Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. G. Plonka-Hoch

SS 2010

Funktionalanalysis
(Blatt 3)

Aufgabe 1
Zeigen Sie:

a) Sei $K \subset X \subset Y$. Dann ist K kompakt in X genau dann, wenn K kompakt in Y ist.

b) Ist K kompakt und F abgeschlossen in einem metrischen Raum (X, d), so ist $K \cap F$ kompakt. (4P.)

Aufgabe 2
Ein Punkt x in einem metrischen Raum X heißt isolierter Punkt von X, wenn ein $\epsilon > 0$ existiert, so dass die offene Kugel $B(x, \epsilon)$ keinen weiteren Punkt von X enthält. Zeigen Sie:

a) Jede in X überall dichte Menge A enthält sämtliche isolierten Punkte von X.

b) Die Menge der isolierten Punkte eines separablen metrischen Raumes ist höchstens abzählbar. (4P.)

Aufgabe 3
Sind folgende metrische Räume separabel?

a) Die Menge l_p $(1 < p < \infty)$ aller reellen Zahlenfolgen $\mathbf{x} = (x_n)_{n=1}^{\infty}$, für die die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p$ konvergiert mit $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup_{n \in N} |x_n - y_n|$,

b) Die Menge alle Nullfolgen mit der Metrik $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n|$.

(4P.)

Aufgabe 4
Es sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und T eine Abbildung von X in X. Außerdem sei T^n eine Kontraktion. Man zeige, dass $x = T(x)$ genau eine Lösung x besitzt. (4P.)

Rückgabe: Montag, 10.05.2010 (in der Vorlesung)