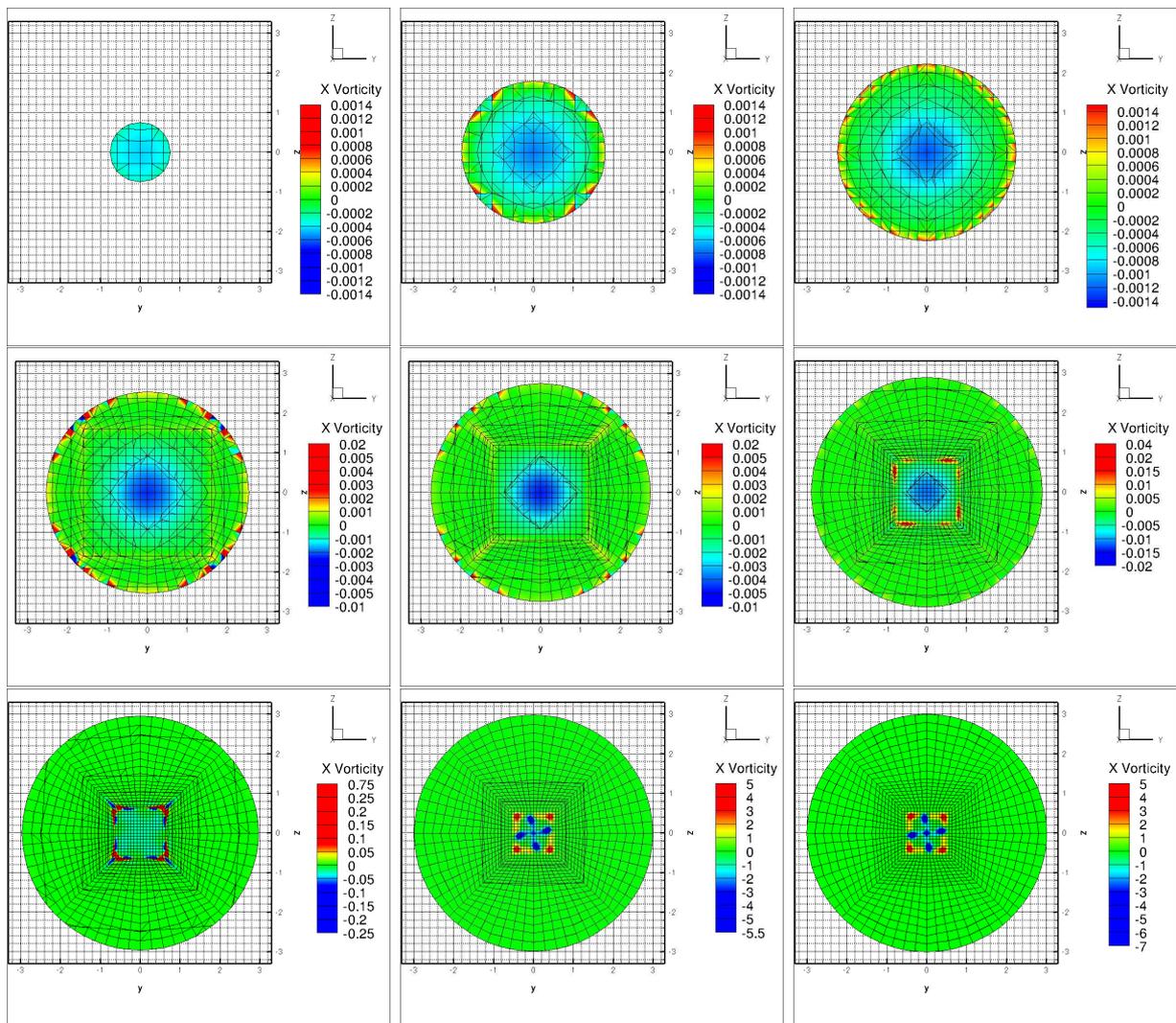


Abbildung 7.11: Magnetfeld in x -Richtung in der Kugel an den Schnittebenen (a) $x=-2.9$, (b) $x=-2.4$, (c) $x=-2.2$, (d) $x=-2$, (e) $x=-1.6$, (f) $x=-1.2$, (g) $x=-0.8$, (h) $x=-0.5$, (i) $x=-0.3$ und (j) $x=0$. Die Skalen variieren zwischen den Abbildungen.

Um das Beispiel etwas genauer zu untersuchen, ist in Abbildung 7.11 die Rotation des Potentials \mathbf{u} , das heißt des Magnetfeldes, in x -Richtung zum gleichen Zeitpunkt dargestellt. Es ist ersichtlich, dass die Lösung vom Gitter beeinflusst wird, vor allem dort, wo die Form der finiten Elemente stark von der eines Quaders abweicht. Auch in diesem Beispiel verstärkt sich das Magnetfeld in x -Richtung mit zunehmender Nähe zum Quader. Die Magnetfeldlinien werden gebündelt.

