Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. G. Plonka-Hoch

SS 2010

Funktionalanalysis
(Blatt 1)

Aufgabe 1
Sei M eine nichtleere Menge.
Ist

$$d(x,y) := \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases} \qquad (x, y \in M)$$

eine Metrik? Wie sehen die abgeschlossenen Kugeln und die Cauchyfolgen in M aus? (3P.)

Aufgabe 2
Sei M eine nichtleere Menge. Man zeige: Ist $d(x,y)$ eine Metrik in M, so ist auch

$$d_1(x,y) = \frac{d(x,y)}{1 + d(x,y)}$$

eine Metrik in M. (3P.)

Aufgabe 3
Es sei m der Raum der beschränkten reellen Zahlenfolgen, d.h.

$$m := \{\{x_i\}_{i\in\mathbb{N}} : \exists \ M > 0 : |x_i| < M \ \forall \ i \in \mathbb{N}\} \ ,$$

mit der Metrik $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup_{i\in\mathbb{N}} |x_i - y_i|$ für alle $\mathbf{x} = \{x_i\}_{i\geq 1}, \mathbf{y} = \{y_i\}_{i\geq 1} \ \in m$.
Zeigen Sie, dass m vollständig ist. (4P.)

Aufgabe 4
Sei X die Menge aller Zahlenfolgen und

$$d(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \frac{|x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}.$$

Zeigen Sie, dass d eine Metrik ist und dass (X, d) ein vollständiger metrischer Raum ist. (5P.)

Rückgabe: Montag, 26.04.2010 (in der Vorlesung)