Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. G. Plonka-Hoch

SS 2010

Funktionalanalysis
(Blatt 4)

Aufgabe 1

a) Sei U eine kompakte Menge im metrischen Raum (X, d) und sei f eine stetige Abbildung von U in einen metrischen Raum (Y, d'). Man zeige, dass $f(U)$ in Y kompakt ist.

b) Es sei $C[0, 1]$ die Menge aller stetigen reellen Funktionen $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Man zeige, dass $C[0, 1]$ mit der Metrik $d(f, g) := \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$ ein vollständiger metrischer Raum ist. (4P.)

Aufgabe 2

Zeigen Sie: Jeder Teilraum eines separablen metrischen Raumes ist separabel.
(4P.)

Aufgabe 3

Zeigen Sie: Kompakte Mengen im metrischen Raum X sind beschränkt und abgeschlossen. (4P.)

Aufgabe 4

Sei X ein kompakter metrischer Raum. Sei $U \subset C(X)$ eine Teilmenge der Menge $C(X)$ aller stetigen reellwertigen Funktionen auf X mit den folgenden Eigenschaften: U ist gleichmäßig beschränkt, d.h.

$$\exists K > 0 : |u(x)| \leq K, \quad \forall x \in X, \quad \forall u \in U;$$

U ist gleichgradig stetig, d.h., für alle $\epsilon > 0$ existiert eine Zahl $\delta > 0$ mit

$$|u(x) - u(y)| < \epsilon \quad \forall\, x, y \in X : \; d(x, y) < \delta, \; \forall u \in U.$$

Zeigen Sie: U ist relativ kompakt. (4P.)

Rückgabe: Montag, 17.05.2010 (in der Vorlesung)