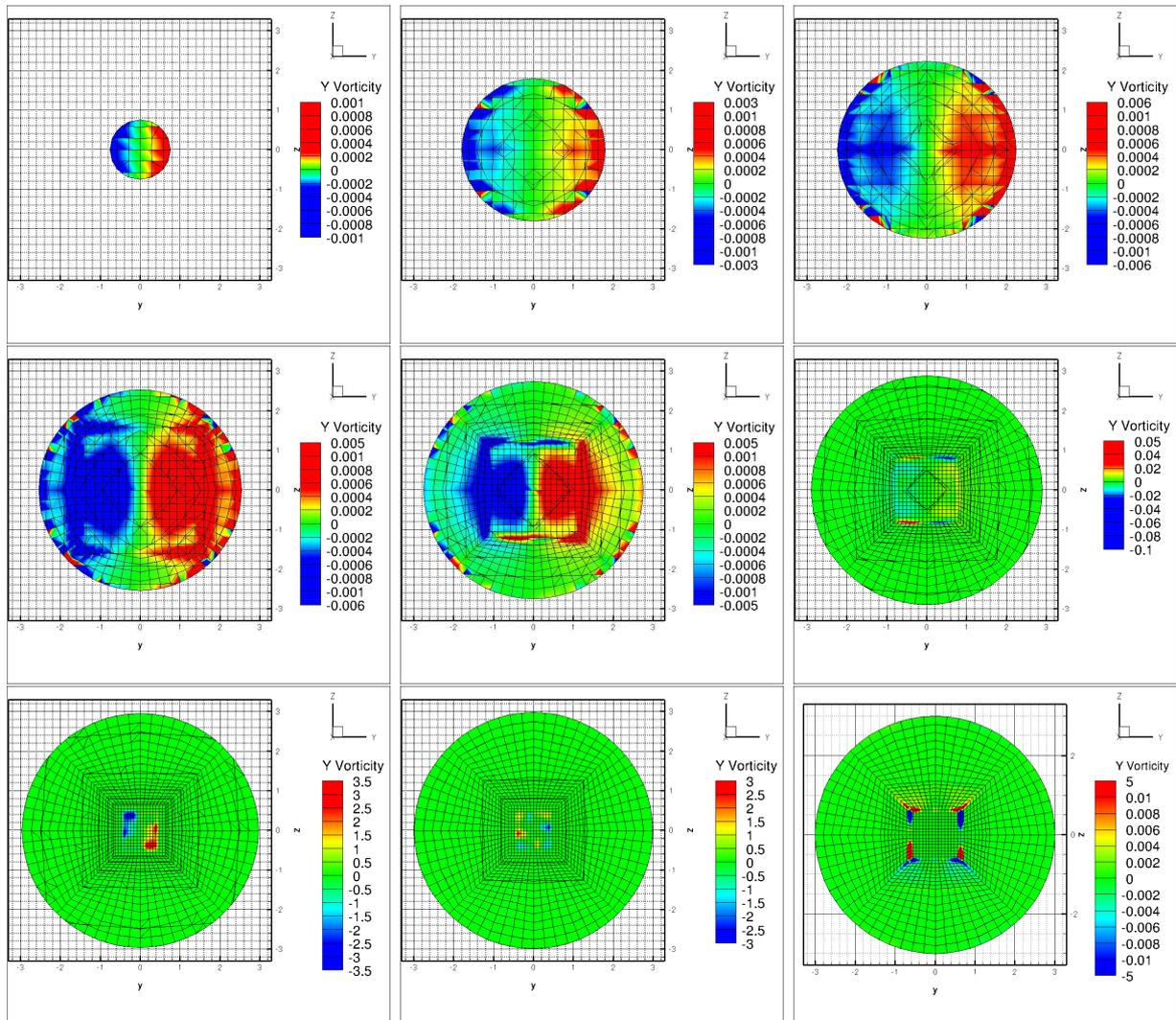


Abbildung 7.12: Magnetfeld in y -Richtung in der Kugel an den Schnittebenen (a) $x = -2.9$, (b) $x = -2.4$, (c) $x = -2.2$, (d) $x = -2$, (e) $x = -1.6$, (f) $x = -1.2$, (g) $x = -0.8$, (h) $x = -0.5$, (i) $x = -0.3$ und (j) $x = 0$. Die Skalen variieren zwischen den Abbildungen.

In Abbildung 7.12 wird die Rotation in y -Richtung, also das Magnetfeld in y -Richtung, zum gleichen Zeitpunkt $t = 2.70$ dargestellt. Die Schnittebenen sind die gleichen wie in Abbildung 7.11. In Abbildung 7.12 (a) und (b) ist das Magnetfeld in y -Richtung an den

Stellen $x = -2.9$ und $x = -2.4$ sichtbar. Nahe bei der x -Achse sollte sich das Magnetfeld leicht radial von der x -Achse fortbewegen. Dies ist dadurch gekennzeichnet, dass die eine Hälfte des Schnittes rot und die andere blau ist. In der Mitte hat das Magnetfeld keinen Anteil in y -Richtung sondern nur in z -Richtung. Die ist durch die grüne Farbe, welche dem Wert 0 entspricht, ersichtlich.

Bei einem Schnitt, der näher am Zylinder liegt, sollte das Magnetfeld in y -Richtung nahe bei der x -Achse und am Rand nicht so stark sein und dazwischen etwas zunehmen. Dort ist der Umkehrpunkt der Magnetfeldlinien. Leider sind die Werte des Magnetfeldes in y -Richtung relativ stark am Rand. Bei $x = 0$ sollten alle Magnetfeldlinien parallel zur x -Achse sein. Damit verschwindet Magnetfeld in y -Richtung. Dies ist gut erkennbar aus Abbildung 7.12 (j).

