Universität Duisburg-Essen
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. G. Plonka-Hoch

SS 2010

Funktionalanalysis
(Blatt 5)

Aufgabe 1
Für $f \in C^1[0,1]$ sei

$$\begin{aligned} |||f|||_1 &:= |f(0)| + \|f'\|_\infty, \\ |||f|||_2 &:= \max\{\, |\int_0^1 f(t)dt|, \|f'\|_\infty\}, \\ |||f|||_3 &:= (\int_0^1 |f(t)|^2 dt + \int_0^1 |f'(t)|^2 dt)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

a) Man zeige, dass $|||.|||_j$ jeweils eine Norm auf $C^1[0,1]$ ist $(j = 1,2,3)$.

b) Ist $|||.|||_1$ äquivalent zu $|||f||| := \|f\|_\infty + |f'\|_\infty$? (5P.)

Aufgabe 2
Sei l^p $(1 \le p < \infty)$ der lineare Raum der Zahlenfolgen $\mathbf{x} = (x_j)_{j=1}^\infty$ mit der Norm $\|\mathbf{x}\|_p = (\sum_{i\in\mathbb{N}} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$. Man zeige für $1 \le p \le q < \infty$ die Beziehung $l^p \subset l^q$, d. h.

$$\|\mathbf{x}\|_q \le \|\mathbf{x}\|_p \qquad \forall\, \mathbf{x} \in l^p.$$

Tipp: Behandle zunächst den Fall $\|\mathbf{x}\|_p = 1$. (4P.)

Aufgabe 3
Sei m der Raum der beschränkten Zahlenfolgen versehen mit der Norm $\|\mathbf{x}_\infty\| = \sup_{i\in\mathbb{N}}|x_i|$. Sei außerdem $l_p (p \in \{1,2\})$ mit der Norm $\|\mathbf{x}\|_p = (\sum_{i\in\mathbb{N}} |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ gegeben. Finden Sie Beispiele für Folgen $\{\mathbf{x}_n\}_{n\ge1}$ mit $\mathbf{x}_n = \{x_{nk}\}_{k\ge1}$, so dass

a) $\mathbf{x}_n \in m \cap l_1, \{\mathbf{x}_n\}_{n\ge1}$ konvergiert in m aber nicht in l_1.

b) $\mathbf{x}_n \in m \cap l_2, \{\mathbf{x}_n\}_{n\ge1}$ konvergiert in m aber nicht in l_2.

c) $\mathbf{x}_n \in l_2 \cap l_1, \{\mathbf{x}_n\}$ konvergiert in l_2 aber nicht in l_1. (3P.)

Aufgabe 4
Konvergieren in $C[0,1]$ mit der Norm $\|f\|_\infty := \max_{t\in[0,1]} |f(t)|$ die Folgen $f_n(t) = t^n - t^{n-1}$ und $f_n = t^n - t^{2n}$? (4P.)

Rückgabe: Montag, 31.05.2010 (in der Vorlesung)