Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. G. Plonka-Hoch SS 2010

Funktionalanalysis
(Blatt 2)

Aufgabe 1

a) Ist $(\mathbb{N}, d_1)$ mit $d_1(m,n) = \frac{|m-n|}{mn}$ ein vollständiger metrischer Raum?

b) Ist $(\mathbb{N}, d_2)$ mit
$$d_2(m,n) = \begin{cases} 0 & m = n, \\ 1 + \frac{1}{m+n} & m \neq n \end{cases}$$
ein vollständiger metrischer Raum?

Geben Sie gegebenen Fall für a) und b) die Vervollständigungen an. (5P.)

Aufgabe 2

Konstruieren Sie in $(\mathbb{N}, d_2)$ mit der Metrik d_2 aus Aufgabe 1 eine Folge ineinandergeschachtelter nichtleerer abgeschlossener Kugeln, die keinen gemeinsamen Punkt besitzen.
Hinweis: Benutzen Sie z.B. die Kugeln $S(n, 1 + \frac{1}{2n})$.
Warum gilt hier das Prinzip der Intervallschachtelung nicht? (3P.)

Aufgabe 3

a) Sei (X, d) ein metrischer Raum und $A, B, C \subset X$. Zeigen Sie:
Ist A dicht in B und B dicht in C, so ist A dicht in C.

b) Eine Teilmenge U eines metrischen Raumes (X, d) heißt nirgends dicht, wenn $\overline{U}$ keine offene Kugel enthält.
Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen im metrischen Raum (X, d) äquivalent sind:
(i) Eine abgeschlossene Menge $F \subset X$ ist nirgends dicht.
(ii) Das Komplement $X \setminus F$ ist dicht in X. (4P.)

Aufgabe 4

Es sei die Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ durch $f(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ und $y_j = \sum_{k=1}^n a_{jk}\, x_k + b_j$, $j = 1, \ldots, n$ gegeben.
Geben Sie hinreichende Bedingungen für a_{jk} und b_j an, unter denen f in den folgenden Metriken kontrahierend ist:

a) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_\infty = \max_i |x_i - y_i|$,

b) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$,

c) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 = (\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2)^{\frac{1}{2}}$.

(4P.)

Rückgabe: Montag, 03.05.2010 (in der Vorlesung)