7.3.4 Ausblick

Die beiden Beispiele zeigen das Verhalten, welches bei den Tests zu erwarten war. Allerdings gibt es einige Punkte, die näher untersucht werden könnten.

1. Die Rechnungen dauern sehr lange. Eine Reduktion der Rechenzeit könnte entweder durch die Parallelisierung der Prozesse und oder oder die Vorkonditionierung des Systems gelingen. Dann kann auf feineren Gittern gerechnet werden.
2. Bisher wurden nur Probleme mit stationären Grenzlösungen betrachtet. Weitere Untersuchungen wären hier sinnvoll. Es könnten zum Beispiel Probleme mit periodischen Lösungen betrachtet werden.
3. Alle Beispiele, sowohl zum reinen Innenraumproblem als auch zum gekoppelten Problem, sind ohne den nichtlinearen Term gerechnet worden. Die Theorie beinhaltet die Turbulenzmodellierung. Es wäre daher sinnvoll, diese auch numerisch zu untersuchen.

Unter Berücksichtigung der Motivation der Arbeit wäre es wünschenswert ein realistischeres Dynamo-Problem zu untersuchen. Die bisherigen Tests sind recht einfacher Natur. Hierzu könnten die Arbeiten von [CZZ05] und [GLLN07] herangezogen werden. Eine Publikation in diese Richtung ist in Vorbereitung.

Kapitel 8

Zusammenfassung und Ausblick

Auf strenges Ordnen, raschen Fleiß
Erfolgt der allerschönste Preis;
Dass sich das Werk vollende,
Genügt ein Geist für tausend Hände.

Johann Wolfgang von Goethe (1749-1832),
deutscher Dichter, aus Faust II.

Das letzte Kapitel dieser Arbeit fasst die Ergebnisse der Arbeit zusammen und gibt eine Idee, an welcher Stelle weitergearbeitet werden könnte.

8.1 Zusammenfassung

Ziel dieser Arbeit war es, ein kinematisches Dynamo-Problem theoretisch zu untersuchen und einen FEM-BEM-Code für dessen Anwendung zu schreiben. Dazu wurde der Ansatz von [CZZ05] und [GLLN07] mittels einer FEM-BEM-Kopplung auf den Ganzraum erweitert.

Das Kapitel 2 startete mit der Herleitung dieses Problems. Dazu wurden die Maxwell-Gleichungen näher betrachtet. Sie bilden die Grundlage für elektromagnetische Phänomene. Das Gebiet wurde in zwei disjunkte Gebiete aufgespalten: ein beschränktes Gebiet mit elektrischer Leitfähigkeit und ein unbeschränktes Gebiet mit verschwindender Leitfähigkeit. Im Innenraum wurde eine Turbulenzmodellierung angewendet. Dadurch wurde das Problem nichtlinear. In beiden Gebieten wurden separate Potentialansätze für das Magnetfeld vorgestellt. Im Außenraum vereinfachte sich das Problem dadurch zur Laplace-Gleichung. Dies ermöglichte die Verwendung eines BEM-Verfahrens im diskreten Fall.

Die zwei folgenden Kapitel widmeten sich der Herleitung der Variationsformulierung und

der Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung derselben. Die benötigten Hilfsmittel wurden bereitgestellt. Nach einer zeitlichen Skalierung des Problems konnte die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung mit Hilfe eines Resultats aus der Theorie nichtlinearer Evolutionsgleichungen gezeigt werden.

In Kapitel 5 wurde die Diskretisierung im Ort vorgenommen. Dazu wurde eine symmetrische Kopplung von finiten Elementen und Randelementen nach [KS02] verwendet. Auf Grund der Struktur des Problems wurden Nédélec-Elemente für den Innenraum benutzt. Der Hauptsatz über maximal monotone Operatoren lieferte die eindeutige Lösbarkeit des semidiskreten Problems. Eine erste Analyse des Fehlers zwischen kontinuierlicher und semidiskreter Lösung lieferte eine Quasioptimalitätsabschätzung.

Das vollständig diskretisierte Problem wurde in Kapitel 6 untersucht. Dazu wurde das implizite Euler-Verfahren als zeitliche Diskretisierung verwendet. Die Existenz und Eindeutigkeit des vollständig diskretisierten Problems wurde mittels des Hauptsatzes über stark monotone Operatoren bewiesen. Es wurde ein Projektor P_h zwischen kontinuierlichem und diskretem Problem eingeführt. Mit seiner Hilfe konnte ein Konvergenzresultat gezeigt werden.

In Kapitel 7 wurden die theoretischen Ergebnisse mittels numerischer Tests validiert. Für den Innenraum wurde ein FEM-Code mittels der Bibliothek deal.II verwendet. Der BEM-Code stammt aus der Arbeitsgruppe von Olaf Steinbach in Graz. Zunächst wurde der reine Innenraumfall betrachtet. Einige Beispiele untermauern die Korrektheit des FEM-Codes. Im Anschluß wurde die Kopplung der beiden Verfahren vollführt und zwei Beispiele gerechnet. Das erste Beispiel simuliert das Magnetfeld einer stromdurchflossenen Spule. Beim zweiten Beispiel wird eine Rotationsbewegung im Inneren einer Kugel vorgegeben. Beide Beispiele zeigen tendenziell das richtige Verhalten.

8.2 Ausblick

Natürlich gibt es viele Möglichkeiten die Arbeit fortzusetzen. Der Code sollte für ein Dynamo-Problem näher untersucht werden. Insbesondere die Erweiterung auf das nicht-lineare Problem und die Vorkonditionierung des Problems sind hier von Interesse. Eine Möglichkeit die Theorie zu erweitern ist die Kopplung mit den Navier-Stokes-Gleichungen (vgl. [GLBL06]). Hier soll allerdings ein alternativer Weg skizziert werden, der der Motivation etwas näher steht. Es geht um das inverse Problem.

Zwei Probleme heißen zueinander invers, falls die Formulierung des einen Problems teilweise oder vollständig die Lösung des anderen Problems erfordert und umgekehrt. Eines der beiden Probleme wird das direkte und eines das inverse Problem genannt. Die Wahl der Benennung ist willkürlich. Oft ist eines der Probleme besser untersucht oder einfacher zu behandeln. Dann wird dieses Problem das direkte Problem genannt.

Ausgangspunkt sind die Maxwell-Gleichungen (2.12)-(2.14).

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \times \frac{1}{\mu} \mathbf{B} &= \sigma \left(\mathbf{E} + \mathbf{w} \times \mathbf{B} + \frac{Rf}{1 + s |\mathbf{B}|^2} \mathbf{B} \right), \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0.\end{aligned}$$

Direktes Problem: Gegeben sei eine Geschwindigkeit \mathbf{w} und gesucht werden das Magnetfeld \mathbf{B} und das elektrische Feld \mathbf{E} .

Inverses Problem: Gegeben seien \mathbf{B} und \mathbf{E} und gesucht wird das Geschwindigkeitsfeld \mathbf{w} .

Oft sind die inversen Probleme schwieriger zu untersuchen als die direkten. Zunächst wird die Korrektheit betrachtet.

Definition 8.1 (Korrekt gestellte Probleme)

Sei $A : U \subset X \rightarrow V \subset Y$ ein Operator von einer Teilmenge U eines normierten Raumes X in eine Teilmenge V eines normierten Raumes Y . Das Problem

$$A\varphi = f \tag{8.1}$$

heißt korrekt gestellt, falls

1. das Problem eine Lösung besitzt ($A : U \rightarrow V$ ist surjektiv),
2. die Lösung eindeutig bestimmt ist ($A : U \rightarrow V$ ist injektiv) und
3. die Lösung stetig von den Eingangsdaten abhängt ($A^{-1} : V \rightarrow U$ ist stetig).

Falls das Problem nicht korrekt gestellt ist, so heißt es inkorrekt oder schlecht gestellt.

Diese Definition geht auf den französischen Mathematiker Jacques Hadamard (08.12.1865 - 17.10.1963) zurück.

Wie beim direkten Problem muss auch beim inversen Problem zunächst die Wohlgestelltheit untersucht werden. Ist das Problem korrekt gestellt, so gibt es im Regelfall stabile numerische Algorithmen um das Problem zu lösen. Falls der Problemoperator nicht stetig ist, helfen Regularisierungsverfahren. Dieser Fall ist von großer Bedeutung in der Theorie inverser Probleme.

Definition 8.2 (Regularisierungsverfahren)

Seien X und Y normierte Räume und sei $A : X \rightarrow Y$ ein injektiver beschränkter linearer

Operator. Eine Familie von beschränkten, linearen Operatoren $R_\alpha : Y \rightarrow X$, $\alpha > 0$, heißen ein Regularisierungsverfahren für den Operator A , falls

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} R_\alpha A \varphi = \varphi$$

für alle $\varphi \in X$. Der Parameter α heißt Regularisierungsparameter.

Das bedeutet, dass das Regularisierungsverfahren φ in (8.1) durch

$$\varphi_\alpha^\delta := R_\alpha f^\delta,$$

wobei f^δ gestörte Daten mit Fehlerlevel δ sind, das heißt $\|f - f^\delta\| \leq \delta$. Mit Hilfe der Dreiecksungleichung ergibt sich

$$\|\varphi_\alpha^\delta - \varphi\| \leq \|R_\alpha\| \|f^\delta - f\| + \|R_\alpha f - \varphi\| = \delta \|R_\alpha\| + \|R_\alpha A \varphi - \varphi\|$$

α muss geeignet gewählt werden. Je kleiner α in Abhängigkeit von δ gewählt wird, desto besser ist die Approximation der exakten Lösung, das heißt der zweite Term wird klein. Allerdings wird für die Stabilität des Verfahrens ein großes α benötigt, um den ersten Term klein zu machen. Es muss also ein Kompromiss zwischen beiden Forderungen gefunden werden. Es gibt eine große Auswahl an unterschiedlichen Regularisierungsverfahren. Eine weit verbreitete Methode ist die Tikhonov-Regularisierung.

Sollte sich das hier betrachtete Problem als sinnvolle Simulation für das Magnetfeld der Erde erweisen, was ebenfalls eine kritische Auseinandersetzung Wert ist, so ist die Analyse des inversen Problems ebenfalls interessant. Aus der Untersuchung können Rückschlüsse auf das Innere anderer Planeten und Sterne gezogen werden. Bei diesen kann zur Zeit nur das Magnetfeld gemessen werden.

Literaturverzeichnis

- [ABFG01] D. N. Arnold, D. Boffi, R. S. Falk, and L. Gastaldi. Finite element approximation on quadrilateral meshes. *Commun. Numer. Methods Eng.*, 17(11):805–812, 2001.
- [Alt02] H. W. Alt. *Lineare Funktionalanalysis. Eine anwendungsorientierte Einführung. 4. überarbeitete und erweiterte Auflage.* Berlin: Springer. xiv., 2002.
- [AV96] A. Alonso and A. Valli. Some remarks on the characterization of the space of tangential traces of $H(\text{rot}; \Omega)$ and the construction of an extension operator. *Manuscr. Math.*, 89(2):159–178, 1996.
- [AV97] A. Alonso and A. Valli. A domain decomposition approach for heterogeneous time-harmonic Maxwell equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 143(1-2):97–112, 1997.
- [BC01a] A. Buffa and P. jun. Ciarlet. On traces for functional spaces related to Maxwell’s equations. I: An integration by parts formula in Lipschitz polyhedra. *Math. Methods Appl. Sci.*, 24(1):9–30, 2001.
- [BC01b] A. Buffa and P. jun. Ciarlet. On traces for functional spaces related to Maxwell’s equations. II: Hodge decompositions on the boundary of Lipschitz polyhedra and applications. *Math. Methods Appl. Sci.*, 24(1):31–48, 2001.
- [BCS02] A. Buffa, M. Costabel, and D. Sheen. On traces for $\mathbf{H}(\text{curl}, \Omega)$ in Lipschitz domains. *J. Math. Anal. Appl.*, 276(2):845–867, 2002.
- [Ber89] C. Bernardi. Optimal finite-element interpolation on curved domains. *SIAM J. Numer. Anal.*, 26(5):1212–1240, 1989.
- [BF02] E. G. Blackman and G. B. Field. New dynamical mean-field dynamo theory and closure approach. *Phys. Rev. Lett.*, 89(26):265007, Dec 2002.
- [BKS08] A. Brandenburg, K.-H. Rädler, and M. Schrunner. Scale dependence of alpha effect and turbulent diffusivity. *Astron. Astrophys.*, 482(3):739–746, 2008.

- [Bre05] J. Breuer. *Schnelle Randelementmethoden zur Simulation von elektrischen Wirbelstromfeldern sowie ihrer Wärmeproduktion und Kühlung*. Doktorarbeit an der Universität Stuttgart, 2005.
- [CH96] F. Cattaneo and D. W. Hughes. Nonlinear saturation of the turbulent α effect. *Phys. Rev. E*, 54(5):R4532–R4535, Nov 1996.
- [CK98] D. Colton and R. Kress. *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory. 2nd ed.* Applied Mathematical Sciences. 93. Berlin: Springer. xii, 334 p., 1998.
- [Cos87] M. Costabel. Symmetric Methods for the Coupling of Finite Elements and Boundary Elements. *Boundary Elements IX.*, 1:411–420, 1987.
- [Cos88] M. Costabel. Boundary integral operators on Lipschitz domains: Elementary results. *SIAM J. Math. Anal.*, 19(3):613–626, 1988.
- [CR72] P.G. Ciarlet and P.-A. Raviart. Interpolation theory over curved elements, with applications to finite element methods. *Computer Methods appl. Mech. Engin.*, 1:217–249, 1972.
- [CZ99] P. jun. Ciarlet and Jun Zou. Fully discrete finite element approaches for time-dependent Maxwell’s equations. *Numer. Math.*, 82(2):193–219, 1999.
- [CZZ05] K. H. Chan, K. Zhang, and J. Zou. Spherical Interface Dynamos: Mathematical Theory, Finite Element Approximation and Application. *Technical Report CUHK-2005-10 (331), Department of Mathematics, The Chinese University of Hong Kong, Hong Kong*, 2005.
- [Dav01] P. A. Davidson. *An introduction to magnetohydrodynamics*. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge: Cambridge University Press. xviii, 2001.
- [Dei71] W. Deinzer. Zur Theorie des solaren Magnetfeldes. *Mitteilungen der Astronomischen Gesellschaft*, 30:67–74, 1971.
- [Dem04] W. Demtröder. *Experimentalphysik 2. Elektrizität und Optik. 3. überarbeitete und erweiterte Auflage*. Springer-Lehrbuch. Berlin: Springer. xix, 2004.
- [Dub90] F. Dubois. Discrete vector potential representation of a divergence-free vector field in three-dimensional domains: Numerical analysis of a model problem. *SIAM J. Numer. Anal.*, 27(5):1103–1141, 1990.
- [Emm04] E. Emmrich. *Gewöhnliche und Operator-Differentialgleichungen. Eine integrierte Einführung in Randwertprobleme und Evolutionsgleichungen für Studierende*. Wiesbaden: Vieweg. x., 2004.
- [FGM11] R. S. Falk, P. Gatto, and P. Monk. Hexahedral $H(\text{div})$ and $H(\text{curl})$ finite elements. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 45:115–143, 2011.

- [Fis04] M. Fischer. *The Fast Multipole Boundary Element Method and its Application to Structure-Acoustic Field Interaction*. Doktorarbeit an der Universität Stuttgart, 2004.
- [FT78] C. Foias and R. Temam. Remarques sur les équations de Navier-Stokes stationnaires et les phénomènes successifs de bifurcation. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci., IV. Ser.*, 5:29–63, 1978.
- [GLBL06] J.-F. Gerbeau, C. Le Bris, and T. Lelièvre. *Mathematical methods for the magnetohydrodynamics of liquid metals*. Numerical Mathematics and Scientific Computation. Oxford: Oxford University Press. xiii, 305, iv., 2006.
- [GLLN06] J.-L. Guermond, R. Laguerre, J. Léorat, and C. Nore. A finite element interior penalty method for MHD in heterogeneous domains. *European Conference on Computational Fluid Dynamics ECCOMAS CFD 2006, P. Wesseling, E. Oñate and J. Périaux (Eds)*, 2006.
- [GLLN07] J.-L. Guermond, R. Laguerre, J. Léorat, and C. Nore. An interior penalty Galerkin method for the MHD equations in heterogeneous domains. *J. Comput. Phys.*, 221(1):349–369, 2007.
- [GR86] V. Girault and P.-A. Raviart. *Finite element methods for Navier-Stokes equations. Theory and algorithms. (Extended version of the 1979 publ.)*. Springer Series in Computational Mathematics, 5. Berlin etc.: Springer-Verlag. X., 1986.
- [Hip02] R. Hiptmair. Symmetric coupling for eddy current problems. *SIAM J. Numer. Anal.*, 40(1):41–65, 2002.
- [Hsi06] G. C. Hsiao. Boundary element methods—an overview. *Appl. Numer. Math.*, 56(10-11):1356–1369, 2006.
- [Iva08] O. Ivanyshyn. *Nonlinear Boundary Integral Equations in Inverse Scattering*. HARLAND media, Lichtenberg, 2008.
- [Kra80] Krause, F. and Rädler, K.-H. *Mean-field magnetohydrodynamics and dynamo theory. Licensed ed.* Oxford etc.: Pergamon Press., 1980.
- [Kre99] R. Kress. *Linear integral equations. 2nd ed.* Applied Mathematical Sciences. 82. New York, NY: Springer. xiv., 1999.
- [Kre09] R. Kress. *Skript zu Inverse Probleme*. Georg-August-Universität Göttingen, 2009.
- [KS02] M. Kuhn and O. Steinbach. Symmetric coupling of finite and boundary elements for exterior magnetic field problems. *Math. Methods Appl. Sci.*, 25(5):357–371, 2002.

- [Kul99] R. M. Kulsrud. A critical review of galactic dynamos. *Annu. Rev. Astron. Astrophys.*, 37:37–64, 1999.
- [LM68] J. L. Lions and E. Magenes. *Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. 1.* Paris: Dunod XIX, 1968.
- [Lub07] G. Lube. *Skript zu Numerik instationärer partieller Differentialgleichungen.* Georg-August-Universität Göttingen, 2007.
- [Lub08] G. Lube. *Skript zu Nichtlineare Funktionalanalysis und Differentialgleichungen.* Georg-August-Universität Göttingen, 2008.
- [Mof78] H. K. Moffatt. *Magnetic field generation in electrically conducting fluids.* Cambridge University Press, 1978.
- [Mon94] P. Monk. On the p - and hp -extension of Nédélec’s curl-conforming elements. *J. Comput. Appl. Math.*, 53(1):117–137, 1994.
- [Mon03] P. Monk. *Finite element methods for Maxwell’s equations.* Numerical Mathematics and Scientific Computation. Oxford: Oxford University Press. xiv., 2003.
- [Néd80] J.-C. Nédélec. Mixed finite elements in \mathbb{R}^3 . *Numer. Math.*, 35(2), 1980.
- [Néd86] J.-C. Nédélec. A new family of mixed finite elements in \mathbb{R}^3 . *Numer. Math.*, 50:57–81, 1986.
- [OKS09] G. Of, M. Kaltenbacher, and O. Steinbach. Fast multipole boundary element method for electrostatic field computations. *COMPEL*, 28(2):304–319, 2009.
- [Oss98] M. Ossendrijver. *Skript zu Dynamotheorie.* 1998.
- [OSW06] G. Of, O. Steinbach, and W.L. Wendland. The fast multipole method for the symmetric boundary integral formulation. *IMA J. Numer. Anal.*, 26(2):272–296, 2006.
- [Pac01] B. G. Pachpatte. On some fundamental integral inequalities and their discrete analogues. *JIPAM, J. Inequal. Pure Appl. Math.*, 2:315–341, 2001.
- [Pic84] R. Picard. An elementary proof for a compact imbedding result in generalized electromagnetic theory. *Math. Z.*, 187:151–164, 1984.
- [PTSL10a] R. A. Prato Torres, E. P. Stephan, and F. Leydecker. A FE/BE coupling for the 3D time-dependent eddy current problem. I: A priori error estimates. *Computing*, 88(3-4):131–154, 2010.

- [PTSL10b] R. A. Prato Torres, E. P. Stephan, and F. Leydecker. A FE/BE coupling for the 3D time-dependent eddy current problem. II: A posteriori error estimates and adaptive computations. *Computing*, 88(3-4):155–172, 2010.
- [Räd07] K.-H. Rädler. Mean-field dynamos. In D. Gubbins and E. Herrero-Bevera, editors, *Encyclopedia of Geomagnetism and Paleomagnetism*, pages 192–199. Springer, 2007.
- [Růž04] M. Růžička. *Nichtlineare Funktionalanalysis. Eine Einführung*. Berlin: Springer. xii., 2004.
- [SML07] E. P. Stephan, M. Maischak, and F. Leydecker. An *hp*-adaptive finite element/boundary element coupling method for electromagnetic problems. *Comput. Mech.*, 39(5):673–680, 2007.
- [SS04] S. Sauter and C. Schwab. *Randelementmethoden. Analyse, Numerik und Implementierung schneller Algorithmen*. Stuttgart: Teubner. xvi., 2004.
- [ST83] M. Sermange and R. Temam. Some mathematical questions related to the MHD equations. *Commun. Pure Appl. Math.*, 36:635–664, 1983.
- [Ste03a] O. Steinbach. *Numerische Näherungsverfahren für elliptische Randwertprobleme. Finite Elemente und Randelemente*. Advances in Numerical Mathematics. Stuttgart: Teubner., 2003.
- [Ste03b] D. J. Stevenson. Planetary magnetic fields. *Earth and Planetary Science Letters*, 208(1-2):1–11, 2003.
- [Wla72] W. S. Wladimirow. *Gleichungen der mathematischen Physik*. Hochschulbücher für Mathematik. Bd. 74. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften., 1972.
- [Zei90] E. Zeidler. *Nonlinear functional analysis and its applications. II/B: Nonlinear monotone operators. Transl. from the German by the author and by Leo F. Boron*. New York etc.: Springer-Verlag. xv., 1990.

Symbolverzeichnis

Operatoren

\tilde{A}	Operator für den linearen Anteil	33
A	Operator der linearen Anteile im Gebiet nach der Skalierung	37
A_t	Operator der Zeitableitung	33
A_{nl}	Operator des nichtlinearen Anteils	33
D	modifizierter hypersingulärer Operator	33
\mathcal{K}	modifizierter adjungierter Doppelschichtoperator	33
\mathcal{V}	modifizierter Einfachschichtoperator	33
S	Operator der linearen Anteile nach der Skalierung	37
γ_t	Spuroperator	24
γ_N	Spuroperator der Rotation	24
γ_D	tangentiale Komponente auf dem Rand	24
γ_n	Spuroperator für H_d -Funktionen	24
\mathfrak{E}	Einfachschichtpotential	28
\mathfrak{D}	Doppelschichtpotential	28
V	Randoperator	29
K	Randoperator	29
K'	Randoperator	29
W	Randoperator	29

Problemgrößen

B	magnetische Induktion, auch Magnetfeld genannt	6
E	elektrisches Feld	6
w	Geschwindigkeitsfeld im Inneren	9
μ	magnetische Permeabilität	10
μ_c	magnetische Permeabilität im inneren Gebiet	10
μ_0	magnetische Permeabilität im Außengebiet	10
σ	elektrische Leitfähigkeit	8
$f = f(x, t)$	Funktion, die die Turbulenz beschreibt	17
R	Konstante des Turbulenzterms	17
s	beschreibt die Skalierung der Nichtlinearität	17
Ω_c	Innenraumgebiet	17
Ω_E	Außenraumgebiet	17
Φ	Potential für B im Außenraum	18
u	Potential für B im Innenraum	20

Konstanten

λ_D	Koerzitivitätskonstante des Operators \mathcal{D} , skaliert mit $\frac{1}{\mu_0}$	41
λ_V	Koerzitivitätskonstante des Operators \mathcal{V} , skaliert mit $\frac{1}{\mu_0}$	41
$C_K(t)$	Koerzitivitätskonstante von $D(t)$	43
c_{Uu}	untere Schranke für $\ \mathbf{w}(t)\ _{L^\infty(\Omega_c)}$	40
c_{Uo}	obere Schranke für $\ \mathbf{w}(t)\ _{L^\infty(\Omega_c)}$	40
c_{Fu}	untere Schranke für $\ f(t)\ _{L^\infty(\Omega_c)}$	40
c_{Fo}	obere Schranke für $\ f(t)\ _{L^\infty(\Omega_c)}$	40
c_{Fo}	Koerzitivitätskonstante für $\ \mathbf{w}\ _{L^\infty(\Omega_c)}^2 + R^2 \ f\ _{L^\infty(\Omega_c)}^2$	40
σ_1	untere Schranke für σ im inneren Gebiet	20
σ_2	obere Schranke für σ im inneren Gebiet	20
μ_1	untere Schranke für μ im inneren Gebiet	20
μ_2	obere Schranke für μ im inneren Gebiet	20
c_R	Beschränktheitskonstante des Randterms	41
$c_d(t)$	Beschränktheitskonstante des Operators $D(t)$	42
L	Lipschitzkonstante des Operators $S + \mathcal{A}_{nl}$	43
c_{sm}	Konstante der starken Monotonie von $S + \mathcal{A}_{nl}$	53

Räume

$W_h(\Omega)$	Finite-Element-Raum für Tetraeder-Elemente erster Ordnung	52
$W_r^2(\Omega)$	Sobolevraum der $H^1(\Omega)$ -Funktionen, deren Rotation ebenfalls eine $H^1(\Omega)$ -funktion ist	52
H_t	Lösungsraum für das kontinuierliche gekoppelte Problem	33
H_r	Raum der L^2 -Funktionen, deren Rotation ebenfalls eine L^2 -Funktion ist	22
H_d	Raum der L^2 -Funktionen, deren Divergenz ebenfalls eine L^2 -Funktion ist	22
$C([a, b]; W)$	Raum der über dem Zeitintervall $[a, b]$ stetigen W -Funktionen	26
$C^m([a, b]; W)$	Raum der über dem Zeitintervall $[a, b]$ m -mal stetig-differenzierbaren W -Funktionen	26
$L^p(0, T; W)$	Raum der über dem Zeitintervall $[0, T]$ L^p -integrierbaren W -Funktionen	27
$H^1(0, T; W)$	Raum der über dem Zeitintervall $[0, T]$ L^p -integrierbaren W -Funktionen, deren Ableitung aus $L^2(0, T; W^*)$ kommt	27
R_k	Polynomraum für Tetraeder-Elemente	46
P_k	Raum der Polynome mit Rang höchstens k	46
\tilde{P}_k	Raum der homogenen Polynome vom Grad k	46

Sonstiges

a_{nl}	Linearform des nichtlinearen Anteils	32
$U(x, y)$	Fundamentallösung der Laplace-Gleichung	18
κ	beschreibt die Abweichung des Operators $\tilde{\mathcal{A}} + \mathcal{A}_{nl}$ von einer Koerzitivitätsbedingung	36

Index

- äußeres Problem, 17
- Ampèresches Gesetz, 10
- Calderòn-Gleichungen, 28, 30
- Dynamo-Effekt, 13
- elektrische Leitfähigkeit, 9
- elektrisches Feld, 6
- elektromotive Kraft, 15
- Euler Verfahren, implizit, 62
- Faradaysches Gesetz, 10
- Feld
 - elektrisch, 6
 - homogen, 15
 - isotrop, 15
 - magnetisch, 7
 - spiegelsymmetrisch, 15
- Gesetz
 - Ampèresches, 10
 - Faradaysches, 10
 - Ohmsches, 9
- Implizites Euler Verfahren, 62
- Induktionsspannung, 10
- inneres Problem, 17
- Lebesgue-Räume vektorwertiger Funk., 26
- Leitfähigkeit, elektrische, 9
- Lorentzkraft, 9
- Magnetfeld, 7
- magnetische Permeabilität, 10
- Maxwell-Gleichungen, 11
- Nédélec Elemente, 45
- Nédélec Elemente auf Hexaedern, 49
- Nédélec Elemente auf Tetraedern
 - erster Art, 47
 - zweiter Art, 48
- Ohmsches Gesetz, 9
- Operator
 - hemistetig, 37
 - koerzitiv, 38
 - monoton, 38
 - stark monoton, 38
- Permeabilität, magnetische, 10
- Randintegraloperatoren, 28
- Regularisierungsverfahren, 109
- Sobolev-Räume vektorwertiger Funk., 27
- Spuroperator, 24
- Stetige und diff. vektorwertige Funk., 26
- Wirbelstärke, 12
- Wirbeltransportgleichung, 13

Danksagung

Keine Schuld ist dringender, als die, Dank zu sagen.

Marcus Tullius Cicero (106 - 43 v.Chr.),
römischer Politiker, Anwalt und Schriftsteller

An erster Stelle gilt mein Dank Professor Dr. Gert Lube für seine Unterstützung bei der Anfertigung dieser Arbeit. Ohne seine Hilfe wäre dies nicht möglich gewesen.

Dem Graduiertenkolleg 1023: Identifikation von mathematischen Modellen danke ich für die finanzielle Unterstützung während meiner Studien.

Ich möchte Timo Johannes Heister, Johannes Löwe und Jochen Schulz für ihre Hilfe bei kleinen oder großen Fragen danken. Insbesondere Jochen und Timo gebührt für ihre tatkräftige Mitarbeit bei der Implementierung mein Dank.

Interessante Gespräche mit Professor Dr. Olaf Steinbach, Dr. Sabine Zaglmayr und Dr. Günther Of aus Graz haben viel zu dieser Arbeit beigetragen. Ihnen gilt mein herzlicher Dank. Sie haben mir freundlicherweise ihren BEM-Code überlassen. Die Hilfe von Günther Of bei der Kopplung der beiden Codes rechne ich ihm hoch an.

Ich möchte meinen Eltern für ihre Unterstützung danken.

Abschließend möchte ich allen danken, die ich nicht genannt habe und die zur Erstellung dieser Arbeit beigetragen haben.

Lebenslauf

Persönliche Daten

Name	Wiebke Lemster
Geburtsdatum	29.07.1983
Geburtsort	Hamburg
Nationalität	deutsch

Schulische Ausbildung

1990–1994	Grundschule Wiemersdorf
1994–2003	Jürgen-Fuhlendorf Schule Bad Bramstedt
2003	Abitur

Akademische Ausbildung

10/2003–09/2005	Grundstudium Mathematik an der Universität Hamburg
10/2005–04/2008	Hauptstudium Mathematik an der Georg-August-Universität, Göttingen
04/2008	Diplom
04/2008–05/2011	Promotionsstudium Mathematik an der Georg-August-Universität, Göttingen
05/2011	Disputation